

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

INSTITUTO DE FÍSICA

Defeitos Topológicos em Teorias Escalares-Tensoriais da
Gravitação

Álvaro Gomes dos Santos Neto

Orientadora: Profa. Dra. Maria Emília Xavier Guimarães

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Física.

Brasília-DF

Março, 2006

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Defeitos Topológicos em Teorias Escalares-Tensoriais
da Gravitação**

Por

Álvaro Gomes dos Santos Neto

Orientadora

Profa. Dra. Maria Emília Xavier Guimarães

Defeitos Topológicos em Teorias Escalares-Tensoriais da Gravitação

Por

Álvaro Gomes dos Santos Neto

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada por:

Prof. Dra. Maria Emília Xavier Guimarães

(Orientadora) MAT-UnB

Prof. Dr. Ademir Eugênio Santana

IF-UnB

Prof. Dr. José A. Helayel-Neto

CBPF-MCT

Brasília,

Prof. Sebastião William da Silva

Coordenador de Pós-Graduação

Instituto de Física

Universidade de Brasília

“Muitos anos depois, diante do pelotão de fuzilamento, o Coronel Aureliano Buendía havia de recordar aquela tarde remota em que seu pai o levou para conhecer o gelo.”

Gabriel García Márquez

Agradecimentos

À minha orientadora Maria Emília pela orientação estimulante, pela paciência e compreensão e pela proposta do tema tão motivador.

Ao Professor Joaquim José Soares Neto por todos esses anos de amizade e iniciação científica que foram tão benéficos para minha formação.

Aos Professores Olavo e Ademir pelas discussões produtivas e esclarecedoras e pela amizade ao longo desses anos.

Aos amigos Stella (se o amor é cego, a amizade fecha os olhos), Marcelo, Luiz e Osvaldo que dividiram comigo muitos momentos de alegrias, e que, acima de tudo, me ajudaram a atravessar os momentos de tristeza e angústia.

Aos companheiros de jornada Nanderson, Fábio, Tine, Vivi, Dani, Careca, Luana, Nelson, Bárbara, Zé, Gustavo, Alessandra, Dudu e tantos outros.

A tia Ida pelo apoio e o bom humor que tornou a chegada à UnB todas as manhãs mais prazerosa.

À Má pelo amor, carinho, companherismo e amizade que foram fundamentais nestes anos todos. Tudo que conquistei foi com seu total apoio, paciência e dedicação e por isso

me considero sortudo por tê-la ao meu lado. Espero ter esta sorte e retribuir com muito amor para sempre.

À minha irmã, meu cunhado, e porque não dizer irmão, Arley e meu pai, que defenderam minha causa e estiveram do meu lado me dando afeto e conforto nos momentos mais difíceis. Sem vocês não teria ido tão longe. Amo todos vocês.

À minha Vó e ao meu tio Eduardo pelos sábios conselhos, pelo apoio incondicional e por sempre acreditarem em mim. O apoio de vocês foi fundamental.

Ao nosso coordenador Prof. Sebastião pela dedicação e empenho à frente da Pós-graduação.

Aos funcionários do Instituto de Física e em especial à Célia e à sorridente Saete pela atenção dedicada aos alunos da pós-graduação.

Em especial, à minha mãe, que é a razão de tudo isso e a motivação de continuar buscando novos horizontes. Sem o apoio dela não chegarei a lugar algum e não serei ninguém. Você, mais do que todos, é merecedora da minha total gratidão. Te amo demais!

À CAPES, pela bolsa de mestrado, que possibilitou este trabalho.

E acima de tudo, à Deus!

Resumo

Cordas cósmicas são defeitos topológicos que surgem naturalmente devido à quebra espontânea de simetria em vários modelos e teorias que visam descrever o modelo padrão das interações elementares. Assume-se que estas interações se unificam em uma escala de alta energia, chamada escala de grande unificação (GUT), que é da ordem de 10^{16} GeV.

Devido ao sucesso da teoria da relatividade geral, várias outras teorias alternativas à relatividade apareceram por diversos motivos. A teoria escalar-tensorial da gravitação aparentemente é a mais promissora destas teorias, cuja origem está relacionada às teorias fundamentadas em dimensões maiores do que 4, como teorias de cordas e a teoria de Kaluza-Klein.

Nesta dissertação, estudamos as cordas cósmicas neutras utilizando a teoria da relatividade geral e a teoria escalar-tensorial da gravitação. No final, concluímos com um estudo comparativo acerca dos resultados obtidos ao utilizarmos as duas teorias na descrição das cordas cósmicas.

Abstract

Cosmic strings are topological defect which arise naturally due to the spontaneous breaking of a symmetry in various models and theories which aim to describe the standard model of fundamental interactions. One assumes that these interactions are unified in a high energy scale, named grand unified theory (GUT), which is of order of 10^{16} *GeV*.

In spite of widely recognized success of the general relativity, the theory gives rise to many alternative theories for one reason or another. Apparently, the scalar-tensor theory of gravity is the most promising theory, which origin is related with theories based on dimensions higher than 4, like string theory and Kaluza-Klein theory.

In this work, we study neutral cosmic strings in general relativity and in scalar-tensor theory of gravity. In the end, we conclude with a comparative study of the results obtained by both theories describing cosmic string models.

Sumário

Notação	iv
1 Introdução	1
2 Formação de Defeitos Topológicos em Teorias de Calibre	4
2.1 Noções Sobre Quebra Espontânea de Simetria	4
2.2 Alguns Exemplos de Defeitos Topológicos	8
2.2.1 Exemplo I	8
2.2.2 Exemplo II	12
2.3 Formação de Defeitos Topológicos no Universo Primordial	15
3 Cordas Cósmicas em Relatividade Geral	19
3.1 A Teoria da Relatividade Geral	19
3.2 Solução do Tipo Vortex em Relatividade Geral	22
3.3 A Métrica Interna	25
3.4 A Métrica Externa	26
4 Cordas Cósmicas em Teorias Escalares-Tensoriais da Gravitação	30
4.1 A Teoria Escalar-Tensorial da Gravitação	31
4.2 As Equações de Campo	33

4.2.1	Obtenção das Equações de Campo via Método de Brans-Dicke . . .	33
4.2.2	Obtenção das Equações de Campo via Método Variacional	38
4.3	Solução do Tipo Vortex em Teoria Escalar-Tensorial	42
4.4	A Métrica Externa	45
4.5	A Métrica Interna	49
4.5.1	Força Gravitacional Exercida pelas Cordas Cóslicas	54
4.5.2	Movimento de Partículas Teste	55
5	Conclusão	59
A	Prova da não-existência de solução exata para cordas cóslicas em teo- rias escalares-tensorias da gravitação	62
B	Procedimentos utilizando MAPLE	65
	Referências Bibliográficas	71

Lista de Figuras

2.1	Vareta curvada	5
2.2	Potencial de Higgs	7
2.3	Sóliton da equação de seno-Gordon	12
2.4	Potencial de Higgs com correção de temperatura	17
3.1	Espaço-tempo cônico	28
4.1	Solução numérica para os campos de gauge e Higgs	44
4.2	Intensidade da força gravitacional em escalar-tensorial e relatividade geral .	54

Notação

Ao longo do texto usaremos a seguinte notação:

- A assinatura da métrica utilizada nesta dissertação é $(1, -1, -1, -1)$.
- Índices latinos variam de 1 a 4.
- Índices gregos variam de 0 a 4.
- A derivada covariante será denotada por $D_\mu A_\nu$ ou $A_{\nu;\mu}$ e a derivada parcial por $\partial_\mu A_\nu \equiv \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}$ ou $A_{\nu,\mu}$.
- O campo escalar de Higgs será denotado por ϕ e o campo escalar das teorias escalares-tensoriais será φ no referencial conforme (referencial de Einstein) e Φ no referencial físico (referencial de Jordan-Fierz).
- Em geral, foi adotado o sistema de unidades $\hbar = c = 1$, a menos que seja explicitamente evidenciado o contrário.

Utilizaremos também as seguintes definições:

- Métrica:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

- Operador d'Alambertiano:

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu).$$

- Conexão métrica:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}).$$

- Derivada covariante:

$$D_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\nu\mu}^\rho A_\rho.$$

- Tensor de Riemann:

$$R_{\mu\nu\sigma}^\rho = \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho - \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \Gamma_{\mu\sigma}^\kappa \Gamma_{\kappa\nu}^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\kappa \Gamma_{\kappa\sigma}^\rho.$$

- Tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^\rho = g^{\rho\sigma} R_{\sigma\mu\rho\nu}.$$

- Escalar de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

- Tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R.$$

- Identidade de Bianchi:

$$D_\mu G_\nu^\mu \equiv 0.$$

- Lagrangeano a partir de uma métrica:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu.$$

- Equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}^\mu} = 0.$$

- Conexão métrica a partir de um Lagrangeano:

$$\ddot{x}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0.$$

para forças externas nulas.

Capítulo 1

Introdução

A origem dos defeitos topológicos é explicada de forma natural pela quebra espontânea de simetria descrita em vários modelos e teorias utilizadas na construção do modelo padrão das interações fundamentais (forças eletrofracas e fortes). Dentro do modelo padrão, estas interações se unificam em uma escala de alta energia, chamada escala de grande unificação (GUT), que é da ordem de 10^{16} GeV. Nesta faixa de energia, devido a alta densidade do universo, podemos dar um tratamento clássico à gravitação e assumir que as correções quânticas são introduzidas através de campos materiais. Se ocorre a unificação das forças elementares em 10^{16} GeV, podemos considerar que o universo se resfriou de temperaturas mais altas para temperaturas comparáveis à escala de GUT e que, nesta escala, sofreu uma transição de fase, com conseqüente quebra espontânea de simetria, dando origem aos defeitos topológicos, além das partículas intermediadoras das interações fundamentais. A medida que o universo continuou se resfriando, outras transições de fase ocorreram e novas partículas surgiram.

Em princípio existem três tipos diferentes de defeitos topológicos que são os monopólos magnéticos, as paredes de domínio e os vortex do tipo loop ou extensos sendo que os dois últimos podem cruzar o universo. No entanto, durante o processo de formação,

os monopólos teriam se aniquilado com os anti-monopólos e as paredes de domínio e os loops colapsaram e se dissiparam em forma de radiação gravitacional. Desta forma, apenas os vortex extensos, ou cordas cósmicas, são estáveis e sobreviveram até os dias de hoje influenciando na evolução do universo. Apesar de não existirem dados observacionais diretos sobre a existência das cordas cósmicas, existem observações, como por exemplo o efeito de lentes gravitacionais, cuja interpretação mais natural aparenta ser em termos de cordas cósmicas.

Apesar de nomes semelhantes, em princípio não existia nenhuma conexão entre cordas cósmicas e a teoria de cordas. A escala de energia de ambas as teorias eram bem diferentes, sendo da ordem da GUT ou menor para as cordas cósmicas enquanto que para a teoria de cordas era perto da escala de Planck (10^{19} GeV). No entanto, a escala de energia para a teoria de cordas sofreu uma queda substancial. Em [1], Kibble chama a atenção para o fato de que a teoria de cordas ou teoria-M prevêm, e até mesmo demandam, a existência de defeitos macroscópicos tais como cordas cósmicas. Além disso, a supersimetria, que forma uma conexão entre teoria de cordas e o modelo padrão das partículas elementares, também exige a existência de defeitos macroscópicos.

Como sabemos que estes objetos influenciaram na evolução do universo, é natural analisarmos os efeitos gravitacionais destes objetos aplicando a relatividade geral. Entretanto, Brans e Dicke [2] propuseram uma teoria alternativa à relatividade geral onde a interação gravitacional passa a ser intermediada por um campo escalar além do campo tensorial da teoria de Einstein. A idéia original de Brans-Dicke está fundamentada nos trabalhos de Jordan [3] que incluiu um campo escalar na ação usual da relatividade geral e, desta forma, dando origem a teoria escalar-tensorial da gravitação. O trabalho de Jordan

foi motivado pelos resultados da teoria de Kaluza-Klein da unificação do campo eletromagnético com a gravitação onde, para que a unificação fosse possível, seria necessário uma dimensão extra que, quando compactificada, daria origem a um campo escalar parceiro do campo tensorial de Einstein. Nos anos 90, a teoria escalar-tensorial ganhou força motivada pela teoria de cordas, que também prevê um parceiro escalar intermediando a força gravitacional junto com o campo tensorial usual. Daí a importância de se estudar as cordas cósmicas no contexto da teoria escalar-tensorial da gravitação.

As cordas cósmicas podem ser classificadas de acordo com a corrente que carregam como neutras (sem corrente), do tipo-nula (quiral), do tipo-espaço (corrente magnética) e do tipo-tempo (corrente elétrica). Neste trabalho, será dada uma abordagem detalhada das cordas cósmicas neutras utilizando tanto a teoria da relatividade geral quanto a teoria escalar-tensorial, comparando ambas as teorias sempre que for interessante fazê-lo.

A dissertação foi organizada da seguinte forma. No capítulo 2, descrevemos o que são e como surgem defeitos topológicos com especial atenção às cordas cósmicas. No capítulo 3, analisamos os efeitos gravitacionais de uma corda cósmica utilizando a teoria da relatividade geral. No capítulo 4, apresentamos a teoria escalar-tensorial da gravitação e depois descrevemos os efeitos gravitacionais de uma corda cósmica no contexto da teoria escalar-tensorial para fazermos, no final, uma comparação dos resultados obtidos pelas duas teorias de gravitação. No capítulo 5, apresentamos as conclusões sobre o estudo das cordas cósmicas utilizando as duas teorias de gravitação citadas e algumas perspectivas futuras. Ao final desta dissertação, apresentamos dois apêndices com alguns resultados e procedimentos adotados no programa de computação algébrica MAPLE utilizado para o cálculo de alguns resultados.

Capítulo 2

Formação de Defeitos Topológicos em Teorias de Calibre

2.1 Noções Sobre Quebra Espontânea de Simetria

Teorias de calibre com quebra espontânea de simetria, como as teorias de grande unificação, têm sido de fundamental importância para a compreensão da formação de defeitos topológicos no universo primordial. Para tais teorias, as simetrias conhecidas na física de partículas elementares resultam de sucessivas quebras de simetria de um grupo de simetria maior e estes processos dão origem a diferentes tipos de defeitos. Durante a evolução do universo, onde a temperatura vai gradativamente diminuindo, tais quebras de simetria se manifestaram através de diversas transições de fases térmicas que deram origem a diferentes tipos de objetos tais como paredes de domínio, cordas cósmicas e monopólos magnéticos, dependendo da classificação da variedade do vácuo da teoria [4, 5]. Nesta seção, discutiremos as origens dos defeitos topológicos dentro dos modelos de física de partículas, comentando os conceitos fundamentais destes estudos como aplicações ao universo primordial. Como as propriedades dos defeitos topológicos independem dos detalhes do modelo físico, estudaremos modelos de calibre mais simples que possibilitam a compreensão da origem desses defeitos.

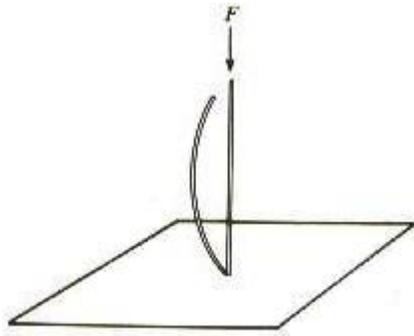


Figura 2.1: Uma vareta curvada sob pressão. A posição aleatória da vareta é um exemplo de quebra espontânea de simetria.

Para entendermos um modelo de quebra espontânea de simetria iniciaremos analisando dois modelos físicos simples para depois partirmos para modelos mais complexos. Primeiro, considere uma vareta fina com seção transversal circular posicionada verticalmente em cima de uma mesa e aplique sobre a vareta uma força \vec{F} como ilustra a figura (2.1). Se \vec{F} é pequena, nada acontece com a vareta mas se \vec{F} ultrapassa um valor crítico \vec{F}_{cr} , a vareta se curva em um plano completamente aleatório. Neste caso, a situação que era estável de início (vareta na vertical) tornou-se instável quando $\vec{F} > \vec{F}_{cr}$ ou em outras palavras, o estado fundamental da vareta que de início era simétrico, tornou-se não-simétrico. Além disso, existem infinitos estados fundamentais (estados degenerados) que se relacionam por uma rotação quando $\vec{F} > \vec{F}_{cr}$. A vareta, quando se curva, seleciona apenas um desses estados, mas todos os outros podem ser obtidos por uma simples rotação. Resumindo, um parâmetro qualquer (neste caso a força) assume um valor crítico. Acima desse valor a simetria é quebrada espontaneamente e o estado fundamental torna-se degenerado.

Em materiais ferromagnéticos a situação é análoga. Os átomos desses materiais se relacionam por uma interação do tipo spin-spin. O estado fundamental neste caso é

aquele em que todos os spins estão alinhados. No entanto, a partir de uma determinada temperatura crítica, os spins dos átomos passam a ter uma orientação aleatória, ou seja, a simetria foi espontaneamente quebrada.

