

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE UNB GAMA/ FACULDADE DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE
MATERIAIS DA ENGENHARIA.

MODELAGEM DA PROPAGAÇÃO SONORA EM DUTOS:
ABORDAGEM MATEMÁTICA NO DOMÍNIO DA
FREQUÊNCIA E DO TEMPO UTILIZANDO
TRANSFORMADA DE LAPLACE

SAIENY HAUAK CARDOSO

ORIENTADORA: Prof^a. Dra. MARIA ALZIRA DE ARAÚJO NUNES

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM INTEGRIDADE DE
MATERIAIS DA ENGENHARIA

PUBLICAÇÃO: FGA.DM - 030A/2016

BRASÍLIA, 29 FEVEREIRO DE 2016.

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE UNB GAMA/ FACULDADE DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE
MATERIAIS DA ENGENHARIA.

MODELAGEM DA PROPAGAÇÃO SONORA EM DUTOS:
ABORDAGEM MATEMÁTICA NO DOMÍNIO DA
FREQUÊNCIA E DO TEMPO UTILIZANDO
TRANSFORMADA DE LAPLACE

SAIENY HAUAK CARDOSO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA DA FACULDADE UNB GAMA E FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA.

APROVADA POR:

Prof.^a Dra. Maria Alzira de Araújo Nunes, UnB/FGA
(Orientadora)

Prof. Dr. Renato Vilela Lopes, UnB/FGA
(Examinador Externo)

Prof.^a Dra. Carla Tatiana Mota Anflor, UnB/FGA
(Examinador Interno)

BRASÍLIA, 29 DE FEVEREIRO DE 2016.

FICHA CATALOGRÁFICA

Cardoso, Saieny Hauak

CSA132 Modelagem da Propagação Sonora em Dutos: Abordagem Matemática
m no Domínio da Frequência e do Tempo utilizando Transformada de Laplace, Saieny Hauak Cardoso, Brasília, 2016. 125 p.

Dissertação (Mestrado - Integridade de Materiais da Engenharia), Programa de Pós-Graduação em Integridade de Materiais da Engenharia, Universidade de Brasília, Faculdade UnB/Gama.

Orientadora: Maria Alzira de Araújo Nunes.

1. Duto acústico.
2. Função de transferência.
3. Transformada de Laplace.
4. Controle ativo de ruído.
5. Ruído

I. Nunes, Maria Alzira de Araújo. II. Modelagem da Propagação Sonora em Dutos: Abordagem Matemática no Domínio da Frequência e do Tempo utilizando Transformada de Laplace.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

CARDOSO, S.H. 2016. MODELAGEM DA PROPAGAÇÃO SONORA EM DUTOS: ABORDAGEM MATEMÁTICA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA E DO TEMPO UTILIZANDO TRANSFORMADA DE LAPLACE. Dissertação de Mestrado em Integridade de Materiais da Engenharia, Publicação N° 030A/2016, Faculdade UnB Gama/FT/ Universidade de Brasília, DF, p. 120.

DEDICATÓRIA

*Aos meus pais, Jaci Luiz e Maria Ivone.
Às minhas irmãs, Sana Hainner e Sandra Esther.
Ao meu sobrinho, Marcus Vinícius.*

AGRADECIMENTOS

À DEUS, pela permissão de realizar este sonho.

Aos meus pais, Jaci Luiz e Maria Ivone, pelo amor, carinho e ensinamentos dedicados a mim e que irão durar por toda a minha vida.

À minha orientadora Prof.^a Dra. Maria Alzira, pela orientação, pelo aprendizado e pelo valioso e imprescindível apoio em realizar este trabalho.

Aos professores do Departamento de Pós-Graduação em Integridade de Materiais da Engenharia da Universidade de Brasília, Dr. Renato Vilela e Dra. Carla Tatiane, pelas importantes contribuições para o enriquecimento desse trabalho.

À Universidade de Brasília pela oportunidade de realizar este Curso.

Ao Programa de Pós-Graduação em Integridade de Materiais da Engenharia.

À professora do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, Dra. Irina Sviridova e aos professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Goiás, Dr. José Hilário e Dr. Gessi, todos pelo incentivo e confiança em concretizar esta importante etapa profissional.

Às minhas irmãs, Sana Hainner e Sandra Esther, por estarem sempre comigo e me fazerem acreditar que seria capaz de superar os momentos difíceis.

Ao meu querido sobrinho, Marcus Vinícius, pela torcida, pelo carinho, pela presença e apoio, essenciais na concretização desse trabalho.

Às minhas grandes amigas, Lucimeire Alves, Meire Alves e Ilana Zuíla, pelo companheirismo e inestimável amizade.

Aos meus amigos da Universidade de Brasília, José Carlos e Jaime Rojas, pela amizade e pelas contribuições valiosas para a concretização deste trabalho.

À minha amiga Áurea Fernandes, pelo acolhimento num momento muito importante dessa trajetória.

Aos meus colegas do Curso de Pós-Graduação, Adriano, Eduardo, Hugo, Willian, Jeferson pelos momentos de grandes discussões e aprendizado.

À todos aqueles que contribuíram para a finalização desse trabalho.

*"Deus é o Geômetra Onipotente para quem o mundo é imenso problema matemático."
(Leibniz)*

RESUMO

Em meio ao crescimento urbanístico vivenciado atualmente, é fácil notar a presença de um elemento estrutural comum, seja no meio residencial ou industrial: os dutos. Estes são componentes essenciais no nosso cotidiano, presente desde o processo de transporte de matérias prima imprescindíveis para a sobrevivência humana, na mobilidade sistema de exaustão dos veículos automotores, até a utilização destes no contexto do conforto humano, sistemas de aquecimento, ventilação e ar condicionado. Apesar de ser de extrema importância nas aplicações de engenharia, os dutos são considerados como um dos principais responsáveis por transportar para o meio externo o ruído gerado por importantes fontes sonoras, como motores e ventiladores. Técnicas passivas e ativas de controle de ruído são comumente aplicadas aos dutos com o intuito de mitigar o ruído irradiado. No entanto, para um projeto efetivo deste controle, se faz necessário o conhecimento do comportamento acústico das ondas sonoras que se propagam em seu interior. Um importante exemplo pode ser citado: o projeto de um controlador ativo de ruído (CAR) em dutos, no qual a completa identificação do sistema acústico se faz necessário, por exemplo, para evitar instabilidades no sistema de controle e conseqüentemente aumentar sua eficiência. Neste trabalho, as funções de transferência (FT) acústicas entre fonte de ruído e microfone localizado no interior do duto, são estimadas para algumas configurações e condições de contorno. A FT analítica é desenvolvida no domínio da frequência, derivada da equação fundamental da onda e utilizando a transformada de Laplace e suas propriedades. Para isto, considera-se meio fluido contínuo, homogêneo, perfeitamente elástico, processo isentrópico, e ainda sistema linear e invariante no tempo. Além disso, o modelo de elementos finitos do sistema considerado é desenvolvido para comparação dos resultados. Ambos os modelos apresentaram respostas semelhantes, embora a condição de contorno aberto adicione algumas diferenças entre as FTs quando do aumento da frequência de análise. No contexto do CAR, este trabalho também apresenta o desenvolvimento matemático para estimativa da pressão sonora no domínio do tempo no interior de dutos acústicos. Partindo de FTs no domínio da frequência, utiliza-se transformada inversa de Laplace para estimativa da pressão sonora em determinada localização no interior do duto, devido a uma fonte sonora caracterizada pela sua velocidade de volume. As equações resultantes são implementadas em Matlab e os gráficos são discutidos em termos dos fenômenos físicos envolvidos.

Palavras-chave: Duto acústico; Ruído; Função de Transferência; Transforma de Laplace; Controle Ativo de Ruído; Matlab.

ABSTRACT

Amidst the urban growth currently experienced, it is easy to notice the presence of a common structural element, whether in residential or industrial environment: the ducts. These are essential components in our daily lives, present from the transport process of raw materials essential for human survival in the exhaust system mobility of vehicles, to the use of these in the context of human comfort, heating, ventilation and air conditioning . Despite being extremely important in engineering applications, the products are considered as one of the main responsible for transport to the outside noise generated by major noise sources such as motors and fans. Technical passive and active noise control are commonly applied to products in order to mitigate the radiated noise. However, for effective design of this control, the knowledge of the acoustic behavior of sound waves that propagate inside is necessary. An important example can be cited: the design of an active noise control (CAR) in pipelines, in which the complete identification of the acoustic system is necessary, for example, to prevent instabilities in the control system and thus increase efficiency. In this work, the transfer function (TF) between acoustic noise source and microphone located inside the duct, are estimated for some configurations and boundary conditions. The analytical FT is developed in the frequency domain derived from the fundamental equation of wave and using the Laplace transform and its properties. For this, it is considered continuous medium fluid, homogenous, perfectly elastic, isentropic process, and further linear time-invariant system. In addition, the finite element model of the system under consideration is designed to compare the results. Both models showed similar response, although the open boundary condition add some differences between TFs when increasing the frequency analysis. In the context of the CAR, this work also presents the mathematical development to estimate the sound pressure in the time domain within acoustic ducts. From the TFs in the frequency domain, it uses inverse Laplace transform to estimate the sound pressure in a particular location within the pipeline due to a sound source characterized by a volume velocity. The resulting equations are implemented in Matlab and graphics are discussed in terms of physical phenomena involved.

Keywords: acoustic duct; Noise; Transfer function; Laplace transform; Active Noise Control; Matlab.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	JUSTIFICATIVA E MOTIVAÇÃO	5
1.2	OBJETIVOS	6
1.2.1	Objetivo Geral	6
1.2.2	Objetivos Específicos	6
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	7
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	8
3	FUNDAMENTOS DA ACÚSTICA APLICADOS A DUTOS	12
3.1	PROPAGAÇÃO DE ONDAS PLANAS EM MEIO ESTACIONÁRIO	12
3.2	PROPAGAÇÃO DE MODOS ACÚSTICOS DE ALTA ORDEM EM DUTOS ACÚSTICOS	15
3.3	DUTOS CILÍNDRICOS	16
4	MODELAGEM ANALÍTICA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA	20
4.1	DUTO ACÚSTICO COM FONTE SONORA NA LATERAL	29
4.1.1	Caso 1: Duto Aberto-Aberto	29
4.1.2	Caso 2: Duto Fechado-Fechado	33

4.1.3	Caso 3: Duto Aberto-Fechado	37
4.1.4	Caso 4: Duto com Condições de Contorno Arbitrárias	40
4.2	DUTO ACÚSTICO COM FONTE SONORA EM UMA DAS EXTREMI- DADES	48
4.2.1	Caso 1: Duto Aberto	49
4.2.2	Função de Transferência: Duto Aberto	51
4.2.3	Caso 2: Duto Fechado	52
4.2.4	Função de Transferência: Duto Fechado	54
4.2.5	Caso 3: Duto com Condições de Contorno Arbitrárias	55
4.2.6	Função de Transferência: Duto com Condições de Contorno Arbi- trárias	58
4.2.7	Caso 4: Sistema Alto-falante + Duto + Microfone	66
4.3	Modelagem do Duto em Elementos Finitos para Validação dos Resultados Analíticos	71
4.3.1	Duto com Fonte Sonora Localizada na Lateral - MEF	75
4.3.2	Duto com Fonte Sonora Localizada na Extremidade Esquerda - MEF	79
5	MODELAGEM ANALÍTICA NO DOMÍNIO DO TEMPO	86
5.1	Caso 1: Duto Aberto com Fonte Sonora na Extremidade Esquerda	87
5.2	Caso 2: Duto Fechado - Aberto com Fonte Sonora na Lateral	93
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	97
6.1	CONCLUSÃO	97
6.2	TRABALHOS FUTUROS	98
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	99
	APÊNDICES	102

A	DEFINIÇÕES E CONCEITOS MATEMÁTICOS	103
A.1	Transformada de Laplace	103
A.1.1	Propriedades das transformadas de Laplace	103
A.2	Delta de Dirac	104
A.2.1	Propriedade do delta de Dirac	105
A.2.2	Propriedade do delta de Dirac (Para sub-intervalos finito da reta real)	105
A.2.3	Derivada do delta de Dirac	105
A.2.4	Propriedade da derivada do delta de Dirac	105
A.2.5	Transformada de Laplace do delta de Dirac	106
A.3	Convolução	106
A.4	Tabela das Transformadas de Laplace	107

LISTA DE TABELAS

4.1	Comparação das frequências analítica e experimental para o duto com extremidade aberta.	65
4.2	Tabela das Funções de Transferência.	70
4.3	Comparação das frequências de ressonância	81
A.1	Transformadas de Laplace	107

LISTA DE FIGURAS

1.1	Sistema de ventilação [5].	2
1.2	Sistema de exaustão [6].	2
1.3	Refinaria de petróleo [7].	2
1.4	Indústria automotiva [8].	2
1.5	Silenciador reativo [9].	3
1.6	Silenciador dissipativo [9].	3
1.7	Diagrama de um sistema CAR do tipo feedback.	3
1.8	Duto com fonte sonora na lateral.	4
1.9	Duto com fonte sonora na extremidade.	5
3.1	Forma de propagação de ondas planas.	13
3.2	Duto cilíndrico em um sistema de coordenadas cilíndricas.	16
3.3	Linhas nodais para a distribuição transversal de pressão num duto cilíndrico para $m=3$ e $n=2$ modos de ordem superior. Fonte: [26].	18
4.1	Duto Acústico.	20
4.2	Duto Acústico com fonte sonora lateral.	29
4.3	Respostas em magnitude e fase da função de transferência para o duto aberto-aberto.	33

4.4	Respostas em magnitude e fase da função de transferência para o duto fechado-fechado.	37
4.5	Respostas em magnitude e fase da função de transferência para o duto aberto-fechado.	40
4.6	Respostas em magnitude e fase da função de transferência para o duto com condições de contorno arbitrárias.	45
4.7	Respostas em magnitude para os casos de dutos: (a) Aberto-Aberto; (b) Fechado-Fechado; (c) Aberto-Fechado; (d) com Condições de Contorno Arbitrárias	48
4.8	Duto acústico com fonte sonora na extremidade esquerda.	49
4.9	Respostas em magnitude e fase da função de transferência para o duto com extremidade aberta à direita.	52
4.10	Respostas em magnitude e fase da função de transferência para o duto com extremidade fechada à direita.	55
4.11	Respostas em magnitude e fase da função de transferência para o duto com condições de contorno arbitrárias.	59
4.12	Função de Transferência Total.	66
4.13	Respostas em magnitude e fase da função de transferência total para o duto com extremidade aberta à direita.	68
4.14	Respostas em magnitude e fase da função de transferência total para o duto com extremidade fechada.	68
4.15	Respostas em magnitude x frequência para os casos: (a) Aberto à Direita; (b) Fechado à Direita; (c) Aberto à Direita; (d) Fechado à Direita; (e) com Condições de Contorno Arbitrárias	69
4.16	Modelo de duto em elementos finitos com fonte sonora na lateral.	75
4.17	Resultado em elementos finitos e analítico	75
4.18	Modelo de duto em elementos finitos com fonte sonora na lateral.	76
4.19	Resultado em elementos finitos e analítico	76
4.20	Modelo de duto em elementos finitos com fonte sonora na lateral.	77

4.21	Resultado em elementos finitos e analítico.	78
4.22	Duto com material acústico poroso nas extremidades.	78
4.23	Resultado em elementos finitos e analítico.	79
4.24	Duto com fonte sonora na extremidade esquerda e aberto na extremidade direita.	79
4.25	Resultado em elementos finitos e analítico.	80
4.26	Duto com fonte sonora na extremidade esquerda e fechado na extremidade direita.	81
4.27	Resultado em elementos finitos e analítico.	82
4.28	Duto com fonte sonora na extremidade esquerda e material acústico poroso na extremidade direita.	82
4.29	Resultado em elementos finitos e analítico.	83
4.30	84
4.31	84
4.32	84
4.33	84
4.34	84
4.35	84
4.36	Resultado em elementos finitos e analítico.	84
5.1	Controle ativo de ruído do tipo feedback	86
5.2	Duto aberto com fonte sonora na extremidade esquerda.	87
5.3	Função transferência obtida via transformada inversa de Laplace entre $p_m(t)$ e $q_a(t)$	91
5.4	Pressão sonora estimada utilizando a função de transferência no domínio do tempo entre $p_m(t)$ e $q_a(t)$	91
5.5	Pressão sonora no microfone estimada via equação da onda.	92

5.6	Início da oscilação do sinal mostrado na Fig. 5.4	92
5.7	Duto fechado-aberto com com fonte sonora na lateral.	93
5.8	Função de transferência no domínio do tempo entre $p_m(t)$ e $q_b(t)$	95
5.9	Pressão sonora estimada utilizando a função de transferência no domínio do tempo entre $p_m(t)$ e $q_b(t)$	95
5.10	Início da oscilação do sinal mostrado na Fig.5.10.	96
A.1	Função onda quadrada. Fonte:[37]	107

LISTA DE SÍMBOLOS

p	Pressão instantânea no domínio do tempo
p_0	Pressão estática do ambiente
ρ	Densidade instantânea
ρ_0	Densidade do fluido
z	Coordenada axial ou longitudinal
f	Frequência
∇	Operador gradiente
(m, n)	Modos de propagação
e	Número neperiano ou Euler
β	Módulo do volume volumétrico adiabático
ω	Frequência angular
c_0	velocidade do som no meio
λ	Comprimento da onda
k	Número da onda
k_0	Número da onda ou constante de propagação para meios invíscidos
k_x	Número da onda que se propaga na direção transversal x
k_y	Número da onda que se propaga na direção transversal y
k_z	Número da onda que se propaga na direção axial z
k_r	Número da onda que se propaga na direção radial
h	Maior dimensão transversal do duto
ξ	Fator de amortecimento
$\delta(\cdot)$	Delta de Dirac
\lim	Límite
L	Comprimento do duto
x	Deslocamento da partícula
t	Variável no tempo
s	Variável de Laplace

$u(x, t)$	Velocidade da partícula
c_0	Velocidade de propagação do som
x_s	Posição do altofalante de controle
x_m	Posição do microfone de erro
$\dot{u}_{x_s}(t)$	Aceleração da partícula provocada por uma fonte externa acústica posicionada em $x = x_s$
\mathcal{L}	Operador de Laplace
\mathcal{L}^{-1}	Operador inverso de Laplace
γ	Razão entre o calor específico a pressão constante e o calor específico a volume constante
d	Diâmetro
j_m	Função de Bessel
N_m	Função de Newmann
Z	Impedância acústica
S	Área da secção transversal
Q_a	Entrada - altofalante de ruído
Q_b	Entrada - alto falante de controle
$q_a(t)$	Entrada correspondente a aceleração da partícula próxima da fonte
FT	Função de transferência
$FT_p(s)$	Função de transferência do caminho primário no domínio s
$FT_s(s)$	Função de transferência do caminho secundário no domínio s
$ft_p(t)$	Função de transferência do caminho primário no domínio t
$ft_s(t)$	Função de transferência do caminho secundário no domínio t

LISTA DE SIGLAS

CPR	Controle Passivo de Ruído
CAR	Controle Ativo de Ruído
LMS	Least Mean Squares
MEF	Método de Elemntos Finitos

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Atualmente, a conscientização da população quanto aos problemas que um ambiente acusticamente inadequado acarreta à saúde e o desconforto que o ruído causa na vida das pessoas vêm aumentando. A busca pela melhoria da qualidade de vida do ser humano tem sido um dos objetivos fundamentais da ciência. Nessa busca as questões que afetam a saúde e o conforto das pessoas ocupa lugar de destaque [1].

A comunidade científica, nos últimos anos, tem voltado grande parte dos seus esforços ao estudo e desenvolvimento de tecnologias que, de forma direta ou indireta, impliquem em um maior índice de qualidade de vida, obtido através de produtos que proporcionem para os indivíduos da sociedade maior conforto e melhor estado de saúde [2]. Dentre os maiores alvos desse campo de estudo está o ruído acústico que pode ser definido como uma onda sonora indesejada, prejudicial ao ser humano, um tipo de poluição sonora [3].

Estudo aponta que máquinas e equipamentos que produzem ruídos a níveis excessivos, podem a curto, médio e longo prazo provocar sérios prejuízos a saúde. Dependendo do tempo de exposição, nível sonoro e da sensibilidade individual, alterações danosas poderão se manifestar causando stress, perda do sono, hipertensão, depressão, falta de concentração, baixa produtividade, além de atingir também, o aparelho auditivo provocando perda temporária ou até definitiva da audição [4].

As unidades de produção industrial concentram, em geral um número considerável de equipamentos, os quais, em conjunto ou isoladamente, podem produzir elevado nível de ruído. As figuras abaixo ilustram no ambiente industrial, algumas das principais fontes geradora de ruído, propagado através de duto.



Figura 1.1: Sistema de ventilação [5].



Figura 1.2: Sistema de exaustão [6].



Figura 1.3: Refinaria de petróleo [7].

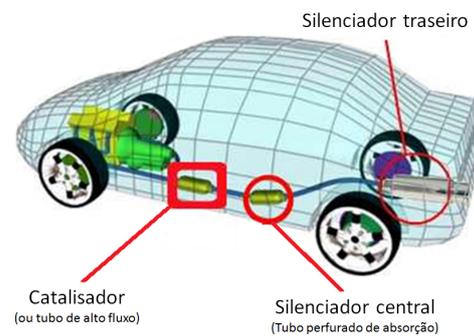


Figura 1.4: Indústria automotiva [8].

Existem técnicas de controle de ruído comumente aplicadas a dutos com o intuito de reduzir o ruído irradiado. As técnicas passivas de controle de ruído (CPR), que utilizam de materiais absorventes, barreiras e silenciadores. Os silenciadores, por exemplo, são subdivididos em reativos, ilustrado na Fig. 1.5, que consiste de um conjunto de elementos tubulares, perfurados, de dimensões transversais variadas, sem a utilização de materiais absorventes [4] e os silenciadores dissipativos, exemplificado na Fig. 1.6, fabricados com dutos internos, perfurados revestidos com materiais absorventes tais como lã de Basalto ou fibra contínua de vidro, onde a energia sonora incidente é transformada irreversivelmente em calor. Estas são eficientes na atenuação de ruído em alta frequência, porém ineficientes, volumosos e de alto custo em baixa frequência.



Figura 1.5: Silenciador reativo [9].



Figura 1.6: Silenciador dissipativo [9].

A Outra técnica é a de controle ativo de ruído (CAR) que utiliza-se do princípio da interferência destrutiva de ondas sonoras para cancelar o ruído indesejável, através da geração de uma onda sonora de controle com pressão acústica invertida. Ou ainda, pode-se dizer que esta técnica baseia-se na captação do campo sonoro indesejável incidente no duto e, através do sistema de controle e do atuador, gera um campo sonoro de mesma magnitude e fase oposta ao ruído, resultando em um campo sonoro atenuado [10]. O diagrama apresentado na Fig. 1.7 ilustra um sistema de CAR do tipo feedback, em que o controlador gera o sinal de antirruído apenas com base na medida realizada pelo microfone de erro.

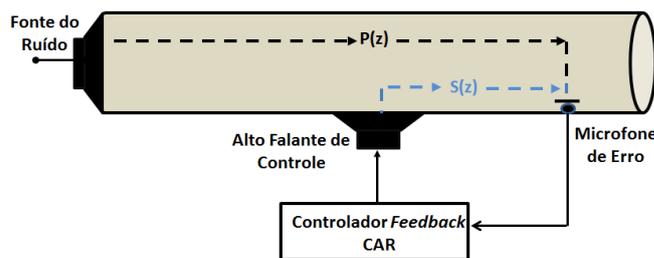


Figura 1.7: Diagrama de um sistema CAR do tipo feedback.

Em qualquer aplicação de controle, a implementação de sistema CAR requer o conhecimento de um modelo matemático que caracterize o sistema, propagação de ondas planas em duto acústico. Neste caso, o modelo necessário compreende as funções de transferências que relacionam o microfone de erro e a fonte de ruído indesejável, chamado também de caminho primário e identificado na Fig. 1.7 por $P(z)$, e a função de transfe-

rência que relaciona o alto falante de controle e o microfone de erro, chamado de caminho secundário, identificado na Fig. 1.7 por $S(z)$.

Sendo o duto um dos principais responsáveis por transportar para o meio externo o ruído gerado por importantes fontes sonoras, a modelagem matemática da propagação sonora em seu interior, torna-se extremamente importante para fornecer informações sobre comportamento físico e acústico das ondas sonoras, necessárias para o desenvolvimento de técnicas sendo estas passivas ou ativas. Nesse sentido, este trabalho e que tem como ponto de partida o artigo de [12], procura contribuir matematicamente fazendo, primeiramente, a modelagem analítica da propagação sonora no interior do duto utilizando a transformada de Laplace, descrevendo todos os cálculos necessários para a obtenção das funções de transferência entre o alto falante e o microfone no domínio da frequência, considerando condições específicas e gerais de contorno, bem como o desenvolvimento matemático para a obtenção das equações para a estimativa da pressão sonora no domínio do tempo, em qualquer ponto no interior do duto, utilizando transformada inversa de Laplace a partir das funções de transferência obtidas no domínio da frequência.

Para a modelagem analítica, serão considerados quanto a localização da fonte sonora, duas configurações de duto. A primeira, duto com fonte na sonora lateral, ilustrado na Fig. 1.8, onde serão analisados os casos: aberto-aberto, fechado-fechado, aberto-fechado nas extremidades e, duto com condições de contorno gerais.

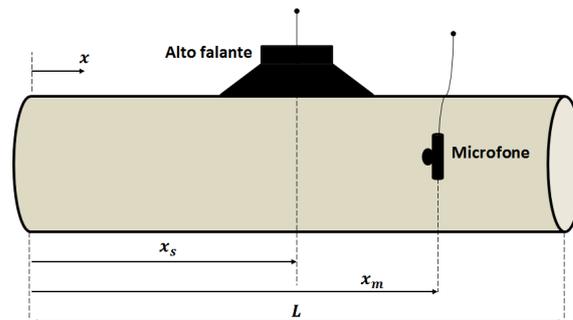


Figura 1.8: Duto com fonte sonora na lateral.

A outra configuração, duto com fonte sonora em uma das extremidades, conforme Fig. 1.9, serão analisados os casos: extremidade direita aberta, fechada e duto com condições de contorno gerais.

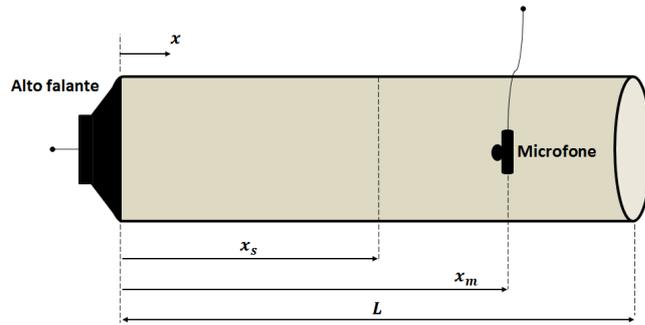


Figura 1.9: Duto com fonte sonora na extremidade.

Uma vez concluída a modelagem analítica da propagação sonora no interior do duto, será apresentada a modelagem numérica utilizando o modelo de elementos finitos para a comparação dos resultados obtidos a partir da aplicação da transformada de Laplace, com os resultados numéricos obtidos via método de elementos finitos, verificando se as funções de transferência determinadas analiticamente estão produzindo resultados satisfatórios com o sistema físico estudado, em termos de suas frequências de ressonância.

1.1 JUSTIFICATIVA E MOTIVAÇÃO

A exposição ao ruído é o problema de saúde ocupacional de maior destaque no ambiente industrial. Uma das principais causas da incapacidade funcional é justamente a diminuição da capacidade de ouvir, causada pela ocorrência de excesso de barulho no ambiente de trabalho. Os efeitos dessa exposição levam a lesões das células sensoriais do ouvido interno e tem como consequência a perda da audição do trabalhador [11].

A presença de dutos em plantas industriais para viabilizar a ventilação ou exaustão, tem como consequência um sinal sonoro indesejado que pode causar malefícios à saúde de trabalhadores e as pessoas que moram nas imediações de fábricas e indústrias. Dessa forma, o desenvolvimento detalhado de um modelo matemático da propagação sonora em dutos, torna-se extremamente importante. Através desse modelo matemático é possível analisar as características de transmissão das ondas sonoras e entender seu comportamento físico e acústico, simular em um computador a dinâmica do sistema, compreender as características do sistema através do estudo e análise dos polos e zeros das funções de transferência e, ainda, obter a pressão sonora em qualquer ponto de interesse no interior do duto.

Com um modelo matemático da propagação sonora no interior do duto, pode-se contribuir com o estudo e desenvolvimento de técnicas de controle acústico, sendo estas passivas ou ativas e, conseqüentemente, garantir projetos de controle de ruídos mais

precisos, baratos e, sobretudo, proporcionar à sociedade maior conforto, através de equipamentos que em conjunto ou isoladamente produzem o menor nível de ruído possível.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo deste trabalho é apresentar uma modelagem analítica de duto acústico no domínio da frequência utilizando método da transformada de Laplace, considerando propagação sonora em meio fluido contínuo, homogêneo perfeitamente elástico, linear e invariante no tempo. Interações fluido-estrutura não serão abordadas. O comportamento da pressão sonora no domínio do tempo também será estimado. E para tanto, a transformada inversa de Laplace será aplicada nas funções de transferência previamente determinadas. As equações estimadas serão implementadas via computação simbólica em ambiente Matlab. Para validação dos resultados será utilizado modelagem em elementos finitos e resultados experimentais obtidos por outros pesquisadores. Desta forma, será possível estimar a pressão sonora em qualquer posição longitudinal do duto considerado, bem como a função de transferência entre a fonte sonora e o sensor posicionado no local de interesse, para condições de contorno gerais.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Realizar uma revisão bibliográfica sobre modelagem analítica da propagação sonora em dutos, visando aplicações em sistemas de exaustão, HVAC (aquecimento, ventilação e ar condicionado) e controle ativo de ruído.
- Contribuir matematicamente para o desenvolvimento analítico de funções de transferência em dutos acústicos considerando condições de contorno gerais, tendo como base a publicação do artigo de Pota [12].
- Comparar os resultados obtidos a partir da aplicação do método da transformada de Laplace com resultados numéricos via método de elementos finitos.
- Verificar se a função de transferência obtida analiticamente está produzindo resultados satisfatórios com o sistema físico estudado em termos de suas frequências de ressonância.
- Desenvolver as equações analíticas de propagação sonora no interior do duto no domínio do tempo utilizando transformada inversa de Laplace a partir das funções de transferência previamente estimadas.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho é dividido em seis capítulos de forma a possibilitar uma melhor compreensão dos itens necessários para o desenvolvimento da dissertação. Além dos capítulos, é composto por um apêndice onde são introduzidos conceitos matemáticos com o propósito de auxiliar o leitor na leitura dos textos.

No capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica abordando os principais e mais recentes trabalhos desenvolvidos na área.

o capítulo 3 é apresentado as equações características necessárias ao estudo da propagação de ondas planas, unidimensionais, em dutos cilíndricos, em meio invíscido estacionário.

No capítulo 4 é feita a modelagem analítica do duto no domínio da frequência, de modo a proporcionar o conhecimento das funções de transferências que caracterizam o meio ao qual se deseja controlar.

No capítulo 5 é feita a modelagem analítica do duto no domínio do tempo de forma a fornecer equações capazes de produzir o conhecimento da distribuição da pressão acústica em cada ponto do interior do duto em um determinado instante, quando sujeito a uma excitação.

Por último, no capítulo 6 são apresentadas as considerações finais sobre a pesquisa, ressaltando-se a importância do tema e sugerindo pesquisas futuras.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo será apresentada uma revisão bibliográfica sobre alguns artigos científicos e trabalhos de dissertação que tratam da modelagem de dutos acústicos. Durante revisão bibliográfica notou-se que nem todos os trabalhos tratam especificamente da modelagem matemática e sim, de uma modelagem utilizada para uma determinada aplicação específica conforme apresentado a seguir.

Em 1993, [13] Mikhail em seu trabalho descreve sobre o efeito da viscosidade média na propagação sonora e atenuação de ruídos em dutos e, como a viscosidade do meio desempenha um papel importante na definição das características de propagação de ondas sonoras em dutos. Levantou a hipótese de que a viscosidade afetaria o invíscido onda acústica indiretamente através do seu efeito sobre o fluxo significativo. Um modelo matemático foi construído para descrever o problema na sua forma física em geral, sem impor pressupostos a priori. O conjunto de equações que descrevem o modelo foram resolvidas considerando um duto bidimensional. Vários resultados numéricos obtidos levaram a conclusões interessantes.

Mina e Sarwat [14] em 1997, apresentam um método analítico para estudar o efeito da viscosidade do meio, número de onda em propagação do som e números de atenuação do som em dutos circulares. O método baseia-se na variação de parâmetros da solução correspondente ao caso das ondas acústicas invíscidas em dutos circulares. É construído um modelo matemático para descrever o problema físico em geral. Três pressupostos básicos foram considerados, a saber, cada quantidade de fluxo foi escrita como a soma de uma média de fluxo constante e uma quantidade de fluxo acústico instável. O efeito da condutividade térmica do gás foi negligenciada, bem como nenhum fluxo significativo. Os resultados para uma grande variedade de números de onda e números de Reynolds mostraram que, para um meio viscoso, o número de propagação é uma função fraca do número de Reynolds, e como o número de Reynolds aumenta, o número de propagação se

aproxima do seu valor não-viscoso. Além disso, o número de propagação é independente do número de onda. Para o número de atenuação, que diminui monotonicamente com o aumento do número de Reynolds, desaparece quando o número de Reynolds é superior a 104.

Nunez [15] em 2005, discorre sobre o problema de controle ativo de ruído e avalia algumas metodologias de controle tanto numérica como experimentalmente. A análise é restrita ao caso de ruído em dutos, onde o fenômeno de propagação acústica é modelado analiticamente. Em seu trabalho, Nunez apresenta três abordagens para tal modelagem. A primeira, formulada a partir das equações fundamentais da acústica, gera um modelo de dimensão infinita para o duto. A segunda aproxima o modelo infinito por uma série truncada de Taylor e a terceira formulação realiza uma expansão modal, mas considera tanto pólos como os zeros do modelo infinito dimensional.

