

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE UnB GAMA - FACULDADE DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE  
MATERIAIS DA ENGENHARIA.

INTEGRAÇÃO ANALÍTICA DAS MATRIZES DE  
INFLUÊNCIA DA FORMULAÇÃO ELÁSTICA  
ANISOTRÓPICA PLANA DO MÉTODO DOS  
ELEMENTOS DE CONTORNO

VIVIANE CRISTINA RODRIGUES FEITOZA

ORIENTADOR: ÉDER DE LIMA ALBUQUERQUE

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM INTEGRIDADE DE  
MATERIAIS DA ENGENHARIA

PUBLICAÇÃO: FGA.DM - 028A-2015

BRASÍLIA/DF: NOVEMBRO - 2015.

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE UnB GAMA/ FACULDADE DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE  
MATERIAIS DA ENGENHARIA.

INTEGRAÇÃO ANALÍTICA DAS MATRIZES DE  
INFLUÊNCIA DA FORMULAÇÃO ELÁSTICA  
ANISOTRÓPICA PLANA DO MÉTODO DOS  
ELEMENTOS DE CONTORNO

VIVIANE CRISTINA RODRIGUES FEITOZA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE  
PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGE-  
NHARIA DA FACULDADE GAMA E FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM IN-  
TEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA.

APROVADA POR:

---

Prof. Éder de Lima Albuquerque, Dr. (ENM-UnB)  
(Orientador)

---

Prof. Carla Tatiana Mota Anflor , Dr. (FGA-UnB/Gama)  
(Examinador Interno)

---

Prof. Artur Antonio de Almeida Portella, Dr. (ENC-UnB)  
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 12 DE NOVEMBRO DE 2015.

## FICHA CATALOGRÁFICA

FEITOZA, VIVIANE CRISTINA RODRIGUES

Integração analítica das matrizes de influência da formulação elástica anisotrópica plana dos métodos dos elementos de contorno. [Distrito Federal] 2015. x, 53p., 297mm (IME/FT/UnB, Mestre, Integridade de Materiais da Engenharia, 2015).

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília.  
Faculdade de Tecnologia.

Programa de pós-graduação em Integridade de Materiais da Engenharia.

- |                              |                                     |
|------------------------------|-------------------------------------|
| 1. Materiais Compósitos      | 2. Comportamento Elástico da Lâmina |
| 3. Elasticidade Anisotrópica | 4. Integração Analítica e MEC       |
| I. IME/FT/UnB                | II. Título (série)                  |

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

FEITOZA, VIVIANE C. R. (2015). Integração analítica das matrizes de influência da formulação elástica anisotrópica plana do métodos dos elementos de contorno. Dissertação de Mestrado em Integridade de Materiais da Engenharia, Publicação 028A/15, Programa de pós-graduação em Integridade de Materiais da Engenharia, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 53p.

## CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Viviane Cristina Rodrigues Feitoza.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: Integração analítica das matrizes de influência da formulação elástica anisotrópica plana do método dos elementos de contorno.

GRAU: Mestre ANO: 2015

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

---

Viviane Cristina Rodrigues Feitoza

Quadra 55, lote 10, Apt<sup>o</sup> 311, Edifício Santorine, Setor Central  
Gama, Distrito Federal, Brasil.

# DEDICATÓRIA

Este trabalho é dedicado ao meu esposo, José Pereira Ribeiro, por tudo que representa para mim.

## AGRADECIMENTOS

A Deus que é o autor da minha fé.

A Jesus Cristo, por ser o Mestre do conhecimento.

Aos professores que ministraram as disciplinas, pois conseguiram contribuir significativamente para o meu aprendizado.

Em especial, ao meu Orientador, Éder Lima de Albuquerque, por ter me aceitado como sua aluna, por sua competência e habilidade na transmissão dos seus conhecimentos e, principalmente, pelo apoio e dedicação durante todo o período de pesquisa e conclusão do presente trabalho.

Ao meu amigo Álvaro Campos pelo incentivo nos momentos de dificuldade.

Aos colegas que conheci na UNB e fortaleci a amizade, em especial, ao amigo, Jaime Rojas.

A todos que estão próximos de mim e me apoiaram de uma forma direta e indireta.

## RESUMO

### INTEGRAÇÃO ANALÍTICA DAS MATRIZES DE INFLUÊNCIA DA FORMULAÇÃO ELÁSTICA ANISOTRÓPICA PLANA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

**Autor:** Viviane Cristina Rodrigues Feitoza

**Orientador:** Éder de Lima Albuquerque

**Programa de Pós-graduação em Integridade de Materiais da Engenharia**

**Brasília, Novembro de 2015**

Este trabalho apresenta uma descrição da integração analítica das matrizes de influência  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  da formulação do método dos elementos de contorno aplicado a elasticidade plana anisotrópica. A geometria do elemento de contorno é considerada retilínea, deslocamentos e forças de superfície são consideradas constantes ao longo de cada elemento de contorno (elementos de contorno constantes). A solução fundamental usada é analítica, escrita em variáveis complexas. Em se tratando de material anisotrópico, as constantes de materiais variam com a rotação do sistema de referência. Para permitir que a integração analítica fosse possível sem ter que se calcular as variáveis do material para cada elemento, foi feita uma transformação de variáveis reais para variáveis complexas. O jacobiano utilizado nesta transformação é constante ao longo de cada elemento. Os resultados da integração analítica e numérica são apresentados e discutidos. Também foi apresentada a análise de um problema crítico no qual foi comparado a convergência das formulações de elementos de constantes e a de elementos quadráticos. Os resultados mostraram que a integração analítica das matrizes de influência apresenta uma série de vantagens sob a integração numérica. A principal dela é que no caso da integração analítica, problemas de quase-singularidades fortes e hiper não precisam ter tratamento especial.

**Palavras Chaves :** Materiais Compósitos, Método dos Elementos de Contorno, Integração Analítica.

## **ABSTRACT**

### **ANALYTICAL INTEGRATION OF INFLUENCE MATRICES OF ANISOTROPIC PLANE ELASTICITY BOUNDARY ELEMENT METHOD**

**Author: Viviane Cristina Rodrigues Feitoza**

**Supervisor: Éder de Lima Albuquerque**

**Programa de Pós-graduação em Integridade de Materiais da Engenharia**

**Brasília, 2015 November**

Abstract:

This master thesis presents a description of the analytical integration of influence matrices  $H$  and  $G$  of the boundary element method applied to anisotropic plane elasticity. The geometry of the boundary element is considered rectilinear, displacements and tractions are considered constant along each boundary element (constant boundary elements). The fundamental solution used is analytical, written in complex variables. In the case of anisotropic material, the material constants vary with the rotation of the reference system. To allow the analytical integration without having to calculate the variables of the material for each element, a transformation of variables from real to complex space was performed. The Jacobian used in this transformation is constant throughout each element. The results of analytical and numerical integration are presented and discussed. The analysis of a critical problem was presented in order to compare the convergence of quadratic and constant elements. The analytical results showed that the analytical integration influence matrices presents a number of advantages if compared to numerical integration. For example, in the case of analytical integration, problems of strong quasi-singularity and hyper quasi-singularity do not need special treatment.

Key Words: Composite Materials, Boundary Element Method, Analytical Integration.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	Considerações preliminares . . . . .	1
1.2	Aplicação dos materiais compósitos . . . . .	2
1.3	Importância de materiais compósitos em Projeto . . . . .	4
1.4	Revisão Bibliográfica . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Comportamento Elástico da Lâmina de Compósito</b>	<b>9</b>
2.1	Introdução . . . . .	9
2.2	Relação constitutiva para uma lâmina . . . . .	9
2.2.1	Comportamento Elástico de Laminados Multidirecionais carregados no plano . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Método dos Elementos de Contorno Para Elasticidade Anisotrópica</b>	<b>17</b>
3.1	Introdução . . . . .	17
3.2	Elasticidade Anisotrópica . . . . .	17
3.3	Formulação Integral . . . . .	18

3.4	Soluções Fundamentais Anisotrópicas . . . . .	21
3.5	Equações Integrais Singulares . . . . .	23
3.6	Formulação dos Elementos de Contorno Discretizada . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Integração analítica com elementos constantes</b>	<b>26</b>
4.1	Introdução . . . . .	26
4.2	Cálculo analítico da matriz <b>G</b> . . . . .	26
4.3	Cálculo analítico da matriz <b>H</b> . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Resultados Numéricos</b>	<b>34</b>
5.1	Introdução . . . . .	34
5.2	Comparação da integração analítica com a integração numérica . . . . .	34
5.3	Comparação entre elementos quadráticos e elementos constantes . . . . .	39
<b>6</b>	<b>Conclusões e trabalhos futuros</b>	<b>43</b>
6.1	Conclusões . . . . .	43
6.2	Trabalhos futuros . . . . .	44
<b>A</b>	<b>Código usado para gerar as figuras</b>	<b>50</b>

## LISTA DE FIGURAS

1.1	Automóvel de competição: exemplo de aplicação de materiais compósitos na indústria automobilística . . . . .	2
1.2	Embraer EMB-314 Super Tucano . . . . .	3
2.1	Lâmina ortotrópica. . . . .	10
2.2	Sistemas de coordenadas da lâmina $(x_1x_2)$ e do laminado $(\bar{x}_1\bar{x}_2)$ . . . . .	12
2.3	Camada $k$ no laminado multidirecional . . . . .	14
2.4	Elemento de uma única lâmina contendo forças . . . . .	14
2.5	Laminado multidirecional com a notação das coordenadas para as lâminas individuais [18] . . . . .	15
3.1	Ponto fonte localizado no contorno, circundado por uma região semi-circular. . . . .	23
4.1	Transformação de coordenadas. . . . .	28
5.1	Pontos Fontes . . . . .	35
5.2	Parte real da integral $I_1$ . . . . .	36
5.3	Parte imaginária da integral $I_1$ . . . . .	37

5.4	Parte real da integral $J_1$ . . . . .	38
5.5	Parte imaginária da integral $J_1$ . . . . .	38
5.6	Viga cantilever. . . . .	39
5.7	Modelo geométrico, malha (210 elementos) e condições de contorno usado na análise da viga cantilever. . . . .	40
5.8	Variação da diferença percentual $D$ com o número de nós. . . . .	41
5.9	Deslocamentos totais na viga cantilever. . . . .	42

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Considerações preliminares

Os materiais de engenharia convencionais têm sido classificados em três grandes grupos: materiais metálicos, cerâmicos e poliméricos. Os materiais compósitos são uma espécie de combinação entre dois ou mais materiais dessas categorias. Em se tratando de compósitos estruturais, o conceito é um pouco mais específico e diz que é um material que consiste de duas ou mais fases em escala macroscópica, cujo desempenho mecânico e propriedades são projetados para serem superiores àqueles dos materiais constituintes quando analisados de maneira isolada. Uma dessas fases, normalmente descontínua, mais rígida e mais resistente é chamada de reforço, a outra fase menos resistente e contínua é chamada de matriz. As propriedades de um material compósito dependem das propriedades dos materiais constituintes, da geometria e da maneira como as fases estão distribuídas. Um dos parâmetros mais importantes é a fração volumétrica do reforço. O fato das propriedades serem diretamente influenciadas pela disposição do reforço possibilita ao engenheiro determinar uma orientação que seja mais favorável à determinada aplicação, desenvolvendo assim um componente otimizado [18]. Os materiais compósitos possuem vantagens exclusivas em relação aos materiais convencionais, tais como alta resistência, alta rigidez, longa vida em fadiga, baixa densidade e adaptabilidade à função requerida da estrutura. O fundamento para esse desempenho estrutural superior está na alta resistência específica (resistência por densidade) e na alta rigidez específica (módulo de elasticidade por densidade) e nas características anisotrópicas e heterogêneas do material. Estas características tornam a modelagem do comportamento mecânico do material compósito muito mais trabalhosa porém possibilitam um ajuste na manufatura dotando-o de propriedades adequadas para atender a um requisito específico de projeto [31]. É importante para o dimensionamento de um componente que se tenha conhecimento de suas propriedades e de sua anisotropia. Materiais anisotrópicos são materiais que apresentam propriedades mecânicas que variam com a direção. Este comportamento ocorre principalmente em materiais que possuem fibras contínuas não entrelaçadas e com uma orientação predominante imersa numa matriz de modo a melhorar sua eficiência estrutural. O uso intensivo de estruturas de material compósito em projetos de engenharia tem requerido procedimentos de cálculo precisos e confiáveis para o tratamento de problemas estruturais em mate-

rial anisotrópico. Como a anisotropia aumenta o número de constantes elásticas do material, a ser determinada experimentalmente, a análise de estruturas em laminados compósitos torna-se mais difícil que a análise de materiais isotrópicos, como os metais por exemplo. Particularmente, na formulação de elementos de contorno, um grande número de variáveis implica em uma grande dificuldade na determinação das soluções fundamentais. Contudo, nos últimos anos, importantes avanços nas técnicas de elementos de contorno aplicados a materiais anisotrópicos foram publicados. Por exemplo, problemas de elasticidade plana foram analisados por [45, 46, 19, 3, 5, 6, 4], problemas de elasticidade fora do plano por [60], problemas tri-dimensionais por [24, 25], e placas de Kirechhoff por [8], placas de Reissner por [43, 42] e cascas por [44].

## 1.2 Aplicação dos materiais compósitos

Atualmente as aplicações dos materiais compósitos estão relacionadas a muitas conquistas nas áreas da aeronáutica, aeroespacial, petroquímica, naval, bioengenharia, automobilística, construção civil, artigos esportivos, dentre outros. Na indústria automobilística, por exemplo, um amortecedor fabricado de compósito de fibra de vidro e resina epóxi possui 20% do peso de seu original fabricado em aço. A Fig. 1.1, mostra um automóvel de competição onde os compósitos são usados em larga escala.



Figura 1.1: Automóvel de competição: exemplo de aplicação de materiais compósitos na indústria automobilística

Pesquisas por materiais de alta resistência, alta rigidez e baixo peso levaram a aplicações de materiais compósitos em aviões, sendo fabricadas peças em compósitos para algumas

partes do avião como partes da fuselagem, portas de trem de aterrissagem, portas internas, etc. O desafio atual é usar compósitos nas maiores estruturas do avião como asas e fuselagem. Nos aviões, o compósito é formado pela junção de carbono epóxi, uma matriz de resina e fibra de vidro. O resultado dessa combinação é semelhante a um material plástico. A Fig.1.2 mostra o EMBRAER EMB-314 SUPER TUCANO, um avião militar onde os compósitos são usados em vários de seus componentes.



