Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Um Problema Elíptico no $\mathbb{R}^N$ Assintoticamente Linear e Autônomo no Infinito

por

Mayra Soares da Silva Costa

Brasília

2016

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Um problema Elíptico no R^N Assintoticamente Linear e Autônomo no Infinito.

por

Mayra Soares da Silva Costa *

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 09 de março de 2016.

Comissão Examinadora:

Ricardo Ruviaro

Prof. Dr. Ricardo Ruviaro – MAT/UnB (Orientador)

Liliane de Almeida Maia

Profa. Dra. Liliane de Almeida Maia – MAT/UnB (Membro)

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo – UFPA(Membro)

* O autor foi bolsista do PICME durante a elaboração desta dissertação.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Costa, Mayra Soares da Silva
CC837p Um Problema Elíptico no R^N Assintoticamente Linear e Autônomo no Infinito / Mayra Soares da Silva Costa; orientador Ricardo Ruviaro. -- Brasília, 2016.
83 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2016.

1. Princípio Variacional de Ekeland. 2. Sequência de Cerami. 3. Geometria do Passo da Montanha. 4. Identidade de Pohozaev. I. Ruviaro, Ricardo, orient. II. Título.

"Porque dEle, e por meio dEle, e para Ele são todas as coisas. A Ele, pois, a glória eternamente. Amém!"
Romanos 11:36

Agradecimentos

Em primeiro lugar eu rendo graças ao meu Santo Deus que a cada dia me surpreende mais, sempre me ensinando que eu preciso confiar que tudo Ele vai prover, mesmo quando não estou compreendendo as circunstâncias que me cercam. Eu jamais chegaria até aqui se Ele não estivesse a me guiar.

Agradeço aos meus familiares, principalmente a minha querida mamãe Rosangela Soares, que me esteve a aconselhar durante todo esse tempo de dedicação aos estudos. Também a meus avós maternos Maria de Lourdes e João Soares que não têm poupado esforços a me apoiar nesses últimos dias de dificuldades.

Ao meu orientador agradeço, incansavelmente, pelas diversas vezes nas quais se dispôs a me orientar e auxiliar, não apenas durante o mestrado, mas principalmente desde a graduação. Devo muito aos esforços dele.

Estendo meus agradecimentos aos demais professores do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, pelos quais nutro grande admiração. Muitos deles fizeram parte da minha formação, e pelo trabalho árduo dessa equipe tão eficiente, me tornei uma profissional mais qualificada. Também agradeço aos demais funcionários do Departamento de Matemática, que muitas vezes agiram a meu favor.

Ainda quero gradecer à *CAPES* pelo apoio financeiro no decorrer do meu curso de mestrado, e não poderia deixar de mencionar minha gratidão ao *PICME* que fomentou minha participação nesse programa de bolsas para alunos medalhistas das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

Agradeço aos meus amigos que torceram por mim, e acreditaram que eu seria capaz de alcançar tal objetivo. Especialmente àqueles que oraram por mim, e estiveram prontos a me escutar nos dias difíceis.

Enfim, agradeço a todos que estiveram presentes em minha vida durante esse período, e que de algum modo contribuíram para que esse trabalho fosse concretizado. Eu louvo ao meu Senhor e Salvador Jesus Cristo por chegar até aqui, e por todos que fizeram parte dessa história.

Dedicatória

A Meu Senhor e Salvador Jesus Cristo, que me ergueu em momentos nos quais eu jamais conseguiria me levantar sozinha.

Resumo

Nesse trabalho apresentamos um estudo sobre a caracterização do nível do Passo da Montanha para a seguinte classe de problemas autônomos, para $N \geq 2$:

$$-\Delta u = h(u), \qquad \text{em} \;\; \mathbb{R}^N,$$

em que h satisfaz algumas hipóteses específicas. Em seguida, também para $N \geq 2$, fazemos um estudo do seguinte problema:

$$-\Delta u + V(x)u = f(u), \qquad \text{em} \;\; \mathbb{R}^N,$$

em que f é assintoticamente linear, e satisfaz, assim como o potencial V, certas condições previamente estabelecidas. Nossa finalidade é, por meio de técnicas variacionais, obter uma solução positiva e uma solução de energia mínima para o problema.

Palavras-chave: Princípio Variacional de Ekeland; Sequência de Cerami; Geometria do Passo da Montanha; Identidade de Pohozaev.

