Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Os polinômios centrais de algumas álgebras associativas Lie nilpotentes

por

Silvio Sandro Alves de Macedo

Brasília
2016

Os polinômios centrais de algumas álgebras associativas Lie nilpotentes

por

Silvio Sandro Alves de Macedo

Tese apresentada ao Programa de Pós–Graduação do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Álgebra.

Orientador: Prof. Dr. Alexei Krassilnikov

Brasília
2016

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Macedo, Silvio Sandro Alves
MM141p Os polinômios centrais de algumas álgebras associativas Lie nilpotentes / Silvio Sandro Alves Macedo; orientador Alexei Krassilnikov. -- Brasília, 2016.
101 p.

Tese (Doutorado - Doutorado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2016.

1. identidade polinomial. 2. polinômio central. 3. T-subespaços. 4. álgebra associativa Lie nilpotente. I. Krassilnikov, Alexei, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Os polinômios centrais de algumas álgebras associativas Lie nilpotentes

Por

Silvio Sandro Alves de Macedo

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Brasília, 26 de agosto de 2016.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Alexei Krassilnikov – Orientador (MAT-UnB)

Prof. Dr. Dimas José Gonçalves (UFScar)

Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov (UNICAMP)

Profa. Dra. Aline Gomes da Silva Pinto (UnB)

Profa. Dra. Irina Sviridova (UnB)

Silvio Sandro Alves de Macedo

Este trabalho é dedicado a você mesmo, caro leitor.

Agradecimentos

Como a lista de pessoas que me ajudaram é longa e o espaço não tão longo assim, vou citar apenas aquelas que estiveram mais próximas nesses últimos anos. Eudes, Raimundo e Jorge, obrigado pelo incentivo quando eu ainda era um aluno especial. O curso de Análise Funcional do Prof. Carlos Alberto ficará guardado na minha memória. Obrigado também aos ex-alunos de doutorado Alex (Paraíba), José Carlos (Zé), Edimilson, Keidna, Ilana, Claud e Bruno Trindade por ajudarem na preparação do meu exame de qualificação.

Gostaria de agradecer ao meu orientador, Profº Alexei, por sua experiência, ensinamentos e paciência infinita.

Gostaria de agradecer à Banca Examinadora: Prof. Dimas, Prof. Plamen, Profa. Aline, Profa. Irina e Prof. Victor. As correções apontadas por vocês foram muito valiosas. Tive o prazer de ter sido aluno do Prof. Dimas. Sua didática para ensinar ideias difíceis é tão grande que diminui o atrito a quase zero.

Vieram lá do Mato Grosso para assistir a minha defesa a minha mãe Madalena, o meu pai Bonifácio, a minha madrinha Lenira e o meu tio Daniel. O momento mais feliz da minha infância foi na casa da minha madrinha, fazendo bagunça. O meu tio eu chamava de Danielzão porque antes ele parecia grande. O seu coração continua enorme.

Obrigado ao meu amigo Adriano Cavalcante Bezerra, pela amizade, pelos conselhos, pelas caronas e pelas piadas quase todas com graça.

Obrigado ao meu amigo Agenor Freitas de Andrade. Conheci ele no ano de 2004 no curso de Graduação em Matemática na UFMT, fizemos o mestrado na UFG e agora terminamos o doutorado quase juntos aqui na Unb. Na metade da Graduação lembro de você entrando na sala e dizendo - Cara, vou ser pai! Era a Ana Júlia, depois veio a Carol e o Eduardo. Você se saiu muito bem. A Jeisa (Psicóloga) veio assitir a minha defesa. Isso que é amizade.

Por fim, gostaria de agradecer à equipe maravilhosa do IFG Campus Luziânia. Estive afastado por três anos das minhas atividades para dedicar ao doutorado. Agradeço aos gestores desse período pelo apoio total e irrestrito: Prof. José Carlos, Profa. Oneida e Profa. Marizângela (Mary).

O Coelho Branco pôs os óculos.
— Por onde devo começar, Vossa Magestade? — perguntou ele.
— Começa pelo princípio, — disse o Rei, muito sério — e continua até chegares ao fim. Depois para.

Lewis Carroll,
As Aventuras de Alice no País das Maravilhas.

Resumo

Nesta tese estudamos os polinômios centrais de algumas álgebras associativas Lie nilpotentes universais. Elas são definidas por $Q_n = F\langle X\rangle/T^{(n)}$ (e também são conhecidas como álgebras associativas Lie nilpotentes relativamente livres) onde F é um corpo, $F\langle X\rangle$ é a álgebra associativa livre unitária, livremente gerada pelo conjunto enumerável $X = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ e $T^{(n)}$ é o ideal bilateral de $F\langle X\rangle$ gerado pelos comutadores $[a_1, \ldots, a_n]$, $a_i \in F\langle X\rangle$. O nosso primeiro resultado principal é uma descrição dos polinômios centrais da álgebra Q_4 quando $char(F) = 3$. Nosso segundo resultado principal é uma descrição dos polinômios centrais da álgebra Q_4 quando $char(F) = 2$.

Os polinômios centrais da F-álgebra Q_4 quando $char(F) \neq 2,3$ foram descritos por Grishin (2012). Se $char(F) \neq 3$, então $[x_1, x_2][x_3, x_4, x_5]$ pertence a $T^{(4)}$ (Volichenko, 1978). Isso implica que a imagem de $T^{(3)}$ em Q_4 é central nessa álgebra, o que permite reduzir o problema da descrição dos polinômios centrais da álgebra Q_4 para um problema sobre elementos da álgebra Q_3. Porém, se $char(F) = 3$, então $[x_1, x_2][x_3, x_4, x_5]$ não pertence a $T^{(4)}$ (Krasilnikov, 2013). Por essa razão, a descrição dos polinômios centrais da F-álgebra Q_4 quando $char(F) = 3$ é mais sofisticada do que quando $char(F) \neq 3$. Se $char(F) = 2$, então $x_0^2 + T^{(4)}$ não é central em Q_4. Isso implica que a descrição dos polinômios centrais de Q_4 é ligeiramente diferente do caso de $char(F) \neq 2,3$.

O nosso terceiro resultado principal é uma descrição dos geradores da álgebra Q_4 como espaço vetorial quando $char(F) > 3$. Esse resultado é uma generalização do resultado de Grishin. Também obtivemos uma descrição dos polinômios hipercentrais das álgebras Q_4 e Q_5. Um polinômio hipercentral é uma generalização de polinômio central. Essa generalização foi introduzida por Laue (1984).

Palavras–chave

identidade polinomial; polinômio central; T-subespaço; álgebra associativa Lie nilpotente

Abstract

In this PhD thesis we study the central polinomials of some universal Lie nilpotent associative algebras. They are defined by $Q_n = F\langle X\rangle/T^{(n)}$ (and also are called relatively free Lie nilpotent associative algebras) where F is a field, $F\langle X\rangle$ is the free unital associative algebra freely generated by the infinite countable set $X = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ and $T^{(n)}$ is the two-sided ideal of $F\langle X\rangle$ generated by the commutators $[a_1, \ldots, a_n]$, $a_i \in F\langle X\rangle$. Our first main result is a description of the central polynomials of the algebra Q_4 when $char(F) = 3$. Our second main result is a description of the central polynomials of the algebra Q_4 when $char(F) = 2$.

The central polynomials of the F-algebra Q_4 when $char(F) \neq 2,3$ have been described by Grishin (2012). If $char(F) \neq 3$, then $[x_1,x_2][x_3,x_4,x_5]$ belongs to $T^{(4)}$ (Volichenko, 1978). This implies that the image of $T^{(3)}$ in Q_4 is central in this algebra that allows us to reduce the problem of description of the central polynomials of the algebra Q_4 to a problem about elements of the algebra Q_3. However, if $char(F) = 3$, then $[x_1,x_2][x_3,x_4,x_5]$ does not belong to $T^{(4)}$ (Krasilnikov, 2013). For this reason the description of the central polynomials of the F-algebra Q_4 when $char(F) = 3$ is more sophisticated than in the case when $char(F) \neq 3$. If $char(F) = 2$, then $x_0^2 + T^{(4)}$ is not central in Q_4. This implies that the description of the central polynomials of Q_4 is slightly different from the case $char(F) \neq 2,3$.

Our third main result is a description of generators of the algebra Q_4 as a vector space when $char(F) > 3$. This result is a generalization of result of Grishin's result. We also obtain a description of the hipercentral polynomials of the algebras Q_4 and Q_5. A hipercentral polynomial is a generalization of a central polynomial. This generalization was introduced by Laue (1984).

Keywords

polynomial identity; central polynomial; T-subspace; Lie nilpotent associative algebra

Sumário

Introdução

A área da matemática na qual esta tese está situada é álgebra. Mais precisamente, fazemos uma contribuição para a teoria que estuda álgebras que satisfazem alguma identidade polinomial. Tais álgebras são chamadas de PI-álgebras (do inglês *Polynomial Identity*) e formam uma classe abrangente de álgebras, que incluem algumas álgebras muito importantes para outras áreas da ciência, como as álgebras de matrizes e as álgebras de Grassmann (ou álgebras exteriores).

À menos que se diga o contrário, as álgebras consideradas neste trabalho serão sempre associativas e unitárias. As definições formais dos conceitos apresentados nesta introdução encontram-se no Capítulo 1.

Seja A uma álgebra sobre um corpo F. Um polinômio $f(x_1,\ldots,x_n)$ nas variáveis não comutativas $x_1,\ldots,x_n$ com coeficientes em F é uma *identidade polinomial* para a álgebra A se $f(a_1,\ldots,a_n)=0$ para quaisquer elementos $a_1,\ldots,a_n\in A$.

Apesar da ideia de identidade polinomial aparecer implicitamente em trabalhos anteriores, o interesse geral em PI-álgebras começou após a publicação de um artigo de Kaplansky [30] em 1948; esse trabalho está inserido no que hoje é chamada de teoria estrutural de PI-álgebras, que visa obter informações sobre a estrutura de uma álgebra quando se sabe que ela satisfaz alguma identidade polinomial.

Em 1950, Amitsur e Levitzki [1] provaram por métodos puramente combinatórios que o *polinômio padrão de grau* $2n$

$$s_{2n}(x_1,\ldots,x_{2n})=\sum_{\sigma\in S_{2n}}(-1)^{\sigma}x_{\sigma(1)}\ldots x_{\sigma(2n)}$$

é uma identidade polinomial de grau minimal para a álgebra de matrizes $n\times n$ com entradas em um corpo qualquer. Esse trabalho inaugurou uma nova abordagem às PI-álgebras, sendo o principal objetivo a descrição das identidades polinomiais de uma dada álgebra.

Seja $F\langle X\rangle$ a álgebra dos polinômios nas variáveis não comutativas $X=\{x_0,x_1,x_2,\ldots\}$ com coeficientes no corpo F. O conjunto $Id(A)$ de todas as identidades polinomiais de uma álgebra A forma um ideal bilateral de $F\langle X\rangle$. Mais ainda, $Id(A)$ é fechado por todos os endomorfismos de $F\langle X\rangle$. Ideais de $F\langle X\rangle$ com essa propriedade são chamados de T*-ideais*. Observe que o estudo de T-ideais se reduz ao estudo de identidades polinomiais. Mais precisamente, se I é um T-ideal de $F\langle X\rangle$ e $A = F\langle X\rangle/I$, então $I = Id(A)$.

Um T-ideal I é gerado por um conjunto $S \subseteq F\langle X\rangle$ se I for o menor T-ideal de $F\langle X\rangle$ que contém S. Um T-ideal é *finitamente gerado* quando é gerado por um conjunto finito.

Antes de continuar, vamos definir uma álgebra que desempenha um papel muito importante em PI-álgebras.

Sejam F um corpo infinito de característica $\neq 2$ e V um espaço vetorial sobre F com base enumerável $e_1, e_2, \ldots$. A álgebra de Grassmann infinitamente gerada e unitária de V, denotada por E, é a álgebra associativa gerada por $e_1, e_2, \ldots$ e com relações $e_ie_j = -e_je_i$ para quaisquer i e j.

São poucas as álgebras para as quais se conhece uma descrição completa das suas identidades polinomiais. Uma lista quase completa delas é

$$E, E \otimes E, M_2(F) \text{ e } U_n(F),$$

onde $E \otimes E$ é o produto tensorial da álgebra de Grassmann E; $M_2(F)$ e $U_n(F)$ são respectivamente a álgebra de matrizes 2×2 e a álgebra de matrizes triangulares superiores $n \times n$, ambas com entradas no corpo F. Mesmo nessa lista, as identidades de algumas álgebras não são conhecidas para todos os corpos nos quais elas estão definidas. Para mais detalhes consulte [13].

Uma questão se coloca: podem as identidades polinomiais de uma álgebra serem descritas "de maneira finita"? Mais precisamente: é todo T-ideal de $F\langle X\rangle$ finitamente gerado como um T-ideal? Quando a característica do corpo F é 0, esse é o famoso Problema de Specht, proposto por Specht [42] em 1950.

Diversos casos particulares do Problema de Specht foram resolvidos nos anos seguintes mas uma prova completa (afirmativa) só foi dada em 1987 por Kemer, após uma série de artigos (veja [31]). Entretanto, sobre um corpo F de característica $p > 0$, existem T-ideais de $F\langle X\rangle$ que não são finitamente gerados. Isso foi provado em 1999 por Belov [6], Grishin [24] e Shchigolev [40]. A construção desses T-ideais faz uso de T*-subespaços* de $F\langle X\rangle$ não finitamente gerados, construídos por Grishin [24] para $p = 2$ e por Shchigolev [41] para $p > 2$.

Seja $Z(A)$ o centro de uma álgebra A. Dizemos que $f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ é um *polinômio central* de A se $f(a_1, \ldots, a_n) \in Z(A)$ para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$.

O conjunto $C(A)$ de todos os polinômios centrais de A forma um subespaço vetorial de $F\langle X\rangle$. Mais ainda $C(A)$ é fechado por todos os endomorfismos de $F\langle X\rangle$. Subespaços vetoriais de $F\langle X\rangle$ com essa propriedade são chamados de T*-subespaços*.

Ao contrário de T-ideais, o estudo dos T-subespaços não se reduz ao estudo dos polinômios centrais. Mais precisamente, existem T-subespaços I de $F\langle X\rangle$ para os quais não existe uma álgebra A tal que $I = C(A)$ (veja [20, Observação 1]).

Um T-subespaço I é gerado por um conjunto $S \subseteq F\langle X\rangle$ se I for o menor T-subespaço de $F\langle X\rangle$ que contém S. Um T-subespaço é *finitamente gerado* quando é gerado por um conjunto finito.

Resultados semelhantes àqueles de T-ideais foram obtidos para T-subespaços. Se F é um corpo de característica 0, então todo T-subespaço de $F\langle X\rangle$ é finitamente gerado como um T-subespaço; esse resultado foi provado por Shchigolev [39], em 2001.

Entretanto, sobre um corpo F de característica $p > 0$, existem T-subespaços de $F\langle X\rangle$ que não são finitamente gerados como T-subespaços. Além dos exemplos citados acima, foi mostrado recentemente (veja [4, 7]) que o T-subespaço dos polinômios centrais da álgebra de Grassmann (sobre um corpo de característica $p > 2$) não é finitamente gerado como um T-subespaço (detalhes adiante).

Seja f um polinômio central de uma álgebra A. Se f não é uma identidade polinomial de A e também não possui termos escalares, dizemos que f é um *polinômio central próprio* de A. Na literatura, com frequência, "polinômio central" significa "polinômio central próprio"(veja [13]).

O interesse por polinômios centrais começou em 1956, quando Kaplansky [29] perguntou se a álgebra de matrizes $M_n(F)$, com $n > 2$, possuía algum polinômio central próprio. A resposta afirmativa para o problema proposto por Kaplansky foi dada independentemente por Formanek [17], em 1972 e por Razmyslov [38], em 1973. Eles apresentaram dois métodos diferentes para a construção de polinômios centrais da álgebra $M_n(F)$ (veja [13] para uma exposição dos dois métodos).

A partir daí, vários outros polinômios centrais para a álgebra de matrizes foram obtidos. Entretanto, uma descrição completa dos polinômios centrais de $M_n(F)$ é conhecida apenas quando $n = 2$ e o corpo F é infinito de característica $\neq 2$. Quando a característica de F é 0, os geradores de $C(M_2(F))$ como um T-subespaço foram obtidos por Okhitin [37], em 1988 (veja também [15]). Quando F é infinito de característica $\neq 2$, os geradores de $C(M_2(F))$ como um T-subespaço foram obtidos por Colombo e Koshlukov [8], em 2004.

São muito poucas as álgebras para as quais se tem uma descrição completa dos seus polinômios centrais. A álgebra de matrizes $M_2(F)$, a álgebra de Grassmann E e a álgebra $Q_4 = F\langle X\rangle/T^{(4)}$ (abordada nesta tese) são quase todos os exemplos conhecidos até este momento.

As identidades polinomiais da álgebra de Grassmann sobre um corpo de característica 0 foram descritas primeiramente por Krakowski e Regev [32], em 1973 (veja também Latyshev [35]). Essas identidades coincidem com as identidades da Álgebra de Gassmann sobre um corpo de característica positiva (veja [18]). Assim, foi mostrado por esses autores que se F é um corpo infinito de característica $\neq 2$, então $Id(E)$ é gerado como T-ideal pelo polinômio $[x_1,x_2,x_3] = [[x_1,x_2],x_3]$, onde $[x_1,x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$.

A descrição dos polinômios centrais da álgebra de Grassmann E foi obtida em 2010, independentemente por Bekh-Ochir e Rankin [3], por Brandão Jr, Koshlukov, Krasilnikov e Silva [7] e por Grishim [23]. Seguindo a notação de [7], seja $q(x_1,x_2) = x_1^{p-1}[x_1,x_2]x_2^{p-1}$, e para cada $n \geq 1$, defina

$$q_n = q_n(x_1,\dots,x_{2n}) = q(x_1,x_2)q(x_3,x_4)\dots q(x_{2n-1},x_{2n}).$$

Teorema 0.1 ([3, 7, 23]). *Seja F um corpo infinito de característica $p > 2$. Então $C(E)$, o espaço vetorial dos polinômios centrais da álgebra de Grassmann E, é gerado (como T-subespaço de $F\langle X\rangle$) pelos polinômios*

$$x_1[x_2,x_3,x_4],\, x_0^p,\, x_0^p q_1,\, x_0^p q_2, \dots, x_0^p q_n, \dots. \tag{0-1}$$

Mais ainda, foi provado em [4] e [7] que $C(E)$ não é finitamente gerado como T-subespaço. Esse foi o primeiro exemplo de uma álgebra onde o seu T-subespaço de polinômios centrais não é finitamente gerado.

Se F possui característica 0, então $C(E)$ é gerado como T-subespaço por 1 e pelos polinômios $x_1[x_2,x_3,x_4]$ e $[x_1,x_2]$ (veja [3] e [7]).

Sejam $a_1,\dots,a_n$ elementos de uma álgebra A. O *comutador* de comprimento 2 é definido por $[a_1,a_2] = a_1a_2 - a_2a_1$. O comutador de comprimento $n \geq 3$ é definido recursivamente por

$$[a_1,\dots,a_{n-1},a_n] = [[a_1,\dots,a_{n-1}],a_n].$$

Seja $T^{(n)}$ o ideal bilateral de $F\langle X\rangle$ gerado por todos os comutadores $[a_1,a_2,\dots,a_n]$, onde $a_i \in F\langle X\rangle$. A álgebra $Q_n = F\langle X\rangle/T^{(n)}$ é chamada *álgebra associativa Lie nilpotente universal de classe $n-1$* ou ainda *álgebra relativamente livre* na classe de álgebras definidas pela identidade $[x_1,x_2,\dots,x_n] = 0$.

O grau de um monômio $u = x_{i_1}\dots x_{i_n}$ em x_i é o número de ocorrências de x_i em u. Um polinômio $f = f(x_1,\dots,x_n)$ é *multi-homogêneo* de multi-grau $(m_1,\dots,m_n)$ se todo monômio de f possui grau m_i em x_i para cada $i = 1,\dots,n$.

Seja $f(x_1,\dots,x_n) \in F\langle X\rangle$ um polinômio qualquer, podemos sempre escrever

$$f = \sum_{m_1\geq 0,\dots,m_n\geq 0} f^{(m_1,\dots,m_n)}$$

onde $f^{(m_1,\dots,m_n)}$ é a soma de todos os monômios de f com multi-grau $(m_1,\dots,m_n)$. Os polinômios $f^{(m_1,\dots,m_n)}$ são chamados de *componentes multi-homogêneas* de f.

Seja I um T-ideal de $F\langle X\rangle$ e $f \in I$ um polinômio qualquer. Se todas as componentes multi-homogêneas de f ainda pertencerem a I, dizemos que I é um T-ideal *multi-homogêneo*. De modo análogo se define T-subespaço *multi-homogêneo*.

Quando F é um corpo infinito, todos os T-ideais e T-subespaços de $F\langle X\rangle$ são multi-homogêneos.

Entretanto o T-subespaço dos polinômios centrais da álgebra $Q_n = F\langle X\rangle/T^{(n)}$ é muti-homogêneo para qualquer corpo F. Isso é consequência do fato de $T^{(n)}$ ser um T-ideal multi-homogêneo de $F\langle X\rangle$ para qualquer corpo F.

Recentemente, têm sido objeto de interesse a descrição dos polinômios centrais da álgebra Q_n (veja [22] e [25]).

O espaço vetorial $C(Q_3)$ dos polinômios centrais da álgebra $Q_3 = F\langle X\rangle/T^{(3)}$ é gerado como T-subespaço pelos polinômios (0-1) quando F é um corpo qualquer de característica p e por 1 e pelos polinômios $[x_1,x_2]$ e $x_1[x_2,x_3]$ quando F possui característica 0. Isso pode ser deduzido dos resultados de [7] e está feito em detalhes no Capítulo 1.

A descrição dos polinômios centrais da álgebra $Q_4 = F\langle X\rangle/T^{(4)}$ quando F possui característica > 3 foi obtida por Grishin [22], em 2012. Usando a mesma notação de [7], o resultado de Grishin pode ser escrito da seguinte forma:

Teorema 0.2 ([22], Teorema 2)**.** *Seja F um corpo infinito de característica $p > 3$. Então $C(Q_4)$, o espaço vetorial dos polinômios centrais da álgebra $Q_4 = F\langle X\rangle/T^{(4)}$, é gerado como T-subespaço de $F\langle X\rangle$ pelos polinômios*

$$x_1[x_2,x_3,x_4],\, x_0^p,\, x_0^p q_2,\dots,x_0^p q_n,\dots.$$

Na verdade, como foi observado por A. Krasilnikov em comunicação particular, a demonstração do Teorema 0.2 dada por Grishin [22] estava incompleta. No entanto, como veremos adiante, o Teorema 0.2 é um corolário de um dos resultados principais desta tese.

Quando F possui característica 0, $C(Q_4)$ é gerado como T-subespaço por 1 e pelos polinômios $[x_1,x_2][x_3,x_4]$ e $x_1[x_2,x_3,x_4]$ (veja [25]).

Se F possui característica $\neq 3$, então $[x_1,x_2][x_3,x_4,x_5]$ pertence a $T^{(4)}$ (veja [44]). Isso implica que a imagem de $T^{(3)}$ em Q_4 é central nessa álgebra, o que permite reduzir o problema da descrição dos polinômios centrais da álgebra Q_4 a um problema sobre os elementos da álgebra Q_3. No entanto, se F possui característica 3, então $[x_1,x_2][x_3,x_4,x_5]$ não pertence a $T^{(4)}$ (veja [33]). Por esse motivo, a descrição dos polinômios centrais da álgebra Q_4 para F de característica 3 é muito mais sofisticada do que no caso no qual F possui característica $\neq 3$.

Lembrando que se F possui característica 3, então

$$q_n = q_n(x_1, \ldots, x_{2n}) = x_1^2[x_1, x_2]x_2^2 \ldots x_{2n-1}^2[x_{2n-1}, x_{2n}]x_{2n}^2,$$

vamos definir $u_0 = u_0(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2^2x_3^2[x_1, x_2, x_3]$, e para cada $n \geq 1$,

$$u_n = u_n(x_1, \ldots, x_{2n+3}) = q_n(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})u_0(x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+3}).$$

Defina também $\omega(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4]$. O nosso primeiro resultado principal é o seguinte:

Teorema 2.10 *Seja F um corpo de característica 3. Então $C(Q_4)$, o espaço vetorial dos polinômios centrais da álgebra $Q_4 = F\langle X\rangle/T^{(4)}$ é gerado, como T-subespaço de $F\langle X\rangle$, pelos polinômios*

(i) $x_1\omega(x_2, x_3, x_4, x_5)$, $[x_1, x_2][x_3, x_4] - x_1[x_2, x_3, x_4]$, $x_1[x_2, x_3, x_4, x_5]$,

(ii) x_0^3, $x_0^3q_3$, $x_0^3q_6$, $\ldots$, $x_0^3q_{3n}$, $\ldots$,

(iii) $x_0^3u_0$, $x_0^3u_1$, $x_0^3u_2$, $\ldots$, $x_0^3u_n$, $\ldots$.

Como uma consequência do Teorema 2.10 e do Teorema 3 em [7], obtemos o seguinte:

Corolário 2.32 *Seja F um corpo de característica 3. Então o espaço vetorial $C(Q_4)$ dos polinômios centrais da álgebra $Q_4 = F\langle X\rangle/T^{(4)}$ não é finitamente gerado como T-subespaço de $F\langle X\rangle$.*

Se F possui característica 2, então $x_0^2 + T^{(4)}$ não é central em Q_4. Isso implica que a descrição dos polinômios centrais de Q_4 é ligeiramente diferente do caso no qual F possui característica > 3. O nosso segundo resultado principal é uma descrição dos polinômios centrais da álgebra Q_4 quando F possui característica 2.

Teorema 2.1 *Seja F um corpo de característica 2. Então $C(Q_4)$, o espaço vetorial dos polinômios centrais da álgebra $Q_4 = F\langle X\rangle/T^{(4)}$, é gerado como T-subespaço de $F\langle X\rangle$ pelos polinômios*

$$x_1[x_2, x_3, x_4],\ x_0^4,\ x_0^2q_2,\ x_0^2q_3,\ x_0^2q_4,\ \ldots, x_0^2q_n,\ \ldots.$$

Seja M o conjunto dos monômios mônicos de $F\langle X\rangle$, isto é

$$M = \{x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n} : x_{i_s} \in X\}.$$

O nosso terceiro resultado principal é uma generalização do resultado de Grishin [22](Teorema 0.2 acima). Ele fornece uma descrição mais precisa dos polinômios centrais da álgebra Q_4 quando F é um corpo de característica > 3.

Teorema 2.2 *Seja F um corpo de característica $p > 3$. Então $C(Q_4)$, o espaço vetorial dos polinômios centrais da álgebra $Q_4 = F\langle X\rangle/T^{(4)}$ é gerado (como espaço vetorial) pelos polinômios*

(i) $[a_1,a_2][a_3,a_4]$, $a_1[a_2,a_3,a_4]$, $a_i \in M$,

(ii) $x_{i_1}^{pr_1}\dots x_{i_k}^{pr_k}x_{j_1}^{p-1}[x_{j_1},x_{j_2}]x_{j_2}^{p-1}\dots x_{j_{2l-1}}^{p-1}[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}]x_{j_{2l}}^{p-1}$, onde $k \geq 0, l \geq 2, r_s > 0$, $i_1 < \dots < i_k$, $j_1 < \dots < j_{2l}$.

Sejam $f = f(x_1,\dots,x_n) \in F\langle X\rangle$ um polinômio e $y_1,\dots,y_m \in X$ variáveis tais que $\{x_1,\dots,x_n\} \cap \{y_1,\dots,y_m\} = \emptyset$. Dizemos que f é um *polinômio m-central* de uma álgebra A se $[f,y_1,\dots,y_m]$ pertence a $Id(A)$. Os polinômios m-centrais de A, $m \geq 2$ são chamados genericamente de *polinômios hipercentrais* de A. Observe que um polinômio 1-central é polinômio central. Assim os polinômios hipercentrais são uma generalização dos polinômios centrais. Essa genealização foi introduzida (com outra terminologia) por Laue [36] no contexto de anéis associativos.

O nosso último resultado principal é um conjunto de várias proposições que fornecem uma descrição dos polinômios hipercentrais das álgebras Q_4 e Q_5.

Esta tese está organizada da seguinte forma: no Capítulo 1 estão as definições e resultados bem conhecidos que foram usados no texto. O Capítulo 2 é o mais importante desta tese, nele estão demonstrados os nossos três resultados principais, a saber o Teorema 2.1, o Teorema 2.2 e o Teorema 2.10. No Capítulo 3 damos uma descrição completa dos polinômios hipercentrais das álgebras Q_4 e Q_5.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Este capítulo faz uma síntese dos resultados conhecidos que serão usados no decorrer desta tese. Ele foi escrito com base nos livros [13, 19] e demais artigos citados ao longo do texto.

1.1 Identidades polinomiais e T-ideais

O conjunto dos números naturais será denotado por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Lembremos que uma *álgebra* A sobre um corpo F é um F-espaço vetorial munido de uma multiplicação $A \times A \longrightarrow A$, $(a,b) \rightarrow ab$ que satisfaz, para quaisquer $a,b,c \in A$ e $\lambda \in F$, as seguintes propriedades:

$$a(b+c) = ab + ac, \tag{1-1}$$

$$(a+b)c = ac + bc, \tag{1-2}$$

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b). \tag{1-3}$$

Seja A uma álgebra sobre um corpo F. Dizemos que

A é *associativa* se $(ab)c = a(bc)$, para quaisquer $a,b,c \in A$,

A é *comutativa* se $ab = ba$, para quaisquer $a,b \in A$,

A é *unitária* se existir um elemento $1 \in A$ tal que $1a = a = a1$ para todo $a \in A$.

Seja I um subespaço vetorial de uma álgebra A. Se $ab \in I$ sempre que $a,b \in I$, dizemos que I é uma *subálgebra* de A. Se A for unitária com unidade 1, então para ser subálgebra I deve satisfazer ainda $1 \in I$. Se para quaisquer $a \in A$ e $b \in I$, tivermos $ab \in I$ e $ba \in I$, dizemos que I é um *ideal bilateral* de A.

Se I é um ideal bilateral de A, a álgebra quociente de A por I é denotada por A/I. A subálgebra gerada por um conjunto $S \subseteq A$ é a menor subálgebra de A que contém S. Analogamente se define o ideal bilateral de A gerado por um conjunto $S \subseteq A$.

Exemplo 1.1. *Seja $X = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto enumerável de variáveis. A álgebra $F\langle X\rangle$ com base formada por* 1 *e pelos monômios $x_{i_1} \ldots x_{i_n}$, $x_{i_s} \in X$, com multiplicação*

$$(x_{i_1} \ldots x_{i_m})(x_{j_1} \ldots x_{j_n}) = x_{i_1} \ldots x_{i_m} x_{j_1} \ldots x_{j_n}$$

é chamada álgebra associativa livre (unitária), livremente gerada por X. Os elementos de $F\langle X\rangle$ são chamados de polinômios.

De agora em diante e à menos que se faça menção contrária, a palavra "álgebra" significará "álgebra associativa unitária". Omitiremos também o termo "sobre F" quando não houver dúvida sobre qual corpo a álgebra está definida.

Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ um polinômio e A uma álgebra. Dizemos que f é uma *identidade polinomial* para A se

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0, \text{ para quaisquer } a_1, \ldots, a_n \in A.$$

No caso afirmativo, se f é um polinômio não nulo de $F\langle X\rangle$, dizemos que A é uma *PI-álgebra* (do inglês Polynomial Identity). É comum escrever "$f = 0$" para dizer que f é uma identidade polinomial.

Sejam $a_1, \ldots, a_n$ elementos de uma álgebra. O *comutador* de comprimento 2 é definido por $[a_1, a_2] = a_1a_2 - a_2a_1$. O comutador de comprimento n $(n \geq 3)$ é definido recursivamente por

$$[a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] = [[a_1, \ldots, a_{n-1}], a_n].$$

Exemplo 1.2. *Uma álgebra A é comutativa se, e somente se, satisfaz a identidade polinomial $[x_1, x_2] = 0$.*

Exemplo 1.3. *Seja A uma álgebra de dimensão $< n$ $(n \in \mathbb{N})$. Então A satisfaz a identidade padrão de grau n*

$$s_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)},$$

onde S_n é o grupo das permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$ e $(-1)^\sigma$ é o sinal de σ.

Seja $M_n(F)$ a *álgebra das matrizes* $n \times n$ com entradas no corpo F. Essa álgebra possui dimensão n^2 e portanto satisfaz a identidade padrão de grau $n^2 + 1$. Em 1950, Amitsur e Levitski[1] provaram, por métodos puramente combinatórios, o seguinte resultado:

Teorema 1.4 ([1]). *A álgebra $M_n(F)$ das matrizes $n\times n$ satisfaz a identidade padrão de grau $2n$*

$$s_{2n}(x_1,\ldots,x_{2n}) = \sum_{\sigma\in S_{2n}} (-1)^{\sigma} x_{\sigma(1)}\ldots x_{\sigma(2n)}.$$

Sejam F um corpo infinito de característica $\neq 2$ e V um espaço vetorial sobre F com base enumerável $e_1,e_2,\ldots$. A *álgebra de Grassmann infinitamente gerada e unitária* de V, denotada por E, é a álgebra associativa gerada por $1,e_1,e_2,\ldots$ e com relações

$$e_ie_j = -e_je_i$$

para quaisquer $i,j\in\mathbb{N}$. Formalmente, E é o quociente da álgebra livre $F\langle X\rangle$ pelo ideal bilateral gerado por todos os polinômios $x_ix_j + x_jx_i$, $i,j\in\mathbb{N}$. Analogamente se define E_n, a *álgebra de Grassmann (unitária) finitamente gerada* por $1,e_1,e_2,\ldots,e_n$.

Como um espaço vetorial, E possui uma base formada por 1 e por todos os monômios

$$e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_k},\quad i_1<i_2<\ldots<i_k,\ i_s,k\in\mathbb{N}. \tag{1-4}$$

Exemplo 1.5. *A álgebra de Grassmann E satisfaz a identidade polinomial $[x_1,x_2,x_3]=0$.*

De fato, como o comutador $[x_1,x_2,x_3]$ é linear em cada entrada e a álgebra de Grassmann E é gerada como espaço vetorial pelos elementos (1-4), é suficiente mostrar que $[a,b,c]=0$ para quaisquer elementos a,b e c da forma (1-4). Se a ou b é formado por um número par de símbolos e_s, então usando a relação $e_ie_j=-e_je_i$, vemos que a comuta com b, logo $[a,b,c]=0$. Se a e b são formados por um número ímpar de símbolos e_s, então $[a,b]=ab-ba$ onde ab e ba são formados por um número par de símbolos e_s. Pelo caso anterior

$$[[a,b],c] = [ab-ba,c] = [ab,c]-[ba,c] = 0.$$

Portanto $[a,b,c]=0$ para quaisquer a,b e c da forma (1-4).

Sejam F um corpo e G um grupo finito. A *álgebra do grupo G*, denotada por FG, é o espaço vetorial com base $\{g : g\in G\}$ e multiplicação definida por

$$\left(\sum_{g\in G}\alpha_g g\right)\left(\sum_{h\in G}\beta_h h\right) = \sum_{g,h\in G}\alpha_g\beta_h gh,$$

onde gh é o produto em G.

Exemplo 1.6. *Seja $\mathcal{G}$ o grupo gerado pelos elementos $a_1,a_2,\ldots$ satisfazendo as relações $a_i^2=1,((a_i,a_j),a_k)=1$, $i,j,k\in\mathbb{N}$, onde $(a,b)=a^{-1}b^{-1}ab$. Sejam F um* *corpo de característica* 2 *e* $F\mathcal{G}$ *a álgebra do grupo* $\mathcal{G}$*. Defina* $g_{ij} = (a_i, a_j) + 1$ *e seja* I *o ideal bilateral de* $F\mathcal{G}$ *gerado pelos elementos*

$$g_{ij}g_{kl} + g_{ik}g_{jl}, \;\; i, j, k, l \in \mathbb{N}.$$

É bem conhecido que $F\mathcal{G}/I$ *satisfaz a identidade polinomial* $[x_1, x_2, x_3] = 0$ *(veja [12, Lema 2.5], [27, Lema 2.1], [28, Exemplo 3.8]) e não satisfaz a identidade polinomial* $[x_1, x_2] \ldots [x_{2n-1}, x_{2n}] = 0$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *(veja [12, Lema 2.6]).*

Lembremos que uma transformação linear $\varphi : A \longrightarrow B$ entre duas álgebras é um *homomorfismo* de álgebras se

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b), \quad \text{para quaisquer } a, b \in A.$$

Um homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow A$ é chamado *endomorfismo* da álgebra A. A seguinte proposição torna fácil a construção de certos endomorfismos de $F\langle X\rangle$ (veja [13], pág. 9).

Proposição 1.7. *A álgebra* $F\langle X\rangle$ *satisfaz a seguinte propriedade universal: se* A *é uma álgebra, então toda aplicação* $\varphi : X \longrightarrow A$ *pode ser estendida de maneira única à um homomorfismo* $\tilde{\varphi} : F\langle X\rangle \longrightarrow A$*.*

Um ideal bilateral I de $F\langle X\rangle$ é um T*-ideal* se $\varphi(I) \subseteq I$ para todos endomorfismos φ de $F\langle X\rangle$. O T-ideal *gerado* por um conjunto $S \subseteq F\langle X\rangle$, denotado por $\langle S\rangle^T$, é o menor T-ideal de $F\langle X\rangle$ que contém S. Quando S é finito, dizemos que o T-ideal é *finitamente gerado.*

Seja $Id(A)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais de uma álgebra A. Observe que $Id(A)$ é um ideal bilateral de $F\langle X\rangle$. Mais ainda $Id(A)$ é um T-ideal de A. De fato, seja $f(x_1, \ldots, x_n)$ uma identidade polinomial de A e φ um endomorfismo de $F\langle X\rangle$. É claro que $f(g_1, \ldots, g_n)$ é ainda uma identidade de A para quaisquer $g_1, \ldots, g_n \in F\langle X\rangle$. Como

$$\varphi(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)),$$

segue que $\varphi(f(x_1, \ldots, x_n))$ é uma identidade de A. Logo $Id(A)$ é um T-ideal de $F\langle X\rangle$.

Todo T-ideal é formado pelas identidades polinomiais de alguma álgebra A. De fato, se I é um T-ideal qualquer de $F\langle X\rangle$, não é difícil verificar que $I = Id(A)$ onde $A = F\langle X\rangle/I$.

O *grau de um monômio* $u = x_{i_1} \ldots x_{i_n} \in F\langle X\rangle$, denotado por $\deg u$, é definido por seu comprimento, isto é $\deg u = n$. Assim $\deg f$, o *grau de um polinômio* $f \in F\langle X\rangle$, é definido como sendo o grau máximo dentre os monômios de f. Se x_i é uma variável do monômio u, o grau de u em x_i, denotado por $\deg_{x_i} u$, é o número de ocorrências de x_i em u.

