

MÉTODO SEM MALHA LOCAL – COLOCAÇÃO NA FORMA FRACA EM ELASTICIDADE LINEAR

TIAGO DA SILVA OLIVEIRA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA FACULDADE DE TECNOLOGIA DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

MÉTODO SEM MALHA LOCAL – COLOCAÇÃO NA FORMA FRACA EM ELASTICIDADE LINEAR

TIAGO DA SILVA OLIVEIRA

ORIENTADOR: ARTUR PORTELA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

PUBLICAÇÃO: E.DM-010A/16

BRASÍLIA/DF: JUNHO - 2016

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA FACULDADE DE TECNOLOGIA DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

MÉTODO SEM MALHA LOCAL – COLOCAÇÃO NA FORMA FRACA EM ELASTICIDADE LINEAR

TIAGO DA SILVA OLIVEIRA

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISÍTOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADO POR:

Prof. Artur Portela, PhD (ENC-UnB) (Orientador)

Prof. William Taylor Matias Silva, Dr. Ing. (ENC-UnB) (Examinador Interno)

Prof. Márcio Muniz de Farias, PhD (ENC-UnB) (Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 17 DE JUNHO DE 2016

FICHA CATALOGRÁFICA

OLIVEIRA, TIAGO S.				
Método sem malha local - Colocação na forma fraca em elasticidade linear. [Distrito				
Federal] 2016.				
xvii, 67p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2016).				
Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.				
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.				
1.Método sem malha	2.Teorema do Trabalho local			
3.Deslocamento de corpo rígido	4. Campo elástico generalizado			
5.Colocação na forma fraca				
LENC/FT/UnB	II. Título (Mestre)			

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

OLIVEIRA, T. S. (2016). Método sem malha local – Colocação na forma fraca em elasticidade linear. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-010A/16, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 67p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Tiago da Silva Oliveira. TÍTULO: Método sem malha local – Colocação na forma fraca em elasticidade linear.

GRAU: Mestre ANO: 2016

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Tiago da Silva Oliveira

QSE 01 Casa 23 Taguatinga Sul

^{72.025-010} Brasília – DF – Brasil.

It doesn't matter how many underhanded tricks a person uses, the truth will always find a way to make itself known.

- Miles Edgeworth

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me colocado neste caminho e junto comigo pessoas maravilhosas.

À minha família, principalmente aos meus pais, Helena N. Silva e Leonardo A. Oliveira; ao meu irmão, Rafael S. Oliveira; e a minha namorada Carmen Elena R. M., meus maiores exemplos, por todo o apoio, confiança, paciência e dedicação que tiveram comigo desde o início desta grande jornada. Obrigado por todos os ensinamentos e por tudo que sempre fizeram por mim, me ajudando não importando onde eu estivesse, não importando qual fosse o obstáculo.

Ao meu orientador e amigo Prof.º Artur Portela pela excelente orientação e paciência, superado comigo os desafios de se conduzir uma pesquisa. Sem esse esforço em conjunto este trabalho jamais teria se tornado possível. Agradeço também ao meu companheiro de dissertação Vicente G. Oliveira Jr. por todo o auxílio nos momentos de dificuldade ao longo da pesquisa e por compartilhas seus conhecimentos e experiências comigo.

Aos outros professores e funcionários do PECC - *Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil*, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, agradeço seus conhecimentos e experiências transmitidos ao longo do curso.

Agradeço ao professor Miguel E. Genovese por me guiar com paciência e dedicação nos caminhos da Engenharia Civil. Obrigado pelo seu apoio, confiança e pelos ensinamentos durante todo o período acadêmico de minha vida. Seus conselhos possibilitaram todas as minhas conquistas.

Finalmente, agradeço aos meus amigos, por todos os momentos de estudo, alegria, tristeza e amizade. Em especial a Lilian S. Alves, Jonathas S. Oliveira, Gabriel L. Foleiss, Victor H. A. Pacheco, Pedro G. P. Leite e Elthon Rodrigues; bem como meus companheiros de mestrado Aurélio C. Feliciano, Renato Maia, Thalles Faria, Gabriel Oliveira, Glediston N. Costa Jr., que contribuíram de forma significativa para a realização deste trabalho. Tenho consciência de que tomei horas preciosas de seu tempo livre. Obrigado por estarem ao meu lado sempre que precisei. Esta jornada não seria a mesma sem vocês, pois são vocês que fazem toda essa caminhada valer a pena.

Obrigado a todos que acreditaram em mim e me ajudaram na realização deste sonho.

RESUMO

MÉTODO SEM MALHA LOCAL – COLOCAÇÃO NA FORMA FRACA EM ELASTICIDADE LINEAR

Autor: Tiago da Silva Oliveira Orientador: Artur Portela Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil Brasília, junho de 2016

Essa pesquisa discorre sobre as formulações do método sem malha local, aplicadas à solução de problemas bidimensionais no âmbito da elasticidade linear. As formulações são embasadas na teoria das estruturas, onde os princípios energéticos variacionais servem de base teórica para os métodos numéricos. O método sem malha local é baseado no método dos resíduos ponderados e resulta na forma fraca local, que nada mais é do que o teorema do trabalho advindo da teoria das estruturas. Em uma região local arbitrária, o teorema do trabalho estabelece uma relação de energia entre um campo de tensões estaticamente admissível e um campo de deformações cinematicamente admissível. A independência desses dois campos permite a geração de duas novas formulações dos métodos sem malha, com o objetivo de reduzir o esforço computacional. Enquanto na primeira formulação, denominada Rigid-Body Displacament Mesh-Free formulation (RBDMF), a forma local do teorema do trabalho é reduzida de forma que se tem apenas termos de contorno, na segunda formulação, denominada Generalized-Strain Mesh-Free formulation (GSMF), a forma local do teorema do trabalho resulta em uma formulação totalmente livre de integração numérica. A aproximação do campo elástico pelo método dos mínimos quadrados móveis (MQM) é utilizada para implementar as duas formulações locais. Dois problemas foram analisados utilizando esses procedimentos, buscando mensurar a eficiência e a precisão dessas formulações. Os resultados obtidos com a análise estão em perfeita concordância com as soluções analíticas. A acurácia e a eficiência das implementações descritas acima fazem das formulações do método sem malha local uma nova estratégia de modelagem confiável e robusta, no âmbito da teoria das estruturas.

ABSTRACT

WEAK-FORM COLLOCATION - A LOCAL MESHLESS FORMULATION IN LINEAR ELASTICITY

Author: Tiago da Silva Oliveira Supervisor: Artur Portela Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil Brasília, june of 2016

This paper is concerned with the formulation of local meshfree methods, for the solution of two-dimensional problems in linear elasticity. The formulations are derived in the framework of the theory of structures, where the variational energetic principles have become the theoretical basis of numerical methods. Local meshfree methods are derived through a weighted residual formulation which leads to a local weak form that is the well known work theorem of the theory of structures. In an arbitrary local region, the work theorem establishes an energy relationship between a statically-admissible stress field and an independent kinematically-admissible strain field. Based on the independence of these two fields, this paper presents two new meshless formulations that aim a reduction of the While in the first formulation, the Rigid-Body Displacament computational effort. Mesh-Free (RBDMF) formulation, the local form of the work theorem is reduced to regular boundary terms only, in the second formulation, the Generalized-Strain Mesh-Free (GSMF) formulation, the local form of the work theorem is transformed into an integration-free formula. The moving least squares (MLS) approximation of the elastic field is used in this paper to implement all local meshless formulations. Several problems were analyzed with these techniques, in order to assess the accuracy and efficiency of the formulations. The results obtained in this work are in perfect agreement with those of available analytical solutions. The accuracy and efficiency of the implementations described herein make this a reliable and robust formulation of local meshfree methods, in the framework of the theory of structures.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS			X	
Ll	ISTA 1	DE FIG	URAS	xi
Ll	ISTA	DE SÍM	BOLOS E ABREVIATURAS	xiv
1	INT	RODUÇ	ÇÃO	1
	1.1	CONS	IDERAÇÕES INICIAIS	1
	1.2	OBJET	TIVOS	4
		1.2.1	Objetivo geral	4
		1.2.2	Objetivos específicos	4
	1.3	RESU	MO DA METODOLOGIA	5
	1.4	ORGA	NIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	5
2	REV	VISÃO I	BIBLIOGRÁFICA	7
	2.1	MODE	ELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS FÍSICOS	7
	2.2	MÉTO	DOS DE APROXIMAÇÃO	8
	2.3	EQUA	ÇÃO DOS RESÍDUOS PONDERADOS	9
	2.4	DISCR	ETIZAÇÃO INDIRETA COM FUNÇÕES GLOBAIS	11
		2.4.1	Métodos de aproximação de domínio	11
		2.4.2	Método de Galerkin	11
		2.4.3	Método da Colocação	12
		2.4.4	Método dos Mínimos Quadrados	13
	2.5	TEOR	EMA DO TRABALHO	13
	2.6	MÉTO	DOS SEM MALHA	14
		2.6.1	Definição	14
		2.6.2	Funções de aproximação	15
		2.6.3	Funções de forma	16
		2.6.4	Funções ponderadoras	17
		2.6.5	Suporte compacto	17
		2.6.6		18
		2.6.7	Imposição das condições de contorno essenciais	18
		2.6.8	Avaliação das integrais	19
		2.6.9	Metodos sem malha baseado na forma fraca global	20
		2.6.10	ivietodos sem maina baseados na forma fraca local	21

3 FORMULAÇÕES DO MÉTODO SEM MALHA LOCAL

22

	3.1	MÉTODOS DOS MÍNIMOS QUADRADOS MÓVEIS	22
		3.1.1 Funções de Forma	23
		3.1.2 Funções de Ponderação	25
		3.1.3 Campo Elástico	26
	3.2	FORMA LOCAL DO TEOREMA DO TRABALHO 2	28
	3.3	DESLOCAMENTO DE CORPO RÍGIDO (RBDMF)	1
	3.4	CAMPO ELÁSTICO GENERALIZADO (GSMF)	4
	3.5	COMPORTAMENTO DA FORMA FRACA LOCAL	-0
4	ME	CODOLOGIA 4	3
	4.1	ASPECTOS GERAIS	-3
	4.2	PROCESSO DE MODELAGEM COMPUTACIONAL	-3
	4.3	ERRO RELATIVO 4	.5
5	RES	ULTADOS E DISCUSSÕES 4	6
	5.1	PATCH TEST	⊦7
	5.2	VIGA EM BALANÇO	7
		5.2.1 Tensões e deslocamentos	0
		5.2.2 Desempenho da colocação na forma fraca	51
		5.2.3 Precisão e convergência	62
		5.2.4 Eficiência computacional	63
		5.2.5 Travamento Volumétrico	4
	5.3	PLACA COM FURO CIRCULAR CENTRALIZADO 5	5
		5.3.1 Tensões e deslocamentos	8
6	CO	ICLUSÕES E RECOMENDAÇÕES 6	61
	6.1	CONCLUSÕES	j 1
		6.1.1 Publicações	62
	6.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	3
RI	EFER	ÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 6	57

LISTA DE TABELAS

2.1	Métodos sem malha classificados. Adaptado de Liu e Gu (2005)	15
2.2	Métodos sem malha classificados. Adaptado de Liu e Gu (2005)	17
5.1	Esforço computacional	54

LISTA DE FIGURAS

2.1	Etapas da modelação matemática do problema físico. Adaptado de Portela e	
	Charafi (2002)	8
2.2	Métodos de aproximação e discretização. Adaptado de Portela e Charafi	0
	(2002)	9
2.3	Diagrama de Tonti apresentando a ligação entre campos cinemáticos e	
	estáticos	13
2.4	Representação do domínio nos métodos sem malha e no Método dos	
	Elementos Finitos (MEF).	15
2.5	Suporte compacto do ponto de interesse em I em diferentes modelos de	
	métodos sem malha. Adaptado de Chen et al. (2006)	18
2.6	Uso de background cells em métodos sem malha baseados na forma fraca	
	global. Adaptado de Adaptado de Liu e Gu (2005)	19
2.7	Domínio local Ω_S de um nó x. Adaptado de Adaptado de Atluri et al. (2004).	20
3.1	Representação de uma discretização do domínio global Ω usando o método	
	sem malha, com um contorno $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_t$, com uma distribuição nodal \mathbf{x}_i .	
	Ω_s , representado como Ω_P , Ω_Q e Ω_R , é o suporte compacto do nó; Ω_x é o	
	domínio de definição de um ponto qualquer \mathbf{x} e Ω_q é o domínio da forma	
	fraca local ou domínio de quadratura do nó \mathbf{x}_i	23
3.2	Exemplo unidimensional da aproximação pelos MQM, onde $u^h(x_i) \neq \hat{u}_i$.	23
3.3	Típica função peso e função de forma de uma aproximação pelos MQM para	
	um nó $x = [1/2 \ 0]^T$	25
3.4	Representação do domínio global Ω , suas fronteiras natural Γ_t e essencial	
	Γ_u e os subdomínios Ω_Q associados ao nó Q , com contorno interno Γ_Q =	
	$\Gamma_{Qi} \cup \Gamma_{Qt} \cup \Gamma_{Qu}$. Nós P e R, de forma similar, possuem domínios locais	
	correspondentes a Ω_P e Ω_R .	29
3.5	Esquema representando o deslocamento $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$, da equação (3.35), um	
	deslocamento unitário de corpo rígido do domínio local, do RBDMF, para	
	um domínio local arbitrário associado ao nó Q	32
3.6	Esquema representando o equilíbrio das forças de superfície e das forças de	
	corpo, equação (3.38), de um domínio local associado ao nó Q , do RBDMF.	33
3.7	Esquema representando o deslocamento $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$, dado pelas equações (3.52)	
	e (3.58), um deslocamento unitário de corpo rígido discreto definido nos	
	pontos de colocação, da formulação do GSMF, para um domínio local	
	arbitrário associado ao nó Q	36

3.8	Esquema representando o equilíbrio das forças de corpo e forças de superfície, da equação (3.57), pontualmente definidas nos pontos de	
	colocação de um domínio local associado ao nó Q, da formulação do GSMF.	37
3.9	Domínio local interno Ω_{Ω} , com dimensões $L \times L$, sob carregamento	
• • •	constante t. ao longo de cada lado do contorno Γ_{Ω} : a equação da forma	
	fraca local da integração de contorno do RBDMF é idêntica as equações da	
	forma fraça local do contorno de colocação do GSME	41
4.1	Distribuição de pontos de Gauss e pontos de colocação, no contorno de cada	
	domínio local, para a integração da forma fraca local, respectivamente do	
	RBDMF e do GSMF	44
5.1	O patch test: uma placa retangular com carga uniformemente distribuída	
	discretizada com duas configurações nodais.	47
5.2	Resultados do patch test: deslocamentos lineares nos contornos laterais e	
	deslocamentos constantes no contorno do topo; tensão normal constante, na	
	direção do carregamento e ausência de tensão de cisalhamento	48
5.3	Estado Plano de Tensão - Viga de Timoshenko engastada de Largura Unitária.	48
5.4	Distribuição nodal na viga engastada com $33 \times 5 = 165$ nós	49
5.5	Deslocamento vertical e horizontal normalizados em uma viga engastada	
	com uma discretização de $33 \times 5 = 165$ nós.	50
5.6	Distribuição de tensões de uma viga engastada em $x_1 = L/2$ e	
	$x_2 \in [-D/2, D/2]$ com uma discretização de $33 \times 5 = 165$ nós	50
5.7	Comportamento do erro relativo r_{ϵ} do GSMF em função do número de	
	pontos de colocação, igualmente espaçados e espaçados na mesma posição	
	que os pontos de Gauss. O RBDMF aproximado com 10 pontos de Gauss	
	foi utilizado para comparação.	51
5.8	Erro relativo r_{ϵ} do GSMF para uma viga engastada discretizada com 52,	
	165, 585, 1261 e 2193 nós, em função do número de pontos de colocação,	
	igualmente espaçados ao longo do contorno dos domínios locais.	52
5.9	Precisão e convergência do RBDMF e GSMF, para uma viga engastada	
	discretizada com 585, 1261 e 2193 nós. c_i é a distância de um nó genérico i	
	até o nó nos arredores mais próximo, em cada lado do domínio local	53
5.10	Comparação do deslocamento vertical normalizado entre o GSMF e o MLPG	
	FVM, para $x_1 = L/2$. O esforço computacional em segundos foi destacado	
	na legenda.	55
5.11	Fatores de convergência, com $\nu = 0.3$, $\nu = 0.499$ e $\nu = 0.499999$, para	
	uma viga engastada com 585, 1261 e 2193 nós. Nenhum sinal de <i>locking</i>	
	volumétrico.	56
5.12	Estado Plano de Deformação - Placa infinita com furo circular centralizado.	57
	-	

5.13	Discretização da placa com $9 \times 15 = 135$ nós	58
5.14	Deslocamento nos contornos da placa com um buraco circular; fator de	
	escala de 1.7×10^4	59
5.15	Distribuição de tensões em uma placa com um buraco circular $ heta=0, rac{\pi}{4}, rac{\pi}{2}$.	60

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

Símbolos do Alfabeto Grego

- α_q Fator adimensional do domínio local de integração/colocação
- α_s Fator adimensional do suporte local
- α_i Conjunto de coeficientes indeterminados
- $\delta(x x_i)$ Função delta de *Dirac*
- Γ Contorno
- Γ_t Contorno estático
- Γ_u Contorno cinemático
- ν Coeficiente de Poisson
- Ω Domínio
- $\phi_i(\mathbf{x})$ Função de forma da aproximação com mínimos quadrados móveis
- ϕ_i Conjunto de funções linearmente independentes
- σ Campos de tensão
- ε Campo de deformações
- ε^* Campo de deformações cinematicamente admissível
- $\Delta(d)$ função delta de *Kronecker*