Estes dois exemplos mostram os princípios básicos da quebra espontânea de simetria. Em ambos os casos, o sistema possui uma simetria, que é quebrada quando um parâmetro específico (força ou temperatura) assume um valor maior ou menor que um valor crítico. Situações similares podem ser encontradas em teorias de calibre, onde a simetria de um Lagrangeano é quebrada devido a um estado fundamental degenerado, ou seja, não-invariante por transformação da simetria original.

Para uma análise mais detalhada, vamos verificar agora o caso em que a simetria em questão é a simetria de calibre mais simples. Se quisermos construir um Lagrangeano que seja invariante por uma transformação de simetria $U(1)$ local do tipo

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow e^{i\Lambda(x)}\phi, \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu + \frac{i}{q}\partial_\mu\Lambda(x),\end{aligned}\tag{2.1}$$

este será escrito como

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu + iqA_\mu)\phi(\partial^\mu - iqA^\mu)\phi^* - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - V(\phi^*, \phi),\tag{2.2}$$

onde $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor de campo eletromagnético e está descrito em termos do campo vetorial da teoria de calibre e q é o acoplamento entre os campos. Este Lagrangeano caracteriza o *modelo abeliano de Higgs* onde o campo escalar ϕ se acopla minimamente com o campo de calibre A_μ . O potencial $V(\phi^*, \phi)$ é dado por

$$V(\phi^*, \phi) = \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - \eta^2)^2,\tag{2.3}$$

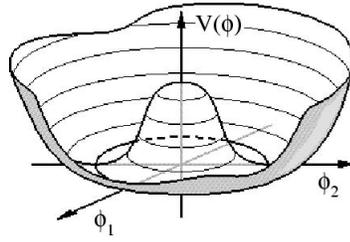


Figura 2.2: Potencial de Higgs com o estado de vácuo degenerado.

onde λ e η são duas constantes arbitrárias positivas. O potencial (2.3), por motivos que veremos mais adiante, é também chamado de *potencial de Higgs* e está representado na figura (2.2). Ao calcularmos o estado de vácuo, analisando as condições de mínimo do potencial, verificamos que existem infinitos estados degenerados de vácuo¹ caracterizados por um valor não-nulo de ϕ dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(|\phi|)}{\partial \phi} &= \frac{\lambda}{2} \phi^* \phi \phi^* - \frac{\lambda}{2} \phi^* \eta^2 = 0 \\ \implies |\phi|^2 &= \eta^2, \end{aligned} \tag{2.4}$$

e então

$$\langle 0|\phi|0\rangle = \eta \implies \phi = \eta e^{i\theta}. \tag{2.5}$$

Os estados de vácuo diferem uns dos outros por uma fase θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) e cada um desses estados estão situados em um círculo de raio η . No entanto, as transformações (2.1) mudam o valor da fase dos estados de vácuo de θ para $\theta + \alpha$ o que significa que os estados de vácuo não são invariantes pelas transformações (2.1). Portanto, a simetria do Lagrangeano (2.2) foi espontaneamente quebrada.

Podemos reescrever ϕ em termos de dois campos reais em coordenadas cartesianas

¹Não nos referimos ao estado de vácuo no espaço de Hilbert, mas sim a uma configuração de campo clássico com energia zero.

como

$$\phi(x) = \eta + \frac{\phi_1(x) + i\phi_2(x)}{\sqrt{2}}. \quad (2.6)$$

No entanto, podemos escolher uma transformação Λ tal que $\phi_2 = 0$ com o objetivo de evitar termos acoplados no Lagrangeano. Assim, a expressão (2.2) torna-se

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + q^2\eta^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 - 2\lambda\eta^2\phi_1^2 + \textit{termos acoplados}, \quad (2.7)$$

onde os termos $q^2\eta^2$ e $2\lambda\eta^2$ representam respectivamente as massas dos campos A_μ e ϕ_1 . Desta forma, devido à quebra espontânea de simetria do grupo $U(1)$ local, o campo de calibre A_μ (fóton) tornou-se massivo após absorver um grau de liberdade do campo complexo original ϕ . Este processo é chamado de *mecanismo de Higgs* e, por isso, o potencial (2.3) é também chamado de potencial de Higgs.

2.2 Alguns Exemplos de Defeitos Topológicos

A quebra espontânea de uma simetria local pode ser responsável tanto pela massa do fóton quanto pela formação de defeitos topológicos, dependendo do tipo de campo de calibre em questão. A seguir daremos exemplos de modelos que, apesar de não ser uma teoria de calibre, dará uma melhor noção do que significa formar um defeito topológico a partir de uma quebra espontânea de simetria.

2.2.1 Exemplo I

Considere a equação de seno-Gordon dada por [6]

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + a \sin b\phi = 0. \quad (2.8)$$

Esta equação descreve um campo escalar ϕ em 1 dimensão espacial e 1 dimensão temporal. Desta forma, possui soluções dinâmicas e estacionárias. Para encontrar uma

solução dinâmica podemos escrever o campo ϕ como

$$\phi(x, t) = f(x - vt) = f(\xi),$$

e é fácil verificar que

$$f(\xi) = \frac{4}{b} \arctan e^{\pm\gamma\xi}$$

é solução da equação de seno-Gordon. Esta solução dá origem a uma *onda solitária*, que se propaga sem mudar sua forma e seu tamanho e, portanto, sem dissipar energia. Estas ondas solitárias são chamadas de *sólitons* e são muito importantes no desenvolvimento da física de partículas que, no entanto, não é o objetivo deste trabalho.

Analisando a equação (2.8), fica claro que esta possui infinitas soluções estacionárias dadas por

$$\phi = \frac{2\pi n}{b}, \quad n = 0, \pm 1, 2, 3... \quad (2.9)$$

ou seja, a equação (2.8) possui estado de vácuo infinitamente degenerado.

Agora, considerando o Lagrangeano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 - V(\phi) \quad (2.10)$$

com o potencial dado por

$$V(\phi) = \frac{a}{b}(1 - \cos b\phi), \quad (2.11)$$

e escrevendo as equações de Euler-Lagrange para o Lagrangeano (2.10), obtemos exatamente a equação (2.8) com estado de vácuo degenerado. Portanto, o Lagrangeano dado por (2.10) com o potencial (2.11) sofre uma quebra espontânea de simetria em $V(\phi) = 0$ dando origem a uma onda solitária e estacionária ou sóliton estacionário. A densidade de

energia para ϕ é dada por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + V(\phi). \quad (2.12)$$

Expandindo (2.11) em série de Taylor podemos escrever

$$V(\phi) = \frac{ab}{2} \phi^2 - \frac{ab^3}{4!} \phi^4 + \dots$$

e chamando $m^2 = ab$ e $\lambda = ab^3$ temos

$$V(\phi) = \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \dots$$

onde m é a "massa" do sólito e λ é a constante de acoplamento. Fazendo ϕ tender a um dos zeros de $V(\phi)$ (por exemplo em $n = 0$) quando $x \rightarrow -\infty$ e tender a um zero diferente do primeiro (por exemplo em $n = 1$) quando $x \rightarrow \infty$, teremos entre estes dois valores uma região onde

$$\phi \neq \frac{2\pi n}{b}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} \neq 0,$$

e portanto com energia positiva. Como a configuração é estática, $\partial \phi / \partial t = 0$. Então, para a solução estacionária de (2.8), temos

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial \phi},$$

que integrando fornece

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 = V(\phi), \quad (2.13)$$

onde fizemos as constantes de integração nulas. De (2.12) e (2.13) podemos calcular a energia do sólito estacionário

$$E = \int \mathcal{H} dx = \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + V(\phi) \right] dx$$

$$= \int_0^1 2V(\phi)dx = \int_0^1 2V(\phi) \frac{dx}{d\phi} d\phi = \int_0^{\frac{2\pi}{b}} [2V(\phi)]^{\frac{1}{2}} d\phi.$$

Calculando a integral obtemos finalmente ($b\phi = \alpha$)

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{2a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi/b} (1 - \cos b\phi)^{\frac{1}{2}} \frac{d\phi}{d\alpha} d\alpha \\ &= \left(\frac{2a}{b^3}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \alpha)^{\frac{1}{2}} d\alpha \\ \implies E &= 8 \left(\frac{a}{b^3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{8m^3}{\lambda}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Assim, o sólton que foi originado da quebra espontânea de simetria do Lagrangeano (2.10) em $V(\phi) = 0$ tem energia finita e inversamente proporcional à constante de acoplamento λ .

O sólton do modelo seno-Gordon é importante aqui por ser um exemplo de fácil visualização. Considere uma corda infinita e amarrados a ela vários pregos igualmente espaçados e com uma mola ligando cada um deles. Considere também a força gravitacional atuando em cada um dos pregos. O estado fundamental neste caso é aquele onde todos os pregos estão na posição vertical. Dentro deste exemplo, o sólton encontrado a partir da equação (2.8) corresponde à situação em que os pregos se encontram como na figura (2.3). Dessa forma, o sólton, representado pelo exemplo citado, é estável e não pode decair para o estado fundamental uma vez que seria necessária uma quantidade de energia semi-infinita para inverter um número semi-infinito de pregos nesta corda. Assim, a estabilidade do sólton está ligado à própria condição de contorno do espaço. Podemos dizer então que o sólton originário da equação (2.8) é um *objeto topológico*, ou seja, um objeto que tem sua estabilidade justificada na topologia do espaço que, no exemplo em questão, é



Figura 2.3: Pregos representando o sóliton resultante da equação de seno-gordon.

uma corda infinita. Uma vez formado o sóliton em 1-dimensão, a tentativa agora será a simples generalização da solução (2.11) para duas dimensões.

2.2.2 Exemplo II

Considere um campo escalar em um espaço bi-dimensional. O contorno deste espaço é um círculo infinito chamado S^1 . Vamos escolher um campo escalar que no contorno assuma o valor

$$\phi = \eta e^{in\theta} \quad (r \rightarrow \infty), \quad (2.15)$$

onde r e θ são coordenadas polares, η é uma constante e n é inteiro para que ϕ seja unívoco. Em $r \rightarrow \infty$, temos

$$\nabla\phi = \frac{1}{r}(in\eta e^{in\theta})\hat{\theta}.$$

As funções Lagrangeano e Hamiltoniano são respectivamente

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 - V(\phi, \phi^*), \quad (2.16)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 + V(\phi, \phi^*).$$

Até agora apenas generalizamos o caso seno-Gordon para duas dimensões. Considere uma configuração estática do tipo

$$V(\phi, \phi^*) = [\eta^2 - \phi^*\phi]^2, \quad (2.17)$$

de tal forma que $V = 0$ no contorno. Note que assumir o campo escalar igual a (2.15) no contorno já é assumir a quebra espontânea de simetria uma vez que no mesmo contorno, $V = 0$. Note também que este potencial é igual ao potencial (2.3), se ajustarmos a constante λ . Assim, em $r \rightarrow \infty$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 = \frac{n^2\eta^2}{2r^2},$$

e calculando a energia da mesma forma que no caso de seno-Gordon em 1 dimensão obtemos

$$E \approx \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \mathcal{H} r dr d\theta = \pi n^2 \eta^2 \int_0^\infty \frac{1}{r} dr$$

e desta forma a energia é infinita! Portanto, o sóliton encontrado a partir da equação (2.8) não pode ser generalizado para duas ou mais dimensões. Assim, a única maneira de resolvermos este problema é considerarmos uma teoria de calibre onde o que vale agora, devido ao calibre, é a derivada *covariante* do campo escalar ϕ dada por

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + iqA_\mu\phi$$

e o Lagrangeano (2.16) fica dado por

$$\mathcal{L} = D_\mu\phi D^\mu\phi^* - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - V(\phi^*, \phi) \quad (2.18)$$

que, ajustando as constantes λ e η , é exatamente o Lagrangeano (2.2) invariante por transformações de simetria do grupo $U(1)$ local.

Escolhendo A_μ da forma

$$\mathbf{A} = \frac{1}{q} \nabla(n\theta) \quad (r \rightarrow \infty),$$

isto é,

$$A_r \rightarrow 0, \quad A_\theta \rightarrow -\frac{n}{qr} \quad (r \rightarrow \infty), \quad (2.19)$$

temos que no contorno

$$D_\theta \phi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + iqA_\theta \phi = 0, \quad D_r \phi = 0,$$

ou seja, $D_\mu \phi \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$. A escolha (2.19) é chamada *calibre puro*. Além disso, o tensor $F_{\mu\nu}$ fica

$$\partial_r A_\theta - \partial_\theta A_r = \frac{n}{qr^2},$$

ou seja, quando $r \rightarrow \infty$, $F_{\mu\nu} \rightarrow 0$. Com tudo isso, no contorno o Lagrangeano (2.18) fica igual a zero e, portanto, o Hamiltoniano também se anula. Isto significa que a escolha do calibre puro possibilita uma energia *finita* para o sóliton quando $r \rightarrow \infty$ e o problema da energia divergente no infinito fica contornado. No entanto, a consequência de se adicionar um calibre a essa teoria é que o sóliton adquiriu um *fluxo magnético*. Considere a integral $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ ao redor do círculo S^1 no infinito. Pelo teorema de Stokes temos que o fluxo dentro do círculo é dado por

$$\Phi = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint A_\theta r d\theta = -\frac{2\pi n}{q} \quad (2.20)$$

e é um fluxo magnético quantizado.

Assim, o que fizemos aqui foi construir um modelo bi-dimensional com energia finita para um campo ϕ (sóliton bi-dimensional), composto por um campo escalar carregado e um campo de calibre que, neste caso, é o próprio campo eletromagnético. A visualização para este sóliton é bastante simples. Considerar a equação (2.15) significa dizer que ϕ só pode assumir um único valor dentro de um círculo de raio a contido em um plano. No

entanto, quando $\eta \rightarrow 0$, $\phi = 0$ e este valor não é o valor de vácuo esperado (lembrando que $\phi = 0$ não minimiza o potencial (2.3)). Temos então um "buraco" no plano com energia finita e estável. Se adicionarmos ao modelo uma terceira dimensão e considerarmos que ϕ não tem nenhuma dependência com esta direção, então o ponto se torna uma linha chamada aqui de *vortex*. Uma solução caracterizada por um valor de n em (2.15) é estável porque não se pode deformar uma solução continuamente em uma outra solução caracterizada por um outro valor de n . Portanto, este vortex nada mais é do que um defeito topológico já que sua estabilidade, mais uma vez, se justifica na topologia da variedade do vácuo que, neste caso, é um círculo.

2.3 Formação de Defeitos Topológicos no Universo Primordial

Toda a justificativa para a formação de defeitos topológicos se deu à temperatura nula. No entanto, dentro do cenário cosmológico [4, 5], o universo primordial era bastante denso e quente e, portanto, devemos adicionar correções de temperatura no potencial (2.3). Assim, o potencial efetivo para o modelo descrito por (2.2) fica [7]

$$\begin{aligned} V_{ef}(\phi, T) &= V(\phi) + \left(\frac{\lambda + 3q^2}{12} \right) T^2 |\phi|^2 \\ &= m^2(T) |\phi|^2 + \frac{\lambda}{4} |\phi|^4, \end{aligned} \tag{2.21}$$

onde foram omitidos termos que não dependem de ϕ . Temos também que $m^2(T)$, que é a massa efetiva do campo de Higgs no estado simétrico $\langle \phi \rangle = 0$, é dado por

$$m^2(T) = \frac{1}{12} [(\lambda + 3q^2)T^2 - 6\lambda\eta]. \tag{2.22}$$

Esta correção de temperatura no valor da massa do campo de Higgs pode ser encontrada se considerarmos que a massa de ϕ descreve um condensado de Bose de partículas de Higgs. O valor de equilíbrio térmico de ϕ será encontrado minimizando a energia livre² deste condensado, que está relacionada com o potencial efetivo do mesmo, e será uma função da temperatura. Além disso, no valor do potencial efetivo (2.21), assumimos que $\lambda \gg q^4$ para que possamos desprezar possíveis correções radiativas.

Note que $m^2(T)$ se anula quando a temperatura assume um valor crítico dado por

$$T_c = \left(\frac{6\lambda}{\lambda + 3q^2} \right)^{1/2} \eta. \quad (2.23)$$

Para $T > T_c$, o termo $m^2(T)$ é positivo e o mínimo do potencial efetivo ocorre quando $\phi = 0$ resultando em um valor esperado de vácuo $\langle \phi \rangle = 0$, ou seja, a simetria do sistema foi restaurada. Para $T < T_c$, o termo $m^2(T)$ é negativo, o que significa que o estado simétrico tornou-se instável (já que massa negativa não é fisicamente aceitável), ϕ assume um valor de vácuo não-nulo e dizemos que a simetria foi espontaneamente quebrada.