Um polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ é *homogêneo* de grau m_i em x_i, se todos os monômios de f possuem grau m_i em x_i; e é *multi-homogêneo* de multigrau $(m_1, \ldots, m_n)$ se f for homogêneo de grau m_i em x_i, para cada $i = 1, \ldots, n$. Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio qualquer de $F\langle X\rangle$, podemos sempre escrever

$$f = \sum_{m_1 \geq 0, \ldots, m_n \geq 0} f^{(m_1, \ldots, m_n)},$$

onde $f^{(m_1, \ldots, m_n)}$ é a soma de todos os monômios de f com multigrau $(m_1, \ldots, m_n)$. Os polinômios $f^{(m_1, \ldots, m_n)}$ são chamados de *componentes multi-homogêneas* de f.

Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ um polinômio homogêneo de grau m em x_1. O polinômio

$$h = h(y_1, \ldots, y_m, x_2, \ldots, x_n)$$

formado pela soma de todos os monômios g de $f(y_1 + \cdots + y_m, x_2, \ldots, x_n)$ tais que $\deg_{y_i} g = 1$, para cada $i = 1, \ldots, m$ é chamado de *linearização total* de f em x_1.

É claro que h é linear nas variáveis $y_1, \ldots, y_m$. Outra propriedade importante de h é a seguinte igualdade:

$$h(x_1, \ldots, x_1, x_2, \ldots, x_n) = m! f(x_1, \ldots, x_n).$$

Seja I um T-ideal de $F\langle X\rangle$ e $f \in I$ um polinômio qualquer. Se todas as componentes multi-homogêneas de f ainda pertencerem a I, dizemos que I é um T-ideal *multi-homogêneo*.

A proposição seguinte é bem conhecida, veja [13, Proposição 4.2.3] e [19, Teorema 1.3.2].

Proposição 1.8. *Seja F um corpo infinito. Então todo T-ideal é gerado por seus polinômios multi-homogêneos.*

Dizemos que um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ é *multilinear* se ele é multi-homogêneo de multigrau $(1, \ldots, 1)$. A proposição seguinte também é bem conhecida, veja [13, Proposição 4.2.3] e [19, Teorema 1.3.8].

Proposição 1.9. *Seja F um corpo de característica 0. Então todo T-ideal é gerado por seus polinômios multilineares.*

Seja $T^{(n)}$ o ideal bilateral de $F\langle X\rangle$ gerado por todos os comutadores $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$, onde $a_i \in F\langle X\rangle$.

É um fato bem conhecido (veja por exemplo [13]) que se I for um T-ideal gerado por um conjunto $S \subseteq F\langle X\rangle$, então todo elemento de I é uma combinação linear de polinômios da forma

$$af(b_1,\ldots,b_n)c$$

onde $a, b_1, \ldots, b_n, c$ pertencem a $F\langle X\rangle$ e $f(x_1,\ldots,x_n)$ pertence a S.

Existe uma situação particular (e bem conhecida) da Proposição 1.8 na qual o corpo F não precisa ser infinito.

Proposição 1.10. *Sejam F um corpo qualquer e $f = f(x_1,\ldots,x_n) \in F\langle X\rangle$ um polinômio multilinear. Então o T-ideal gerado por f é multi-homogêneo. Em particular, $T^{(n)}$ é multi-homogêneo.*

Demonstração. Seja $g \in \langle f\rangle^T$. Então g é uma combinação linear de polinômios da forma

$$af(b_1,\ldots,b_n)c, \tag{1-5}$$

onde a, c e $b_s (s = 1,\ldots,n)$ pertencem a $F\langle X\rangle$. Escreva os polinômios a, c e $b_s (s = 1,\ldots,n)$ como soma de suas componentes multi-homogêneas:

$$a = \sum a^{(i_1,\ldots,i_n)}, c = \sum c^{(j_1,\ldots,j_n)}, b_s = \sum b_s^{(k_1,\ldots,k_n)}. \tag{1-6}$$

Como f é multilinear, segue de (1-5) que g é uma combinação linear de polinômios da forma

$$a^{(i_1,\ldots,i_n)} f(b_1^{(r_1,\ldots,r_n)},\ldots,b_n^{(k_1,\ldots,k_n)}) c^{(j_1,\ldots,j_n)}. \tag{1-7}$$

Segue também da multilinearidade de f que cada polinômio $f(b_1^{(r_1,\ldots,r_n)},\ldots,b_n^{(k_1,\ldots,k_n)})$ é multi-homogêneo e assim cada polinômio de (1-7) é multi-homogêneo. Portanto, cada componente multi-homogênea de g é uma combinação linear de polinômios de (1-7), isto é, cada componente multi-homogênea de g pertence a $\langle f\rangle^T$. Isso mostra que $\langle f\rangle^T$ é multi-homogêneo. É fácil ver que $T^{(n)}$ é gerado como T-ideal pelo comutador $[x_1,\ldots,x_n]$, que é um polinômio multilinear. Logo $T^{(n)}$ é multi-homogêneo. □

Dizemos que $f \in F\langle X\rangle$ é um *polinômio próprio* se ele for uma combinação linear de produtos de comutadores da forma

$$[x_{i_1},\ldots,x_{i_r}]\ldots[x_{j_1},\ldots,x_{j_s}].$$

Assumimos que 1 é também um polinômio próprio. O conjunto dos polinômios próprios de $F\langle X\rangle$ será denotado por B. Denotaremos também

$$B_n = B \cap F\langle x_1,\ldots,x_n\rangle, \;\; n \in \mathbb{N},$$

isto é, B_n é o conjunto dos polinômios próprios de $F\langle X\rangle$ em n variáveis. O resultado seguinte é devido a Drensky [14]. Veja também [13, Teorema 4.3.11].

Teorema 1.11 (veja [14], Lema 2.4)**.** *Seja A uma PI-álgebra sobre um corpo infinito F. Se*

$$w_j(x_1,\dots,x_n)+(B_n\cap Id(A)), j=1,2,\dots$$

é uma base para o espaço vetorial $B_n(A)=B_n/(B_n\cap Id(A))$, então o espaço vetorial $F_n(A)=F\langle X_n\rangle/(F\langle X_n\rangle\cap Id(A))$ possui uma base

$$x_1^{r_1}\dots x_n^{r_n}w_j(x_1,\dots,x_n), r_i\geq 0, j=1,2,\dots.$$

Um pequeno comentário: a hipótese do corpo F ser infinito no enunciado do Teorema 1.11 é para garantir que $Id(A)$ seja um T-ideal multi-homogêneo (conforme a Proposição 1.8). Assim a demonstração do teorema funciona apenas com a hipótese de $Id(A)$ ser multi-homogêneo. Em particular, como $Id(Q_n)=T^{(n)}$ é multi-homogêneo (Proposição 1.10), o teorema vale quando $A=Q_n=F\langle X\rangle/T^{(n)}$ e F é um corpo qualquer. Todas as referências ao Teorema 1.11 estarão sendo usadas nesse caso particular.

Dizemos que uma álgebra A é uma *álgebra de Lie* se para quaisquer $a,b,c\in A$,

$$aa=0, \tag{1-8}$$
$$(ab)c+(bc)a+(ca)b=0. \tag{1-9}$$

Quando A é uma álgebra de Lie, é usual denotar o produto ab por $[a,b]$ (colchete de Lie). Assim, as propriedades (1-1)-(1-3) significam que $[\ ,\ ]$ é bilinear e as propriedades (1-8)-(1-9) são escritas como

$$[a,a]=0, \quad (\textit{lei anti-comutativa})$$
$$[[a,b],c]+[[b,c],a]+[[c,a],b]=0 \quad (\textit{identidade de Jacobi}).$$

Pela lei anti-comutativa e pela bilinearidade do colchete de Lie temos

$$0=[a+b,a+b]=[a,a]+[a,b]+[b,a]+[b,b]=[a,b]+[b,a].$$

Consequentemente $[a,b]=-[b,a]$, para quaisquer $a,b\in A$.

Exemplo 1.12. *Em uma álgebra (associativa) A, defina o seguinte produto $[a,b]=ab-ba$, $a,b\in A$. É um trabalho rotineiro mostrar que A é uma álgebra de Lie com esse novo produto.*

A álgebra $Q_n = F\langle X\rangle/T^{(n)}$ é chamada *álgebra associativa Lie nilpotente universal* de classe $n-1$ ou ainda *álgebra relativamente livre* na classe de álgebras associativas definidas pela identidade $[x_1,\dots,x_n]=0$.

1.2 Polinômios centrais e T-subespaços

Seja $Z(A)$ o *centro* de uma álgebra A, isto é $Z(A) = \{a \in A : ab = ba \text{ para todo } b \in A\}$. Dizemos que $f(x_1,\dots,x_n) \in F\langle X\rangle$ é um *polinômio central* de A se

$$f(a_1,\dots,a_n) \in Z(A) \text{ para quaisquer } a_1,\dots,a_n \in A.$$

Um subespaço vetorial I de $F\langle X\rangle$ é chamado *T-subespaço* se $\varphi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo φ de $F\langle X\rangle$. Uma subálgebra de $F\langle X\rangle$ que é também um T-subespaço é chamada *T-subálgebra* de $F\langle X\rangle$.

O conjunto $C(A)$ de todos os polinômios centrais de A forma um subespaço vetorial de $F\langle X\rangle$. Mais ainda $C(A)$ é uma T-subálgebra de $F\langle X\rangle$. De fato, segue imediatamente da definição de polinômio central que se $f(x_1,\dots,x_n) \in C(A)$, então $f(g_1,\dots,g_n) \in C(A)$ para quaisquer polinômios $g_1,\dots,g_n \in F\langle X\rangle$. Como

$$\varphi(f(x_1,\dots,x_n)) = f(\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_n)),$$

segue que $\varphi(f(x_1,\dots,x_n))$ pertence a $C(A)$ para qualquer endomorfismo φ de $F\langle X\rangle$. Portanto $C(A)$ é um T-subespaço de $F\langle X\rangle$. Como $Z(A)$ é uma subálgebra de A, segue imediatamente da definição de polinômio central que $C(A)$ é uma subálgebra de $F\langle X\rangle$. Para referência futura no texto vamos escrever esse resultado (que é bem conhecido) na forma de uma proposição.

Proposição 1.13. *$C(A)$ é uma T-subálgebra de $F\langle X\rangle$.*

Ao contrário de T-ideais, o estudo dos T-subespaços não se reduz ao estudo dos polinômios centrais. Mais precisamente, existem T-subespaços I de $F\langle X\rangle$ para os quais não existe uma álgebra A tal que $I = C(A)$ (veja [20, Observação 1]).

Um T-subespaço I é *gerado* por um conjunto $S \subseteq F\langle X\rangle$ se I for o menor T-subespaço de $F\langle X\rangle$ que contém S. No caso afirmativo escrevemos $I = \langle S\rangle^{TS}$. Se S for finito, dizemos que I é um T-subespaço finitamente gerado.

Seja I um T-subespaço de $F\langle X\rangle$ e $f \in I$ um polinômio qualquer. Se todas as componentes multi-homogêneas de f ainda pertencerem a I, dizemos que I é um T-subespaço *multi-homogêneo*.

As duas proposições seguintes são análogas a Proposição 1.8 e a Proposição 1.9, respectivamente. As demonstrações destas são também idênticas às demonstrações daquelas, veja [13, 19].

Proposição 1.14. *Seja F um corpo infinito. Então todo T-subespaço é gerado por seus polinômios multi-homogêneos.*

Proposição 1.15. *Seja F um corpo de característica 0. Então todo T-subespaço é gerado por seus polinômios multilineares.*

À seguir, um caso particular (e bem conhecido) da Proposição 1.14 que será muito utilizado nesta tese.

Proposição 1.16. *O T-subespaço $C(Q_n)$ é multi-homogêneo.*

Demonstração. Seja $f = f(x_1,\dots,x_k) \in C(Q_n)$. Escreva $f = \sum f^{(m_1,\dots,m_k)}$, onde cada $f^{(m_1,\dots,m_k)}$ é uma componente multi-homogênea de f com multigrau $(m_1,\dots,m_k)$. Observe que $g = [f,x_{k+1}] = \sum[f^{(m_1,\dots,m_k)},x_{k+1}]$ pertence a $T^{(n)}$ e cada polinômio $[f^{(m_1,\dots,m_k)},x_{k+1}]$ é uma componente multi-homogênea de g. Como $T^{(n)}$ é multi-homogêneo (Proposição 1.10), segue que $[f^{(m_1,\dots,m_k)},x_{k+1}]$ pertence a $T^{(n)}$, isto é $f^{(m_1,\dots,m_k)}$ pertence a $C(Q_n)$. Portanto $C(Q_n)$ é multi-homogêneo. □

O resultado seguinte é bem conhecido e será usado diversas vezes no texto.

Lema 1.17. *As seguintes igualdades são válidas em $F\langle X\rangle$*

(i) $[a_1a_2,a_3,a_4] = a_1[a_2,a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]+[a_1,a_4][a_2,a_3]+[a_1,a_3,a_4]a_2$,

(ii) $[a_1a_2\dots a_n,a] = \sum_{i=1}^{n} a_1\dots a_{i-1}[a_i,a]a_{i+1}\dots a_n$.

Demonstração. Para provar o item (i) usamos duas vezes a igualdade $[ab,c] = a[b,c]+[a,c]b$. Para o item (ii), a mesma igualdade e indução sobre n. □

1.3 Relações na álgebra Q_3

O objetivo desta seção é dar uma descrição da álgebra $Q_3 = F\langle X\rangle/T^{(3)}$. O lema seguinte é bem conhecido, veja por exemplo [2, 9, 13, 18, 20, 32].

Lema 1.18. *Seja F um corpo qualquer. Então $T^{(3)}$ contém os seguintes polinômios*

(i) $[x_1,x_2][x_3,x_4]+[x_1,x_3][x_2,x_4]$,

(ii) $[x_1,x_2][x_2,x_3]$.

Demonstração. Vamos provar (i). Pelo Lema 1.17 (i), temos

$$\begin{aligned}[x_1x_2,x_3,x_4] &= x_1[x_2,x_3,x_4]+[x_1,x_3][x_2,x_4]+[x_1,x_4][x_2,x_3]+[x_1,x_3,x_4]x_2 \\ &= x_1[x_2,x_3,x_4]+[x_1,x_3,x_4]x_2-[x_1,x_3][x_4,x_2]-[x_1,x_4][x_3,x_2].\end{aligned}$$

Como $[x_1x_2,x_3,x_4], x_1[x_2,x_3,x_4]$ e $[x_1,x_3,x_4]x_2$ pertencem a $T^{(3)}$, segue que $[x_1,x_3][x_4,x_2]+[x_1,x_4][x_3,x_2]$ pertence a $T^{(3)}$. Reenumerando as variáveis vemos que o polinômio (i) pertence a $T^{(3)}$. Agora vejamos (ii). Usando a igualdade $[ab,c]=a[b,c]+[a,c]b$, temos

$$\begin{aligned}[x_1,x_2][x_1,x_3] &= [[x_1,x_2]x_1,x_3]-[x_1,x_2,x_3]x_1 \\ &= [[x_1,x_2x_1],x_3]-[x_1,x_2,x_3]x_1.\end{aligned}$$

Logo $[x_1,x_2][x_1,x_3]$ pertence a $T^{(3)}$. □

Sejam a_1,a_2,a_3,a_4 polinômios quaisquer de $F\langle X\rangle$. Defina

$$\omega(a_1,a_2,a_3,a_4)=[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4].$$

Antes de prosseguir, vejamos algumas propriedades do polinômio ω.

Lema 1.19. *Seja F um corpo qualquer. As seguintes igualdades são válidas em $F\langle X\rangle$ para quaisquer $a_1,\ldots,a_5\in F\langle X\rangle$.*

(i) $\omega(a_1a_2,a_3,a_4,a_5)=a_1\omega(a_2,a_3,a_4,a_5)+a_2\omega(a_1,a_3,a_4,a_5)+[a_1,a_3,a_2][a_4,a_5]+[a_1,a_4,a_2][a_3,a_5]$,

(ii) $\omega(a_1,a_2a_3,a_4,a_5)=a_2\omega(a_1,a_3,a_4,a_5)+\omega(a_1,a_2,a_4,a_5)a_3+[a_1,a_4,a_2][a_3,a_5]+[a_1,a_2][a_5,a_4,a_3]$,

(iii) $\omega(a_1,a_2,a_3,a_4a_5)=a_4\omega(a_1,a_2,a_3,a_5)+\omega(a_1,a_2,a_3,a_4)a_5+[a_1,a_2,a_4][a_3,a_5]+[a_1,a_3,a_4][a_2,a_5]$.

Demonstração. Basta usar a definição de ω em cada membro esquerdo de cada um dos itens. □

A proposição seguinte é bem conhecida. Veja por exemplo [2, 9, 13, 18, 20, 32].

Proposição 1.20. *Seja F um corpo qualquer. Então $T^{(3)}$ é gerado como ideal bilateral de $F\langle X\rangle$ pelos polinômios*

(i) $[x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3}]$ $(x_{i_s}\in X)$,

(ii) $[x_{i_1},x_{i_2}][x_{i_3},x_{i_4}]+[x_{i_1},x_{i_3}][x_{i_2},x_{i_4}]$ $(x_{i_s}\in X)$.

Demonstração. Seja I o ideal bilateral de $F\langle X\rangle$ gerado pelos polinômios (i) e (ii). Devemos mostrar que $T^{(3)} = I$. Pelo Lema 1.18, temos $I \subseteq T^{(3)}$. Resta mostrar que $T^{(3)} \subseteq I$. Observe que $T^{(3)}$ é gerado como ideal bilateral de $F\langle X\rangle$ pelos polinômios da forma

$$[a_1, a_2, a_3] \tag{1-10}$$

onde os a_i são monômios quaisquer em $F\langle X\rangle$. Assim é suficiente mostrar que os polinômios da forma (1-10) pertencem a I. Faremos a prova por indução, e para ela funcionar, precisamos mostrar também que I contém todos os polinômios da forma

$$\omega(a_1, a_2, a_3, a_4), \tag{1-11}$$

onde $\omega(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4]$ e os a_i são monômios quaisquer de $F\langle X\rangle$. A prova será por indução sobre $m = \deg f$, onde f é um polinômio da forma (1-10) ou da forma (1-11).

É claro que $\deg f \geq 3$. Se $\deg f = 3$, então f é da forma (1-10) com cada a_i de grau igual a 1, isto é, f é da forma (i) e portanto f pertence a I. Assim, a base da indução é $m = 3$. Para o passo de indução suponha que $\deg f = m > 3$ e que todos os polinômios de (1-10)-(1-11) de grau menor do que m pertençam a I.

Suponha primeiramente que f é um polinômio da forma (1-11) e vamos denotá-lo por ω. Se $\deg \omega = 4$, então cada a_i possui grau igual a 1. Assim ω é um polinômio de (ii) e temos $\omega \in I$. Podemos então supor que $\deg \omega = m > 4$. Então $a_i = a_i' a_i''$ com $\deg a_i', \deg a_i'' < \deg a_i$ para algum i, $1 \leq i \leq 4$. Como $\omega(a_1, a_2, a_3, a_4) = \omega(a_1, a_3, a_2, a_4)$ é suficiente considerar os casos $a_1 = a_1' a_1'', a_2 = a_2', a_2''$ e $a_4 = a_4' a_4''$. Pela Proposição 1.19, temos

$$\begin{aligned} \omega(a_1' a_1'', a_2, a_3, a_4) &= a_1' \omega(a_1'', a_2, a_3, a_4) + a_1'' \omega(a_1', a_2, a_3, a_4) + \\ &+ [a_1', a_2, a_1''][a_3, a_4] + [a_1', a_3, a_1''][a_2, a_4]. \end{aligned} \tag{1-12}$$

Como os graus dos polinômios $[a_1', a_2, a_1''], [a_1', a_3, a_1''], \omega(a_1'', a_2, a_3, a_4)$ e $\omega(a_1', a_2, a_3, a_4)$ são menores do que m, segue da hipótese de indução que todos esses polinômios pertencem a I. Logo também pertencem a I todos os polinômios do lado direito da igualdade em (1-12). Segue assim que o polinômio $\omega(a_1' a_1'', a_2, a_3, a_4)$ pertence a I. Novamente pela Proposição 1.19 temos

$$\begin{aligned} \omega(a_1, a_2' a_2'', a_3, a_4) &= a_2' \omega(a_1, a_2'', a_3, a_4) + \omega(a_1, a_2', a_3, a_4) a_2'' + \qquad (1\text{-}13) \\ &+ [a_1, a_3, a_2'][a_2'', a_4] + [a_1, a_2'][a_4, a_3, a_2''], \\ \omega(a_1, a_2, a_3, a_4' a_4'') &= a_4' \omega(a_1, a_2, a_3, a_4'') + \omega(a_1, a_2, a_3, a_4') a_4'' + \qquad (1\text{-}14) \\ &+ [a_1, a_2, a_4'][a_3, a_4''] + [a_1, a_3, a_4'][a_2, a_4''], \end{aligned}$$

e podemos proceder de modo análogo ao caso de $\omega(a'_1a''_1, a_2, a_3, a_4)$ para concluir que os polinômios da forma (1-13) e (1-15) pertencem a I. Mostramos assim que $\omega(a_1, a_2, a_3, a_4)$ pertence a I para quaisquer monômios $a_i \in F\langle X\rangle$.

Suponha agora que f é um polinômio da forma (1-10), isto é $f = f(a_1, a_2, a_3) = [a_1, a_2, a_3]$. É claro que $\deg f \geq 3$. Se $\deg f = 3$, então cada a_i possui grau igual a 1, isto é, f é um polinômio da forma (i). Logo $f \in I$. Suponha que $\deg f = m > 3$. Assim $a_i = a'_ia''_i$ para algum i, $1 \leq i \leq 3$. Como $f(a_1, a_2, a_3) = -f(a_2, a_1, a_3)$, é suficiente considerar os casos $a_1 = a'_1a''_1$ e $a_3 = a'_3a''_3$. Seja $a_1 = a'_1a''_1$. Pela Proposição 1.17 (i), temos

$$\begin{aligned} [a'_1a''_1, a_2, a_3] &= a'_1[a''_1, a_2, a_3] + [a'_1, a_2, a_3]a''_1 + [a'_1, a_2][a''_1, a_3] + [a'_1, a_3][a''_1, a_2] \\ &= a'_1[a''_1, a_2, a_3] + [a'_1, a_2, a_3]a''_1 - \omega(a'_1, a_2, a_3, a''_1) \end{aligned} \tag{1-15}$$

Como os graus dos polinômios $[a''_1, a_2, a_3]$ e $[a'_1, a_2, a_3]$ são menores do que m, segue da hipótese de indução que esses polinômios pertencem a I. Como já mostramos que o polinômio $\omega(a'_1, a_2, a_3, a''_1)$ pertence a I, segue que todos os polinômios de (1-15) pertencem a I, consequentemente $[a'_1a''_1, a_2, a_3]$ pertence a I. Finalmente, considere $a_3 = a'_3a''_3$. Temos

$$[a_1, a_2, a'_3a''_3] = a'_3[a_1, a_2, a''_3] + [a_1, a_2, a'_3]a''_3. \tag{1-16}$$

Como os polinômios $[a_1, a_2, a''_3]$ e $[a_1, a_2, a'_3]$ possuem graus menores do que m, segue da hipótese de indução que eles pertencem a I. Logo os polinômios $a'_3[a_1, a_2, a''_3]$ e $[a_1, a_2, a'_3]a_3$ também pertencem a I e consequentemente o polinômio $[a_1, a_2, a'_3a''_3]$ pertence a I. Mostramos assim que $[a_1, a_2, a_3]$ pertence a I, para quaisquer monômios $a_i \in F\langle X\rangle$, portanto $T^{(3)} \subseteq I$. Como a inclusão $I \subseteq T^{(3)}$ já foi mostrada, obtemos $T^{(3)} = I$ e a demonstração está completa. □

A proposição seguinte é bem conhecida, veja [7, 13, 20].

Proposição 1.21. *Seja F um corpo qualquer. Então o espaço vetorial $Q_3 = F\langle X\rangle/T^{(3)}$ possui uma base*

$$x_{i_1}^{r_1} \ldots x_{i_k}^{r_k}[x_{j_1}, x_{j_2}] \ldots [x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}] + T^{(3)}, \tag{1-17}$$

onde $k \geq 0, l \geq 0, r_s > 0$, $i_1 < \ldots < i_k$ e $j_1 < \ldots < j_{2l}$.

Demonstração. Pelo Teorema 1.11 (e o comentário logo abaixo dele) é suficiente mostrar que os elementos

$$[x_{j_1}, x_{j_2}] \ldots [x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}] + (B \cap T^{(3)}), j_1 < \ldots < j_{2l} \tag{1-18}$$

formam uma base para o espaço vetorial $B/(B\cap T^{(3)})$. Mostremos primeiramente que os elementos (1-18) geram $B/(B\cap T^{(3)})$. Seja $f = f(x_1,\ldots,x_n) \in B$ um polinômio próprio com $f \notin T^{(3)}$. Como o espaço vetorial B é gerado por produtos de comutadores, podemos considerar

$$f = [x_{i_1},\ldots,x_{i_k}]\ldots[x_{j_1},\ldots,x_{j_l}].$$

Mais ainda, como $f \notin T^{(3)}$, segue que f deve ser da forma

$$f = [x_{j_1},x_{j_2}]\ldots[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}].$$

A igualdade $[x_1,x_2] = -[x_2,x_1]$ e a relação $[x_1,x_2][x_3,x_4] \equiv -[x_1,x_3][x_2,x_4] \pmod{T^{(3)}}$ (Lema 1.18 (i)) implicam que podemos trocar, módulo $B\cap T^{(3)}$, quaisquer duas variáveis de f de lugar. Segue desse fato e da relação $[x_1,x_2][x_2,x_3] \in T^{(3)}$ (Lema 1.18 (ii)), que se f tiver duas variáveis iguais, então $f \in B\cap T^{(3)}$. Portanto todas as variáveis de f são distintas e $f + (B\cap T^{(3)})$ é um múltiplo escalar do elemento

$$[x_{j_1},x_{j_2}]\ldots[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}] + (B\cap T^{(3)}), j_1 < \ldots < j_{2l}.$$

Agora vamos mostrar que os elementos (1-18) são linearmente independentes. Observe que os polinômios da forma

$$[x_{j_1},x_{j_2}]\ldots[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}], j_1 < \ldots < j_{2l} \tag{1-19}$$

são multilineares e determinados por seus multi-graus. Como $T^{(3)}$ é multi-homogêneo (Proposição 1.10), basta mostrar que todo polinômio da forma (1-19) não pertence a $T^{(3)}$ ou equivalentemente, que o polinômio $b = [x_1,x_2]\ldots[x_{2n-1,2n}]$ não pertence a $T^{(3)}$. Para fazer isso, dividiremos o argumento em dois casos.

Caso 1: $char(F) \neq 2$. Considere os $2n$ primeiros geradores da Álgebra de Grassmann E: $e_1,e_2,\ldots,e_{2n}$. Como

$$[e_1,e_2]\ldots[e_{2n-1},e_{2n}] = 2^n e_1\ldots e_{2n} \neq 0,$$

segue que b não pertence a $Id(E)$. Logo b não pertence a $T^{(3)}$.

Caso 2: $char(F) = 2$. Seja $F(\mathcal{G})/I$ a álgebra do Exemplo 1.6. Como vimos $F(\mathcal{G})/I$ satisfaz a identidade polinomial $[x_1,x_2,x_3] = 0$ mas não satisfaz a identidade polinomial $[x_1,x_2]\ldots[x_{2n-1},x_{2n}] = 0$. Isso implica que b não pertence a $T^{(3)}$.

Segue portanto que os elementos (1-18) formam uma base para o espaço vetorial $B/(B\cap T^{(3)})$. Pelo Teorema 1.11, os elementos (1-17) formam uma base para o espaço vetorial $F\langle X\rangle/T^{(3)}$. □

Lema 1.22 (veja [26]). *Seja F um corpo de característica p.*

(i) *Se* $p \geq n-1$*, então* $[x_0^p, x_1] \equiv 0 \pmod{T^{(n)}}$*,*

(ii) *Se* $p \geq n$*, então* $(x_1x_2)^p \equiv x_1^p x_2^p \pmod{T^{(n)}}$*,*

(iii) *Se* $p = 2$*, então* $(x_1x_2)^4 \equiv x_1^4 x_2^4 \pmod{T^{(3)}}$*.*

Demonstração. Para os itens (i) e (ii) consulte [26]. Vamos provar o item (iii). Observe que $(x_1x_2)^2 = x_1^2x_2^2 + x_1[x_1,x_2]x_2$. Assim

$$\begin{aligned}(x_1x_2)^4 &= (x_1x_2)^2(x_1x_2)^2 = (x_1^2x_2^2 + x_1[x_1,x_2]x_2)(x_1^2x_2^2 + x_1[x_1,x_2]x_2) \quad (1\text{-}20)\\ &= (x_1^2x_2^2)(x_1^2x_2^2) + (x_1^2x_2^2)(x_1[x_1,x_2]x_2) + (x_1[x_1,x_2]x_2)(x_1^2x_2^2) + \\ &+ (x_1[x_1,x_2]x_2)(x_1[x_1,x_2]x_2).\end{aligned}$$

Usando a igualdade $[ab,c] = a[b,c] + [a,c]b$, temos $[x_1^2, x_2] = x_1[x_1,x_2] + [x_1,x_2]x_1 = 2x_1[x_1,x_2] + [x_1,x_2,x_1] = [x_1,x_2,x_1]$. Assim $x_1^2 + T^{(3)}$ é central em Q_3. Como $[x_1,x_2] + T^{(3)}$ também é central em Q_3, segue de (1-20) que

$$(x_1x_2)^4 \equiv x_1^4x_2^4 + 2x_1^3x_2^3[x_1,x_2] + (x_1x_2)^2[x_1,x_2][x_1,x_2] \pmod{T^{(3)}}.$$

Como $char(F) = 2$ e $[x_1,x_2][x_1,x_2] \in T^{(3)}$ (Lema 1.18 (ii)), obtemos $(x_1x_2)^4 \equiv x_1^4x_2^4 \pmod{T^{(3)}}$. □

1.4 Polinômios centrais da álgebra Q_3

O objetivo desta seção é dar uma descrição dos polinômios centrais da álgebra $Q_3 = F\langle X\rangle/T^{(3)}$. Essa descrição foi obtida em 2010, independentemente por Bekh-Ochir e Rankin [3], por Brandão Jr, Koshlukov, Krasilnikov e Silva [7] e por Grishim [23]. Seguiremos exposição de [7].

Seja F um corpo qualquer de característica $p > 0$. Seja $q(x_1,x_2) = x_1^{p-1}[x_1,x_2]x_2^{p-1}$ e para cada $n \geq 1$ defina

$$q_n = q_n(x_1,\dots,x_{2n}) = q(x_1,x_2)q(x_3,x_4)\dots q(x_{2n-1},x_{2n}).$$

Agora seja E a álgebra de Grassmann (infinitamente gerada e unitária) sobre um corpo infinito F de característica $p > 2$. Foi mostrado em ([3], [7], [23]) (veja o Teorema 0.1) que $C(E)$, o espaço vetorial dos polinômios centrais de E, é gerado como T-subespaço de $F\langle X\rangle$ pelos polinômios

$$x_1[x_2,x_3,x_4],\ x_0^p,\ x_0^p q_1,\ \dots, x_0^p q_n, \dots. \tag{1-21}$$

Seja M o conjunto dos monômios mônicos de $F\langle X\rangle$, isto é $M = \{x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n} : n, i_s \geq 0\}$. A seguinte descrição mais precisa de $C(E)$ foi obtida por Deryabina e Krasilnikov [10] à partir de [7].

Teorema 1.23 (veja [7, 10]). *Seja F um corpo infinito de característica $p > 2$. Então $C(E)$, o espaço vetorial dos polinômios centrais de E, é gerado (como espaço vetorial) pelos polinômios*

$$a_1[a_2,a_3,a_4],\ [a_1,a_2],\ a_i \in M, \tag{1-22}$$

$$x_{i_1}^{pr_1}\dots x_{i_k}^{pr_k}x_{j_1}^{p-1}[x_{j_1},x_{j_2}]x_{j_2}^{p-1}\dots x_{j_{2l-1}}^{p-1}[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}]x_{j_{2l}}^{p-1}, \tag{1-23}$$
$$k \geq 0, l \geq 0, r_s > 0, i_1 < \dots < i_k, j_1 < \dots < j_{2l}.$$

Na verdade as demonstrações do Teorema 0.1 apresentada em [7] e do Teorema 1.23 apresentada em [10] funcionam para a álgebra $Q_3 = F\langle X\rangle/T^{(3)}$ onde F é um corpo qualquer de característica $p \geq 2$. Assim podemos reescrever esses dois teoremas nas formas seguintes:

Teorema 1.24 (veja [7, 10]). *Seja F um corpo qualquer de característica $p \geq 2$. Então $C(Q_3)$, o espaço vetorial dos polinômios centrais da álgebra $Q_3 = F\langle X\rangle/T^{(3)}$, é gerado (como espaço vetorial) pelos polinômios*

$$a_1[a_2,a_3,a_4],\ [a_1,a_2],\ a_i \in M, \tag{1-24}$$

$$x_{i_1}^{pr_1}\dots x_{i_k}^{pr_k}x_{j_1}^{p-1}[x_{j_1},x_{j_2}]x_{j_2}^{p-1}\dots x_{j_{2l-1}}^{p-1}[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}]x_{j_{2l}}^{p-1}, \tag{1-25}$$
$$k \geq 0, l \geq 0, r_s > 0, i_1 < \dots < i_k, j_1 < \dots < j_{2l}.$$

Corolário 1.25 (veja [7]). *Seja F um corpo qualquer de característica $p \geq 2$. Então $C(Q_3)$, o espaço vetorial dos polinômios centrais da álgebra $Q_3 = F\langle X\rangle/T^{(3)}$, é gerado como T-subespaço de $F\langle X\rangle$ pelos polinômios*

$$x_1[x_2,x_3,x_4],\ x_0^p,\ x_0^pq_1,\ x_0^pq_2,\dots,x_0^pq_n,\dots. \tag{1-26}$$

Para tornar esta tese mais auto-suficiente, vamos demonstrar o Teorema 1.24 e o Corolário 1.25.

Lema 1.26 ([7], Lema 10). *Seja F um corpo qualquer e $g = g(x_2,\dots,x_n) \in F\langle X\rangle$ um polinômio que não depende de x_1. Se $x_1g + T^{(3)}$ for central em $Q_3 = F\langle X\rangle/T^{(3)}$, então $g \in T^{(3)}$.*

Demonstração. Usando a igualdade $[a,bc] = b[a,c] + [a,b]c$, temos $[x_0,x_1g] + T^{(3)} = x_1[x_0,g] + [x_0,x_1]g + T^{(3)}$. Como $x_1g + T^{(3)}$ é central em Q_3, temos $[x_0,x_1g] \in T^{(3)}$.

Assim
$$x_1[x_0,g]+T^{(3)} = -[x_0,x_1]g+T^{(3)}. \tag{1-27}$$

Seja $g+T^{(3)} = \sum_t \alpha_t a_t + T^{(3)}$ onde $\alpha_t \in F$ e os $a_t + T^{(3)}$ são elementos distintos da forma (1-17). Observe que os polinômios a_t não dependem de x_0 e x_1 (porque $g = g(x_2,\ldots,x_n)$ não depende). Agora, aplicando a igualdade $[a,a_1\ldots a_n] = \sum_{i=1}^{n} a_1\ldots a_{i-1}[a,a_i]a_{i+1}\ldots a_n$ (Lema 1.17 (ii)) em $[x_0,a_t]$ e observando que $[x_1,x_2]+T^{(3)}$ é central em Q_3, segue que para cada t,
$$[x_0,a_t]+T^{(3)} = \sum_k \beta_k^{(t)} b_k^{(t)} + T^{(3)},$$
onde $\beta_k^{(t)} \in F$ e $b_k^{(t)} + T^{(3)}$ são elementos da forma (1-17) que não dependem de x_1 e tais que $j_1 = 0$. Assim
$$x_1[x_0,g]+T^{(3)} = \sum_t \sum_k \alpha_t \beta_k^{(t)} x_1 b_k^{(t)} + T^{(3)}.$$

Observe que cada $x_1 b_k^{(t)}$ é um polinômio de (1-17) no qual x_1 aparece na "parte não-comutador" $x_{i_1}^{r_1}\ldots x_{i_k}^{r_k}$ e a "parte comutador" $[x_{j_1},x_{j_2}]\ldots[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}]$ não depende de x_1.

Por outro lado, $[x_0,x_1]g+T^{(3)} = \sum_t \alpha_t [x_0,x_1]a_t + T^{(3)}$. Como os polinômios a_t não dependem de x_0 e x_1, e $[x_0,x_1]+T^{(3)}$ é central em Q_3, os produtos $[x_0,x_1]b_t$ são polinômios distintos da forma (1-17) tais que x_1 aparece na "parte comutador" e a "parte não-comutador" não depende de x_1.