Em 2006, Pagneux, Lafarge, Auregan e Bi [16], em sua pesquisa sobre modelagem da propagação do sonora em um duto alinhado, não-uniforme, utilizando o método de propagação multimodal, falam sobre uniformidades não lineares, tais como impedâncias distribuídas. Estas podem ter uma influência direta sobre o desempenho nos forros de motores turbofan (motor a reação utilizado em aviões projetados especialmente para altas velocidades, que possui um ótimo desempenho em altitudes elevadas, entre 10.000 metros e 15.000 metros. Um problema relevante para estudar estes efeitos é a de propagação do som num duto hard-walled de secção transversal circular, equipado com uma região de revestimento não uniforme. Dadas as amplitudes complexas de entrada modal em uma extremidade do duto, o problema consiste em calcular o resultado da amplitude na outra extremidade do duto. Os autores apresentam um método de propagação Multi-Modal (MMPM) utilizado para modelar a propagação do som em diferentes guias de onda de seção transversal com condições de contorno rígidas, na ausência de fluxo, o objetivo do método é de projetar as equações acústicas de primeira ordem do movimento sobre a base modal do duto de paredes rígidas e, em seguida, observar a mudança dos coeficientes de projeção ao longo do eixo do duto. Além disso, expandir a pressão sonora e a velocidade axial em duas séries infinitas usando a base modal no duto rígido.

Ayub, Tiwana e Man [17] em 2009, realizaram uma pesquisa sobre a propagação sonora em duto com fluxo significativo, semi-infinito localizado dentro de um duto, porém, infinito. O objetivo era obter toda a região de fluido dentro desses dutos, em movimento com velocidade constante. Para isto, usaram a técnica de transformada integral e a técnica de Wiener-Hopf utilizada para resolver sistemas de equações integrais e diferenciais parciais bidimensionais com condições de contorno mistas, sobre o mesmo contorno. Os resultados mostraram que o ruído indesejado pode ser reduzido por seleção adequada dos diferentes parâmetros.

Dykas, Wroblewski, Rulik e Chmielniak [18] propuzeram um método numérico de propagação de ondas em dutos acústicas de modelagem com base na resolução das equações de Euler não lineares. A resolução é feita com a utilização de um esquema numérico de precisão de terceira ordem no espaço e tempo. O método foi testado e validado com sucesso. Os métodos acima apresentaram ferramentas eficientes para compreender e controlar sistemas de duto, mas em aplicações industriais, o fluxo está presente e tem um efeito importante sobre o comportamento acústico destes sistemas. Assim, este parâmetro foi incorporada em técnicas teóricas desenvolvidas.

Em 2012, Taktak, Majdoub, Bentahar e Haddar [19], realizaram uma pesquisa sobre a modelagem numérica da pressão acústica dentro do duto forrado com fluxo assimétrico. O desenvolvimento do método numérico é baseado na equação de Helmholtz de convecção para calcular a pressão acústica no interior de um duto de simetria axial. A validação do método proposto foi feito por uma comparação com a formulação analítica para casos simples de duto de paredes rígidas. O efeito do fluxo sobre a pressão acústica dentro destes dutos, foram avaliados através de cálculo com diferentes números de Mach. Este método é usado principalmente para prever a pressão acústica dentro de sistemas de dutos.

Em 2014, Yuksel e Yilmaz [20] em sua pesquisa, realizaram o controle ativo de ruído em duto acústico, no qual o meio fluido no interior do duto tem velocidade média de fluxo. O modelo de duto foi estudado considerando condições de contorno arbitrárias, obtendo as funções de transferência utilizando transformadas de Laplace para o sistema de dimensão infinita. O trabalho foi desenvolvido para projeto de controlador, microfone apropriado e cancelamento de ruídos. Foram obtidas aproximações das funções de transferência de pequena dimensão, finita da função de transferência do sistema real. Verificou-se, que para determinadas frequências as aproximações representaram o sistema real de forma satisfatória. Além disso, as simulações feitas das resposta no domínio do tempo e da frequência de malha fechada mostraram que os controladores diminuíram com sucesso o som indesejado que se propaga ao longo do duto.

Emmert [21] em 2014, apresenta uma ferramenta de simulação de duto acústico para baixa ordem chamada "taX", que utiliza o sistema de controle toolbox do Matlab. A propagação do ruído acústico é modelado através de um conjunto de equações diferenciais lineares e invariante no tempo. O sistema acústico para simplificar a propagação das ondas acústicas é modelado utilizando as funções de Green's que descrevem a transmissão de ondas acústicas em uma rede de elementos acústicos. A propagação das ondas acústicas em cada um dos elementos acústicos podem ser representados pela matriz de dispersão, que é a transformação de Fourier da funções de Green's. Os autores mostram que existe uma equivalência entre os modelos de sistemas aeroacústicos e os modelos geralmente usado na teoria de sistema de controle. A ferramenta oferece um eficiente cálculo de

valores e a flexibilidade para operar no tempo e no domínio da frequência. Além de permitir simular fenômenos não lineares, mesmo no quadro de sistemas acústicos de baixa ordem.

Reilly [22] em 2015, desenvolveu um método de expansão da propagação sonora de onda acústica em dutos de fluxo alinhados. No método, impedância de fluxo é introduzida como condições de contorno com o objetivo de proporcionar uma metodologia eficiente para calcular a propagação sonora da onda no interior do duto. A impedância de fluxo é implementada em um esquema de propagação numérica, conhecido como o método de expansão da onda (MAE), com a intenção de investigar propagação sonora em dutos acústicos forrados. O Método é interessante porque utiliza soluções fundamentais do operador onda e, as soluções precisas para as equações linearizadas da propagação sonora podem ser obtidas com apenas dois a três pontos por comprimento de onda, o que é significativamente menor do que os seis a dez pontos por comprimento de onda quando comparado com o método tradicional das diferenças finitas e o método de elementos finitos.

Após revisão bibliográfica, notou-se certa dificuldade em obter trabalhos que tratam da modelagem analítica da propagação sonora em dutos como esta dissertação se propõe. Portanto, no próximo capítulo serão apresentados conceitos básicos da acústica e seus fundamentos matemáticos para o estudo e desenvolvimento do modelo matemático que caracteriza a propagação sonoras em dutos e que serão discutidos nos capítulos 4 e 5.

CAPÍTULO 3

FUNDAMENTOS DA ACÚSTICA APLICADOS A DUTOS

Neste capítulo, será apresentada as características da propagação de ondas planas em dutos circulares, de paredes rígidas, em meio estacionário invíscido, além do estudo de modos acústicos de alta ordem.

3.1 PROPAGAÇÃO DE ONDAS PLANAS EM MEIO ESTACIONÁRIO

O sistema acústico correspondente ao ambiente no qual se propagam as ondas sonora neste estudo, trata-se de um duto de paredes rígidas e pequenas dimensões transversais, isto é, com o raio muito menor que o comprimento do duto, preenchido com um fluido invíscido em que ondas de pequena amplitude se propagam como ondas planas. Estas são caracterizadas por possuir como frente de onda, planos paralelos de amplitude constante normais a sua direção de propagação [23]. A pressão sonora p e a velocidade da partícula u em todos os pontos de uma determinada seção transversal, no plano normal à direção de propagação, tem a mesma amplitude e fase. Este plano é denominado de superfície de fase ou *wave front* [24]. No caso do duto, a direção de propagação é o eixo longitudinal representado pela direção z . A Fig. 3.1 ilustra o modo de propagação de ondas planas.

Para estudar a propagação de ondas sonoras parte-se de três equações:

Equação da Conservação de Massa, chamada Equação da Continuidade,

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (3.1)$$

Equação do Equilíbrio Dinâmico, também chamada de Equação de Movimento,

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (3.2)$$

Equação da Energia, chamada Equação de Estado, onde a propagação de ondas

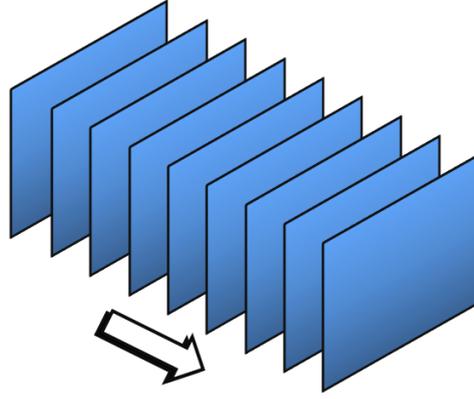


Figura 3.1: Forma de propagação de ondas planas.

sonoras é considerada um processo isentrópico.

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{\gamma(p_0 + p)}{\rho_0 + \rho} \simeq \frac{\gamma p_0}{\rho_0} = a_0^2. \quad (3.3)$$

Considerando $a_0 = c$, segue:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{\gamma(p_0 + p)}{\rho_0 + \rho} \simeq \frac{\gamma p_0}{\rho_0} = c^2 \quad (3.4)$$

onde,

- γ é a razão entre o calor específico a pressão constante e o calor específico a volume constante;
- c é a velocidade do som no meio (m/s);
- p é a pressão instantânea (N/m^2);
- p_0 é a pressão estática do ambiente (N/m^2);
- ρ é a densidade instantânea (kg/m^3);
- ρ_0 é a densidade do ambiente (kg/m^3);
- z é a coordenada axial ou longitudinal;
- $p/p_0 \ll 1$ para pequenas perturbações;
- $\rho/\rho_0 \ll 1$ para um meio estacionário;
- s entropia ($KJ/KG.K$).

Da Eq.(3.4) segue:

$$\rho_0 = \frac{p_0}{c^2}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (3.7)$$

A substituição das Eqs.(3.5), (3.6) e (3.7) na Eq.(3.1), eliminando a variável u das Eqs.(3.1) e (3.2), através da diferenciação da Eq.(3.1) em relação a t e da Eq.(3.2) em relação a z , obtém-se a equação unidimensional da onda [24]:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] p = 0. \quad (3.8)$$

A Eq.(3.8) é uma equação diferencial linear, homogênia, com coeficientes constantes, onde c não depende de z e t . Usando a técnica de separação de variáveis obtemos a solução da Eq.(3.8) na forma:

$$p(z, t) = (C_1 e^{-jkz} + C_2 e^{jkz}) e^{j\omega t}. \quad (3.9)$$

Onde,

$$\begin{aligned} k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} & \text{ é a constante de propagação;} \\ \omega & \text{ é a frequência angular (rad/s);} \\ \lambda & \text{ é o comprimento da onda (m).} \end{aligned}$$

A Eq.(3.9) representa a superposição de duas ondas progressivas com amplitudes C_1 e C_2 movendo-se em direções opostas.

A velocidade da partícula u também satisfaz a Eq.(3.8) e pode ser escrita na forma:

$$u(z, t) = (C_3 e^{-jkz} + C_4 e^{jkz}) e^{j\omega t}. \quad (3.10)$$

Substituindo as Eqs.(3.9) e (3.10) na equação de equilíbrio (3.2), obtêm-se:

$$C_3 = \frac{C_1}{\rho_0 c}, \quad (3.11)$$

$$C_4 = -\frac{C_2}{\rho_0 c}. \quad (3.12)$$

Logo,

$$u(z, t) = \frac{1}{Z_0} (C_1 e^{-jkz} - C_2 e^{jkz}) e^{j\omega t}, \quad (3.13)$$

onde $Z_0 = \rho_0 c$ é a impedância característica do meio, definida como a razão entre a pressão sonora e a velocidade da partícula para uma onda plana progressiva.

Para uma onda plana harmônica movendo-se ao longo de um tubo, podemos definir a velocidade de massa acústica como:

$$v(z, t) = \frac{1}{Y_0} (C_1 e^{-jkz} - C_2 e^{jkz}) e^{j\omega t}. \quad (3.14)$$

Onde

$$Y_0 = \frac{c}{S}, \quad (3.15)$$

indica condições invíscidas e S é a área da seção transversal do tubo. As constantes C_1 e C_2 das Eqs.(3.9), (3.13) e (3.14) podem ser determinadas através das condições de contorno impostas para o problema em estudo na seção (3.3) [24].

3.2 PROPAGAÇÃO DE MODOS ACÚSTICOS DE ALTA ORDEM EM DUTOS ACÚSTICOS

Nos dutos com grandes seções transversais, a propagação sonora em seu interior, se dá com a presença dos modos acústicos de alta ordem [25].

Para estudar as limitações da teoria de onda plana, é necessário considerar a propagação de ondas tridimensionais em dutos [24]. Assim, para um sistema tridimensional, as equações linearizadas correspondentes as Eqs.(3.1) e (3.2), para um meio estacionário invíscido são :

Equação da Conservação de Massa - Equação da Continuidade,

$$\rho_0 (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (3.16)$$

Equação do Equilíbrio Dinâmico - Equação do Movimento,

$$\nabla p + \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0. \quad (3.17)$$

Substituindo a Eq.(3.6) na Eq.(3.16) e diferenciando em relação ao tempo t , obtemos a equação:

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (3.18)$$

Aplicando o operador divergente ∇ na Eq.(3.17) e, em seguida subtraindo da Eq.(3.18) tem-se a equação:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = 0. \quad (3.19)$$

A equação acima pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 p = 0, \quad (3.20)$$

conhecida como equação tridimensional da onda [24]. Em que o Laplaciano ∇^2 é dado em coordenadas cartesianas (para dutos retangulares) por:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (3.21)$$

e em coordenadas cilíndricas (para dutos cilíndricos) por:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (3.22)$$

3.3 DUTOS CILÍNDRICOS

A Fig.3.2 trata-se de um duto cilíndrico em um sistema de coordenadas cilíndricas.

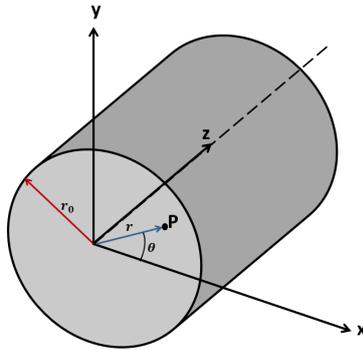


Figura 3.2: Duto cilíndrico em um sistema de coordenadas cilíndricas.

A Eq.(3.20) da onda juntamente com o Laplaciano representado na Eq.(3.22), descreve a propagação da onda em dutos cilíndricos. Utilizando a técnica de separação de variáveis e considerando p uma função dependendo do tempo e de θ , obtemos:

$$p(r, \theta, z, t) = \sum_m R_m(r) e^{jm\theta} Z(z) e^{j\omega t}. \quad (3.23)$$

A função $Z(z)$ é assumida de modo que:

$$\frac{\partial^2 Z}{dz^2} = -k_z^2 Z \quad (3.24)$$

onde, k_z é o número da onda que se propaga na direção axial z .

Substituindo as Eqs.(3.23), (3.24) na Eq.(3.20), obtém-se a equação de Bessel para $R(r)$

$$\frac{d^2 R_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_m}{dr} + \left(k_0^2 - k_z^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R_m = 0 \quad (3.25)$$

onde, a solução geral é da forma:

$$R_m = C_3 J_m(k_r r) + C_4 N_m(k_r r) \quad (3.26)$$

com

$$k_r^2 = k_0^2 - k_z^2 \quad (3.27)$$

onde,

k_r é o número de onda que se propaga na direção radial;

k_0 é o número da onda ou constante de propagação para meios invíscidos.

J_m é a função de Bessel de ordem m ;

N_m é a função Newmann de ordem m .

Quando $r = 0$, $N_m(k_r r)$ tende para o infinito. Porém, a pressão sonora em toda parte tem que ser finito. Portanto, a constante C_4 tem que ser zero.

Novamente, a velocidade radial na parede ($r = r_0$) deve ser zero. Portanto,

$$\frac{dJ_m(k_r r)}{dr} = 0 \quad \text{para } r = r_0. \quad (3.28)$$

Assim, k_r assume apenas os valores discretos que satisfazem a equação

$$J'_m(k_r r_0) = 0. \quad (3.29)$$

Reescrevendo o valor de k_r correspondente a n -ésima raiz da equação acima como

$k_{r,m,n}$ temos:

$$p(r, \theta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(k_{r,m,n}) e^{jm\theta} e^{j\omega t} (C_{1,m,n} e^{-jk_{z,m,n}z} + C_{2,m,n} e^{+jk_{z,m,n}z}) \quad (3.30)$$

com,

$$k_{z,m,n} = (k_0^2 - k_{r,m,n}^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.31)$$

onde, $k_{z,m,n}$ e $k_{r,m,n}$ são os números das ondas transmitidas para o modo (m,n), que se propagam nas direções axial z e radial, respectivamente.

O primeiro zero de J'_0 (ou J_1) é zero e $k_{r,0,1} = 0$ e $k_{z,0,1} = k_0$, para o modo (0,1), então a Eq.(3.30) reduz-se à Eq.(3.9), que é a equação de propagação da onda plana. Portanto, o modo (0,1) corresponde à onda plana que se propaga sem atenuação.

Nos dutos circulares, n representa o número de zeros da derivada J'_m . A Fig. 3.3 mostra a distribuição da pressão transversal onde n corresponde ao número de nós circulares.

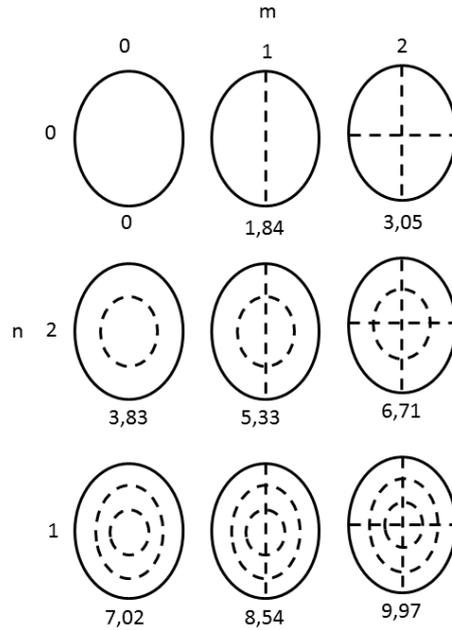


Figura 3.3: Linhas nodais para a distribuição transversal de pressão num duto cilíndrico para $m=3$ e $n=2$ modos de ordem superior. Fonte: [26].

Os modos (1,0) e (0,1) possuem frequências de corte se $k_{z,1,0}$ e $k_{z,0,1}$ assumirem valores reais, isto é, se k_0 for maior que $k_{r,1,0}$ e $k_{r,0,1}$. Assim, o primeiro zero de J'_1 ocorre para 1,84 e o segundo zero de J'_0 ocorre para 3,83. Portanto, os números de onda para as frequências de corte serão $1,84/r_0$ e $3,83/r_0$, respectivamente. Em outras palavras o primeiro modo diametral começará a se propagar quando $k_0 r_0 = 1,84$ e o primeiro modo

axissimétrico para $k_0 r_0 = 1,84$. Assim, se a frequência de excitação é suficientemente pequena, somente ondas planas poderão se propagar quando:

$$k_0 r_0 < 1,84, \quad (3.32)$$

ou

$$\lambda > \frac{\pi}{1,84} d, \quad (3.33)$$

ou

$$f < \frac{1,84}{\pi d} c \quad (3.34)$$

onde, d é o diâmetro $2r_0$ [24].

As frequências de interesse para silenciadores de motores de combustão interna são suficientemente baixas, de modo que as condições para uma máxima dimensão transversal determinada pela Eqs.(3.32), (3.33) e (3.34) são geralmente satisfeitas.

A velocidade de partícula é encontrada através da substituição da Eq.(3.30) na Eq.(3.2) para direção axial, isto é

$$\begin{aligned} u_{z,m,n} &= -\frac{\partial p / \partial z}{j\omega\rho_0} \\ &= J_m(k_{r,m,n}r) e^{jm\theta} e^{j\omega t} \frac{k_{z,m,n}}{k_0\rho_0 c} (C_{1,m,n} e^{-jk_{z,m,n}z} - C_{2,m,n} e^{+jk_{z,m,n}z}). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Portanto, para onda plana, a velocidade da partícula para o modo (m, n) difere $k_{z,m,n}/k_0$ vezes, para a mesma pressão acústica. A velocidade de massa, da mesma forma que em dutos retangulares, não faz sentido para modos de ordem superior.

Neste capítulo foram abordados alguns conceitos fundamentais na área de acústica tendo em vista a modelagem da propagação sonora em dutos nos próximos capítulos.

CAPÍTULO 4

MODELAGEM ANALÍTICA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Trataremos neste capítulo do modelo matemático de um duto acústico, ambiente no qual se propaga as ondas sonoras. Este será modelado considerando meio fluido contínuo, homogêneo, perfeitamente elástico, processo isentrópico e ainda, sistema linear e invariante no tempo.

A Fig.4.1 apresenta esquematicamente o duto em estudo.

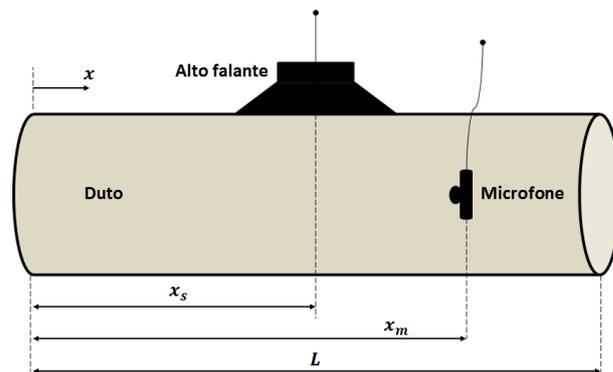


Figura 4.1: Duto Acústico.

Os alto falantes (atuadores) são utilizados como fontes de ruído e consistem em uma bobina conectada a um diafragma de formato cônico imersa em um campo magnético. A alimentação da bobina com a corrente elétrica provoca o deslocamento do diafragma, causando o deslocamento da área do cone. Como sensor de medida do campo acústico é utilizado um microfone. O duto acústico possui comprimento L , alto falante localizado na posição x_s , microfone na posição x_m e será modelado de modo a fornecer as funções de transferência que caracterizam a propagação das ondas sonoras em seu interior.

O modelo necessário compreende as funções de transferência que relacionam a pressão sonora captada pelo microfone e a fonte sonora caracterizada por sua velocidade e volume.

A função de transferência analítica será desenvolvida no domínio da frequência, de-

derivada da equação fundamental da onda, utilizando a transformada de Laplace e suas propriedades. Além disso, as equações resultantes serão implementadas utilizando o software Matlab e os gráficos discutidos em termos de fenômenos físicos envolvidos.

A propagação das ondas acústicas dentro do duto é descrita pela Eq.(3.20) unidimensional da onda, porém, não leva em consideração a fonte de ruído e o alto falante. A fonte de ruído, que excitará o duto, é inserido no modelo como uma condição de contorno. O alto falante adiciona massa no sistema e essa adição de massa na equação homogênea da onda linearizada se traduz matematicamente em um termo não homogêneo. Portanto, a formulação do modelo matemático do duto será expresso pela equação da onda [27]:

$$\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} = \rho_0 \dot{u}_{x_s}(t) \delta(x - x_s), \quad (4.1)$$

e as equações:

$$\rho_0 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \rho_0 u_{x_s}(t) \delta(x - x_s), \quad (4.2)$$

$$\rho_0 \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} = 0, \quad (4.3)$$

onde

- x é o deslocamento da partícula (m);
- ρ_0 é a densidade do meio (kg/m^3);
- t é a variável no tempo (s);
- δ é o delta de Dirac;
- c_0 é a velocidade de propagação do som (m/s);
- $p(x, t)$ é a variação da pressão acústica (N/m^2);
- $u(x, t)$ é a velocidade da partícula no ponto x no instante t (m/s);
- $\dot{u}_{x_s}(t)$ é a aceleração da partícula (m/s^2) provocada por uma fonte externa acústica posicionada em $x = x_s$.

A fim de obtermos as funções de transferência que caracterizam a propagação das ondas sonoras no interior do duto, primeiramente aplicamos a transformada de Laplace na Eq.(4.1):

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} \right\} - \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} \right\} = \mathcal{L} \{ \rho_0 \delta(x - x_s) \dot{u}_{x_s}(t) \}. \quad (4.4)$$

Utilizando as propriedades (A.1.1), (A.1.2) e (A.1.3) das transformadas de Laplace

temos:

$$\frac{\partial^2 P(x, s)}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \left\{ s^2 P(x, s) - sp(x, 0) - \frac{\partial p(x, 0)}{\partial t} \right\} = \rho_0 \delta(x - x_s) (sU_{x_s}(s) - u_{x_s}(0)). \quad (4.5)$$

Quando $t = 0$ a pressão inicial e a velocidade da partícula são nulas, então:

$$\frac{\partial^2 P(x, s)}{\partial x^2} - \left(\frac{s}{c_0} \right)^2 P(x, s) = \rho_0 \delta(x - x_s) sU_{x_s}(s). \quad (4.6)$$

Fazendo $\beta = \frac{s}{c_0}$ e adotando $P''(x, s) = \frac{\partial^2 P(x, s)}{\partial x^2}$, escrevemos a Eq.(4.6) na forma:

$$P''(x, s) = \beta^2 P(x, s) + \rho_0 \delta(x - x_s) sU_{x_s}(s). \quad (4.7)$$

Podemos escrever a Eq.(4.7) na forma espaço de estado. Para isto, consideramos v_1 e v_2 variáveis de estado, de modo que:

$$v_1 = P(x, s), \quad (4.8)$$

$$v_2 = P'(x, s) \quad (4.9)$$

onde, $v_1 = v_1(x, s)$ e $v_2 = v_2(x, s)$. Derivando as Eqs.(4.8) e (4.9) em relação a x , obtemos:

$$v'_1 = P'(x, s), \quad (4.10)$$

$$v'_2 = P''(x, s) \quad (4.11)$$

onde, $v'_1 = v'_1(x, s)$ e $v'_2 = v'_2(x, s)$. Substituindo a Eq.(4.7) na Eq.(4.11), temos:

$$v'_1 = P'(x, s), \quad (4.12)$$

$$v'_2 = \beta^2 P(x, s) + \rho_0 \delta(x - x_s) sU_{x_s}(s). \quad (4.13)$$

Em termos de variáveis de estado, as equações acima tem a forma:

$$v'_1 = v_2 \quad (4.14)$$

$$v'_2 = \beta^2 v_1 + \rho_0 \delta(x - x_s) sU_{x_s}(s), \quad (4.15)$$

chamadas equações espaço de estado. Na forma matricial podem ser escritas:

$$\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rho_0 \delta(x - x_s) s U_{x_s}(s) \quad (4.16)$$

Definindo na equação acima:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad g(x, s) = \delta(x - x_s) \rho_0 s U_{x_s}(s) \quad (4.17)$$

podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + B g(x, s) \quad (4.18)$$

chamada equação espaço de estado.

Deseja-se determinar a solução da Eq.(4.18), para isto escrevemos as Eqs.(4.14) e (4.15) na forma:

$$v_1'(x, s) = v_2(x, s) \quad (4.19)$$

$$v_2'(x, s) = \beta^2 v_1(x, s) + g(x, s). \quad (4.20)$$

Aplicando a Definição (A.1.1) da transformada de Laplace e a propriedade (A.2.2) na Eq.(4.19), obtemos:

$$\alpha V_1(\alpha, s) - v_1(0, s) = V_2(\alpha, s), \quad (4.21)$$

onde α representa a variável de Laplace.

Agora, aplicando a Definição (A.1.1) da transformada de Laplace e as propriedades (A.1.1) e (A.1.2) na Eq.(4.20) segue:

$$\alpha V_2(\alpha, s) - v_2(0, s) = \beta^2 V_1(\alpha, s) + G(\alpha, s), \quad (4.22)$$

onde $G(\alpha, s) = \mathcal{L} \{g(x, s)\}$.

Substituindo a Eq.(4.21) na Eq.(4.22), isto é:

$$\alpha [\alpha V_1(\alpha, s) - v_1(0, s)] - v_2(0, s) = \beta^2 V_1(\alpha, s) + G(\alpha, s) \quad (4.23)$$

com algumas manipulações algébricas obtemos:

$$(\alpha^2 - \beta^2) V_1(\alpha, s) = \alpha v_1(0, s) + v_2(0, s) + G(\alpha, s). \quad (4.24)$$

Então, segue da equação acima que:

$$V_1(\alpha, s) = \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} v_1(0, s) + \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} v_2(0, s) + \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} G(\alpha, s). \quad (4.25)$$

Aplicando a Definição (A.1.2) da transformada inversa de Laplace na Eq.(4.25), isto é:

$$\mathcal{L}^{-1} \{V_1(\alpha, s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} \right\} v_1(0, s) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \right\} v_2(0, s) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(\alpha, s)}{\alpha^2 - \beta^2} \right\}. \quad (4.26)$$

Utilizando a Tab.(A.1) das transformadas de Laplace temos:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} \right\} = \cosh \beta x, \quad (4.27)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \right\} = \frac{1}{\beta} \sinh \beta x. \quad (4.28)$$

Dessa forma, a Eq.(4.26) pode ser escrita como:

$$v_1(x, s) = \cosh \beta x v_1(0, s) + \frac{1}{\beta} \sinh \beta x v_2(0, s) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(\alpha, s)}{\alpha^2 - \beta^2} \right\}. \quad (4.29)$$

Substituindo a Eq.(4.25) na Eq.(4.21), obtemos:

$$\begin{aligned} V_2(\alpha, s) &= \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2} v_1(0, s) + \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} v_2(0, s) + \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} G(\alpha, s) - v_1(0, s) \quad (4.30) \\ &= \frac{(\alpha^2 - \beta^2) + \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} v_1(0, s) + \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} v_2(0, s) + \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} G(\alpha, s) - v_1(0, s) \\ &= \frac{\beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} v_1(0, s) + \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} v_2(0, s) + \frac{\alpha G(\alpha, s)}{\alpha^2 - \beta^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$V_2(\alpha, s) = \frac{\beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} v_1(0, s) + \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} v_2(0, s) + \frac{\alpha G(\alpha, s)}{\alpha^2 - \beta^2}. \quad (4.31)$$

Aplicando novamente a Definição (A.1.2) da transformada de inversa de Laplace na Eq.(4.31) e utilizando a Tab.(A.1), chegamos ao seguinte resultado:

$$v_2(x, s) = \beta \sinh \beta x v_1(0, s) + \cosh \beta x v_2(0, s) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\alpha G(\alpha, s)}{\alpha^2 - \beta^2} \right\}. \quad (4.32)$$

Observe que as Eqs.(4.29) e (4.32) podem ser escritas na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} v_1(x, s) \\ v_2(x, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \beta x & \frac{1}{\beta} \sinh \beta x \\ \beta \sinh \beta x & \cosh \beta x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(0, s) \\ v_2(0, s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1(x, s) \\ q_2(x, s) \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

onde,

$$e^{Ax} = \begin{bmatrix} \cosh \beta x & \frac{1}{\beta} \sinh \beta x \\ \beta \sinh \beta x & \cosh \beta x \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

$$q_1(x, s) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(\alpha, s)}{\alpha^2 - \beta^2} \right\} \quad \text{e} \quad q_2(x, s) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\alpha G(\alpha, s)}{\alpha^2 - \beta^2} \right\}. \quad (4.35)$$

Agora, deseja-se determinar $q_1 = q_1(x, s)$ e $q_2 = q_2(x, s)$ na Eq.(4.33). Então:

$$\begin{aligned} q_1(x, s) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(\alpha, s)}{\alpha^2 - \beta^2} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\rho_0 s U_{x_s}(s) e^{-\alpha x_s}}{\alpha^2 - \beta^2} \right\} \\ &= \frac{\rho_0 s U_{x_s}(s)}{\beta} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\beta}{\alpha^2 - \beta^2} e^{-\alpha x_s} \right\}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

Logo,

$$q_1(x, s) = \frac{\rho_0 s U_{x_s}(s)}{\beta} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\beta}{\alpha^2 - \beta^2} e^{-\alpha x_s} \right\} \quad (4.37)$$

onde $G(\alpha, s) = \rho_0 s U_{x_s}(s) e^{-\alpha x_s}$. Note que:

$$\begin{aligned} G(\alpha, s) &= \mathcal{L} \{ g(x, s) \} \\ &= \mathcal{L} \{ \delta(x - x_s) \rho_0 s U_{x_s}(s) \} \\ &= \rho_0 s U_{x_s}(s) \mathcal{L} \{ \delta(x - x_s) \} \\ &= \rho_0 s U_{x_s}(s) e^{-\alpha x_s} \end{aligned}$$

em que, a última igualdade acima foi obtida usando a Tab.(A.1).

Fazendo $H_1(\alpha) = \frac{\beta}{\alpha^2 - \beta^2}$ e $J_1(\alpha) = e^{-\alpha x_s}$ na Eq.(4.37), obtemos:

$$q_1(x, s) = \frac{\rho_0 s U_{x_s}(s)}{\beta} \mathcal{L}^{-1} \{ H_1(\alpha) J_1(\alpha) \}. \quad (4.38)$$

Aplicando o teorema (A.3.1) da convolução na Eq.(4.38) obtemos:

$$q_1(x, s) = \frac{\rho_0 s U_{x_s}(s)}{\beta} \int_0^x h_1(x - \lambda) j_1(\lambda) d\lambda. \quad (4.39)$$

Pela Tab.(A.1) temos:

$$\mathcal{L}^{-1} \{H_1(\alpha)\} = \sinh \beta x = h_1(x), \quad (4.40)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \{J_1(\alpha)\} = \delta(x - x_s) = j_1(x). \quad (4.41)$$

Então,

$$\begin{aligned} q_1(x, s) &= \frac{\rho_0 s U_{x_s}(s)}{\beta} \int_0^x \sinh \beta(x - \lambda) \delta(\lambda - x_s) d\lambda \\ &= \frac{\rho_0 s U_{x_s}(s)}{\beta} \int_0^x f(\lambda) \delta(\lambda - x_s) d\lambda \end{aligned} \quad (4.42)$$

onde, $f(\lambda) = \sinh \beta(x - \lambda)$.