Abstract

In this work, we present a study about the characterization of Mountain Pass level of the following class of autonomous problems, when $N \geq 2$:

$$-\Delta u = h(u), \qquad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

where h satisfies some specific hypothesis. After that, also for $N \geq 2$, we study the following problem:

$$-\Delta u + V(x)u = f(u), \qquad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

where f is asymptotically linear and satisfies, as well as the potential V, certain previously established conditions. Our purpose is using variational techniques to get a positive solution and a least energy solution of the problem.

Key words: Ekeland Variational Principle; Cerami Sequence; Mountain Pass Geometry; Pohozaev Identity.

Notação

B_R	bola aberta centrada em zero com raio R;
$B_R(x)$	bola aberta centrada em x com raio R;
$B_R[x]$	bola fechada centrada em x com raio R;
$u_n \to u$	convergência forte (em norma);
$u_n \rightharpoonup u$	convergência fraca;
$u_n \to u$, q.t.p. em Ω	convergência em quase todo ponto x de Ω;
$D^\alpha u = \dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{a_1} ... \partial x_N^{a_N}}$	derivada fraca com multi-índice $\alpha = (a_1, ..., a_N)$, em que $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} a_i = k$;
$\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$	gradiente de u;
$\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \eta \cdot \nabla u$	derivada normal exterior;
$\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	laplaciano de u;
$\omega \subset\subset \Omega$	$\bar{\omega}$ é compacto e está contido em Ω;
$\|\Omega\|$	medida de Ω;
$\bar{\Omega}$	fecho de Ω;
$\partial\Omega$	fronteira de Ω;

$\operatorname{diam}(\Omega)$	diâmetro de Ω;
$p' = \dfrac{p}{p-1}$	conjugado do expoente holderiano p;
$f = o(g), \quad$ quando $x \to x_0$	$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\lvert f(x) \rvert}{g(x)} = 0$;
$\operatorname{supp} f$	suporte da função f;
$C(X, Y)$	espaço das funções contínuas de X em Y;
$C^1(X, Y)$	espaço das funções continuamente diferenciáveis de X em Y;
X'	espaço dual de X;
$L^p(\Omega)$	espaço de Lebesgue das funções p-integráveis;
$L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$	$L^p_{\text{loc}}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega'), \ \ \forall\, \Omega' \subset\subset \Omega\}$;
$W^{k,p}(\Omega)$	$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \ \ \forall\, \lvert\alpha\rvert \leq k\}$;
$H^1(\Omega)$	espaço de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$;
$H^{-1}(\Omega)$	espaço dual de $H^1(\Omega)$;
$H^2(\Omega)$	espaço de Sobolev $W^{2,2}(\Omega)$;
$H^2_{\text{loc}}(\Omega)$	$W^{2,2}_{\text{loc}}(\Omega) = \{u \in W^{2,2}(\Omega'), \ \ \forall\, \Omega' \subset\subset \Omega\}$;
$\lVert u \rVert_{H^1} = \left(\lVert \nabla u \rVert_2^2 + \lVert u \rVert_2^2 \right)^{1/2}$	norma usual de $H^1(\mathbb{R}^N)$;
$\lVert u \rVert = \left(\lVert \nabla u \rVert_2^2 + \lVert V(x) u \rVert_2^2 \right)^{1/2}$	norma alternativa para $H^1(\mathbb{R}^N)$;
$\lVert u \rVert_p = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \lvert u \rvert^p \, dx \right)^{1/p}, \ \forall\, p \in [1, +\infty)$	norma usual de $L^p(\mathbb{R}^N)$;
$\lVert u \rVert_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \lvert u \rvert^p \, dx \right)^{1/p}, \ \forall\, p \in [1, +\infty)$	norma usual de $L^p(\Omega), \ \ p \in [1, \infty)$;
$\lVert u \rVert_\infty = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^N} \operatorname{ess} \lvert u(x) \rvert$	norma usual de $L^\infty(\mathbb{R}^N)$;
$\lvert \cdot \rvert$	norma do $\mathbb{R}^N$.