Mostramos assim, que existem dois conjuntos B_1 e B_2 de polinômios da forma (1-17) com $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ e tais que
$$x_1[x_0,g] \text{ e } [x_0,x_1]g$$
são, módulo $T^{(3)}$, combinações lineares de B_1 e B_2, respectivamente. Comos os elementos de (1-17) são linearmente independentes (Proposição 1.21), segue de (1-27) que
$$x_1[x_0,g]+T^{(3)} = -[x_0,x_1]g+T^{(3)} = T^{(3)}.$$
Consequentemente $\sum_t \alpha_t [x_0,x_1]a_t + T^{(3)} = [x_0,x_1]g+T^{(3)} = T^{(3)}$, e assim $\alpha_t = 0$ para cada t. Portanto $g+T^{(3)} = \sum_t \alpha_t a_t + T^{(3)} = T^{(3)}$, isto é $g \in T^{(3)}$ e a demonstração está completa. $\square$

Lema 1.27 ([7], Lema 11)**.** *Seja F um corpo qualquer e $f = f(x_1,\ldots,x_n) \in F\langle X\rangle$ um polinômio homogêneo de grau 1 em x_1. Se $f+T^{(3)}$ for central em $Q_3 = F\langle X\rangle/T^{(3)}$ então $f \in \langle [x_1,x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)}$.*

Demonstração. Seja $f = \sum_i \alpha_i a_i x_1 b_i$ onde $\alpha_i \in F$ e a_i, b_i são monômios (algum dos quais pode ser 1). Como $a_i x_1 b_i = x_1 b_i a_i + [a_i, x_1 b_i]$, temos

$$f = x_1 g(x_2, \ldots, x_n) + h(x_1, \ldots, x_n) \tag{1-28}$$

onde $h(x_1, \ldots, x_n) = \sum_i \alpha_i [a_i, x_1 b_i]$ pertence ao T-espaço gerado por $[x_1, x_2]$ e $g = g(x_2, \ldots, x_n)$ não depende de x_1. Como $f + T^{(3)}$ e $h + T^{(3)}$ são centrais em Q_3, segue de (1-28) que $x_1 g + T^{(3)}$ também é central em Q_3. Pelo Lema 1.26, obtemos $g \in T^{(3)}$ e novamente por (1-28) temos $f \in \langle [x_1, x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)}$. □

Proposição 1.28 (veja [3, 7, 23])**.** *Seja F um corpo de característica 0. Então $C(Q_3)$, o espaço vetorial dos polinômios centrais da álgebra $Q_3 = F\langle X \rangle / T^{(3)}$, é gerado como T-subespaço de $F\langle X \rangle$ por 1 e pelos polinômios $[x_1, x_2]$ e $x_1[x_2, x_3, x_4]$.*

Demonstração. Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio central de Q_3. Pela Proposição 1.15, $C(Q_3)$ é gerado como T-subespaço por seus polinômios multilineares. Assim podemos assumir que f é multilinear. Em particular, f é homogêneo de grau 1 em x_1, logo o Lema 1.27 garante que f pertence a $\langle [x_1, x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)}$, isto é, f pertence ao T-subespaço gerado pelos polinômios $[x_1, x_2]$ e $x_1[x_2, x_3, x_4]$. □

Lema 1.29 ([7], Lema 12)**.** *Seja F um corpo de característica p e $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X \rangle$ um polinômio homogêneo de grau m_1 em x_1 onde m_1 não é um múltiplo de p. Se $f + T^{(3)}$ for central em $Q_3 = F\langle X \rangle / T^{(3)}$ então $f \in \langle [x_1, x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)}$.*

Demonstração. Pela Proposição 1.16 não há perda de generalidade em supor que f é multi-homogêneo de grau m_1 em x_1. Escreva $m_1 = pq + r$ com $0 < r < p$. Usando a base de Q_3 dada na Proposição 1.21, vemos que existe $g = g(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X \rangle$, multi-homogêneo de grau r em x_1 tal que

$$f + T^{(3)} = x_1^{pq} g + T^{(3)}. \tag{1-29}$$

Defina o endomorfismo φ de $F\langle X \rangle$ por $\varphi(x_1) = 1 + x_1$ e $\varphi(x_i) = x_i$ se $i > 1$. Por (1-29) temos

$$\varphi(f) + T^{(3)} = (1 + x_1^p)^q g(1 + x_1, x_2, \ldots, x_n) + T^{(3)}. \tag{1-30}$$

Como $g(x_1, \ldots, x_n)$ é a componente multi-homogênea (de grau r em x_1) do polinômio $(1 + x_1^p)^q g(1 + x_1, x_2, \ldots, x_n)$, segue de (1-30) que $g + T^{(3)}$ é central em Q_3. Seja $h = h(y_1, \ldots, y_r, x_2, \ldots, x_n)$ a linearização total de g em x_1. Então $h + T^{(3)}$ é central em Q_3 e segue do Lema 1.27 que $h \in \langle [x_1, x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)}$. Como

$$h(x_1, \ldots, x_1, x_2, \ldots, x_n) = r! g(x_1, \ldots, x_n),$$

obtemos $g \in \langle [x_1,x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)}$. Como $x_1^p + T^{(3)}$ é central em Q_3 (Lema 1.22 (i)) e $C(Q_3)$ é uma álgebra (Proposição 1.13) segue que $x_1^{pq} + T^{(3)}$ é central em Q_3. Assim

$$x_1^{pq}[x_2,x_3] + T^{(3)} = [x_1^{pq}x_2,x_3] + T^{(3)}. \tag{1-31}$$

Como $g \in \langle [x_1,x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)}$ segue de (1-29) e (1-31) que $f \in \langle [x_1,x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)}$. □

Lema 1.30 (veja [3, 7, 23])**.** *Seja F um corpo de característica $p \geq 2$. Então $x_1^{p-1}[x_1,x_2]x_2^{p-1} + T^{(3)}$ é central em $Q_3 = F\langle X \rangle / T^{(3)}$.*

Demonstração. Aplicando a igualdade $[a_1a_2 \ldots a_n, a] = \sum_{i=1}^{n} a_1 \ldots a_{i-1}[a_i,a]a_{i+1} \ldots a_n$ (Lema 1.17) temos

$$\begin{aligned}
[x_1^{p-1}[x_1,x_2]x_2^{p-1},x_3] &= [x_1,x_3]x_1^{p-2}[x_1,x_2]x_2^{p-1} + \ldots + x_1^{p-1}[x_1,x_2,x_3]x_2^{p-1} + \ldots + \\
&+ x_1^{p-1}[x_1,x_2]x_2^{p-2}[x_2,x_3].
\end{aligned}$$

Como $[a_1,a_2] + T^{(3)}$ é central em Q_3 e $[a_1,a_2][a_1,a_3] \in T^{(3)}$ (Lema 1.18 (ii)), obtemos

$$\begin{aligned}
[x_1^{p-1}[x_1,x_2]x_2^{p-1},x_3] &= [x_1,x_3][x_1,x_2]x_1^{p-2}x_2^{p-1} + \ldots + x_1^{p-1}[x_1,x_2,x_3]x_2^{p-1} + \ldots + \\
&+ x_1^{p-1}[x_1,x_2][x_2,x_3]x_2^{p-2} \equiv 0 \pmod{T^{(3)}}.
\end{aligned}$$

Assim $x_1^{p-1}[x_1,x_2]x_2^{p-1} + T^{(3)}$ é central em Q_3. □

Demonstração do Teorema 1.24.

Vamos verificar primeiramente que (1-24)-(1-25) são polinômios centrais da álgebra $Q_3 = F\langle X \rangle / T^{(3)}$. É claro que $x_1[x_2,x_3,x_4] + T^{(3)}$ e $[x_1,x_2] + T^{(3)}$ são centrais em Q_3. Como $C(Q_3)$ é um T-subespaço (Proposição 1.13), segue que ele contém os polinômios da forma (1-24). Como $x_0^p + T^{(3)}$ e $x_1^{p-1}[x_1,x_2]x_2^{p-1} + T^{(3)}$ são centrais em Q_3 (Lema 1.22 (i) e Lema 1.30, respectivamente) e $C(Q_3)$ é uma T-subálgebra (Proposição 1.13), é fácil ver que os polinômios da forma (1-25) também pertencem a $C(Q_3)$.

Agora vamos mostrar que os polinômios da forma (1-24) e (1-25) geram $C(Q_3)$ como espaço vetorial. Seja $f = f(x_1,\ldots,x_n)$ um polinômio central da álgebra Q_3. Se $f \in T^{(3)}$, então f é uma combinação linear de polinômios da forma $a_1[a_2,a_3,a_4]$ ($a_i \in M$), que estão entre aqueles de (1-24).

Podemos então assumir que $f \notin T^{(3)}$. Pela Proposição 1.16 podemos assumir também que f é multi-homogêneo de grau m_i em cada variável x_i ($i = 1,\ldots,n$). Suponha que o grau de alguma variável x_i não seja divisível por p. Reenumerando as variáveis x_i, podemos assumir sem perda de generalidade que $i = 1$. Assim, pelo Lema 1.29 temos

$$f \in \langle [x_1,x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)}. \tag{1-32}$$

Como $\langle [x_1,x_2] \rangle^{TS}$ é gerado como espaço vetorial pelos polinômios $[a_1,a_2]$ $(a_i \in M)$ e $T^{(3)}$ é gerado como espaço vetorial pelos polinômios $a_1[a_2,a_3,a_4]$ $(a_i \in M)$, segue de (1-32) que f é uma combinação linear de polinômios da forma (1-24).

Agora suponha que todos os graus das variáveis x_i sejam divisíveis por p. Já vimos que $[x_1,x_2]+T^{(3)}$ e $x^p+T^{(3)}$ são centrais em Q_3. Assim, segue da Proposição 1.21 que $f+T^{(3)}$ pode ser escrito como uma combinação linear de elementos da forma

$$x_{i_1}^{pr_1}\ldots x_{i_k}^{pr_k}x_{j_1}^{p-1}[x_{j_1},x_{j_2}]x_{j_2}^{p-1}\ldots x_{j_{2l-1}}^{p-1}[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}]x_{j_{2l}}^{p-1}+T^{(3)}$$

onde $k \geq 0, l \geq 0, r_s > 0, 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ e $1 \leq j_1 < \ldots < j_{2l} \leq n$. Segue assim que f pode ser escrito como uma combinação linear de polinômios da forma $a_1[a_2,a_3,a_4]$ $(a_i \in M)$ juntamente com aqueles da forma (1-25).

O lema seguinte é bem conhecido e a demonstração que daremos é apenas um esboço.

Lema 1.31. *Seja F um corpo de característica $p > 0$. Então o polinômio $[x_1,x_2]\ldots[x_{2n-1},x_{2n}]$ pertence a $\langle q_n \rangle^{TS}$.*

Demonstração. Seja $V = \langle x_1^{p-1}[x_1,x_2]x_2^{p-1} \rangle^{TS}$. Defina o endomorfismo φ de $F\langle X \rangle$ por $\varphi : x_i \to 1+\alpha x_i, i = 1,2, \alpha \in \mathbb{Z}_p$. Então

$$\sum_{k=0}^{p-1} \alpha^k g_k \in V \tag{1-33}$$

onde $g_k = \binom{p-1}{k} x_1^k [x_1,x_2]x_2^{p-1}$. Fazendo uso do bem conhecido argumento da matriz de Vandermonde (veja por exemplo [[13],Proposição 4.2.3]), pode ser mostrado que $g_k \in V$ para cada $k = 0,\ldots,p-2$. Em particular $g_0 = [x_1,x_2]x_2^{p-1} \in V$. Usando novamente esse argumento, mas agora com $V = \langle [x_1,x_2]x_2^{p-1} \rangle^{TS}$, podemos mostrar que $[x_1,x_2]\langle$ pertence a $[x_1,x_2]x_2^{p-1}\rangle^{TS}$. Consequentemente $[x_1,x_2]$ pertence a $\langle x_1^{p-1}[x_1,x_2]x_2^{p-1} \rangle^{TS}$. Para o caso geral, se fizermos $V = \langle q_n \rangle^{TS}$ e aplicarmos o mesmo argumento acima n vezes, podemos mostrar que $[x_1,x_2]\ldots[x_{2n-1},x_{2n}]$ pertence a $\langle q_n \rangle^{TS}$.

□

Demonstração do Corolário 1.25.

Seja Q o T-subespaço gerado pelos polinômios (1-26). Devemos mostrar que $C(Q_3) = Q$. Como os polinômios (1-26) estão entre os polinômios (1-24)-(1-25) (que pertencem a $C(Q_3)$ pelo Teorema 1.24), temos $Q \subseteq C(Q_3)$.

Vamos mostrar que $C(Q_3) \subseteq Q$. Pelo Teorema 1.24 é suficiente mostrar que os polinômios (1-24)-(1-25) pertencem a Q. Como $[x_1,x_2]$ pertence ao T-subespaço gerado pelo polinômio $q(x_1,x_2) = x_1[x_1,x_2]x_2$ (Lema 1.31), segue que $[x_1,x_2]$ pertence a Q. Como $x_1[x_2,x_3,x_4]$ também pertence a Q, segue que os polinômios (1-24) pertencem a Q. Dividiremos o argumento restante em dois casos.

Caso $p > 2$. Pelo Lema 1.22 (ii) temos

$$(x_1x_2)^p \equiv x_1^p x_2^p \pmod{T^{(3)}}.$$

Usando essa relação, não é difícil ver que cada polinômio da forma (1-25) pertence ao T-subespaço gerado pelos polinômios $x_1[x_2,x_3,x_4]$, x_0^p e $x_0^p q_m$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Assim os polinômios (1-25) pertencem a Q quando $char(F) > 2$.

Caso $p = 2$. Observe que

$$\begin{aligned} (x_1x_2)^2 &= x_1x_2x_1x_2 = x_1(x_1x_2 + [x_2,x_1])x_2 = \\ &= x_1^2x_2^2 + x_1[x_2,x_1]x_2 = x_1^2x_2^2 + x_1[x_1,x_2]x_2. \end{aligned} \tag{1-34}$$

Usando (1-34) não é difícil ver que cada polinômio da forma (1-25) pertence ao T-subespaço gerado pelos polinômios x_0^2 e $x_0^2 q_m$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Assim os polinômios (1-25) pertencem a Q quando $char(F) = 2$.

Mostramos assim que $C(Q_3) = Q$, ou seja $C(Q_3)$ é gerado como T-subespaço pelos polinômios (1-26).

1.5 Relações na álgebra Q_4

Nesta seção exibiremos algumas relações na álgebra $F\langle X\rangle/T^{(4)}$. O Lema seguinte é bem conhecido, veja [9, 11, 16, 21, 33, 34, 44].

Lema 1.32. *Seja F um corpo qualquer. Então $T^{(4)}$ contém os seguintes polinômios:*

$$[x_1,x_2,x_3,x_4], \tag{1-35}$$

$$[x_1,x_2,x_3][x_4,x_5,x_6], \tag{1-36}$$

$$[x_1,x_2,x_3][x_4,x_5] + [x_1,x_2,x_4][x_3,x_5], [x_1,x_2,x_3][x_4,x_5] + [x_1,x_4,x_3][x_2,x_5], \tag{1-37}$$

$$([x_1,x_2][x_3,x_4] + [x_1,x_3][x_2,x_4])[x_5,x_6]. \tag{1-38}$$

Demonstração. É claro que o polinômio (1-35) pertence a $T^{(4)}$. Vamos mostrar que os polinômios de (1-37) pertencem a $T^{(4)}$. Usando a igualdade $[ab,c] = a[b,c] + [a,c]b$

obtemos

$$\begin{aligned}[x_1,x_2,x_3x_4,x_5] &= [x_3[x_1,x_2,x_4],x_5]+[[x_1,x_2,x_3]x_4,x_5] \\ &= x_3[x_1,x_2,x_4,x_5]+[x_3,x_5][x_1,x_2,x_4]+ \\ &+ [x_1,x_2,x_3][x_4,x_5]+[x_1,x_2,x_3,x_5]x_4.\end{aligned}$$

Como os polinômios $[x_1,x_2,x_3x_4,x_5], x_3[x_1,x_2,x_4,x_5]$ e $[x_1,x_2,x_3,x_5]x_4$ pertencem a $T^{(4)}$, temos

$$[x_1,x_2,x_3][x_4,x_5]+[x_3,x_5][x_1,x_2,x_4] \in T^{(4)}. \tag{1-39}$$

Como $[x_3,x_5][x_1,x_2,x_4] \equiv [x_1,x_2,x_4][x_3,x_5] \pmod{T^{(4)}}$, segue de (1-39) que

$$[x_1,x_2,x_3][x_4,x_5]+[x_1,x_2,x_4][x_3,x_5] \in T^{(4)}. \tag{1-40}$$

Agora, pelo Lema 1.17 (i) e pela igualdade $[ab,c]=a[b,c]+[a,c]b$ temos

$$\begin{aligned}[x_1x_2,x_3,x_4,x_5] &= [x_1[x_2,x_3,x_4],x_5]+[[x_1,x_3][x_2,x_4],x_5]+ \\ &+ [[x_1,x_4][x_2,x_3],x_5]+[[x_1,x_3,x_4]x_2,x_5] \\ &= x_1[x_2,x_3,x_4,x_5]+[x_1,x_5][x_2,x_3,x_4]+[x_1,x_3][x_2,x_4,x_5]+ \\ &+ [x_1,x_3,x_5][x_2,x_4]+[x_1,x_4][x_2,x_3,x_5]+[x_1,x_4,x_5][x_2,x_3]+ \\ &+ [x_1,x_3,x_4][x_2,x_5]+[x_1,x_3,x_4,x_5]x_2.\end{aligned} \tag{1-41}$$

Observe que os polinômios $[x_1x_2,x_3,x_4,x_5], x_1[x_2,x_3,x_4,x_5]$ e $[x_1,x_3,x_4,x_5]x_2$ pertencem a $T^{(4)}$. Por (1-40), o polinômio $[x_1,x_3,x_5][x_2,x_4]+[x_1,x_3,x_4][x_2,x_5]$ também pertence a $T^{(4)}$. Assim, segue de (1-41) que

$$[x_1,x_5][x_2,x_3,x_4]+[x_1,x_3][x_2,x_4,x_5]+[x_1,x_4][x_2,x_3,x_5]+[x_1,x_4,x_5][x_2,x_3] \in T^{(4)}. \tag{1-42}$$

Como $[a_1,a_2][a_3,a_4,a_5] \equiv [a_3,a_4,a_5][a_1,a_2] \pmod{T^{(4)}}$, segue de (1-42) que

$$[x_2,x_3,x_4][x_1,x_5]+[x_2,x_4,x_5][x_1,x_3]+[x_2,x_3,x_5][x_1,x_4]+[x_1,x_4,x_5][x_2,x_3] \in T^{(4)}. \tag{1-43}$$

Novamente por (1-40), o polinômio $[x_2,x_3,x_4][x_1,x_5]+[x_2,x_3,x_5][x_1,x_4]$ pertence a $T^{(4)}$. Logo (1-43) implica que

$$[x_2,x_4,x_5][x_1,x_3]+[x_1,x_4,x_5][x_2,x_3] \in T^{(4)},$$

e consequentemente

$$[x_1,x_2,x_3][x_4,x_5]+[x_1,x_4,x_3][x_2,x_5] \in T^{(4)}. \tag{1-44}$$

Por (1-40) e (1-44), vemos que os polinômios de (1-37) pertencem a $T^{(4)}$. Vamos mostrar que o polinômio (1-36) pertence a $T^{(4)}$. Por (1-40) temos

$$[x_1,x_2,x_3][[x_4,x_5],x_6]+[x_1,x_2,[x_4,x_5]][x_3,x_6]\in T^{(4)}.$$

Como $[x_1,x_2,[x_4,x_5]]=[x_1,x_2,x_4,x_5]-[x_1,x_2,x_5,x_4]\in T^{(4)}$, obtemos

$$[x_1,x_2,x_3][x_4,x_5,x_6]\in T^{(4)}. \tag{1-45}$$

Finalmente, vamos mostrar que o polinômio (1-38) pertence a $T^{(4)}$. Por (1-44) obtemos

$$[x_1x_2,x_3,x_4][x_5,x_6]+[x_5,x_3,x_4][x_1x_2,x_6]\in T^{(4)}. \tag{1-46}$$

Seja $\omega(x_1,x_2,x_3,x_4)=[x_1,x_2][x_3,x_4]+[x_1,x_3][x_2,x_4]$. Por um lado, segue do Lema 1.17 (i) que

$$\begin{aligned}[x_1x_2,x_3,x_4][x_5,x_6] &= x_1[x_2,x_3,x_4][x_5,x_6]-\omega(x_1,x_3,x_4,x_2)[x_5,x_6]+[x_1,x_3,x_4]x_2[x_5,x_6]\\ &= x_1[x_2,x_3,x_4][x_5,x_6]+x_2[x_1,x_3,x_4][x_5,x_6]+[x_1,x_3,x_4,x_2][x_5,x_6]-\\ &- \omega(x_1,x_3,x_4,x_2)[x_5,x_6],\end{aligned}$$

isto é

$$\begin{aligned}[x_1x_2,x_3,x_4][x_5,x_6] &\equiv x_1[x_2,x_3,x_4][x_5,x_6]+x_2[x_1,x_3,x_4][x_5,x_6]-\\ &- \omega(x_1,x_3,x_4,x_2)[x_5,x_6] \pmod{T^{(4)}}.\end{aligned} \tag{1-47}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}[x_5,x_3,x_4][x_1x_2,x_6] &= [x_5,x_3,x_4]x_1[x_2,x_6]+[x_5,x_3,x_4][x_1,x_6]x_2\\ &= x_1[x_5,x_3,x_4][x_2,x_6]+[x_5,x_3,x_4,x_1][x_2,x_6]+\\ &+ x_2[x_5,x_3,x_4][x_1,x_6]+[x_5,x_3,x_4,x_2][x_1,x_6]+[x_5,x_3,x_4][x_1,x_6,x_2].\end{aligned}$$

Usando (1-45), obtemos

$$[x_5,x_3,x_4][x_1x_2,x_6]\equiv x_1[x_5,x_3,x_4][x_2,x_6]+x_2[x_5,x_3,x_4][x_1,x_6] \pmod{T^{(4)}}. \tag{1-48}$$

Somando (1-47) e (1-48), segue de (1-46) que

$$\begin{aligned}x_1([x_2,x_3,x_4][x_5,x_6]+[x_5,x_3,x_4][x_2,x_6]) &+ x_2([x_1,x_3,x_4][x_5,x_6]+[x_5,x_3,x_4][x_1,x_6])-\\ &- \omega(x_1,x_3,x_4,x_2)[x_5,x_6]\in T^{(4)}.\end{aligned}$$

Finalmente, por (1-44), segue que $\omega(x_1,x_3,x_4,x_2)[x_5,x_6] \in T^{(4)}$ e portanto $\omega(x_1,x_2,x_3,x_4)[x_5,x_6] \in T^{(4)}$. Mostramos assim que todos os polinômios de (1-35)-(1-38) pertecem a $T^{(4)}$, o que conclui a demonstração do lema. $\square$

Na verdade os polinômios (1-35)-(1-36) do Lema 1.32 geram $T^{(4)}$ como ideal bilateral de $F\langle X\rangle$ (veja [[11],Teorema 1.3]), mas não precisaremos desse resultado mais geral nesta tese. O corolário seguinte é bem conhecido, veja [11, 16, 21, 33, 44].

Corolário 1.33. *Seja F um corpo qualquer e $a_1,a_2,\ldots,a_{2k+1}$ polinômios de $F\langle X\rangle$. Então*

(i) $[a_{\sigma(1)},a_{\sigma(2)}]\ldots[a_{\sigma(2k-1)},a_{\sigma(2k)}] \equiv (-1)^{\sigma}[a_1,a_2]\ldots[a_{2k-1},a_{2k}] \pmod{T^{(4)}}, k \geq 3, \sigma \in S_{2k}$,

(ii) $[a_{\sigma(1)},a_{\sigma(2)},a_{\sigma(3)}][a_{\sigma(4)},a_{\sigma(5)}]\ldots[a_{\sigma(2k)},a_{\sigma(2k+1)}]$
$\equiv (-1)^{\sigma}[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5]\ldots[a_{2k},a_{2k+1}] \pmod{T^{(4)}}, k \geq 2, \sigma \in S_{2k+1}$,

(iii) $[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5] \in T^{(4)}$ *desde que* $char(F) \neq 3$.

Demonstração. Comecemos por (i). Vamos provar a afirmação para $k=3$, isto é

$$[a_{\sigma(1)},a_{\sigma(2)}][a_{\sigma(3)},a_{\sigma(4)}][a_{\sigma(5)},a_{\sigma(6)}] \equiv (-1)^{\sigma}[a_1,a_2][a_3,a_4][a_5,a_6] \pmod{T^{(4)}} \tag{1-49}$$

para qualquer $\sigma \in S_6$; o caso geral é análogo. É claro que (1-49) é válido para $\sigma=(12), \sigma=(34)$ e $\sigma=(56)$. Como $[x_1,x_2][x_3,x_4][x_5,x_6]+[x_1,x_3][x_2,x_4][x_5,x_6] \in T^{(4)}$ (Lema 1.32) vemos que (1-49) vale para $\sigma=(23)$. Como $[[a_1,a_2],[a_3,a_4]] = [a_1,a_2,a_3,a_4]-[a_1,a_2,a_4,a_3] \in T^{(4)}$, temos $[a_1,a_2][a_3,a_4] \equiv [a_3,a_4][a_1,a_2] \pmod{T^{(4)}}$. Usando a última relação e observando que $[x_3,x_4][x_5,x_6][x_1,x_2]+[x_3,x_5][x_4,x_6][x_1,x_2] \in T^{(4)}$ (Lema 1.32), obtemos

$$\begin{aligned}
[x_1,x_2][x_3,x_4][x_5,x_6] &\equiv [x_3,x_4][x_5,x_6][x_1,x_2] \pmod{T^{(4)}}\\
&\equiv -[x_3,x_5][x_4,x_6][x_1,x_2] \pmod{T^{(4)}}\\
&\equiv -[x_1,x_2][x_3,x_5][x_4,x_6] \pmod{T^{(4)}}.
\end{aligned}$$

Portanto (1-49) é válido para $\sigma=(45)$. Como S_6 é gerado pelas permutações $(12),(23),(34),(45)$ e (56), segue que (1-49) é válido para qualquer $\sigma \in S_6$.

Agora vamos provar (ii). Consideraremos apenas o caso $k=5$, isto é

$$[x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)}][x_{\sigma(4)},x_{\sigma(5)}] \equiv (-1)^{\sigma}[x_1,x_2,x_3][x_4,x_5] \pmod{T^{(4)}} \tag{1-50}$$

para qualquer $\sigma \in S_5$; o caso geral é análogo. É claro que (1-50) é válido para $\sigma=(12)$ e $\sigma=(45)$. Vimos no Lema 1.32 que os polinômios $[x_1,x_2,x_3][x_4,x_5]+[x_1,x_2,x_4][x_3,x_5]$

e $[x_1,x_2,x_3][x_4,x_5]+[x_1,x_4,x_3][x_2,x_5]$ pertencem a $T^{(4)}$. Isso mostra que (1-50) também é válido para $\sigma=(34)$ e $\sigma=(24)$. Como S_5 é gerado pelas permutações $(12),(24),(34)$ e (45), segue que (1-50) é válido para qualquer $\sigma\in S_5$.

Vejamos (iii). A identidade de Jacobi nos fornece

$$[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5]+[a_2,a_3,a_1][a_4,a_5]+[a_3,a_1,a_2][a_4,a_5]=0.$$

Por (1-50) isso implica que $3[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5]\in T^{(4)}$. Como $char(F)\neq 3$, obtemos $[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5]\in T^{(4)}$. $\square$

CAPÍTULO 2

Polinômios centrais da álgebra Q_4

Neste capítulo daremos uma descrição dos polinômios centrais da álgebra Q_4 onde F é um corpo qualquer. Dividimos o capítulo em duas seções: na primeira tratamos o caso de característica $p \neq 3$ e na segunda o caso de característica $p = 3$.

2.1 O caso de característica $\neq 3$

O objetivo desta seção é fornecer uma descrição dos polinômios centrais da álgebra Q_4 onde F é um corpo de característica $p \neq 3$. Mais precisamente, provaremos o segundo e o terceiro resultado principal desta tese.

Teorema 2.1. *Seja F um corpo de característica 2. Então $C(Q_4)$, o espaço vetorial dos polinômios centrais da álgebra $Q_4 = F\langle X\rangle/T^{(4)}$, é gerado como T-subespaço de $F\langle X\rangle$ pelos polinômios*

$$x_1[x_2,x_3,x_4],\ x_0^4,\ x_0^2q_2,\ x_0^2q_3,\ x_0^2q_4,\dots,x_0^2q_n,\dots.$$

Teorema 2.2. *Seja F um corpo de característica $p > 3$. Então $C(Q_4)$, o espaço vetorial dos polinômios centrais de $Q_4 = F\langle X\rangle/T^{(4)}$ é gerado (como espaço vetorial) pelos polinômios*

$$[a_1,a_2][a_3,a_4],\ \ a_1[a_2,a_3,a_4], a_i \in M, \tag{2-1}$$

$$x_{i_1}^{pr_1}\dots x_{i_k}^{pr_k}x_{j_1}^{p-1}[x_{j_1},x_{j_2}]x_{j_2}^{p-1}\dots x_{j_{2l-1}}^{p-1}[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}]x_{j_{2l}}^{p-1}, \tag{2-2}$$

$$k \geq 0, l = 0 \text{ } ou \text{ } l \geq 2, r_s > 0, i_1 < \dots < i_k, j_1 < \dots < j_{2l}.$$

Começaremos estudando a forma dos polinômios centrais de Q_4 que são homogêneos de grau 1 em x_1.

Lema 2.3. *Seja F um corpo qualquer e $f = f(x_1,\dots,x_n) \in F\langle X\rangle$ um polinômio homogêneo de grau 1 em x_1 tal que f pode ser escrito, módulo $T^{(3)}$, como uma* *combinação linear de polinômios da forma*

$$x_{i_1}^{r_1}\dots x_{i_k}^{r_k}[x_{j_1},x_{j_2}]\dots[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}], \tag{2-3}$$

onde $k\geq 0$, $l\geq 2$, $r_s>0$, $1\leq i_1<\dots<i_k\leq n$ *e* $1\leq j_1<\dots<j_{2l}\leq n$. *Então existem polinômios* $g_1=g_1(x_2,\dots,x_n)\in F\langle X\rangle$ *(que não depende de* x_1*),* $g_2\in\langle[x_1,x_2][x_3,x_4]\rangle^{TS}$ *e* $g_3\in T^{(3)}$ *tais que* $f=x_1g_1+g_2+g_3$.

Demonstração. Se mostrarmos que para cada polinômio h da forma (2-3) existem polinômios $h_1=h_1(x_2,\dots,x_n)\in F\langle X\rangle$ (que não depende de x_1), $h_2\in\langle[x_1,x_2][x_3,x_4]\rangle^{TS}$ e $h_3\in T^{(3)}$ tais que $h=x_1h_1+h_2+h_3$, então é fácil ver que existem polinômios $g_1=g_1(x_2,\dots,x_n)\in F\langle X\rangle$ (que não depende de x_1), $g_2\in\langle[x_1,x_2][x_3,x_4]\rangle^{TS}$ e $g_3\in T^{(3)}$ tais que $f=x_1g_1+g_2+g_3$.

Seja h um polinômio da forma (2-3). Como h é homogêneo de grau 1 em x_1, segue que $i_1=1$ ou $j_1=1$. Suponha $i_1=1$. Pondo $h_1=x_{i_2}^{r_2}\dots x_{i_k}^{r_k}[x_{j_1},x_{j_2}]\dots[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}]$ temos $h=x_1h_1$, que está na forma desejada pois h_1 não depende de x_1. Agora seja $j_1=1$. Pondo $a=x_{i_1}^{r_1}\dots x_{i_k}^{r_k}$, sendo $l\geq 2$, podemos escrever $h=a[x_1,x_{j_2}]b[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}]$ onde b é 1 ou um produto de comutadores. Agora

$$\begin{aligned}
a[x_1,x_{j_2}]b[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}] &= [ax_1,x_{j_2}]b[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}]-[a,x_{j_2}]x_1b[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}]\\
&= [ax_1b,x_{j_2}][x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}]-ax_1[b,x_{j_2}][x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}]-\\
&- x_1b[a,x_{j_2}][x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}]-[a,x_{j_2},x_1b][x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}].
\end{aligned}$$

Sejam $h_1=-b[a,x_{j_2}][x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}]$, $h_2=[ax_1b,x_{j_2}][x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}]$ e $h_3=-ax_1[b,x_{j_2}][x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}]-[a,x_{j_2},x_1b][x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}]$. Observe que h_1 não depende de x_1 e $h_2\in\langle[x_1,x_2][x_3,x_4]\rangle^{TS}$. Observe também que $h_3\in T^{(3)}$ porque $[b,x_{j_2}]\in T^{(3)}$. Assim $h=x_1h_1+h_2+h_3$ está na forma desejada, e isso conclui a demonstração. □

Lema 2.4. *Seja* F *um corpo qualquer e* $f=f(x_1,\dots,x_n)\in F\langle X\rangle$ *um polinômio homogêneo de grau 1 em* x_1. *Se* $f+T^{(4)}$ *for central em* $Q_4=F\langle X\rangle/T^{(4)}$, *então* $f\in\langle[x_1,x_2][x_3,x_4]\rangle^{TS}+T^{(3)}$.

Demonstração. Pela Proposição 1.16, não há perda de generalidade em supor que f é multi-homogêneo. Segue da Proposição 1.21 que f pode ser escrito, módulo $T^{(3)}$, como uma combinação linear de polinômios da forma

$$x_{i_1}^{r_1}\dots x_{i_k}^{r_k}[x_{j_1},x_{j_2}]\dots[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}], \tag{2-4}$$

onde $k\geq 0, l\geq 0, r_s>0$, $1\leq i_1<\dots<i_k\leq n$ e $1\leq j_1<\dots<j_{2l}\leq n$. Primeiramente, vamos mostrar que $l\geq 2$ para todos os polinômios de (2-4).

Afirmação 1: Temos $l \neq 0$ em todos os polinômios de (2-4). De fato, seja

$$x_{i_1}^{r_1} x_{i_2}^{r_2} \ldots x_{i_n}^{r_n} \tag{2-5}$$

um polinômio de (2-4) com coeficiente $\alpha \in F$. Vamos mostrar que $\alpha = 0$. Como cada polinômio de (2-4) é homogêneo de grau 1 em x_1, temos $i_1 = 1$ e $r_1 = 1$ no polinômio (2-5). Defina o endomorfismo φ de $F\langle X\rangle$ por $\varphi(x_1) = x_1$ e $\varphi(x_s) = 1$ se $s \neq 1$. Segue de (2-4) e (2-5) que $\varphi(f) + T^{(3)} = \alpha x_1 + T^{(3)}$. Como $C(Q_4) + T^{(3)} \subseteq C(Q_3)$, temos que $\alpha x_1 + T^{(3)}$ é central em Q_3. Mas isso implica $\alpha = 0$ porque $x_1 + T^{(3)}$ não é central em Q_3.

Afirmação 2: Temos $l \neq 1$ em todos os polinômios de (2-4). De fato, seja

$$x_{i_1}^{r_1} \ldots x_{i_k}^{r_k} [x_{j_1}, x_{j_2}] \tag{2-6}$$

um polinômio de (2-4) com coeficiente β. Vamos mostrar que $\beta = 0$. Defina o endomorfismo ϕ de $F\langle X\rangle$ por $\phi(x_{j_s}) = x_{j_s}$, se $s \in \{j_1, j_2\}$ e $\phi(x_s) = 1$, se $s \notin \{j_1, j_2\}$. Então segue de (2-4) e (2-6) que

$$\phi(f) + T^{(3)} = \beta x_{j_1}^{r_1} x_{j_2}^{r_2} [x_{j_1}, x_{j_2}] + T^{(3)}.$$

Seja $g(x_{j_1}, x_{j_2}) = x_{j_1}^{r_1} x_{j_2}^{r_2} [x_{j_1}, x_{j_2}]$. Observe que $[x_{j_1}, x_{j_2}]$ é uma componente multi-homogênea do polinômio $g(x_{j_1}+1, x_{j_2}+1) = (x_{j_1}+1)^{r_1}(x_{j_2}+1)^{r_2}[x_{j_1}, x_{j_2}]$. Suponha que $\beta \neq 0$. Então $g(x_{j_1}+1, x_{j_2}+1)$ pertence a $C(Q_4) + T^{(3)}$ e como $C(Q_4) + T^{(3)}$ é um T-subespaço multi-homogêneo (Proposições 1.10 e 1.16, respectivamente), concluímos que $[x_{j_1}, x_{j_2}]$ pertence a $C(Q_4) + T^{(3)}$. Assim existem $h_1 \in C(Q_4)$ e $h_2 \in T^{(3)}$ tais que

$$[x_{j_1}, x_{j_2}] = h_1 + h_2.$$

Como $h_1 \neq 0$ (porque $[x_{j_1}, x_{j_2}]$ não pertence a $T^{(3)}$) e $T^{(3)}$ é multi-homogêneo, podemos supor que h_1 é multi-homogêneo de grau 1 em x_{j_1} e x_{j_2}, e grau 0 nas demais variáveis. Portanto h_1 é um polinômio de grau 2 e $[h_1, x_{n+1}]$ possui grau 3. Logo $[h_1, x_{n+1}]$ não pertence a $T^{(4)}$, isto é, h_1 não pertence a $C(Q_4)$, uma contradição. Portanto deve ser $\beta = 0$. Segue das Afirmações 1 e 2 que $l \geq 2$ para todos os polinômios de (2-4).

Reunimos todas as hipóteses do Lema 2.3 e isso garante a existência de polinômios $g_1 = g_1(x_2, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ (que não depende de x_1), $g_2 \in \langle [x_1, x_2][x_3, x_4]\rangle^{TS}$ e $g_3 \in T^{(3)}$ tais que

$$f = x_1 g_1 + g_2 + g_3. \tag{2-7}$$

Como f, g_2 e g_3 são polinômios centrais de Q_3, segue que $x_1 g_1$ também é um polinômio central de Q_3. Aplicando o Lema 1.26 obtemos $g_1 \in T^{(3)}$. Assim, por (2-7) temos que f pertence a $\langle [x_1,x_2][x_3,x_4]\rangle^{TS} + T^{(3)}$. □

Lema 2.5 (veja [22, 25])**.** *Seja F um corpo de característica $\neq 3$. Então $[x_1,x_2][x_3,x_4] + T^{(4)}$ e $x_1[x_2,x_3,x_4] + T^{(4)}$ são centrais na álgebra $Q_4 = F\langle X\rangle/T^{(4)}$.*

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que $[x_1,x_2][x_3,x_4] + T^{(4)}$ é central em Q_4. De fato, usando a igualdade $[ab,c] = a[b,c] + [a,c]b$, temos

$$\begin{aligned}
[[x_1,x_2][x_3,x_4],x_5] &= [x_1,x_2][x_3,x_4,x_5] + [x_1,x_2,x_5][x_3,x_4] \\
&= [x_3,x_4,x_5][x_1,x_2] + [[x_1,x_2],[x_3,x_4,x_5]] + [x_1,x_2,x_5][x_3,x_4].
\end{aligned}$$

Pelo Corolário 1.33 (iii), os polinômios $[x_3,x_4,x_5][x_1,x_2]$ e $[x_1,x_2,x_5][x_3,x_4]$ pertencem a $T^{(4)}$. Como $[[x_1,x_2],[x_3,x_4,x_5]]$ também pertence a $T^{(4)}$, segue que $[[x_1,x_2][x_3,x_4],x_5]$ pertence a $T^{(4)}$, isto é, $[x_1,x_2][x_3,x_4] + T^{(4)}$ é central em Q_4. Vamos mostrar agora que $x_1[x_2,x_3,x_4] + T^{(4)}$ é central em Q_4. De fato, como

$$[x_1[x_2,x_3,x_4],x_5] = x_1[x_2,x_3,x_4,x_5] + [x_1,x_5][x_2,x_3,x_4]$$

e os polinômios $x_1[x_2,x_3,x_4,x_5], [x_1,x_5][x_2,x_3,x_4]$ pertencem a $T^{(4)}$ segue que $[x_1[x_2,x_3,x_4],x_5]$ pertence a $T^{(4)}$, isto é, $x_1[x_2,x_3,x_4] + T^{(4)}$ é central em Q_4. □

Proposição 2.6 (veja [25])**.** *Seja F um corpo de característica 0. Então $C(Q_4)$, o espaço vetorial dos polinômios centrais da álgebra $Q_4 = F\langle X\rangle/T^{(4)}$ é gerado, como T-subespaço de $F\langle X\rangle$, por 1 e pelos polinômios $[x_1,x_2][x_3,x_4]$ e $x_1[x_2,x_3,x_4]$.*

Demonstração. Já vimos no Lema 2.5 que $[x_1,x_2][x_3,x_4]$ e $x_1[x_2,x_3,x_4]$ são polinômios centrais de Q_4. Vamos mostrar que esses polinômios geram $C(Q_4)$ como T-subespaço. Seja $f = f(x_1,\ldots,x_n)$ um polinômio central da álgebra Q_4. Pela Proposição 1.9 podemos assumir que f é multilinear. Em particular, f é homogêneo de grau 1 em x_1. Assim, pelo Lema 2.4, f pertence a $\langle [x_1,x_2][x_3,x_4]\rangle^{TS} + T^{(3)}$. Consequentemente f pertence ao T-subespaço gerado pelos polinômios $[x_1,x_2][x_3,x_4]$ e $x_1[x_2,x_3,x_4]$. □

A demonstração do lema seguinte é uma adaptação da demonstração do Lema 12 de [7].