Minimizando (2.21) obtemos, para $T < T_c$

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial \phi} = \frac{\lambda}{2} \phi^* \phi \phi^* - \frac{\lambda}{2} \phi^* \eta^2 + \left(\frac{\lambda + 3q^2}{12} \right) T^2 \phi^* = 0$$

$$\implies \frac{\lambda}{2} |\phi|^2 = - \left(\frac{\lambda + 3q^2}{12} \right) T^2 + \frac{\lambda}{2} \eta^2$$

$$\implies |\phi|^2 = - \left(\frac{\lambda + 3q^2}{6\lambda} \right) T^2 + \eta^2$$

$$\implies |\phi| = \left(\frac{\lambda + 3q^2}{6\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{6\lambda}{\lambda + 3q^2} \right) \eta^2 - T^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

²Devemos assumir que o potencial químico de todas as partículas do condensado é nulo ou então este equilíbrio térmico será encontrado minimizando o potencial termodinâmico $\Omega = F - \sum \mu_i N_i$.

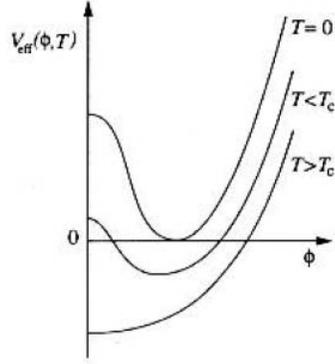


Figura 2.4: Dependência do potencial efetivo com relação à temperatura. A quebra de simetria ocorre para um valor $T < T_c$.

$$\Rightarrow |\phi| = \left(\frac{\lambda + 3q^2}{6\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} [T_c^2 - T^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.24)$$

que é o valor esperado de ϕ que caracteriza a quebra de simetria. A dependência do potencial efetivo com relação ao campo ϕ está ilustrada na figura (2.4) para diferentes temperaturas.

Desta maneira, como no início a temperatura do universo era bastante alta, o valor esperado de vácuo para o campo ϕ era não-degenerado. A medida que a temperatura do universo diminui tornando-se inferior a uma temperatura crítica T_c , ocorre uma transição de fase, o campo ϕ passa a assumir um valor esperado de vácuo degenerado, e a simetria é dita espontaneamente quebrada dando origem aos defeitos topológicos. Tais objetos podem ser de diferentes tipos como monopólos magnéticos, paredes de domínio e vortex do tipo loop ou extensos. Os monopólos teriam, ainda nos primórdios, se aniquilado com os anti-monopólos enquanto que as paredes de domínio e os loops colapsaram e se dissiparam em forma de radiação gravitacional [4, 5]. No entanto, os vortex extensos teriam evoluído sob os efeitos de tensão e auto-interação até os dias de hoje. Considerando tais efeitos, os vortex têm fundamental importância na compreensão da história da evolução do universo,

em particular na formação das galáxias e por isso o estudo do campo gravitacional desses objetos faz-se importante e necessário. Como o tensor energia-momento desses objetos é de natureza relativística, a teoria clássica não é suficiente para a completa descrição desse campo gravitacional. Desta forma, trataremos os vortex (ou cordas cósmicas) utilizando relatividade geral e teorias escalares-tensoriais da gravitação para que possa ser feito um estudo comparativo entre os resultados obtidos utilizando as duas teorias.

Capítulo 3

Cordas Cóslicas em Relatividade Geral

Uma vez definido o que é um vortex e qual é a sua origem, o próximo passo é tentar descrever os efeitos gravitacionais deste objeto, além de sua interação com a matéria, calculando o campo gravitacional através das equações de campo. Para estes cálculos utilizaremos o funcional ação da relatividade geral. Por isso, vamos explicitar pontos fundamentais da relatividade geral para podermos aplicá-los no cálculo das equações de campo de uma corda cósmica, baseando-se nos cálculos realizados por Hiscock em [11].

3.1 A Teoria da Relatividade Geral

Podemos escrever as equações de campo da relatividade geral a partir de um funcional ação que descreve a evolução do campo gravitacional dado por [8]

$$\mathcal{S}_{RG} = \int d^4x [\mathcal{L}_g + \kappa \mathcal{L}_M(\psi_m; g_{\mu\nu})], \quad (3.1)$$

onde κ é uma constante de acoplamento, ψ_m são quaisquer campos de matéria que se acoplam minimamente ao campo gravitacional $g_{\mu\nu}$ e \mathcal{L}_g e \mathcal{L}_M são, respectivamente, o *Lagrangeano de Einstein* e o *Lagrangeano de matéria*. Em relatividade geral, o Lagrangeano

de Einstein tem a forma

$$\mathcal{L}_g = \frac{1}{16\pi G} \sqrt{-g} R \quad (3.2)$$

onde R é o escalar de curvatura. Escrevendo as equações de Euler-Lagrange para o funcional \mathcal{S}_{RG} obtemos

$$\frac{\delta \mathcal{L}_g}{\delta g_{\mu\nu}} = -\sqrt{-g} G^{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

e

$$\frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g_{\mu\nu}} = \sqrt{-g} T^{\mu\nu}, \quad (3.4)$$

onde $G^{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein definido na notação. Dividindo as equações de Euler-Lagrange por $\sqrt{-g}$, obtemos as equações de campo da relatividade geral

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}, \quad (3.5)$$

onde $\kappa = 8\pi G$ é um resultado conhecido da relatividade geral.

Temos também que, para a relatividade geral, vale o *Princípio de Equivalência* que pode ser formulado de várias maneiras diferentes. Uma de suas formulações é o *Princípio de Equivalência Fraco* que diz que **o campo gravitacional se acopla com tudo no universo**. Uma consequência direta do princípio de equivalência fraco é o fato de ser impossível isolar um corpo qualquer da ação de uma força gravitacional na presença de um campo gravitacional.

Além disso, podemos considerar que, na relatividade geral, o funcional ação que descreve o acoplamento de todos os campos de matéria e suas interações eletrofracas e fortes é uma deformação mínima do funcional ação da relatividade especial, obtido pela substituição da métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ por $g_{\mu\nu}$ e suas derivadas parciais $\partial/\partial x^\mu$ por derivadas

covariantes ∇_μ em relação a $g_{\mu\nu}$. A esta característica de deformação mínima do funcional ação da relatividade especial damos o nome de *Princípio de acoplamento mínimo da gravitação*.

Antes de solucionar a equação (3.5) para cordas cósmicas, devemos mencionar propriedades físicas e matemáticas importantes para sua compreensão. As equações de campo são equações diferenciais para determinar o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ a partir de um dado tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$. Em outras palavras, se temos um dado tensor energia-momento, resolvemos as equações de campo para obtermos a geometria do espaço-tempo correspondente. Se o tensor energia-momento é nulo, então encontramos soluções de vácuo.

Uma outra maneira de se interpretar as equações de campo seria considerar que o tensor energia-momento pode ser obtido a partir de um dado tensor métrico. Esta pode ser uma boa interpretação se o interesse é encontrar que tipo de tensor energia-momento está gerando uma determinada geometria do espaço-tempo. Neste caso, podemos escrever as 10 componentes do tensor métrico, calcular as componentes do tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ e então escrever as componentes do tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ através das equações de campo. No entanto, esta não é uma interpretação usual porque pode-se obter como resultado um tensor energia-momento não físico violando algumas condições de conservação de energia.

As equações de campo podem também ser interpretadas como sendo 10 equações que conectam 20 quantidades diferentes que são as componentes dos tensores métrico e energia-momento. Desta forma, as equações de campo são vistas como vínculos entre escolhas simultâneas de $g_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$. Esta interpretação permite que a geometria e o tensor energia-momento sejam obtidos a partir de considerações físicas a cerca do sistema em questão.

Com tudo isso fundamentado, a relatividade geral é capaz de descrever o campo gravitacional gerado por uma configuração de matéria qualquer dada por $T_{\mu\nu}$ onde o campo tensorial (métrica) se acopla minimamente com a matéria. Além disso, de acordo com as propriedades da relatividade geral, o tensor métrico seria o único responsável pela força gravitacional.

3.2 Solução do Tipo Vortex em Relatividade Geral

Nesta seção vamos modelar de maneira mais detalhada a corda cósmica. Para podermos resolver as equações de campo devemos dividir o espaço em duas regiões: uma região I exterior a corda ($r > r_0$), onde todos os campos materiais decaem rapidamente e, portanto, temos vácuo; e uma região II interna a corda ($0 < r < r_0$) onde todos os campos da corda contribuem para o tensor energia-momento. Como estamos interessados em estudar o modelo descrito no capítulo anterior, devemos escrever a ação de matéria com o auxílio do Lagrangeano (2.2)

$$\mathcal{S}_M = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} D_\mu \phi D^\mu \phi^* - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi - \eta^2)^2 \right], \quad (3.6)$$

e desta forma construímos um vortex (corda) estático, com simetria cilíndrica, tal como descrito anteriormente. Calculando as equações de Euler-Lagrange para este funcional podemos encontrar uma configuração, na qual o vortex está descrito ao longo do eixo z , dada por [9]

$$\phi = h(r) e^{in\theta} \quad e \quad A_\mu = \frac{1}{q} [Q(r) - n] \delta_\mu^\theta, \quad (3.7)$$

onde h e Q são funções apenas da distância radial com relação ao centro da corda. De agora em diante, vamos assumir os parâmetros da ação de matéria como sendo aqueles que fazem

apenas as cordas com $n = 1$ serem estáveis, sem que esta exigência afete as conclusões deste trabalho uma vez que estamos interessados aqui apenas em uma demonstração da existência da corda cósmica.

Escrevendo explicitamente as equações de Euler-Lagrange para o campo de calibre A_μ obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial A^\mu} = -\frac{1}{2}iq\phi^*\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}iq\phi\partial_\mu\phi^* + q^2A_\mu\phi\phi^*, \quad (3.8)$$

$$\partial^\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial^\nu A^\mu)} \right) = \partial^\nu F_{\mu\nu}, \quad (3.9)$$

e substituindo os valores (3.7) encontramos

$$Q'' - \frac{Q'}{r} = q^2Qh^2. \quad (3.10)$$

De maneira análoga, escrevendo as equações de Euler-Lagrange para ϕ obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi^*} = -\frac{1}{2}iqA^\mu\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}q^2A_\mu A^\mu\phi - 2\lambda\phi^*\phi^2 + 2\lambda\phi\eta^2, \quad (3.11)$$

$$\partial^\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial^\nu \phi^*)} \right) = \frac{1}{2}\partial^\mu\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}iqA_\mu\partial^\mu\phi, \quad (3.12)$$

e com os valores (3.7) temos

$$h'' - \frac{h'}{r} = h \left[\frac{Q^2}{r^2} + 4\lambda(h^2 - \eta^2) \right], \quad (3.13)$$

onde denotamos as "linhas" como sendo derivadas com relação à coordenada r .

Podemos escrever também as condições de contorno como

$$h(0) = 0, \quad Q(0) = 1$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h(r) = \eta, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} Q(r) = 0 \quad (3.14)$$

e desta forma temos as informações necessárias para escrevermos explicitamente o campo de Higgs ϕ e o campo de calibre A_μ . Uma solução para estes campos será dada no próximo capítulo.

De acordo com as equações de Euler-Lagrange para a relatividade geral, podemos escrever o tensor energia-momento como

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{S}_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (3.15)$$

Calculando cada componente obtemos [10]

$$T^z{}_z = V + \frac{1}{2} \left[h'^2 + \frac{1}{r^2} \left(h^2 Q^2 + \frac{Q'^2}{q^2} \right) \right], \quad (3.16)$$

$$T^r{}_r = V - \frac{1}{2} \left[h'^2 - \frac{1}{r^2} \left(h^2 Q^2 - \frac{Q'^2}{q^2} \right) \right], \quad (3.17)$$

$$T^\theta{}_\theta = V + \frac{1}{2} \left[h'^2 - \frac{1}{r^2} \left(h^2 Q^2 + \frac{Q'^2}{q^2} \right) \right], \quad (3.18)$$

e, supondo que a corda é invariante por translação temporal ao longo de seu eixo de simetria, temos que $T^z{}_z = T^t{}_t$.

Com o objetivo de descrever a dinâmica da corda, vamos adotar aqui um "ponto de vista macroscópico" onde consideramos a corda como sendo descrita por uma ação de superfície e vamos integrar o tensor energia-momento sobre todos os graus de liberdade transversos. Como a corda está alinhada ao longo do eixo z , as coordenadas internas podem ser identificadas como sendo t e z e as transversas como sendo r e θ . Desta forma, podemos escrever as componentes internas do tensor energia-momento como

$$\begin{aligned} T^t{}_t = T^z{}_z &= -\mu, \\ T^r{}_r = T^\theta{}_\theta &= 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde $\mu > 0$ é uma densidade uniforme de energia.

3.3 A Métrica Interna

Para satisfazer as características da corda em questão, devemos escrever uma métrica que seja estática com simetria cilíndrica. Uma forma geral para este tipo de métrica é dada por [11]

$$ds^2 = e^{2\nu} dt^2 - e^{2\psi} d\theta^2 - e^{2\lambda} (dr^2 + dz^2), \quad (3.20)$$

onde ν , ψ e λ são funções apenas de r e $0 < \theta < 2\pi$. Como descrito anteriormente, o tensor energia-momento é dado por¹

$$T^t_t = T^z_z = -\epsilon \quad (r < r_0), \quad (3.21)$$

com todas as outras componentes nulas, r_0 é o raio da corda que, para cordas advindas de uma quebra espontânea de simetria na escala de grande unificação, é da ordem de 10^{-30} *cm*.

As componentes do tensor de Einstein G^μ_ν para a métrica dada por (4.48) podem ser facilmente calculadas fornecendo as equações de campo

$$G^t_t = e^{-2\lambda}(\psi'' + \psi'^2 + \lambda'') = -8\pi\epsilon, \quad (3.22)$$

$$G^\theta_\theta = e^{-2\lambda}(\nu'' + \nu'^2 + \lambda'') = 0, \quad (3.23)$$

$$G^r_r = e^{-2\lambda}(\nu'\psi' + \nu'\lambda' + \psi'\lambda') = 0, \quad (3.24)$$

$$G^z_z = e^{-2\lambda}(\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' + \psi'' + \psi'^2 + \psi'\nu' - \psi'\lambda') = -8\pi\epsilon. \quad (3.25)$$

¹Nesta seção vamos considerar o tensor energia-momento como sendo uma densidade linear a priori e integraremos em quantidades macroscópicas mais adiante sem, no entanto, afetarmos a métrica final encontrada.

Além disso, a conservação do tensor energia-momento fornece uma equação adicional

$$T^\mu{}_{\nu;\mu} = \partial_\mu T^\mu{}_\nu + \Gamma^\mu_{\mu\alpha} T^\alpha{}_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} T^\mu{}_\alpha = (\nu' + \lambda')\epsilon = 0. \quad (3.26)$$

Se derivarmos a expressão (3.26) com relação a r e substituirmos o resultado em (3.23), podemos dizer que ν e λ são constantes e podem ser consideradas como nulas por uma redefinição apropriada das coordenadas t , r e z . Desta forma, a equação (3.24) é satisfeita automaticamente e obtemos apenas uma equação dada por

$$\psi'' + \psi'^2 = -8\pi\epsilon, \quad (3.27)$$

que pode ser resolvida fazendo a substituição $\psi = \ln R \rightarrow R = e^\psi$. Assim

$$\frac{R''}{R} = -8\pi\epsilon,$$

e a solução geral é a combinação linear de soluções possíveis. Neste caso ($g_{\theta\theta} = R^2$)

$$R = A \cos(r/r_*) + B \sin(r/r_*), \quad (3.28)$$

com $r_* = (8\pi\epsilon)^{-1/2}$. A métrica não conterá singularidades se $A = 0$ e $B = r_*$. Desta forma, a solução exata da métrica interna de uma corda cósmica com simetria cilíndrica e densidade uniforme fica dada por

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - dz^2 - r_*^2 \sin^2(r/r_*) d\theta^2. \quad (3.29)$$

3.4 A Métrica Externa

A métrica externa do espaço-tempo de uma corda deve ser estática, com simetria cilíndrica e solução de vácuo das equações de Einstein. A forma mais geral para este tipo de métrica foi dado em 1917 por Levi-Civita [12]

$$ds^2 = r^{2m} dT^2 - r^{-2m} [r^{2m^2} (dr^2 + dz^2) + a^2 r^2 d\Theta^2], \quad (3.30)$$

onde m e a são constantes arbitrárias. Como queremos que esta métrica seja invariante de Lorentz na direção z , devemos ter que as componentes g_{tt} e g_{zz} são iguais. Esta exigência nos leva a apenas dois valores possíveis de m : $m = 0$ ou $m = 2$. No entanto, apenas a solução $m = 0$ é fisicamente aceitável e esta será a escolha de agora em diante.