Sumário

Introdução

O objetivo principal desse trabalho é estudar o resultado devido a Jeanjean e Tanaka [16] que, sob certas condições, garante a existência de uma solução positiva $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ para o problema

$$-\Delta u + V(x)u = f(u), \qquad \text{em } \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

cujas principais vantagens estão em assumir hipóteses que tornam a não linearidade assintoticamente linear e o problema associado ao "infinito" autônomo. Trabalhamos por meio de métodos variacionais, isto é, associando ao problema (1) o funcional energia natural $I : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\, dx,$$

em que $F(u) = \displaystyle\int_0^u f(s)\, ds$, e com isso, a fim de obter solução fraca para (1), o objetivo é encontrar um ponto crítico não trivial para I. Para tanto, sob as hipóteses do problema, mostramos que I possui a geometria do Passo da Montanha; que existe uma sequência de Cerami no nível do Passo da Montanha para I, que é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$; e que tal sequência possui uma subsequência convergente para um ponto crítico não trivial de I. Desse modo nossos maiores desafios são mostrar a limitação da sequência de Cerami e garantir a convergência de uma subsequência para um ponto crítico não trivial.

A nossa dificuldade em provar a limitação da sequência de Cerami está relacionada com o fato de considerarmos um problema assintoticamente linear. Geralmente, para garantir a limitação da sequência de Cerami, a maioria dos autores assume a seguinte condição de superlinearidade introduzida por Ambrosetti e Rabinowitz [3]:

$$\exists\, \mu > 2 :\ 0 < \mu F(s) \leq f(s)s, \quad \text{para todo} \ \ s > 0. \tag{2}$$

Observe que a condição dada em (2) implica em

$$\liminf_{s \to +\infty} \frac{f(s)}{s^{\mu - 1}} > 0,$$

contudo, tal hipótese de crescimento é contrária àquelas com as quais trabalhamos.

Existem poucos trabalhos tratando de problemas assintoticamente lineares em domínios ilimitados. Provavelmente o primeiro resultado nessa linha é devido Stuart e Zhou [23], no qual os autores estudaram um problema como dado em (1), contudo trabalharam com a hipótese de simetria radial e com essa condição, de certo modo, o problema fica definido em $\mathbb{R}$, o que garante a compacidade. O estudo mais próximo ao que será desenvolvido nesse trabalho, foi apresentado por Jeanjean [15] e se trata de um problema da forma

$$\Delta u + Ku = f(x, u), \quad \text{em} \ \ \mathbb{R}^N,$$

em que $K > 0$ é uma constante e $f(x, s)$ é assintoticamente linear em s e periódica em $x \in \mathbb{R}^N$. Depois disso, vale mencionar que fazendo uso de algumas técnicas utilizadas em [15], Stuart e Zhou apresentaram um estudo mais detalhado sobre problemas radialmente simétricos no $\mathbb{R}^N$ (cf. [24]). E também não podemos deixar de citar como inspiração o trabalho em [25], devido a Szulkin e Zou, que trata sistemas Hamiltonianos de primeira ordem com uma parte assintoticamente linear.

Seguindo a linha de raciocínio desenvolvida em [15], a limitação da sequência de Cerami demonstrada nesse trabalho é baseada em [18]. Contudo, dessa vez devido à estrutura espectral e a falta de invariância por translações, o argumento é um pouco mais sofisticado.

No que diz respeito ao segundo desafio desse trabalho, isto é, mostrar que uma subsequência da sequência de Cerami converge para um ponto crítico não trivial, a situação é um pouco mais complicada. A grande maioria dos autores trabalha sob a hipótese de que a função $s \mapsto f(s)s^{-1}$ é não decrescente, e assim, sob tal condição, fazem uso de uma restrição natural do espaço ambiente. Como exemplo podemos citar [20] e [22]. No entanto, não seguimos essa linha, em vez disso, tiramos vantagem das propriedades de dilatação da função $t \mapsto u(x/t)$.

A ideia é explorar o problema no "infinito" que é autônomo. Para isso, analisamos problemas autônomos da forma

$$-\Delta u = h(u), \quad \text{em} \ \ \mathbb{R}^N. \tag{3}$$

Assim, a chave para avançar está nos resultados sobre problemas autônomos estabelecidos por -estycki e Lions [6] quando $N \geq 3$, e por Berestycki, Gallouët e Kavian [5], para $N = 2$. Por meio desses resultados obtemos uma condição necessária para que o problema "no infinito" possua solução. Então relacionando o problema dado em (1) com aquele associado "no infinito", desenvolvemos um argumento que, por contradição, prova a existência de um ponto crítico não trivial para I.