Figura 1.2: Embraer EMB-314 Super Tucano

Na aeronáutica são usados compósitos de alto desempenho, não sendo utilizadas combinações de materiais mais baratos e simples como, por exemplo, vidro e poliéster.

Devido a sua grande importância, os materiais compósitos tem sido objeto de muitos estudos, com vários livros publicados sobre o assunto [1, 21, 22].

### 1.3 Importância de materiais compósitos em Projeto

Dentre os materiais usados em engenharia, os compósitos apresentam a maior relação de rigidez por densidade, também chamada rigidez específica. Devido a imensa variedade de combinações e arranjos de fibras, os engenheiros têm à sua disposição materiais para um grande número de projetos que exijam características muito específicas, seja ela rigidez, resistência mecânica, densidade, amortecimento, condutividade térmica, elétrica ou qualquer outra propriedade do material. Com o aumento do número de projetos com materiais compósitos, surgiu a necessidade de calcular tensões e deformações em estruturas de materiais anisotrópicos. Esta tarefa é mais complicada que nos materiais isotrópicos tradicionais (metálicos), pois a anisotropia aumenta o número de variáveis do problema. No modelo anisotrópico se estabelece que não há simetria no material e que existem diferenças em suas propriedades elásticas em diferentes direções. Em geral, as propriedades mecânicas não são simétricas em relação a qualquer plano ou eixo. O material anisotrópico resiste de maneira diferente às cargas aplicadas em diferentes direções, por isso a importância de observar a tensão e a deformação. Como regra geral, deve-se alinhar as fibras na direção em que as tensões são maiores, pois as fibras resistem mais que as matrizes.

Em materiais isotrópicos temos somente duas constantes elásticas que são o módulo de elasticidade  $E$  e o coeficiente de Poisson  $\nu$ . Já em materiais compósitos laminados são quatro constantes elásticas por lâmina: módulo de elasticidade na direção das fibras  $E_1$ , módulo de elasticidade na direção perpendicular às fibras  $E_2$ , coeficiente de Poisson  $\nu$ , módulo de cisalhamento  $G_{12}$ . Além disso, deve-se informar o ângulo de cada lâmina. Dessa forma, temos 5 variáveis por lâmina nos materiais compósitos enquanto que no material isotrópico temos apenas 2 variáveis. Para pesquisas dessa natureza, os métodos numéricos são largamente utilizados. Entre eles está o Método dos Elementos de Contorno (MEC) que é bastante utilizado por possuir, entre outras características, alta taxa de convergência em problemas com altos gradientes [2], como é o caso de peças com concentradores de tensão (furos ou entalhes) e trincas.

A existência de uma solução fundamental é necessária para se fazer a transformação da equação diferencial que governa o problema para uma equação integral de contorno. Essa transformação é feita utilizando a solução fundamental do problema com o Teorema Gauss-Green. A formulação do MEC é obtida a partir da discretização da equação integral que governa o problema proposto. Quando essa discretização é realizada, um conjunto de equações algébricas é obtido e, quando solucionamos essas

equações, estaremos encontrando as incógnitas de contorno.

No presente trabalho problemas de elasticidade plana anisotrópicos serão resolvidos usando o método dos elementos de contorno. Deslocamentos e forças de superfície serão considerados constantes ao longo de cada elemento. A geometria do elemento será retilínea. A contribuição deste trabalho para o desenvolvimento do MEC será no cálculo dos elementos das matrizes de influência  $H$  e  $G$  que serão calculadas de maneira analítica, evitando-se assim qualquer integração numérica. A proposta é original pois, conforme pesquisa bibliográfica realizada, não foi encontrado nenhum trabalho na literatura que fizesse a integração analítica das matrizes de influência para a formulação de elasticidade plana anisotrópica. As soluções conhecidas como analíticas são ideais para solucionar um problema de engenharia. Para conseguirmos uma solução analítica, é necessário a existência de métodos matemáticos capazes de resolver de maneira exata equações algébricas, diferenciais e integrais. O MEC é um método computacional integral que consiste em obter as equações integrais apenas com informações do contorno do problema. Ele diminui em uma ordem, a dimensão do problema proposto. Logo, existe uma diminuição na quantidade de dados de entrada, no tempo de processamento e no armazenamento das informações processadas, propiciando uma menor quantidade de operações aritméticas [2]. As integrais do MEC são tradicionalmente calculadas de forma numérica. O cálculo analítico destas integrais deve ser usado sempre que possível pois tem custo computacional menor que as integrais numéricas, são mais precisas e não precisam de tratamentos especiais para os casos de integrais com singularidades fracas e fortes nem de quase-singularidades.

#### 1.4 Revisão Bibliográfica

As soluções analíticas para problemas anisotrópicos restringem-se a um pequeno número de problemas de domínio simples. Com a evolução dos computadores, os métodos numéricos passaram a ser utilizados para uma faixa bem maior de problemas. Dentre os métodos numéricos que mais se destacaram no tratamento de problemas estruturais está o MEC que é um método computacional integral que consiste em obter as equações integrais apenas com informações do contorno de um problema. Embora a ideia de redução da dimensão do problema pelo uso de uma formulação integral de contorno seja conhecida desde o final do século XIX, o MEC, na forma como é apresentado hoje, só se desenvolveu quase 80 anos depois, quando [38] apresentou a formulação das equações integrais singulares, com as variáveis físicas acopladas umas

às outras na formulação direta do método.

A partir disso, o MEC se desenvolveu de forma bastante rápida, sendo atualmente um método bem estabelecido, com vasta bibliografia publicada [12, 20, 23, 57, 9]. As primeiras aplicações do MEC em análise de placas anisotrópicas começaram a surgir na década de 80. [58] e [59] apresentaram a solução fundamental anisotrópica para a aplicação do método indireto dos elementos de contorno. A mesma solução fundamental foi usada por [41] e [36] na análise de placas anisotrópicas pelo método direto dos elementos de contorno e pelo método de simulação de carga, respectivamente. Na mesma linha dos trabalhos anteriores, [7] apresentaram uma análise de flexão em compósitos laminados. A primeira aplicação do método dos elementos de contorno de reciprocidade dual (DRM) para o tratamento de problemas dinâmicos em materiais anisotrópicos foi proposta por [40],[33] para problemas estacionários tridimensionais e por [3] para problemas transientes bidimensionais.

Avanços na utilização do MEC para a análise de tensão em sólidos elásticos anisotrópicos tem sido significativamente menos difundido que para sólidos isotrópicos. Assim como no caso bidimensional, a principal razão para isto, é a complexidade matemática da solução fundamental. Usando a função de Green obtida por [27], [56] foram os primeiros a introduzir um esquema numérico do MEC para elasticidade anisotrópica tridimensional. A solução fundamental proposta por [27] é, no entanto, não explícita; expressa como uma integral de contorno em torno de um círculo unitário em um plano inclinado no ponto campo. Na abordagem do MEC apresentado em [56], a solução fundamental e suas derivadas para um dado material anisotrópico são obtidas por interpolação cúbica de valores pré-calculados que foram armazenados em grandes bases de dados, já que a avaliação numérica direta dessa integral tem custo computacional alto. Este esquema também é exigente computacionalmente em outros aspectos, e o controle da sua precisão para materiais altamente anisotrópicos tem sido objeto de questionamento [40] e [39].

Nas últimas décadas, tem havido várias investigações que tratam da avaliação das soluções propostas por [27], e suas derivadas. O foco principal tem sido em reduzir essas soluções para equações mais simples e explícita, o tanto quanto possível. Isto incluem os trabalhos de [47, 11, 50, 30, 54] e [52, 53]. Estudos para desenvolver esquemas mais eficientes computacionalmente para sua avaliação numérica utilizando análise alternativa também foram realizadas no contexto do desenvolvimento do MEC desde o pioneiro trabalho de [56]. Exemplos incluem os trabalhos de [16],[39],[32],[51],[35],[55],[48],[15],e

[43, 42, 44]; uma avaliação dos trabalhos anteriores desta lista é dada por [48] e [42]. É importante observar aqui que [50] deduziram uma forma totalmente algébrica da solução fundamental para os deslocamentos em um sólido anisotrópico em termos de auto-valores de Stroh. [52, 53] ainda mostraram como as derivadas das soluções fundamentais podem ser obtidas; as expressões explícitas completas para suas derivadas foram, no entanto, apresentadas apenas em [42]. Estas soluções exatas e totalmente explícitas permitiram a sua implementação relativamente simples em códigos de MEC. Isto tem sido demonstrado por [49] para o caso especial de isotropia transversal por [48] e [43, 42]; e [14] para casos de anisotropia mais geral.

Não obstante a precisão numérica e a eficiência que foi conseguida, usando as soluções exatas, de forma fechada de [50] e [53], estas soluções possuem formas algébricas tediosas e sua implementação é uma tarefa difícil. Reconhecendo o caráter periódico dos termos dos ângulos esféricos destas soluções exatas quando expressas no sistema de coordenadas esféricas, [44] propôs um esquema numérico alternativo para calcular as soluções fundamentais anisotrópicas 3D representando-as primeiro como uma série de Fourier. Suas derivadas podem ser obtidas por diferenciação direta da série de Fourier. A formulação resultante é significativamente mais concisa e mais simples em comparação com as derivadas em forma fechada apresentada nos estudos anteriores. Além disso os coeficientes de Fourier são determinados apenas uma vez para um dado sistema de materiais, independentemente do número total de pontos campos no modelo numérico do problema físico. Também é demonstrado que o tempo de processamento para obter valores muito preciso das soluções fundamentais e suas derivadas é apenas uma fração do que quando se utilizam os esquemas anteriormente propostos. Isto é particularmente importante quando se tem um grande número de pontos de campo como é tipicamente o caso de problemas práticos de engenharia.

Ao contrário da formulação anisotrópica tridimensional, onde não existe solução fundamental analítica, a formulação de elasticidade plana (bi-dimensional) possui solução fundamental analítica escrita em variáveis complexas. Esta solução fundamental foi proposta originalmente por [17] baseado no trabalho de [26]. A existência de uma solução fundamental analítica diminui drasticamente o custo computacional. A maneira habitual de se montar as matrizes de influência  $H$  e  $G$  do MEC é integrar a solução fundamental ao longo do elemento. As integrais do MEC podem ser feitas analiticamente (exata), numericamente (aproximada) ou semi-analiticamente (aproximada ou combinação de analítica e numérico). [10] foram os primeiros a dar a solução analítica para os termos da matriz  $G$  para elementos constantes na equação de La-

place bidimensional. [13] também apresentou a solução para os termos da matriz  $G$  com base no elemento retilíneo contínuo. [37] desenvolveu as expressões analíticas para integrações de um elemento contínuo retilíneo com base nas equações bidimensionais de Navier para problemas de elasticidade. Ao calcular os termos para as matrizes de influência  $H$  e  $G$  para as integrações de contorno com pontos fontes dos elementos, há duas integrais no contorno a serem resolvidas para cada tipo de elemento.

## 2 Comportamento Elástico da Lâmina de Compósito

### 2.1 Introdução

Neste capítulo é apresentado o conceito de uma lâmina ortotrópica e sua relação tensão e deformação juntamente com as componentes da matriz de rigidez. Apenas lâminas carregadas sob tração/compressão ao longo de suas bordas são consideradas. A relação constitutiva para uma lâmina ortotrópica é calculada em um sistema de referência coincidente com a direção das fibras. Também são deduzidas as relações constitutivas para a lâmina com um sistema de referência qualquer. Estas relações constitutivas são estendidas para um laminado simétrico com múltiplas lâminas. Por último, é apresentado o comportamento elástico do laminado no plano, as relações de deformação-deslocamento de elasticidade plana e a relação força-deformação.

### 2.2 Relação constitutiva para uma lâmina

Uma lâmina, na qual as fibras estão imersas numa matriz e alinhadas unidirecionalmente (Figura 2.1), é ortotrópica e sua relação tensão deformação é dada por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.1)$$

onde  $Q_{ij}$  são as componentes da matriz de rigidez.

Em termos das constantes de engenharia, as componentes do tensor de rigidez podem ser escritas como

$$\begin{aligned} Q_{11} &= E_1/(1 - \nu_{12}\nu_{21}), & Q_{22} &= E_2/(1 - \nu_{12}\nu_{21}), \\ Q_{66} &= G_{12}, & Q_{16} &= Q_{26} = 0, \\ Q_{12} &= \nu_{21}E_1/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) = \nu_{12}E_2/(1 - \nu_{12}\nu_{21}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

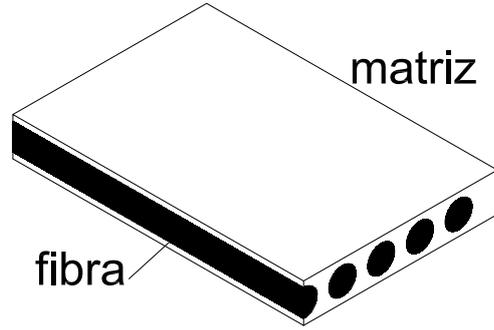


Figura 2.1: Lâmina ortotrópica.