Símbolos do Alfabeto Latino

- \hat{u}_i Parâmetros nodais
- $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ Vetor de coeficientes
- d_i Distância entre um ponto qualquer x e o nó i
- r_i Tamanho do suporte compacto para o nó i
- $w(\mathbf{x})~$ Função peso
- B Matriz dos operadores lineares

- D Matriz constitutiva do material
- J^{-1} inverso do Jacobiano
- J Jacobiano
- n Matriz das componentes do vetor normal unitário
- p Base polinomial
- u Campo de deslocamentos
- *E* Módulo de elasticidade longitudinal
- *G* Módulo de elasticidade transversal
- *g* Função com valor prescrito
- *I* Momento de inércia da seção transversal
- *L* Operador diferencial linear
- *R* Resíduo de uma aproximação
- R_{Γ} Resíduo de uma aproximação do contorno
- R_{Ω} Resíduo de uma aproximação do domínio
- r_{Ω_q} Tamanho do domínio local de integração/colocação
- r_{Ω_s} Tamanho do suporte local
- $u^h(\mathbf{x})$ Deslocamento aproximado
- u_0 Solução exata
- W Função ponderadora arbitrária
- W_{Γ} Função ponderadora arbitrária do contorno
- W_{Ω} Função ponderadora arbitrária do domínio
- b Vetor forças de corpo
- t Componentes das forças superficiais
- u* Campos de deslocamento admissível
- $\overline{\mathbf{t}}$ Valores das forças superficiais prescritas

- $\overline{\mathbf{u}}$ Valores dos deslocamentos prescritos
- c_i Distância do nó *i* até o nó mais próximo na vizinhança do mesmo
- H(d) Heaviside step function

Abreviatura

- BEM Boundary Element Method
- CAPES Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
- DEM Diffuse Element Method
- EFG Element-free Galerkin
- ELSEVIER Editora holandesa de literatura médica e científica
- FEM Finite Element Method
- GFDM Generalized Finite Difference Method ou Método da diferença finita geralizada
- GFEM Generalized Finite Element Method
- GSMF Generalized-Strain Mesh-Free formulation ou Formulação do Campo Elástico Generalizado do Método sem malha local
- LPIM Local Point Interpolation Method
- LRPIM Local Radial Point Interpolation Method
- MATLAB Matrix Laboratory
- MEC Método dos Elementos de Contorno
- MEF Método dos Elementos Finitos
- Mfree Meshfree ou Meshless Method
- MLBIE Meshless Local Boundary Integral Equation
- MLPG Meshless Local Petrov-Galerkin
- MLS Moving Least Square
- MQM Método dos Mínimos Quadrados Móveis
- PECC Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil
- PIM Point Interpolation Method

PUFEM Partition of Unity Finite Element Method

- RBDMF Rigid-Body Displacement Mesh-Free formulation ou Formulação de Deslocamento de Corpo Rígido do Método sem malha local
- **RKPM** Reproducing Kernel Particle Method
- **RPIM** Radial Point Interpolation Method
- SPH Smoothed Particle Hydrodynamics
- XFEM Extendend Finite Element Method

1 - INTRODUÇÃO

1.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS

No âmbito da Engenharia Civil, os métodos de modelagem numérica têm sido utilizados para a resolução de problemas relacionados à mecânica dos sólidos - desde o advento e popularização dos computadores modernos - permitindo a resolução de problemas cada vez mais complexos.

Um desses métodos mais populares, utilizado largamente por engenheiros estruturalistas, é o famoso Método dos Elementos Finitos (MEF), onde uma malha de elementos finitos é associada ao domínio do problema em questão.

Apesar de ser bastante utilizado tanto profissionalmente quanto academicamente, o método não é à prova de falhas e possui algumas limitações quanto aos materiais, geometria e carregamentos não lineares (como em casos de fratura, fissura, interação solo-estrutura, grandes deformações). Dentre estas limitações está o alto custo operacional em se criar a malha de elementos finitos e a baixa confiabilidade na recuperação de tensões em problemas com malha adaptativa (Andújar et al., 2011).

Com a maior difusão e consequente popularidade do método, novas pesquisas surgiram para tentar sanar essas limitações, tais como o *Extendend Finite Element Method* (XFEM), ou Método dos Elementos Finitos Expandido (Belytschko e Black, 1999); o *Generalized Finite Element Method* (GFEM), ou Métodos dos Elementos Finitos Generalizados (Strouboulis et al., 2000). Dentre esses novos métodos se destacam os métodos sem malha ou *Meshfree*, que dispensam o uso da malha em sua formulação (Liu e Gu, 2003).

O método sem malha é um método relativamente novo usado para estabelecer um sistema de equações algébricas para todo o domínio de um determinado problema físico, sem o uso de uma malha pré-determinada para isso. Essa é uma das suas principais vantagens, já que acaba por dispensar a intervenção humana na construção de malhas com qualidade, descartando dessa forma inconveniências como remalhamento. Além disso, os métodos sem malha possuem um melhor fator de convergência do que o MEF tradicional (Onate et al., 1996). Esse método obteve um notável progresso ao longo desses últimos anos onde, em geral, suas formulações são baseadas no método dos resíduos ponderados (Finalyson, 1972).

Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH), apresentado por Lucy (1977) e Gingold e Monaghan (1977), é um dos primeiros métodos sem malha para a resolução de problemas

na astrofísica. Libersky et al. (1993) foram os primeiros a aplicar SPH em mecânica dos sólidos. As principais desvantagens do SPH são os resultados imprecisos perto dos contornos e instabilidade nas tensões, primeiramente investigado por Swegle et al. (1995). O SPH é baseado na formulação na forma forte do método dos resíduos ponderados, com descrição lagrangeana.

O método da colocação também é baseado na formulação na forma forte do método dos resíduos ponderados. Os métodos de colocação sem malha foram publicados por Kansa (1990), Zongmin (1992), Zhang et al. (2001), Liu et al. (2002b), Onate et al. (1996), Lee e Yoon (2004) e Jamil e Ng (2013). Os métodos de colocação dos métodos sem malha têm algumas vantagens atrativas sobre outros métodos sem malha, já que um algoritmo simples é implementado com eficiência computacional, sendo verdadeiramente sem malha. Apesar dessas vantagens, os métodos de colocação sem malha tendem a imprecisão, não são robustos e, o pior de tudo, são instáveis devido a má formação do sistema de equações. Onate et al. (2001) apresentaram uma técnica de estabilização, introduzindo novos termos nas equações que governam o domínio e nas condições de contorno de forças de superfície. Apesar desses termos artificiais superarem as dificuldades de estabilização, eles são apropriados apenas para alguns problemas em particular.

Outros métodos sem malha são baseados na formulação na forma fraca do método dos resíduos ponderados. Depois da discretização, a forma fraca torna-se uma característica chave das formulações usadas para encontrar o sistema de equações algébricas, por um processo de integração numérica usando *background cells* (malha de fundo), globalmente ou localmente construídas no domínio do problema. As pesquisas baseadas nos métodos sem malha na forma fraca cresceram significativamente após a publicação do *Diffuse Element Method* (DEM), apresentado por Nayroles et al. (1992).

O *Reproducing Kernel Particle Method* (RKPM), apresentado por Liu et al. (1995), e o *Element-Free Galerkin* (EFG), por Belytschko et al. (1994), foram os primeiros métodos sem malha na forma fraca aplicados à mecânica dos sólidos. Em contraste ao EFG e o RKPM, que utilizam a chamada base intrínseca, outros métodos foram desenvolvidos com o conceito de bases extrínsecas e conceitos de partição da unidade. Essa base extrínseca foi utilizada no *hp-Cloud Method*, apresentado por Duarte e Oden (1996). Melenk e Babuska (1996) apontaram as similaridades entre os métodos sem malha e o MEF, apresentando o *Partition of Unity Finite Element Method* (PUFEM), que é similar ao *hp-Cloud Method* e também inclui a aproximação por mínimos quadrados móveis, ou como é mais conhecido, *Moving Least Square* (MLS), ou método dos Mínimos Quadrados Móveis (MQM).

Todos esses métodos sem malha na forma fraca necessitam de *background cells* para realizar a integração numérica da equação dos resíduos ponderados no domínio global do problema.

Portanto, eles não são verdadeiramente sem malha. Para solucionar essa limitação, uma nova classe de métodos sem malha surgiu, baseados na forma fraca local dos resíduos ponderados, como o *Meshless Local Petrov–Galerkin* (MLPG), apresentado por Atluri e Zhu (1998) a Atluri e Shen (2002), o *Meshless Local Boundary Integral Equation* (MLBIE), apresentado por Zhu et al. (1998), o *Local Point Interpolation Method* (LPIM), apresentado por Liu e Gu (2001a) e o *Local Radial Point Interpolation Method* (LRPIM), apresentado por Liu et al. (2002a). Dentre eles, o MLPG se tornou mais popular, baseado na aproximação por mínimos quadrados móveis. A principal diferença entre o MLPG e os outros métodos sem malha global é que a forma fraca local é utilizada para integração em domínios locais com formato retangular (ao invés da forma fraca global) e assim, consequentemente, não necessita de *background cells*.

A implementação do *Meshless Finite Volume Method*, por meio de uma abordagem mista com o MLPG, foi apresentada por Atluri et al. (2004), para a resolução de problemas elastoestáticos. Nessa abordagem, tanto a deformação quanto o deslocamento são interpolados de forma independente em pontos aleatoriamente distribuídos no domínio, por meio de um esquema de interpolação local como o MQM. Assim, os valores nodais de deformação são expressados em termo dos valores nodais de deslocamento, por um simples processo de imposição direta da relação deformação-deslocamento nos pontos nodais. Essa formulação elimina o extensivo processo de diferenciação direta dos deslocamentos para o cálculo da deformação, resultando em um método computacionalmente bem eficiente.

Recentemente, diversos avanços têm sido feitos no campo dos métodos sem malha, principalmente sobre suas novas aplicações. Nesse contexto, Liu et al. (1996) mostraram a habilidade dos métodos sem malha em lidar com simulações complexas, como impacto, fratura e dinâmica dos fluidos. Bouillard e Suleau (1998) com sucesso aplicou os métodos sem malha na resolução de problemas acústicos. Por sua vez, Bonet e Lok (1999) introduziu um gradiente de correção para preservar o momento linear e angular em simulações com dinâmica dos fluidos e Onate e Idelsohn (1998) apresentaram o *Meshless Finite Point Method*, baseado na aproximação por mínimos quadrados ponderados com pontos de colocação aplicados ao transporte e fluxo de fluidos.

Quando comparado com métodos de malha, como o MEF e o MEC, os métodos sem malha possuem uma grande desvantagem, que é o grande esforço computacional necessário para sua aplicação, grande parte provinda da integração numérica, que requer um número adicional de etapas para ser realizado.

Sabendo disso, a presente pesquisa propõe duas novas formulações de métodos sem malha, baseadas no método dos resíduos ponderados e no teorema do trabalho, definidas localmente nos nós do domínio, independentes entre si. Essa independência permite que diferentes

formulações sejam utilizadas simultaneamente.

Na primeira formulação de deslocamento de corpo rígido do método sem malha local ou *Rigid-Body Displacament Mesh-Free formulation* (RBDMF), a forma local do teorema do trabalho resulta em uma forma fraca apenas com termos de contorno (ausência de forças de corpo), que já resulta em uma importante redução no esforço computacional. Na segunda formulação, do campo elástico generalizado do método sem malha local ou *Generalized-Strain Mesh-Free formulation* (GSMF), a forma local do teorema do trabalho resulta em uma forma fraca completamente livre de integração numérica. Ao se livrar de todo o processo de quadratura, a segunda formulação tem um desempenho muito melhor do que a primeira, principalmente se tratando de esforço computacional, como serão apresentados nos resultados numéricos.

1.2 - OBJETIVOS

1.2.1 - Objetivo geral

O objetivo principal da pesquisa é estabelecer uma nova base teórica comum, fundamentada nos princípios energéticos da mecânica dos sólidos deformáveis para a concepção de novas formulações baseadas na teoria das estruturas. Esse método é formulado localmente no domínio e aplicado à solução de problemas bidimensionais no âmbito da Teoria da Elasticidade. Assim, procura-se unificar o procedimento da formulação do método sem malha local ao introduzir uma nova interpretação física e matemática, que dispensa os termos de domínio e a integração numérica contida em outros métodos sem malha conhecidos. Espera-se contribuir para a validação desta classe de métodos numéricos, bem como estimular a criação de novas formulações com o procedimento estabelecido e assim solucionar os problemas comumente encontrados no MEF tradicional e em outros métodos sem malha.

No âmbito do programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil (PECC), constata-se que as pesquisas em mecânica computacional se concentram, predominantemente, em métodos numéricos bem estabelecidos, como o MEF e o MEC, e suas variações. Assim, a investigação de métodos alternativos visa diversificar e ampliar o campo de atuação do PECC no cenário nacional e internacional.

1.2.2 - Objetivos específicos

Para os objetivos específicos deste trabalho, pretende-se:

- Apresentar a forma local do teorema do trabalho para problemas geometricamente lineares;
- Implementar computacionalmente as formulações propostas utilizando rotinas programadas na linguagem MATLAB;
- Simular o comportamento de sólidos elásticos em duas dimensões: estado plano de tensão e de deformação;
- Verificar a eficiência das formulações implementadas, avaliando os parâmetros que afetam seu desempenho.

1.3 - RESUMO DA METODOLOGIA

Primeiramente, o desenvolvimento matemático da forma local do teorema do trabalho é apresentada junto com as formulações do novo método sem malha local. O teorema servirá de base teórica unificadora para todas as formulações da presente pesquisa.

Em seguida, as formulações são implementadas computacionalmente por meio de rotinas codificadas em linguagem computacional MATLAB, com o software da empresa MathWorks. Uma rotina é criada para cada uma das formulações propostas, que posteriormente serão testadas usando um *patch test* padrão, bem como dois exemplos clássicos da teoria da elasticidade: um caso referente ao estado plano de tensões e outro ao estado plano de deformações, onde ambas as soluções analíticas serão base de comparação para as soluções numéricas, assim como outros métodos sem malha conhecidos, como o EFG e o MLPG.

Por fim, os resultados das novas formulações são comparados graficamente com o resultado analítico (quanto a sua precisão e convergência), comparados com outros métodos tradicionais (quanto a sua eficiência e tempo de processamento) e verifica-se a presença do travamento (*locking*) volumétrico, no intuito de apresentar e ressaltar as vantagens do novo método.

1.4 - ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

A presente dissertação está dividida em seis capítulos. O Capítulo 1 dispõe sobre as Considerações Iniciais, Objetivos e Resumo da Metodologia.

O Capítulo 2 apresenta a revisão bibliográfica, que comporta assuntos pertinentes para esta pesquisa, fazendo um breve resumo sobre modelagem computacional e o conhecido teorema do trabalho. Faz-se uma revisão sobre os métodos de aproximação indiretos, entre eles o método de Galerkin, o método da colocação e o método dos mínimos quadrados. Uma breve introdução sobre os conceitos fundamentais acerca dos métodos sem malha é apresentada no final deste capítulo, com um sucinto histórico sobre os avanços mais recentes.

No Capítulo 3 é apresentado o desenvolvimento teórico e matemático da forma local do teorema do trabalho e, nas seções seguintes, o desenvolvimento das duas formulações implementadas: a de deslocamento de corpo rígido (RBDMF) e a do campo elástico generalizado (GSMF). Em seguida, o comportamento da forma fraca local é analisado e discutido.

O Capítulo 4 apresenta a metodologia do trabalho, demonstrando a estratégia de modelagem utilizada, bem como a metodologia para o cálculo do erro relativo, essencial para validar as novas formulações.

No Capítulo 5 são apresentados os resultados obtidos, onde comparações são feitas entre as diferentes formulações, confrontando as mesmas com o resultado analítico e os outros métodos numéricos. Gráficos e tabelas comparativas são apresentadas para auxiliar a compreensão e entendimento dos resultados.

No Capítulo 6 são apresentadas as conclusões da análise dos resultados obtidos ao longo da pesquisa e principalmente do Capítulo 5, enaltecendo as principais vantagens das novas formulações e as possíveis aplicações. O final deste capítulo propõe planos de pesquisa futuros baseados em alguns questionamentos que foram além do escopo da presente pesquisa.

2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

No presente capítulo se apresenta uma breve revisão teórica sobre modelagem numérica e pontos de interesse referentes à Teoria da Elasticidade, aos métodos de aproximação pertinentes e ao teorema do trabalho. No final do capítulo são apresentados os avanços mais recentes na área sobre métodos sem malha, juntamente com a teoria básica que será utilizada. Os aspectos aqui conceituados são fundamentos da formulação, implementação e verificação dos algoritmos propostos nos capítulos seguintes.

2.1 - MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS FÍSICOS

A modelagem numérica é uma ferramenta utilizada para solucionar sistemas físicos por meio de um processo interativo que envolve a definição de um modelo matemático equivalente, chamado de modelo de meio contínuo, correspondente ao sistema físico que pretende-se estudar.

A complexidade envolvida em considerar todos os parâmetros relativos a um determinado sistema físico levou engenheiros e cientistas a definir um sistema equivalente com apenas alguns parâmetros, essenciais para a compreensão desse sistema estudado, geralmente conhecido como variáveis de estado. A definição matemática desse sistema equivalente é o primeiro passo no processo de modelagem.

Em geral, esse sistema equivalente é definido por um conjunto de equações diferenciais baseadas na Teoria dos Meios Contínuos. As equações de equilíbrio e as relações constitutivas das variáveis de estado são impostas no domínio do problema. O sistema de equações diferenciais, válidas apenas no domínio do problema, é delimitado por um contorno e condições iniciais específicas, resultando na definição completa de um modelo diferencial de meio contínuo, matematicamente equivalente a um sistema físico. Esse modelo de meio continuo pode ser descrito por modelos matemáticos de equilíbrio, de propagação ou vibração e de difusão (Portela e Charafi, 2002).