O presente trabalho está estruturado como segue. No Capítulo 1, apresentamos um breve estudo sobre o Princípio Variacional de Ekeland, tal ferramenta é de suma importância na obtenção da sequência de Cerami no nível do Passo da Montanha para I, utilizada na argumentação do Capítulo 3. Exibimos uma prova para o teorema principal baseada em [10], [9] e [12]. Em seguida, ainda com base nas referências anteriores, assim como em [14], mostramos como aplicar tal resultado para obter uma sequência de Cerami para determinado funcional, tanto no nível de mínimo, quanto no nível do Passo da Montanha.

No Capítulo 2, estudamos problemas autônomos como dado em (3). Para isso tomamos como referência [6] e [5] para, sob certas hipóteses, garantir uma solução de energia mínima satisfazendo a Identidade de Pohozaev (cf. Apêndice B.2). Com isso, explanamos o resultado apresentado por Jeanjean e Tanaka em [17]. Neste trabalho os autores caracterizam o nível do Passo da Montanha para o funcional natural associado ao problema dado em (3), isto é, $J : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dado por

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(u) \, dx,$$

em que $H(u) = \displaystyle\int_0^u h(s) \, ds$, mostrando que tal nível coincide com o nível de mínimo do mesmo funcional. O ponto crucial do Capítulo 2 está em construir um caminho adequado, a fim de garantir que o nível do Passo da Montanha para J esteja bem definido, esse caminho é também a ferramenta principal para provar a igualdade dos níveis supracitados. Além disso, algo que vale a pena ressaltar é que para provar a existência desse caminho específico, relacionamos resultados apresentados em [16] e [17]. Na verdade, o que fazemos é provar um resultado que é mais geral que o exigido em [17], mas que é apresentado em [16] e portanto utilizado na solução do problema dado em (1).

Por fim, no Capítulo 3, começamos por garantir que o funcional I associado ao problema (1) possui a Geometria do Passo da Montanha e para tanto utilizamos as hipóteses de crescimento assumidas sobre a função f e o potencial V. Depois de certificar que I tem a geometria do Passo da Montanha, fazemos uso dos resultados do Capítulo 1 e garantimos a existência de (u_n), uma sequência de Cerami para I no nível do Passo da Montanha. Logo após, baseados no Princípio de Concentração e Compacidade desenvolvido em [18], supomos por contradição que (u_n) é ilimitada, assim utilizamos um argumento de anulamento ou não anulamento da sequência $\left(u_n\|u_n\|^{-1}\right)$ e por meio da teoria espectral obtemos uma contradição, o que prova a limitação de (u_n).

Em seguida, a fim de mostrar que o limite fraco de uma subsequência de (u_n) é um ponto crítico não trivial I, lançamos mão dos resultados do Capítulo 2 para estudar o problema associado ao "infinito". Como $H^1(\mathbb{R}^N)$ é reflexivo, a convergência fraca de (u_n), a menos de subsequência, é garantida, e ainda sob as hipóteses do problema (1) conseguimos provar a não negatividade do limite fraco u. Portanto resta mostrar que u é não nulo. Outra vez argumentando por contradição, a ideia é mostrar uma desigualdade estrita entre a energia do funcional I e a energia do funcional associado ao problema "no infinito", quando estes são aplicados ao caminho construído no Capítulo 2. De fato, desenvolvendo esse raciocínio chegamos a uma desigualdade do tipo $c < c$, em que c é o nível do Passo da Montanha para I. Desse modo, concluímos por contradição que $u \neq 0$ é uma solução positiva para o problema. Finalizando esse trabalho, ainda no Capítulo 3, apresentamos um resultado particular que garante uma solução de energia mínima para o problema dado em (1), para isso argumentamos assumindo o resultado provado ao longo do capítulo, isto é, a existência de uma solução positiva para o problema.

Além disso, a fim de facilitar a compreensão do trabalho, acrescentamos os Apêndices A e B. No primeiro, demonstramos a diferenciabilidade dos funcionais I e J definidos acima. E no segundo apresentamos alguns resultados importantes que são usados fortemente ao longo do trabalho. Para um estudo mais aprofundado de tais resultados, deixamos suas respectivas referências.

Finalmente ressaltamos que ao longo do trabalho a letra C, bem como a letra M e algumas variantes, denotam várias constantes positivas cujo valor exato pode mudar de uma linha para outra, mas não é essencial para a análise do problema. Também informamos que quando tomamos uma subsequência de (u_n), ainda a denotamos por (u_n).