Sendo a lâmina ortotrópica, esta fica completamente caracterizada com quatro constantes elásticas: os módulos de elasticidade longitudinais  $E_1$  e  $E_2$  nas direções paralelas às fibras e perpendiculares às fibras, respectivamente, o módulo de elasticidade transversal  $G_{12}$  e a razão de Poisson  $\nu_{12}$ . A quinta constante elástica,  $\nu_{21}$ , pode ser determinada pela relação constitutiva, devido a simetria da matriz  $\mathbf{Q}$ ,

$$\nu_{21}E_1 = \nu_{12}E_2. \quad (2.3)$$

Muitas vezes os eixos principais da lâmina ( $x_1x_2$ ) não são coincidentes com os eixos do laminado ( $\bar{x}_1\bar{x}_2$ ). Quando isto ocorre, a relação constitutiva para cada lâmina individual dever ser transformada para o eixo de referência do laminado (Figura 2.2) para então se determinar a relação constitutiva. Para que esta transformação seja feita, basta que os tensores de tensão e deformação sejam multiplicados pela matriz de transformação, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.4)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.5)$$

onde  $\sigma'_{ij}$  e  $\varepsilon'_{ij}$  são tensores de tensão e deformação, respectivamente, escritos no sistema de referência do laminado,  $\sigma_{ij}$  e  $\varepsilon_{ij}$  os mesmos tensores escritos no sistema de referência da lâmina e  $\mathbf{T}$  a matriz de transformação dada por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

sendo

$$m = \cos \theta, \quad (2.7)$$

$$n = \sin \theta. \quad (2.8)$$

Convém observar que a matriz inversa  $\mathbf{T}^{-1}$  pode ser obtida pela substituição do ângulo positivo  $\theta$ , conforme Figura 2.2, pelo ângulo negativo  $-\theta$ . A equação constitutiva pode ser escrita da forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q} (\mathbf{T}^{-1})' \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.9)$$

onde  $(\mathbf{T}^{-1})'$  representa a matriz transposta da matriz inversa de  $\mathbf{T}$  e

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}(-\theta) = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

Multiplicando-se as matrizes da equação (2.9), tem-se

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.11)$$

onde

$$\begin{aligned}
Q'_{11} &= m^4 Q_{11} + n^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{66}, \\
Q'_{22} &= n^4 Q_{11} + m^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{66}, \\
Q'_{12} &= m^2 n^2 Q_{11} + m^2 n^2 Q_{22} + (m^4 + n^4) Q_{12} - 4m^2 n^2 Q_{66}, \\
Q'_{16} &= m^3 n Q_{11} - m n^3 Q_{22} - m n (m^2 - n^2) Q_{12} - 2m n (m^2 - n^2) Q_{66}, \\
Q'_{26} &= m^3 n Q_{11} - m n^3 Q_{22} + m n (m^2 - n^2) Q_{12} + 2m n (m^2 - n^2) Q_{66}, \\
Q'_{66} &= m^2 n^2 Q_{11} - m^2 n^2 Q_{22} - 2m^2 n^2 Q_{12} + (m^2 - n^2)^2 Q_{66}.
\end{aligned}
\tag{2.12}$$

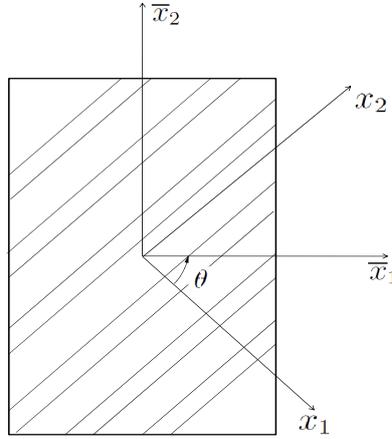


Figura 2.2: Sistemas de coordenadas da lâmina  $(x_1 x_2)$  e do laminado  $(\bar{x}_1 \bar{x}_2)$ .

A matriz  $Q$  é completamente preenchida, sendo que das seis constantes elásticas que governam o comportamento da lâmina, duas,  $Q'_{16}$  e  $Q'_{26}$ , são combinações lineares das outras quatro. No sistema de coordenadas transformado, a lâmina é dita geralmente ortotrópica, e a matriz  $Q'$  é parecida com a matriz  $Q$  dos materiais totalmente anisotrópicos ( $Q'_{16} \neq 0$ ,  $Q'_{26} \neq 0$ ). Quando se tem  $Q_{16} = Q_{26} = 0$  diz-se que o material é especialmente ortotrópico.

### 2.2.1 Comportamento Elástico de Laminados Multidirecionais carregados no plano

É evidente que o comportamento geral de um laminado multidirecional é função das propriedades e da sequência de empilhamento das camadas individuais. Assim a co-

hecida Teoria clássica de Laminação prevê o comportamento do laminado dentro das suposições e restrições:

1. Cada lâmina é quasi-homogênea e ortotrópica;
2. O laminado é fino com dimensões laterais bem maiores que sua espessura e é carregado apenas no seu plano, ou seja, o laminado e as lâminas estão em estado plano de tensões;
3. Todos os deslocamentos são pequenos quando comparados com a espessura do laminado;
4. As relações deformação-deslocamento e tensão-deformação são lineares;

Para pequenos deslocamentos, as relações clássicas de deformação-deslocamento da elasticidade plana produzem:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Considere uma camada individual  $k$  no laminado multidirecional cujo plano médio está a uma distância  $\bar{z}_k$  do plano de referência do laminado, de acordo com a Figura 2.3. As relações tensão deformação para esta camada em relação aos eixos do material são:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}\tag{2.14}$$

e após a transformação para o sistema de coordenadas do laminado,

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{13} \\ Q'_{21} & Q'_{22} & Q'_{23} \\ Q'_{31} & Q'_{32} & Q'_{33} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{Bmatrix}_k.\tag{2.15}$$

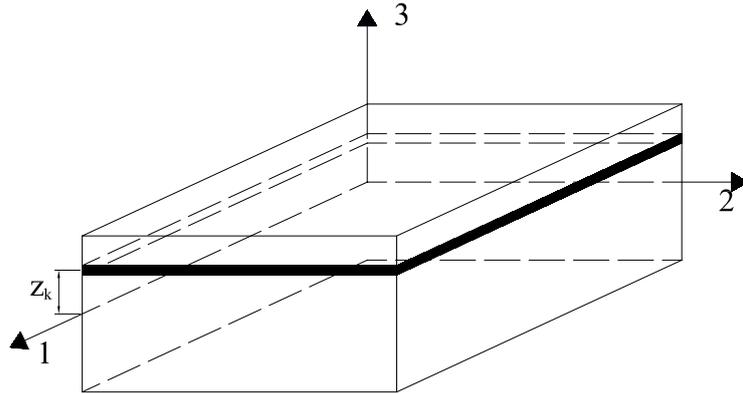


Figura 2.3: Camada  $k$  no laminado multidirecional

Da Equação (2.15) é visto que, apesar das deformações serem constantes através da espessura, a tensão não é. Devido a variação da matriz  $\mathbf{Q}'$  de camada para camada, as tensões também variam de forma descontínua. Porém em muitas aplicações o gradiente de tensões entre as camadas é desconsiderado. As tensões médias em cada lâmina são determinadas utilizando as deformações no plano de referência  $\varepsilon^0$  de cada lâmina.

Dessa forma, procura-se relacionar as forças à deformação do laminado. As tensões atuando na camada  $k$  dadas pela Equação (2.15) podem ser substituídas pela resultante das forças como mostrado na Figura 2.4, como:

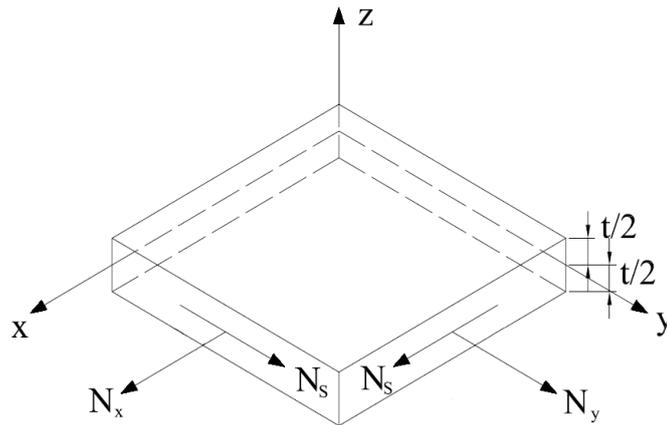


Figura 2.4: Elemento de uma única lâmina contendo forças

$$\begin{aligned}
N_{11}^k &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma'_{11k} dz, \\
N_{22}^k &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma'_{22k} dz, \\
N_{12}^k &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma'_{12k} dz,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

No caso de um laminado de várias camadas, a força total é obtida pelo somatório dos efeitos de todas as camadas. Assim, para um laminado como o da Figura 2.5 de  $n$  lâminas, a força resultante é obtida como:

$$\begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{pmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{pmatrix}_k dz, \tag{2.17}$$

onde  $z_k$  e  $z_{k-1}$  são as coordenadas das superfícies superior e inferior da camada  $k$ .

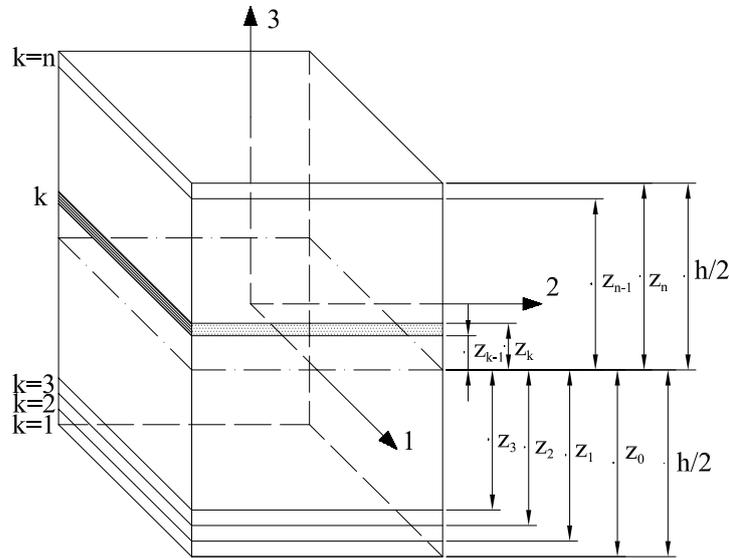


Figura 2.5: Laminado multidirecional com a notação das coordenadas para as lâminas individuais [18]

Substituindo a Equação (2.15) na Equação (2.17), obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{13} \\ Q'_{21} & Q'_{22} & Q'_{23} \\ Q'_{31} & Q'_{32} & Q'_{33} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz \right\} \quad (2.18)$$

Na expressão (2.18) a matriz de rigidez e as deformações podem ser colocadas fora da operação de integração pois não são função de  $z$ . Desta forma, a Equação (2.18) pode ser escrita como:

$$[N] = \left[ \sum_{k=1}^n [Q']^k \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz \right] [\varepsilon] = \left[ \sum_{k=1}^n [Q']^k (z_k - z_{k-1}) \right] [\varepsilon] = [A][\varepsilon] \quad (2.19)$$

na qual

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n Q'_{ij} (z_k - z_{k-1}) \quad (2.20)$$

Assim a relação força-deformação fica:

$$\begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

## 3 Método dos Elementos de Contorno Para Elasticidade Anisotrópica

### 3.1 Introdução

Neste capítulo é desenvolvida a formulação dos elementos de contorno para o tratamento de problemas de elasticidade plana em materiais anisotrópicos. A equação integral é obtida através do método dos resíduos ponderados, da aplicação do Teorema de Gauss-Green e do uso das soluções fundamentais (funções de Green) como função peso na formulação dos resíduos ponderados. Por último, é apresentada a formulação dos elementos de contorno discretizada. O contorno é dividido em segmentos retilíneos e deslocamentos e forças de superfície são consideradas constantes ao longo de cada elemento (formulação de elementos de contorno constantes).

### 3.2 Elasticidade Anisotrópica

Considerando um elemento infinitesimal dentro de um domínio  $\Omega$ , o equilíbrio de forças pode ser expresso por:

$$N_{ij,j} + b_i = 0, \quad (3.1)$$

O vetor de forças de superfície  $t_i$  em um ponto no contorno  $\Gamma$  de um domínio  $\Omega$  é expresso na forma:

$$t_i = N_{ij}n_j, \quad (3.2)$$

onde  $n_j$  é o vetor normal do contorno  $\Gamma$  no ponto.

### 3.3 Formulação Integral

Assumindo-se uma função vetorial contínua  $u_i^\bullet$ , que representa o deslocamento de um estado elasto-estático definido sobre um domínio  $\Omega$ , como sendo uma função peso residual da Equação de equilíbrio (3.1), tem-se:

$$\int_{\Omega} N_{ij,j} u_i^\bullet d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_i^\bullet d\Omega = 0. \quad (3.3)$$

Pela regra de derivação do produto de duas funções, tem-se:

$$(N_{ij} u_i^\bullet)_{,k} = N_{ij,k} u_i^\bullet + N_{ij} u_{i,k}^\bullet. \quad (3.4)$$

Pode-se escrever  $u_{i,j}^\bullet$  como a soma de um tensor simétrico e um anti-simétrico, para pequenas deformações, da forma:

$$u_{i,j}^\bullet = \frac{1}{2}(u_{i,j}^\bullet + u_{j,i}^\bullet) + \frac{1}{2}(u_{i,j}^\bullet - u_{j,i}^\bullet) = \varepsilon_{ij}^\bullet + \omega_{ij}^\bullet, \quad (3.5)$$

sendo que  $\varepsilon_{ij}^\bullet$  e  $\omega_{ij}^\bullet$  representam os tensores deformação (simétrico) e rotação (anti-simétrico), respectivamente, do estado elástico "•".