Pela propriedade (A.2.2) do delta de Dirac segue:

$$\begin{aligned} q_1(x, s) &= \frac{\rho_0 s U_{x_s}(s)}{\beta} \begin{cases} f(x_s) & , x_s < x \\ 0 & , x_s \geq x \end{cases} \\ &= \frac{\rho_0 s U_{x_s}(s)}{\beta} \begin{cases} \sinh \beta(x - x_s) & , x_s < x \\ 0 & , x_s \geq x \end{cases}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Logo,

$$q_1(x, s) = \begin{cases} 0 & , x \leq x_s \\ \frac{\sinh \beta(x - x_s)}{\beta} \rho_0 s U_{x_s}(s) & , x > x_s \end{cases}. \quad (4.44)$$

Análogo ao que foi feito para determinar $q_1(x, s)$, obtemos $q_2(x, s)$ na forma:

$$q_2(x, s) = \begin{cases} 0 & , x \leq x_s \\ \cosh \beta(x - x_s) \rho_0 s U_{x_s}(s) & , x > x_s \end{cases} . \quad (4.45)$$

Sustituindo a Eq.(4.44) na Eq.(4.29) para determinar $v_1(x, s)$ e a Eq.(4.45) na Eq.(4.32) para determinar $v_2(x, s)$, encontramos os seguintes resultados:

$$v_1(x, s) = \begin{cases} \cosh \beta x v_1(0, s) + \frac{1}{\beta} \sinh \beta x v_2(0, s) & , x \leq x_s \\ \cosh \beta x v_1(0, s) + \frac{1}{\beta} \sinh \beta x v_2(0, s) + \frac{\sinh \beta(x-x_s)}{\beta} \rho_0 s U_{x_s}(s) & , x > x_s \end{cases} \quad (4.46)$$

e

$$v_2(x, s) = \begin{cases} \beta \sinh \beta x v_1(0, s) + \cosh \beta x v_2(0, s) & , x \leq x_s \\ \beta \sinh \beta x v_1(0, s) + \cosh \beta x v_2(0, s) + \cosh \beta(x - x_s) \rho_0 s U_{x_s}(s) & , x > x_s \end{cases} \quad (4.47)$$

Então, a partir das Eqs.(4.46) e (4.47), escrevemos:

$$\begin{bmatrix} v_1(x, s) \\ v_2(x, s) \end{bmatrix} = \begin{cases} e^{Ax} \begin{bmatrix} v_1(0, s) \\ v_2(0, s) \end{bmatrix} & , x \leq x_s \\ e^{Ax} \begin{bmatrix} v_1(0, s) \\ v_2(0, s) \end{bmatrix} + e^{A(x-x_s)} B \rho_0 s U_{x_s}(s) & , x > x_s \end{cases} , \quad (4.48)$$

sendo esta solução da Eq.(4.18) em que:

$$e^{A(x-x_s)} = \begin{bmatrix} \cosh \beta(x - x_s) & \frac{1}{\beta} \sinh \beta(x - x_s) \\ \beta \sinh \beta(x - x_s) & \cosh \beta(x - x_s) \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} . \quad (4.50)$$

Com a substituição das Eqs.(4.8) e (4.9) na equação (4.48), esta pode ser escrita na

forma:

$$\begin{bmatrix} P(x, s) \\ P'(x, s) \end{bmatrix} = \begin{cases} e^{Ax} \begin{bmatrix} P(0, s) \\ P'(0, s) \end{bmatrix} & , x \leq x_s \quad \text{(a)} \\ e^{Ax} \begin{bmatrix} P(0, s) \\ P'(0, s) \end{bmatrix} + e^{A(x-x_s)} B \rho_0 s U_{x_s}(s) & , x > x_s \quad \text{(b)} \end{cases}, \quad (4.51)$$

solução da Eq.(4.18), porém, com substituição das Eqs.(4.10) e (4.11) tem a forma:

$$\begin{bmatrix} P'(x, s) \\ P''(x, s) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} P(x, s) \\ P'(x, s) \end{bmatrix} + B \rho_0 \delta(x - x_s) s U_{x_s}(s). \quad (4.52)$$

Assim, para a posição $x = L$, correspondente a extremidade do duto, a Eq.(4.51) tem como solução:

$$\begin{bmatrix} P(L, s) \\ P'(L, s) \end{bmatrix} = e^{AL} \begin{bmatrix} P(0, s) \\ P'(0, s) \end{bmatrix} + e^{A(L-x_s)} B \rho_0 s U_{x_s}(s). \quad (4.53)$$

Na Eq.(4.53), existem quatro incógnitas, que são as condições de contorno:

$$P(0, s), P'(0, s), P(L, s) \text{ e } P'(L, s). \quad (4.54)$$

A própria formulação do problema fornece duas dessas condições de contorno, uma em cada extremidade do duto. Essas duas condições juntamente com a Eq.(4.53) fornecem as outras duas condições de contorno. Uma vez obtida as quatro condições de contorno mais a Eq.(4.51), pode-se determinar a pressão $P(x, s)$ em qualquer ponto do duto. Este procedimento será detalhado na seção seguinte.

São utilizados alto falantes elétricos como atuadores acústicos para o modelamento do duto. Estes providenciam a aceleração das partículas a partir do movimento do cone do alto falante. Esta aceleração $\dot{u}_{x_s}(t)$ é utilizada como entrada de perturbação para o duto acústico e assim, por conveniência, pode ser definida por [12]:

$$Q_b(s) = s U_{x_s}(s). \quad (4.55)$$

Na próxima seção, será feito a modelagem analítica do duto com fonte sonora lateral para diferentes configurações de duto. O objetivo é obter as funções de transferência entre

o alto falante Q_b e o microfone que descrevem a propagação sonora em seu interior.

4.1 DUTO ACÚSTICO COM FONTE SONORA NA LATERAL

A Fig. 4.2 consiste em um duto, um alto falante posicionado na lateral do duto e um microfone.

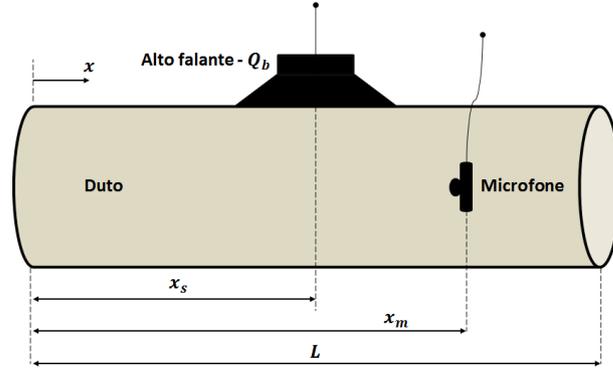


Figura 4.2: Duto Acústico com fonte sonora lateral.

Serão modelados os casos de duto: aberto-aberto, fechado-fechado, aberto-fechado, nas extremidades, e duto com condições de contorno arbitrárias.

Para realizar as simulações numéricas em ambiente Matlab das funções de transferência obtidas, foi adotado um duto de comprimento $L = 3,58 \text{ m}$, um alto falante Q_b posicionado em $x_s = 1,2192 \text{ m}$, um microfone posicionado em $x_m = 1,8288 \text{ m}$, velocidade do som $c_0 = 343 \text{ m/s}$ e densidade do ar $\rho_0 = 1,21 \text{ kg/m}^3$.

4.1.1 Caso 1: Duto Aberto-Aberto

Para o duto aberto-aberto, as condições de contorno são:

$$P(0, s) = P(L, s) = 0, \quad (4.56)$$

correspondente as posições em $x = 0$ e $x = L$.

Note que a Eq.(4.53) pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P(L, s) \\ P'(L, s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cosh \beta L & \frac{\sinh \beta L}{\beta} \\ \beta \sinh \beta L & \cosh \beta L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0, s) \\ P'(0, s) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \cosh \beta(L - x_s) & \frac{\sinh \beta(L - x_s)}{\beta} \\ \beta \sinh \beta(L - x_s) & \cosh \beta(L - x_s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rho_0 s U_{x_s}(s). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Substituindo as condições de contorno da Eq.(4.56) na equação acima e, em seguida, desenvolvendo o produto obtemos:

$$\begin{cases} 0 & = \frac{\sinh \beta L}{\beta} P'(0, s) + \frac{\sinh \beta(L-x_s)}{\beta} \rho_0 s U_{x_s}(s) & \text{(a)} \\ P'(L, s) & = \cosh \beta L P'(0, s) + \cosh \beta(L-x_s) \rho_0 s U_{x_s}(s) & \text{(b)} \end{cases} \quad (4.58)$$

Considerando a Eq.(4.58-a) e isolando o termo $P'(0, s)$, temos:

$$P'(0, s) = -\frac{\sinh \beta(L-x_s)}{\sinh \beta L} \rho_0 s U_{x_s}(s). \quad (4.59)$$

Substituindo a Eq.(4.55) na equação acima, obtemos:

$$P'(0, s) = -\frac{\rho_0 \sinh \beta(L-x_s)}{\sinh \beta L} Q_b(s). \quad (4.60)$$

Substituindo a Eq.(4.59) na (4.58-b) e colocando o termo $\rho_0 s U_{x_s}(s)$ em evidência, encontramos a equação:

$$P'(L, s) = \left[-\cosh \beta L \frac{\sinh \beta(L-x_s)}{\sinh \beta L} + \cosh \beta(L-x_s) \right] \rho_0 s U_{x_s}(s). \quad (4.61)$$

Agora, substituindo a Eq.(4.55) na equação acima segue que:

$$P'(L, s) = \left[-\cosh \beta L \frac{\sinh \beta(L-x_s)}{\sinh \beta L} + \cosh \beta(L-x_s) \right] \rho_0 Q_b(s). \quad (4.62)$$

Dividindo a equação acima por $Q_b(s)$ e usando as propriedades de soma de ângulos das funções seno-cosseno hiperbólicas, podemos escrever esta equação na forma:

$$\frac{P'(L, s)}{Q_b(s)} = \frac{\rho_0 \sinh \beta x_s}{\sinh \beta L}, \quad (4.63)$$

ou ainda,

$$P'(L, s) = \frac{\rho_0 \sinh \beta x_s}{\sinh \beta L} Q_b(s).$$

Assim, determinamos as duas incógnitas restantes, que são as condições de contorno $P'(0, s)$ e $P'(L, s)$. Uma vez que as quatro condições de contorno são conhecidas, a Eq.(4.51) pode ser usada para determinar a pressão $P(x, s)$ em qualquer lugar do duto. Nosso objetivo aqui é determinar a função de transferência para três configurações de

duto já mencionadas.

Então, substituindo as condições de contorno obtidas, na Eq.(4.51-a) correspondente a $x < x_s$, temos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P(x, s) \\ P'(x, s) \end{bmatrix} &= e^{Ax} \begin{bmatrix} P(0, s) \\ P'(0, s) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh \beta x & \frac{\sinh \beta x}{\beta} \\ \beta \sinh \beta x & \cosh \beta x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ P'(0, s) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Desenvolvendo o produto acima somente para $P(x, s)$ determinamos:

$$P(x, s) = \frac{\sinh \beta x}{\beta} P'(0, s). \quad (4.65)$$

Substituindo a Eq.(4.60) na Eq.(4.65), obtemos:

$$P(x, s) = -\frac{\rho_0 \sinh \beta x \sinh \beta(L - x_s)}{\beta \sinh \beta L} Q_b(s). \quad (4.66)$$

Dividindo a equação anterior por $Q_b(s)$, segue:

$$\frac{P(x, s)}{Q_b(s)} = -\frac{\rho_0 \sinh \beta x \sinh \beta(L - x_s)}{\beta \sinh \beta L}. \quad (4.67)$$

Agora, substituindo as condições de contorno na Eq.(4.51-b), correspondente a $x > x_s$, temos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P(x, s) \\ P'(x, s) \end{bmatrix} &= e^{Ax} \begin{bmatrix} P(0, s) \\ P'(0, s) \end{bmatrix} + e^{A(x-x_s)} \cdot B \rho_0 Q_b(s) \\ &= \begin{bmatrix} \cosh \beta x & \frac{\sinh \beta x}{\beta} \\ \beta \sinh \beta x & \cosh \beta x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ P'(0, s) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \cosh \beta(x - x_s) & \frac{\sinh \beta(x-x_s)}{\beta} \\ \beta \sinh \beta(x - x_s) & \cosh \beta(x - x_s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rho_0 Q_b(s). \end{aligned} \quad (4.68)$$

Desenvolvendo o produto na Eq.(4.68) para $P(x, s)$, chegamos ao resultado:

$$P(x, s) = \frac{\sinh \beta x}{\beta} P'(0, s) + \frac{\sinh \beta(x - x_s)}{\beta} \rho_0 Q_b(s). \quad (4.69)$$

Substituindo a Eq.(4.60) na Eq.(4.69) temos:

$$P(x, s) = -\frac{\sinh \beta x \sinh \beta(L - x_s)}{\beta \sinh \beta L} \rho_0 Q_b(s) + \frac{\sinh \beta(x - x_s)}{\beta} \rho_0 Q_b(s). \quad (4.70)$$

Utilizando as propriedades de soma de ângulos das funções seno-cosseno hiperbólicas e dividindo a equação obtida por $Q_b(s)$, obtemos:

$$\frac{P(x, s)}{Q_b(s)} = -\frac{\rho_0 \sinh \beta x_s \sinh \beta(L - x)}{\beta \sinh \beta L}. \quad (4.71)$$

Quando substituimos as condições de contorno tanto na Eq.(4.51-a) como na Eq.(4.51-b), para analisarmos o que acontece quando $x = x_s$, encontramos o mesmo resultado. Então, dizemos que quando $x = x_s$, por exemplo, na Eq.(4.71), chegamos a equação:

$$P(x, s) = -\frac{\sinh \beta x \sinh \beta(L - x_s)}{\beta \sinh \beta L} \rho_0 Q_b(s). \quad (4.72)$$

Logo, dividindo a equação acima por $Q_b(s)$ obtemos:

$$\frac{P(x, s)}{Q_b(s)} = -\frac{\rho_0 \sinh \beta x \sinh \beta(L - x_s)}{\beta \sinh \beta L}. \quad (4.73)$$

Portanto, das Eqs.(4.67), (4.71) e (4.73) determinamos a função de transferência para a configuração de duto aberto-aberto, conforme apresentado a seguir:

$$\frac{P(x, s)}{Q_b(s)} = \begin{cases} -\frac{\rho_0 \sinh \beta x \sinh \beta(L - x_s)}{\beta \sinh \beta L} & , x \leq x_s \\ -\frac{\rho_0 \sinh \beta x_s \sinh \beta(L - x)}{\beta \sinh \beta L} & , x > x_s \end{cases}. \quad (4.74)$$

A Fig.4.3 a seguir, representa as respostas em magnitude e fase da função de transferência para configuração de duto aberto-aberto, para $x > x_s$ de acordo com os parâmetros geométricos e acústicos definidos no início da seção 4.1.

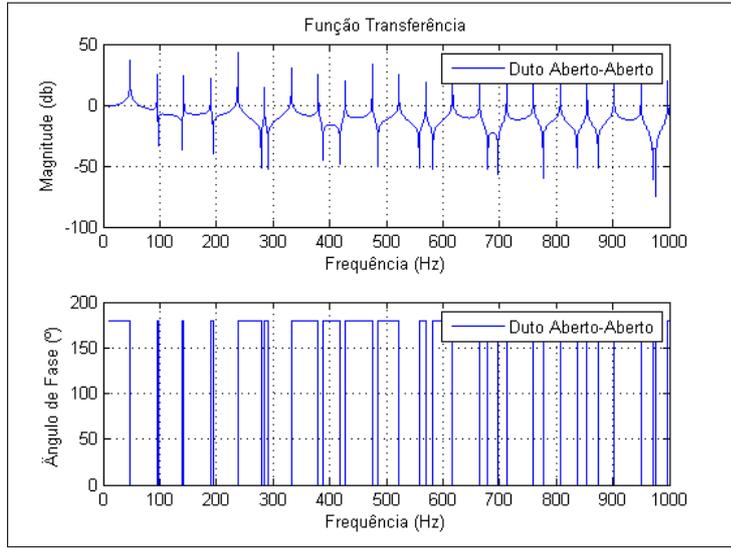


Figura 4.3: Respostas em magnitude e fase da função de transferência para o duto aberto-aberto.

Os resultados apresentados serão posteriormente comentados (na última seção deste capítulo) e comparados com o modelo desenvolvido pelo método de elementos finitos, com o intuito de verificar a validade dos resultados obtidos. A priori, os gráficos apresentados servem para mostrar o comportamento acústico da propagação sonora considerando a condição de contorno especificada, note que a função transferência é composta praticamente de ressonâncias e anti-ressonâncias.

4.1.2 Caso 2: Duto Fechado-Fechado

Para o duto fechado-fechado, as condições de contorno são:

$$P'(0, s) = P'(L, s) = 0. \quad (4.75)$$

Considerando a Eq.(4.53) e substituindo a Eq.(4.55), temos:

$$\begin{bmatrix} P(L, s) \\ P'(L, s) \end{bmatrix} = e^{AL} \begin{bmatrix} P(0, s) \\ P'(0, s) \end{bmatrix} + e^{A(L-x_s)} \cdot B\rho_0 Q_b(s). \quad (4.76)$$

Então, substituindo as condições de contorno dada pela Eq.(4.75) na Eq.(4.76),

segue o resultado:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} P(L, s) \\ 0 \end{bmatrix} &= e^{AL} \begin{bmatrix} P(0, s) \\ 0 \end{bmatrix} + e^{A(L-x_s)} \cdot B\rho_0 Q_b(s) \\
&= \begin{bmatrix} \cosh \beta L & \frac{\sinh \beta L}{\beta} \\ \beta \sinh \beta L & \cosh \beta L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0, s) \\ 0 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \cosh \beta(L-x_s) & \frac{\sinh \beta(L-x_s)}{\beta} \\ \beta \sinh \beta(L-x_s) & \cosh \beta(L-x_s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rho_0 Q_b(s). \quad (4.77)
\end{aligned}$$

Desenvolvendo o produto acima, obtemos:

$$\begin{cases} P(L, s) = \cosh \beta L P(0, s) + \frac{\sinh \beta(L-x_s)}{\beta} \rho_0 Q_b(s) & \text{(a)} \\ 0 = \beta \sinh \beta L P(0, s) + \cosh \beta(L-x_s) \rho_0 Q_b(s) & \text{(b)} \end{cases} \quad (4.78)$$

Então, da Eq.(4.78-b), segue:

$$P(0, s) = -\frac{\cosh \beta(L-x_s)}{\beta \sinh \beta L} \rho_0 Q_b(s). \quad (4.79)$$

Agora, substituindo a Eq.(4.79) na Eq.(4.78-a), obtemos:

$$P(L, s) = \left[-\cosh \beta L \frac{\cosh \beta(L-x_s)}{\beta \sinh \beta L} + \frac{\sinh \beta(L-x_s)}{\beta} \right] \rho_0 Q_b(s). \quad (4.80)$$

Reduzindo a equação acima ao mesmo denominador e utilizando as propriedades de soma de ângulos das funções seno-cosseno hiperbólicas, encontramos:

$$P(L, s) = -\frac{\cosh \beta x_s}{\beta \sinh \beta L} \rho_0 Q_b(s). \quad (4.81)$$

Dessa forma, determinamos as outras duas condições de contorno, $P(L, s)$ e $P(0, s)$. Substituindo as condições de contorno obtidas e a Eq.(4.55) na Eq.(4.51-a), correspon-

dente a $x < x_s$, segue o resultado:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P(x, s) \\ P'(x, s) \end{bmatrix} &= e^{Ax} \begin{bmatrix} P(0, s) \\ P'(0, s) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh \beta x & \frac{\sinh \beta x}{\beta} \\ \beta \sinh \beta x & \cosh \beta x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0, s) \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Desenvolvendo o produto na equação acima apenas para $P(x, s)$, temos:

$$P(x, s) = \cosh \beta x P(0, s). \quad (4.83)$$

Substituindo a Eq.(4.79) na Eq.(4.83), temos:

$$P(x, s) = -\cosh \beta x \frac{\cosh \beta(L - x_s)}{\beta \sinh \beta L} \rho_0 Q_b(s). \quad (4.84)$$

Agora, dividindo a equação acima por $Q_b(s)$, temos:

$$\frac{P(x, s)}{Q_b(s)} = -\frac{\rho_0 \cosh \beta x \cosh \beta(L - x_s)}{\beta \sinh \beta L}. \quad (4.85)$$

Para $x > x_s$, substituímos as condições de contorno e a Eq.(4.55) na Eq.(4.51) de forma que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P(x, s) \\ P'(x, s) \end{bmatrix} &= e^{Ax} \begin{bmatrix} P(0, s) \\ P'(0, s) \end{bmatrix} + e^{A(x-x_s)} \cdot B \rho_0 Q_b(s) \\ &= e^{Ax} \begin{bmatrix} P(0, s) \\ 0 \end{bmatrix} + e^{A(x-x_s)} \cdot B \rho_0 Q_b(s) \\ &= \begin{bmatrix} \cosh \beta x & \frac{\sinh \beta x}{\beta} \\ \beta \sinh \beta x & \cosh \beta x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0, s) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \cosh \beta(x - x_s) & \frac{\sinh \beta(x-x_s)}{\beta} \\ \beta \sinh \beta(x - x_s) & \cosh \beta(x - x_s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rho_0 Q_b(s). \end{aligned} \quad (4.86)$$

Desenvolvendo o produto acima somente para $P(x, s)$, obtemos:

$$P(x, s) = \cosh \beta x P(0, s) + \frac{\sinh \beta(x - x_s)}{\beta} \rho_0 Q_b(s). \quad (4.87)$$

Substituindo a Eq.(4.79) na Eq.(4.87), segue o resultado:

$$P(x, s) = -\cosh \beta x \frac{\cosh \beta(L - x_s)}{\beta \sinh \beta L} \rho_0 Q_b(s) + \frac{\sinh \beta(x - x_s)}{\beta} \rho_0 Q_b(s). \quad (4.88)$$

Reduzindo a Eq.(4.88) ao mesmo denominador e utilizando as propriedades de soma de ângulos das funções seno-cosseno hiperbólicas, temos:

$$P(x, s) = -\frac{\cosh \beta x_s \cosh \beta(L - x)}{\beta \sinh \beta L} \rho_0 Q_b(s). \quad (4.89)$$

Dividindo a Eq.(4.89) por $Q_b(s)$, obtemos:

$$\frac{P(x, s)}{Q_b(s)} = -\frac{\rho_0 \cosh \beta x_s \cosh \beta(L - x)}{\beta \sinh \beta L}. \quad (4.90)$$

Para $x = x_s$, análogo ao que foi feito para o caso duto aberto-aberto, fazendo $x = x_s$ na Eq.(4.90) temos:

$$\frac{P(x, s)}{Q_b(s)} = -\frac{\rho_0 \cosh \beta x \cosh \beta(L - x_s)}{\beta \sinh \beta L}. \quad (4.91)$$

Portanto, das Eqs.(4.85), (4.90) e (4.91) determinamos a função de transferência para a configuração de duto fechado-fechado na forma:

$$\frac{P(x, s)}{Q_b(s)} = \begin{cases} -\frac{\rho_0 \cosh \beta x \cosh \beta(L - x_s)}{\beta \sinh \beta L} & , x \leq x_s \\ -\frac{\rho_0 \cosh \beta x_s \cosh \beta(L - x)}{\beta \sinh \beta L} & , x > x_s \end{cases} \quad (4.92)$$

A Fig.4.4 representa as respostas em magnitude e fase da função de transferência para configuração de duto fechado-fechado.

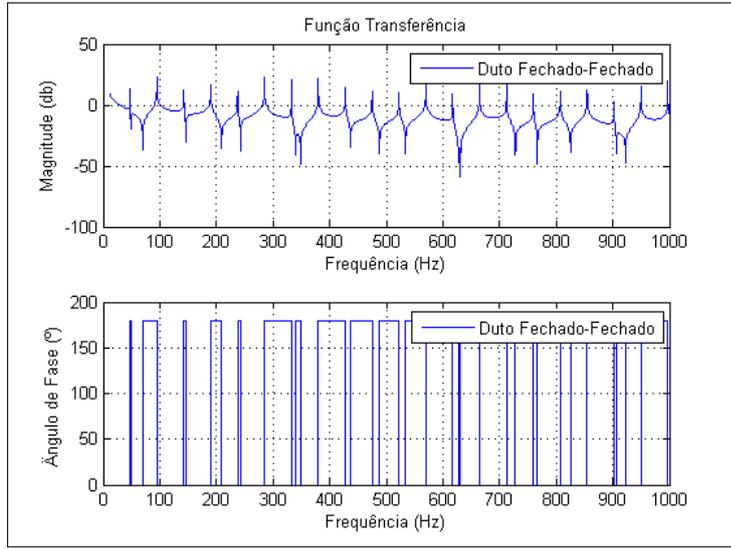


Figura 4.4: Respostas em magnitude e fase da função de transferência para o duto fechado-fechado.

4.1.3 Caso 3: Duto Aberto-Fechado

Para o duto aberto-fechado, as condições de contorno são:

$$P(0, s) = P'(L, s) = 0. \quad (4.93)$$

Substituindo as condições de contorno acima e a Eq.(4.55) na Eq.(4.53) temos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P(L, s) \\ 0 \end{bmatrix} &= e^{AL} \begin{bmatrix} 0 \\ P'(0, s) \end{bmatrix} + e^{A(L-x_s)} \cdot B\rho_0 Q_b(s) \\ &= \begin{bmatrix} \cosh \beta L & \frac{\sinh \beta L}{\beta} \\ \beta \sinh \beta L & \cosh \beta L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ P'(0, s) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \cosh \beta(L-x_s) & \frac{\sinh \beta(L-x_s)}{\beta} \\ \beta \sinh \beta(L-x_s) & \cosh \beta(L-x_s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rho_0 Q_b(s). \end{aligned} \quad (4.94)$$

Desenvolvendo o produto acima encontramos:

$$\begin{cases} P(L, s) = \frac{\sinh \beta L}{\beta} P'(0, s) + \frac{\sinh \beta(L-x_s)}{\beta} \rho_0 Q_b(s) & \text{(a)} \\ 0 = \cosh \beta L P'(0, s) + \cosh \beta(L-x_s) \rho_0 Q_b(s) & \text{(b)} \end{cases} \quad (4.95)$$

Segue da Eq.(4.95-b) o resultado:

$$P'(0, s) = -\frac{\cosh \beta(L - x_s)}{\cosh \beta L} \rho_0 Q_b(s). \quad (4.96)$$

Substituindo a Eq.(4.96) na Eq.(4.95-a), obtemos:

$$P(L, s) = \left[-\frac{\sinh \beta L \cosh \beta(L - x_s)}{\beta \cosh \beta L} + \frac{\sinh \beta(L - x_s)}{\beta} \right] \rho_0 Q_b(s). \quad (4.97)$$

Reduzindo a equação acima ao mesmo denominador e utilizando as propriedades de soma de ângulos das funções seno-cosseno hiperbólicas, a Eq.(4.97) pode ser escrita na forma:

$$P(L, s) = -\frac{\sinh \beta x_s}{\beta \cosh \beta L} \rho_0 Q_b(s). \quad (4.98)$$

Logo, obtemos as duas incógnitas restantes, que são as condições de contorno $P(L, s)$ e $P'(0, s)$. Dessa forma, obtemos as quatro condições de contorno para esta configuração de duto.

Substituindo essas condições de contorno e a Eq.(4.55) na Eq.(4.51-a), correspondente a $x < x_s$, segue o resultado:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P(x, s) \\ P'(x, s) \end{bmatrix} &= e^{Ax} \begin{bmatrix} P(0, s) \\ P'(0, s) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh \beta x & \frac{\sinh \beta x}{\beta} \\ \beta \sinh \beta x & \cosh \beta x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ P'(0, s) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Desenvolvendo o produto acima para $P(x, s)$, obtemos:

$$P(x, s) = \frac{\sinh \beta x}{\beta} P'(0, s). \quad (4.100)$$

Substituindo a Eq.(4.96) na Eq.(4.100) temos:

$$P(x, s) = -\frac{\sinh \beta x \cosh \beta(L - x_s)}{\beta \cosh \beta L} \rho_0 Q_b(s). \quad (4.101)$$

Dividindo a equação acima por $Q_b(s)$, obtemos:

$$\frac{P(x, s)}{Q_b(s)} = -\frac{\rho_0 \sinh \beta x \cosh \beta(L - x_s)}{\beta \cosh \beta L}. \quad (4.102)$$

Para $x > x_s$, substituindo as condições de contorno e a Eq.(4.55) na Eq.(4.51-b) obtemos:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} P(x, s) \\ P'(x, s) \end{bmatrix} &= e^{Ax} \begin{bmatrix} 0 \\ P'(0, s) \end{bmatrix} + e^{A(x-x_s)} \cdot B\rho_0 Q_b(s) \\
&= \begin{bmatrix} \cosh \beta x & \frac{\sinh \beta x}{\beta} \\ \beta \sinh \beta x & \cosh \beta x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ P'(0, s) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \cosh \beta(x-x_s) & \frac{\sinh \beta(x-x_s)}{\beta} \\ \beta \sinh \beta(x-x_s) & \cosh \beta(x-x_s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rho_0 Q_b(s). \quad (4.103)
\end{aligned}$$

Desenvolvendo o produto acima para $P(x, s)$, temos:

$$P(x, s) = \frac{\sinh \beta x}{\beta} P'(0, s) + \frac{\sinh \beta(x-x_s)}{\beta} \rho_0 Q_b(s). \quad (4.104)$$

Substituindo a Eq.(4.96) na Eq.(4.104) obtemos:

$$P(x, s) = \left[-\frac{\sinh \beta x \cosh \beta(L-x_s)}{\beta \cosh \beta L} + \frac{\sinh \beta(x-x_s)}{\beta} \right] \rho_0 Q_b(s). \quad (4.105)$$

Reduzindo a equação acima ao mesmo denominador e utilizando as propriedades de soma de ângulos das funções seno-cosseno hiperbólicas, segue o resultado:

$$P(x, s) = -\frac{\sinh \beta x_s \cosh \beta(L-x)}{\beta \cosh \beta L} \rho_0 Q_b(s). \quad (4.106)$$

Dividindo a equação acima por $Q_b(s)$, segue:

$$\frac{P(x, s)}{Q_b(s)} = -\frac{\rho_0 \sinh \beta x_s \cosh \beta(L-x)}{\beta \cosh \beta L}. \quad (4.107)$$

Por último, substituindo $x = x_s$ na Eq.(4.107) temos:

$$\frac{P(x, s)}{Q_b(s)} = -\frac{\rho_0 \sinh \beta x \cosh \beta(L-x_s)}{\beta \cosh \beta L}. \quad (4.108)$$

Portanto, das Eqs.(4.102), (4.107) e (4.108) determinamos a função de transferência

para a configuração de duto aberto-fechado na forma:

$$\frac{P(x, s)}{Q_b(s)} = \begin{cases} -\frac{\rho_0 \sinh \beta x \cosh \beta(L - x_s)}{\beta \cosh \beta L} & , x \leq x_s \\ -\frac{\rho_0 \sinh \beta x_s \cosh \beta(L - x)}{\beta \cosh \beta L} & , x > x_s \end{cases} . \quad (4.109)$$

A simulação da função de transferência para esta configuração de duto é ilustrada na Fig.4.5, representando as respostas em magnitude e fase.

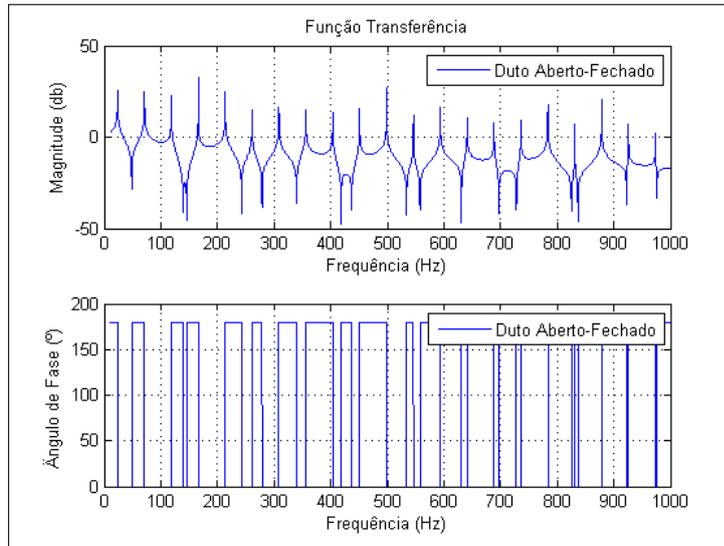


Figura 4.5: Respostas em magnitude e fase da função de transferência para o duto aberto-fechado.

4.1.4 Caso 4: Duto com Condições de Contorno Arbitrárias

Nos três casos modelados na seção anterior foram considerados condições de contorno específicas, também chamadas ideais. Em geral, condições de contorno são dadas como impedâncias de ambas as extremidades do duto, por exemplo, como na Eq.(4.110). Essas impedâncias são conhecidas ou podem ser determinadas experimentalmente [12].

$$\begin{aligned} Z_0(s) &= \frac{P(0,s)}{U(0,s)} \\ Z_L(s) &= \frac{P(L,s)}{U(L,s)} \end{aligned} . \quad (4.110)$$

A partir da Eq.(4.3) e considerando as impedâncias dadas pela Eq.(4.110), pode-se escrever as condições de contorno do sistema acústico de forma generalizada, chamada

condições de contorno arbitrárias e obter a pressão e suas derivadas em cada ponto do duto.

De fato, considere a Eq.(4.3), abaixo:

$$\rho_0 \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} = 0$$

Aplicando a transformada de Laplace na equação acima e utilizando as propriedades A.1.1 e A.1.2 obtemos:

$$\rho_0(sU(x, s) - u(x, 0)) + \frac{\partial P(x, s)}{\partial x} = 0 \quad (4.111)$$

$$\rho_0 sU(x, s) + \frac{\partial P(x, s)}{\partial x} = 0 \quad (4.112)$$

Fazendo $P'(x, s) = \frac{\partial P(x, s)}{\partial x}$ chegamos a seguinte equação:

$$\rho_0 sU(x, s) + P'(x, s) = 0. \quad (4.113)$$

Para o caso de condições de contorno dadas como impedâncias de ambas as extremidade do duto, a equação acima tem a forma:

$$\rho_0 sU(L, s) + P'(0, s) = 0 \quad (4.114)$$

Então, as impedâncias dadas pela Eq.(4.110) quando substituídas na Eq.(4.114), com algumas manipulações algébricas, fornecem a pressão e suas derivadas em cada extremidade do duto, conforme a seguir:

$$\begin{aligned} P(0, s) &= -Z_0(s) \frac{P'(0, s)}{\rho_0 s} \\ P(L, s) &= -Z_L(s) \frac{P'(L, s)}{\rho_0 s} \end{aligned} \quad (4.115)$$

chamadas condições de contorno arbitrárias.