Agora que a métrica externa foi escrita, é razoável exigir que a métrica seja contínua em todo o espaço e com derivadas também contínuas em todo o espaço. Por isso, devemos ligar as duas soluções (interna e externa) para podermos definir a constante a . Desta maneira, sabemos que em $r = r_0$ ambas as métricas e suas primeiras derivadas são iguais. Assim, em $r = r_0$, temos

$$g_{\theta\theta}^+ = g_{\theta\theta}^- \implies ar_0 = r_* \sin(r_0/r_*), \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial g_{\theta\theta}^+}{\partial r} = \frac{\partial g_{\theta\theta}^-}{\partial r} \implies a = \cos(r_0/r_*), \quad (3.32)$$

onde o símbolo (+) denota a região externa e (-) denota a região interna. Assim, temos que a métrica externa é dada por (3.30) com $m = 0$ e a constante $a = \cos(r_0/r_*)$. Definindo uma nova coordenada angular como sendo

$$\Theta' = a\Theta, \quad (3.33)$$

temos que Θ' varia de $0 \leq \Theta' < 2\pi a$. Reescrevendo este limite temos

$$2\pi a = 2\pi a + 2\pi - 2\pi = 2\pi - 2\pi[1 - a], \quad (3.34)$$

e desta forma surge um desvio angular proveniente da redefinição de Θ dado por $\delta\Theta = 2\pi[1 - a]$. Substituindo o valor da constante a obtemos um desvio de $\delta\Theta = 2\pi[1 - \cos(r_0/r_*)]$. Logo, a geometria ao redor da corda é localmente idêntica a um espaço-tempo chato. Esta geometria, no entanto, não é globalmente euclidiana já que temos um

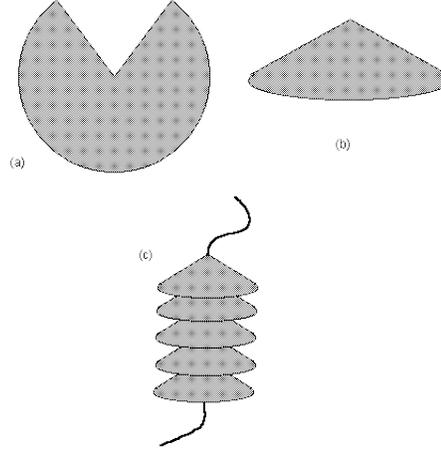


Figura 3.1: Três ângulos diferentes do espaço-tempo cônico devido ao desvio angular causado pela presença da corda cósmica.

desvio angular causado pela redefinição de Θ . Assim, a presença da corda faz com que a superfície na direção z e na direção t tenha uma geometria cônica ao invés de um plano. Este espaço-tempo cônico pode ser visualizado na figura (3.1).

Além disso, para um espaço-tempo estático e com simetria cilíndrica, podemos definir uma *densidade linear de massa* que é definida pela integral da densidade de energia ϵ sobre a superfície transversal da fonte, no caso a corda. A massa por unidade de comprimento é então

$$\mu = \int_{(S)} \epsilon \sqrt{g_s} d\sigma = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \epsilon r_* \sin(r/r_*) d\Theta dr, \quad (3.35)$$

onde g_s é o determinante da métrica induzida na superfície transversal da corda. Assim

$$\mu = 2\pi\epsilon r_*^2 [1 - \cos(r_0/r_*)], \quad (3.36)$$

e substituindo o valor de $r_* = (8\pi\epsilon)^{-1/2}$ obtemos

$$4\mu = 1 - \cos(r_0/r_*). \quad (3.37)$$

Desta forma, podemos escrever o valor da constante a em termos da densidade linear

de massa como $a = 1 - 4\mu$ e, finalmente, podemos determinar o desvio angular que é $\delta\Theta = 8\pi\mu$. Note que este resultado é o mesmo encontrado por Vilenkin [13], em sua aproximação de campo fraco onde ele considerou apenas a primeira ordem em μ , mas com a diferença crucial de que o resultado $\delta\Theta = 8\pi\mu$ encontrado aqui é exato para todas as ordens em μ .

A métrica externa exata, com a constante a definida, fica então dada por

$$ds^2 = dt^2 - dz^2 - dr^2 - (1 - 4\mu)^2 r^2 d\Theta^2. \quad (3.38)$$

Portanto, dada uma configuração do tipo vortex, construímos de maneira exata a métrica interna e externa do espaço-tempo deste vortex. No próximo capítulo, o objetivo também será a descrição exata dessa configuração de vortex mas utilizando a teoria escalar-tensorial da gravitação e não a relatividade geral.

Capítulo 4

Cordas Cóslicas em Teorias Escalares-Tensoriais da Gravitação

É sabido que forças de longo alcance são transmitidas pelo campo gravitacional $g_{\mu\nu}$ e pelo potencial eletromagnético A_μ . Sendo assim, é natural suspeitar que outras forças de longo alcance possam ser produzidas por campos escalares. Tais teorias foram sugeridas mesmo antes da relatividade geral. A mais promissora destas teorias é a teoria escalar-tensorial da gravitação onde um campo escalar partilha a função de intermediar a gravitação junto com o tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Neste capítulo a teoria escalar-tensorial será apresentada em detalhes para que, posteriormente, possa ser utilizada no cálculo do campo gravitacional de uma corda cósmica. Primeiramente, será calculada a métrica externa da corda de maneira exata e a seguir, utilizaremos o mesmo raciocínio apresentado por Hiscock em [11] para a métrica interna. No entanto, da maneira como serão introduzidas, as equações de campo para a métrica interna não apresentam solução exata. Assim, apresentamos neste capítulo uma solução linearizadas da métrica interna de uma corda cósmica utilizando a teoria escalar-tensorial. Por fim, mostramos algumas aplicações dos resultados obtidos em partículas teste na presença de cordas cósmicas da mesma maneira apresentada em [23].

4.1 A Teoria Escalar-Tensorial da Gravitação

A teoria escalar-tensorial foi proposta primeiramente por Jordan [3] quando este adicionou no funcional ação usual um campo escalar, o que lhe permitiu encontrar uma "constante" gravitacional variável, de acordo com os argumentos de Dirac de que a constante gravitacional deveria ser dependente do tempo [14]. No entanto, na teoria de Jordan, o campo escalar se acoplava com a parte material do Lagrangeano, e desta maneira seria possível encontrar um termo com um acoplamento exclusivo entre o campo escalar e o campo de matéria, o que viola o princípio da equivalência. Utilizando o argumento dado por Fierz [15] de que o campo escalar não deveria se acoplar com a parte material do Lagrangeano para conservar o princípio de equivalência, Brans e Dicke [2] propuseram uma nova ação, com a parte material do Lagrangeano desacoplada do campo escalar Φ e com o acoplamento não-mínimo entre a métrica e o campo escalar, dada por

$$\mathcal{S}_{BD} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\Phi \tilde{R} - \frac{\omega}{\Phi} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi \right] + \mathcal{S}_M[\psi_m(x), \tilde{g}_{\mu\nu}(x)], \quad (4.1)$$

onde o "til" representa grandezas definidas em um referencial físico e ω , que é o único parâmetro da teoria de Brans-Dicke, é uma constante adimensional. Aqui, o segundo termo do lado direito é um termo cinético que descreve a dinâmica do campo escalar. Temos também que o acoplamento entre a métrica e o campo de matéria não depende do campo escalar. Além disso, podemos identificar o primeiro termo da direita como sendo

$$\mathcal{L}_{BD} = \frac{1}{16\pi} \sqrt{-\tilde{g}} \Phi \tilde{R}, \quad (4.2)$$

e percebemos que este termo substitui o Lagrangeano de Einstein \mathcal{L}_g da relatividade geral. Comparando (4.2) com (3.2), vemos que

$$\frac{1}{G_{ef}} = \Phi \quad (4.3)$$

e, como esperamos que Φ seja espacialmente uniforme mas que varie com o tempo, vemos claramente que a "constante" gravitacional, que é constante na relatividade geral, passa a ser dependente do tempo na teoria escalar-tensorial, de acordo com os argumentos de Dirac. Note que o acoplamento do campo escalar com o Lagrangeano de Einstein não se dá de qualquer maneira. Em princípio, a introdução do campo escalar Φ poderia ter sido feita apenas adicionando-se o termo cinético. No entanto, a presença do termo de acoplamento não-mínimo é de fundamental importância para a teoria e será melhor justificado na seção a seguir.

Mais tarde, Bergmann, Nordtvedt e Wagoner [16] generalizaram a teoria introduzindo um acoplamento dinâmico entre a métrica e o campo de matéria, isto é, um acoplamento que depende do campo escalar. Finalmente, Damour e Nordtvedt [17] desenvolveram teorias escalares-tensoriais com múltiplos campos escalares.

A partir deste ponto falta justificar fisicamente o que representa este campo escalar Φ . Os candidatos para tal justificativa vêm de diferentes áreas [18]. A teoria de Kaluza-Klein da unificação do eletromagnetismo com a gravitação prevê um espaço-tempo de 5 dimensões que, quando compatificado para 4 dimensões, fornece naturalmente um campo escalar parceiro do tensor métrico. Já as teorias de campos de grande unificação baseiam-se no fato de que todas as forças da natureza são mediadas por campos que, dependendo de sua massa, definem se as forças são ou não de grande alcance. No caso da gravitação, dois campos seriam os responsáveis pela força gravitacional: o gráviton, que é um campo sem massa (longo alcance) de spin 2, além de um parceiro escalar massivo¹, chamado *dilaton*.

¹Não há qualquer mecanismo que impeça que o dilaton seja massivo, desde que sua massa não ultrapasse o limite de 1 *TeV*. Sendo assim, os seus efeitos podem ser considerados de longo alcance.

Portanto, temos uma teoria escalar-tensorial da gravitação que obedece o princípio de equivalência, já que o campo escalar não se acopla com os campos materiais do Lagrangeano, mantendo o princípio de acoplamento mínimo e considerando que a métrica "física" $\tilde{g}_{\mu\nu}$ mediadora da força gravitacional, de acordo com a teoria de campos de grande unificação e com a teoria de Kaluza-Klein, é um objeto dado por

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(\varphi)g_{\mu\nu}, \quad (4.4)$$

onde $\Omega(\varphi)$ é uma função arbitrária do dilaton. Assim, a métrica "física" é composta por uma componente escalar (o campo escalar φ) e por uma componente puramente tensorial (a métrica $g_{\mu\nu}$).

4.2 As Equações de Campo

As equações de campo para uma teoria escalar-tensorial da gravitação podem ser obtidas de duas maneiras distintas que serão analisadas a seguir.

4.2.1 Obtenção das Equações de Campo via Método de Brans-Dicke

A idéia central deste método é o *princípio de Mach* que diz que as propriedades de inércia de um corpo vêm da aceleração deste corpo com relação à distribuição de massa do universo, o que significa que as massas inerciais das partículas elementares não são constantes fundamentais mas sim representações das interações dessas partículas com um campo escalar Φ que cobre todo o universo e que está relacionado com a densidade do universo. Com isso, como a massa das partículas elementares só pode ser medida a partir de suas acelerações gravitacionais Gm/r^2 , a constante gravitacional G também não pode

ser considerada uma constante e sim relacionada com o valor médio deste campo escalar Φ .

A equação de campo mais simples que descreve este campo escalar Φ pode ser escrita como [19]

$$\tilde{\square}\Phi = 4\pi\lambda\tilde{T}_{M\mu}^{\mu}, \quad (4.5)$$

onde $\tilde{\square}$ representa o operador d'Alembertiano no referencial físico, λ é uma constante de acoplamento e $\tilde{T}_{M\nu}^{\mu}$ é o tensor energia-momento de matéria do universo. A partir deste ponto, pode ser feita uma aproximação do valor médio de Φ se calcularmos o valor do potencial central de um gás em uma esfera de raio igual ao raio do universo $R \sim 10^{28} \text{ cm}$ e densidade igual a $\rho \sim 10^{-29} \text{ g cm}^{-3}$. Isto fornece um valor médio igual a

$$\langle\Phi\rangle \sim \lambda\rho R^2 \sim \lambda \times 10^{27} \text{ g cm}^{-1}. \quad (4.6)$$

Note que $10^{27} \text{ g cm}^{-1}$ é um resultado razoável se comparado com a constante $1/G = 1.35 \times 10^{28} \text{ g cm}^{-1}$ e então podemos normalizar Φ para escrever

$$\langle\Phi\rangle \simeq \frac{1}{G}, \quad (4.7)$$

onde fizemos λ igual a unidade já que não estamos interessados no valor exato da relação mas sim no fato de que, mais uma vez, podemos ver claramente que G não é uma constante e sim uma função do tempo cósmico. Sendo assim, a equação de campo correta da gravitação é obtida substituindo G por $1/\Phi$ e incluindo o tensor energia-momento do campo Φ na fonte do campo gravitacional

$$\tilde{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{R} = -\frac{8\pi}{\Phi}[\tilde{T}_M^{\mu\nu} + \tilde{T}_\Phi^{\mu\nu}]. \quad (4.8)$$

No entanto, não podemos perder de vista o princípio de equivalência e, assim temos a exigência de que apenas a métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$, e não o campo escalar Φ , entra nas equações de movimento de partículas e fótons. Portanto, a equação que descreve a troca de energia entre matéria e gravitação é dada por

$$\tilde{T}_M^\mu{}_{\nu;\mu} \equiv \frac{\partial \tilde{T}_M^\mu{}_\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\rho}^\mu \tilde{T}_M^\rho{}_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \tilde{T}_M^\mu{}_\rho = 0, \quad (4.9)$$

que é a mesma relação obtida na relatividade geral. Multiplicando a equação (4.8) por Φ e aplicando a derivada covariante em toda a expressão obtemos

$$(\tilde{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{R})_{;\mu}\Phi + (\tilde{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{R})\Phi_{;\mu} = -8\pi[\tilde{T}_M^{\mu\nu}{}_{;\mu} + \tilde{T}_\Phi^{\mu\nu}{}_{;\mu}]. \quad (4.10)$$

Utilizando a equação (4.9) e a identidade de Bianchi ($\tilde{G}^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$) obtemos

$$\Phi_{;\mu}\tilde{R}^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\nu\Phi_{;\mu}\tilde{R} = -8\pi\tilde{T}_\Phi^\mu{}_{\nu;\mu}; \quad (4.11)$$

e o nosso objetivo será calcular cada termo desta equação. O tensor simétrico mais geral que pode ser construído em termos do próprio campo escalar Φ e da primeira ou segunda derivadas do campo escalar é

$$\tilde{T}_\Phi^\mu{}_\nu = A(\Phi)\Phi_{;\mu}\Phi_{;\nu}{}^\mu + B(\Phi)\delta^\mu{}_\nu\Phi_{;\rho}\Phi_{;\rho}{}^\rho + C(\Phi)\Phi_{;\nu}{}^\mu + \delta^\mu{}_\nu D(\Phi)\tilde{\square}\Phi. \quad (4.12)$$

Calculando a derivada covariante deste tensor temos

$$\begin{aligned} \tilde{T}_\Phi^\mu{}_{\nu;\mu} &= A'(\Phi)\Phi_{;\mu}\Phi_{;\nu}{}^\mu + A(\Phi)\Phi_{;\mu}{}^\mu\Phi_{;\nu} + A(\Phi)\Phi_{;\nu}{}^\mu\Phi_{;\mu} + A(\Phi)\Phi_{;\nu;\mu}{}^\mu \\ &+ B'(\Phi)\Phi_{;\mu}\delta^\mu{}_\nu\Phi_{;\rho}\Phi_{;\rho}{}^\rho + B(\Phi)\delta^\mu{}_\nu\Phi_{;\rho;\mu}\Phi_{;\rho}{}^\rho + B(\Phi)\delta^\mu{}_\nu\Phi_{;\rho}\Phi_{;\rho}{}^\rho{}_{;\mu} \\ &+ C'(\Phi)\Phi_{;\mu}\Phi_{;\nu}{}^\mu + C(\Phi)\Phi_{;\nu;\mu}{}^\mu + \delta^\mu{}_\nu D'(\Phi)\Phi_{;\mu}\Phi_{;\rho}{}^\rho + \delta^\mu{}_\nu D(\Phi)\Phi_{;\rho;\mu}{}^\rho, \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde $A(\Phi)_{;\mu} = A'(\Phi)\Phi_{;\mu}$ e a "linha" denota derivada com relação a Φ . Desta forma temos