Substituindo (3.5) em (3.4) tem-se:

$$(N_{ij} u_i^\bullet)_{,j} = N_{ij,j} u_i^\bullet + N_{ij} \varepsilon_{ij}^\bullet + N_{ij} \omega_{ij}^\bullet, \quad (3.6)$$

sendo  $N_{ij}$  um tensor simétrico. O produto de um tensor simétrico por um anti-simétrico é nulo. Desta forma, a Equação (3.6) torna-se:

$$N_{ij,j} u_i^\bullet = (N_{ij} u_i^\bullet)_{,j} - N_{ij} \varepsilon_{ij}^\bullet. \quad (3.7)$$

Substituindo a Equação (3.7) na Equação (3.3) tem-se:

$$-\int_{\Omega} N_{ij}\varepsilon_{ij}^{\bullet}d\Omega + \int_{\Omega} (N_{ij}u_i^{\bullet})_{,j}d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_i^{\bullet}d\Omega = 0. \quad (3.8)$$

Pelo teorema de Green tem-se:

$$\int_{\Omega} (N_{ij}u_i^{\bullet})_{,j}d\Omega = \int_{\Gamma} (N_{ij}u_i^{\bullet})n_j d\Gamma = \int_{\Gamma} t_i u_i^{\bullet}d\Gamma, \quad (3.9)$$

onde

$$t_i = N_{ij}n_j. \quad (3.10)$$

Substituindo (3.9) em (3.8), tem-se

$$\int_{\Omega} N_{ij}\varepsilon_{ij}^{\bullet}d\Omega = \int_{\Gamma} t_i u_i^{\bullet}d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^{\bullet}d\Omega. \quad (3.11)$$

Se partirmos da Equação (3.1) como sendo a correspondente ao estado  $u_i^{\bullet}$  e a função de interpolação da Equação (3.3) como sendo  $u_i$ , obtém-se, de forma análoga a anterior:

$$\int_{\Omega} N_{ij}^{\bullet}\varepsilon_{ij}d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^{\bullet}u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^{\bullet}u_i d\Omega. \quad (3.12)$$

Pelo teorema recíproco, dois estados de um mesmo material podem ser relacionados por  $N_{ij}^{\bullet}\varepsilon_{ij} = N_{ij}\varepsilon_{ij}^{\bullet}$ . Desta forma, igualando-se as Equações (3.12) e (3.11), tem-se:

$$\int_{\Gamma} t_i u_i^{\bullet}d\Gamma + \int_{\Omega} u_i^{\bullet}b_i d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^{\bullet}u_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_i b_i^{\bullet}d\Omega. \quad (3.13)$$

A Equação integral (3.13) relaciona dois estados quaisquer de tensões. Para que se possa tratar problemas de elasticidade em meio contínuo, será adotado que um destes estados é conhecido, e o outro se deseja determinar. No caso de elementos de contorno,

o estado conhecido é o chamado estado fundamental que corresponde a resposta de um corpo infinito a uma carga concentrada unitária em um ponto  $\mathbf{x}'$ . A representação matemática de uma carga concentrada unitária é dada pelo delta de Dirac que é definido como

$$\begin{cases} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \infty & \text{se } \mathbf{x}=\mathbf{x}', \\ \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = 0 & \text{se } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}', \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')d\Omega = 1. \end{cases} \quad (3.14)$$

A razão da escolha do estado fundamental deve-se ao fato que a função delta de Dirac reduz o número de integrais de domínio. Pela propriedade seletivo da função delta de Dirac, tem-se:

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')d\Omega = f(\mathbf{x}') \quad (3.15)$$

para um dado ponto  $\mathbf{x}' \in \Omega$ .

Considerando o estado "•" como sendo o estado fundamental de um problema estático livre de forças de corpo ( $b_i^* = 0$ ), a Equação (3.13) pode ser escrita como:

$$\int_{\Gamma} T_{ik}u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i U_{ik} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i U_{ik} d\Gamma - \int_{\Omega} \delta_{ik} u_i d\Omega, \quad (3.16)$$

onde  $U_{ik}$  e  $T_{ik}$  representam respectivamente deslocamentos e forças de superfície na direção  $k$ , num ponto  $\mathbf{x}$ , devido a uma força concentrada unitária aplicada de forma estática num ponto  $\mathbf{x}'$  numa direção  $i$ . Por serem soluções do estado fundamental,  $U_{ik}$  e  $T_{ik}$  são chamadas soluções fundamentais de deslocamentos e forças de superfície, respectivamente.

Devido a propriedade (3.15), a Equação (3.16) pode ser escrita como:

$$u_k + \int_{\Gamma} T_{ik}u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ik}t_i d\Gamma - \int_{\Omega} b_i U_{ik} d\Omega. \quad (3.17)$$

Considerando que as forças de corpo  $b_i$  são nulas, pode-se escrever:

$$u_k + \int_{\Gamma} T_{ik}u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ik}t_i d\Gamma. \quad (3.18)$$

### 3.4 Soluções Fundamentais Anisotrópicas

Para se obter as soluções fundamentais estáticas para problemas bidimensionais em materiais anisotrópicos, o domínio  $\Omega$  será mapeado num plano complexo, usando a seguinte mudança de variável:

$$\mathbf{z}' = \begin{Bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x'_1 + \mu_1 x'_2 \\ x'_1 + \mu_2 x'_2 \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

e

$$\mathbf{z} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 + \mu_1 x_2 \\ x_1 + \mu_2 x_2 \end{Bmatrix}, \quad (3.20)$$

onde  $\mu_k$  são raízes complexas da Equação característica:

$$A_{11}u^4 - 2A_{13}u^3 + (2A_{12} + A_{33})u^2 - A_{23}u + A_{22} = 0 \quad (3.21)$$

$x'_1$  e  $x'_2$  são as coordenadas do ponto fonte (ponto de aplicação da carga concentrada unitária) e  $x_1$  e  $x_2$  são as coordenadas do ponto campo (ponto de obtenção da resposta devido a aplicação da carga unitária).

As soluções fundamentais para deslocamentos são dadas por:

$$U_{ji}(\mathbf{z}', \mathbf{z}) = 2\text{Re}[q_{i1}K_{j1} \ln(z_1 - z'_1) + q_{i2}K_{j2} \ln(z_2 - z'_2)]. \quad (3.22)$$

Por sua vez, as soluções fundamentais para forças de superfície são dadas por:

$$T_{ij}(\mathbf{z}', \mathbf{z}) = 2\text{Re} \left[ \frac{1}{(z_1 - z'_1)} g_{i1}(\mu_1 n_1 - n_2) K_{j1} + \frac{1}{(z_2 - z'_2)} g_{i2}(\mu_2 n_1 - n_2) K_{j2} \right], \quad (3.23)$$

onde

$$[g_{ji}] = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

e  $n_k$  são as componentes do vetor normal externo.

As constantes  $K_{ij}$  são obtidas resolvendo-se o sistema linear complexo dado por [17]:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \mu_1 & -\bar{\mu}_1 & \mu_2 & -\bar{\mu}_2 \\ q_{11} & -\bar{q}_{11} & q_{12} & -\bar{q}_{12} \\ q_{21} & -\bar{q}_{21} & q_{22} & -\bar{q}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_{j1} \\ \bar{K}_{j1} \\ K_{j2} \\ \bar{K}_{j2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{j2}/(2\pi i) \\ -\delta_{j1}/(2\pi i) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.25)$$

que é suficiente se para encontrar as constantes complexas  $K_{ik}$ . No caso de materiais isotrópicos, a equação característica (3.21) se torna biquadrada com duas raízes iguais a  $i$  e duas iguais a  $-i$ . Estes valores tornam o sistema de equações (3.25) singular. Por causa disso, não é possível o uso de materiais isotrópicos para comparar esta formulação com a formulação isotrópica que utiliza a solução fundamental de Kelvin, de acordo com [20] e [34]. Para fazer esta comparação pode-se usar materiais quase-isotrópicos, ou seja:

$$E_2 = E_1 + \epsilon \cong E, \quad (3.26)$$

sendo que:

$$\epsilon \leq 10^{-2} E_1 \quad (3.27)$$

e

$$G_{12} = \frac{E_1}{2(1 + \nu_{12})}. \quad (3.28)$$

Note que tanto a solução fundamental de deslocamentos quanto a de forças de superfície são singulares quando o ponto fonte tende ao ponto campo. No caso da solução

fundamental de deslocamentos a singularidade é fraca ( $\ln r$ ). Já no caso da solução fundamental de forças de superfície tem-se uma singularidade forte ( $1/r$ ).

### 3.5 Equações Integrais Singulares

A Equação integral (3.18) foi escrita para um ponto fonte no interior do domínio. Uma vez que o ponto fonte é interno, a equação contém apenas integrandos regulares. Considere agora o limite da transição quando o ponto fonte tende ao contorno. Esta operação pode ser implementada colocando o ponto fonte no contorno e diminuindo o domínio do problema por uma região semi-circular, com contorno  $\Gamma_\epsilon^*$  e raio  $\epsilon$ , centrado no ponto fonte, conforme mostrado na Figura 3.1. Com esta configuração, o contorno completo é dividido em duas partes, na forma:

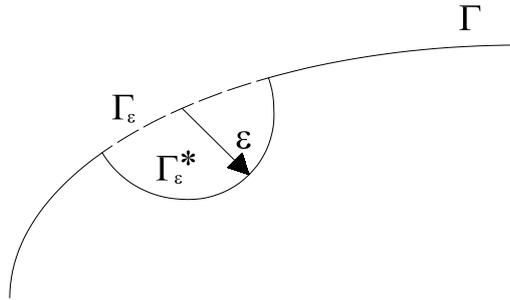


Figura 3.1: Ponto fonte localizado no contorno, circundado por uma região semi-circular.

$$\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*), \quad (3.29)$$

onde  $\epsilon$  é o raio do semi-círculo de centro no ponto fonte, pertencendo ao contorno  $\Gamma$  (Figura 3.1). A Equação (3.18) é, então, reescrita como:

$$u_l + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*} T_{li} u_i d\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*} U_{li} t_i d\Gamma. \quad (3.30)$$

A integral do lado direito da Equação (3.30) contém um integrando de singularidade fraca da ordem  $\ln(1/r)$  e é integrável como uma integral imprópria. A integral do lado esquerdo tem uma singularidade forte, de ordem  $1/r$ , que pode ser regularizada com o primeiro termo da expansão de Taylor em torno do ponto fonte, ou seja:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*} T_{li} u_i(\mathbf{z}) d\Gamma &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon^*} T_{li} [u_i(\mathbf{z}) - u_i(\mathbf{z}')] d\Gamma + \\ &u_i(\mathbf{z}') \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon^*} T_{li} d\Gamma + \\ &\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} T_{li} u_i(\mathbf{z}) d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Assumindo que os deslocamentos são contínuos no ponto fonte, o primeiro termo do lado direito da Equação (3.31) é integrável e desaparece no processo de limite. O segundo termo da equação representa um salto nos deslocamentos dado por  $A_{ij}(\mathbf{z}')u_j(\mathbf{z}')$ , no qual  $A_{ij}(\mathbf{z}')$  é uma constante que depende da geometria local e das constantes elásticas. Finalmente, o terceiro termo do lado direito da equação resulta numa integral imprópria que é calculada no sentido do valor principal de Cauchy. Portanto, quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , o ponto fonte tende ao contorno e, no limite, a Equação (3.30) pode ser escrita na forma:

$$c_{li}u_i + \int_{\Gamma} T_{li}u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{li}t_i d\Gamma, \quad (3.32)$$

onde  $\int$  representa integral no sentido do valor principal de Cauchy e o coeficiente  $c_{li}(\mathbf{z}')$  é dado por  $\delta_{ij} + A_{ij}(\mathbf{z}')$ , no qual  $\delta_{ij}$  representa o delta de Kronecker.

### 3.6 Formulação dos Elementos de Contorno Discretizada

Para se obter a solução do problema elasto-estático, o contorno é dividido em elementos de contorno. Nesta etapa do trabalho, serão utilizados apenas elementos constantes (1 nó por elemento).

Nesta formulação será mais conveniente trabalhar com vetores que usar notação inicial. Desta forma, tem-se:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{u}^{(i)}, \\ \mathbf{t} &= \mathbf{t}^{(i)},\end{aligned}\tag{3.33}$$

sendo que as variáveis em negrito representam vetores de dimensões  $2N$ , onde  $N$  é o número de nós,  $\mathbf{u}^{(i)}$  e  $\mathbf{t}^{(i)}$  representam os valores nodais dos deslocamentos e forças de superfícies, respectivamente,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{t}$  representam os deslocamentos e tensões ao longo do elemento, respectivamente. Neste trabalho,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{t}$  serão considerados constantes ao longo do elemento.

Considere que o contorno tenha sido dividido em  $NE$  elementos de contorno. Substituindo as Equações (3.33) na Equação (3.32), tem-se

$$\mathbf{c}^l \mathbf{u}^l + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{T} \, d\Gamma \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{U} \, d\Omega \right\} \mathbf{t}^j.\tag{3.34}$$

Chamando

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{U} \, d\Gamma = \mathbf{G}\tag{3.35}$$

e

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{T} \, d\Gamma = \mathbf{H},\tag{3.36}$$

tem-se

$$\sum_{j=1}^N H^{lj} u^j = \sum_{j=1}^N G^{lj} t^j,\tag{3.37}$$

ou, na forma matricial

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t}.\tag{3.38}$$

## 4 Integração analítica com elementos constantes

### 4.1 Introdução

Este capítulo descreve como os termos das matrizes de influência  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  são calculados analiticamente. A integração analítica de formulações isotrópicas são bem conhecidas na literatura, estando disponível inclusive em livros ([28]). Na grande maioria das integrações analíticas em formulações anisotrópicas, opta-se por uma transformação de coordenadas em que um sistema de coordenadas local é criado. Este sistema de coordenadas possuem eixos paralelos e perpendiculares ao elemento. Entretanto, nas formulações anisotrópicas, uma vez que as propriedades do material dependem da direção, este tipo de abordagem resulta em um custo computacional alto, pois as propriedades do material precisam ser recalculadas para cada elemento. Neste trabalho se optou por se fazer uma transformação de coordenadas de variáveis reais para variáveis complexas, o que não demandou que as propriedades do material fosse recalculada para cada elemento. Esta proposta é original, não sendo encontrada abordagem similar na literatura.

### 4.2 Cálculo analítico da matriz $\mathbf{G}$

Conforme mostrado no capítulo anterior, a matriz de influência  $\mathbf{G}$  é dada pela equação (3.35), onde  $\mathbf{U}$  é a matriz que contém as soluções fundamentais de deslocamentos dados pela equação (3.22).

Sem perder a generalidade, será detalhada a integração analítica do termo  $G_{11}$  e, em seguida, expandida para os demais termos da matriz  $\mathbf{G}$ .

