
**UM MODELO $\kappa - \omega$ PARA ESCOAMENTOS TURBULENTOS
PARIETAIS DILATÁVEIS**

DANIEL VIEIRA SOARES

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UM MODELO $\kappa - \omega$ PARA ESCOAMENTOS
TURBULENTOS PARIETAIS DILATÁVEIS

DANIEL VIEIRA SOARES

ORIENTADOR: JOSÉ LUIZ ALVES DA FONTOURA RODRIGUES

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM
CIÊNCIAS MECÂNICAS

PUBLICAÇÃO: ENM.DM - 103 A/06

BRASÍLIA/DF: NOVEMBRO - 2006.

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UM MODELO $\kappa - \omega$ PARA ESCOAMENTOS
TURBULENTOS PARIETAIS DILATÁVEIS

DANIEL VIEIRA SOARES

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO
DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA
DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM CIÊNCIAS MECÂNICAS.

APROVADA POR:

Prof. José Luiz Alves da Fontoura Rodrigues, Docteur
(École Centrale de Lyon, França)
(Orientador)

Prof. Francisco Ricardo da Cunha, PhD.
(University of Cambridge, Inglaterra)
(Examinador Interno)

Prof. Átila Pantaleão Silva Freire, PhD.
(University of Cambridge, Inglaterra)
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 10 DE NOVEMBRO DE 2006.

FICHA CATALOGRÁFICA

SOARES, DANIEL VIEIRA

Um modelo $\kappa - \omega$ para escoamentos turbulentos parietais dilatáveis

[Distrito Federal] 2006.

xv, 138p., 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Ciências Mecânicas, 2006).

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília.

Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

- | | |
|--|---------------------------------|
| 1. Modelo $\kappa - \omega$ de turbulência | 2. Turbulência parietal |
| 3. Escoamentos dilatáveis | 4. Método dos elementos finitos |
| I. ENM/FT/UnB | II. Título (série) |

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SOARES, D. V. (2006). Um modelo $\kappa - \omega$ para escoamentos turbulentos parietais dilatáveis. Dissertação de Mestrado em Ciências Mecânicas, Publicação ENM.DM - 103 A/06, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 138p.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Daniel Vieira Soares.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: Um modelo $\kappa - \omega$ para escoamentos turbulentos parietais dilatáveis.

GRAU / ANO: Mestre / 2006

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Daniel Vieira Soares
SMDB Conjunto 28-A lote 2 casa B, Lago Sul
71.680-281 Brasília - DF - Brasil.

*“Quem conhece os outros é inteligente,
quem conhece a si mesmo é iluminado.
Quem vence os outros é forte,
quem vence a si mesmo é invencível.”*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, por todas as oportunidades e acontecimentos maravilhosos em minha vida, que me fizeram crescer ainda mais, compreendendo um pouco melhor meu papel neste mundo.

Agradeço especialmente à minha esposa Tayanne, sem seu amor, sua compreensão e a nossa união, nada deste trabalho (ou de qualquer outro) teria sentido, muito menos poderia ser concluído. Agradeço também a todos da minha família, de modo especial a meus pais, Mário e Rosa.

Agradeço ao meu orientador, professor José Luiz, primeiramente pela amizade e pelo ótimo trabalho que desenvolvemos juntos ao longo de cinco anos. Que este ainda seja o início de muitos outros trabalhos em equipe, e que sejam tão proveitosos e satisfatórios como o que fizemos.

Exprimo também minha gratidão ao professor Francisco Ricardo, aos colegas do grupo VORTEX, ao professor Átila Freire e sua equipe da COPPE, pelos trabalhos que desenvolvemos juntos, ao passo que também torço para que ainda estejamos no início de um período muito mais proveitoso de nossas pesquisas em turbulência.

Enfim, deixo um forte abraço a todos os meus amigos, que também contribuíram e torceram para a conclusão deste trabalho. O grau de mestre é mais um marco em minha vida, e agradeço a todos que colaboraram com sua realização. O objetivo da minha vida sempre será construir um mundo melhor, onde as pessoas possam viver em paz, livres, em igualdade plena independente de qualquer fator.

Agradeço ainda à Fundação de Empreendimentos Científicos e Tecnológicos - FINATEC, pelo apoio à execução dos trabalhos e equipamentos cedidos ao grupo VORTEX. Por fim, agradeço e desejo muito mais sucesso ao projeto GNU e à Fundação do Software Livre - FSF (do inglês *Free Software Foundation*), dos quais faço parte e colaboro, por serem hoje os maiores defensores de que o progresso tecnológico e a favor da sociedade é obtido por meio da difusão livre (como em liberdade) do conhecimento, e não com seu uso ilimitado e indiscriminado por parte daqueles que o detêm.

RESUMO

UM MODELO $\kappa - \omega$ PARA ESCOAMENTOS TURBULENTOS PARIETAIS DILATÁVEIS

Autor: Daniel Vieira Soares

Orientador: José Luiz Alves da Fontoura Rodrigues

Programa de Pós-graduação em Ciências Mecânicas - POSMEC

Brasília, novembro de 2006

Este trabalho tem como objetivo estender o modelo de turbulência $\kappa - \omega$ proposto por Bredberg (2002), originalmente desenvolvido para escoamentos isotérmicos nos quais ocorram gradientes adversos de pressão, para simular os efeitos da variação de massa específica do fluido exclusivamente devida à presença de gradientes de temperatura - situações de alto interesse industrial - implementando-o em uma nova versão do código acadêmico TURBO-2D, de resolução temporal semi-implícita sequencial, e discretização espacial via elementos finitos P1-IsoP2.

O desenvolvimento da extensão ao modelo $\kappa - \omega$ é baseado na metodologia empregada por Munhoz da Cruz (1989) na resolução numérica de escoamentos dilatáveis, incluindo termos nas equações do modelo de turbulência referentes aos efeitos de variações térmicas do fluido, assunto pouco explorado por modelos de turbulência de baixo-Reynolds.

Quatro casos teste foram escolhidos para a validação do modelo, devido aos bons resultados da literatura disponíveis: dois casos teste isotérmicos com separação da camada limite, o canal divergente de Driver e Seegmiller (1985) e a colina abrupta de Loureiro et. al (2005), e dois casos de camada limite térmica, um com convecção forçada, o caso do escoamento sobre placa plana fortemente aquecida de Ng (1981), e outro com convecção natural, de Tsuji e Nagano (1988), possibilitando uma análise mais profunda sobre a influência da dilatação térmica do fluido sobre as características turbulentas do escoamento.

Os resultados obtidos foram comparados aos de simulações com o modelo $\kappa - \varepsilon$ implementado no código TURBO-2D, extensivamente validado por Soares e Fontoura Rodrigues, (2004) e (2005), utilizando as leis de parede logarítmica clássica (velocidade) e de temperatura de Cheng e Ng (1982), de Mellor (1966), de Nakayama e Koyama (1984) e de Cruz e Silva Freire (1998) e (2002), para velocidade e temperatura, com dados experimentais e de outras simulações numéricas disponíveis na literatura.

ABSTRACT

A $\kappa - \omega$ TURBULENCE MODEL FOR NEAR-WALL THERMAL FLOWS

Author: Daniel Vieira Soares

Supervisor: José Luiz Alves da Fontoura Rodrigues

Programa de Pós-graduação em Ciências Mecânicas - POSMEC

Brasília, November of 2006

The main goal of this work is to extend the $\kappa - \omega$ turbulence model proposed by Bredberg (2002), originally developed in order to simulate turbulent isothermal flows in which adverse pressure gradients occur, to simulate the effects of density variations exclusively due to the presence of thermal gradients - cases vastly applied in industry - implementing in a new version of the academic code TURBO-2D, with sequential semi-implicit time resolution and spatial discretization via P1/IsoP2 finite elements.

The development of the $\kappa - \omega$ model extension is based in the work of Munhoz da Cruz (1989), to numerically solve thermal flows including extra terms in the turbulence quantities equations, derived from the influence of density variations on the fluid motion. Such study is rarely treated by low-Reynolds RANS turbulence models.

Four test cases were selected to validate the model implementation, due to the good results available in the literature: two isothermal cases with boundary-layer separation, the divergent channel of Driver and Seegmiller (1985) and the steep hill of Loureiro et. al (2005), and two thermal boundary-layer cases, the forced convection over a strongly heated wall of Ng (1981), and the natural convection boundary layer of Tsuji and Nagano (1988), which makes possible to perform a deeper analysis of the density variation influence over the turbulent flow characteristics.

The simulations results were compared to other simulations with the $\kappa - \varepsilon$ turbulence model implemented in the code TURBO-2D, extensively tested and validated by Soares and Fontoura Rodrigues (2004) and (2005), using the classic log-law for velocity, the temperature log-law of Cheng and Ng (1982), the velocity laws of the wall of Mellor (1966) and of Nakayama and Koyama (1984), and the velocity and temperature laws of the wall of Cruz and Silva Freire (1998 and 2002, respectively), and compared to the experimental data and results from other simulations, available in the literature.

SUMÁRIO

1	Introdução	1
2	Formulação analítica	7
2.1	Equações governantes	8
2.2	Forma não-dimensional das equações governantes	11
2.3	Tratamento estatístico da turbulência	13
2.4	Os modelos de turbulência	16
2.4.1	A equação de energia cinética de turbulência κ	19
2.4.2	O modelo $\kappa - \varepsilon$ de Brun (1988) e Munhoz da Cruz (1989)	23
2.4.3	Progressos advindos de DNS sobre a camada limite turbulenta	25
2.4.4	Desenvolvimento do modelo $\kappa - \omega$ proposto	33
2.5	Condições de contorno - modelo $\kappa - \varepsilon$	37
2.5.1	Lei logarítmica clássica	38
2.5.2	Lei de Mellor (1966)	40
2.5.3	Lei de Nakayama e Koyama (1984)	41
2.5.4	Lei de Cruz e Silva Freire (1998)	43
2.5.5	Condições de contorno para κ e ε	44
2.5.6	Lei logarítmica para temperatura de Cheng e Ng (1982)	45
2.5.7	Lei de Cruz e Silva Freire para temperatura (1998)	46
2.6	Condições de contorno - modelo $\kappa - \omega$	47
3	Tratamento numérico	50
3.1	Discretização espacial - Método dos Elementos Finitos	50
3.2	Discretização temporal e o algoritmo de resolução	55
4	Resultados	58
4.1	Canal divergente de Driver e Seegmiller (1985)	58
4.2	Colina abrupta de Loureiro et al. (2005)	80
4.3	Placa plana fortemente aquecida de Ng (1981)	91
4.4	Convecção natural sobre placa vertical de Tsuji e Nagano (1988)	103

5	Conclusão	110
	Referências Bibliográficas	111
	Apêndices	117
A	Teorema do transporte de Reynolds	118
B	Desenvolvimento da equação da energia	120
C	Forma não-dimensional das variáveis	122
D	Discussão sobre a equação constitutiva para o meio fluido	124
E	Obtenção da equação de transporte de ω	126
	E.1 Forma simplificada	127
	E.2 Forma completa	128
F	Princípios de cálculo variacional	131
G	Análises de escalas turbulentas	136

LISTA DE TABELAS

2.1	Dependência das variáveis secundárias com y	30
2.2	Constante de integração de Mellor (1966)	41
4.1	Canal divergente - etapas da campanha de implementação	59
4.2	Canal divergente - pontos de recolamento (x_r) da camada limite em termos da altura do degrau (h).	78
4.3	Canal divergente - Conclusões do estudo	79
4.4	Colina abrupta - resultados da zona de recirculação	90
4.5	Placa aquecida - Conclusões do estudo	102
C.1	Forma não dimensional das variáveis	122

LISTA DE FIGURAS

2.1	Estrutura da camada limite turbulenta	26
2.2	C_μ obtida por simulação numérica direta	28
2.3	Perfil de κ obtido por DNS	29
2.4	Perfil de ε obtido por DNS	30
2.5	Variações das quantidades secundárias com y - região completa	31
2.6	Variações das quantidades secundárias com y - região parietal	32
2.7	Esquema de simulação a alto-Reynolds	38
2.8	Esquema de simulação a baixo-Reynolds	47
3.1	Discretização espacial por elementos finitos	50
3.2	Elementos finitos triangulares e funções de forma	52
3.3	Elementos finitos P1/IsoP2	53
4.1	Canal divergente - Esquema da seção de teste	59
4.2	Canal divergente - Malha de desenvolvimento do escoamento para $\kappa - \varepsilon$	61
4.3	Canal divergente - Malha de desenvolvimento do escoamento para $\kappa - \omega$	61
4.4	Canal divergente - Domínio de cálculo da seção de teste	62
4.5	Canal divergente - Malha de cálculo do domínio do degrau ($\kappa - \varepsilon$)	63
4.6	Canal divergente - Malha de cálculo do domínio do degrau ($\kappa - \omega$)	63
4.7	Canal divergente - Zonas de recirculação obtidas com o modelo ($\kappa - \omega$)	64
4.8	Canal divergente - Zonas de recirculação obtidas com o modelo ($\kappa - \varepsilon$)	65
4.9	Canal divergente - Detalhe da zona de recirculação secundária	67
4.10	Canal divergente - Perfis de velocidade em $x = -4h$ e $x = -2h$	68
4.11	Canal divergente - Perfis de velocidade em $x = -1h$ (a) e $x = 0h$ (b)	68
4.12	Canal divergente - Perfis de velocidade em $x = 1h$ e $x = 2h$	69
4.13	Canal divergente - Perfis de velocidade em $x = 3h$ e $x = 4h$	69
4.14	Canal divergente - Perfis de velocidade em $x = 5h$ e $x = 6h$	70
4.15	Canal divergente - Perfis de velocidade em $x = 7h$ e $x = 8h$	71
4.16	Canal divergente - Perfis de velocidade em $x = 10h$ e $x = 16h$	71
4.17	Canal divergente - Perfis de velocidade em $x = 20h$ e $x = 32h$	72
4.18	Canal divergente - Perfis de κ em $x = 5h$ e $x = 6h$	73

4.19	Canal divergente - Perfis de κ em $x = 8h$ e $x = 10h$	73
4.20	Canal divergente - Perfis de κ em $x = 16h$ e $x = 32h$	74
4.21	Canal divergente - Distribuição de C_p ao longo das paredes	75
4.22	Canal divergente - Campos qualitativos do modelo $\kappa - \omega - P, u$ e κ	76
4.23	Canal divergente - Campos qualitativos do modelo $\kappa - \omega - \mu_T$ e rotacional	77
4.24	Colina abrupta - esquema do caso	80
4.25	Colina abrupta - domínio de cálculo	81
4.26	Colina abrupta - malhas de cálculo	82
4.27	Colina abrupta - Perfis de velocidade em $x = 600mm$ e $x = 750mm$	83
4.28	Colina abrupta - Perfis de velocidade em $x = 900mm$ e $x = 930mm$	83
4.29	Colina abrupta - Perfis de velocidade em $x = 975mm$ e $x = 1050mm$	84
4.30	Colina abrupta - Perfis de velocidade em $x = 1125mm$ e $x = 1200mm$	84
4.31	Colina abrupta - Perfis de velocidade em $x = 1300mm$ e $x = 1500mm$	85
4.32	Colina abrupta - Perfis de κ em $x = 600mm$ e $x = 750mm$	86
4.33	Colina abrupta - Perfis de κ em $x = 900mm$ e $x = 930mm$	87
4.34	Colina abrupta - Perfis de κ em $x = 975mm$ e $x = 1050mm$	87
4.35	Colina abrupta - Perfis de κ em $x = 1125mm$ e $x = 1200mm$	88
4.36	Colina abrupta - Perfis de κ em $x = 1300mm$ e $x = 1500mm$	88
4.37	Colina abrupta - comparação das zonas de recirculação obtidas	89
4.38	Colina abrupta - campos qualitativos obtidos com o modelo $\kappa - \omega$	90
4.39	Placa aquecida - Montagem experimental de Ng (1981)	92
4.40	Placa aquecida - Malhas de cálculo	92
4.41	Placa aquecida - Teste do termo de derivada cruzada	95
4.42	Placa aquecida - Campos qualitativos de ρ e de κ	96
4.43	Placa aquecida - Recirculação devida à transição de parede rugosa-lisa	97
4.44	Placa aquecida - Perfis de velocidade	97
4.45	Placa aquecida - Perfis de energia cinética de turbulência	98
4.46	Placa aquecida - Perfis de massa específica	99
4.47	Placa aquecida - Camada limite de velocidade e de temperatura	100
4.48	Placa aquecida - Número de Stanton	101
4.49	Convecção natural - Diagrama do caso teste	104
4.50	Convecção natural - Malhas de cálculo utilizadas	105
4.51	Convecção natural - Campos qualitativos de velocidade, temperatura e κ	105
4.52	Convecção natural - Perfis de velocidade e temperatura em $y = 1,918m$	106
4.53	Convecção natural - Perfis de velocidade e temperatura em $y = 2,535m$	107
4.54	Convecção natural - Perfis de velocidade e temperatura em $y = 3,244m$	107
4.55	Convecção natural - Nusselt x Rayleigh	108

F.1 Aproximação de uma função $y(x)$ por $\bar{y}(x)$ e $\eta(x)$ 132

LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIações

t	Variável temporal (tempo)
t_0	Escala de tempo de referência
x_i	Variável espacial (comprimento) - componente na direção i
x	Direção tangencial ao escoamento livre
y	Direção perpendicular ao escoamento livre
L_0	Escala de comprimento de referência
ρ	Massa específica do fluido
$\bar{\rho}$	Valor médio da massa específica pela decomposição de Reynolds
ρ'	Flutuação do valor da massa específica
ρ_0	Massa específica de referência
u_i	Velocidade do fluido
\tilde{u}_i	Valor médio da velocidade pela decomposição de Favre
u_i''	Flutuação do valor da velocidade
U_0	Velocidade de referência
u_f	Velocidade de fricção na parede
T	Temperatura do fluido
\tilde{T}	Valor médio da temperatura pela decomposição de Favre
θ	Flutuação do valor da temperatura
$\overline{\theta^2}$	Variância do valor da flutuação da temperatura
T_0	Temperatura de referência
T_∞	Temperatura do escoamento não perturbado
T_f	Temperatura de fricção na parede
p	Pressão estática do fluido
\bar{p}	Pressão estática média do fluido pela decomposição de Reynolds
p_0	Pressão estática de referência
s_{ij}	Tensor taxa de deformação
τ_{ij}	Tensor de tensões de cisalhamento
τ_p	Tensão de cisalhamento na parede
q_i''	Vetor de fluxo de calor
q'''	Taxa de geração interna de calor

κ	Energia cinética de turbulência
l	Comprimento de mistura de Prandtl
ε	Taxa de dissipação da energia cinética de turbulência
ω	Dissipação específica da energia cinética de turbulência
ς	Tempo característico de emissão turbulenta
α	Coefficiente de difusividade térmica
ν	Viscosidade cinemática
ν_t	Viscosidade cinemática turbulenta
ν_0	Viscosidade cinemática de referência
μ	Viscosidade dinâmica
μ_t	Viscosidade dinâmica turbulenta
μ_0	Viscosidade dinâmica de referência
k_μ	Segundo coeficiente de viscosidade
k	Coefficiente de condutividade térmica
C_p	Calor específico a pressão constante
β	Coefficiente de expansão volumétrica
g_i	Vetor do campo gravitacional
δ_{ij}	Tensor identidade (operador Delta de Kronecker)
ϵ_{ijk}	Operador permutação de Levi-Cevita
$\frac{D}{Dt}$	Operador derivada total
R	Constante do gás ideal
K	Constante de Von Kármán
Re	Número de Reynolds
Re_t	Número de Reynolds turbulento
Pr	Número de Prandtl
Pr_t	Número de Prandtl turbulento
St	Número de Stanton
Fr	Número de Froude
M_0	Número de Mach
Gr	Número de Grashof
Ra	Número de Rayleigh
σ_ϕ	Número de Schmidt turbulento para a quantidade turbulenta ϕ
y^*	Número de Reynolds local na camada limite turbulenta
\hat{t}	Vetor unitário na direção tangencial à parede
\hat{n}	Vetor unitário na direção normal à parede

1 Introdução

As conferências AFORS-HTTM, nos anos de 1980 e 1981 em Stanford, sobre escoamentos turbulentos complexos, marcaram o início dos estudos sobre simulação numérica da turbulência parietal. Nesta ocasião, o caso teste do escoamento sobre degrau foi adotado como padrão para a análise de desempenho e de calibração dos algoritmos de simulação numérica da turbulência.

Os principais problemas da modelagem da turbulência parietal são ligados à representação do escoamento que se estabelece na região interna da camada limite, onde a intensidade dos gradientes de velocidade associados aos efeitos da viscosidade molecular e da difusividade turbulenta de transporte de quantidade de movimento criam condições difíceis de serem tratadas, sobretudo quando são acrescentadas a estas circunstâncias a complexidade da maioria dos escoamentos de interesse industrial.

Destacam-se atualmente três métodos principais de resolução numérica de escoamentos turbulentos: a simulação numérica direta - DNS (do inglês *Direct Numerical Simulation*), a simulação de grandes escalas - LES (do inglês *Large-Eddy Simulation*) e a simulação via equações médias de Reynolds - RANS (do inglês *Reynolds-Averaged Numerical Simulation*), cada um com suas vantagens e desvantagens bem definidas.

Uma questão importante, talvez não tão apropriada para este trabalho, é a seguinte: seria a utilização de um modelo de turbulência necessária para estudar a turbulência? Em outras palavras, com o recente progresso das simulações numéricas diretas, que não fazem uso de modelo de turbulência algum, ainda há necessidade de modelar matematicamente o fenômeno da turbulência? Esta questão pode ser facilmente respondida através da análise de cada método de resolução citado anteriormente.

Os métodos de resolução de escoamentos turbulentos podem ser classificados de acordo com dois parâmetros: coerência física e demanda computacional. No topo da coerência física estão as simulações numéricas diretas, pois não é utilizada nenhuma hipótese simplificativa além das inerentes à discretização espacial e temporal, sendo consideradas em algumas circunstâncias como tão precisas quanto dados experimentais. Por outro

lado, em termos de demanda computacional, é a que mais exige processamento. De acordo com o trabalho de Leschziner (1998), a demanda computacional das DNS cresce brutalmente com o número de Reynolds do escoamento estudado. A escala das menores estruturas turbulentas do escoamento podem ser expressas pela seguinte relação, obtida por análise de escala:

$$\lambda_0 \sim L_0 Re_{L_0}^{(-3/4)}. \quad (1.1)$$

Sendo assim, o número de menores estruturas presentes em um comprimento típico L_0 de um escoamento estudado escala com L_0/λ . Como a turbulência é um fenômeno tridimensional, o número de menores estruturas presentes em um volume de controle escala com $(L_0/\lambda)^3$, e portanto, a discretização espacial de um problema típico deve conter um número de pontos distribuídos no espaço N tal que:

$$N \sim \left(\frac{L_0}{\lambda}\right)^3 \sim Re_{L_0}^{\frac{9}{4}}. \quad (1.2)$$

É comum que casos típicos de interesse em engenharia possuam número de Reynolds de aproximadamente $Re_{L_0} = 10^5$, o que resultaria em uma discretização espacial da ordem de $1,8 \times 10^{11}$ pontos no espaço para uma simulação numérica direta. De acordo com Leschziner (1998), esse tipo de caso demandaria aproximadamente 6,5 anos (!) para ser simulado numericamente (nos atuais computadores industriais típicos) e prover resultados utilizáveis. É muito provável que as simulações numéricas diretas não serão de uso prático em engenharia a médio prazo, pois ainda estão restritas a escoamentos com números de Reynolds relativamente baixos e em geometrias muito simples.

As simulações de grandes escalas fazem uso apenas de modelos de sub-malha (*subgrid models*), isto é, em comparação com as DNS, utilizam malhas de cálculo menos refinadas, em troca da utilização de um modelo para as escalas de turbulência menores do que a resolução da malha de cálculo. O princípio fundamental por trás das LES é utilizar uma discretização espacial tal que seja necessário modelar escalas iguais ou menores do que estruturas turbulentas de alta frequência (poucas ordens de grandeza além da escala de Kolmogorov), pois nesse nível a turbulência é isotrópica, e um modelo relativamente simples pode substituir a resolução completa (DNS) para escalas iguais ou menores. Para escoamentos de corpos imersos ou semi-confinados, como perfis de

asas por exemplo, essa aproximação funciona muito bem, pois nesse tipo de escoamento a turbulência é gerada nas grandes escalas, e posteriormente cascadeadas para as pequenas escalas. Em contrapartida, em escoamentos confinados, como em dutos por exemplo, quase toda a turbulência é gerada nas pequenas estruturas formadas na região da parede, tornando-se necessário simular escalas tão pequenas quanto a de Kolmogorov, demandando quase o mesmo poder computacional de uma DNS.

Com a utilização de um filtro estatístico nas equações, a utilização do método RANS provê uma demanda computacional muitas vezes inferior a qualquer LES ou DNS, porém exclui toda a diversidade de escalas turbulentas envolvidas na resolução temporal, limitando qualquer cálculo a um ponto do espectro de energia (isto é, somente os campos médios das variáveis são calculados, modelando matematicamente a parte dita “aleatória”). Seria natural questionar a validade de qualquer cálculo com equações médias de Reynolds, mas o método é capaz de gerar resultados surpreendentemente consistentes e de grande valia para a maioria dos escoamentos de interesse em projetos de engenharia, apesar de se utilizar de princípios dotados de pouca coerência física. Por sua favorável relação custo-benefício, a metodologia RANS está presente em uma vasta gama de aplicações industriais.

O resultado nas equações fundamentais do movimento fluido da substituição de variáveis instantâneas por funções estatísticas é o surgimento de um termo adicional, chamado de tensor de Reynolds, sendo a forma como ele é modelado a diferença existente entre os diversos métodos RANS. Existem modelos que incorporam equações de transporte para o tensor de Reynolds, chamados de RSM (do inglês *Reynolds-stress models*), e outros que modelam o tensor de Reynolds como um termo viscoso adicional, dependente de uma hipotética viscosidade turbulenta. Apesar do nome, este parâmetro depende não de propriedades termodinâmicas do fluido, mas de características do escoamento e da geometria estudada, carecendo completamente de uma definição física consistente.

Os modelos RSM mais sofisticados, e alguns modelos de viscosidade turbulenta a três ou mais equações não-lineares, são capazes de prever anisotropia do escoamento, parâmetro importante em escoamentos rotacionais por exemplo, porém são instáveis numericamente, além de possuírem alto grau de condicionamento com a geometria estudada, possuindo portanto baixo grau de generalidade, tendo por estas razões limitada aplicação industrial. Os modelos mais utilizados são os modelos RANS de viscosidade turbulenta a duas equações, dentre eles o consagrado modelo $\kappa - \varepsilon$ proposto por Harlow e Nakayama (1968) e implementado por Jones e Launder (1972).

Os modelos de viscosidade turbulenta carecem de detalhamento necessário para a resolução completa e coerente da camada limite turbulenta, mais ainda quando se trata da região interna da camada limite. De maneira a corrigir esta deficiência, duas estratégias podem ser adotadas: a resolução a alto-Reynolds, utilizando expressões analíticas para a camada limite chamadas de leis de parede, ou a resolução a baixo-Reynolds, que resolve a camada limite integrando diretamente as equações do movimento, porém utilizando funções de amortecimento específicas no cálculo da viscosidade turbulenta.

A utilização de leis de parede, deduzidas diretamente das equações governantes da camada limite, associadas ou não a análise de escala, reduz drasticamente a necessidade de malhas muito refinadas na região próxima à parede. Porém, o maior inconveniente de sua utilização são as instabilidades numéricas geradas. Sua utilização gera o aparecimento de um comportamento não-linear suplementar nas equações governantes, devido ao tratamento explícito dado ao cálculo das condições de contorno, que se baseia em utilizar os campos obtidos em uma iteração anterior para calcular as condições de contorno da iteração seguinte, causando assim a característica instabilidade numérica proveniente de cálculos explícitos.

Nas aplicações que adotam procedimentos de integração temporal do sistema de equações governantes, partindo de condições iniciais arbitrárias e convergindo para uma situação permanente do escoamento, a instabilidade associada ao emprego das leis de parede torna-se ainda mais evidente, exigindo a adoção de algoritmos de estabilização numérica especialmente concebidos para esta função. Porém, o custo associado com a utilização destes algoritmos especiais juntamente com a aplicação de leis de parede é muito menor do que aplicar um modelo de baixo Reynolds ou ainda uma simulação numérica direta, tornando as leis de parede uma opção viável para aplicações industriais, apresentando excelente relação entre custo computacional e a qualidade dos resultados obtidos.

Os modelos de baixo-Reynolds carecem de maior grau de generalidade e estabilidade numérica, pois as funções de amortecimento e suas constantes são calibradas para casos específicos, com base em dados experimentais, deixando-os pouco aplicáveis no ambiente industrial. Porém, com o recente avanço da computação, mais notadamente nos últimos dez anos, a aplicação industrial de modelos mais sofisticados tornou-se plausível, permitindo, por exemplo, a utilização de LES em diversas aplicações aeroacústicas para a indústria aeroespacial. Principalmente nos últimos quatro anos, tornou-se possível desenvolver resoluções por DNS para escoamentos de números de Reynolds mais significativos e em geometrias relativamente mais complexas, permitindo que modelos de baixo-Reynolds pudessem ser aprimorados a um nível até então

impossível de ser alcançado somente com dados experimentais, dando início à busca por modelos de baixo-Reynolds mais robustos do que os de alto-Reynolds, e sua aplicação em maior escala em aplicações industriais.

Em uma grande variedade de aplicações de engenharia, os escoamentos turbulentos são utilizados para promover o transporte de energia térmica. Nestas circunstâncias, o estudo da existência simultânea da camada limite turbulenta de velocidade e de temperatura é essencial para a modelagem numérica destes escoamentos. As conseqüências da introdução de uma variável dependente suplementar, a temperatura, na simulação numérica da turbulência parietal são: a introdução de uma nova equação nas equações governantes, a equação média da energia; a seleção de um modelo de turbulência para modelar o vetor de correlação entre as flutuações de velocidade e de temperatura; calcular corretamente as variações das propriedades termodinâmicas do fluido devido às variações de temperatura, especificamente a massa específica e a viscosidade molecular; incluir nos cálculos um modelo para calcular a região interna da camada limite de temperatura, ou seja, leis de parede para a temperatura, a mesma metodologia aplicada ao campo de velocidade, nos métodos de simulação baseados em modelos de alto-Reynolds.

Este trabalho tem como objetivo propor uma alternativa aos modelos de alto-Reynolds para aplicações industriais, com um modelo de turbulência $\kappa - \omega$ de baixo-Reynolds, que seja capaz de superar algumas restrições e dificuldades inerentes deste tipo de metodologia de simulação, a saber: a alta dependência de condições iniciais e de contorno bem definidas, difíceis de serem obtidas experimentalmente; a alta restrição das constantes e das funções de amortecimento do modelo, que normalmente são calibradas para casos específicos; a alta demanda computacional, devido à necessidade de refinamento excessivo na região interna da camada limite turbulenta e à ausência de algoritmos de estabilização que permitam a utilização de passos de tempo mais elevados, e por fim, no caso de modelos $\kappa - \omega$; a alta influência de valores de dissipação específica (ω) para o escoamento livre sobre os resultados finais, pois mesmo que se utilizem valores razoavelmente estimados fisicamente, é possível obter resultados completamente diversos e fisicamente inconsistentes.

A aplicação do modelo estendido proposto visa escoamentos turbulentos parietais com variação de massa específica exclusivamente por variação na temperatura do fluido e escoamentos com descolamento de camada limite. Seguindo a mesma metodologia empregada no código TURBO-2D por Brun (1988) e por Munhoz da Cruz (1989) e com base no desenvolvimento de Bredberg (2002), o modelo $\kappa - \omega$ estendido foi

implementado em um algoritmo semi-implícito seqüencial de elementos finitos tipo P1/IsoP2, que utiliza o esquema de balanço de dissipação numérica proposto por Buffat (1981) e o método de mínimos resíduos de Fontoura Rodrigues (1991) destinado a assegurar a convergência numérica do algoritmo.

Quatro casos teste foram escolhidos para a validação do modelo, devido aos bons resultados da literatura disponíveis: dois casos teste isotérmicos com separação da camada limite, o canal divergente de Driver e Seegmiller (1985) e a colina abrupta de Loureiro et. al (2005 e 2006), e dois casos de camada limite térmica, um com convecção forçada, o caso do escoamento sobre placa plana fortemente aquecida de Ng (1981), e outro com convecção natural, de Tsuji e Nagano (1988), que possibilita uma análise mais profunda sobre a influência da dilatação térmica sobre as características turbulentas do escoamento.

Os resultados das simulações destes casos foram comparados com os resultados de simulações com o modelo $\kappa - \varepsilon$ implementado no código TURBO-2D utilizando as leis de parede logarítmica clássica de velocidade (e temperatura nos casos térmicos), de Mellor (1966), de Nakayama e Koyama (1984) e de Cruz e Silva Freire (1998 e 2002, para velocidade e temperatura), obtidos por Soares e Fontoura Rodrigues (2004), e no caso do canal divergente, com os resultados do código WIND¹ (NPARC, NASA), além dos dados experimentais disponíveis na literatura.

¹NPARC Alliance CFD - <http://www.grc.nasa.gov/WWW/wind/valid/>

2 Formulação analítica

Este capítulo apresenta, inicialmente, as equações da dinâmica dos fluidos, deduzidas a partir dos princípios de conservação da massa, da quantidade de movimento e da energia. Posteriormente são apresentadas a equação de estado e as equações constitutivas do meio fluido, necessárias para o fechamento do problema. O sistema final de equações é apresentado sob suas formas dimensional e não-dimensional. A dedução das equações é conduzida de modo a considerar o estudo de um fluido cuja massa específica seja função apenas da temperatura¹.

Na seqüência, a forma não-dimensional do sistema de equações é reformulado de forma a possibilitar o tratamento estatístico da turbulência, tendo como base as decomposições de Reynolds (1895) e de Favre (1965).

O tratamento estatístico produz um sistema aberto de equações médias. A solução para o problema de fechamento das equações médias é obtido por meio de modelos de turbulência. Neste trabalho, será apresentado o modelo $\kappa - \varepsilon$ de Jones e Launder (1972), e a partir dele, a dedução do modelo $\kappa - \omega$ proposto, além de ser apresentada uma breve revisão dos vários modelos de turbulência clássicos a duas equações.

Para a finalização da formulação analítica, são apresentadas as leis de parede que complementam o modelo $\kappa - \varepsilon$ de turbulência, responsáveis pela representação do escoamento que se estabelece na região interna da camada limite turbulenta em simulações de alto-Reynolds. Por conveniência operacional, todas as equações estão formuladas por meio de notação indicial, tendo como referência o sistema de eixos cartesianos ortogonais.

¹Nota do autor: Durante o desenvolvimento analítico apresentado, o leitor poderá se perguntar de onde veio o termo “escoamentos dilatáveis” presente no título do trabalho, uma vez que a expressão mais utilizada na literatura em referência a escoamentos nos quais a massa específica é função exclusiva da temperatura é “escoamentos estratificados”. Mais a diante serão apresentados alguns argumentos sobre escoamentos estratificados, mas nem todos são utilizados (e nem sequer válidos em alguns casos de interesse), e portanto, a formulação resultante não é restrita à estratificação. Uma vez que, nos casos térmicos estudados, o fluido é sempre aquecido por um contorno sólido, sofrendo dilatação (ou expansão) térmica, decidiu-se utilizar a expressão “escoamentos dilatáveis”.

2.1 Equações governantes

Para o presente trabalho, as equações de conservação das propriedades do escoamento foram deduzidas por meio da aplicação do teorema do transporte de Reynolds para a massa, para a força resultante e para a energia de uma porção fluida infinitesimal. O fluido foi modelado como sendo gás ideal, sujeito a variações de massa específica e viscosidade devidas, exclusivamente, a variações de temperatura.

A equação para a conservação da massa, também chamada de equação da continuidade, em sua forma diferencial é dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 . \quad (2.1)$$

As equações de balanço de quantidade de movimento, para um meio contínuo e apolar (ou não magnético), resultam na equação de Cauchy², dada por:

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i + \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} . \quad (2.2)$$

Nesta equação, o termo f_i representa forças de campo e o termo Π_{ij} , responsável pelas forças de contato, representa o tensor de tensões superficiais às quais o fluido está submetido. Para um fluido homogêneo de estrutura isotrópica, mesmo na presença de escoamento, e invariante à rotação ou inversão do sistema de coordenadas (fluido newtoniano), o tensor Π_{ij} é dado por:

$$\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda s_{ll}\delta_{ij} + 2\mu s_{ij} , \quad (2.3)$$

em que o tensor taxa de deformação s_{ij} e o coeficiente λ são dados por:

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{e} \quad \lambda = -\frac{2}{3}\mu . \quad (2.4)$$

²O balanço do momento angular da quantidade de movimento para um fluido apolar estabelece a simetria do tensor de tensões ($\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}^T$).

Este resultado para λ é obtido considerando o fluido como stokesiano, ou de baixa dissipação por efeitos expansionais (maiores detalhes no apêndice “D”). Substituindo a equação constitutiva do meio fluido (2.3) na equação de Cauchy (2.2), obtém-se as equações de Navier-Stokes, considerando que a única força de campo é devida ao campo gravitacional \vec{g} :

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right] \right\} + \rho g_i . \quad (2.5)$$

A dedução da equação da energia pode ser conduzida de duas formas diferentes, uma apresentada a seguir (Cunha, F. R. 2003) e outra apresentada no apêndice “B” deste trabalho (Bejan, A. 1994). A equação da energia em sua forma mais geral é dada por:

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\frac{\partial q_i''}{\partial x_i} + q''' + \Pi_{ij} s_{ij} . \quad (2.6)$$

Nesta equação, o primeiro termo representa os efeitos convectivos, o segundo os efeitos difusivos, o terceiro termo representa a taxa de geração interna de calor e o último representa a taxa de produção de energia interna por ação viscosa. Para um fluido newtoniano nas condições em que a viscosidade expansional k_μ é nula (vide apêndice “D”):

$$\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu \left(s_{ij} - \frac{1}{3} s_{ll} \delta_{ij} \right) , \quad (2.7)$$

e portanto, o produto entre Π_{ij} e s_{ij} resulta em:

$$\Pi_{ij} s_{ij} = -p s_{ll} + 2\mu \left(s_{ij} s_{ij} - \frac{1}{3} (s_{ll})^2 \right) , \quad (2.8)$$

ou

$$\Pi_{ij} s_{ij} = -p \nabla \cdot \vec{\mathbf{u}} + 2\mu \left(\vec{\mathbf{s}} : \vec{\mathbf{s}} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \vec{\mathbf{u}})^2 \right) = -p \nabla \cdot \vec{\mathbf{u}} + \Phi . \quad (2.9)$$

O termo Φ representa a taxa de dissipação de energia mecânica por unidade de volume do fluido, por ação da viscosidade de cisalhamento, e o termo $-p \nabla \cdot \vec{\mathbf{u}}$ representa o trabalho reversível realizado pelo escoamento.

Utilizando a lei de Fourier para material isotrópico e as relações de Maxwell da termodinâmica (ver no apêndice “B”), a equação da energia pode ser escrita em função da temperatura, para um fluido newtoniano compressível, modelado como gás ideal, da seguinte forma:

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + q''' + \beta T \frac{Dp}{Dt} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} . \quad (2.10)$$

Nesta equação, β representa o coeficiente de expansão térmica e τ representa o tensor de tensões de cisalhamento, dados por:

$$\beta = \frac{1}{T} \quad \text{para o gás ideal,} \quad (2.11)$$

$$\tau_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right] . \quad (2.12)$$

O efeito de variação de temperatura sobre o escoamento, de um fluido modelado como gás perfeito, é implementado por meio das variações da viscosidade dinâmica e da massa específica com a temperatura, definidas respectivamente pelas relações:

$$\mu = \mu(T) = aT^n \quad , \text{ com } a = 3,68 \times 10^{-7} \text{ e } n = 0,685 \text{ para o ar,} \quad (2.13)$$

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad , \text{ com } R = 287 \frac{J}{kg K} \text{ para o ar.} \quad (2.14)$$

Este modelo para a viscosidade é o modelo utilizado por Ng (1981) em seu trabalho sobre estudos de escoamentos de camada limite sob aquecimento.

O sistema fechado de equações que representa o escoamento de um fluido newtoniano, compressível e stokesiano, não afetado pela presença de fontes de geração interna de calor, é composto pelas equações:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 , \quad (2.15)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right] \right\} + \rho g_i, \quad (2.16)$$

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} - \beta T \frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \left\{ \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right] \right\} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (2.17)$$

$$\rho = \frac{p}{RT}, \quad (2.18)$$

respectivamente, a equação da continuidade, as equações de Navier-Stokes, a equação da energia e a equação de estado para gás perfeito.

2.2 Forma não-dimensional das equações governantes

O processo de passar o sistema de equações governantes para a forma não-dimensional, definido pelas equações (2.15), (2.16), (2.17) e (2.18), é convencional, como proposto no apêndice “C”. Das escalas características apresentadas no mesmo apêndice, surgem os seguintes parâmetros fundamentais:

$$Re = \frac{\rho_0 U_0 L_0}{\mu_0}, \quad Pr = \frac{C_p \mu_0}{k} = \frac{\nu_0}{\alpha}, \quad Fr = \frac{U_0^2}{g_0 L_0} \quad \text{e} \quad M_0 = \frac{U_0}{c_0}, \quad (2.19)$$

sendo Re , Pr , Fr e M_0 , respectivamente, os números de Reynolds, Prandtl, Froude e Mach, definidos em função dos valores de referência adotados, e ainda, considerando c_0 como a velocidade de propagação das ondas sonoras no meio.

Uma atenção especial é dada à equação da energia. Em sua forma não-dimensional, a equação da energia é escrita como:

$$\rho^+ \frac{DT^+}{Dt} = \frac{1}{Re Pr} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial T^+}{\partial x_i} \right) + (\gamma - 1) M_0^2 \frac{Dp^+}{Dt} + M_0^2 \frac{1}{Re} \Phi^+, \quad (2.20)$$

com γ sendo a relação entre os coeficientes de calor específico³, a pressão e a volume constante, e M_0 é o número de Mach, definido como função dos valores de referência da velocidade e da temperatura:

³Para o gás perfeito, é válido que a diferença entre os coeficientes de calor específicos a pressão e a volume constante é igual à constante universal do gás perfeito R , isto é: $C_p - C_v = R$.

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}, \quad (2.21)$$

$$M_0 = \frac{U_0}{\sqrt{\gamma RT_0}}. \quad (2.22)$$

Considerando que os escoamentos estudados neste trabalho são a baixos números de Mach ($M_0 \leq 0,3$), os termos de segunda ordem para o número de Mach podem ser negligenciados, resultando na seguinte forma para a equação da energia:

$$\rho^+ \frac{DT^+}{Dt} = \frac{1}{Re Pr} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial T^+}{\partial x_i} \right). \quad (2.23)$$

Há também uma ressalva a ser feita sobre a equação de estado para o gás perfeito, que pode ser escrita em uma forma especial devido à escolha da temperatura não-dimensional como mostrado no apêndice “C”, resultando em:

$$\rho^+ = \frac{1}{(T^+ + 1)}. \quad (2.24)$$

Portanto, o sistema adimensional de equações é dado, em notação cartesiana indicial, por:

$$\frac{\partial \rho^+}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i^+}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{continuidade}), \quad (2.25)$$

$$\rho^+ \left(\frac{\partial u_i^+}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i^+}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p^+}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau_{ji}^+}{\partial x_j} + \frac{1}{Fr} \rho^+ g_i^+ \quad (\text{Navier-Stokes}), \quad (2.26)$$

$$\rho^+ \left(\frac{\partial T^+}{\partial t} + u_i^+ \frac{\partial T^+}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{Re Pr} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial T^+}{\partial x_i} \right) \quad (\text{energia}), \quad (2.27)$$

$$\rho^+ = \frac{1}{1 + T^+} \quad (\text{estado}), \quad (2.28)$$

com

$$\tau_{ij}^+ = \mu^+ \left[\left(\frac{\partial u_i^+}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^+}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial u_l^+}{\partial x_l} \delta_{ij} \right], \quad (2.29)$$

Neste trabalho, C_p , k e α são considerados como constantes, e os valores de referência, indicados pelo sub-índice $_0$, são tomados a partir do escoamento livre ou de condições ambientais médias. Maiores detalhes sobre os valores de referência adotados estão no apêndice “C”.

Por questões de simplificação da notação utilizada, a partir deste ponto do texto as variáveis em sua forma não dimensional são apresentadas da mesma forma que as variáveis dimensionais (sem o símbolo $^+$), estando estas (quaisquer formas dimensionais subsequentes) devidamente indicadas quando necessário.

2.3 Tratamento estatístico da turbulência

A turbulência é um fenômeno tipicamente tridimensional, transiente, rotacional, altamente difusivo e dissipativo. Deve ser notado também que a turbulência não é controlada por características moleculares do fluido, mas por características do escoamento; as menores escalas da turbulência são ainda muitas vezes maiores do que a escala molecular, sendo portanto um fenômeno enquadrado pela hipótese do continuum.

Seus efeitos são mais importantes sob altos números de Reynolds, ou seja, na grande maioria dos escoamentos de interesse prático em engenharia. A origem da turbulência está associada à instabilidade de escoamentos cisalhantes, gerando estruturas com comprimentos característicos diversos. As maiores escalas possuem a mesma ordem de grandeza das características geométricas do escoamento, enquanto as menores escalas são tais que toda a sua dissipação é convertida em calor, não sendo capaz de gerar estruturas menores do que a ordem de grandeza das escalas de Kolmogorov.

Dentro deste contexto, a turbulência pode ser estudada em termos de seu vasto espectro de energia, associado a estes comprimentos característicos. O método de resolução direta das equações, DNS, capta todo o espectro, sendo portanto o extremo máximo em termos de concordância física e resolução numérica, obviamente, sendo o exato oposto no quesito de desempenho computacional, quando comparado a outros métodos de resolução numérica.

Ainda assim, o valor das simulações numéricas diretas deve ser reconhecido, pois com os recentes avanços na computação, já é possível realiza-las para números de Reynolds

relativamente altos e em casos com geometrias mais complexas, fornecendo dados valiosos na calibração de novos modelos de turbulência baseados em equações médias estatísticas, capazes de prover resultados muito mais significativos do que seus antecessores.

Uma vez que o poder computacional disponível hoje em dia não permite a aplicação industrial eficiente de uma metodologia de resolução do sistema de equações governantes para todas as escalas de turbulência envolvidas, adota-se neste trabalho uma metodologia de transformar as equações instantâneas (2.25), (2.26), (2.27) e (2.28) em equações médias, obtidas através de tratamento estatístico a elas aplicado.

Esta operação de média estatística funciona como um filtro nas equações, restringindo a solução do problema a características médias do escoamento, perdendo determinadas características somente detectáveis quando o problema é resolvido integralmente no tempo.

Este tratamento estatístico é baseado na suposição de que todas as variáveis instantâneas podem ser consideradas como funções randômicas do espaço e do tempo, podendo ser representadas por duas componentes, uma componente média e uma de flutuação. Para casos em que o fluido sofre pouca variação de massa específica, utiliza-se a decomposição de Reynolds, que para uma variável aleatória genérica φ assume a forma:

$$\varphi(\vec{x}, t) = \bar{\varphi}(\vec{x}) + \varphi'(\vec{x}, t) \quad , \quad (2.30)$$

com a média temporal definida por:

$$\bar{\varphi}(\vec{x}) = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \int_0^{t_0} \varphi(\vec{x}, t) dt \quad , \quad (2.31)$$

onde φ é uma variável qualquer do escoamento, o termo $\bar{\varphi}$ é o valor médio da variável e φ' é a correspondente flutuação da variável. O valor médio é tomado como a média temporal da variável em um período de tempo suficientemente amplo, de forma a caracterizar um valor médio independente do tempo e a flutuação é tal que a variável φ seja um valor aleatório centrado, ou seja, a média da flutuação é nula.

Porém, em escoamentos com variação considerável na massa específica, a decomposição de Reynolds torna-se inapropriada, uma vez que o número de correlações não conhecidas é suficiente para inviabilizar a resolução do sistema de equações resultante. Para solucionar este problema, Favre (1965) propôs uma alternativa, aplicando a decomposição de Reynolds apenas para a massa específica e para a pressão, enquanto que para a velocidade e para a temperatura, utilizou um valor médio ponderado pela massa específica. Considerando a variável aleatória genérica φ , a decomposição de Favre é definida como:

$$\varphi(\vec{x}, t) = \tilde{\varphi}(\vec{x}) + \varphi''(\vec{x}, t) , \quad (2.32)$$

sendo a média definida como:

$$\tilde{\varphi}(\vec{x}) = \frac{1}{\bar{\rho}} \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \int_0^{t_0} \rho(\vec{x}, t) \varphi(\vec{x}, t) dt = \frac{\overline{\rho\varphi}}{\bar{\rho}} . \quad (2.33)$$

Com base nesta definição, nota-se que a média das flutuações da decomposição de Favre não é nula, porém o produto desta pela massa específica possui média nula:

$$\overline{\rho\varphi''} = 0 . \quad (2.34)$$

As variáveis decompostas dessa forma são dadas por:

$$u_i = \tilde{u}_i + u_i'' \quad (Favre) \quad (2.35)$$

$$T = \tilde{T} + T'' \quad (Favre) \quad (2.36)$$

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \quad (Reynolds) \quad (2.37)$$

$$p = \bar{p} + p' \quad (Reynolds) \quad (2.38)$$

Aplicando a decomposição de Favre às equações (2.25), (2.26), (2.27) e (2.28), e tomando o valor médio destas equações, obtém-se as equações médias do movimento (considerando $T'' = \theta$ para a flutuação de temperatura):

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Fr} \bar{\rho} \tilde{g}_i \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{1}{Re} \mu \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right) - \bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_j''} \right\}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tilde{u}_i \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{Re Pr} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} - \bar{\rho} \widetilde{u_i'' \theta} \right), \quad (2.41)$$

$$\bar{\rho} = \frac{1}{1 + \tilde{T}}. \quad (2.42)$$

O sistema obtido é um sistema aberto, uma vez que no processo de decomposição, são geradas duas novas incógnitas. Estas novas variáveis apareceram nas equações de Navier-Stokes e na equação da energia, definidas pelo tensor de correlações entre as flutuações de velocidade, denominado de tensor de Reynolds, e pelo vetor de correlações entre as flutuações de temperatura e de velocidade, dadas respectivamente pelo tensor $\widetilde{\mathbf{u}'' \otimes \mathbf{u}''}$ e pelo vetor $\widetilde{\mathbf{u}'' \theta}$.