Deseja-se determinar a função de transferência considerando as condições de con-

torno arbitr rias. Para isto, partimos da Eq.(4.53) escrita na forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P(L, s) \\ P'(L, s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cosh \beta L & \frac{\sinh \beta L}{\beta} \\ \beta \sinh \beta L & \cosh \beta L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P(0, s) \\ P'(0, s) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \cosh \beta(L - x_s) & \frac{\sinh \beta(L - x_s)}{\beta} \\ \beta \sinh \beta(L - x_s) & \cosh \beta(L - x_s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \rho_0 s U_{x_s}(s) \end{aligned} \quad (4.116)$$

Ent o, desenvolvendo o produto acima, segue o resultado:

$$\begin{cases} P(L, s) = \cosh \beta L P(0, s) + \frac{\sinh \beta L}{\beta} P'(0, s) + \frac{\sinh \beta(L - x_s)}{\beta} \rho_0 s U_{x_s}(s) \\ P'(L, s) = \beta \sinh \beta L P(0, s) + \cosh \beta L P'(0, s) + \cosh \beta(L - x_s) \rho_0 s U_{x_s}(s) \end{cases} \quad (4.117)$$

Substituindo as condi es de contorno arbitr rias, apresentadas na Eq.(4.115) na equa o Eq.(4.117), com algumas manipula es alg bricas encontramos o seguinte resultado:

$$\begin{cases} -Z_L(s) \frac{P'(L, s)}{\rho_0 s} = \left[\cosh \beta L \frac{-Z_0(s)}{\rho_0 s} + \frac{\sinh \beta L}{\beta} \right] P'(0, s) + \frac{\sinh \beta(L - x_s)}{\beta} \rho_0 s U_{x_s}(s) & (a) \\ P'(L, s) = \left[\beta \sinh \beta L \frac{-Z_0(s)}{\rho_0 s} + \cosh \beta L \right] P'(0, s) + \cosh \beta(L - x_s) \rho_0 s U_{x_s}(s) & (b) \end{cases}$$

Substituindo (a) em (b), na equa o acima para determinar $P'(0, s)$ e considerando a Eq.(4.55) temos:

$$P'(0, s) = \frac{\left(\cosh \beta(L - x_s) Z_L(s) + \frac{\rho_0 s \sinh \beta(L - x_s)}{\beta} \right) \rho_0^2 s Q_b(s)}{(Z_0(s) Z_L(s) \beta^2 - \rho_0^2 s^2) \frac{\sinh \beta L}{\beta} + (Z_0(s) - Z_L(s)) \rho_0 s \cosh \beta L}. \quad (4.118)$$

Dessa forma, determinamos as quatro condi es de contorno arbitr rias, a saber:

$$P(0, s), P(L, s), P'(0, s) \text{ e } P'(L, s). \quad (4.119)$$

Agora podemos determinar a fun o de transfer ncia a partir das condi es de contorno arbitr rias.

De fato, substituindo as condi es de contorno na Eq.(4.51-a), correspondente a $x < x_s$, desenvolvendo o produto apenas para $P(x, s)$ e com algumas manipula es alg bricas

obtemos:

$$P(x, s) = \cosh \beta x P(0, s) + \frac{\sinh \beta x}{\beta} P'(0, s). \quad (4.120)$$

Substituindo a condição de contorno $P(0, s)$ da Eq.(4.115) na equação acima, obtemos:

$$P(x, s) = \left[\cosh \beta x \frac{-Z_0(s)}{\rho_0 s} + \frac{\sinh \beta x}{\beta} \right] P'(0, s) \quad (4.121)$$

Substituindo a Eq.(4.118) na equação acima temos:

$$P(x, s) = \frac{\left(\frac{\sinh \beta x}{\beta} - \frac{\cosh \beta x Z_0(s)}{\rho_0 s} \right) \left(\cosh \beta(L - x_s) Z_L(s) + \frac{\rho_0 s \sinh \beta(L - x_s)}{\beta} \right) \rho_0^2 s Q_b(s)}{(Z_0(s) Z_L(s) \beta^2 - \rho_0^2 s^2) \frac{\sinh \beta L}{\beta} + (Z_0(s) - Z_L(s)) \rho_0 s \cosh \beta L}. \quad (4.122)$$

Dividindo a equação acima por $Q_b(s)$, segue o resultado:

$$\frac{P(x, s)}{Q_b(s)} = \frac{\left(\frac{\sinh \beta x}{\beta} - \frac{\cosh \beta x Z_0(s)}{\rho_0 s} \right) \left(\cosh \beta(L - x_s) Z_L(s) + \frac{\rho_0 s \sinh \beta(L - x_s)}{\beta} \right)}{(Z_0(s) Z_L(s) \beta^2 - \rho_0^2 s^2) \frac{\sinh \beta L}{\beta} + (Z_0(s) - Z_L(s)) \rho_0 s \cosh \beta L} \rho_0^2 s. \quad (4.123)$$

Desenvolvendo o produto na Eq.(4.51-b), correspondente a $x > x_s$ apenas para $P(x, s)$, com algumas manipulações algébricas obtemos:

$$P(x, s) = \cosh \beta x P(0, s) + \frac{\sinh \beta x}{\beta} P'(0, s) + \frac{\sinh \beta(x - x_s)}{\beta} \rho_0 Q_b(s). \quad (4.124)$$

Substituimos a condição de contorno $P(0, s)$ da Eq.(4.115) na equação acima obtemos:

$$P(x, s) = \left[-\cosh \beta x \frac{Z_0(s)}{\rho_0 s} + \frac{\sinh \beta x}{\beta} \right] P'(0, s) + \frac{\sinh \beta(x - x_s)}{\beta} \rho_0 Q_b(s). \quad (4.125)$$

Substituindo a Eq.(4.118) na Eq.(4.125) e em seguida dividindo a equação resultante por $Q_b(s)$ temos:

$$\begin{aligned} \frac{P(x, s)}{Q_b(s)} &= \frac{\rho_0^2 s^2 \left(\frac{\sinh \beta x}{\beta} - \frac{\cosh \beta x Z_0(s)}{\rho_0 s} \right) \left(\frac{\cosh \beta(L - x_s) Z_L(s)}{s} + \frac{\rho_0 \sinh \beta(L - x_s)}{\beta} \right)}{(Z_0(s) Z_L(s) \beta^2 - \rho_0^2 s^2) \frac{\sinh \beta L}{\beta} + (Z_0(s) - Z_L(s)) \rho_0 s \cosh \beta L} \\ &+ \frac{\sinh \beta(x - x_s) \rho_0}{\beta}. \end{aligned} \quad (4.126)$$

Reduzindo a Eq.(4.126) ao mesmo denominador e usando as propriedades de soma

de ângulos das funções seno-cosseno hiperbólicas, encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{P(x, s)}{Q_b(s)} = & \frac{\left(\rho_0^3 s^2 \frac{\sinh \beta x_s}{\beta} - \rho_0^2 s Z_0(s) \cosh \beta x_s \right) \frac{\sinh \beta(L-x)}{\beta}}{(Z_0(s) Z_L(s) \beta^2 - \rho_0^2 s^2) \frac{\sinh \beta L}{\beta} + (Z_0(s) - Z_L(s)) \rho_0 s \cosh \beta L} \\ & + \frac{\left[Z_L(s) \rho_0^2 s \frac{\sinh \beta x_s}{\beta} - Z_0(s) Z_L(s) \cosh \beta x_s \right] \cosh \beta(L-x)}{[Z_0(s) Z_L(s) \beta^2 - \rho_0^2 s^2] \frac{\sinh \beta L}{\beta} + [Z_0(s) - Z_L(s)] \rho_0 s \cosh \beta L}. \end{aligned} \quad (4.127)$$

Colocando os termos comuns em evidência na equação acima, obtemos:

$$\frac{P(x, s)}{Q_b(s)} = \frac{\rho_0^2 s^2 \left(\frac{\sinh \beta x_s}{\beta} - \frac{\cosh \beta x_s Z_0(s)}{\rho_0 s} \right) \left(\frac{\rho_0 \sinh \beta(L-x)}{\beta} + \frac{\cosh \beta(L-x) Z_L(s)}{s} \right)}{(Z_0(s) Z_L(s) \beta^2 - \rho_0^2 s^2) \frac{\sinh \beta L}{\beta} + (Z_0(s) - Z_L(s)) \rho_0 s \cosh \beta L}. \quad (4.128)$$

Note que: fazendo $x = x_s$ por exemplo, na equação acima, temos:

$$\frac{P(x, s)}{Q_b(s)} = \frac{\rho_0^2 s^2 \left(\frac{\sinh \beta x}{\beta} - \frac{\cosh \beta x Z_0(s)}{\rho_0 s} \right) \left(\frac{\rho_0 \sinh \beta(L-x_s)}{\beta} + \frac{\cosh \beta(L-x_s) Z_L(s)}{s} \right)}{(Z_0(s) Z_L(s) \beta^2 - \rho_0^2 s^2) \frac{\sinh \beta L}{\beta} + (Z_0(s) - Z_L(s)) \rho_0 s \cosh \beta L}. \quad (4.129)$$

Portanto, das Eqs.(4.123), (4.128) e (4.129) determinamos a função de transferência para o duto com condições de contorno arbitrárias apresentada abaixo:

$$\frac{P(x, s)}{Q_b(s)} = \begin{cases} \frac{\rho_0^2 s^2 \left(\frac{\sinh \beta x}{\beta} - \frac{\cosh \beta x Z_0(s)}{\rho_0 s} \right) \left(\frac{\rho_0 \sinh \beta(L-x_s)}{\beta} + \frac{\cosh \beta(L-x_s) Z_L(s)}{s} \right)}{(Z_0(s) Z_L(s) \beta^2 - \rho_0^2 s^2) \frac{\sinh \beta L}{\beta} + (Z_0(s) - Z_L(s)) \rho_0 s \cosh \beta L} & , x \leq x_s \quad (a) \\ \frac{\rho_0^2 s^2 \left(\frac{\sinh \beta x_s}{\beta} - \frac{\cosh \beta x_s Z_0(s)}{\rho_0 s} \right) \left(\frac{\rho_0 \sinh \beta(L-x)}{\beta} + \frac{\cosh \beta(L-x) Z_L(s)}{s} \right)}{(Z_0(s) Z_L(s) \beta^2 - \rho_0^2 s^2) \frac{\sinh \beta L}{\beta} + (Z_0(s) - Z_L(s)) \rho_0 s \cosh \beta L} & , x > x_s \quad (b) \end{cases} . \quad (4.130)$$

Para a simulação da função de transferência para a configuração de duto com condições de contorno arbitrárias, foi considerado como material acústico uma espuma de poliuretano de 25 mm de espessura e os cálculos da impedância foram realizados utilizando a Eq.4.131 encontrada no artigo [28].

$$Z = \rho c_0 \left[1 + C_1 \left(\frac{\rho f}{r_0} \right)^{C_2} - j \cdot C_3 \left(\frac{\rho f}{r_0} \right)^{C_4} \right]. \quad (4.131)$$

Nesta equação, $C_1 = 0,0571$, $C_2 = -0,7540$, $C_3 = 0,0870$, $C_4 = -0,7320$ são valores obtidos para este tipo de material, $r_0 = 8445$ é o fluxo de resistividade e $\rho = 343$ m/s é a velocidade do som.

A Fig.4.6 representa as respostas em magnitude e fase da função de transferência

para configuração de duto com condições de contorno arbitrárias.

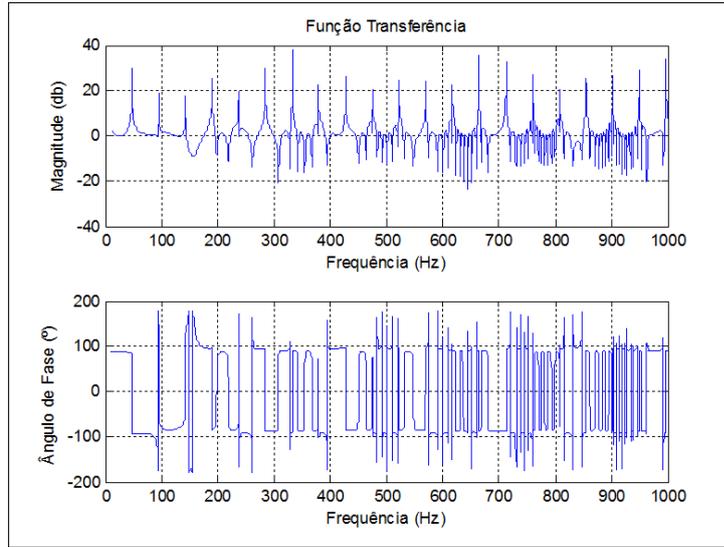


Figura 4.6: Respostas em magnitude e fase da função de transferência para o duto com condições de contorno arbitrárias.

Pode-se observar que as funções de transferências correspondentes as configurações de dutos aberto-aberto, fechado-fechado e aberto-fechado, são casos particulares da função de transferência obtida considerando condições de contorno arbitrárias.

De fato, para a configuração de duto aberto-aberto, consideramos a função de transferência dada pela Eq.(4.130-a) e calculamos $\lim_{Z_0(s) \rightarrow 0} \frac{P(x, s)}{Q_b(s)}$. Isto é:

$$\begin{aligned} \lim_{Z_0(s) \rightarrow 0} \frac{P(x, s)}{Q_b(s)} &= \lim_{Z_0(s) \rightarrow 0} \frac{\rho_0^2 s^2 \left(\frac{\sinh \beta x}{\beta} - \frac{\cosh \beta x Z_0(s)}{\rho_0 s} \right) \left(\frac{\cosh \beta(L-x_s) Z_L(s)}{s} + \frac{\rho_0 \sinh \beta(L-x_s)}{\beta} \right)}{(Z_0(s) Z_L(s) \beta^2 - \rho_0^2 s^2) \frac{\sinh \beta L}{\beta} + (Z_0(s) - Z_L(s)) \rho_0 s \cosh \beta L} \\ &= \frac{\rho_0^2 s^2 \frac{\sinh \beta x}{\beta} \left(\frac{\cosh \beta(L-x_s) Z_L(s)}{s} + \frac{\rho_0 \sinh \beta(L-x_s)}{\beta} \right)}{-\rho_0^2 s^2 \frac{\sinh \beta L}{\beta} - Z_L(s) \rho_0 s \cosh \beta L}. \end{aligned} \quad (4.132)$$

Em seguida, calculamos $\lim_{Z_L(s) \rightarrow 0}$ do resultado acima e obtemos:

$$\lim_{Z_L(s) \rightarrow 0} \left[\lim_{Z_0(s) \rightarrow 0} \frac{P(x, s)}{Q_b(s)} \right] = -\frac{\rho_0 \sinh \beta x \sinh \beta(L-x_s)}{\beta \sinh \beta L}. \quad (4.133)$$

Na Eq.(4.130-b) calculamos o $\lim_{Z_0(s) \rightarrow 0} \frac{P(x, s)}{Q_b(s)}$, onde obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \lim_{Z_0(s) \rightarrow 0} \frac{P(x, s)}{Q_b(s)} &= \lim_{Z_0(s) \rightarrow 0} \frac{\rho_0^2 s^2 \left(\frac{\sinh \beta x_s}{\beta} - \frac{\cosh \beta x_s Z_0(s)}{\rho_0 s} \right) \left(\frac{\cosh \beta(L-x) Z_L(s)}{s} + \frac{\rho_0 \sinh \beta(L-x)}{\beta} \right)}{(Z_0(s) Z_L(s) \beta^2 - \rho_0^2 s^2) \frac{\sinh \beta L}{\beta} + (Z_0(s) - Z_L(s)) \rho_0 s \cosh \beta L} \\ &= \frac{\rho_0^2 s^2 \frac{\sinh \beta x_s}{\beta} \left(\frac{\cosh \beta(L-x) Z_L(s)}{s} + \frac{\rho_0 \sinh \beta(L-x)}{\beta} \right)}{-\rho_0^2 s^2 \frac{\sinh \beta L}{\beta} - Z_L(s) \rho_0 s \cosh \beta L}. \end{aligned} \quad (4.134)$$

Por último, no resultado anterior, calculamos $\lim_{Z_L(s) \rightarrow 0} \left[\lim_{Z_0(s) \rightarrow 0} \frac{P(x, s)}{Q_b(s)} \right]$. Logo,

$$\lim_{Z_L(s) \rightarrow 0} \left[\lim_{Z_0(s) \rightarrow 0} \frac{P(x, s)}{Q_b(s)} \right] = -\frac{\rho_0 \sinh \beta x_s \sinh \beta(L-x)}{\beta \sinh \beta L}. \quad (4.135)$$

Como podemos observar, os resultados obtidos nas Eq.(4.133) e (4.135), são as equações que caracterizam a função de transferência para a configuração de duto aberto-aberto.

Para a configuração de duto fechado-fechado, a partir da função de transferência dada pela Eq.(4.130-a) e calculando o $\lim_{Z_0(s) \rightarrow \infty} \frac{P(x, s)}{Q_b(s)}$ obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{Z_0(s) \rightarrow \infty} \frac{P(x, s)}{Q_b(s)} &= \lim_{Z_0(s) \rightarrow \infty} \frac{\rho_0^2 s^2 \left(\frac{\sinh \beta x}{\beta} - \frac{\cosh \beta x Z_0(s)}{\rho_0 s} \right) \left(\frac{\cosh \beta(L-x_s) Z_L(s)}{s} + \frac{\rho_0 \sinh \beta(L-x_s)}{\beta} \right)}{(Z_0(s) Z_L(s) \beta^2 - \rho_0^2 s^2) \frac{\sinh \beta L}{\beta} + (Z_0(s) - Z_L(s)) \rho_0 s \cosh \beta L} \\ &= \frac{-\rho_0^2 s^2 \frac{\cosh \beta x}{\rho_0 s} \left(\frac{\cosh \beta(L-x_s) Z_L(s)}{s} + \frac{\rho_0 \sinh \beta(L-x_s)}{\beta} \right)}{Z_L(s) \beta^2 \frac{\sinh \beta L}{\beta} + \rho_0 s \cosh \beta L}. \end{aligned} \quad (4.136)$$

Calculando o $\lim_{Z_L(s) \rightarrow \infty} \left[\lim_{Z_0(s) \rightarrow \infty} \frac{P(x, s)}{Q_b(s)} \right]$, no resultado anterior, temos:

$$\lim_{Z_L(s) \rightarrow \infty} \left[\lim_{Z_0(s) \rightarrow \infty} \frac{P(x, s)}{Q_b(s)} \right] = -\frac{\rho_0 \cosh \beta x \cosh \beta(L-x_s)}{\beta \sinh \beta L}. \quad (4.137)$$

Agora, considerando a função de transferência dada pela Eq.(4.130-b) e calculando o $\lim_{Z_0(s) \rightarrow \infty} \frac{P(x, s)}{Q_b(s)}$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{Z_0(s) \rightarrow \infty} \frac{P(x, s)}{Q_b(s)} &= \lim_{Z_0(s) \rightarrow \infty} \frac{\rho_0^2 s^2 \left(\frac{\sinh \beta x_s}{\beta} - \frac{\cosh \beta x_s Z_0(s)}{\rho_0 s} \right) \left(\frac{\cosh \beta(L-x) Z_L(s)}{s} + \frac{\rho_0 \sinh \beta(L-x)}{\beta} \right)}{(Z_0(s) Z_L(s) \beta^2 - \rho_0^2 s^2) \frac{\sinh \beta L}{\beta} + (Z_0(s) - Z_L(s)) \rho_0 s \cosh \beta L} \\
&= \frac{-\rho_0^2 s^2 \frac{\cosh \beta x_s}{\rho_0 s} \left(\frac{\cosh \beta(L-x) Z_L(s)}{s} + \frac{\rho_0 \sinh \beta(L-x)}{\beta} \right)}{Z_L(s) \beta^2 \frac{\sinh \beta L}{\beta} + \rho_0 s \cosh \beta L}. \tag{4.138}
\end{aligned}$$

Agora, calculando no resultado anterior, o $\lim_{Z_L(s) \rightarrow \infty} \left[\lim_{Z_0(s) \rightarrow \infty} \frac{P(x, s)}{Q_b(s)} \right]$, temos:

$$\lim_{Z_L(s) \rightarrow \infty} \left[\lim_{Z_0(s) \rightarrow \infty} \frac{P(x, s)}{Q_b(s)} \right] = -\frac{\rho_0 \cosh \beta x_s \cosh \beta(L-x)}{\beta \sinh \beta L} \tag{4.139}$$

Como podemos observar, os resultados obtidos nas Eq.(4.137) e (4.139), são as equações que caracterizam a função de transferência para a configuração de duto fechado-fechado.

Para a configuração de duto aberto-fechado, consideramos a função de transferência dada pela Eq.(4.130-a) e calculando o $\lim_{Z_0(s) \rightarrow 0} \frac{P(x, s)}{Q_b(s)}$. Porém, este limite já foi calculado anteriormente onde encontramos:

$$\lim_{Z_0(s) \rightarrow 0} \frac{P(x, s)}{Q_b(s)} = \frac{\rho_0^2 s^2 \frac{\sinh \beta x}{\beta} \left(\frac{\cosh \beta(L-x_s) Z_L(s)}{s} + \frac{\rho_0 \sinh \beta(L-x_s)}{\beta} \right)}{-\rho_0^2 s^2 \frac{\sinh \beta L}{\beta} - Z_L(s) \rho_0 s \cosh \beta L}. \tag{4.140}$$

Então, basta calcularmos agora o $\lim_{Z_L(s) \rightarrow \infty} \left[\lim_{Z_0(s) \rightarrow 0} \frac{P(x, s)}{Q_b(s)} \right]$. Dessa forma, obtemos:

$$\lim_{Z_L(s) \rightarrow \infty} \left[\lim_{Z_0(s) \rightarrow 0} \frac{P(x, s)}{Q_b(s)} \right] = -\frac{\rho_0 \sinh \beta x \cosh \beta(L-x_s)}{\beta \cosh \beta L}. \tag{4.141}$$

Considerando a função de transferência dada pela Eq.(4.130-b) e calculando o $\lim_{Z_0(s) \rightarrow 0} \frac{P(x, s)}{Q_b(s)}$ segue o resultado:

$$\lim_{Z_0(s) \rightarrow 0} \frac{P(x, s)}{Q_b(s)} = \frac{\rho_0^2 s^2 \frac{\sinh \beta x_s}{\beta} \left(\frac{\cosh \beta(L-x) Z_L(s)}{s} + \frac{\rho_0 \sinh \beta(L-x)}{\beta} \right)}{-\rho_0^2 s^2 \frac{\sinh \beta L}{\beta} - Z_L(s) \rho_0 s \cosh \beta L}. \tag{4.142}$$

Então, basta calcularmos o $\lim_{Z_L(s) \rightarrow \infty} \left[\lim_{Z_0(s) \rightarrow 0} \frac{P(x, s)}{Q_b(s)} \right]$ no resultado anterior de forma

que:

$$\lim_{Z_L(s) \rightarrow \infty} \left[\lim_{Z_0(s) \rightarrow 0} \frac{P(x, s)}{Q_b(s)} \right] = -\frac{\rho_0 \sinh \beta x_s \cosh \beta(L - x)}{\beta \cosh \beta L}. \quad (4.143)$$

Observamos que os resultados obtidos nas Eqs.(4.139) e (4.143) são as equações que caracterizam a função de transferência para a configuração de duto aberto-fechado.

Neste capítulo foram obtidos os gráficos das funções de transferência para a configuração de duto com fonte sonora na lateral. Para fins de comparação, estes gráficos serão apresentados na Fig. 4.7.

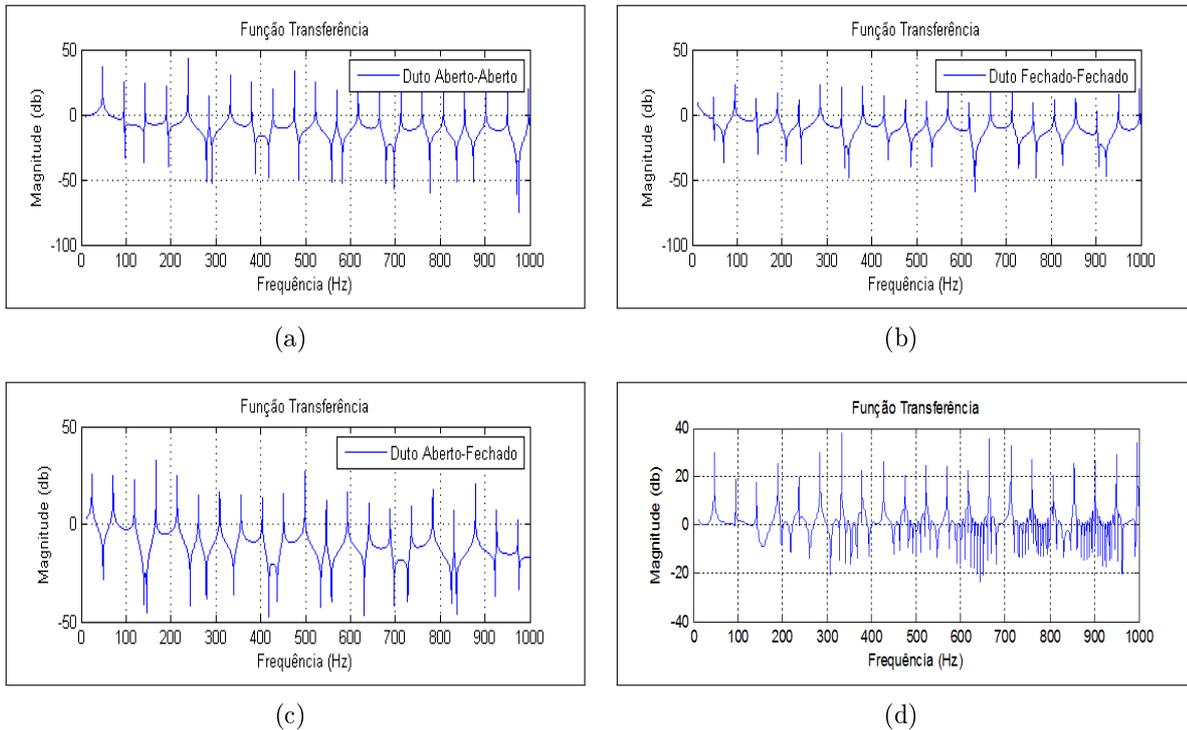


Figura 4.7: Respostas em magnitude para os casos de dutos: (a) Aberto-Aberto; (b) Fechado-Fechado; (c) Aberto-Fechado; (d) com Condições de Contorno Arbitrárias

A seguir será feito a modelagem analítica do duto com fonte sonora localizada em uma das extremidades.

4.2 DUTO ACÚSTICO COM FONTE SONORA EM UMA DAS EXTREMIDADES

A Fig.4.8, consiste em duto com um alto falante Q_a posicionado na extremidade esquerda e um microfone.

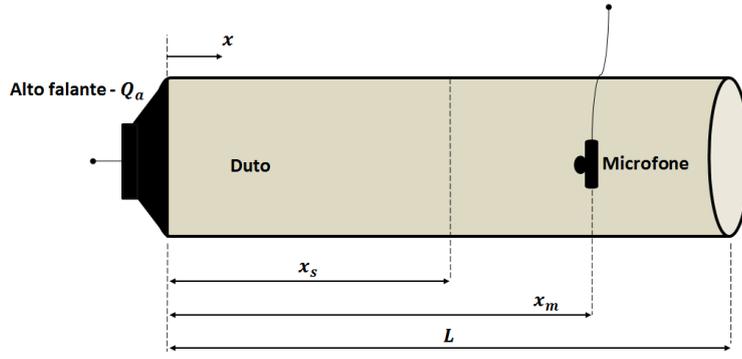


Figura 4.8: Duto acústico com fonte sonora na extremidade esquerda.

Primeiramente serão obtidas as equações que descrevem a pressão sonora no domínio da frequência, bem como as equações que representam as funções de transferência considerando as configurações do duto com extremidade direita aberta, fechada e duto com condições de contorno arbitrárias.

As funções de transferências serão simuladas adotando os mesmos parâmetros utilizados na seção anterior.

4.2.1 Caso 1: Duto Aberto

Para este caso, as condições de contorno mostradas abaixo, caracterizam a pressão nula, extremidade direita do duto aberta e o efeito de um alto falante gerador de ruído que excitará o duto na extremidade esquerda.

$$P(L, s) = 0 \quad \text{e} \quad sU(0, s) = Q_a(s). \quad (4.144)$$

Observe que: da Eq.(4.113) temos:

$$P'(x, s) = -\rho_0 sU(x, s). \quad (4.145)$$

Então,

$$P'(0, s) = -\rho_0 sU(0, s). \quad (4.146)$$

Substituindo a Eq.(4.144) na Eq.(4.146) temos:

$$P'(0, s) = -\rho_0 Q_a(s). \quad (4.147)$$

Substituindo as condições de contorno dadas pelas Eqs.(4.144) e (4.147) na Eq.(4.53),

segue:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ P'(L, s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cosh \beta L & \frac{\sinh \beta L}{\beta} \\ \beta \sinh \beta L & \cosh \beta L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0, s) \\ -\rho_0 Q_a(s) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \cosh \beta(L - x_s) & \frac{\sinh \beta(L - x_s)}{\beta} \\ \beta \sinh \beta(L - x_s)L & \cosh \beta(L - x_s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} Q_b(s)\rho_0. \end{aligned} \quad (4.148)$$

Desenvolvendo o produto acima chegamos ao resultado:

$$\begin{cases} 0 & = \cosh \beta L P(0, s) - \frac{\sinh \beta L}{\beta} \rho_0 Q_a(s) + \frac{\sinh \beta(L - x_s)}{\beta} \rho_0 Q_b(s) & \text{(a)} \\ P'(L, s) & = \beta \sinh \beta L P(0, s) - \cosh \beta L \rho_0 Q_a(s) + \cosh \beta(L - x_s) \rho_0 Q_b(s) & \text{(b)} \end{cases} \quad (4.149)$$

Segue da Eq.(4.149-a) que:

$$P(0, s) = \frac{\sinh \beta L \rho_0 Q_a(s) - \sinh \beta(L - x_s) \rho_0 Q_b(s)}{\beta \cosh \beta L}. \quad (4.150)$$

Substituindo as Eqs.(4.144) e (4.150) na Eq.(4.51-a), correspondente a $x_m < x_s$ e resolvendo apenas para $P(x_m, s)$, obtemos:

$$P(x_m, s) = \cosh \beta x_m P(0, s) + \frac{\sinh \beta x_m}{\beta} P'(0, s). \quad (4.151)$$

Substituindo as condições de contorno representadas nas Eqs.(4.147) e (4.150) na Eq.(4.151) temos:

$$P(x_m, s) = \cosh \beta x_m \frac{\sinh \beta L \rho_0 Q_a(s) - \sinh \beta(L - x_s) \rho_0 Q_b(s)}{\beta \cosh \beta L} - \frac{\sinh \beta x_m}{\beta} \rho_0 Q_a(s). \quad (4.152)$$

Reduzindo a Eq.(4.152) ao mesmo denominador e usando as propriedades de soma de ângulos das funções seno-cosseno hiperbólicas, esta pode ser escrita na forma:

$$P(x_m, s) = \rho_0 \frac{\sinh \beta(L - x_m) Q_a(s) - \cosh \beta x_m \sinh \beta(L - x_s) Q_b(s)}{\beta \cosh \beta L}. \quad (4.153)$$

Considerando a Eq.(4.51-b) para $x_m > x_s$ e desenvolvendo o produto apenas para

$P(x_m, s)$, obtemos:

$$P(x_m, s) = \cosh \beta x_m P(0, s) + \frac{\sinh \beta x_m}{\beta} P'(0, s) + \frac{\sinh \beta(x_m - x_s)}{\beta} \rho_0 Q_b(s). \quad (4.154)$$

Substituindo as Eqs.(4.144) e (4.150) na Eq.(4.154) temos:

$$P(x_m, s) = \cosh \beta x_m \frac{\sinh \beta L \rho_0 Q_a(s) - \sinh \beta(L - x_s) \rho_0 Q_b(s)}{\beta \cosh \beta L} - \frac{\sinh \beta x_m}{\beta} \rho_0 Q_a(s) + \frac{\sinh \beta(x_m - x_s)}{\beta} \rho_0 Q_b(s). \quad (4.155)$$

Reduzindo a Eq.(4.155) ao mesmo denominador e usando as propriedades de soma de ângulos das funções seno-cosseno hiperbólicas, podemos escrevê-la na forma:

$$P(x_m, s) = \rho_0 \frac{\sinh \beta(L - x_m)}{\beta \cosh \beta L} [Q_a(s) - \cosh \beta x_s Q_b(s)]. \quad (4.156)$$

Fazendo $x_m = x_s$ na Eq.(4.153) chegamos ao resultado:

$$P(x_m, s) = \rho_0 \frac{\sinh \beta(L - x_m) Q_a(s) - \cosh \beta x_m \sinh \beta(L - x_s) Q_b(s)}{\beta \cosh \beta L}. \quad (4.157)$$

Logo, a Eq.(4.158) representa a equação da pressão para o duto com extremidade direita aberta, sendo $Q_a(s)$ e $Q_b(s)$ as entradas correspondentes aos alto falantes de ruído localizado na extremidade esquerda e na lateral do duto, respectivamente.

$$P(x_m, s) = \begin{cases} \rho_0 \frac{\sinh \beta(L - x_m) Q_a(s) - \cosh \beta x_m \sinh \beta(L - x_s) Q_b(s)}{\beta \cosh \beta L} & , x_m \leq x_s \quad (a) \\ \rho_0 \frac{\sinh \beta(L - x_m)}{\beta \cosh \beta L} [Q_a(s) - \cosh \beta x_s Q_b(s)] & , x_m > x_s \quad (b) \end{cases}. \quad (4.158)$$

4.2.2 Função de Transferência: Duto Aberto

Quando $Q_b(s) = 0$ na Eq.(4.158), tanto para $x_m \leq x_s$ como para $x_m > x_s$, obtemos seguinte resultado:

$$\frac{P(x_m, s)}{Q_a(s)} = \rho_0 \frac{\sinh \beta(L - x_m)}{\beta \cosh \beta L}. \quad (4.159)$$

Substituindo $\beta = \frac{s}{c_0}$, na equação acima temos:

$$\begin{aligned} \frac{P(x_m, s)}{Q_a(s)} &= \frac{\rho_0 \sinh \frac{s}{c_0}(L - x_m)}{\frac{s}{c_0} \cosh \frac{s}{c_0} L} \\ &= \frac{\rho_0 c_0 \sinh s(L - x_m)/c_0}{s \cosh(sL/c_0)}. \end{aligned} \quad (4.160)$$

Logo, a função de transferência correspondente a esta configuração de duto é:

$$\frac{P(x_m, s)}{Q_a(s)} = \frac{\rho_0 c_0 \sinh s(L - x_m)/c_0}{s \cosh(sL/c_0)}. \quad (4.161)$$

A Fig. 4.9 representa as respostas em magnitude e fase da função de transferência para o duto aberto.