Lema 2.7. *Seja F um corpo de característica $p \neq 0$ e $f = f(x_1,\ldots,x_n) \in F\langle X\rangle$ um polinômio homogêneo de grau m_1 em x_1, onde m_1 não é um múltiplo de p. Se $f + T^{(4)}$ for central em Q_4, então $f \in \langle [x_1,x_2][x_3,x_4]\rangle^{TS} + T^{(3)}$.*

Demonstração. Pela Proposição 1.16 não há perda de generalidade em supor que f é multi-homogêneo de grau m_1 em x_1. Escreva $m_1 = pq + r$ com $0 < r < p$.

Usando a base de $Q_3 = F\langle X\rangle/T^{(3)}$ dada na Proposição 1.21, vemos que existe $g = g(x_1,\dots,x_n) \in F\langle X\rangle$, multi-homogêneo de grau r em x_1 tal que

$$f + T^{(3)} = x_1^{pq} g + T^{(3)}. \tag{2-8}$$

Defina o endomorfismo φ de $F\langle X\rangle$ por $\varphi(x_1) = 1 + x_1$ e $\varphi(x_i) = x_i$ se $i > 1$. Por (2-8), temos

$$\varphi(f) + T^{(3)} = (1 + x_1^p)^q g(1 + x_1, x_2, \dots, x_n) + T^{(3)}. \tag{2-9}$$

Observe que $C(Q_4)$ e $T^{(3)}$ são T-subespaços multi-homogêneos (Proposição 1.10 e Proposição 1.16, respectivamente), logo $C(Q_4) + T^{(3)}$ é um T-subespaço multi-homogêneo. Observe também que $g(x_1,\dots,x_n)$ é a componente multi-homogênea de grau r em x_1 do polinômio $(1 + x_1^p)^q g(1 + x_1, x_2, \dots, x_n)$. Por (2-9), $(1 + x_1^p)^q g(1 + x_1, x_2, \dots, x_n)$ pertence a $C(Q_4) + T^{(3)}$, logo g pertence a $C(Q_4) + T^{(3)}$. Seja $h = h(y_1,\dots,y_r,x_2,\dots,x_n)$ a linearização total de g em x_1. Então $h \in C(Q_4) + T^{(3)}$ e segue do Lema 2.4 que $h \in \langle [x_2,x_3][x_4,x_5]\rangle^{TS} + T^{(3)}$. Como

$$h(x_1,\dots,x_1,x_2,\dots,x_n) = r!\,g(x_1,\dots,x_n),$$

segue que $g \in \langle [x_1,x_2][x_3,x_4]\rangle^{TS} + T^{(3)}$. Finalmente, como $x_1^p + T^{(3)}$ é central em Q_3 (Lema 1.22 (i)) e $C(Q_3)$ é uma álgebra (Proposição 1.13), é claro que $x_1^{pq} + T^{(3)}$ é central em Q_3. Assim

$$x_1^{pq}[x_2,x_3][x_4,x_5] + T^{(3)} = [x_1^{pq}x_2,x_3][x_4,x_5] + T^{(3)}. \tag{2-10}$$

Como $g \in \langle [x_1,x_2][x_3,x_4]\rangle^{TS} + T^{(3)}$, segue de (2-8) e (2-10) que $f \in \langle [x_1,x_2][x_3,x_4]\rangle^{TS} + T^{(3)}$. O lema está demonstrado. □

Lembrando que $q_n = q_n(x_1,\dots,x_{2n}) = q(x_1,x_2)\dots q(x_{2n-1},x_{2n})$ onde $q(x_1,x_2) = x_1^{p-1}[x_1,x_2]x_2^{p-1}$, temos o seguinte:

Lema 2.8 (veja [22])**.** *Seja F um corpo de característica $p \neq 3$. Então $q_n + T^{(4)}$ é central na álgebra $Q_4 = F\langle X\rangle/T^{(4)}$ se, e somente se $n \geq 2$.*

Demonstração. Vamos mostrar que $q_n + T^{(4)}$ é central em Q_4 para cada $n \geq 2$. A prova será por indução sobre n. Primeiramente vamos mostrar que $q_2 + T^{(4)}$ é central na álgebra Q_4, isto é, que $[q(x_1,x_2)q(x_3,x_4),x_5] = q(x_1,x_2)[q(x_3,x_4),x_5] + [q(x_1,x_2),x_5]q(x_3,x_4)$ pertence a $T^{(4)}$; essa será a base da indução. Usando a igualdade

$[a_1a_2\ldots a_n,a] = \sum_{i=1}^{n} a_1\ldots a_{i-1}[a_i,a]a_{i+1}\ldots a_n$ (Lema 1.17 (ii)), temos

$$\begin{aligned}
[q(x_3,x_4),x_5] &= [x_3^{p-1}[x_3,x_4]x_4^{p-1},x_5] \\
&= [x_3,x_5]x_3^{p-2}[x_3,x_4]x_4^{p-1} + \ldots + x_3^{p-1}[x_3,x_4,x_5]x_4^{p-1} + \ldots + \\
&+ x_3^{p-1}[x_3,x_4]x_4^{p-2}[x_4,x_5] \\
&= x_3^{p-2}[x_3,x_5][x_3,x_4]x_4^{p-1} + [x_3,x_5,x_3^{p-2}][x_3,x_4]x_4^{p-1} + \ldots + \\
&+ x_3^{p-1}[x_3,x_4,x_5]x_4^{p-1} + \ldots + x_3^{p-1}[x_3,x_4][x_4,x_5]x_4^{p-2} + \\
&+ x_3^{p-1}[x_3,x_4][x_4^{p-2},[x_4,x_5]].
\end{aligned}$$

Como $[x_1,x_2,x_3][x_4,x_5] \in T^{(4)}$ (Corolário 1.33 (iii)) segue que todos os polinômios $[x_3,x_5,x_3^{p-2}][x_3,x_4]x_4^{p-1},\ldots,x_3^{p-1}[x_3,x_4][x_4^{p-2},[x_4,x_5]]$ pertencem a $T^{(4)}$. Assim

$$\begin{aligned}
[q(x_3,x_4),x_5] &\equiv x_3^{p-2}[x_3,x_5][x_3,x_4]x_4^{p-1} + \ldots + x_3^{p-1}[x_3,x_4,x_5]x_4^{p-1} + \ldots + \\
&+ x_3^{p-1}[x_3,x_4][x_4,x_5]x_4^{p-2} \pmod{T^{(4)}}.
\end{aligned} \tag{2-11}$$

Uma vez que $[x_1,x_2][x_3,x_4]+T^{(4)}$ e $[x_1,x_2,x_3]+T^{(4)}$ são centrais em Q_4 (Lema 2.5), decorre de (2-11) que

$$\begin{aligned}
q(x_1,x_2)[q(x_3,x_4),x_5] &\equiv x_1^{p-1}[x_1,x_2][x_3,x_5][x_3,x_4]x_2^{p-1}x_3^{p-2}x_4^{p-1} + \ldots + \\
&+ x_1^{p-1}[x_1,x_2][x_3,x_4,x_5]x_2^{p-1}x_3^{p-1}x_4^{p-1} + \\
&+ x_1^{p-1}[x_1,x_2][x_3,x_4][x_4,x_5]x_2^{p-1}x_3^{p-1}x_4^{p-2} \pmod{T^{(4)}}.
\end{aligned} \tag{2-12}$$

O Corolário 1.33 (i) implica que todos os polinômios

$$x_1^{p-1}[x_1,x_2][x_3,x_5][x_3,x_4]x_2^{p-1}x_3^{p-2}x_4^{p-1},\ldots,x_1^{p-1}[x_1,x_2][x_3,x_4][x_4,x_5]x_2^{p-1}x_3^{p-1}x_4^{p-2}$$

pertencem a $T^{(4)}$ e o Corolário 1.33 (iii) implica que o polinômio $x_1^{p-1}[x_1,x_2][x_3,x_4,x_5]x_2^{p-1}x_3^{p-1}x_4^{p-1}$ também pertence a $T^{(4)}$. Assim, por (2-12) temos que $q(x_1,x_2)[q(x_3,x_4),x_5]$ pertence a $T^{(4)}$. É fácil ver que $[q(x_1,x_2),x_5]q(x_3,x_4)$ também pertence a $T^{(4)}$. Portanto

$$[q_2,x_5] = [q(x_1,x_2)q(x_3,x_4),x_5] = q(x_1,x_2)[q(x_3,x_4),x_5] + [q(x_1,x_2),x_5]q(x_3,x_4)$$

pertence a $T^{(4)}$, isto é, $q_2+T^{(4)}$ é central em Q_4.

Agora, suponha por hipótese de indução que $q_m+T^{(4)}$ é central de Q_4 para cada m satisfazendo $2 \leq m < n$. Como $C(Q_4)$ é uma álgebra (Proposição 1.13) e ambos q_{n-2} e q_2 pertencem a $C(Q_4)$, segue que $q_n = q_{n-2}q_2$ também pertence a $C(Q_4)$. Isso completa a indução.

Para finalizar a demonstração, resta mostrar apenas que $q_1 + T^{(4)} = x_1^{p-1}[x_1,x_2]x_2^{p-1} + T^{(4)}$ não é central em Q_4. De fato, como $[x_1,x_2]$ é uma componente multi-homogênea do polinômio $(x_1+1)^{p-1}[x_1+1,x_2+1](x_2+1)^{p-1}$, se $x_1[x_1,x_2]x_2 + T^{(4)}$ fosse central em Q_4, então $[x_1,x_2]+T^{(4)}$ seria central em Q_4, uma contradição. Logo $q_1 + T^{(4)}$ não é central em Q_4. O lema está demonstrado. □

Lema 2.9. *Seja F um corpo de característica 2. Então $x_0^n + T^{(4)}$ é central na álgebra $Q_4 = F\langle X\rangle/T^{(4)}$ se, e somente se n é um múltiplo de 4.*

Demonstração. Usando o fato de que $char(F) = 2$, um cálculo direto mostra que

$$[x_0^4, x_1] = [x_0, x_1, x_0, x_0^2].$$

Assim $[x_0^4, x_1]$ pertence a $T^{(4)}$, isto é $x_0^4 + T^{(4)}$ é central em Q_4. Sendo $C(Q_4)$ uma álgebra (Proposição 1.13) segue que $x_0^{4t} + T^{(4)}$ é central em Q_4 para cada $t \in \mathbb{N}$. Agora suponha que $x_0^n + T^{(4)}$ seja central em Q_4. Vamos mostrar que $n = 4t$ para algum $t \in \mathbb{N}$. É suficiente mostrar que os elementos $x_0^2 + T^{(4)}$, $x_0^3 + T^{(4)}$, $x_0^{4t+1} + T^{(4)}$, $x_0^{4t+2} + T^{(4)}$ e $x_0^{4t+3} + T^{(4)}$ não são centrais em Q_4 para qualquer $t \in \mathbb{N}$.

Como $[x_0^2, x_1] = [x_0, x_1, x_0]$ possui grau 3, segue que $[x_0^2, x_1]$ não pertence a $T^{(4)}$, isto é $x_0^2 + T^{(4)}$ não é central em Q_4. Observe que

$$[x_0^3, x_1] = x_0^2[x_0, x_1] + [x_0, x_1, x_0]x_0. \tag{2-13}$$

Suponha que $[x_0^3, x_1] \in T^{(4)}$. Como $[x_0, x_1]$ é uma componente multi-homogênea do polinômio $(x_0+1)^2[x_0,x_1] + [x_0,x_1,x_0](x_0+1)$, segue que $[x_0,x_1] \in T^{(4)}$. Mas isso não é possível porque o polinômio $[x_0,x_1]$ possui grau 2. Logo $x_0^3 + T^{(4)}$ não é central em Q_4. Como $x_0^{4t} + T^{(4)}$ é central em Q_4, temos

$$[x_0^{4t+1}, x_1] = x_0^{4t}[x_0,x_1] + [x_0^{4t}, x_1]x_0 \equiv x_0^{4t}[x_0,x_1] \pmod{T^{(4)}}.$$

Como $[x_0,x_1]$ é uma componente multi-homogênea do polinômio $(x_0+1)^{4t}[x_0,x_1]$, se $[x_0^{4t+1}, x_1] \in T^{(4)}$, teríamos $[x_0,x_1] \in T^{(4)}$, o que é uma contradição. Portanto $x_0^{4t+1} + T^{(4)}$ não é central em Q_4. Agora

$$\begin{aligned}
[x_0^{4t+2}, x_1] &= x_0^{4t}[x_0^2, x_1] + [x_0^{4t}, x_1]x_0^2 \\
&\equiv x_0^{4t}[x_0^2, x_1] \pmod{T^{(4)}} \\
&= x_0^{4t}[x_0, x_1, x_0].
\end{aligned}$$

Como $[x_0,x_1,x_0]$ é uma componente multi-homogênea do polinômio $(x_0+1)^{4t}[x_0,x_1,x_0]$, se $[x_0^{4t+2}, x_1] \in T^{(4)}$, teríamos $[x_0,x_1] \in T^{(4)}$, o que é uma contradição. Portanto $x_0^{4t+3} + T^{(4)}$ não é central em Q_4. Por último, usando (2-13) temos

$$\begin{aligned} [x_0^{4t+3}, x_1] &= x_0^{4t}[x_0^3, x_1] + [x_0^{4t}, x_1]x_0^3 \\ &\equiv x_0^{4t}[x_0^3, x_1] \pmod{T^{(4)}} \\ &= x_0^{4t}(x_0^2[x_0, x_1] + [x_0, x_1, x_0]x_0) \\ &= x_0^{4t+2}[x_0, x_1] + x_0^{4t}[x_0, x_1, x_0]x_0. \end{aligned}$$

Como $[x_0, x_1]$ é uma componente multi-homogênea do polinômio $(x_0+1)^{4t+2}[x_0, x_1] + (x_0+1)^{4t}[x_0, x_1, x_0](x_0+1)$, se $[x_0^{4t+3}, x_1] \in T^{(4)}$, teríamos $[x_0, x_1] + [x_0, x_1, x_0] \in T^{(4)}$, o que é uma contradição. Portanto $x_0^{4t+3} + T^{(4)}$ não é central em Q_4. Isso conclui a demonstração. □

Demonstração do Teorema 2.1.

Demonstração. Vamos verificar primeiramente que

$$x_1[x_2, x_3, x_4],\ x_0^4,\ x_0^2q_2,\ x_0^2q_3,\ x_0^2q_4, \ldots, x_0^2q_n, \ldots. \tag{2-14}$$

são polinômios centrais de Q_4. Segue do Lema 2.5 e do Lema 2.9 que os elementos $x_1[x_2, x_3, x_4] + T^{(4)}$ e $x_0 + T^{(4)}$ são centrais em Q_4, respectivamente. Resta mostrar que $x_0^2q_n + T^{(4)}$ é central em Q_4 para cada $n \geq 2$. De fato, usando a igualdade $[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b$ temos

$$\begin{aligned} [x_0^2q_n, x_{2n+1}] &= x_0^2[q_n, x_{2n+1}] + [x_0^2, x_{2n+1}]q_n \\ &= x_0^2[q_n, x_{2n+1}] + 2x_0[x_0, x_{2n+1}]q_n + [x_0, x_{2n+1}, x_0]q_n. \end{aligned} \tag{2-15}$$

Como $[x_0, x_{2n+1}, x_0] + T^{(4)}$ é central em Q_4, segue do Corolário 1.33 (ii) (ou (iii)) que $[x_0, x_{2n+1}, x_0]q_n \in T^{(4)}$. Pelo Lema 2.8, temos $x_0^2[q_n, x_{2n+1}] \in T^{(4)}$. Sendo $char(F) = 2$, segue de (2-15) que $[x_0^2q_n, x_{2n+1}] \in T^{(4)}$. Portanto $x_0^2q_n + T^{(4)}$ é central em Q_4 para cada $n \geq 2$.

Vamos mostrar que os polinômios da forma (2-14) geram $C(Q_4)$ como T-subespaço. Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio central de Q_4. Podemos assumir que $f \notin T^{(3)}$ pois $T^{(3)}$ é gerado como T-subespaço pelo polinômio $x_1[x_2, x_3, x_4]$, que está entre aqueles de (2-14). Pela Proposição 1.16, podemos assumir também que f é multi-homogêneo de grau m_i em cada variável x_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Suponha que o grau de alguma variável x_i não seja divisível por 2. Reenumerando as variáveis x_i, podemos assumir, sem perda de generalidade que $i = 1$. Assim, pelo Lema 2.7, f pertence ao T-subespaço gerado pelos polinômios $[x_1, x_2][x_3, x_4]$ e $x_1[x_2, x_3, x_4]$. Segue do Lema 1.31 que o polinômio $[x_1, x_2][x_3, x_4]$ pertence ao T-

subespaço gerado pelo polinômio $x_0^2 q_2$. Logo f pertence ao T-subespaço gerado pelos polinômios da forma (2-14).

Agora suponha que todos os graus m_i das variáveis x_i sejam divisíveis por 2. Como $x_0^2 + T^{(3)}$ e $[x_1, x_2] + T^{(3)}$ são centrais em Q_3, segue da Proposição 1.21 que $f + T^{(3)}$ é uma combinação linear de elementos da forma

$$x_{i_1}^{2r_1} \dots x_{i_k}^{2r_k} x_{j_1} [x_{j_1}, x_{j_2}] x_{j_2} \dots x_{j_{2l-1}} [x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}] x_{j_{2l}} + T^{(3)}, \tag{2-16}$$

onde $k \geq 0, l \geq 0, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ e $1 \leq j_1 < \dots < j_{2l} \leq n$.

Afirmação 1: $l \neq 1$ para cada elemento de (2-16). Suponha o contrário, que algum elemento de (2-16) ocorra com $l = 1$. Escolha dentre os elementos com $l = 1$ aquele com j_1 minimal e coeficiente $\alpha \in F$ (não nulo). Denote tal elemento por

$$\alpha x_{i_1}^{2r_1} \dots x_{i_k}^{2r_k} x_{j_1} [x_{j_1}, x_{j_2}] x_{j_2} + T^{(3)}. \tag{2-17}$$

Defina o endomorfismo φ de $F\langle X \rangle$ por $\varphi(x_{j_s}) = x_{j_s}$ se $s \in \{1, 2\}$ e $\varphi(x_{j_s}) = 1$ se $s \notin \{1, 2\}$. Então segue de (2-16) e (2-17) que

$$\begin{aligned} \varphi(f) + T^{(3)} &= \alpha x_{j_1}^{2r_1} x_{j_2}^{2r_2} x_{j_1} [x_{j_1}, x_{j_2}] x_{j_2} + T^{(3)} + \beta x_{j_1}^{2(r_1+1)} x_{j_2}^{2(r_2+1)} + T^{(3)} \\ &= \alpha x_{j_1}^{2r_1+1} x_{j_2}^{2r_2+1} [x_{j_1}, x_{j_2}] + \beta x_{j_1}^{2(r_1+1)} x_{j_2}^{2(r_2+1)} + T^{(3)}, \end{aligned} \tag{2-18}$$

onde $\beta \in F$ com $\beta \geq 0$. Como $T^{(3)} \subseteq C(Q_4)$, segue de (2-18) que $g(x_{j_1}, x_{j_2}) = \alpha x_{j_1}^{2r_1+1} x_{j_2}^{2r_2+1} [x_{j_1}, x_{j_2}] + \beta x_{j_1}^{2(r_1+1)} x_{j_2}^{2(r_2+1)}$ é um polinômio central de Q_4. Uma vez que $C(Q_4)$ é multi-homogêneo e $[x_{j_1}, x_{j_2}] + x_{j_1} x_{j_2} = x_{j_2} x_{j_1}$ é uma componente multi-homogênea do polinômio $g(x_{j_1} + 1, x_{j_2} + 1)$, segue que $x_{j_2} x_{j_1}$ é um polinômio central de Q_4. Mas isso não é possível porque todo polinômio central de Q_4 possui grau no mínimo 3. Portanto todos elementos de (2-16) são tais que $l \neq 1$.

Afirmação 2. Cada elemento de (2-16) com $l \geq 2$ é uma combinação linear de elementos da forma

$$b^2 q_s(x_{j_1}, \dots, x_{j_{2s}}) + T^{(3)},\ s \geq 2,\ b \in F\langle X \rangle. \tag{2-19}$$

De fato, usando a igualdade $x_1^2 x_2^2 = (x_1 x_2)^2 + x_1 [x_1, x_2] x_2$ em (2-16), não é difícil verificar a afirmação.

Afirmação 3: O elemento de (2-16) com $l = 0$ é um múltiplo escalar do elemento $a^4 + T^{(3)}$ para algum $a \in F\langle X \rangle$. De fato, segue da Afirmação 1 que os elementos (2-16) são tais que $l = 0$ ou $l \geq 2$. Assim, pela Afirmação 2, $f + T^{(3)}$ é a soma do elemento

$$\gamma x_1^{2r_1} \dots x_n^{2r_n} + T^{(3)},\ \ \gamma \in F \tag{2-20}$$

com uma combinação linear de elementos da forma (2-19). Se $\gamma = 0$, então vemos que f pertence ao T-subespaço gerado pelos polinômios $x_1[x_2,x_3,x_4]$ e $x_0^2 q_n$, $n \geq 2$, que estão entre aqueles de (2-14). Assim podemos supor $\gamma \neq 0$. Como $f + T^{(4)}$ e $b^2 q_s(x_{j_1},\dots,x_{j_{2s}}) + T^{(4)}$ são centrais em Q_4, segue que $\gamma x_1^{2r_1}\dots x_n^{2r_n} + T^{(4)}$ é central em Q_4. Agora para cada $i = 1,\dots,n$, defina os endomorfismos ϕ_i de $F\langle X\rangle$ por $\phi_i(x_i) = x_i$ e $\phi_i(x_s) = 1$ se $s \neq i$. Segue de (2-20) que $\phi_i(f) + T^{(3)} = \gamma x_i^{2r_i} + T^{(3)}$. Como $T^{(3)} \subseteq C(Q_4)$ e $\gamma \neq 0$, temos que $x_i^{2r_i} + T^{(4)}$ é central em Q_4. Pelo Lema 2.9 temos $2r_i = 4t_i$ para algum $t_i \in \mathbb{N}$. Logo (2-20) pode ser escrito como

$$\gamma x_1^{4t_1}\dots x_n^{4t_n} + T^{(3)}. \tag{2-21}$$

Como $(x_1x_2)^4 \equiv x_1^4 x_2^4 \pmod{T^{(3)}}$ (Lema 1.22 (iii)), segue que $\gamma x_1^{4t_1}\dots x_n^{4t_n} + T^{(3)} = \gamma(x_1^{t_1}\dots x_n^{t_n})^4 + T^{(3)}$. Pondo $b = (x_1^{t_1}\dots x_n^{t_n})$ a Afirmação 3 segue. Agora, segue de (2-16) e das Afirmações 1 à 3 que f pertence ao T-subespaço gerado pelos polinômios (2-14). A demonstração está completa. □

Demonstração do Teorema 2.2.

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que (2-1)-(2-2) são polinômios centrais de Q_4. Como $C(Q_4)$ é uma T-subálgebra de $F\langle X\rangle$ (Proposição 1.13), é suficiente mostrar que

$$[x_1,x_2][x_3,x_4], x_1[x_2,x_3,x_4], x_0^p \text{ e } q_n, n \geq 2$$

são polinômios centrais de Q_4; mas isso segue diretamente do Lema 2.5, do Lema 1.22 (i) e do Lema 2.8.

Vamos mostrar agora que os polinômios (2-1)-(2-2) geram $C(Q_4)$ como espaço vetorial. Seja $f = f(x_1,\dots,x_n)$ um polinômio central de Q_4. Pela Proposição 1.16 podemos assumir que f é um polinômio multi-homogêneo de grau m_i em cada variável x_i. Se $f \in T^{(3)}$ não é difícil ver que f é uma combinação linear de polinômios da forma $a_1[a_2,a_3,a_4]$ com $a_i \in F\langle X\rangle$ (que estão entre aqueles de (i)). Assim podemos assumir que $f \notin T^{(3)}$.

Considere o caso em que o grau m_i de alguma variável x_i não seja múltiplo de p. Reenumerando as variáveis x_i, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $i = 1$. Pelo Lema 2.7, temos que f pertence ao T-subespaço gerado pelos polinômios $[x_1,x_2][x_3,x_4]$ e $x_1[x_2,x_3,x_4]$ e disso decorre que f é uma combinação linear de polinômios de (2-1).

Agora, considere o caso em que os graus m_i de todas as variáveis do polinômio f sejam divisíveis por p. Como $x_0^p + T^{(3)}$ e $[x_1,x_2] + T^{(3)}$ são centrais em Q_3, segue da Proposição 1.21 que $f + T^{(3)}$ pode ser escrito como uma combinação linear de elementos da forma

$$x_{i_1}^{pr_1}\ldots x_{i_k}^{pr_k}x_{j_1}^{p-1}[x_{j_1},x_{j_2}]x_{j_2}^{p-1}\ldots x_{j_{2l-1}}^{p-1}[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}]x_{j_{2l}}^{p-1}+T^{(3)}, \qquad (2\text{-}22)$$

onde $k,l\geq 0, r_s>0$, $1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n$, $1\leq j_1<\ldots<j_{2l}\leq n$. Afirmamos que $l\neq 1$ para cada elemento em (2-22). Suponha o contrário, que algum elemento de (2-22) possua $l=1$; e dentre todos esses, escolha aquele com j_1 minimal. Tal elemento se escreve como

$$x_{i_1}^{pr_1}\ldots x_{i_k}^{pr_k}x_{j_1}^{p-1}[x_{j_1},x_{j_2}]x_{j_2}^{p-1}+T^{(3)}. \qquad (2\text{-}23)$$

Defina o endomorfismo φ de $F\langle X\rangle$ por $\varphi(x_{j_s})=x_{j_s}$ se $s\in\{1,2\}$ e $\varphi(x_{j_s})=1$ se $s\notin\{1,2\}$. Então por (2-22) e (2-23) temos

$$\varphi(f)+T^{(3)}=\alpha x_{j_1}^{pr_{j_1}}x_{j_2}^{pr_{j_2}}x_{j_1}^{p-1}[x_{j_1},x_{j_2}]x_{j_2}^{p-1}+T^{(3)}, \qquad (2\text{-}24)$$

onde $\alpha\in F$ é não nulo. Segue do Lema 1.33 (iii) que $x_1[x_2,x_3,x_4]+T^{(4)}$ é central em Q_4. Consequentemente $T^{(3)}\subseteq C(Q_4)$. Assim, por (2-24) segue que $g(x_{j_1},x_{j_2})=x_{j_1}^{pr_{j_1}}x_{j_2}^{pr_{j_2}}x_{j_1}^{p-1}[x_{j_1},x_{j_2}]x_{j_2}^{p-1}$ é um polinômio central de Q_4. Como $[x_{j_1},x_{j_2}]$ é uma componente multi-homogênea do polinômio $g(x_{j_1}+1,x_{j_2}+1)=(x_{j_1}+1)^{pr_{j_1}}(x_{j_2}+1)^{pr_{j_2}}(x_{j_1}+1)^{p-1}[x_{j_1},x_{j_2}](x_{j_2}+1)^{p-1}$ e $C(Q_4)$ é um T-subespaço multi-homogêneo (Proposição 1.16) segue que $[x_{j_1},x_{j_2}]+T^{(4)}$ é central em Q_4, o que é uma contradição porque $[x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3}]\notin T^{(4)}$.

Desse modo, $f+T^{(3)}$ pode ser escrito como uma combinação linear de elementos de (2-22) com $l=0$ ou $l\geq 2$. Como $T^{(3)}$ é gerado como T-subespaço por $x_1[x_2,x_3,x_4]$, segue que f pode ser escrito como uma combinação linear de polinômios de (2-1)-(2-2). Isso conclui a demonstração. □

Conforme mostrado por Grishin [[22], Teorema 2] (veja o Teorema 0.2), quando $char(F)=p>3$, $C(Q_4)$ é gerado como T-subespaço pelos polinômios

$$x_1[x_2,x_3,x_4],\, x_0^p,\, x_0^p q_2,\ldots,x_0^p q_n,\ldots. \qquad (2\text{-}25)$$

Esse resultado é uma consequência do Teorema 2.2. De fato, seja Q o T-subespaço gerado pelos polinômios (2-25). Como os polinômios (2-25) estão entre aqueles de (2-1)-(2-2), segue que $Q\subseteq C(Q_4)$.

Para obter a inclusão contrária, é suficiente mostrar que os polinômios (2-1)-(2-2) pertencem a Q. É claro $a_1[a_2,a_3,a_4]$ pertence a Q. Segue do (Lema 1.31) que $[x_1,x_2][x_3,x_4]$ pertence ao T-subespaço gerado pelo polinômio $x_0^p q_2$. Assim os polinômios de (2-1) pertencem a Q.

Como $(x_1x_2)^p \equiv x_1^p x_2^p \pmod{T^{(3)}}$ (Lema 1.22 (ii)), não é difícil ver que os polinômios da forma (2-25) pertencem ao T-subespaço gerado pelos polinômios $x_1[x_2,x_3,x_4]$, x_0^p e $x_0^p q_n, n \geq 2$. Logo os polinômios da forma (2-25) pertencem Q, consequentemente $C(Q_4) \subseteq Q$.

2.2 O caso de característica 3

O objetivo principal desta seção é dar uma descrição dos polinômios centrais da álgebra Q_4 quando F é um corpo de característica 3. Mais precisamente, provaremos o nosso primeiro resultado principal:

Teorema 2.10. *Seja F um corpo de característica 3. Então $C(Q_4)$, o espaço vetorial dos polinômios centrais da álgebra $Q_4 = F\langle X\rangle/T^{(4)}$ é gerado, como T-subespaço de $F\langle X\rangle$, pelos polinômios*

(i) $x_1\omega(x_2,x_3,x_4,x_5), [x_1,x_2][x_3,x_4] - x_1[x_2,x_3,x_4], x_1[x_2,x_3,x_4,x_5]$,

(ii) $x_0^3, x_0^3 q_3, x_0^3 q_6, \ldots, x_0^3 q_{3n}, \ldots$,

(iii) $x_0^3 u_0, x_0^3 u_1, x_0^3 u_2, \ldots, x_0^3 u_n, \ldots$.

2.2.1 Uma base para o espaço vetorial Q_4

Seja $T^{(3,2)}$ o T-ideal de $F\langle X\rangle$ gerado pelos polinômios $[x_1,x_2,x_3,x_4]$ e $[x_1,x_2,x_3][x_4,x_5]$. Claramente $T^{(4)} \subseteq T^{(3,2)}$. Se F possui característica $\neq 3$, então $T^{(4)} = T^{(3,2)}$ pois $[x_1,x_2,x_3][x_4,x_5]$ pertence a $T^{(4)}$ (Corolário 1.33). Quando F possui característica 3, foi mostrado por Krasilnikov [33] que $[x_1,x_2,x_3][x_4,x_5]$ não pertence a $T^{(4)}$. Assim $T^{(4)} \subsetneq T^{(3,2)}$.

Uma base para $T^{(3,2)}/T^{(4)}$ foi encontrada por Deryabina e Krasilnikov [11].

Teorema 2.11 (veja [11],Teorema 1.2)**.** *Seja F um corpo de característica 3. Então o espaço vetorial $T^{(3,2)}/T^{(4)}$ possui uma base*

$$x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_2}]\ldots[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}][x_{j_{2l+1}},x_{j_{2l+2}},x_{j_{2l+3}}] + T^{(4)},$$
$$k \geq 0, l \geq 1, i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k, j_1 < j_2 < \ldots < j_{2l+3}.$$

Lembremos que E_n é a álgebra de Grassmann (unitária) gerada por $e_1,\ldots,e_n$. O lema seguinte é bem conhecido, veja [12, Lema 2], [14, página 16],[21, Lema 3], [43, Corolário 4] e [44].

Lema 2.12 (veja [21, 44])**.** *Seja F um corpo de característica $\neq 2$. Então $T^{(4)} \subseteq Id(E_2 \otimes E_2)$.*

Demonstração. Devemos mostrar que a álgebra $E_2 \otimes E_2$ satisfaz a identidade polinomial $[x_1,x_2,x_3,x_4]=0$. Considere as seguintes bases da álgebra E_2:

$$1, e_1, e_2, e_1e_2, \tag{2-26}$$
$$1, h_1, h_2, h_1h_2. \tag{2-27}$$

Como o polinômio $[x_1,x_2,x_3,x_4]$ é multilinear, é suficiente avaliá-lo na base de $E_2 \otimes E_2$, isto é, nos elementos $a \otimes b$, onde a é um elemento de (2-26) e b é um elemento de (2-27). Sejam $a_1,\ldots,a_4,b_1,\ldots,b_4$ elementos quaisquer de E_2. Observe que

$$\begin{aligned}[a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2] &= a_1a_2 \otimes b_1b_2 - a_2a_1 \otimes b_2b_1 \\ &= a_1a_2 \otimes b_1b_2 - a_2a_1 \otimes b_1b_2 + a_2a_1 \otimes b_1b_2 - a_2a_1 \otimes b_2b_1 \\ &= [a_1,a_2] \otimes b_1b_2 + a_2a_1 \otimes [b_1,b_2].\end{aligned} \tag{2-28}$$

Usando (2-28) duas vezes e observando que $[x_1,x_2]$ é um polinômio central de E_2, podemos escrever

$$\begin{aligned}[a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2, a_3 \otimes b_3, a_4 \otimes b_4] &= [a_1,a_2][a_3,a_4] \otimes [b_1b_2,b_3]b_4 + \\ &+ [a_1a_2,a_3]a_4 \otimes [b_1,b_2][b_3,b_4].\end{aligned} \tag{2-29}$$

Como $[x_1,x_2][x_3,x_4]$ é um polinômio multilinear, usando a base (2-26) não é difícil ver que E_2 satisfaz a identidade polinomial $[x_1,x_2][x_3,x_4]=0$. Assim, voltando a (2-29) vemos que $[a_1,a_2][a_3,a_4]=0$ e $[b_1,b_2][b_3,b_4]=0$. Portanto $[a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2, a_3 \otimes b_3, a_4 \otimes b_4]=0$ e $[x_1,x_2,x_3,x_4]=0$ é uma identidade polinomial para $E_2 \otimes E_2$. □

Lema 2.13. *Seja F um corpo de característica $\neq 2$. Então o polinômio $[x_1,x_2][x_2,x_3]$ não pertence a $T^{(4)}$.*

Demonstração. Suponha que $[x_1,x_2][x_2,x_3]$ pertença a $T^{(4)}$. Como

$$[x_1,x_2+x_3][x_2+x_3,x_4] = \omega(x_1,x_2,x_3,x_4) + [x_1,x_2][x_2,x_4] + [x_1,x_3][x_3,x_4]$$

segue que $\omega(x_1,x_2,x_3,x_4)$ também pertence a $T^{(4)}$. Mas

$$\omega(e_1 \otimes 1, e_2 \otimes 1, 1 \otimes h_1, 1 \otimes h_2) = 4e_1e_2 \otimes h_1h_2 \neq 0$$

em $E_2 \otimes E_2$, o que contraria o Lema 2.12. Portanto $[x_1,x_2][x_2,x_3]$ não pertence a $T^{(4)}$. □

Quando F possui característica 0, uma base para o espaço vetorial Q_4 foi encontrada independentemente por Volichenko [44] e Gordienko [21]. À seguir exibimos uma base para o espaço vetorial Q_4 quando F possui característica 3.

Proposição 2.14. *Seja F um corpo de característica 3. Então a imagem dos polinômios*

$$x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}, i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k, \tag{2-30}$$

$$x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_2}], i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k, j_1 < j_2, \tag{2-31}$$

$$x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_2},x_{j_2}], i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k, j_1 \neq j_2, \tag{2-32}$$

$$x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3}], i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k, j_1 > j_2 < j_3, \tag{2-33}$$

$$x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_2}][x_{j_1},x_{j_3}], i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k, j_2 \leq j_3, \tag{2-34}$$

$$x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_2}][x_{j_3},x_{j_4}], i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k, j_1 < j_2, j_3 \text{ e } j_3 < j_4, \tag{2-35}$$

$$x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_2}]\dots[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}], i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k, j_1 < j_2 < \dots < j_{2l}, l \geq 3, \tag{2-36}$$

$$x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_2}]\dots[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}][x_{j_{2l+1}},x_{j_{2l+2}},x_{j_{2l+3}}], i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k, \tag{2-37}$$

$$j_1 < j_2 < \dots < j_{2l+3}, k \geq 0, l \geq 1,$$

em $Q_4 = F\langle X\rangle/T^{(4)}$ forma uma base para esse espaço vetorial.

Demonstração. Faremos uso do Teorema 1.11. Seja $f \in B$ um polinômio próprio. Como $[x_1,x_2,x_3,x_4]$ e $[x_1,x_2,x_3][x_4,x_5,x_6]$ pertencem a $T^{(4)}$ (Lema 1.32), não é difícil verificar que f é uma combinação linear, módulo $T^{(4)}$, dos seguintes polinômios

$$\begin{aligned}
b_1 &= 1, \\
b_2 &= [x_{j_1},x_{j_2}], \\
b_3 &= [x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3}], \\
b_4 &= [x_{j_1},x_{j_2}][x_{j_3},x_{j_4}], \\
b_5 &= [x_{j_1},x_{j_2}][x_{j_3},x_{j_4}]\dots[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}], l \geq 3, \\
b_6 &= [x_{j_1},x_{j_2}]\dots[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}][x_{j_{2l+1}},x_{j_{2l+2}},x_{j_{2l+3}}], l \geq 1.
\end{aligned} \tag{2-38}$$

Como $[x_{j_1},x_{j_2}] = -[x_{j_2},x_{j_1}]$ (lei anti-comutativa), segue que b_2 é múltiplo escalar do polinômio

$$[x_{j_1},x_{j_2}],\ j_1 < j_2. \tag{2-39}$$

Vejamos o polinômio b_3. Se b_3 tiver duas variáveis iguais, então segue da lei anti-comutativa que ele é um múltiplo escalar de um polinômio da forma

$$[x_{j_1},x_{j_2},x_{j_2}], j_1 \neq j_2. \tag{2-40}$$

Se todas as variáveis de b_3 forem distintas, então segue da identidade de Jacobi e da lei anti-comutativa que b_3 é uma combinação linear de polinômios da forma

$$[x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3}],\, j_1 > j_2 < j_3. \tag{2-41}$$

Segue da relação $[[x_1,x_2],[x_3,x_4]] = [x_1,x_2,x_3,x_4] - [x_1,x_2,x_4,x_3] \in T^{(4)}$ que b_4 é uma combinação linear, módulo $T^{(4)}$, de polinômios da forma

$$[x_{j_1},x_{j_2}][x_{j_1},x_{j_3}], \quad j_2 \leq j_3, \tag{2-42}$$

$$[x_{j_1},x_{j_2}][x_{j_3},x_{j_4}], \quad j_1 < j_2, j_3 \,\mathrm{e}\, j_3 < j_4. \tag{2-43}$$

Pelo Corolário 1.33 (i) obtemos que b_5 é uma combinação linear, módulo $T^{(4)}$, dos polinômios

$$[x_{j_1},x_{j_2}][x_{j_3},x_{j_4}]\ldots[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}],\, l \geq 3, j_1 < j_2 < \ldots < j_{2l}. \tag{2-44}$$

Finalmente, segue do Lema 1.33 (ii) que b_6 é, módulo $T^{(4)}$, um múltiplo escalar de um polinômio da forma

$$[x_{j_1},x_{j_2}]\ldots[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}][x_{j_{2l+1}},x_{j_{2l+2}},x_{j_{2l+3}}],\, l \geq 1, j_1 < j_2 < \ldots < j_{2l+3}. \tag{2-45}$$

Portanto a imagem dos polinômios (2-38)-(2-45) em $B/(B \cap T^{(4)})$ gera esse espaço vetorial. Vamos mostrar que essa imagem forma um conjunto linearmente independente.