2.4 Os modelos de turbulência

O fechamento do sistema de equações médias é feito por meio de relações capazes de modelar o tensor de correlação entre as flutuações de velocidade e o vetor de correlação entre as flutuações de temperatura e de velocidade.

Podemos classificar as hipóteses de fechamento do tensor de Reynolds em duas categorias principais:

- Fechamentos de primeira ordem: são baseados em uma relação algébrica para o tensor de Reynolds. Nesta categoria estão incluídos os modelos derivados da hipótese de Boussinesq (1877), por exemplo.
- Fechamentos de segunda ordem: são baseados na resolução da equação evolutiva do tensor de Reynolds. Dentre eles, podemos destacar os modelos diferenciais e os modelos algébricos (explícitos ou não).

A modelagem do tensor de Reynolds considerada neste trabalho é advinda da hipótese da viscosidade turbulenta de Boussinesq (1877). Esta hipótese é baseada em uma suposta similaridade entre os efeitos da turbulência e da viscosidade do fluido sobre o escoamento.

Apesar de carecer dramaticamente de conceituação física aceitável, por desconsiderar efeitos de anisotropia e variações temporais da turbulência, somente para citar algumas deficiências graves do ponto de vista de caracterização da turbulência, a hipótese de Boussinesq é utilizada com freqüência em estudos que visam problemas típicos na indústria, já que é capaz de prover resultados surpreendentemente significativos para projetos de engenharia, em prazos razoavelmente curtos.

Comparativamente, os modelos de fechamento de segunda ordem são baseados principalmente em relações obtidas experimentalmente para modelar os termos da equação evolutiva do tensor de Reynolds. Apesar de ter características físicas consistentes, sendo capazes inclusive de prever anisotropia, este tipo de fechamento é mais caro computacionalmente, comparando-os aos fechamentos de primeira ordem, e normalmente, a implementação envolve constantes restritivas para cada caso estudado, além do fato principal, de que a convergência numérica é um desafio à parte.

Utilizando a similaridade proposta por Boussinesq, com base no tensor Π_{ij} (2.7), ou seja, considerando possíveis variações na massa específica do fluido, Jones e McGuirk (1979) propuseram uma forma mais geral para a hipótese de Boussinesq, por meio da equação:

$$\bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_j''} = \frac{2}{3} \left(\bar{\rho} \kappa + \mu_t \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_l} \right) \delta_{ij} - \mu_t \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) , \quad (2.43)$$

em que μ_t representa a viscosidade turbulenta e κ representa a energia cinética de turbulência, definida pelo traço do tensor:

$$\kappa = \frac{1}{2} \left(\widetilde{u_i'' u_i''} \right) . \quad (2.44)$$

O vetor de correlação entre as flutuações de temperatura e velocidade, que representa um fluxo de calor turbulento, é modelado neste trabalho pela hipótese da difusividade turbulenta:

$$\overline{\rho u_i'' \theta} = -\alpha_t \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} = -\frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i}, \quad (2.45)$$

onde Pr_t representa o número de Prandtl turbulento, considerado como constante neste trabalho, definido por:

$$Pr_t = \frac{C_p \mu_t}{k_t} = 0,9. \quad (2.46)$$

Toda a metodologia desenvolvida neste trabalho está baseada nas expressões (2.43) e (2.45). Resta definir um modelo capaz de determinar os valores da viscosidade turbulenta. As formas clássicas para solucionar este problema são: modelos a zero-equação, compostos por uma equação algébrica que determina a viscosidade turbulenta; modelos a uma equação, com a viscosidade turbulenta dada como uma função de um parâmetro do escoamento e sua respectiva equação evolutiva; e modelos a duas equações, com a viscosidade turbulenta dada em função dois parâmetros do escoamento e suas equações evolutivas.

Os modelos mais famosos são os modelos a duas equações, devido à robustez de cálculo principalmente, e também devido à boa relação de custo computacional e resultados concordantes com experimentos ou DNS. À exceção do modelo a uma equação de Spallart-Almaras (1992), os demais modelos a zero ou uma equação são notadamente inferiores, provendo resultados bastante simplórios em relação aos modelos a duas equações.

Os modelos clássicos a duas equações baseiam-se de alguma forma no modelo $\kappa - \varepsilon$ proposto por Harlow e Nakayama (1968), pois define-se a viscosidade turbulenta de uma forma geral como o produto entre a energia cinética de turbulência (κ - quantidade primária) e uma outra quantidade turbulenta mensurável (quantidade secundária):

$$\mu_t = C_\mu \bar{\rho} \kappa^a \chi^b, \quad (2.47)$$

onde C_μ é uma constante de proporcionalidade, χ representa a quantidade secundária e a e b são expoentes (mais sobre essa análise de escala no apêndice “G”). Uma vez que a viscosidade turbulenta possui as mesmas dimensões que a viscosidade do fluido,

$[m^2][s^{-1}]$, e que a energia cinética de turbulência possui dimensões de energia, $[m^2][s^2]$, é uma questão simples de análise dimensional definir os expoentes a e b , a partir do momento em que a quantidade secundária é escolhida. Tipicamente, são utilizadas quatro quantidades secundárias distintas, cada uma levando a um modelo diferente:

- Comprimento de mistura de Prandtl: l [m];
- Taxa de dissipação de energia cinética de turbulência: ε [$m^2][s^{-3}]$;
- Dissipação específica de energia cinética de turbulência: ω [$s^{-1}]$;
- Tempo característico de emissão turbulenta: ς [s].

À exceção do comprimento de mistura de Prandtl, que pode ser modelado por expressões algébricas, como no próprio modelo de Prandtl e suas variações, a dissipação específica ω e a escala de tempo característica da turbulência ς têm suas equações evolutivas baseadas na equação de ε . Desta forma, veremos separadamente a equação de κ e o modelo $\kappa - \varepsilon$ implementado por Brun (1988), para então detalhar a dedução do modelo $\kappa - \omega$ proposto.

2.4.1 A equação de energia cinética de turbulência κ

O processo para obtenção da equação evolutiva da energia cinética de turbulência é realizado em duas etapas: primeiramente é obtida a equação evolutiva do tensor de Reynolds, e em seguida, a equação da energia cinética de turbulência é obtida com o traço da equação do tensor de Reynolds.

Seguindo o desenvolvimento proposto por Brun (1988) e por Munhoz da Cruz (1989), para escoamentos turbulentos nos quais o fluido de trabalho é modelado como gás perfeito e as variações de sua massa específica são devidas exclusivamente a variações de temperatura, podemos obter a equação de transporte do tensor de Reynolds a partir da equação (2.5), reescrevendo-a considerando alguns (mas não todos) argumentos da simplificação de Boussinesq (1904) para escoamentos térmicos⁴. Consideremos uma

⁴Somente a decomposição do termo gravitacional é utilizada diretamente. A premissa de que as flutuações de massa específicas são pequenas não é aplicada diretamente na formulação apresentada, e a massa específica é mantida explícita nos termos das equações de transporte.

expansão de primeira ordem para a massa específica como função exclusiva da temperatura:

$$\rho(T) = \rho_0 + \frac{\partial \rho}{\partial T}(T - T_0) , \quad (2.48)$$

e que a pressão e a massa específica podem ser decompostas com base nos valores de referência p_0 e ρ_0 por:

$$p = p_0 + p^r \quad e \quad \rho = \rho_0 + \rho^r , \quad (2.49)$$

onde o sobrescrito r indica o valor da variável em relação ao valor de referência. Além disso, o termo do gradiente de pressão pode incluir o termo gravitacional de referência, somando-o à pressão hidrostática, o que resulta em $\nabla p_0 = \rho_0 \vec{g}$. Desta forma, a equação (2.5) pode ser reescrita como:

$$\left(1 + \frac{\rho^r}{\rho_0}\right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial p^r}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho^r g_i , \quad (2.50)$$

com τ_{ij} dado pela equação (2.29). Nota-se claramente a motivação da simplificação proposta por Boussinesq: se a razão (ρ^r/ρ_0) é pequena, as variações na massa específica pouco afetam o termo convectivo. De acordo com Turner (1973), essa aproximação também provê bons resultados mesmo para fortes aquecimentos, desde que o número de Mach do escoamento permaneça baixo. Para o objetivo deste trabalho, é necessário considerar variações significativas na massa específica⁵, e portanto, a decomposição para a massa específica é aplicada somente nos termos gravitacionais e de pressão. Dessa forma, considerando o coeficiente de expansão térmica β definido por:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_{p=cte} , \quad (2.51)$$

⁵Ou seja, neste trabalho, não é assumido que $(\rho^r/\rho_0) \ll 1$ como hipótese restritiva. Portanto, esta formulação é capaz de simular tanto situações de forte aquecimento, como situações em que $(\rho^r/\rho_0) \ll 1$ (causando o fenômeno da estratificação, comum em escoamentos atmosféricos e de baixo aquecimento, nos quais $\vec{\mathbf{u}} \cdot \nabla T = 0$ e a equação da continuidade se reduz a $\nabla \cdot \vec{\mathbf{u}} = 0$). A expressão “escoamentos dilatáveis” serve para frisar essa característica da formulação desenvolvida.

a equação (2.50) pode ser escrita como:

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p^r}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \rho g_i \beta (T - T_0) , \quad (2.52)$$

Com base na equação (2.52), é possível obter a equação de transporte para as componentes do tensor de Reynolds. Inicialmente, a equação (2.52) é decomposta conforme a decomposição de Favre:

$$\begin{aligned} (\bar{\rho} + \rho') \left(\frac{\partial(\tilde{u}_i + u_i'')}{\partial t} + (\tilde{u}_j + u_j'') \frac{\partial(\tilde{u}_i + u_i'')}{\partial x_j} \right) &= -\frac{\partial(\bar{p}^r + p^{r'})}{\partial x_i} \\ &+ \frac{\partial(\tilde{\tau}_{ij} + \tau_{ij}'')}{\partial x_j} \\ &- (\bar{\rho} + \rho') g_i \beta (\tilde{T} + T'' - T_0) . \end{aligned} \quad (2.53)$$

Tirando a média da equação (2.53), obtemos uma equação semelhante à equação (2.40); a diferença entre ambas é devida somente às considerações anteriores sobre o termo gravitacional:

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial \bar{p}^r}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{u}_i'' \tilde{u}_j'')}{\partial x_j} - \bar{\rho} g_i \beta (\tilde{T} - T_0) . \quad (2.54)$$

Pela própria definição da decomposição de Favre, dada na equação (2.32), temos:

$$\overline{\rho u_i u_j} = \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \bar{\rho} \tilde{u}_i'' \tilde{u}_j'' , \quad (2.55)$$

e portanto, para obtermos a equação evolutiva do tensor de Reynolds, é necessário realizar a seguinte operação, com base na equação da continuidade em suas formas médias e instantâneas, e com base nas equações (2.53) e (2.54):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{u}_i'' \tilde{u}_j'')}{\partial t} &= \overline{u_j \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + u_i \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial t} - u_i u_j \frac{\partial(\rho)}{\partial t}} \\ &- \tilde{u}_j \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{u}_i)}{\partial t} + \tilde{u}_i \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{u}_j)}{\partial t} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j \frac{\partial(\bar{\rho})}{\partial t} . \end{aligned} \quad (2.56)$$

Com isso, a equação de transporte do tensor de Reynolds é representada por:

$$\frac{DR_{ij}}{Dt} = P_{ij} + G_{ij} + T_{ij} - \varepsilon_{ij} + D_{ij} + D_{ij}^\nu, \quad (2.57)$$

e cada um dos termos é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{DR_{ij}}{Dt} &= \bar{\rho} \left(\frac{\partial \widetilde{u_i'' u_j''}}{\partial t} + u_k \frac{\partial \widetilde{u_i'' u_j''}}{\partial x_k} \right) && \text{Convecção;} \\ P_{ij} &= -\bar{\rho} \left(\widetilde{u_i'' u_k''} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \widetilde{u_j'' u_k''} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) && \text{Produção;} \\ G_{ij} &= -\bar{\rho} \left(g_i \widetilde{u_j'' \theta} + g_j \widetilde{u_i'' \theta} \right) && \text{Geração;} \\ T_{ij} &= +\overline{p' \left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j''}{\partial x_i} \right)} && \text{Pressão;} \\ \varepsilon_{ij} &= -\left(\overline{\tau_{ik} \frac{\partial u_j''}{\partial x_k}} + \overline{\tau_{jk} \frac{\partial u_i''}{\partial x_k}} \right) && \text{Dissipação;} \\ D_{ij} &= -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{\rho u_i'' \widetilde{u_j'' u_k''}} + \delta_{ik} (\overline{u_j'' \bar{p}} + \overline{u_j'' p'}) + \delta_{jk} (\overline{u_i'' \bar{p}} + \overline{u_i'' p'}) \right) && \text{Difusão turbulenta; e} \\ D_{ij}^\nu &= -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{\tau_{ik} u_j''} + \overline{\tau_{jk} u_i''} \right) && \text{Difusão viscosa.} \end{aligned}$$

Tomando-se o traço da equação (2.57), e com base no desenvolvimento de Uhlmann (1997) e de Bredberg (1999) para modelar os termos desconhecidos resultantes, obtemos a equação de transporte da energia cinética de turbulência, porém, diferentemente dos desenvolvimentos citados, é obtido um termo adicional para computar os efeitos de variações térmicas no fluido sobre a turbulência hidrodinâmica:

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \widetilde{u_i} \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right] + \Pi - \bar{\rho} \varepsilon + \frac{\bar{\rho} \beta g_i}{Re_t Pr_t} \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_i}, \quad (2.58)$$

onde ε é a taxa de dissipação da energia cinética de turbulência, Re_t é o inverso da viscosidade turbulenta (2.47), σ_κ é o número de Schmidt para a energia cinética de turbulência, e o termo Π representa a produção de cisalhamento devido à turbulência, definido por:

$$\Pi = \left[\left(\frac{1}{Re_t} \right) \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left(\bar{\rho} \kappa + \frac{1}{Re_t} \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_l} \right) \delta_{ij} \right] \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}. \quad (2.59)$$

2.4.2 O modelo $\kappa - \varepsilon$ de Brun (1988) e Munhoz da Cruz (1989)

O modelo $\kappa - \varepsilon$ proposto por Harlow e Nakayama (1968), implementado por Jones e Launder (1972) e complementado posteriormente por Launder e Spalding (1974) é a base do modelo implementado por Munhoz da Cruz (1989), e também do desenvolvimento do modelo proposto neste trabalho. A viscosidade turbulenta é dada pela relação de Prandtl e Kolmogorov:

$$\mu_t = C_\mu \bar{\rho} \frac{\kappa^2}{\varepsilon} = \frac{1}{Re_t}, \quad (2.60)$$

onde C_μ é uma constante de calibração do modelo, de valor 0,09, κ representa a energia cinética de turbulência e ε é a taxa de dissipação da energia cinética de turbulência.

Dentre as quantidades turbulentas secundárias apontadas anteriormente, a saber, o comprimento de mistura de Prandtl, l , a taxa de dissipação da energia cinética de turbulência, ε , a taxa específica de dissipação, ω , e o tempo característico de emissão turbulenta, ς , somente a equação da taxa de dissipação ε pode ser deduzida em sua forma completa.

Para obter a equação de transporte da taxa de dissipação da energia cinética de turbulência, inicialmente deve-se subtrair a equação (2.54) da equação (2.53), obtendo assim a equação de transporte da flutuação da velocidade, u'' . Após sua obtenção, utiliza-se a própria definição de ε , na forma dita compressível (por admitir variações de massa específica):

$$-\rho \varepsilon_{ij} = - \left(\overline{\tau_{ik} \frac{\partial u_j''}{\partial x_k}} + \overline{\tau_{jk} \frac{\partial u_i''}{\partial x_k}} \right) \implies \varepsilon_{ii} = \varepsilon \implies \rho \varepsilon = 2 \left(\overline{\tau_{ij} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} \right). \quad (2.61)$$

Segundo as argumentações de Uhlmann (1997) e de Bredberg (2001), o tratamento das correlações decorrentes da obtenção da equação exata do transporte da taxa de dissipação da energia cinética de turbulência é complexo, envolvendo correlações de

difícil obtenção experimental. Tamanha é a dificuldade de modelagem exata da equação de transporte de ε que Brun (1988) e Uhlmann (1997) baseiam a modelagem da equação compressível de ε nos mesmos moldes da dedução da equação incompressível, isto é, com a definição:

$$\rho\varepsilon = 2 \left(\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) . \quad (2.62)$$

A modelagem clássica da equação de ε de vários modelos consagrados fica restrita à análise da semelhança com a equação de κ , simplesmente trocando a dimensão da equação (2.58) para as dimensões de ε , multiplicando-a por ε/κ e adicionando constantes de calibração, conforme mostrado no apêndice “E”. Dessa forma, Munhoz da Cruz (1989) propôs a implementação da equação de ε como:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \tilde{u}_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] \\ &+ \frac{\varepsilon}{\kappa} \left(C_{\varepsilon 1} \Pi - C_{\varepsilon 2} \bar{\rho} \varepsilon + C_{\varepsilon 3} \frac{\bar{\rho} \beta g_i}{Re_t Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right) , \end{aligned} \quad (2.63)$$

onde σ_ε , $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$ e $C_{\varepsilon 3}$ são constantes de calibração, e o termo Π é definido em (2.59). Esta equação é a mesma do modelo original implementado por Jones e Launder (1972), a menos do termo de produção adicional devido à presença de gradientes de temperatura no fluido. Tomando as equações (2.39), (2.40), (2.41) e (2.42), aplicando o conceito da equação (2.60) para a viscosidade turbulenta, e tomando as equações (2.58) e (2.63), o sistema fechado de equações para o modelo $\kappa - \varepsilon$ implementado é dado por:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0 , \quad (2.64)$$

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t} \right) \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{1}{Fr} \bar{\rho} g_i , \quad (2.65)$$

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{1}{Re Pr} + \frac{1}{Re_t Pr_t} \right) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \right] , \quad (2.66)$$

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \tilde{u}_i \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right] + \Pi - \bar{\rho} \varepsilon + \frac{\bar{\rho} \beta g_i}{Re_t Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} , \quad (2.67)$$

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \tilde{u}_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + \frac{\varepsilon}{\kappa} \left(C_{\varepsilon 1} \Pi - C_{\varepsilon 2} \bar{\rho} \varepsilon + C_{\varepsilon 3} \frac{\bar{\rho} \beta g_i}{Re_t Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right), \quad (2.68)$$

$$\bar{\rho} = \frac{1}{1 + \tilde{T}}, \quad (2.69)$$

onde:

$$\frac{1}{Re_t} = C_\mu \bar{\rho} \frac{\kappa^2}{\varepsilon}, \quad (2.70)$$

$$\Pi = \left[\left(\frac{1}{Re_t} \right) \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left(\bar{\rho} \kappa + \frac{1}{Re_t} \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_l} \right) \delta_{ij} \right] \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}, \quad (2.71)$$

$$p^* = \bar{p} + \frac{2}{3} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t} \right) \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_l} + \bar{\rho} \kappa \right], \quad (2.72)$$

com as constantes do modelo dadas por:

$$C_\mu = 0,09, \quad C_{\varepsilon 1} = 1,44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1,92, \quad C_{\varepsilon 3} = 0,288, \quad \sigma_\kappa = 1, \quad \sigma_\varepsilon = 1,3, \quad Pr_t = 0,9.$$

Este modelo $\kappa-\varepsilon$, baseado nos trabalhos de Brun (1988) e Munhoz da Cruz (1989), está implementado no código TURBO-2D, sendo resolvido sob a metodologia de alto número de Reynolds, isto é, as condições de contorno nas paredes sólidas são especificadas por meio de leis de parede, para velocidade e temperatura, a serem detalhadas mais a diante.

2.4.3 Progressos advindos de DNS sobre a camada limite turbulenta

O gráfico da figura (2.1) mostra a estrutura da camada limite turbulenta típica de um escoamento incompressível sobre placa plana, explicitando a região interna, onde os modelos de turbulência baseados na hipótese de Boussinesq não conseguem modelar corretamente os efeitos viscosos, que atuam na mesma escala dos efeitos de difusão turbulenta.

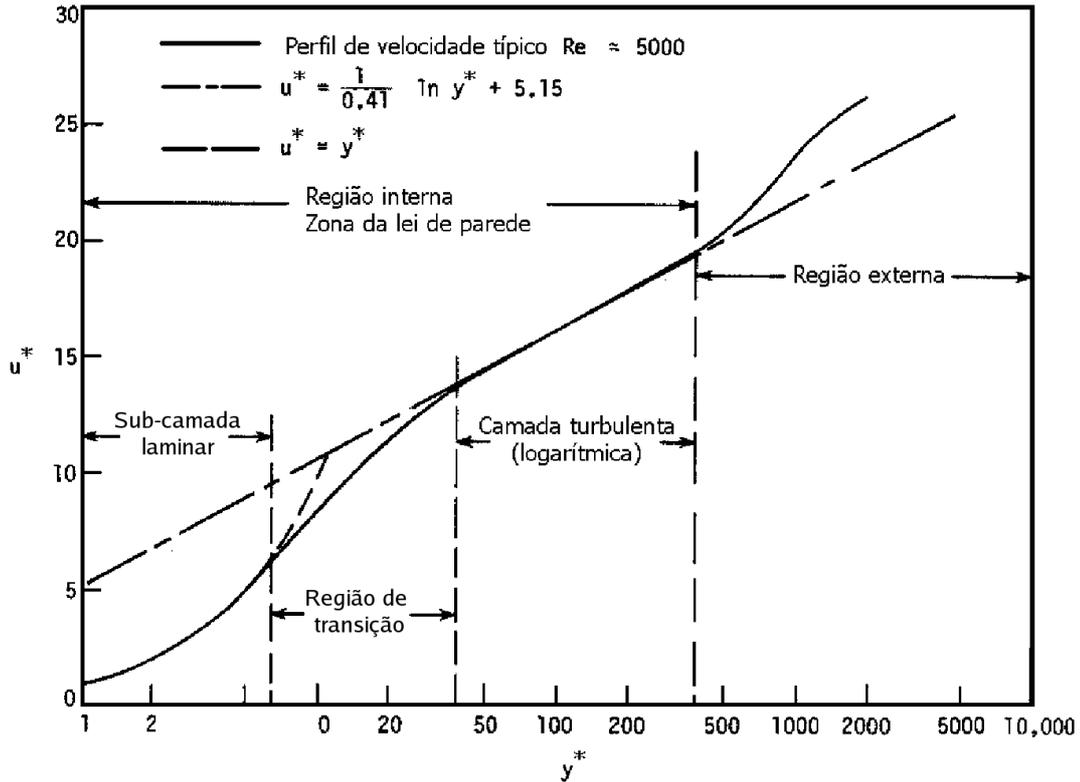


Figura 2.1: Estrutura da camada limite turbulenta

As variáveis características da camada limite turbulenta, y^* e u^* , são definidas por:

$$y^* = \frac{u_f y_\delta}{\nu} \quad (2.73)$$

$$u^* = \frac{\tilde{u}_x}{u_f}, \quad (2.74)$$

onde u_f é um parâmetro denominado velocidade de atrito (essas definições estão tratadas com mais detalhes adiante). Nesta figura, nota-se que há uma região onde a sub-camada viscosa, ou laminar, se sobrepõe à camada plenamente turbulenta, também chamada de região logarítmica, formando o que se chama de região de transição ou zona-tampão (em inglês, *buffer layer*). Os gradientes de velocidade na região interna da camada limite são demasiadamente elevados e a representação matemática deste efeito é comprometida com os modelos baseados na viscosidade turbulenta. Para contornar esta dificuldade, existem duas metodologias de simulação numérica distintas:

- **Simulações a alto número de Reynolds:** a região interna da camada limite é resolvida por expressões algébricas explícitas, denominadas leis de parede;

- **Simulações a baixo número de Reynolds:** a região interna da camada limite é resolvida diretamente pelas equações médias.

A metodologia de alto número de Reynolds é computacionalmente mais barata, pois resolver a região interna da camada limite explicitamente reduz a necessidade de refinar a malha de cálculo na região de proximidade imediata da parede. Por outro lado, com a utilização de expressões explícitas, a convergência numérica pode ficar comprometida. Além disso, alguns detalhes do escoamento podem acabar negligenciados, dependendo do quão restritivas, simplórias ou complexas sejam as hipóteses utilizadas na dedução das leis de parede utilizadas.

Ao adotar uma metodologia de baixo número de Reynolds, as condições de contorno na região parietal são especificadas, ou no máximo calculadas por expressões que dependem exclusivamente de características geométricas da malha de cálculo utilizada. O problema da utilização de expressões explícitas não ocorre neste caso, porém, para resolver a região interna com um bom grau de concordância física, deve-se utilizar malhas de cálculo extremamente refinadas na região parietal. Além desse fato, um modelo de viscosidade turbulenta não é capaz, por si só, de captar todo o complexo comportamento da camada limite, e neste caso, são utilizadas funções de amortecimento para um cálculo mais coerente da viscosidade turbulenta na região parietal.

Um modelo de turbulência possui diversas constantes de calibração, e mais ainda, nos casos de simulações de baixo número de Reynolds, normalmente duas ou mais funções de amortecimento, aplicadas diretamente na viscosidade turbulenta, em alguns termos das equações de transporte das quantidades turbulentas, ou em ambos. Em metodologias de baixo número de Reynolds, a calibração das constantes e funções de amortecimento é tão crucial como a utilização de leis de parede mais sofisticadas em metodologias de alto Reynolds.

Eis que surge o papel fundamental das simulações numéricas diretas. Atualmente, é possível realizar DNS para escoamentos com números de Reynolds relativamente mais altos (da ordem de 10^3) e em geometrias relativamente mais complexas, como por exemplo, a DNS de escoamento sobre degrau de Lee, Kim e Moin (1997). Ainda que relativamente limitados, esses dados são extremamente valiosos para a calibração de modelos de turbulência, que podem e são aplicados largamente na indústria, em casos onde a complexidade da geometria e a demanda por resultados mais rápidos torna o uso de DNS totalmente inviável.

Consideremos novamente a expressão (2.47), para o cálculo da viscosidade turbulenta com modelos a duas equações, sendo uma das quantidades turbulentas a energia cinética de turbulência. Em metodologias de alto Reynolds, a constante C_μ é representada por um número constante. No caso do modelo $\kappa - \varepsilon$ mostrado anteriormente, por exemplo, essa constante assume o valor de 0,09. Os resultados obtidos de simulações numéricas diretas mostram que C_μ , ao contrário do que se imaginava anteriormente, é variável na região parietal.

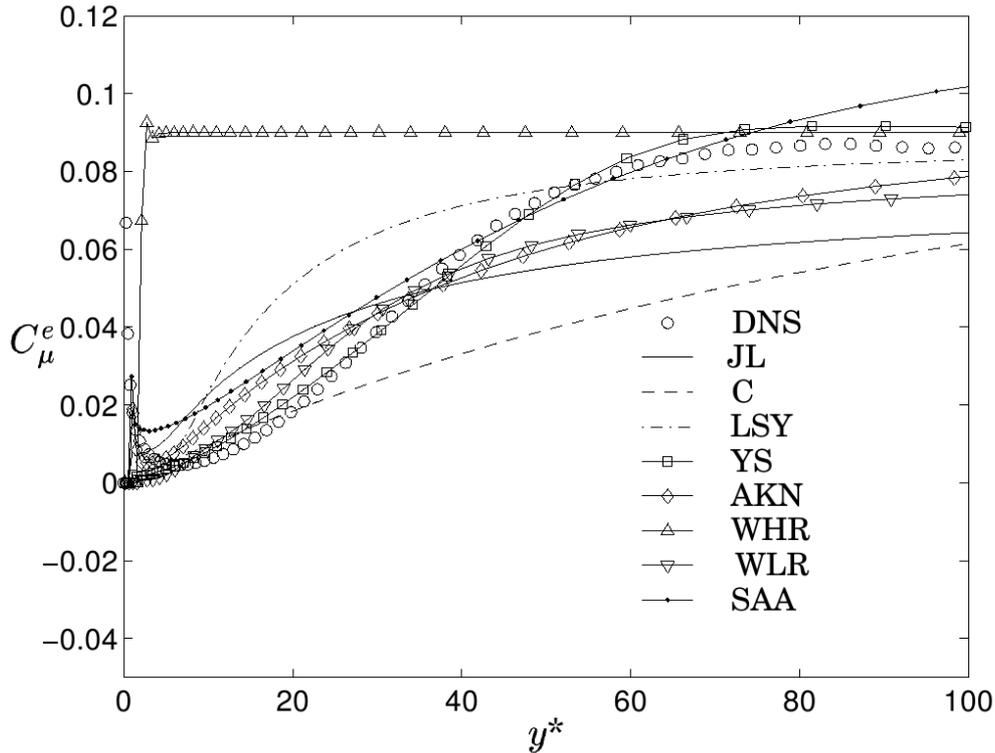


Figura 2.2: C_μ obtida por simulação numérica direta de Moser et al. (1999) [DNS] e algumas funções utilizadas em modelos de turbulência baixo-Reynolds (extraída de Bredberg, 2001): $\kappa - \varepsilon$ de Jones e Launder [JL], de Chien [C], de Launder e Sharma com correção de Yap [LSY], de Yang e Shih [YS] e de Abe, Kondoh e Nagano [AKN]; $\kappa - \omega$ de Wilcox em alto-Reynolds [WHR] e em baixo-Reynolds [WLR]; $\kappa - \zeta$ de Speziale, Abid e Anderson [SAA] — extraído de Bredberg (2001).

A figura (2.2) mostra os dados de DNS comparados com algumas funções de amortecimento aplicadas a modelos de baixo Reynolds. É importante notar o valor constante de 0,09 utilizado no modelo a alto Reynolds de Wilcox (1993), indicado no gráfico da figura (2.2), também adotado no modelo $\kappa - \varepsilon$ implementado no código TURBO-2D. Em metodologias de alto Reynolds, esse comportamento pode (e normalmente deve) ser contornado ao calibrar a lei de parede utilizada para realizar o cálculo além da região de discrepância mais evidente.

Já em modelos de baixo Reynolds, não há outra opção senão a utilização de uma função de amortecimento devidamente calibrada para captar o comportamento “correto” da viscosidade turbulenta. De fato, a utilização de tais funções possui dois objetivos: reduzir o valor de C_μ e corrigir o comportamento assintótico previsto para o tensor de Reynolds nas regiões de proximidade com o contorno sólido.

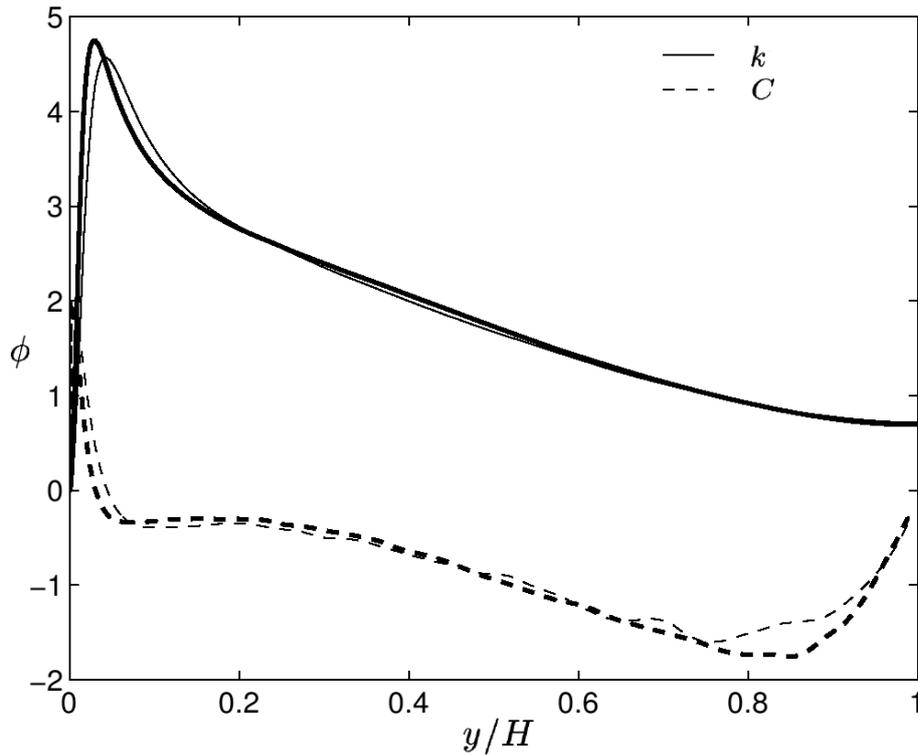


Figura 2.3: Perfil de κ (linhas cheias) obtido por simulação numérica direta de escoamento em canal plenamente desenvolvido e o expoente da distância à parede y , considerando κ como função de y [$\kappa(y) = f(y^C)$] para $Re_\tau = 395$ (linhas finas) e $Re_\tau = 590$ (linhas grossas) — Kim et al. (1987) — extraído de Bredberg (2001).

Outra característica importante da camada limite turbulenta mostrada por simulações numéricas diretas são os perfis de energia cinética de turbulência κ e de sua taxa de dissipação ε , apresentados nos gráficos das figuras (2.3) e (2.4), juntamente com o fator de dependência de cada uma com relação a distância à parede, provenientes de duas DNS distintas, com número de Reynolds $Re_\tau = (U_0 y_\tau)/(\nu)$, definido em função da espessura de momentum da camada limite y_τ .

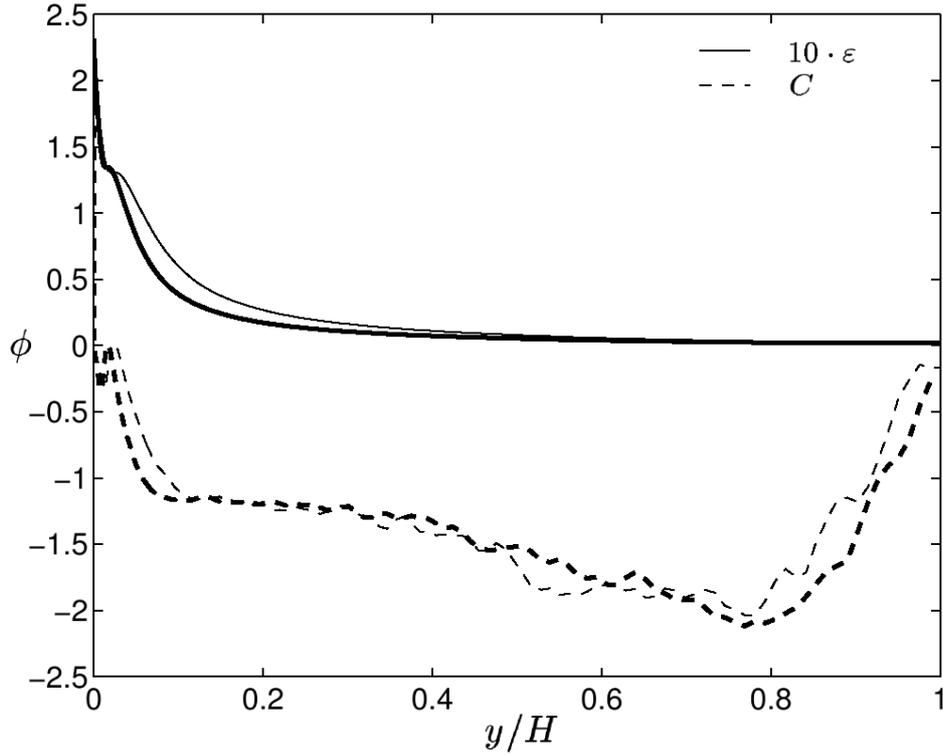


Figura 2.4: Perfil de ε (linhas cheias) obtido por simulação numérica direta de escoamento em canal plenamente desenvolvido e o expoente da distância à parede y , considerando ε como função de y [$\varepsilon(y) = f(y^C)$] para $Re_\tau = 395$ (linhas finas) e $Re_\tau = 590$ (linhas grossas) — Kim et al. (1987) — extraído de Bredberg (2001).

Nestes gráficos, estão mostrados dois fatores importantes: a dependência de cada variável com uma relação exponencial da distância à parede (com y^C) e o valor na parede (em $y = 0$). Nota-se que a dependência de ambas não é linear, nem tampouco predita por um expoente constante; ademais, a taxa de dissipação sofre maior influência com a variação do número de Reynolds do escoamento.

Tabela 2.1: Dependência das variáveis secundárias com a distância vertical à parede - DNS de Kim et al (1987).

χ	$0 < y^* < 5$	$5 \leq y^* < 30$	$y/L_0 \geq 0.1$
l	y^2	y^2	\sqrt{y}
ε	y	<i>constante</i>	y^{-1}
s	y	y^2	y
ω	y^{-1}	y^{-2}	y^{-1}

Existe uma forte motivação para a utilização de ω como segunda variável de um modelo a duas equações, conforme o trabalho de Bredberg (2001): o comportamento assintótico de ω na região próxima à parede e sua dependência com a condição de contorno.

Na tabela (2.1) e nas figuras (2.5) e (2.6) é mostrado o comportamento das variáveis secundárias clássicas com relação à distância normal à parede, com base nos dados de DNS de Kim et al. (1987). Ressalta-se que de uma região para a outra da camada limite, o comportamento não muda abruptamente conforme indicado na tabela, mas de uma maneira sutil, conforme as figuras (2.5) e (2.6).

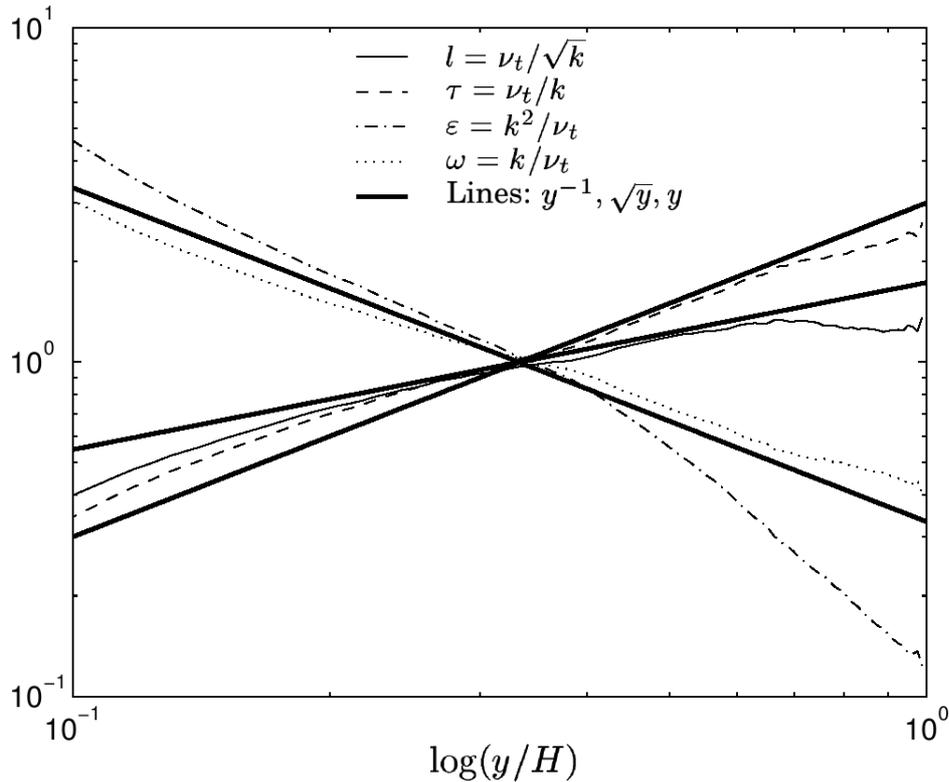


Figura 2.5: Variações das quantidades secundárias com y - região completa do escoamento de canal - DNS de Kim et al. (1987) - $Re_\tau = 590$ - extraído de Bredberg (2001).

Nota-se claramente que a variável de descrição mais problemática é ε : conforme a figura (2.5), seu comportamento é o que mais se afasta do ajuste exponencial (no caso, y^{-1}). Na figura (2.6), nota-se a dificuldade de previsão na *buffer-layer*, pois o comportamento muda sutilmente com o aumento de y^* . Para complicar, o valor de ε especificado na parede pode influenciar fortemente os resultados, e conforme pode ser visto no gráfico correspondente da figura (2.4), o valor físico é finito e diferente de zero - uma expressão mal formulada pode resultar em cálculos pouco coerentes com a realidade.

As quantidades ω e ζ são exatamente inversas, obviamente devido à própria definição de ambas, isto é, $\zeta = 1/\omega$. Para ambos os casos, é possível realizar uma aproximação razoável, na região parietal com uma equação linear, variando gradualmente para uma aproximação quadrática após a sub-camada viscosa, e novamente para uma equação linear na região central do canal.

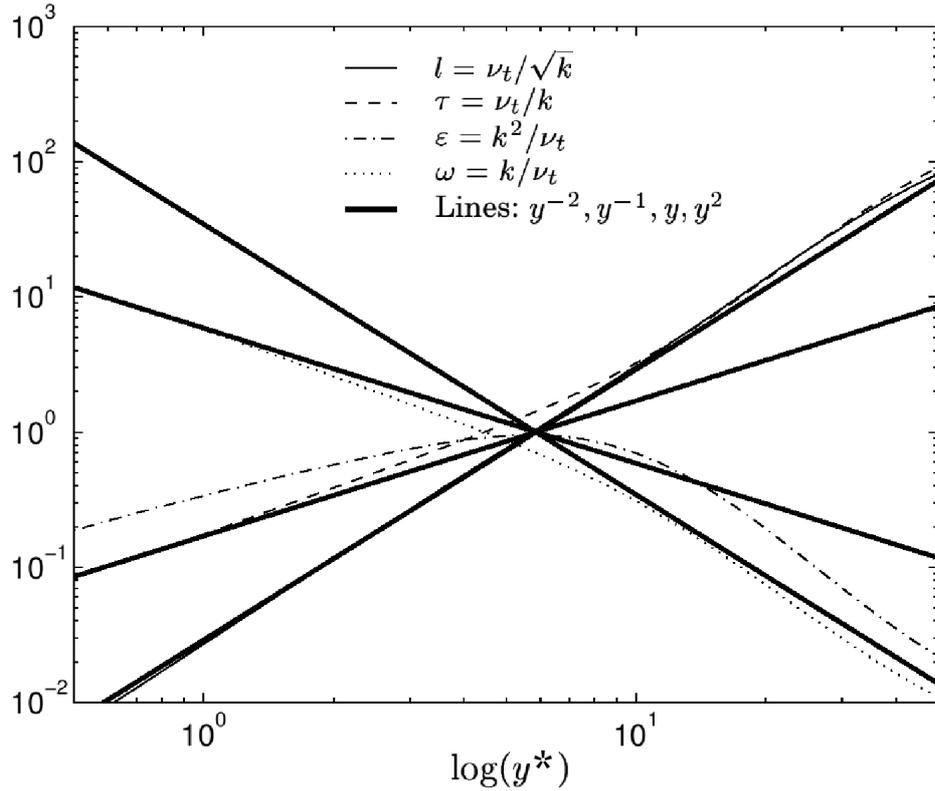


Figura 2.6: Variações das quantidades secundárias com y - camada limite interna do escoamento de canal - DNS de Kim et al. (1987) - $Re_\tau = 590$ - extraído de Bredberg (2001).

A curva mais simples de ser ajustada é a do comprimento de mistura l , sendo extremamente concordante com uma expressão quadrática, que varia rapidamente para uma dependência com relação a y^2 . Porém, seu comportamento é totalmente anômalo no centro do canal, conforme pode ser visualizado na figura (2.5).

De acordo com Bredberg (2001), a preferência por utilizar ω como variável secundária é decorrente de seu comportamento mais previsível na região parietal, pois conforme o trabalho de Huang e Bradshaw (1995), a variação de ω na sub-camada viscosa ser proporcional a y^{-2} garante um efeito estabilizador na resolução numérica das equações de κ e ω , já que a tendência de qualquer erro numérico decorrente do processo de resolução terá uma tendência inerente de decair rapidamente, com o mesmo expoente.

Quanto ao quesito de condições de contorno, que será detalhado mais adiante, a princípio pode parecer contrário ao senso comum que ω seja de fato uma boa escolha: ε possui um valor finito e diferente de zero na parede, apesar da dificuldade em sua predição correta; tanto l como ς são nulas na parede, e sua implementação é direta; enquanto ω tende a um valor infinito. Porém, dois fatos são decisivos: a obtenção de uma relação para especificar o valor de ω na proximidade da parede pode ser feita diretamente de sua equação evolutiva, e possui boa concordância com dados de DNS. Além

disso, o valor de ω especificado na parede pouco influi nos resultados finais, desde que seja grande, e sua tendência ao infinito é um fator positivo na estabilidade numérica na resolução do sistema de equações, conforme Huang e Bradshaw (1995) demonstraram.

A única desvantagem de modelos $\kappa - \omega$, conforme a revisão de Bredberg (2001), é a alta sensibilidade do modelo aos valores especificados para ω no escoamento livre. A utilização de valores diferentes, mesmo que de mesma ordem de grandeza e fisicamente coerentes, pode resultar em soluções totalmente diferentes e divergentes do comportamento físico esperado. O modelo estendido proposto neste trabalho sugere uma forma de se contornar essa dificuldade, incluindo um termo adicional de difusão na equação de ω e através de análise de escala para especificar ω no escoamento livre, baseado no modelo de Bredberg (2002).

2.4.4 Desenvolvimento do modelo $\kappa - \omega$ proposto

Modelo proposto inicialmente por Wilcox (1993), baseia-se na utilização da energia cinética de turbulência κ e da taxa de dissipação específica ω como parâmetros de definição das escalas turbulentas de tempo e de comprimento, para o cálculo da viscosidade turbulenta.

O modelo original de Wilcox (1993) utilizava uma equação de transporte para ω nos mesmos moldes da equação clássica para ε , porém com novas constantes e números de Schmidt para κ e ω bem altos ($\sigma_\kappa = \sigma_\omega = 2$). Este modelo, implementado tanto para alto Reynolds como para baixo Reynolds calculava resultados razoáveis para escoamento de canal, porém, para escoamentos recirculantes como casos de degrau, ao contrário dos modelos $\kappa - \varepsilon$ comuns, superestimava o tamanho das zonas de recirculação. Ainda assim, os perfis obtidos são modestos.

Em seu trabalho de análise dos avanços obtidos com DNS, Bredberg (2002) desenvolveu uma metodologia para a obtenção da equação de transporte de ω a partir das equações de κ e de ε , na qual surgem novos termos na equação de ω em relação ao modelo original de Wilcox (1993). Esses termos possuem funções importantes, como por exemplo, relaxar a forte dependência do modelo com valores de contorno de ω no escoamento livre. Bredberg mostrou como escolher e realizar um ajuste fino nas constantes de forma que os resultados fossem bastante compatíveis com os resultados observados de DNS.

O modelo proposto por Bredberg (2002) é essencialmente deduzido a partir de equações de κ e ε para escoamentos não influenciados por gradientes de temperatura no fluido. Ao seguir a mesma metodologia de Bredberg (2002), porém com base no modelo $\kappa - \varepsilon$ de Brun (1988) e Munhoz da Cruz (1989), apresentado anteriormente, é deduzido um modelo $\kappa - \omega$ diferenciado, onde a presença de gradientes de temperatura no fluido afetam o cálculo das propriedades turbulentas do escoamento. Utilizando a definição de ω :

$$\omega = \frac{\varepsilon}{C_\mu \kappa}, \quad (2.75)$$

podemos reescrever a equação (2.58), com o termo de dissipação expresso em função de ω , como:

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \tilde{u}_i \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right] + \Pi - \bar{\rho} C_\mu \omega \kappa + \frac{\bar{\rho} \beta g_i}{Re_t Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \quad (2.76)$$

com o termo Π dado pela equação (2.59). A partir da definição (2.75), e aplicando o operador derivada total, temos (mais detalhes no apêndice “E”):

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left(\frac{\varepsilon}{C_\mu \kappa} \right) = \frac{1}{C_\mu \kappa} \frac{D\varepsilon}{Dt} - \frac{\omega}{\kappa} \frac{D\kappa}{Dt}. \quad (2.77)$$

Ao utilizar a definição (2.75), a viscosidade turbulenta, dada pelo inverso do número de Reynolds turbulento, R_t , também é redefinida como:

$$\frac{1}{R_t} = f_\mu \bar{\rho} \frac{\kappa}{\omega}, \quad (2.78)$$

onde f_μ é uma função de amortecimento, no caso do modelo ser implementado sob a metodologia de baixo número de Reynolds. Utilizando as equações (2.75), (2.78), (2.76) e (2.63) na relação (2.77), a equação para ω é obtida, ainda em termos das constantes do modelo $\kappa - \varepsilon$ utilizado como base (a dedução completa está mostrada no apêndice “E”):

$$\begin{aligned}
\bar{\rho} \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + \tilde{u}_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] + \frac{\omega}{\kappa} (C_{\varepsilon 1} - 1) \Pi \\
&+ \frac{\omega}{\kappa} \left(-(C_{\varepsilon 2} - 1) C_\mu \bar{\rho} \omega \kappa + (C_{\varepsilon 3} - 1) \frac{\bar{\rho} \beta g_i}{Re_t Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right) \\
&+ \frac{\omega}{\kappa} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{Re_t} \left(\frac{1}{\sigma_\varepsilon} - \frac{1}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right] \\
&+ \frac{2}{\kappa} \left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} .
\end{aligned} \tag{2.79}$$

Considerando o modelo original de Wilcox (1993), no qual a equação de ω possui os mesmos termos da equação de ε , eis que surgem dois termos adicionais, dados nas duas últimas linhas da equação (2.79): o primeiro, proporcional a $\nabla^2 \kappa$, representa uma difusão turbulenta adicional, e o segundo, proporcional à derivada cruzada $\nabla \kappa \cdot \nabla \omega$ representa o que Bredberg (2002) denominou como difusão cruzada.