O termo  $G_{11}$  é dado por:

$$G_{11} = \int_{\Gamma_i} U_{11} d\Gamma \quad (4.1)$$

A solução fundamental  $U_{11}$  pode ser reescrita como:

$$U_{11} = 2\text{Re}[q_{11}K_{11} \log(z_1 - z'_1) + q_{12}K_{12} \log(z_2 - z'_2)] \quad (4.2)$$

ou

$$U_{11} = 2\text{Re}[q_{11}K_{11} \log(z_1 - z'_1)] + 2\text{Re}[q_{12}K_{12} \log(z_2 - z'_2)] \quad (4.3)$$

ou ainda

$$U_{11} = 2\text{Re}[\alpha_1 \log(z_1 - z'_1)] + 2\text{Re}[\alpha_2 \log(z_2 - z'_2)] \quad (4.4)$$

onde

$$\alpha_1 = q_{11}K_{11} \quad (4.5)$$

$$\alpha_2 = q_{12}K_{12} \quad (4.6)$$

Desta forma, a equação (4.1) pode ser reescrita como:

$$G_{11} = \int_{\Gamma_i} U_{11} d\Gamma = \int_{\Gamma_i} 2\text{Re}[\alpha_1 \log(z_1 - z'_1)] d\Gamma + \int_{\Gamma_i} 2\text{Re}[\alpha_2 \log(z_2 - z'_2)] d\Gamma \quad (4.7)$$

ou

$$G_{11} = 2\text{Re}[\alpha_1 \int_{\Gamma_i} \log(z_1 - z'_1) d\Gamma] + 2\text{Re}[\alpha_2 \int_{\Gamma_i} \log(z_2 - z'_2) d\Gamma] \quad (4.8)$$

ou ainda

$$G_{11} = 2\text{Re}[\alpha_1 I_1] + 2\text{Re}[\alpha_2 I_2] \quad (4.9)$$

onde

$$I_1 = \int_{\Gamma_i} \log(z_1 - z'_1) d\Gamma \quad (4.10)$$

$$I_2 = \int_{\Gamma_i} \log(z_2 - z'_2) d\Gamma \quad (4.11)$$

Para que se calcule as integrais dadas pelas equações (4.10) e (4.11) analiticamente sem a necessidade de recalcular as propriedades do material, a seguinte transformação de coordenadas é usada (vide figura 4.1).

$$I_k = \int_{\Gamma_i} \ln(z_k - z'_k) d\Gamma = \int_{z_{1k}}^{z_{2k}} \ln(z_k - z'_k) \frac{d\Gamma}{dz_k} dz_k, \quad (4.12)$$

Da figura 4.1 tem-se que:

$$d\Gamma = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

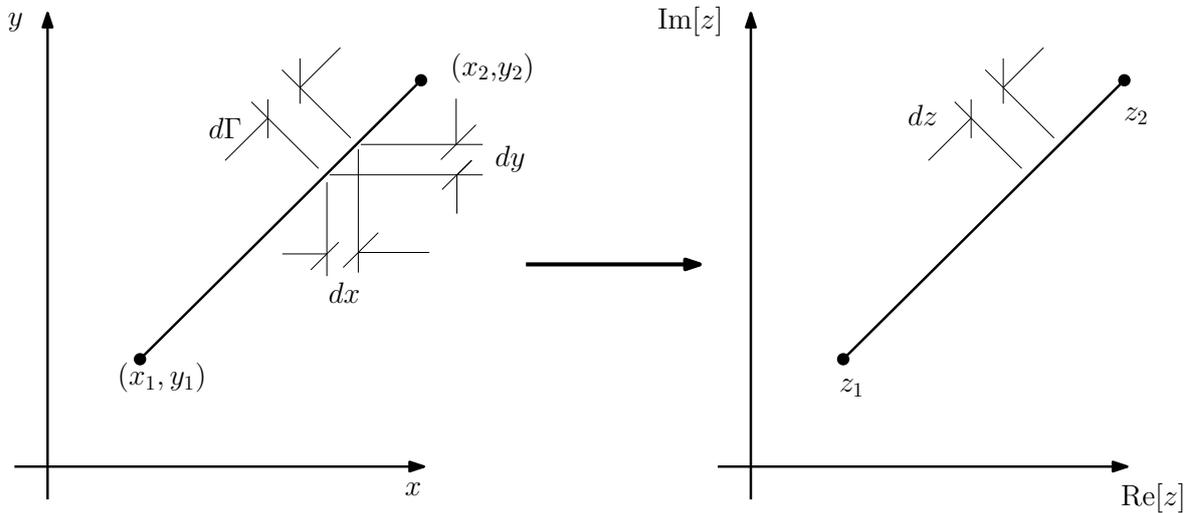


Figura 4.1: Transformação de coordenadas.

Para o cálculo do jacobiano  $\frac{d\Gamma}{dz_k}$ , o comprimento  $L_i$  do elemento  $i$  será calculado no sistema de referência real  $(x, y)$  e no sistema de referência complexo  $(\text{Re}[z], \text{Im}[z])$ .

Considerando que o elemento é retilíneo, tem-se:

$$\int_{\Gamma_i} d\Gamma = L_i = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad (4.13)$$

onde  $L_i$  é o comprimento do elemento  $i$ .

Se o cálculo deste comprimento for feito no espaço complexo, tem-se:

$$\int_{\Gamma_i} d\Gamma = \int_{z_{1k}}^{z_{2k}} \frac{d\Gamma}{dz_k} dz_k \quad (4.14)$$

Considerando que  $\frac{d\Gamma}{dz_k} dz_k$  é constante ao longo do elemento retilíneo  $i$ , tem-se:

$$\int_{\Gamma_i} d\Gamma = \int_{z_{1k}}^{z_{2k}} \frac{d\Gamma}{dz_k} dz_k = \frac{d\Gamma}{dz_k} \int_{z_{1k}}^{z_{2k}} dz_k = \frac{d\Gamma}{dz_k} (z_{2k} - z_{1k}). \quad (4.15)$$

Igualando-se (4.13) e (4.15), tem-se:

$$\frac{d\Gamma}{dz_k} = \frac{L_i}{(z_{2k} - z_{1k})} = \frac{L_i \overline{(z_{2k} - z_{1k})}}{(|z_{2k} - z_{1k}|)^2} \quad (4.16)$$

Desta forma, a integral (4.12) é dada por:

$$I_k = -\{[\ln(z_{2k} - z'_k) - 1] (z_{2k} - z'_k) - [\ln(z_{1k} - z'_k) - 1] (z_{1k} - z'_k)\} \frac{d\Gamma}{dz_k}. \quad (4.17)$$

Os demais termos da matriz  $\mathbf{G}$  elementar são dados por:

$$G_{12} = 2\text{Re}[\alpha_3 I_1] + 2\text{Re}[\alpha_4 I_2] \quad (4.18)$$

$$G_{21} = 2\text{Re}[\alpha_5 I_1] + 2\text{Re}[\alpha_6 I_2] \quad (4.19)$$

$$G_{22} = 2\text{Re}[\alpha_7 I_1] + 2\text{Re}[\alpha_8 I_2] \quad (4.20)$$

onde:

$$\alpha_3 = q_{21}K_{11} \quad (4.21)$$

$$\alpha_4 = q_{22}K_{12} \quad (4.22)$$

$$\alpha_5 = q_{11}K_{21} \quad (4.23)$$

$$\alpha_6 = q_{12}K_{22} \quad (4.24)$$

$$\alpha_7 = q_{21}K_{21} \quad (4.25)$$

$$\alpha_8 = q_{22}K_{22} \quad (4.26)$$

### 4.3 Cálculo analítico da matriz $\mathbf{H}$

A matriz de influência  $\mathbf{H}$  é dada pela equação (3.36), onde  $\mathbf{T}$  é a matriz que contém as soluções fundamentais de forças de superfície dados pela equação (3.23).

Sem perder a generalidade, será detalhada a integração analítica do termo  $H_{11}$  e, em seguida, expandida para os demais termos da matriz  $\mathbf{H}$ .

O termo  $H_{11}$  é dado por:

$$H_{11} = \int_{\Gamma_i} T_{11} d\Gamma \quad (4.27)$$

A solução fundamental  $T_{11}$  pode ser reescrita como:

$$T_{11} = 2\text{Re} \left[ \frac{1}{(z_1 - z'_1)} g_{11}(\mu_1 n_1 - n_2) K_{21} + \frac{1}{(z_2 - z'_2)} g_{22}(\mu_2 n_1 - n_2) K_{22} \right], \quad (4.28)$$

ou

$$T_{11} = 2\text{Re} \left[ \frac{1}{(z_1 - z'_1)} g_{11}(\mu_1 n_1 - n_2) K_{11} \right] + 2\text{Re} \left[ \frac{1}{(z_2 - z'_2)} g_{12}(\mu_2 n_1 - n_2) K_{12} \right], \quad (4.29)$$

ou ainda

$$T_{11} = 2\text{Re} \left[ \beta_1 \frac{1}{(z_1 - z'_1)} (\mu_1 n_1 - n_2) \right] + 2\text{Re} \left[ \beta_2 \frac{1}{(z_2 - z'_2)} (\mu_2 n_1 - n_2) \right] \quad (4.30)$$

onde

$$\beta_1 = g_{11} K_{11} \quad (4.31)$$

$$\beta_2 = g_{12} K_{12} \quad (4.32)$$

Desta forma, a equação (4.27) pode ser reescrita como:

$$H_{11} = \int_{\Gamma_i} T_{11} d\Gamma = \int_{\Gamma_i} 2\text{Re} \left[ \beta_1 \frac{1}{(z_1 - z'_1)} (\mu_1 n_1 - n_2) \right] d\Gamma + \int_{\Gamma_i} 2\text{Re} \left[ \beta_2 \frac{1}{(z_2 - z'_2)} (\mu_2 n_1 - n_2) \right] d\Gamma \quad (4.33)$$

ou

$$H_{11} = 2\text{Re} \left[ \beta_1 \int_{\Gamma_i} \frac{1}{(z_1 - z'_1)} (\mu_1 n_1 - n_2) d\Gamma \right] + 2\text{Re} \left[ \beta_2 \int_{\Gamma_i} \frac{1}{(z_2 - z'_2)} (\mu_2 n_1 - n_2) d\Gamma \right] \quad (4.34)$$

ou ainda

$$H_{11} = 2\text{Re} [\beta_1 J_1] + 2\text{Re} [\beta_2 J_2] \quad (4.35)$$

onde

$$J_1 = \int_{\Gamma_i} \frac{1}{(z_1 - z'_1)} (\mu_1 n_1 - n_2) d\Gamma \quad (4.36)$$

e

$$J_2 = \int_{\Gamma_i} \frac{1}{(z_2 - z'_2)} (\mu_2 n_1 - n_2) d\Gamma \quad (4.37)$$

Da mesma forma que para as integrais  $I_k$ , é feita a transformação dada pela figura 4.1. Desta forma, a integral  $J_k$  é escrita como:

$$J_k = \int_{z_{1k}}^{z_{2k}} \frac{1}{(z_k - z'_k)} (\mu_k n_1 - n_2) \frac{d\Gamma}{dz_k} dz_k \quad (4.38)$$

Que, integrada analiticamente, é igual a:

$$J_k = (\log(z_{2k} - z'_k) - \log(z_{1k} - z'_k)) \frac{d\Gamma}{dz_k} \quad (4.39)$$

Os demais termos da matriz  $\mathbf{H}$  elementar são dados por:

$$H_{12} = 2\text{Re}[\beta_3 J_1] + 2\text{Re}[\beta_4 J_2] \quad (4.40)$$

$$H_{21} = 2\text{Re}[\beta_5 J_1] + 2\text{Re}[\beta_6 J_2] \quad (4.41)$$

$$H_{22} = 2\text{Re}[\beta_7 J_1] + 2\text{Re}[\beta_8 J_2] \quad (4.42)$$

onde:

$$\beta_3 = g_{21} K_{11} \quad (4.43)$$

$$\beta_4 = g_{22} K_{12} \quad (4.44)$$

$$\beta_5 = g_{11} K_{21} \quad (4.45)$$

$$\beta_6 = g_{12} K_{22} \quad (4.46)$$

$$\beta_7 = g_{21} K_{21} \quad (4.47)$$

$$\beta_8 = g_{22} K_{22} \quad (4.48)$$

Desta forma, todos os termos das matrizes de influência  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{H}$  foram calculados analiticamente sem que fosse necessária reescrever as constantes de materiais  $K_{ij}$ ,  $q_{ij}$  e  $g_{ij}$  para cada elemento. Como será mostrado no capítulo 5, uma das vantagens de se usar integração analítica é que problemas de singularidades não precisam ser tratados. A integração analítica das matrizes de influência  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{H}$  desenvolvida no capítulo 4 é possível uma vez que o elemento seja retilíneo. A extensão desta formulação para elementos lineares é direta e não deve apresentar dificuldades. Entretanto, caso o elemento seja de alta ordem (elemento quadrático ou ordem superior), como existe a possibilidade do elemento apresentar geometria curva, a extensão desta formulação deve ser melhor investigada pois a integral (4.13) pode não apresentar solução analítica. Neste caso, embora a convergência da formulação seja mais rápida devido a ordem maior do elemento, o custo computacional pode ser maior, mesmo que o tamanho do problema (número de nós) seja menor. No capítulo 5 também será investigada a convergência da formulação de elementos constantes e de elementos quadráticos.

## 5 Resultados Numéricos

### 5.1 Introdução

Este capítulo apresenta os resultados obtidos com a formulação desenvolvida ao longo deste trabalho. O primeiro exemplo numérico tem como objetivo comparar a integração analítica com a integração numérica. Os demais exemplos tem como objetivo comparar as soluções do método dos elementos de contorno para problemas de elasticidade plana anisotrópica usando elementos quadráticos e elementos constantes.

### 5.2 Comparação da integração analítica com a integração numérica

Para testar a integração analítica desenvolvida neste trabalho, considere um elemento com as seguintes coordenadas (Figura 5.1):

Início do elemento:

$$(x_1, y_1) = (13; 10, 5) \quad (5.1)$$

Fim do elemento:

$$(x_2, y_2) = (14, 2; 9, 9) \quad (5.2)$$

Considere que a constante de material  $\mu = -0.1623 + 0.8860i$ . As integrais  $I_1$  e  $I_2$  foram calculadas analiticamente e numericamente usando diferentes números de pontos de integração, variando de 2 a 18 pontos. Estas integrais foram calculadas para diferentes posições de pontos fontes, conforme mostrado na Figura 5.1, todos eles muito próximos ao elemento. A razão entre a distância  $d$  do ponto fonte ao elemento e o comprimento do elemento  $L$  variou de 0,01 a 0,15. As Figuras 5.2 e 5.3 mostram os valores obtidos para as partes real e imaginária da integral  $I_1$ . Conforme pode ser notado em ambas Figuras, a solução numérica tende a se aproximar da solução analítica conforme o número de pontos de integração aumenta.