Seja f uma combinação linear de polinômios em (2-38)-(2-45) com $f \equiv 0 \pmod{T^{(4)}}$. Escreva

$$f = f_1 + f_2$$

onde f_1 é uma combinação linear de polinômios em (2-38),(2-39), (2-43) e (2-44) e f_2 é uma combinação linear dos polinômios em (2-40),(2-41), (2-42) e (2-45).

Como $f_2 \in T^{(3)}, f \in T^{(4)}$ e $T^{(4)} \subseteq T^{(3)}$, segue que $f_1 \equiv 0 \pmod{T^{(3)}}$. Pela Proposição 1.21, a imagem dos polinômios de (2-38),(2-39), (2-43) e (2-44) em $F\langle X\rangle/T^{(3)}$ forma um conjunto linearmente independente. Desse modo, $f_1 \equiv 0 \pmod{T^{(3)}}$ implica $f_1 = 0$. Como $f = f_1 + f_2$ e $f \equiv 0 \pmod{T^{(4)}}$ temos

$$f_2 \equiv 0 \pmod{T^{(4)}}. \tag{2-46}$$

Resta mostrar que os coeficientes correspondentes aos polinômios (2-40),(2-41), (2-42) e (2-45) que aparecem em f_2 devem ser nulos.

Afirmação 1: Os coeficientes dos polinômios das formas (2-40) e (2-42) (com

$j_2 = j_3$) que aparecem em f_2 são nulos. De fato, escreva

$$f_2 = \alpha[x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_2}] + \beta[x_{j_1}, x_{j_2}][x_{j_1}, x_{j_2}] + \text{demais termos}, \tag{2-47}$$

onde $\alpha, \beta \in F$ e $j_1 < j_2$. Agora considere o endomorfismo $\varphi_{j_1 j_2}$ de $F\langle X\rangle$ tal que $\varphi_{j_1 j_2}(x_{j_s}) = x_{j_s}$, se $s \in \{1,2\}$ e $\varphi_{j_1 j_2}(x_{j_s}) = 1$ se $s \notin \{1,2\}$. Segue de (2-46) e (2-47) que

$$\varphi_{j_1 j_2}(f_2) = \alpha[x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_2}] + \beta[x_{j_1}, x_{j_2}][x_{j_1}, x_{j_2}] \in T^{(4)}.$$

Observe que $\alpha[x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_2}]$ e $\beta[x_{j_1}, x_{j_2}][x_{j_1}, x_{j_2}]$ são componentes multi-homogêneas do polinômio $\varphi_{j_1 j_2}(f_2)$. Como $T^{(4)}$ é multi-homogêneo (Lema 1.10), segue que os polinômios $\alpha[x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_2}]$ e $\beta[x_{j_1}, x_{j_2}][x_{j_1}, x_{j_2}]$ pertencem a $T^{(4)}$. Como $[x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_2}] \notin T^{(4)}$ (porque possui grau inferior a 4) temos $\alpha = 0$. Também $[x_{j_1}, x_{j_2}][x_{j_1}, x_{j_2}] \notin T^{(4)}$ (Lema 2.13). Assim $\beta = 0$.

Afirmação 2: Os coeficientes dos polinômios das formas (2-41) e (2-42) (com $j_2 < j_3$) que aparecem em f_3 são nulos. De fato, escreva

$$f_2 = \alpha[x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}] + \beta[x_{j_3}, x_{j_2}, x_{j_1}] + \gamma[x_{j_1}, x_{j_2}][x_{j_1}, x_{j_3}] + \text{demais termos}, \tag{2-48}$$

onde $\alpha, \beta, \gamma \in F$ e $j_2 < j_1, j_3$. Tome o endomorfismo $\varphi_{j_1 j_2 j_3}$ de $F\langle X\rangle$ tal que $\varphi_{j_1 j_2 j_3}(x_{j_s}) = x_{j_s}$, se $s \in \{1,2,3\}$ e $\varphi_{j_1 j_2 j_3}(x_{j_s}) = 1$ se $s \notin \{1,2,3\}$. Por (2-46) e (2-48), temos

$$\varphi_{j_1 j_2 j_3}(f_2) = \alpha[x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}] + \beta[x_{j_3}, x_{j_2}, x_{j_1}] + \gamma[x_{j_1}, x_{j_2}][x_{j_1}, x_{j_3}] \in T^{(4)}.$$

Como $T^{(4)}$ é multi-homogêneo, segue que as componentes multi-homogêneas $h_1 = \alpha[x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}] + \beta[x_{j_3}, x_{j_2}, x_{j_1}]$ e $h_2 = \gamma[x_{j_1}, x_{j_2}][x_{j_1}, x_{j_3}]$ de $\varphi_{j_1 j_2 j_3}(f)$ pertencem a $T^{(4)}$.

Portanto $\alpha = \beta = 0$, caso contrário $\deg h_1 = 3$ e teríamos $h_1 \notin T^{(4)}$, uma contradição. Como $[x_{j_1}, x_{j_2}][x_{j_1}, x_{j_3}] \notin T^{(4)}$, temos $\gamma = 0$.

Afirmação 3: Os coeficientes dos polinômios da forma (2-45) que aparecem em f_2 são nulos. Isso segue diretamente do Teorema 2.11.

Segue das Afirmações 1-3 que a imagem dos polinômios (2-38)-(2-45) em $B/(B \cap T^{(4)})$ forma uma base para esse espaço vetorial. Finalmente, segue do Teorema 1.11 que a imagem dos polinômios (i)-(viii) em $Q_4 = F\langle X\rangle / T^{(4)}$ forma uma base para esse espaço vetorial. $\square$

2.2.2 Uma base para o espaço vetorial $T^{(3)}/T^{(4)}$

Vejamos mais algumas propriedades do polinômio

$$\omega(x_1,x_2,x_3,x_4) = [x_1,x_2][x_3,x_4] + [x_1,x_3][x_2,x_4].$$

Observe que ω é simétrico nas variáveis x_2 e x_3, isto é

$$\omega(x_1,x_2,x_3,x_4) = \omega(x_1,x_3,x_2,x_4). \tag{2-49}$$

O polinômio ω safisfaz também duas "identidades de Jacobi" (veja [44] e [45]):

$$\omega(x_1,x_2,x_3,x_4) + \omega(x_2,x_3,x_1,x_4) + \omega(x_3,x_1,x_2,x_4) = 0, \tag{2-50}$$
$$\omega(x_1,x_2,x_3,x_4) + \omega(x_1,x_3,x_4,x_2) + \omega(x_1,x_4,x_2,x_3) = 0. \tag{2-51}$$

A verificação de (2-50) e (2-51) são diretas, basta usar a definição de ω e fazer os cancelamentos que ocorrerem.

As duas relações seguintes (veja [44]) serão usadas no texto :

$$\omega(x_1,x_2,x_3,x_4) \equiv \omega(x_3,x_4,x_1,x_2) \pmod{T^{(4)}}, \tag{2-52}$$
$$\omega(x_1,x_2,x_3,x_4) \equiv \omega(x_2,x_1,x_4,x_3) \pmod{T^{(4)}}. \tag{2-53}$$

Vamos prová-las. Observando que $[[x_1,x_2],[x_3,x_4]] = [x_1,x_2,x_3,x_4] - [x_1,x_2,x_4,x_3] \in T^{(4)}$, temos

$$\begin{aligned} \omega(x_1,x_2,x_3,x_4) &= [x_1,x_2][x_3,x_4] + [x_1,x_3][x_2,x_4] \\ &= [x_3,x_4][x_1,x_2] + [[x_1,x_2],[x_3,x_4]] + [x_1,x_3][x_2,x_4] \\ &\equiv [x_3,x_4][x_1,x_2] + [x_3,x_1][x_4,x_2] \pmod{T^{(4)}} \\ &\equiv \omega(x_3,x_4,x_1,x_2) \pmod{T^{(4)}}, \end{aligned}$$

que é a relação (2-52). Também

$$\begin{aligned} \omega(x_1,x_2,x_3,x_4) &= [x_1,x_2][x_3,x_4] + [x_1,x_3][x_2,x_4] \\ &= [x_2,x_4][x_1,x_3] + [[x_1,x_3],[x_2,x_4]] + [x_1,x_2][x_3,x_4] \\ &\equiv [x_2,x_4][x_1,x_3] + [x_2,x_1][x_4,x_3] \pmod{T^{(4)}} \\ &\equiv \omega(x_2,x_1,x_4,x_3) \pmod{T^{(4)}}, \end{aligned}$$

que é a relação (2-53).

Defina o seguinte subespaço vetorial de $F\langle X\rangle$:

$$M = Span\{\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3},x_{j_4}) \mid \{j_1,j_2,j_3,j_4\} \subseteq \mathbb{N}\}.$$

Quando F possui característica 0, uma base para o espaço vetorial $(M + T^{(4)})/T^{(4)}$ foi encontrada por I. B. Volichenko [44] (veja também [45]). A seguir, exibimos uma base para o espaço vetorial $(M+T^{(4)})/T^{(4)}$ quando F possui característica 3.

Proposição 2.15. *Seja F um corpo de característica 3. Então o espaço vetorial $(M+T^{(4)})/T^{(4)}$ possui uma base formada pelos elementos*

$$\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3},x_{j_4})+T^{(4)}, \omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{j_4},x_{j_3})+T^{(4)}, j_1<j_2<j_3<j_4, \quad (2\text{-}54)$$

$$\omega(x_{j_1},x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3})+T^{(4)}, j_2<j_3. \quad (2\text{-}55)$$

Demonstração. Vamos mostrar que os elementos (2-54)-(2-55) geram o espaço vetorial $(M+T^{(4)})/T^{(4)}$. Observe primeiramente que se $\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3},x_{j_4})$ tiver mais de duas variáveis iguais, então $\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3},x_{j_4})$ se anula. Assim podemos assumir que cada gerador $\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3},x_{j_4})$ de M possui no máximo duas variáveis iguais.

Fixemos $J=\{l_1,l_2,l_3,l_4\}\subseteq\mathbb{N}$ e seja $J=\{j_1,j_2\}\cup\{j_3,j_4\}$ uma união disjunta qualquer. Afirmamos que todo elemento $\omega(x_{l_1},x_{l_2},x_{l_3},x_{l_4})+T^{(4)}$ é uma combinação linear de elementos da forma

$$\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{l_3},x_{l_4})+T^{(4)}, \omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{l_4},x_{l_3})+T^{(4)}. \quad (2\text{-}56)$$

De fato, aplicando (2-53) duas vezes temos

$$\omega(x_{l_1},x_{l_2},x_{l_3},x_{j_1})\equiv\omega(x_{l_2},x_{l_1},x_{j_1},x_{l_3})\equiv\omega(x_{l_2},x_{j_1},x_{l_1},x_{l_3})\equiv\omega(x_{j_1},x_{l_2},x_{l_3},x_{l_1}) \pmod{T^{(4)}}.$$

Assim, todo elemento $\omega(x_{l_1},x_{l_2},x_{l_3},x_{l_4})+T^{(4)}$ pode ser escrito da forma

$$\omega(x_{j_1},x_{l_2},x_{l_3},x_{l_4})+T^{(4)}. \quad (2\text{-}57)$$

Por (2-51), temos

$$\begin{aligned}\omega(x_{j_1},x_{l_2},x_{l_3},x_{j_2}) &= -\omega(x_{j_1},x_{l_3},x_{j_2},x_{l_2})-\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{l_2},x_{l_3}) \quad (2\text{-}58)\\ &= -\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{l_3},x_{l_2})-\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{l_2},x_{l_3}).\end{aligned}$$

Como $\omega(x_{j_1},x_{l_2},x_{j_2},x_{j_4})=\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{l_2},x_{j_4})$, segue de (2-58) que todo elemento da forma $\omega(x_{l_1},x_{l_2},x_{l_3},x_{l_4})+T^{(4)}$ pode ser escrito como uma combinação linear dos elementos (2-56). Isso prova a afirmação feita.

Seja $\omega(x_{l_1},x_{l_2},x_{l_3},x_{l_4})$ um gerador qualquer do espaço vetorial M e suponha que todas as suas variáveis sejam distintas. Assim $\{l_1,l_2,l_3,l_4\}=\{j_1,j_2,j_3,j_4\}$ com $j_1<j_2<j_3<j_4$. Segue da afirmação provada acima que $\omega(x_{l_1},x_{l_2},x_{l_3},x_{l_4})+T^{(4)}$ pode ser escrito como uma combinação linear dos elementos $\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3},x_{j_4})+T^{(4)}$ e $\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{j_4},x_{j_3})+T^{(4)}$ com $j_1<j_2<j_3<j_4$ (que são da forma 2-54).

Agora, suponha que o polinômio $\omega(x_{l_1},x_{l_2},x_{l_3},x_{l_4})$ possua duas variáveis repetidas. Assim $\{l_1,l_2,l_3,l_4\}=\{j_1,j_2,j_3\}$ com $j_2<j_3$. Segue novamente da afirmação provada que $\omega(x_{l_1},x_{l_2},x_{l_3},x_{l_4})+T^{(4)}$ é uma combinação linear dos elementos $\omega(x_{j_1},x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3})+T^{(4)}$ e $\omega(x_{j_1},x_{j_1},x_{j_3},x_{j_2})+T^{(4)}$ $(j_2<j_3)$. Como $[[x_1,x_2],[x_3,x_4]]=[x_1,x_2,x_3,x_4]-[x_1,x_2,x_4,x_3]\in T^{(4)}$, temos

$$\begin{aligned}\omega(x_{j_1},x_{j_1},x_{j_3},x_{j_2}) &= [x_{j_1},x_{j_3}][x_{j_1},x_{j_2}]\\ &\equiv [x_{j_1},x_{j_2}][x_{j_1},x_{j_3}] \pmod{T^{(4)}}\\ &= \omega(x_{j_1},x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3}).\end{aligned}$$

Assim $\omega(x_{l_1},x_{l_2},x_{l_3},x_{l_4})+T^{(4)}$ é um múltiplo escalar do elemento $\omega(x_{j_1},x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3})+T^{(4)}$ com $j_2<j_3$ (que é da forma (2-55)). Mostramos assim que os elementos (2-54)-(2-55) geram o espaço vetorial $(M+T^{(4)})/T^{(4)}$.

Vamos mostrar que esses elementos são linearmente independentes. De fato, seja

$$\sum_J \alpha_J\omega(j_1,j_2,j_3,j_4)+T^{(4)}=T^{(4)} \tag{2-59}$$

onde cada $\alpha_J\in F$, $J=(j_1,j_2,j_3,j_4)$ e os $\omega(j_1,j_2,j_3,j_4)+T^{(4)}$ são elementos de (2-54)-(2-55). Observe que J é de uma das seguintes formas: $J_1=(j_1,j_2,j_3,j_4)$, $J_2=(j_1,j_2,j_4,j_3)$ com $j_1<j_2<j_3<j_4$ ou $J_3=(j_1,j_1,j_2,j_3)$ com $j_2<j_3$. Como

$$\begin{aligned}&\alpha_{J_1}\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3},x_{j_4})+\alpha_{J_2}\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{j_4},x_{j_3})=\\ &=(\alpha_{J_1}-\alpha_{J_2})[x_{j_1},x_{j_2}][x_{j_3},x_{j_4}]+\alpha_{J_1}[x_{j_1},x_{j_3}][x_{j_2},x_{j_4}]+\alpha_{J_2}[x_{j_1},x_{j_4}][x_{j_2},x_{j_3}].\end{aligned}$$

e

$$\omega(x_{j_1},x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3})=[x_{j_1},x_{j_2}][x_{j_1},x_{j_3}] \tag{2-60}$$

podemos escrever a igualdade (2-59) da seguinte forma

$$\begin{aligned}&\sum(\alpha_{J_1}-\alpha_{J_2})[x_{j_1},x_{j_2}][x_{j_3},x_{j_4}]+\sum\alpha_{J_1}[x_{j_1},x_{j_3}][x_{j_2},x_{j_4}]+\sum\alpha_{J_2}[x_{j_1},x_{j_4}][x_{j_2},x_{j_3}]\\ &+\sum\alpha_{J_3}[x_{j_1},x_{j_2}][x_{j_1},x_{j_3}]+T^{(4)}=T^{(4)}.\end{aligned} \tag{2-61}$$

Como o lado esquerdo da igualdade (2-61) é uma combinação linear de elementos da base de $F\langle X\rangle/T^{(4)}$ (Proposição 2.14), segue que todos os $\alpha_{J_1},\alpha_{J_2}$ e α_{J_3} são nulos.

Portanto todos os α_J da igualdade (2-59) são nulos. Isso mostra que os elementos (2-54)-(2-55) são linearmente independentes e portanto, formam uma base para o espaço vetorial $(M+T^{(4)})/T^{(4)}$. □

Lema 2.16. *Seja F um corpo qualquer. Então $x_1[x_2,x_3,x_3] + T^{(4)}$ e $x_1\omega(x_2,x_3,x_4,x_5)+T^{(4)}$ são centrais na álgebra $Q_4 = F\langle X\rangle/T^{(4)}$.*

Demonstração. De fato

$$[x_1[x_2,x_3,x_3],x_4] = x_1[x_2,x_3,x_3,x_4] + [x_1,x_4][x_2,x_3,x_3].$$

É claro que $x_1[x_2,x_3,x_3,x_4]$ pertence a $T^{(4)}$. Como $[x_1,x_4][x_2,x_3,x_3]$ também pertence a $T^{(4)}$ (Corolário 1.33 (ii)), segue que $[x_1[x_2,x_3,x_3],x_4]$ pertence a $T^{(4)}$, isto é $x_1[x_2,x_3,x_3]+T^{(4)}$ é central em Q_4.

Usando as igualdades $[ab,c] = a[b,c]+[a,c]b$ e $ab = ba+[a,b]$, obtemos

$$\begin{aligned}
[\omega(x_1,x_2,x_3,x_4),x_5] &= [[x_1,x_2][x_3,x_4],x_5]+[[x_1,x_3][x_2,x_4],x_5] \\
&= [x_1,x_2][x_3,x_4,x_5]+[x_1,x_2,x_5][x_3,x_4]+ \\
&+ [x_1,x_3][x_2,x_4,x_5]+[x_1,x_3,x_5][x_2,x_4] \\
&\equiv [x_3,x_4,x_5][x_1,x_2]+[x_1,x_2,x_5][x_3,x_4]+ \\
&+ [x_2,x_4,x_5][x_1,x_3]+[x_1,x_3,x_5][x_2,x_4]. \quad (\mathrm{mod}\ T^{(4)})
\end{aligned}$$

Pelo Lema 1.32, os polinômios $[x_3,x_4,x_5][x_1,x_2]+[x_2,x_4,x_5][x_1,x_3]$ e $[x_1,x_2,x_5][x_3,x_4]+[x_1,x_3,x_5][x_2,x_4]$ pertencem a $T^{(4)}$. Logo

$$[\omega(x_1,x_2,x_3,x_4),x_5] \in T^{(4)}. \tag{2-62}$$

Agora

$$[x_1\omega(x_2,x_3,x_4,x_5),x_6] = x_1[\omega(x_2,x_3,x_4,x_5),x_6]+[x_1,x_6]\omega(x_2,x_3,x_4,x_5). \tag{2-63}$$

Como $[x_1,x_6]\omega(x_2,x_3,x_4,x_5) \in T^{(4)}$ (Lema 1.32), segue de (2-62) e (2-63) que $[x_1\omega(x_2,x_3,x_4,x_5),x_6]$ pertence a $T^{(4)}$, isto é, $x_1\omega(x_2,x_3,x_4,x_5)+T^{(4)}$ é central em Q_4.

□

Quando F possui característica 0, Volichenko [44] encontrou uma base para o espaço vetorial $T^{(3)}/T^{(4)}$. A seguir exibimos uma base para o espaço vetorial $T^{(3)}/T^{(4)}$ quando F possui característica 3.

Proposição 2.17. *Seja F um corpo de característica 3. Então a imagem dos polinômios*

$$x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_2},x_{j_2}], i_1 \le i_2 \le \dots \le i_k, j_1 \ne j_2, \tag{2-64}$$

$$x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3}], i_1 \le i_2 \le \dots \le i_k, j_1 > j_2 < j_3, \tag{2-65}$$

$$x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3},x_{j_4}); x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{j_4},x_{j_3}), \tag{2-66}$$
$$i_1 \le i_2 \le \dots \le i_k, j_1 < j_2 < j_3 < j_4,$$

$$x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}\omega(x_{j_1},x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3}), \tag{2-67}$$
$$i_1 \le i_2 \le \dots \le i_k, j_2 < j_3,$$

$$x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_2}]\dots[x_{j_{2l-1}},x_{l_{2l}}][x_{j_{2l+1}},x_{j_{2l+2}},x_{j_{2l+3}}], \tag{2-68}$$
$$i_1 \le i_2 \le \dots \le i_k, j_1 < j_2 < \dots < j_{2l+3}, k \ge 0, l \ge 1$$

em $Q_4 = F\langle X\rangle/T^{(4)}$ forma uma base para o espaço vetorial $T^{(3)}/T^{(4)}$.

Demonstração. Vamos mostrar primeiramente que a imagem dos polinômios (2-64)-(2-68) em $Q_4 = F\langle X\rangle/T^{(4)}$ gera o espaço vetorial $T^{(3)}/T^{(4)}$. Como $[x_1,x_2,x_3]$ e $\omega(x_1,x_2,x_3,x_4)$ pertencem a $T^{(3)}$ (Lema 1.18 (i)), segue que os polinômios (2-64)-(2-68) pertencem a $T^{(3)}$. Assim a imagem dos polinômios (2-64)-(2-68) em $Q_4 = F\langle X\rangle/T^{(4)}$ está contida em $T^{(3)}/T^{(4)}$.

Pela Proposição 1.20, $T^{(3)}$ é gerado, como um ideal bilateral de $F\langle X\rangle$, pelos polinômios $[x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3}]$ $(x_{i_s} \in X)$ e $\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3},x_{j_4})$ $(x_{j_s} \in X)$. Assim todo polinômio $f \in T^{(3)}$ pode ser escrito como uma combinação linear de polinômios da forma

$$x_{i_1}\dots x_{i_r}[x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3}]x_{i_{r+1}}\dots x_{i_k}, \tag{2-69}$$

$$x_{i_1}\dots x_{i_r}\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3},x_{j_4})x_{i_{r+1}}\dots x_{i_k}. \tag{2-70}$$

Vamos mostrar primeiramente que os polinômios da forma (2-69) podem ser escritos, módulo $T^{(4)}$, como uma combinação linear dos polinômios (2-64)-(2-68). Como $[x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3}] + T^{(4)}$ é central de Q_4, segue que cada polinômio da forma (2-69) pode ser escrito, módulo $T^{(4)}$, como

$$x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3}]. \tag{2-71}$$

Usando a igualdade $ab = ba + [a,b]$ para ordenar as variáveis $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ do polinômio (2-71), bem como a relação $[x_1,x_2,x_3][x_4,x_5,x_6] \in T^{(4)}$ (Lema 1.32), podemos verificar que cada polinômio da forma (2-71) pode ser escrito, módulo

$T^{(4)}$, como uma combinação linear de polinômios da forma

$$x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3}], i_1 \leq \ldots \leq i_k, \tag{2-72}$$

$$x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_2}]\ldots[x_{j_{2l-1}},x_{l_{2l}}][x_{j_{2l+1}},x_{j_{2l+2}},x_{j_{2l+3}}], i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k. \tag{2-73}$$

Vejamos o polinômio (2-72). Se o comutador triplo $[x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3}]$ do polinômio (2-72) tiver duas variáveis iguais, então é fácil ver que o polinômio (2-72) é um múltiplo escalar de algum polinômio da forma (2-64). Se o comutador triplo $[x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3}]$ do polinômio (2-72) tiver todas as suas variáveis distintas, então segue da identidade de Jacobi e da lei anti-comutativa que o polinômio (2-72) pode ser escrito como uma combinação linear de polinômios da forma (2-65).

Vejamos o polinômio (2-73). Segue do Corolário 1.33 (ii) que módulo $T^{(4)}$, todas as variáveis dentro dos comutadores do polinômio (2-73) podem ser ordenadas, isto é, módulo $T^{(4)}$, cada polinômio (2-73) é um múltiplo escalar de algum polinômio da forma (2-68). Isso conclui a afirmação de que todo polinômio da forma (2-69) pode ser escrito, módulo $T^{(4)}$, como uma combinação linear dos polinômios (2-64)-(2-68).

Vamos mostrar agora que todo polinômio da forma (2-70) pode ser escrito, módulo $T^{(4)}$, como uma combinação linear dos polinômios (2-66)-(2-67). Como $\omega(x_1,x_2,x_3,x_4)+T^{(4)}$ é central em Q_4 (Lema 2.16), segue que o polinômio (2-70) pode ser escrito, módulo $T^{(4)}$, como

$$x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3},x_{j_4}). \tag{2-74}$$

Usando a igualdade $ab = ba+[a,b]$ e a relação $[x_5,x_6]\omega(x_1,x_2,x_3,x_4) \in T^{(4)}$ (Lema 1.32), vemos que as variáveis $x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_k}$ do polinômio (2-74) podem ser ordenadas, isto é, módulo $T^{(4)}$, cada polinômio da forma (2-74) pode ser escrito como

$$x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3},x_{j_4}),\ i_1 < i_2 < \ldots < i_k. \tag{2-75}$$

Finalmente, segue do Lema 2.15 que cada polinômio da forma (2-75) pode ser escrito, módulo $T^{(4)}$, como uma combinação linear dos polinômios (2-66)-(2-67). Isso conclui a afirmação de que todo polinômio da forma (2-70) pode ser escrito, módulo $T^{(4)}$, como uma combinação linear dos polinômios de (2-66)-(2-67).

Mostramos assim que todo polinômio $f \in T^{(3)}$ pode ser escrito, módulo $T^{(4)}$, como uma combinação linear dos polinômios (2-64)-(2-68), isto é, a imagem dos polinômios (2-64)-(2-68) em $Q_4 = F\langle X\rangle/T^{(4)}$ gera $T^{(3)}/T^{(4)}$.

Agora vamos mostrar que essa imagem forma um conjunto linearmente independente. De fato, seja

$$\sum_i \delta_i f_i \equiv 0 \pmod{T^{(4)}}, \tag{2-76}$$

onde $\delta_i \in F$ e os g_i são polinômios distintos de (2-64)-(2-68). Como cada polinômio da forma $\alpha x_{i_1}\ldots x_{i_k}\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3},x_{j_4})+\beta x_{i_1}\ldots x_{i_k}\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{j_4},x_{j_3})$ $(i_1\leq\ldots\leq i_k, j_1<j_2<j_3<j_4)$ pode ser escrito como $(\alpha-\beta)x_{i_1}\ldots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_2}][x_{j_3},x_{j_4}]+\alpha x_{i_1}\ldots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_3}][x_{j_2},x_{j_4}]+\beta x_{i_1}\ldots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_4}][x_{j_2},x_{j_3}]$, segue que a expressão (2-76) pode ser escrita como

$$\sum_i \gamma_i g_i+\sum_j(\alpha_j-\beta_j)h_j+\sum_j\alpha_j u_j+\sum_j\beta_j v_j\equiv 0 \pmod{T^{(4)}}, \tag{2-77}$$

onde os g_i são polinômios distintos de (2-32), (2-33),(2-34) e (2-37) (da Proposição 2.14) e h_j,u_j,v_j são polinômios distintos de (2-35) (também da Proposição 2.14).

Como todos os polinômio g_i,h_j,u_j,v_j também são distintos e a imagem deles em $F\langle X\rangle/T^{(4)}$ são parte da base de $F\langle X\rangle/T^{(4)}$ (Lema 2.14), segue de (2-77) que todos os coeficientes $\gamma_i,\alpha_j,\beta_j$ são nulos. Portanto cada δ_i em 2-76 também é nulo e isso mostra que a imagem dos polinômios (2-64)-(2-68) em $Q_4=F\langle X\rangle/T^{(4)}$ forma um conjunto linearmente independente. □

2.2.3 Os polinômios centrais da álgebra $C(Q_4)\cap T^{(3)}$

Começaremos com uma descrição dos polinômios de $T^{(3)}$ que são homogêneos de grau 1 em x_1.

Lema 2.18. *Sejam F um corpo de característica 3 e $f=f(x_1,\ldots,x_n)\in T^{(3)}$ um polinômio homogêneo de grau 1 em x_1. Então existem polinômios $g_1=g_1(x_2,\ldots,x_n)\in F\langle X\rangle$ (que não depende de x_1), $g_2\in\langle[x_1,x_2,x_3]\rangle^{TS}$, $g_3\in\langle\omega(x_1,x_2,x_3,x_4)\rangle^{TS}$ e $g_4\in T^{(4)}$ tais que $f=x_1g_1+g_2+g_3+g_4$.*

Demonstração. Seja $f=f(x_1,\ldots,x_n)\in T^{(3)}$ um polinômio homogêneo de grau 1 em x_1. Segue da Proposição 2.17 que f é uma combinação linear, módulo $T^{(4)}$, de polinômios das seguintes formas:

(i) $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3}]$, $i_1\leq i_2\leq\ldots\leq i_k, j_1>j_2\leq j_3$,

(ii) $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3},x_{j_4})$; $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{j_4},x_{j_3})$,
$i_1\leq i_2\leq\ldots\leq i_k, j_1<j_2<j_3<j_4$,

(iii) $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}\omega(x_{j_1},x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3}), i_1\leq i_2\leq\ldots\leq i_k, j_2<j_3$,

(iv) $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_2}]\ldots[x_{j_{2l-1}},x_{l_{2l}}][x_{j_{2l+1}},x_{j_{2l+2}},x_{j_{2l+3}}]$,
$k\geq 0, l\geq 1, i_1\leq i_2\leq\ldots\leq i_k, j_1<j_2<\ldots<j_{2l+3}$.

Seja h um polinômio qualquer de (i)-(iv), que é homogêneo de grau 1 em x_1. Se existirem polinômios $h_1 = h_1(x_2,\ldots,x_n) \in F\langle X\rangle$, $h_2 \in \langle [x_1,x_2,x_3]\rangle^{TS}$, $h_3 \in \langle \omega(x_1,x_2,x_3,x_4)\rangle^{TS}$ e $h_4 \in T^{(4)}$ tais que $h = h_1x_1 + h_2 + h_3 + h_4$, então é fácil ver que existirão polinômios $g_1 = g_1(x_2,\ldots,x_n) \in F\langle X\rangle$ (que não depende de x_1), $g_2 \in \langle [x_1,x_2,x_3]\rangle^{TS}$, $g_3 \in \langle \omega(x_1,x_2,x_3,x_4)\rangle^{TS}$ e $g_4 \in T^{(4)}$ tais que $f = x_1g_1 + g_2 + g_3 + g_4$ e o lema estará provado.

Observe que se $i_1 = 1$ em cada polinômio h da forma (i)-(iv), então podemos escrever $h = x_1h_1$, onde $h_1 = h_1(x_2,\ldots,x_n)$ é a "parte de h que está à direita de x_1". Como h_1 não depende de x_1 o polinômio h está na forma desejada. Assim, é suficiente considerar os polinômios h nos quais $i_1 \neq 1$, isto é, a variável x_1 ocorre na "parte comutador" do polinômio h.

Seja h um polinômio da forma (i). Então $j_2 = 1$. Fixemos $a = -x_{i_1}\ldots x_{i_k}$. Assim $h = -a[x_{j_1},x_1,x_{j_3}] = a[x_1,x_{j_1}x_{j_3}]$. Pela Proposição 1.17 (i), temos

$$\begin{aligned}
[ax_1,x_{j_1},x_{j_3}] &= a[x_1,x_{j_1},x_{j_3}] + [a,x_{j_1}][x_1,x_{j_3}] + [a,x_{j_3}][x_1,x_{j_1}] + [a,x_{j_1},x_{j_3}]x_1 \\
&= a[x_1,x_{j_1},x_{j_3}] - \omega(a,x_{j_3},x_{j_1},x_1) + x_1[a,x_{j_1},x_{j_3}] + [a,x_{j_1},x_{j_3},x_1].
\end{aligned}$$

Pondo $h_1 = -[a,x_{j_1},x_{j_3}]$, $h_2 = [ax_1,x_{j_1},x_{j_3}]$, $h_3 = \omega(a,x_{j_3},x_{j_1},x_1)$ e $h_4 = [a,x_{j_1},x_{j_3},x_1]$, segue que

$$h = x_1h_1 + h_2 + h_3 + h_4,$$

onde $h_1 \in F\langle X\rangle$ não depende de x_1, $h_2 \in \langle [x_1,x_2,x_3]\rangle^{TS}$, $h_3 \in \langle \omega(x_1,x_2,x_3,x_4)\rangle^{TS}$ e $h_4 \in T^{(4)}$.

Seja h um polinômio da forma (ii). Então $j_1 = 1$. Fixemos $a = x_{i_1}\ldots x_{i_k}$. Assim $h = a\omega(x_1,x_{j_2},x_{j_3},x_{j_4})$ ou $h = a\omega(x_1,x_{j_2},x_{j_4},x_{j_3})$. É suficiente considerar $h = a\omega(x_1,x_{j_2},x_{j_3},x_{j_4})$. Pelo Lema 1.19 (i), temos

$$\begin{aligned}
\omega(ax_1,x_{j_2},x_{j_3},x_{j_4}) &= a\omega(x_1,x_{j_2},x_{j_3},x_{j_4}) + x_1\omega(a,x_{j_2},x_{j_3},x_{j_4}) + \\
&+ [a,x_{j_2},x_1][x_{j_3},x_{j_4}] + [a,x_{j_3},x_1][x_{j_2},x_{j_4}].
\end{aligned}$$

Pondo $h_1 = -\omega(a,x_{j_2},x_{j_3},x_{j_4})$, $h_2 = \omega(ax_1,x_{j_2},x_{j_3},x_{j_4})$ e $h_3 = -[a,x_{j_2},x_1][x_{j_3},x_{j_4}] + [a,x_{j_3},x_1][x_{j_2},x_{j_4}]$, temos

$$h = x_1h_1 + h_2 + h_3,$$

onde $h_1 \in F\langle X\rangle$ não depende de x_1, $h_2 \in \langle \omega(x_1,x_2,x_3,x_4)\rangle^{TS}$ e $h_3 \in T^{(4)}$ (Lema 1.32).

Seja h um polinômio da forma (iii). Então $j_2 = 1$. Como $\omega(x_{j_1},x_{j_1},x_1,x_{j_3}) \equiv \omega(x_1,x_{j_3},x_{j_1},x_{j_1}) \pmod{T^{(4)}}$ (veja a relação (2-52)), podemos usar o mesmo argumento do caso anterior.

Seja h um polinômio da forma (iv). Fixemos $a = x_{i_2}\ldots x_{i_k}$. Fixemos também

$b = [x_{j_3}, x_{j_4}] \dots [x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}]$ se $l > 1$ e $b = 1$ se $l = 1$. Em qualquer dos casos temos

$$h = a[x_1, x_{j_2}]b[x_{j_{2l+1}}, x_{j_{2l+2}}, x_{j_{2l+3}}].$$

Observe que

$$\begin{aligned} [ax_1, x_{j_2}]b[x_{j_{2l+1}}, x_{j_{2l+2}}, x_{j_{2l+3}}] &= a[x_1, x_{j_2}]b[x_{j_{2l+1}}, x_{j_{2l+2}}, x_{j_{2l+3}}] + \\ &+ [a, x_{j_2}]x_1 b[x_{j_{2l+1}}, x_{j_{2l+2}}, x_{j_{2l+3}}] \\ &= a[x_1, x_{j_2}]b[x_{j_{2l+1}}, x_{j_{2l+2}}, x_{j_{2l+3}}] + \\ &+ x_1[a, x_{j_2}]b[x_{j_{2l+1}}, x_{j_{2l+2}}, x_{j_{2l+3}}] + \\ &+ [a, x_{j_2}, x_1]b[x_{j_{2l+1}}, x_{j_{2l+2}}, x_{j_{2l+3}}], \end{aligned} \tag{2-78}$$

e seja $h_1 = -[a, x_{j_2}]b[x_{j_{2l+1}}, x_{j_{2l+2}}, x_{j_{2l+3}}]$. Como $[a, x_{j_2}, x_1]b[x_{j_{2l+1}}, x_{j_{2l+2}}, x_{j_{2l+3}}] = b[a, x_{j_2}, x_1][x_{j_{2l+1}}, x_{j_{2l+2}}, x_{j_{2l+3}}] + [a, x_{j_2}, x_1, b][x_{j_{2l+1}}, x_{j_{2l+2}}, x_{j_{2l+3}}] \in T^{(4)}$ (Lema 1.32), segue de (2-78) que

$$h \equiv x_1 h_1 + [ax_1, x_{j_2}]b[x_{j_{2l+1}}, x_{j_{2l+2}}, x_{j_{2l+3}}] \pmod{T^{(4)}}. \tag{2-79}$$

Agora

$$\begin{aligned} [[ax_1, x_{j_2}]bx_{j_{2l+1}}, x_{j_{2l+2}}, x_{j_{2l+3}}] &= [ax_1, x_{j_2}]b[x_{j_{2l+1}}, x_{j_{2l+2}}, x_{j_{2l+3}}] + \\ &+ [[ax_1, x_{j_2}]b, x_{j_{2l+2}}][x_{j_{2l+1}}, x_{j_{2l+3}}] + \\ &+ [[ax_1, x_{j_2}]b, x_{j_{2l+3}}][x_{j_{2l+1}}, x_{2l+2}] + \\ &+ [[ax_1, x_{j_2}]b, x_{j_{2l+2}}, x_{j_{2l+3}}]x_{j_{2l+1}} \\ &= [ax_1, x_{j_2}]b[x_{j_{2l+1}}, x_{j_{2l+2}}, x_{j_{2l+3}}] - \\ &- \omega([ax_1, x_{j_2}]b, x_{j_{2l+2}}, x_{j_{2l+3}}, x_{j_{2l+2}}) + \\ &+ [[ax_1, x_{j_2}]b, x_{j_{2l+2}}, x_{j_{2l+3}}]x_{j_{2l+1}}. \end{aligned} \tag{2-80}$$

Sejam $h_2 = [[ax_1, x_{j_2}]bx_{j_{2l+1}}, x_{j_{2l+2}}, x_{j_{2l+3}}]$, $h_3 = -\omega([ax_1, x_{j_2}]b, x_{j_{2l+2}}, x_{j_{2l+3}}, x_{j_{2l+2}})$. Usando a relação $[[x_1, x_2], [x_3, x_4]] = [x_1, x_2, x_3, x_4] - [x_1, x_2, x_4, x_3] \in T^{(4)}$ e a igualdade $[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b$, não é difícil ver que $[[ax_1, x_{j_2}]b, x_{j_{2l+2}}, x_{j_{2l+3}}]x_{j_{2l+1}} \in T^{(4)}$. Assim, segue de (2-80) que

$$[ax_1, x_{j_2}]b[x_{j_{2l+1}}, x_{j_{2l+2}}, x_{j_{2l+3}}] \equiv h_2 + h_3 \pmod{T^{(4)}}. \tag{2-81}$$

Finalmente, vemos de (2-79) e (2-81) que existem $h_2 \in \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^{TS}$, $h_3 \in$

$\langle \omega(x_1,x_2,x_3,x_4)\rangle^{TS}$ e $h_4 \in T^{(4)}$ tais que

$$h = x_1h_1 + h_2 + h_3 + h_4,$$

e isso conclui a demonstração do lema. $\square$

Lema 2.19. *Sejam F um corpo de característica 3 e $g = g(x_2,\dots,x_n) \in F\langle X\rangle$ um polinômio que não depende de x_1. Se $x_1g + T^{(4)}$ for central em $Q_4 = F\langle X\rangle/T^{(4)}$, então $g \in \langle x_1[x_2,x_3,x_3]\rangle^{TS} + \langle x_1\omega(x_2,x_3,x_4,x_5)\rangle^{TS} + T^{(4)}$.*

Demonstração. Como $x_1g + T^{(4)}$ é central em Q_4, temos $[x_0,x_1g] \equiv 0 \pmod{T^{(4)}}$. Assim, usando a igualdade $[a,bc] = b[a,c] + [a,b]c$, vemos que $x_1[x_0,g] + [x_0,x_1]g \equiv 0 \pmod{T^{(4)}}$, isto é

$$x_1[x_0,g] \equiv -[x_0,x_1]g \pmod{T^{(4)}}. \tag{2-82}$$

Agora, como $T^{(4)} \subseteq T^{(3)}$, segue que $x_1g + T^{(3)}$ também é central em $Q_3 = F\langle X\rangle/T^{(3)}$. Assim, o Lema 1.26 garante que $g \in T^{(3)}$. Pelo Lema 2.17, g é uma combinação linear, módulo $T^{(4)}$, de polinômios da forma:

(i) $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_2},x_{j_2}]$, $i_1 \le i_2 \le \dots \le i_k, j_1 \ne j_2$,

(ii) $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3}]$, $i_1 \le i_2 \le \dots \le i_k, j_1 > j_2 \le j_3$,

(iii) $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3},x_{j_4})$; $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{j_4},x_{j_3})$,
$i_1 \le i_2 \le \dots \le i_k, j_1 < j_2 < j_3 < j_4$,
$x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}\omega(x_{j_1},x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3}), i_1 \le i_2 \le \dots \le i_k, j_2 < j_3$,

(iv) $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_2}]\dots[x_{j_{2l-1}},x_{l_{2l}}][x_{j_{2l+1}},x_{j_{2l+2}},x_{j_{2l+3}}]$,
$i_1 \le i_2 \le \dots \le i_k, j_1 < j_2 < \dots < j_{2l+3}\, k \ge 0, l \ge 1$.