A fim de compatibilizar a equação (2.79) com os dados de DNS para escoamentos de canal, e também com argumentos baseados na aproximação por interação direta a duas escalas - TSDIA (do inglês *two-scale direct interaction approximation*) de Yoshizawa (1987), Bredberg (2002) concluiu em seu trabalho que as constantes da equação de ω devem ser ajustadas, e não calculadas diretamente a partir de um modelo $\kappa - \varepsilon$, correndo-se o risco de não obter nenhum ganho significativo com o novo modelo.

Além disso, Bredberg (2002) também mostra a importância do termo de difusão cruzada: calibrando-se corretamente as constantes do modelo, este termo torna-se responsável por um relaxamento considerável na alta sensibilidade com respeito aos valores de contorno do escoamento livre de ω . O efeito negativo do termo de difusão cruzada é que sua resolução numérica adiciona uma instabilidade na equação de ω . Já o termo de difusão adicional, proporcional a $\nabla^2 \kappa$, pode ser negligenciado: é fato de que o termo se anula ao serem utilizados números de Schmidt turbulentos para κ e ω idênticos (tal como no modelo $\kappa - \omega$ original de Wilcox), porém Bredberg concluiu através de TSDIA que este termo somente deve ser utilizado no caso de uma diferença significativa entre os dois números de Schmidt turbulentos, pois sua inclusão induz um comportamento incompatível de ω na região de parede.

A constante do termo de dilatação térmica, incluído no modelo apresentado neste trabalho, se fosse deduzida diretamente da equação (2.63) teria seu sinal trocado, passando

a ser negativo e portanto, contrariando a física de um problema térmico: é de se esperar que flutuações térmicas turbulentas aumentem a dissipação turbulenta, em menor taxa do que aumentam sua produção, mas nunca atuem como elementos atenuadores da dissipação. Desta forma, a constante do termo gravitacional na equação de ω foi modelada tal como propôs Munhoz da Cruz (1989), porém considerando um valor arredondado da constante, fazendo $C_{\omega 3} = (5/6)C_{\varepsilon 3}$. Para as outras constantes, foram utilizados os valores apresentados por Bredberg (2002).

Ressalta-se também que este modelo é de baixo-Reynolds, isto é, as condições de contorno são todas especificadas, a menos da condição de contorno de ω , dada por uma relação obtida diretamente da equação de transporte (2.84), e por isso é necessário utilizar pelo menos uma função de amortecimento na viscosidade turbulenta. Obviamente, a adoção de várias funções de amortecimento torna o cálculo numérico mais instável, sendo desejável o menor número possível dessas funções quando o objetivo é um modelo numericamente robusto. Sendo assim, neste trabalho apenas uma função de amortecimento é adotada, diretamente na viscosidade turbulenta. A função adotada é a mesma proposta por Bredberg (2002), obtida a partir de dados de DNS. Portanto, o sistema fechado em sua forma final do modelo $\kappa - \omega$ proposto é:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.80)$$

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t} \right) \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{1}{Fr} \bar{\rho} g_i, \quad (2.81)$$

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{1}{Re Pr} + \frac{1}{Re_t Pr_t} \right) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \right], \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \left(\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \tilde{u}_i \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right] + \Pi - \bar{\rho} C_{\mu \omega} \kappa \\ &\quad + \frac{\bar{\rho} \beta g_i}{Re_t Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + \tilde{u}_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] \\ &\quad + \frac{\omega}{\kappa} (C_{\omega 1} \Pi) - C_{\omega 2} \bar{\rho} \omega^2 + \frac{\omega}{\kappa} \left(C_{\omega 3} \frac{\bar{\rho} \beta g_i}{Re_t Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right) \\ &\quad + \frac{C_{\omega 4}}{\kappa} \left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_\omega} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$\bar{\rho} = \frac{1}{1 + \tilde{T}}, \quad (2.85)$$

onde:

$$\frac{1}{Re_t} = f_\mu \bar{\rho} \frac{\kappa}{\omega}, \quad (2.86)$$

$$\Pi = \left[\left(\frac{1}{Re_t} \right) \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left(\bar{\rho} \kappa + \frac{1}{Re_t} \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_l} \right) \delta_{ij} \right] \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}, \quad (2.87)$$

$$p^* = \bar{p} + \frac{2}{3} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t} \right) \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_l} + \bar{\rho} \kappa \right], \quad (2.88)$$

$$f_\mu = 0,09 + \left(0,91 + \frac{1}{(\kappa/(\omega\nu))^3} \right) \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{(\kappa/(\omega\nu))^{2,75}}{25} \right) \right] \right\}, \quad (2.89)$$

com as constantes do modelo dadas por:

$$C_\mu = 0,09, \quad C_{\omega_1} = 0,49, \quad C_{\omega_2} = 0,072, \quad C_{\omega_3} = 0,240, \\ C_{\omega_4} = 1,1, \quad \sigma_\kappa = 1, \quad \sigma_\omega = 1,8, \quad Pr_t = 0,9.$$

2.5 Condições de contorno - modelo $\kappa - \varepsilon$

No código TURBO-2D, o modelo $\kappa - \varepsilon$ é resolvido como alto-Reynolds, calculando as condições de contorno parietais de velocidade e de temperatura com o auxílio de leis de parede. As leis de parede modelam o complexo comportamento da região interna da camada limite, por meio de uma expressão analítica explícita para o cálculo da velocidade tangencial e da temperatura na vizinhança imediata do contorno sólido do escoamento estudado. Para a direção perpendicular à parede é considerada a condição de impenetrabilidade, ou seja, velocidade perpendicular à parede nula.

O gráfico da figura (2.1) mostra a estrutura da camada limite turbulenta típica de um escoamento incompressível sobre placa plana, explicitando a região interna, onde o modelo $\kappa - \varepsilon$ não consegue modelar corretamente os efeitos viscosos. Nessa figura nota-se que há uma região onde a sub-camada viscosa, ou laminar, se sobrepõe à camada plenamente turbulenta, também chamada de região logarítmica, formando o que se chama de região de transição ou zona-tampão (em inglês, *buffer layer*).

Em simulações de alto Reynolds, a malha de cálculo não chega até a parede. Ao invés disso, é imposto um parâmetro, definido como y_δ , que representa a distância

entre a malha de cálculo e a parede física. A condição de contorno é imposta no nó de fronteira da malha, com as leis de parede dadas como funções desse parâmetro. Ajustando corretamente y_δ , é possível amenizar a dificuldade de representação da região interna da camada limite pelo modelo $\kappa-\varepsilon$ alto-Reynolds, adicionando a capacidade de capturar numericamente os pontos de descolamento e recolamento da camada limite em escoamentos recirculantes. A figura (2.7) exemplifica como é o esquema de simulação a alto-Reynolds.

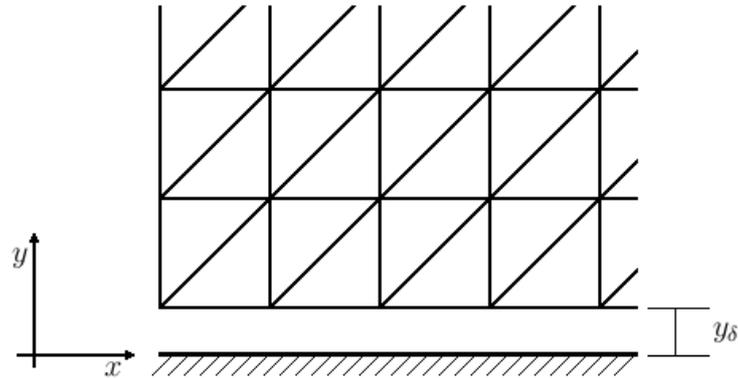


Figura 2.7: Esquema de simulação a alto-Reynolds

O número de Reynolds local na camada limite, y^* , é então definido por:

$$y^* = \frac{u y_\delta}{\nu} . \quad (2.90)$$

A seguir são apresentadas as leis de parede de velocidade e de temperatura utilizadas no código TURBO-2D, além das expressões para especificação dos valores de κ e de ε nos nós de fronteira nas simulações a alto-Reynolds.

2.5.1 Lei logarítmica clássica

Partindo das equações médias de balanço de massa e de quantidade de movimento, dadas pelas equações (2.39) e (2.40), obtemos a equação média de Prandtl para a camada limite turbulenta bidimensional, mostrada em notação cartesiana ortogonal como:

$$\nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_x}{\partial y^2} - \frac{\partial(\widetilde{u_x'' u_y''})}{\partial y} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0 , \quad (2.91)$$

onde x é a direção principal do escoamento e y é a direção perpendicular. Se integrada ao longo da espessura da camada limite, considerando nulo o gradiente de pressão, chega-se à relação:

$$\nu \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial y} - \widetilde{u_x'' u_y''} = u_f^2 , \quad (2.92)$$

onde a constante de integração, u_f^2 , representa uma medida da tensão de cisalhamento na parede, chamada de velocidade de atrito, devido a sua natureza dimensional:

$$u_f^2 = \frac{\tau_p}{\rho} . \quad (2.93)$$

A integração deste resultado é condicionada pela natureza física da região interna da camada limite turbulenta. Para a sub-camada viscosa, onde os efeitos da dissipação viscosa são predominantes (i.e. o escoamento nesta região é laminar), o tensor de Reynolds pode ser desconsiderado, resultando em uma lei de parede na forma:

$$y^* = u^* , \quad (2.94)$$

onde as variáveis y^* e u^* são definidas por:

$$y^* = \frac{u_f y_\delta}{\nu} \quad \text{e} \quad u^* = \frac{\tilde{u}_x}{u_f} . \quad (2.95)$$

Já para a região turbulenta da camada limite, os efeitos de dissipação viscosa são muito menores do que os efeitos de dissipação turbulenta. Modelando o tensor de Reynolds através da hipótese de Boussinesq, com a viscosidade turbulenta dada pela hipótese do comprimento de mistura de Prandtl:

$$\widetilde{u_x''u_y''} = -\nu_t \frac{\partial \widetilde{u_x}}{\partial y} \quad \text{e} \quad \nu_t = K^2 y^2 \left| \frac{\widetilde{u_x}}{\partial y} \right|, \quad (2.96)$$

obtém-se:

$$u^* = \frac{1}{K} \ln(y^*) + C_{ln}, \quad (2.97)$$

onde K é a constante de Von Kármán e C_{ln} é uma constante de calibração, valendo respectivamente 0,419 e 5,445.

A representação da região de transição entre a sub-camada viscosa e a região turbulenta é feita tomando-se o ponto de intersecção entre as equações (2.94) e (2.97), que se dá em $y^* = 11,64$, aplicando a relação (2.94) para valores de y^* menores que 11,64 e a relação (2.97) para valores de y^* maiores que 11,64.

2.5.2 Lei de Mellor (1966)

A integração da equação (2.91) ao longo da espessura da camada limite, incluindo o termo do gradiente de pressão resulta em:

$$\nu \frac{\partial \widetilde{u_x}}{\partial y} - \widetilde{u_x''u_y''} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} y = u_f^2, \quad (2.98)$$

Com um procedimento semelhante ao adotado para a obtenção da equação (2.94), é obtida uma equação para a sub-camada viscosa que considera os efeitos da presença de um gradiente de pressão na forma:

$$u^* = y^* + \frac{1}{2} p^* y^{*2}, \quad (2.99)$$

onde p^* representa o gradiente de pressão adimensional na região, dado pela relação:

$$p^* = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \frac{\nu}{u_f^3} . \quad (2.100)$$

Para a região totalmente turbulenta, temos a seguinte relação, obtida pelo mesmo argumento que levou à obtenção da equação (2.97):

$$u^* = \frac{2}{K} \left(\sqrt{1 + p^* y^*} - 1 \right) + \frac{1}{K} \left(\frac{4y^*}{2 + p^* y^* + 2\sqrt{1 + p^* y^*}} \right) + \xi_{p^*} , \quad (2.101)$$

onde ξ_{p^*} é uma constante de integração, função do gradiente adimensional de pressão. As relações (2.99) e (2.101) foram obtidas por Patankar e Spalding (1967). Levando em conta a variação de ξ_{p^*} com o gradiente de pressão, Mellor (1966) determinou experimentalmente os valores da constante de integração em função de p^* , que podem ser interpolados da tabela (2.2).

Tabela 2.2: Valores para interpolação da constante de integração ξ_{p^*}

p^*	-0,01	0,00	0,02	0,05	0,10	0,20	0,25	0,33	0,50	1,00	2,00	10,00
ξ_{p^*}	4,92	4,90	4,94	5,06	5,26	5,63	5,78	6,03	6,44	7,34	8,49	12,13

Mellor propôs ainda uma relação para calcular o valor de ξ_{p^*} para gradientes de pressão muito fortes, com $p^* \geq 8$, dada por:

$$\xi_{p^*} = \frac{2}{K} + 1,33(p^*)^{\frac{1}{3}} + 4,38(p^*)^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{K} \ln \left(\frac{4}{p^*} \right) . \quad (2.102)$$

2.5.3 Lei de Nakayama e Koyama (1984)

Como uma forma alternativa de obter uma relação para calcular as condições de contorno para a velocidade, Nakayama e Koyama (1984) apresentaram em seu trabalho uma lei de parede deduzida da equação média da energia cinética de turbulência, equação (2.41), que para a camada limite toma a seguinte forma:

$$\frac{dJ}{dy} + \tau \frac{d\tilde{u}_x}{dy} - \bar{\rho}\varepsilon = 0 , \quad (2.103)$$

onde J representa o fluxo difusivo de energia e τ é a tensão de cisalhamento, dados por:

$$J = \bar{\rho} \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial y} \quad \text{e} \quad \tau = \bar{\rho} \nu_t \frac{d\tilde{u}_x}{dy}, \quad (2.104)$$

o que torna possível modelar o fluxo difusivo de energia cinética de turbulência por:

$$J = - \frac{1}{\bar{\rho} \sigma_\kappa \sqrt{C_\mu}} \tau \frac{d\tau}{d\tilde{u}_x}. \quad (2.105)$$

Compatibilizando métodos analíticos com os resultados experimentais de Stratford (1966), que descrevem detalhadamente a camada limite turbulenta sobre placa plana, desde seu início até o colapso devido ao descolamento provocado pelo surgimento de gradientes adversos de pressão, Nakayama e Koyama propuseram a seguinte relação para u^* :

$$u^* = \frac{1}{K^*} \left[3(t - t_s) + \ln \left(\frac{t_s + 1}{t_s - 1} \frac{t - 1}{t + 1} \right) \right], \quad (2.106)$$

com

$$t = \sqrt{\frac{1 + 2\tau^*}{3}}, \quad \tau^* = 1 + p^* y^* \quad \text{e} \quad K^* = \frac{0,419 + 0,539p^*}{1 + p^*}, \quad (2.107)$$

sendo t_s um valor de t correspondente a uma posição y_s^* onde a velocidade é pequena se comparada a u^* . A determinação de y_s^* é feita com a relação de Chen (1986), aqui representada pela formulação:

$$y_s^* = \frac{e^{K C}}{1 + p^{*0,34}}, \quad (2.108)$$

Onde as constantes K e C são as mesmas da lei de parede logarítmica clássica. Por ser baseada na equação da energia cinética de turbulência, essa lei de parede é capaz de prever o comportamento do escoamento quando submetido a gradientes adversos de

pressão, melhorando muito o desempenho do modelo $\kappa - \varepsilon$ em escoamentos recirculantes, ao custo de elevar a demanda computacional e a instabilidade numérica, quando comparada à lei logarítmica clássica.

2.5.4 Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

Através de uma análise da estrutura assintótica da camada limite, Cruz e Silva Freire (1998) derivam um novo sistema de equações para a camada limite turbulenta, tomando como base para a análise assintótica uma região de descolamento e posterior recolamento da camada limite. As expansões assintóticas são:

$$u(x, y) = u_1(x, y) + \epsilon u_2(x, y) , \quad (2.109)$$

$$v(x, y) = \frac{\eta}{\Delta} [v_1(x, y) + \epsilon v_2(x, y)] , \quad (2.110)$$

$$p(x, y) = p_1(x, y) + \epsilon p_2(x, y) , \quad (2.111)$$

$$u'_i(x, y) = \epsilon u'_{i1}(x, y) + \epsilon^2 u'_{i2}(x, y) , \quad (2.112)$$

e com as transformações de espaço:

$$x_\Delta = \frac{x}{\Delta(\epsilon)} , \quad y_\eta = \frac{y}{\eta(\epsilon)} , \quad \hat{u}_i(x_\Delta, y_\eta) = u_i(x, y) . \quad (2.113)$$

Estas expansões são então aplicadas às equações de quantidade de movimento e da continuidade, juntamente com as condições de contorno de tensão na parede e balanço entre as tensões turbulentas e viscosas:

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_w \quad e \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{-\rho u'_i v'_{i2}} \right) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x} . \quad (2.114)$$

Próximo ao ponto de descolamento, a velocidade de atrito, (u_f) , não é um bom parâmetro de referência, uma vez que tende a zero. Através da análise assintótica, Cruz e Silva Freire (1998) determinaram uma velocidade de referência que deve ser utilizada nestes casos, definida como a maior raiz real da equação algébrica:

$$u_R^3 - \frac{\tau_w}{\rho} u_R - \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (2.115)$$

que no limite $\Delta \rightarrow 0$ fornece:

$$u_R \rightarrow \left(\frac{\nu}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (2.116)$$

recuperando a expressão proposta por Stratford (1959) e Townsend (1976), que estudaram experimentalmente e analiticamente a estrutura da camada limite turbulenta em regiões de baixa velocidade. A solução proposta para esta análise assintótica é:

$$u = \frac{\tau_w}{|\tau_w|} \frac{2}{K} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{dp_w}{dx} y_\delta} + \frac{\tau_w}{|\tau_w|} \frac{u_f}{K} \ln \left(\frac{y_\delta}{L_c} \right), \quad (2.117)$$

em que L_c representa uma escala característica de comprimento, definida por:

$$L_c = \frac{\sqrt{\left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)^2 + 2 \frac{\nu}{\rho} \frac{dp_w}{dx} u_R - \frac{\tau_w}{\rho}}}{\frac{1}{\rho} \frac{dp_w}{dx}}, \quad (2.118)$$

em que $K = 0,4$ é a constante de von Kármán. Esta lei de parede recai para a lei logarítmica em regiões longe do descolamento e após ao recolamento, e perto do ponto de separação, recai-se em uma equação similar à de Stratford (1959). Igualmente à lei de Nakayama e Koyama (1984), esta lei é bem mais sofisticada do que a lei logarítmica clássica, também é capaz de captar efeitos de gradientes adversos de pressão. As desvantagens também são as mesmas - torna o cálculo mais instável numericamente, e aumenta a demanda computacional.

2.5.5 Condições de contorno para κ e ε

Na região interna da camada limite, as equações de transporte para a energia cinética de turbulência e para sua taxa de dissipação são reduzidas ao equilíbrio entre produção e dissipação, levando às seguintes relações para κ e para ε na parede:

$$\kappa_p = \frac{u_f^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad \text{e} \quad \varepsilon_p = \frac{u_f^3}{K y_\delta} . \quad (2.119)$$

A velocidade de atrito, em todas as relações para as leis de parede anteriores, é calculada de acordo com a seguinte expressão:

$$u_f^2 = \left[\frac{1}{Re} \frac{\partial (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{t}})}{\partial \hat{n}} - \overline{u_x'' u_y''} \right]_{y_\delta} = \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t} \right) \frac{\partial (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{t}})}{\partial \hat{n}} \right]_{y_\delta} , \quad (2.120)$$

onde $\hat{\mathbf{t}}$ representa o vetor tangencial à superfície da parede e $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor normal à parede, ambos no ponto considerado para o cálculo. Esta metodologia para a obtenção de valores de κ e ε na parede é válida somente na ausência de gradientes adversos de pressão. Porém, nesta condição, a hipótese de equilíbrio não é mais válida como mostrado no trabalho de Arora e Azad (1980).

Na ausência de um modelo físico, capaz de relacionar os níveis de produção e dissipação turbulenta com o gradiente de pressão, um procedimento possível é a inclusão da representação da velocidade de atrito em função do gradiente de pressão nas relações para κ e ε acima, resultando em:

$$\kappa_p = \left(u_f^2 + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} y_\delta \right) (\sqrt{C_\mu})^{-1} \quad \text{e} \quad \varepsilon_p = \left(u_f^3 + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} y_\delta \right)^{\frac{3}{2}} (K y_\delta)^{-1} . \quad (2.121)$$

As expressões de Arora e Azad (1980) melhoram a previsão de descolamento e recolamento da camada limite, desde que a lei de parede utilizada seja sensível aos valores calculados. Os resultados obtidos por Soares e Fontoura Rodrigues (2004) mostram essa melhora em relação a outros modelos $\kappa - \varepsilon$ utilizados na literatura.

2.5.6 Lei logarítmica para temperatura de Cheng e Ng (1982)

Para o cálculo da condição de contorno de temperatura nas simulações de alto-Reynolds do modelo $\kappa - \varepsilon$, é empregada uma a temperatura de atrito é definida por:

$$T_f u_f = \left[\frac{1}{Re Pr} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \hat{n}} - \overline{u''_x T''} \right]_{y_\delta} = \left[\left(\frac{1}{Re Pr} + \frac{1}{Re_t Pr_t} \right) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \hat{n}} \right]_{y_\delta} , \quad (2.122)$$

onde \hat{n} é um vetor unitário perpendicular à parede. As leis de parede adotadas para este trabalho, para a sub-camada laminar e para a região turbulenta, propostas por Cheng e Ng (1982), análogas à lei logarítmica para a velocidade, são respectivamente:

$$\frac{(T_0 - \tilde{T})_{y_\delta}}{T_f} = y^* Pr , \text{ e} \quad (2.123)$$

$$\frac{(T_0 - \tilde{T})_{y_\delta}}{T_f} = \frac{1}{K_{Ng}} \ln(y^*) + C_{Ng} , \quad (2.124)$$

onde T_0 representa a temperatura na parede e K_{Ng} e C_{Ng} são constantes determinadas experimentalmente por Cheng e Ng (1982), valendo respectivamente 0,8 e 12,5.

Para a implementação numérica, o limite entre estas duas expressões para a região interna da camada limite é de $y^* = 15,96$. Para valores de y^* abaixo deste limite, utiliza-se a expressão (2.123), para a sub-camada viscosa, e acima deste limite é utilizada a expressão (2.124) que representa a camada plenamente turbulenta. Tal qual as leis de velocidade, esta lei de parede é utilizada somente com o modelo $\kappa - \varepsilon$.

2.5.7 Lei de Cruz e Silva Freire para temperatura (1998)

Considerando a mesma análise assintótica da lei de parede de velocidade, aplicada à temperatura:

$$T(x, y) = T_1(x, y) + \epsilon T_2(x, y) , \quad (2.125)$$

Cruz e Silva Freire (2002) derivaram uma lei de parede para a temperatura, aplicando esta aproximação assintótica à equação da energia:

$$\frac{T_w - T}{Q_w} = \frac{Pr_t}{K \rho C_p u_f} \ln \frac{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{dp_w}{dx} y_\delta} - \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}}{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{dp_w}{dx} y_\delta} + \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}} + C_q , \quad (2.126)$$

com os seguintes parâmetros:

$$C_q = \frac{Pr_t}{K\rho C_p u_R} \ln \frac{4Eu_R^3}{\nu \left| \frac{dp_w}{dx} \right|} + AJ, \quad (2.127)$$

$$AJ = 1.11 Pr_t \sqrt{\frac{AX}{K}} \left(\frac{Pr}{Pr_t} - 1 \right) \left(\frac{Pr}{Pr_t} \right)^{0.25}, \quad (2.128)$$

$$AX = 26 \frac{\left| \frac{\tau_w}{\rho} \right|^{\frac{1}{2}}}{u_R}, \quad (2.129)$$

considerando, ainda, que $K = 0,4$ é a constante de von Kármán e $E = 9,8$ é uma constante da lei de parede. Conforme mostrado em Soares e Fontoura Rodrigues (2004), esta lei de parede fornece resultados muito parecidos à lei térmica logarítmica, exceção feita em relação a casos de escoamentos recirculantes e de convecção natural, onde o uso desta lei aumenta a previsão do coeficiente de troca de calor.

2.6 Condições de contorno - modelo $\kappa - \omega$

Em simulações de baixo-Reynolds, a camada limite é resolvida diretamente das equações médias do escoamento, ao contrário das simulações a alto-Reynolds, que utilizam leis de parede para velocidade e temperatura.

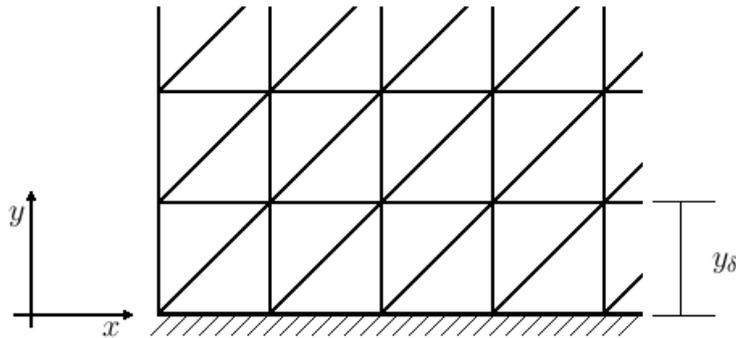


Figura 2.8: Esquema de simulação a baixo-Reynolds

Como já mostrado, em modelos de baixo-Reynolds como o modelo $\kappa - \omega$ proposto, é necessária a utilização de pelo menos uma função de amortecimento no cálculo da viscosidade turbulenta. A grande maioria dos modelos baixo-Reynolds clássicos como o SST $\kappa - \omega$ de Menter (1994), utiliza parâmetros variáveis no lugar das constantes

do modelo, outros chegam a utilizar números de Schmidt variáveis, comprometendo seriamente a estabilidade numérica do algoritmo.

O presente modelo se utiliza de somente uma função de amortecimento, para o cálculo da viscosidade turbulenta. À excessão de ω , todas as condições de contorno são especificadas diretamente na fronteira da malha de cálculo, que em simulações de baixo-Reynolds é definida exatamente sobre a fronteira física do domínio, conforme mostra a figura (2.8).

Ressalta-se que o parâmetro y_δ passa a ser definido diretamente da malha, como a distância relativa entre o nó de parede e o primeiro nó interno, passando a ser um parâmetro da própria malha de cálculo. Portanto, a topologia da malha é mais rigorosa do que exigem as simulações a alto-Reynolds.

As condições de contorno parietais são sempre de velocidade e energia cinética de turbulência nulas. Em casos térmicos, a temperatura (ou o fluxo de calor) também é especificada diretamente com o valor definido. Apenas a condição de contorno de ω é calculada, uma vez que na parede ω tende a infinito. Bredberg (2002) deduz uma relação a partir da equação de ω com o termo de difusão cruzada (2.84) na forma:

$$\omega_w = \frac{2\nu}{C_\mu y_\delta^2}, \quad (2.130)$$

sendo esta relação válida somente para $y^* \leq 2,5$, conforme demonstrado por Wilcox (1998), que também no mesmo trabalho, propõe serem necessários entre 7 a 10 nós nesta região para que a integração espacial não seja degradada. Porém, Bredberg (1999) reformula sua previsão inicial de que esta necessidade pode ser bastante relaxada sem afetar significativamente os resultados gerados, inclusive de propriedades críticas como o número de Nusselt em escoamentos térmicos, reduzindo-a a 2 nós somente dentro deste limite. Ainda assim, há a necessidade de um grau de refinamento da malha na região parietal muito maior do que em simulações com modelos a alto-Reynolds.

Em seu trabalho, Bredberg (2002) impõe a condição de contorno para ω diretamente no nó de fronteira e no primeiro nó interior, sob a argumentação de impor uma derivada normal correta ao campo de ω . Esta implementação é inviável no código TURBO-2D, e uma alternativa foi implantada.

Neste trabalho é proposto o ajuste do valor de ω na parede para um valor ligeiramente superior ao da expressão (2.130), sem perder a dependência com y_δ^{-2} e possibilitando, numericamente, uma melhor aproximação para o cálculo da derivada normal ao campo de ω . Dessa forma, a condição de contorno foi implementada no código TURBO-2D com a seguinte expressão, trocando-se C_μ por $C_{\omega 2}$ em (2.130):

$$\omega_w = \frac{2\nu}{(C_{\omega 2})y_\delta^2}. \quad (2.131)$$

3 Tratamento numérico

Esta seção está dividida em dois tópicos principais: a discretização espacial e a discretização temporal, utilizadas no código TURBO-2D. Neste código, estão implementados os dois modelos de turbulência apresentados: o modelo $\kappa-\varepsilon$ alto-Reynolds apresentado, e o modelo $\kappa-\omega$ baixo-Reynolds proposto. Ambos utilizam a mesma metodologia de solução espacial e temporal, apresentadas a seguir.

3.1 Discretização espacial - Método dos Elementos Finitos

O esquema de solução espacial adotado neste trabalho é o método dos elementos finitos (MEF). Apesar de ter implementação relativamente mais complexa do que outros métodos clássicos em simulação numérica de escoamentos, como o método de diferenças finitas e o método dos volumes finitos (MVF), o MEF possui a grande vantagem de poder discretizar facilmente quaisquer geometrias complexas. Para se utilizar MVF em geometrias complexas e curvas, devem ser adotadas transformações de coordenadas espaciais com custo computacional equivalente ao MEF. Devido à facilidade de discretização espacial e generalidade quanto à geometria estudada, o MEF é largamente utilizado em aplicações estruturais, ainda que pouco difundido na mecânica dos fluidos computacional.

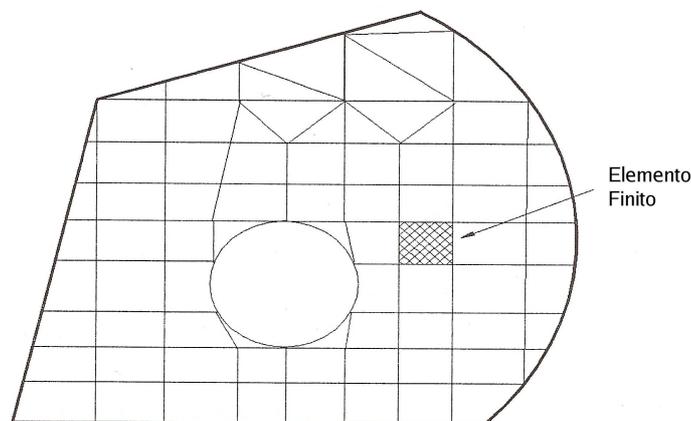


Figura 3.1: Discretização espacial via elementos finitos

Ao contrário do MVF, no qual as derivadas parciais das equações são diretamente modeladas através de balanço nas fronteiras dos volumes de controle por meio dos valores conhecidos das variáveis, o MEF transforma o problema diferencial em um problema variacional. Uma breve discussão sobre os princípios variacionais que fundamentam o MEF está apresentada no apêndice “F”.

Basicamente, o MEF é o resultado da aplicação de princípios variacionais na extremização de funcionais para a resolução de uma ou de um sistema de equações diferenciais. Tomemos como exemplo a equação da continuidade, equação (2.1). Inicialmente, cada equação diferencial que se deseja resolver define um funcional nulo (colocando-se todos os seus termos de um lado da igualdade):

$$G \left(x_i, t, \rho(x_i, t), \frac{\partial \rho}{\partial x_i}, \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 . \quad (3.1)$$

Cada função, suposta como solução da equação diferencial a ser resolvida, por exemplo $v = v(x_i, t)$, é aproximada por uma função na seguinte forma, ainda em relação ao exemplo tomado com a equação da continuidade:

$$\rho(x_i, t) \cong v(x_i, t) = \sum_{n=1}^N \rho_n(t) \phi_n(x_i) , \quad (3.2)$$

onde $\rho_n(t)$ representam os valores da função nos pontos (x_i) considerados, chamados de parâmetros nodais, $\phi_n(x_i)$ são denominadas de *funções de forma* e N é o número de funções linearmente independentes tomadas para aproximação da solução. É importante ressaltar que a função aproximadora $v(x_i, t)$ também satisfaz as condições de contorno do problema. A próxima etapa é resolver o sistema de equações obtido da seguinte integral (ver apêndice “F”), quando são aplicadas as condições de contorno:

$$\int_S G \left(x_i, t, v(x_i, t), \frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial t} \right) \phi_n(x_i) dS = 0 . \quad (3.3)$$

Os métodos aproximados clássicos, como o método de Rayleigh-Ritz e o método dos resíduos ponderados (mais em Assan, 2003) estimam as funções aproximadoras arbitrariamente. Obviamente, esses métodos possuem grande limitação prática, pois não

há um método ou técnica bem definidos para se saber *a priori* como é a forma geral da função aproximadora mais próxima da solução exata, e sua precisão depende fortemente de quão boa é a estimativa da função aproximadora.

No MEF o domínio de cálculo é particionado em pequenos sub-domínios, chamados de elementos finitos, nos quais as equações do problema são resolvidas de forma acoplada entre os elementos, e a aproximação é realizada elemento por elemento. A figura (3.1) mostra um exemplo de discretização de um domínio de interesse pelo MEF.

A discretização espacial implementada no código TURBO 2D baseia-se no método dos elementos finitos bidimensional com elementos triangulares, com o método de Galerkin para definir as funções de interpolação espacial do problema. No método de Galerkin, as funções de forma são definidas a partir dos próprios elementos triangulares. A figura (3.2) mostra como são derivadas as funções de forma para elementos triangulares - note que as funções ϕ_n são unitárias nos pontos considerados e se anulam nos outros, de forma a atender as condições de contorno do problema.

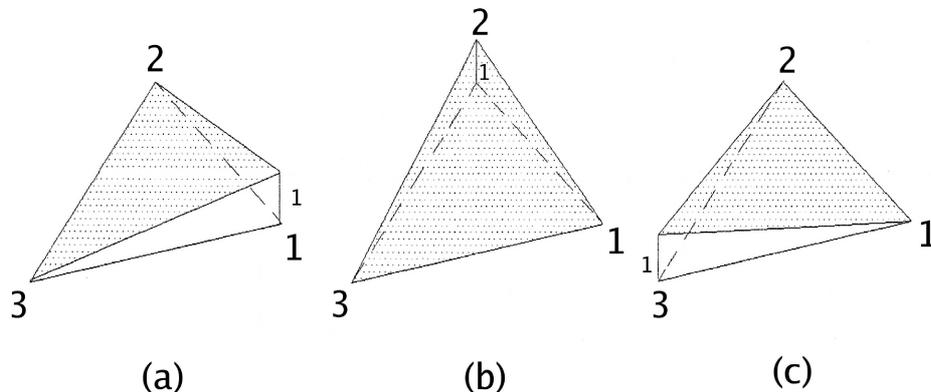


Figura 3.2: Elementos triangulares e funções de forma bidimensionais (área sombreada)

Cada elemento triangular é composto pelos nós e pelas arestas que o definem. Os nós são numerados globalmente (em relação ao número total de nós do domínio) e numerados em cada elemento de 1 a 3 no sentido anti-horário. As equações são resolvidas em cada elemento, com o uso de funções aproximadoras definidas pelas equações de plano, mostrados exemplificadamente na figura (3.2). As equações ϕ_n , definidas a cada nó, são definidas em elementos triangulares como (em notação cartesiana bidimensional $x - y$):

$$\phi_n(x, y) = \frac{1}{2A} [x_j y_k - x_k y_j + x(y_j - y_k) + y(x_k - x_j)] ; n, j, k = 1, 2, 3 . \quad (3.4)$$

Fica claro que as derivadas da equação diferencial passam a ser aproximadas por:

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial x} = \frac{1}{2A}(y_j - y_k) ; n, j, k = 1, 2, 3 ; e \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial y} = \frac{1}{2A}(x_k - x_j) ; n, j, k = 1, 2, 3 , \quad (3.6)$$

linearizando o problema diferencial, para cada elemento finito do domínio discreto.

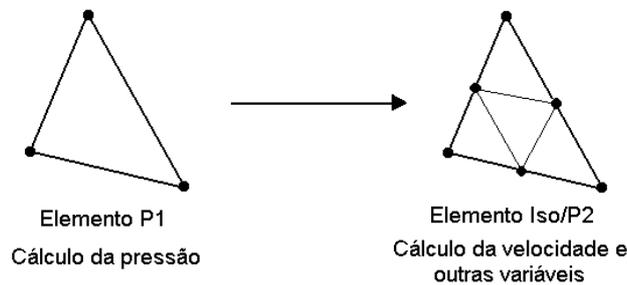


Figura 3.3: Discretização espacial via elementos finitos P1/IsoP2

Para resolver o acoplamento pressão-velocidade, o domínio de cálculo é discretizado em elementos triangulares P1/IsoP2, nos quais a velocidade e a pressão são interpoladas linearmente, sendo a pressão calculada sobre um elemento triangular e a velocidade e demais variáveis sobre um conjunto de quatro elementos construídos pela repartição uniforme do elemento utilizado para o cálculo da pressão, como mostrado na figura (3.3).

Essa metodologia de calcular a pressão em uma malha P1, dita *malha grossa*, e as demais variáveis resolvidas na malha IsoP2, denominada *malha fina* é possível e fisicamente coerente pois os escoamentos estudados são todos a baixos números de Mach, e portanto não é necessária alta resolução dos campos de pressão calculados. Dessa forma, as equações do problema na forma diferencial são transformadas em equações discretas no domínio com os seguintes passos:

1. Aproximação da variável em questão pela expressão (3.2), utilizando a equação (3.4) como equação de forma;
2. Obtenção de um funcional nulo a partir da forma forte (diferencial) das equações, como na equação (3.1);

3. Obtenção da forma fraca (discreta) das equações, resolvendo a equação (3.3), aplicando as condições de contorno, quando aplicáveis;
4. O sistema de equações lineares é então resolvido, pelo método de resolução escolhido; no caso do código TURBO-2D, o método dos gradientes conjugados é aplicado.

Ressalta-se que a distinção entre forma forte (diferencial) e forma fraca (discreta) serve para ressaltar o fato de que, na forma forte, as condições estabelecidas na caracterização do problema analisado são satisfeitas em todos os pontos do domínio, provendo uma solução contínua, enquanto, na forma fraca, apenas em pontos determinados, provendo uma solução discreta.

Para resolver o acoplamento pressão-velocidade, é utilizada uma variação do método de Uzawa, proposto por Buffat (1981), que calcula iterativamente os campos de velocidade e pressão a partir de condições iniciais estimadas até que o resíduo pré-determinado seja atingido, incluindo neste processo um pré-condicionamento da matriz dos coeficientes, implementado diretamente no algoritmo de resolução, pois o cálculo numérico é realizado pelo método de gradientes conjugados.

Todas os esquemas de aproximação numérica estão sujeitos a um certo nível de erro, seja ele proveniente do truncamento de uma expansão em série de Taylor, ou pela ordem do esquema de diferenciação utilizado para a aproximação. As principais consequências deste erro nas equações do movimento é o aparecimento de instabilidades numéricas na forma de oscilações numéricas, desprovidas de sentido físico.

A aplicação do método de Galerkin às equações do movimento não foge à essa regra, e induz o surgimento de instabilidades e oscilações numéricas desprovidas de sentido físico. Este fato ocorre devido à formulação centrada do método de Galerkin aplicada ao problema convectivo, que é parabólico, como mostrado no trabalho de Huges e Brooks (1979). Para contornar este problema, é utilizado no código TURBO-2D o método de difusão balanceada proposto por Huges e Brooks (1979) e Kelly et al (1980), implementado por Brun (1988), que consiste em acrescentar à equação de Reynolds um termo de difusão artificial com capacidade de atuação somente no sentido do escoamento.

Esse efeito é mais notado nas simulações de baixo-Reynolds, uma vez que a degeneração dos elementos na região parietal é inevitável, pois os elementos finitos nesta região ficam

com a razão de aspecto extremamente alongada na direção tangencial à parede. Esse fenômeno é capaz inclusive de gerar assimetria axial em escoamentos modelados com baixo-Reynolds. A saída é diminuir ao máximo a degeneração dos elementos na região da parede e não abrir mão do método de difusão balanceada, sem o qual as simulações baixo-Reynolds têm a convergência numérica seriamente comprometida, conforme pôde ser observado nas simulações desenvolvidas neste trabalho.

3.2 Discretização temporal e o algoritmo de resolução

Para o código TURBO 2D, no sistema de equações é tomada uma aproximação de primeira ordem para a derivada temporal, obtida com um esquema semi-implícito seqüencial com erro de truncamento de primeira ordem, o que permite a linearização total do sistema de equações a cada passo no tempo. O algoritmo proposto por Brun (1988) parte de um campo inicial conhecido no instante $n\Delta t$, calculando o momento, a pressão, a temperatura, a massa específica, a energia cinética de turbulência e a variável turbulenta secundária (ε ou ω) em um instante $(n+1)\Delta t$, onde n é um número inteiro e Δt é um intervalo de tempo que define o passo com que o código escala a resolução das equações no tempo.

Esta seqüência de cálculos é dividida em quatro etapas principais. Na primeira, o campo de temperatura no instante $(n+1)\Delta t$ é obtida utilizando a equação da energia discretizada no tempo, dada pela relação:

$$\bar{\rho}^n \left(\frac{\tilde{T}^{n+1} - \tilde{T}^n}{\Delta t} + \tilde{u}_j^n \frac{\partial \tilde{T}^{n+1}}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{1}{Re Pr} + \frac{1}{Re_t^n Pr_t} \right) \frac{\partial \tilde{T}^{n+1}}{\partial x_j} \right]. \quad (3.7)$$

Na segunda etapa, a massa específica é obtida no instante $(n+1)\Delta t$ através da equação de estado:

$$\bar{\rho}^{n+1} = \frac{1}{1 + \tilde{T}^{n+1}}. \quad (3.8)$$

Na terceira etapa, os campos de momentum e de pressão são calculados no instante $(n+1)\Delta t$, utilizando para isso o algoritmo de minimização de resíduos de Uzawa proposto por Buffat (1981), com o sistema acoplado de equações:

$$\frac{\bar{\rho}^{n+1} - \bar{\rho}^n}{\Delta t} + \frac{\partial (\bar{\rho}^{n+1} \tilde{u}_i^{n+1})}{\partial x_i} = 0, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}^{n+1} \left(\frac{\tilde{u}_i^{n+1}}{\Delta t} - \frac{\bar{\rho}^n \tilde{u}_i^n}{\bar{\rho}^{n+1} \Delta t} + \tilde{u}_j^n \frac{\partial \tilde{u}_i^{n+1}}{\partial x_j} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}^{*n+1}}{\partial x_i} + \frac{1}{Fr} \bar{\rho}^{n+1} g_i \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t^n} \right) \left(\frac{\partial \tilde{u}_i^{n+1}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j^{n+1}}{\partial x_i} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

Na quarta e última etapa, as variáveis turbulentas são calculadas no instante $(n + 1)\Delta t$. Notar que apenas uma das equações de variáveis secundárias, (3.12) ou (3.13), é resolvida conforme a escolha do modelo de turbulência utilizado:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}^{n+1} \left(\frac{\kappa^{n+1} - \kappa^n}{\Delta t} + \tilde{u}_j^n \frac{\partial \kappa^{n+1}}{\partial x_j} \right) &= +\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t^n \sigma_\kappa} \right) \left(\frac{\partial \kappa^{n+1}}{\partial x_j} \right) \right] \\ &+ \Pi^{n+1} - \bar{\rho}^n \frac{\varepsilon^n}{\kappa^n} \kappa^{n+1} + \frac{\bar{\rho}^{n+1} \beta g_i}{Re_t^n Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}^{n+1}}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}^{n+1} \left(\frac{\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n}{\Delta t} + \tilde{u}_j^n \frac{\partial \varepsilon^{n+1}}{\partial x_j} \right) &= +\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t^n \sigma_\varepsilon} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon^{n+1}}{\partial x_j} \right) \right] \\ &+ \frac{\varepsilon^n}{\kappa^n} \left(C_{\varepsilon 1} \Pi^{n+1} - C_{\varepsilon 2} \bar{\rho}^n \varepsilon^{n+1} \right. \\ &\left. + C_{\varepsilon 3} \frac{\bar{\rho}^{n+1} \beta g_i}{Re_t^n Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}^{n+1}}{\partial x_i} \right), \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}^{n+1} \left(\frac{\partial \omega^{n+1} - \omega^n}{\partial t} + \tilde{u}_i^n \frac{\partial \omega^{n+1}}{\partial x_i} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t^n \sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega^{n+1}}{\partial x_i} \right] + \frac{\omega^n}{\kappa^n} C_{\omega 1} \Pi^{n+1} \\ &- C_{\omega 2} \bar{\rho}^n \omega^n \omega^{n+1} + \frac{\omega^n}{\kappa^n} \left(C_{\omega 3} \frac{\bar{\rho}^{n+1} \beta g_i}{Re_t^n Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}^{n+1}}{\partial x_i} \right) \\ &+ \frac{C_{\omega 4}}{\kappa^n} \left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t^n \sigma_\omega} \right) \frac{\partial \kappa^n}{\partial x_i} \frac{\partial \omega^n}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

com o termo de produção Π e o termo de pressão modificada \bar{p}^* dados por:

$$\Pi^{n+1} = \left[\left(\frac{1}{Re_t^n} \right) \left(\frac{\partial \tilde{u}_i^{n+1}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j^{n+1}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left(\bar{\rho}^n \kappa^n + \frac{1}{Re_t^n} \frac{\partial \tilde{u}_l^{n+1}}{\partial x_l} \right) \delta_{ij} \right] \frac{\partial \tilde{u}_i^{n+1}}{\partial x_j} \quad (3.14)$$

$$\bar{p}^{*n+1} = \bar{p}^{n+1} + \frac{2}{3} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t^n} \right) \frac{\partial \tilde{u}_l^{n+1}}{\partial x_l} + \bar{\rho}^{n+1} \kappa^{n+1} \right]. \quad (3.15)$$

Por último é atualizado o valor para o número de Reynolds turbulento, também em função do modelo de turbulência utilizado:

$$\frac{1}{Re_t^{n+1}} = C_\mu \bar{\rho}^{n+1} \frac{(\kappa^{n+1})^2}{\varepsilon^{n+1}}, \quad (3.16)$$

ou

$$\frac{1}{Re_t^{n+1}} = f_\mu^n \bar{\rho}^{n+1} \frac{\kappa^{n+1}}{\omega^{n+1}}, \quad (3.17)$$

com f_μ^n calculada com $(\kappa^n)/(\omega^n \nu)$ como argumento. Como as condições de contorno são calculadas explicitamente (mesmo a condição de contorno para ω nos cálculos a baixo-Reynolds), ou seja, baseadas nos valores das propriedades no instante $n\Delta t$ para determinar as condições para o instante $(n+1)\Delta t$, é gerada uma forte instabilidade numérica característica dos procedimentos explícitos.

Para eliminar esta instabilidade indesejável, é empregado o algoritmo de mínimos resíduos proposto por Fontoura Rodrigues (1991), que adota um cálculo iterativo seqüencial baseado na minimização dos erros resultantes do cálculo da velocidade de fricção, definidos em módulo, para uma iteração i em um instante $(n+1)\Delta t$, por:

$$(ERRO)_i^{n+1} = \left\| (u_f^2)^* - (u_f^2)_i^{n+1} \right\|, \quad (3.18)$$

onde as barras duplas indicam o valor absoluto dos vetores, o valor de $(u_f^2)^*$ é obtido das leis de parede no instante $(n+1)\Delta t$ (ou diretamente do campo de velocidades, no caso de simulações baixo-Reynolds) e o valor de $(u_f^2)_i^{n+1}$ é obtido com uma relação numérica de recorrência do próprio algoritmo de minimização.

O método de mínimos resíduos de Fontoura Rodrigues (1991) é essencial na convergência numérica de cálculos a alto-Reynolds, principalmente em geometrias mais complexas ou com o uso de leis de parede mais sofisticadas, como as leis de Nakayama e Koyama (1984) e Cruz e Silva Freire (1998). Esse método também atua positivamente na estabilidade numérica de cálculos a baixo-Reynolds, pois ao recalculer os campos de velocidade com base na minimização de u_f^2 , possibilita o uso de passos de tempo mais elevados e relaxa o requerimento de refinamento excessivo na região parietal, em comparação à sua não utilização.