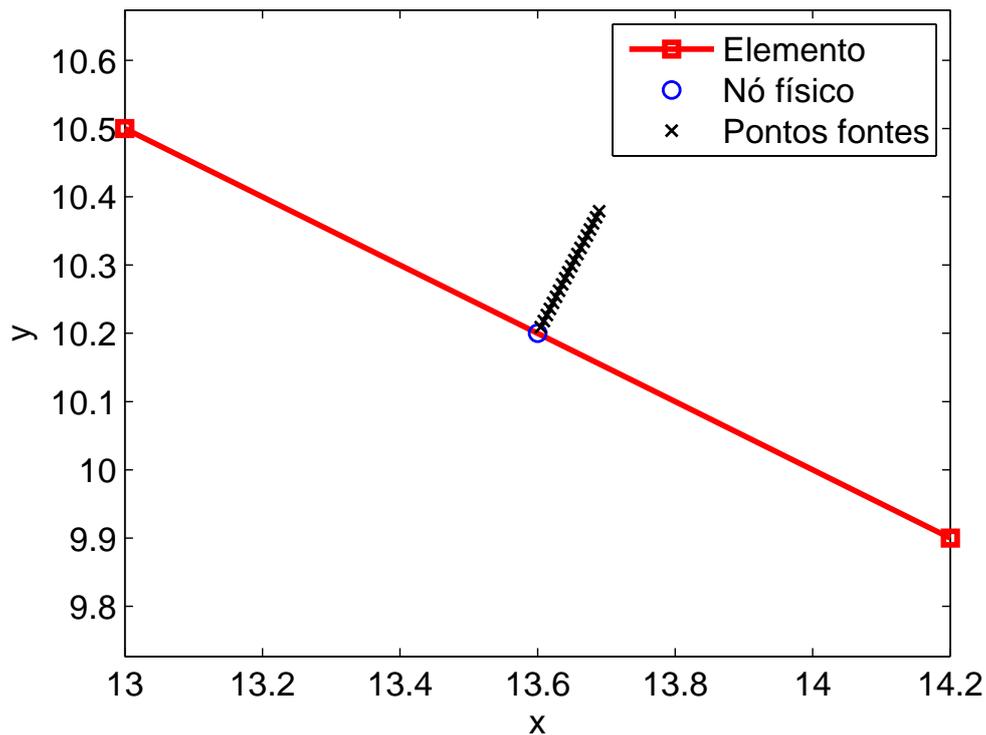


Figura 5.1: Pontos Fontes

As Figuras 5.4 e 5.5 mostram os valores obtidos para as partes real e imaginária da integral  $I_2$ . Da mesma forma que para a integral  $I_1$ , a solução numérica também tende a se aproximar da solução analítica conforme o número de pontos de integração aumenta. Convém notar que no caso da integral  $I_2$  a solução numérica se mantém distante da solução analítica mesmo com um número elevado de pontos de integração.

Este exemplo mostra que a integral analítica resolve com sucesso o problema da quase-singularidade que é quando um ponto fonte se encontra muito perto do elemento que está sendo integrado. Embora existam técnicas numéricas para o tratamento de integrais quase-singulares, estas técnicas sempre terão um custo elevado quando comparado com a solução analítica.

O código usado para gerar as Figuras desta seção encontram-se no Apêndice A

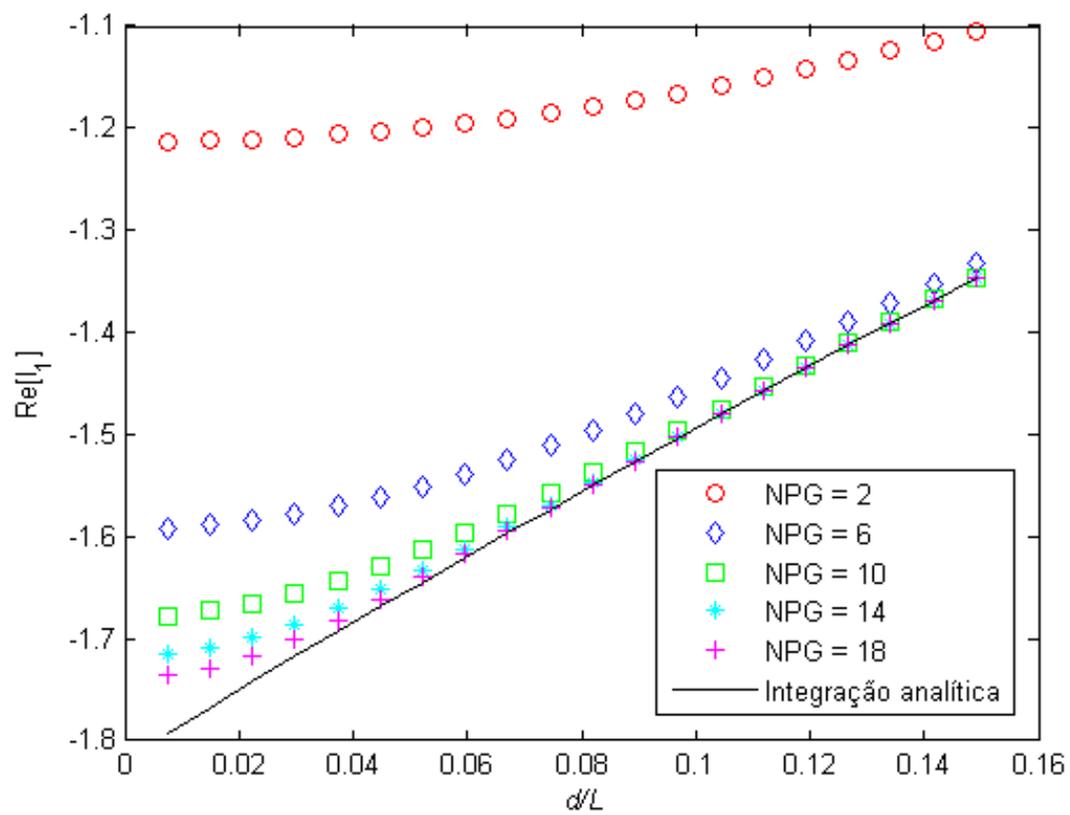


Figura 5.2: Parte real da integral  $I_1$ .

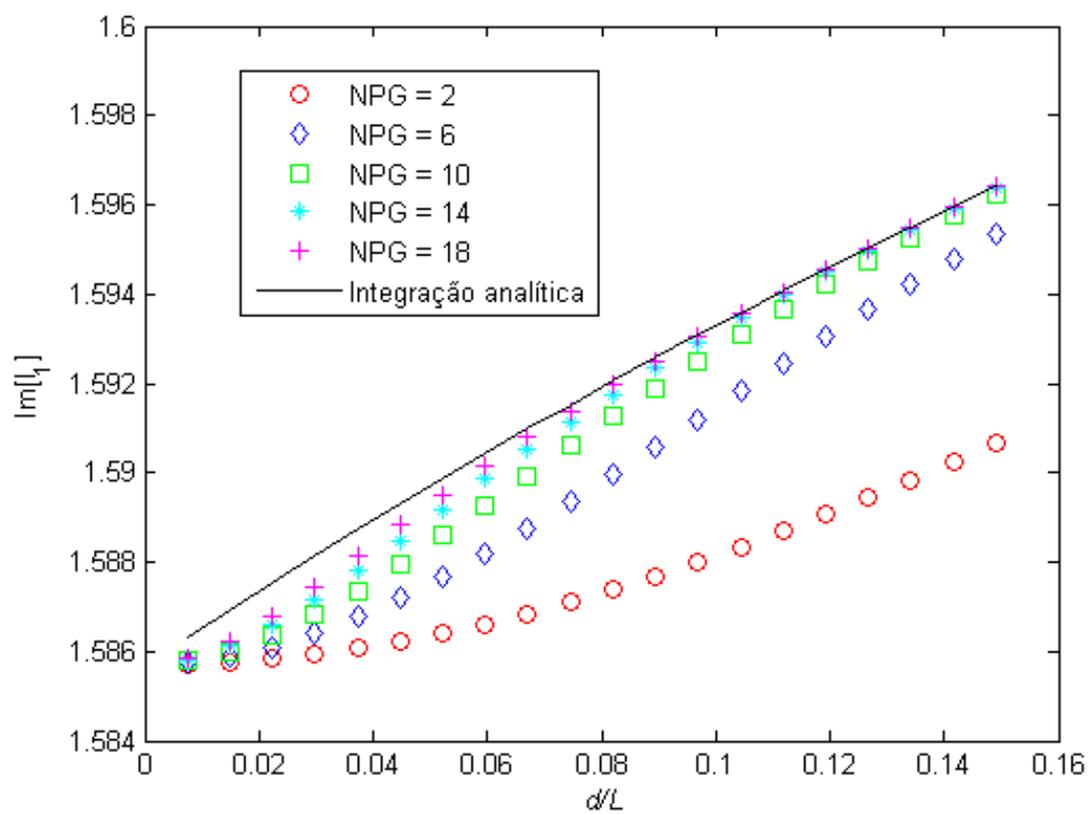


Figura 5.3: Parte imaginária da integral  $I_1$ .

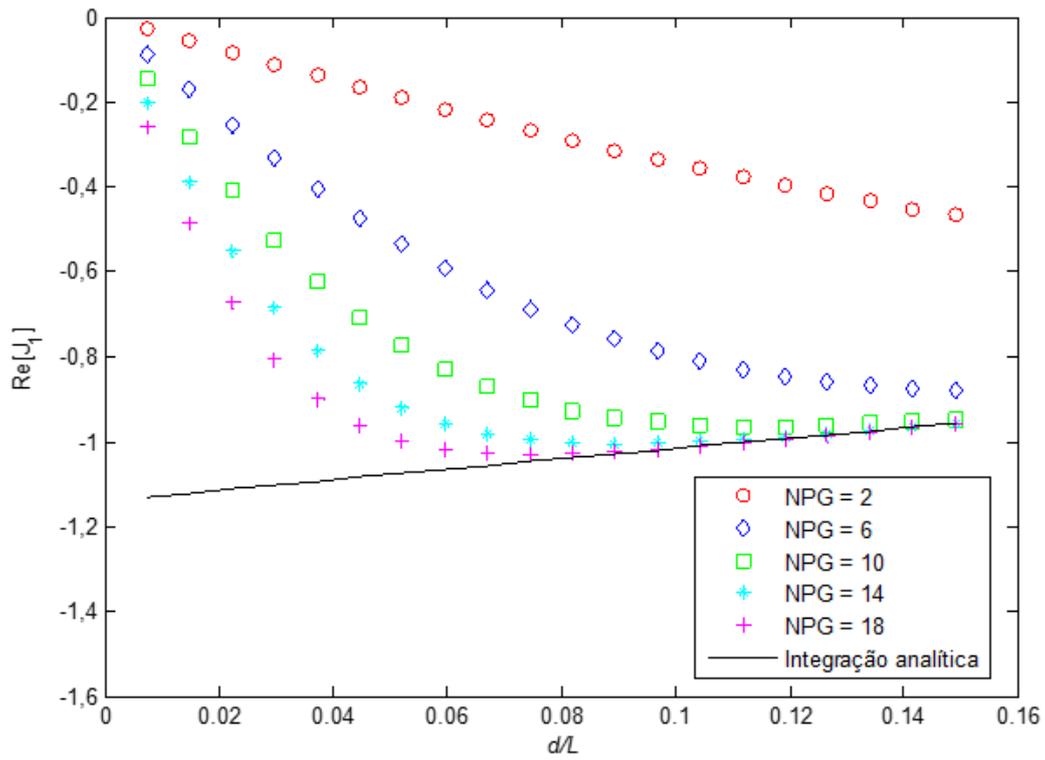


Figura 5.4: Parte real da integral  $J_1$ .

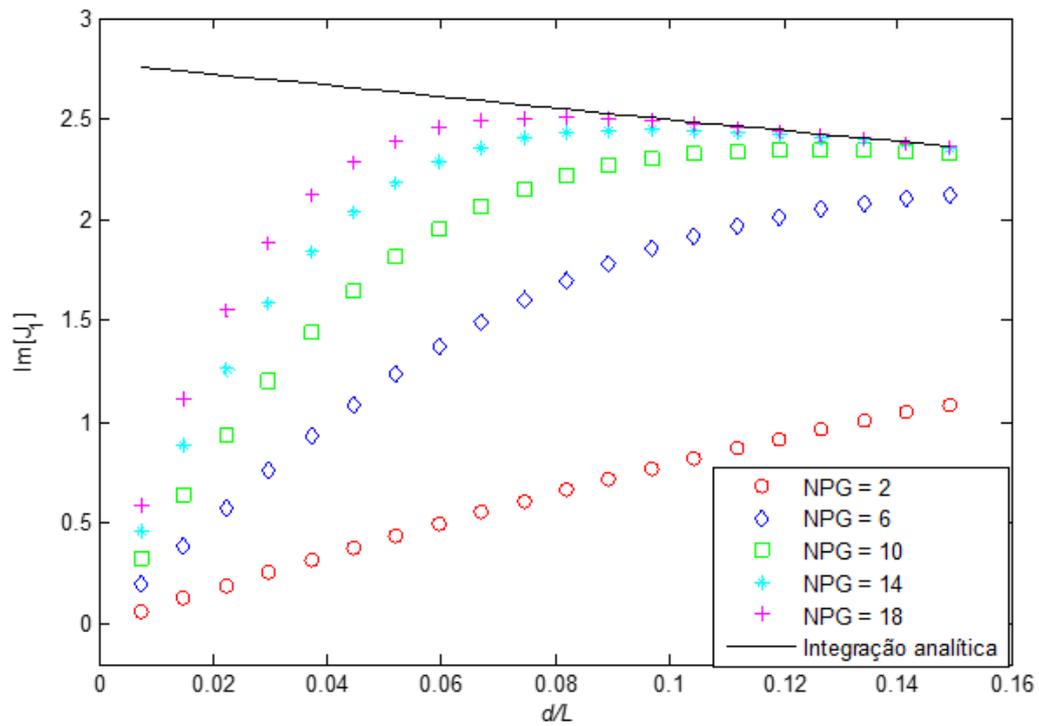


Figura 5.5: Parte imaginária da integral  $J_1$ .