O modelo de meio contínuo possui infinitos graus de liberdade, já que as variáveis de campo são continuamente distribuídas em todo o domínio do problema. A solução exata desse modelo é extremamente difícil e em alguns casos, praticamente impossível de ser obtida, devido à complexidade da geométrica desse domínio. Caso essa solução exata possa ser encontrada, ela é obtida analiticamente por meio de métodos matemáticos formais e bem estabelecidos, conhecidos como métodos exatos. Essa dificuldade na obtenção de soluções analíticas impulsionou o estudo de métodos de aproximação, que visam obter uma solução aproximada do problema sem recorrer à artifícios matemáticos mais complexos.

Com a aplicação do método dos resíduos ponderados e a discretização do domínio, um modelo discreto do problema é gerado, que permite que as variáveis de campo sejam definidas com um número finito de graus de liberdade e parâmetros, possibilitando sua resolução com ferramentas de análise numérica (Portela e Charafi, 2002). A Figura 2.1 mostra o processo de modelagem e suas principais características.



Figura 2.1 – Etapas da modelação matemática do problema físico. Adaptado de Portela e Charafi (2002).

2.2 - MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO

Os métodos de aproximação utilizados são baseados na Teoria dos Resíduos Ponderados e nas condições de admissibilidade presentes em todas as formulações que deram origem aos métodos de discretização diretos e indiretos. As funções ponderadoras podem ser escolhidas arbitrariamente quando em sua forma forte, originando os métodos de discretização indiretos; mas caso seja feita a integração por partes dos termos de domínio, as restrições de admissibilidade precisam ser impostas nesses termos de domínio, originando a forma fraca da equação e, posteriormente, os métodos de discretização direta. Um diagrama com essa relação entre as abordagens pode ser visto na Figura 2.2.



Figura 2.2 – Métodos de aproximação e discretização. Adaptado de Portela e Charafi (2002).

2.3 - EQUAÇÃO DOS RESÍDUOS PONDERADOS

Primeiramente, deve-se estabelecer formalmente a equação dos resíduos ponderados, cujos elementos são definidos em termos dos resíduos que a solução aproximada introduz nas equações diferenciais, sendo estes ponderados por funções arbitrárias e distribuídos no domínio e no respectivo contorno.

Uma terminologia genérica será considerada nessa seção em virtude da variedade de sistemas físicos que podem ser resolvidos por meio da equação dos resíduos ponderados. Posteriormente, no capitulo 3, esses termos serão redefinidos para sua aplicação na resolução de problemas de equilíbrio.

Sendo Ω o domínio, com Γ sendo o contorno, formado pela soma $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$. Considere a equação diferencial no domínio:

$$\mathbf{K}\,u_0 - g = 0\tag{2.1}$$

com as condições de contorno em Γ_1 e Γ_2 respectivamente:

$$\mathbf{C}\,u_0 - h = 0\tag{2.2}$$

$$\mathbf{D}\,u_0 - l = 0\tag{2.3}$$

onde K, C e D são operadores diferenciais lineares; g, h e l são funções com valores prescritos e u_0 a solução exata. A equação do resíduo ponderado se torna:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{K} u_0 - g) W_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma_1} (\mathbf{C} u_0 - h) W_{\Gamma_1} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (\mathbf{D} u_0 - l) W_{\Gamma_2} d\Gamma = 0$$
(2.4)

onde W_{Ω} , W_{Γ_1} e W_{Γ_2} são funções ponderadoras arbitrárias. Considerando uma solução aproximada u sendo:

$$u_0 = u + E \tag{2.5}$$

onde E é o erro aproximado. Substituindo equação (2.5) nas equações (2.1) a (2.3), os seguintes resíduos são gerados:

$$R_{\Omega} = \mathbf{K} \, u - g \neq 0 \tag{2.6}$$

$$R_{\Gamma_1} = \mathbf{C} \, u - h \neq 0 \tag{2.7}$$

$$R_{\Gamma_2} = \mathbf{D}\,u - l \neq 0 \tag{2.8}$$

Como os resíduos não são nulos, logo obtemos a equação:

$$\int_{\Omega} R_{\Omega} W_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma_1} R_{\Gamma_1} W_{\Gamma_1} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} R_{\Gamma_2} W_{\Gamma_2} d\Gamma \neq 0$$
(2.9)

Considerando que quanto menores forem os resíduos, melhor será a aproximação, a resultante dos resíduos é considerada como equivalente a zero. Esse anulamento é obtido distribuindo-se os resíduos no domínio e no contorno, de acordo com as respectivas funções de ponderação. Em outras palavras, a soma das integrais dos resíduos ponderados se iguala a zero, dando assim origem à equação geral dos resíduos ponderados:

$$\int_{\Omega} R_{\Omega} W_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma_1} R_{\Gamma_1} W_{\Gamma_1} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} R_{\Gamma_2} W_{\Gamma_2} d\Gamma = 0$$
(2.10)

2.4 - DISCRETIZAÇÃO INDIRETA COM FUNÇÕES GLOBAIS

Na discretização indireta, a função de aproximação u pode ser expressa por:

$$u = \alpha_1 \phi_1 + \dots + \alpha_n \phi_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i$$
(2.11)

onde $\{\phi_i\}_{i=1...n}$ representa um conjunto de *n* funções linearmente independentes definidas globalmente e $(\alpha_i)_{i=1...n}$ representa um conjunto de coeficientes generalizados, que são as incógnitas a serem determinadas na solução aproximada. Como estes coeficientes não se identificam com a variável *u* do problema, a discretização é indireta. Por questões de relevância para a pesquisa, apenas os métodos de aproximação de domínio serão apresentados.

2.4.1 - Métodos de aproximação de domínio

Nesse método, as funções ϕ_i devem satisfazer todas as condições de contorno, consequentemente não gerando resíduo nos contornos, ou seja $R_{\Gamma_1} = 0$ e $R_{\Gamma_2} = 0$. Assim, a equação (2.6) por meio da função de aproximação (2.11) torna-se:

$$R_{\Omega} = \mathbf{K} u - g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{K}(\phi_i) - g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi_i - g$$
(2.12)

onde $\{\psi_i\}_{i=1...n}$ representa um conjunto de *n* funções linearmente independentes contendo um operador diferencial linear, definidas globalmente. O método de aproximação ainda precisa de uma função ponderadora W_{Ω} para chegar a uma aproximação da solução. Muitas funções surgiram ao longo dos anos, mas apenas o método de Galerkin, o método da colocação e o método dos mínimos quadrados são relevantes para esta pesquisa e serão apresentados.

2.4.2 - Método de Galerkin

A função de ponderação W_{Ω} é uma variação arbitrária da função de aproximação u, representado por um δ . Com a equação (2.11) e a variação arbitrária obtêm-se:

$$W_{\Omega} = \delta u \tag{2.13}$$

$$W_{\Omega} = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \,\delta\alpha_i \tag{2.14}$$

Consequentemente, a equação dos resíduos ponderados se torna um sistema de n equações algébricas com n incógnitas:

$$\int_{\Omega} R_{\Omega} W_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega} R_{\Omega} \,\delta u \,d\Omega = \sum_{i=1}^{n} \delta \alpha_{i} \int_{\Omega} R_{\Omega} \,\phi_{i} \,d\Omega = 0$$
(2.15)

2.4.3 - Método da Colocação

Este método baseia-se nas propriedades seletivas da função generalizada delta de *Dirac* que possui as seguintes propriedades seletivas (Hildebrand, 1962):

$$\delta (x - x_i) = \begin{cases} \infty & x = x_i \\ 0 & x \neq x_i \end{cases}$$
(2.16)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_i) \, dx = \int_{x_i - a}^{x_i + a} \delta(x - x_i) \, dx = 1$$
(2.17)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \,\delta(x - x_i) \,dx = \int_{x_i - a}^{x_i + a} f(x) \,\delta(x - x_i) \,dx = f(x_i) \tag{2.18}$$

sendo *a* uma constante arbitrária. No método da colocação escolhe-se para função de ponderação W_{Ω} uma combinação linear de funções delta de *Dirac* $\delta(x - x_i)$, definidas nos pontos $x = x_i$, com um conjunto de constantes arbitrárias β_i , representadas a seguir:

$$W_{\Omega} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \,\delta(x - x_i) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \delta_i \tag{2.19}$$

Quando as propriedades do delta de *Dirac* são consideradas, a equação dos resíduos ponderados se torna apenas um somatório no ponto $x = x_i$:

$$\int_{\Omega} R_{\Omega} W_{\Omega} d\Omega = \sum_{i=1}^{n} \beta_{i} \int_{\Omega} R_{\Omega} \delta(x - x_{i}) d\Omega = \sum_{i=1}^{n} \beta_{i} R_{\Omega}(x_{i}) = 0$$
(2.20)

2.4.4 - Método dos Mínimos Quadrados

Neste método, a função peso é escolhida como sendo uma variação arbitrária da função residual, representada por

$$W_{\Omega} = \delta R_{\Omega} \tag{2.21}$$

no qual a variação está em termos de coeficientes generalizados. Quando considera-se a equação (2.12), temos que

$$W_{\Omega} = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \,\delta\alpha_i \tag{2.22}$$

onde $\delta \alpha_i$ representa uma variação arbitrária dos coeficientes α_i . Sendo assim, a equação dos resíduos ponderados se torna um sistema de *n* equações algébricas com *n* incógnitas:

$$\int_{\Omega} R_{\Omega} W_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega} R_{\Omega} \, \delta R_{\Omega} \, d\Omega = \sum_{i=1}^{n} \delta \alpha_{i} \int_{\Omega} R_{\Omega} \, \psi_{i} \, d\Omega \tag{2.23}$$

2.5 - TEOREMA DO TRABALHO

O teorema do trabalho estabelece uma relação energética entre qualquer campo de deformações cinematicamente admissível com qualquer campo estaticamente admissível em um corpo sob regime elástico (Fichera, 2006). A Figura 2.3 mostra um diagrama com a relação entre esses dois campos. Um campo cinematicamente admissível é um campo que



Figura 2.3 – Diagrama de Tonti apresentando a ligação entre campos cinemáticos e estáticos.

satisfaça a relação $\varepsilon = \mathbf{L} \mathbf{u}$, em um domínio Ω e satisfaça $\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}}$ em um contorno cinemático. É possível observar que, para um dado campo de deslocamento \mathbf{u} , existe apenas um campo de deformações ε que satisfaça a relação cinemática, já que o sistema é totalmente determinado, com seis equações e seis incógnitas (Fredholm, 1906).

Um campo de tensões estaticamente admissível é um campo que satisfaça a relação $\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}$ +

 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ em um domínio Ω e satisfaça $\mathbf{t} = \overline{\mathbf{t}}$ em um contorno estático. É possível observar que, para um dado sistema de forças externas aplicadas, há um número infinito de campos de tensão que satisfaça a relação estática, já que o sistema possui três equações e seis incógnitas (Fredholm, 1906).

Como visto no teorema de Kirchhoff (1859), a solução para um determinado problema físico é um campo elástico totalmente admissível que satisfaça simultaneamente a admissibilidade cinemática e estática, sendo esta a única capaz de providenciar a linearidade e a estabilidade admitidas pelo material.

2.6 - MÉTODOS SEM MALHA

Nessa seção serão apresentados os métodos sem malha mais conhecidos e os recentes avanços no método. Alguns termos e conceitos fundamentais para a formulação do método são apresentados.

2.6.1 - Definição

Os métodos sem malha, diferentemente do MEF, usam um conjunto de nós espalhados no domínio e no contorno do problema (chamados de nós de campo ou *field nodes*), de forma que estes não contêm nenhuma informação sobre a conectividade entre eles para a aproximação ou interpolação das incógnitas do campo, ou seja, não formam uma malha. A Figura 2.4 mostra a principal diferença entre esses dois métodos. Essa distribuição nodal não necessariamente precisa ser uniforme e pode ser controlada, assim como a densidade, ou quantidade total de nós (Atluri e Zhu, 1998).

Ele surgiu como uma alternativa ao MEF tradicional, buscando eliminar os problemas relacionados à malha, como o alto custo para a geração da mesma, a baixa precisão na recuperação das tensões e a dificuldade de resolução de problemas que exijam análise adaptativa, como fratura e grandes deformações.

Muitos métodos sem malha obtiveram bons resultados e possuem um grande potencial para se tornarem poderosas ferramentas numéricas. Mas, em compensação, esses métodos estão em fase de desenvolvimento e possuem muitos problemas técnicos que ainda precisam ser contornados.

Esses métodos podem ser classificados de acordo com a formulação ou método de aproximação utilizado, bem como o tipo de representação do domínio. Os principais métodos e suas classificações estão resumidos esquematicamente na Tabela 2.1.



Figura 2.4 – Representação do domínio nos métodos sem malha e no Método dos Elementos Finitos (MEF).

Tabela 2.1 -	- Métodos sem	malha class	sificados. A	Adaptado	de Liu e G	u (2005).

(2005)

Classificação	Categoria	Exemplos de métodos
Baseado nas formulações utilizadas	Forma forte Forma fraca Combinação dessas duas formas	Colocação, FPM etc. EFG, RPIM, MLPG, LRPIM, etc. MWS, etc.
Baseado no método de interpolação/aproximação	Mínimos quadrados móveis (MQM) Método da representação da integral PIM Outras interpolações	EFG, MLPG, etc. SPH, etc. RPIM, LRPIM, etc. PUFEM, hp-cloud, etc.
Baseado na representação do domínio	Domínio Contorno	SPH, EFG, RPIM, MLPG, LRPIM, etc. BNM, LBIE, BPIM, BRPIM, HBRPIM, etc.

Alguns métodos recentes foram deixados de lado por ainda estarem em sua fase inicial de estudos e não possuírem uma base sólida.

2.6.2 - Funções de aproximação

As funções de forma e as funções peso ou ponderadoras desempenham um papel essencial na performance dos métodos sem malha. O campo de deslocamentos u em qualquer ponto x dentro do domínio é interpolado inteiramente em função dos termos nodais, dentro do suporte compacto da função ponderadora desse ponto x, como

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) u_i = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}$$
(2.24)

onde n é o número de nós dentro do suporte compacto do domínio do ponto x; u_i é a variável

do campo nodal no nó i; û é o vetor que contém as variáveis de campo desses n nós e $\phi_i(x)$ é a função de forma do nó i. O suporte compacto, também conhecido como domínio de influência nodal, garante a localidade da aproximação e será definido posteriormente neste capítulo.

2.6.3 - Funções de forma

As funções de forma utilizadas nos métodos sem malha devem satisfazer alguns requisitos básicos, sendo eles:

- Nós arbitrariamente distribuídos, sendo suficientemente robusto para permitir uma distribuição razoavelmente arbitrária;
- Numericamente estável;
- Deve satisfazer uma certa ordem de consistência;
- Deve ter suporte compacto, devendo ser considerado zero quando fora do mesmo;
- As funções de aproximação ligadas às funções de forma devem ser compatíveis ao longo do domínio do problema quando a forma fraca global é utilizada, ou deve ser compatível no domínio local da quadratura na forma fraca local;
- É ideal que a função de forma possua propriedades do delta de Kronecker;
- Deve ser computacionalmente eficiente.

O desenvolvimento de funções de forma especiais para serem utilizadas nos métodos sem malha é uma das áreas de pesquisa mais procuradas nesses últimos anos e, sendo assim, várias aproximações foram propostas. Liu et al. (2002b) classificam essas formulações em três grandes categorias, baseados nos tipos de teoria usadas na aproximação. As principais funções de forma e suas classificações estão resumidos esquematicamente na Tabela 2.2.

No método de representação por integral, um dos mais antigos métodos utilizados na discretização sem malha, a função é representada usando suas informações no domínio local por meio de uma operação com integrais ponderadas. A consistência é conseguida escolhendo-se uma função peso adequada.

Os métodos de representação em série possuem um longo histórico. Eles foram bem desenvolvidos no MEF e agora estão sendo utilizados nos métodos sem malha, sendo que seus dois métodos mais conhecidos são dos MQM ou MLS e o PIM usando funções bases radiais (RPIM).

Categoria	Técnicas de aproximação
Representação por integral	Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) Reproducing Kernel Particle Method (RKPM)
Representação por séries	Mínimos Quadrados Móveis (MQM) Point Interpolation Method (PIM, RPIM) Partition of Unity (PoU)
Representação por diferencial	Generalized Finite Difference Method (GFDM)

Tabela 2.2 – Métodos sem malha classificados. Adaptado de Liu e Gu (2005).

O método de representação por diferencial vem sendo utilizado por um bom tempo no método das diferenças finitas. Essa aproximação não é compatível globalmente e sua consistência é garantida pela teoria da série de Taylor. Esse método é geralmente utilizado para estabelecer sistemas de equações baseados na forma forte (Zienkiewicz et al., 2000).

2.6.4 - Funções ponderadoras

A continuidade das funções de forma $\Phi(\mathbf{x})$ são governadas pela continuidade da base polinomial escolhida, assim como a continuidade das funções ponderadoras utilizadas. A escolha das funções ponderadoras é na maioria das situações arbitrária, desde que a localidade da mesma seja garantida; ou seja, que seu valor decresça monotonicamente à medida que se afasta do ponto de interesse x, e seja nula quando fora do suporte compacto ou domínio de influência.

As funções exponenciais e do tipo *spline* são as mais utilizadas na prática, mas muitos autores optam por construir suas próprias funções ponderadoras, com a ordem de continuidade desejada, dependendo do problema em questão. Devido a arbitrariedade dessas funções elas podem ser facilmente construídas, desde que a propriedade de partição da unidade seja garantida e a primeira e segunda derivada sejam equivalentes a zero no contorno do suporte compacto. Geralmente as funções exponenciais são computacionalmente mais custosas, mas são menos sensitiveis ao tamanho do suporte compacto.