4 Resultados

Neste capítulo são apresentados os casos teste utilizados para a validação da implementação do modelo $\kappa - \omega$ estendido. Inicialmente, serão apresentados os casos isotérmicos, que justificaram a escolha do modelo isotérmico de Bredberg (2002): o canal divergente de Driver e Seegmiller (1985) e a colina abrupta de Loureiro et al. (2005). Em seguida serão apresentados os casos de camada limite térmica: o escoamento sobre placa plana fortemente aquecida de Ng (1981) e a convecção natural sobre placa vertical de Tsuji e Nagano (1988), selecionados para validar a modificação térmica ao modelo de Bredberg (2002) proposta neste trabalho.

4.1 Canal divergente de Driver e Seegmiller (1985)

O canal divergente de Driver e Seegmiller (1985) é um caso teste amplamente empregado na validação de algoritmos de modelagem numérica de escoamentos turbulentos de camada limite, muito bem documentado com dados experimentais e outras simulações numéricas. Os dados experimentais em formato eletrônico encontram-se disponíveis no site da comunidade europeia ERCOFTAC ¹.

Este é um caso de escoamento turbulento incompressível em um duto de perfil retangular, que passa por uma seção de expansão de razão 9 : 8, com a parede superior (oposta ao degrau) inclinável a partir do ponto do degrau. A configuração experimental era composta por um túnel de desenvolvimento do escoamento, com comprimento de 110 vezes a altura da seção de entrada, e a região de teste do degrau, feita com expansão de 9 : 8 a fim de reduzir a influência de variações no gradiente de pressão externo (na saída do duto) devido à expansão súbita, e largura doze vezes o tamanho da altura do degrau, para diminuir os efeitos de tridimensionalidade. A figura (4.1) exemplifica o caso estudado.

¹European Research Community on Flow, Turbulence and Combustion - <http://www.ercoftac.org>

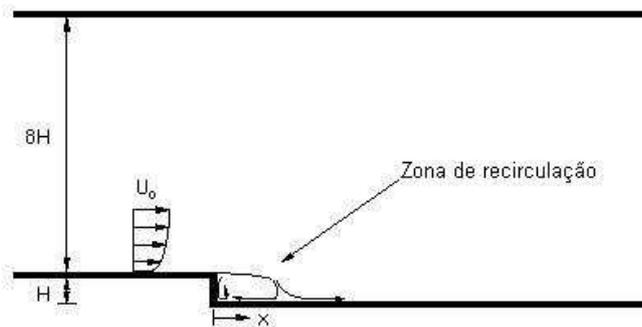


Figura 4.1: Canal divergente - Esquema da seção de teste.

Neste trabalho, apenas o caso com inclinação nula da parede superior foi considerado. O escoamento estudado possui número de Reynolds igual a 36400, baseado na altura do degrau, que na configuração experimental era de $12,7\text{mm}$, e considerando o fluido de trabalho (ar) como gás perfeito.

Tabela 4.1: Canal divergente - etapas da campanha de implementação e simulação.

Etapa	Tarefa	Objetivos e implementações
(1)	Implementação do modo baixo-Re e do modelo de turbulência.	Implementar o modelo $\kappa - \omega$ segundo a equação (2.79), contendo todos os termos deduzidos.
(2)	Simulação numérica do escoamento no duto anterior à seção do degrau.	Gerar escoamento turbulento plenamente desenvolvido, a ser utilizado como condição de contorno de entrada para a simulação do degrau.
(3)	Simulação numérica do escoamento na seção do degrau.	Avaliar a capacidade do modelo $\kappa - \omega$, a necessidade do termo proporcional a $\nabla^2 \kappa$ na equação de ω e determinar quais constantes do modelo são mais adequadas ao escoamento estudado.
(4)	Análise dos resultados.	Comparar os resultados obtidos com os dados experimentais e de outras simulações numéricas disponíveis.

Com o estudo deste caso teste, foram também avaliadas diferentes implementações possíveis para o modelo $\kappa - \omega$ proposto: a conveniência de emprego da equação (2.79)

com todos os termos deduzidos ou negligenciando o termo proporcional a $\nabla^2\kappa$, conforme a recomendação de Bredberg (2002); a seleção das constantes de calibração do modelo $\kappa - \omega$ com base nos dados experimentais, considerando os valores do modelo $\kappa - \varepsilon$ de Munhoz da Cruz (1989), seguindo as expressões da equação (2.79), e os valores propostos por Bredberg (2002), conforme equação (2.84). A tabela (4.1) mostra um resumo da campanha de implementação e das simulações realizadas com o caso do canal divergente.

Outra atividade de importância é a geração da malha de cálculo que discretiza o domínio de solução. Segundo Wilcox (1998), para que um modelo consiga captar a alta intensidade dos gradientes da região interna da camada limite, seriam necessários pelo menos 10 elementos de cálculo na malha nessa região, preferencialmente situados em $y^* \leq 2,5$. Porém, um estudo realizado por Bredberg (1999) sobre simulações de baixo-Reynolds mostra que essa exigência pode ser atendida por 2 elementos, desde que ambos estejam localizados na faixa de $y^* \leq 2,5$. Este trabalho é mostra que a influência no cálculo de propriedades críticas na parede, como o número de Nusselt em escoamentos térmicos, não variou mais do que 2% ao se utilizar 2 elementos no lugar dos 10 exigidos por Wilcox (1998).

Um estudo preliminar realizado no início do processo de validação do modelo estendido verificou a veracidade do resultado de Bredberg sobre a influência da malha de cálculo, no escoamento do duto de desenvolvimento do caso do canal divergente estudado.

Os resultados obtidos ao longo de todo o processo de validação deste algoritmo mostram que a distância à parede dos dois primeiros nós de uma malha fina pode ser determinada com base na escala característica de Kolmogorov:

$$\lambda_\delta \approx L_0 Re^{-(3/4)} , \quad (4.1)$$

onde λ_δ é a escala de Kolmogorov, e L_0 e Re são, respectivamente, o comprimento característico e o número de Reynolds do escoamento.

Se y_δ representa a distância à parede do primeiro nó da malha grossa P1, como na figura (2.8), em muitos casos a faixa de $y^* \leq 2,5$ é respeitada se $\lambda_\delta \leq y_\delta \leq 2\lambda_\delta$, pois na geração da malha fina de tipo IsoP2, a aresta de tamanho y_δ será sempre dividida ao meio, garantindo que o primeiro nó da malha fina esteja abaixo de λ_δ , e que o segundo

seja pouco superior a λ_δ , que pela própria definição, corresponde a $y^* = 1$. Seguindo essa metodologia, todas as malhas para o modelo $\kappa - \omega$ deste trabalho foram otimizadas com base nesses argumentos, e todas apresentaram y^* máximo menor do que 2,5 na região da parede, validando esta metodologia.

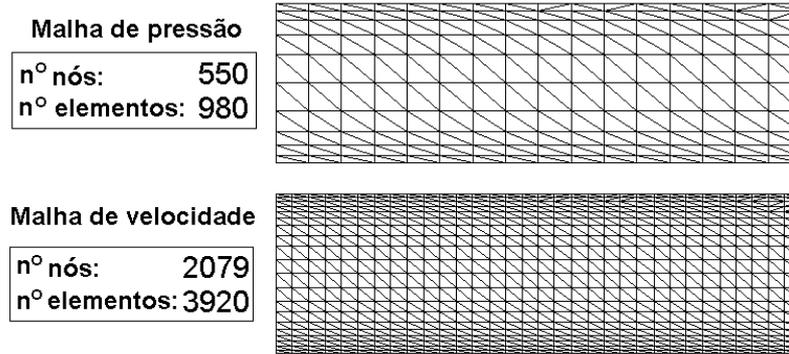


Figura 4.2: Canal divergente - Malha de desenvolvimento do escoamento de entrada para as simulações com TURBO-2D $\kappa - \varepsilon$ (alto-Reynolds).

Os resultados numéricos obtidos com o TURBO-2D $\kappa - \omega$ foram comparados com dados experimentais, com simulações numéricas obtidas com o TURBO-2D $\kappa - \varepsilon$, utilizando as quatro leis de parede apresentadas e com dados de outras simulações numéricas, dos códigos NPARC $\kappa - \varepsilon$ e WIND da NPARC/NASA ².

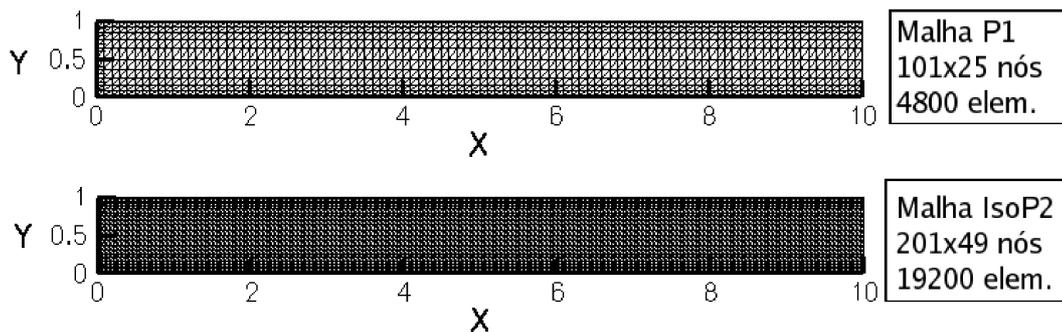


Figura 4.3: Canal divergente - Malha de desenvolvimento do escoamento de entrada para as simulações com TURBO-2D $\kappa - \omega$ (baixo-Reynolds) - malha P1 de pressão e IsoP2 para as demais variáveis.

Para o desenvolvimento dos perfis turbulentos plenamente desenvolvidos, as condições de contorno impostas nas simulações com TURBO-2D $\kappa - \varepsilon$ foram de cálculo de parede

²National Project for Application-oriented Research in CFD Alliance - Associação entre o Glenn Research Center - NASA e do Air Force Arnold Engineering Development Center, com contribuições da Boeing Company - <http://www.grc.nasa.gov/WWW/wind/valid/>

nos contornos sólidos, com y^* máximo igual a 25 para as leis de parede, perfil uniforme na entrada com $u = 44,2m/s$, $v = 0$ e $\kappa = 0$ e $\epsilon = 0$, e na saída do domínio, pressão nula e derivada nula para as demais variáveis. A massa específica e a viscosidade do fluido foram tomadas como constantes, com valores tomados à temperatura de referência de $293K$. A malha de cálculo utilizada nas simulações de alto-Reynolds está mostrado na figura (4.2). Para as simulações de baixo-Reynolds com o TURBO-2D $\kappa - \omega$, foram impostas as mesmas condições de contorno, a menos da utilização de leis de parede. A malha de cálculo utilizada nas simulações com o modelo $\kappa - \omega$ foi baseada diretamente da malha utilizada com o modelo $\kappa - \epsilon$, sendo apenas refinada na região da parede, conforme pode ser visualizado na figura (4.3).

Os perfis desenvolvidos nesta etapa foram então utilizados como condição de entrada para a seção de teste do degrau. As outras condições de contorno para a seção do degrau foram cálculo de parede com $y_{max}^+ = 5$ para as simulações com $\kappa - \epsilon$ (como indicado por Stratford, 1959), pressão nula e derivada nula na saída do domínio. O domínio de cálculo adotado para a seção do degrau está representado na figura (4.4).

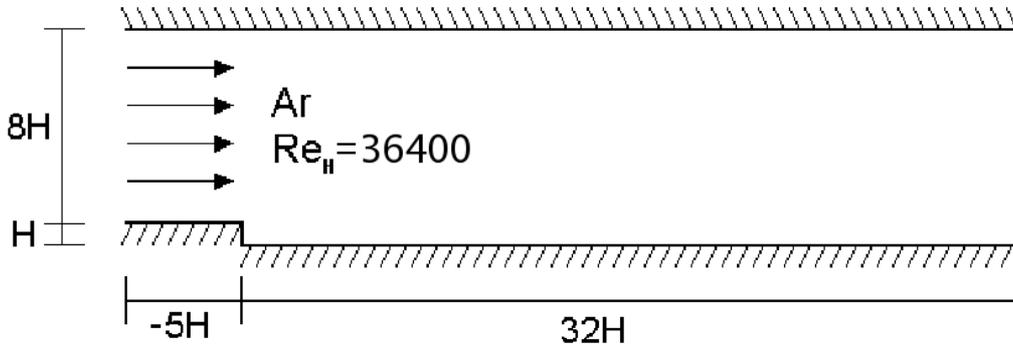


Figura 4.4: Canal divergente - Domínio de cálculo da seção de teste.

As malhas de cálculo utilizadas neste segunda etapa foram refinadas nas proximidades dos contornos sólidos e na região de recirculação, até uma distância de 10 alturas do degrau, a partir do ponto de descolamento. O refinamento teve por base os gradientes encontrados em uma simulação preliminar, com condições unitárias, utilizando um malha sem refinamento. As malhas utilizadas nas simulações estão mostradas nas figuras (4.5) e (4.6), respectivamente para as simulações com o modelo $\kappa - \epsilon$ e com o modelo $\kappa - \omega$. Vale ressaltar que a malha necessária para executar simulações com baixo-Reynolds exige praticamente quatro vezes mais nós do que com a simulação com alto-Reynolds.

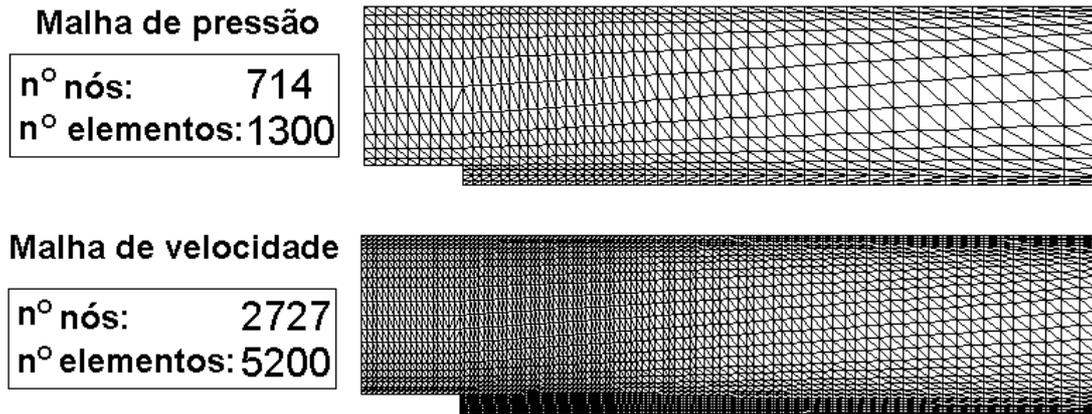


Figura 4.5: Canal divergente - Malha de cálculo da seção do degrau para as simulações com o modelo $\kappa - \varepsilon$.

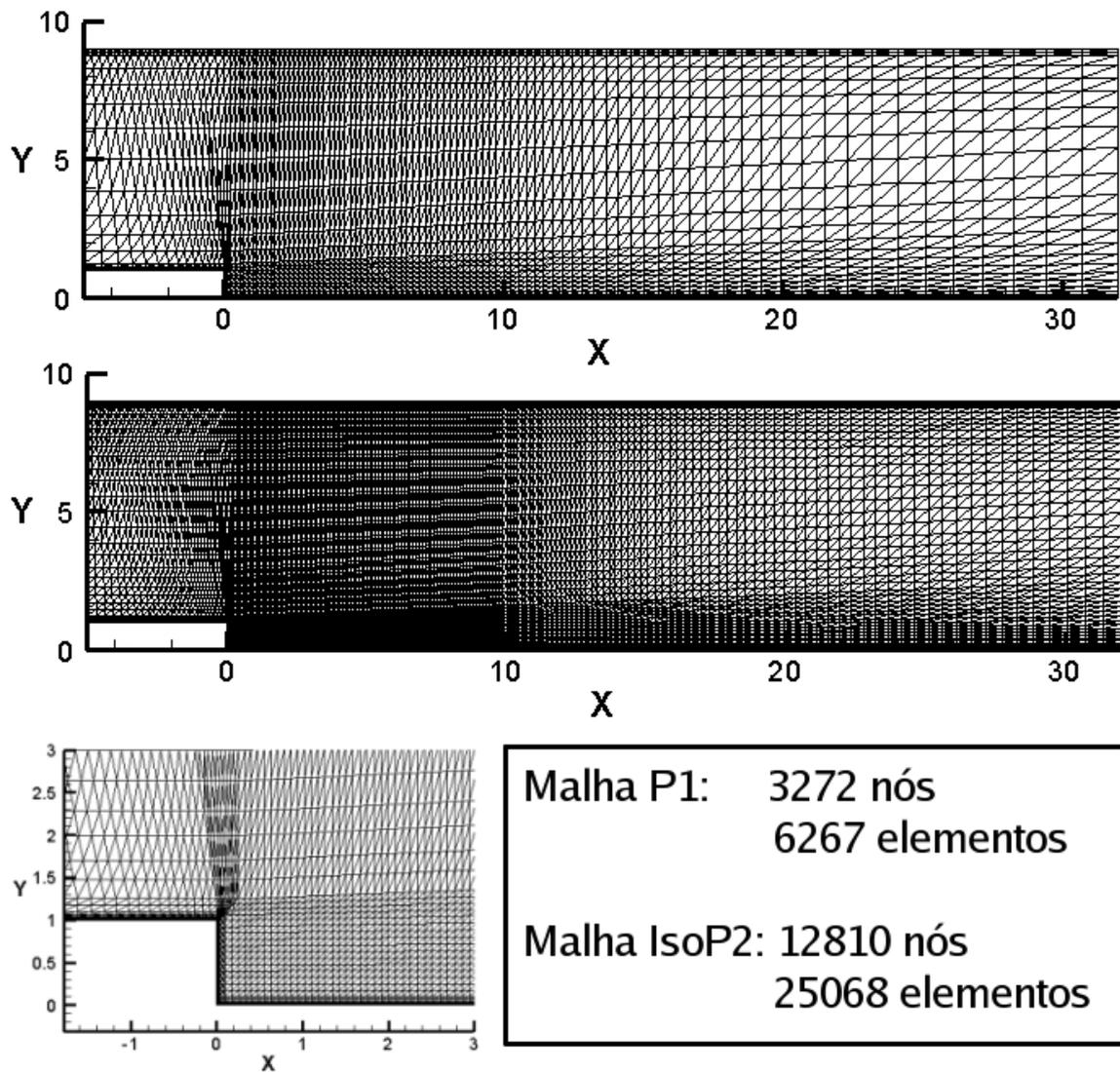


Figura 4.6: Canal divergente - Malha de cálculo da seção do degrau para as simulações com o modelo $\kappa - \omega$ - malha P1 no alto, malha IsoP2 no meio e abaixo está um detalhe do refinamento na região do degrau da malha IsoP2.

Para avaliar a necessidade de utilizar o termo proporcional a $\nabla^2\kappa$ na equação de transporte de ω e quais constantes utilizar, o parâmetro utilizado foi o comprimento da zona de recirculação obtido, em comparação com o experimental, de $(6,26 \pm 0,1)h$ a partir do descolamento, onde h representa a altura do degrau.

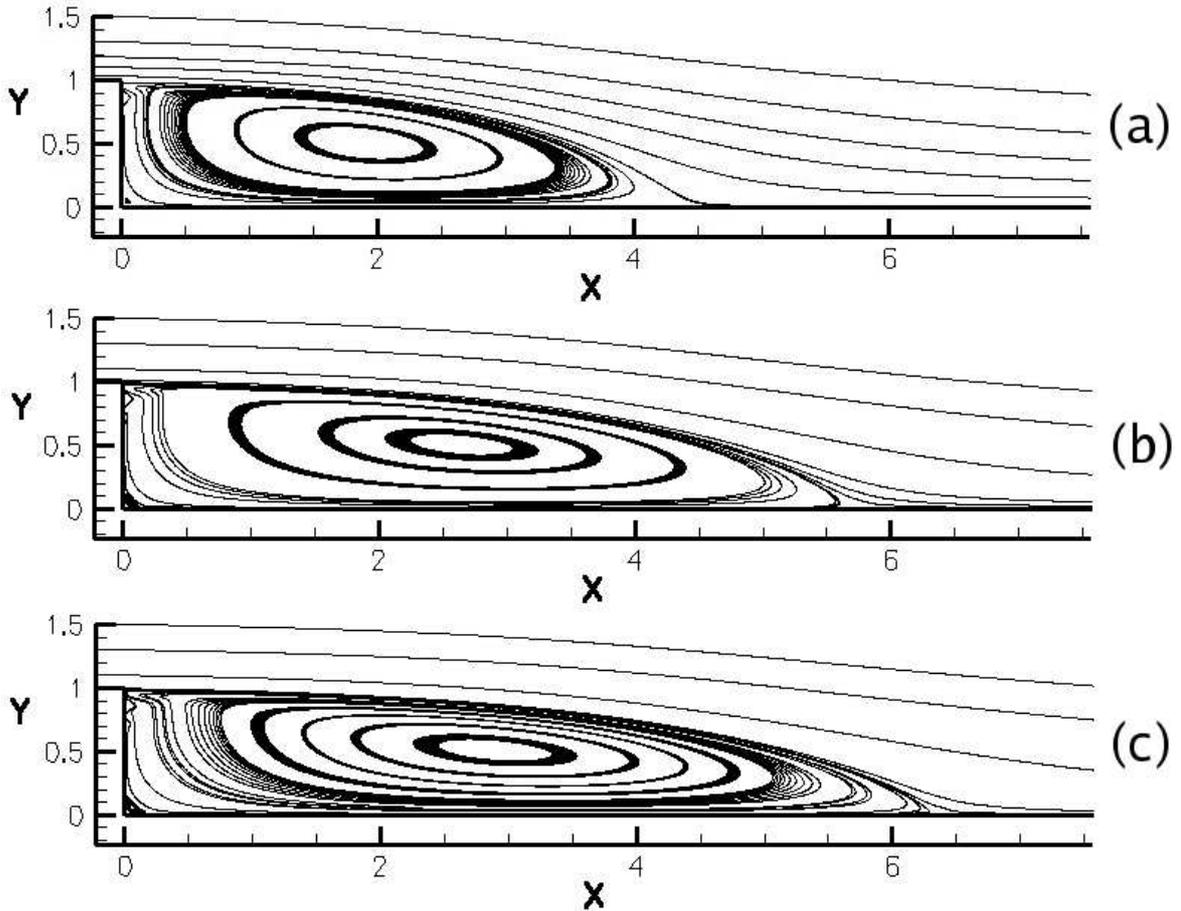


Figura 4.7: Canal divergente - Zonas de recirculação obtidas com o modelo $(\kappa - \omega)$: (a) utilizando a equação (2.79) completa, com constantes derivadas do modelo $\kappa - \varepsilon$; (b) também utilizando as com constantes derivadas do modelo $\kappa - \varepsilon$, com o termo $\nabla^2\kappa$ desligado; e (c) utilização da equação (2.84), com as constantes propostas por Bredberg (2002).

Na figura (4.7) estão mostradas as três zonas de recirculação obtidas com o modelo $\kappa - \omega$. Nota-se uma melhora evidente nos resultados somente ao se desligar o termo proporcional a $\nabla^2\kappa$ na equação de transporte de ω , o que claramente justifica sua exclusão e demonstra a forte influência negativa deste termo, no sentido de comprometer o resultado da simulação.

A diferença dos resultados mostrados nas figuras (4.7 b) e (4.7 c) se deve somente às constantes utilizadas no modelo, com a equação de transporte de ω dada pela equação

(2.84), sendo que na última figura está mostrado o resultado da utilização das constantes propostas por Bredberg (2002) ao invés de constantes deduzidas diretamente do modelo $\kappa - \varepsilon$. Fica evidente a superioridade das constantes calibradas com base em dados de DNS, com resultado obtido dentro da faixa de incerteza experimental.

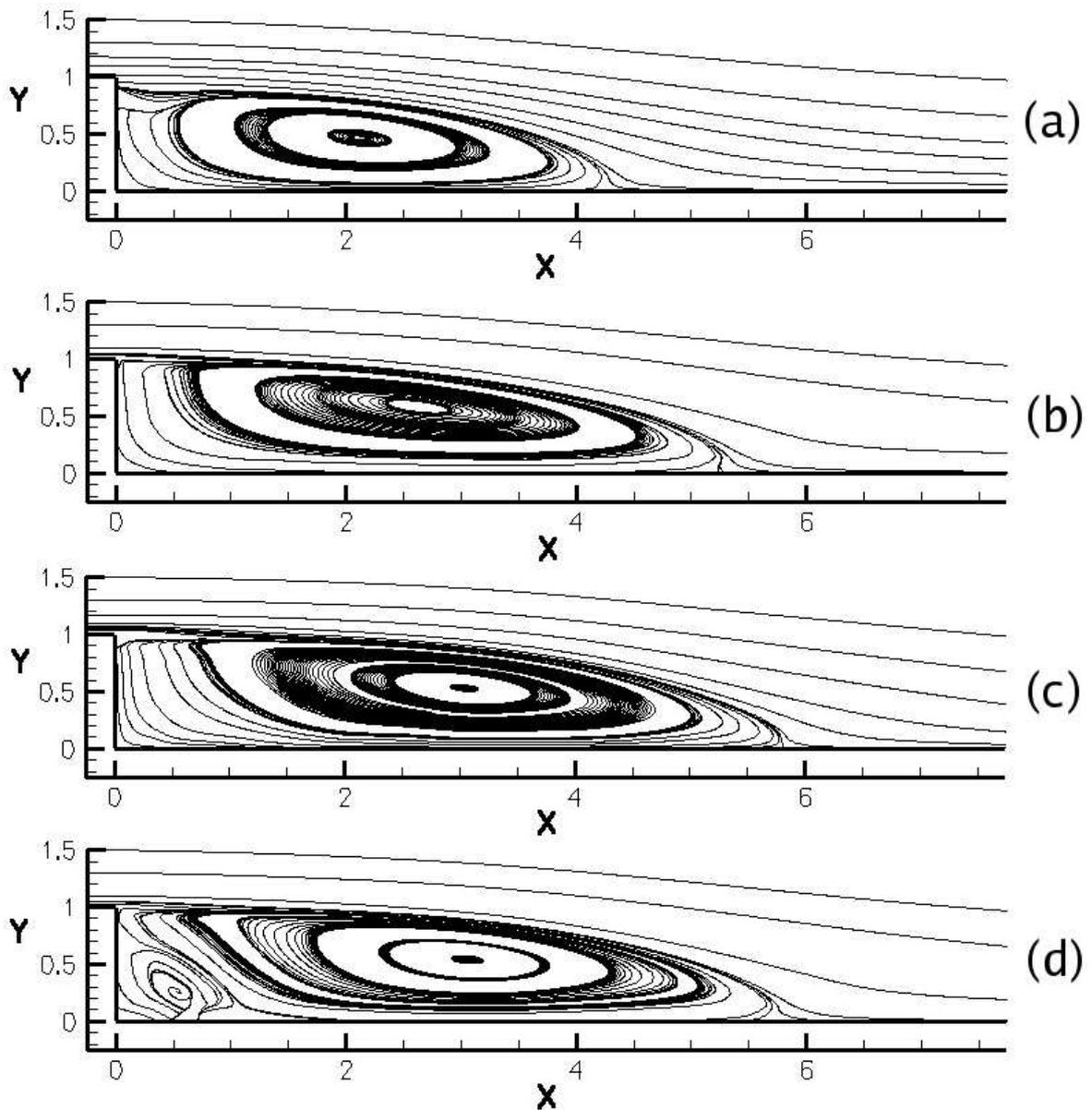


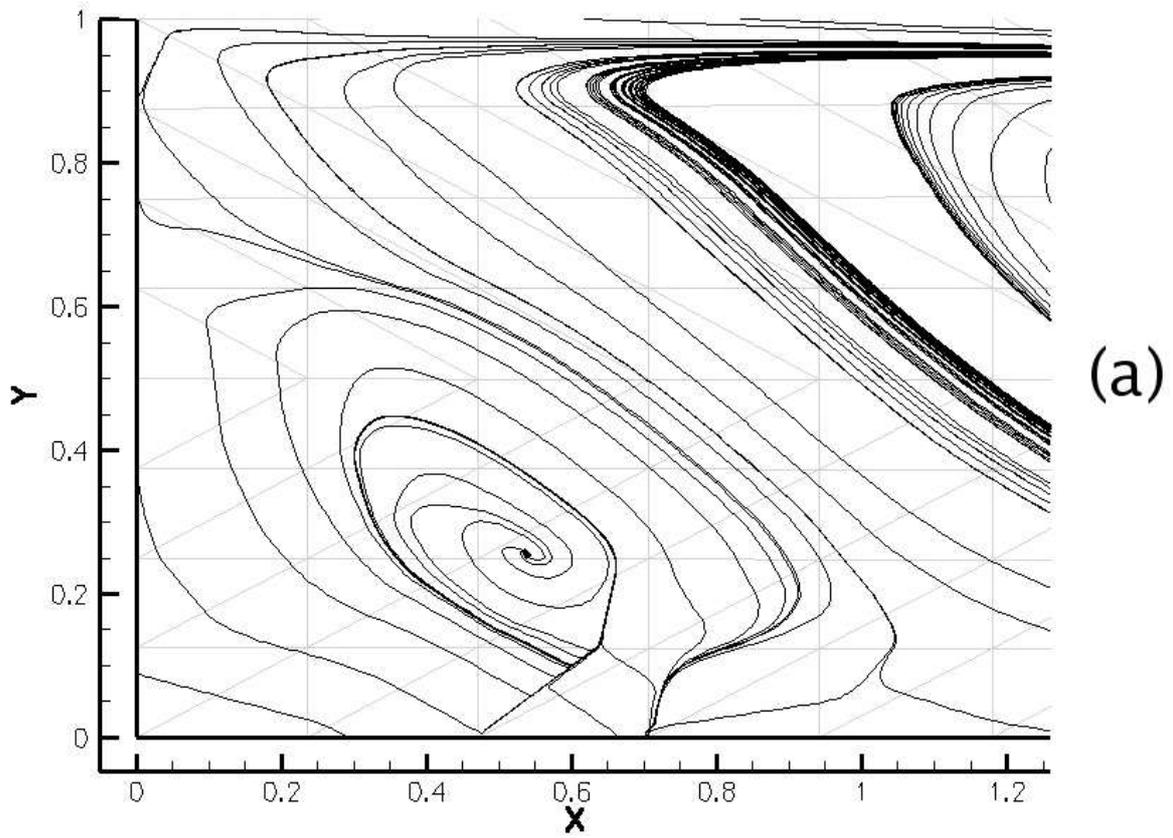
Figura 4.8: Canal divergente - Zonas de recirculação obtidas com o modelo $(\kappa - \varepsilon)$: (a) utilizando a lei de parede logarítmica clássica; (b) utilizando a lei de parede de Mellor (1966); (c) utilizando a lei de parede de Cruz e Silva Freire (1998); e (d) utilizando a lei de parede de Nakayama e Koyama (1984).

Na figura (4.8) estão mostradas as zonas de recirculação obtidas com as simulações do modelo $\kappa - \varepsilon$ implementado no código TURBO-2D, utilizando as quatro leis de parede de velocidade mostradas anteriormente. É necessário ressaltar algumas observações:

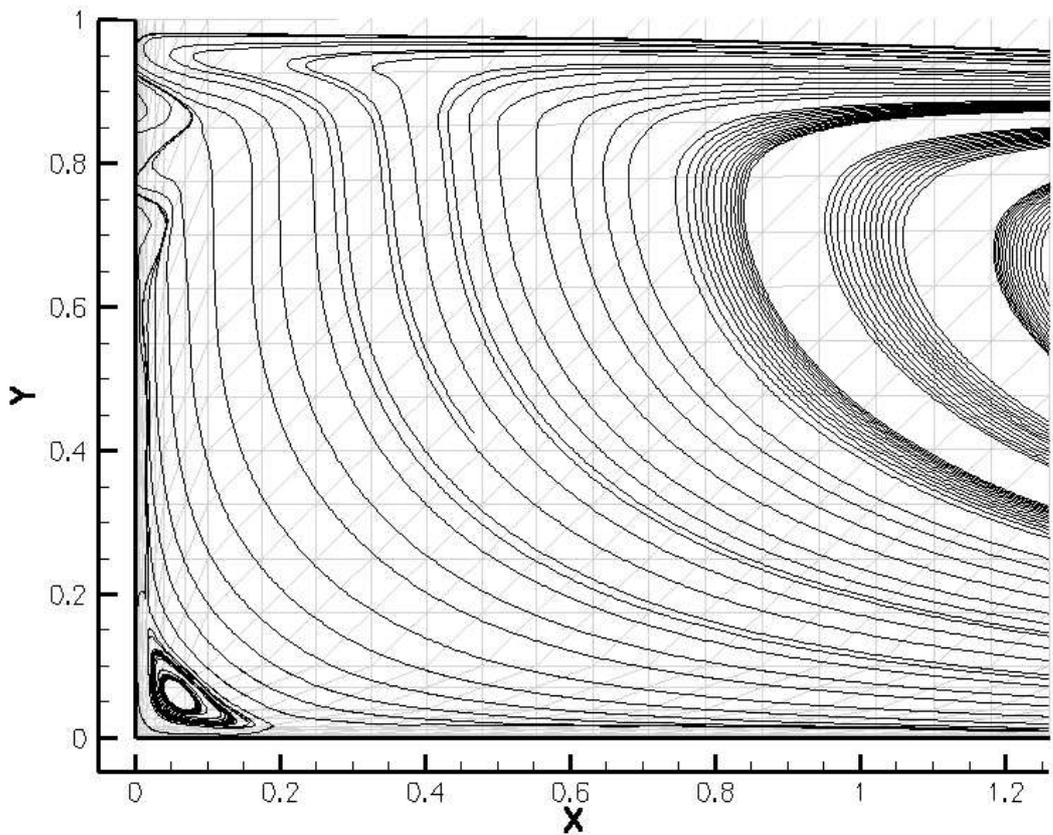
1. Ao se comparar a figura (4.7 a) com a figura (4.8 a) nota-se que o modelo $\kappa - \omega$ obtido diretamente das equações do modelo $\kappa - \varepsilon$ sem qualquer calibração de termos e constantes, ou seja, utilizando a equação (2.79) diretamente, o resultado recai praticamente no mesmo resultado obtido com o modelo original, utilizando a lei logarítmica clássica;
2. O modelo $\kappa - \varepsilon$ foi capaz de prever a zona de recirculação secundária, porém somente quando foi utilizada a lei de parede de Nakayama e Koyama (1984). Ressalta-se que a zona secundária possui tamanho extremamente compatível com o observado na DNS de Kim, Le e Moin (1997), de $1h$ de comprimento, aproximadamente, além de que o requerimento de malha para obter esse resultado é várias vezes inferior ao necessário para o modelo $\kappa - \omega$ de Bredberg (2002), conforme mostra a figura (4.9); e
3. O modelo $\kappa - \omega$ também foi capaz de prever uma zona de recirculação secundária, identificada na simulação numérica direta de escoamento sobre degrau de Kim, Le e Moin (1997), para as três situações estudadas, porém com tamanho bem reduzido em relação ao obtido da DNS. Esse resultado é previsível em simulações de $\kappa - \omega$ a baixo-Reynolds, conforme o trabalho de Principe (2003). As instabilidades notadas no topo do degrau, conforme visto na figura (4.9 b) induzem a acreditar que a malha utilizada estava relativamente “grossa” para captar com mais detalhes a zona de recirculação secundária.

Com esse estudo, foi definido que o modelo de turbulência $\kappa - \omega$ isotérmico tomado como base para a modificação térmica proposta neste trabalho é o modelo proposto originalmente por Bredberg (2002), exatamente como mostrado nas equações de (2.80) a (2.89). Não foram realizados testes com outras funções de amortecimento f_μ , pois o modelo de Bredberg (2002) é o único encontrado na literatura que adota como referência dados de DNS e que utiliza uma única função de amortecimento.

A fim de obter uma análise mais detalhada sobre o desempenho do modelo $\kappa - \omega$ de Bredberg (2002) foram adotados como base de comparação os resultados das simulações com o modelo $\kappa - \varepsilon$ e os dados experimentais nos perfis de velocidade em $x = -4h, -2h, -1h, 0, 1h, 2h, 3h, 4h, 5h, 6h, 7h, 8h, 9h, 10h, 16h, 20h$ e $32h$.



(a)



(b)

Figura 4.9: Canal divergente - Zonas de recirculação secundárias obtidas: (a) com o modelo $\kappa - \varepsilon$ e a lei de parede de Nakayama e Koyama (1984); e (b) com o modelo $\kappa - \omega$ de Bredberg (2002). A malha IsoP2 de cada caso está mostrada em cinza, ao fundo da respectiva figura.

Também foram tomados perfis de energia cinética de turbulência em $x = 5h, 6h, 8h, 10h, 16h$ e $32h$, e gráficos de distribuição do coeficiente de pressão C_p , ao longo da parede do degrau e da parede oposta ao degrau. Todos os gráficos são mostrados com valores não dimensionais, com base nos valores de referência, e neles os resultados são indicados pelo modelo de turbulência utilizado, e no caso do modelo $\kappa - \varepsilon$: (log): lei logarítmica clássica; (M): lei de Mellor; (NK): lei de Nakayama e Koyama; e (CSF): lei de Cruz e Silva Freire.

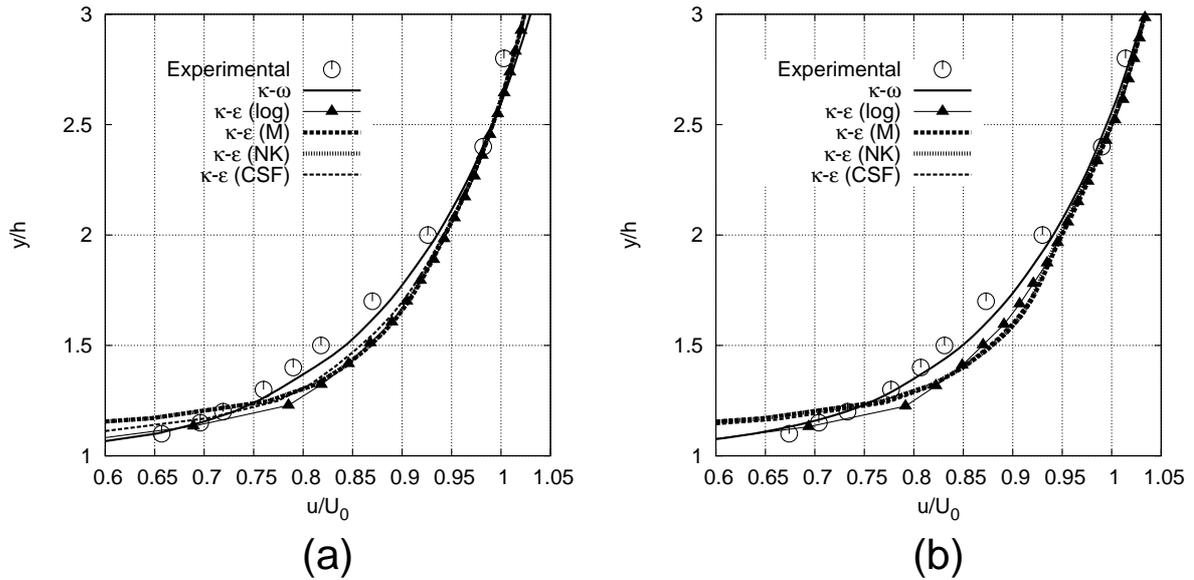


Figura 4.10: Canal divergente - Perfis de velocidade em $x = -4h$ (a) e $x = -2h$ (b).

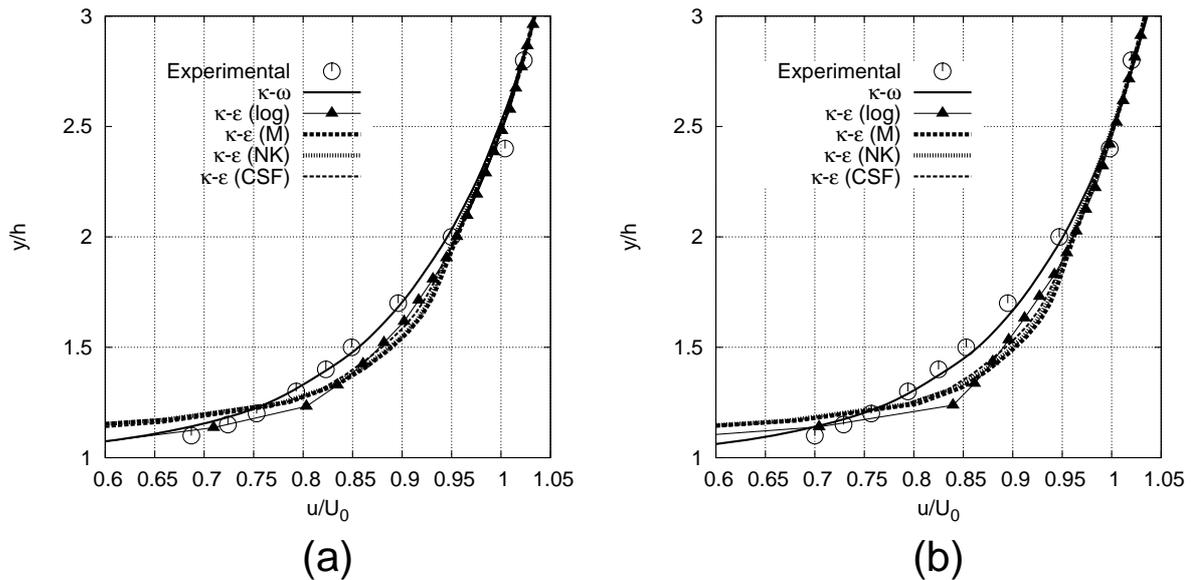


Figura 4.11: Canal divergente - Perfis de velocidade em $x = -1h$ (a) e $x = 0h$ (b).

As figuras (4.10) e (4.11) mostram a progressão do escoamento até a chegada ao degrau, ponto onde haverá o descolamento provocado por imposição da geometria. O comportamento das quatro simulações com o modelo $\kappa - \varepsilon$ é muito semelhante até este ponto, concordando bem na região mais próxima da parede e na região superior, apresentando uma pequena discordância em uma região intermediária. Os perfis obtidos com o modelo $\kappa - \omega$ se aproximam melhor dos dados experimentais.

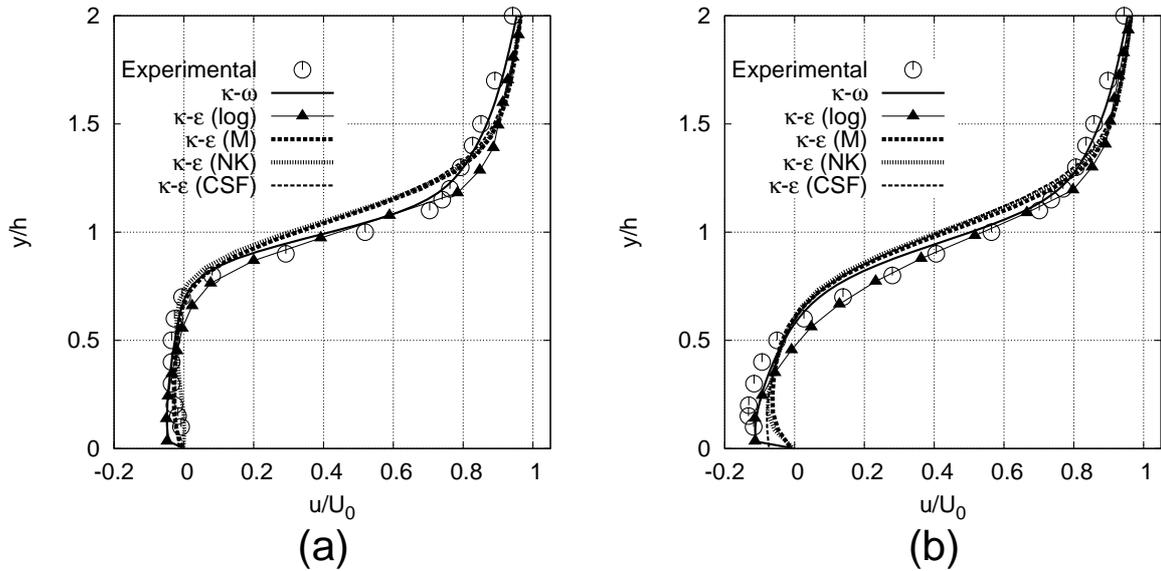


Figura 4.12: Canal divergente - Perfis de velocidade em $x = 1h$ (a) e $x = 2h$ (b).

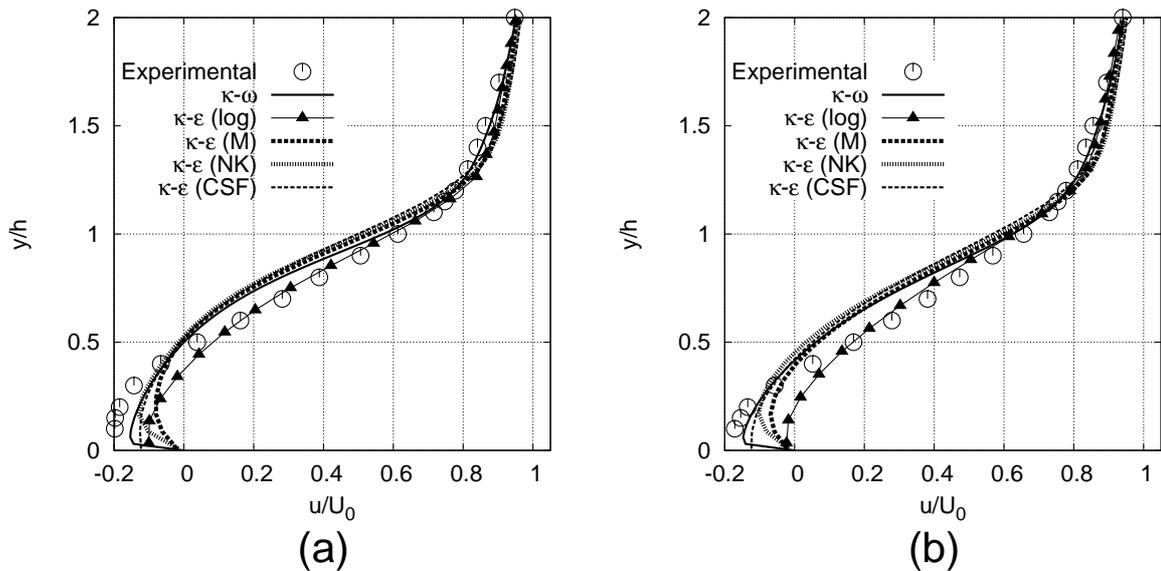


Figura 4.13: Canal divergente - Perfis de velocidade em $x = 3h$ (a) e $x = 4h$ (b).

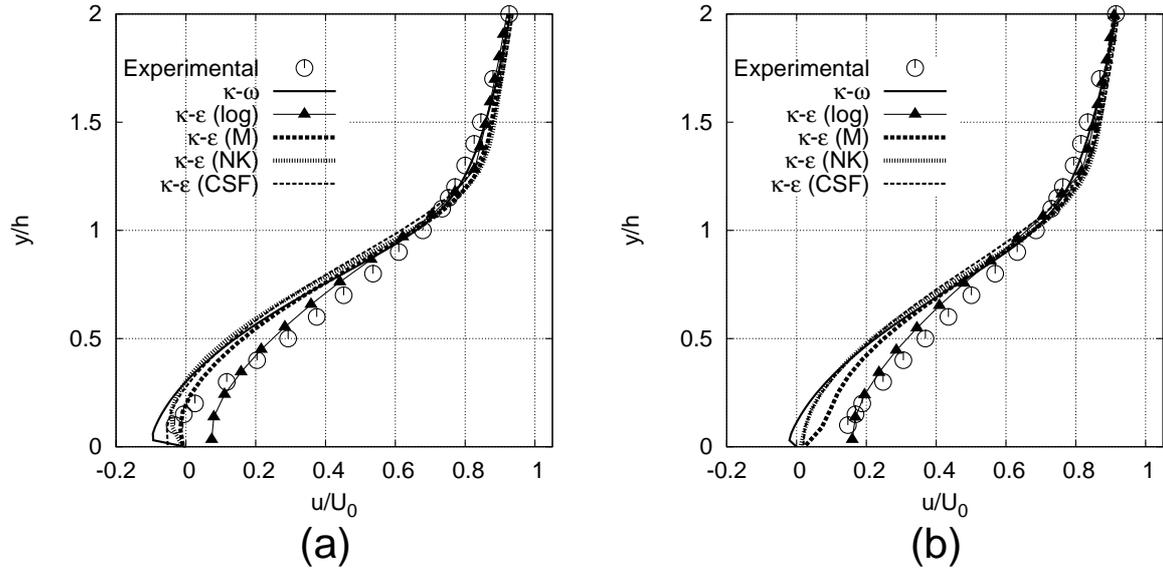


Figura 4.14: Canal divergente - Perfis de velocidade em $x = 5h$ (a) e $x = 6h$ (b).

Os gráficos das figuras (4.12), (4.13) e (4.14) mostram os perfis de velocidade na zona de recirculação. Observou-se que as melhores aproximações aos dados experimentais na região mais próxima à parede foi obtida com o modelo $\kappa - \omega$. Dentre as leis de parede, a que melhor se aproximou dos dados experimentais nessa região foi a lei de Cruz e Silva Freire (1998), enquanto que a lei logarítmica foi a de pior resolução na região próxima a parede, porém apresentando bons resultados para o escoamento médio.