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\Phi\nu;\mu}^{\mu} &= [A'(\Phi) + B'(\Phi)]\Phi_{;\mu}^{\mu}\Phi_{;\nu}\Phi_{;\mu} + [A(\Phi) + D'(\Phi)]\Phi_{;\nu}\tilde{\square}\Phi \\ &+ [A(\Phi) + 2B(\Phi) + C'(\Phi)]\Phi_{;\mu}^{\mu}\Phi_{;\nu}\Phi_{;\mu} + D(\Phi)(\tilde{\square}\Phi)_{;\nu} + C(\Phi)\tilde{\square}(\Phi_{;\nu}). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Como as derivadas covariantes normalmente não comutam, podemos definir o comutador de derivadas covariantes de um tensor qualquer como sendo

$$V_{\lambda;\kappa;\nu} - V_{\lambda;\nu;\kappa} = V_{\sigma}\tilde{R}^{\sigma}_{\lambda\nu\kappa} \quad (4.15)$$

e então o primeiro termo da equação (4.11) será dado por

$$\Phi_{;\sigma}\tilde{R}^{\sigma}_{\nu} = \Phi_{;\mu;\nu}^{\mu} - \Phi_{;\nu;\mu}^{\mu} = (\tilde{\square}\Phi)_{;\nu} - \tilde{\square}(\Phi_{;\nu}). \quad (4.16)$$

Além disso, calculando o traço da equação (4.8) e utilizando a equação (4.5) obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{R} &= -\frac{8\pi}{\Phi}[\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{T}_M^{\mu\nu} + \tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{T}_{\Phi}^{\mu\nu}] \\ \implies \tilde{R} - 2\tilde{R} &= -\frac{8\pi}{\Phi}[\tilde{T}_{M\mu}^{\mu} + \tilde{T}_{\Phi\mu}^{\mu}] \\ \implies \tilde{R} &= \frac{8\pi}{\Phi} \left[\frac{1}{4\pi\lambda}\tilde{\square}\Phi + (A(\Phi) + 4B(\Phi)\Phi_{;\mu}^{\mu} + (C(\Phi) + 4D(\Phi))\tilde{\square}\Phi) \right]. \end{aligned}$$

Desta forma, o lado esquerdo da equação (4.11) fica dado por

$$\begin{aligned} \Phi_{;\mu}\tilde{R}^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}\Phi_{;\mu}\tilde{R} &= (\tilde{\square}\Phi)_{;\nu} - \tilde{\square}(\Phi_{;\nu}) - \\ &- \frac{4\pi}{\Phi}\Phi_{;\nu} \left[\left(\frac{1}{4\pi\lambda} + C(\Phi) + 4D(\Phi) \right) \tilde{\square}\Phi + (A(\Phi) + 4B(\Phi))\Phi_{;\mu}^{\mu} \right]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Quando substituirmos as equações (4.13) e (4.17) em (4.11), podemos verificar que

$$1 = -8\pi D(\Phi),$$

$$-1 = -8\pi C(\Phi),$$

$$-\frac{4\pi}{\Phi} \left(\frac{1}{4\pi\lambda} + C(\Phi) + 4D(\Phi) \right) = -8\pi(A(\Phi) + D'(\Phi)),$$

$$-\frac{4\pi}{\Phi}(A(\Phi) + 4B(\Phi)) = -8\pi(A'(\Phi) + B'(\Phi)),$$

$$0 = A(\Phi) + 2B(\Phi) + C'(\Phi).$$

Resolvendo este sistema de equações obtemos a solução única dada por

$$\begin{aligned} A(\Phi) &= \frac{\omega}{8\pi\Phi}, & B(\Phi) &= -\frac{\omega}{16\pi\Phi}, \\ C(\Phi) &= \frac{1}{8\pi}, & D(\Phi) &= -\frac{1}{8\pi}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

onde ω é uma constante adimensional dada por

$$\omega = \frac{1}{\lambda} - \frac{3}{2}$$

ou

$$\lambda = \frac{2}{3 + 2\omega}. \tag{4.19}$$

Finalmente, podemos escrever as equações (4.5) e (4.8) como sendo

$$\tilde{\square}\Phi = \frac{8\pi}{3 + 2\omega} \tilde{T}_{M\mu}^{\mu} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{R} &= -\frac{8\pi}{\Phi}\tilde{T}_{M\mu\nu} - \frac{\omega}{\Phi^2}(\Phi_{;\mu}\Phi_{;\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\Phi_{;\rho}\Phi_{;\rho}) - \\ &= -\frac{1}{\Phi}(\Phi_{;\mu;\nu} - g_{\mu\nu}\tilde{\square}\Phi). \end{aligned} \tag{4.21}$$

4.2.2 Obtenção das Equações de Campo via Método Variacional

As equações de campo para a teoria escalar-tensorial podem ser obtidas a partir da ação

$$\mathcal{S}_{JF} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\Phi \tilde{R} - \frac{\omega(\Phi)}{\Phi} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi \right] + \mathcal{S}_M[\psi_m(x), \tilde{g}_{\mu\nu}(x)], \quad (4.22)$$

onde $\tilde{g}_{\mu\nu}$ é a métrica física que contém os graus de liberdade escalar e tensorial, \tilde{R} é o escalar de curvatura associado à métrica física e $\omega(\Phi)$ é o parâmetro da teoria que depende do campo escalar Φ . Além disso, a ação de matéria é arbitrária mas tem a restrição de conter os campos de matéria ψ_m universalmente acoplados à métrica física para que o princípio da equivalência seja preservado. O subscrito "JF" indica que esta ação está no referencial físico ou referencial de Jordan-Fierz.

Note que o funcional (4.22) é semelhante ao funcional (4.1) porém não são iguais. Enquanto que (4.1) está escrito em termos da métrica $g_{\mu\nu}$ que é uma componente da métrica física, o funcional (4.22) está escrito em termos da própria métrica física $\tilde{g}_{\mu\nu}$. Além disso, o parâmetro ω , que no funcional (4.1) é constante, em (4.22) é uma função do campo escalar Φ .

Variando-se a ação (4.22) com relação à métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ e com relação ao campo escalar Φ , obtemos respectivamente as equações de Einstein "modificadas" e a equação que descreve a dinâmica do campo Φ , dadas por

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{R} &= \frac{8\pi}{\Phi} \tilde{T}_{\mu\nu} + \frac{1}{\Phi} (\tilde{\nabla}_\nu \Phi_{,\mu} - \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\square} \Phi) + \frac{\omega(\Phi)}{\Phi^2} \\ &\times \left(\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \partial_\alpha \Phi \partial^\alpha \Phi \right), \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\tilde{\square} \Phi = \frac{1}{2\omega(\Phi) + 3} \left(8\pi \tilde{T} - \frac{d\omega}{d\Phi} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi \right), \quad (4.24)$$

além da conservação do tensor energia-momento (referencial físico)

$$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{T}^\mu{}_\nu = 0, \quad (4.25)$$

e, neste caso, o "til" nos operadores denota que estes estão construídos no referencial de Jordan-Fierz ou referencial físico. Além disso,

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{R}$$

é o tensor de Einstein no referencial de Jordan-Fierz e

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\delta \mathcal{S}_M}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} \quad (4.26)$$

é o tensor energia-momento da matéria com $\tilde{T} \equiv \tilde{T}^\mu{}_\mu$ sendo o traço do tensor energia-momento.

Ao analisarmos as equações (4.23) e (4.24), vemos que se \tilde{T} for nulo e se o campo escalar Φ for constante, a equação (4.23) se reduz à equação de Einstein usual enquanto que a equação (4.24) torna-se uma identidade se identificarmos a constante gravitacional como sendo o inverso do campo escalar, isto é, $G = 1/\Phi$. O importante aqui é ressaltar que qualquer solução exata das equações de Einstein é uma solução particular das equações modificadas da teoria escalar-tensorial, onde o traço é nulo e o campo escalar é constante. De um certo ponto de vista, a teoria escalar-tensorial da gravitação é uma teoria mais "geral" que a relatividade geral de Einstein uma vez que esta é uma solução particular das equações da teoria escalar-tensorial.

Note que as equações (4.23) e (4.24) são análogas às equações (4.20) e (4.21) e portanto as equações de Brans-Dicke também possuem as equações de Einstein como solução particular mas com a diferença que em (4.21) o parâmetro ω é constante.

Desta forma, temos um conjunto de equações diferenciais que contêm o campo escalar Φ na fonte do campo gravitacional. No entanto, as equações (4.23) e (4.24) são bastante complexas de se trabalhar por conterem termos de acoplamento entre $\tilde{g}_{\mu\nu}$ e Φ . Por esta razão, podemos aplicar uma transformação conforme na ação (4.22), para desacoplar os graus de liberdade escalar e tensorial, dada por

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(\varphi)g_{\mu\nu} \quad (4.27)$$

e este novo referencial é chamado de referencial conforme ou de Einstein. A ação (4.22) no novo referencial fica

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G_*} \int d^4x \sqrt{-g} [R - 2g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi] + \mathcal{S}_M [\psi_m, \Omega^2(\varphi)g_{\mu\nu}], \quad (4.28)$$

onde R é o escalar de curvatura associado à métrica $g_{\mu\nu}$ e G_* é a constante da gravitação média. Ao aplicarmos a transformação conforme na ação (4.22) obtemos a ação (4.28) se definirmos

$$\alpha(\varphi) \equiv \frac{d \ln \Omega(\varphi)}{d\varphi} = \frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{d\varphi} = \frac{\Omega'}{\Omega} \quad (4.29)$$

e desta forma os campos φ e Φ se relacionam por

$$G_* \Omega^2(\varphi) = \frac{1}{\Phi}. \quad (4.30)$$

Note que, neste referencial, a função $\Omega(\varphi)$ é arbitrária, ou seja, a especificação da função $\Omega(\varphi)$ define univocamente com qual teoria escalar-tensorial estamos trabalhando. Além disso, para dar uma definição unívoca para as grandezas $g_{\mu\nu}$, φ e $\Omega(\varphi)$ no referencial conforme em termos das grandezas correspondentes $\tilde{g}_{\mu\nu}$, Φ e $\omega(\Phi)$ no referencial físico, devemos impor que

$$\alpha^2(\varphi) = \frac{1}{2\omega(\Phi) + 3}. \quad (4.31)$$

Assim, variando-se a ação (4.28) com relação a $g_{\mu\nu}$ e com relação ao campo escalar φ obtemos respectivamente as equações de Einstein modificadas e a equação de dinâmica do campo φ , no referencial conforme, dadas por

$$R_{\mu\nu} = 2\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + 8\pi G_*(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T), \quad (4.32)$$

$$G_{\mu\nu} = 2\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi + 8\pi G_*T_{\mu\nu}, \quad (4.33)$$

$$\square\varphi = -4\pi G_*\alpha(\varphi)T, \quad (4.34)$$

onde agora o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ é obtido a partir de

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\mathcal{S}_M}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (4.35)$$

e, neste novo referencial, não se conserva, isto é, $\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = \alpha(\varphi)T\nabla_\nu\varphi$. Temos ainda que, com o auxílio da equação (4.27), podemos relacionar as quantidades dos dois referenciais como

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \Omega^{-2}T_{\mu\nu}, \quad (4.36)$$

o que implica também em $\tilde{T}^\mu{}_\nu = \Omega^{-4}T^\mu{}_\nu$ e $\tilde{T}^{\mu\nu} = \Omega^{-6}T^{\mu\nu}$.

Note que, apesar do campo escalar φ não estar acoplado à parte material do Lagrangeano para respeitar o princípio de equivalência, ele está acoplado ao traço do tensor energia-momento como mostra a equação (4.34) o que evidencia que, de fato, o campo escalar φ está mediando a força gravitacional junto com o gráviton. Como dissemos anteriormente, o campo escalar φ poderia ter sido inserido na teoria apenas colocando o seu termo cinético no Lagrangeano de Einstein mas, desta forma, não teríamos obtido a equação (4.34). Como φ não está acoplado à parte material do Lagrangeano em (4.22),

fica claro que o termo responsável pela equação (4.34) é justamente o termo de acoplamento não-mínimo em (4.22). Isto justifica o termo de acoplamento não-mínimo na teoria. O princípio de equivalência é preservado ao se excluir o acoplamento de φ com a parte material do Lagrangeano e, com o acoplamento não-mínimo entre φ e o escalar de curvatura, recuperamos a contribuição do campo escalar na força gravitacional quando este se acopla com o traço do tensor energia-momento em (4.34).

Outra informação importante que podemos tirar de (4.34) é a de que o campo escalar φ só interage com campos materiais massivos, não interagindo, com campos sem massa, como o fóton. Isto significa que a deflexão da luz na presença de matéria não é afetada pelo campo escalar, sendo responsabilidade exclusiva do tensor métrico, ou em outras palavras, da geometria do espaço-tempo definida pela matéria. Mais uma vez, a teoria escalar-tensorial recupera resultados obtidos pela relatividade geral.

4.3 Solução do Tipo Vortex em Teoria Escalar-Tensorial

O raciocínio utilizado para obter uma solução do tipo vortex em teoria escalar-tensorial será o mesmo aplicado na seção 3.2 deste trabalho². Mais uma vez a corda será dividida em duas regiões: uma região I externa à corda ($r > r_0$) e uma região II interna à corda ($r < r_0$) onde o comportamento dos campos são os mesmos que na seção 3.2. Como estamos interessados em um modelo que dê origem à corda cósmica, vamos utilizar a ação de matéria com o auxílio do Lagrangeano (2.2)

$$\mathcal{S}_M = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{2} D_\mu \phi D^\mu \phi^* - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi - \eta^2)^2 \right], \quad (4.37)$$

²Como o método de obtenção das equações de campo é análogo ao da seção 3.2, esta seção apresentará apenas os resultados relevantes para a conclusão do trabalho, sem detalhamento de contas.

onde $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$ e o tensor de Faraday é dado por $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. De agora em diante vamos considerar todos os campos como sendo apenas a ordem zero de uma expansão. Isto significa que estamos interessados na corda como sendo fonte dos campos gravitacional e do dilaton. Desta forma, com o objetivo de encontrar o tensor energia-momento relevante, a métrica no referencial de Einstein será a métrica de Minkowski, enquanto que o dilaton assume um valor constante, de tal forma que, nesta ordem, a gravitação é descrita pela relatividade geral em ambos os referenciais. A métrica de Jordan-Fierz pode ser escrita, em coordenadas cilíndricas, como sendo

$$\tilde{g}_0^{\mu\nu} = \Omega_0^{-2} \eta^{\mu\nu} = \Omega_0^{-2} \text{Diag} \left(1, -1, -1, -\frac{1}{r^2} \right) \quad (4.38)$$

e a constante de Newton fica dada por $\tilde{\Phi}_0^{-1} = G_* \Omega_0^2$.

Uma configuração de vortex estático que é solução das equações de Euler-Lagrange provenientes do funcional acima tem a forma dada por

$$\varphi = h(r)e^{i\theta} \quad e \quad A_\mu = \frac{1}{q}[Q(r) - 1]\delta_\mu^\theta. \quad (4.39)$$

As equações de campo obtidas a partir da ação (4.37) são

$$h'' - \frac{h'}{r} = h \left[\frac{Q^2}{r^2} + 4\lambda\Omega_0^2(h^2 - \eta^2) \right], \quad (4.40)$$

$$Q'' - \frac{Q'}{r} = q^2 Q \Omega_0^2 h^2 \quad (4.41)$$

e as condições de contorno para que estes campos descrevam um vortex do tipo linha são

$$h(0) = 0, \quad Q(0) = 1$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h(r) = \eta, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} Q(r) = 0. \quad (4.42)$$

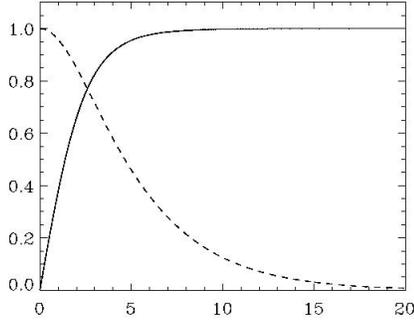


Figura 4.1: Eixo y: Campos $X(\rho)$ e $Q(\rho)$; Eixo x: Valor de ρ com relação a distância ao centro da corda.

As equações de campo obtidas podem ser resolvidas numericamente com o auxílio das condições de contorno. Uma solução possível está representada na figura (4.1) com $\Omega_0 = 1$. Note que a escolha de $\Omega_0 = 1$ significa uma métrica de Minkowski, ou seja, os campos encontrados na seção 3.2 têm esta mesma solução. Além disso, a figura está representada em termos de quantidades adimensionais $X = h/\eta$ e $Q(\rho)$ em função de uma distância adimensional com relação ao centro da corda

$$\rho \equiv \frac{r}{r_h}, \quad r_h \equiv \lambda^{-1/2} \eta^{-1}, \quad (4.43)$$

onde r_h é o comprimento de onda Compton do campo de Higgs. A figura (4.1) foi adaptada de [20].