2.6.5 - Suporte compacto

O suporte compacto é um subdomínio do nó x_i onde a função ponderadora é diferente de zero. A precisão da interpolação para um ponto de interesse depende dos nós no interior do suporte compacto. Sendo assim, um suporte compacto apropriado tem que ser escolhido para garantir uma aproximação eficiente e precisa, geralmente controlado por coeficientes

adimensionais, que aumentam o raio de cobrimento do suporte c_i , controlando o tamanho desse domínio.

O suporte compacto tem geometria arbitrária, dessa forma por simplicidade, geralmente são escolhidos suportes circulares ou retangulares, como demonstrado na Figura 2.5.



Figura 2.5 – Suporte compacto do ponto de interesse em *I* em diferentes modelos de métodos sem malha. Adaptado de Chen et al. (2006).

Esse número é totalmente experimental, deve ser testado e aperfeiçoado, já que, até o atual momento, não existe uma fórmula particular para calcular este valor. Geralmente um valor de $\alpha_s = 2.0 \sim 3.0$ resulta em bons resultados para a maioria dos problemas, como visto em Liu e Gu (2005) e Atluri e Zhu (2000).

2.6.6 - Domínio de definição

Domínio de definição de um ponto qualquer x é um subdomínio no qual a aproximação é definida. Esse domínio cobre todos os nós cujo os respectivos suportes compactos incluam o ponto qualquer x. Assim como o suporte compacto, a precisão da interpolação depende da quantidade de nós cujo suporte compacto inclua o ponto de interesse. Sendo assim, o tamanho do suporte compacto influencia diretamente na quantidade de nós que farão parte dessa interpolação.

2.6.7 - Imposição das condições de contorno essenciais

As aproximações utilizadas pelos métodos sem malha resultam em valores que não passam por parâmetros nodais. Sendo assim, uma imposição das condições de contorno essenciais é necessária para se obter a solução do problema, aumentando a dificuldade de implementação e o esforço computacional. Para tal propósito os multiplicadores Lagrangeanos são os mais
utilizados, mas são também os mais custosos computacionalmente, devido a não positividade das equações discretas (Chen et al., 2006).

2.6.8 - Avaliação das integrais

Uma das grandes diferenças dentre os diversos métodos sem malha baseados na forma fraca é a forma como as integrais são avaliadas.

Nos métodos sem malha baseados na forma fraca global geralmente são utilizados *background cells* ou malhas de fundo, onde a quadratura de Gauss é realizada dentro dessas células ou elementos. Essa malha de fundo pode ser um arranjo regular dentro do domínio ou pode ser uma discretização do domínio, da mesma forma que no MEF, como mostra a Figura 2.6.



Figura 2.6 – Uso de *background cells* em métodos sem malha baseados na forma fraca global. Adaptado de Adaptado de Liu e Gu (2005).

Em contrapartida nos métodos sem malha baseados na forma fraca local a integração numérica é realizada em um domínio de quadratura local predefinida para o nó, também chamado de domínio local.

Domínio local ou domínio da forma fraca de um nó x_i é o subdomínio onde a forma fraca local é definida e onde a quadratura de Gauss será realizada, como mostra a Figura 2.7, para um nó qualquer x. Geralmente o tamanho do domínio local é controlado por coeficientes



Figura 2.7 – Domínio local Ω_S de um nó x. Adaptado de Adaptado de Atluri et al. (2004).

adimensionais, que reduzem o raio de cobrimento do suporte compacto. Esse número, assim como o tamanho do suporte compacto, é totalmente experimental, deve ser testado e aperfeiçoado. Geralmente um valor de $\alpha_q = 0.4 \sim 0.6$ resulta em bons resultados para a maioria dos problemas, como visto em Liu e Gu (2005) e Atluri e Zhu (2000).

2.6.9 - Métodos sem malha baseado na forma fraca global

Os métodos sem malha baseado na forma fraca global são geralmente baseados na forma fraca de Galerkin e definida sobre o domínio global de um problema, usando funções de forma localmente definidas. Multiplicadores Lagrangeanos são utilizados para impor as condições de contorno essenciais e *background cells*, ou malha de fundo, são utilizadas no processo de quadratura para avaliar as integrais.

O primeiro método sem malha baseado na forma fraca global foi o *Diffuse Element Method* (DEM) proposto por Nayroles et al. (1992). Nesse método o MQM proposto por Lancaster e Salkauskas (1981) foi criado para gerar as funções de forma e a forma fraca de Galerkin, empregada para construir o sistema de equações.

Em 1994, Belytschko et al. (1994) propuseram o método *Element-free Galerkin* (EFG), onde o mesmo MQM foi utilizado para construir funções de forma baseadas em apenas um grupo de nós distribuídos arbitrariamente em um domínio local. Esse método utiliza a mesma forma fraca de Galerkin, mas precisa de um conjunto de *background cells* para avaliar essas integrais.

O EFG se mostrou muito mais preciso que o MEF, com um bom fator de convergência, tendo sido aplicado a uma gama de problemas, como fratura e problemas não lineares. Todas essas aplicações tornaram o EFG um método bem atrativo e sólido, mas inseto de falhas. O método é computacionalmente mais custoso do que o MEF além de precisar de *background cells* para se calcular o sistema de matrizes, não sendo assim verdadeiramente sem malha.

Liu e Gu (1999) propuseram o *Point Interpolation Method* (PIM) baseado na forma fraca de Galerkin, onde o domínio era representado por nós propriamente distribuídos. O PIM também é usado para construir as funções de forma polinomiais, baseado em um grupo de nós arbitrariamente distribuídos no domínio local. Posteriormente, Liu e Gu (2001b) desenvolveram o RPIM, que utiliza uma base radial, sendo bem mais estável e robusto, mas que, assim como o EFG, precisa de *backgrounds cells*, não sendo assim verdadeiramente sem malha.

2.6.10 - Métodos sem malha baseados na forma fraca local

Para evitar o uso de *background cells*, a forma fraca global é usada por Atluri e Zhu (1998) para desenvolver o *Meshless Local Petrov-Galerkin* (MPGL), que também foi desenvolvido com outras variações (Atluri e Zhu, 2000).

Quando a forma fraca local é usada em um campo nodal, a integração numérica é realizada em um domínio de quadratura local predefinida para o nó, que também pode ser o domínio local onde as funções ponderadas são definidas. Dessa forma, esses métodos não necessitam de *background cells*, sendo assim, verdadeiramente sem malha.

O procedimento desse método é similar aos métodos numéricos baseados na formulação na forma forte, como o FDM. Entretanto, por causa da aproximação MQM empregada, tratamentos especiais são necessários para aplicar as condições de contorno essenciais.

Outro método bastante conhecido é o *Local Point Interpolation Method* (LPIM), desenvolvido por Liu e Gu (2001a), e o *Local Radial Point Interpolation Method* (LRPIM), desenvolvido por Liu et al. (2002a). Nesses métodos, funções de forma polinomiais PIM são utilizadas, o que é responsável pela singularidade da matriz de interpolação do momento, sendo assim, um algoritmo de triangulação é necessário para evitar o problema. Já as funções de forma RPIM contornam esse problema, se tornando uma alternativa robusta, ainda mais quando domínios definidos com nós aleatoriamente posicionados são utilizados no problema.

3 - FORMULAÇÕES DO MÉTODO SEM MALHA LOCAL

As novas formulações propostas na presente pesquisa têm fortes influências da formulação dos resíduos ponderados e do teorema do trabalho, que estabelece uma relação energética entre campos de tensão estaticamente admissíveis e campos de deformação cinematicamente admissíveis.

3.1 - MÉTODOS DOS MÍNIMOS QUADRADOS MÓVEIS

A aproximação pelo método dos Mínimos Quadrados Móveis (MQM) foi concebida por Lancaster e Salkauskas (1981) para a reconstrução de superfícies e ajuste de dados pontuais arbitrariamente dispersos. Nayroles et al. (1992) introduziu o uso dos MQM para a construção de funções de forma para a solução de problemas de mecânica dos sólidos deformáveis.

A aproximação pelos MQM é composta por três componentes: uma função peso do suporte compacto associada a cada nó da discretização, uma base polinomial completa e um conjunto de coeficientes em função das coordenadas espaciais, conforme apresentado por Atluri e Zhu (1998). Todas as terminologias utilizadas na presente pesquisa seguem o modelo proposto por Atluri e Zhu (2000).

Considere Ω o domínio de um corpo com contorno Γ e seja $N = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \in \Omega$ o conjunto de nós espalhados ao longo desse domínio, que representam uma discretização sem malha, no qual alguns deles estão localizados no contorno Γ , como pode ser visto na Figura 3.1. Os suportes locais circulares ou retangulares, centralizados em cada ponto nodal, podem ser utilizados. Nos arredores de um ponto x qualquer, o domínio de definição da aproximação pelos MQM é o subdomínio $\Omega_x \in \Omega$, com um contorno local Γ_x .



Figura 3.1 – Representação de uma discretização do domínio global Ω usando o método sem malha, com um contorno $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_t$, com uma distribuição nodal \mathbf{x}_i . Ω_s , representado como Ω_P , Ω_Q e Ω_R , é o suporte compacto do nó; $\Omega_{\mathbf{x}}$ é o domínio de definição de um ponto qualquer \mathbf{x} e Ω_q é o domínio da forma fraca local ou domínio de quadratura do nó \mathbf{x}_i .

3.1.1 - Funções de Forma

Considere Ω_x o domínio de definição de uma aproximação pelos MQM em uma região nos arredores de um ponto x qualquer, demonstrado para uma aproximação unidimensional na Figura 3.2.



Figura 3.2 – Exemplo unidimensional da aproximação pelos MQM, onde $u^h(x_i) \neq \hat{u}_i$.

Para aproximar o deslocamento $u(\mathbf{x}) \in \Omega_{\mathbf{x}}$, a partir de um certo número de nós espalhados ao longo do domínio \mathbf{x}_i , i = 1, 2, ..., n, onde esses parâmetros nodais \hat{u}_i são definidos, a

aproximação pelos MQM é dada por

$$u^{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^{T}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) \tag{3.1}$$

para $\mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{x}}$, em que

$$\mathbf{p}^{T}(\mathbf{x}) = \left[p_{1}(\mathbf{x}), p_{2}(\mathbf{x}), \dots, p_{m}(\mathbf{x})\right], \qquad (3.2)$$

é o vetor da base polinomial de ordem m e $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ é o vetor de coeficientes $a_j(\mathbf{x})$, j = 1, 2, ..., m, que são funções das coordenadas espaciais $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$, em problemas 2-D.

O vetor de coeficientes $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ é determinado a partir da minimização da norma ponderada discreta L_2

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i(\mathbf{x}) \left[u^h(\mathbf{x}_i) - \hat{u}_i \right]^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i(\mathbf{x}) \left[\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \hat{u}_i \right]^2$$
(3.3)

com respeito a cada termo de $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, onde $w_i(\mathbf{x})$ é a função peso associada ao nó *i*, com suporte compacto $w_i(\mathbf{x}) > 0$, para todo \mathbf{x} no suporte de $w_i(\mathbf{x})$. A Figura 3.1 demostra esquematicamente o suporte compacto das funções peso dos MQM associadas a alguns nós, que nada mais são do que os domínios de influência de cada um desses nós. Encontrando o extremo de $J(\mathbf{x})$ com respeito a cada termo de $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ obtemos

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}},\tag{3.4}$$

no qual

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} w_i(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i), \qquad (3.5)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = [w_1(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_1), w_2(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_2), \dots, w_n(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_n)]$$
(3.6)

e

$$\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n]. \tag{3.7}$$

Resolvendo a equação (3.4) para $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, tem-se

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}},\tag{3.8}$$

desde que $n \ge m$, para cada ponto qualquer x, como uma condição necessária para uma aproximação bem definida. Substituindo $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, obtido na equação (3.8), na equação (3.1)

obtém-se a equação final da aproximação pelos MQM

$$u^{h}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \phi_{i}(\mathbf{x})\hat{u}_{i},$$
(3.9)

onde

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) \left[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \right]_{ji}$$
(3.10)

é a função de forma da aproximação pelos MQM correspondente ao nó \mathbf{x}_i , esquematicamente representado na Figura 3.3b. É importante notar que as funções de forma dos MQM não são interpolantes nodais, não apresentando assim a propriedade do delta de *Kronecker*, ou seja, $\phi_i(\mathbf{x}_j) \neq \delta_{ij}$.



Figura 3.3 – Típica função peso e função de forma de uma aproximação pelos MQM para um nó $x = [1/2 \ 0]^T$

Como $\phi_i(\mathbf{x})$ desaparece para qualquer \mathbf{x} que não esteja no domínio local do nó \mathbf{x}_i , como pode ser visto na Figura 3.3b, o caráter local da aproximação pelos MQM é preservada.

As derivadas espaciais da função de forma $\phi_i(\mathbf{x})$ são obtidas com

$$\phi_{i,k} = \sum_{j=1}^{m} \left[p_{j,k} (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})_{ji} + p_j (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{,k} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_{,k} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})_{ji} \right],$$
(3.11)

onde $(\cdot)_{,k} = \partial(\cdot)/\partial x_k$.

3.1.2 - Funções de Ponderação

As funções peso $w_i(\mathbf{x})$, ilustrada na Figura 3.3a, introduzidas na equação (3.3) para cada nó \mathbf{x}_i , tem suporte compacto que define o subdomínio, onde $w_i(\mathbf{x}) > 0$ para todos os \mathbf{x} . Por

simplicidade, um suporte compacto retangular ou circular serão considerados nas análises desta pesquisa, com suas funções peso definidas por

$$w_i(\mathbf{x}) = w_{i_x}(\mathbf{x}) w_{i_y}(\mathbf{x}) \tag{3.12}$$

com funções ponderadoras spline de quarta ordem dadas por

$$w_{i_{x}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{d_{i_{x}}}{r_{i_{x}}}\right)^{2} + 8\left(\frac{d_{i_{x}}}{r_{i_{x}}}\right)^{3} - 3\left(\frac{d_{i_{x}}}{r_{i_{x}}}\right)^{4} & \text{para } 0 \le d_{i_{x}} \le r_{i_{x}} \\ 0 & \text{para } d_{i_{x}} > r_{i_{x}} \end{cases}$$
(3.13)

$$w_{iy}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{d_{iy}}{r_{iy}}\right)^2 + 8\left(\frac{d_{iy}}{r_{iy}}\right)^3 - 3\left(\frac{d_{iy}}{r_{iy}}\right)^4 & \text{para } 0 \le d_{iy} \le r_{iy} \\ 0 & \text{para } d_{iy} > r_{iy}, \end{cases}$$
(3.14)

onde $d_{ix} = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|$ e $d_{iy} = |\mathbf{y} - \mathbf{y}_i|$ são as distâncias entre as coordenadas $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ e os nós $[\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i]$, onde r_{ix} e r_{iy} são os tamanhos do suporte nodal para a função peso $w_i(\mathbf{x})$. A função das equações (3.13) e (3.14) tem continuidade C^1 e, portanto, as funções de forma em (3.11) também tem a mesma ordem de continuidade em todo o domínio.

3.1.3 - Campo Elástico

e

Agora o campo elástico deve ser aproximado nas proximidades de x. Assim, considerando a equação (3.10), pode-se montar a aproximação pelos MQM do campo de deslocamentos

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} u^{h}(\mathbf{x}) \\ v^{h}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{1}(\mathbf{x}) & 0 & \dots & \phi_{n}(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \phi_{1}(\mathbf{x}) & \dots & 0 & \phi_{n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_{1} \\ \hat{v}_{1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{u}_{n} \\ \hat{v}_{n} \end{bmatrix} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \, \hat{\mathbf{u}} \qquad (3.15)$$

e do campo de deformações específicas

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\,\mathbf{u} = \mathbf{L}\,\boldsymbol{\Phi}\,\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{B}\,\hat{\mathbf{u}},\tag{3.16}$$

assumindo linearidade geométrica no operador diferencial $L(\cdot)$, então tem-se que

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & 0 & \dots & \phi_{n,1} & 0 \\ 0 & \phi_{1,2} & \dots & 0 & \phi_{n,2} \\ \phi_{1,2} & \phi_{1,1} & \dots & \phi_{n,2} & \phi_{n,1} \end{bmatrix}.$$
(3.17)

Finalmente, o campo de tensões pode ser aproximado pela lei de Hooke generalizada

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\,\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\,\mathbf{B}\,\hat{\mathbf{u}} \tag{3.18}$$

assim como as componentes das forças de superfície

$$\mathbf{t} = \mathbf{n}\,\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n}\,\mathbf{D}\,\mathbf{B}\,\hat{\mathbf{u}},\tag{3.19}$$

onde D representa a matriz constitutiva do material, dada por

$$\mathbf{D} = \underbrace{\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}}_{\text{Estado Plano de Tensão}} \text{ou } \underbrace{\frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}}_{\text{Estado Plano de Deformação}}$$
(3.20)

e n é a matriz das componentes do vetor normal unitário, definida por

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix}.$$
 (3.21)

As equações (3.15) a (3.21) mostram que, em um ponto x qualquer, as variáveis do campo elástico são definidas em termo das incógnitas nodais \hat{u} .

3.2 - FORMA LOCAL DO TEOREMA DO TRABALHO

A solução para um determinado problema físico nada mais é do que um campo elástico totalmente admissível, que satisfaça tanto a admissibilidade cinemática quanto a estática. Sendo assim, se essa solução existe, como visto em Fichera (2006), ela é a única capaz de promover a estabilidade e a linearidade admissível pelo material.

Baseando-se na teoria fundamental do cálculo variacional, essa solução única proposta leva diretamente ao teorema do trabalho virtual, que nada mais é do que a minimização da energia potencial de um problema físico (Reddy, 2006).