Vamos analisar primeiramente o lado esquerdo de (2-82); e para fazer isso precisamos provar algumas afirmações.

Afirmação 1: Se h_1 é um polinômio da forma (i), então $h_1 + T^{(4)}$ é central em Q_4. Isso segue do fato de $a_1[a_2,a_3,a_3] + T^{(4)}$ ser central em Q_4 (conforme o Lema 2.16).

Afirmação 2: Se h_2 é um polinômio da forma (ii), então $[x_0,h_2]$ é uma combinação linear, módulo $T^{(4)}$, de polinômios da forma (iv). De fato, seja $h_2 = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3}]$. Usando a igualdade $[a_1a_2\dots a_n,a] = \sum_{i=1}^{n} a_1\dots a_{i-1}[a_i,a]a_{i+1}\dots a_n$ (Lema 1.17 (ii)), temos

$$\begin{aligned}
[x_0,h_2] &= [x_0,x_{i_1}]x_{i_2}\dots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3}] + \dots + x_{i_1}\dots x_{i_{k-1}}[x_0,x_{i_k}][x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3}] + \\
&+ x_{i_1}\dots x_{i_k}[x_0,[x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3}]].
\end{aligned}$$

Observe que $[a_1,a_2,a_3]+T^{(4)}$ e $[a_1,a_2][a_3,a_4,a_5]+T^{(4)}$ são centrais em Q_4. Como $x_{i_1}\dots x_{i_k}[x_0,[x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3}]]$ pertence a $T^{(4)}$, podemos escrever

$$[x_0,h_2] \equiv x_{i_1}\dots x_{i_k}[x_0,x_{i_1}][x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3}]+\dots+x_{i_1}\dots x_{i_{k-1}}[x_0,x_{i_k}][x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3}] \pmod{T^{(4)}}. \tag{2-83}$$

Agora, usando o Corolário 1.33 (ii), podemos ordenar os índices de cada variável dentro dos comutadores da expressão (2-83). Assim, $[x_0,h_2]$ é uma combinação linear, módulo $T^{(4)}$, de polinômios da forma (iv).

Afirmação 3: Se h_3 é um polinômio de (iii), então $h_3+T^{(4)}$ é central em Q_4. Isso segue do fato de $a_1\omega(a_2,a_3,a_4,a_5)+T^4$ ser central em Q_4 (conforme Lema 2.16).

Afirmação 4: Se h_4 é um polinômio da forma (iv), então $[x_0,h_4]$ é uma combinação linear, módulo $T^{(4)}$, de polinômios da forma (iv). De fato, seja $h_4 = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_2}]\dots[x_{j_{2l-1}},x_{l_{2l}}][x_{j_{2l+1}},x_{j_{2l+2}},x_{j_{2l+3}}]$. Usando a igualdade $[a_1a_2\dots a_n,a]=\sum_{i=1}^{n} a_1\dots a_{i-1}[a_i,a]a_{i+1}\dots a_n$ (Lema 1.17 (ii)), temos

$$\begin{aligned}
[x_0,h_4] &= [x_0,x_{i_1}]x_{i_2}\dots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_2}]\dots[x_{j_{2l-1}},x_{l_{2l}}][x_{j_{2l+1}},x_{j_{2l+2}},x_{j_{2l+3}}]+\dots+\\
&+ x_{i_1}\dots x_{i_{k-1}}[x_0,x_{i_k}][x_{j_1},x_{j_2}]\dots[x_{j_{2l-1}},x_{l_{2l}}][x_{j_{2l+1}},x_{j_{2l+2}},x_{j_{2l+3}}]+\\
&+ x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}[x_0,[x_{j_1},x_{j_2}]]\dots[x_{j_{2l-1}},x_{l_{2l}}][x_{j_{2l+1}},x_{j_{2l+2}},x_{j_{2l+3}}]+\dots+\\
&+ x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_2}]\dots[x_{j_{2l-1}},x_{l_{2l}}][x_0,[x_{j_{2l+1}},x_{j_{2l+2}},x_{j_{2l+3}}]].
\end{aligned}$$

Como $[a_1,a_2,a_3]+T^{(4)}$ é central em Q_4 e $[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6]\in T^{(4)}$ (Lema 1.32), obtemos

$$\begin{aligned}
[x_0,h_4] &\equiv x_{i_2}\dots x_{i_k}[x_0,x_{i_1}][x_{j_1},x_{j_2}]\dots[x_{j_{2l-1}},x_{l_{2l}}][x_{j_{2l+1}},x_{j_{2l+2}},x_{j_{2l+3}}]+\dots+ \\
&+ x_{i_1}\dots x_{i_{k-1}}[x_0,x_k][x_{j_1},x_{j_2}]\dots[x_{j_{2l-1}},x_{l_{2l}}][x_{j_{2l+1}},x_{j_{2l+2}},x_{j_{2l+3}}] \pmod{T^{(4)}}.
\end{aligned} \tag{2-84}$$

Usando o Corolário 1.33 (ii) para ordenar os índices de cada variável dentro dos comutadores da expressão (2-84), vemos que $[x_0,h_4]$ é uma combinação linear, módulo $T^{(4)}$, de polinômios da forma (iv).

Lembrando que g é uma combinação linear, módulo $T^{(4)}$, de polinômios em (i)-(iv), segue das Afirmações 1 à 4, o seguinte

Afirmação 5: O polinômio $x_1[x_0,g]$ de (2-82) é uma combinação linear, módulo $T^{(4)}$, de polinômios da forma (iv) nos quais x_1 não ocorre em nenhum comutador.

Agora, vejamos o lado direito de (2-82). Como antes, sejam h_1,h_2,h_3 e h_4 polinômios das formas (i),(ii),(iii) e (iv), respectivamente. Vamos provar mais algumas afirmações.

Afirmação 6: O polinômio $[x_0,x_1]h_1$ pertence a $T^{(4)}$.

De fato, como $[a_1,a_2,a_3]+T^{(4)}$ é central em Q_4 e $[a_1,a_2][a_3,a_4,a_4]$ pertence a $T^{(4)}$ (Corolário 1.33 (ii)), temos

$$\begin{aligned}
[x_0,x_1]h_1 &= [x_0,x_1]x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_2},x_{j_2}] \equiv x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}[x_0,x_1][x_{j_1},x_{j_2},x_{j_2}] \pmod{T^{(4)}}\\
&\equiv 0 \pmod{T^{(4)}}.
\end{aligned}$$

Afirmação 7: O polinômio $[x_0,x_1]h_2$ é, módulo $T^{(4)}$, um múltiplo escalar de algum polinômio da forma (iv).

De fato, como $[a_1,a_2,a_3]+T^{(4)}$ é central em Q_4, temos

$$[x_0,x_1]h_2 = [x_0,x_1]x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3}] \equiv x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}[x_0,x_1][x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3}] \pmod{T^{(4)}}.$$

Usando o Corolário 1.33 (ii) para ordenar os índices no comutador triplo, vemos que $[x_0,x_1]h_2$ é, módulo $T^{(4)}$, um múltiplo escalar de algum polinômio da forma (iv).

Afirmação 8: O polinômio $[x_0,x_1]h_3$ pertence a $T^{(4)}$.

De fato, é suficiente considerar $h_3 = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3},x_{j_4})$. Como $\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3},x_{j_4})+T^{(4)}$ é central em Q_4 (Lema 2.16) e $[x_0,x_1]\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3},x_{j_4})$ pertence a $T^{(4)}$ (Lema 1.32), temos

$$\begin{aligned}
[x_0,x_1]h_3 &= [x_0,x_1]x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3},x_{j_4})\\
&\equiv [x_0,x_1]\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3},x_{j_4})x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k} \pmod{T^{(4)}} = 0.
\end{aligned}$$

Afirmação 9: O polinômio $[x_0,x_1]h_4$ é, módulo $T^{(4)}$, um múltiplo escalar de algum polinômio da forma (iv).

De fato, como $[a_1,a_2,a_3]+T^{(4)}$ é central em Q_4 e $[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6]$ pertence a $T^{(4)}$ (Lema 1.32), é fácil verificar que

$$\begin{aligned}
[x_0,x_1]h_4 &= [x_0,x_1]x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_2}]\dots[x_{j_{2l-1}},x_{l_{2l}}][x_{j_{2l+1}},x_{j_{2l+2}},x_{j_{2l+3}}]\\
&\equiv x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}[x_0,x_1][x_{j_1},x_{j_2}]\dots[x_{j_{2l-1}},x_{l_{2l}}][x_{j_{2l+1}},x_{j_{2l+2}},x_{j_{2l+3}}] \pmod{T^{(4)}},
\end{aligned}$$

onde todos os índices já estão da forma desejada. Mostramos assim que o polinômio $[x_0,x_1]h_4$ é, módulo $T^{(4)}$, um múltiplo escalar de algum polinômio da forma (iv).

Segue das Afirmações 6 à 9 a seguinte:

Afirmação 10: O polinômio $[x_1,x_0]g$ de (2-82) é uma combinação linear, módulo $T^{(4)}$, de polinômios da forma (iv) nos quais x_1 ocorre somente nos comutadores.

Seja R o conjunto de todos os polinômios da forma (iv) nos quais a variável x_1 não ocorre na "parte comutador" e seja S o conjunto de todos os polinômios da forma (iv) nos quais a variável x_1 ocorre somente na "parte comutador". Observe que R e S são conjuntos disjuntos.

Pela Afirmação 5, o polinômio $x_1[x_0,g]$ é uma combinação linear, módulo $T^{(4)}$, de polinômios de R. Pela Afirmação 10, o polinômio $[x_0,x_1]g$ é uma combinação linear, módulo $T^{(4)}$, de polinômios de S. Como a imagem dos polinômios da forma (iv) em $F\langle X\rangle/T^{(4)}$ é parte da base de $T^{(3)}/T^{(4)}$ (Lema 2.17), segue que essa imagem forma um conjunto linearmente independente. Sendo R e S conjuntos disjuntos, segue de (2-82) que

$$[x_0,x_1]g \equiv 0 \pmod{T^{(4)}}. \tag{2-85}$$

Agora, vamos escrever

$$g+T^{(4)} = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i^{(1)} h_i^{(1)} + \sum_{j=1}^{n_2} \alpha_j^{(2)} h_j^{(2)} + \sum_{k=1}^{n_3} \alpha_k^{(3)} h_k^{(3)} + \sum_{l=1}^{n_4} \alpha_l^{(4)} h_l^{(4)} + T^{(4)}, \tag{2-86}$$

onde $h_i^{(1)}, h_j^{(2)}, h_k^{(3)}$ e $h_l^{(4)}$ são polinômios em (i), (ii), (iii) e (iv), respectivamente. Multiplicando ambos os membros da igualdade (2-86) por $[x_0,x_1]+T^{(4)}$, segue da Afirmação 10 que

$$[x_0,x_1]g+T^{(4)} = \sum_{j=1}^{n_2} \alpha_j^{(2)} u_j + \sum_{l=1}^{n_4} \alpha_l^{(4)} v_l + T^{(4)}, \tag{2-87}$$

onde os polinômios u_j e v_l são da forma (iv). Mais ainda, os conjuntos de polinômios $\{u_1,u_2,\ldots,u_{n_2}\}$ e $\{v_1,v_2,\ldots,v_{n_4}\}$ são disjuntos. Assim, por (2-85) e (2-87) temos

$$\sum_{j=1}^{n_2} \alpha_j^{(2)} u_j + \sum_{l=1}^{n_4} \alpha_l^{(4)} v_l + T^{(4)} = T^{(4)}.$$

Como $\{u_1,u_2,\ldots,u_{n_2}\} \cup \{v_1,v_2,\ldots,v_{n_4}\}$ é linearmente independente (Proposição 2.17), segue que todos os $\alpha_j^{(2)}$ $(j=1,\ldots,n_2)$ e os $\alpha_l^{(4)}$ $(l=1,\ldots,n_4)$ são nulos. Por (2-86) podemos escrever

$$g+T^{(4)} = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i^{(1)} h_i^{(1)} + \sum_{k=1}^{n_3} \alpha_k^{(3)} h_k^{(3)} + T^{(4)}. \tag{2-88}$$

Como os polinômios $h_i^{(1)}$ pertencem ao T-subespaço gerado por $x_1[x_2,x_3,x_3]$ e os polinômios $h_k^{(3)}$ pertencem ao T-subespaço gerado por $x_1\omega(x_2,x_3,x_4,x_5)$, segue de (2-88) que $g \in \langle x_1[x_2,x_3,x_3]\rangle^{TS} + \langle x_1\omega(x_2,x_3,x_4,x_5)\rangle^{TS} + T^{(4)}$. □

Lema 2.20. *Seja F um corpo de característica 3. Então $x_0^3+T^{(4)}$ é central na álgebra $Q_4 = F\langle X\rangle/T^{(4)}$.*

Demonstração. Usando a igualdade $[ab,c]=a[b,c]+[a,c]b$ podemos mostrar diretamente que

$$[x_0^3,x_1] = 3x_0^2[x_0,x_1] + 3x_0[x_0,x_1,x_0] + [x_0,x_1,x_0,x_0].$$

Como $char(F) = 3$ e $[x_0, x_1, x_0, x_0]$ pertence a $T^{(4)}$, segue que $[x_0^3, x_1]$ pertence a $T^{(4)}$, isto é $x_0^3 + T^{(4)}$ é central em Q_4. □

Lema 2.21. *Sejam F um corpo de característica 3 e $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in C(Q_4) \cap T^{(3)}$ um polinômio homogêneo de grau 1 em x_1. Então $f \in \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^{TS} + \langle x_1 [x_2, x_3, x_3] \rangle^{TS} + \langle x_1 \omega(x_2, x_3, x_4, x_5) \rangle^{TS} + T^{(4)}$.*

Demonstração. Como $f \in T^{(3)}$, segue do Lema 2.18 que existem polinômios $g_1 = g_1(x_2, \ldots, x_n) \in F\langle X \rangle$ (que não depende de x_1), $g_2 \in \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^{TS}$, $g_3 \in \langle \omega(x_1, x_2, x_3, x_4) \rangle^{TS}$ e $g_4 \in T^{(4)}$ tais que

$$f = x_1 g_1 + g_2 + g_3 + g_4. \tag{2-89}$$

É claro que $g_2 + T^{(4)}$ e $g_4 + T^{(4)}$ são centrais em Q_4. Como $f + T^{(4)}$ e $g_3 + T^{(4)}$ também são centrais em Q_4 (hipótese e Lema 2.16, respectivamente), segue de (2-89) que $x_1 g_1 + T^{(4)}$ é central em Q_4. Assim, pelo Lema 2.19, segue que $g_1 \in \langle x_1 [x_2, x_3, x_3] \rangle^{TS} + \langle x_1 \omega(x_2, x_3, x_4, x_5) \rangle^{TS} + T^{(4)}$. Como $\langle \omega(x_2, x_3, x_4, x_5) \rangle^{TS} \subseteq \langle x_1 \omega(x_2, x_3, x_4, x_5) \rangle^{TS}$, segue de (2-89) que $f \in \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^{TS} + \langle x_1 [x_2, x_3, x_3] \rangle^{TS} + \langle x_1 \omega(x_2, x_3, x_4, x_5) \rangle^{TS} + T^{(4)}$. □

Lema 2.22. *Sejam F um corpo de característica 3 e $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in C(Q_4) \cap T^{(3)}$ um polinômio homogêneo de grau m_1 em x_1 onde m_1 não é um múltiplo de 3. Então $f \in \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^{TS} + \langle x_1 [x_2, x_3, x_3] \rangle^{TS} + \langle x_1 \omega(x_2, x_3, x_4, x_5) \rangle^{TS} + T^{(4)}$.*

Demonstração. Pela Proposição 1.16 não há perda de generalidade em supor que f é multi-homogêneo de grau m_1 em x_1. Seja I_1 o T-subespaço gerado pelos polinômios

$$[x_1, x_2, x_3], x_1 [x_2, x_3, x_3], x_1 \omega(x_2, x_3, x_4, x_5) \text{ e } x_1 [x_2, x_3, x_4, x_5].$$

É claro que $I_1 = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^{TS} + \langle x_1 [x_2, x_3, x_3] \rangle^{TS} + \langle x_1 \omega(x_2, x_3, x_4, x_5) \rangle^{TS} + T^{(4)}$. Devemos mostrar que f pertence a I_1. Seja I_2 o T-subespaço gerado pelos polinômios $x_1 [x_2, x_3, x_3]$, $x_1 \omega(x_2, x_3, x_4, x_5)$ e $x_1 [x_2, x_3, x_4, x_5]$. Observe que I_2 é um T-ideal (mas só precisaremos dele como um T-subespaço). Pelo Lema 2.16, temos ainda

$$I_2 \subseteq I_1 \subseteq C(Q_4). \tag{2-90}$$

Seja $m_1 = 3s + r$ com $0 < r < 3$. Pela Proposição 2.17, a imagem dos polinômios (2-65), (2-66) e (2-68) em $F\langle X \rangle / I_2$ gera o espaço vetorial $T^{(3)} / I_2$. Usando essa informação não é difícil ver que existe um polinômio $g = g(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X \rangle$, multi-homogêneo de grau r em x_1 tal que

$$f + I_2 = x_1^{3s} g + I_2. \tag{2-91}$$

Defina o endomorfismo φ de $F\langle X\rangle$ por $\varphi(x_1) = 1 + x_1$ e $\varphi(x_i) = x_i$ se $i > 1$. Por (2-91), temos

$$\varphi(f) + I_2 = (1 + x_1^3)^s g(1 + x_1, x_2, \ldots, x_n) + I_2. \tag{2-92}$$

Segue de (2-90) e (2-92) que $(1 + x_1^3)^s g(1 + x_1, x_2, \ldots, x_n) + T^{(4)}$ é central em Q_4. Como $g(x_1, \ldots, x_n)$ é a componente multi-homogênea de grau r em x_1 do polinômio $(1 + x_1^3)^s g(1 + x_1, x_2, \ldots, x_n)$, segue de (2-90) e (2-92) que $g + T^{(4)}$ é central em Q_4. Seja $h = h(y_1, \ldots, y_r, x_2, \ldots, x_n)$ a linearização total de g em x_1. Então $h + T^{(4)}$ é central em Q_4 e segue do Lema 2.21 que h pertence a I_1. Como

$$h(x_1, \ldots, x_1, x_2, \ldots, x_n) = r!g(x_1, \ldots, x_n),$$

segue que g também pertence a I_1. Pelo Lema 1.17 (i), temos

$$\begin{aligned}[x_1^{3s}x_2, x_3, x_4] &= x_1^{3s}[x_2, x_3, x_4] + [x_1^{3s}, x_3][x_2, x_4] + [x_1^{3s}, x_4][x_2, x_3] + \\ &+ [x_1^{3s}, x_3, x_4]x_2.\end{aligned}$$

Segue do Lema 2.20 que $x^{3s} + T^{(4)}$ é central em Q_4. Logo os polinômios $[x_1^{3s}, x_3][x_2, x_4], [x_1^{3s}, x_4][x_2, x_3]$ e $[x_1^{3s}, x_3, x_4]x_2$ pertencem a $T^{(4)}$. Assim

$$[x_1^{3s}x_2, x_3, x_4] \equiv x_1^{3s}[x_2, x_3, x_4] \pmod{T^{(4)}}. \tag{2-93}$$

Lembrando que $g \in I_1$, segue de (2-93) que $x_1^{3s}g$ também pertence a I_1. Finalmente, como $I_2 \subseteq I_1$, segue de (2-91) que f pertence a I_1, o que demonstra o lema. □

Lema 2.23. *Sejam F um corpo de característica 3 e $I = \langle x_1[x_2, x_3, x_3]\rangle^{TS} + \langle x_1\omega(x_2, x_3, x_4, x_5)\rangle^{TS} + T^{(4)}$. Então $(x_1 \ldots x_n)^3 \equiv x_1^3 \ldots x_n^3 \pmod{I}$.*

Demonstração. Pode ser verificado diretamente que

$$(x_1x_2)^3 = x_1^3x_2^3 + x_1^2x_2[x_1, x_2, x_2] + x_1x_2^2[x_2, x_1, x_1] + x_1[x_1, x_2][x_1, x_2]x_2. \tag{2-94}$$

Como $[[x_1, x_2][x_1, x_2], x_3] = [x_1, x_2][x_1, x_2, x_3] + [x_1, x_2, x_3][x_1, x_2] \equiv 2[x_1, x_2, x_3][x_1, x_2] \pmod{T^{(4)}}$ e $[x_1, x_2, x_3][x_1, x_2] \in T^{(4)}$ (Corolário 1.33 (ii)), segue que $[[x_1, x_2][x_1, x_2], x_3] \in T^{(4)}$, isto é $[x_1, x_2][x_1, x_2] + T^{(4)}$ é central em Q_4. Voltando a (2-94), temos

$$(x_1x_2)^3 \equiv x_1^3x_2^3 + x_1^2x_2[x_1, x_2, x_2] + x_1x_2^2[x_2, x_1, x_1] + x_1x_2[x_1, x_2][x_1, x_2] \pmod{T^{(4)}}. \tag{2-95}$$

Observe que $x_1x_2[x_1, x_2][x_1, x_2] = x_1x_2\omega(x_1, x_2, x_1, x_2)$. Assim os polinômios $x_1^2x_2[x_1, x_2, x_2], x_1x_2^2[x_2, x_1, x_1]$ e $x_1x_2[x_1, x_2][x_1, x_2]$ pertencem a I. Logo (2-95) implica

que
$$(x_1x_2)^3 \equiv x_1^3x_2^3 \pmod{I}. \tag{2-96}$$

Como $\omega(x_1,x_2,x_3,x_4)+T^{(4)}$ é central em $Q_4 = F\langle X\rangle/T^{(4)}$ (Lema 2.16), usando a igualdade $ab = ba+[a,b]$ é fácil verificar que I é um ideal bilateral de $F\langle X\rangle$. Agora, usando (2-96) como base de indução, segue facilmente que $(x_1\dots x_n)^3 \equiv x_1^3\dots x_n^3 \pmod{I}$.

□

Lembrando que
$$q_n = q_n(x_1,\dots,x_{2n}) = x_1^2[x_1,x_2]x_2^2\dots x_{2n-1}^2[x_{2n-1},x_{2n}]x_{2n}^2,$$
vamos definir também $u_0 = u_0(x_1,x_2,x_3) = x_1^2x_2^2x_3^2[x_1,x_2,x_3]$, e para cada $n \geq 1$,
$$u_n = u_n(x_1,\dots,x_{2n+3}) = q_n(x_1,x_2,\dots,x_{2n})u_0(x_{2n+1},x_{2n+2},x_{2n+3}).$$

Lema 2.24. *Sejam F um corpo de característica 3 e $f = f(x_1,\dots,x_n) \in T^{(3)}$ um polinômio multi-homogêneo de multi-grau $(m_1,\dots,m_n)$ onde m_i é divisível por 3 para cada $i = 1,\dots,n$. Então f pertence ao T-subespaço gerado pelos polinômios*
$$x_1[x_2,x_3,x_3],\ x_1\omega(x_2,x_3,x_4,x_5),\ x_1[x_2,x_3,x_4,x_5], \tag{2-97}$$
$$x_0^3u_0,\ x_0^3u_1,\ x_0^3u_2,\ \dots,x_0^3u_n,\dots. \tag{2-98}$$

Demonstração. Como $x_0^3+T^{(4)}$ é central em Q_4 (Lema 2.20), segue da Proposição 2.17 que f pode ser escrito, módulo $T^{(4)}$, como uma combinação linear dos polinômios
$$x_{i_1}^{3r_1}x_{i_2}^{3r_2}\dots x_{i_k}^{3r_k}x_{j_1}^2x_{j_2}[x_{j_1},x_{j_2},x_{j_2}], i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k, j_1 \neq j_2, \tag{2-99}$$
$$x_{i_1}^{3r_1}x_{i_2}^{3r_2}\dots x_{i_k}^{3r_k}x_{j_1}^2x_{j_2}^2x_{j_3}^2[x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3}], i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k, j_1 > j_2 < j_3, \tag{2-100}$$
$$x_{i_1}^{3r_1}x_{i_2}^{3r_2}\dots x_{i_k}^{3r_k}x_{j_1}^2x_{j_2}^2x_{j_3}^2x_{j_4}^2\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3},x_{j_4}), \tag{2-101}$$
$$x_{i_1}^{3r_1}x_{i_2}^{3r_2}\dots x_{i_k}^{3r_k}x_{j_1}^2x_{j_2}^2x_{j_3}^2x_{j_4}^2\omega(x_{j_1},x_{j_2},x_{j_4},x_{j_3}), i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k, j_1 < j_2 < j_3 < j_4,$$
$$x_{i_1}^{3r_1}x_{i_2}^{3r_2}\dots x_{i_k}^{3r_k}x_{j_1}^2[x_{j_1},x_{j_2}]x_{j_2}^2\dots x_{j_{2l-1}}^2[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}]x_{j_{2l}}^2x_{j_{2l+1}}^2x_{j_{2l+2}}^2x_{j_{2l+3}}^2[x_{j_{2l+1}},x_{j_{2l+2}},x_{j_{2l+3}}],$$
$$i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k, j_1 < j_2 < \dots < j_{2k+3}, k \geq 0, l \geq 1. \tag{2-102}$$

Os polinômios da forma (2-99) pertencem ao T-subespaço gerado pelo polinômio $x_1[x_2,x_3,x_3]$, que está entre aqueles de (2-97).

Seja I o T-subespaço gerado pelos polinômios (2-97). Segue do Lema 2.23 que
$$x_{i_1}^{3r_1}x_{i_2}^{3r_2}\dots x_{i_k}^{3r_k}x_{j_1}^2x_{j_2}^2x_{j_3}^2[x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3}] \equiv (x_{i_1}^{r_1}x_{i_2}^{r_2}\dots x_{i_k}^{r_k})^3x_{j_1}^2x_{j_2}^2x_{j_3}^2[x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3}] \pmod{I}.$$

Assim os polinômios da forma (2-100) pertencem ao T-subespaço gerado pelos polinômios $x_0^3u_0(x_1,x_2,x_3), x_1[x_2,x_3,x_3], x_1\omega(x_2,x_3,x_4,x_5)$ e $x_1[x_2,x_3,x_4,x_5]$, que estão entre aqueles de (2-97)-(2-98).

Os polinômios de (2-101) pertencem ao T-subespaço gerado pelo polinômio $x_1\omega(x_2,x_3,x_4,x_5)$, que está entre aqueles de (2-97).

Finalmente, usando o Lema 2.23, podemos verificar de modo análogo ao caso feito para os polinômios (2-100) que os polinômios da forma (2-102) pertencem ao T-subespaço gerado pelos polinômios $x_0^3u_n$, $n=0,1,2,\dots$ juntamente com os polinômios $x_1[x_2,x_3,x_3], x_1\omega(x_2,x_3,x_4,x_5)$ e $x_1[x_2,x_3,x_4,x_5]$. Todos eles estão entre aqueles de (2-97)-(2-98). Isso conclui a demonstração do lema. □

Lema 2.25. *Seja F um corpo qualquer. Então $u_n+T^{(4)}$ é central na álgebra $Q_4=F\langle X\rangle/T^{(4)}$ para cada $n=0,1,2,\dots$.*

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que $u_0+T^{(4)}$ é central em Q_4. De fato, usando a igualdade $[ab,c]=a[b,c]+[a,c]b$, temos

$$\begin{aligned}[u_0,x_4]=[x_1^2x_2^2x_3^2[x_1,x_2,x_3],x_4] &= x_1^2x_2^2x_3^2[x_1,x_2,x_3,x_4]+[x_1^2x_2^2x_3^2,x_4][x_1,x_2,x_3]\\ &\equiv [x_1^2x_2^2x_3^2,x_4][x_1,x_2,x_3] \pmod{T^{(4)}}.\end{aligned}$$

Usando a igualdade $[a_1a_2\dots a_n,a]=\sum_{i=1}^n a_1\dots a_{i-1}[a_i,a]a_{i+1}\dots a_n$ (Lema 1.17 (ii)) e observando que $[x_1,x_2,x_3]+T^{(4)}$ é central em Q_4, podemos escrever

$$\begin{aligned}[u_0,x_4] &\equiv [x_1,x_4]x_1x_2^2x_3^2[x_1,x_2,x_3]+x_1[x_1,x_4]x_2^2x_3^2[x_1,x_2,x_3]+\dots+\\ &+ x_1^2x_2^2[x_3,x_4]x_3[x_1,x_2,x_3]+x_1^2x_2^2x_3[x_3,x_4][x_1,x_2,x_3] \pmod{T^{(4)}}\\ &\equiv [x_1,x_2,x_3][x_1,x_4]x_1x_2^2x_3^2+x_1[x_1,x_2,x_3][x_1,x_4]x_2^2x_3^2+\dots+\\ &+ x_1^2x_2^2[x_1,x_2,x_3][x_3,x_4]x_3+x_1^2x_2^2x_3[x_1,x_2,x_3][x_3,x_4] \pmod{T^{(4)}}.\end{aligned}$$

Segue do Corolário 1.33 (ii) que os polinômios $[x_1,x_2,x_3][x_1,x_4]$ e $[x_1,x_2,x_3][x_3,x_4]$ pertencem a $T^{(4)}$. Assim $[u_0,x_4]\equiv 0 \pmod{T^{(4)}}$, isto é $u_0+T^{(4)}$ é central em Q_4.

Agora, mostremos que $u_1+T^{(4)}$ é central em Q_4. De fato, usando a igualdade $[ab,c]=a[b,c]+[a,c]b$ e fato já mostrado de que $u_0+T^{(4)}$ é central em Q_4, obtemos

$$\begin{aligned}[u_1,x_6] &= [q(x_1,x_2)u_0(x_3,x_4,x_5),x_6]=q(x_1,x_2)[u_0(x_3,x_4,x_5),x_6]+\\ &+ [q(x_1,x_2),x_6]u_0(x_3,x_4,x_5)\equiv[q(x_1,x_2),x_6]u_0(x_3,x_4,x_5) \pmod{T^{(4)}}.\end{aligned}$$

Usando novamente a igualdade $[a_1a_2\dots a_n,a]=\sum_{i=1}^n a_1\dots a_{i-1}[a_i,a]a_{i+1}\dots a_n$ obtemos

$$\begin{aligned}
[u_1,x_6] &\equiv [q(x_1,x_2),x_6]u_0(x_3,x_4,x_5) \pmod{T^{(4)}}\\
&= [x_1^2[x_1,x_2]x_2^2,x_6]u_0(x_3,x_4,x_5)\\
&= ([x_1,x_6]x_1[x_1,x_2]x_2^2+x_1[x_1,x_6][x_1,x_2]x_2^2+x_1^2[x_1,x_2,x_6]x_2^2+\\
&+ x_1^2[x_1,x_2][x_2,x_6]x_2+x_1^2[x_1,x_2]x_2[x_2,x_6])x_3^2x_4^2x_5^2[x_3,x_4,x_5].
\end{aligned}$$

Como $[x_3,x_4,x_5]+T^{(4)}$ é central em Q_4, não é difícil ver que

$$\begin{aligned}
[u_1,x_6] &\equiv ([x_3,x_4,x_5][x_1,x_6][x_1,x_2]x_1x_2^2+x_1[x_3,x_4,x_5][x_1,x_6][x_1,x_2]x_2^2+\\
&+ x_1^2[x_1,x_2,x_6][x_3,x_4,x_5]x_2^2+x_1^2[x_3,x_4,x_5][x_1,x_2][x_2,x_6]x_2+\\
&+ x_1^2[x_3,x_4,x_5][x_1,x_2][x_2,x_6]x_2)x_3^2x_4^2x_5^2.
\end{aligned}$$

Como os polinômios $[x_1,x_2,x_6][x_3,x_4,x_5]$ e $[x_3,x_4,x_5][x_1,x_6][x_1,x_2]$ pertencem a $T^{(4)}$ (Lema 1.32 e Corolário 1.33 (ii), respectivamente) segue que $[u_1,x_6]\equiv 0 \pmod{T^{(4)}}$, isto é $u_1+T^{(4)}$ é central em Q_4.

Agora podemos aplicar indução sobre n. A base da indução é $n=1$ e já foi feita. Suponha que $u_n+T^{(4)}$ seja central em Q_4 para algum $n\in\mathbb{N}$ com $n>1$. Então usando a igualdade $[ab,c]=a[b,c]+[a,c]b$, temos

$$[u_{n+1},y]=[q_{n+1}u_0,y]=[q_nqu_0,y]=q_n[qu_0,y]+[q_n,y]qu_0=q_n[u_1,y]+[q_n,y]qu_0. \tag{2-103}$$

Como $u_0+T^{(4)}$ é central em Q_4, usando novamente a igualdade $[ab,c]=a[b,c]+[a,c]b$ podemos escrever

$$q_n[u_1,y]+[q_n,y]u_0q\equiv q_n[u_1,y]+[q_nu_0,y]q \pmod{T^{(4)}}. \tag{2-104}$$

Como $u_1+T^{(4)}$ e $u_n+T^{(4)}=q_nu_0+T^{(4)}$ são centrais em Q_4 (base e hipótese da indução, respectivamente), segue de (2-103)-(2-104) que $[u_{n+1},y]\equiv 0 \pmod{T^{(4)}}$, isto é $u_{n+1}+T^{(4)}$ é central em Q_4. Isso completa a indução e demonstra o lema. □

Proposição 2.26. *Seja F um corpo de característica 3. Então $C(Q_4)\cap T^{(3)}$ é gerado como T-subespaço de $F\langle X\rangle$ pelos polinômios*

(i) $[x_1,x_2,x_3],x_1[x_2,x_3,x_3],x_1\omega(x_2,x_3,x_4,x_5),x_1[x_2,x_3,x_4,x_5]$,

(ii) $x_0^3u_0,x_0^3u_1,x_0^3u_2,\dots,x_0^3u_n,\dots$.

Demonstração. Vamos verificar primeiramente que os polinômios de (i) e (ii) pertencem a $C(Q_4)\cap T^{(3)}$. Segue diretamente do Lema 2.16 que os polinômios de (i) pertencem a $C(Q_4)\cap T^{(3)}$.

Vejamos os polinômios de (ii). Como $x_0^3 + T^{(4)}$ e $u_n + T^{(4)}, n = 0, 1, 2, \dots$ são centrais em Q_4 (Lema 1.22 (i) e Lema 2.25, respectivamente) e $C(Q_4) \cap T^{(3)}$ é uma álgebra (Proposição 1.13) segue que todos os polinômios de (ii) pertencem a $C(Q_4) \cap T^{(3)}$.

Agora vamos mostrar que os polinômios (i)-(ii) geram $C(Q_4) \cap T^{(3)}$ como T-subespaço. Observe que $C(Q_4) \cap T^{(3)}$ é multi-homogêneo porque $C(Q_4)$ e $T^{(3)}$ o são (Proposição 1.10 e Proposição 1.16, respectivamente). Seja $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C(Q_4) \cap T^{(3)}$. Pela observação feita, podemos assumir que f é um polinômio multi-homogêneo de multigrau $(m_1, \dots, m_n)$.

Suponha que algum m_i não seja divisível por 3. Reenumerando as variáveis x_i, podemos assumir, sem perda de generalidade que $i = 1$. Pelo Lema 2.22, temos

$$f \in \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^{TS} + \langle x_1 [x_2, x_3, x_3] \rangle^{TS} + \langle x_1 \omega(x_2, x_3, x_4, x_5) \rangle^{TS} + T^{(4)}.$$

Assim f pertence ao T-subespaço gerado pelos polinômios (i).

Suponha agora que cada m_i seja divisível por 3. Como vimos no Lema 2.24, f pertence ao T-subespaço gerado pelos polinômios (2-97)-(2-98). Como esses polinômios estão entre aqueles de (i)-(ii), o lema está demonstrado. □

2.2.4 Os geradores do espaço vetorial $(C(Q_4) + T^{(3)})/T^{(3)}$

Vamos começar obtendo alguns polinômios centrais da álgebra Q_4.