Como queremos encontrar a solução interna da corda, devemos solucionar a equação (3.15) que nos fornece

$$\tilde{T}_z^z = V + \frac{\Omega_0^{-2}}{2} \left[h'^2 + \frac{1}{r^2} \left(h^2 Q^2 + \frac{Q'^2}{q^2 \Omega_0^2} \right) \right], \quad (4.44)$$

$$\tilde{T}_r^r = V - \frac{\Omega_0^{-2}}{2} \left[h'^2 - \frac{1}{r^2} \left(h^2 Q^2 - \frac{Q'^2}{q^2 \Omega_0^2} \right) \right], \quad (4.45)$$

$$\tilde{T}_\theta^\theta = V + \frac{\Omega_0^{-2}}{2} \left[h'^2 - \frac{1}{r^2} \left(h^2 Q^2 + \frac{Q'^2}{q^2 \Omega_0^2} \right) \right], \quad (4.46)$$

e temos também que $\tilde{T}_t^t = \tilde{T}_z^z$. Esta ordem zero do tensor energia-momento deveria ser, em princípio, a fonte para as equações de Einstein modificadas.

No entanto, temos mais uma vez a intenção de adotar o "ponto de vista macroscópico" já que queremos descrever a dinâmica da corda. Vamos considerar a corda como sendo descrita por uma ação de superfície e vamos integrar o tensor energia-momento sobre todos os graus de liberdade transversos. Como a corda está alinhada ao longo do eixo z , as coordenadas internas podem ser identificadas como sendo t e z e as transversas como sendo r e θ . Desta forma, vamos reescrever as componentes do tensor energia-momento de tal maneira que a energia por unidade de comprimento e a tensão são uniformes e as componentes transversas são nulas. Assim, no referencial conforme, temos

$$T^t_t = T^z_z = -\Omega^{-4}\mu$$

$$T^r_r = T^\theta_\theta = 0 \tag{4.47}$$

onde $\mu > 0$ é uma densidade uniforme de energia.

Nas próximas seções vamos aplicar as equações modificadas de Einstein no cálculo das métricas interna e externa de uma corda cósmica e comparar os resultados com as métricas correspondentes encontradas no contexto da relatividade geral.

4.4 A Métrica Externa

A métrica externa do espaço-tempo de uma corda deve ser estática, com simetria cilíndrica e solução de vácuo das equações de Einstein modificadas. Podemos utilizar a mesma métrica que na seção 3.3 dada por

$$ds^2 = e^{2\nu(r)}dt^2 - e^{2\psi(r)}d\theta^2 - e^{2\lambda}(dr^2 + dz^2).$$

No entanto, podemos considerar que o sistema é invariante de Lorentz na direção z e então temos que $g_{tt} = -g_{zz}$. Além disso, podemos reescrever a métrica para que esta descreva o espaço-tempo da corda em termos da distância radial ao centro da corda. Assim,

$$ds^2 = e^{2\nu(r)}(dt^2 - dz^2) - e^{2\psi(r)}d\theta^2 - dr^2. \quad (4.48)$$

Temos também que, como estamos interessados na solução da parte externa da corda, o tensor energia-momento nesta região é nulo. As equações de Einstein modificadas podem ser facilmente calculadas³ com o auxílio das equações (4.32) e (4.33) fornecendo as equações de campo

$$R^t_t = \nu'' + 2\nu'^2 + \nu'\psi' = 0, \quad (4.49)$$

$$R^z_z = \nu'' + 2\nu'^2 + \nu'\psi' = 0, \quad (4.50)$$

$$R^\theta_\theta = 2\nu'\psi' + \psi'' + \psi'^2 = 0, \quad (4.51)$$

$$G^r_r = -\nu'^2 - 2\nu'\psi' = -\varphi'^2. \quad (4.52)$$

Além disso, podemos definir o determinante da métrica como sendo [21]

$$u = \sqrt{-g} = \sqrt{e^{4\nu}e^{2\psi}} = e^{(\psi+2\nu)}, \quad (4.53)$$

e então

$$u' = (2\nu' + \psi')u \quad e \quad u'' = (2\nu'' + \psi'')u + (2\nu' + \psi')^2u. \quad (4.54)$$

³Ver apêndice B.

Desta forma podemos escrever

$$\frac{u''}{u} = 2\nu'' + \psi'' + 4\nu'^2 + \psi'^2 + 4\nu'\psi'. \quad (4.55)$$

Note que se somarmos as componentes $R^t_t + R^z_z + R^\theta_\theta = 0$ obtemos exatamente $u''/u = 0$. Podemos também obter R^t_t se fizermos

$$\frac{1}{e^{(2\nu+\psi)}} [e^{(2\nu+\psi)} 2\nu']' = \frac{1}{2u} \left[u \frac{g'_{tt}}{g_{tt}} \right]' = 2\nu'^2 + \nu'' + \nu'\psi' = R^t_t \quad (4.56)$$

e as outras componentes são obtidas de maneira análoga. Das equações de Einstein modificadas temos também que

$$\begin{aligned} \square\varphi &= \frac{1}{u} \partial_r [u g^{rr} \partial_r] \varphi = 0 \\ \implies \frac{1}{u} (u\varphi)' &= 0. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Assim, podemos reduzir o sistema de equações (4.49-4.52) à equações diferenciais em termos de u e das componentes da métrica da seguinte forma

$$R^i_i = \frac{1}{2u} \left[u \frac{g'_{ii}}{g_{ii}} \right]' = 0 \quad (i = t, z, \theta), \quad (4.58)$$

$$\sum_i R^i_i = \frac{u''}{u} = 0 \quad (i = t, z, \theta), \quad (4.59)$$

$$\frac{1}{u} (u\varphi)' = 0. \quad (4.60)$$

Da equação (4.59) segue que u é uma função linear de r ($u \sim Br$). Assim, de (4.58) obtemos

$$g_{ii} = A_j \left(\frac{r}{r_0} \right)^{C_j}, \quad (4.61)$$

e de (4.60) temos que

$$(Br\varphi)' = 0 \implies Br\varphi = \text{const.} \quad (4.62)$$

$$\implies \varphi = \varphi_0 + \kappa \ln(r/r_0), \quad (4.63)$$

onde $j = 1, 2$ está relacionado com cada componente e A_j, C_j e κ são constantes que serão determinadas adiante. Escrevendo a solução para u

$$u = Br \implies (g_{tt}g_{zz}g_{\theta\theta})^{1/2} = Br \quad (4.64)$$

$$\implies (A_1^2 A_2 (r/r_0)^{2C_1+C_2})^{1/2} = Br, \quad (4.65)$$

podemos escrever as seguintes relações entre as constantes

$$A_1(A_2)^{1/2} = B, \quad (4.66)$$

$$2C_1 + C_2 = 2, \quad (4.67)$$

e utilizando a componente G^r_r obtemos

$$\kappa^2 = C_1 \left(1 - \frac{3}{4}C_1\right). \quad (4.68)$$

A constante A_1 pode ser absorvida por uma redefinição de t e z . Assim, a métrica do vácuo tem a forma final dada por

$$ds^2 = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{C_1} (dt^2 - dz^2) - dr^2 - B^2 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2-2C_1} d\theta^2, \quad (4.69)$$

onde as constantes C_1, B e κ são totalmente determinadas quando introduzirmos os campos de matéria.

O tensor de Ricci para a métrica (4.69) será regular apenas se $\varphi = \varphi_0 = \text{const.}$, ou seja, se $\kappa = 0$. Isto significa que $C_1 = 4/3$ ou $C_1 = 0$ sendo que este último valor representa uma métrica cônica e, desta forma, $B^2 = A_2$ pode ser interpretado como um desvio angular.

4.5 A Métrica Interna

Para uma corda estática com simetria cilíndrica, podemos utilizar a métrica (4.48)

$$ds^2 = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\psi(r)} d\theta^2 - e^{2\lambda(r)} (dr^2 - dz^2),$$

e as equações de Einstein modificadas para obtermos as seguintes equações de campo

$$G^t_t = e^{-2\lambda}[\psi'' + \psi'^2 + \lambda''] = e^{-2\lambda(r)}\varphi'^2 - 8\pi G_* \Omega^4(\varphi)\mu, \quad (4.70)$$

$$G^\theta_\theta = e^{-2\lambda}[\nu'' + \nu'^2 + \lambda''] = e^{-2\lambda(r)}\varphi'^2, \quad (4.71)$$

$$G^r_r = e^{-2\lambda}[\nu'\lambda' + \psi'\lambda' + \nu'\psi'] = -e^{-2\lambda(r)}\varphi'^2, \quad (4.72)$$

$$G^z_z = e^{-2\lambda}[\nu'\psi' + \nu'' + \nu'^2 + \psi'' + \psi'^2 - \nu'\lambda' - \psi'\lambda'] = e^{-2\lambda}\varphi'^2 - 8\pi G_* \Omega^4(\varphi)\mu, \quad (4.73)$$

$$\square\varphi = e^{-2\lambda}[\nu'\varphi' + \psi'\varphi' + \varphi''] = 8\pi G_* \Omega^4(\varphi)\alpha(\varphi)\mu, \quad (4.74)$$

onde $T^t_t = T^z_z = -\Omega^4(\varphi)\mu$. No entanto, podemos provar que este conjunto de equações diferenciais não possui solução exata⁴. Desta forma, consideraremos uma solução para cordas cósmicas em uma aproximação de campo fraco. Nesta aproximação a métrica com a qual estamos trabalhando difere infinitesimalmente da métrica de Minkowski, ou seja,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}, \quad (4.75)$$

onde $\varepsilon \ll 1$ e o termo φ'^2 nas equações de Einstein modificadas é desprezado. Além disso, devemos assumir a condição de contorno de que o espaço-tempo é assintoticamente chato, isto é, se r é a distância radial à corda, então

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h_{\mu\nu} = 0. \quad (4.76)$$

⁴Ver apêndice A.

Como $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}$ deve ser igual a um escalar, devemos ter que $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \varepsilon h^{\mu\nu}$. Como $\eta_{\mu\nu}$ é constante, podemos redefinir a conexão métrica como sendo

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} &= \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_{\mu}g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}) \\ \implies \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} &= \frac{1}{2}(\eta^{\rho\sigma} - \varepsilon h^{\rho\sigma})[\partial_{\mu}(\eta_{\sigma\nu} + \varepsilon h_{\sigma\nu}) + \partial_{\nu}(\eta_{\sigma\mu} + \varepsilon h_{\sigma\mu}) - \partial_{\sigma}(\eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu})] \\ \implies \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} &= \frac{1}{2}(\eta^{\rho\sigma} - \varepsilon h^{\rho\sigma})[\varepsilon\partial_{\mu}h_{\sigma\nu} + \varepsilon\partial_{\nu}h_{\sigma\mu} - \varepsilon\partial_{\sigma}h_{\mu\nu}] \\ \implies \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} &= \frac{1}{2}\varepsilon[\partial_{\mu}h^{\rho}_{\nu} + \partial_{\nu}h^{\rho}_{\mu} - \partial^{\rho}h_{\mu\nu}].\end{aligned}\tag{4.77}$$

Com um pouco mais de álgebra podemos mostrar que o tensor de Einstein, nesta aproximação, é dado por

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon(\partial_{\nu}\partial_{\rho}h^{\rho}_{\mu} + \partial_{\mu}\partial_{\rho}h^{\rho}_{\nu} - \square h_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h - \eta_{\mu\nu}\partial_{\rho}\partial_{\sigma}h^{\rho\sigma} + \eta_{\mu\nu}\square h),\tag{4.78}$$

que pode ser escrito como

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\varepsilon\square(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}h_{\rho\sigma}),\tag{4.79}$$

se definirmos o *calibre de Fock* dado por (em coordenadas harmônicas)

$$\partial_{\mu}(h^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}h) = 0,\tag{4.80}$$

onde h é o traço de $h_{\mu\nu}$. No entanto, na aproximação de campo fraco, um corpo percorre uma distância δx^i com velocidade v em um tempo δt , ou seja,

$$\delta x^i \sim \text{velocidade} \times \text{tempo} \sim v\delta t \sim \frac{v}{c}\delta t \sim \varepsilon\delta\tau\tag{4.81}$$

onde c é a velocidade da luz e $v/c \sim \varepsilon$. Assim,

$$\varepsilon/\delta x^i \sim 1/\delta\tau,$$

e podemos dizer que a aproximação de campos fracos é uma aproximação a baixas velocidades onde podemos escrever, para uma dada função f ,

$$\varepsilon \partial_i f \sim \partial_t f. \quad (4.82)$$

Reescrevendo (4.79) temos

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}\varepsilon(\varepsilon\partial_i h_{\mu\nu} - \partial_i h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\varepsilon\partial_i h_{\rho\sigma} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\partial_i h_{\rho\sigma}) \\ \implies G_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}\varepsilon\partial_i h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\partial_t h_{\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Assim, podemos escrever a equação de Einstein modificada linearizada como sendo

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}\varepsilon\Box(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}h_{\rho\sigma}) = \kappa T_{\mu\nu} \\ \implies \nabla^2 h_{\mu\nu} &= 16\pi G_*(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}T_{\rho\sigma}). \end{aligned}$$

onde o termo ε foi omitido sem que afete o resultado final.

Como estamos aplicando uma aproximação de campo fraco, devemos também linearizar as outras grandes relacionadas à corda. Então,

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1,$$

$$\Omega(\varphi) = \Omega(\varphi_0) + \varepsilon \frac{\partial\Omega(\varphi_0)}{\partial\varphi} \varphi_1,$$

$$T_{\mu\nu} = T_{(0)\mu\nu} + \varepsilon T_{(1)\mu\nu}.$$

No processo de linearização, o tensor energia-momento tende para uma distribuição de Dirac no plano (t, z) constante. Assim, em coordenadas cartesianas, temos

$$T_{tt} = -T_{zz} = \Omega^2(\varphi_0)\mu\delta(x)\delta(y), \quad (4.84)$$

$$T_{xx} = T_{yy} = 0. \quad (4.85)$$

Desta forma, as equações de Einstein modificadas, em coordenadas cartesianas, que devemos resolver para obtermos a métrica externa de uma corda são

$$\nabla^2 h_{\mu\nu} = 16\pi G_*(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}T_{\rho\sigma}), \quad (4.86)$$

$$\square\varphi_1 = -\nabla^2\varphi_1 = -4\pi G_*\alpha(\varphi_0)T_{(0)}. \quad (4.87)$$

Sabendo que $\nabla^2 \ln(r/r_0) = 2\pi\delta(x)\delta(y)$, a solução de (4.20) é

$$\varphi_1 = 4G_*\alpha(\varphi_0)\mu\Omega^2(\varphi_0)\ln\left(\frac{r}{r_0}\right). \quad (4.88)$$

Esta solução é compatível, em primeira ordem, com a solução no vácuo se e somente se

$$\kappa_{lin} = 4G_*\alpha(\varphi_0)\mu\Omega^2(\varphi_0). \quad (4.89)$$

De (4.68) podemos ver que os únicos valores possíveis para C_1 são $C_1 = 0$ e $C_1 = 4/3$. No entanto, o resultado que tem significado físico é $C_1 = 0$ enquanto que o outro valor corresponde a uma métrica não-física [11, 13, 22].

Da equação (4.86) obtemos

$$\nabla^2 h_{tt} = 16\pi G_*(T_{tt} - \frac{1}{2}\eta_{tt}2\mu\delta(x)\delta(y)) \implies h_{tt} = 0. \quad (4.90)$$

$$\nabla^2 h_{zz} = 16\pi G_*(T_{zz} - \frac{1}{2}\eta_{zz}2\mu\delta(x)\delta(y)) \implies h_{zz} = 0. \quad (4.91)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 h_{xx} &= 16\pi G_*(T_{xx} - \frac{1}{2}\eta_{xx}2\mu\delta(x)\delta(y)), \\ \implies h_{xx} &= 8G_*\Omega^2(\varphi_0)\mu\ln(r/r_0). \end{aligned} \quad (4.92)$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 h_{yy} &= 16\pi G_*(T_{yy} - \frac{1}{2}\eta_{yy}2\mu\delta(x)\delta(y)), \\ \implies h_{yy} &= 8G_*\Omega^2(\varphi_0)\mu \ln(r/r_0).\end{aligned}\tag{4.93}$$

De (4.75), temos

$$ds^2 = dt^2 - dz^2 - [1 - 8G_*\Omega^2(\varphi_0)\mu \ln(r/r_0)]dx^2 - [1 - 8G_*\Omega^2(\varphi_0)\mu \ln(r/r_0)]dy^2.\tag{4.94}$$

Voltando para coordenadas cilíndricas

$$ds^2 = dt^2 - dz^2 - (1 - 8G_*\Omega^2(\varphi_0)\mu \ln(r/r_0))dr^2 - r^2(1 - 8G_*\Omega^2(\varphi_0)\mu \ln(r/r_0))d\theta^2\tag{4.95}$$

Aplicando a transformação $[1 - 8G_*\Omega^2(\varphi_0)\mu \ln(r/r_0)]r^2 = [1 - 8G_*\Omega^2(\varphi_0)\mu]\tilde{r}^2$, em primeira ordem em $G\mu$ [13]

$$ds^2 = dt^2 - dz^2 - d\tilde{r}^2 - \tilde{r}^2[1 - 8G_*\Omega^2(\varphi_0)\mu]d\theta^2.\tag{4.96}$$

Façamos, sem perda de generalidade, $\tilde{r} = r$. Comparando as métricas interna e externa obtemos que $B^2 = 1 - 8G_*\Omega^2(\varphi_0)\mu$ e então o desvio angular causado pela corda no espaço-tempo será, em escalar-tensorial, $\delta\theta = 8\pi G_*\Omega^2(\varphi_0)\mu$. Para obtermos a métrica no referencial de Jordan-Fierz, lembremos que $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(\varphi)g_{\mu\nu}$, onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica no referencial de Einstein. Temos também que

$$\Omega(\varphi) = \Omega(\varphi_0) + \frac{\partial\Omega(\varphi_0)}{\partial\varphi}\varphi_1 = \Omega(\varphi_0)(1 + \alpha(\varphi_0)\varphi_1).$$

Assim, em primeira ordem em $G_*\mu$, temos

$$\begin{aligned}ds^2 &= \Omega^2(\varphi_0)[1 + 8G_*\mu\Omega^2(\varphi_0)\alpha^2(\varphi_0) \ln(r/r_0)] \\ &\times (dt^2 - dz^2 - dr^2 - r^2[1 - 8G_*\Omega^2(\varphi_0)\mu]d\theta^2),\end{aligned}\tag{4.97}$$

com $r > 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Portanto, a métrica (4.97) representa uma corda cósmica neutra na aproximação de campos fracos em teorias escalares tensoriais da gravitação.