O teorema geral do trabalho estabelece uma relação energética entre um campo de tensões estaticamente admissível qualquer com um campo de deformações cinematicamente admissível qualquer, em um mesmo corpo ou domínio. Derivado diretamente da equação dos resíduos ponderados, o teorema do trabalho serve como uma base unificadora para as formulações numéricas de modelos contínuos (Brebbia e Walker, 2013).

Seja Ω um domínio bidimensional com contorno definido por $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$. Considera-se um campo de tensões estaticamente admissível, ou seja, que satisfaça a condição de equilíbrio

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0},\tag{3.22}$$

válida no domínio Ω , com a condição de contorno na fronteira natural Γ_t

$$\mathbf{t} = \mathbf{n}\,\boldsymbol{\sigma} = \overline{\mathbf{t}} \tag{3.23}$$

onde o vetor σ representa as componentes de tensão, L é o operador de derivadas matricial, o vetor t representa as componentes das forças superficiais, \overline{t} são valores das forças superficiais prescritas e n é o vetor unitário normal ao contorno Γ .



Figura 3.4 – Representação do domínio global Ω , suas fronteiras natural Γ_t e essencial Γ_u e os subdomínios Ω_Q associados ao nó Q, com contorno interno $\Gamma_Q = \Gamma_{Qi} \cup \Gamma_{Qt} \cup \Gamma_{Qu}$. Nós P e R, de forma similar, possuem domínios locais correspondentes a Ω_P e Ω_R .

Seja Q um ponto do domínio Ω contido em um subdomínio arbitrário Ω_Q com fronteira constituída por $\Gamma_Q = \Gamma_{Qi} \cup \Gamma_{Qt} \cup \Gamma_{Qu}$, onde Γ_{Qi} designa o contorno interno do subdomínio, $\Gamma_{Qt} = \Gamma_t \cap \Gamma_Q$ e $\Gamma_{Qu} = \Gamma_u \cap \Gamma_Q$, como mostrado na Figura 3.4. Devido a sua arbitrariedade, o domínio local pode se sobrepor a outros domínios locais similares.

A forma forte da equação dos resíduos ponderados para o domínio local do ponto Q pode ser escrita da forma

$$\int_{\Omega_Q} \left(\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} \right)^T \mathbf{W}_{\Omega} \, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_{Qt}} \left(\mathbf{t} - \bar{\mathbf{t}} \right)^T \mathbf{W}_{\Gamma} \, \mathrm{d}\Gamma = \mathbf{0}, \tag{3.24}$$

onde W_{Ω} e W_{Γ} são funções peso arbitrárias definidas em Ω e Γ , respectivamente. Integrando o termo de domínio da equação (3.24) por partes (teorema da divergência), obtém-se a forma fraca local da equação dos resíduos ponderados

$$\int_{\Gamma_Q} (\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{W}_{\Omega} \, \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega_Q} \left(\boldsymbol{\sigma}^T \, \mathbf{L} \mathbf{W}_{\Omega} - \mathbf{b}^T \mathbf{W}_{\Omega} \right) \, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_{Qt}} \left(\mathbf{t} - \bar{\mathbf{t}} \right)^T \mathbf{W}_{\Gamma} \, \mathrm{d}\Gamma = \mathbf{0}.$$
(3.25)

Por conveniência, a função peso do contorno, \mathbf{W}_{Γ} , é avaliada como

$$\mathbf{W}_{\Gamma} = -\mathbf{W}_{\Omega},\tag{3.26}$$

no contorno Γ_{Qt} . Assim, a equação (3.25) resulta em

$$\int_{\Gamma_Q - \Gamma_{Qt}} \mathbf{t}^T \mathbf{W}_{\Omega} \, \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_{Qt}} \overline{\mathbf{t}}^T \mathbf{W}_{\Omega} \, \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega_Q} \left(\boldsymbol{\sigma}^T \, \mathbf{L} \mathbf{W}_{\Omega} - \mathbf{b}^T \mathbf{W}_{\Omega} \right) \, \mathrm{d}\Omega = \mathbf{0}$$
(3.27)

Percebe-se que W_{Ω} deve ter ordem de continuidade compatível com o operador L, pois é uma condição de admissibilidade para a integração.

Seja ε^* um campo de deformações cinematicamente admissível, associado a um campo de deslocamentos u^{*} com derivadas suficientemente pequenas para garantir-se a linearidade geométrica, dado por

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{L} \, \mathbf{u}^*, \tag{3.28}$$

no domínio Ω , com condições de contorno

$$\mathbf{u}^* = \overline{\mathbf{u}},\tag{3.29}$$

válidas em Γ_u^* . Considerando as funções peso arbitrárias \mathbf{W}_{Ω} como

$$\mathbf{W}_{\Omega} = \mathbf{u}^*, \tag{3.30}$$

a equação dos resíduos ponderados (3.27) reduz-se a

$$\int_{\Gamma_Q - \Gamma_{Qt} - \Gamma_{Qu}} \mathbf{t}^T \mathbf{u}^* \, \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_{Qu}} \mathbf{t}^T \overline{\mathbf{u}}^* \, \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_{Qt}} \overline{\mathbf{t}}^T \mathbf{u}^* \, \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega_Q} \left(\boldsymbol{\sigma}^T \, \mathbf{L} \mathbf{u}^* - \mathbf{b}^T \mathbf{u}^* \right) \, \mathrm{d}\Omega = \mathbf{0} \quad (3.31)$$

que pode ser escrita de de forma compacta

$$\int_{\Gamma_Q} \mathbf{t}^T \mathbf{u}^* \,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega_Q} \mathbf{b}^T \mathbf{u}^* \,\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega_Q} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^* \,\mathrm{d}\Omega. \tag{3.32}$$

Essa equação, que expressa a dualidade estático-cinemática, é a forma local do conhecido teorema do trabalho, uma das identidades fundamentais da mecânica dos sólidos deformáveis, como proposto por Sokolnikoff (1956).

A equação (3.32) é o ponto de partida das formulações cinematicamente admissíveis dos métodos desenvolvidos neste trabalho, que merece algumas ressalvas, sendo elas:

- O campo de tensões σ, é qualquer campo que satisfaça o equilíbrio das forças externas b e t aplicadas, não sendo necessariamente o campo de tensões que efetivamente está atuando no corpo;
- O campo de deformações ε^* , é qualquer campo gerado por u^{*} que seja compatível

com as restrições $\mathbf{u}^* = \overline{\mathbf{u}}$, não sendo necessariamente o campo de deformações que efetivamente está atuando no corpo;

- Tanto o campo de tensões σ quanto o campo de deformações ε*, não estão conectados por qualquer relação constitutiva. Esses campos são completamente independentes, como uma consequência da arbitrariedade da função ponderadora W_Ω;
- Por fim, o domínio local Ω_Q é qualquer subdomínio arbitrário atuando no corpo, onde os campos independentes σ e ε^{*} podem ser definidos.

A independência dos campos relacionados na equação (3.32), é a característica que torna possível e inédita as formulações do método sem malha local, pela escolha de um campo de deslocamentos cinematicamente admissível. É importante notar que nenhuma relação constitutiva foi adotada na dedução da equação (3.32). Portanto, pode-se tratar tanto de problemas da elasticidade quanto da plasticidade, desde que se garanta a linearidade geométrica.

Como estratégia de modelagem, considera-se que o campo local estaticamente admissível é um campo totalmente admissível. Assim, além de satisfazer as condições das equações (3.22) e (3.23), também satisfaz a condição de admissibilidade cinemática, ou seja

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \, \mathbf{u} \tag{3.33}$$

válida no domínio Ω , com condição de contorno

$$\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} \tag{3.34}$$

na fronteira cinemática Γ_u . Assume-se que o campo de deslocamentos u é contínuo e tem derivadas suficientemente pequenas para que seja válida a hipótese da linearidade geométrica do campo de deformações ε . Sendo assim, a equação (3.34) deve ser imposta no modelo numérico, para que se obtenha a solução única para o determinado problema.

Para uma discretização de um corpo, a forma fraca local do domínio ou domínio de quadratura Ω_Q , centralizado em um nó Q, pode ser definido como o subdomínio local daquele nó, podendo este ser circular ou retangular, como mostra a Figura 3.4.

3.3 - DESLOCAMENTO DE CORPO RÍGIDO (RBDMF)

A aplicação mais trivial do teorema do trabalho local é considerar um campo de deformações cinematicamente admissível resultante de um deslocamento de corpo rígido translacional

arbitrário dado por

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{1},\tag{3.35}$$

(3.36)

para $\mathbf{x} \in \Omega_Q \cup \Gamma_Q$, onde 1 é o vetor de deslocamento de corpo rígido unitário que, como demonstrado na Figura 3.5, convenientemente, resulta em deformações nulas



Figura 3.5 – Esquema representando o deslocamento $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$, da equação (3.35), um deslocamento unitário de corpo rígido do domínio local, do RBDMF, para um domínio local arbitrário associado ao nó Q.

Nesse caso, o teorema do trabalho local, dado pela equação (3.32), passa a ser escrito como

$$\mathbf{1}^{T} \left(\int_{\Gamma_{Q} - \Gamma_{Qt}} \mathbf{t} \, \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_{Qt}} \mathbf{\bar{t}} \, \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega_{Q}} \mathbf{b} \, \mathrm{d}\Omega \right) = \mathbf{0}$$
(3.37)

como 1 é um deslocamento totalmente arbitrário, obtém-se finalmente

$$\int_{\Gamma_Q - \Gamma_{Qt}} \mathbf{t} \, \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_{Qt}} \mathbf{\overline{t}} \, \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega_Q} \mathbf{b} \, \mathrm{d}\Omega = \mathbf{0}$$
(3.38)

Pode-se inferir da equação (3.38) que, estando um corpo em equilíbrio estático, as forças de superfície e de corpo em um subdomínio arbitrário equilibram-se, como demonstrado esquematicamente na Figura 3.6. Essa afirmação pode ser interpretada como um dos axiomas do princípio das tensões de Euler e Cauchy, um dos conceitos fundamentais da mecânica dos meios contínuos (Truesdell e Toupin, 1960). A equação (3.38) representa a formulação de deslocamento de corpo rígido do método sem malha local ou *Rigid-Body Displacement Mesh-free formulation* (RBDMF) que, na ausência de forças de corpo, não envolve integrais de domínio ou mesmo integrais singulares.



Figura 3.6 – Esquema representando o equilíbrio das forças de superfície e das forças de corpo, equação (3.38), de um domínio local associado ao nó Q, do RBDMF.

Embora deduzida por outro procedimento, a equação (3.38) foi apresentada inicialmente por Atluri e Shen (2002), onde foi denominada MLPG5, ganhando grande popularidade devido à sua eficiência computacional.

Como a equação (3.38) está em equilíbrio localmente, no domínio local Ω_Q , ela é independente das equações de equilíbrio dos outros domínios locais. Essa é uma característica essencial da formulação do método sem malha local, que permite o uso de domínios locais convenientemente definidos e simultaneamente modelados com diferentes formulações.

A discretização da equação (3.38) é feita introduzindo-se as equações do campo elástico, dada pelas equações (3.15) a (3.21). No final, temos um sistema linear de duas equações refentes ao nó $Q \in \Omega_Q$ em função das incógnitas nodais û dado por

$$\int_{\Gamma_Q - \Gamma_{Qt}} \mathbf{n} \, \mathbf{D} \, \mathbf{B} \, \hat{\mathbf{u}} \, \mathrm{d}\Gamma = -\int_{\Gamma_{Qt}} \overline{\mathbf{t}} \, \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega_Q} \mathbf{b} \, \mathrm{d}\Omega \tag{3.39}$$

Esse sistema linear (3.39) pode ser representado como

$$\mathbf{K}_Q \,\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}_Q,\tag{3.40}$$

onde \mathbf{K}_Q , denominada matriz de rigidez correspondente ao domínio gerado pelo nó Q, é uma matriz $2 \times 2n$, onde n é igual ao número de nós no domínio local, dada por

$$\mathbf{K}_{Q} = \int_{\Gamma_{Q} - \Gamma_{Qt}} \mathbf{n} \mathbf{D} \mathbf{B} \,\mathrm{d} \Gamma \tag{3.41}$$

e \mathbf{F}_Q é o vetor de forças associado ao domínio gerado pelo nó Q, dado por

$$\mathbf{F}_{Q} = -\int_{\Gamma_{Qt}} \mathbf{\bar{t}} \, \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega_{Q}} \mathbf{b} \, \mathrm{d}\Omega.$$
(3.42)

Assim, o problema tem um total de N nós Q, cada um associado ao seu respectivo domínio local Ω_Q . A equação (3.40) deve ser aplicada aos M nós no interior e no domínio estático gerando um sistema global $2M \times 2N$

$$\mathbf{K}\,\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}.\tag{3.43}$$

As equações restantes são obtidas para os (N - M) nós do contorno. O método de interpolação direta, introduzido por Liu e Yan (2000), é utilizado para a imposição das condições de contorno essenciais como

$$u_k^h(\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}_j) \hat{u}_{ik} = \overline{\mathbf{u}}_k, \qquad (3.44)$$

ou em forma de matriz como

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{\Phi}_k \, \hat{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{u}}_k,\tag{3.45}$$

com k = 1, 2, onde $\overline{\mathbf{u}}_k$ é a componente do deslocamento nodal prescrito. A equação (3.45) é diretamente adicionada ao sistema global de equações (3.43).

3.4 - CAMPO ELÁSTICO GENERALIZADO (GSMF)

Na ausência de forças de corpo, a formulação de corpo rígido traz apenas integrais de contorno, o que já representa uma importante redução no esforço computacional. A formulação do campo elástico generalizado segue essa mesma tendência de redução, eliminando todo o processo de integração numérica da montagem das matrizes do domínio local. Para tanto, é necessário abordar a descrição matemática dos campos elásticos sob uma nova perspectiva.

Na forma local do teorema do trabalho, equação (3.32), assumiu-se que o campo de deslocamentos cinematicamente admissíveis \mathbf{u}^* é uma função contínua, o que acarreta em um campo de deformações cinematicamente admissível ε^* contínuo, regular e integrável. No entanto, a condição de continuidade dos campos elásticos não é absolutamente obrigatória e pode ser violada, visto que é vantajoso representar ε^* em termos de funções generalizadas, no sentido da teoria das distribuições (Gelfand e Shilov, 1964).

Assim, o campo de deslocamentos é representado por uma função contínua segmentada definida em termos da função *Heaviside step function* gerando, consequentemente, uma função generalizada correspondente a um campo de deformações definido pela função delta de *Dirac*.

Com o intuito de simplificar as expressões matemáticas, quando se trabalha com funções *Heaviside* e delta de *Dirac* em duas dimensões, considera-se uma função distância escalar *d*, dada por

$$d = \| \mathbf{x} - \mathbf{x}_Q \| \quad \text{que } \acute{\mathbf{e}} \quad \begin{cases} d = 0 \quad \text{se } \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_Q \\ d > 0 \quad \text{se } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_Q, \end{cases}$$
(3.46)

que representa a função de valor absoluto da distância entre um ponto x e um ponto de referência \mathbf{x}_Q , no domínio local $\Omega_Q \cup \Gamma_Q$ pertencente a um nó Q. Assim, essa definição sempre assume que $d = d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_Q) \ge 0$ tem valor positivo, ou nulo toda vez que x e \mathbf{x}_Q são pontos coincidentes. É importante lembrar que, na equação (3.46), tanto o ponto x quanto o ponto de referência \mathbf{x}_Q não precisam ser necessariamente pontos nodais do domínio local.

Considerando a função escalar $d \supset d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_Q)$, a função *Heaviside* pode ser definida como

$$H(d) = \begin{cases} 1 & \text{if } d \le 0 \ (d = 0 \text{ for } \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_Q), \\ 0 & \text{if } d > 0 \text{ that is } \mathbf{x} \ne \mathbf{x}_Q, \end{cases}$$
(3.47)

onde assume-se a descontinuidade em x_Q . Consequentemente, define-se a função delta de *Dirac* com as seguintes propriedades

$$\delta(d) = H'(d) = \begin{cases} \infty & \text{if } d = 0 \text{ that is } \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_Q, \\ 0 & \text{if } d \neq 0 \text{ } (d > 0 \text{ for } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_Q) \end{cases} \text{ and } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(d) \, \mathrm{d}\Gamma = 1, \quad (3.48)$$

onde H'(d) representa a derivada de H(d) com respeito a d. Note que a derivada de H(d), com respeito a coordenada x_i , pode ser definida como

$$H(d)_{,i} = H'(d) \ d_{,i} = \delta(d) \ d_{,i} = \delta(d) \ n_i.$$
(3.49)

Como o resultado dessa equação não é afetado pelo valor da constante n_i , ela será convenientemente redefinida posteriormente. A função delta de *Kronecker* pode ser definida como

$$\Delta(d) = H(d) - H(-d) + 1 = \begin{cases} 1 & \text{if } d = 0 \text{ that is } \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_Q, \\ 0 & \text{if } d > 0 \text{ that is } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_Q, \end{cases}$$
(3.50)

que possui a derivada distribucional sempre nula, sendo esta

$$\Delta'(d) = \delta(d) - \delta(-d) = \delta(d) - \delta(d) = 0, \qquad (3.51)$$

como consequência da simetria da função delta de *Dirac*. Agora, considerando que d_l , d_j e d_k representam a função distancia d, definida na equação (3.46), para os correspondentes pontos de colocação \mathbf{x}_l , \mathbf{x}_j e \mathbf{x}_k . Assim, o campo de deslocamento cinematicamente admissível pode ser definido como uma combinação linear da função delta de *Kronecker* avaliada em um número arbitrário de pontos de colocação, convenientemente organizados no domínio local $\Omega_Q \cup \Gamma_Q$ do nó Q dado por

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) = \left[\frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \Delta(d_l) + \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \Delta(d_j) + \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \Delta(d_k)\right] \mathbf{e},$$
(3.52)

onde $\mathbf{e} = [1 \ 1]^T$ representa a métrica da direção ortogonal; n_i , n_t e n_{Ω} representam o número de pontos de colocação, respectivamente no contorno local $\Gamma_{Qi} = \Gamma_Q - \Gamma_{Qt} - \Gamma_{Qu}$ com comprimento L_i , no contorno local estático Γ_{Qt} com comprimento L_t e no domínio local Ω_Q com área S. Esse campo de deslocamentos definido $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$, é um deslocamento unitário de corpo rígido discreto definido nos pontos de colocação, esquematicamente representado na Figura 3.7, convenientemente resulta em um campo elástico generalizado nulo, dado por

$$\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{0},\tag{3.53}$$

como consequência da equação (3.51).