Nota-se que a partir de $x = 4h$, a lei logarítmica forneceu perfis de velocidade com a camada limite recolada, perdendo a concordância que obteve anteriormente na região de escoamento médio. Os perfis obtidos com o modelo $\kappa - \omega$ certamente possuem melhor concordância com os dados experimentais, seguido das outras leis de parede capazes de captar os efeitos do gradiente de pressão da região de recirculação. Nota-se também que devido à proximidade do ponto de recolamento, o perfil experimental de $x = 6h$ não apresenta a zona de recirculação, que se estende até $x = 6,26h$, obviamente devido à dificuldade de medição precisa dentro da subcamada laminar na proximidade do recolamento da camada limite. O único perfil de velocidade em $x = 6h$ que apresentou claramente a recirculação foi o obtido com o modelo $\kappa - \omega$.

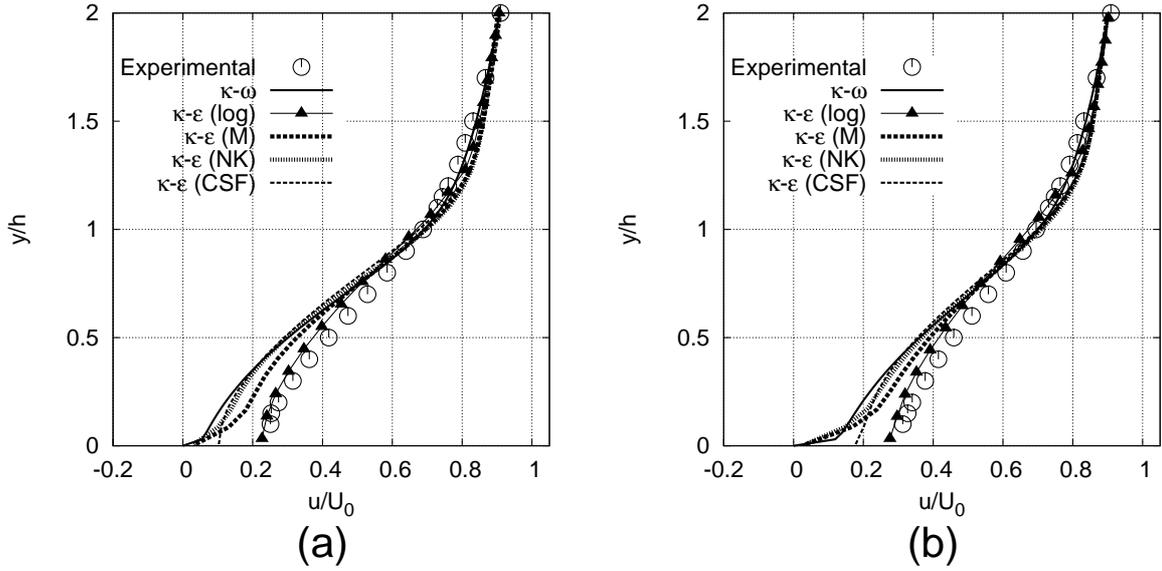


Figura 4.15: Canal divergente - Perfis de velocidade em $x = 7h$ (a) e $x = 8h$ (b).

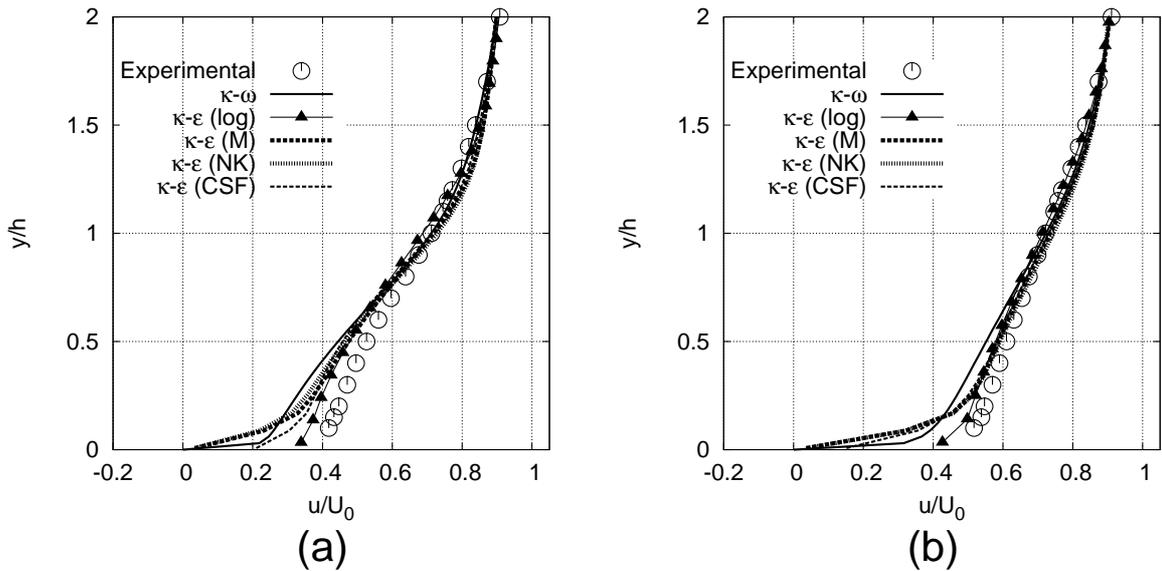


Figura 4.16: Canal divergente - Perfis de velocidade em $x = 10h$ (a) e $x = 16h$ (b).

As figuras (4.15), (4.16) e (4.17) mostram a evolução do perfil de velocidade após o recolamento da camada limite, estando portanto no processo de redesenvolvimento da camada limite. Na figura (4.15a) nota-se que o perfil obtido com a lei logarítmica se aproxima melhor dos dados experimentais, já que seu recolamento acontece prematuramente em relação às outras leis de parede e em relação ao modelo $\kappa - \omega$.

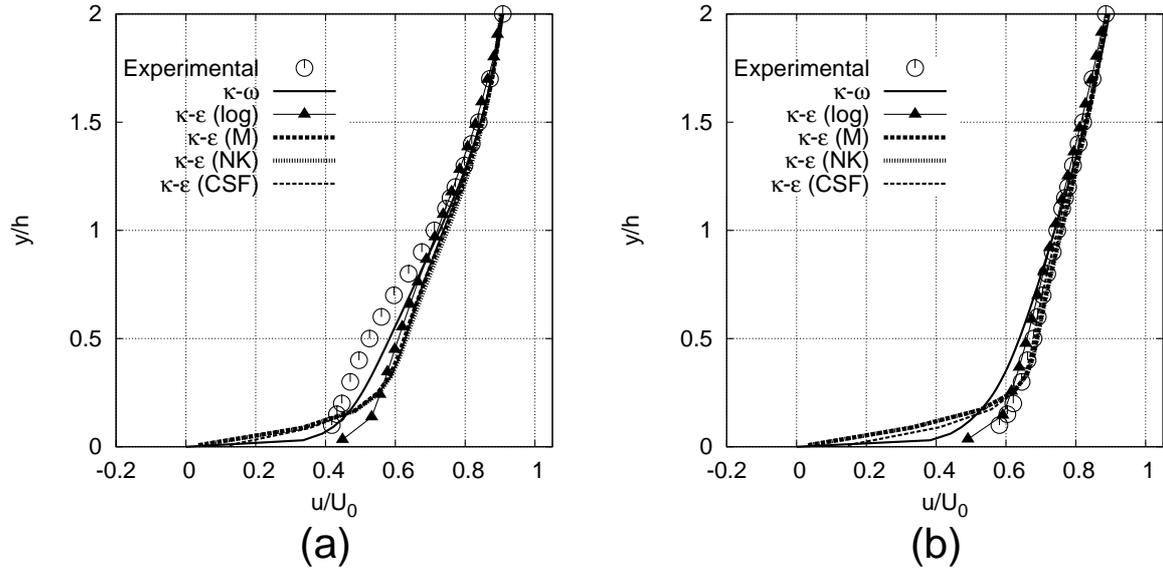


Figura 4.17: Canal divergente - Perfis de velocidade em $x = 20h$ (a) e $x = 32h$ (b).

Nos gráficos (4.15a) e (4.15b), nota-se que as leis de Mellor e de Nakayama e Koyama possuem comportamento semelhante, e a lei de Cruz e Silva Freire, apesar de não redesenvolver o perfil como a lei logarítmica, tal qual as leis de Mellor e de Nakayama e Koyama, busca a mesma tendência do perfil experimental, já que, próximo à parede, o perfil obtido com a lei de Cruz e Silva Freire é muito semelhante ao experimental a menos de um valor constante. Esse fato também foi observado no perfil obtido com o modelo $\kappa - \omega$.

A progressão indicada por estas figuras mostra como o modelo $\kappa - \omega$ implementado busca o redesenvolvimento da camada limite mais rapidamente do que as outras leis de parede, à exceção da lei logarítmica, que mostra o recolamento muito antecipado. Enquanto os perfis obtidos com o modelo $\kappa - \epsilon$ somente recuperam satisfatoriamente o escoamento médio ao final da seção de cálculo, o perfil obtido com o modelo $\kappa - \omega$ recupera o escoamento médio (mais ao centro do canal) desde $x = 16h$, e até $x = 32h$ mostra uma melhora gradual da concordância com o perfil experimental na região parietal. A seguir, são apresentados os perfis de energia cinética de turbulência na zona de recirculação e após o recolamento da camada limite.

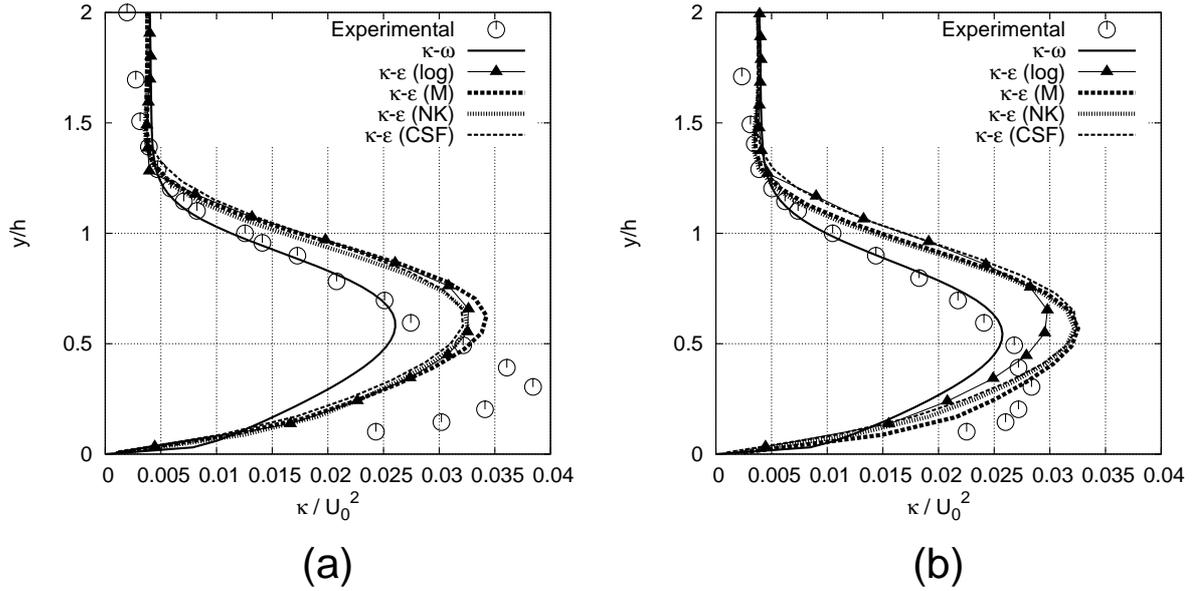


Figura 4.18: Canal divergente - Perfis de energia cinética de turbulência em $x = 5h$ (a) e $x = 6h$ (b).

Nota-se, inicialmente, que os perfis de energia cinética de turbulência numéricos modelam os perfis experimentais de modo que a aproximação de forma é melhor do que a quantitativa. Na região em que $y \leq 1,5h$, no primeiro perfil obtido, em $x = 5h$, os valores máximos estimados pelas simulações são inferiores aos valores experimentais.

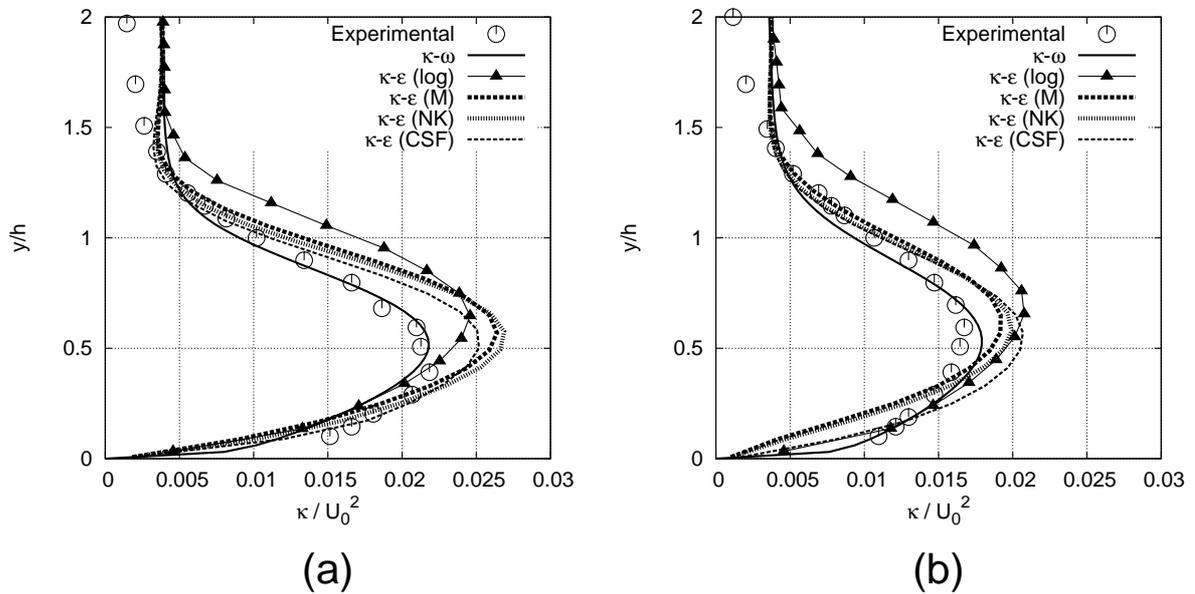


Figura 4.19: Canal divergente - Perfis de energia cinética de turbulência em $x = 8h$ (a) e $x = 10h$ (b).

Na região de recirculação, os valores máximos são ligeiramente superestimados e a jusante da recirculação os perfis voltam a valores máximos ligeiramente inferiores aos

experimentais, excessão feita ao resultado obtido com o TURBO-2D $\kappa - \omega$, que obteve boa aproximação com os dados experimentais na zona de recirculação.

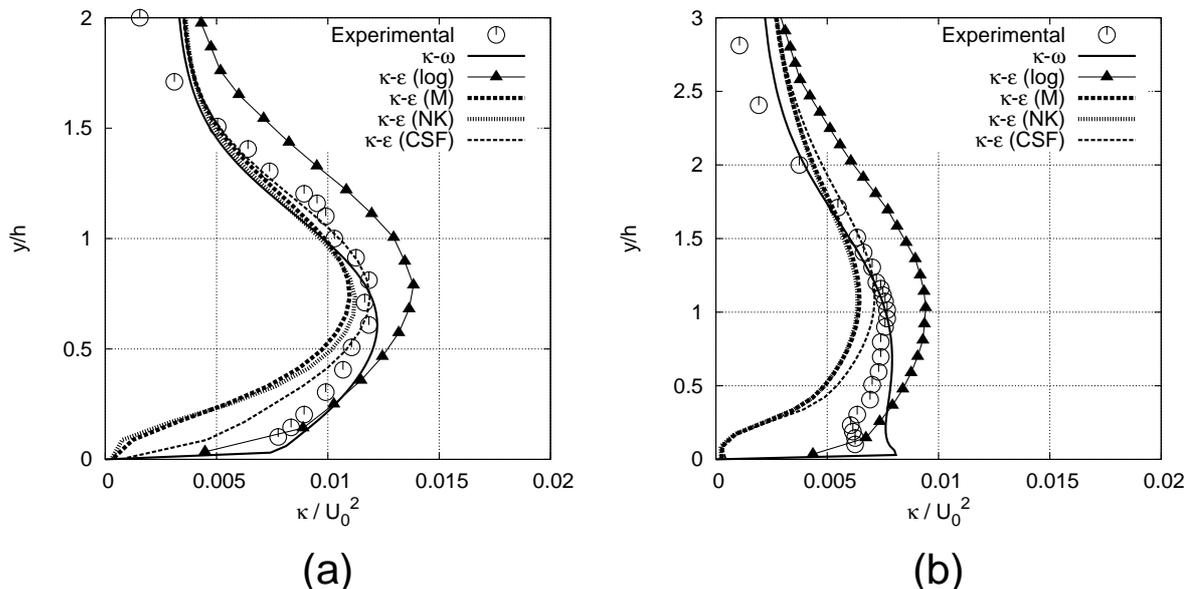


Figura 4.20: Canal divergente - Perfis de energia cinética de turbulência em $x = 16h$ (a) e $x = 32h$ (b).

Os perfis de energia cinética que melhor representaram o comportamento experimental foram os obtidos com o modelo $\kappa - \omega$, ficando a lei de parede logarítmica com o resultado menos concordante com os dados experimentais, além de ser o de maior discrepância observada no valor de energia cinética de turbulência do escoamento médio. No geral, as outras três leis de parede geraram resultados razoáveis, com destaque para a lei de parede de Cruz e Silva Freire (1998) nos perfis mais distantes do degrau, mostrados na figura (4.20).

Também foram feitos gráficos de distribuição do coeficiente de pressão, C_p , ao longo das paredes sólidas do domínio, para mostrar a capacidade do cálculo em prever as condições sob as quais o escoamento estará sujeito. O coeficiente de pressão foi calculado pela expressão:

$$C_p = \frac{p - p_{ref}}{\frac{1}{2}\rho U_0^2}, \quad (4.2)$$

em que p_{ref} representa uma medida de pressão do escoamento, no caso do canal divergente, medida em $x=0$. Na figura (4.21a) nota-se claramente que todas as simulações

superestimam os valores experimentais, além de mostrarem oscilações características. Qualitativamente, a lei de Mellor mostrou a melhor aproximação no ponto de inflexão do gráfico, em torno de $x = 15h$.

Para a parede inferior, nota-se uma melhor concordância dos resultados obtidos até o final da região de recirculação, em $x = 7h$, com maior discrepância observada no resultado da lei logarítmica. Deste ponto em diante, novamente todos os resultados superestimam os dados experimentais, com a melhor aproximação dada pelo resultado da lei de Mellor.

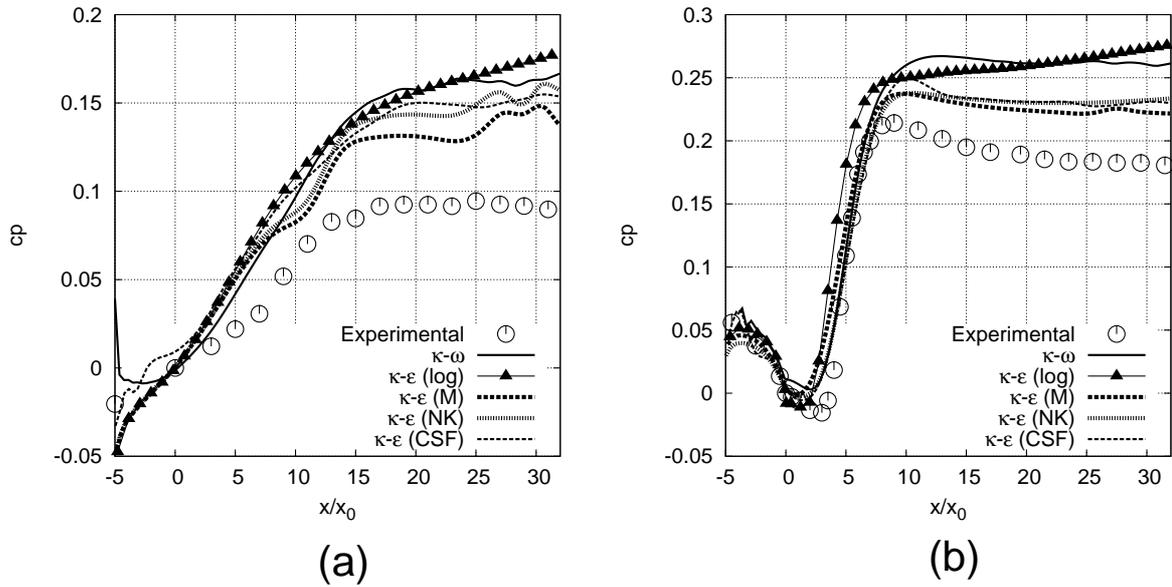


Figura 4.21: Canal divergente - Distribuição de C_p ao longo das paredes: superior (a) e inferior (b).

A seguir são mostrados os campos qualitativos obtidos da simulação com o modelo $\kappa - \omega$, com destaque para o campo de rotacional na parede, utilizado para determinar com precisão a localização do ponto de recolamento da camada limite.

Os campos qualitativos de pressão e de velocidade, mostrados na figura (4.22) mostram o gradiente adverso ao qual o escoamento está sujeito e a faixa após o degau onde ocorre a recirculação. O campo de κ , também mostrado na figura (4.22), exemplifica como a expansão súbita aumenta significativamente, em relação ao escoamento anterior, a energia cinética de turbulência da camada limite.

O campo de viscosidade turbulenta μ_T avaliado pelo modelo $\kappa - \omega$ está mostrado no topo da figura (4.23). Ele pode ser interpretado de duas formas: se considerarmos uma

dada energia cinética de turbulência de referência, os valores máximos de μ_T mostram onde a dissipação é baixa, e os valores mínimos de μ_T mostram onde a dissipação é máxima, ou seja, na região da parede apenas. Por outro lado, se considerarmos um dado nível de dissipação de referência, os valores máximos de μ_T mostram onde a energia cinética de turbulência tende a ser conservada, e os valores mínimos de μ_T mostram onde a energia cinética sofre variação.

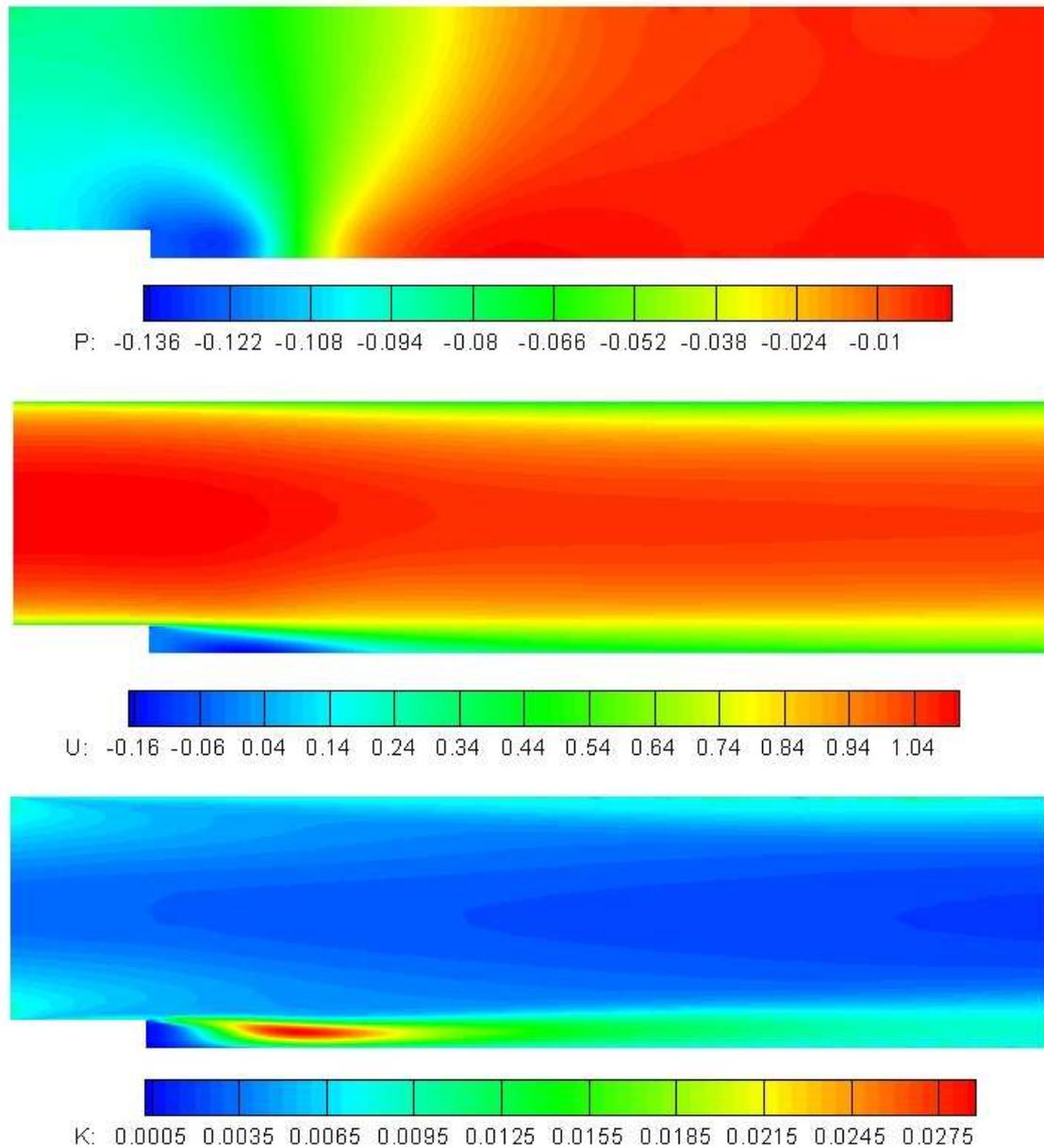


Figura 4.22: Canal divergente - Campos qualitativos do modelo $\kappa - \omega$ - P : pressão; u : componente x do campo de velocidade; e κ : energia cinética de turbulência.

A tabela (4.2) mostra uma comparação da localização do ponto de recolamento da camada limite obtida com várias simulações numéricas, entre as simulações realizadas com o código TURBO 2D, o resultado experimental e os resultados das simulações com os códigos do grupo NPARC da NASA: o NPARC $\kappa - \varepsilon$ e o código WIND, de baixo-Reynolds, com modelos $\kappa - \varepsilon$ (com e sem C_μ variável) e SST de Menter (1993), que é bastante similar ao modelo de Bredberg (2002), por também utilizar um termo de derivada cruzada na equação de transporte para ω , apesar de utilizar várias funções de amortecimento.

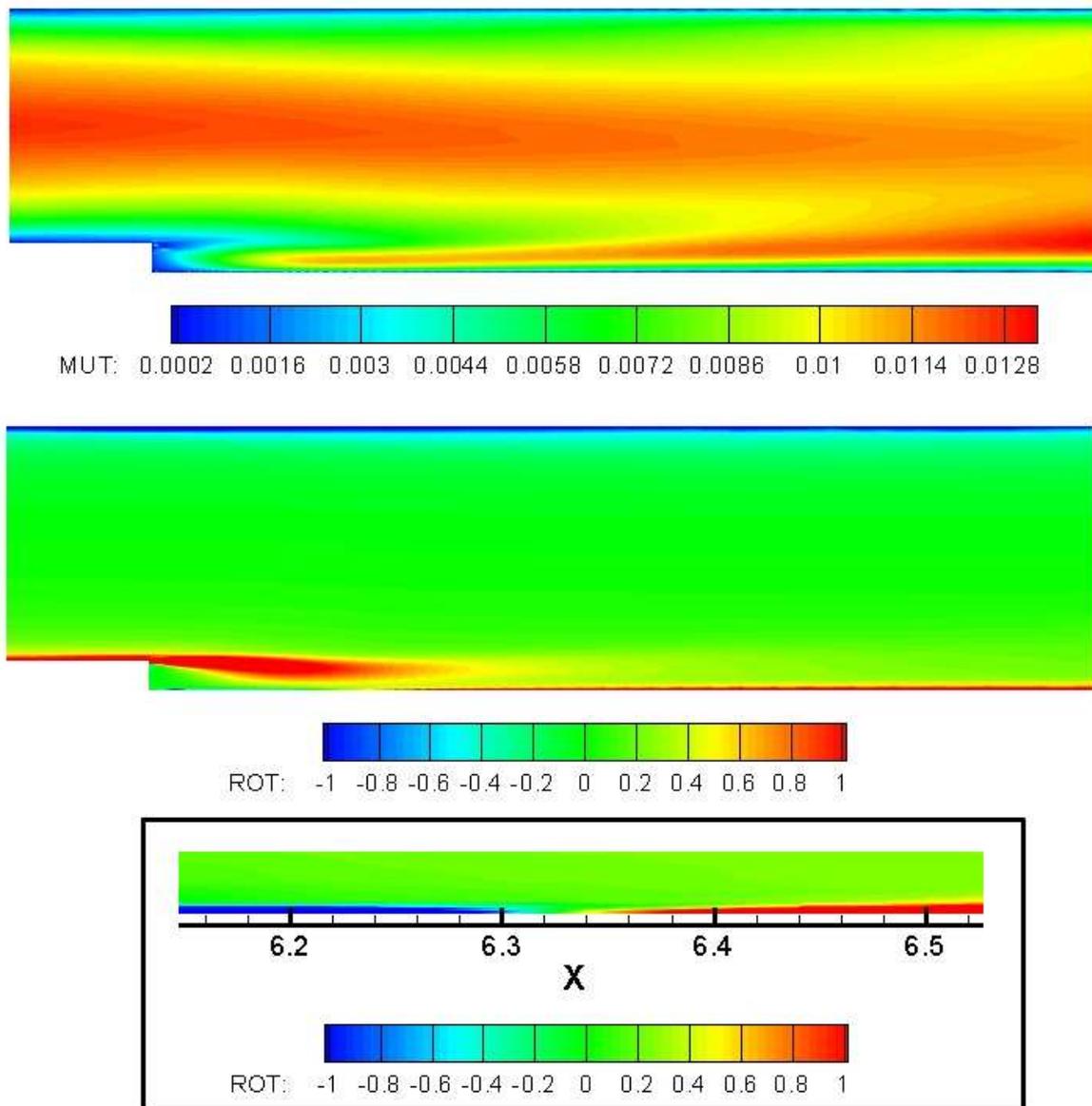


Figura 4.23: Canal divergente - Campos qualitativos do modelo $\kappa - \omega$ - μ_T : viscosidade turbulenta; e ROT : rotacional. Abaixo está o detalhe, indicando o recolamento em $x = 6,32h$.

Tabela 4.2: Canal divergente - pontos de recolamento (x_r) da camada limite em termos da altura do degrau (h).

Modelo	x_r/h
TURBO 2D - Log	4,25
TURBO 2D - Mellor	5,26
WIND $\kappa - \varepsilon$	5,30
NPARC $\kappa - \varepsilon$	5,31
WIND $\kappa - \varepsilon$ var. C_μ	5,55
TURBO 2D - Nakayama e Koyama	5,74
TURBO 2D - Cruz e Silva Freire	5,82
TURBO 2Dl - $\kappa - \omega$	6,32
WIND SST	6,43
Experimental	6,26 \pm 0,1

Tendo em vista os tempos computacionais observados, gastos pelo código TURBO-2D utilizando as leis de parede com o modelo alto-Reynolds $\kappa - \varepsilon$ e utilizando o modelo baixo-Reynolds $\kappa - \omega$, baseados em uma máquina Intel x86-32bits Pentium 4 HT a 2.800Mhz, e considerando que:

- Com as leis de parede do modelo $\kappa - \varepsilon$, o uso do algoritmo de minimização de Fontoura Rodrigues (1991) é mandatário e aumenta nitidamente o esforço computacional (principalmente com as leis de Nakayama e Koyama e de Cruz e Silva Freire); e
- Para utilizar o modelo $\kappa - \omega$, o método de minimização é praticamente desativado (utilizado nas 2 primeiras iterações, de um total de 200.000, aproximadamente), porém o modelo necessita do uso malhas de cálculo com 5 a 7 vezes mais elementos quando comparadas àquelas utilizadas para simulações alto-Reynolds;

conclui-se que para as condições apresentadas neste estudo, o esforço computacional relativo é de 1:3, aproximadamente, comparando a utilização da lei de Nakayama e

Koyama (modo do modelo $\kappa - \varepsilon$ mais lento) em relação à utilização do modelo $\kappa - \omega$, ou seja, a utilização do modelo $\kappa - \omega$ torna o código TURBO-2D aproximadamente três vezes mais lento quando comparado ao modo mais lento do modelo $\kappa - \varepsilon$.

Obviamente, há um ganho em resultados proporcional, como visto nos vários perfis analisados, e finalmente nos dados da tabela (4.2), onde é mostrado que o resultado obtido com o modelo $\kappa - \omega$ implementado é o que mais se aproxima dos dados experimentais, indicando a localização do ponto de recolamento da camada limite dentro da faixa de incerteza experimental apontada por Driver e Seegmiller (1985).

O excelente resultado obtido reafirma a escolha em implementar o modelo $\kappa - \omega$ isotérmico proposto por Bredberg (2002) como base para incluir o termo de influência do transporte turbulento térmico nas equações do modelo de turbulência, tal qual fez Munhoz da Cruz (1989) para o modelo $\kappa - \varepsilon$ implementado por Brun (1988).

Tabela 4.3: Canal divergente - Conclusões do estudo

Observações	Conclusões
As malhas de cálculo utilizadas com o modelo $\kappa - \omega$ foram otimizadas, de modo que pelo menos os dois primeiros nós fiquem na região laminar da camada limite, com $y^* \leq 2,5$.	Não há necessidade de refinamento além do indicado, na subcamada laminar, mas pode-se aumentar o grau de refinamento nas regiões adjacentes para captar efeitos secundários (como a zona de recirculação secundária mostrada).
A utilização de constantes não calibradas e do termo proporcional a $\nabla^2 \kappa$ na equação de ω sem ajustes por DNS e/ou TSDIA promoveu resultados fracos em relação ao modelo por Bredberg (2002).	Fica comprovada a necessidade de calibrar cuidadosamente as constantes, as funções de amortecimento e os termos das equações do modelo de turbulência com base em dados experimentais de alta precisão ou em estudos de DNS e/ou TSDIA.
A estabilidade numérica do código rodando o modelo $\kappa - \omega$ é superior quando comparada ao uso das leis de parede sofisticadas em conjunto com o método de minimização de Fontoura Rodrigues (1991).	O modelo escolhido é numericamente robusto, satisfazendo o requisito de estabilidade para a implementação da modificação térmica proposta.

4.2 Colina abrupta de Loureiro et al. (2005)

O caso teste da colina abrupta de Loureiro et al. (2005 e 2006) é formado por um escoamento de canal no qual se estabelece um descolamento de camada limite causado por um suave gradiente adverso de pressão a jusante da colina, similar ao caso teste do difusor assimétrico de Buice e Eaton (1995), também estudado por Soares e Fontoura Rodrigues (2004), com descolamento de camada limite turbulenta devido à presença de gradientes adversos de pressão, sendo considerado um caso de difícil predição numérica devido ao fraco gradiente adverso formado no difusor, tendo sido recomendado no 8º ERCOFTAC como caso teste decisivo na validação de modelos de turbulência aplicados a escoamentos com descolamento de camada limite, devido à grande dificuldade de previsão dos pontos de separação e de recolamento da camada limite, bem como seu redesenvolvimento.

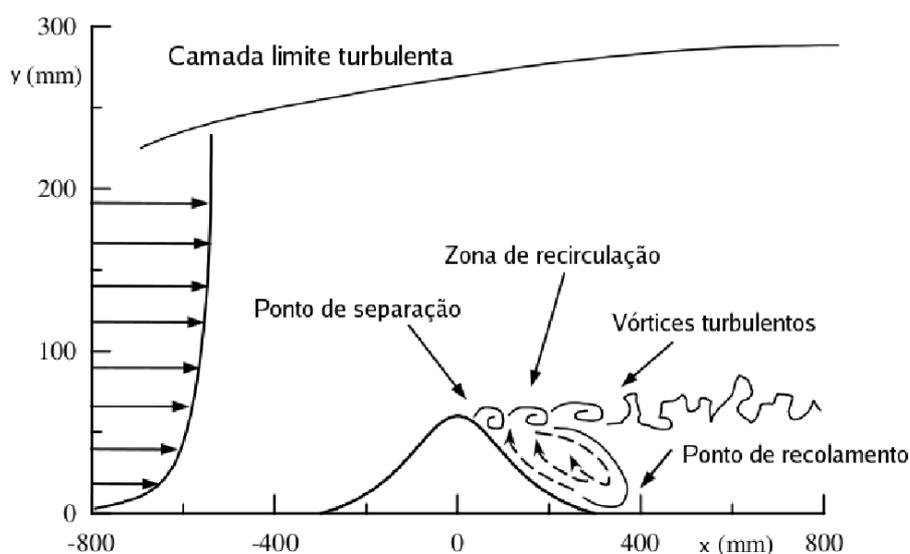


Figura 4.24: Colina abrupta - esquema do caso (retirado de Loureiro et al. (2005), com adaptações).

Os estudos numéricos de Soares e Fontoura Rodrigues (2005) indicam que o descolamento de camada limite no caso da colina abrupta estudado por Loureiro et al. (2005) é provocado por gradientes adversos ainda mais suaves do que os presentes no caso do difusor assimétrico, tornando sua predição numérica mais difícil do que no difusor assimétrico, sendo portanto um bom caso para validar a implementação do modelo $\kappa - \omega$ proposto. A figura (4.24) mostra um diagrama esquemático do caso.

A partir do estudo do caso do canal divergente de Driver e Seegmiller apresentado, a parte isotérmica do modelo $\kappa - \omega$ implementado no código TURBO-2D é exatamente o modelo proposto por Bredberg (2002). O objetivo do estudo do descolamento de camada limite provocado pela colina abrupta é verificar se a metodologia empregada neste modelo, de utilizar somente uma função de amortecimento, um termo adicional de derivada cruzada e constantes calibradas com base em diversos casos estudados com DNS, é robusta o bastante para prever com precisão razoável casos considerados de difícil simulação numérica.

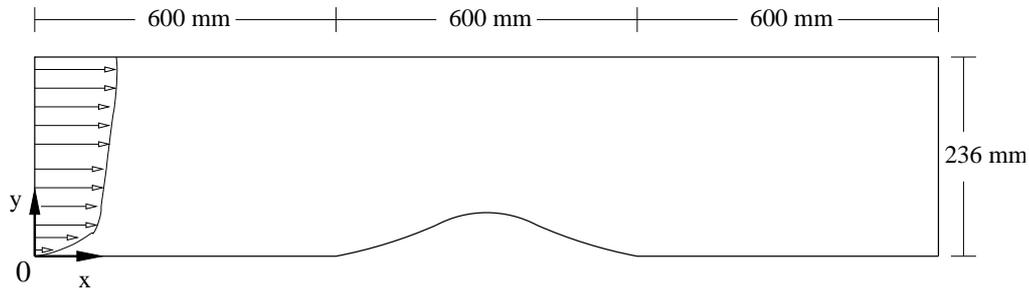


Figura 4.25: Colina abrupta - domínio de cálculo.

Os resultados obtidos com o modelo $\kappa - \omega$ implementado foram comparados com os dados experimentais de Loureiro et al. (2005) e com os dados de simulação numérica de Soares e Fontoura Rodrigues (2005). Para isso, foi aplicada a mesma metodologia empregada por Soares e Fontoura Rodrigues (2005): o domínio de cálculo foi definido com 1800mm de comprimento, com a região da colina abrangendo os 600mm intermediários, como exemplificado na figura (4.25), sendo a altura do domínio de 236mm . A forma da colina é descrita pela equação (4.3), proposta por Loureiro (2004), é uma forma modificada da curva conhecida por “*Witch of Agnesi*”, sendo $h(x)$ a altura da colina dada em função da distância x a partir do começo da colina, ambas dadas em milímetros. Considerando-se que o início da seção da colina é em $x = 600\text{mm}$, a altura máxima da colina é $h = 60\text{mm}$.

$$h(x) = \frac{75}{1 + (x^2/150)} - 15 . \quad (4.3)$$

O estudo experimental trata de um escoamento de canal, utilizando água como fluido de trabalho, com um número de Reynolds de 10.000 baseado na altura da linha d’água (a altura do domínio de cálculo tomado é a mesma) e na velocidade de referência

medida fora da camada limite. As simulações realizadas com o código TURBO-2D por Soares e Fontoura Rodrigues (2005) e neste trabalho foram executadas convertendo-se o fluido de trabalho para ar, baseado na similaridade do mesmo número de Reynolds.

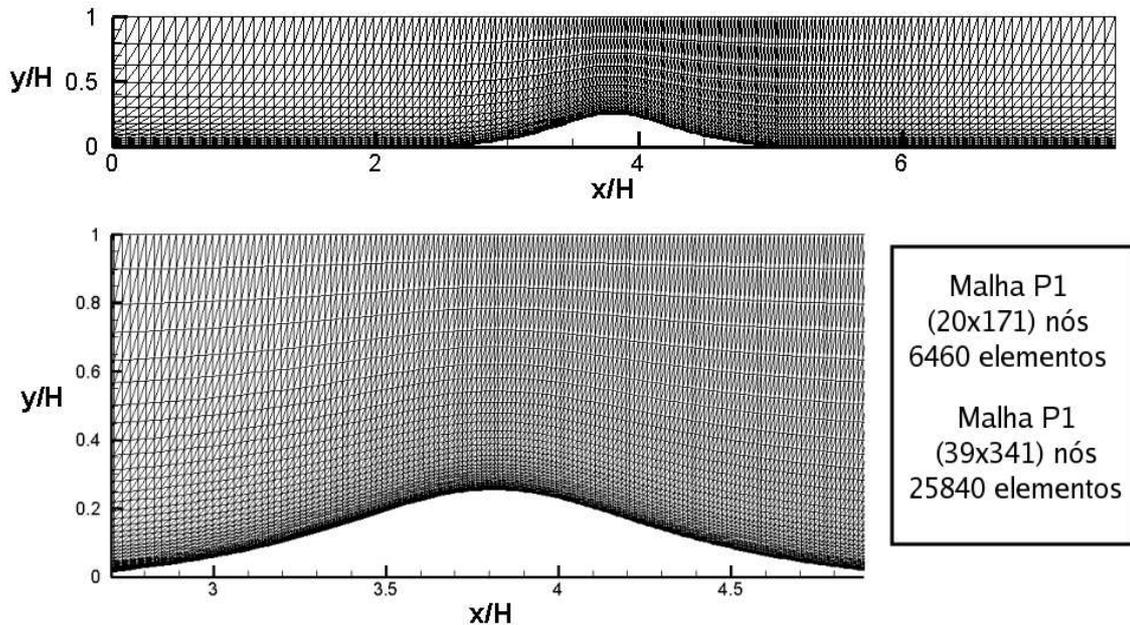


Figura 4.26: Colina abrupta - Malha P1 (no alto) e detalhe da malha IsoP2 utilizadas na simulação com o modelo $\kappa - \omega$ proposto.

A malha de cálculo obtida com a metodologia empregada na simulação do canal divergente, ou seja, calculada para que o valor máximo de y^* na parede seja sempre inferior a 2,5, está apresentada na figura (4.26), e foi diretamente baseada na malha de cálculo utilizada por Soares e Fontoura Rodrigues (2005). Ressalta-se que a malha de cálculo IsoP2 utilizada por Soares e Fontoura Rodrigues (2005) possuía 13888 elementos, e que os elementos adicionais na malha mostrada na figura (4.26) encontram-se quase que em sua totalidade na região da sub-camada laminar da camada limite turbulenta.

As condições de contorno impostas foram de pressão relativa nula na saída do domínio de cálculo, velocidades especificadas na parte superior (velocidade vertical nula e horizontal igual à velocidade de vazão do escoamento no canal) e perfis experimentais na entrada, para a velocidade tangencial u e para a energia cinética de turbulência κ , além de um valor pequeno de ω , calculado com base nas escalas características do escoamento, também imposto na entrada do domínio de cálculo. A notação de leis de parede e modelo de turbulência utilizado é a mesma apresentada anteriormente.

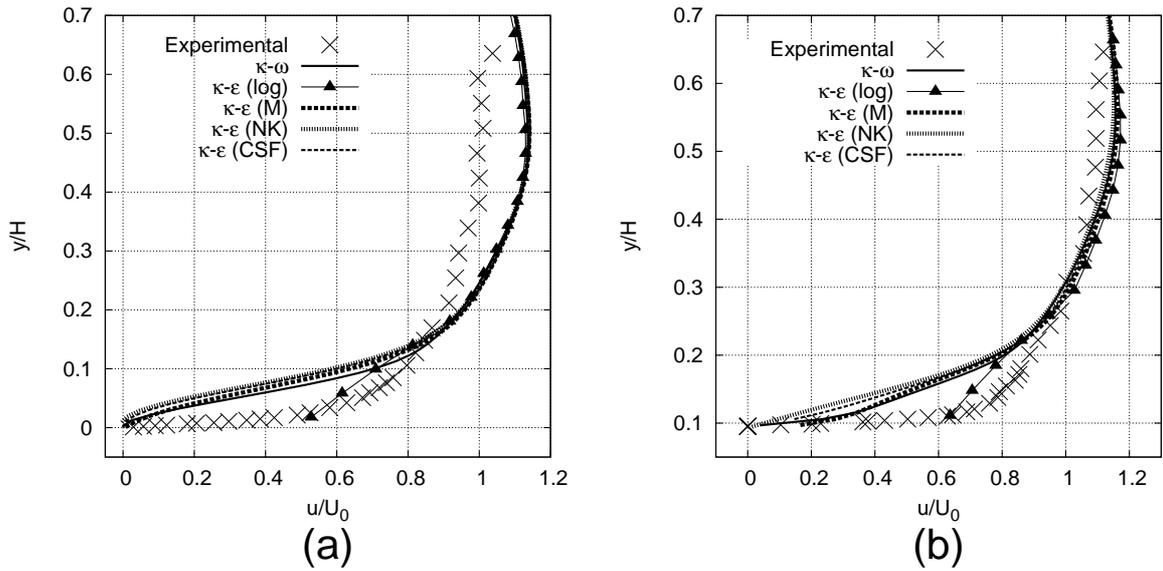


Figura 4.27: Colina abrupta - Perfis de velocidade em $x = 600mm$ (a) e $x = 750mm$ (b).

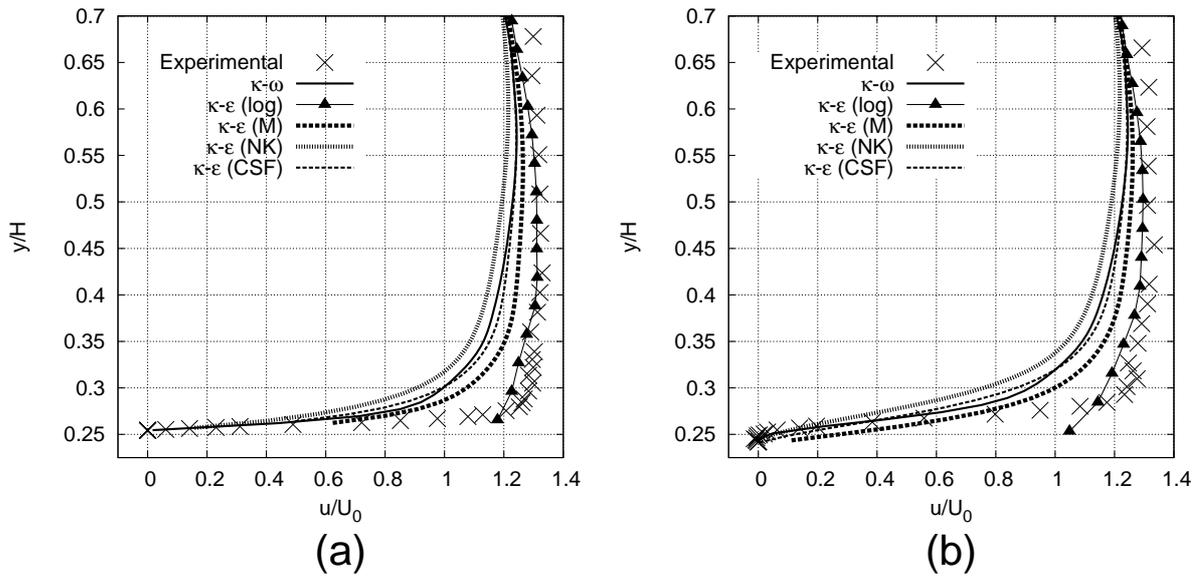


Figura 4.28: Colina abrupta - Perfis de velocidade em $x = 900mm$ (a) e $x = 930mm$ (b).

Nas figuras de (4.27) a (4.31) estão mostrados diversos perfis de velocidade obtidos na região da colina. A localização de cada perfil é dada em milímetros, a partir da origem indicada na figura (4.25). Na figura (4.27), os perfis mostrados são a montante do topo da colina, localizado em $x = 900mm$. Nota-se uma defasagem entre os perfis da lei logarítmica clássica em relação aos perfis obtidos com o modelo $\kappa - \omega$ e com as

demais leis de parede. Esse efeito se deve ao gradiente de pressão que surge na região da colina: uma vez que a lei logarítmica não é sensível à pressão, é de se esperar que os perfis obtidos com ela sejam diferentes dos obtidos com as demais leis de parede e com o modelo $\kappa - \omega$.