Lema 2.27. *Seja F um corpo de característica 3. Então $q_n + T^{(4)}$ é central em $Q_4 = F\langle X \rangle / T^{(4)}$ se, e somente se n é divisível por 3.*

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que se n é divisível por 3, então $q_n + T^{(4)}$ é central em Q_4. Com efeito, seja $n = 3s$ com $s \in \mathbb{N}$. Como

$$q_n = q_{3s}(x_1, \dots, x_{6s}) = q_3(x_1, \dots, x_6) \dots q_3(x_{6s-5}, \dots, x_{6s}) \tag{2-105}$$

e $C(Q_4)$ é uma T-subálgebra (Proposição 1.13), é suficiente mostrar que $q_3(x_1, \dots, x_6) + T^{(4)}$ é central em Q_4. Como $q_3 = q_3(x_1, \dots, x_6) = q(x_1, x_2) q(x_3, x_4) q(x_5, x_6)$, segue da igualdade $[a_1 a_2 \dots a_n, a] = \sum_{i=1}^{n} a_1 \dots a_{i-1} [a_i, a] a_{i+1} \dots a_n$ (Lema 1.17 (ii)), que

$$\begin{aligned} [q_3, x_7] &= [q(x_1, x_2), x_7] q(x_3, x_4) q(x_5, x_6) + \\ &+ q(x_1, x_2)[q(x_3, x_4), x_7] q(x_5, x_6) + q(x_1, x_2) q(x_3, x_4)[q(x_5, x_6), x_7]. \end{aligned} \tag{2-106}$$

Usando novamente o Lema 1.17 (ii) temos

$$
\begin{aligned}
[q(x_1,x_2),x_7] &= [x_1^2[x_1,x_2]x_2^2,x_7] && (2\text{-}107)\\
&= [x_1,x_7]x_1[x_1,x_2]x_2^2+x_1[x_1,x_7][x_1,x_2]x_2^2+x_1^2[x_1,x_2,x_7]x_2^2+\\
&+ x_1^2[x_1,x_2][x_2,x_7]x_2+x_1^2[x_1,x_2]x_2[x_2,x_7]\\
&= x_1[x_1,x_7][x_1,x_2]x_2^2+[x_1,x_7,x_1][x_1,x_2]x_2^2+x_1[x_1,x_7][x_1,x_2]x_2^2+\\
&+ x_1^2[x_1,x_2,x_7]x_2^2-x_1^2[x_2,x_1][x_2,x_7]x_2-x_1^2x_2[x_2,x_1][x_2,x_7]+\\
&+ x_1^2[x_1,x_2,x_2][x_2,x_7].
\end{aligned}
$$

Os polinômios $[x_1,x_7,x_1][x_1,x_2]x_2^2$ e $x_1^2[x_1,x_2,x_2][x_2,x_7]$ pertencem a $T^{(4)}$ (Corolário 1.33 (ii)). Como $[a_1,a_2][a_1,a_3]=\omega(a_1,a_2,a_1,a_3)$, segue do Lema 2.16 que $[a_1,a_2][a_1,a_3]+T^{(4)}$ é central em Q_4. Assim, por (2-107) temos

$$
[q(x_1,x_2),x_7] \equiv 2x_1x_2^2[x_1,x_7][x_1,x_2]+x_1^2[x_1,x_2,x_7]x_2^2-2x_1^2x_2[x_2,x_1][x_2,x_7] \pmod{T^{(4)}}. \tag{2-108}
$$

Como $[a_1,a_2][a_1,a_3]+T^{(4)}$ é central em Q_4 e $[a_1,a_2][a_1,a_3][a_4,a_5]\in T^{(4)}$ (Corolário 1.33 (i)), segue de (2-108) que

$$
[q(x_1,x_2),x_7]q(x_3,x_4)q(x_5,x_6) \equiv x_1^2[x_1,x_2,x_7]x_2^2q(x_3,x_4)q(x_5,x_6) \pmod{T^{(4)}}. \tag{2-109}
$$

Como $[a_1,a_2,a_3]+T^{(4)}$ é central em Q_4 e $[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6]\in T^{(4)}$ (Lema 1.32), é fácil ver à partir de (2-109) que

$$
[q(x_1,x_2),x_7]q(x_3,x_4)q(x_5,x_6) \equiv x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2x_5^2x_6^2[x_1,x_2,x_7][x_3,x_4][x_5,x_6] \pmod{T^{(4)}}. \tag{2-110}
$$

À partir de (2-110) podemos obter também as relações

$$
q(x_1,x_2)[q(x_3,x_4),x_7]q(x_5,x_6) \equiv x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2x_5^2x_6^2[x_3,x_4,x_7][x_1,x_2][x_5,x_6] \pmod{T^{(4)}}. \tag{2-111}
$$

$$
q(x_1,x_2)q(x_3,x_4)[q(x_5,x_6),x_7] \equiv x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2x_5^2x_6^2[x_5,x_6,x_7][x_1,x_2][x_3,x_4] \pmod{T^{(4)}}. \tag{2-112}
$$

Finalmente, como $[x_1,x_2,x_7][x_3,x_4][x_5,x_6]\equiv[x_3,x_4,x_7][x_1,x_2][x_5,x_6]\equiv[x_5,x_6,x_7][x_1,x_2][x_3,x_4]$

(mod $T^{(4)}$) (Corolário 1.33), segue de (2-106) e (2-110)-(2-112) que

$$[q_3,x_7] \equiv 3x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2x_5^2x_6^2[x_1,x_2,x_7][x_3,x_4][x_5,x_6] \pmod{T^{(4)}}.$$

Como $char(F)=3$, segue que $q_3+T^{(4)}$ é central em Q_4.

Vamos mostrar agora que se $q_n+T^{(4)}$ é central em Q_4, então n é divisível por 3. É suficiente mostrar que $q_n+T^{(4)}$ não é central em Q_4 quando $n=2k+1$ ou $n=3k+2$ para algum $k\in\mathbb{N}$. Por simplicidade, vamos considerar apenas o caso $n=3k+2$ pois o caso $n=2k+1$ é idêntico.

Seja $v_n=v_n(x_1,\dots,x_{2n})=[x_1,x_2]\dots[x_{2n-1},x_{2n}]$. Observe que v_n é uma componente multi-homogênea de $q_n(x_1+1,\dots,x_{2n}+1)$. Como $C(Q_4)$ é multi-homogêneo (Proposição 1.16) para mostrar que $q_n+T^{(4)}$ não é central em Q_4, é suficiente mostrar que $v_n+T^{(4)}$ não é central em Q_4.

Observe que $v_{3k}=v_{3k}(x_1,\dots,x_{6k})$ e $v_2=v_2(x_{6k+1},x_{6k+2},x_{6k+3},x_{6k+4})$ com $v_n=v_{3k}v_2$. Usando a igualdade $[ab,c]=a[b,c]+[a,c]b$ e o fato de $v_{3k}+T^{(4)}$ ser central em Q_4 (mostrado acima), temos

$$\begin{aligned}
[v_n,x_{6k+5}] &= [v_{3k}v_2,x_{6k+5}]=v_{3k}[v_2,x_{6k+5}]+[v_{3k},x_{6k+5}]v_2\\
&\equiv v_{3k}[v_2,x_{6k+5}] \pmod{T^{(4)}}.
\end{aligned}$$

Como $v_2=[x_{6k+1},x_{6k+2}][x_{6k+3},x_{6k+4}]$, usando novamente a igualdade $[ab,c]=a[b,c]+[a,c]b$ e o fato de $[[x_{6k+3},x_{6k+4}],x_{6k+5}]+T^{(4)}$ ser central em Q_4, obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned}
[v_n,x_{6k+5}]\equiv v_{3k}[v_2,x_{6k+5}] &\equiv v_{3k}[[x_{6k+1},x_{6k+2}][x_{6k+3},x_{6k+4}],x_{6k+5}] \pmod{T^{(4)}}\\
&\equiv v_{3k}[x_{6k+1},x_{6k+2}][x_{6k+3},x_{6k+4},x_{6k+5}]+\\
&+ v_{3k}[x_{6k+1},x_{6k+2},x_{6k+5}][x_{6k+3},x_{6k+4}] \pmod{T^{(4)}}\\
&\equiv v_{3k}[x_{6k+3},x_{6k+4},x_{6k+5}][x_{6k+1},x_{6k+2}]+\\
&+ v_{3k}[x_{6k+1},x_{6k+2},x_{6k+5}][x_{6k+3},x_{6k+4}] \pmod{T^{(4)}}.
\end{aligned}$$

Finalmente, pelo Corolário 1.33 obtemos

$$[v_n,x_{6k+5}]\equiv 2v_{3k}[x_{6k+1},x_{6k+2}][x_{6k+3},x_{6k+4},x_{6k+5}] \pmod{T^{(4)}}.$$

Como $[x_{6k+1},x_{6k+2}][x_{6k+3},x_{6k+4},x_{6k+5}]+T^{(4)}$ é um elemento da base de $F\langle X\rangle/T^{(4)}$ (Lema 2.14), segue que $2v_{3k}[x_{6k+1},x_{6k+2}][x_{6k+3},x_{6k+4},x_{6k+5}]$ não pertence a $T^{(4)}$. Portanto $[v_n,x_{6k+5}]$ não pertence a $T^{(4)}$ e $v_n+T^{(4)}$ não é central em Q_4. Como vimos, isso implica que $q_n+T^{(4)}$ não é central em Q_4. O lema está demonstrado. □

Lema 2.28. *Seja F um corpo de característica 3. Então o polinômio q_n pertence a $C(Q_4)+T^{(3)}$ se, e somente se n é divisível por 3.*

Demonstração. Se n é divisível 3, já vimos no Lema 2.27 que q_n pertence a $C(Q_4)$ e portanto q_n pertence a $C(Q_4)+T^{(3)}$. Vamos mostrar agora que se q_n pertence a $C(Q_4)+T^{(3)}$, então n é divisível por 3. Suponha o contrário, que exista um número $n \in \mathbb{N}$ que não é divisível por 3 tal que q_n pertença a $C(Q_4)+T^{(3)}$. Então existem $f \in C(Q_4)$ e $g \in T^{(3)}$ tais que

$$f = q_n + g.$$

Como q_n possui multigrau $(3,\ldots,3)$ e $C(Q_4)$ é multi-homogêneo (Proposição 1.16), podemos assumir que g também possui multigrau $(3,\ldots,3)$. Segue do Lema 2.24 que g pertence ao T-subespaço gerado pelos polinômios (2-97)-(2-98). Como esses polinômios pertencem a $C(Q_4)$ (Lema 2.26), segue que g pertence a $C(Q_4)$. Uma vez que $f = q_n + g$ com $f \in C(Q_4)$, segue que q_n pertence a $C(Q_4)$, mas isso contraria o Lema 2.27 porque n não é divisível por 3. Portanto, $q_n \in C(Q_4)+T^{(3)}$ implica n divisível por 3. O lema está demonstrado. □

Lema 2.29. *Seja F um corpo de característica 3. Então $[x_1,x_2][x_3,x_4]-x_1[x_2,x_3,x_4]+T^{(4)}$ é central na álgebra $Q_4 = F\langle X\rangle/T^{(4)}$.*

Demonstração. Pondo $f = [x_1,x_2][x_3,x_4]-x_1[x_2,x_3,x_4]$ e usando a igualdade $[ab,c] = a[b,c]+[a,c]b$, temos

$$[f,x_5] = [x_1,x_2][x_3,x_4,x_5]+[x_1,x_2,x_5][x_3,x_4]-x_1[x_2,x_3,x_4,x_5]-[x_1,x_5][x_2,x_3,x_4].$$

Como $[x_1,x_2][x_3,x_4,x_5] \equiv [x_3,x_4,x_5][x_1,x_2] \pmod{T^{(4)}}, x_1[x_2,x_3,x_4,x_5] \in T^{(4)}$ e $[x_1,x_5][x_2,x_3,x_4] \equiv [x_2,x_3,x_4][x_1,x_5] \pmod{T^{(4)}}$, obtemos

$$[f,x_5] \equiv [x_3,x_4,x_5][x_1,x_2]+[x_1,x_2,x_5][x_3,x_4]-[x_2,x_3,x_4][x_1,x_5] \pmod{T^{(4)}}.$$

Pelo Corolário 1.33 (ii) temos $[x_3,x_4,x_5][x_1,x_2] \equiv [x_1,x_2,x_5][x_3,x_4] \equiv -[x_2,x_3,x_4][x_1,x_5] \pmod{T^{(4)}}$. Assim

$$[f,x_5] \equiv 3[x_3,x_4,x_5][x_1,x_2] \pmod{T^{(4)}}.$$

Como $char(F) = 3$, temos que $[f,x_5]$ pertence a $T^{(4)}$, isto é, $[x_1,x_2]-x_1[x_2,x_3,x_4]+T^{(4)}$ é central em Q_4. □

Para uso na proposição seguinte, lembre que $M = \{x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}; x_{i_s} \in X\}$ é o conjunto dos monômios mônicos de $F\langle X\rangle$.

Proposição 2.30. *Seja F um corpo de característica 3. Então $(C(Q_4)+T^{(3)})/T^{(3)}$ é gerado como espaço vetorial por $[a_1,a_2][a_3,a_4]+T^{(3)}$, $a_i \in M$ e pelos elementos*

$$x_{i_1}^{3r_1}\dots x_{i_k}^{3r_k} x_{j_1}^2 [x_{j_1},x_{j_2}] x_{j_2}^2 \dots x_{j_{2l-1}}^2 [x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}] x_{j_{2l}}^2 + T^{(3)},$$

com $k \geq 0, r_s > 0, l \equiv 0 \pmod 3$, $i_1 < \dots < i_k$ e $j_1 < \dots < j_{2l}$.

Demonstração. Seja $f = f(x_1,\dots,x_n) \in C(Q_4)$ tal que $f \notin T^{(3)}$. Pela Proposição 1.16 podemos assumir que f é um polinômio multi-homogêneo de grau m_i em cada variável x_i. Suponha que algum x_i não é divisível por 3. Reenumerando as variáveis x_i, podemos assumir, sem perda de generalidade que $i = 1$. Pelo Lema 2.7, temos que f pertence ao T-subespaço gerado pelos polinômios $[x_1,x_2][x_3,x_4]$ e $x_1[x_2,x_3,x_4]$. Consequentemente $f+T^{(3)}$ é uma combinação linear dos elementos $[a_1,a_2][a_3,a_4]+T^{(3)}$ com $a_i \in M$. Como $[x_1,x_2][x_3,x_4] - x_1[x_2,x_3,x_4] + T^{(4)}$ é central em Q_4 (Lema 2.29) e $x_1[x_2,x_3,x_4] \in T^{(3)}$, segue que os elementos $[a_1,a_2][a_3,a_4]+T^{(3)}$ pertencem a $(C(Q_4)+T^{(3)})/T^{(3)}$.

Agora, suponha que todos os m_i sejam divisíveis por 3. Como $x_0^3 + T^{(3)}$ e $[x_1,x_2]+T^{(3)}$ são centrais em Q_3, segue da Proposição 1.21 que $f+T^{(3)}$ é uma combinação linear de elementos da forma

$$x_{i_1}^{3r_1}\dots x_{i_k}^{3r_k} x_{j_1}^2 [x_{j_1},x_{j_2}] x_{j_2}^2 \dots x_{j_{2l-1}}^2 [x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}] x_{j_{2l}}^2 + T^{(3)}, \qquad (2\text{-}113)$$

com $k,l \geq 0, r_s > 0, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ e $1 \leq j_1 < \dots < j_{2l} \leq n$. Segue do Lema 2.27 que todo elemento da forma (2-113) com $l \equiv 0 \pmod 3$, pertence a $C(Q_4)+T^{(3)}/T^{(3)}$. Para concluir a demonstração resta mostrar que todo elemento (2-113) satisfaz $l \equiv 0 \pmod 3$. De fato, suponha que

$$\alpha x_{i_1}^{3r_1}\dots x_{i_k}^{3r_k} x_{j_1}^2 [x_{j_1},x_{j_2}] x_{j_2}^2 \dots x_{j_{2l-1}}^2 [x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}] x_{j_{2l}}^2 + T^{(3)} \qquad (2\text{-}114)$$

seja algum elemento de (2-113) com $\alpha \in F, \alpha \neq 0, l \not\equiv 0 \pmod 3$ e l minimal. Considere o endomorfismo φ de $F\langle X\rangle$ tal que $\varphi(x_{j_s}) = x_{j_s}$, se $s \in \{1,2,\dots,2l\}$ e $\varphi(x_{j_s}) = 1$, se $s \notin \{1,2,\dots 2l\}$. Segue de (2-113) e (2-114) que

$$\varphi(f)+T^{(3)} = \alpha x_{j_1}^{3r_1}\dots x_{j_{2l}}^{3r_{2l}} q_l(x_{j_1},\dots,x_{j_{2l}}) + T^{(3)}.$$

Logo o polinômio $g(x_{j_1},\dots,x_{j_{2l}}) = \alpha x_{j_1}^{3r_1}\dots x_{j_{2l}}^{3r_{2l}} q_l$ pertence a $C(Q_4)+T^{(3)}$. Observe que αq_l é a componente multi-homogênea de multigrau $(3,\dots,3)$ do polinômio $g(x_{j_1}+1,\dots,x_{j_{2l}}+1) = \alpha(x_{j_1}+1)^{3r_1}\dots(x_{j_{2l}}+1)^{3r_{2l}} q_l$. Como $g(x_{j_1}+1,\dots,x_{j_{2l}}+1)$ pertence a $C(Q_4)+T^{(3)}$ e $C(Q_4)+T^{(3)}$ é multi-homogêneo segue que αq_l pertence a $C(Q_4)+T^{(3)}$. Como q_l não pertence a $C(Q_4)+T^{(3)}$ (Lema 2.28), temos $\alpha = 0$, uma contradição. Portanto $l \equiv 0 \pmod 3$ para todos os elementos em (2-113), e isso conclui a demonstração. $\square$

2.2.5 Os polinômios centrais da álgebra Q_4

Nesta seção provaremos o Teorema 2.10, que é o primeiro resultado principal desta tese.

Lema 2.31. *Seja F um corpo de característica 3. Então $C(Q_4)/(C(Q_4)\cap T^{(3)})$ é gerado como um espaço vetorial pelos elementos*

(i) $[a_1,a_2][a_3,a_4]-a_1[a_2,a_3,a_4]+(C(Q_4)\cap T^{(3)}), a_i \in M$,

(ii) $x_{i_1}^{3r_1}\dots x_{i_k}^{3r_k} q_l(x_{j_1},\dots,x_{j_{2l}})+(C(Q_4)\cap T^{(3)})$,
$k \geq 0, r_s > 0, l \equiv 0 \pmod 3, i_1 < \dots < i_k$ *e* $j_1 < \dots < j_{2l}$.

Demonstração. Como $a_1[a_2,a_3,a_4]$ pertence a $T^{(3)}$, segue diretamente do Lema 2.30 que $(C(Q_4)+T^{(3)})/T^{(3)}$ é gerado, como espaço vetorial, pelos elementos

$$[a_1,a_2][a_3,a_4]-a_1[a_2,a_3,a_4]+T^{(3)}, a_i \in M, \tag{2-115}$$
$$x_{i_1}^{3r_1}\dots x_{i_k}^{3r_k} q_l(x_{j_1},\dots,x_{j_{2l}})+T^{(3)}, \tag{2-116}$$
$$k \geq 0, r_s > 0, l \equiv 0 \pmod 3, i_1 < \dots < i_k, j_1 < \dots < j_{2l}.$$

Pelo Lema 2.29, todo representante $[a_1,a_2][a_3,a_4]-a_1[a_2,a_3,a_4]$ de (2-115) pertence a $C(Q_4)$. Todo representante $x_{i_1}^{3r_1}\dots x_{i_k}^{3r_k} q_l(x_{j_1},\dots,x_{j_{2l}})$ de (2-116) também pertence a $C(Q_4)$. Isso segue diretamente do fato dos elementos $x_0^3+T^{(4)}$ e $q_l(x_{j_1},\dots,x_{j_{2l}})+T^{(4)}$ serem centrais em Q_4 (Lema 1.22 e Lema 2.27, respectivamente) e $C(Q_4)$ ser uma álgebra (Proposição 1.13).

É fácil ver que a aplicação $\varphi : f+T^{(3)} \to f+(C(Q_4)\cap T^{(3)})$ é um isomorfismo entre os espaços vetoriais $A_1=(C(Q_4)+T^{(3)})/T^{(3)}$ e $A_2=C(Q_4)/(C(Q_4)\cap T^{(3)})$ (esse é um dos teoremas de isomorfismo). O isomorfismo φ leva os elementos de (2-115)-(2-116) (geradores de A_1) nos elementos (i)-(ii). Isso mostra que $C(Q_4)/(C(Q_4)\cap T^{(3)})$ é gerado pelos elementos (i)-(ii). $\square$

Finalmente, podemos provar o teorema principal deste capítulo.

Demonstração do Teorema 2.10

Demonstração. Seja f um polinômio central de Q_4. Pelo Lema 2.31, $f+(C(Q_4)\cap T^{(3)})=g+(C(Q_4)\cap T^{(3)})$, onde g é uma combinação linear dos polinômios

$$[a_1,a_2][a_3,a_4]+a_1[a_2,a_3,a_4], a_i \in M, \tag{2-117}$$
$$x_{i_1}^{3r_1}\dots x_{i_k}^{3r_k} q_n(x_{j_1},\dots,x_{j_{2n}}), \tag{2-118}$$
$$k \geq 0, r_s > 0, l \equiv 0 \pmod 3, i_1 < \dots < i_k, j_1 < \dots < j_{2l}.$$

Sejam $q_n = q_n(x_1,\ldots,x_{2n})$ e $I = \langle x_1[x_2,x_3,x_3]\rangle^{TS} + \langle x_1\omega(x_2,x_3,x_4,x_5)\rangle^{TS} + T^{(4)}$. Segue do Lema 2.23 e do fato I ser um ideal que

$$(x_1^3\ldots x_k^3)q_n \equiv (x_1\ldots x_k)^3 q_n \pmod{I}. \tag{2-119}$$

Usando (2-117), (2-118) e (2-119) não é difícil verificar que g pertence ao T-subespaço gerado pelos polinômios

$$[x_1,x_2][x_3,x_4] - x_1[x_2,x_3,x_4],\ x_1[x_2,x_3,x_3],\ x_1\omega(x_2,x_3,x_4,x_5), \tag{2-120}$$

$$x_1[x_2,x_3,x_4,x_5],\ x_0^3,\ x_0^3q_3,\ x_0^3q_6,\ \ldots x_0^3q_{3n},\ldots. \tag{2-121}$$

Como $f-g$ pertence a $C(Q_4)\cap T^{(3)}$, segue da Proposição 2.26, que $f-g$ pertence ao T-subespaço gerado pelos polinômios

$$[x_1,x_2,x_3], x_1[x_2,x_3,x_3], x_1\omega(x_2,x_3,x_4,x_5), x_1[x_2,x_3,x_4,x_5], \tag{2-122}$$

$$x_0^3u_0, x_0^3u_1, x_0^3u_2, \ldots, x_0^3u_n, \ldots. \tag{2-123}$$

Assim, f pertence ao T-subespaço gerado pelos polinômios (2-120)- (2-123). É fácil ver que os polinômios $[x_1,x_2,x_3]$ e $x_1[x_2,x_3,x_3]$ pertencem ao T-subespaço gerado pelo polinômio $[x_1,x_2][x_3,x_4]-x_1[x_2,x_3,x_4]$. Portanto f pertence ao T-subespaço gerado pelos polinômios de (i)-(iii). O Teorema está demonstrado. □

Corolário 2.32. *Seja F um corpo de característica 3. Então o espaço vetorial $C(Q_4)$ dos polinômios centrais da álgebra $Q_4 = F\langle X\rangle/T^{(4)}$ não é finitamente gerado como um T-subespaço de $F\langle X\rangle$.*

Demonstração. Segue do Teorema 2.10 que $C(Q_4)+T^{(3)}$ é gerado como T-subespaço pelos polinômios

$$x_1[x_2,x_3,x_4],\ [x_1,x_2][x_3,x_4]-x_1[x_2,x_3,x_4],\ x_0^3,\ x_0^3q_3,\ x_0^3q_6,\ \ldots, x_0^3q_{3n},\ldots. \tag{2-124}$$

Seja I o T-subespaço gerado pelos polinômios (2-124). Afirmamos que I não é finitamente gerado como T-subespaço. A demonstração é idêntica àquela do Teorema 3 de [7]. Vamos fazer apenas um esboço. Para cada $n\in\mathbb{N}$, seja V_{3n} o T-subespaço gerado pelos polinômios $[x_1,x_2][x_3,x_4]-x_1[x_2,x_3,x_4], q_3, q_6, \ldots, q_{3n}$ e W_{3n} o T-subespaço gerado pelos polinômios $[x_1,x_2][x_3,x_4]-x_1[x_2,x_3,x_4], x_0^3, x_0^3q_3, x_0^3q_6, \ldots, x_0^3q_{3n}$. Pode ser mostrado de forma análoga à demonstração do Teorema 3 de [7] que a cadeia

$$W_3+T^{(3)} \subseteq W_6+T^{(3)} \subseteq \ldots \subseteq W_{3n}+T^{(3)} \subseteq \ldots$$

contém uma subcadeia estritamente ascendente. Como $I = \bigcup_n(W_{3n}+T^{(3)})$, I não é finitamente gerado como T-subespaço . Assim $C(Q_4) + T^{(3)}$ não é finitamente gerado como T-subespaço e consequentemente $C(Q_4)$ não é finitamente gerado como T-subespaço. $\square$

CAPÍTULO 3

Polinômios hipercentrais

Seja A uma álgebra sobre um corpo F. Sejam $f = f(x_1,\dots,x_n) \in F\langle X\rangle$ um polinômio e $y_1,\dots,y_m \in X$ com $\{x_1,\dots,x_n\} \cap \{y_1,\dots,y_m\} = \emptyset$. Dizemos que f é um polinômio *m-central* de A se $[f,y_1,\dots,y_m]$ pertence a $Id(A)$. O conjunto de todos os polinômios m-centrais de A será denotado por

$$C_m(A) = \{f = f(x_1,\dots,x_n) \in F\langle X\rangle : [f,y_1,\dots,y_m] \in Id(A)\}.$$

Observe que para cada $m \in \mathbb{N}$, o conjunto $C_m(A)$ forma um subespaço vetorial de $F\langle X\rangle$. Observe também que $C_1(A) = C(A)$, isto é, os polinômios 1-centrais são os polinômios centrais. Como todo polinômio m-central é também $(m+1)$-central, se pusermos $C_0(A) = \{0\}$, obtemos a seguinte cadeia de inclusões

$$\{0\} = C_0(A) \subseteq C(A) = C_1(A) \subseteq C_2(A) \subseteq \dots \subseteq C_{m-1}(A) \subseteq C_m(A) \subseteq \dots$$

que chamaremos de *série central superior da álgebra* A. Os polinômios m-centrais de A com $m > 1$ são chamados genericamente de *polinômios hipercentrais* de A.

Observe que $C_1(Q_3) = C(Q_3)$ já foi descrito (Proposição 1.28, Corolário 1.25) e é imediato verificar que $C_2(Q_3) = F\langle X\rangle$. Observe também que $C_1(Q_4) = C(Q_4)$ já foi descrito (Proposição 2.6, Teorema 2.1, Teorema 2.10, Teorema 0.2).

Neste capítulo, vamos dar uma descrição dos polinômios hipercentrais das álgebras $Q_4 = F\langle X\rangle/T^{(4)}$ e $Q_5 = F\langle X\rangle/T^{(5)}$.

Proposição 3.1. *$C_m(A)$ é um T-subespaço de $F\langle X\rangle$.*

Demonstração. Seja $f = f(x_1,\dots,x_n)$ um polinômio m-central de A e φ um endomorfismo qualquer de $F\langle X\rangle$. Devemos mostrar que $\varphi(f)$ é um polinômio m-central de A. De fato, como

$$[\varphi(f(x_1,\dots,x_n)),y_1,\dots,y_m] = [f(\varphi(x_1),\dots,f(\varphi(x_n)),y_1,\dots,y_m] \tag{3-1}$$

e $[f(x_1,\ldots,x_n),y_1,\ldots,y_m] \in Id(A)$, o polinômio do lado direito da igualdade (3-1) pertence a $Id(A)$, logo $\varphi(f)$ é um polinômio m-central de A. □

Quando $m \geq 2$, a equivalência seguinte decorre imediatamente da definição de polinômio m-central:

$$f \text{ pertence a } C_m(A) \text{ se, e somente se } [f,y_1] \text{ pertence a } C_{m-1}(A).$$

Proposição 3.2. *$C_m(A)$ é uma T-subálgebra de $F\langle X\rangle$.*

Demonstração. Como $C_m(A)$ é um T-subespaço de $F\langle X\rangle$ (Proposição 3.1), é suficiente mostrar que $C_m(A)$ é uma subálgebra de $F\langle X\rangle$. Sejam f e g polinômios de $C_m(A)$, devemos mostrar que fg pertence a $C_m(A)$. Segue da igualdade $[ab,c]+[bc,a]+[ca,b]=0$ que

$$[fg,y_1] = [f,gy_1]+[g,y_1f].$$

Como $[f,y_2]$ e $[g,y_3]$ pertencem a $C_{m-1}(A)$ e $C_{m-1}(A)$ é um T-subespaço, fazendo $y_2 = gy_1$ e $y_3 = y_1f$ segue que $[f,gy_1]$ e $[g,y_1f]$ pertencem a $C_{m-1}(A)$. Logo $[fg,y_1]$ pertence a C_{m-1} e portanto fg pertence a $C_m(A)$. □

Proposição 3.3. *Seja F um corpo qualquer. Então o T-subespaço $C_m(Q_n)$ é multi-homogêneo.*

Demonstração. Inteiramente análoga a demonstração da Proposição 1.16. □

3.1 A álgebra Q_4

Nesta seção vamos dar uma descrição dos polinômios hipercentrais da álgebra $Q_4 = F\langle X\rangle/T^{(4)}$. Mais precisamente, se $char(F)=p$, vamos mostrar que

$$C_2(Q_4) = \langle x_0^p\rangle^{TS} + T^{(2)}, \text{ se } p=2 \text{ ou } p>3;$$
$$C_2(Q_4) = F.1 + T^{(2)}, \text{ se } p=0;$$
$$C_2(Q_4) = C(Q_3), \text{ se } p=3.$$

Lema 3.4. *Seja F um corpo de característica $\neq 3$. Então $T^{(2)} \subseteq C_2(Q_4)$.*

Demonstração. Pela Proposição 1.17 (i),

$$\begin{aligned}[x_1[x_2,x_3],x_4,x_5] &= x_1[x_2,x_3,x_4,x_5]+[x_1,x_4][x_2,x_3,x_5]+[x_1,x_5][x_2,x_3,x_4]+\\ &+ [x_1,x_4,x_5][x_2,x_3].\end{aligned}$$

É claro que $x_1[x_2,x_3,x_4,x_5]$ pertence a $T^{(4)}$. Pelo Lema 1.33 (iii), os polinômios $[x_1,x_4][x_2,x_3,x_5], [x_1,x_5][x_2,x_3,x_4]$ e $[x_1,x_4,x_5][x_2,x_3]$ também pertencem a $T^{(4)}$. Assim $x_1[x_2,x_3]$ é um polinômio 2-central de Q_4. Como $T^{(2)}$ é gerado como T-subespaço por $x_1[x_2,x_3]$ e $C_2(Q_4)$ é um T-subespaço (Proposição 3.1), temos $T^{(2)} \subseteq C_2(Q_4)$. □

Lema 3.5. *Seja F um corpo de característica $p \geq 2$. Então x_0^p é um polinômio 2-central de Q_4.*

Demonstração. Suponha primeiramente que $p = 2$. Como

$$[x_0^2, y_1] = x_0[x_0, y_1] + [x_0, y_1]x_0 = 2x_0[x_0, y_1] + [x_0, y_1, x_0] = [x_0, y_1, x_0],$$

segue que $[x_0^2, y_1, y_2]$ pertence a $T^{(4)}$, isto é, x_0^2 é um polinômio 2-central de Q_4. Agora se $p = 3$ ou $p > 3$, então segue do Lema 2.20 e Lema 1.22 (i), respectivamente, que x_0^p é um polinômio central de Q_4, consequentemente x_0^p é um polinômio 2-central de Q_4. □

Proposição 3.6. *Seja F um corpo de característica $p = 2$ ou $p > 3$. Então $C_2(Q_4) = \langle x_0^p \rangle^{TS} + T^{(2)}$.*

Demonstração. Vamos mostrar primeiramente a inclusão $\langle x_0^p \rangle^{TS} + T^{(2)} \subseteq C_2(Q_4)$. Como x_0^p é um polinômio 2-central de Q_4 (Lema 3.5), $T^{(2)} \subseteq C_2(Q_4)$ (Lema 3.4) e $C_2(Q_4)$ é um T-subespaço (Proposição 3.1), segue a inclusão $\langle x_0^p \rangle^{TS} + T^{(2)} \subseteq C_2(Q_4)$.

Vejamos a inclusão contrária. Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio 2-central de Q_4 com $f \notin T^{(2)}$. Pela Proposição 3.3, podemos assumir, sem perda de generalidade, que f é multi-homogêneo de grau m_i em cada variávei x_i. Assim

$$f + T^{(2)} = \alpha x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n} + T^{(2)},\ 0 \neq \alpha \in F. \tag{3-2}$$

Suponha que algum m_i não seja divisível por p e defina o endomorfismo φ de $F\langle X \rangle$ por $\varphi(x_i) = x_i$ e $\varphi(x_s) = 1$ se $s \neq i$. Por (3-2), temos $\varphi(f) + T^{(2)} = \alpha x_i^{m_i} + T^{(2)}$.

Como $T^{(2)} \subseteq C_2(Q_4)$, temos que $x_i^{m_i}$ é um polinômio 2-central de Q_4. Sendo $C_2(Q_4)$ um T-subespaço, segue que $g = (x_i + 1)^{m_i}$ é um polinômio 2-central de Q_4. Como $m_i x_i$ é uma componente multi-homogênea de g e $C_2(Q_4)$ é multi-homogêneo, segue que $m_i x_i$ é um polinômio 2-central de Q_4. Como $m_i \neq 0$, segue que x_i é um polinômio 2-central de Q_4, uma contradição. Assim todos os graus m_i de (3-2) são múltiplos de p e portanto f pertence a $\langle x_0^p \rangle^{TS} + T^{(2)}$. Isso mostra que $C_2(Q_4) \subseteq \langle x_0^p \rangle^{TS} + T^{(2)}$. □

Proposição 3.7. *Seja F um corpo de característica 0, então $C_2(Q_4) = F.1 + T^{(2)}$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.4, temos $T^{(2)} \subseteq C_2(Q_4)$. Vejamos a inclusão contrária. Seja $f = f(x_1,\ldots,x_n)$ um polinômio 2-central de Q_4. Pela Proposição 1.9 não há perda de generalidade em supor que f é multilinear. Assim, existe $\alpha \in F$ tal que

$$f + T^{(2)} = \alpha x_1 \ldots x_n + T^{(2)}. \tag{3-3}$$

Como $T^{(2)} \subseteq C_2(Q_4)$, segue de (3-3) que $g(x_1,\ldots,x_n) = \alpha x_1 \ldots x_n$ é um polinômio 2-central de Q_4. Sendo $C_2(Q_4)$ um T-subespaço (Proposição 3.1), segue que $g(x_1,1,\ldots,1) = \alpha x_1$ é também um polinômio 2-central de Q_4. Uma vez que x_1 não é um polinômio 2-central de Q_4, temos $\alpha = 0$; e segue de (3-3) que f pertence a $T^{(2)}$. Portanto $C_2(Q_4) \subseteq T^{(2)}$, e a proposição está demonstrada. □

Lema 3.8. *Seja F um corpo qualquer. Então $T^{(3)} \subseteq C_2(Q_4)$.*

Demonstração. Pela Proposição 1.17 (i), temos

$$\begin{aligned}
[x_1[x_2,x_3,x_4],y_1,y_2] &= x_1[x_2,x_3,x_4,y_1,y_2] + [x_1,y_1][x_2,x_3,x_4,y_2] + \\
&+ [x_1,y_2][x_2,x_3,x_4,y_1] + [x_1,y_1,y_2][x_2,x_3,x_4].
\end{aligned}$$

É claro que os polinômios $x_1[x_2,x_3,x_4,y_1,y_2]$, $[x_1,y_1][x_2,x_3,x_4,y_2]$ e $[x_1,y_2][x_2,x_3,x_4,y_1]$ pertencem a $T^{(4)}$. Como o polinômio $[x_1,y_1,y_2][x_2,x_3,x_4]$ também pertence a $T^{(4)}$ (Lema 1.32), segue que $[x_1[x_2,x_3,x_4],y_1,y_2]$ pertence a $T^{(4)}$. Assim $x_1[x_2,x_3,x_4]$ é um polinômio 2-central de Q_4. Como $T^{(3)}$ é gerado como T-subespaço pelo polinômio $x_1[x_2,x_3,x_4]$ e $C_2(Q_4)$ é um T-subespaço (Proposição 3.1), obtemos $T^{(3)} \subseteq C_2(Q_4)$. □

Lema 3.9. *Seja F um corpo de característica $p > 0$. Então $q(x_1,x_2) = x_1^{p-1}[x_1,x_2]x_2^{p-1}$ é um polinômio 2-central de Q_4.*

Demonstração. Usando a igualdade $[a_1a_2\ldots a_n,a] = \sum_{i=1}^{n} a_1\ldots a_{i-1}[a_i,a]a_{i+1}\ldots a_n$ (Lema 1.17 (ii)), obtemos

$$\begin{aligned}
[x_1^{p-1}[x_1,x_2]x_2^{p-1},x_3,x_4] &= [[x_1,x_3]x_1^{p-2}[x_1,x_2]x_2^{p-1},x_4] + \ldots + \\
&+ [x_1^{p-1}[[x_1,x_2],x_3]x_2^{p-1},x_4] + \ldots + \\
&+ [x_1^{p-1}[x_1,x_2]x_2^{p-2}[x_2,x_3],x_4].
\end{aligned} \tag{3-4}$$

Usando o Lema 1.17 (ii) em cada parcela do lado direito da igualdade (3-4) e usando também o Corolário 1.33 (i)-(ii), não é difícil mostrar que $[[x_1^{p-1}[x_1,x_2]x_2^{p-1},x_3,x_4] \equiv 0 \pmod{T^{(4)}}$, isto é, $q(x_1,x_2) = x_1^{p-1}[x_1,x_2]x_2^{p-1}$ é um polinômio 2-central de Q_4. □

Lema 3.10. *Seja F um corpo qualquer. Então $C(Q_3) \subseteq C_2(Q_4)$.*

Demonstração. Vamos dividir a demonstração em dois casos: $char(F) = 0$ e $char(F) = p > 0$. Seja $char(F) = 0$. Pela Proposição 1.28, $C(Q_3)$ é gerado como T-subespaço por 1 e pelos polinômios $[x_1,x_2]$ e $x_1[x_2,x_3,x_4]$. É claro que $[x_1,x_2]$ é um polinômio 2-central de Q_4. Pelo Lema 3.8 temos que $x_1[x_2,x_3,x_4]$ é um polinômio 2-central de Q_4. Portanto $C(Q_3) \subseteq C_2(Q_4)$.