A forma local do teorema do trabalho, equação (3.32), pode ser escrita como

$$\int_{\Gamma_Q - \Gamma_{Qt}} \mathbf{t}^T \mathbf{u}^* \, \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_{Qt}} \bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{u}^* \, \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega_Q} \mathbf{b}^T \mathbf{u}^* \, \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega_Q} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^* \, \mathrm{d}\Omega$$
(3.54)

que, depois de levar em consideração os deslocamentos definidos e as componentes de deformação do campo cinematicamente admissível, respectivamente equações (3.52) e (3.53), leva a

$$\frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \int_{\Gamma_Q - \Gamma_{Qt}} \mathbf{t}^T \Delta(d_l) \, \mathbf{e} \, \mathrm{d}\Gamma + \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \int_{\Gamma_{Qt}} \mathbf{\bar{t}}^T \Delta(d_j) \, \mathbf{e} \, \mathrm{d}\Gamma + \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \int_{\Omega_Q} \mathbf{b}^T \Delta(d_k) \, \mathrm{d}\Omega = 0.$$
(3.55)

Agora, considerando as propriedades da função delta de *Kronecker*, definidas na equação (3.50), a equação (3.55) simplesmente resulta em

$$\mathbf{e}^{T}\left[\begin{array}{c} \frac{L_{i}}{n_{i}}\sum_{l=1}^{n_{i}}\mathbf{t}_{\mathbf{x}_{l}} + \frac{L_{t}}{n_{t}}\sum_{j=1}^{n_{t}}\overline{\mathbf{t}}_{\mathbf{x}_{j}} + \frac{S}{n_{\Omega}}\sum_{k=1}^{n_{\Omega}}\mathbf{b}_{\mathbf{x}_{k}}\right] = 0$$
(3.56)

e finalmente em

$$\frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \mathbf{t}_{\mathbf{x}_l} = -\frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \overline{\mathbf{t}}_{\mathbf{x}_j} - \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \mathbf{b}_{\mathbf{x}_k}.$$
(3.57)

A equação (3.57) demonstra o equilíbrio das forças de superfície e das forças de corpo, pontualmente definida nos pontos de colocação, como demonstra a Figura 3.8; que na



Figura 3.8 – Esquema representando o equilíbrio das forças de corpo e forças de superfície, da equaçao (3.57), pontualmente definidas nos pontos de colocação de um domínio local associado ao nó Q, da formulação do GSMF.

verdade é equivalente a versão pontual do princípio das tensões de Euler e Cauchy. Essa é a equação utilizada na formulação do campo elástico generalizado do método sem malha

local ou *Generalized-Strain Mesh-free formulation* (GSMF), que é livre de integração numérica. Como o teorema do trabalho é a forma fraca advinda dos resíduos ponderados, é facilmente perceptível que essa formulação nada mais é do que uma colocação na forma fraca. A colocação na forma fraca supera as dificuldades conhecidas da colocação na forma forte, como baixa precisão e instabilidade da solução, o que torna esta uma formulação confiável e robusta.

A equação (3.57), do campo elástico generalizado, pode ser desenvolvida a partir de outro campo de deslocamentos cinematicamente admissível, diretamente definido em termos da função *Heaviside* apresentada anteriormente. Considere que d_l , d_j e d_k representam a função distância d, definida na equação (3.46), para os correspondentes pontos de colocação \mathbf{x}_l , \mathbf{x}_j e \mathbf{x}_k . Assim, quando as equações (3.46) a (3.48) são consideradas, o campo de deslocamentos cinematicamente admissível pode ser convenientemente definido como

$$\mathbf{u}^{*}(\mathbf{x}) = \left[\frac{L_{i}}{n_{i}} \sum_{l=1}^{n_{i}} H(d_{l}) + \frac{L_{t}}{n_{t}} \sum_{j=1}^{n_{t}} H(d_{j}) + \frac{S}{n_{\Omega}} \sum_{k=1}^{n_{\Omega}} H(d_{k})\right] \mathbf{e},$$
(3.58)

onde $\mathbf{e} = [1 \ 1]^T$ representa a métrica da direção ortogonal; n_i , n_t e n_{Ω} representam o número de pontos de colocação, respectivamente no contorno local $\Gamma_{Qi} = \Gamma_Q - \Gamma_{Qt} - \Gamma_{Qu}$ com comprimento L_i , no contorno local estático Γ_{Qt} com comprimento L_t e no domínio local Ω_Q com área S. Esse campo de deslocamentos definido $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$, é um deslocamento unitário de corpo rígido discreto definido nos pontos de colocação, esquematicamente representado na Figura 3.7. Sendo assim, quando a equação (3.49) é considerada, o campo de deformações $\varepsilon^*(\mathbf{x})$ pode ser dado por

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{*}(\mathbf{x}) = \mathbf{L} \mathbf{u}^{*}(\mathbf{x}) = \left[\frac{L_{i}}{n_{i}} \sum_{l=1}^{n_{i}} \mathbf{L} H(d_{l}) + \frac{L_{t}}{n_{t}} \sum_{j=1}^{n_{t}} \mathbf{L} H(d_{j}) + \frac{S}{n_{\Omega}} \sum_{k=1}^{n_{\Omega}} \mathbf{L} H(d_{k}) \right] \mathbf{e} = \left[\frac{L_{i}}{n_{i}} \sum_{l=1}^{n_{i}} \delta(d_{l}) \mathbf{n}^{T} + \frac{L_{t}}{n_{t}} \sum_{j=1}^{n_{t}} \delta(d_{j}) \mathbf{n}^{T} + \frac{S}{n_{\Omega}} \sum_{k=1}^{n_{\Omega}} \delta(d_{k}) \mathbf{n}^{T} \right] \mathbf{e},$$
(3.59)

onde n é dado pela equação (3.21), com as componente arbitrárias n_i que serão definidas posteriormente.

Tendo definido os deslocamentos e as componentes da deformação do campo cinematicamente admissível, respectivamente as equações (3.58) e (3.59), o teorema local do trabalho, equação (3.32), pode ser escrito como

$$\int_{\Gamma_Q - \Gamma_{Qt}} \mathbf{t}^T \mathbf{u}^* \,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_{Qt}} \overline{\mathbf{t}}^T \mathbf{u}^* \,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega_Q} \mathbf{b}^T \mathbf{u}^* \,\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega_Q} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^* \,\mathrm{d}\Omega$$
(3.60)

resultando em

$$\frac{L_{i}}{n_{i}} \sum_{l=1}^{n_{i}} \int_{\Gamma_{Q} - \Gamma_{Qt}} \mathbf{t}^{T} H(d_{l}) \mathbf{e} \, \mathrm{d}\Gamma + \frac{L_{t}}{n_{t}} \sum_{j=1}^{n_{t}} \int_{\Gamma_{Qt}} \mathbf{\bar{t}}^{T} H(d_{j}) \mathbf{e} \, \mathrm{d}\Gamma + \frac{S}{n_{\Omega}} \sum_{k=1}^{n_{\Omega}} \int_{\Omega_{Q}} \mathbf{b}^{T} H(d_{k}) \mathbf{e} \, \mathrm{d}\Omega =
= \frac{S}{n_{\Omega}} \sum_{k=1}^{n_{\Omega}} \int_{\Omega_{Q}} \boldsymbol{\sigma}^{T} \delta(d_{k}) \, \mathbf{n}^{T} \mathbf{e} \, \mathrm{d}\Omega.$$
(3.61)

Considerando as propriedades da função *Heaviside*, definidas na equação (3.47), a equação (3.61) resulta em

$$\mathbf{e}^{T}\left[\frac{L_{i}}{n_{i}}\sum_{l=1}^{n_{i}}\mathbf{t}_{\mathbf{x}_{l}}+\frac{L_{t}}{n_{t}}\sum_{j=1}^{n_{t}}\bar{\mathbf{t}}_{\mathbf{x}_{j}}+\frac{S}{n_{\Omega}}\sum_{k=1}^{n_{\Omega}}\mathbf{b}_{\mathbf{x}_{k}}-\frac{S}{n_{\Omega}}\sum_{k=1}^{n_{\Omega}}\mathbf{n}\int_{\Omega_{Q}}\delta(d_{k})\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega\right]=\mathbf{0} \quad (3.62)$$

que, após considerar as propriedades seletivas da função delta de Dirac, resulta em

$$\frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \mathbf{t}_{\mathbf{x}_l} - \frac{S}{n_\Omega} \mathbf{n} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}_k} = -\frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \bar{\mathbf{t}}_{\mathbf{x}_j} - \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \mathbf{b}_{\mathbf{x}_k}.$$
 (3.63)

Finalmente, quando a variável n, dada pela equação (3.21), é arbitrariamente definida com componentes nulas $n_i = 0$, como apresentado na equação (3.49), a equação (3.63) resulta em

$$\frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \mathbf{t}_{\mathbf{x}_l} = -\frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \overline{\mathbf{t}}_{\mathbf{x}_j} - \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \mathbf{b}_{\mathbf{x}_k}$$
(3.64)

que é absolutamente idêntica a equação (3.57). Discretiza-se a equação (3.57), ou a equação (3.64), introduzindo-se as equações do campo elástico, dada pelas equações (3.15) a (3.21), gerando um sistema linear de duas equações referentes ao nó $Q \in \Omega_Q$ em função das incógnitas nodais $\hat{\mathbf{u}}$

$$\frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \mathbf{n}_{\mathbf{x}_l} \mathbf{D} \mathbf{B}_{\mathbf{x}_l} \hat{\mathbf{u}} = -\frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \overline{\mathbf{t}}_{\mathbf{x}_j} - \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \mathbf{b}_{\mathbf{x}_k}$$
(3.65)

que pode ser reescrito como

$$\mathbf{K}_Q \,\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}_Q,\tag{3.66}$$

onde \mathbf{K}_Q é a matriz de rigidez nodal do domínio local Ω_Q , uma matriz $2 \times 2n$ dada por

$$\mathbf{K}_Q = \frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \mathbf{n}_{\mathbf{x}_l} \mathbf{D} \mathbf{B}_{\mathbf{x}_l}$$
(3.67)

e \mathbf{F}_Q , é o respectivo vetor de forças dado por

$$\mathbf{F}_Q = -\frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \overline{\mathbf{t}}_{\mathbf{x}_j} - \frac{S}{n_\Omega} \sum_{k=1}^{n_\Omega} \mathbf{b}_{\mathbf{x}_k}$$
(3.68)

A equação (3.66) é aplicada aos M domínios internos, gerando um sistema global $2M \times 2N$

$$\mathbf{K}\,\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}.\tag{3.69}$$

Finalmente, para um nó no contorno cinemático, uma interpolação direta pode ser utilizada para impor as condições de contorno como

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{\Phi}_k \,\hat{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{u}}_k,\tag{3.70}$$

com k = 1, 2, onde $\overline{\mathbf{u}}_k$ é a componente do deslocamento nodal prescrito. A equação (3.70) é diretamente adicionada no sistema global, equação (3.69).

3.5 - COMPORTAMENTO DA FORMA FRACA LOCAL

Os métodos sem malha local apresentados na presente pesquisa podem ser utilizados para a solução de problemas no âmbito da elasticidade geral. Apesar disso, a forma fraca local dessas formulações, respectivamente equações (3.38) e (3.57), não descreve uma equação variacional que surge como uma condição necessária para a minimização de um funcional, como visto na teoria geral do cálculo variacional. Consequentemente, uma análise do ponto de vista matemático se torna bem complexa e trabalhosa, porque as propriedades inerentes como definição positiva e simetria da matriz de rigidez não são válidas e, sendo assim, não existe minimização da energia embutida nas formulações. Dessa forma, a análise matemática das formulações do método sem malha local não consegue acompanhar exatamente a teoria dos elementos finitos.

A dependência continua da solução baseada em dados por meio de testes é geralmente a estratégia adotada nas análises e assim, as formas fracas locais (3.38) e (3.57) são vistas como um sistema de equações, respectivamente (3.39) e (3.65). Em geral, esses testes trabalham com as combinações lineares das funções teste para obter um número de equações para os coeficientes dos MQM. Em particular, os testes realizados com a forma fraca local analisam cada equação separadamente e consideram diferentes soluções possíveis. A análise matemática desses testes é complexa porque, devido ao uso de uma quantidade finita de equações teste, é necessário garantir que a solução aproximada esteja próxima da solução real em todo o domínio do problema. A teoria matemática necessária para superar esse efeito da discretização é um grande desafio e está muito além do escopo

da presente pesquisa (Schaback, 2010).

Sendo assim, testes padrões populares e condições consistentes devem ser usados para analisar essas formulações, assim como são realizados no MEF. O *patch test* se tornou uma ferramenta amplamente utilizada na verificação e validação dos métodos sem malha. A ideia é que as formulações locais sejam capazes de resolver problemas simples com exatidão. O teste aplica forças de contorno a uma região nodal local e verifica se as respostas dessa região condizem com o estado constante de tensão. Uma vez que as formulações locais do método sem malha passem no teste com consistência e estabilidade numérica, a convergência é garantida a medida que a discretização dos nós se torna mais refinada.

É importante analisar o comportamento da forma fraca local (3.38) e (3.57), respectivamente do RBDMF e GSMF, para um estado de tensão em particular. Considere, apenas por questão de simplicidade, o caso de um domínio local retangular Ω_Q , com dimensões $L \times L$, sob um estado de tensão constante e uniforme que resulta em uma carga constante t ao longo de cada lado do contorno Γ_Q do domínio local, como apresentado na Figura 3.9. Ao longo de cada



Figura 3.9 – Domínio local interno Ω_Q , com dimensões $L \times L$, sob carregamento constante t, ao longo de cada lado do contorno Γ_Q ; a equação da forma fraca local da integração de contorno do RBDMF é idêntica as equações da forma fraca local do contorno de colocação do GSMF.

lado L, do contorno do domínio local, a forma fraca (3.38) é calculada como uma quadratura de Gauss com um número qualquer de pontos de Gauss (neste caso um) levando a

$$\int_{\Gamma_Q} \mathbf{t} \, \mathrm{d}\Gamma = L \mathbf{t} = \mathbf{0}. \tag{3.71}$$

Já a forma fraca local (3.57), é calculada como

$$\frac{L}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{t}_{\mathbf{x}_{l}}=L\mathbf{t}=\mathbf{0},$$
(3.72)

para um número *n* de pontos de colocação definidos no contorno do domínio local. Notase que esse processo pode ser visto como uma forma de quadratura de Gauss, com pesos unitários e pontos de Gauss arbitrários, o que o torna similar a equação (3.71). Como as equações (3.71) e (3.72) são idênticas, elas serão apenas similares para um estado de tensão arbitrário não constante, dependendo do número e da posição dos pontos de colocação no contorno. Para uma mesma precisão, a colocação no contorno da forma fraca local do GSMF é, em geral, bem mais eficiente que a integração de contorno da forma fraca local do RBDMF, como pode ser observado nos resultados numéricos da seção 5.

4 - METODOLOGIA

4.1 - ASPECTOS GERAIS

As formulações do método sem malha local presentes neste trabalho foram implementadas computacionalmente por meio de rotinas codificadas em linguagem MATLAB, escolhida por sua capacidade computacional simbólica e saída gráfica. Um resumo dos principais aspectos do processo de modelagem utilizado está descrito na seção 4.2.

Para fazer a validação das novas formulações, um *patch test* padrão e dois exemplos clássicos da teoria de elasticidade são analisados, sendo um caso no estado plano de tensões e outro no estado plano de deformações, cujas soluções analíticas servem de comparação para as soluções numéricas.

O erro relativo foi calculado e utilizado para avaliar a precisão e a convergência do método, conforme o descrito na seção 4.3. O tempo de processamento também foi considerado para determinar a eficiência numérica do mesmo, utilizando funções embutidas no programa.

4.2 - PROCESSO DE MODELAGEM COMPUTACIONAL

A implementação segue os mesmos procedimentos e estrutura básica de um programa de métodos sem malha utilizando o MLPG, como pode ser visto em Atluri e Shen (2002), trazendo apenas modificações em algumas dessas etapas, pertinentes a cada uma das formulações propostas. A nova estrutura básica comum a todas as formulações é dada por:

- 1. Leitura dos dados introduzidos no programa e definição do tamanho das matrizes a serem utilizadas;
- Discretização do domínio com nós espaçados automaticamente pelo programa, de forma regular ou não;
- 3. Definição dos domínios locais de cada um dos nós da distribuição;
- 4. Determinação dos nós dentro do domínio de influência que participam da interpolação para ponto de colocação ou quadratura de Gauss;
- 5. Cálculo das funções peso, determinar as matrizes A e B e, por fim, determinar as funções de forma dos MQM;

- 6. Cálculo da matriz de rigidez local e o vetor de forças para cada um dos domínios locais;
- Organização da matriz de rigidez e o vetor de forças de cada um dos domínios locais em uma matriz global e um vetor de forças global;
- 8. Aplicação das condições de contorno no sistema de matrizes e vetores;
- 9. Resolução do sistema de equações para os parâmetros nodais;
- 10. Com os parâmetros nodais, cálculo das variáveis nodais;
- 11. Cálculo das variáveis secundárias;
- 12. Geração de uma malha para o cálculo do erro relativo;
- 13. Estimação do erro relativo de deslocamento e de energia;
- 14. Mostrar os resultados desejados ou plotagem dos resultados.