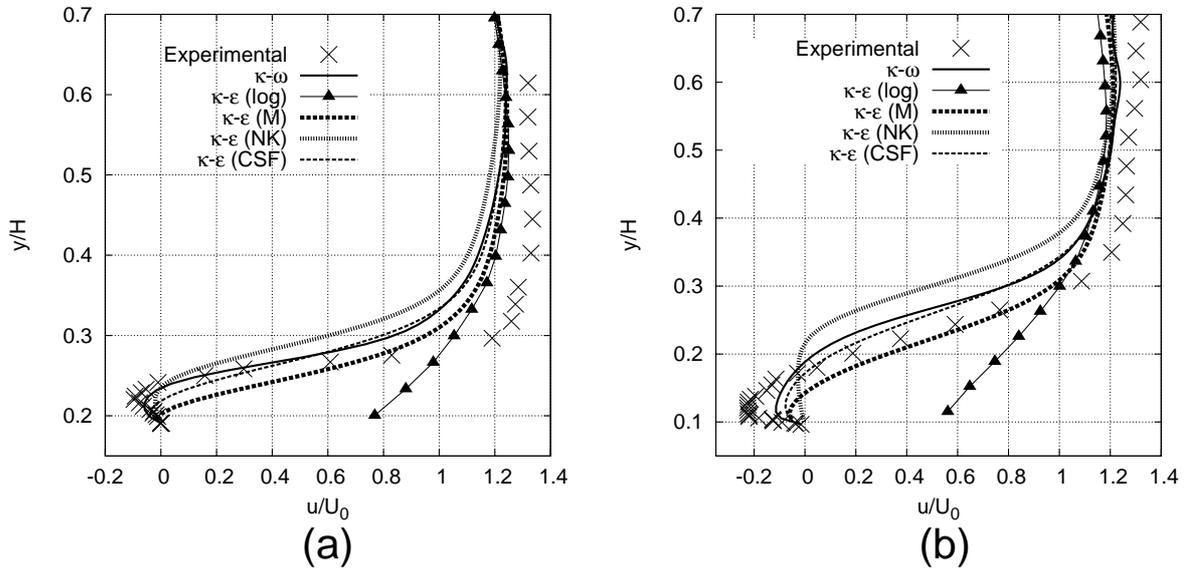


Figura 4.29: Colina abrupta - Perfis de velocidade em $x = 975\text{mm}$ (a) e $x = 1050\text{mm}$ (b).

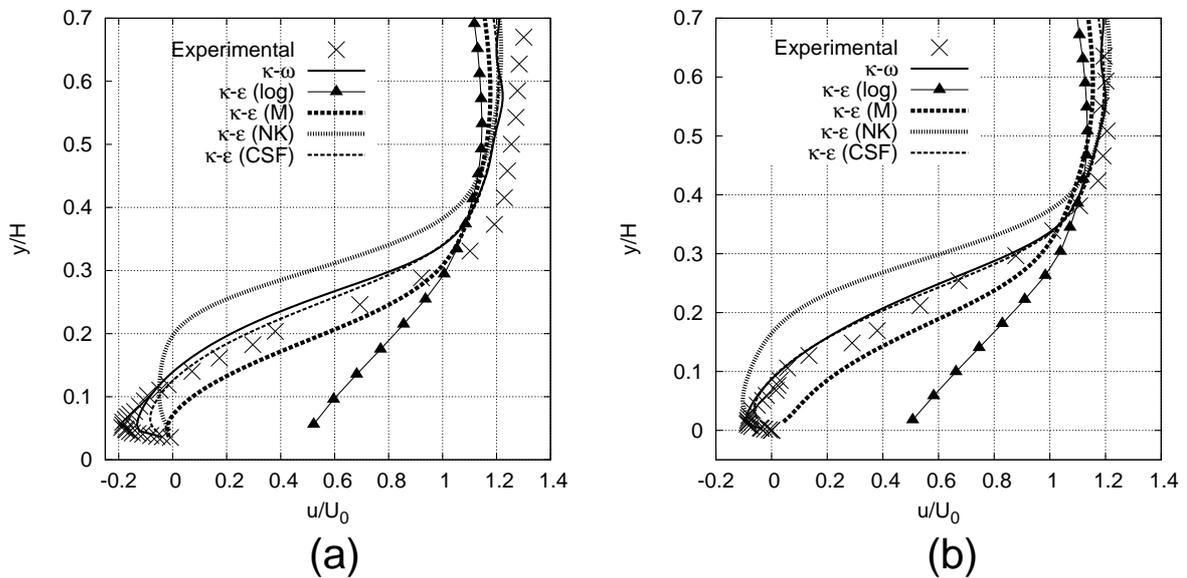


Figura 4.30: Colina abrupta - Perfis de velocidade em $x = 1125\text{mm}$ (a) e $x = 1200\text{mm}$ (b).

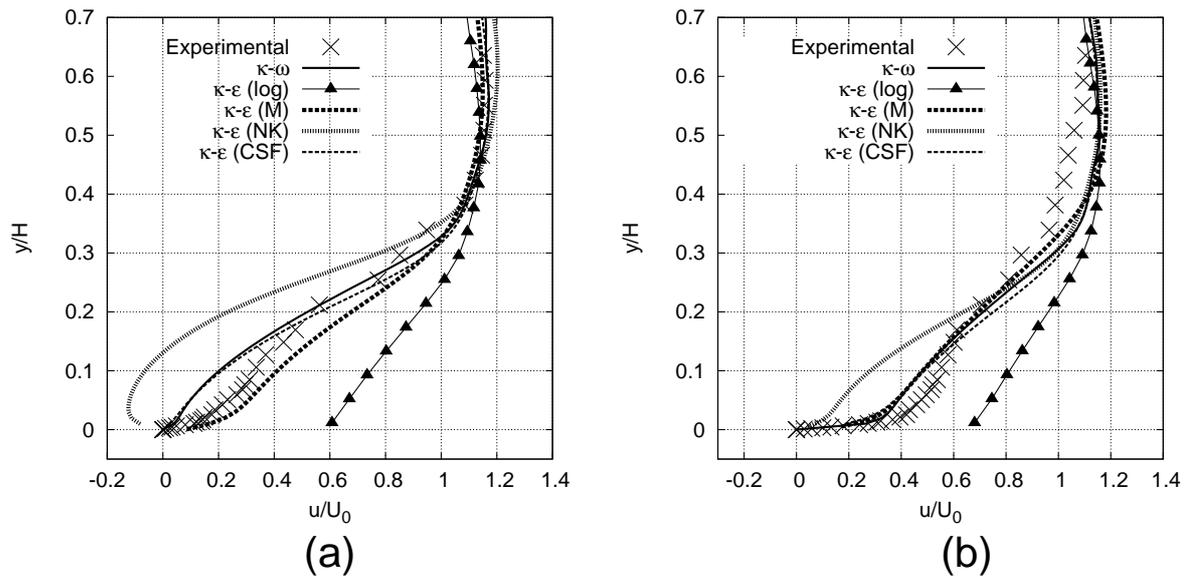


Figura 4.31: Colina abrupta - Perfis de velocidade em $x = 1300mm$ (a) e $x = 1500mm$ (b).

O descolamento observado experimentalmente ocorre exatamente no ponto de medição mostrado na figura (4.28 b), em $x = 930mm$. Na região de recirculação, os melhores resultados foram obtidos com o modelo $\kappa - \omega$, principalmente na região do perfil mais próxima à parede, seguido pelos perfis obtidos com a lei de Cruz e Silva Freire.

Observa-se uma fraca concordância do resultado obtido com a lei de Nakayama e Koyama, devida à alta instabilidade da simulação com esta lei, que operou limitada a $y^* = 0,8$. Obviamente, neste valor tão baixo de y^* o modelo $\kappa - \varepsilon$ a alto-Reynolds é ineficiente, e mesmo com o algoritmo de minimização de resíduos ativado no limite, não era possível aumentar o valor de y^* na simulação com a lei de Nakayama e Koyama sem que o cálculo divergisse. A título de comparação, a simulação com a lei de Cruz e Silva Freire gerou resultados bem mais coerentes, mesmo tendo apresentado uma instabilidade numérica semelhante. A diferença é que a lei de Cruz e Silva Freire tolerou bem o cálculo com $y^* = 3,1$, que juntamente com o método de mínimos resíduos, garantiu os bons resultados. Certamente essa diferença foi responsável pelo desempenho insatisfatório da lei de Nakayama e Koyama no estudo realizado por Soares e Fontoura Rodrigues (2005).

Os resultados obtidos com o modelo $\kappa - \omega$ são tão bons quanto os obtidos com a lei de Cruz e Silva Freire, porém um pouco melhores na região mais próxima à parede. A simulação com o modelo $\kappa - \omega$ na malha utilizada limitou-se a um y^* máximo de 1,2

nos primeiros nós da malha IsoP2, ratificando a validade da metodologia de geração de malha empregada.

O recolamento da camada limite observado experimentalmente ocorre pouco antes de $x = 1300mm$. Observa-se claramente que a lei de Mellor prevê o recolamento antecipadamente, e por essa razão, pode-se ter a falsa impressão de que os resultados com ela obtidos são melhores em $x = 1300mm$ do que os resultados obtidos com o modelo $\kappa - \omega$. Na verdade, observando a figura (4.31), nota-se que em $x = 1300mm$, o modelo $\kappa - \omega$ e a lei de Cruz e Silva Freire ainda captam muita recirculação em relação aos dados experimentais, mas ao deslocarmos o ponto avaliado mais a jusante da colina, em $x = 1500mm$, vemos que tanto o modelo $\kappa - \omega$ quanto a lei de Cruz e Silva Freire rapidamente redesenvolvem o perfil de velocidade a praticamente o mesmo nível de concordância do que a lei de Mellor, que prevê o recolamento mais antecipadamente.

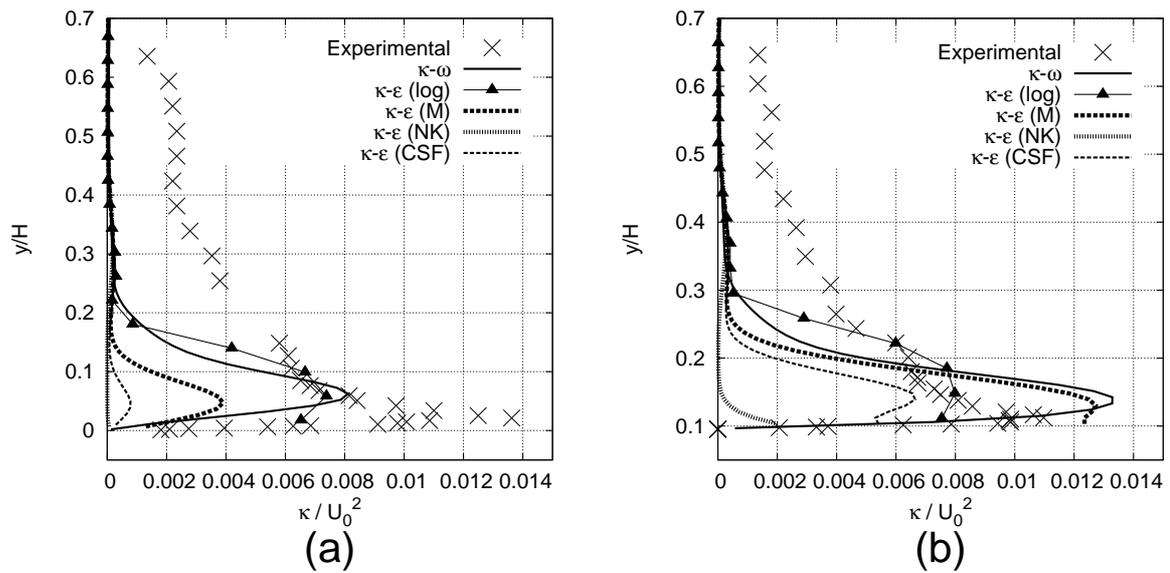


Figura 4.32: Colina abrupta - Perfis de energia cinética de turbulência em $x = 600mm$ (a) e $x = 750mm$ (b).

Todos os perfis de energia cinética de turbulência calculados subestimaram pela mesma diferença o valor de energia cinética do escoamento médio, provavelmente devido à forma de aplicação da condição de contorno de κ na entrada: o perfil experimental é interpolado linearmente entre os nós da malha, e o erro numérico torna-se essencial na região mais próxima à parede, onde o gradiente de energia cinética de turbulência é muito forte. Mesmo assim, os perfis de energia cinética de turbulência deixam mais

evidente a robustez e a alta sensibilidade do modelo $\kappa - \omega$ implementado, pois em todos os casos as previsões do modelo tiveram concordância bem superior com os dados experimentais em relação aos perfis obtidos com o modelo $\kappa - \varepsilon$.

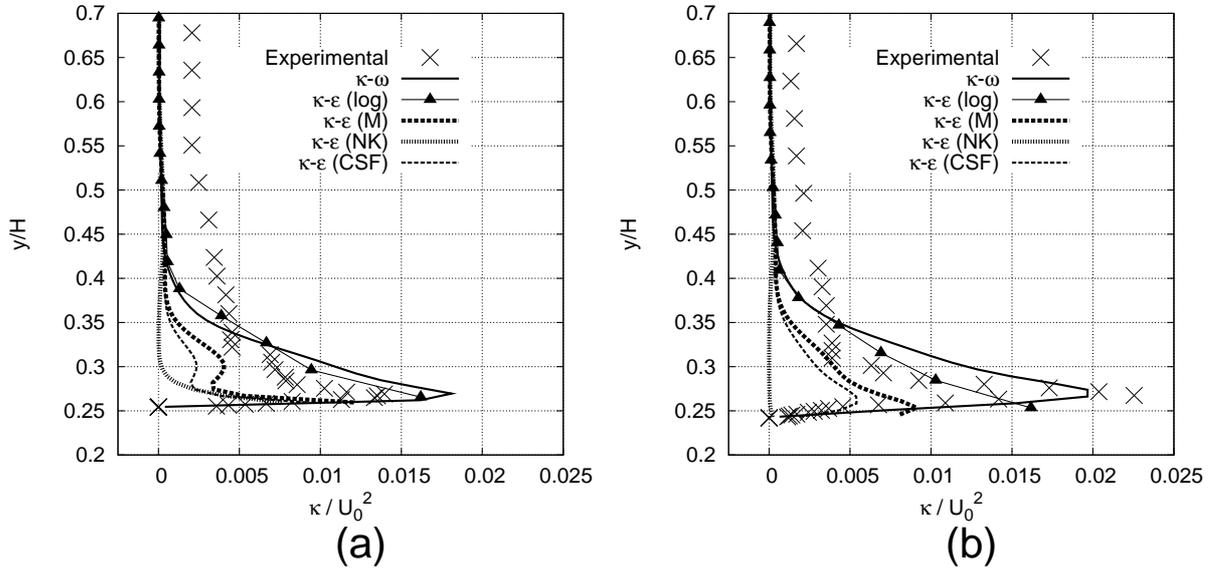


Figura 4.33: Colina abrupta - Perfis de energia cinética de turbulência em $x = 900\text{mm}$ (a) e $x = 930\text{mm}$ (b).

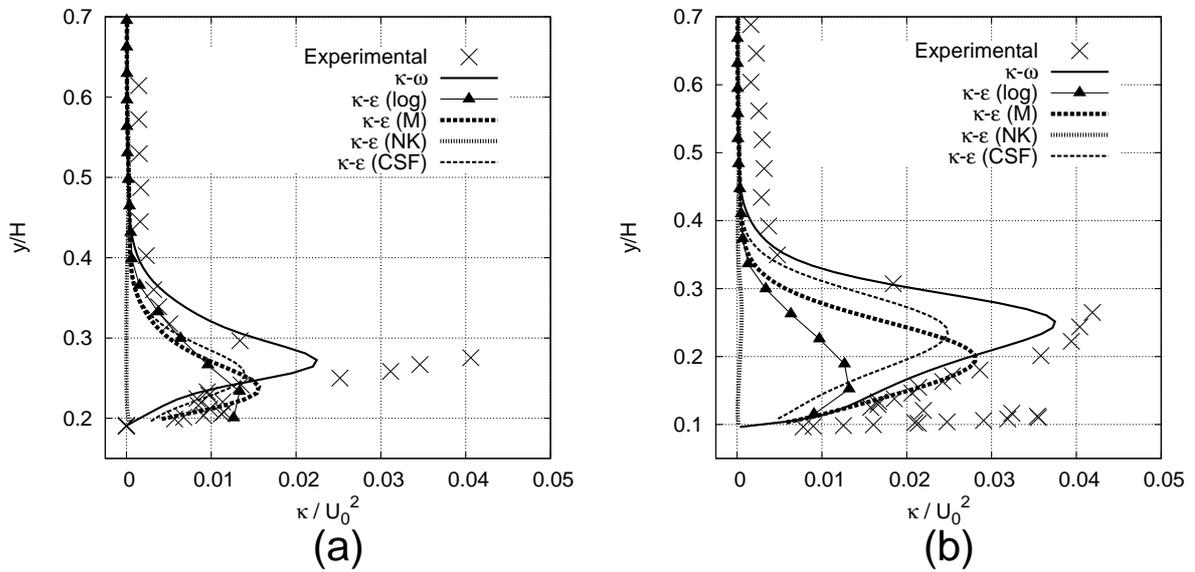


Figura 4.34: Colina abrupta - Perfis de energia cinética de turbulência em $x = 975\text{mm}$ (a) e $x = 1050\text{mm}$ (b).

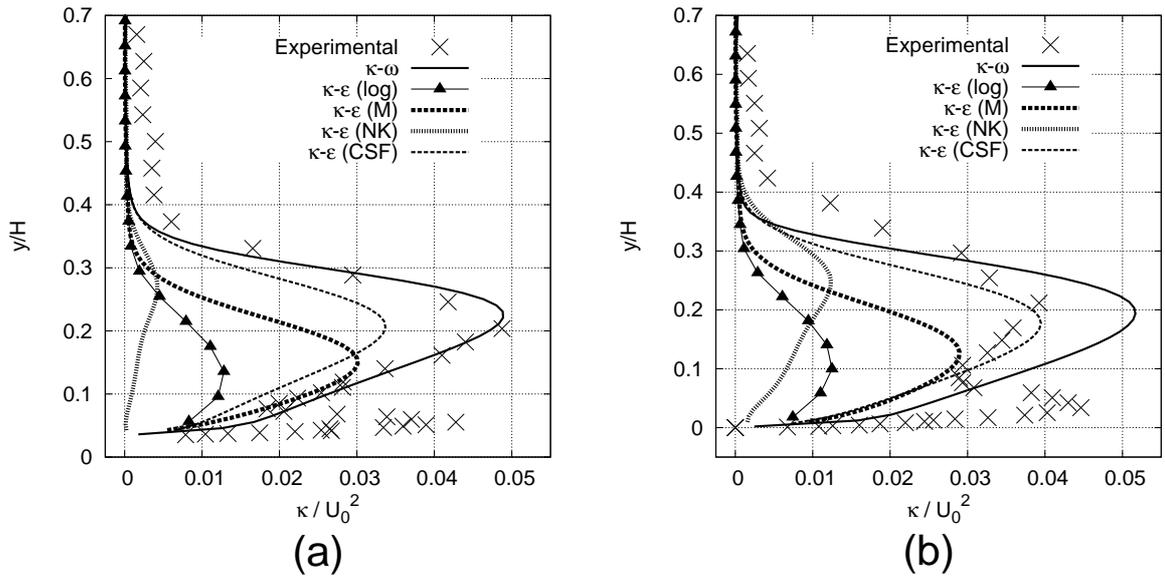


Figura 4.35: Colina abrupta - Perfis de energia cinética de turbulência em $x = 1125mm$ (a) e $x = 1200mm$ (b).

Alguns resultados já eram esperados, como a boa aproximação da lei logarítmica nos dois perfis anteriores ao descolamento, e como o perfil de κ fica totalmente subestimado nos perfis medidos após esse ponto.

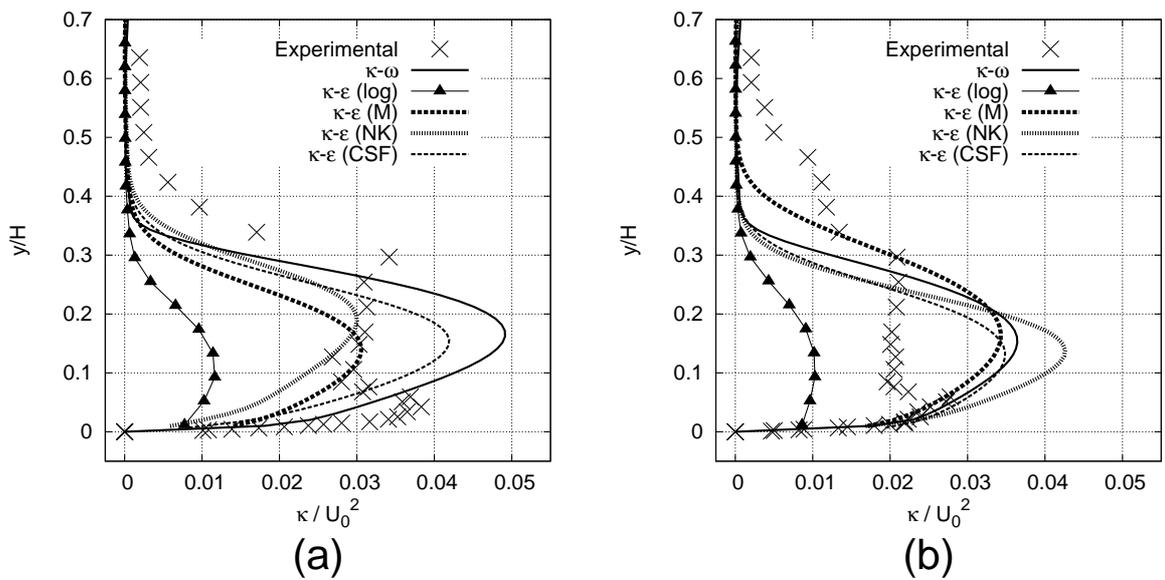


Figura 4.36: Colina abrupta - Perfis de energia cinética de turbulência em $x = 1300mm$ (a) e $x = 1500mm$ (b).

Outro resultado esperado é a fraca concordância dos perfis obtidos com a lei de Nakayama e Koyama. Uma vez que essa lei se baseia exatamente no campo calculado de κ , os resultados ruins de velocidade já indicavam que a previsão dos perfis de κ não seriam boas. Porém, é fato que após o recolamento, o resultado da lei de Nakayama e Koyama passa a ter concordância melhorada, mas ainda insuficiente se comparada com os demais resultados. O melhor resultado com modelo $\kappa - \varepsilon$ foi o obtido com a lei de Cruz e Silva Freire, que supera o modelo $\kappa - \omega$ no perfil medido em $x = 1200mm$. Nos demais perfis de energia cinética de turbulência, os resultados do modelo $\kappa - \omega$ são melhores. O gradiente na região mais próxima à parede foi bem aproximado, enquanto os valores de κ em uma região intermediária chegaram a ser perfeitamente previstos, como no perfil obtido em $x = 1125mm$.

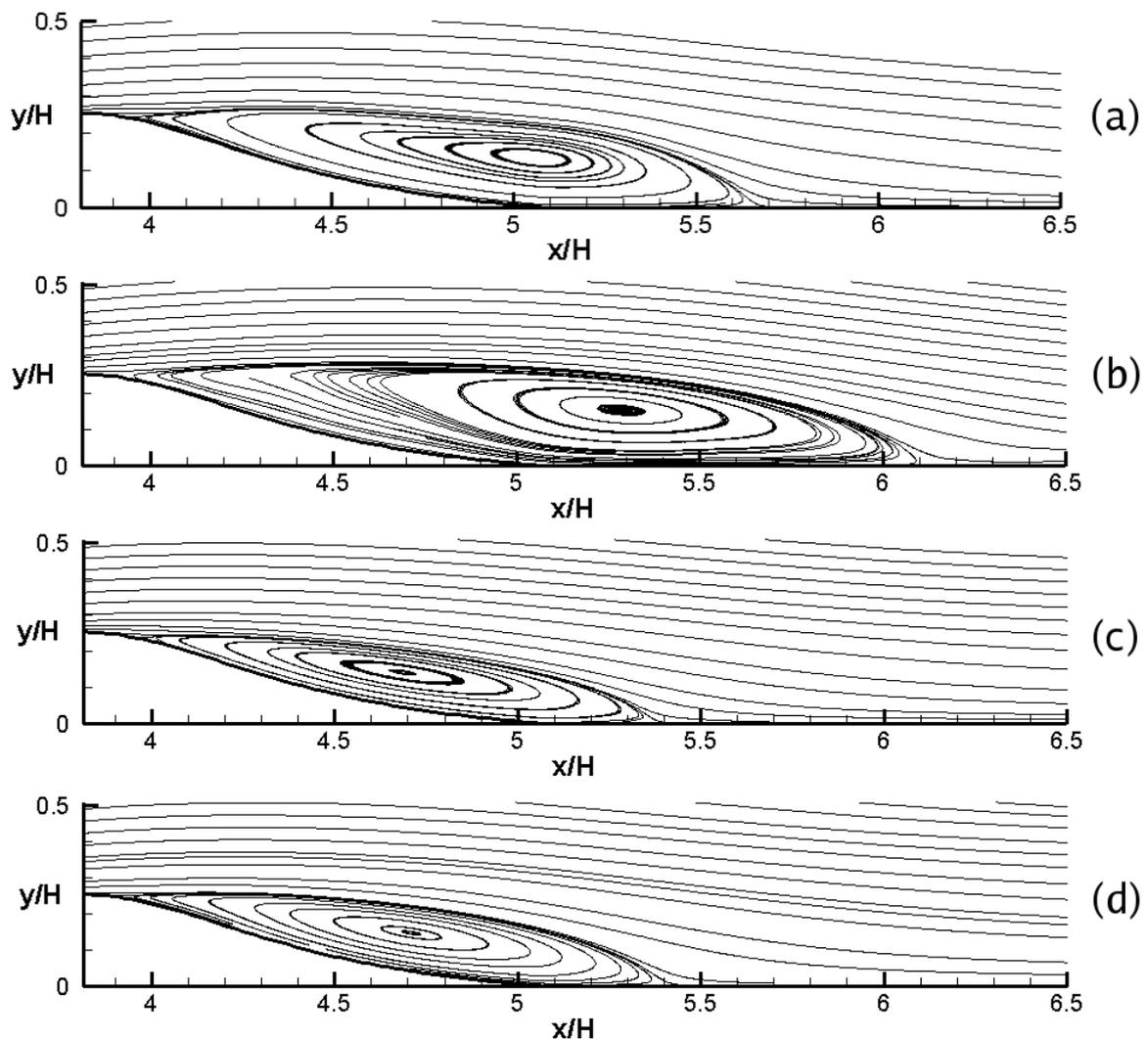


Figura 4.37: Colina abrupta - comparação das zonas de recirculação obtidas com os modelos $\kappa - \varepsilon$ - lei de Mellor (a), lei de Nakayama e Koyama (b) e lei de Cruz e Silva Freire (c) - e $\kappa - \omega$ (d).

São mostradas as zonas de recirculação obtidas com todas as simulações utilizadas, na figura (4.37), e os campos qualitativos obtidos com o modelo $\kappa - \omega$, na figura (4.38).

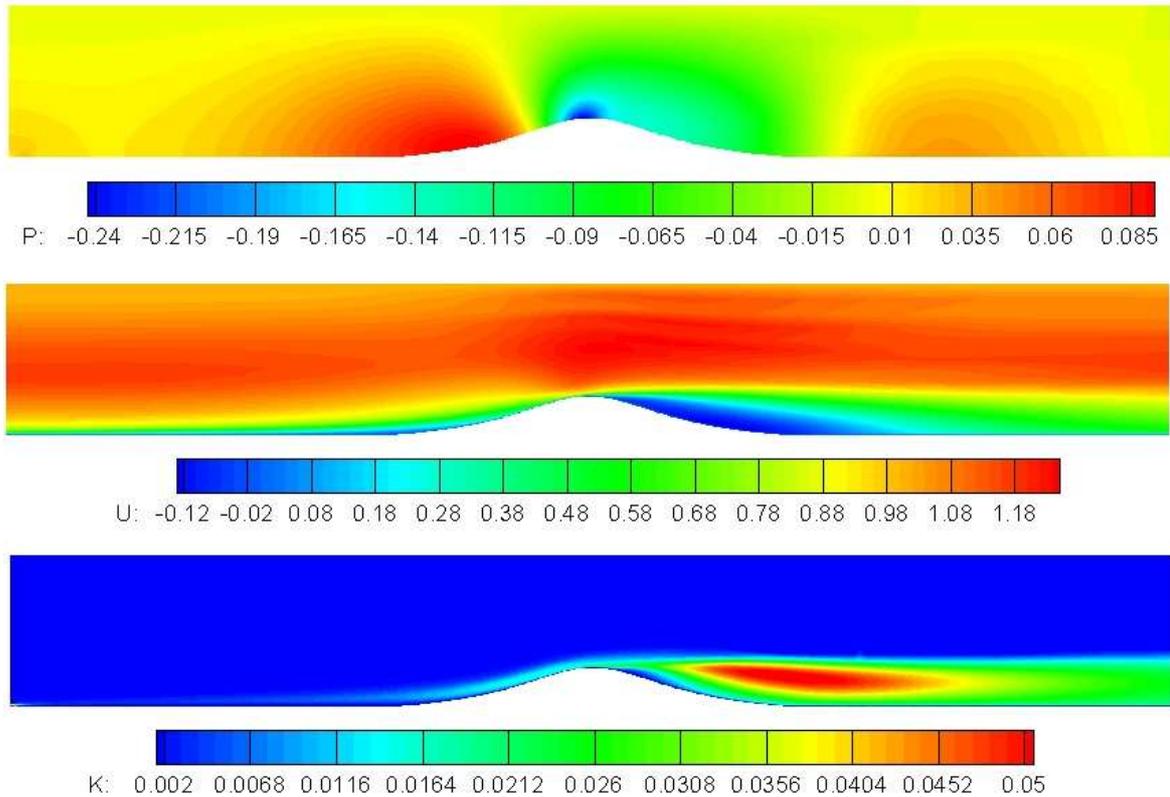


Figura 4.38: Colina abrupta - campos qualitativos obtidos com o modelo $\kappa - \omega$ para a pressão (no alto), para o campo de velocidade horizontal (ao meio) e para a energia cinética de turbulência.

Tabela 4.4: Colina abrupta - resultados da zona de recirculação para os modelos e leis de parede utilizadas no código TURBO-2D - pontos de descolamento, recolamento, comprimento da zona de recirculação e erro percentual em relação ao experimental.

Modelo utilizado	Descolamento x_d/H	Recolamento x_r/H	Recirculação $L_r = \frac{(x_r - x_d)}{H}$	Erro % $\frac{\ L - L_{exp}\ }{L_{exp}}$
Mellor	3,96	5,664	1,704	9,23%
Nakayama e Koyama	3,94	6,125	2,185	40,06%
Cruz e Silva Freire	3,945	5,39	1,445	7,37%
$\kappa - \omega$	3,905	5,45	1,545	0,96%
Experimental	3,94	5,50	1,56	—

Comparado com o trabalho de Loureiro et al. (2006), o modelo $\kappa-\omega$ foi o que obteve o melhor desempenho, seguido pela lei de Cruz e Silva Freire, mas com uma diferença considerável entre ambos. Na tabela (4.4) estão resumidos os valores obtidos com cada lei de parede e com o modelo $\kappa-\omega$ para a zona de recirculação. Dada a boa capacidade do modelo $\kappa-\omega$ implementado na simulação do escoamento sobre a colina abrupta, são obtidos resultados numéricos com precisão equiivalente à incerteza de medição experimental. Os bons resultados obtidos validam a escolha do modelo de Bredberg (2002) e a implementação numérica.

4.3 Placa plana fortemente aquecida de Ng (1981)

Uma vez validada a implementação do modelo $\kappa-\omega$ de Bredberg (2002) no código TURBO-2D, a etapa seguinte é caracterizada pela implementação de um termo adicional às equações de transporte de κ e de ω para computar os efeitos de gradientes térmicos como agentes de produção adicional de turbulência e de sua taxa de dissipação.

A fim de verificar a influência deste termo de fonte nos resultados de simulações de escoamentos turbulentos com transporte de energia, foram selecionados dois casos de camada limite turbulenta hidrodinâmica e térmica, um de convecção forçada e outro de convecção natural. A metodologia para simulação numérica da camada limite térmica turbulenta sob convecção forçada foi testada com uma simulação de escoamento de ar totalmente desenvolvido, que incide sobre placa plana horizontal, fortemente aquecida. A base de comparação para a simulação numérica foram os dados experimentais de Ng (1981).

No caso teste de Ng (1981) o escoamento é totalmente desenvolvido em túnel de vento, sob temperatura ambiente de $293K$ e velocidade de escoamento livre de $10,5m/s$. Este fluxo incide sobre a seção de teste, constituída por uma placa plana com 250 mm de comprimento, mantida sob temperatura constante de 1250 K. A parte final do desenvolvimento do perfil de velocidade é feita em um canal de seção quadrada com arestas de $100mm$, apresentando $500mm$ de comprimento.

O canal de desenvolvimento apresenta em seu trecho inicial, medindo $250mm$ de comprimento, parede inferior rugosa, concebida para acelerar o desenvolvimento do perfil. Na segunda metade do canal de desenvolvimento a parede inferior é lisa, construída com material e acabamento superficial idênticos ao da seção de teste, que, por sua vez, se apresenta como um prolongamento natural da parede inferior do canal de desen-

volvimento, totalmente exposta à atmosfera do laboratório. O número de Reynolds do escoamento que entra na seção de teste, tomando como dimensão característica a altura da seção reta do canal de desenvolvimento, é de 66460.

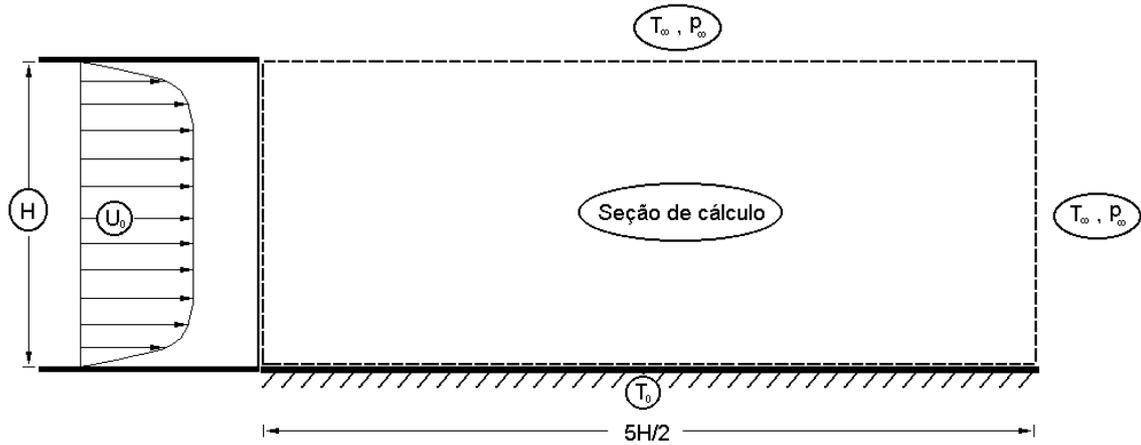


Figura 4.39: Placa aquecida - Esquema da montagem experimental e do domínio de cálculo

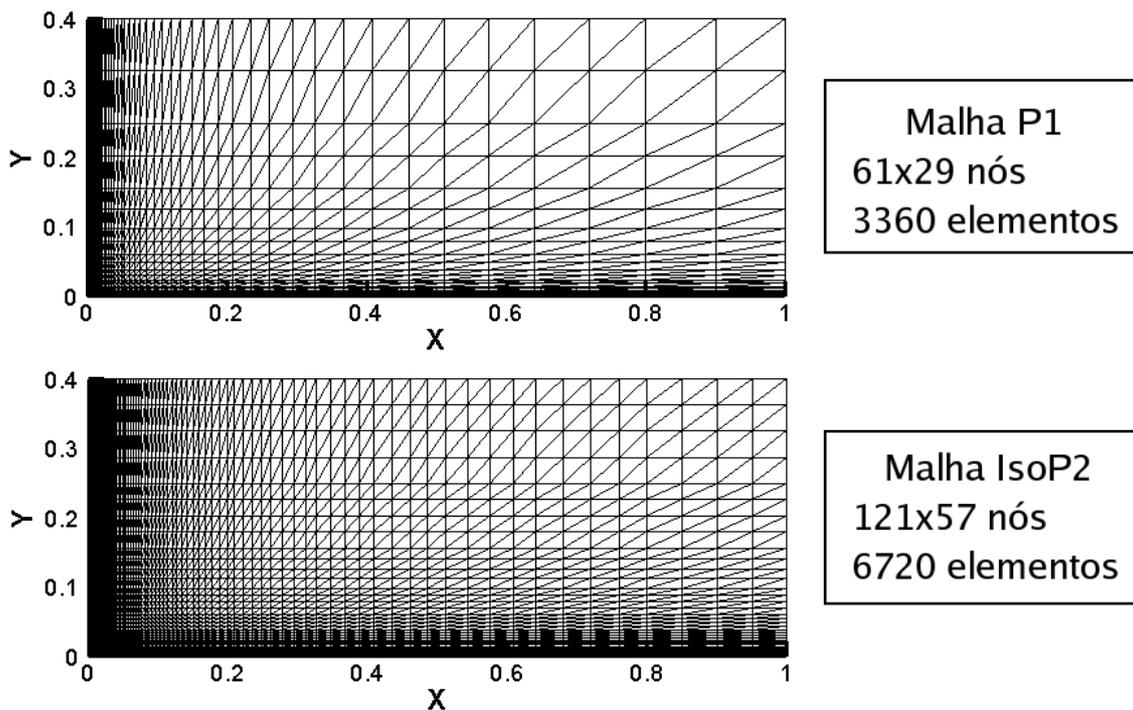


Figura 4.40: Placa aquecida - Malhas de cálculo: pressão (superior) e velocidade (inferior)

O domínio de cálculo adotado abrange apenas a região da seção de teste, sendo constituído por um retângulo medindo 100mm de altura e 250mm de comprimento. A

figura (4.39) demonstra o esquema da montagem experimental de Ng e o domínio de cálculo considerado.

As malhas para o cálculo de pressão e velocidade estão representadas na figura (4.40). O refinamento destas malhas foi obtido após diversas simulações de teste para avaliar as regiões de maior gradiente, sendo estes observados na entrada do domínio e sobre o contorno sólido, seguindo a metodologia de Soares e Fontoura Rodrigues (2003 e 2004), que estudaram este caso com o modelo $\kappa - \varepsilon$ implementado no código TURBO-2D, com duas variantes de condições de contorno de parede: utilizar as leis logarítmicas clássicas e de Cheng e Ng (1982) para velocidade e temperatura em conjunto, ou utilizar as leis de parede de Cruz e Silva Freire (1998 e 2002) para velocidade e temperatura.

Os resultados obtidos com o modelo $\kappa - \omega$ foram confrontados com os dados experimentais de Ng (1981) e com as simulações numéricas realizadas com o modelo $\kappa - \varepsilon$ do código TURBO-2D, oriundos dos estudos realizados por Soares e Fontoura Rodrigues (2003 e 2004). Foram realizadas duas simulações distintas com o modelo $\kappa - \omega$: uma sem incluir o termo térmico adicional proposto nas equações (2.83) e (2.84), representada pela legenda $[\kappa - \omega]$, e outra considerando os termos adicionais nas equações de κ e ω , representada pela legenda $[\kappa - \omega^*]$.

Uma vez que a documentação do caso teste não abrange dados suficientes da taxa de dissipação de energia cinética de turbulência na entrada do domínio de cálculo, os valores corretos de ω a serem impostos como condição de contorno de entrada no domínio deveriam ser, e foram, estimados. É também sabido que modelos $\kappa - \omega$ clássicos sofrem uma forte influência dos valores de ω do escoamento médio, muitas vezes, valores estimados por análises de escala e fisicamente coerentes, com pouca diferença, como por exemplo $2,3Hz$ e $2,8Hz$, podem gerar resultados completamente diferentes. Além disso, a convergência numérica é seriamente comprometida à medida em que os valores escolhidos de ω para o escoamento livre variam demais em relação ao valor “correto”.

Como já citado anteriormente, o termo de derivada cruzada na equação de ω possui como finalidade reduzir a forte influência negativa que os valores de ω para o escoamento médio tenham sobre os resultados finais, além de corrigir o comportamento assintótico da equação de ω de tal forma que os resultados obtidos com DNS sejam recuperados. Foi realizado um teste paralelo baseado no caso teste de Ng a fim de verificar, qualitativamente, a influência do termo de derivada cruzada.

Basicamente, o teste foi conduzido da seguinte forma:

Teste (a): Foi imposto um valor arbitrário de ω , e realizada uma simulação com o termo de derivada cruzada desligado. O resultado dessa simulação claramente divergiu para uma situação desprovida de sentido físico;

Teste (b): Em seguida foi realizada outra simulação numérica com as mesmas condições de contorno arbitrárias, porém com o termo de derivada cruzada ligado. Constatou-se que, embora o resultado obtido dessa forma ainda estivesse longe do ideal, o termo de derivada cruzada relaxa substancialmente a dependência dos resultados com relação ao valor de ω imposto, pois o campo de velocidade obtido já se aproxima de uma situação real;

Teste (c): Por fim, é mostrada a simulação com o valor corrigido de ω imposto, que gerou os resultados definitivos, confirmando que o termo de derivada cruzada não acaba completamente com a dependência dos valores do escoamento médio de ω , mas tem a capacidade de controlar fortemente o cálculo para que não se chegue a uma situação de divergência numérica.

Esses testes do termo de derivada cruzada foram realizados com o termo térmico adicional das equações de κ e ω desligados, e os campos de velocidade obtidos estão mostrados, na mesma ordem em que foram citados, na figura (4.41).

O valor inicialmente utilizado para ω foi calculado com uma análise de semelhança de escala, entre a dissipação das menores escalas e das maiores escalas, da seguinte forma: suponhamos que haja um ponto de interseção entre um vórtice da ordem do comprimento característico do escoamento com um vórtice do tamanho da escala de Kolmogorov. Uma vez que a velocidade linear neste ponto é igual para os dois vórtices, a frequência das maiores escalas pode ser estimada pois a velocidade característica de um vórtice da escala de Kolmogorov é $Re^{(-1/4)}$. Sendo ω_L o valor da frequência das maiores escalas, que será imposta como condição de contorno, temos que:

$$\omega_L = \frac{Re^{-1/4}}{L_0}, \quad (4.4)$$

onde Re é o número de Reynolds do escoamento e L_0 é a escala de comprimento característica do caso estudado, que para a placa plana aquecida é exatamente o comprimento da seção de cálculo.

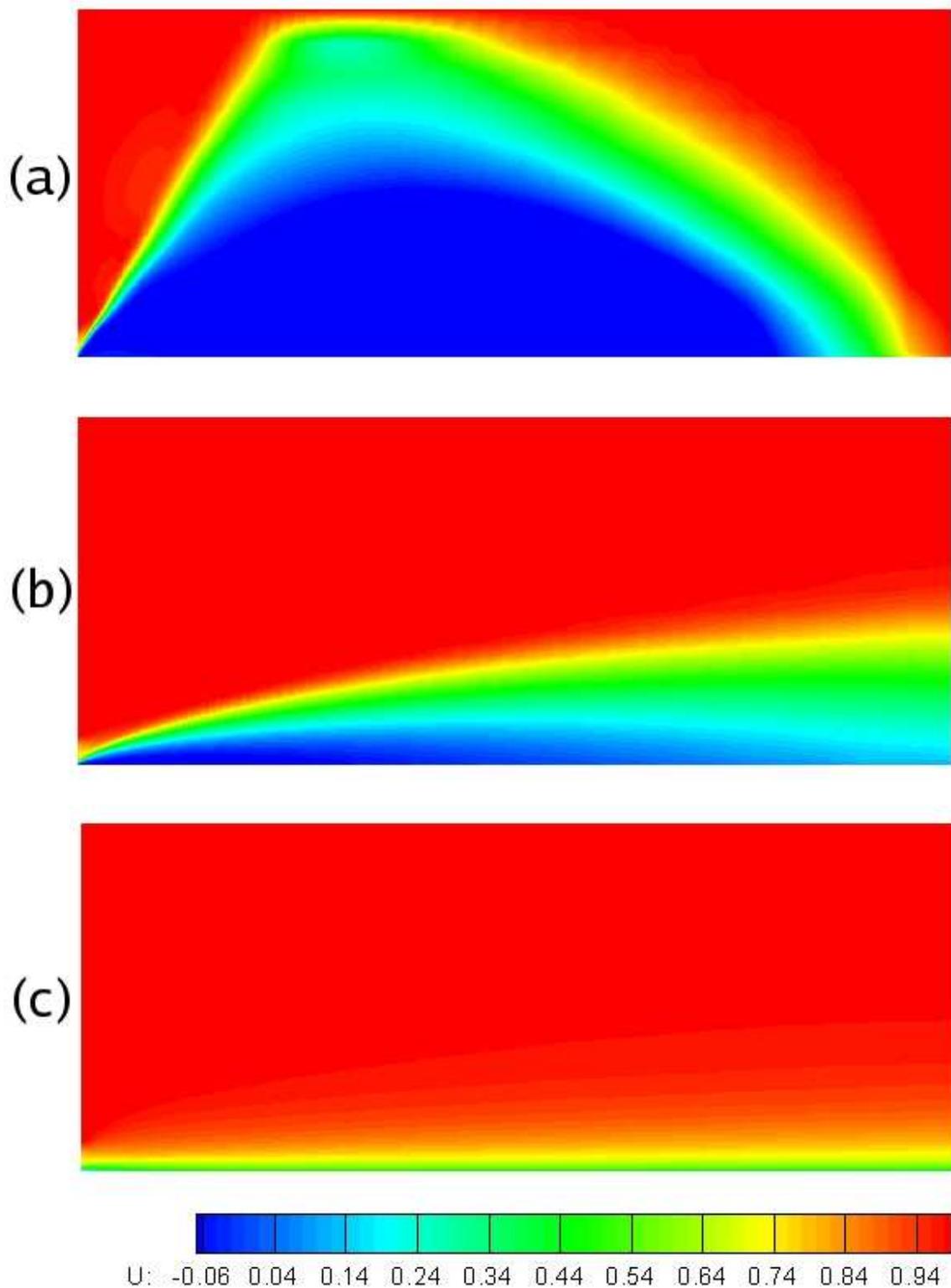


Figura 4.41: Placa aquecida - Campos qualitativos de velocidade horizontal: referente ao teste descrito como “Teste (a)” ; referente ao teste descrito como “Teste (b)” ; e referente ao teste descrito como “Teste (c)” .

Verificou-se com esse teste que o valor estimado dessa forma ainda é muito elevado para ser utilizado como condição de contorno. Após testar uma ampla gama de valores, chegou-se a um valor ótimo para a condição de contorno de ω como sendo 40

vezes menor do que o calculado pela equação (4.4). Ressalta-se também que no caso experimental, a camada limite foi desenvolvida em um duto com alta rugosidade superficial, com o intuito de desenvolver mais rapidamente um perfil turbulento plenamente desenvolvido. Ocorre que a transição da interface rugosa para a lisa provoca uma alteração nítida no perfil de energia cinética de turbulência, conforme pode ser observado no campo da figura (4.42), chegando a provocar uma pequena zona de recirculação no início na placa, conforme pode ser visto na figura (4.43).

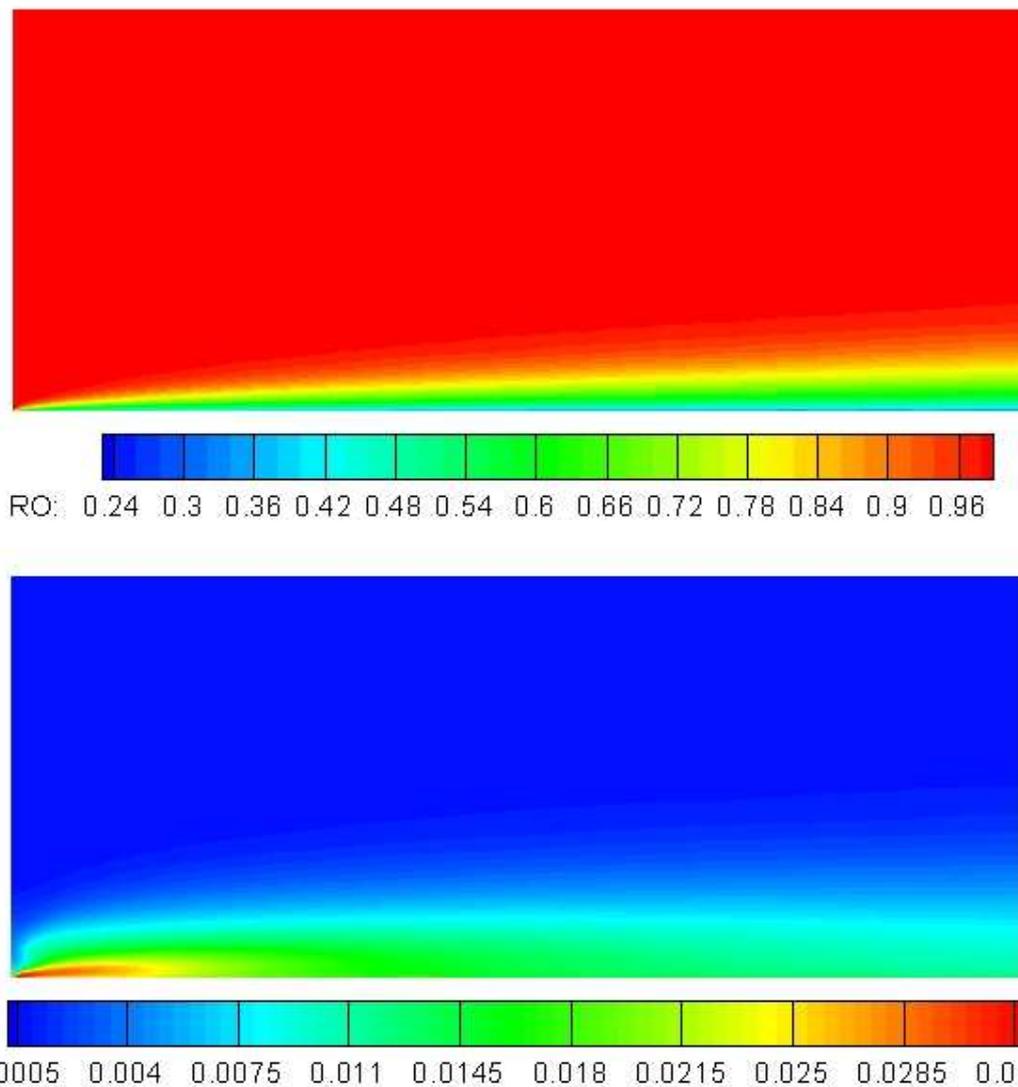


Figura 4.42: Placa aquecida - Campos qualitativos de ρ e de κ referentes ao teste descrito como “Teste (c)”.