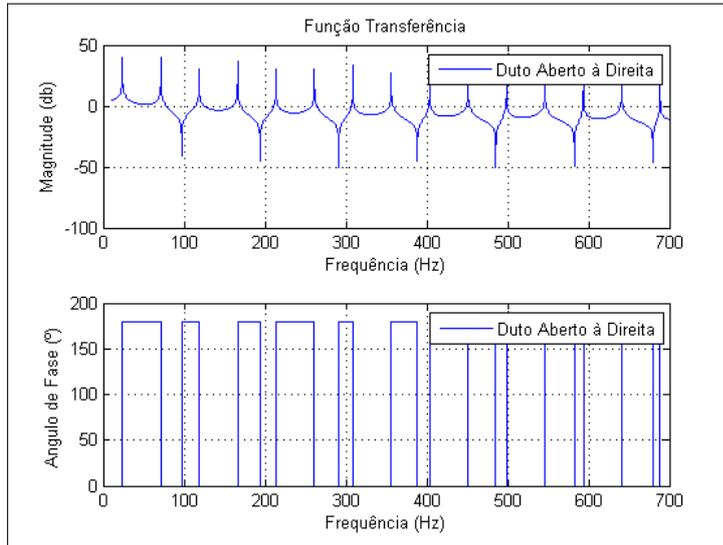


Figura 4.9: Respostas em magnitude e fase da função de transferência para o duto com extremidade aberta à direita.

4.2.3 Caso 2: Duto Fechado

As condições de contorno para a configuração de duto com extremidade fechada à direita são:

$$P'(L, s) = 0 \text{ e } sU(0, s) = Q_a(s). \quad (4.162)$$

Substituindo as condições de contorno dadas pelas Eqs.(4.147) e (4.162), na Eq.(4.53)

obtemos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P(L, s) \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cosh \beta L & \frac{\sinh \beta L}{\beta} \\ \beta \sinh \beta L & \cosh \beta L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0, s) \\ -\rho_0 Q_a(s) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \cosh \beta(L - x_s) & \frac{\sinh \beta(L - x_s)}{\beta} \\ \beta \sinh \beta(L - x_s)L & \cosh \beta(L - x_s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot Q_b(s)\rho_0. \end{aligned} \quad (4.163)$$

Desenvolvendo o produto acima, chegamos ao resultado:

$$\begin{cases} P(L, s) = \cosh \beta L \cdot P(0, s) - \frac{\sinh \beta L}{\beta} \rho_0 Q_a(s) + \frac{\sinh \beta(L - x_s)}{\beta} \rho_0 Q_b(s) & (a) \\ 0 = \beta \sinh \beta L \cdot P(0, s) - \cosh \beta L \rho_0 Q_a(s) + \cosh \beta(L - x_s) \rho_0 Q_b(s) & (b) \end{cases} \quad (4.164)$$

Da Eq.(4.164-b) determinamos:

$$P(0, s) = \frac{\cosh \beta L \rho_0 Q_a(s) - \cosh \beta(L - x_s) \rho_0 Q_b(s)}{\beta \sinh \beta L}. \quad (4.165)$$

Considerando a Eq.(4.51-a), correspondente a $x_m < x_s$ e desenvolvendo para $P(x_m, s)$ obtemos:

$$P(x_m, s) = \cosh \beta x_m P(0, s) + \frac{\sinh \beta x_m}{\beta} P'(0, s). \quad (4.166)$$

Substituindo as condições de contorno dada pelas Eqs.(4.147) e (4.165) na equação acima temos:

$$P(x_m, s) = \cosh \beta x_m \frac{\cosh \beta L \rho_0 Q_a(s) - \cosh \beta(L - x_s) \rho_0 Q_b(s)}{\beta \sinh \beta L} - \frac{\sinh \beta x_m}{\beta} \rho_0 Q_a(s). \quad (4.167)$$

Reduzindo a equação acima ao mesmo denominador e utilizando as propriedades de soma de ângulos das funções seno-cosseno hiperbólicas, segue o resultado:

$$P(x_m, s) = \rho_0 \frac{\cosh \beta(L - x_m) Q_a(s) - \cosh \beta x_m \cosh \beta(L - x_s) Q_b(s)}{\beta \sinh \beta L}. \quad (4.168)$$

Considerando a Eq.(4.51-b), correspondente a $x_m > x_s$ e desenvolvendo o produto

para $P(x_m, s)$ obtemos:

$$P(x_m, s) = \cosh \beta x_m P(0, s) + \frac{\sinh \beta x_m}{\beta} P'(0, s) + \frac{\sinh \beta(x_m - x_s)}{\beta} \rho_0 Q_b(s). \quad (4.169)$$

Substituindo as condições de contorno representadas pelas Eqs.(4.147) e (4.165) na Eq.(4.169), obtemos:

$$P(x_m, s) = \cosh \beta x_m \frac{\cosh \beta L \rho_0 Q_a(s) - \cosh \beta(L - x_s) \rho_0 Q_b(s)}{\beta \sinh \beta L} - \frac{\sinh \beta x_m}{\beta} \rho_0 Q_a(s) + \frac{\sinh \beta(x_m - x_s)}{\beta} \rho_0 Q_b(s). \quad (4.170)$$

Reduzindo a Eq.(4.170) ao mesmo denominador e utilizando as propriedades de soma de ângulos das funções seno-cosseno hiperbólicas, chegamos ao resultado:

$$P(x_m, s) = \rho_0 \frac{\cosh \beta(L - x_m)}{\beta \sinh \beta L} [Q_a(s) - \cosh \beta x_s Q_b(s)]. \quad (4.171)$$

Fazendo $x_m = x_s$ na Eq.(4.168), obtemos:

$$P(x_m, s) = \rho_0 \frac{\cosh \beta(L - x_m) Q_a(s) - \cosh \beta x_m \cosh \beta(L - x_s) Q_b(s)}{\beta \sinh \beta L}. \quad (4.172)$$

Portanto, determinamos a equação da pressão para o duto com extremidade fechada a direita, conforme a Eq.(4.173).

$$P(x_m, s) = \begin{cases} \rho_0 \frac{\cosh \beta(L - x_m) Q_a(s) - \cosh \beta x_m \cosh \beta(L - x_s) Q_b(s)}{\beta \sinh \beta L} & , x_m \leq x_s \\ \rho_0 \frac{\cosh \beta(L - x_m)}{\beta \sinh \beta L} [Q_a(s) - \cosh \beta x_s Q_b(s)] & , x_m > x_s \end{cases}. \quad (4.173)$$

4.2.4 Função de Transferência: Duto Fechado

Para o modelo descrito pela Eq.(4.173), quando $Q_b(s) = 0$ tanto para $x_m \leq x_s$ como para $x_m > x_s$, temos:

$$\frac{P(x_m, s)}{Q_a(s)} = \frac{\rho_0 \cosh \beta(L - x_m)}{\beta \sinh \beta L}. \quad (4.174)$$

Substituindo $\beta = \frac{s}{c_0}$, na equação acima, segue:

$$\begin{aligned} \frac{P(x_m, s)}{Q_a(s)} &= \frac{\rho_0 \cosh \frac{s}{c_0}(L - x_m)}{\frac{s}{c_0} \sinh \frac{s}{c_0} L} \\ &= \frac{\rho_0 c_0 \cosh s(L - x_m)/c_0}{s \sinh sL/c_0}. \end{aligned} \quad (4.175)$$

Assim, a função de transferência correspondente a esta configuração de duto é:

$$\frac{P(x_m, s)}{Q_a(s)} = \frac{\rho_0 c_0 \cosh s(L - x_m)/c_0}{s \sinh sL/c_0}. \quad (4.176)$$

A Fig.4.10 representa as respostas em magnitude e fase da função de transferência para esta configuração de duto.

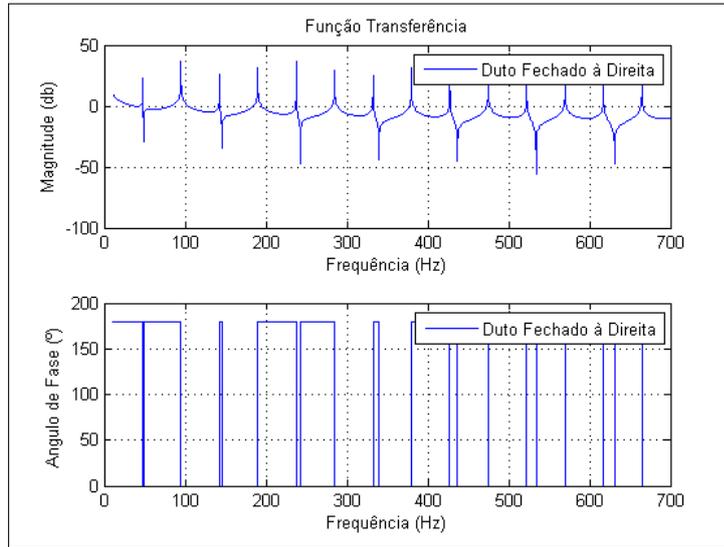


Figura 4.10: Respostas em magnitude e fase da função de transferência para o duto com extremidade fechada à direita.

4.2.5 Caso 3: Duto com Condições de Contorno Arbitrárias

As condições de contorno arbitrárias dadas como impedância são:

$$P(L, s) = -Z_L(s) \frac{P'(L, s)}{\rho_0 s} \quad \text{e} \quad sU(0, s) = Q_a(s), \quad (4.177)$$

onde, $P'(0, s) = -\rho_0 Q_a(s)$, visto anteriormente na Eq.(4.147).

Substituindo as condições de contorno dadas pelas Eqs.(4.147) e (4.177) na Eq.(4.53)

temos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{-Z_L(s)P'(L,s)}{\rho_0 s} \\ P'(L,s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cosh \beta L & \frac{\sinh \beta L}{\beta} \\ \beta \sinh \beta L & \cosh \beta L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0,s) \\ -\rho_0 Q_a(s) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \cosh \beta(L-x_s) & \frac{\sinh \beta(L-x_s)}{\beta} \\ \beta \sinh \beta(L-x_s) & \cosh \beta(L-x_s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \rho_0 Q_b(s). \end{aligned} \quad (4.178)$$

Desenvolvendo o produto na equação acima, obtemos:

$$\begin{cases} \frac{-Z_L(s)P'(L,s)}{\rho_0 s} = \cosh \beta L P(0,s) - \frac{\sinh \beta L}{\beta} \rho_0 Q_a(s) + \frac{\sinh \beta(L-x_s)}{\beta} \rho_0 Q_b(s) & \text{(a)} \\ P'(L,s) = \beta \sinh \beta L P(0,s) - \cosh \beta L \rho_0 Q_a(s) + \cosh \beta(L-x_s) \rho_0 Q_b(s) & \text{(b)} \end{cases} \quad (4.179)$$

Substituindo a Eq.(4.179-b) na Eq.(4.179-a) chegamos ao seguinte resultado:

$$P(0,s) = \frac{\left(\frac{\cosh \beta L Z_L(s)}{\rho_0 s} + \frac{\sinh \beta L}{\beta} \right) \rho_0 Q_a(s) - \left(\frac{\cosh \beta(L-x_s) Z_L(s)}{\rho_0 s} + \frac{\sinh \beta(L-x_s)}{\beta} \right) \rho_0 Q_b(s)}{\frac{Z_L(s) \beta \sinh \beta L}{\rho_0 s} + \cosh \beta L}. \quad (4.180)$$

Considerando a equação Eq.(4.51-a), correspondente a $x < x_s$ e desenvolvendo o produto para $P(x_m, s)$, obtemos:

$$P(x_m, s) = \cosh \beta x_m P(0, s) + \frac{\sinh \beta x_m}{\beta} P'(0, s). \quad (4.181)$$

Substituindo as condições de contorno dadas pelas Eqs.(4.147) e (4.180) na Eq.(4.181) temos:

$$\begin{aligned} P(x_m, s) &= \frac{\left(Z_L(s) \cosh \beta(L-x_m) + \frac{\rho_0 s \sinh \beta(L-x_m)}{\beta} \right) Q_a(s)}{\frac{Z_L(s) \beta \sinh \beta L}{\rho_0} + s \cosh \beta L} \\ &- \frac{\cosh \beta x_m \left(Z_L(s) \cosh \beta(L-x_s) + \frac{\rho_0 s \sinh \beta(L-x_s)}{\beta} \right) Q_b(s)}{\frac{Z_L(s) \beta \sinh \beta L}{\rho_0} + s \cosh \beta L}. \end{aligned} \quad (4.182)$$

Utilizando a Eq.(4.51-b), correspondente a $x_m > x_s$ e desenvolvendo o produto para

$P(x_m, s)$, temos:

$$P(x_m, s) = \cosh \beta x_m P(0, s) + \frac{\sinh \beta x_m}{\beta} P'(0, s) + \frac{\sinh \beta(x_m - x_s)}{\beta} \rho_0 Q_b(s). \quad (4.183)$$

Substituindo as condições de contorno representadas nas Eqs.(4.147) e (4.180) na Eq.(4.183) obtemos:

$$P(x_m, s) = \frac{\left(Z_L(s) \cosh \beta(L - x_m) + \frac{\rho_0 s \sinh \beta(L - x_m)}{\beta} \right) (Q_a(s) - \cosh \beta x_s Q_b(s))}{\frac{\beta Z_L(s) \sinh \beta L}{\rho_0} + s \cosh \beta L}. \quad (4.184)$$

Fazendo $x_m = x_s$ na Eq.(4.182) encontramos:

$$P(x_m, s) = \frac{\left(Z_L(s) \cosh \beta(L - x_m) + \frac{\rho_0 s \sinh \beta(L - x_m)}{\beta} \right) Q_a(s)}{\frac{Z_L(s) \beta \sinh \beta L}{\rho_0} + s \cosh \beta L} - \frac{\cosh \beta x_m \left(Z_L(s) \cosh \beta(L - x_s) + \frac{\rho_0 s \sinh \beta(L - x_s)}{\beta} \right) Q_b(s)}{\frac{Z_L(s) \beta \sinh \beta L}{\rho_0} + s \cosh \beta L}. \quad (4.185)$$

Dessa forma, obtemos a equação da pressão, conforme a Eq.(4.186) para o duto com condições de contorno arbitrárias, em que $Q_a(s) = sU(0, s)$ e $Q_b(s) = sV_{x_s}(s)$ representam, respectivamente, os alto falantes localizado na extremidade esquerda e na lateral do duto.

$$P(x_m, s) = \begin{cases} \frac{\left(Z_L(s) \cosh \beta(L - x_m) + \frac{\rho_0 s \sinh \beta(L - x_m)}{\beta} \right) Q_a(s)}{\frac{Z_L(s) \beta \sinh \beta L}{\rho_0} + s \cosh \beta L} - \frac{\cosh \beta x_s \left(Z_L(s) \cosh \beta(L - x_s) + \frac{\rho_0 s \sinh \beta(L - x_s)}{\beta} \right) Q_b(s)}{\frac{Z_L(s) \beta \sinh \beta L}{\rho_0} + s \cosh \beta L}, & x_m \leq x_s \quad (a) \\ \frac{\left(Z_L(s) \cosh \beta(L - x_m) + \frac{\rho_0 s \sinh \beta(L - x_m)}{\beta} \right) (Q_a(s) - \cosh \beta x_s Q_b(s))}{\frac{\beta Z_L(s) \sinh \beta L}{\rho_0} + s \cosh \beta L}, & x_m > x_s \quad (b) \end{cases} \quad (4.186)$$

Note que: as Eqs.(4.158) e (4.173) que caracterizam as equações da pressão para as configurações de duto aberto e duto fechado, podem ser obtidas a partir da Eq.(4.186).

Vejamos isto da seguinte forma: tomando $\lim_{Z_L(s) \rightarrow \infty} P(x_m, s)$ na Eq.(4.186-a) obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{Z_L(s) \rightarrow \infty} P(x_m, s) &= \lim_{Z_L(s) \rightarrow \infty} \left[\frac{\left(\frac{Z_L(s) \cosh \beta(L-x_m) + \frac{\rho_0 s \sinh \beta(L-x_m)}{\beta}}{\frac{Z_L(s) \beta \sinh \beta L}{\rho_0} + s \cosh \beta L} \right) Q_a(s)}{\cosh \beta x_m \left(\frac{Z_L(s) \cosh \beta(L-x_s) + \frac{\rho_0 s \sinh \beta(L-x_s)}{\beta}}{\frac{Z_L(s) \beta \sinh \beta L}{\rho_0} + s \cosh \beta L} \right) Q_b(s)} \right] \\ &= \rho_0 \frac{\cosh \beta(L-x_m) Q_a(s) - \cosh \beta x_m \cosh \beta(L-x_s) Q_b(s)}{\beta \sinh \beta L}. \end{aligned} \quad (4.187)$$

Agora, aplicando o $\lim_{Z_L(s) \rightarrow \infty} P(x_m, s)$ na Eq.(4.186-b) temos:

$$\lim_{Z_L(s) \rightarrow \infty} P(x_m, s) = \rho_0 \frac{\cosh \beta(L-x_m)}{\beta \sinh \beta L} [Q_a(s) - Q_b(s) \cosh \beta x_m]. \quad (4.188)$$

Isto mostra que as Eqs.(4.187) e (4.188) são as equações que representam a Eq.(4.173) da pressão para a configuração de duto fechado.

Agora, tomando $\lim_{Z_L(s) \rightarrow 0} P(x_m, s)$ na Eq.(4.186-a) segue o resultado:

$$\lim_{Z_L(s) \rightarrow 0} P(x_m, s) = \rho_0 \frac{\sinh \beta(L-x_m) Q_a(s) - \sinh \beta(L-x_s) \cosh \beta x_m Q_b(s)}{\beta \cosh \beta L}. \quad (4.189)$$

Aplicando o $\lim_{Z_L(s) \rightarrow 0} P(x_m, s)$ na Eq.(4.186-b) temos:

$$\lim_{Z_L(s) \rightarrow 0} P(x_m, s) = \rho_0 \frac{\sinh \beta(L-x_m)}{\beta \cosh \beta L} [Q_a(s) - Q_b(s) \cosh \beta x_m]. \quad (4.190)$$

Logo, podemos ver que as Eqs.(4.189) e (4.190), são as equações que caracterizam a Eq.(4.158) da pressão para a configuração de duto aberto.

4.2.6 Função de Transferência: Duto com Condições de Contorno Arbitrárias

Podemos obter a função de transferência com condições de contorno arbitrárias a partir da Eq.(4.186) fazendo $Q_b(s) = 0$. Dessa forma, tanto para $x_m \leq x_s$ e $x_m > x_s$, obtemos:

$$P(x_m, s) = \frac{\left(Z_L(s) \cosh \beta(L-x_m) + \frac{\rho_0 s \sinh \beta(L-x_m)}{\beta} \right) Q_a(s)}{\frac{Z_L(s) \beta \sinh \beta L}{\rho_0} + s \cosh \beta L}. \quad (4.191)$$

Dividindo a equação acima por $Q_a(s)$, chegamos a seguinte função de transferência:

$$\frac{P(x_m, s)}{Q_a(s)} = \frac{Z_L(s) \cosh \beta(L - x_m) + \frac{\rho_0 s \sinh \beta(L - x_m)}{\beta}}{\frac{Z_L(s) \beta \sinh \beta L}{\rho_0} + s \cosh \beta L}. \quad (4.192)$$

A Fig.4.11 representa as respostas em magnitude e fase da função de transferência para o duto com condições de contorno arbitrárias. O cálculo para obter a impedância acústica para esta configuração de duto é análogo ao cálculo feito para obter a impedância acústica para a configuração de duto dada pela função de transferência representada pela Eq.(4.130).

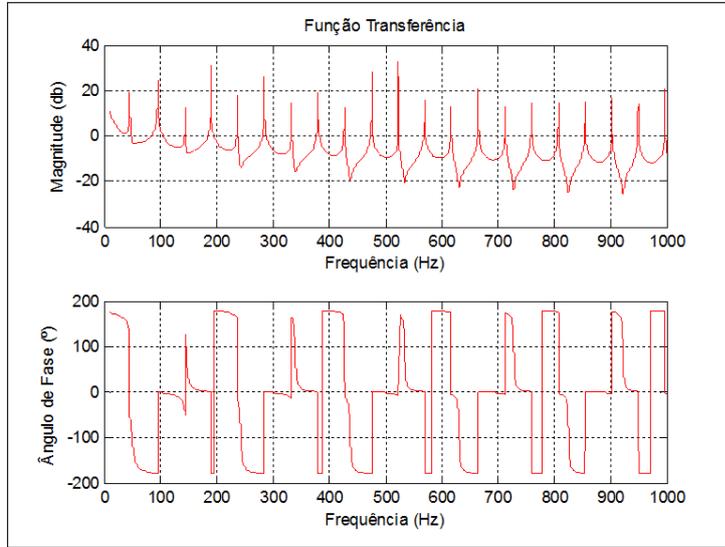


Figura 4.11: Respostas em magnitude e fase da função de transferência para o duto com condições de contorno arbitrárias.

A seguir, apresenta-se uma comparação entre os valores das frequências de ressonância encontrados analiticamente a partir da função de transferência obtida neste trabalho e, experimentalmente apresentados pelos autores Pota e Kelkar [12] em seu artigo observando os polos e zeros.

Para obter uma resposta em frequência entre o alto falante posicionado numa extremidade e o microfone, os autores realizaram um experimento com a outra extremidade aberta e o alto falante no meio do duto desligado.

Os polos e zeros experimentais foram determinados diretamente a partir da resposta em frequência gravada. Já os polos e zeros analíticos foram determinados conforme será mostrado a seguir, a partir da função de transferência dada pela Eq.(4.193), correspondente a configuração de duto com alto falante localizado na extremidade esquerda com extremidade direita aberta.

Assim, para determinar os polos e zeros analíticos, consideremos a Eq.(4.193), a

saber:

$$\frac{P(x_m, s)}{Q_a(s)} = \frac{\rho_0 c_0 \sinh s(L - x_m)/c_0}{s \cosh(sL/c_0)}. \quad (4.193)$$

Como os zeros são dados pelas raízes do numerador da Eq.(4.193), queremos determinar s , onde $s = a + bj$ tal que:

$$\rho_0 c_0 \sinh s(L - x_m)/c_0 = 0. \quad (4.194)$$

Sabendo que $\rho_0 c_0 \neq 0$, queremos determinar s tal que:

$$\sinh s(L - x_m)/c_0 = 0. \quad (4.195)$$

Das propriedades das funções hiperbólicas temos que $\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$. Então,

$$\begin{aligned} \sinh(s(L - x_m)/c_0) &= \frac{e^{s(L-x_m)/c_0} - e^{-s(L-x_m)/c_0}}{2} \\ &= \frac{1}{2} [e^{s(L-x_m)/c_0} - e^{-s(L-x_m)/c_0}]. \end{aligned} \quad (4.196)$$

Substituindo $s = a + bj$ na Eq.(4.196) segue que:

$$\begin{aligned} e^{s(L-x_m)/c_0} &= e^{(a+bj)[(L-x_m)/c_0]} \\ &= e^{a[(L-x_m)/c_0] + bj[(L-x_m)/c_0]} \\ &= e^{a[(L-x_m)/c_0]} \cdot e^{bj[(L-x_m)/c_0]} \\ &= e^{a[(L-x_m)/c_0]} [\cos(b(L - x_m)/c_0) + j \operatorname{sen}(b(L - x_m)/c_0)] \end{aligned} \quad (4.197)$$

e

$$\begin{aligned} e^{-s(L-x_m)/c_0} &= e^{-(a+bj)[(L-x_m)/c_0]} \\ &= e^{-a[(L-x_m)/c_0] - bj[(L-x_m)/c_0]} \\ &= e^{-a[(L-x_m)/c_0]} \cdot e^{-bj[(L-x_m)/c_0]} \\ &= e^{-a[(L-x_m)/c_0]} \cdot [\cos(b(L - x_m)/c_0) - j \operatorname{sen}(b(L - x_m)/c_0)] \end{aligned} \quad (4.198)$$

onde, a última igualdade das Eqs.(4.197) e (4.198) foram obtidas aplicando a Relação de

Euler:

$$e^{\theta j} = \cos \theta + j \operatorname{sen} \theta. \quad (4.199)$$

Então, substituindo as Eqs.(4.197) e (4.198) na Eq.(4.196) segue:

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} \left[\frac{s(L-x_m)}{c_0} \right] &= \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} e^{\left[\frac{a(L-x_m)}{c_0} \right]} \cdot \left(\cos \left[\frac{b(L-x_m)}{c_0} \right] + j \operatorname{sen} \left[\frac{b(L-x_m)}{c_0} \right] \right) \\ - e^{\left[-\frac{a(L-x_m)}{c_0} \right]} \cdot \left(\cos \left[\frac{b(L-x_m)}{c_0} \right] - j \operatorname{sen} \left[\frac{b(L-x_m)}{c_0} \right] \right) \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} \left(e^{\left[\frac{a(L-x_m)}{c_0} \right]} - e^{\left[-\frac{a(L-x_m)}{c_0} \right]} \right) \cdot \cos \left[\frac{b(L-x_m)}{c_0} \right] \\ + \left(e^{\left[\frac{a(L-x_m)}{c_0} \right]} + e^{\left[-\frac{a(L-x_m)}{c_0} \right]} \right) \cdot j \operatorname{sen} \left[\frac{b(L-x_m)}{c_0} \right] \end{array} \right] \\ &= \operatorname{senh} \left[\frac{a(L-x_m)}{c_0} \right] \cos \left[\frac{b(L-x_m)}{c_0} \right] \\ &\quad + j \operatorname{cosh} \left[\frac{a(L-x_m)}{c_0} \right] \operatorname{sen} \left[\frac{b(L-x_m)}{c_0} \right]. \quad (4.200) \end{aligned}$$

Temos que $\operatorname{senh} \left[\frac{s(L-x_m)}{c_0} \right]$ é um número complexo. Então, $\operatorname{senh} \left[\frac{s(L-x_m)}{c_0} \right]$ é zero se, e somente se, as partes real e imaginária forem nulas. Ou seja, se e somente se:

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} \left[\frac{a(L-x_m)}{c_0} \right] \cos \left[\frac{b(L-x_m)}{c_0} \right] &= 0 \\ \operatorname{cosh} \left[\frac{a(L-x_m)}{c_0} \right] \operatorname{sen} \left[\frac{b(L-x_m)}{c_0} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (4.201)$$

Da Eq.(4.201) temos que:

$$\operatorname{cosh} \left[\frac{a(L-x_m)}{c_0} \right] > 0, \text{ sempre, pois } \left[\frac{a(L-x_m)}{c_0} \right] \in \mathbb{R}.$$

Agora,

$$\sinh \left[\frac{a(L - x_m)}{c_0} \right] = 0, \text{ se, somente se, } a = 0, \text{ pois } \frac{L - x_m}{c_0} \neq 0.$$

Então, Eq.(4.200) é zero se, e somente se,

$$a = 0 \text{ e } \operatorname{sen} \left[\frac{b(L - x_m)}{c_0} \right] = 0$$

se, e somente se,

$$a = 0 \text{ e } \frac{b(L - x_m)}{c_0} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

se, e somente se,

$$a = 0, \text{ e } b = \frac{c_0 k \pi}{L - x_m}, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ e } L - x_m \neq 0.$$

Veja que: se $a \neq 0$, então $\sinh \left[\frac{a(L-x_m)}{c_0} \right] \neq 0$. Como $\cosh \left[\frac{a(L-x_m)}{c_0} \right] > 0$ sempre, devemos ter:

$$\cos \left[\frac{b(L - x_m)}{c_0} \right] = 0 \text{ e } \operatorname{sen} \left[\frac{b(L - x_m)}{c_0} \right] = 0 \quad (4.202)$$

mas isto é impossível. Então, sendo $s = a + bj$, as raízes da Eq.(4.194) são da forma:

$$s = \frac{c_0 k \pi}{L - x_m} j, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.203)$$

Portanto, os zeros da função de transferência dada pela Eq.(4.193) são da forma:

$$s_k = \frac{c_0 k \pi}{L - x_m} j \text{ rad/seg}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.204)$$

Ou ainda:

$$s_k = \pm \frac{c_0 k \pi}{L - x_m} j \text{ rad/seg}, \quad k \in \mathbb{Z}_+^*. \quad (4.205)$$

Agora, os polos da Eq.(4.193) são dados pelas raízes do denominador. Então, queremos determinar s onde $s = a + bj$ tal que:

$$s \cosh \left(\frac{sL}{c_0} \right) = 0. \quad (4.206)$$

Temos que:

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \quad (4.207)$$

Então,

$$\begin{aligned} \cosh(sL/c_0) &= \frac{e^{sL/c_0} + e^{-sL/c_0}}{2} \\ &= \frac{1}{2} [e^{sL/c_0} + e^{-sL/c_0}]. \end{aligned} \quad (4.208)$$

Da Eq.(4.208) e aplicando a relação de Euler obtemos:

$$\begin{aligned} e^{sL/c_0} &= e^{(a+bj)L/c_0} \\ &= e^{aL/c_0 + bjL/c_0} \\ &= e^{aL/c_0} \cdot e^{bjL/c_0} \\ &= e^{aL/c_0} \cdot [\cos(bL/c_0) + j \operatorname{sen}(bL/c_0)]. \end{aligned} \quad (4.209)$$

$$\begin{aligned} e^{-sL/c_0} &= e^{-(a+bj)L/c_0} \\ &= e^{-aL/c_0 - bjL/c_0} \\ &= e^{-aL/c_0} \cdot e^{-bjL/c_0} \\ &= e^{-aL/c_0} \cdot [\cos(bL/c_0) - j \operatorname{sen}(bL/c_0)]. \end{aligned} \quad (4.210)$$

Substituindo Eqs.(4.209) e (4.210) na Eqs.(4.208), obtemos:

$$\begin{aligned} \cosh[sL/c_0] &= \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} e^{aL/c_0} \cdot (\cos(bL/c_0) + j \operatorname{sen}(bL/c_0)) \\ + e^{-aL/c_0} \cdot (\cos(bL/c_0) - j \operatorname{sen}(bL/c_0)) \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} (e^{aL/c_0} + e^{-aL/c_0}) \cdot \cos(bL/c_0) \\ + (e^{aL/c_0} - e^{-aL/c_0}) \cdot j \operatorname{sen}(bL/c_0) \end{array} \right] \\ &= \cosh\left(\frac{aL}{c_0}\right) \cos\left(\frac{bL}{c_0}\right) + j \operatorname{senh}\left(\frac{aL}{c_0}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{bL}{c_0}\right). \end{aligned} \quad (4.211)$$

Então,

$$s \cosh\left(\frac{sL}{c_0}\right) = s \left[\cosh\left(\frac{aL}{c_0}\right) \cos\left(\frac{bL}{c_0}\right) + j \sinh\left(\frac{aL}{c_0}\right) \sen\left(\frac{bL}{c_0}\right) \right]. \quad (4.212)$$

Assim, $s \cosh\left(\frac{sL}{c_0}\right) = 0$ se, e somente se $s = 0$ ou $\cosh\left(\frac{sL}{c_0}\right) = 0$. Como $\cosh\left(\frac{sL}{c_0}\right)$ é um número complexo, segue que $\cosh\left(\frac{sL}{c_0}\right) = 0$ se, e somente se, as partes real e imaginária forem nulas. Isto é, se, e somente se

$$\cosh\left(\frac{aL}{c_0}\right) \cos\left(\frac{bL}{c_0}\right) = 0, \quad (4.213)$$

$$\sinh\left(\frac{aL}{c_0}\right) \sen\left(\frac{bL}{c_0}\right) = 0.$$

Como $\cosh\left(\frac{aL}{c_0}\right) > 0$ sempre. Então, Eq.(4.213) é igual a zero se, e somente se,

$$a = 0 \text{ e } \cos\left(\frac{bL}{c_0}\right) = 0,$$

se, e somente se,

$$\frac{bL}{c_0} = (2k - 1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

se, e somente se,

$$a = 0 \text{ e } b = (2k - 1)\frac{\pi c_0}{2L}, \quad k \in \mathbb{Z}, L \neq 0.$$

Observe que se $a \neq 0$, então $\sinh\left(\frac{aL}{c_0}\right) \neq 0$. Como $\cosh\left(\frac{aL}{c_0}\right) > 0$, devemos ter:

$$\cos\left(\frac{bL}{c_0}\right) = 0 \text{ e } \sen\left(\frac{bL}{c_0}\right) = 0, \quad (4.214)$$

o que não acontece.

Segue que, as raízes da Eq.(4.206) são da forma:

$$s = 0 \text{ ou } s = (2k - 1)\frac{\pi c_0}{2L}j, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, os polos da função de transferência dada pela Eq.(4.200) são da forma:

$$s_k = (2k - 1)\frac{\pi c_0}{2L}j \text{ rad/seg}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.215)$$

Ou ainda:

$$s_k = \pm(2k - 1) \frac{\pi c_0}{2L} j \text{ rad/seg}, \quad k \in \mathbb{Z}_+^* \quad (4.216)$$

A tabela (4.1) apresenta os resultados das frequências de ressonância observada experimentalmente pelos autores [12] e as frequências obtidas analiticamente neste trabalho com as Eqs.(4.205) e (4.216), para a configuração de duto com extremidade aberta à direita.

Os parâmetros considerados para os cálculos analíticos são os mesmos apresentados na seção 4.1.

Tabela 4.1: Comparação das frequências analítica e experimental para o duto com extremidade aberta.