Foram considerados domínios locais da forma fraca Ω_q retangulares e circulares nos exemplos, onde pontos de Gauss/colocação foram aplicados em cada um dos lados do retângulo e para cada quadrante do círculo. No primeiro exemplo, para a integração da forma fraca do RBDMF, foram aplicados pontos de Gauss nos contornos do domínio local quadrado, conforme exemplificado na Figura 4.1a; enquanto que para o GSMF foram aplicados pontos de colocação igualmente espaçados, conforme exemplificado na Figura 4.1b e 4.1c.



Figura 4.1 – Distribuição de pontos de Gauss e pontos de colocação, no contorno de cada domínio local, para a integração da forma fraca local, respectivamente do RBDMF e do GSMF.

4.3 - ERRO RELATIVO

O cálculo dos erros relativos será feito com base nas normas de energia utilizadas por Atluri e Zhu (2000). Assim, para o campo de deslocamentos tem-se que

$$\|\mathbf{u}\| = \left(\int_{\Omega} \mathbf{u}^T \, \mathbf{u} \, \mathrm{d}\Omega\right)^{1/2} \tag{4.1}$$

e para o campo de deformações

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\| = \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \, \mathbf{D} \, \boldsymbol{\varepsilon} \, \mathrm{d}\Omega\right)^{1/2} \tag{4.2}$$

O erro relativo para $\|\mathbf{u}\|$ é definido como

$$r_u = \frac{\left\| \mathbf{u}^{num} - \mathbf{u}^{analtico} \right\|}{\left\| \mathbf{u}^{analtico} \right\|}$$
(4.3)

e, para $\|\varepsilon\|$

$$r_{\varepsilon} = \frac{\left\|\varepsilon^{num} - \varepsilon^{analtico}\right\|}{\left\|\varepsilon^{analtico}\right\|}$$
(4.4)

As soluções analíticas foram integradas numericamente utilizando a quadratura de Gauss com 15 pontos. Vale ressaltar que *background cells* foram utilizados apenas para o cálculo do erro relativo, já que o presente método é verdadeiramente sem malha.

A energia de deformação e o campo de deslocamentos serão utilizados para estimar o erro total das distribuições nodais.

5 - RESULTADOS E DISCUSSÕES

A estratégia de modelagem do método sem malha local, apresentada na Seção 4.1, foi usada para obter os resultados numéricos e calcular o erro relativo.

Para tal, dois exemplos clássicos foram escolhidos: uma viga em balanço com uma carga concentrada na ponta, sem forças de corpo, para o caso de estado plano de tensão; e uma placa infinita com um buraco circular no centro, sob tensão unidirecional, para o caso de estado plano de deformação. Um exemplo adicional, uma placa retangular com carga uniforme na face do topo, foi escolhido para testar a configuração nodal dos métodos. Como dito anteriormente, as soluções analíticas encontradas na literatura servem de base de comparação para as soluções numéricas encontradas com as formulações.

Para um nó genérico *i*, o tamanho do suporte local Ω_s e o domínio da forma fraca local de integração/colocação Ω_q são respectivamente:

$$r_{\Omega_s} = \alpha_s \, c_i,\tag{5.1}$$

e

$$r_{\Omega_q} = \alpha_q \, c_i, \tag{5.2}$$

sendo que c_i representa a distância do nó *i* até o nó mais próximo nos arredores, onde para as aplicações apresentadas nessa pesquisa, $\alpha_s = 3.0 \sim 4.5$ e $\alpha_q = 0.5 \sim 0.6$ foram utilizados.

O tamanho do suporte local é uma característica muito importante nos métodos sem malha, que requer um refinamento apropriado. Um suporte local muito pequeno faz com que o algoritmo de aproximação se torne singular, devido à falta de nós para realizar a aproximação $(n \le m)$. Por outro lado, um suporte local muito grande resulta em uma perda da localidade da interpolação, que também prejudica a aproximação. O balanceamento correto entre esses fatores é essencial para uma boa solução.

Por meio de várias simulações, foi encontrado que para uma distribuição nodal acima de 100 nós, o melhor é utilizar $\alpha_s = 3.0$, para as demais distribuições nodais testadas, o $\alpha_s = 4.5$ obteve o melhor resultado.

5.1 - PATCH TEST

O primeiro exemplo considerou um *patch test* padrão, uma placa retangular com carga uniformemente distribuída no contorno do topo e com apoios no contorno de baixo, como representado na Figura 5.1.



Figura 5.1 – O *patch test*: uma placa retangular com carga uniformemente distribuída discretizada com duas configurações nodais.

A placa está em estado plano de tensão com módulo de elasticidade longitudinal E = 1e coeficiente de poisson de $\nu = 0.25$. Essa placa é discretizada em 9 nós, organizados de duas formas; uma delas com distribuição nodal regular e a outro irregular, como mostra a Figura 5.1. Domínios locais retangulares foram utilizados em cada um dos nós.

Em cada um dos lados do contorno do domínio local de integração Ω_q , a forma fraca local da Formulação de Deslocamento de Corpo Rígido (RBDMF) foi integrada utilizando 8 pontos de Gauss e a Formulação do Campo Elástico Generalizado (GSMF) foi aproximada utilizando 8 pontos de colocação, igualmente espaçados.

Os resultados obtidos com a análise, representados na Figura 5.2, são deslocamentos lineares nos contornos laterais e deslocamentos constantes no contorno de cima, sem cargas de cisalhamento presentes, como esperado. As duas formulações apresentam um comportamento estável e passam no teste.

5.2 - VIGA EM BALANÇO

O segundo exemplo é uma viga em balanço com uma carga parabólica na ponta, sem forças de corpo atuando, ilustrada na Figura 5.3,



Figura 5.2 – Resultados do *patch test*: deslocamentos lineares nos contornos laterais e deslocamentos constantes no contorno do topo; tensão normal constante, na direção do carregamento e ausência de tensão de cisalhamento.



Figura 5.3 – Estado Plano de Tensão - Viga de Timoshenko engastada de Largura Unitária.

com carga parabólica dada por

$$\bar{t}_2(x_2) = -\frac{P}{2I} \left(\frac{D^2}{4} - x_2^2\right).$$
(5.3)

A solução analítica pode ser obtida utilizando-se polinômios de Airy de quarta ordem e aplicando as respectivas condições de contorno, como visto em Mase (1999). Com isso, a solução analítica do campo de deslocamentos é dada por:

$$\begin{bmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{Px_2}{6EI} \left[(6L - 3x_1)x_1 + (2 + \nu) \left(x_2^2 - \frac{D^2}{4} \right) \right] \\ \frac{P}{6EI} \left[3\nu x_2^2(L - x_1) + (4 + 5\nu)\frac{D^2x_1}{4} + (3L - x_1)x_1^2 \right] \end{bmatrix}$$
(5.4)

onde I é momento de inércia da seção transversal, ν é o coeficiente de Poisson, E é módulo de elasticidade longitudinal e G é módulo de elasticidade transversal. Sendo assim, a solução analítica para o campo de tensões é dado por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{P(L-x_1)x_2}{I} \\ 0 \\ -\frac{P}{2I} \left(\frac{D^2}{4} - x_2^2\right) \end{bmatrix}$$
(5.5)

onde σ_{11} é a tensão na direção x, σ_{22} é a tensão na direção y e σ_{12} é a tensão transversal.

Para a aplicação desse exemplo foi considerada uma viga com comprimento de L = 48 e altura de d = 6, com uma carga aplicada na ponta de P = 1000, módulo de elasticidade longitudinal $E = 3.10^7$ e coeficiente de Poisson de $\nu = 0.3$.

Inicialmente, uma distribuição regular dos nós ao longo do domínio foi escolhida, como mostra a Figura 5.4, com um total de $33 \times 5 = 165$ nós.



Figura 5.4 – Distribuição nodal na viga engastada com $33 \times 5 = 165$ nós.

Foram utilizados domínios locais retangulares em ambas as formulações, na qual, para a formulação do Campo Elástico Generalizado do método sem malha local (GSMF), 1 ponto de colocação centralizado foi utilizado, e na formulação de Corpo Rígido do método sem malha local (RBDMF), 10 pontos de Gauss foram utilizados, em cada contorno do domínio local. Na aproximação pelos MQM foram consideradas bases polinomiais de primeira ordem.

5.2.1 - Tensões e deslocamentos

Os deslocamentos obtidos com as formulações apresentadas, representadas na Figura 5.5, mostraram uma boa concordância com os resultados analíticos.



Figura 5.5 – Deslocamento vertical e horizontal normalizados em uma viga engastada com uma discretização de $33 \times 5 = 165$ nós.

Os erros relativos $r_u = 6.33 \times 10^{-4}$ e $r_{\epsilon} = 7.51 \times 10^{-4}$ foram obtidos com o GSMF a partir dessa análise. As tensões, calculadas no centro da viga, em $x_1 = L/2$ e $x_2 \in [-D/2, D/2]$, também apresentaram bons resultados quando comparadas com as respostas analíticas, como mostra a Figura 5.6.



Figura 5.6 – Distribuição de tensões de uma viga engastada em $x_1 = L/2$ e $x_2 \in [-D/2, D/2]$ com uma discretização de $33 \times 5 = 165$ nós.

5.2.2 - Desempenho da colocação na forma fraca

O desempenho da colocação na forma fraca do GSMF é uma das mais importantes características dessa nova formulação. Como a presente pesquisa apresenta resultados para a colocação no contorno do domínio local, como na equação (3.57), faz-se necessário verificar o efeito que a posição desses pontos de colocação tem na performance do GSMF. A Figura 5.7 mostra a evolução do erro relativo r_{ϵ} , em função do número de pontos de



Figura 5.7 – Comportamento do erro relativo r_{ϵ} do GSMF em função do número de pontos de colocação, igualmente espaçados e espaçados na mesma posição que os pontos de Gauss. O RBDMF aproximado com 10 pontos de Gauss foi utilizado para comparação.

colocação, para uma discretização de $33 \times 5 = 165$. Como os pontos de colocação do GSMF podem ser posicionados arbitrariamente no contorno do domínio local, duas configurações foram consideradas para serem comparadas: uma delas utilizando os pontos de colocação dispostos na mesma posição que os pontos de Gauss; e outra com os pontos de colocação igualmente espaçados ao longo do contorno local. É possível observar que, o erro relativo do GSMF sempre converge para o erro do RBDMF, não importando a posição em que o ponto de colocação é posicionado. Embora o GSMF com pontos de colocação igualmente, esse resultado significa que a aproximação do RBDMF sempre resulta em modelos mais rígidos do que a aproximação do GSMF. O valor mínimo para o erro é sempre obtido com apenas um ponto de colocação igualmente espaçado possui sempre resultados bem melhores que os demais métodos que utilizam integração.

Com o objetivo de verificar a influência da discretização na precisão do GSMF, com relação ao número de pontos de colocação igualmente espaçados ao longo do domínio local, outro conjunto de testes foi realizado. Quatro distribuições nodais regulares adicionais com $13 \times$

 $4 = 52, 65 \times 9 = 585, 97 \times 13 = 1261$ e $129 \times 17 = 2193$ nós foram consideradas. A norma do erro relativo para essas cinco distribuições nodais são mostrados na Figura 5.8 em função



Figura 5.8 – Erro relativo r_{ϵ} do GSMF para uma viga engastada discretizada com 52, 165, 585, 1261 e 2193 nós, em função do número de pontos de colocação, igualmente espaçados ao longo do contorno dos domínios locais.

do número de pontos de colocação, igualmente espaçados ao longo de cada lado do domínio local. O erro relativo reduz a medida que se aumenta o número total de nós, necessitando apenas de um ponto de colocação ao longo de cada contorno para obter o resultado mais preciso, como esperado. Esse é um resultado muito importante, que evidencia que o GSMF tem potencial para se tornar um método bem eficiente.

5.2.3 - Precisão e convergência

Outro conjunto de testes foram realizados para determinar a precisão e a convergência. Três distribuições regulares com 585, 1261 e 2193 nós foram consideradas, onde em cada lado do domínio local, 1 ponto de colocação foi utilizado para o GSMF e 10 pontos de Gauss foram utilizados para o RBDMF, buscando obter o resultado mais preciso com ambas as



formulações. Figura 5.9a apresenta os resultados obtidos quanto à precisão, enquanto

Figura 5.9 – Precisão e convergência do RBDMF e GSMF, para uma viga engastada discretizada com 585, 1261 e 2193 nós. c_i é a distância de um nó genérico *i* até o nó nos arredores mais próximo, em cada lado do domínio local.

Figura 5.9b apresenta os fatores de convergência, obtidos por regressão linear. Os resultados claramente demonstram que uma convergência estável é obtida com as formulações presentes, onde o GSMF com apenas 1 ponto de colocação é sempre bem mais preciso que o RBDMF usando 10 pontos de Gauss. O GSMF apresenta uma excelente performance.

5.2.4 - Eficiência computacional

A colocação na forma fraca do GSMF representa uma grande redução no esforço computacional, ainda mais quando comparada com outros métodos. Além das claras diferenças na formulação e implementação do método, é importante demonstrar os efeitos dessa redução, mensurando o tempo computacional necessário para a resolução de problemas.

Sendo assim, o esforço computacional das formulações foi mensurado utilizando as mesmas três distribuições nodais regulares, com 165, 585 e 2193 nós. Apenas os maiores custos computacionais foram considerados: o custo de gerar a matriz de rigidez e resolver as equações algébricas. Todas as rotinas foram executadas em MATLAB 2015a com um computador Intel Core I7-4700MQ com CPU de 2.4GHz e 16 GB de memória RAM.

Dois métodos foram escolhidos para serem comparados com a presente formulação, o Element-free Galerkin (EFG) e o Meshless Local Petrov-Galerkin Finite Volume Method (MLPG FVM), vistos respectivamente em Belytschko et al. (1994) e Atluri et al. (2004). Buscando comparar esses métodos sem comprometer a acurácia, 10 pontos de Gauss foram

	Tempo de processamento (s)			
Nós	EFG	MLPG FVM	RBDMF	GSMF
165	9.022037	4.190166	6.07957	0.870227
585	60.768148	16.064572	36.655719	4.472156
2193	338.281778	75.154307	169.871002	20.771496

Tabela 5.1 – Esforço computacional

utilizados no RBDMF, EFG e no MLPG FVM, enquanto 1 ponto de colocação foi utilizado no GSMF. Os resultados, apresentados na Tabela 5.1, claramente mostram que o GSMF têm um esforço computacional muito menor que os demais métodos, cerca de 28% mais rápido que o segundo melhor resultado, do MLPG FVM. Esse resultado comprova que o GSMF é computacionalmente bem mais eficiente.

Para finalizar o estudo do esforço computacional do GSMF, é necessário demonstrar que os baixos valores no esforço computacional não influenciam na precisão dos resultados. Isso pode ser feito comparando os resultados obtidos com o GSMF e o MLPG FVM, com a solução analítica.

O MLPG FVM foi escolhido para ser comparado devido a sua eficiência computacional e excelente fator de convergência, até mesmo superando o método dos elementos finitos para alguns problemas (Atluri et al., 2004). A Figura 5.10 mostra os resultados comparativos entre os dois métodos, usando os mesmos parâmetros e a mesma distribuição nodal de 165 nós. Ambos os métodos apresentam uma alta precisão e boa concordância com os resultados analíticos, embora o GSMF seja ligeiramente mais preciso sob as mesmas circunstâncias. O GSMF provou ser superior não apenas quanto ao esforço computacional, mas também quanto à precisão dos resultados.

5.2.5 - Travamento Volumétrico

Fazer um estudo sobre o comportamento do travamento (*locking*) volumétrico nas novas formulações do método sem malha local é muito importante, especialmente para o GSMF que é uma formulação livre de integração numérica. Um teste bem-sucedido utilizando coeficientes de Poisson próximos do limite incompressível é uma ótima forma de demonstrar essa característica.

O teste foi realizado considerando um material elástico em estado plano de tensão, utilizando $\nu = 0.3$, $\nu = 0.499$ e $\nu = 0.499999$, buscando verificar uma possível rigidez anormal no


Figura 5.10 – Comparação do deslocamento vertical normalizado entre o GSMF e o MLPG FVM, para $x_1 = L/2$. O esforço computacional em segundos foi destacado na legenda.

modelo. Para cada caso do coeficiente de Poisson foram consideradas três distribuições nodais, com $65 \times 9 = 585$, $97 \times 13 = 1261$ e $129 \times 17 = 2193$. A Figura 5.11 mostra que o típico fator de convergência, obtido utilizando $\nu = 0.3$, não se degrada a medida que o coeficiente de Poisson se aproxima do limite incompressível de $\nu = 0.5$. Sendo assim, é possível observar que ambas as formulações não apresentam travamento (*locking*) volumétrico, já que nenhuma delas apresentou uma rigidez espúria.

5.3 - PLACA COM FURO CIRCULAR CENTRALIZADO

Considere uma placa infinita com um buraco circular no centro sob tensão unitária unidirecional ao longo da direção x_1 em estado plano de deformação, como mostra a Figura 5.12.



Figura 5.11 – Fatores de convergência, com $\nu = 0.3$, $\nu = 0.499$ e $\nu = 0.499999$, para uma viga engastada com 585, 1261 e 2193 nós. Nenhum sinal de *locking* volumétrico.



Figura 5.12 – Estado Plano de Deformação - Placa infinita com furo circular centralizado.

Devido à simetria do problema nos eixos horizontal e vertical, apenas um quadrante da placa será considerado na análise. O quadrante modelado tem dimensões $b \times b$ e o centro do círculo tem um raio de a = 1, onde b = 5a.