Capítulo 1

O Princípio Variacional de Ekeland

Nesse primeiro capítulo vamos abordar o Princípio Variacional de Ekeland, que é uma ferramenta variacional bastante usada na resolução de problemas elípticos, a fim de obter um ponto crítico não trivial para determinado funcional. Esse estudo será baseado nos trabalhos [10], [9] e [12].

1.1 Sequências Palais-Smale e Sequências de Cerami

A aplicação do Princípio Variacional de Ekeland tem como objetivo, sob certas hipóteses, a obtenção de uma sequência Palais-Smale ou uma sequência de Cerami, para um determinado funcional. Nessa seção vamos definir o conceito de sequência Palais-Smale e sequência de Cerami.

Definição 1.1. *Seja X um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$, um funcional de classe C^1. Suponha que existam $c \in \mathbb{R}$ e $(u_n) \subset X$ tais que*

$$I(u_n) \to c \quad e \quad \|I'(u_n)\| \to 0,$$

então dizemos que (u_n) é uma sequência Palais-Smale no nível c para I, ou de forma abreviada, (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para I. Além disso, dizemos que I satisfaz a condição Palais-Smale no nível c, quando toda sequência $(PS)_c$ para I, possui subsequência convergente.

Definição 1.2. *Seja X um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$, um funcional de classe C^1. Suponha que existam $c \in \mathbb{R}$ e $(u_n) \subset X$ tais que*

$$I(u_n) \to c \quad e \quad \|I'(u_n)\|_{H^{-1}}\big(1 + \|u_n\|\big) \to 0,$$

então dizemos que (u_n) é uma sequência de Cerami no nível c para I, ou de forma abreviada, (u_n) é uma sequência $(Ce)_c$ para I. Além disso, dizemos que I satisfaz a condição de Cerami no nível c, quando toda sequência $(Ce)_c$ para I, possui subsequência convergente.

Observe que toda sequência $(Ce)_c$ para I, é também uma sequência $(PS)_c$ para I. Além disso, por meio de uma dessas sequências, utilizando algum argumento de compacidade, é possível concluir que, a menos de subsequência, ela converge para um ponto crítico do funcional em questão, o que fornece uma solução para o problema associado ao funcional.

1.2 Uma Sequência de Cerami no Nível de Energia Mínima

O objetivo dessa seção é enunciar e provar o Princípio Variacional de Ekeland, e mais ainda garantir a existência de uma sequência de Cerami no nível de energia mínima para um funcional dado.

Teorema 1.1. *Sejam $\big(X, d\big)$ um espaço métrico completo e $I : x \to (-\infty, +\infty]$ um funcional semicontínuo inferiormente. Suponha que I seja limitado inferiormente, ou seja, $\inf\limits_{u\in X} I(u) > -\infty$. Então dado $\varepsilon > 0$ e $v_0 \in X$ tais que*

$$I(v_0) \leq \inf_{u\in X} I(u) + \varepsilon, \tag{1.1}$$

existe $u_\varepsilon \in X$, tal que

(a) $I(u_\varepsilon) \leq I(v_0) \leq \inf\limits_{u\in X} I(u) + \varepsilon$;
(b) $d(v_0, u_\varepsilon) \leq \sqrt{\varepsilon}$;
(c) Para cada $w \in X, w \neq u_\varepsilon$, vale que

$$I(u_\varepsilon) < I(w) + \sqrt{\varepsilon}\, d(u_\varepsilon, w).$$

Prova. Primeiramente considere em $\big(X, d\big)$ a seguinte relação de ordem parcial:

$$w \prec v \Leftrightarrow I(w) \leq I(v) - \sqrt{\varepsilon}\, d(w, v).$$

Vamos mostrar que $\prec$ é reflexiva, antissimétrica e transitiva. De fato, dado $w \in X$, vale que

$$I(w) = I(w) - \sqrt{\varepsilon}\, d(w, w),$$

ou seja, $w \prec w$, e com isso, vemos que $\prec$ é reflexiva. Também, dados $w, v \in X$ tais que $w \prec v$ e $v \prec w$, segue que

$$I(w) \leq I(v) - \sqrt{\varepsilon}\, d(w, v) \quad \text{e} \quad I(v) \leq I(w) - \sqrt{\varepsilon}\, d(v, w),$$

logo, somando tais desigualdades, obtemos que

$$0 \leq -2\sqrt{\varepsilon}\, d(w, v) \leq 0,$$

ou seja, $d(w, v) = 0$ e $w = v$, assim $\prec$ é antissimétrica. Por fim, dados w, v e $u \in X$ tais que $w \prec v$ e $v \prec u$, vale que

$$I(w) \leq I(v) - \sqrt{\varepsilon}\, d(w, v) \quad \text{e} \quad I(v) \leq I(u) - \sqrt{\varepsilon}\, d(v, u).$$