Mode No.	Polos (Hz)		Zeros (Hz)	
	Analítico	*Experimental	Analítico	*Experimental
1	$\pm 24,09j$		$\pm 99,07j$	$\pm 96,77j$
2	$\pm 72,2j$	$\pm 82,94j$	$\pm 198,1j$	$\pm 191,2j$
3	$\pm 120,4j$	$\pm 131,3j$	$\pm 287,2j$	$\pm 283,4j$
4	$\pm 168,6j$	$\pm 172,8j$	$\pm 396,2j$	$\pm 377,8j$
5	$\pm 216,8j$	$\pm 221,2j$	$\pm 495,3j$	$\pm 476,9j$
6	$\pm 265,0j$	$\pm 264,9j$	$\pm 594,4j$	$\pm 571,4j$
7	$\pm 313,1j$	$\pm 315,6j$	$\pm 693,5j$	$\pm 668,2j$
8	$\pm 361,3j$	$\pm 359,2j$	$\pm 792,5j$	$\pm 767,2j$
9	$\pm 409,5j$	$\pm 407,8j$	$\pm 891,6j$	$\pm 857,1j$
10	$\pm 457,7j$	$\pm 453,9j$	$\pm 990,7j$	$\pm 951,6j$
11	$\pm 505,9j$	$\pm 502,3j$	$\pm 1089,8j$	
12	$\pm 554,1j$	$\pm 546,0j$	$\pm 1188,8j$	
13	$\pm 602,3j$	$\pm 599,0j$	$\pm 1287,9j$	
14	$\pm 650,4j$	$\pm 638,2j$	$\pm 1387,0j$	
15	$\pm 698,6j$	$\pm 695,8j$	$\pm 1486,1j$	
16	$\pm 746,8j$	$\pm 739,6j$	$\pm 1585,1j$	
17	$\pm 795,0j$	$\pm 788,0j$	$\pm 1684,2j$	
18	$\pm 843,2j$	$\pm 834,1j$	$\pm 1783,3j$	
19	$\pm 891,4j$	$\pm 884,7j$	$\pm 1882,4j$	
20	$\pm 939,5j$	$\pm 923,9j$	$\pm 1981,4j$	

*Resultados obtidos pelos autores [12]

4.2.7 Caso 4: Sistema Alto-falante + Duto + Microfone

Uma vez estabelecido o modelo matemático para o duto, pode-se obter a função de transferência total para a configuração de duto com extremidade aberta e fechada à direita. Esta corresponde a função de transferência do alto falante juntamente com as funções de transferência do duto e do microfone, conforme ilustrado na Fig.4.12.

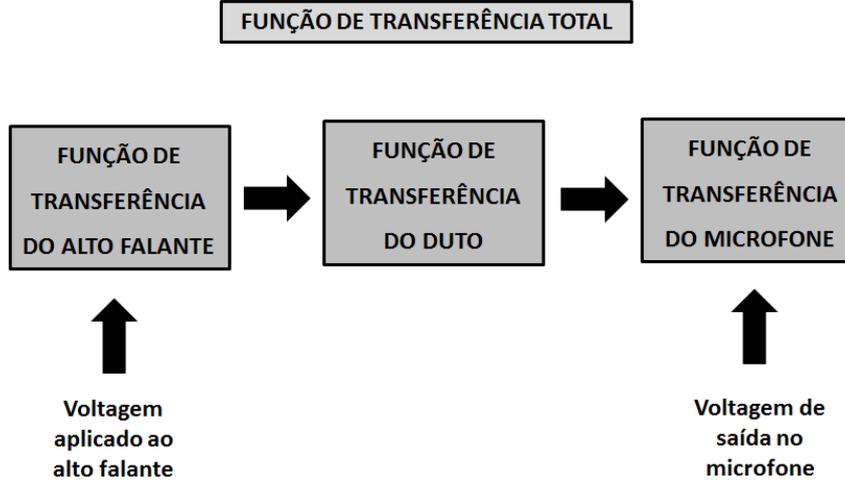


Figura 4.12: Função de Transferência Total.

O modelo do alto falante considerado é a combinação de um cone do alto falante de 8 polegadas e um amplificador MPA-(100W), que são modelados pela seguinte função de transferência [12]:

$$\frac{sU(x_s, s)}{V_{x_s}(s)} = \frac{k_{x_s} s^2}{s^2 + 2\zeta_{x_s} \omega_{x_s} s + \omega_{x_s}^2}, \quad (4.217)$$

onde $u(x_s, t)$ é a velocidade da partícula na localização no ponto x_s , $v_{x_s}(t)$ a tensão aplicada ao alto falante e k_{x_s} , ω_{x_s} , ζ_{x_s} são os parâmetros de identificação do alto falante.

Os microfones são normalmente considerados como elementos lineares nas frequências de interesse. Neste trabalho, o microfone utilizado tem uma sensibilidade de -65 dB ($0 \text{ dB} = 1\text{V}/\mu\text{bar} = 10\text{V}/(\text{N}/\text{m}^2)$) entre 70 Hz - 161 Hz. Adota-se para o modelo do microfone um ganho de $0,0056\text{V}/(\text{N}/\text{m}^2)$ em que este ganho representa a função de transferência do microfone [12].

Dessa forma, a função de transferência total FT_{total} é dada por:

$$FT_{total} = \frac{sU(x_s, s)}{V_{x_s}} \cdot \frac{P(x_m, s)}{Q_a(s)} \cdot 0,0056. \quad (4.218)$$

Substituindo a Eq.(4.191) na equação acima:

$$FT_{\text{total}} = \frac{k_{x_s} s^2}{s^2 + 2\zeta_{x_s} \omega_{x_s} s + \omega_{x_s}^2} \cdot \frac{P(x_m, s)}{Q_a(s)} \cdot 0,0056. \quad (4.219)$$

Considerando os valores dos parâmetros de identificação do alto falante:

$$k_{x_s} = 0,15, \quad \omega_{x_s} = 2\pi 40r/s, \quad \zeta_{x_s} = 0,25 \quad (4.220)$$

e, substituindo na equação Eq.(4.217), escrevemos a função de transferência total na forma:

$$FT_{\text{total}} = \frac{8,4 \times 10^{-4} s^2}{s^2 + 40\pi s + 6400\pi^2} \cdot \frac{P(x_m, s)}{Q_a(s)}. \quad (4.221)$$

A seguir, serão apresentadas as funções de transferência total para as configurações de duto com extremidade direita aberta e fechada. Além disso, as funções de transferência dos dois modelos de dutos foram simuladas em Matlab e os gráficos das respostas em magnitude e fase apresentados.

4.2.7.1 Duto Aberto

Para a configuração de duto aberto dada pela Eq.(4.193), a função de transferência total tem a forma:

$$FT_{\text{total}} = \frac{8,4 \times 10^{-4} s^2}{s^2 + 40\pi s + 6400\pi^2} \cdot \frac{\rho_0 c_0 \sinh s(L - x_m)/c_0}{s \cosh(sL/c_0)} \cdot \cdot \quad (4.222)$$

A implementação da Eq.(4.222) é ilustrada na Fig.4.13. Esta representa as respostas em magnitude e fase para o duto com extremidade aberta à direita.

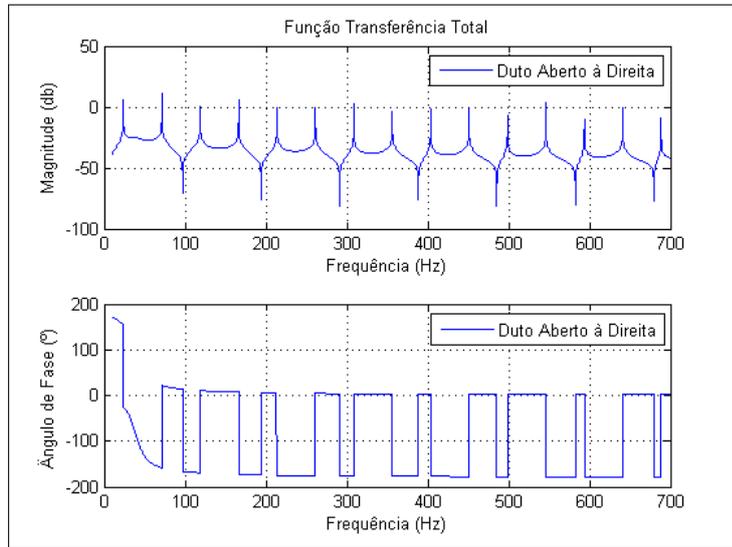


Figura 4.13: Respostas em magnitude e fase da função de transferência total para o duto com extremidade aberta à direita.

4.2.7.2 Duto Fechado

Para a configuração de duto fechado, dada pela Eq.(4.176), a função de transferência total tem a forma:

$$FT_{\text{total}} = \frac{8,4 \times 10^{-4} s^2}{s^2 + 40\pi s + 6400\pi^2} \cdot \frac{\rho_0 c_0 \cosh s(L - x_m)/c_0}{s \sinh sL/c_0}. \quad (4.223)$$

A implementação da Eq.(4.223) é ilustrada na Fig.4.14, representando as respostas em magnitude e fase para o duto com extremidade fechada à direita.

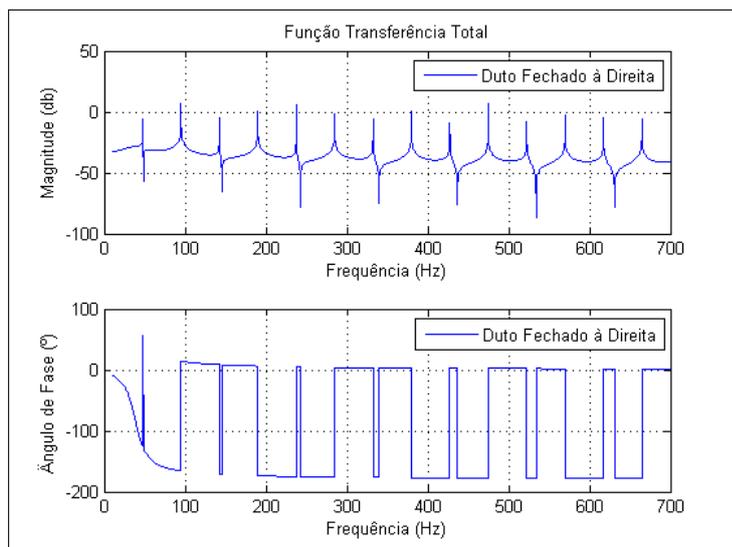


Figura 4.14: Respostas em magnitude e fase da função de transferência total para o duto com extremidade fechada.

Neste capítulo foram obtidas os gráficos das funções de transferência para a configuração de duto com fonte sonora na extremidade esquerda. Para fins de comparação, estes gráficos, em magnitude x frequência, estão apresentados na Fig. 4.15.

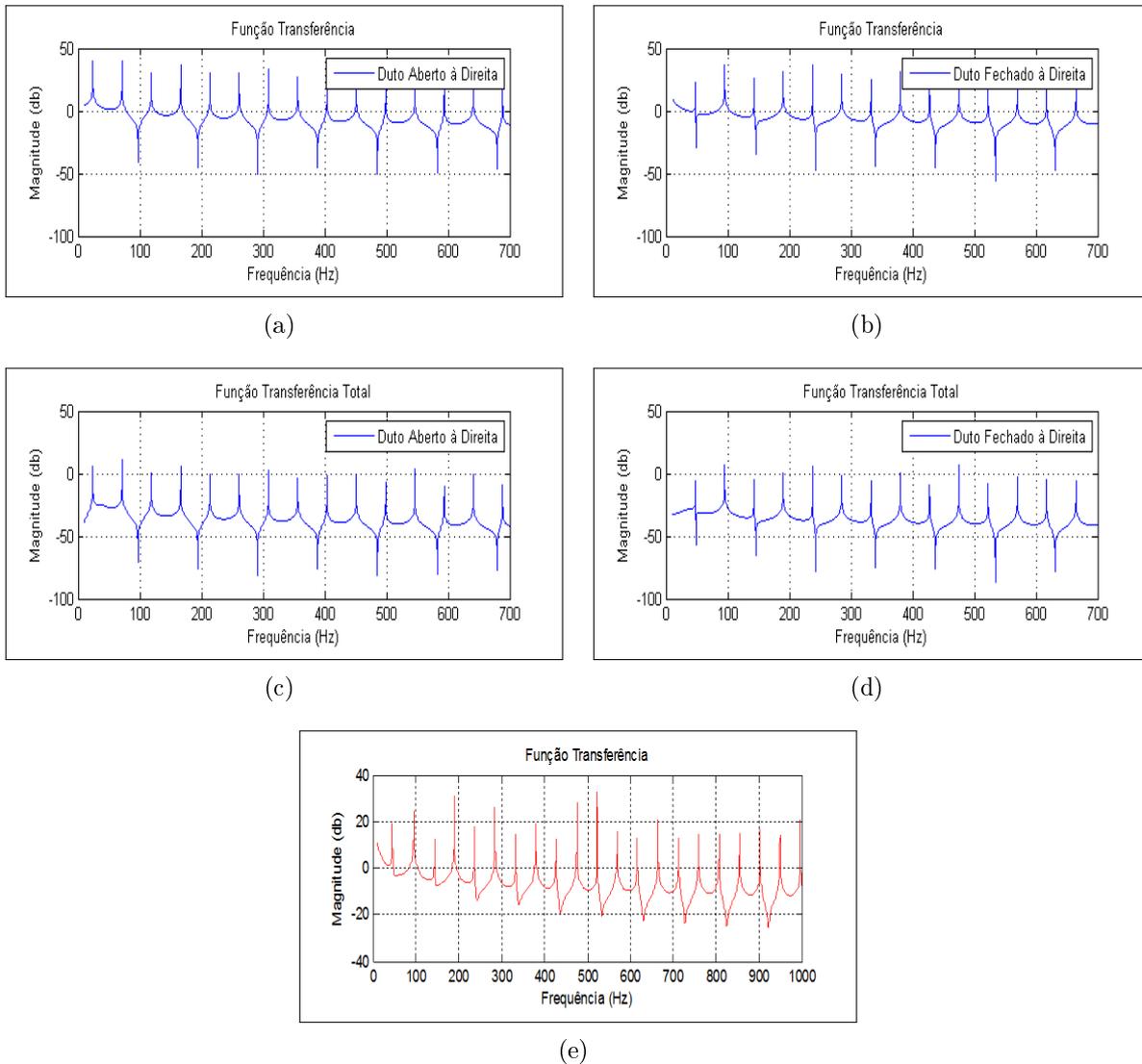


Figura 4.15: Respostas em magnitude x frequência para os casos: (a) Aberto à Direita; (b) Fechado à Direita; (c) Aberto à Direita; (d) Fechado à Direita; (e) com Condições de Contorno Arbitrárias

A Tab. 4.2 apresenta todas as funções de transferência obtidas neste capítulo para as configurações de duto com fonte sonora localizada na lateral e na extremidade esquerda do duto.

Tabela 4.2: Tabela das Funções de Transferência.

	Função de Transferência
Duto com Fonte Sonora na Lateral	Aberto-Aberto
	$\frac{P(x, s)}{Q_b(s)} = \begin{cases} -\frac{\rho_0 \sinh \beta x \sinh \beta(L - x_s)}{\beta \sinh \beta L}, & x \leq x_s \\ -\frac{\rho_0 \sinh \beta x_s \sinh \beta(L - x)}{\beta \sinh \beta L}, & x > x_s \end{cases}$
	Fechado-Fechado
	$\frac{P(x, s)}{Q_b(s)} = \begin{cases} -\frac{\rho_0 \cosh \beta x \cosh \beta(L - x_s)}{\beta \sinh \beta L}, & x \leq x_s \\ -\frac{\rho_0 \cosh \beta x_s \cosh \beta(L - x)}{\beta \sinh \beta L}, & x > x_s \end{cases}$
	Aberto-Fechado:
	$\frac{P(x, s)}{Q_b(s)} = \begin{cases} -\frac{\rho_0 \sinh \beta x \cosh \beta(L - x_s)}{\beta \cosh \beta L}, & x \leq x_s \\ -\frac{\rho_0 \sinh \beta x_s \cosh \beta(L - x)}{\beta \cosh \beta L}, & x > x_s \end{cases}$
	Condições de Contorno Arbitrárias:
	$\frac{P(x, s)}{Q_b(s)} = \begin{cases} \frac{\rho_0^2 s^2 \left(\frac{\sinh \beta x}{\beta} - \frac{\cosh \beta x Z_0(s)}{\rho_0 s} \right) \left(\frac{\rho_0 \sinh \beta(L - x_s)}{\beta} + \frac{\cosh \beta(L - x_s) Z_L(s)}{s} \right)}{(Z_0(s) Z_L(s) \beta^2 - \rho_0^2 s^2) \frac{\sinh \beta L}{\beta} + (Z_0(s) - Z_L(s)) \rho_0 s \cosh \beta L}, & x \leq x_s \\ \frac{\rho_0^2 s^2 \left(\frac{\sinh \beta x_s}{\beta} - \frac{\cosh \beta x_s Z_0(s)}{\rho_0 s} \right) \left(\frac{\rho_0 \sinh \beta(L - x)}{\beta} + \frac{\cosh \beta(L - x) Z_L(s)}{s} \right)}{(Z_0(s) Z_L(s) \beta^2 - \rho_0^2 s^2) \frac{\sinh \beta L}{\beta} + (Z_0(s) - Z_L(s)) \rho_0 s \cosh \beta L}, & x > x_s \end{cases}$

<p>Duto com Fonte Sonora em uma das extremidades</p>	<p>Fechado a Direita:</p> $\frac{P(x_m, s)}{Q_a(s)} = \frac{\rho_0 c_0 \sinh s(L - x_m)/c_0}{s \cosh(sL/c_0)}.$ <p>Aberto a Direita:</p> $\frac{P(x_m, s)}{Q_a(s)} = \frac{\rho_0 c_0 \cosh s(L - x_m)/c_0}{s \sinh sL/c_0}.$ <p>Condições de Contorno Arbitrárias:</p> $\frac{P(x_m, s)}{Q_a(s)} = \frac{Z_L(s) \cosh \beta(L - x_m) + \frac{\rho_0 s \sinh \beta(L - x_m)}{\beta}}{\frac{Z_L(s) \beta \sinh \beta L}{\rho_0} + s \cosh \beta L}.$
<p>Alto-Falante + Duto + Microfone</p>	<p>Aberto a Direita:</p> $FT_{\text{total}} = \frac{8,4 \times 10^{-4} s^2}{s^2 + 40\pi s + 6400\pi^2} \cdot \frac{\rho_0 c_0 \sinh s(L - x_m)/c_0}{s \cosh(sL/c_0)}.$ <p>Fechado a Direita:</p> $FT_{\text{total}} = \frac{8,4 \times 10^{-4} s^2}{s^2 + 40\pi s + 6400\pi^2} \cdot \frac{\rho_0 c_0 \cosh s(L - x_m)/c_0}{s \sinh sL/c_0}.$

A seguir será feita a modelagem do duto em elementos finitos para a validação dos resultados analíticos.

4.3 Modelagem do Duto em Elementos Finitos para Validação dos Resultados Analíticos

O modelo numérico foi modelado via método dos elementos finitos (MEF). Utilizou-se o software comercial ANSYS 16, disponível na instituição acadêmica e licenciado para atividades de pesquisa e ensino. Esta modelagem numérica foi realizada apenas para validar o modelo analítico quanto às frequências de ressonância encontradas analiticamente na função de transferência, visto que não foi realizada a validação experimental (não era

objetivo deste trabalho).

Não é objetivo aqui ajustar o modelo numérico ao analítico e vice-versa, nem tampouco realizar um estudo entre as diferenças obtidas entre os dois modelos. Esta comparação é apenas para verificar se a função de transferência obtida analiticamente está produzindo resultados satisfatórios com o sistema físico estudado em termos de suas frequências de ressonância, ou seja, se ambos os modelos reproduzem estas frequências em valores próximos.

O procedimento numérico via MEF envolve, basicamente, quatro etapas: construção do modelo geométrico; geração da malha de elementos finitos; definição e aplicação das condições de contorno e solução do problema no domínio da frequência.

Assumiu-se que o duto uniforme circular possui parede rígida, considerando portanto somente elemento acústico no modelo, sem interação fluido-estrutura. Primeiramente tratar-se-á do modelo do duto com as extremidades abertas ou fechadas, uma vez que a modelagem deste se difere do duto quando considerado um material acústico de impedância arbitrária nas extremidades.

Para isto o duto com as dimensões geométricas descritas anteriormente foi modelado utilizando elementos denominados no software de FLUID30 (fluido acústico 3D) e SURF154 (para modelar a impedância de radiação na extremidade aberta do duto). Tais elementos foram definidos com comprimento de $0,04\text{ m}$ para geração de uma malha que produza resultados confiáveis (recomenda-se que o elemento tenha tamanho menor que $1/12$ do comprimento de onda acústica). O modelo construído possui 7735 elementos e 8736 nós.

O elemento FLUID30 se caracteriza por possuir oito nós com quatro graus de liberdade cada: translações em x , y e z , e pressão. Para especificar a ausência ou presença de estrutura na interface do elemento se utiliza o parâmetro KEYOPT(2), disponível após especificação do elemento no software. Desta maneira, KEYOPT(2) = 1 define a ausência de acoplamento entre o fluido e estrutura para o elemento FLUID30, enquanto que KEYOPT(2) = 0 indica a presença de uma estrutura na interface do fluido (ANSYS Inc). Neste trabalho a primeira opção foi a utilizada (KEYOPT(2) = 1) para caracterizar os elementos acústicos ao longo do volume do duto implicando portanto na presença apenas do grau de liberdade pressão, uma vez que foi assumida a condição de paredes rígidas.

Para os elementos FLUID30 foram estabelecidas as seguintes constantes (designadas como Real Constants): Pressão de referência igual a $20 \times 10^{-6}\text{ N/m}^2$, Densidade igual a $1,21\text{ m/s}^2$ e velocidade do som igual a 343 m/s . Na extremidade aberta do duto, a qual irradia ruído para o meio externo, deve-se impor uma condição de contorno de impedância de radiação. Como a impedância acústica é definida pela razão entre a pressão acústica e

a velocidade da partícula, o deslocamento do fluido (graus de liberdade de translação) na terminação aberta deve ser considerado. Sendo assim, os elementos acústicos da extremidade aberta devem ser modificados para FLUID30 com o parâmetro KEYOPT (2) = 0 (observa-se nas figuras apresentadas nos resultados, que os elementos modificados no modelo alteram sua cor para roxa). A condição de impedância de radiação [29] pode ser expressa matematicamente pela Eq.(4.224)

$$Z_1 = \frac{\rho c}{S} \left[\frac{(ka)^2}{4} + j(0,6)ka \right], \quad (4.224)$$

onde ρ é a densidade média do fluido, c é a velocidade do som, S é a área da seção transversal do duto, k é o número de onda e a é o raio do duto.

Como a impedância de radiação Eq.(4.224) resulta em um valor complexo, é necessário inserir no ANSYS® tanto a componente da parte real quanto da parte imaginária deste parâmetro. De acordo com o método utilizado neste trabalho, descrito por [30], a condição de impedância complexa de radiação é modelada utilizando o elemento SURF154 (elemento plano). Para isso, devem ser gerados estes elementos do tipo plano na superfície da extremidade aberta do duto, justamente onde os elementos acústicos foram modificados para FLUID30 com graus de liberdade de deslocamento e pressão em cada nó.

A parte real da impedância de radiação é modelada utilizando o parâmetro VISC, uma propriedade de material do elemento SURF154 (Material Props no ANSYS). Este parâmetro é indicado pela Eq.(4.225). A parte imaginária, Eq.(4.227), é modelada através da propriedade ADMSUA (massa adicionada por unidade de área), uma constante (Real Constants) do elemento SURF 154.

$$VISC = Re(Z_1) = \frac{\rho a^2 w^2}{4c}, \quad (4.225)$$

$$ADMSVA = \frac{Im(Z_1)}{w} = 0,61\rho a, \quad (4.226)$$

onde w é a frequência angular em rad/s .

No intuito de simular a fonte sonora foi aplicado um fluxo de massa unitário, denominado no software em questão por FLOW, nos nós localizados exatamente na área ocupada pelo alto-falante. Esta carga foi aplicada tendo em vista que as partículas do fluido próximas ao alto-falante se deslocam com uma determinada velocidade e aceleração. A velocidade da partícula (m/s) é obtida dividindo o fluxo (FLOW) pela densidade do fluido.

A solução do modelo foi realizada através de análise harmônica na faixa de frequência de 1 a 700 Hz, com incremento de $1Hz$. Os valores da pressão acústica (real e imaginária) no duto foram obtidos no nó onde se localiza o microfone (posição 1, 82m).

Um parâmetro importante entre os dois modelos: o analítico, aqui proposto e o modelo numérico em elementos finitos, que deve ser analisado é o tempo de simulação computacional. Neste trabalho foi utilizado um computador com as seguintes especificações: Intel Core I5, CPU 2.3 GHz, 6 GB RAM e sistema operacional de 64 bit. O tempo de simulação com o software Ansys para simular o modelo do duto na faixa de frequência especificada foi de 19 minutos e 46 segundos. Já para simular o modelo analítico, o software Matlab gastou 0,71 segundos. Mostrando portanto a grande vantagem de se trabalhar com o modelo analítico.

Já quando se trata de modelar o duto com material acústico inserido em suas extremidades, o modelo de elementos finitos se difere do descrito acima pelos elementos utilizados para modelar o material acústico. Neste caso, o fluido acústico continua sendo modelado com o elemento FLUID30. No entanto, os elementos presentes na posição onde há material acústico, ou seja, os elementos FLUID30 nestas localizações precisam receber uma propriedade de material que especifique o modelo de material acústico que será considerado na solução. Neste modelo não é necessário utilizar o elemento SURF154, e conseqüentemente não é necessário atribuir aos elementos fluid30 a condição de estrutura presente.

Neste trabalho utilizou-se o modelo de material acústico idealizado por [31]. No software este modelo é obedece a equação 4, e é especificado pela linha de comando TB,PERF,2,DLB. Os parâmetros de entrada requeridos por este modelo são: resistividade ao fluxo (r_0), densidade do ar ρ_{air} , velocidade do som no ar (c_{air}), e ainda as constantes c_1 , c_2 , c_3 e c_4 , os quais são definidos pelos autores como 0.0571, -0.7540, 0.0870 e -0.7320 respectivamente. Note que a impedância acústica do material é uma função da frequência (f).

$$Z_c = \rho_{air}c_{air} \left[1 + C_1 \left(\frac{\rho_{air}f}{r_0} \right)^{c_2} - j c_3 \left(\frac{\rho_{air}f}{r_0} \right)^{c_4} \right] \quad (4.227)$$

Para fazer a simulação com condições de contorno arbitrária no duto, considerou-se a inserção, na extremidade do duto, de uma espuma de poliuretano com as seguintes características: densidade = $33.9kg/m^3$, espessura = 25 mm , resistividade ao fluxo = $8445rayls/m$. Este material acústico foi caracterizado experimentalmente por [28].

Para que a malha tenha ao menos um elemento ao longo da espessura do material acústico, o tamanho do elemento neste modelo foi alterado para 0.025 m. Obteve-se portanto um total de 21.024 elementos e 23.780ns. Isto fez com que o tempo de simulação

aumentasse para 58 *min.*

4.3.1 Duto com Fonte Sonora Localizada na Lateral - MEF

4.3.1.1 Duto Fechado-Fechado

A Fig.4.16 representa o modelo do duto em elementos finitos com fonte sonora lateral e extremidades fechadas.

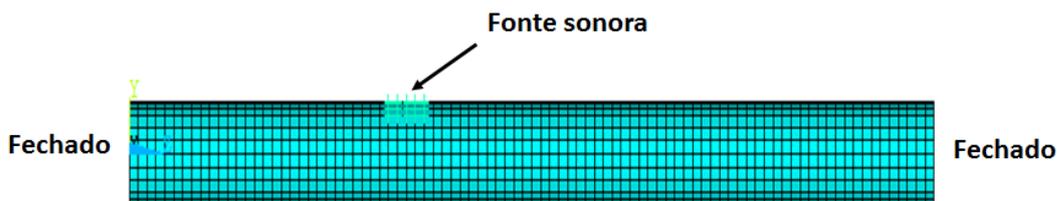


Figura 4.16: Modelo de duto em elementos finitos com fonte sonora na lateral.

O resultado do modelo de duto fechado-fechado, em elementos finitos e analítico é mostrado na Fig.4.17.

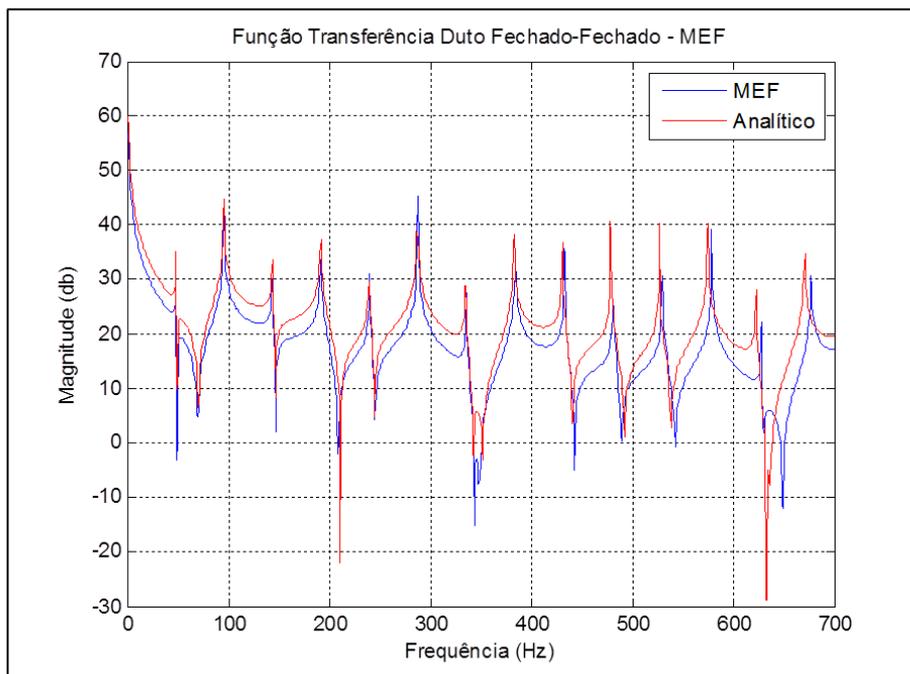


Figura 4.17: Resultado em elementos finitos e analítico

Observa-se no resultado, analisando a magnitude da resposta em frequência, que o nível do sinal do método analítico é superior ao MEF. Além disso, existe uma boa correlação quanto a precisão da localização dos picos de frequência em ambos os métodos. Apresentam maior desvio próximo a frequência de 650HZ.

4.3.1.2 Duto Aberto-Fechado

A Fig.4.18 representa o modelo do duto em elementos finitos com fonte sonora lateral e extremidades aberta à esquerda e fechada à direita.

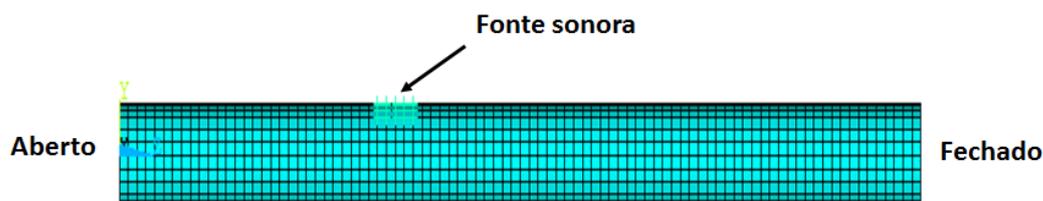


Figura 4.18: Modelo de duto em elementos finitos com fonte sonora na lateral.

O resultado do modelo de duto aberto-fechado, em elementos finitos e analítico é mostrado na Fig.4.19.

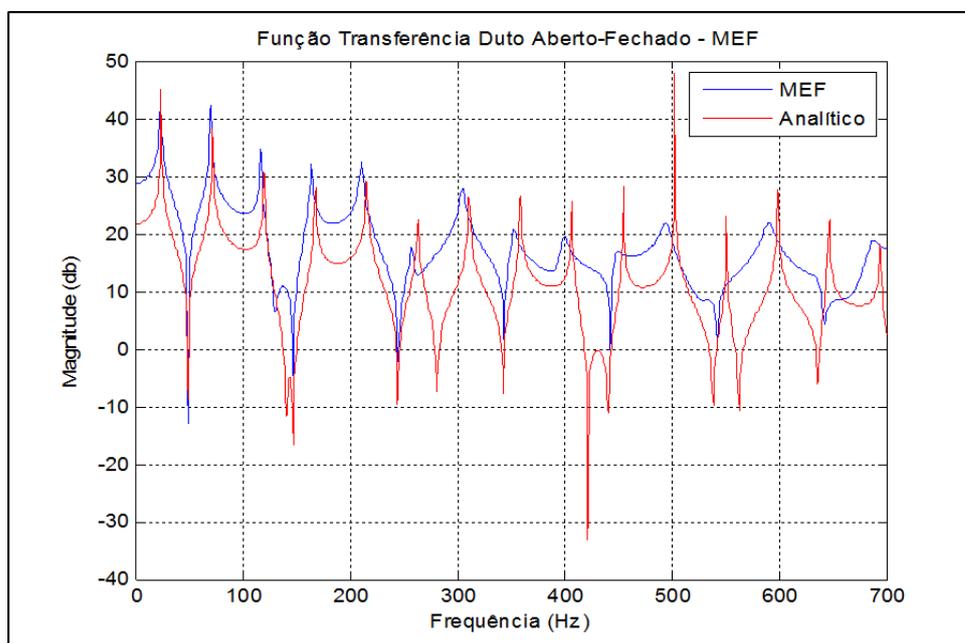


Figura 4.19: Resultado em elementos finitos e analítico

Observa-se no resultado que à medida que a frequência aumenta há um amortecimento significativo no modelo numérico quando comparado com o modelo analítico. Isto se deve ao modelo de elementos finitos, uma vez que estamos modelando a extremidade aberta do duto com uma absorção sonora dependente da frequência (como pode ser observado nas Eqs.(4.225) e (4.226), ou seja, quanto maior o valor da frequência, maior a absorção sonora, e conseqüentemente maior o amortecimento.

Outro ponto importante é que no modelo analítico apresentado não está sendo considerado amortecimento no fluido. Um fator de amortecimento ξ , pode ser incorporado no modelo analítico adicionando este fator ξ ao argumento do seno e cosseno hiperbólico das funções apresentadas analiticamente. Como o objetivo aqui é apenas mostrar que as frequências de ressonância do modelo analítico coincidem com as do modelo numérico, então as curvas não serão ajustadas, podendo este ser um trabalho futuro. Justifica-se, portanto a diferença observada entre as curvas analítica e numérica. No entanto, nota-se que os valores das frequências de ressonância são muito próximos, principalmente nas frequências abaixo de $500Hz$.

4.3.1.3 Duto Aberto-Aberto

A Fig.4.20 representa o modelo do duto em elementos finitos com fonte sonora lateral e extremidades abertas.