A solução analítica para o deslocamento, em coordenadas polares, centralizadas no centro do buraco, é dada por

$$\begin{bmatrix} u_1(r,\theta)\\ u_2(r,\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\cos\theta}{2r^3E} \left[4a^4 \cos^2\theta \left(1+\nu\right) \left(1-r^2\right) - 3a^4 (1+\nu) + (ar)^2 (1-3\nu) - 2r^4 \right] \\ -\frac{\sin\theta}{2r^3E} \left[4a^4 \cos^2\theta \left(1+\nu\right) \left(1-r^2\right) - a^4 (1+\nu) + (ar)^2 (\nu-3) + 2r^4 \nu \right] \end{bmatrix}$$
(5.6)

A solução analítica para a distribuição de tensões, também em coordenadas polares, é dada por

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}(r,\theta) \\ \sigma_{22}(r,\theta) \\ \sigma_{12}(r,\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{3}{2}\cos 2\theta + \cos 4\theta\right) + \frac{3}{2}\frac{a^4}{r^4}\cos 4\theta \\ -\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2}\cos 2\theta - \cos 4\theta\right) - \frac{3}{2}\frac{a^4}{r^4}\cos 4\theta \\ -\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2}\sin 2\theta + \sin 4\theta\right) + \frac{3}{2}\frac{a^4}{r^4}\sin 4\theta \end{bmatrix}$$
(5.7)

A face de baixo e a lateral esquerda da placa são restringidas respectivamente, na direção x_2 e na direção x_1 . Já a face de cima e a lateral direita são carregadas com as tensões da solução exata (5.7), como $t_j = \sigma_{ij}n_i$, na qual n_i representa as componentes do vetor unitário nas bordas da placa.

Para a aplicação desse exemplo foi considerada uma placa com a = 1 e lados de b = 5, com módulo de elasticidade longitudinal $E = 1.10^5$ e coeficiente de poisson de $\nu = 0.25$.

Para a solução deste problema a placa foi discretizada em 9 nós na direção tangencial e 15 nós na direção radial, com um total de 135 nós, distribuídos seguindo um padrão como mostra a Figura 5.13.



Figura 5.13 – Discretização da placa com $9 \times 15 = 135$ nós.

Foram utilizados domínios locais circulares, onde 1 ponto de colocação foi aplicado em cada quadrante ao longo da circunferência do domínio. Na aproximação pelos MQM foram consideradas bases polinomiais de segunda ordem, apenas para serem comparadas com o primeiro exemplo.

5.3.1 - Tensões e deslocamentos

Os deslocamentos encontrados são mostrados na Figura 5.14, onde pode-se destacar a boa concordância com a solução analítica, com um erro relativo de $r_u = 9.2 \times 10^{-3}$.



Figura 5.14 – Deslocamento nos contornos da placa com um buraco circular; fator de escala de 1.7×10^4 .

As tensões encontradas nos nós também mostraram uma boa concordância com os resultados analíticos, como mostra a Figura 5.15, com um erro relativo de $r_{\epsilon} = 4.1 \times 10^{-3}$. O GSMF demonstra possuir uma alta precisão, até mesmo com uma discretização simples com 135 nós.



Figura 5.15 – Distribuição de tensões em uma placa com um buraco circular $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

6 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

6.1 - CONCLUSÕES

Formulações do método sem malha local, aplicadas à solução de problemas bidimensionais no âmbito da elasticidade linear, foram apresentadas na presente pesquisa. Essas formulações são baseadas no método dos resíduos ponderados e resultam na forma fraca local, também conhecida como o teorema do trabalho. Em uma região local arbitrária, o teorema do trabalho estabelece uma relação de energia entre um campo de tensões estaticamente admissível e um campo de deformações cinematicamente admissível. A independência desses dois campos é uma característica essencial que permite a geração de duas novas formulações dos métodos sem malha, com o objetivo de reduzir o esforço computacional.

Na primeira formulação, a de deslocamento de corpo rígido do método sem malha local (RBDMF), o campo de deformações cinematicamente admissível é escolhido como um campo correspondente a um deslocamento de corpo rígido arbitrário. Ao fazer essa escolha os termos de domínio se cancelam, resultando apenas em termos de contorno na forma fraca local (ausência de forças de corpo), levando a uma importante redução no esforço computacional.

Enquanto isso, na segunda formulação, do campo elástico generalizado do método sem malha local (GSMF), o campo de deformações cinematicamente admissível é escolhido como uma função discreta generalizada, gerado por um campo de deslocamentos contínuo e pontual, que resulta em uma forma fraca local livre de integração numérica, o que maximiza a redução no esforço computacional.

A aproximação pelo método dos mínimos quadrados móveis (MQM) do campo elástico é utilizada para implementar as duas formulações locais, com domínios de influência retangulares e circulares. Como as regiões locais são independentes entre si, a estratégia de modelagem do novo método permite que diferentes formulações, convenientemente definidas em um mesmo problema, possam ser usadas simultaneamente, sem prejudicar a precisão.

Dois problemas foram analisados utilizando esses procedimentos, buscando mensurar a eficiência e a precisão dessas formulações. Os resultados obtidos mostram que o uso de polinômios de primeira ordem na aproximação pelos MQM é adequado; com domínios

locais pequenos, resultados mais precisos e estáveis são obtidos. Efetivamente, a combinação de polinômios de primeira ordem e domínios locais pequenos necessita apenas de alguns nós na vizinhança para realizar a interpolação, o que leva a uma grande redução no esforço computacional.

Todos os resultados numéricos apresentados claramente demonstram que a colocação na forma fraca do GSMF supera as dificuldades conhecidas da colocação na forma forte, quando se tratando de precisão e estabilidade da solução. Essa é uma característica muito importante que torna o GSMF uma formulação robusta e confiável.

O GSMF e o RBDMF são formulações livres de travamento (*locking*) volumétrico, ou seja, mantêm suas típicas curvas de convergência quando o coeficiente de Poisson se aproxima do limite incompressível. Isso comprova que as formulações não apresentam rigidez espúria.

No domínio local de um nó, o RBDMF estabelece o equilíbrio continuamente no domínio local, enquanto que o GSMF impõe o equilíbrio discretamente em um conjunto de pontos de colocação. Dessa forma, diferentes equações de equilíbrio de um domínio local podem ser criadas, e consequentemente, são independentes do equilíbrio das equações de outros domínios locais estabelecidos no corpo. Essa independência é uma característica chave das formulações do método sem malha local, que permitem o uso de domínios locais convenientemente definidos ao longo do corpo, simultaneamente modelados com diferentes formulações.

A implementação do GSMF, com apenas um ponto de colocação, leva a resultados muitos precisos de forma computacionalmente rápida. Essa formulação reduz de maneira substancial o esforço computacional na construção da matriz de rigidez, sendo assim computacionalmente muito eficiente quando comparado com outros métodos sem malha. Desta forma, como todos os resultados estão em perfeita concordância com os resultados analíticos, a precisão e a estabilidade da implementação do GSMF descritos na presente pesquisa fazem dessa formulação do método sem malha local, uma nova estratégia de modelagem confiável e robusta, no âmbito da teoria das estruturas.

6.1.1 - Publicações

Com o intuito de dar publicidade aos trabalhos que foram desenvolvidos por meio dessa pesquisa e incentivar o desenvolvimento de novos trabalhos utilizando as formulações propostas, foi elaborado em paralelo o artigo inovador: *Weak–Form Collocation – a Local Meshless Formulation in Linear Elasticity*, que apresenta toda a base teórica necessária para a aplicação das formulações do método sem malha local. O mesmo já foi submetido e aceito para publicação pela ELSEVIER (https://www.elsevier.com/) em seu

journal: Engineering Analysis with Boundary Elements (http://www.journals. elsevier.com/engineering-analysis-with-boundary-elements/), que tem classificação A1 pela CAPES. A ELSEVIER é a maior editora de literatura médica e científica do mundo, fazendo parte do grupo Reed Elsevier. Localizada em Amsterdã, a companhia tem grandes operações no Reino Unido, EUA, Europa e no Brasil.

6.2 - SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como foi demonstrado nesse trabalho, as formulações do método sem malha local resolvem com precisão, eficiência e ótima performance problemas relacionados à teoria da elasticidade clássica. Entretanto, ainda existem muitas áreas que podem ser exploradas, ainda mais considerando que esse é um método novo e inovador. Sendo assim, como recomendações para trabalhos futuros propõe-se:

- A expansão dos conceitos teóricos, procedimentos e estratégias empregadas neste estudo para a análise de domínios tridimensionais;
- A criação de novas formulações baseadas em um conjunto de campos de deformação cinematicamente admissíveis;
- A aplicação das novas formulações para a resolução de problemas de crescimento de trincas;
- A expansão dos conceitos teóricos, procedimentos e estratégias empregadas para a resolução de problemas relacionados a teoria da plasticidade;
- Aplicação da formulação co-rotacional na base teórica dos métodos sem malha, para a resolução de problemas geometricamente não lineares como grandes deslocamentos;
- Modificar o método de aproximação, aprimorando o método dos mínimos quadrados móveis ou substituindo por outros métodos, como o método dos mínimos quadrados móveis com polinômios ortogonais;
- Optimizar os parâmetros que afetam os resultados dos métodos sem malha locais, como o α_s e o α_q.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Andújar, Rabindranath, Jaume Roset e Vojko Kilar (2011). "Beyond FEM: overview on physics simulation tools for structural engineers". Em: *Technics Technologies Education Management* 6.3, pp. 555–571.
- Atluri, S. N., Z. D. Han e A.M. Rajendran (2004). "A New Implementation of the Meshless Finite Volume Method Through the MLPG "Mixed" Approach". Em: *CMES: Computer Modeling in Engineering and Sciences* 6.1, pp. 491–513.
- Atluri, S.N. e S. Shen (2002). "The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method: A Simple and Less-costly Alternative to the Finite Element and Boundary Element Methods". Em: *CMES: Computer Modeling in Engineering and Sciences* 3.1, pp. 11–51.
- Atluri, S.N. e T. Zhu (1998). "A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics". Em: *Computational Mechanics* 22.2, pp. 117–127.
- (2000). "New Concepts in Meshless Methods". Em: International Journal for Numerical Methods in Engineering 47, 537—556.
- Belytschko, T. e T. Black (1999). "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing". Em: *International journal for numerical methods in engineering* 45.1, 601–620.
- Belytschko, T., Y. Y. Lu e L. Gu (1994). "Element-free Galerkin methods". Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37.2, pp. 229–256. ISSN: 1097-0207.
- Bonet, J. e T. Lok (1999). "Variational and momentum preservation aspects of smooth particle hydrodynamic formulations". Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 180.2, 97—115.
- Bouillard, P. e S. Suleau (1998). "Element-free Galerkin method for helmholtz problems: formulation and numerical assessment of the pollution effect". Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 102.4, 317–335.
- Brebbia, Carlos Alberto e Stephen Walker (2013). Boundary element techniques in engineering. Elsevier.
- Chen, Youping, James D. Lee e Azim Eskandarian (2006). *Meshless Methods in Solid Mechanics*. Vol. 1. Springer Science Business Media, p. 200.

- Duarte, C.A. e J.T. Oden (1996). "Hp Clouds–an Hp Meshless Method". Em: *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 12, 673–705.
- Fichera, G (2006). Linear Elliptic Differential Systems and Eigenvalue Problems. Springer.
- Finalyson, B.A. (1972). The Method of Weighted Residuals and Variational Principles. Vol. 87. Academic Press, p. 472. ISBN: 0122570502.
- Fredholm, I. (1906). "Solution d'un problème fondamental de la théorie de l'élasticité". Em: *Arkiv för Matematik Astronomi och Fysk 2* 28.1, pp. 1–8.
- Gelfand, I.M. e G.E. Shilov (1964). Generalized Functions, Vol. I: Properties and Operations.
- Gingold, Robert A e Joseph J Monaghan (1977). "Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars". Em: *Monthly notices of the royal astronomical society* 181.3, pp. 375–389.
- Hildebrand, Francis Begnaud (1962). *Advanced calculus for applications*. Prentice-Hall Englewood Cliffs, p. 354. ISBN: 0130111899.
- Jamil, M. e E.Y.K. Ng (2013). "Evaluation of Meshless Radial Basis Collocation Method (RBCM) for Heterogeneous Conduction and Simulation of Temperature Inside the Biological Tissues". Em: *International Journal of Thermal Sciences* 68, pp. 42–52.
- Kansa, E.J. (1990). "Multiquadrics: A Scattered Data Approximation Scheme with Applications to Computational Fluid Dynamics". Em: *Computers and Mathematics with Applications* 19.8–9, pp. 127–145.
- Kirchhoff, G. (1859). "Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes". Em: *Für die reine und angewandte Mathematik* 56.1, 285–313.
- Lancaster, Peter e Kes Salkauskas (1981). "Surfaces generated by moving least squares methods". Em: *Mathematics of computation* 37.155, pp. 141–158.
- Lee, S.H. e Y.C. Yoon (2004). "Meshfree Point Collocation Method for Elasticity and Crack Problems". Em: International Journal for Numerical Methods in Engineering 61, 22—48.
- Libersky, L.D. et al. (1993). "High Strain Lagrangian Hydrodynamics". Em: *Journal of Computational Physics* 109, 67–75.
- Liu, G. R. e Y. T. Gu (2005). *An introduction to meshfree methods and their programming*. Springer Science & Business Media.

- Liu, G.R. e Y.T. Gu (1999). "A point interpolation method". Em: *Asia-Pacific Conference on Computational Mechanics*, pp. 1009–1014.
- (2001a). "A Local Point Interpolation Method for Stress Analysis of Two-Dimensional Solids". Em: *Structural Engineering and Mechanics* 11.2, 221—236.
- (2001b). "A local radial point interpolation method (LRPIM) for free vibration analyses of 2-D solids". Em: *Journal of Sound and vibration* 246.1, pp. 29–46.
- (2003). "A meshfree method: meshfree weak-strong (MWS) form method, for 2-D solids". Em: *Computational Mechanics* 33.1, pp. 2–14.
- Liu, G.R. e L. Yan (2000). "A modified meshless local Petrov-Galerkin method for solid mechanics". Em: *Adv. Comput. Eng. Sci* 39, pp. 1374–1379.
- Liu, G.R. et al. (2002a). "Point Interpolation Method Based on Local Residual Formulation Using Radial Basis Functions". Em: *Structural Engineering and Mechanics* 14, 713–732.
- Liu, W.K., S. Jun e Y.F. Zhang (1995). "Reproducing Kernel Particle Methods". Em: International Journal for Numerical Methods in Engineering 20, 1081—1106.
- Liu, W.K., T. Belytschko e J.T. Oden (1996). "Meshless Methods: Special Issue". Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.*
- Liu, X. et al. (2002b). "Radial Basis Point Interpolation Collocation Method For 2D Solid Problem". Em: *Proceedings of the 1st Asian Workshop on Meshfree Methods*, pp. 35–40.
- Lucy, L.B. (1977). "A Numerical Approach to the Testing of the Fission Hypothesis". Em: *Astronomical Journal* 82.12, 1013—1024.
- Mase, George Thomas (1999). *Continuum mechanics for engineers*. 2^a ed. CRC Press, p. 381. ISBN: 0849318556.
- Melenk, J.M. e I. Babuska (1996). "The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications". Em: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 139, 289—314.
- Nayroles, B., G. Touzot e P. Villon (1992). "Generalizing the Finite Element Method: Diffuse Approximation and Diffuse Elements". Em: *Computational Mechanics* 10, 307–318.
- Onate, E. e S. Idelsohn (1998). "A mesh-free finite point method for advective-diffusive transport and fluid flow problems". Em: *Computational Mechanics* 21.5, 283–292.

- Onate, E. et al. (1996). "A finite Point Method in Computational Mechanics: Applications to Convective Transport and Fluid Flow". Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39, pp. 3839–3867.
- Onate, E., F. Perazzo e J. Miquel (2001). "A Finite Point Method for Elasticity Problems". Em: *Computers and Structures* 79, pp. 2151–2163.
- Portela, A. e A. Charafi (2002). *Finite elements using Maple: a symbolic programming approach*. 1^a ed. Springer Science & Business Media. ISBN: 9783642627552.
- Reddy, N (2006). An introduction to the Finite Element Method. 3^a ed. Vol. 3. McGraw-Hill, p. 761. ISBN: 0070513554.
- Schaback, R. (2010). "Unsymmetric meshless methods for operator equations". Em: *Numerische Mathematik* 114.1, pp. 629–651.
- Sokolnikoff, I. S. (1956). Mathematical theory of elasticity. Vol. 83. McGraw-Hill New York.
- Strouboulis, T., I. Babuska e K. Copps (2000). "The design and analysis of the generalized finite element method". Em: *Computer Modeling in Engineering and Sciences* 181.1, pp. 43–69.
- Swegle, J.W., D.L. Hicks e S.W. Attaway (1995). "Smoothed Particle Hydrodynamics Stability Analysis". Em: *Journal of Computational Physics* 116.1, pp. 123–134.
- Truesdell, C. e R.A. Toupin (1960). "Principles of classical mechanics and field theory". Em: *Handbuch der Physik* 3.1.
- Zhang, X. et al. (2001). "Least-Squares Collocation Meshless Method". Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 51.9, 1089—1100.
- Zhu, T., J. Zhang e S.N. Atluri (1998). "A Local Boundary Integral Equation (LBIE) Method in Computational Mechanics and a Meshless Discretization Approach". Em: *Computational Mechanics* 21, 223—235.
- Zienkiewicz, O. C., R. L. Taylor e Robert Leroy Taylor (2000). *The Finite Element Method: The basis*. Butterworth-Heinemann, p. 689.
- Zongmin, Wu (1992). "Hermite-Birkhoff interpolation of scattered data by radial basis functions". Em: *Approximation Theory and its Applications* 8.2, pp. 1–10.