4.5.1 Força Gravitacional Exercida pelas Cordas Cóslicas

Ao considerarmos a deflexão da luz na métrica (4.97), vemos que a diferença entre imagens duplas⁵, dada por $\delta\theta = 8\pi G_* \Omega^2(\varphi_0)\mu = 8\pi G_0\mu$, mantém-se inalterada na teoria escalar-tensorial da gravitação. Para cordas originárias na escala de energia de grande unificação (GUT), $\delta\theta \sim 10^{-5}$ rad. Isto significa que, do ponto de vista deste efeito, é impossível distinguir a corda cósmica descrita pela teoria escalar-tensorial da gravitação da descrita pela relatividade geral. Além disso, a corda cósmica em escalar-tensorial exerce uma força em uma partícula teste não-relativística de massa m dada por

$$f = -\frac{M}{2}\nabla h_{00} = -4MG_0\mu\alpha^2(\varphi_0)\frac{1}{r}, \quad (4.98)$$

onde $h_{00} = \Omega^2(\varphi_0)(1 + 8G_0(\varphi_0)\mu\alpha(\varphi_0)\ln(r/r_0))$. Note que a força gravitacional é sempre atrativa e, em escalar-tensorial, é dependente de r . Na figura (4.2) podemos comparar a intensidade da força gravitacional exercida pelas cordas cósmicas considerando teoria escalar-tensorial e relatividade geral.

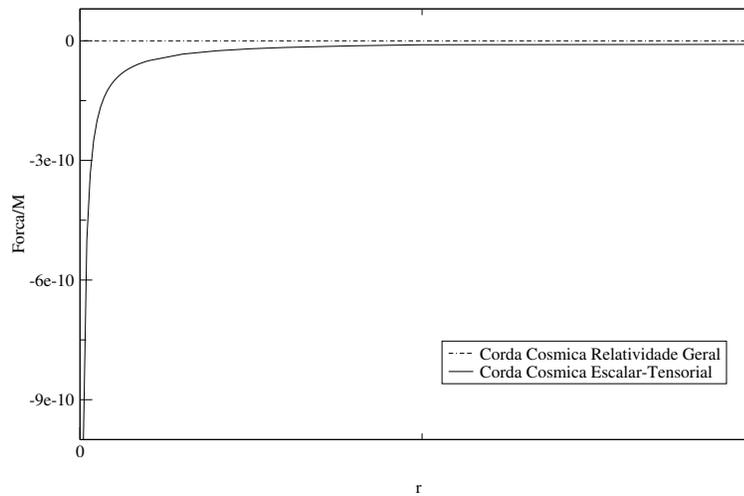


Figura 4.2: Intensidade da força gravitacional de uma corda cósmica em escalar-tensorial (CET) e em relatividade geral (CRG).

⁵Lembrando que $G_*\Omega^2(\varphi_0) = G_0$, onde G_0 é a constante de Newton efetiva.

4.5.2 Movimento de Partículas Teste

A métrica (4.97) apresenta características interessantes ligadas ao fator conforme e desta forma vamos analisar como este fator afeta o movimento de partículas teste neste contexto de teorias escalares-tensoriais. Assim, vamos começar calculando o Lagrangeano de uma partícula teste se movendo em um espaço-tempo do tipo (4.97), que é dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}C(r)[\dot{t}^2 - \dot{z}^2 - \dot{r}^2 - B(r)\dot{\theta}^2], \quad (4.99)$$

onde $C(r)$ e $B(r)$ são dados por

$$B(r) = r^2[1 - 8G_*\Omega^2(\varphi_0)\mu], \quad (4.100)$$

$$C(r) = [1 + 8G_*\Omega^2(\varphi_0)\alpha^2(\varphi_0)\mu \ln(r/r_0)], \quad (4.101)$$

respectivamente. Com o auxílio deste Lagrangeano, podemos calcular os momentos conjugados ($p_\alpha = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}^\alpha$), dados por

$$p_t = E = C(r)\dot{t}, \quad p_\theta = -L = -C(r)B(r)\dot{\theta},$$

$$p_z = -C(r)\dot{z}, \quad p_r = -C(r)\dot{r}, \quad (4.102)$$

onde o "ponto" denota derivada com relação ao tempo-próprio τ . As quantidades E , L e p_z são a energia, o momento angular e a componente z do momento, respectivamente, e são quantidades conservadas devido à simetria do espaço-tempo.

Vamos considerar o movimento de partículas sem massa (por exemplo fótons, neutrinos, etc). Neste caso, $ds^2 = 0$ e de (4.102) podemos escrever as equações de movimento como

$$\dot{t} = E/C(r) \quad e \quad \dot{z} = -p_z/C(r). \quad (4.103)$$

Combinando \dot{t} e \dot{z} temos

$$\frac{\dot{z}}{\dot{t}} = \frac{dz}{dt} = -\frac{p_z}{E}. \quad (4.104)$$

Se considerarmos que um fóton se movimenta em um plano perpendicular ao plano da corda e a uma distância $r = r_c$, temos que o movimento deste fóton ao longo da direção z é nulo. Assim, em $r = r_c$, temos que $p_z = 0$ e, portanto, o fóton (ou qualquer outra partícula sem massa) não sofre qualquer tipo de desvio em sua trajetória com relação à trajetória deste mesmo fóton na presença de uma corda cósmica descrita pela relatividade geral. Este resultado era esperado uma vez que uma partícula sem massa não sofre nenhuma modificação devido à transformação conforme.

Podemos analisar o movimento de partículas massivas através das características do Hamiltoniano dessas partículas. Devido às simetrias do espaço-tempo (4.97) e pelo fato deste espaço-tempo ser estático, o Hamiltoniano, $\mathcal{H} = p_\alpha \dot{x}^\alpha - \mathcal{L}$, é outra quantidade conservada do sistema e portanto podemos normalizá-lo para que seja igual a 1/2 para geodésicas do tipo-tempo. Desta forma temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} = & Et\dot{t} - L\dot{\theta} - C(r)\dot{r}^2 - C(r)\dot{z}^2 - \frac{1}{2}C(r)t^2 + \\ & + \frac{1}{2}C(r)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}C(r)\dot{z}^2 + \frac{1}{2}C(r)B(r)\dot{\theta}^2, \end{aligned} \quad (4.105)$$

Se considerarmos que a partícula está restrita ao plano equatorial, ou seja, $\dot{z} = 0$ e utilizarmos as relações (4.102) obtemos

$$Et\dot{t} - L\dot{\theta} - \frac{1}{2}Et\dot{t} + \frac{1}{2}L\dot{\theta} - \frac{1}{2}C(r)\dot{r}^2 = \frac{1}{2}, \quad (4.106)$$

$$\implies \dot{r}^2 - \frac{1}{C(r)}[Et\dot{t} - L\dot{\theta} - 1] = 0. \quad (4.107)$$

Vamos nos concentrar em movimentos circulares com órbitas estáveis. Assim, temos que satisfazer as seguintes condições simultaneamente

- $\dot{r} = 0$;
- $\partial_r V(r) = 0$, onde $V(r) = -\frac{1}{C(r)}[E\dot{t} - L\dot{\theta} - 1]$;
- $\partial_r^2 V(r) > 0$, para que tenhamos um mínimo.

Desta forma, temos

$$E\dot{t} - L\dot{\theta} - 1 = 0 \quad e \quad \partial_r \left[\frac{1}{C(r)}(E\dot{t} - L\dot{\theta} - 1) \right] = 0. \quad (4.108)$$

Escrevendo \dot{t} e $\dot{\theta}$ em termos das quantidades constantes E e L temos

$$\frac{E^2}{C(r)} - \frac{L^2}{C(r)B(r)} - 1 = 0, \quad (4.109)$$

e também

$$\partial_r \left[\frac{1}{C^2(r)} \left[E^2 - \frac{L^2}{B(r)} - C(r) \right] \right] = 0. \quad (4.110)$$

Resolvendo (4.110) temos

$$\frac{E^2}{C(r)} = \frac{L^2}{C(r)B(r)} + \frac{1}{2} + \frac{B'(r)L^2}{2C'(r)B^2(r)}, \quad (4.111)$$

onde a "linha" denota derivada com relação a r . Substituindo este resultado em (4.109)

temos

$$\frac{B'(r)L^2}{2C'(r)B^2} = \frac{1}{2} \quad (4.112)$$

$$\implies L = \left(\frac{C'(r)B^2(r)}{B'(r)} \right)^{1/2}. \quad (4.113)$$

Substituindo o valor de L em (4.109) temos

$$E^2 = \frac{C'(r)B^2(r)}{B'(r)B(r)} - C(r) \quad (4.114)$$

$$\implies E = \left(\frac{C'(r)B(r) + C(r)B'(r)}{B'(r)} \right)^{1/2}. \quad (4.115)$$

Sabemos que a velocidade angular de uma partícula teste em movimento circular ao redor da corda em uma órbita plana pode ser escrita como $\varsigma = d\theta/dt = \dot{\theta}/\dot{t}$. Desta forma, podemos obter uma expressão para ς em termos dos coeficientes da métrica (4.97) dada por

$$\varsigma = \frac{L}{B(r)E} = \left(\frac{C'(r)}{C'(r)B(r) + B(r)C'(r)} \right)^{1/2} \quad (4.116)$$

$$\implies \varsigma = \frac{\alpha_0}{r(1 - G_0\mu)} \sqrt{\frac{8G_0\mu}{[1 + 8G_0\mu\alpha_0^2 + 8G_0\mu\alpha_0^2 \ln(r/r_0)]}}. \quad (4.117)$$

onde $G_0 = G_*\Omega^2(\varphi_0)$.

Apesar do fator conforme não influenciar partículas sem massa, a velocidade angular de partículas massivas depende do fator conforme, comprovando que o campo escalar φ interage apenas com partículas massivas. No entanto, estes resultados foram obtidos para cordas cósmicas neutras em teorias escalares-tensoriais da gravitação. Se considerarmos outros tipos de cordas, além das cordas neutras, podemos obter resultados diferentes tanto para o movimento de partículas massivas como para as partículas sem massa. As cordas quirais⁶ são um exemplo, onde o fóton, considerando o espaço-tempo correspondente à corda chiral, sofre a ação de uma força na direção positiva do eixo z . Claramente, esta força deve-se exclusivamente à quiralidade da corda já que o fator conforme não atua em partículas sem massa [23].

⁶O tensor energia-momento de cordas quirais não é diagonal. Nestes casos, temos que as componentes não-nulas fora da diagonal dependem de um fator k chamado quiralidade. Para $k = 0$ temos cordas com carga máxima e $k = 1$ temos a corda neutra.

Capítulo 5

Conclusão

Nesta dissertação estudamos as cordas cósmicas neutras utilizando a relatividade geral e a teoria escalar-tensorial da gravitação. Primeiramente, através das equações diferenciais resultantes da equação de Einstein, obtivemos de maneira exata a métrica que descreve o espaço-tempo interno e externo de uma corda cósmica em relatividade geral. Com um raciocínio análogo, resolvemos as equações diferenciais provenientes das equações de Einstein modificadas para a métrica externa de uma corda cósmica neutra e obtemos também uma solução exata. No entanto, a obtenção da métrica interna exata utilizando a teoria escalar-tensorial mostrou-se inviável já que as equações diferenciais correspondentes não possuem soluções exatas. Assim, não existe solução exata para a métrica de uma corda cósmica utilizando teoria escalar-tensorial da gravitação e, desta forma, utilizamos uma aproximação de campos fracos, onde a métrica física difere da métrica de Minkowski por uma pequena perturbação, para obtermos uma forma linear para a métrica que descreve o espaço-tempo interno e externo da corda.

Além disso, o desvio angular foi calculado utilizando ambas as teorias e constatamos que este desvio, em escalar-tensorial, é o mesmo desvio em relatividade geral, o que torna ambas as teorias, do ponto de vista deste efeito, semelhantes. A seguir, estudamos os

efeitos gravitacionais da corda cósmica neutra em partículas teste e observamos que cordas cósmicas neutras, segundo a teoria da relatividade geral, não influenciam na trajetória destas partículas enquanto que, considerando a teoria escalar-tensorial, tais partículas sofrem a ação de uma força gravitacional, que se anula rapidamente a medida que a distância com relação à corda aumenta. Ou seja, para uma distância muito grande, ambas as teorias se equivalem. Calculamos também os efeitos da força gravitacional nas partículas teste e constatamos que a velocidade angular destas partículas ao redor da corda tem relação direta com o campo escalar da teoria escalar-tensorial.

Podemos resumir os resultados da seguinte forma:

- Não existe solução exata para a métrica de uma corda cósmica em teorias escalares-tensoriais da gravitação;
- O desvio angular, devido ao espaço-tempo externo cônico, é o mesmo se considerarmos a relatividade geral ou a teoria escalar-tensorial;
- Nenhuma força atua em uma partícula teste na presença de uma corda cósmica descrita pela relatividade geral enquanto que esta mesma partícula sofre a ação de uma força do tipo $1/r$ na presença da corda descrita pela escalar-tensorial;
- A velocidade angular de uma partícula teste ao redor de uma corda cósmica deve-se à presença do campo escalar.

Como perspectiva, se considerarmos duas partículas viajando em paralelo na direção da corda, de tal modo que cada uma passe de um lado diferente da corda, devido à a geometria não trivial da parte externa (espaço-tempo cônico) e à força que a corda (dependendo de sua estrutura microscópica) exerce sobre as partículas, estas sofrerão um

desvio de sua trajetória e colidirão formando um aglomerado de matéria na forma de uma parede (wakes). Desta forma podemos realizar:

- Um estudo da formação de wakes considerando as cordas cósmicas neutras descritas pela teoria escalar-tensorial da gravitação, já que em relatividade não temos força atuando em partículas teste;
- Um estudo de cordas cósmicas com outra estrutura interna como cordas quirais e cordas com corrente do tipo-espaço e do tipo-tempo para o cálculo da forma de wakes.

Apêndice A

Prova da não-existência de solução exata para cordas cósmicas em teorias escalares-tensoriais da gravitação

Na seção 4.5 temos o objetivo de resolver um conjunto de equações diferenciais, provenientes das equações de campo, de forma exata para encontrarmos a métrica interna de uma corda cósmica em teoria escalar-tensorial da gravitação. No entanto, tal conjunto de equações diferenciais não admite solução exata. O que faremos aqui será mostrar em detalhes a inviabilidade de se encontrar uma métrica interna exata em teoria escalar-tensorial da gravitação a partir das equações de Einstein modificadas.