Então somando tais desigualdades e aplicando a desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned} I(w) &\leq I(u) - \sqrt{\varepsilon}\, d(w,v) - \sqrt{\varepsilon}\, d(v,u) \\ &\leq I(u) - \sqrt{\varepsilon}\, d(w,u), \end{aligned}$$

isto é, $w \prec u$ e $\prec$ é transitiva. Assim, concluímos que $\prec$ é relação de ordem parcial.

Agora considere a sequência (A_n) de subconjuntos de X, de modo que

$$A_0 = \{w \in X : w \prec v_0\},$$

logo $v_0 \in A_0$ e com isso $A_0 \neq \varnothing$. Então, pela definição de ínfimo, tome $v_1 \in A_0$, tal que

$$I(v_1) \leq \inf_{u \in A_0} I(u) + 1,$$

e assim defina

$$A_1 = \{w \in X : w \prec v_1\}.$$

Analogamente, note que $v_1 \in A_1$ e $A_1 \neq \varnothing$. Assim, pela definição de ínfimo tome $v_2 \in A_1$, tal que

$$I(v_2) \leq \inf_{u \in A_1} I(u) + \frac{1}{2}.$$

Com isso, defina

$$A_2 = \{w \in X : w \prec v_2\},$$

e procedendo recursivamente, para todo $n \in \mathbb{N}$, como $v_{n-1} \in A_{n-1}$, então $A_{n-1} \neq \varnothing$, assim tomando $v_n \in A_{n-1}$ tal que

$$I(v_n) \leq \inf_{u \in A_{n-1}} I(u) + \frac{1}{n}, \tag{1.2}$$

defina

$$A_n = \{w \in X : w \prec v_n\}.$$

E observe que $A_n \supset A_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pois dado $w \in A_{n+1}$ segue que $w \prec v_{n+1}$ e como $v_{n+1} \in A_n$, então $v_{n+1} \prec v_n$ e pela transitividade $w \prec v_n$, e $w \in A_n$.

Além disso, A_n é fechado, pois dada $(w_k) \subset A_n$ tal que $w_k \to w \in X$, quando $k \to \infty$, segue que $w_k \prec v_n$ e assim

$$I(w_k) \leq I(v_n) - \sqrt{\varepsilon}\, d(w_k, v_n).$$

Também, como I é semicontínuo inferiormente, então se $k \to \infty$, vale que

$$\begin{aligned} I(w) &\leq \liminf_{k\to\infty} I(w_k) \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \left[I(v_n) - \sqrt{\varepsilon}\, d(w_k, v_n) \right] \\ &= I(v_n) - \sqrt{\varepsilon} \limsup_{k\to\infty} d(w_k, v_n) \\ &= I(v_n) - \sqrt{\varepsilon}\, d(w, v_n), \end{aligned}$$

implicando que $w \prec v_n$, e por definição $w \in A_n$, portanto A_n é fechado. Agora afirmamos que

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \neq \varnothing.$$

De fato, note que $v_k \in A_n$ para $k \geq n$, além disso, dados $k > l \geq n$ segue que $A_n \supset A_l \supset A_k$, logo $v_k \prec v_l$ e por (1.2), obtemos que

$$\begin{aligned} d(v_k, v_l) &\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\Big[I(v_l) - I(v_k)\Big] \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\Big[I(v_l) - \inf_{u \in A_{l-1}} I(u)\Big] \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\, l}, \end{aligned}$$

portanto (v_n) é sequência de Cauchy em A_n, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim (v_n) converge para $u_\varepsilon \in A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $u_\varepsilon \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \neq \varnothing$. E ainda afirmamos que $\operatorname{diam}(A_n) \to 0$, quando $n \to \infty$, logo concluímos que

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \{u_\varepsilon\}.$$

De fato, dado $w \in A_n$ vale que $w \prec v_n \prec v_{n-1}$ e assim

$$\sqrt{\varepsilon}\, d(w, v_n) \leq I(v_n) - I(w).$$

Como $w \in A_n \subset A_{n-1}$, então $-I(w) \leq -\inf_{u \in A_{n-1}} I(u)$ e por (1.2), vale que

$$\begin{aligned} d(w, v_n) &\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[\inf_{u \in A_{n-1}} I(u) + \frac{1}{n} - \inf_{u \in A_{n-1}} I(u)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\, n}. \end{aligned}$$