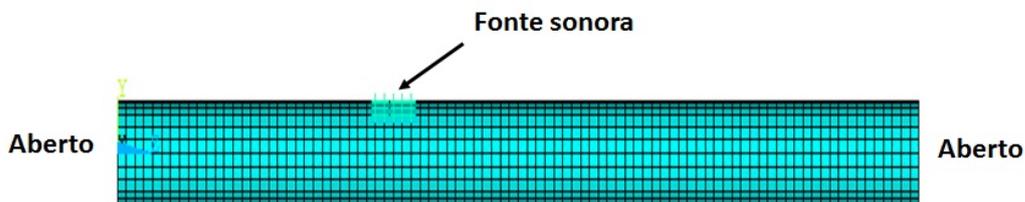


Figura 4.20: Modelo de duto em elementos finitos com fonte sonora na lateral.

No resultado apresentado na Fig.4.21 observa-se que o amortecimento da curva numérica aumentou com relação ao modelo anterior, isto se deve à absorção sonora presente em ambas as extremidades do duto (ao invés de apenas uma extremidade). Mas este comportamento não impede de verificar que as frequências de ressonância calculadas com o modelo analítico estão próximas em ambos os modelos, validando portanto o modelo desenvolvido analiticamente.

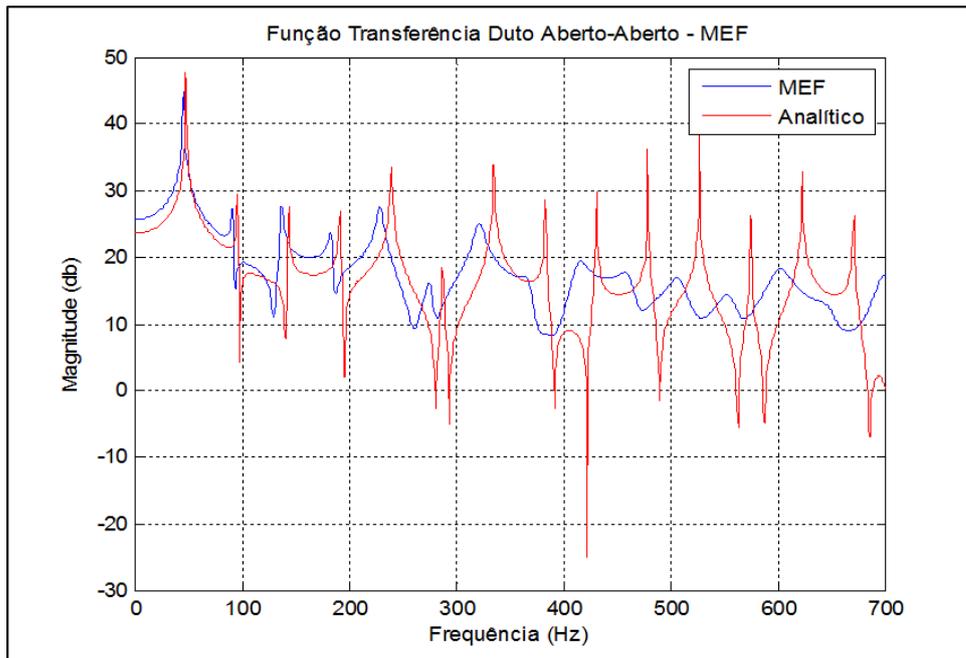


Figura 4.21: Resultado em elementos finitos e analítico.

4.3.1.4 Duto com Material Acústico Poroso em Ambas as Extremidades

No modelo de duto apresentado na Fig.4.21, foi considerado a inserção de espuma, material acústico poroso, em ambas as extremidades do duto 4.22. Dessa forma, o comprimento do duto total modelado se mantém 3,58 m.

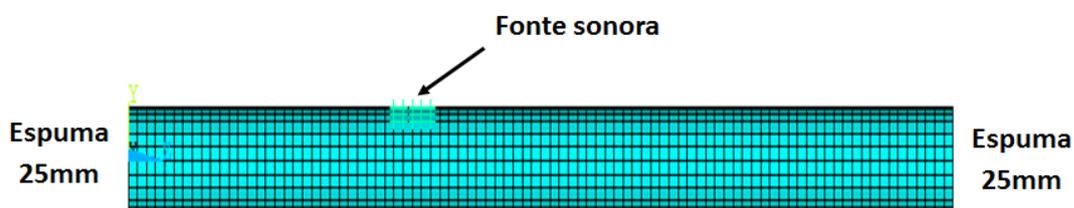


Figura 4.22: Duto com material acústico poroso nas extremidades.

A Fig.4.23 apresenta o resultado da análise dos dois casos acima.

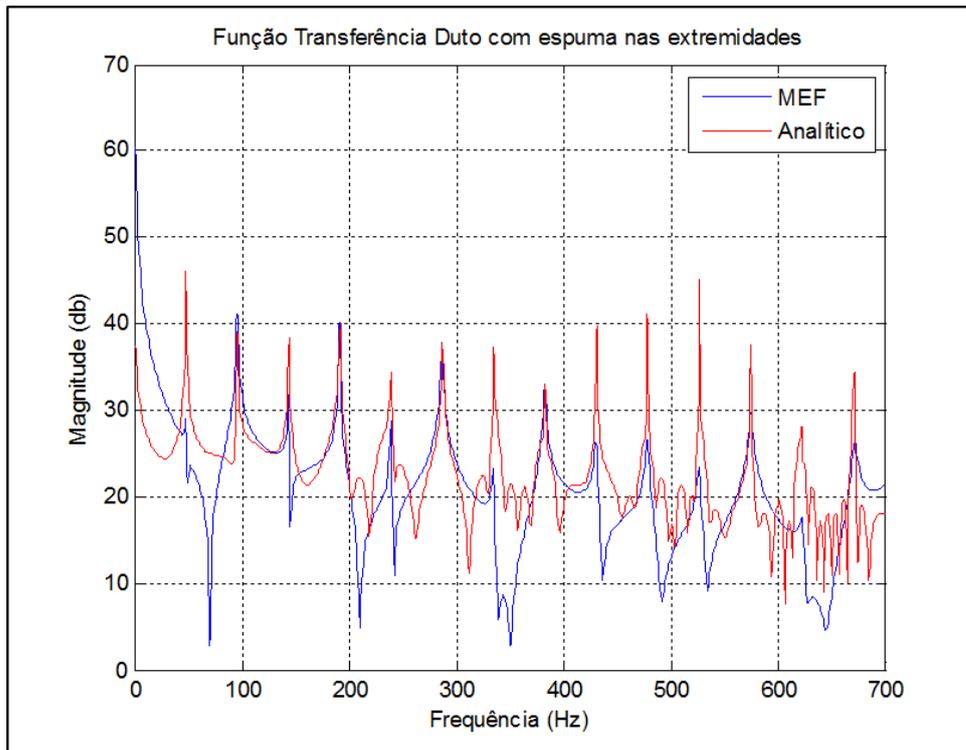


Figura 4.23: Resultado em elementos finitos e analítico.

Neste resultado, observa-se a aproximação de ambas as curvas nas frequências de ressonância. Nota-se também que acima de 400 Hz a função de transferência obtida pelo MEF se torna bem mais amortecida que a função de transferência obtida analiticamente. Isso deve-se às considerações de cada modelo.

4.3.2 Duto com Fonte Sonora Localizada na Extremidade Esquerda - MEF

4.3.2.1 Duto Aberto na Extremidade Direita

A Fig.4.24 representa o modelo do duto em elementos finitos com fonte sonora localizada na extremidade esquerda e extremidade direita aberta.



Figura 4.24: Duto com fonte sonora na extremidade esquerda e aberto na extremidade direita.

A Fig.4.25 a seguir apresenta o resultado da análise dos dois casos acima.

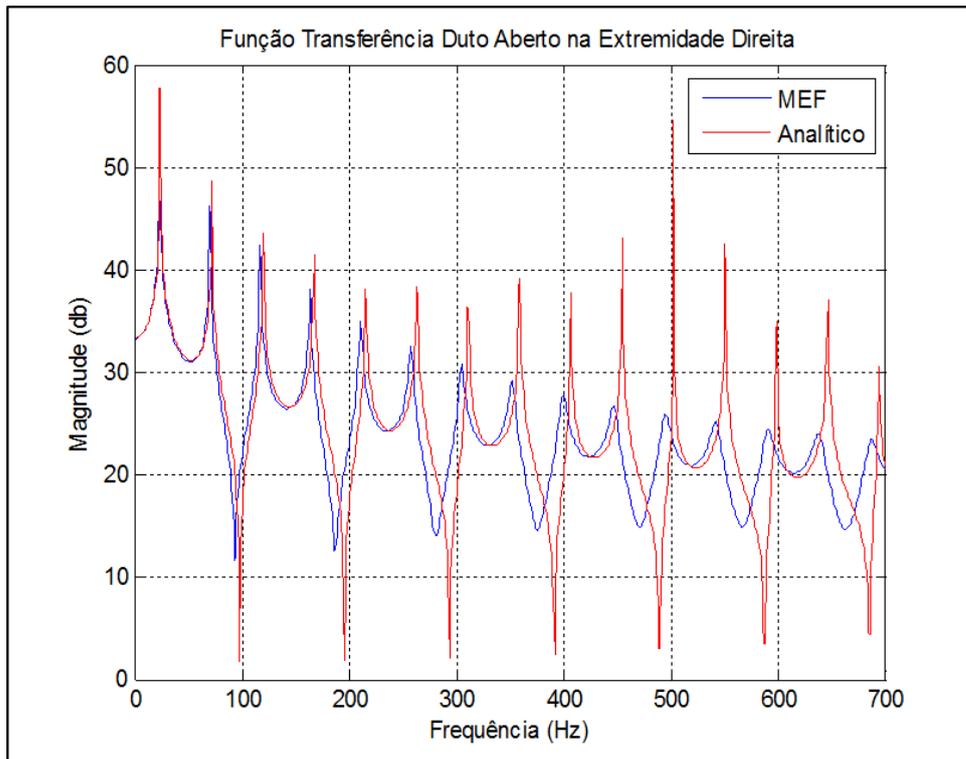


Figura 4.25: Resultado em elementos finitos e analítico.

No resultado, a influência da condição de contorno no modelo de elementos finitos imposta na extremidade aberta, pode ser observada mais uma vez, onde a diferença entre as duas curvas se acentua conforme a frequência aumenta.

Para a configuração de duto aberto na extremidade direita, a Tab.4.3 abaixo, mostra os resultados das frequências de ressonância numérica, analítica e experimental. Sendo que as frequências de ressonância experimental foram apresentadas pelos autores [12] na Tab.4.1 do capítulo anterior.

Tabela 4.3: Comparação das frequências de ressonância

Freq. ressonância (Hz)		Erro (%)	Freq. ressonância (Hz)		Erro (%)
Análítico	*Experimental		MEF	*Experimental	
24			23		
72	83	13,25	70	83	15,66
120	131	8,39	117	131	10,68
168	173	2,89	164	173	5,20
216	221	2,26	211	221	4,52
264	265	0,37	258	265	2,64
311	316	1,58	305	316	3,48
359	359	0	352	359	1,94
407	408	0,24	400	408	1,96
455	454	0,22	477	454	1,54
503	502	0,19	495	502	1,39
551	546	0,91	543	546	0,54
599	599	0	591	599	1,33
647	599	1,41	638	599	0
695	696	0,14	688	696	1,14

*Resultados obtidos pelos autores [12]

Analisando os valores apresentados na tabela, pode-se verificar que o erro entre o modelo analítico e experimental é menor que o erro entre o modelo em MEF e experimental. Isto é uma vantagem para o modelo analítico.

4.3.2.2 Duto Fechado na Extremidade Direita

A Fig.4.26 representa o modelo do duto em elementos finitos com fonte sonora localizada na extremidade esquerda e extremidade direita fechada.



Figura 4.26: Duto com fonte sonora na extremidade esquerda e fechado na extremidade direita.

A Fig.4.27 a seguir apresenta o resultado da análise dos dois casos acima.

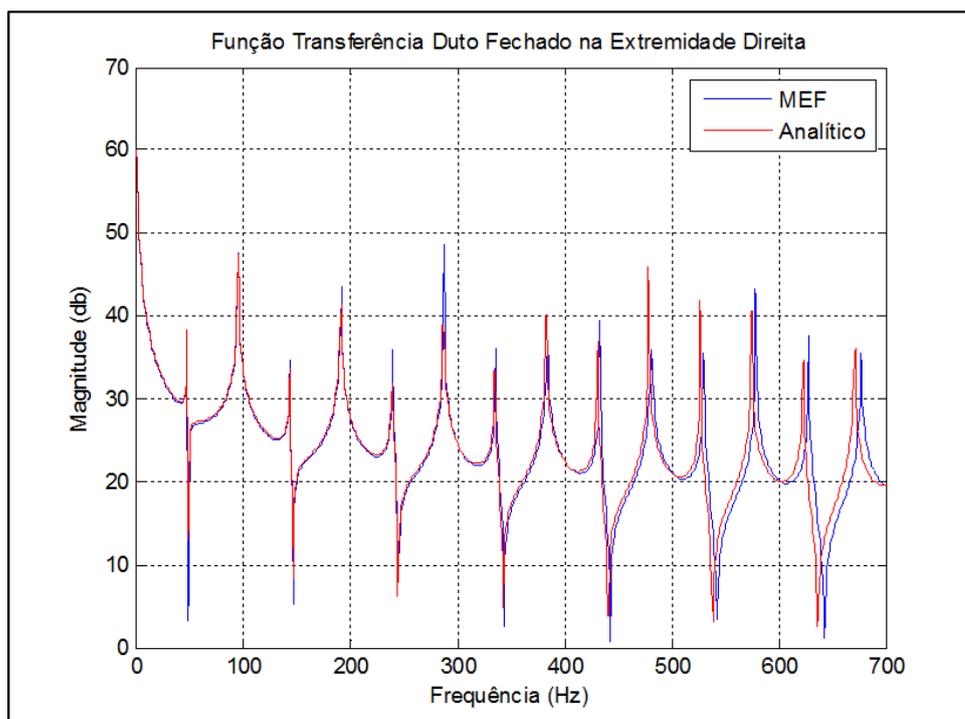


Figura 4.27: Resultado em elementos finitos e analítico.

No resultado mostrado na figura acima observa-se a grande aproximação entre os dois modelos, principalmente pelo fato de que neste modelo numérico não há a inserção de absorção sonora para modelar a extremidade aberta, sendo assim, o duto é modelado como tendo extremidades rígidas e reflexivas.

4.3.2.3 Duto com Material Acústico Poroso na Extremidade Direita

Neste modelo é considerado a inserção de material acústico apenas na extremidade direita, visto que na extremidade esquerda está localizada a fonte sonora.

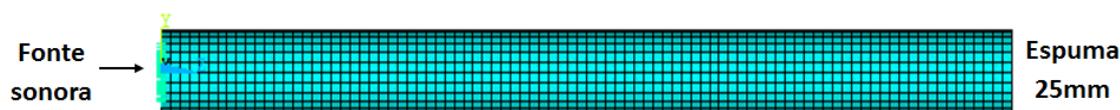


Figura 4.28: Duto com fonte sonora na extremidade esquerda e material acústico poroso na extremidade direita.

A Fig.4.29 a seguir apresenta o resultado da análise dos dois casos acima.

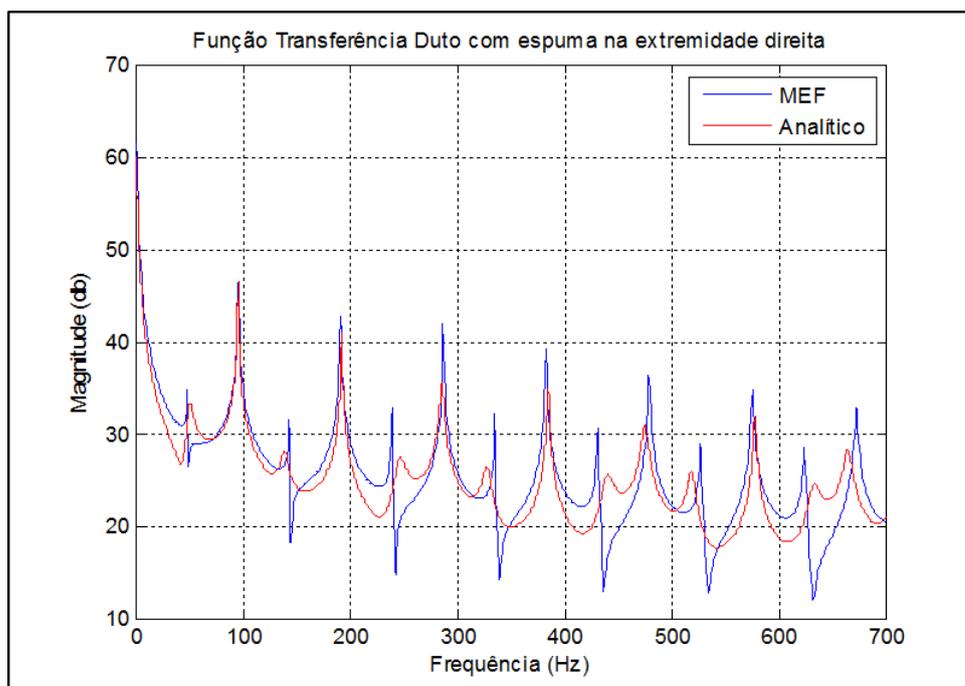


Figura 4.29: Resultado em elementos finitos e analítico.

No resultado apresentado na figura acima, observa-se que as respostas dos métodos analítico e MEF apresentam boa aproximação até próximo de 200 Hz. No entanto, o resultado analítico apresentou uma resposta mais suave quanto à variação de magnitude, principalmente quanto aos picos inferiores indicados no MEF.

Nesta seção foram obtidos os gráficos via método de elemento finitos para a validação dos resultados analíticos. Para fins de comparação estes gráficos são apresentados a seguir. Estes correspondem a configuração de duto com fonte sonora lateral sendo considerado: duto fechado-fechado Fig.4.30, aberto-fechado Fig.4.31, aberto-aberto Fig.4.32 e duto com material acústico nas extremidades Fig.4.33. A outra configuração trata-se duto com fonte sonora na extremidade esquerda sendo considerado: duto aberto na extremidade direita Fig.4.34, duto fechado na extremidade direita Fig.4.35 e duto com material acústico na extremidade direita Fig.4.36,

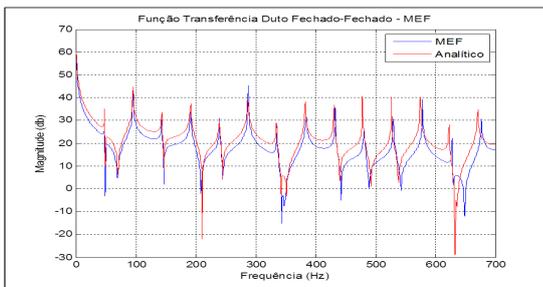


Figura 4.30

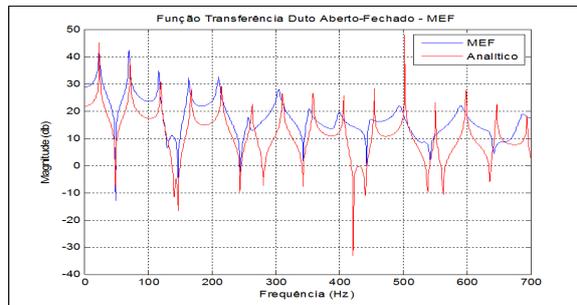


Figura 4.31

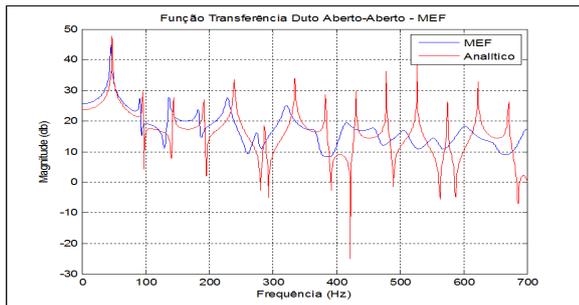


Figura 4.32

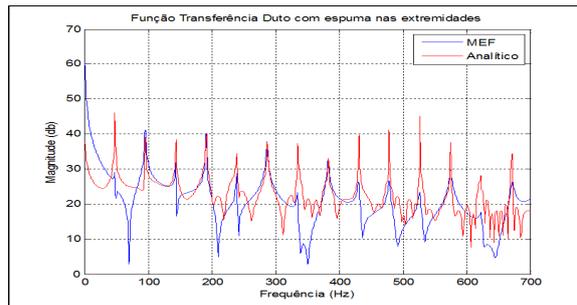


Figura 4.33

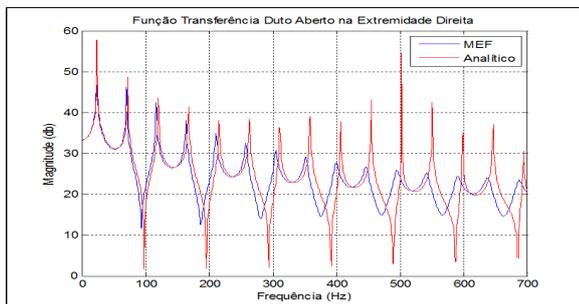


Figura 4.34

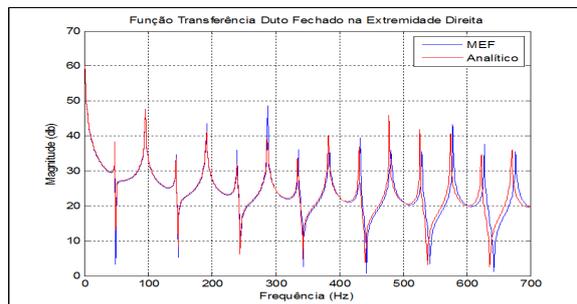


Figura 4.35

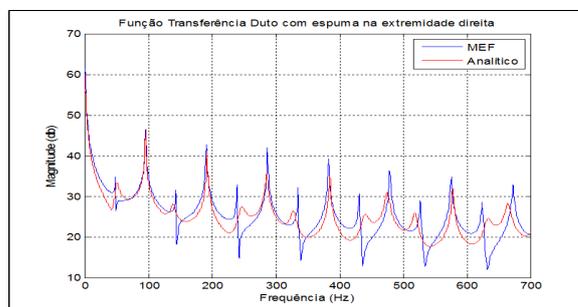


Figura 4.36: Resultado em elementos finitos e analítico.

No próximo capítulo serão desenvolvidas as equações analíticas da propagação sonora no interior do duto no domínio do tempo aplicando a transformada inversa de Laplace

nas funções de transferência determinadas neste capítulo. Através dessas equações será possível analisar a pressão acústica em cada ponto do interior do duto.

CAPÍTULO 5

MODELAGEM ANALÍTICA NO DOMÍNIO DO TEMPO

Neste capítulo, será feita a modelagem analítica no domínio do tempo. O objetivo é fornecer equações capazes de produzir um conhecimento da distribuição da pressão acústica em cada ponto do interior do duto, em um determinado instante quando sujeito a uma excitação.

As duas funções transferência que trataremos neste capítulo são de interesse prático, principalmente quando se trata da modelagem do campo sonoro no interior de um duto para fins de controle de ruído. Já vimos no capítulo 1, como principal exemplo de controle ativo de ruído, o esquema básico de um controlador ativo de ruído (CAR) denominado CAR Feedback, ilustrado na Fig.1.7. Este esquema é apresentado novamente, agora na Fig.5.1 apenas para iniciarmos o estudo deste capítulo. Lembrando que nesta figura $P(z)$ representa o caminho primário, $S(z)$ representa o caminho secundário e, o sinal da pressão sonora obtido no microfone de erro é de interesse para que o controlador atue no sistema de modo a reduzir o nível de ruído neste sensor.

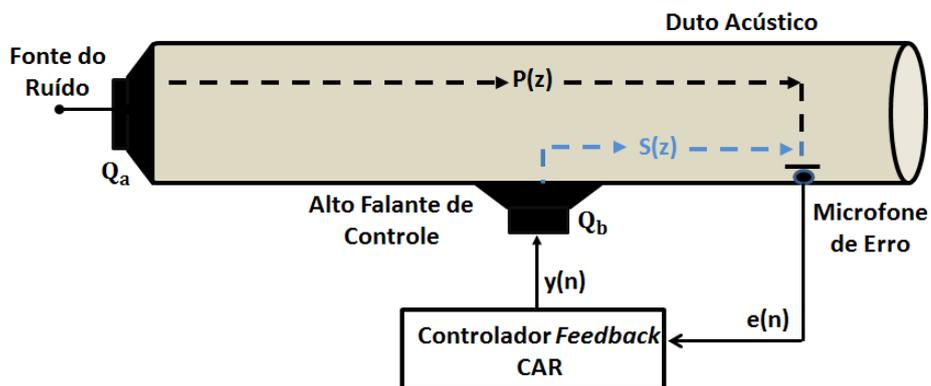


Figura 5.1: Controle ativo de ruído do tipo feedback

Desta maneira, trataremos de dois casos neste capítulo. O caso 1 trata da determinação da pressão sonora no domínio do tempo ($p(t)$) no microfone devido somente à

fonte de ruído localizada na extremidade esquerda do duto. Para isto será necessário desenvolver a função transferência entre a fonte de ruído (Q_a) e a pressão $p_m(t)$ no microfone. Note que a extremidade oposta à fonte de ruído será considerada aberta. A função transferência $P(z)$ já foi desenvolvida no capítulo anterior no domínio da frequência (a qual denominaremos aqui de $FT_p(s)$), dada pela Eq.(4.193). Portanto, o objetivo será utilizar a transformada inversa de Laplace para obter $ft_p(t)$.

Já o caso 2 trata da determinação da função transferência $S(z)$ no domínio do tempo ($ft_s(t)$), a qual estabelece a relação entre a fonte de controle Q_b , ou seja, a fonte sonora localizada na lateral do duto e a pressão $p_m(t)$ no microfone. Para este caso, as condições de contorno consideradas para o duto acústico é fechado-aberto. A função transferência $S(z)$ será denominada de $FT_s(s)$ e já foi previamente desenvolvida no capítulo anterior, dada pela Eq.(4.109) considerando apenas a equação em que $x_m \leq x_s$.

5.1 Caso 1: Duto Aberto com Fonte Sonora na Extremidade Esquerda

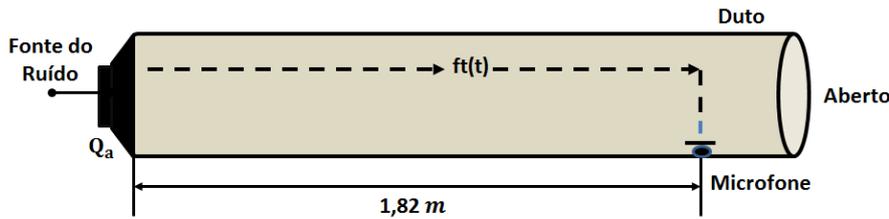


Figura 5.2: Duto aberto com fonte sonora na extremidade esquerda.

A partir da Eq.(4.193), descrita a seguir, aplica-se a transformada inversa de Laplace para obter a função transferência no domínio do tempo ($ft_p(t)$).

$$FT_p(s) = \frac{P(x_m, s)}{Q_a(s)} = \frac{\rho_0 c_0 \sinh s(L - x_m)/c_0}{s \cosh(sL/c_0)}. \quad (5.1)$$

Então, para calcular a transformada inversa de Laplace da $FT_p(s)$, primeiro deter-

minamos na equação acima:

$$\begin{aligned}
& \frac{\sinh(s(L-x_m)/c_0)}{s \cosh(sL/c_0)} \\
= & \frac{1}{s} \cdot \frac{e^{s(L-x_m)/c_0} - e^{-s(L-x_m)/c_0}}{e^{sL/c_0} + e^{-sL/c_0}} \\
= & \frac{1}{s} \cdot \frac{e^{s(L-x_m)/c_0} (1 - e^{-s(L-x_m)/c_0} e^{-s(L-x_m)/c_0})}{e^{sL/c_0} (1 + e^{-sL/c_0} e^{-sL/c_0})} \\
= & \frac{1}{s} \cdot e^{s(L-x_m)/c_0 - sL/c_0} \cdot \frac{1 - e^{-2s(L-x_m)/c_0}}{1 + e^{-2sL/c_0}} \\
= & \frac{1}{s} \cdot e^{-sx_m/c_0} \cdot \frac{1 - e^{-2s(L-x_m)/c_0}}{1 + e^{-2sL/c_0}} \\
= & \frac{1}{s} \cdot \frac{e^{-sx_m/c_0} - e^{-sx_m/c_0} e^{-2s(L-x_m)/c_0}}{1 + e^{-2sL/c_0}} \\
= & \frac{1}{s} \cdot \frac{e^{-sx_m/c_0} - e^{-s(2L-x_m)/c_0}}{1 + e^{-2sL/c_0}} \\
= & \frac{1}{s} \cdot \left[\frac{e^{-sx_m/c_0}}{1 + e^{-2sL/c_0}} - \frac{e^{-s(2L-x_m)/c_0}}{1 + e^{-2sL/c_0}} \right] \\
= & \frac{1}{s \left(1 + e^{-\frac{2sL}{c_0}}\right)} e^{-\frac{sx_m}{c_0}} - \frac{1}{s \left(1 + e^{-\frac{2sL}{c_0}}\right)} e^{-\frac{s(2L-x_m)}{c_0}} \\
= & G(s) \cdot e^{-sc_1} - G(s) \cdot e^{-sc_2} \tag{5.2}
\end{aligned}$$

onde,

$$G(s) = \frac{1}{s \left(1 + e^{-\frac{2sL}{c_0}}\right)}, \quad c_1 = \frac{x_m}{c_0} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{(2L - x_m)}{c_0}.$$

Pela tabela de transformada inversa de Laplace, temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s \left(1 + e^{-\frac{2sL}{c_0}}\right)}\right\} \\
&= g(t) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } t \in I_k \\ 0 & , \quad c.c \end{cases}
\end{aligned}$$

onde, $I_k = [2ka, (2k + 1)a]$, com $k = 0, 1, 2, \dots$ e $a = 2L/c_0$.

A função $g(t)$ é chamada função onda quadrada definida em A.3.2. Como

$$FT_p(s) = \frac{P(x_m, s)}{Q_a(s)} = \rho_0 c_0 (G(s) \cdot e^{-sc_1} - G(s) \cdot e^{-sc_2})$$

então, aplicando a transformada inversa de Laplace na igualdade acima, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{FT_p(s)\} &= \rho_0 c_0 \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot e^{-sc_1} - G(s) \cdot e^{-sc_2}\} \\ &= \rho_0 c_0 [\mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot e^{-sc_1}\} - \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot e^{-sc_2}\}] \\ &= \rho_0 c_0 [\mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot e^{-sx_m/c_0}\} - \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot e^{-s(2L-x_m)/c_0}\}] \\ &= \rho_0 c_0 \cdot \left[u\left(t - \frac{x_m}{c_0}\right) g(t) - u\left(t - \frac{2L-x_m}{c_0}\right) g(t) \right] \\ &= \rho_0 c_0 \left[u\left(t - \frac{x_m}{c_0}\right) - u\left(t - \frac{2L-x_m}{c_0}\right) \right] g(t). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Logo, a função de transferência entre a fonte de ruído (Q_a) e a pressão $p_m(t)$ no microfone é dada pela equação:

$$ft_p(t) = \rho_0 c_0 \left[u\left(t - \frac{x_m}{c_0}\right) - u\left(t - \frac{2L-x_m}{c_0}\right) \right] g(t) \quad (5.4)$$

onde, u é a função degrau unitário definida em A.3.3.

É importante notar que a função transferência obtida no domínio do tempo é de ordem muito elevada (infinitos pólos), uma vez que a mesma é caracterizada por uma série geométrica. Isto é de grande importância pois atribui ao modelo a característica de duto unidimensional infinito. Devido a esta característica, neste capítulo, o duto é formulado com comprimento muito maior que do capítulo anterior para contornar o efeito físico imposto por esta modelagem matemática. Por conveniência adotou-se um comprimento igual $1000m$.

De posse da função transferência $ft_p(t)$, pode-se considerar uma determinada entrada $q_a(t)$ em m/s^2 que corresponde a aceleração da partícula nas proximidades da fonte, para se obter a pressão sonora, $p_m(t)$, em uma determinada posição (x_m) para o microfone. Para isto, é necessário calcular a convolução entre a entrada $q_a(t)$ e a função transferência $ft_p(t)$. A posição considerada para o microfone é $x_m = 1.828m$.

A fonte sonora considerada é tonal em $250Hz$ localizada na extremidade esquerda, a qual possui amplitude de deslocamento da partícula igual a $1,5 \times 10^{-6} m$, o que corresponde a aproximadamente uma pressão sonora de $1Pa$ *rms*, uma vez que a pressão sonora se relaciona com o deslocamento da partícula através da Eq.(5.5) [32]:

$$\text{pressão} = xwr_0c_0 \quad (5.5)$$

onde, x é o deslocamento da partícula em metros, w é a frequência angular.

Portanto, $q_a(t)$ é dada por:

$$q_a(t) = xw^2 \text{sen}(wt). \quad (5.6)$$

O fluido no interior do duto possui velocidade do som igual a $343m/s$ e densidade igual a $1.21Kg/m^3$.

Para este caso, encontra-se com facilidade na literatura clássica da área ([33], [23]), a solução harmônica da onda sonora unidimensional obtida a partir da solução da equação da onda, para a validação da *ft* encontrada.

$$p = (xwr_0c_0)\text{cos}(w(t - x_m/c_0)). \quad (5.7)$$

No entanto, é importante ressaltar que Eq.(5.7) é válida apenas para comportamento harmônico da onda sonora.

Já a pressão sonora estimada usando a função de transferência desenvolvida neste trabalho, pode ser obtida a partir de qualquer tipo de fonte sonora, seja ela harmônica, do tipo degrau, rampa, ruído branco, etc. Esta é a vantagem de se ter a função transferência no domínio do tempo.

Para ilustrar os resultados gerados, utilizou-se o software Matlab para gerar o gráfico da função de transferência dada pela Eq.(5.4), via transformada inversa de Laplace ilustrado na Fig.5.3, o gráfico da pressão sonora estimada a partir da função de transferência dada pela Eq.(5.4) no domínio do tempo entre $p_m(t)$ e $q_a(t)$ conforme a Fig. 5.4, e o gráfico da pressão sonora no microfone estimada via equação da onda, dada pela Eq.(5.7) e representado na Fig.5.5.