### 5.3 Comparação entre elementos quadráticos e elementos constantes

Com o intuito de comparar a velocidade de convergência dos resultados da formulação de elementos constantes com elementos de maior ordem, no caso elementos quadráticos, considere uma viga cantilever conforme mostrado na figura 5.6. O material é um laminado de 4 camadas com sequência de empilhamento  $[15^\circ, -25^\circ, -25^\circ, 15^\circ]$ . Todas as camadas tem a mesma espessura. As propriedades de cada lâmina do laminado são  $E_1 = 220$  GPa  $E_2 = 440$  GPa,  $G_{12} = 76,92$  GPa e  $\nu_{12} = 0.4286$ . A viga está submetida a uma carga vertical na aresta vertical esquerda. Esta carga é uniformemente distribuída  $q = 1$  MPa. As dimensões da viga são: comprimento  $L = 4$  m e largura  $w = 1$  m.

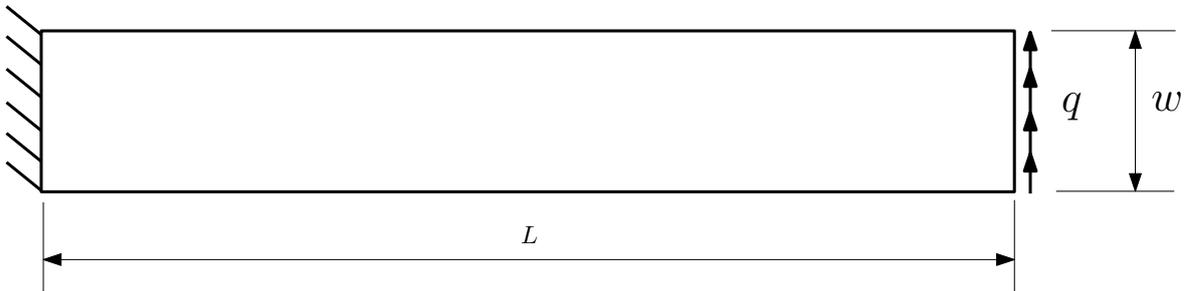


Figura 5.6: Viga cantilever.

Este problema é bem conhecido da literatura por ser de difícil convergência com elementos constantes, conforme mostrado no trabalho de [29] para materiais isotrópicos. O problema foi analisado usando uma formulação de elementos quadráticos e também a de elementos constantes desenvolvida neste trabalho. Foi analisado o deslocamento máximo na direção  $y$  e uma convergência de 3 algarismos. A formulação quadrática convergiu com uma malha de 210 elementos (420 nós) de igual tamanho, sendo 21 elementos nas arestas verticais e 84 elementos nas arestas horizontais. O valor da convergência é  $\bar{u}_2 = 0,588$  mm. A tabela 5.1 mostra os resultados obtidos com elementos constantes usando diferentes malhas juntamente com a diferença percentual  $D$  entre os resultados obtidos com elementos constantes  $u_2$  e o valor convergido obtido com elementos quadráticos  $\bar{u}_2$ , ou seja:

$$D = \frac{(\bar{u}_2 - u_2)}{\bar{u}_2} \times 100\% \quad (5.3)$$

A figura 5.8 mostra a variação da diferença percentual  $D$  com o número de nós.

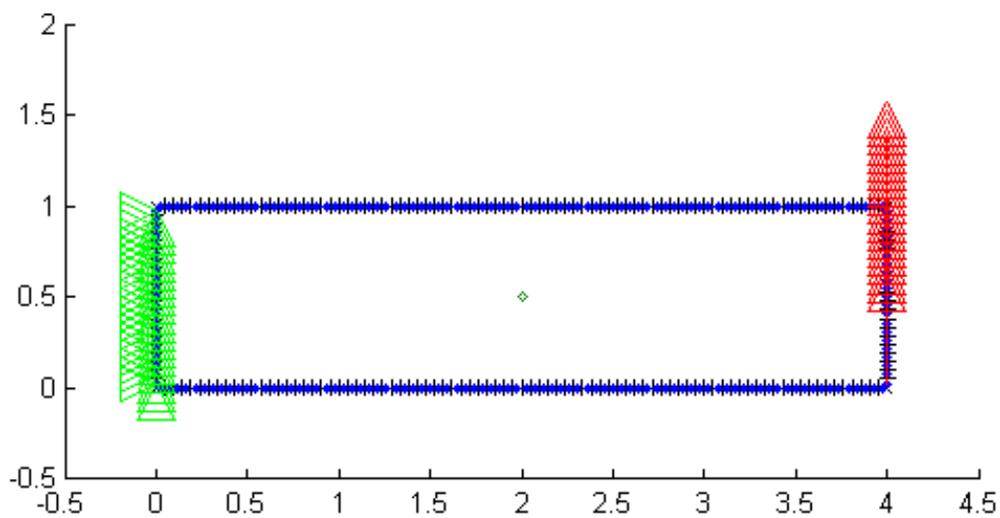


Figura 5.7: Modelo geométrico, malha (210 elementos) e condições de contorno usado na análise da viga cantilever.

É possível notar claramente uma convergência da formulação com elementos quadráticos e constantes. Porém, a formulação de elementos constantes a convergência se dá de maneira mais lenta.

A figura 5.9 mostra a viga deformada.

Tabela 5.1: Resultados obtidos usando as formulações de elementos constantes, onde  $N$  = número de nós = número de elementos,  $D$  = Diferença em relação ao valor convergido usando elementos quadráticos ( $u_2 = 0,588$  mm).

$N$	$u_2 \times 10^{-1}$ (mm)	$D$ (%)
210	5,00	15,0
630	5,42	7,82
1260	5,61	4,59
2520	5,74	2,38
5040	5,82	1,02

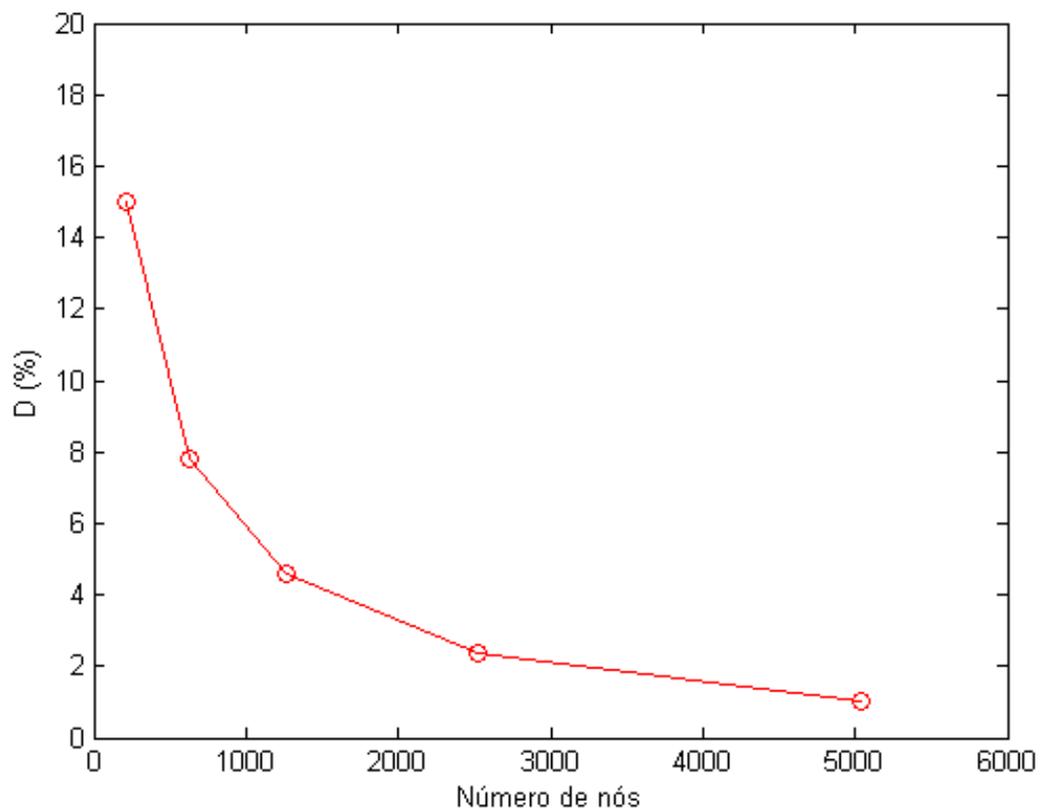


Figura 5.8: Variação da diferença percentual  $D$  com o número de nós.

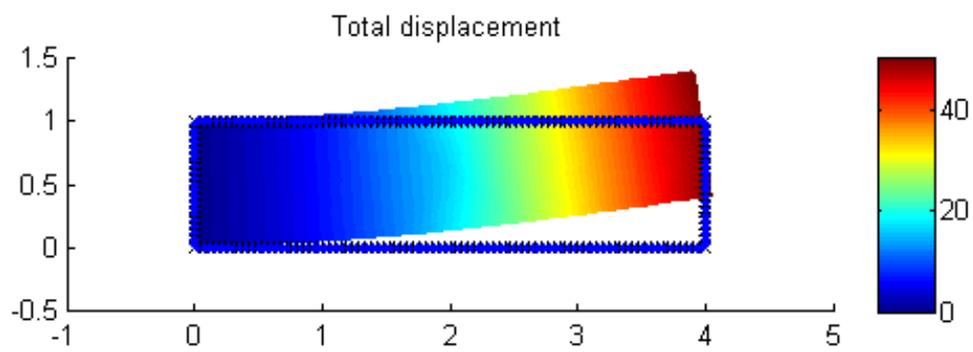


Figura 5.9: Deslocamentos totais na viga cantilever.

## 6 Conclusões e trabalhos futuros

### 6.1 Conclusões

Este capítulo apresentou uma formulação numérica do método dos elementos de contorno direto aplicada a elasticidade plana de materiais anisotrópicos. Deslocamentos e forças de superfície foram consideradas constantes ao longo de cada elemento de contorno (elementos de contorno constantes). A partir da equação de equilíbrio e da relação constitutiva do material, foi usado o método dos resíduos ponderados para transformar as equações diferenciais em equações integrais. Estas equações integrais foram transformadas em equações integrais de contorno através do teorema de Gauss-Green e usando as soluções fundamentais como funções peso no método dos resíduos ponderados. As soluções fundamentais foram obtidas usando variáveis complexas e possui uma equação analítica. A contribuição do trabalho para o estado da arte do método dos elementos de contorno foi que, ao invés de integrar numericamente as integrais das matrizes de influência  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  conforme é usualmente feito no método dos elementos de contorno, integrou-se analiticamente. Com isso, problemas de singularidades fortes e fracas, bem como quase-singularidades, problemas comum no método dos elementos de contorno, não precisam ser tratados. Para fazer esta integração analítica, foi proposta uma forma original na qual se fez uma transformação de coordenadas do sistema de referência global  $(x, y)$  para um sistema de referência complexo  $(\text{Re}[z], \text{Im}[z])$ . A principal vantagem desta transformação é que, em se tratando de material anisotrópico, não é necessário recalcular as constantes de materiais que variam com a direção.

Os resultados da integração analítica foram comparados com a integração numérica fazendo o ponto fonte tender ao elemento (forçando uma quase-singularidade). Pode-se notar que, para pontos fontes muito próximo ao contorno é necessário um número muito alto de pontos de integração para se obter uma concordância com os resultados da integração analítica. Também foi analisada a convergência da formulação de elementos constantes comparada com a convergência de elementos quadráticos em um problema crítico. Pode-se notar que a convergência de elementos constantes é mais lenta que a dos elementos quadráticos. Porém, uma vez que não há integração numérica na formulação de elementos de contorno constantes, o custo computacional pode ser menor para uma

mesma precisão.

## 6.2 Trabalhos futuros

Como trabalhos futuros relacionados a este trabalho, sugere-se os seguintes temas:

1. Estender a formulação de integração analítica das matrizes de influência para elementos de contorno lineares. Uma vez que os elementos são retilíneos, esta etapa não irá apresentar maiores dificuldades.
2. Estudar a possibilidade de extensão das integrais analíticas para elementos quadráticos considerando que os mesmos podem ser curvos. Uma alternativa é expandir o jacobino em séries de Taylor, que traz uma boa precisão para elementos até uma certa curvatura. Ao mesmo tempo, a curvatura pode variar se mais termos da série de Taylor forem usados.
3. Usar a formulação desenvolvida nas formulações rápidas do MEC tais como expansão em multipólos rápidos e aproximação cruzada adaptativa.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Agarwal, B. D. e Broutman, L. J. *Analysis of performance of fiber composites*. John Wiley and Sons Inc., New York, 1990.
- [2] Albuquerque, E. L. *Numerical analysis of dynamic anisotropic problems using the boundary element method*. Tese de Doutorado, Unicamp, Dept. Mec. Comput., July de 2001.
- [3] Albuquerque, E. L., Sollero, P., e Aliabadi, M. H. The boundary element method applied to time dependent problems in anisotropic materials. *International Journal of Solids and Structures*, 39:1405–1422, 2002.
- [4] Albuquerque, E. L., Sollero, P., e Aliabadi, M. H. Dual boundary element method for anisotropic dynamic fracture mechanics. *International Journal for Numerical Method in Engineerin*, 59:1187–1205, 2004.
- [5] Albuquerque, E. L., Sollero, P., e Fedelinski, P. Dual reciprocity boundary element method in laplace domain applied to anisotropic dynamic crack problems. *Computers and Structures*, 81:1703–1713, 2003.
- [6] Albuquerque, E. L., Sollero, P., e Fedelinski, P. Free vibration analysis of anisotropic material structures using the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27:977–985, 2003.
- [7] Albuquerque, E. L., Sollero, P., e Paiva, W. P. The radial integration method applied to dynamic of anisotropic plates. *Communications in numerical methods in engineering*, 23:805–818, 2006.
- [8] Albuquerque, E. L., Sollero, P., Venturini, W. S., e Aliabadi, M. H. Boundary element analysis of anisotropic kirchhoff plates. *International Journal of Solids and Structures*, 43:4029–4046, 2006.
- [9] Aliabadi, M. H. *The Boundary Element Method: Applications in Solids and Structures*. John Wiley e Sons, New York, 2002.