Com isso, para quaisquer $w, v \in A_n$, segue que

$$d(w, v) \leq d(w, v_n) + d(v_n, v) \leq \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}\, n}.$$

Ou seja,

$$0 \leq \lim_{n \to \infty} \sup_{w, v \in A_n} d(w, v) \leq \lim_{n \to \infty} \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}\, n} = 0.$$

Dessa forma, como $\operatorname{diam}(A_n) = \sup_{w, v \in A_n} d(w, v)$, então $\operatorname{diam}(A_n) \to 0$, quando $n \to \infty$. Portanto, concluímos que $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \{u_\varepsilon\}$, caso contrário, haveria $v \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$, com $v \neq u_\varepsilon$, e assim $\operatorname{diam}(A_n) \geq d(v, u_\varepsilon) > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, contradizendo que $\operatorname{diam}(A_n) \to 0$, quando $n \to \infty$.

Por fim, vamos mostrar que u_ε satisfaz (a), (b) e (c). De fato, como $u_\varepsilon \in A_0$, por definição segue que $u_\varepsilon \prec v_0$ e assim

$$I(u_\varepsilon) \leq I(v_0) - \sqrt{\varepsilon}\, d(u_\varepsilon, v_0) < I(v_0),$$

o que prova (a). Também observe que $-I(u_\varepsilon) \leq -\inf_{u\in X} I(u)$ e por (1.1), vale que

$$\begin{aligned} d(v_0,u_\varepsilon) &\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\Big[I(v_0)-I(u_\varepsilon)\Big] \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[\inf_{u\in X} I(u)+\varepsilon-\inf_{u\in X} I(u)\right] \\ &\leq \sqrt{\varepsilon}, \end{aligned}$$

o que prova (b). E por último, dado $w \neq u_\varepsilon$, note que w não está relacionado com u_ε, caso contrário, valeria que

$$w \prec u_\varepsilon \prec v_n, \quad \forall \ n \in \mathbb{N},$$

e com isso, $w \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \{u_\varepsilon\}$, o que é uma contradição. Assim, como $w \not\prec u_\varepsilon$, vale que

$$I(w) > I(u_\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon}\, d(w,u_\varepsilon),$$

o que prova (c), e completa o resultado. ■

Para o caso particular no qual $\big(X, \|\cdot\|\big)$ é um espaço de Banach, a fim de utilizar o Teorema 1.1 para provar a existência de uma sequência de Cerami para I no nível $m = \inf_{u\in X} I(u)$, vamos definir uma nova métrica $\delta : X \times X \to \mathbb{R}^+$ sobre X e mostrar que a métrica dada pela norma e a métrica δ se relacionam.

Definição 1.3. *Seja $c \in C([0,1];X)$ uma curva qualquer, definimos o comprimento geodésico $\ell(c)$ da curva c como sendo dado por:*

$$\ell(c) = \int_0^1 \frac{\|c'(t)\|}{1+\|c(t)\|}\, dt.$$

Com isso, podemos definir também $\delta : X \times X \to \mathbb{R}^+$, a distância geodésica entre dois pontos u e $v \in X$, como sendo dada por

$$\delta(u,v) := \inf\left\{\ell(c) : c \in C^1([0,1],X),\ c(0)=u,\ c(1)=v\right\}. \tag{1.3}$$

Claramente $\delta(u,v) \leq \|u-v\|$, pois dado $\tilde{c}(t) = (1-t)u - tv \in C^1([0,1];X)$, segue que $\|\tilde{c}'(t)\| = \|u-v\|$, logo

$$\ell(\tilde{c}) = \int_0^1 \frac{\|u-v\|}{1+\|(1-t)u-tv\|}\, dt \leq \|u-v\|,$$

e aplicando o ínfimo,

$$\delta(u,v) \leq \|u-v\|.$$

Por outro lado, dado qualquer conjunto $B \subset X$ limitado na norma de X, existe $R > 0$, tal que $\|x\| \leq R$, para todo $x \in B$, isto é, $B \subset B_R[0] \subset X$. Assim, dado $c \in C^1([0,1], B_R[0])$, tal que $c(0) = u$ e $c(1) = v$, segue que $\|c(t)\| \leq R, \quad \forall\, t \in [0,1]$, e fazendo $\beta = \dfrac{1}{1+R}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\ell(c) &= \int_0^1 \frac{\|c'(t)\|}{1+\|c(t)\|}\, dt \\
&\geq \frac{1}{1+R} \int_0^1 \|c'(t)\|\, dt \\
&\geq \frac{1}{1+R} \left\| \int_0^1 c'(t)\, dt \right\| \\
&= \frac{1}{1+R} \Big\| c(1) - c(0) \Big\| \\
&= \beta \|u - v\|.
\end{aligned}$$