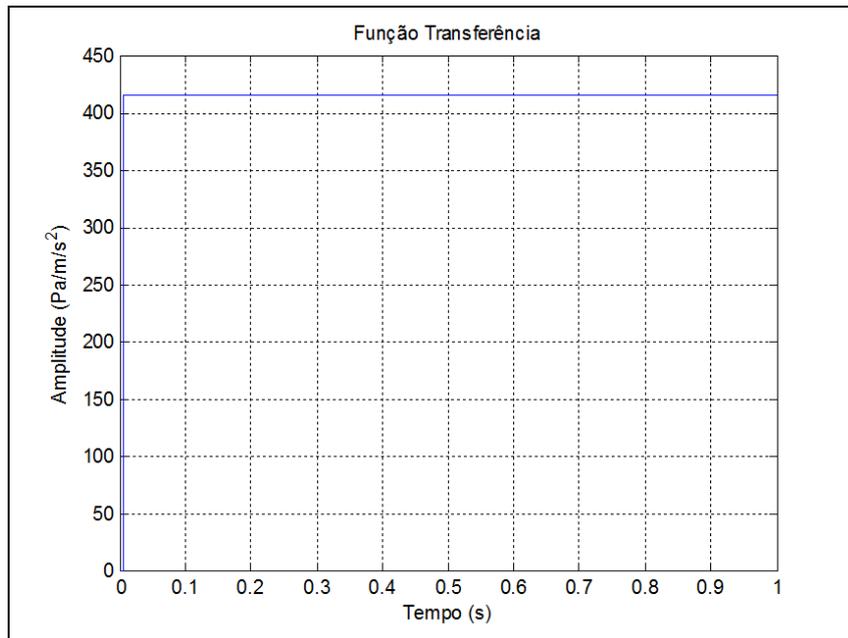


Figura 5.3: Função transferência obtida via transformada inversa de Laplace entre $p_m(t)$ e $q_a(t)$.

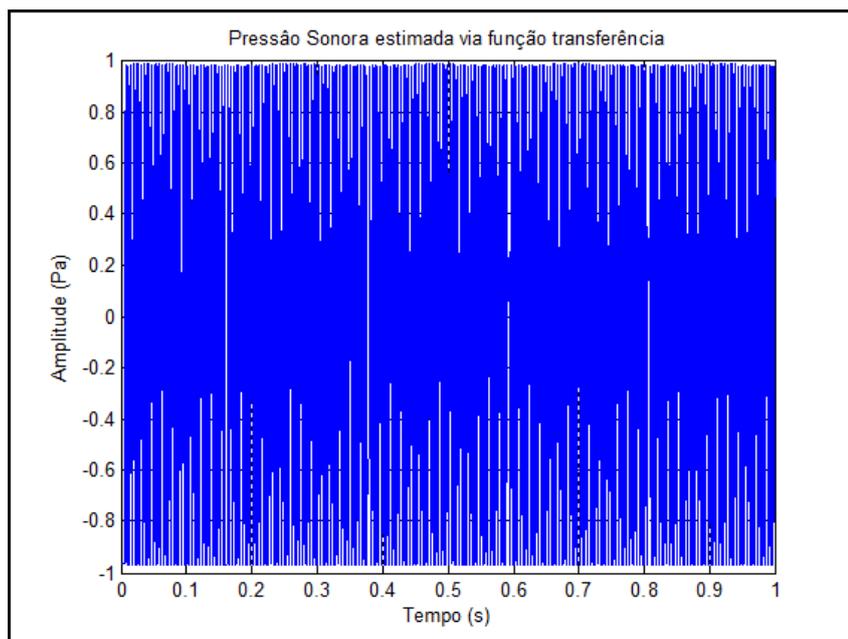


Figura 5.4: Pressão sonora estimada utilizando a função de transferência no domínio do tempo entre $p_m(t)$ e $q_a(t)$.

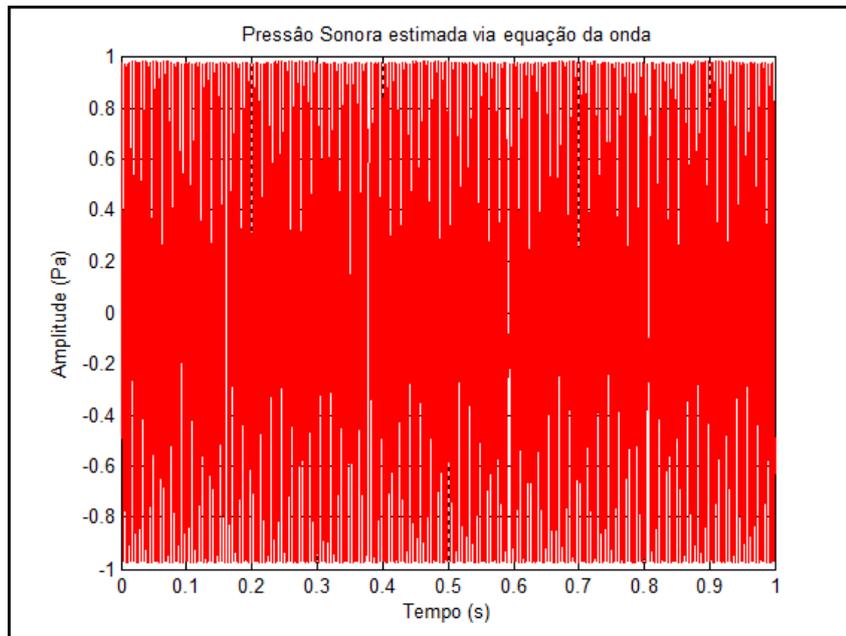


Figura 5.5: Pressão sonora no microfone estimada via equação da onda.

Analisando as Figs.5.4 e 5.5, observa-se a concordância entre os resultados validando a função transferência obtida aplicando a transformada inversa de Laplace. Analisando também a Fig.5.4, observa-se que a pressão sonora inicia seu comportamento oscilatório em 0.0053 s, como pode ser observado na Fig.5.6. Ou seja, exatamente o tempo necessário para que o som na velocidade de 343 m/s percorra a distância de 1.822 m , a qual é a posição do microfone com relação à fonte sonora.

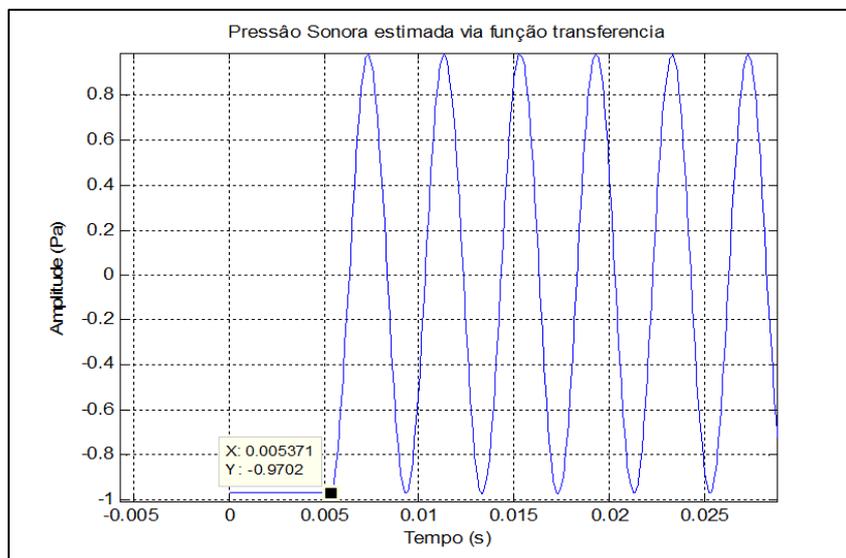


Figura 5.6: Início da oscilação do sinal mostrado na Fig. 5.4

5.2 Caso 2: Duto Fechado - Aberto com Fonte Sonora na Lateral

Neste tópicos a transformada inversa de Laplace é aplicada na Eq.(4.109) desenvolvida no capítulo anterior a fim de obter a função transferência no domínio do tempo do caminho denominado secundário, conforme mostrado na Fig.5.7. É importante notar que para a configuração apresentada, $x_m \leq x_s$.

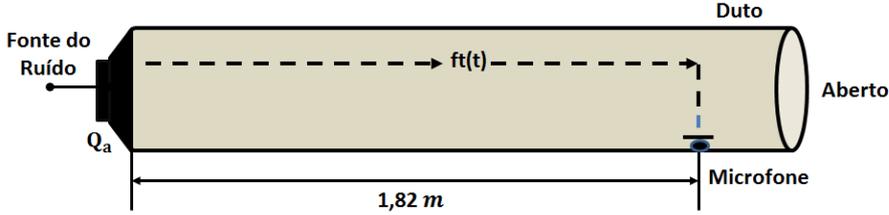


Figura 5.7: Duto fechado-aberto com com fonte sonora na lateral.

Considerando a Eq.(4.109) apresentada novamente abaixo, porém denotada agora por $FT_s(s)$.

$$FT_s(s) = \frac{P(x, s)}{Q_b(s)} = -\frac{\rho_0 \sinh \beta x \cosh \beta(L - x_s)}{\beta \cosh \beta L}. \quad (5.8)$$

Queremos determinar a função transferência ($ft_s(t)$) no domínio do tempo. Para isto, fazemos $\beta = \frac{s}{c_0}$ e obtemos:

$$FT_s(s) = \frac{P(x_m, s)}{Q_b(s)} = -\rho_0 c_0 \frac{\sinh\left(\frac{s x_m}{c_0}\right) \cosh(s(L - x_s))}{s \cosh\left(\frac{s L}{c_0}\right)}. \quad (5.9)$$

Para calcular a transformada inversa de Laplace da Eq.(5.9), note que:

$$\begin{aligned} \sinh\left(\frac{s x_m}{c_0}\right) \cosh(s(L - x_s)) &= \left(\frac{e^{\frac{s x_m}{c_0}} - e^{-\frac{s x_m}{c_0}}}{2}\right) \cdot \left(\frac{e^{s\frac{(L-x_s)}{c_0}} + e^{-s\frac{(L-x_s)}{c_0}}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} \left[\begin{array}{l} e^{s(L-x_s+x_m)/c_0} + e^{-s(L-x_s-x_m)/c_0} \\ -e^{s(L-x_s-x_m)/c_0} - e^{-s(L-x_s+x_m)/c_0} \end{array} \right] \\ &= \sinh(s(L - x_s + x_m)/c_0) - \sinh(s(L - x_s - x_m)/c_0). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Assim, para calcular a transformada inversa de Laplace da Eq.5.9, basta calcular a transformada inversa de Laplace da equação:

$$-\left[\rho_0 c_0 \frac{\sinh(s(L - x_s + x_m)/c_0)}{s \cosh\left(\frac{s L}{c_0}\right)} - \rho_0 c_0 \frac{\sinh(s(L - x_s - x_m)/c_0)}{s \cosh\left(\frac{s L}{c_0}\right)} \right]. \quad (5.11)$$

Podemos simplesmente chamar $x_s - x_m := y_m$ para a primeira parcela da Eq.(5.11) e $x_s + x_m := z_m$ para a segunda parcela. Dessa forma, o cálculo da transformada inversa de Laplace função de transferência dada pela Eq.5.9, segue diretamente os passos da Eq.(5.2). Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{FT_s(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(x_m, s)}{Q_b(s)}\right\} &= -\rho_0 c_0 \left[u\left(t - \frac{y_m}{c_0}\right) - u\left(t - \frac{2L - y_m}{c_0}\right) \right] g(t) \\ &+ \rho_0 c_0 \left[u\left(t - \frac{z_m}{c_0}\right) - u\left(t - \frac{2L - z_m}{c_0}\right) \right] g(t). \end{aligned} \tag{5.12}$$

Portanto, a função de transferência no domínio do tempo ($ft_s(t)$), a qual estabelece a relação entre a fonte de controle Q_b , ou seja, a fonte sonora localizada na lateral do duto e a pressão $p_m(t)$ no microfone é dada pela equação:

$$\begin{aligned} ft_s(t) &= -\rho_0 c_0 \left[u\left(t - \frac{y_m}{c_0}\right) - u\left(t - \frac{2L - y_m}{c_0}\right) \right] g(t) \\ &+ \rho_0 c_0 \left[u\left(t - \frac{z_m}{c_0}\right) - u\left(t - \frac{2L - z_m}{c_0}\right) \right] g(t) \end{aligned} \tag{5.13}$$

onde, u é a função degrau unitário definida em A.3.3 e $g(t)$ a função onda quadrada definida em A.3.2.

A fonte sonora Q_b tem as mesmas características descritas no caso 1, ou seja, $Q_b = Q_a$. É uma fonte tonal em $250Hz$ com deslocamento da partícula igual a $1,5 \times 10^{-6} m$.

A Fig.5.8 ilustra a função transferência dada pela Eq.(5.13) estimada no domínio do tempo entre $p_m(t)$ e $q_b(t)$.

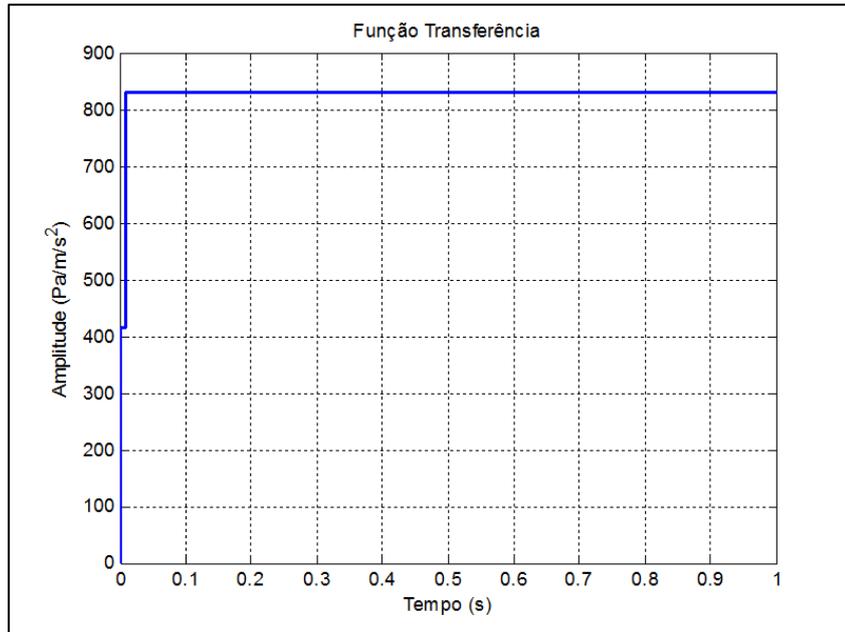


Figura 5.8: Função de transferência no domínio do tempo entre $p_m(t)$ e $q_b(t)$.

A Fig.5.9 ilustra a pressão sonora no domínio do tempo na posição do microfone, estimada a partir da função de transferência dada pela Eq.(5.13) e a fonte sonora $q_b(t)$.

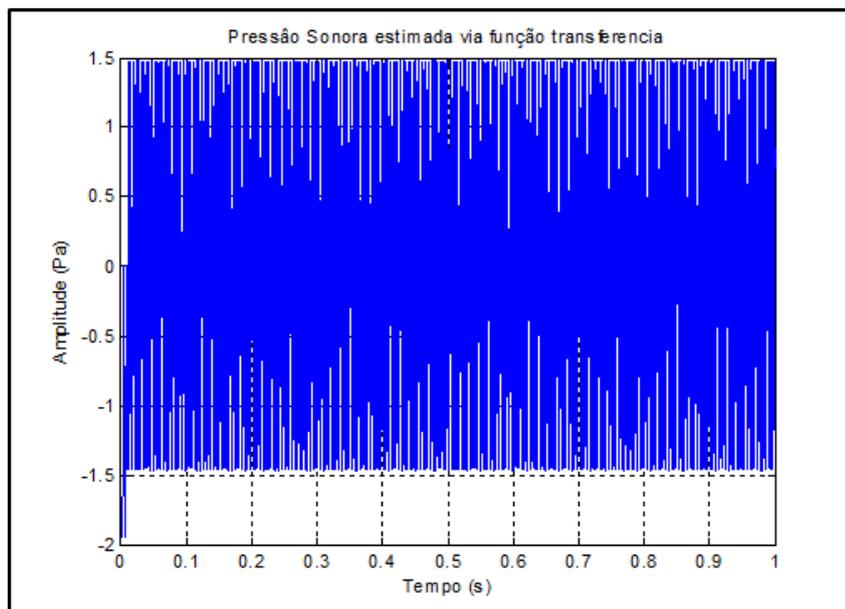


Figura 5.9: Pressão sonora estimada utilizando a função de transferência no domínio do tempo entre $p_m(t)$ e $q_b(t)$.

Analisando o início do sinal mostrado na Fig.5.9, conforme apresentado na Fig.5.10, pode-se observar que no instante de tempo 0,001709 s a onda sonora proveniente diretamente da fonte sonora atinge o microfone de 0 s até 0,001709 s, o percurso percorrido pela onda sonora corresponde a 0,6 m. No período de tempo entre 0,001709 a 0,008789 s, a pressão sonora obtida no microfone se refere apenas à onda diretamente da fonte $q_b(t)$.

No entanto, quando o instante de tempo é igual a 0,008789 s, a amplitude aumenta, ou seja, há interferência de ondas, entre a onda proveniente diretamente da fonte sonora e da onda refletida pela extremidade fechada. Veja que o instante de tempo igual a 0,008789 s, corresponde a um percurso de aproximadamente 3 m ($1,22 m + 1,82 m$).

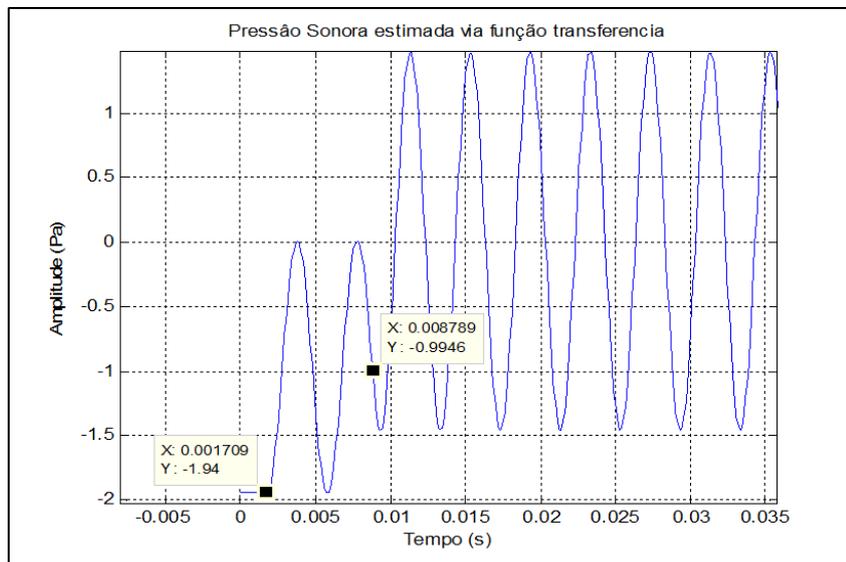


Figura 5.10: Início da oscilação do sinal mostrado na Fig.5.10.

Por se tratar de um modelo com configuração específica, a validação deste com outro modelo analítico não será realizado por não se encontrar tal equacionamento com facilidade na literatura, tal como no caso 1. No entanto, o resultado apresentado na Fig.5.10 demonstra a validade dos resultados de acordo com a física envolvida no processo.

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

6.1 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi feita uma revisão bibliográfica de pesquisas desenvolvidas na área de modelagem analítica em dutos. Durante a revisão, observou-se uma certa dificuldade em encontrar trabalhos científicos que tratam especificamente da modelagem matemática da propagação sonora em dutos. Muitos deles apresentam uma modelagem voltada para uma determinada aplicação específica e além disso, partem de modelos matemáticos e equações já determinadas.

Dessa forma, nesta dissertação, foram apresentados todos os cálculos necessários para obtenção do modelo matemático que caracteriza a propagação das ondas sonoras em dutos acústicos. As equações foram desenvolvidas detalhadamente para que as análises, por exemplo, das características de transmissão das ondas sonoras bem como seu comportamento físico e acústico, da simulação em um computador da dinâmica do sistema, das informações das características do sistema através da observação dos polos e zeros das funções de transferência e, ainda, da pressão sonora em qualquer ponto no interior do duto, sejam realizadas com mais rigor e precisão.

Os conceitos básicos e fundamentos matemáticos das características de propagação de ondas planas se propagando em dutos circulares, de pequenas dimensões transversais, em meio estacionário invíscido, foram apresentados com o objetivo de contribuir para entendimento dos capítulos que tratam da modelagem matemática no duto.

Foram estimadas as funções de transferência (FT) entre a fonte de ruído e o microfone, localizado no interior do duto para determinadas configurações e condições contorno, utilizando o método de transformada de Laplace, a partir da equação da onda. O estudo analítico dessas funções, por exemplo, para configuração de duto com extremidade aberta e fonte sonora na lateral, observando polos e zeros para analisar as frequências de resso-

nância, quando comparadas com as frequências de ressonância obtidas experimentalmente pelos autores [12], apresentaram ótima aproximação entre os dois resultados.

Considerou-se o modelo de elementos finitos para comparação dos resultados analíticos validando a função de transferência. Com o métodos de elementos finitos observou-se concordância entre os resultados. Por exemplo, verificou-se uma excelente aproximação quanto a precisão da localização dos picos de frequência em ambos os métodos, quando se analisa a função de transferência para duto fechado-fechado em elementos finitos e analítico, com fonte sonora localizada na lateral do duto. Ambos os modelos mostraram boa abordagem, embora a condição de contorno aberto adicione algumas diferenças quando do aumento da frequência de análise.

Para contribuir ainda mais com estudo do CAR, este trabalho apresentou uma formulação analítica para estimativa da pressão sonora no domínio do tempo no interior do duto. Partindo das funções de transferências no domínio da frequência, utilizou-se a transformada inversa de Laplace obtendo assim as funções de transferência para a estimativa da pressão sonora em determinada localização do duto, devido a uma fonte sonora caracterizada pela sua velocidade e volume. Validada através do método de elementos finitos.

Em geral, todos os resultados obtidos foram satisfatórios e muito importantes em relação ao que foi a proposto neste trabalho.

6.2 TRABALHOS FUTUROS

Destaca-se que o modelo matemático apresentado pela Eq.(4.193), apresenta um número infinito de polos e zero. Então, tal modelo não é adequado quando se pensa em projetos de controle que requerem modelos de dimensão finita.

Para a obtenção de modelos de dimensão finita são apresentadas como sugestão duas técnicas baseadas no modelo de dimensão infinita. São as técnicas: Expansão por série de Maclaurin e a Representação modal.

Outro ponto a ser sugerido é que as curvas de frequência de ressonância dos modelos analítico e numérico sejam ajustadas. Já que o objetivo aqui foi mostrar que os gráficos das frequências de ressonâncias obtidas a partir dos modelos analítico e numérico estão próximos um do outro.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] CARMO, L. I. C. *Efeitos do Ruído Ambiental no Organismo Humano e suas Manifestações Auditivas*. 1-45 p. Dissertação (Mestrado) — Centro de Especialização em Fonoaudiologia Clínica ? CEFAC, 1999.
- [2] SATHLER, C. *Controle Ativo de Ruído*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Departamento de Engenharia Mecânica, 2009.
- [3] BARRON, R. *Industrial Noise Control and Acoustics*. New York: Marcel Dekker, 1^o-ed., 2003.
- [4] BISTAFA, S. *Acústica Aplicada ao Controle de Ruído*. Cidade São Paulo: Edgard Blucher, 1^o- ed., 2006.
- [5] SISTEMAS de ventilação industrial. Acesso em dezembro de 2015. Disponível em: <<http://www.google.com.br/sistemas/ventilação/industrial>>.
- [6] SISTEMA de exaustão. Acesso em dezembro de 2015. Disponível em: <<http://www.google.com.br/sistema/exaustão/industrial>>.
- [7] JOÃO BOSCO LEAL. Refinaria de petróleo. Acesso em outubro de 2015. Disponível em: <<http://www.joaoboscoleal.com.br>>.
- [8] SOFTBRASIL CATALIZADORES. Catalisador automotivo. Acesso em outubro de 2015. Disponível em: <<http://www.brasilcatalisadores.com.br>>.
- [9] INDUSTRIAL SILENCER. Silenciador dissipativo. Acesso em outubro de 2015. Disponível em: <<http://www.peerlessmfg.com>>.
- [10] HANSEN, C. H. et al. Active noise and vibration control system design considerations. *Mechanics. AGH University of Science and Technology*, v. 26, n. 2, p. 37–46, 2007.

- [11] OLIVEIRA, F. *Uma metodologia para avaliação virtual da dose de exposição ao ruído no ambiente de trabalho*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Engenharia Mecânica, Uberlândia, MG, 2012.
- [12] POTA, H. R.; KELKAR, A. G. Modeling and control of acoustic ducts. *Journal of Vibration and Acoustics*, v. 122, n. 1, p. 1–9, 2000.
- [13] MIKHAIL, M. Effect of the medium viscosity on sound propagation and attenuation in ducts. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, p. 16, 1993.
- [14] MINA, B.; N., S. Sound attenuation in a circular duct of a viscous medium in the absence of mean flow. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, p. 11, 1997.
- [15] NUNEZ, I. *Controle ativo de ruído em dutos: um estudo teórico - experimental*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Engenharia Mecânica, Uberlândia, MG, 2005.
- [16] PAGNEUX, V. et al. Modelling of sound propagation in a non-uniform lined duct using a multi-modal propagation method. *Journal of Sound and Vibration*, p. 21, 2006.
- [17] AYUB, M.; TIWANA, M.; MANN, A. Propagation of sound in a duct with mean flow. *Elsevier*, p. 13, 2009.
- [18] DYKAS, S. et al. Numerical method for modeling of acoustic waves propagation. *ARCHIVES OF ACOUSTICS*, p. 14, 2010.
- [19] MAJDOUB, N. et al. Numerical modelling of the acoustic pressure inside an axisymmetric lined flow duct. *Journal of Sound and Vibration*, p. 10, 2012.
- [20] YUKSEL, A.; YILMAZ, C. Active noise control a duct with flow. *Dynamic Systems*, n. 136, 2014.
- [21] EMMERT, T. et al. tax - a flexible tool for low-order duct acoustic simulation in time and frequency domain. *Forum Acusticum*, p. 1–9, 2014.
- [22] REILLY, C. A wave expansion method for acoustic propagation in lined flow ducts. *Elsevier*, p. 10, 2015.
- [23] KINSLER, L.; FREY, A. *Fundamentals of Acoustics*. [S.l.]: John Wiley e Sons, 4^o-ed., 2000. 548 p.
- [24] MUNJAL, M. *Acoustic of Ducts and Muffler*. New York: John Wiley and Sons, 1987.

- [25] ZANDER, A.; HANSEN, C. Active control of higher-order acoustic modes in ducts. *J. Acoust*, 1992.
- [26] ERIKSSON, L. Higher order mode effects in circular ducts and expansion chambers. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 68, n. 2, p. 545–550, 1980.
- [27] ELLIOT, S.; NELSON, P. Active control of sound. *Academic Press*, 1992.
- [28] JONES, P.; KESSISSOGLU, N. Measurement and prediction of the acoustic performance of poroelastic foam filled mufflers for sleep apnoea devices. *Proceedings of 20th International Congress on Acoustics*, p. 1–16, 2010.
- [29] SINGH, S. *Tonal noise attenuation in ducts by optimising adaptive Helmholtz resonators*. Dissertação (Mestrado) — The University of Adelaide, California, 2005.
- [30] IMAKOA, S. Sheldon's ansys tips and tricks: Acoustic elements and boundary conditions. p. 1–12, 2004.
- [31] DELANY, M.; BAZLEY, E. Acoustical properties of fibrous absorbent materials. *Applied Acoustics*, v. 3, p. 105–116, 1970.
- [32] RIENSTRA, S.; HIRSCHBERG, A. An introduction to. p. 1–12, 2015.
- [33] FAHY, F. *Foundations of Engineering Acoustic*. [S.l.]: Academic Press, 2°- ed., 2001. 443 p.
- [34] OGATA, P. *Modern Control Engineering*. New Jersey: Prentice, 3°- ed., 1970.
- [35] VIANA, R. "*Função*"delta de Dirac. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Departamento de Física, 2005.
- [36] BRONSON, R.; COSTA, B. *Differential Equations*. [S.l.]: McGraw-Hill, 2006. 330-331 p.
- [37] ZILL, D.; CULLEN, M. *Equações diferenciais*. [S.l.]: Makron Books, 2005.

APÊNDICES

APÊNDICE A

DEFINIÇÕES E CONCEITOS MATEMÁTICOS

A.1 Transformada de Laplace

Definição A.1.1 (Transformada de Laplace). *A transformada de Laplace de uma função $f(t)$, denotada por $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ é definida da seguinte forma [34]:*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)dt, \quad (\text{A.1})$$

onde,

$f(t)$ é a função do tempo t , tal que $f(t) = 0$ para $t < 0$,

s é a variável complexa denominada variável subsidiária,

\mathcal{L} é o operador de Laplace,

$F(s)$ é a transformada de Laplace de $f(t)$.

A.1.1 Propriedades das transformadas de Laplace

Propriedade A.1.1.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{c_1f(t) \pm c_2g(t)\} &= c_1\mathcal{L}\{f(t)\} \pm c_2\mathcal{L}\{g(t)\} \\ &= c_1F(s) \pm c_2G(s), \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

onde c_1 e c_2 são constantes.

Propriedade A.1.2.

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0). \quad (\text{A.3})$$

Propriedade A.1.3.

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0). \quad (\text{A.4})$$

Definição A.1.2 (Transformada Laplace inversa). *A transformada inversa de Laplace de $F(s)$ designada por $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, é outra função $f(t)$ com a propriedade que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Isto é, o processo matemático de se passar de uma expressão com variável complexa para expressão no tempo de modo que $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ [34]*

A.2 Delta de Dirac

Definição A.2.1 (Delta de Dirac). *A "função" delta de Dirac é definida por meio das seguintes propriedades:*

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (\text{A.6})$$

onde, $-\infty < x < \infty$ é um real. Não define a "função" delta para argumentos complexos[35].

A "função" delta em (A.2.1) definida nas Eqs.(A.5) (A.6) é aplicada em $x = 0$. Podemos generalizar para o caso em que é aplicada em $x = a$:

$$\delta(x - a) = \begin{cases} 0, & x \neq a \\ \infty, & x = a \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (\text{A.8})$$

A rigor $\delta(x)$ não é uma função, e sim o que chamamos de distribuição, ou função generalizada. Por exemplo, se $\delta(0)$ é igual a infinito, se interpretarmos a integral em (A.6) no sentido de Riemann, como o limite de uma soma, chegaríamos a um resultado também infinito, ao invés de ser igual a um. No entanto, para muitas aplicações $\delta(x)$ obedece às regras do cálculo aplicáveis a funções bem comportadas. (VIANA, 2013).

Assim, seja $f(x)$ uma função "bem-comportada", ou seja, satisfaz a definição clássica da definição de função. Então vale a seguinte propriedade:

A.2.1 Propriedade do delta de Dirac

Seja $f(x)$ uma função "bem-comportada", ou seja, satisfaz a definição clássica da definição de função. Então,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a)f(x)dx = f(a). \quad (\text{A.9})$$

A.2.2 Propriedade do delta de Dirac (Para sub-intervalos finito da reta real)

Seja $f(x)$ uma função "bem-comportada", definida no intervalo $[c, d]$ da reta real. Então,

$$\int_c^d \delta(x - a)f(x)dx = \begin{cases} f(a) & , \text{ se } a \in [c, d] \\ 0 & , \text{ se } a \notin [c, d]. \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

A.2.3 Derivada do delta de Dirac

Embora $\delta(x)$ não seja uma função, no sentido estrito da palavra, é possível dar a ela uma interpretação rigorosa (na teoria das distribuições) tal que seja possível obter a sua derivada $\delta'(x)$, e usar os recursos do cálculo usual para trabalhar com ela. Para isso, sempre imaginamos que a função delta, bem como sua derivada, estejam multiplicadas por uma função "normal" $f(x)$ e integradas de $-\infty$ a ∞ . Portanto, segue a propriedade fundamental da derivada do delta de Dirac [35].

A.2.4 Propriedade da derivada do delta de Dirac

A derivada de primeira ordem do delta de Dirac é dada por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x - a)f(x)dx = -f'(a). \quad (\text{A.11})$$

Esta propriedade pode ser generalizada para derivada de ordem m do delta de Dirac, de modo que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^m(x - a)f(x)dx = (-1)^m f^m(a). \quad (\text{A.12})$$

A.2.5 Transformada de Laplace do delta de Dirac

A transformada de Laplace do delta de Dirac é dada por:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\delta(t-a)dt = e^{-sa}, \quad (\text{A.13})$$

onde $a > 0$. Caso $a < 0$, então $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = 0$.

A.3 Convolução

Definição A.3.1 (Convolução de duas funções). *A convolução de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ é*

$$f(x) * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt = \int_0^x f(x-t)g(t)dt, \quad (\text{A.14})$$

com $f(x) * g(x) = g(x) * f(x)$ [36].

Teorema A.3.1. *Se $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ e $\mathcal{L}\{g(x)\} = G(s)$, então*

$$\mathcal{L}\{f(x) * g(x)\} = \mathcal{L}\{f(x)\} \mathcal{L}\{g(x)\} = F(s)G(s). \quad (\text{A.15})$$

Segue diretamente do teorema que:

Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ e $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(x) * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt = \int_0^x f(x-t)g(t)dt. \quad (\text{A.16})$$

Definição A.3.2 (Função onda quadrada). *A função onda quadrada é a função periódica $f(t)$, representada graficamente por:*

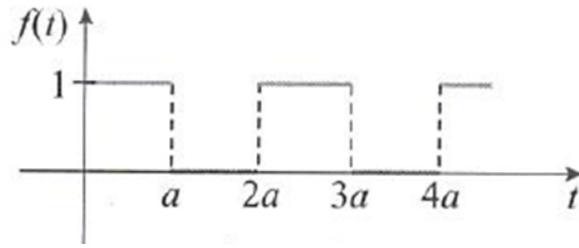


Figura A.1: Função onda quadrada. Fonte:[37]

Definição A.3.3 (Degrau unitário). *Define-se a função degrau unitário $u_a = u_a(t - a)$ para todo $t \geq 0$ como*

$$u_a(t - a) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t < a \\ 1 & , \quad t \geq a \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

A.4 Tabela das Transformadas de Laplace

A tab.(A.1-Adaptada) pode ser encontrada em [36].

Tabela A.1: Transformadas de Laplace

	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1.	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
2.	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
3.	$\delta(t - c)$	e^{-cs}
4.	$u_c f(t - c)$	$e^{-cs} F(s)$
4.	1	$\frac{1}{s}$
5.	Onda quadrada	$\frac{1}{s(1 + e^{-as})}$