Tendo definido a condição de contorno para ω , as demais condições de contorno impostas foram as seguintes: para a região de entrada do domínio de cálculo, são impostos os perfis experimentais de Ng (1981) para temperatura, velocidade e energia cinética

de turbulência, além do valor estimado para a taxa de dissipação ω ; para a parede aquecida é feita integração até a parede onde prevalecem condições de impenetrabilidade e temperatura de 1250 K; para o contorno do domínio de cálculo oposto à parede aquecida, são especificados valores ambientais de pressão e temperatura, para as componentes u , κ e ω são adotados os mesmos valores do perfil experimental na entrada do domínio, e para a componente vertical da quantidade de movimento é imposta uma condição de derivada nula; e finalmente para a região de saída do domínio de cálculo é imposta pressão de referência e são impostas condições de derivada nula na direção longitudinal para todas as demais variáveis.

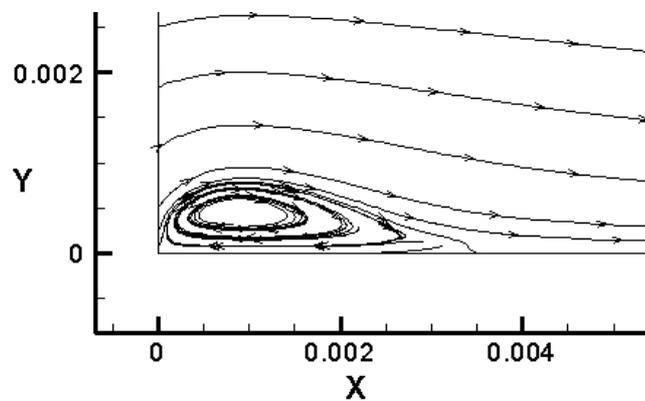


Figura 4.43: Placa aquecida - Recirculação devida à transição de parede rugosa para parede lisa - note que as distâncias da figura são adimensionalizadas pelo comprimento da placa.

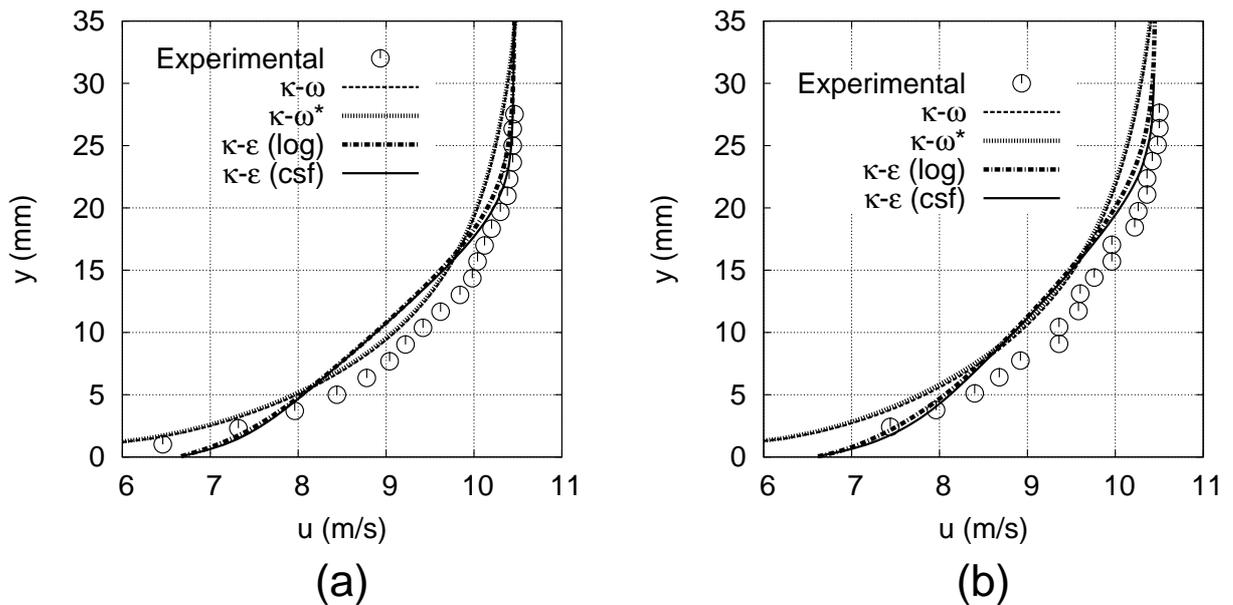


Figura 4.44: Placa aquecida - Perfis de velocidade horizontal: $x = 125\text{mm}$ (a) e $x = 182$ (b).

Os resultados apresentados são relativos aos perfis transversais de velocidade e de massa específica, em duas estações de coleta de dados, situadas a 125mm e 182mm do início da seção de teste, além de resultados tomados ao longo de todo o comprimento da seção de teste, representando respectivamente as espessuras das camadas limites de velocidade e de temperatura e números de Stanton locais do escoamento sobre a placa.

Os resultados obtidos das simulações com o modelo $\kappa - \omega$, indicados por $(\kappa - \omega)$ para o modelo isotérmico de Bredberg (2002) e $(\kappa - \omega^*)$ para o modelo extendido proposto neste trabalho, são confrontados com os dados experimentais e com os dados das simulações numéricas do código TURBO-2D utilizando o modelo $\kappa - \varepsilon$, com as leis logarítmicas clássica e de Ng para velocidade e temperatura, indicados por $(\kappa - \varepsilon \text{ log})$, e com as leis de Cruz e Silva Freire, para velocidade e temperatura, indicados por $(\kappa - \varepsilon \text{ CSF})$, obtidos por Soares e Fontoura Rodrigues (2004).

Nota-se que o modelo $\kappa - \omega$ oferece uma melhor aproximação aos dados experimentais para os perfis de velocidade obtidos, mostrados na figura (4.44), na região da parede, enquanto o modelo $\kappa - \varepsilon$ representa melhor o escoamento mais ao final da camada limite. Porém a utilização dos termos térmicos propostos não modificou significativamente os perfis, tal como aconteceu com os resultados obtidos com o modelo $\kappa - \varepsilon$ utilizando diferentes leis de parede de velocidade e temperatura.

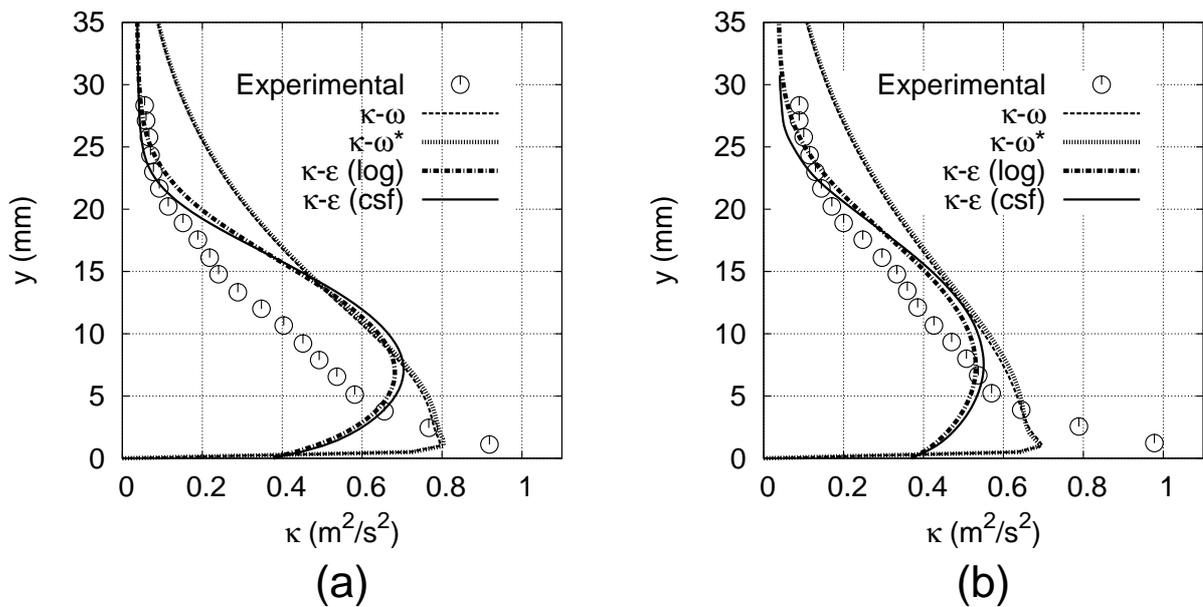


Figura 4.45: Perfis de energia cinética de turbulência em $x = 125\text{mm}$ (a) e $x = 182$ (b).

O mesmo efeito é observado nos perfis de energia cinética de turbulência, mostrados nas figuras (4.45a) e (4.45b), com o modelo $\kappa - \omega$ tentando se aproximar melhor do valor máximo na proximidade da parede, e o modelo $\kappa - \varepsilon$ recuperando melhor os valores ao final da camada limite. Ainda assim, nota-se uma queda significativa da representação do perfil de κ em relação aos casos isotérmicos. Esse fato é explicado devido à natureza do escoamento parietal térmico, ainda mais evidente sob o forte aquecimento deste caso: não existe a condição de equilíbrio entre produção e dissipação de turbulência, base da própria hipótese da viscosidade turbulenta. Como ambos os modelos se baseiam nesta hipótese, é realmente de se esperar que à medida em que o escoamento estudado tem a condição de não-equilíbrio mais evidente, os resultados das simulações sejam mais discrepantes. Dessa forma, um ou outro modelo deverá se destacar não em obter perfis mais concordantes, mas sim em prever corretamente as propriedades críticas na parede, como o número de Stanton, por exemplo.

Os resultados obtidos para os perfis de massa específica, tanto na figura (4.46a) como na figura (4.46b), são semelhantes e mostram mais nitidamente o efeito da condição de não-equilíbrio do escoamento estudado. O modelo $\kappa - \omega$, mais sensível a este fato, falha em prever os valores do escoamento médio, onde o modelo $\kappa - \varepsilon$ se destaca. Nota-se também que a influência da modificação proposta ao modelo $\kappa - \omega$ é mínima, mesmo nos perfis de energia cinética de turbulência, claramente devido ao fato de que as forças de inércia são muito mais influentes neste escoamento do que as forças gravitacionais.

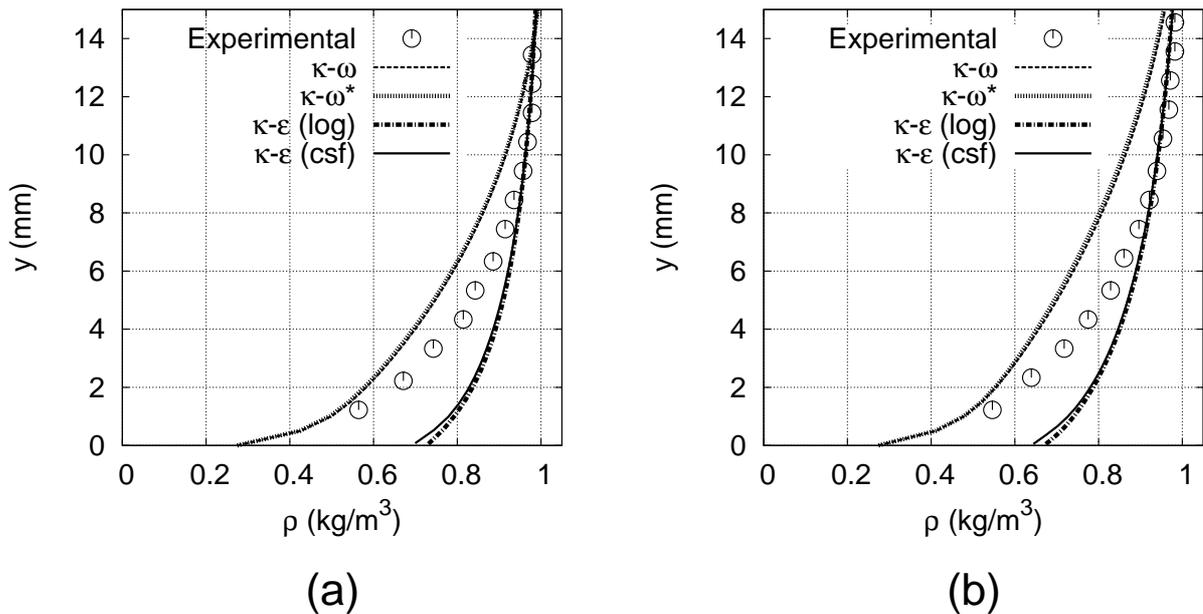


Figura 4.46: Perfis de massa específica em $x = 125\text{mm}$ (a) e $x = 182$ (b)

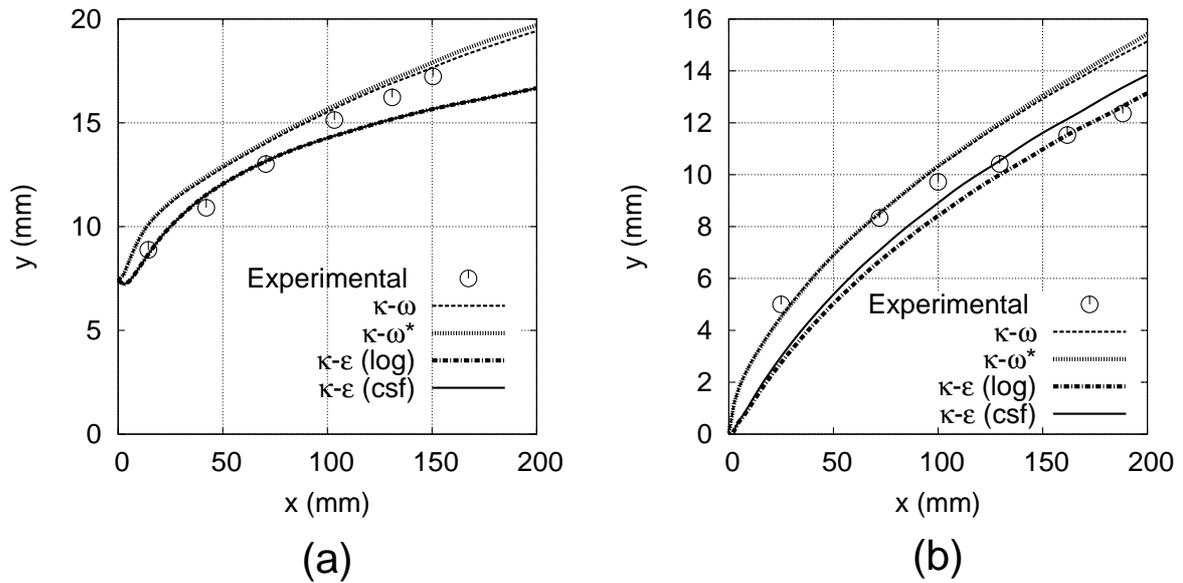


Figura 4.47: Espessura da camada limite turbulenta de velocidade (a) e espessura da camada limite turbulenta de temperatura (b)

Nas figuras (4.47a) e (4.47b) estão apresentadas, respectivamente, as espessuras das camadas limites de velocidade e de temperatura, tomadas ao longo de todo o comprimento longitudinal da placa aquecida. Mais uma vez, nota-se como o modelo $\kappa - \varepsilon$ prevê melhor o escoamento na região próxima ao final da camada limite, tendo o modelo $\kappa - \omega$ essencialmente superestimado todos os valores de espessura de camada limite.

O resultado da figura (4.47a) mostra que a estimativa obtida pelo modelo $\kappa - \varepsilon$ é idêntica para as duas leis de parede quando calcula-se a camada limite hidrodinâmica, e a lei de Cruz e Silva Freire para temperatura melhora um pouco o resultado para a camada limite térmica mais ao centro da placa, enquanto a lei logarítmica mostra melhores resultados no final da placa aquecida. Pelos resultados de camada limite hidrodinâmica e térmica, pode-se concluir que a modificação proposta ao modelo $\kappa - \omega$ não influi significativamente a previsão de propriedades do escoamento longe da parede.

Ao se avaliar, porém, a taxa de transferência de calor na parede, através do número de Stanton, verifica-se que o modelo $\kappa - \omega$ consegue captar muito bem as propriedades do escoamento na região mais próxima à parede. Na figura (4.48), está apresentado o resultado correspondente ao número de Stanton local, que representa um coeficiente sem dimensão de troca de calor por convecção, definido por St , avaliado ao longo de todo o comprimento da placa plana aquecida, pela relação recomendada por Incropera e DeWitt (1966) onde o gradiente de temperatura é tomado na forma não-dimensional:

$$St = \frac{\left(\frac{\Delta T}{\Delta y}\right)_{y=0} \left(\frac{\delta_t}{T_w - T_\infty}\right)}{\left(\frac{u_{parede} x}{\nu}\right) \left(\frac{\nu}{\alpha}\right)}. \quad (4.5)$$

Este resultado mostra dois fatos de suma importância. O primeiro é que, enquanto o modelo $\kappa-\varepsilon$ se mostrou mais adequado ao cálculo das propriedades do escoamento mais afastado da parede, isto é, a concordância com os dados experimentais dos resultados obtidos com ele é boa mais ao final da camada limite, o modelo $\kappa-\omega$ capta muito bem os gradientes de velocidade e temperatura imediatamente próximos à parede, e conseqüentemente, as propriedades críticas como a taxa de troca de calor entre o fluido e a parede são muito bem aproximados. O modelo $\kappa-\varepsilon$ já apresenta concordância extremamente reduzida na subcamada laminar. Ressalta-se que nas simulações de Soares e Fontoura Rodrigues (2004), o valor de y^* para as simulações com o modelo $\kappa-\varepsilon$ se situaram na subcamada laminar, com valor máximo de y^* igual a 8.

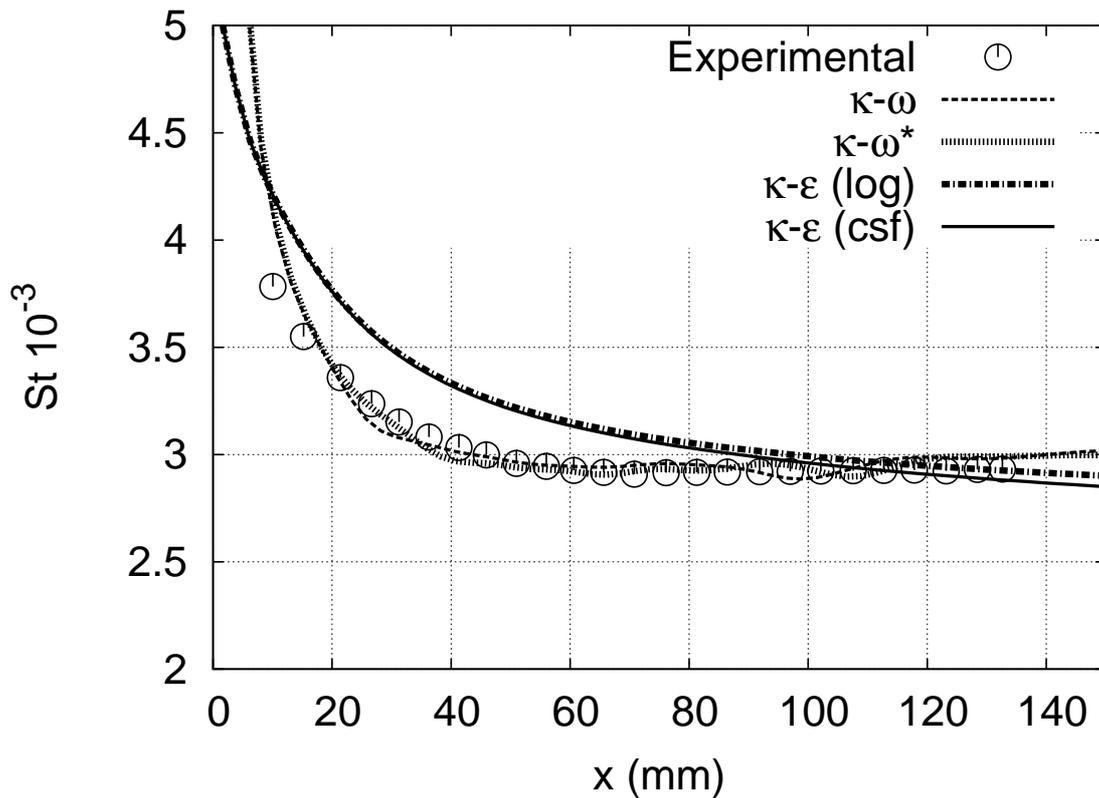


Figura 4.48: Número de Stanton para o escoamento sobre a placa plana aquecida

A outra forte evidência mostrada por este resultado é a diferença observada entre os gráficos de número de Stanton para o modelo isotérmico de Bredberg e para o modelo

extendido, proposto neste trabalho. Nota-se que os termos adicionais nas equações de κ e ω agem positivamente como atenuadores das oscilações obtidas no cálculo das propriedades na vizinhança próxima à parede, possibilitando uma melhor concordância com os dados experimentais.

Concluindo, o estudo deste caso mostrou que o modelo $\kappa-\omega$ é mais sensível a condições de não equilíbrio do que o modelo $\kappa-\varepsilon$. Porém, o modelo $\kappa-\omega$ mostra-se muito bom em prever propriedades críticas do escoamento na região da parede, haja visto o excelente resultado obtido para o número de Stanton local ao longo da parede aquecida.

Tabela 4.5: Placa aquecida - Conclusões do estudo

Observações	Conclusões
O modelo $\kappa-\omega$ sofre menos influência dos valores de ω para o escoamento médio quando possui um termo de derivada cruzada devidamente calibrado.	Os valores de ω podem ser estimados inicialmente com a equação (4.4), e posteriormente ajustados/corrigidos de forma que os resultados obtidos sejam satisfatórios.
O modelo $\kappa-\omega$ utilizado supera o modelo $\kappa-\varepsilon$ no cálculo de propriedades críticas na região parietal.	Por ser mais sensível às condições de não-equilíbrio, a modelagem na região logarítmica pode ser comprometida com o modelo $\kappa-\omega$, sem contudo comprometer o cálculo na subcamada laminar.
A extensão térmica ao modelo $\kappa-\omega$ de Bredberg (2002) se mostrou eficiente no cálculo do coeficiente de troca de calor ao longo da placa aquecida.	A previsão de propriedades críticas na interface sólido-fluido é melhorada com a utilização do modelo proposto, justificando sua aplicação e o objetivo deste trabalho.

Este estudo também mostra que, mesmo em escoamentos estabelecidos em condições de não-equilíbrio e dominados por forças de inércia, a presença de termos de fonte nas equações de κ e de ω é benéfica no sentido de eliminar eventuais oscilações numéricas nos resultados. Em muitos casos de escoamentos turbulentos térmicos de interesse em engenharia, o que se deseja é exatamente prever as propriedades de troca de calor do fluido com a parede. Com isso, conclui-se que, mesmo com custo computacional relativamente maior, o modelo $\kappa-\omega$ extendido proposto neste trabalho é bastante adequado às aplicações de escoamentos turbulentos parietais térmicos. A tabela (4.5) resume as observações e conclusões obtidas com este estudo.

4.4 Convecção natural sobre placa vertical de Tsuji e Nagano (1988)

Com o objetivo de fechar a campanha de validação do modelo estendido proposto, julgou-se necessário validar a metodologia deste trabalho em escoamentos turbulentos provocados exclusivamente pela ação de gradientes térmicos no fluido. Para isso, o caso da convecção natural sobre placa plana vertical de Tsuji e Nagano (1988) é recomendado pela ERCOFTAC para este tipo de estudo, devido à boa documentação experimental e numérica disponível.

O caso em questão trata de um escoamento de ar sobre uma placa plana vertical de cobre com quatro metros de altura por um de largura, provocado exclusivamente pelo aquecimento da placa a uma temperatura constante de $60^{\circ}C$. A turbulência neste tipo de escoamento é provocada exclusivamente por forças gravitacionais induzidas pelo gradiente térmico no fluido, com flutuações significativas de velocidade e temperatura ocorrendo a velocidades baixas. A placa fica suspensa, longe do chão e das paredes do laboratório, e a camada limite naturalmente transiciona de laminar para turbulenta em um ponto próximo a $80cm$ de altura, a partir da borda da placa. As escalas características deste escoamento, em função dos parâmetros térmicos, são:

1. Temperatura ambiente: $T_a = 15,0^{\circ}C$;
2. Viscosidade cinemática ambiente: $\nu = 1,67 \cdot 10^{-5} m^2/s$;
3. Pressão atmosférica ambiente: $p_a = 1017hPa$;
4. Temperatura da placa aquecida: $T_w = 60,0^{\circ}C$;
5. Número de Prandtl: $Pr = 0.71$;
6. Número de Grashof local: $Gr_y = [g(T_w - T_a)y^3]/[(273 + T_a)\nu^2] = 5,50 \cdot 10^9 y^3$;
7. Número de Nusselt local: $Nu_y = (q_w \cdot x)/[(T_w - T_a)\lambda_w]$
(q_w é o fluxo de calor na parede e λ_w é a condutividade térmica do fluido);
8. Velocidade de referência: $U_b = (g(T_w - T_a)\nu/(273 + T_a))^{(1/3)} = 0,0295 m/s$.

Na figura (4.49) é mostrado o diagrama do caso teste e a localização do domínio de cálculo. De acordo com os autores e contribuintes da ERCOFTAC, duas aproximações podem ser utilizadas para resolver numericamente este caso. A primeira, não utilizada

neste trabalho, consiste em simular a placa desde o início, passando pela transição para regime turbulento e então medir as propriedades turbulentas em $y = 2,535m$. A outra alternativa é iniciar o cálculo em $y = 1,438m$, tendo como condição de contorno de entrada os perfis experimentais. Como fenômeno de transição não é objeto de estudo neste trabalho, a segunda estratégia numérica foi adotada.

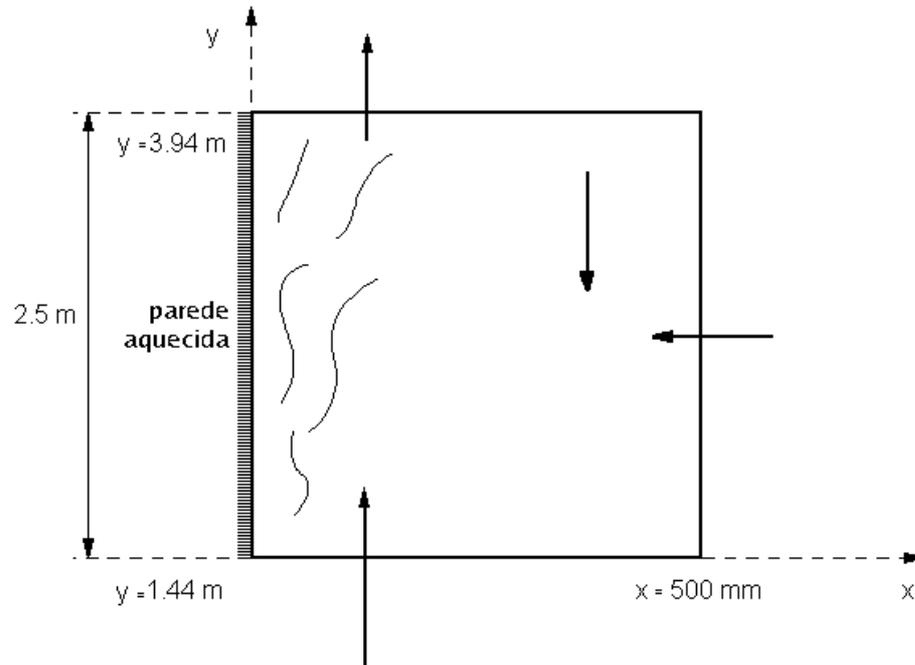


Figura 4.49: Convecção natural - Diagrama do caso teste e do domínio de cálculo.

A malha de cálculo para este caso também foi gerada com base na análise das escalas características, e está mostrada na figura (4.50). As simulações com esta malha ficaram quase no limite de utilização, com um y^* máximo verificado de 2,3. Para este caso, foi seguida a mesma metodologia aplicada no estudo da convecção forçada sobre placa plana fortemente aquecida: o modelo $\kappa - \omega$ foi utilizado com e sem a extensão térmica proposta, e os resultados estão apresentados seguindo a mesma notação.

As condições de contorno impostas foram os perfis experimentais na entrada, e condições ambientes nos outros contornos. A condição de contorno para ω foi calculada com base nos valores experimentais disponíveis de tempo característico de emissão turbulenta. Os resultados obtidos, mais uma vez, foram confrontados com os dados experimentais e com os resultados apresentados por Soares e Fontoura Rodrigues (2004) para os perfis de velocidade e de temperatura em três pontos da placa, além da avaliação do número de Nusselt do escoamento em função do número de Rayleigh local.

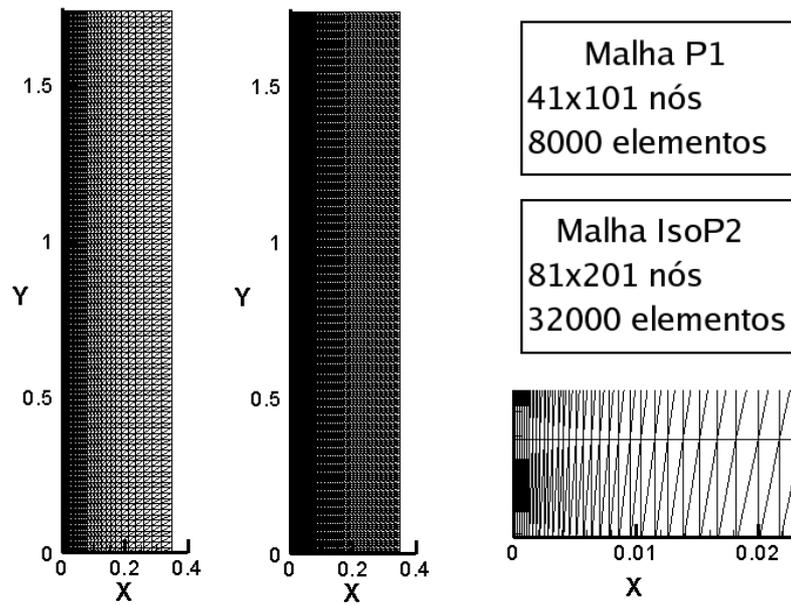


Figura 4.50: Convecção natural - Malhas de cálculo utilizadas: malha P1 à esquerda, malha IsoP2 ao centro e à direita o detalhe do refinamento da malha na região parietal.

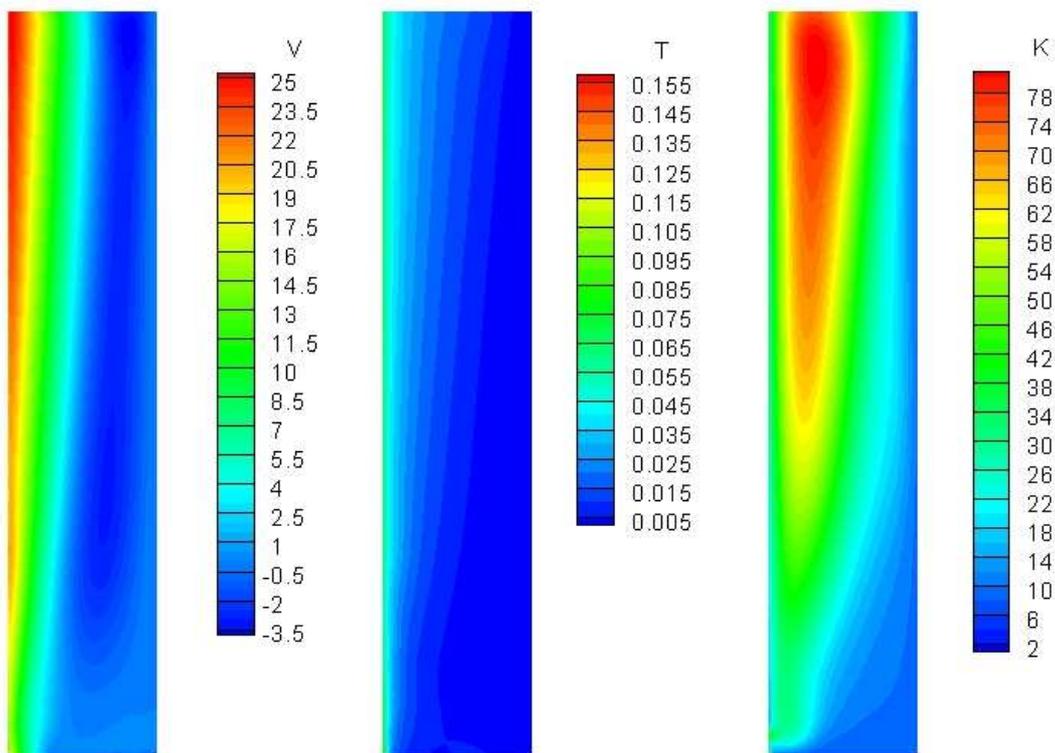


Figura 4.51: Convecção natural - Campos qualitativos de velocidade, temperatura e de energia cinética de turbulência - repare nos valores de velocidade vertical negativos, indicando a entrada de ar pela parte superior do domínio (simulação com o modelo estendido).

Este caso possui algumas características interessantes, como por exemplo, a camada limite imposta como condição de entrada não é plenamente desenvolvida. O comprimento de referência mostrou ser um fator decisivo na predição de fluxo térmico, por vezes

causando forte instabilidade e até mesmo divergência numérica. O valor mais acertado para o comprimento característico foi exatamente a posição y na qual o cálculo se inicia, ou seja, tomando-o como $1,438m$. Outro fato curioso é a condição de contorno ambiental para velocidade e pressão. Os autores apontam que há um pequeno fluxo lateral no sentido da placa entrando no domínio, e que por vezes a velocidade vertical em pontos afastados da placa eram negativos e também pequenos em ordem de grandeza.

O código TURBO-2D não se adaptou a estas condições de velocidade, e superestimou em todos os casos o fluxo lateral de massa. A saída foi impor condição de velocidade nula na lateral oposta à parede, e permitir que um fluxo de massa entre pela parte superior do domínio, do lado oposto ao da placa. Essa estratégia numérica resolveu o problema de imposição do fluxo lateral e não atrapalhou os resultados na região da parede.

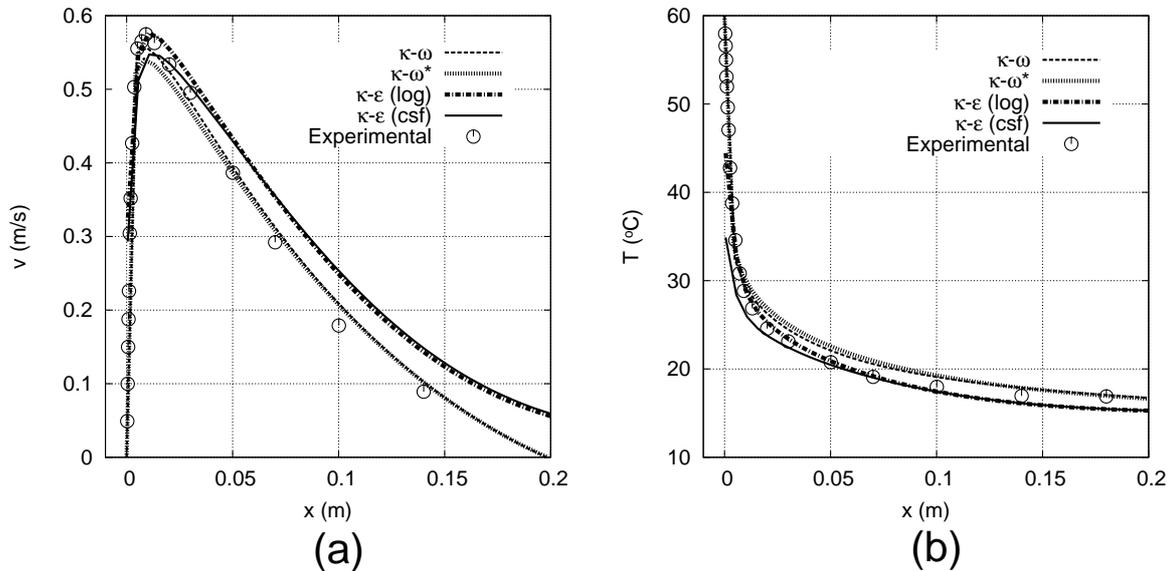


Figura 4.52: Convecção natural - Perfis de velocidade e temperatura em $y = 1,918m$.

De fato, era de se esperar que as diferenças entre o modelo isotérmico de Bredberg (2002) e o modelo estendido proposto neste trabalho fossem mais evidentes nos perfis de velocidade e de temperatura, porém esse fato somente ocorreu nos perfis de velocidade e de temperatura em $y = 1,918m$, visualizados na figura (4.52), e ainda assim, as diferenças observadas foram realmente pequenas, diferentemente do que ocorre com as leis de parede logarítmica e de Cruz e Silva Freire para o modelo $\kappa - \epsilon$. Esta última gerou perfis de velocidade com comportamento semelhante ao observado pelas simulações com o modelo $\kappa - \omega$ na região mais próxima à parede e recupera o comportamento da lei logarítmica na região mais externa da camada limite. Curiosamente, no

perfil observado em $y = 3,244m$ na figura (4.54), o perfil de velocidade vertical calculado pela lei de Cruz e Silva Freire destoou em relação aos demais.

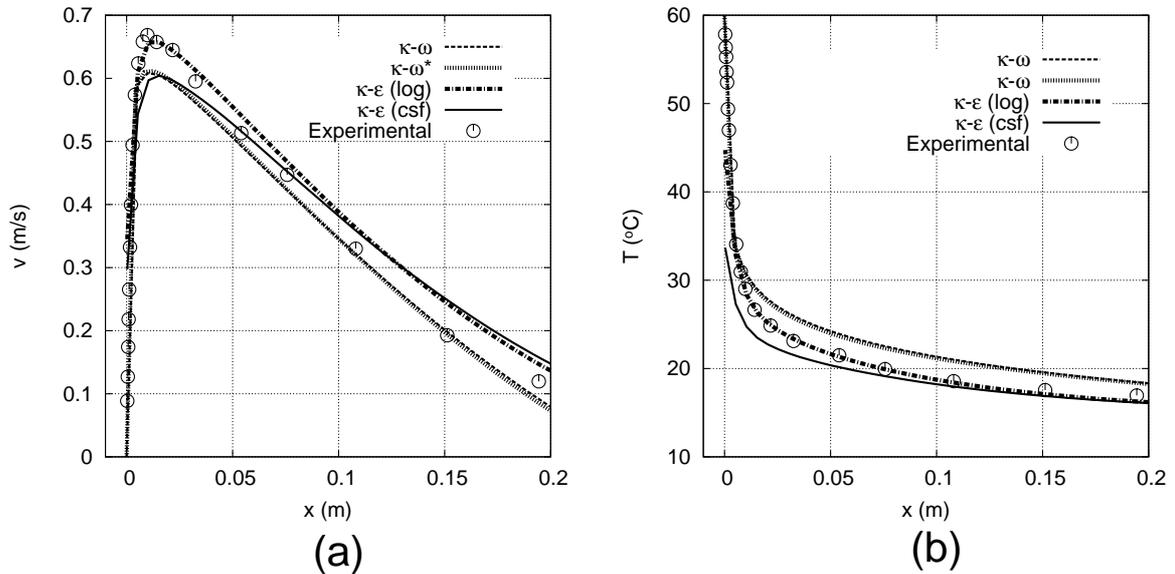


Figura 4.53: Convecção natural - Perfis de velocidade e temperatura em $y = 2,535m$.

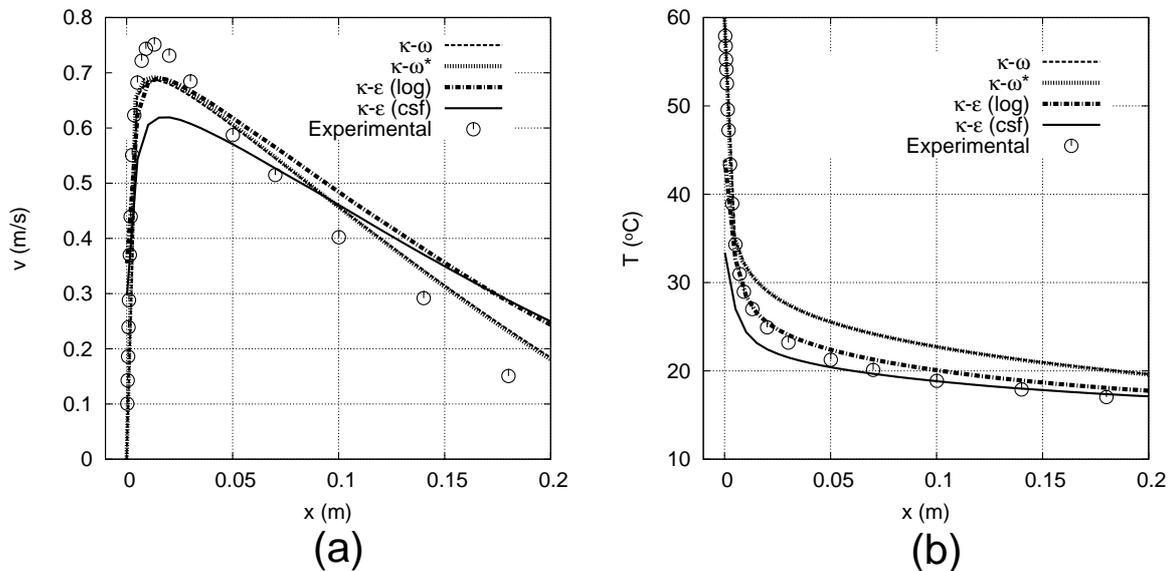


Figura 4.54: Convecção natural - Perfis de velocidade e temperatura em $y = 3,244m$.

Observa-se que em $y = 1,918m$, o modelo $\kappa - \epsilon$ com a lei logarítmica calculou melhor a região próxima à parede, em especial, conseguiu prever bem o valor máximo do perfil de velocidade. Já na região mais externa, deixou de concordar satisfatoriamente com os dados experimentais, exatamente ao contrário do modelo $\kappa - \omega$ para o mesmo perfil.

No geral, todos os modelos obtiveram concordância razoável com os dados experimentais, com maior destaque para a lei logarítmica que modelou melhor os valores máximos de velocidade e se aproximou mais dos dados experimentais em todos os perfis de temperatura medidos.

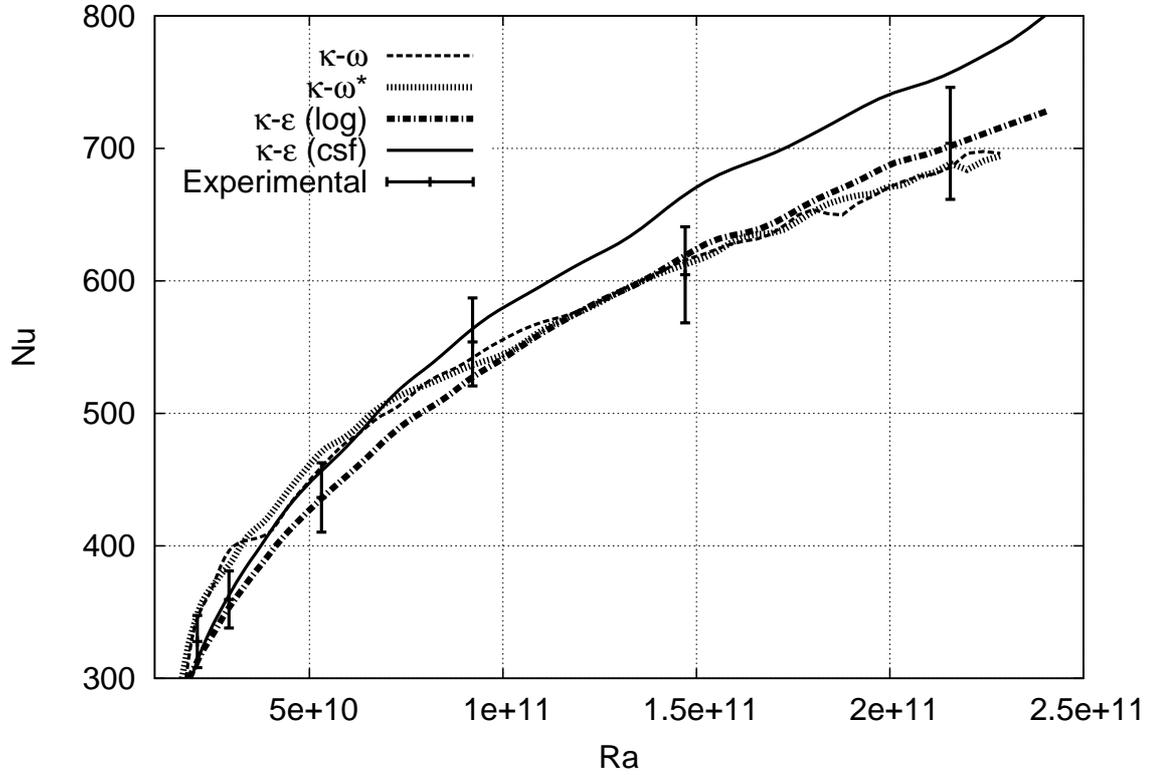


Figura 4.55: Convecção natural - Gráfico do número de Nusselt pelo número de Rayleigh local.

O teste final é avaliar o coeficiente de troca de calor entre a parede e o fluido, correlacionando o número de Nusselt com o número de Rayleigh. O número de Nusselt foi medido nas simulações como o gradiente de temperatura adimensional no primeiro nó da malha:

$$Nu(y) = \left(\frac{\Delta T}{\Delta x} \right)_{x=0}, \quad (4.6)$$

e o número de Rayleigh definido por $Ra = GrPr$, utilizando a correlação experimental levantada pelos autores do caso experimental:

$$Ra(y) = Gr(y).Pr = 3,905 \cdot 10^9 y^3. \quad (4.7)$$

Novamente, apesar de ter obtido concordância razoável nos perfis de velocidade e temperatura, o modelo $\kappa - \omega$ modelou com alto grau de concordância a realidade experimental do fenômeno de transferência de calor em regime turbulento na camada limite gerada por convecção natural. E, exatamente como observado no caso da convecção forçada de Ng (1981), a utilização da extensão térmica ao modelo de turbulência de Bredberg (2002) suavizou as oscilações características do modelo isotérmico. Conforme os resultados apresentados por Soares e Fontoura Rodrigues (2004), a lei logarítmica de temperatura de Cheng e Ng (1982) também gera bons resultados para o coeficiente de transferência de calor.

Resta comprovada a eficácia da extensão térmica proposta ao modelo de turbulência $\kappa - \omega$ de Bredberg (2002), pois é comprovado um efeito estabilizador que atua positivamente no cálculo das propriedades críticas de escoamentos térmicos na interface da parede sólida com o fluido. Deve ser ressaltado que a calibração das constantes da extensão do modelo seguiu exatamente o proposto por Munhoz da Cruz (1989). É possível que uma calibração mais refinada dos termos adicionais, tanto na equação de transporte de κ como na de ω possa melhorar ainda mais a predição das características turbulentas de escoamentos dilatáveis.

Fica também comprovado que a extensão ao modelo de turbulência é benéfica tanto em escoamentos com predominância de forças de inércia (como no caso de Ng) como em casos de convecção natural turbulenta. Com isso, mostrou-se que é possível adequar modelos de turbulência consagrados de forma a melhorar a previsão de escoamentos turbulentos parietais dilatáveis.

5 Conclusão

Este trabalho teve como objetivo implementar um modelo $\kappa - \omega$ de baixo-Reynolds no código acadêmico TURBO-2D, robusto e numericamente estável, vindo de uma geração de modelos de turbulência a duas equações extensivamente calibrado com base em resultados obtidos de simulações numéricas diretas. O modelo proposto por Bredberg (2002) foi implementado com sucesso e provou ser um modelo que atende plenamente ao que se pretendeu com este trabalho, sendo capaz de gerar excelentes resultados em escoamentos isotérmicos e dilatáveis, com apenas uma função de amortecimento aplicada diretamente ao cálculo da viscosidade turbulenta.