- [10] Banerjee, P. K. e Butterfield, R. *Boundary Element Methods in Engineering*. McGraw-Hill, London, 1981.
- [11] Barnett, D. M. The precise evaluation of derivatives of the anisotropic elastic green's function. *Phys. Stat. Solid (b)*, 49:741–748, 1972.
- [12] Brebbia, C. e Dominguez, J. *Boundary Element an Introductory Course*. Computation Mechanics Publications, Southampton, Boston, second edition, 1989.
- [13] Brebbia, C. A. e Dominguez, J. *Boundary elements an introductory course*. Southampton: Computational Mechanics Publications, second edition, 1992.
- [14] Buroni, F. C. *Tree-dimensional Green's functions for anisotropic and multi-field materials*. Tese de Doutorado, Universidad de Sevilla, Spain., 2012.
- [15] Buroni, F. C. e Saez, . Three - dimensional green's function and its derivative for materials with general anisotropic magneto - electro - elastic coupling. *Proc. R. Soc., A* 466:515–537, 2010.
- [16] Chen, T. e Lin, F. Z. Numerical evaluation of derivatives of the anisotropic elastic green's functions. *Mech. Res. Commun*, 20:501–506, 1993.
- [17] Cruse, T. A. e Swedlow, J. L. Interactive program for analysis and design problems in advanced composites. Technical report, Carnegie-Mellon University, Report AFLM-TR-71-268, 1971.
- [18] Daniel, I. e Ishai, O. *Engineering Mechanics of Composite Materials*, volume I. Oxford University Press, 2006.
- [19] Deb, A. Boundary elements analysis of anisotropic bodies under thermo mechanical body force loadings. *Composite Structures*, 58:715 – 726, 1996.
- [20] Dominguez, J. *Boundary elements in dynamics*. Computational Mechanics Publication, Southampton, Boston, 1993.
- [21] Gibson, R. F. *Principles of composite material mechanics*. McGraw Hill, New York, 1994.
- [22] Hull, D. e Clyne, T. W. *An itroduction to composite materials*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [23] Kane, J. H. *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*. Prentice Hall, New Jersey, 1994.

- [24] Kogl, M. e Gaul, L. A boundary element method for transient piezoelectric analysis. *Eng. Anal. with Boundary Elements*, 24:591–598, 2000.
- [25] Kogl, M. e Gaul, L. Free vibration analysis of anisotropic solids with the boundary element method. *Eng. Anal. with Boundary Elements*, 27:107–114, 2003.
- [26] Lekhnitskii, S. G. *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*. Holden-Day, San Francisco, 1963.
- [27] Lifshitz, I. M. e Rozenzweig, L. N. Construction of the green tensor for the fundamental equation of elasticity theory in the case of unbounded elastically anisotropic medium. *Zh. Eksp. Teor*, 17:783–791, 1947.
- [28] Liu, Y. J. *Fast Multipole Boundary Element Method: Theory and Applications in Engineering*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [29] Liu, Y. J. e Li, Y. X. Slow convergence of the bem with constant elements insolving beam bending problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 39:1–4, 2014.
- [30] Nakamura, G. e Tanuma, K. A formula for the fundamental solution of anisotropic elasticity. *Q. J. Mech. Appl. Math*, 50:179–194, 1997.
- [31] Neto, F. L. e Pardini, L. C. *Compósitos Estruturais: ciência e tecnologia*. Edgard Blucher, São Paulo, 2006.
- [32] Pan, E. e Yuan, F. G. Boundary element analysis of three dimensional cracks in anisotropic solids. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 48:211–237, 2000.
- [33] Partridge, P. W. Towards criteria for selection approximation functions in the dual reciprocity method. *Engr. Anal. with Boundary Elements*, 24:519–529, 2000.
- [34] Partridge, P. W., Brebbia, C. A., e Wrobel, L. C. *The dual reciprocity boundary element method*. Computational Mechanics Publications, Southampton, Boston, 1992.
- [35] Phan, P. V., Gray, L. J., e Kaplan, T. On the residue calculus evaluation of the 3d anisotropic elastic green’s function. *Commun. Numer. Methods Eng*, 20:335–341, 2004.
- [36] Rajamohan, C. e Raamachandran, J. Bending of anisotropic plates by charge simulation method. *Advances in Engr. Software*, 30:369–373, 1999.

- [37] Riccardella, P. C. An improved implementation of the boundary - integral technique for two dimensional elasticity problems. Technical report, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh,PA, Department of Mechanical Engineering, September de 1972.
- [38] Rizzo, F. J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. *Quarterly of Applied Mathematics*, 17:201–217, 1967.
- [39] Sales, M. A. e Gray, L. J. Evaluation of the anisotropic green’s function and its derivates. *Comput. Struct*, 69:247–254, 1998.
- [40] Schclar, N. A. *Anisotropic analysis boundary elements*. Computacional Mechanics Publication, Southamoton, Boston, 1994.
- [41] Shi, G. e Benzine, G. A general boundary integral formulation for the anisotropic plate bending problems. *J. Composite Materials*, 22:694–716, 1988.
- [42] Shiah, Y. C., Tan, C. L., e Lee, R. F. Internal point solutions for displacements and stress in 3d anisotropic elastic solids using the boundary element method. *CMES: Comput. Model. Eng. Sci.*, 69:167–197, 2010.
- [43] Shiah, Y. C., Tan, C. L., e Lee, V. G. Evaluation of explicit - form fundamental solutions for displacements and stresses in 3d anisotropic elastic solids. *CMES: Comput. Model. Eng. Sci.*, 34:205–226, 2008.
- [44] Shiah, Y. C., Tan, C. L., e Wang, C. Y. Efficient computation of the green’s function and its derivatives for three - dimensional anisotropic elasticity in bem analysis. *Eng. Anal. Boundary Elem.*, 36:1746–1755, 2012.
- [45] Sollero, P. e Aliabadi, M. H. Fracture mechanics analysis of anisotropic plates by the boundary element method. *Int. J. of Fracture*, 64:269–284, 1993.
- [46] Sollero, P. e Aliabadi, M. H. Anisotropic analysis of composite laminates using the dual boundary elements methods. *Composite Structures*, 31:229–234, 1995.
- [47] Synge, J. *The Hypercircle in Mathematical Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1957.
- [48] Tan, C. L., Shiah, Y. C., e Lin, C. W. Stress analysis of 3d generally anisotropic elastic solids using the boundary element method. *CMES: Comput. Model. Eng. Sci.*, 41:195–214, 2009.

- [49] Távára, L., Ortiz, J. E., e Mantic, V. Unique real - variable expressions of displacement and traction fundamental solutions covering all transversely isotropic, materials for 3d bem. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 74:776–798, 2008.
- [50] Ting, T. C. T. e Lee, V. G. The three-dimensional elastostic green’s function for general anisotropic linear elastic solid. *Q. J. Mech. Appl. Math*, 50:407–426, 1997.
- [51] Tonon, F., Pan, E., e Amadei, B. Green’s functions and boundary element method formulation for 3d anisotropic media. *Comput. Struct.*, 79:469–482, 2001.
- [52] V.G.Lee,. Explicit expression of derivatives of elastic green’s functions for general anisotropic materials. *Mech. Res. Commun*, 30:241–249, 2003.
- [53] V.G.Lee,. Derivatives of the three-dimensional green’s function for anisotropic materials. *Int.J. Solids Struct*, 46:1471–1479, 2009.
- [54] Wang, C. Y. Elastic fields produced by a point source in solids of general anisotropy. *J. Eng. Math.*, 32:41–52, 1997.
- [55] Wang, C. Y. e Denda, M. 3d bem for general anisotropic elasticity. *Int. J. Solids Struct*, 44:7073–7091, 2007.
- [56] Wilson, R. B. e Cruse, T. A. Efficient implementation of anisotropic three dimensional boundary integral equation stress analysis. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 12:1383–1397, 1978.
- [57] Wrobel, L. C. *The Boundary Method: Applications in Thermo-Fluids and Acoustics*. John Wiley e Sons, New York, 2002.
- [58] Wu, B. C. *A new method for solution of anisotropic thin-plate bending problems*. Tese de Doutorado, Michigan State University, 1980.
- [59] Wu, B. C. e Altiero, N. J. A new numerical method for the analysis of anisotropic thin-plate bending problems. *Composite Materials*, 25:343–353, 1981.
- [60] Zhang, C. Transiente elastodynamic antiplane crack analysis of anitropic solids. *Int. J. of Solids and Structures*, 37:6107–6130, 2000.

## A Código usado para gerar as figuras

```
clear
close all
clc
xc1=14.2000;
yc1=9.9000;
xc2=13;
yc2=10.5000;
mi= -0.1623 + 0.8860i;
d_x = xc2-xc1;
d_y = yc2-yc1;
x_med = (xc1+xc2)/2;
y_med = (yc1+yc2)/2;

L = sqrt((d_x)^2+(d_y)^2);
nx=d_y/L;
ny=-d_x/L;

Jac = L/2;

z1=(xc1+mi*yc1);
z2=(xc2+mi*yc2);
dSdz=L*conj(z2-z1)/abs(z2-z1)^2;
dzdqsi=(z2-z1)/2;
step=4;

%% Integração
for ind=1:20
    t=ind*.01;
    x_f(ind) = x_med+nx*t;
    y_f(ind) = y_med+ny*t;
    zo=x_f(ind)+mi*y_f(ind);
    dist=sqrt((x_f(ind)-x_med)^2+(y_f(ind)-y_med)^2);
    alfa=dist/L;
    I_num(ind+1,1)=alfa;
```

```

indcoluna=1;
for n_gauss=2:step:20
    indcoluna=indcoluna+1;
    if(ind==1)
        I_num(1,indcoluna)=n_gauss;
    end
    I_el=0;
    J_el=0;
    [gauss_points,gauss_weights]=Gauss.Legendre(-1,1,n_gauss);
    for pg = 1 : n_gauss
        x_field = x_med + gauss_points(pg)*d_x/2;
        y_field = y_med + gauss_points(pg)*d_y/2;
        z=x_field+mi*y_field;
        dz = -(x_field - x_f(ind))-mi*(y_field - y_f(ind));
        I_el = I_el + log(dz)*gauss_weights(pg)*Jac;
        J_el = J_el + (-1/(dz))*gauss_weights(pg)*Jac;
    end;
    I_num(ind+1,indcoluna)=I_el;
    J_num(ind+1,indcoluna)=J_el;
end
dz1=(zo-z1);
dz2=(zo-z2);
I=-((log(dz2)-1)*dz2-(log(dz1)-1)*dz1)*dSdz;
J=(log(dz2)-log(dz1))*dSdz;
I_num(ind+1,indcoluna+1)=I;
J_num(ind+1,indcoluna+1)=J;
end
figure
plot([xc1 xc2],[yc1 yc2], 'rs-', x_med, y_med, 'bo', x_f, y_f, 'kx')
legend('Elemento', 'Nó físico', 'Pontos fontes')
axis equal

[nlinhas,ncolunas]=size(I_num);
vetx=real(I_num(2:end,1));
step2=1;
indlinha=0;
for k=2:step2:ncolunas
    indlinha=indlinha+1;
    leg(indlinha,1)=I_num(1,k);
    vety(indlinha,1:nlinhas-1)=real(I_num(2:end,k));
end
figure
plot(vetx,vety(1,:), 'ro', vetx,vety(2,:), 'bd', ...
    vetx,vety(3,:), 'gs', vetx,vety(4,:), 'c*', ...
    vetx,vety(5,:), 'm+', vetx,vety(6,:), 'k-')

```

```

legend(['NPG = ', num2str(leg(1))], ...
       ['NPG = ', num2str(leg(2))], ...
       ['NPG = ', num2str(leg(3))], ...
       ['NPG = ', num2str(leg(4))], ...
       ['NPG = ', num2str(leg(5))], ...
       'Integração analítica');
xlabel('\it d/L')
ylabel('Re[I_1]')

indlinha=0;
for k=2:step2:ncolunas
    indlinha=indlinha+1;
    vety(indlinha,1:nlinhas-1)=imag(I_num(2:end,k));
end
figure
plot(vetx,vety(1,:), 'ro', vetx,vety(2,:), 'bd', ...
     vetx,vety(3,:), 'gs', vetx,vety(4,:), 'c*', ...
     vetx,vety(5,:), 'm+', vetx,vety(6,:), 'k-')
legend(['NPG = ', num2str(leg(1))], ...
       ['NPG = ', num2str(leg(2))], ...
       ['NPG = ', num2str(leg(3))], ...
       ['NPG = ', num2str(leg(4))], ...
       ['NPG = ', num2str(leg(5))], ...
       'Integração analítica');
xlabel('\it d/L')
ylabel('Im[I_1]')

step2=1;
indlinha=0;
for k=2:step2:ncolunas
    indlinha=indlinha+1;
    leg(indlinha,1)=J_num(1,k);
    vety(indlinha,1:nlinhas-1)=real(J_num(2:end,k));
end
figure
plot(vetx,vety(1,:), 'ro', vetx,vety(2,:), 'bd', ...
     vetx,vety(3,:), 'gs', vetx,vety(4,:), 'c*', ...
     vetx,vety(5,:), 'm+', vetx,vety(6,:), 'k-')
legend(['NPG = ', num2str(leg(1))], ...
       ['NPG = ', num2str(leg(2))], ...
       ['NPG = ', num2str(leg(3))], ...
       ['NPG = ', num2str(leg(4))], ...
       ['NPG = ', num2str(leg(5))], ...
       'Integração analítica');

```

```

xlabel('\it d/L')
ylabel('Re[J_1]')

indlinha=0;
for k=2:step2:ncolunas
    indlinha=indlinha+1;
    vety(indlinha,1:nlinhas-1)=imag(J_num(2:end,k));
end
figure
plot(vetx,vety(1,:), 'ro', vetx,vety(2,:), 'bd', ...
     vetx,vety(3,:), 'gs', vetx,vety(4,:), 'c*', ...
     vetx,vety(5,:), 'm+', vetx,vety(6,:), 'k-')
legend(['NPG = ', num2str(leg(1))], ...
       ['NPG = ', num2str(leg(2))], ...
       ['NPG = ', num2str(leg(3))], ...
       ['NPG = ', num2str(leg(4))], ...
       ['NPG = ', num2str(leg(5))], ...
       'Integração analítica');
xlabel('\it d/L')
ylabel('Im[J_1]')

```