Agora seja $char(F) = p > 0$. Pelo Corolário 1.25, $C(Q_3)$ é gerado como uma T-subálgebra, pelos polinômios $x_1[x_2,x_3,x_4]$, x_0^3 e $q(x_1,x_2) = x_1^{p-1}[x_1,x_2]x_2^{p-1}$. Como $C_2(Q_4)$ é também uma T-subálgebra (Proposição 3.2), é suficiente mostrar que esses geradores pertencem $C_2(Q_4)$. Já sabemos que $x_1[x_2,x_3,x_4]$ é um polinômio 2-central de Q_4. Pelo Lema 3.5, x_0^p é um polinômio 2-central de Q_4) e pelo Lema 3.9, $q(x_1,x_2)$ também é um polinômio 2-central de Q_4. Isso mostra que $C(Q_3) \subseteq C_2(Q_4)$ também no caso $p \geq 2$. O lema está demonstrado. □

O lema seguinte é bem conhecido.

Lema 3.11 ([20], Lema 12)**.** *Sejam F um corpo qualquer e $f = f(x_1,\dots,x_n) \in F\langle X\rangle$ um polinômio multi-homogêneo de grau 1 em x_1. Seja $L = \langle f\rangle^{TS} + \langle [x_1,x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)}$. Então $L = F\langle X\rangle$ ou $L = \langle [x_1,x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)}$ ou $L = \langle x_1[x_2,x_3]\dots[x_{2s},x_{2s+1}]\rangle^{TS} + \langle [x_1,x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)}$ para algum $s \leq (n-1)/2$.*

Demonstração. Veja a referência [20], páginas 15 e 16. □

Lema 3.12. *Sejam F um corpo de característica 3 e $f = f(x_1,\dots,x_n) \in F\langle X\rangle$ um polinômio homogêneo de grau 1 em x_1. Se f é 2-central em $Q_4 = F\langle X\rangle/T^{(4)}$, então $f \in \langle [x_1,x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)}$.*

Demonstração. Seja $L = \langle f\rangle^{TS} + \langle [x_1,x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)}$. Pelo Lema 3.11 ocorre uma das três possibilidades:

(i) $L = F\langle X\rangle$,

(ii) $L = \langle [x_1,x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)}$,

(iii) $L = \langle x_1[x_2,x_3]\dots[x_{2s},x_{2s+1}]\rangle^{TS} + \langle [x_1,x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)}$.

É claro que $[x_1,x_2]$ é um polinômio 2-central de Q_4. Pelo Lema 3.8, temos $T^{(3)} \subseteq C_2(Q_4)$. Assim $L \subseteq C_2(Q_4)$. Se ocorrer (i), então $C_2(Q_4) = F\langle X\rangle$, o que não é possível. Se ocorrer (iii), então o polinômio $x_1[x_2,x_3]\dots[x_{2s},x_{2s+1}]$ é 2-central em Q_4. Observe que

$$\begin{aligned}
[x_3[x_4,x_5]\dots[x_{2(s+1)},x_{2(s+1)+1}],[x_1,x_2]] &= x_3[[x_4,x_5]\dots[x_{2(s+1)},x_{2(s+1)+1}],[x_1,x_2]] + \\
&+ [x_1,x_2,x_3][x_4,x_5]\dots[x_{2(s+1)},x_{2(s+1)+1}] \qquad (3\text{-}5)
\end{aligned}$$

Como $C_2(Q_4)$ é um T-subespaço (Proposição 3.1), segue que o polinômio $[x_3[x_4,x_5]\dots[x_{2(s+1)},x_{2(s+1)+1}],[x_1,x_2]]$ pertence a $T^{(4)}$. Usando a igualdade $[ab,c] = a[b,c]+[a,c]b$ e a relação $[[x_1,x_2],[x_3,x_4]] = [x_1,x_2,x_3,x_4]-[x_1,x_2,x_4,x_3] \in T^{(4)}$ não é difícil ver que o polinômio $x_3[[x_4,x_5]\dots[x_{2(s+1)},x_{2(s+1)+1}],[x_1,x_2]]$ também pertence a $T^{(4)}$. Portanto, segue de (3-5) que o polinômio $[x_1,x_2,x_3][x_4,x_5]\dots[x_{2(s+1)},x_{2(s+1)+1}]$ pertence a $T^{(4)}$, o que é uma contradição com a Proposição 2.14.

Portanto ocorre o caso (ii), isto é $L = \langle[x_1,x_2]\rangle^{TS}+T^{(3)}$. Isso mostra que f pertence a $\langle[x_1,x_2]\rangle^{TS}+T^{(3)}$. □

A demonstração do lema a seguir é idêntica à demonstração do Lema 1.29. Iremos escrevê-la para conveniência do leitor.

Lema 3.13. *Sejam F um corpo de característica 3 e $f = f(x_1,\dots,x_n) \in F\langle X\rangle$ um polinômio homogêneo de grau m_1 em x_1, onde m_1 não é divisível por 3. Se f for 2-central em Q_4, então $f \in \langle[x_1,x_2]\rangle^{TS}+T^{(3)}$.*

Demonstração. Pela Proposição 3.3, não há perda de generalidade em supor que f é multi-homogêneo de grau m_1 em x_1. Escreva $m_1 = 3q+r$ com $0 < r < 3$. Usando a base de Q_3 dada na Proposição 1.21, vemos que existe $g = g(x_1,\dots,x_n) \in F\langle X\rangle$, multi-homogêneo de grau r em x_1 tal que

$$f+T^{(3)} = x_1^{3q}g+T^{(3)}. \tag{3-6}$$

Defina o endomorfismo φ de $F\langle X\rangle$ por $\varphi(x_1) = 1+x_1$ e $\varphi(x_i) = 1$ se $i \neq 1$. Por (3-6) temos

$$\varphi(f)+T^{(3)} = (1+x_1^3)^q g(1+x_1,x_2,\dots,x_n)+T^{(3)}. \tag{3-7}$$

Como $g(x_1,\dots,x_n)$ é a componente multi-homogênea de grau r em x_1 do polinômio $(1+x_1^p)^q g(1+x_1,x_2,\dots,x_n)$, $C_2(Q_4)$ é um T-subespaço multi-homogêneo e $T^{(3)} \subseteq C_2(Q_4)$ (Lema 3.8), segue de (3-7) que g é 2-central em Q_4. Seja $h = h(y_1,\dots,y_r,x_2,\dots,x_n)$ a linearização total de g em x_1. Então h é 2-central em Q_4 e segue do Lema 3.12 que $h \in \langle[x_1,x_2]\rangle^{TS}+T^{(3)}$. Como

$$h(x_1,\dots,x_1,x_2,\dots,x_n) = r!g(x_1,\dots,x_n),$$

obtemos $g \in \langle[x_1,x_2]\rangle^{TS}+T^{(3)}$. Como $x_1^3+T^{(3)}$ é central em Q_3 (Lema 1.22 (i)) e $C(Q_3)$ é uma álgebra (Proposição 1.13) segue que $x_1^{pq}+T^{(3)}$ é central em Q_3. Assim

$$x_1^{pq}[x_2,x_3]+T^{(3)} = [x_1^{pq}x_2,x_3]+T^{(3)}. \tag{3-8}$$

Como $g \in \langle[x_1,x_2]\rangle^{TS}+T^{(3)}$ segue de (3-6) e (3-8) que $f \in \langle[x_1,x_2]\rangle^{TS}+T^{(3)}$. □

Proposição 3.14. *Seja F um corpo de característica 3. Então $C_2(Q_4) = C(Q_3)$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.10, temos $C(Q_3) \subseteq C_2(Q_4)$. Vamos mostrar que $C_2(Q_4) \subseteq C(Q_3)$. Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio 2-central de Q_4. Pela Proposição 3.1, podemos assumir que f é multi-homogêneo com multigrau m_i em cada variável x_i.

Suponha que algum m_i não seja divisível por 3. Reenumerando as variáveis x_i, podemos assumir, sem perda de generalidade que $i = 1$. Pelo Lema 3.12, temos $f \in \langle [x_1, x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)}$. Como $[x_1, x_2] + T^{(3)}$ é central em Q_3 e $T^{(3)} \subseteq C(Q_3)$ segue que $f + T^{(3)}$ é central em Q_3.

Suponha agora que todos os m_i sejam divisíveis por 3. Como $x_0^3 + T^{(3)}$ e $[x_1, x_2] + T^{(3)}$ são centrais em Q_3, segue da Proposição 1.21 que $f + T^{(3)}$ é uma combinação linear de elementos da forma

$$x_{i_1}^{3r_1} \ldots x_{i_k}^{3r_k} x_{j_1}^2 [x_{j_1} x_{j_2}] x_{j_2}^2 \ldots x_{j_{2l-1}}^2 [x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}] x_{j_{2l}}^2 + T^{(3)}, \tag{3-9}$$

onde $k, l \geq 0, r_s > 0, 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n, 1 \leq j_1 < \ldots < j_{2l} \leq n$. Pelo Teorema 1.24 todos os elementos da forma (3-9) são centrais em Q_3, logo $f + T^{(3)}$ é central em Q_3. Mostramos assim que $C_2(Q_4) \subseteq C(Q_3)$. $\square$

3.2 A álgebra Q_5

Nesta seção vamos dar uma descrição dos polinômios hipercentrais da álgebra $Q_5 = F\langle X \rangle / T^{(5)}$. Mais precisamente, se $char(F) = p$, vamos mostrar que

$$C_2(Q_5) = \langle x_0^p \rangle^{TS} + T^{(2)} \text{ se } p > 2;$$
$$C_2(Q_5) = F.1 + T^{(3)} \text{ se } p = 0;$$
$$C_3(Q_5) = C(Q_3) \text{ para } p \geq 0.$$

O lema seguinte é bem conhecido, veja [12, Lema 2], [14, página 16] e [43, Corolário 4].

Lema 3.15 ([12, 14, 43])**.** *Seja F um corpo de característica $\neq 2$. Então $T^{(5)} \subseteq Id(E \otimes E_2)$.*

Demonstração. Devemos mostrar que a álgebra $E \otimes E_2$ satisfaz a identidade $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] = 0$. Observe que E e E_2 possuem bases

$$1, e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_n}, i_1 < i_2 < \ldots < i_n, n \in \mathbb{N}, \tag{3-10}$$
$$1, h_1, h_2, h_1 h_2, \tag{3-11}$$

respectivamente. Como o polinômio $[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]$ é multilinear, é suficiente avaliá-lo na base de $E\otimes E_2$, isto é, nos elementos $a\otimes b$, onde a é um elemento de (3-10) e b é um elemento de (3-11). Sejam $a_1,\ldots,a_5$ elementos quaisquer de E e $b_1,\ldots,b_5$ elementos quaisquer de E_2. Observe que

$$\begin{aligned}[a_1\otimes b_1,a_2\otimes b_2] &= a_1a_2\otimes b_1b_2-a_2a_1\otimes b_2b_1 \\ &= a_1a_2\otimes b_1b_2-a_2a_1\otimes b_1b_2+a_2a_1\otimes b_1b_2-a_2a_1\otimes b_2b_1 \\ &= [a_1,a_2]\otimes b_1b_2+a_2a_1\otimes[b_1,b_2].\end{aligned} \tag{3-12}$$

Usando (3-12) três vezes e observando que $[x_1,x_2]$ é um polinômio central tanto de E quanto de E_2, podemos obter

$$\begin{aligned}[a_1\otimes b_1,a_2\otimes b_2,a_3\otimes b_3,a_4\otimes b_4,a_5\otimes b_5] &= [a_1,a_2][a_3,a_4]a_5\otimes b_1[b_2,b_3][b_4,b_5]+ \\ &+ [a_1,a_2][a_3,a_4]a_5\otimes b_2[b_1,b_3][b_4,b_5]+ \\ &+ [a_2a_1,a_3][a_4,a_5]\otimes[b_1,b_2][b_3,b_4]b_5.\end{aligned}$$

Como a base de E_2 é formada pelos elementos (3-11), é fácil ver que E_2 satisfaz a identidade polinomial $[x_1,x_2][x_3,x_4]=0$. Assim $[a_1\otimes b_1,a_2\otimes b_2,a_3\otimes b_3,a_4\otimes b_4,a_5\otimes b_5]=0$ para quaisquer elementos $a_1,\ldots a_5$ de (3-10) e $b_1,\ldots,b_5$ de (3-11). Consequentemente $[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]=0$ é uma identidade polinomial para a álgebra $E\otimes E_2$. □

Lema 3.16. *Seja F um corpo qualquer. Então $T^{(3)}\subseteq C_2(Q_5)$.*

Demonstração. Pelo Lema 1.17 (i), temos

$$\begin{aligned}[x_1[x_2,x_3,x_4],x_5,x_6] &= x_1[x_2,x_3,x_4,x_5,x_6]+[x_1,x_5][x_2,x_3,x_4,x_6]+ \\ &+ [x_1,x_6][x_2,x_3,x_4,x_5]+[x_1,x_5,x_6][x_2,x_3,x_4] \\ &\equiv x_1[x_2,x_3,x_4,x_5,x_6]+[x_2,x_3,x_4,x_6][x_1,x_5]+ \\ &+ [x_2,x_3,x_4,x_5][x_1,x_6]+[x_1,x_5,x_6][x_2,x_3,x_4] \pmod{T^{(5)}}.\end{aligned} \tag{3-13}$$

É bem conhecido que $[x_2,x_3,x_4,x_6][x_1,x_5]+[x_2,x_3,x_4,x_5][x_1,x_6]\in T^{(5)}$ (veja [[9], Teorema 1.1] e [[26], Proposição 1]). Também é bem conhecido que $[x_1,x_5,x_6][x_2,x_3,x_4]\in T^{(5)}$ (veja [[9], Teorema 1.1], [[44],Lema 1]). Portanto, segue de (3-13) que $[x_1[x_2,x_3,x_4],x_5,x_6]$ pertence a $T^{(5)}$. Como $T^{(3)}$ é gerado como um T-subespaço pelo polinômio $x_1[x_2,x_3,x_4]$ e $C_2(Q_5)$ é um T-subespaço (Proposição 1.13), temos $T^{(3)}\subseteq C_2(Q_5)$. □

Lema 3.17. *Seja F um corpo de característica $\neq 2$. Então para qualquer $n\in\mathbb{N}$, $[x_1,x_2]\ldots[x_{2n-1},x_{2n}]$ não é um polinômio 2-central de Q_5.*

Demonstração. Dado $n \in \mathbb{N}$ qualquer, seja $v_n = v_n(x_1, \ldots, x_{2n}) = [x_1, x_2] \ldots [x_{2n-1}, x_{2n}]$. Fazendo as substituições $x_1 = e_1 \otimes h_1, x_2 = e_2 \otimes 1, \ldots, x_{2n-1} = e_{2n-1} \otimes 1, x_{2n} = e_{2n} \otimes 1, y_1 = e_{2n+1} \otimes h_2, y_2 = e_{2n+2} \otimes 1$ no polinômio

$$[v_n(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}), y_1, y_2]$$

obtemos $2^{n+2} e_1 \ldots e_{2n+2} \otimes h_1 h_2$, que não é nulo porque é um múltiplo escalar de um elemento da base de $E \otimes E_2$. Assim $[v_n, y_1, y_2]$ não pertence a $Id(G \otimes G_2)$. Como $T^{(5)} \subseteq Id(G \otimes G_2)$ (Lema 3.15), segue que $[v_n, y_1, y_2]$ não pertence a $T^{(5)}$, isto é v_n não é um polinômio 2-central de Q_5. □

Lema 3.18. *Seja F um corpo de característica $p > 2$. Então x_0^p é um polinômio 2-central de $Q_5 = F\langle X \rangle / T^{(5)}$.*

Demonstração. Como vimos na demonstração do Lema 2.20

$$[x_0^3, x_1] = 3x_0^2 [x_0, x_1] + 3x_0 [x_0, x_1, x_0] + [x_0, x_1, x_0, x_0].$$

Se $p = 3$, temos $[x_0^3, x_1, x_2] = [x_0, x_1, x_0, x_0, x_2]$. Assim x_0^3 é um polinômio 2-central de Q_5. Agora se $p > 3$, então segue do Lema 1.22 (i) que x_0^p é um polinômio 2-central de Q_5. □

Proposição 3.19. *Seja F um corpo de característica $p > 2$. Então $C_2(Q_5) = \langle x_0^p \rangle^{TS} + T^{(3)}$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.18, x_0^p é um polinômio 2-central de Q_5. Como $T^{(3)} \subseteq C_2(Q_5)$ (Lema 3.16) e $C_2(Q_5)$ é um T-subespaço (Proposição 3.1), segue que $\langle x_0^p \rangle^{TS} + T^{(3)} \subseteq C_2(Q_5)$.

Vamos mostrar a inclusão contrária. Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio 2-central de Q_5 com $f \notin T^{(3)}$. Pela Proposição 3.2 podemos supor, sem perda de generalidade, que f é multi-homogêneo. Como $[x_1, x_2] + T^{(3)}$ é central em Q_3, segue da Proposição 1.21 que $f + T^{(3)}$ é uma combinação linear de elementos da forma

$$x_{i_1}^{r_1} \ldots x_{i_k}^{r_k} [x_{j_1}, x_{j_2}] \ldots [x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}] + T^{(3)}, \tag{3-14}$$

com $k \geq 0, l \geq 0, r_s > 0, 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n, 1 \leq j_1 < \ldots j_{2l} \leq n$.

Afirmamos que $l = 0$ para todos os elementos de (3-14), isto é, não aparecem comutadores. Suponha o contrário e seja $g_{l, j_1} + T^{(3)}$ o termo de (3-14) com l e j_1 minimais. Seja φ o endomorfismo de $F\langle X \rangle$ definido por $\varphi(x_{j_s}) = x_{j_s}$ se $s \in \{1, \ldots, 2l\}$ e $\varphi(x_s) = 1$ se $s \notin \{j_1, \ldots, j_{2l}\}$. Por (3-14) temos

$$\varphi(f) + T^{(3)} = x_{j_1}^{s_1} \ldots x_{j_{2l}}^{s_{2l}} [x_{j_1}, x_{j_2}] \ldots [x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}] + T^{(3)}. \tag{3-15}$$

Seja $h(x_{j_1},\dots,x_{j_{2l}})=x_{j_1}^{r_1}\dots x_{j_{2l}}^{r_{2l}}[x_{j_1},x_{j_2}]\dots[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}]$. Observe que $[x_{j_1},x_{j_2}]\dots[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}]$ é uma componente multi-homogênea de $h(x_{j_1}+1,\dots,x_{j_{2l}}+1)$. Como $T^{(3)}\subseteq C_2(Q_5)$ e $C(Q_5)$ é multi-homogêneo, segue de (3-15) que $[x_{j_1},x_{j_2}]\dots[x_{j_{2l-1}},x_{j_{2l}}]$ é um polinômio 2-central de Q_5. Mas isso contraria o Lema 3.17. Logo $l=0$ em cada elemento (3-14) e assim $f+T^{(3)}$ é um múltiplo escalar do elemento

$$x_1^{r_1}\dots x_n^{r_n}+T^{(3)}. \tag{3-16}$$

Afirmamos que cada grau r_i, $i=1,\dots,n$ é divisível por p. Suponha o contrário, que algum r_t não seja divisível por p. Defina o endomorfismo ϕ de $F\langle X\rangle$ por $\phi(x_t)=x_t$ e $\phi(x_s)=1$ se $s\neq t$. Então segue de (3-16) que

$$\phi(f)+T^{(3)}=x_t^{r_t}+T^{(3)}. \tag{3-17}$$

Como $T^{(3)}\subseteq C_2(Q_5)$, segue de (3-17) que $x_t^{r_t}$ é um polinômio 2-central de Q_5. Como $C_2(Q_5)$ é um T-subespaço, segue que $g=(x_t+1)^{r_t}$ é um polinômio 2-central de Q_5. Como $r_t x_t$ é uma componente multi-homogênea de g e $C_2(Q_5)$ é multi-homogêneo (Proposição 3.1), segue que $r_t x_t$ é um polinômio 2-central de Q_5. Isso só é possível se $r_t=0$, o que contraria a escolha de r_t.

Assim todos os graus r_i, $i=1,\dots,n$ são divisíveis por p e por (3-16), temos

$$f+T^{(3)}=x_1^{pq_1}\dots x_n^{pq_n}+T^{(3)}. \tag{3-18}$$

Como $(x_1x_2)^p\equiv x_1^px_2^p \pmod{T^{(3)}}$ (Lema 1.22 (ii)), segue de (3-18) que $f+T^{(3)}=(x_1^{q_1}\dots x_n^{q_n})^p+T^{(3)}$. Pondo $x_0=x_1^{q_1}\dots x_n^{q_n}$, obtemos $f\in\langle x_0^p\rangle^{TS}+T^{(3)}$. Portanto $C_2(Q_5)\subseteq\langle x_0^p\rangle^{TS}+T^{(3)}$.

□

Proposição 3.20. *Seja F um corpo de característica* 0. *Então $C_2(Q_5)=T^{(3)}$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.16 temos $T^{(3)}\subseteq C_2(Q_5)$. Vejamos a inclusão contrária. Seja $f=f(x_1,\dots,x_n)$ um polinômio 2-central de Q_5. Conforme mostrado na Proposição 3.19:

$$f+T^{(3)}=\alpha x_1\dots x_n+T^{(3)}, \tag{3-19}$$

para algum $\alpha\in F$. Como $T^{(3)}\subseteq C_2(Q_5)$, segue de (3-19) que $\alpha x_1\dots x_n$ é um polinômio 2-central de Q_5. Defina o endomorfismo φ de $F\langle X\rangle$ por $\varphi(x_1)=x_1$ e $\varphi(x_s)=1$ se $s\neq 1$. Então $\varphi(x_1\dots x_n)=\alpha x_1$ é um polinômio 2-central de Q_5. Mas isso implica $\alpha=0$ porque todo polinômio 2-central de Q_5 possui grau no mínimo 3. Consequentemente $C_2(Q_4)\subseteq T^{(3)}$, o que prova a proposição. □

Lema 3.21. *Seja F um corpo de característica $\neq 2$. Então para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $x_1[x_2,x_3]\ldots[x_{2n},x_{2n+1}]$ não é um polinômio 3-central de Q_5.*

Demonstração. Dado $n \in \mathbb{N}$ qualquer seja $v_n = v_n(x_2,\ldots,x_{2n+1}) = [x_2,x_3]\ldots[x_{2n},x_{2n+1}]$. Fazendo as substituições $x_1 = e_1 \otimes 1, x_2 = e_2 \otimes 1, x_3 = e_3 \otimes 1,\ldots,x_{2n} = e_{2n} \otimes 1, x_{2n+1} = e_{2n+1} \otimes 1, y_1 = e_{2n+2} \otimes h_1, y_2 = e_{2n+3} \otimes h_2, y_3 = e_{2n+4} \otimes 1$ no polinômio

$$[x_1 v_n(x_2,x_3,\ldots,x_{2n+1}),y_1,y_2,y_3]$$

obtemos $2^{n+3}e_1\ldots e_{2n+4} \oplus h_1h_2$, que não é nulo porque é um múltiplo escalar de um elemento da base de $G \otimes G_2$. Assim $[x_1v_n,y_1,y_2,y_3]$ não pertence a $Id(G \otimes G_2)$. Como $T^{(5)} \subseteq Id(G \otimes G_2)$ (Lema 3.15), segue que $[x_1v_n,y_1,y_2,y_3]$ não pertence a $T^{(5)}$, isto é x_1v_n não é um polinômio 3-central de Q_5. □

Lema 3.22. *Sejam F um corpo de característica $\neq 2$ e $f = f(x_1,\ldots,x_n) \in F\langle X\rangle$ um polinômio homogêneo de grau 1 em x_1. Se f for 3-central em $Q_5 = F\langle X\rangle/T^{(5)}$, então $f \in \langle [x_1,x_2]\rangle + T^{(3)}$.*

Demonstração. Seja $L = \langle f\rangle^{TS} + \langle [x_1,x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)}$. Pelo Lema 3.11 ocorre uma das três possibilidades:

(i) $L = F\langle X\rangle$,

(ii) $L = \langle [x_1,x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)}$,

(iii) $L = \langle x_1[x_2,x_3]\ldots[x_{2s},x_{2s+1}]\rangle^{TS} + \langle [x_1,x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)}$.

É claro que $[x_1,x_2]$ é um polinômio 3-central de Q_5. Pelo Lema 3.16, temos $T^{(3)} \subseteq C_3(Q_5)$. Assim $L \subseteq C_3(Q_5)$. Se ocorrer (i), então $C_3(Q_5) = F\langle X\rangle$, o que não é possível. Se ocorrer (iii), então $x_1[x_2,x_3]\ldots[x_{2s},x_{2s+1}]$ é um polinômio 3-central de Q_5, o que contraria o Lema 3.21. Portanto deve ocorrer (ii): $L = \langle [x_1,x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)}$; e isso implica $f \in \langle [x_1,x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)}$. □

Proposição 3.23. *Seja F um corpo de característica 0. Então $C_3(Q_5) = \langle [x_1,x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)}$.*

Demonstração. Como $C_3(Q_5)$ é um T-subespaço (Proposição 3.1), segue da Proposição 1.9 que $C_3(Q_5)$ é gerado como T-subespaço por seus polinômios multi-lineares. Esses geradores multilineares são, em particular, homogêneos de grau 1 em x_1 e pelo Lema 3.22, pertencem a $\langle [x_1,x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)}$. Assim $C_3(Q_5) \subseteq \langle [x_1,x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)}$. Vejamos a inclusão contrária. É claro que $[x_1,x_2]$ é um polinômio 3-central de Q_5. Como $T^{(3)} \subseteq C_2(Q_5)$ (Lema 3.16) e $C_2(Q_5) \subseteq C_3(Q_5)$, temos $T^{(3)} \subseteq C_3(Q_5)$. Sendo $C_3(Q_5)$ um T-subespaço, segue imediatamente que $\langle [x_1,x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)} \subseteq C_3(Q_5)$. □

Proposição 3.24. *Seja F um corpo qualquer. Então $C_3(Q_5) = C(Q_3)$.*

Demonstração. Se $char(F) = 0$, então segue da Proposição 1.28 e da Proposição 3.23 que

$$C(Q_3) = \langle [x_1, x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)} = C_3(Q_5).$$

Podemos então fixar o caso $char(F) = p > 0$. Vamos mostrar primeiramente que $C(Q_3) \subseteq C_3(Q_5)$. Como $C(Q_3)$ é gerada como T-subálgebra por $x_1[x_2, x_3, x_4], x_0^p$ e $x_1^{p-1}[x_1, x_2]x_2^{p-1}$ (Corolário 1.25), é suficiente mostrar eles são polinômios 3-centrais de Q_5. Como $x_1[x_2, x_3, x_4]$ é um polinômio 2-central de Q_5 (Lema 3.16), é claro que ele é um polinômio 3-central de Q_5. Observe que

$$[x_0^2, y_1] = 2x_0[x_0, y_1] + [x_0, y_1, x_0].$$

Assim, se $p = 2$, temos $[x_0^2, y_1, y_2, y_3] = [x_0, y_1, x_0, y_2, y_3] \in T^{(5)}$, isto é x_0^2 é um polinômio 3-central de Q_5. Se $p > 2$, então segue do Lema 3.18 que x_0^p é um polinômio 2-central de Q_5; logo ele é também um polinômio 3-central de Q_5.

Finalmente observe que $[x_1^{p-1}[x_1, x_2]x_2^{p-1}, y_1] \in T^{(3)}$ (Lema 1.30). Como $T^{(3)} \subseteq C_2(Q_5)$, segue imediatamente que $x_1^{p-1}[x_1, x_2]x_2^{p-1}$ é um polinômio 3-central de Q_5. Portanto $C(Q_5) \subseteq C_3(Q_5)$.

Vejamos a inclusão contrária. Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio 3-central de Q_5. Pela Proposição 3.3, $C_3(Q_5)$ é gerado como T-subespaço por seus polinômios multi-homogêneos. Assim podemos considerar f multi-homogêneo de grau m_i em cada variável x_i, $i = 1, \ldots, n$.

Suponha que algum grau m_i não seja divisível por p. Sem perda de generalidade, podemos considerar $i = 1$. Prosseguindo de modo inteiramente análogo ao Lema 3.13, podemos mostrar que f pertence a $\langle [x_1, x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)}$. Como $\langle [x_1, x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)} \subseteq C(Q_3)$, segue que f é um polinômio central de Q_3.

Agora suponha que cada m_i, $i = 1, \ldots, n$ seja divisível por p. Como $[x_1, x_2] + T^{(3)}$ e $x_0^p + T^{(3)}$ são centrais em $Q_3 = F\langle X \rangle / T^{(3)}$. Segue da Proposição 1.21 que $f + T^{(3)}$ é uma combinação linear de elementos da forma

$$x_{i_1}^{pr_1} \ldots x_{i_k}^{pr_k} x_{j_1}^{p-1}[x_{j_1}, x_{j_2}]x_{j_2}^{p-1} \ldots x_{j_{2l-1}}^{p-1}[x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}]x_{j_{2l}}^{p-1} + T^{(3)},$$
$$k \geq 0, l \geq 1, r_s > 0, 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n, 1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n.$$

Segue imediatamente do Teorema 1.24 que $f + T^{(3)}$ é central em Q_3. Mostramos assim que $C_3(Q_5) \subseteq C(Q_3)$, o que demonstra a proposição.

$\square$

3.3 Resumo dos resultados

Reunimos abaixo uma descrição dos polinômios centrais e hipercentrais das álgebras que foram apresentadas nessa tese; os itens (4)-(5) e (7)-(12) foram obtidos por nós. O número p denota a característica do corpo F.

1. $C(Q_3) = \langle [x_1, x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)}$, se $p = 0$;
2. $C(Q_3) = \langle x_0^p, x_0^p q_1, x_0^p q_2, \ldots \rangle^{TS} + T^{(3)}$, se $p \geq 2$;
3. $C(Q_4) = F.1 + \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle^{TS} + T^{(4)}$, se $p = 0$;
4. $C(Q_4) = \langle x_0^4, x_0^2 q_2, x_0^2 q_3, \ldots \rangle^{TS}$, se $p = 2$;
5. $C(Q_4) = \langle x_1 \omega(x_2, x_3, x_4, x_5), [x_1, x_2][x_3, x_4] - x_1[x_2, x_3, x_4] \rangle^{TS} +$
$+ \langle x_0^3, x_0^3 q_3, x_0^3 q_6, \ldots, x_0^3 q_{3n}, \ldots \rangle^{TS} +$
$+ \langle x_0^3 u_0, x_0^3 u_1, x_0^3 u_2, \ldots, x_0^3 u_n, \ldots \rangle^{TS} + T^{(4)}$, se $p = 3$;
6. $C(Q_4) = \langle x_0^2 q_2, x_0^2 q_3, \ldots \rangle^{TS} + T^{(4)}$, se $p > 3$;
7. $C_2(Q_4) = F.1 + T^{(2)}$, se $p = 0$;
8. $C_2(Q_4) = \langle x_0^p \rangle^{TS} + T^{(2)}$, se $p = 2$ ou $p > 3$;
9. $C_2(Q_4) = C(Q_3)$, se $p = 3$;
10. $C_2(Q_5) = F.1 + T^{(3)}$, se $p = 0$;
11. $C_2(Q_5) = \langle x_0^p \rangle^{TS} + T^{(2)}$, se $p > 2$;
12. $C_3(Q_5) = C(Q_3)$ para $p \geq 0$.

Recentemente, uma lista de polinômios centrais para a álgebra $Q_n = F\langle X \rangle / T^{(n)}$ para diversos valores de n foi encontrada por Grishin e Pchelintsev [25]. Uma descrição completa dos polinômios centrais da álgebra Q_n quando $n \geq 5$, permanece desconhecida.

Referências Bibliográficas

[1] S.A. Amitsur, J. Levitzki, **Minimal identities for algebras**, Proceedings of the American Mathematical Society 1, 449-463 (1950).

[2] S. Bhupatiraju, P. Etingof, D. Jordan, W. Kuszmaul, J. Li, **Lower central series of a free associative algebra over the integers and finite fields**, Journal of Algebra 372, 251-274 (2012).

[3] C. Bekh-Ochir, S.A. Rankin, **The central polinomials of the infinite dimensional unitary and nonunitary Grassmann algebras**, Journal of Algebra and its Applications 9, 235-249 (2010).

[4] C. Bekh-Ochir, S.A.Rankin, **Examples of associative algebras for which the T-space of central polynomials is not finitely based**, Israel Journal of Mathematics 186, 333-347 (2011).

[5] C. Bekh-Ochir, D. Riley, **On the Grassmann T-space**, Journal of Algebra and its Applications 7, 319-336 (2008).

[6] A. Ya. Belov, **On non-Specht varieties**, Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika 5, 47-66 (1999).

[7] A. Brandão Jr., P. Koshlukov, A. Krasilnikov, E. A. Silva, **The central polynomials for the Grassmann algebra**, Israel Journal of Mathematics 179, 127-144 (2010).

[8] J. Colombo, P. Koshlukov, **Central polynomials in the matrix algebra of order two**, Linear Algebra and its Applications 377, 53-67 (2004).

[9] E. A. Costa and A. Krasilnikov, **Relations in universal Lie nilpotent associative algebras of class 4**, arXiv: 1306.429.

[10] G. Deryabina, A. Krasilnikov, **The subalgebra of graded central polynomials of an associative algebra**, Journal of Algebra 425, 313-323 (2015).

[11] G. Deryabina, A. Krasilnikov, **The torsion subgroup of the additive group of a Lie nilpotent associative ring of class 3**, Journal of Algebra 428, 230-255 (2015).

[12] G. Deryabina, A. Krasilnikov, **Products of commutators in a Lie nilpotent associative algebra**, arXiv: 1509.08890.

[13] V. Drensky, **Free Algebras and PI-Algebras**, Graduate Course in Algebra, Springer, Singapore (1999).

[14] V. Drensky, **Codimensions of T-ideals and Hilbert series of relatively free algebras**, Journal of Algebra 91, 1-17 (1984).

[15] V. Drensky and E. Formanek, **Polynomial identity rings**. Advanced Courses in Mathematics, CRM Barcelona, Birkhauser (2012).

[16] P. Etingof, J. Kim, X. Ma, **On universal Lie nilpotent associative algebras**, Journal of Algebra 321, 697-703 (2009).

[17] E. Formanek, **Central polynomials for matrix rings**, Journal of Algebra 23, 129-132 (1972).

[18] A. Giambruno and P. Koshlukov, **On the identities of the Grassmann algebras in characteristic $p > 0$**, Israel Journal of Mathematics 122, 305-316 (2001).

[19] A. Giambruno, M. Zaicev, **Polynomial Identities and Asymptotic Methods**, Mathematical Surveys and Monographs, 122, American Mathematical Society, Providence, Providence, RI, (2015).

[20] D. J. Gonçalves, A. Krasilnikov, I. Sviridova, **Limit T-spaces and central polynomials in n variables of the Grassmann algebra**, Journal of Algebra 371, 156-174 (2012).

[21] A.S. Gordienko, **Codimensions of commutators of lenght 4**, Russian Mathematical Surveys 62, 187-188 (2007).

[22] A. V. Grishin, **On the center of a relatively free Lie-nilpotent algebra of index 4**, Mathematical Notes 91, no. 1, 139-140 (2012).

[23] A. V. Grishin, **On the structure of the center of a relatively free Grassmann algebra**, Russian Mathematical Surveys 65, 781-782 (2010).

[24] A. V. Grishin, **Examples of $T-$spaces and T-ideals of characteristic 2 without the finite basis property**, Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika 5 101-118 (1999).

[25] A.V. Grishin, S.V. Pchelintsev, **On centers of relatively free associative algebras with a Lie nilpotency identity**, Matematicheskii Sbornik 206, no. 11, 113-130 (2015).

[26] A. V. Grishin, L. M. Tsybulya, A. A. Shokola, **On T-spaces and relations in relatively free, Lie nilpotent, associative algebras**, Journal of Mathematical Sciences 177, no. 6 (2011).

[27] C. K. Gupta, A. Krasilnikov, **Some non-finitely based varieties of groups and group representations**, International Journal of Algebra and Computation 5, 343-365 (1995).

[28] Narain Gupta, Frank Levin, **On the Lie ideals of a ring**, Journal of Algebra 81, 225-231 (1983).

[29] I. Kaplansky, **Problems in the theory of rings**, Report of a Conference on Linear Algebras, June, 1956, in National Acad. of Sci.-National Research Council, Washington, Publ. 502, 1-3 (1957).

[30] I. Kaplansky, **Rings with a polynomial identity**, Bulletin of the American Mathematical Society 54, 496-500 (1948).

[31] A. R. Kemer, **Ideals of identities of associative algebras**, Translations of Mathematical Monograph 97, American Mathematical Society, Providence (1988).

[32] D. Krakowski and A. Regev, **The polynomial identities of the Grassmann algebra**, Transactions of the American Mathematical Society 181, 429-438 (1973).

[33] A. Krasilnikov, **The additive group of a Lie nipotent associative ring**, Journal of Algebra 392, 10-22 (2013).

[34] V. N. Latyshev, **On finite generation of a T-ideal with the element** $[x_1,x_2,x_3,x_4]$, Sibirskii Matematicheskii Zhurnal (Siberian Mathematical Journal) 6, 1432-1434 (1965) (in Russian).

[35] V. N. Latyshev, **On the choice of basis in a T-ideal**, Sibirskii Matematicheskii Zhurnal (Siberian Mathematical Journal) 4, 1122-1126 (1963) (in Russian).

[36] H. Laue, **On the associated Lie ring the adjoint group of a radical ring**, Canadian Mathematical Bulletin 27, no. 2 (1984).

[37] S. V. Okhitin, **Central polynomials of an algebra of second-order matrices** (Russian), Vestnik Moskovskogo Universiteta, Seriya I Matematika, Mekhanika 1988, no. 4, 61-63; English translation: Moscow University Mathematics Bulletin 43, 49-51 (1988).

[38] Yu. P. Razmyslov, **Identities of Algebras and Their Representations**, Translations of Mathematical Monographs, 138, American Mathematical Society, Providence, RI (1994).

[39] V.V. Shchigolev, **The finite basis property of T-spaces over fields of characteristic zero**, Izvestiya Mathematics 65, 1041-1071 (2001).

[40] V.V. Shchigolev, **Examples of infinitely based T-ideals**, Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika 5 307-312 (1999).

[41] V.V. Shchigolev, **Examples of T-spaces with an infinite basis**, Matematicheskii Sbornik 191, 459-476 (2000).

[42] W. Specht, **Gesetze in Ringen. I**, Mathematische Zeitschrift 52, 557-589 (1950).

[43] A.N. Stoyanova-Venkova, **The lattice of the variety of associative algebras defined by a commutator of length five**, Comptes Rendus de L'Academie Bulgare des Sciences 34, 465-467 (1981).

[44] I. B. Volichenko. **The T-ideal generated by the element** $[x_1,x_2,x_3,x_4]$, Prepint no. 22, Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Belorussian SSR, (1978) (in Russian).

[45] I. B. Volichenko, A. E. Zalesskii. **Characterization of certain T-ideals from the view point of representation theory of the symmetric groups**, Serdica Mathematical Journal 38, 211-236 (2012).

Índice Remissivo