Além disso, foi proposta uma metodologia de dedução das equações de um modelo de turbulência, que resulta em uma extensão às equações de um modelo tradicional, tornando-o capaz de computar os efeitos de flutuações turbulentas térmicas na geração de turbulência hidrodinâmica. Nos escoamentos térmicos estudados, tal extensão promoveu um efeito atenuador de oscilações numéricas no cálculo das propriedades críticas da interação entre o fluido e a parede, como o número de Nusselt e o número de Stanton, ambas de alto interesse em projetos de engenharia nos quais o transporte de energia térmica por escoamentos turbulentos é importante. As oscilações numéricas foram atenuadas tanto para o caso de convecção forçada como no caso de convecção natural, sem contudo comprometer de forma alguma os bons resultados já fornecidos pelo modelo de Bredberg (2002).

Os resultados confirmaram a robustez da metodologia analítica e numérica empregada, não deixando dúvidas da importância do papel fundamental dos pesquisadores de simulações numéricas diretas. A aplicação direta de DNS em casos de interesse industrial é sem dúvida inviável, porém é impossível negar os avanços advindos da pesquisa em simulação numérica direta na obtenção e calibração de novos modelos de turbulência mais sofisticados e robustos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] AFOSR-HTTM, 1980-1981, "Stanford Conference on Complex Fluid Flow", Stanford, USA.
- [2] Ataídes, R.S.C. & Fontoura Rodrigues J.L.A., 2002. "Estudo computacional de escoamentos turbulentos com descolamento de camada limite". 9th Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences, Caxambu, Brasil.
- [3] Arora, S.C. & Azad, R.S., 1980. "Turbulent kinetic energie balance in a flow with adverse pressure gradient". AIAA. 18th Aerospace Sciences Meeting. Pasadena.
- [4] Assan, A.E., "Método dos elementos finitos: primeiros passos.", 2ª Edição, Campinas, SP. Editora da Unicamp, 2003.
- [5] Bejan, A., 1994, "Convective Heat Transfer", John Wily & Sons, USA.
- [6] Boussinesq J., 1877, "Théorie de l'Écoulement Tourbillant". Mem. Présentés par Divers Savants Acad. Sci. Inst. Fr., vol. 23, pp. 46-50.
- [7] Boussinesq J., 1904. "Recherches theoretique sur l'ecoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le debit des sources.", J. Math. Pure Appl., 10 (5): 5-78.
- [8] Bredberg J. , Davidson L. "Prediction of flow and heat transfer in a stationary two-dimensional rib roughened passage using low-Re turbulent models" In Proceedings of 3:rd European Conference on Turbomachinery: Fluid Dynamics and Thermodynamics, pages 963-972, IMechE 1999.
- [9] Bredberg J., "On two-equation eddy-viscosity models", Internal Report 01/8, Department of Thermo and Fluid Dynamics, Chalmers University Of Technology, Göteborg, Sweden, 2001.
- [10] Bredberg, J., Peng, S.H., Davidson, L., 2002, "An improved $\kappa - \omega$ turbulence model applied to recirculating flows", International Journal of Heat and Fluid Flow, pp. 731-743.

- [11] Brun, G., 1988. “Develppement et application d’une methode d’elements finis pour le calcul des ecoulements turbulents fortement chauffes ”. Tese de Doutorado, Laboratoire de Mécanique des Fluides, Escola Central de Lyon.
- [12] Buffat, M. 1981. “Formulation moindres carrés adaptées au traitement des effets convectifs dans les équations de Navier-Stokes”. PhD thesis, Université Claude Bernard, Lyon, France.
- [13] Buice, C. & Eaton, J., 1995. “Experimental investigation of flow through an asymmetric plane diffuser”. Annual Research Briefs - 1995, Center of Turbulence Research, Stanford University/ NASA Ames. 117-120.
- [14] Chen, Y.S., 1986. “Applications of a new wall function to turbulent flow computations”. AIAA Journal, vol. 86, pg. 438.
- [15] Cheng, R.K. & Ng, T.T., 1982. “Some aspects of strongly heated turbulent boundary layer flow”. Physics of Fluids, vol. 25(8).
- [16] Cruz D.O.A. & A.P. Silva Freire. 1998, “On single limits and the asymptotic behaviour of separating turbulent boundary layers”. International Journal of heat and Mass transfer. Vol. 41 , no. 14, pp. 2097-2111.
- [17] Cruz D.O.A. & A.P. Silva Freire. 2002, “Note on a thermal law of the wall for separating and recirculating flows”. International Journal of heat and Mass transfer. Vol. 45 , pp. 1459-1465.
- [18] Cunha, F.R., 2003, “Descrição contínua de fluidos em movimento: cinemática e dinâmica” (livro em preparação).
- [19] Cunha, F.R., Oliveira, T.F., Bobenrieth, R.F.M., “A stochastic analysis of a non-linear flow response.”, Probabilistic Engineering Mechanics, 21 (2006), 377-383.
- [20] Cunha, F.R., Andreotti, M., “A Study of the Effect of Polymer Solution in Promoting Friction Reduction in Turbulent Channel Flow”, Journal of Fluids Engineering, 2006, aceito para publicação.
- [21] Driver, D.M. & Seegmiller, H.L., 1985. “Features of a reattaching turbulent shear layer in divergent channel flow”. AIAA Journal, vol. 23, pp. 163 - 171.
- [22] Favre, A., 1965. “Equations de gaz turbulents compressibles”. Journal de mecanique, vol. 3 e vol. 4.

- [23] Fontoura Rodrigues, J.L.A., 1991. “Um método de mínimo resíduo adaptado ao cálculo de condições de contorno não-lineares no escoamento turbulento bidimensional”. XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, pp 465-468.
- [24] Fulachier, L., 1972, “Contribution à l’étude des analogies des champs dynamique et thermique dans une couche limite turbulent - effet de l’aspiration”, Thèse D’Etat - IMST, Marseille, France.
- [25] Harlow F.H. , Nakayama P.J., “Turbulence transport equations”, Phys. Fluids 10 (November) (1967) 2323.
- [26] Harlow F.H. , Nakayama P.J., Transport of turbulence energy decay rate, Los Alamos Scientific Laboratory report LA-3854, 1968.
- [27] Huang P.G., Bradshaw P., “Law of the wall for turbulent flows in pressure gradients.”, AIAA Journal, 33:624-632, 1995.
- [28] Huges, T.J.R. & Brooks, A, 1979. “A multi dimensional upwind scheme with no crosswind diffusion. Finite element methods for convection dominated flows”. ASME-AMD, vol. 34.
- [29] Incropera, F.P. & DeWitt, D.P., 1996, ”Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa, 4ª Edição”, LCT Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., São Paulo, Brasil.
- [30] Jones, W.P. & Launder B.E., 1972. “The prediction of laminarisation with a two-equation model of turbulence”. Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 15, pp. 301-314.
- [31] Jones, W.P. & Mc Guirk, J.J., 1979, ”Mathematical modelling of gas-turbine combustion chambers”, AGARD, p. 275.
- [32] Kelly, D.W., Nakazawa,S., & Zienkiewicz, S., 1980. “A note on upwind and anisotropic balancing dissipation in finite element approximations to convective diffusion problems”. International Journal of Numerical Methods in Engineering, vol. 15.
- [33] Kim J., Moin P., and Moser R.. “Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number.” J. Fluid Mechanics, 177:133-166, 1987.
- [34] Kim. J., “On the structure of pressure fluctuations in simulated turbulent channel flow.” J. Fluid Mechanics, 205:421-451, 1989.

- [35] Kolomogorov A.N.. “Equations of turbulent motion in incompressible viscous fluids for very large Reynolds numbers.” *Izvestia Academy of Sciences, USSR, Physics*, 6:56-58, 1942.
- [36] Launder, B.E., Spalding, D.B., 1974. “The numerical computation of turbulent flows”. *Computational Methods Applied to Mechanical Engineering*, vol. 3, pp. 269-289.
- [37] Le H., Moin P., Kim J., “Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step.”, *J. Fluid Mechanics*, 330:349-374, 1997.
- [38] Leschziner, M.A. “Turbulence modelling for physically complex flows pertinent to turbomachinery aerodynamics.” *van Karman Lecture Series 1998-02*, 1998.
- [39] Loureiro, J. B. R. ; Silva Freire, A. P. ; Pinho, F. T. ; Soares, D. V. ; Fontoura Rodrigues, J. L. A. . “Investigation of Turbulent Flow Over a Steep-Hill Using Laser Doppler Anemometry.” In: *Brazillian Congress Of Mechanical Engineering - Cobem, 2005, Ouro Preto, MG. Proceedings Of 18 Th Brazillian Congress Of Mechanical Engineering - COBEM 2005*.
- [40] Loureiro, J. B. R. ; Silva Freire, A. P. ; Fontoura Rodrigues, J. L. A. ; Soares, D. V. ; Pinho, F. T. . “Water Tank and Numerical Model Studies of Flow Over Steep 2-D Hills.” *Boundary - Layer Meteorology*, publicado *online-first*, agosto de 2006.
- [41] Lima, C.H.R. & Fontoura Rodrigues, J.L.A., 2002. “Desempenho de modelos de turbulência não-lineares na simulação de escoamentos parietais”. *9th Brazilian Congres of Thermal Engineering and Sciences, Caxambu, Brasil*.
- [42] Mellor, G.L., 1966. “The effects of pressure gradients on turbulent flow near a smooth wall”. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 24, part 2.
- [43] Menter F.R., “Influence of freestream values on turbulence model prediction.” *AIAA Journal*, 30:1657-1659, 1992.
- [44] Menter, F.R., 1993, ”Zonal two equation k-w turbulence models for aerodynamic flows”, *AIAA*, vol. 93, pp. 2906.
- [45] Menter F.R., “Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications.” *AIAA Journal*, 32:1598-1605, 1994.
- [46] Moser R.D., Kim J., and Mansour N.N.. “Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re=590$.” *Physics of Fluids*, 11:943-945, 1999. www.tam.uiuc.edu/Faculty/Moser/.

- [47] Munhoz da Cruz, G.M., 1989, “Modélisation des écoulements turbulents avec transferts thermiques en convection mixte”, Tese de Doutorado, Laboratoire de Mécanique des Fluides, Escola Central de Lyon.
- [48] Nakayama, A. & Koyama, H., 1984. “A wall law for turbulent boundary layers in adverse pressure gradients”. AIAA Journal, vol. 22, no 10.
- [49] Ng, T.T., 1981. “Experimental study of a chemically reacting turbulent boundary layer”. Ph. D. Thesis - Lawrence Berkley Laboratory - University of California.
- [50] Obi, S., Aoki, K. & Masuda, S., 1993. “Experimental and computational study of turbulent separating flow in an asymmetric plane difuser”. Ninth Symposium on Turbulent Shear Flows, pp 305, Kyoto.
- [51] Patankar, S.V., & Spalding, D.B., 1967. “Heat and Mass Transfer in Boundary Layers”. Morgan-Grampian, Londres.
- [52] Principe, J., “2D Backward Facing Step”, CIMNE, Spain representation, 3rd QNET-CFD Workshop, Prague, May 2003.
- [53] Reynolds, O., 1895. “On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion”. Phil. Trans. Roy. Soc. London, vol. A186, p. 123-164.
- [54] Stratford, B.S., 1959. “The prediction of separation of turbulent boundary layer”. Journal of fluid mechanics, vol. 5.
- [55] Soares, D. V. ; Fontoura Rodrigues, J. L. A. . “Complex Near-Wall Turbulent Flows: A Performance Analysis of Velocity and Temperature Laws of the Wall.” In: IV Escola de Primavera de Transição e Turbulência, 2004, Porto Alegre, RS. IV Escola de Primavera de Transição e Turbulência, 2004.
- [56] Soares, D. V. ; Fontoura Rodrigues, J. L. A. . “The Performance of Thermal and Velocity Wall Laws.” In: Brazilian Congress Of Thermal Sciences And Engineering - Encit, 2004, Rio de Janeiro, RJ. Proceedings Of The 10 Th Brazilian Congress Of Thermal Sciences And Engineering - Encit 2004, 2004.
- [57] Soares, D. V. ; Fontoura Rodrigues, J. L. A. ; Silva Freire, A. P. ; Loureiro, J. B. R. . “Numerical Simulation of Turbulence in Open-Channel Flows.” In: Brazillian Congress Of Mechanical Engineering - COBEM, 2005, Ouro Preto, MG. Proceedings Of 18 Th Brazillian Congress Of Mechanical Engineering - COBEM 2005.

- [58] Soares, D. V. ; Fontoura Rodrigues, J. L. A. . “The Numerical Simulation of a Turbulent Flow Over a Two Dimensional Hill.” In: Congresso Ibérico Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia - CILAMCE, 2005, Guarapari, ES. Congresso Ibérico Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, 2005.
- [59] Spalart P.R. and Allmaras S.R.. “A one-equation turbulence model for aerodynamic flows.” AIAA Paper 92-439, Reno, NV, USA, 1992.
- [60] Townsend A.A., “The structure of turbulent shear flow.”, Cambridge University Press, Cambridge, 1976.
- [61] Tsuji, T. ; Nagano, Y. . “Turbulence Measurements in a Natural Convection Boundary Layer along a Vertical Flat Plate.” Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 31, No.10, 2101-2111, 1988.
- [62] Turner J. S. , “Buoyancy effects in fluids”, 1^a ed., Cambridge University Press, 1973.
- [63] Uhlmann M. , “Etude de modèle de fermeture au second ordre et contribution à la résolution numérique des écoulements turbulents compressible.”, Tese de Doutorado, Laboratoire de Mécanique des Fluides, Escola Central de Lyon, 1997.
- [64] Wilcox, D.C., “Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models.”, AIAA Journal, 26:1299-1310, 1988.
- [65] Wilcox, D.C., “Comparison of two-equation turbulence models for boundary layers with pressure gradient.”, AIAA Journal, 31:1414-1421, 1993.
- [66] Wilcox, D.C., 1998, ”Turbulence modeling for CFD Second Edition”, DCW Industries Inc, USA.
- [67] Yoder, D.A., 1998, “NPARC Alliance - Backstep study # 1”, NASA John H. Glenn Research Center.
- [68] Notas de aula do curso de Convecção (Pós-graduação 1^o/2003), Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade de Brasília.
- [69] Notas de aula do curso de Dinâmica dos fluidos (Pós-graduação 1^o/2003), Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade de Brasília.
- [70] Notas de aula do curso de Turbulência (Pós-graduação 1^o/2002), Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade de Brasília.

APÊNDICES

A Teorema do transporte de Reynolds

O teorema do transporte de Reynolds estabelece que, para uma variável qualquer Υ do escoamento, sua taxa de variação em uma porção fluida de volume dV é dada por:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \Upsilon dV = \int_V \left(\frac{D\Upsilon}{Dt} + \Upsilon \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) dV , \quad (\text{A.1})$$

onde u_i são as componentes do vetor de velocidade. A equação da continuidade é obtida fazendo-se $\Upsilon = \rho$, obtendo:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = \int_V \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) dV , \quad (\text{A.2})$$

mas o resultado do lado esquerdo da equação é:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = \frac{Dm}{Dt} = 0 . \quad (\text{A.3})$$

Esta integral se anula devido ao princípio de conservação da massa, significando que a massa do sistema não pode ser gerada nem destruída. Aplicando o teorema da localização, obtém-se a equação da continuidade:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 . \quad (\text{A.4})$$

Uma importante consequência deste resultado na dedução da equação da quantidade de movimento e da equação da energia é o seguinte: aplicando o teorema do transporte, fazendo $\Upsilon \rightarrow \rho\Upsilon$, temos:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho\Upsilon dV = \int_V \left(\frac{D\rho\Upsilon}{Dt} + \rho\Upsilon \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) dV , \quad (\text{A.5})$$

então

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \Upsilon dV = \int_V \left[\rho \frac{D\Upsilon}{Dt} + \Upsilon \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \right] dV . \quad (\text{A.6})$$

Nota-se que o termo em parênteses é nulo, o que resulta em:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \Upsilon dV = \int_V \rho \frac{D\Upsilon}{Dt} dV . \quad (\text{A.7})$$

É importante ressaltar que este resultado é válido para qualquer ρ , pois não foi feita nenhuma consideração sobre compressibilidade ou sobre qualquer outra característica do fluido. Este resultado é utilizado neste trabalho para a dedução das equações de Navier-Stokes e da energia.

B Desenvolvimento da equação da energia

Da primeira lei da termodinâmica, temos:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \text{taxa de energia acumulada} \\ \text{no volume de controle} \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{c} \text{transferência de calor} \\ \text{devida ao escoamento} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{transferência de calor} \\ \text{por condução} \end{array} \right) \\ &+ \left(\begin{array}{c} \text{taxa de geração} \\ \text{interna de calor} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{taxa de trabalho} \\ \text{transmitido ao meio.} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Cada termo da equação acima, na mesma ordem apresentada, é dado por:

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\frac{\partial q_i''}{\partial x_i} + q''' - p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \mu \phi . \quad (\text{B.1})$$

Em termos da entalpia do fluido, dada por:

$$h = e + \frac{1}{\rho} p , \quad (\text{B.2})$$

tendo portanto:

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{De}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} , \quad (\text{B.3})$$

e ainda, utilizando a lei de Fourier para a condução:

$$q_i'' = -k \frac{\partial T}{\partial x_i} , \quad (\text{B.4})$$

chega-se a:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \dot{q}''' + \frac{Dp}{Dt} + \mu\phi - \frac{p}{\rho} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) , \quad (\text{B.5})$$

onde nota-se que o último termo é nulo por estar multiplicado pela equação da continuidade. Tomando-se ainda a representação de Maxwell para a entalpia:

$$dh = Tds + \frac{1}{\rho} dp , \quad (\text{B.6})$$

com ds dado por:

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \Big|_{p=cte} dT \right) + \left(\frac{\partial s}{\partial p} \Big|_{T=cte} dp \right) = \frac{C_p}{T} dT + \frac{-\beta}{\rho} dp , \quad (\text{B.7})$$

e com β representando o coeficiente de expansão térmica definido por:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p=cte} , \quad (\text{B.8})$$

chega-se a:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \rho C_p \frac{DT}{Dt} + (1 - \beta T) \frac{Dp}{Dt} . \quad (\text{B.9})$$

Utilizando a relação acima com a equação da energia em termos da entalpia, obtém-se a forma final da equação da energia em função da temperatura, dada por:

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \dot{q}''' + \beta T \frac{Dp}{Dt} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} . \quad (\text{B.10})$$

Nesta equação, τ representa o tensor de tensões de cisalhamento, dado por:

$$\tau_{ij} = \left\{ \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right] \right\} . \quad (\text{B.11})$$

C Forma não-dimensional das variáveis

A forma não-dimensional das variáveis principais das equações governantes é dada abaixo, com os valores com subscritos $_0$ representando os valores de referência adotados:

Tabela C.1: Forma não dimensional das variáveis

	Variável adimensional	Adimensionalização
Velocidade	u_i^+	$\frac{u_i}{U_0}$
Comprimento	x_i^+	$\frac{x_i}{L_0}$
Massa específica	ρ^+	$\frac{\rho}{\rho_0}$
Pressão	p^+	$\frac{p}{\frac{1}{2}\rho_0 u_0^2}$
Temperatura	T^+	$\frac{T-T_0}{T_0}$
Viscosidade Dinâmica	μ^+	$\frac{\mu}{\mu_0}$

Devido à forma não-dimensional da temperatura, a equação de estado pode ser reescrita de uma forma peculiar. Considerando-se a equação de estado para um ponto do escoamento livre e um ponto qualquer do escoamento estudado, tem-se:

$$\rho_0 = \frac{p_0}{R T_0} \quad e \quad \rho = \frac{p}{R T} . \quad (\text{C.1})$$

Subtraindo a segunda expressão da primeira, tem-se:

$$\rho - \rho_0 = \frac{1}{R} \left(\frac{p}{T} - \frac{p_0}{T_0} \right) . \quad (\text{C.2})$$

Dividindo toda a expressão acima por ρ :

$$1 - \frac{1}{\rho^+} = 1 - \frac{p_0}{p} \frac{T}{T_0} . \quad (\text{C.3})$$

Tomando a definição de T^+ , chega-se portanto a relação:

$$\rho^+ (T^+ + 1) = \frac{p}{p_0} . \quad (\text{C.4})$$

Considerando que as variações de pressão pouco alteram a massa específica do fluido, temos que $p_0 \approx p$ e portanto:

$$\rho^+ = \frac{1}{T^+ + 1} . \quad (\text{C.5})$$

D Discussão sobre a equação constitutiva para o meio fluido

A equação constitutiva para um fluido newtoniano, ou seja, um fluido homogêneo de estrutura isotrópica mesmo na presença do escoamento, é dada por:

$$\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\epsilon_{ll}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} , \quad (\text{D.1})$$

onde p é a pressão termodinâmica, ou de equilíbrio. Tomando-se o traço da equação acima, tem-se:

$$\Pi_{11} + \Pi_{22} + \Pi_{33} = -3p + 3\lambda\epsilon_{ll} + 2\mu\epsilon_{ll} . \quad (\text{D.2})$$

A pressão mecânica é definida por:

$$p_m = -\frac{\Pi_{11} + \Pi_{22} + \Pi_{33}}{3} . \quad (\text{D.3})$$

Com isto, temos:

$$p_m = p - \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \epsilon_{ll} . \quad (\text{D.4})$$

Definindo o segundo coeficiente de viscosidade, ou viscosidade expansional e sabendo que o traço de ϵ_{ij} é o divergente do campo de velocidade, chega-se à relação entre pressão mecânica e pressão termodinâmica:

$$p_m - p_0 = -k_\mu \nabla \cdot \vec{u} . \quad (\text{D.5})$$

Nota-se que o segundo coeficiente de viscosidade, k_μ , mede um desvio da situação de equilíbrio a qual um fluido pode estar sujeito. A partir desta relação, podemos reescrever a equação constitutiva das seguintes formas (fazendo $\lambda = k_\mu - 2/3\mu$):

$$\Pi_{ij} = -p_0\delta_{ij} + k_\mu\epsilon_{ll}\delta_{ij} + 2\mu\left(\epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\epsilon_{ll}\delta_{ij}\right) \text{ ou} \quad (\text{D.6})$$

$$\Pi_{ij} = -p_m\delta_{ij} + 2\mu\left(\epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\epsilon_{ll}\delta_{ij}\right) . \quad (\text{D.7})$$

Da segunda lei da termodinâmica, temos que $k_\mu \geq 0$. No caso de fluido stokesiano, que possui baixa dissipação por efeitos expansionais, em escoamentos de baixa frequência¹, $k_\mu \rightarrow 0$. Como neste trabalho o fluido considerado é o ar modelado como gás perfeito, newtoniano e stokesiano, temos o seguinte:

$$k_\mu = \lambda + \frac{2}{3}\mu = 0 , \quad (\text{D.8})$$

o que nos permite escrever a equação constitutiva como:

$$\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\left(\epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\epsilon_{ll}\delta_{ij}\right) . \quad (\text{D.9})$$

¹Tal como mostrado no trabalho de Cunha et. al (2006):

$$k_\mu = \frac{(\varpi\varrho)^2(1 - \tilde{c}^2)}{[1 + (\varpi\varrho)^2]^{1/2}} ,$$

onde ϖ é a frequência de excitação do fluido, ϱ é o tempo característico de relaxação do fluido e \tilde{c} é um parâmetro da velocidade de propagação da perturbação no fluido. Se o escoamento é dito de baixa frequência de excitação, k_μ naturalmente tende a valores muito pequenos. Portanto, esse fato leva à consideração de que k_μ é nula para escoamentos de baixa frequência.

E Obtenção da equação de transporte de ω

Existem basicamente duas formas de se obter a equação de transporte para ω , a partir de sua definição. Uma delas, chamada de forma simplificada, foi utilizada por Wilcox (1993) em seu modelo original. A outra, chamada de forma completa, é a utilizada neste trabalho, proposta por Bredberg (2002).

Na verdade, estas duas metodologias podem ser aplicadas não só para ω , mas para obter uma equação evolutiva para qualquer variável turbulenta secundária, baseando-se exclusivamente nas equações de κ e de ε . Deve ser mencionado também que, independentemente da forma escolhida, o primeiro passo é reescrever o termo de dissipação da equação de κ (2.58) em função da variável secundária escolhida. No caso deste trabalho, basta aplicar diretamente a definição (2.75), conforme mostrado na equação (2.76). Em seguida, deve-se tomar uma das duas formas citadas. Reescrevendo a equação (2.75):

$$\varepsilon = C_{\mu} \kappa \omega , \quad (\text{E.1})$$

e também reescrevendo as equações de κ e ε de forma simplificada:

$$\bar{\rho} \frac{D\kappa}{Dt} = A_{\kappa} + \Pi + D + B , \quad (\text{E.2})$$

$$\bar{\rho} \frac{D\varepsilon}{Dt} = A_{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\kappa} (C_{\varepsilon 1} \Pi + C_{\varepsilon 2} D + C_{\varepsilon 3} B) , \quad (\text{E.3})$$

com os termos das equações e o número de Reynolds turbulento Re_t dados por:

$$A_{\kappa} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_{\kappa}} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right] , \quad (\text{E.4})$$

$$A_{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_{\varepsilon}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] , \quad (\text{E.5})$$

$$\Pi = \left[\left(\frac{1}{Re_t} \right) \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left(\bar{\rho} \kappa + \frac{1}{Re_t} \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_l} \right) \delta_{ij} \right] \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}, \quad (\text{E.6})$$

$$D = -\bar{\rho} \varepsilon, \quad (\text{E.7})$$

$$B = \frac{\bar{\rho} \beta g_i}{Re_t Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i}, \quad (\text{E.8})$$

$$\frac{1}{Re_t} = C_\mu \bar{\rho} \frac{\kappa^2}{\varepsilon}, \quad (\text{E.9})$$

temos a base para aplicar qualquer uma dessas formas de obtenção da equação de ω . A seguir será detalhado passo-a-passo o processo de obtenção com os dois métodos, apontando as principais diferenças entre as equações obtidas.

E.1 Forma simplificada

A forma simplificada consiste basicamente trocar a dimensão da equação de transporte de κ diretamente na dimensão da variável secundária desejada, tal qual na obtenção da equação de transporte para ε (2.63), e ainda, acrescentando constantes de calibração. Seja χ uma quantidade secundária qualquer. A equação de transporte para essa variável secundária em sua forma geral, baseada na obtenção pela forma simplificada, é:

$$\bar{\rho} \frac{D\chi}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_\chi} \right) \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \right] + \frac{\chi}{\kappa} (C_{\chi 1} \Pi + C_{\chi 2} D + C_{\chi 3} B), \quad (\text{E.10})$$

onde Π , D e B são dados pelas equações (E.6), (E.7) e (E.9), respectivamente, com o termo de dissipação D dado em função da variável secundária escolhida conforme sua própria definição, que pode ser obtida pela equação (2.47). Além disso, o número de Schmidt turbulento para χ , dado por σ_χ e os parâmetros $C_{\chi 1}$, $C_{\chi 2}$ e $C_{\chi 3}$ devem ser definidos constantes ou variáveis (a partir de funções de amortecimento apropriadas) conforme a conveniência e metodologia adotada.

O modelo $\kappa - \omega$ proposto originalmente por Wilcox (1993), implementado em uma metodologia de alto-Reynolds, por exemplo, era exatamente a equação (E.10), fazendo $\chi = \omega$, reescrevendo o termo de dissipação como $D = -C_\mu \bar{\rho} \kappa \omega$ e com as constantes definidas por $C_\mu = 0,09$, $\sigma_\kappa = \sigma_\omega = 2$ (valor considerado relativamente alto), $C_{\omega 1} = 5/9$, $C_{\omega 2} = 0,075$ e $C_{\omega 3} = 0$. Outros autores, inclusive o próprio Wilcox, apresentaram

modelos $\kappa - \omega$ de baixo-Reynolds com várias combinações de números de Schmidt turbulentos, constantes e funções de amortecimento, todos baseados na equação (E.10).

E.2 Forma completa

A forma completa é obtida através de uma manipulação com as equações (E.2) e (E.3), de acordo com a equação (2.77), considerando a massa específica invariante. Reescrevendo a equação (2.77), temos:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{1}{C_\mu \kappa} \frac{D\varepsilon}{Dt} - \frac{\omega}{\kappa} \frac{D\kappa}{Dt}, \quad (\text{E.11})$$

e substituindo ε pela relação (E.1) na equação (E.3) e na definição de Re_t , obtemos os termos da nova equação para ω . Iniciemos com os termos A_κ e A_ε :

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_\mu \kappa} A_\varepsilon - \frac{\omega}{\kappa} A_\kappa &= \frac{1}{C_\mu \kappa} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{f_\mu \kappa}{\omega \sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial(C_\mu \kappa \omega)}{\partial x_i} \right] \\ &\quad - \frac{\omega}{\kappa} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{f_\mu \kappa}{\omega \sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right], \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{C_\mu \kappa} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{Re} \frac{\partial(C_\mu \kappa \omega)}{\partial x_i} + \frac{f_\mu \kappa}{\omega \sigma_\varepsilon} \frac{\partial(C_\mu \kappa \omega)}{\partial x_i} \right] \\ &\quad - \frac{\omega}{\kappa} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{Re} \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} + \frac{f_\mu \kappa}{\omega \sigma_\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right], \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{C_\mu \kappa} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{Re} \frac{\partial(C_\mu \kappa \omega)}{\partial x_i} \right] + \frac{1}{C_\mu \kappa} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{f_\mu \kappa}{\omega \sigma_\varepsilon} \frac{\partial(C_\mu \kappa \omega)}{\partial x_i} \right] \\ &\quad - \frac{\omega}{\kappa} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{Re} \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right] - \frac{\omega}{\kappa} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{f_\mu \kappa}{\omega \sigma_\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right], \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

$$= A_1 + A_2 - A_3 - A_4, \quad (\text{E.15})$$

onde os termos A_1 , A_2 , A_3 e A_4 representam os termos da equação (E.14) na mesma ordem em que aparecem. Resolvendo as derivadas dos termos A_1 e A_2 por regra da cadeia, temos:

$$A_1 = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) + \frac{\omega}{\kappa} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{\kappa} \frac{1}{Re} \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, \quad (\text{E.16})$$

$$A_2 = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{Re_t \sigma_\varepsilon} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) + \frac{\omega}{\kappa} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{Re_t \sigma_\varepsilon} \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{\kappa} \frac{1}{Re_t \sigma_\varepsilon} \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, \quad (\text{E.17})$$

$$A_3 = -\frac{\omega}{\kappa} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right), \quad (\text{E.18})$$

$$A_4 = -\frac{\omega}{\kappa} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{Re_t \sigma_\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right), \quad (\text{E.19})$$

e portanto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_\mu \kappa} A_\varepsilon - \frac{\omega}{\kappa} A_\kappa &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] + \frac{2}{\kappa} \left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \\ &\quad + \frac{\omega}{\kappa} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{Re_t} \left(\frac{1}{\sigma_\varepsilon} - \frac{1}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

Para os outros termos, a dedução é direta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_\mu \kappa} \frac{\varepsilon}{\kappa} (C_{\varepsilon 1} \Pi + C_{\varepsilon 2} D + C_{\varepsilon 3} B) - \frac{\omega}{\kappa} (\Pi + D + B) &= \\ \frac{1}{C_\mu \kappa} \frac{C_\mu \kappa \omega}{\kappa} (C_{\varepsilon 1} \Pi + C_{\varepsilon 2} D + C_{\varepsilon 3} B) - \frac{\omega}{\kappa} (\Pi + D + B) &= \\ \frac{\omega}{\kappa} \left[(C_{\varepsilon 1} - 1) \Pi - (C_{\varepsilon 2} - 1) C_\mu \bar{\rho} \omega \kappa + (C_{\varepsilon 3} - 1) B \right] &= \\ \frac{\omega}{\kappa} (C_{\varepsilon 1} - 1) \Pi - \left[(C_{\varepsilon 2} - 1) C_\mu \right] \bar{\rho} \omega^2 + \frac{\omega}{\kappa} (C_{\varepsilon 3} - 1) B &. \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

Juntando as equações (E.20) e (E.21), temos a nova equação de transporte de ω , base do modelo do presente trabalho:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + \tilde{u}_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] + \frac{\omega}{\kappa} (C_{\varepsilon 1} - 1) \Pi \\ &\quad + \frac{\omega}{\kappa} \left(-(C_{\varepsilon 2} - 1) C_\mu \bar{\rho} \omega \kappa + (C_{\varepsilon 3} - 1) \frac{\bar{\rho} \beta g_i}{Re_t Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right) \\ &\quad + \frac{\omega}{\kappa} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{Re_t} \left(\frac{1}{\sigma_\varepsilon} - \frac{1}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right] \\ &\quad + \frac{2}{\kappa} \left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

De fato, as constantes resultantes desse processo completo podem ser derivadas diretamente das equações de base, porém nenhum ganho significativo será realmente observado, tal como os resultados com o canal divergente obtidos mostram. As novas constantes de calibração devem ser ajustadas para refletir uma situação definida. No caso do modelo proposto, as constantes foram calibradas por Bredberg (2002), com argumentos derivados da aproximação direta a duas escalas de Yoshizawa (1987) e para compatibilizar os resultados mostrados em diversas DNS disponíveis na literatura.

A diferença entre se utilizar a forma completa em relação à forma simples é o surgimento de termos adicionais, no caso mostrado, um proporcional a $(\partial^2 \kappa / \partial x_i^2)$ e outro proporcional à derivada cruzada $(\partial \kappa / \partial x_i \partial \omega / \partial x_i)$. Na verdade, o resultado obtido com a forma completa depende das equações tomadas como base e da variável secundária a ser obtida. Utilizando o mesmo desenvolvimento da forma completa apresentado, porém visando obter a equação ζ , Speziale et al. (1992) obtiveram outro termo adicional além dos citados, proporcional a $(\partial \zeta / \partial x_i)^2$. Outra possibilidade: utilizando a equação de ω obtida com a metodologia simples (E.10) e tomando-a como base para obter uma equação para ε pela metodologia completa, também surgem novos termos em relação à equação (2.63), como mostrado por Bredberg (2001).

Obviamente, é natural se perguntar sobre a validade de qualquer destas metodologias apresentadas, e ainda, sobre a validade da inclusão de termos adicionais às equações clássicas. Um dos estudos mais citados na literatura é a correção proposta por Yap (1987) adotada em alguns modelos $\kappa - \varepsilon$ de baixo-Reynolds, que possui a finalidade de corrigir os valores de ε na região da parede em escoamentos recirculantes. Bredberg (1999) mostrou que o termo de derivada cruzada pode atuar como uma correção de Yap, desde que o número de Schmidt turbulento seja cuidadosamente calibrado. Diversos autores de modelos de baixo-Reynolds têm adotado uma dessas alternativas, buscando modelos mais sofisticados e compatíveis com os resultados advindos de DNS.

Concluindo, discutir sobre estar acertando ou errando ao adotar uma das formas de dedução da equação para a variável secundária é fútil. O importante é adotar termos nas equações coerentemente calibrados com a metodologia de cálculo adotada e com o objetivo de obter um modelo mais robusto com custo computacional competitivo em relação a modelos de alto-Reynolds, que demandam menos poder computacional e não parecem necessitar de extensa calibração para prover resultados razoavelmente compatíveis com dados experimentais, mas apenas de uma lei de parede mais sofisticada, conforme os vários resultados de Soares e Fontoura Rodrigues (2004 e 2005).

F Princípios de cálculo variacional

Consideremos uma função $y = f(x)$ diferenciável no domínio estudado, por exemplo no intervalo $x_1 \leq x \leq x_2$. Sabe-se do cálculo diferencial que a condição necessária para que esta função tenha um valor extremo em um ponto do intervalo x_e é que:

$$f'(x_e) = \left(\frac{d f(x)}{dx} \right)_{x=x_e} = 0 . \quad (\text{F.1})$$

Geometricamente, isso significa dizer que a reta tangente à curva $f(x)$ no ponto x_e possui declividade nula (é horizontal). Para saber se trata-se de um ponto de máximo ou mínimo, a segunda derivada da função no ponto extremo deve ser avaliada - se $f''(x_e) > 0$, o ponto é de máximo; se $f''(x_e) < 0$, o ponto é de mínimo. Analogamente, se tivermos uma função a duas ou mais variáveis, como $g(x, y)$ por exemplo, o ponto extremo pode ser encontrado no ponto em que seu diferencial é nulo:

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy = 0 \text{ em } (x_e, y_e) , \quad (\text{F.2})$$

ou de forma análoga, podemos dizer que $\nabla g = 0$ em (x_e, y_e) . Através de uma análise semelhante das segundas derivadas de $g(x, y)$, também pode ser avaliado se o ponto extremo encontrado é de máximo, mínimo ou de sela.

No cálculo variacional, estes mesmos conceitos são aplicados, porém não mais a funções, mas a funcionais. Um funcional é uma entidade que depende de uma função, ou seja, é uma “função de funções”, como por exemplo $F = F(x, y, y')$ com $y = y(x)$. Um dos objetivos do cálculo variacional é estudar os métodos que permitem achar os valores extremos de funcionais, e o Método dos Elementos Finitos é uma das aplicações diretas destes conceitos do cálculo variacional.

Seja F um funcional dependente da função y e de sua primeira derivada $y' = dy/dx$, representado pela notação:

$$F = F(x, y, y') , \quad (\text{F.3})$$

e que no intervalo $x_1 \leq x \leq x_2$ a função $y(x)$ assume os valores $y_1 = y(x_1)$ e $y_2 = y(x_2)$, conforme mostrado na figura (F.1).

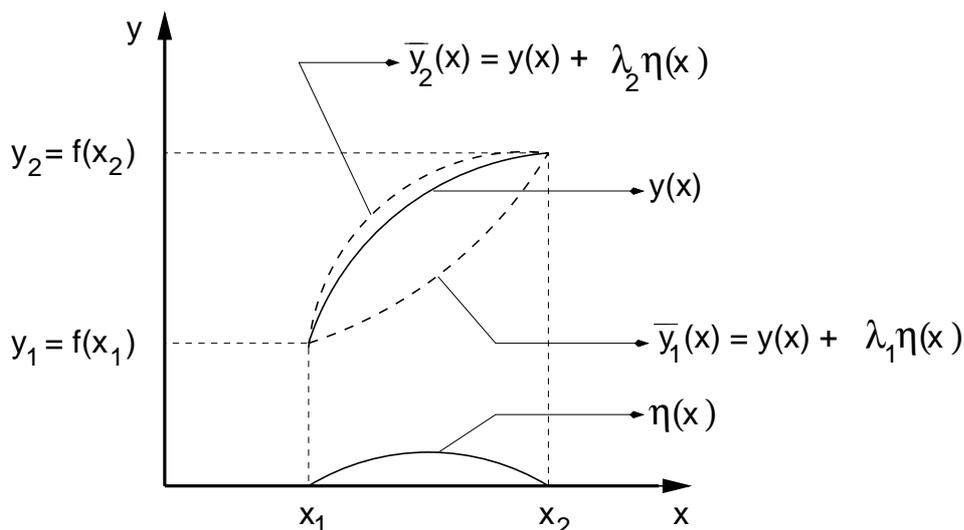


Figura F.1: Aproximação de uma função $y(x)$ por combinação linear entre $\bar{y}(x)$ e $\eta(x)$ para alguns valores de λ .

Diz-se que uma função é admissível quando, dentro de uma certa tolerância e satisfazendo as condições de contorno, representam a função exata $y(x)$. A função admissível tem a forma:

$$\bar{y}(x) = y(x) + \lambda\eta(x) , \quad (\text{F.4})$$

onde $\eta(x)$ é uma função arbitrária que satisfaz as condições de contorno: $\eta(x_1) = 0$ e $\eta(x_2) = 0$, e λ é um número pequeno. Para uma mesma função $\eta(x)$, obtém-se uma família de funções admissíveis $\bar{y}(x)$, variando os valores de λ .

Para cada valor fixo de x , o produto $\lambda\eta(x)$ pode ser entendido como uma variação da função exata. Assim, pode-se exprimir essa variação por:

$$\delta y = \lambda\eta(x) \text{ e } \delta y' = \lambda\eta'(x) . \quad (\text{F.5})$$

Dessa forma, a variação de F associada à variação de $y(x)$, e conseqüentemente de $y'(x)$, para um determinado valor de x é escrita como:

$$\delta F = F(x, y + \lambda\eta, y' + \lambda\eta') - F(x, y, y') . \quad (\text{F.6})$$

Expandindo a expressão $F(x, y + \lambda\eta, y' + \lambda\eta')$ em série de Taylor, desconsiderando os termos de segunda ordem em λ e unindo as definições de δy e $\delta y'$, temos:

$$\delta F = \left(F + \frac{\partial F}{\partial y} \lambda\eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \lambda\eta' + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (\lambda\eta)^2 + \dots \right) - F , \quad (\text{F.7})$$

e portanto:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' . \quad (\text{F.8})$$

A expressão (F.8) é a representação da primeira variação de F . O operador variacional δ tem as mesmas propriedades do operador diferencial relativamente à variável dependente, como a comutatividade, por exemplo. Ou seja, se possuirmos um funcional definido por:

$$Y = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx , \quad (\text{F.9})$$

a sua primeira variação é dada por:

$$\delta Y = \int_{x_1}^{x_2} \delta F dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx . \quad (\text{F.10})$$

O problema que se deseja resolver consiste em encontrar a função $y(x)$ que satisfaz as condições de contorno do problema e que torna o funcional Y estacionário, ou seja, que torne a sua primeira variação nula, conforme mostrado por Assan (2003). Podemos reescrever o funcional Y em termos das funções admissíveis \bar{y} :

$$\bar{Y} = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx . \quad (\text{F.11})$$

Supondo que a função $y(x)$ de fato torna o funcional Y extremo, a equação anterior coincide com esse valor extremo de Y para $\lambda = 0$. Como λ é o parâmetro que identifica as várias funções admissíveis, temos válidas as seguintes relações:

$$\delta\bar{Y} = \frac{d\bar{Y}}{d\lambda} \delta\lambda \quad \text{e, portanto,} \quad \left(\frac{d\bar{Y}}{d\lambda} \right)_{\lambda=0} = 0 . \quad (\text{F.12})$$

Unindo as equações (F.4) e (F.12) em (F.10), temos que:

$$\left(\frac{d\bar{Y}}{d\lambda} \right)_{\lambda=0} = \left(\int_{x_1}^{x_2} \frac{dF}{d\lambda} dx \right)_{\lambda=0} = \left(\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{d\bar{y}}{d\lambda} + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \frac{d\bar{y}'}{d\lambda} \right) dx \right)_{\lambda=0} , \quad (\text{F.13})$$

reescrevendo em termos de $\eta(x)$ (F.5):

$$\left(\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \eta + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \eta' \right) dx \right)_{\lambda=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx . \quad (\text{F.14})$$

Integrando por partes o último termo da equação anterior leva à:

$$\left(\frac{d\bar{Y}}{d\lambda} \right)_{\lambda=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta \right] dx + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta \Big|_{x_1}^{x_2} , \quad (\text{F.15})$$

onde nota-se claramente que o último termo se anula, pois $\eta(x)$ é nula em ambos os pontos x_1 e x_2 . Retomando a primeira relação de (F.12), temos:

$$\delta\bar{Y} = \lambda \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx = 0 . \quad (\text{F.16})$$

Finalmente, reescrevendo esta última equação, lembrando que δy é uma função aproximadora para $y(x)$, denotada agora por $v(x)$, temos:

$$\delta\bar{Y} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] v(x) dx = 0 . \quad (\text{F.17})$$

De fato, a partir de (F.17), fica demonstrado que a primeira variação do funcional Y é nula no intervalo considerado apenas se o termo entre colchetes é nulo. Quando isso é verdadeiro, o termo entre colchetes em (F.17) igualado a zero é chamado de *Equação de Euler-Lagrange*, que na verdade, também é um funcional, para o qual as derivadas de primeira ordem são definidas no domínio considerado (ou então a equação torna-se um absurdo). Generalizando, podemos dizer que se um funcional qualquer $L = L(x, y, y')$ é nulo e possui derivadas definidas em um determinado intervalo $x_1 \leq x \leq x_2$, e além disso, se uma função qualquer $v = v(x)$ se anula nos pontos $x = x_1$ e $x = x_2$ e possui derivadas definidas no intervalo considerado, é verdadeiro que:

$$\int_{x_1}^{x_2} L(x, y, y') v(x) dx = 0 . \quad (\text{F.18})$$

A equação (F.18) é a base fundamental do método dos elementos finitos, pois ela provê uma forma de aproximar as soluções para problemas representados por equações diferenciais em um domínio definido.

G Análises de escalas turbulentas

No desenvolvimento analítico deste trabalho, escolhe-se uma forma para representar a viscosidade turbulenta, na equação (2.47), porém sem fazer maiores considerações.

Consideremos um escoamento turbulento com estruturas turbulentas distribuídas em várias escalas de comprimento, desde as maiores, da ordem de L_0 , até as menores, da ordem de λ_0 . Da própria definição da energia cinética de turbulência e de sua taxa de dissipação, temos que (considerando incompressibilidade, apenas para simplificar as equações da análise, sem contudo restringir de fato para casos incompressíveis):

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{\overline{(u'_i)^2}}{3}, \quad (\text{G.1})$$

$$\varepsilon = \nu \overline{\left(\frac{u'_i u'_j}{x_j x_i} \right)}. \quad (\text{G.2})$$

Se tomarmos uma escala intermediária λ , e considerando uma flutuação de velocidade característica desta escala como u'_λ , temos que a taxa de dissipação da energia cinética de turbulência pode ser descrita por semelhança de escala como:

$$\kappa \sim (u'_\lambda)^2, \quad (\text{G.3})$$

$$\varepsilon \sim \frac{(u'_\lambda)^3}{\lambda}, \quad (\text{G.4})$$

já que para esta escala intermediária, não podemos afirmar que o termo convectivo é mais ou menos influente do que o termo difusivo das equações de transporte da quantidade de movimento. Para as maiores escalas, o termo convectivo é dominante, e portanto temos que:

$$\varepsilon \sim \frac{(U_0)^3}{L_0}. \quad (\text{G.5})$$

Já para as menores escalas, o termo difusivo é dominante sobre o termo convectivo, e portanto podemos tomar a expressão (G.2) e obter:

$$\varepsilon \sim \nu \left(\frac{(u'_{\lambda_0})^3}{\lambda_0} \right)^2 . \quad (\text{G.6})$$

Fazendo $u'_{\lambda_0} \sim \nu/\lambda_0$ é possível reescrever a expressão anterior somente em termos de ν e λ_0 , obtendo para as menores estruturas:

$$\varepsilon \sim \frac{\nu^3}{\lambda_0^4} . \quad (\text{G.7})$$

Com poucas operações, é possível reescrever as equações (G.5) e (G.7) na seguinte forma, já mencionada no trabalho:

$$\frac{\lambda_0}{L_0} \sim \left(\frac{\nu}{U_0 L_0} \right)^{3/4} \sim (Re_{L_0})^{-3/4} , \quad (\text{G.8})$$

que relaciona diretamente as escalas características de comprimento das menores estruturas e das maiores estruturas. Se utilizarmos as escalas de tempo t_λ como $t_{L_0} \sim L_0/U_0$ e $t_{\lambda_0} \sim \lambda_0^2/\nu$, respectivamente para as maiores estruturas e para as menores estruturas, obtemos expressões semelhantes à (G.8), relacionando diretamente as escalas de velocidade e de tempo das maiores e das menores estruturas turbulentas:

$$\frac{t_{\lambda_0}}{t_{L_0}} \sim \left(\frac{\nu}{U_0 L_0} \right)^{1/2} \sim (Re_{L_0})^{-1/2} , \quad (\text{G.9})$$

$$\frac{u'_{\lambda_0}}{U_0} \sim \left(\frac{\nu}{U_0 L_0} \right)^{1/4} \sim (Re_{L_0})^{-1/4} . \quad (\text{G.10})$$

O modelo do comprimento de mistura de Prandtl relaciona a viscosidade turbulenta com o gradiente transversal de velocidade e uma escala característica de comprimento, da seguinte forma:

$$\frac{\mu_t}{\rho} = \nu_t = (l^*)^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad (\text{G.11})$$

onde $l^* = by$ é o comprimento de mistura, diretamente proporcional à uma escala de comprimento multiplicada por uma constante, neste caso representada por b . Retirando a constante de proporcionalidade e assumindo que y representa uma escala de comprimento das estruturas turbulentas, temos que:

$$\nu_t \sim \lambda^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \sim \lambda u'_\lambda. \quad (\text{G.12})$$

Da expressão (G.4), temos que $u'_\lambda \sim (\lambda\varepsilon)^{1/3}$. Além disso, se κ escala com $u'_\lambda{}^2$ conforme a expressão (G.3), podemos reescrever a expressão (G.12) como:

$$\nu_t \sim \lambda(\lambda\varepsilon)^{1/3} \sim \lambda(\lambda\varepsilon)^{1/3} \frac{(\lambda\varepsilon)}{(\lambda\varepsilon)} \sim \frac{(\lambda\varepsilon)^{4/3}}{\varepsilon} \sim \frac{\kappa^2}{\varepsilon}. \quad (\text{G.13})$$

Para tornar a expressão (G.13) em uma equação, é necessário acrescentar uma constante de proporcionalidade. Se a chamarmos de C_μ , obtemos a expressão utilizada por Harlow e Nakayama (1968):

$$\frac{\mu_t}{\rho} = \nu_t = C_\mu \frac{\kappa^2}{\varepsilon}. \quad (\text{G.14})$$

Neste ponto, é possível aceitar a utilização de uma outra variável secundária diferente, desde que relacionada com ε e as outras propriedades aqui mostradas, de alguma forma, como ω por exemplo, que pode ser definida como $\omega = \varepsilon/\kappa$. Extrapolando para uma relação mais geral, podemos escrever a expressão (2.47) e utilizá-la como base para derivar outros modelos de turbulência a duas equações.