A métrica mais geral que descreve o espaço-tempo interno de uma corda cilíndrica e estática é dada por

$$ds^2 = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\psi(r)} d\theta^2 - e^{2\lambda(r)} (dr^2 + dz^2). \quad (\text{A.1})$$

e a equação de Einstein modificada é dada por

$$G^\sigma{}_\nu = 2g^{\mu\sigma} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - g^{\mu\sigma} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi + 8\pi G_* T^\sigma{}_\nu, \quad (\text{A.2})$$

com o tensor energia-momento dado por $T^t{}_t = T^z{}_z = -\Omega^4(\varphi)\mu$. Desta forma, as compo-

nente do tensor de Einstein são

$$G^t_t = e^{-2\lambda}[\psi'' + \psi'^2 + \lambda''] = e^{-2\lambda(r)}\varphi'^2 - 8\pi G_*\Omega^4(\varphi)\mu, \quad (\text{A.3})$$

$$G^\theta_\theta = e^{-2\lambda}[\nu'' + \nu'^2 + \lambda''] = e^{-2\lambda(r)}\varphi'^2, \quad (\text{A.4})$$

$$G^r_r = e^{-2\lambda}[\nu'\lambda' + \psi'\lambda' + \nu'\psi'] = -e^{-2\lambda(r)}\varphi'^2, \quad (\text{A.5})$$

$$G^z_z = e^{-2\lambda}[\nu'\psi' + \nu'' + \nu'^2 + \psi'' + \psi'^2 - \nu'\lambda' - \psi'\lambda'] = e^{-2\lambda}\varphi'^2 - 8\pi G_*\Omega^4(\varphi)\mu, \quad (\text{A.6})$$

e a equação para φ fica

$$\square\varphi = e^{-2\lambda}[\nu'\varphi' + \psi'\varphi' + \varphi''] = 8\pi G_*\Omega^4(\varphi)\alpha(\varphi)\mu, \quad (\text{A.7})$$

A equação de conservação do tensor energia-momento fornece

$$T^\mu_{\nu;\mu} = \alpha(\varphi)T\varphi_{;\nu}, \quad (\text{A.8})$$

$$\implies \nu' + \lambda' = -2\alpha(\varphi)\varphi', \quad (\text{A.9})$$

e, se a corda é invariante por uma translação temporal ($G^t_t = G^z_z$) ao longo do eixo z e se assumirmos a teoria escalar-tensorial de Brans-Dicke, obtemos que $\nu = \lambda = -\alpha\varphi$ ($\alpha = cte$).

Somando as componentes $G^r_r + G^\theta_\theta$ temos

$$\nu'' + \nu'^2 + \lambda'' + \nu'\lambda' + \psi'\lambda' + \nu'\psi' = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\implies \nu'' + \nu'^2 + \psi'\nu' = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\implies \psi' = \alpha\varphi' - \frac{\varphi''}{\varphi'}. \quad (\text{A.12})$$

Substituindo este resultado na equação de φ obtemos

$$e^{-2\lambda}[-\alpha\varphi'\varphi' + (\alpha\varphi' - \varphi''/\varphi')\varphi' + \varphi''] = 8\pi G_*\Omega^4(\varphi)\alpha\mu \quad (\text{A.13})$$

$$\implies 0 = 8\pi G_*\Omega^4(\varphi)\alpha\mu, \quad (\text{A.14})$$

o que é um absurdo! A conclusão que chegamos é que, mesmo trabalhando com a teoria escalar-tensorial mais simples (Brans-Dicke), as equações diferenciais para a métrica interna de uma corda cósmica não têm solução exata.

Apêndice B

Procedimentos utilizando MAPLE

Definição da Métrica

Vamos explicitar os comandos do MAPLE para definirmos a métrica e os termos de curvatura.

```
[> with(tensor):
```

Comando para trabalhar com o pacote de tensores.

```
[> coords := [t, theta, r, z]:
```

Definição das coordenadas. No caso, Cilíndricas.

```
[> g := array(symmetric,sparse,1..4,1..4):
```

Pense a métrica como uma matriz 4×4 , simétrica (symmetric) e cujos valores não especificados serão nulos (sparse).

```
[> g[1,1] := exp(2*nu(r)): g[2,2] := -exp(2*psi(r)): g[3,3] := -1: g[4,4] :=  
-exp(2*nu(r)):
```

Definição dos elementos da diagonal da métrica. De acordo com o comando anterior, como não definimos termos fora da diagonal da métrica, estes serão nulos.

```
[> metrica := create([-1,-1], eval(g));
```

Cria e exibe a métrica.

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} e^{2\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-2\psi(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-2\nu(r)} \end{bmatrix}$$

[> **tensorsGR**(coords, metric, contra_metric, det_met, C1, C2, Rm, Rc, R, G, C);

Calcula respectivamente as coordenadas usadas, as componentes covariantes não nulas da métrica, as componentes contravariantes da métrica, o determinante da métrica covariante, os símbolos de Christoffel de primeiro e segundo tipo, as componentes do tensor de Riemman, o tensor de Ricci, o escalar de Ricci, as componentes do tensor de Einstein e as componentes do tensor de Weyl.

[> **display_allGR**(coords, metric, contra_metric, det_met, C1, C2, Rm, Rc, R, G, C);

Mostra os resultados dos cálculos do comando anterior que são

The coordinates variables are:

$$x1 = t$$

$$x2 = \theta$$

$$x3 = r$$

$$x4 = z$$

The Covariant Metric

non-zero components:

$$cov_g11 = e^{2\nu(r)}$$

$$\text{cov_}g_{22} = -e^{2\psi(r)}$$

$$\text{cov_}g_{33} = -1$$

$$\text{cov_}g_{44} = -e^{2\nu(r)}$$

Determinant of the covariant metric tensor:

$$\text{det}g = - (e^{2\nu(r)})^2 e^{2\psi(r)}$$

The Contravariant Metric

non-zero components:

$$\text{contra_}g_{11} = -\frac{1}{e^{2\nu(r)}}$$

$$\text{contra_}g_{22} = -\frac{1}{e^{2\psi(r)}}$$

$$\text{contra_}g_{33} = -1$$

$$\text{contra_}g_{44} = -\frac{1}{e^{2\nu(r)}}$$

The Christoffel Symbols of the First Kind

non-zero components:

$$[11, 3] = -\left(\frac{d}{dr}\nu(r)\right) e^{2\nu(r)}$$

$$[13, 1] = \left(\frac{d}{dr}\nu(r)\right) e^{2\nu(r)}$$

$$[22, 3] = \left(\frac{d}{dr}\psi(r)\right) e^{2\psi(r)}$$

$$[23, 2] = -\left(\frac{d}{dr}\psi(r)\right) e^{2\psi(r)}$$

$$[34, 4] = -\left(\frac{d}{dr}\nu(r)\right) e^{2\nu(r)}$$

$$[44, 3] = \left(\frac{d}{dr}\nu(r)\right) e^{2\nu(r)}$$

The Christoffel Symbols of the Second Kind

non-zero components:

$$\{1, 13\} = \frac{d}{dr}\nu(r)$$

$$\{2, 23\} = \frac{d}{dr}\psi(r)$$

$$\{3, 11\} = \left(\frac{d}{dr}\nu(r)\right) e^{2\nu(r)}$$

$$\{3, 22\} = -\left(\frac{d}{dr}\psi(r)\right) e^{2\psi(r)}$$

$$\{3, 44\} = -\left(\frac{d}{dr}\nu(r)\right) e^{2\nu(r)}$$

$$\{4, 34\} = \frac{d}{dr}\nu(r)$$

The Riemann Tensor

non-zero components:

$$R1212 = -\left(\frac{d}{dr}\nu(r)\right) e^{2\nu(r)} \left(\frac{d}{dr}\psi(r)\right) e^{2\psi(r)}$$

$$R1313 = -\left(\frac{d^2}{dr^2}\nu(r)\right) e^{2\nu(r)} - \left(\frac{d}{dr}\nu(r)\right)^2 e^{2\nu(r)}$$

$$R1414 = -\left(\frac{d}{dr}\nu(r)\right)^2 \left(e^{2\nu(r)}\right)^2$$

$$R2323 = \left(\frac{d^2}{dr^2}\psi(r)\right) e^{2\psi(r)} + \left(\frac{d}{dr}\psi(r)\right)^2 e^{2\psi(r)}$$

$$R2424 = \left(\frac{d}{dr}\nu(r)\right) e^{2\nu(r)} \left(\frac{d}{dr}\psi(r)\right) e^{2\psi(r)}$$

$$R3434 = \left(\frac{d^2}{dr^2}\nu(r)\right) e^{2\nu(r)} + \left(\frac{d}{dr}\nu(r)\right)^2 e^{2\nu(r)}$$

$$\text{character} : [-1, -1, -1, -1]$$

The Ricci Tensor

non-zero components:

$$R11 = -\left(\frac{d}{dr}\nu(r)\right) e^{2\nu(r)} \left(\frac{d}{dr}\psi(r)\right) - \left(\frac{d^2}{dr^2}\nu(r)\right) e^{2\nu(r)} - 2\left(\frac{d}{dr}\nu(r)\right)^2 e^{2\nu(r)}$$

$$R22 = 2\left(\frac{d}{dr}\nu(r)\right) \left(\frac{d}{dr}\psi(r)\right) e^{2\psi(r)} + \left(\frac{d^2}{dr^2}\psi(r)\right) e^{2\psi(r)} + \left(\frac{d}{dr}\psi(r)\right)^2 e^{2\psi(r)}$$

$$R_{33} = 2 \left(\frac{d^2}{dr^2} \nu(r) \right) + 2 \left(\frac{d}{dr} \nu(r) \right)^2 + \left(\frac{d^2}{dr^2} \psi(r) \right) + \left(\frac{d}{dr} \psi(r) \right)^2$$

$$R_{44} = 2 \left(\frac{d}{dr} \nu(r) \right)^2 e^{2\nu(r)} + \left(\frac{d}{dr} \nu(r) \right) e^{2\nu(r)} \left(\frac{d}{dr} \psi(r) \right) + \left(\frac{d^2}{dr^2} \nu(r) \right) e^{2\nu(r)}$$

character : $[-1, -1]$

The Ricci Scalar

$$R = -4 \left(\frac{d}{dr} \nu(r) \right) \left(\frac{d}{dr} \psi(r) \right) - 4 \left(\frac{d^2}{dr^2} \nu(r) \right) - 6 \left(\frac{d}{dr} \nu(r) \right)^2 - 2 \left(\frac{d^2}{dr^2} \psi(r) \right) - 2 \left(\frac{d}{dr} \psi(r) \right)^2$$

The Einstein Tensor

non-zero components:

$$G_{11} = \left(\frac{d}{dr} \nu(r) \right) e^{2\nu(r)} \left(\frac{d}{dr} \psi(r) \right) + \left(\frac{d^2}{dr^2} \nu(r) \right) e^{2\nu(r)} + \left(\frac{d}{dr} \nu(r) \right)^2 e^{2\nu(r)} +$$

$$e^{2\nu(r)} \left(\frac{d^2}{dr^2} \psi(r) \right) + e^{2\nu(r)} \left(\frac{d}{dr} \psi(r) \right)^2$$

$$G_{22} = -2 e^{2\psi(r)} \left(\frac{d^2}{dr^2} \nu(r) \right) - 3 e^{2\psi(r)} \left(\frac{d}{dr} \nu(r) \right)^2$$

$$G_{33} = - \left(\frac{d}{dr} \nu(r) \right)^2 - 2 \left(\frac{d}{dr} \nu(r) \right) \left(\frac{d}{dr} \psi(r) \right)$$

$$G_{44} = - \left(\frac{d}{dr} \nu(r) \right)^2 e^{2\nu(r)} - \left(\frac{d}{dr} \nu(r) \right) e^{2\nu(r)} \left(\frac{d}{dr} \psi(r) \right) - \left(\frac{d^2}{dr^2} \nu(r) \right) e^{2\nu(r)} -$$

$$e^{2\nu(r)} \left(\frac{d^2}{dr^2} \psi(r) \right) - e^{2\nu(r)} \left(\frac{d}{dr} \psi(r) \right)^2$$

character : $[-1, -1]$

The Weyl Tensor

non-zero components:

$$C_{1212} = -\frac{1}{6} \left(\frac{d}{dr} \nu(r) \right) e^{2\nu(r)} \left(\frac{d}{dr} \psi(r) \right) e^{2\psi(r)} + \frac{1}{6} \left(\frac{d^2}{dr^2} \psi(r) \right) e^{2\nu(r)} e^{2\psi(r)} +$$

$$\frac{1}{6} \left(\frac{d}{dr} \psi(r) \right)^2 e^{2\nu(r)} e^{2\psi(r)} - \frac{1}{6} \left(\frac{d^2}{dr^2} \nu(r) \right) e^{2\nu(r)} e^{2\psi(r)}$$

$$C_{1313} = -\frac{1}{6} \left(\frac{d^2}{dr^2} \nu(r) \right) e^{2\nu(r)} + \frac{1}{6} e^{2\nu(r)} \left(\frac{d^2}{dr^2} \psi(r) \right) + \frac{1}{6} e^{2\nu(r)} \left(\frac{d}{dr} \psi(r) \right)^2 -$$

$$\frac{1}{6} \left(\frac{d}{dr} \nu(r) \right) e^{2\nu(r)} \left(\frac{d}{dr} \psi(r) \right)$$

$$\begin{aligned}
C1414 &= \frac{1}{3} \left(\frac{d}{dr} \nu(r) \right) (e^{2\nu(r)})^2 \left(\frac{d}{dr} \psi(r) \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{d^2}{dr^2} \nu(r) \right) (e^{2\nu(r)})^2 - \\
&\quad \frac{1}{3} (e^{2\nu(r)})^2 \left(\frac{d^2}{dr^2} \psi(r) \right) - \frac{1}{3} (e^{2\nu(r)})^2 \left(\frac{d}{dr} \psi(r) \right)^2 \\
C2323 &= \frac{1}{3} \left(\frac{d^2}{dr^2} \psi(r) \right) e^{2\psi(r)} + \frac{1}{3} \left(\frac{d}{dr} \psi(r) \right)^2 e^{2\psi(r)} - \frac{1}{3} e^{2\psi(r)} \left(\frac{d^2}{dr^2} \nu(r) \right) - \\
&\quad \frac{1}{3} \left(\frac{d}{dr} \nu(r) \right) \left(\frac{d}{dr} \psi(r) \right) e^{2\psi(r)} \\
C2424 &= \frac{1}{6} \left(\frac{d}{dr} \nu(r) \right) e^{2\nu(r)} \left(\frac{d}{dr} \psi(r) \right) e^{2\psi(r)} + \frac{1}{6} \left(\frac{d^2}{dr^2} \nu(r) \right) e^{2\nu(r)} e^{2\psi(r)} - \\
&\quad \frac{1}{6} \left(\frac{d^2}{dr^2} \psi(r) \right) e^{2\nu(r)} e^{2\psi(r)} - \frac{1}{6} \left(\frac{d}{dr} \psi(r) \right)^2 e^{2\nu(r)} e^{2\psi(r)} \\
C3434 &= \frac{1}{6} \left(\frac{d^2}{dr^2} \nu(r) \right) e^{2\nu(r)} + \frac{1}{6} \left(\frac{d}{dr} \nu(r) \right) e^{2\nu(r)} \left(\frac{d}{dr} \psi(r) \right) - \frac{1}{6} \left(\frac{d^2}{dr^2} \psi(r) \right) e^{2\nu(r)} - \\
&\quad \frac{1}{6} e^{2\nu(r)} \left(\frac{d}{dr} \psi(r) \right)^2
\end{aligned}$$

character : $[-1, -1, -1, -1]$

Referências Bibliográficas

- [1] T. W. B. Kibble, *Cosmic Strings Reborn?* *astro-ph/0410073*.
- [2] C. Brans e R. H. Dicke, *Phys. Rev* **124**, 925 (1961).
- [3] P. Jordan, *Nature* **164**, 637 (1949).
- [4] A. Vilenkin e E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, (Cambridge University Press, 1987).
- [5] T. W. B. Kibble, *J. Phys A: Math. Gen.* **9**, No. 8, 1387 (1976).
- [6] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, (Cambridge University Press, 1985).
- [7] D. A. Kirzhnits, *JETP Lett.* **15**, 745 (1972); D. A. Kirzhnits e A. D. Linde, *Phys. Lett.* **42B**, 471 (1972).
- [8] R. d’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*, (Oxford University Press, 1992).
- [9] H. B. Nielsen e P. Olesen, *Nucl. Phys.* **B61**, 45 (1973).
- [10] P. Peter, M. E. X. Guimarães e V. C. Andrade, *Phys. Rev.* **D67**, 123509-1 (2003).
- [11] W. A. Hiscock, *Phys. Rev.* **D31**, No. 12, 31 (1985).
- [12] T. Levi-Civita, *Rend. Accad. Naz. Lincei* **26**, 307 (1917).

- [13] A. Vilenkin, *Phys. Rev.* **D23**, 852 (1981).
- [14] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A165**, 199 (1938).
- [15] M. Fierz, *Helv. Phys. Acta* **29**, 128 (1956).
- [16] P. G. Bergmann, *Int. J. Theor. Phys.* **1**, 25 (1968); K. Nordtvedt, *Ap. J.*, **161**, 1059 (1970); R. V. Wagoner, *Phys. Rev.* **D1**, 3209 (1970).
- [17] Th. Damour e K. Nordtvedt, *Phys. Rev.* **D48**, 3436 (1993).
- [18] Y. Fujii e K. Maeda, *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation*, (Cambridge University Press, 2003).
- [19] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, (John Wiley & Sons, 1972).
- [20] P. Peter, *Phys. Rev.* **D45**, 1091 (1992); **D46**, 3335 (1992).
- [21] M. E. X. Guimarães, *Class. Quantum Grav.* **14**, 435 (1997).
- [22] D. Garfinkle, *Phys. Rev.* **D32**, 1323 (1985).
- [23] M. E. X. Guimarães, *Phys. Lett.* **A**, 348 (2005).