Com isso, aplicando o ínfimo sobre todos os caminhos $c \in C^1([0,1], B_R[0])$, concluímos que existe $\beta > 0$, tal que

$$\delta(u,v) \geq \beta\|u - v\|, \quad \forall\ u, v \in B.$$

Dessa forma, $B \subset X$ é limitado na métrica da norma de X se, e somente se, B é limitado na métrica δ. Mais ainda, qualquer sequência de Cauchy em δ, é sequência de Cauchy na métrica da norma, logo é convergente na métrica da norma, pois $\big(X, \|\cdot\|\big)$ é espaço de Banach, e pela relação acima entre as métricas, converge também em δ. Portanto, concluímos que $\big(X, \delta\big)$ é um espaço métrico completo, e podemos aplicar sobre ele o Teorema 1.1.

Corolário 1.1. *Sejam $\big(X, \|\cdot\|\big)$ um espaço de Banach, e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1, e limitado inferiormente. Então existe uma sequência $(u_n) \subset X$ tal que*

$$I(u_n) \to \inf_{u \in X} I(u) = m$$

e

$$\big(1 + \|u_n\|\big)\|I'(u_n)\|_{X'} \to 0.$$

Isto é, existe uma sequência de Cerami para I no nível m.

Prova. Como $\big(X, \|\cdot\|\big)$ é espaço de Banach, pelas considerações acima, concluímos que $\big(X, \delta\big)$ é um espaço métrico completo. Também por hipótese I é semicontínuo inferiormente e é limitado inferiormente. Com isso, dado $n \in \mathbb{N}$, tome $\varepsilon = \dfrac{1}{n^2}$, e então o Teorema 1.1 garante a existência de $u_n \in X$, tal que por (a), vale que

$$I(u_n) \leq \inf_{u \in X} I(u) + \frac{1}{n^2},$$

e por (c), vale que

$$I(w) \geq I(u_n) - \frac{1}{n}\delta(w, u_n), \quad \forall\ w \in X.$$

Desse modo, obtemos uma sequência $(u_n) \subset X$, com $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\inf_{u \in X} I(u) \leq I(u_n) \leq \inf_{u \in X} I(u) + \frac{1}{n^2}, \quad \forall\ n \in \mathbb{N},$$

portanto, segue que

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) = \inf_{u\in X} I(u).$$

Além disso, fazendo $w = u_n + tu$, para $t > 0$ e $u \in X$ arbitrários, segue que

$$I(u_n + tu) - I(u_n) \geq -\frac{1}{n}\,\delta(u_n, u_n + tu).$$

Assim dividindo ambos os lados da desigualdade acima por t, e relembrando a definição da distância geodésica δ, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\Big[I(u_n + tu) - I(u_n)\Big] &\geq -\frac{1}{nt}\,\delta(u_n, u_n + tu)\\ &\geq -\frac{1}{n}\|u\|\int_0^t \frac{ds}{1 + \|u_n + su\|},\end{aligned}$$

então, fazendo $t \to 0$, como I é de classe C^1, concluímos que

$$I'(u_n)u \geq -\frac{1}{n}\big(1 + \|u_n\|\big)^{-1}\|u\|.$$

Agora como u é arbitrário, trocando u por $-u$, obtemos também

$$I'(u_n)u \leq \frac{1}{n}\big(1 + \|u_n\|\big)^{-1}\|u\|,$$

e assim,

$$\frac{|I'(u_n)u|}{\|u\|} \leq \frac{1}{n}\big(1 + \|u_n\|\big)^{-1},$$

o que implica em

$$0 \leq \big(1 + \|u_n\|\big)\|I'(u_n)\|_{X'} \leq \frac{1}{n}.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} \big(1 + \|u_n\|\big)\|I'(u_n)\|_{X'} = 0.$$

E dessa forma, (u_n) é a sequência de Cerami procurada. ■

1.3 Uma Sequência de Cerami no Nível do Passo da Montanha

Nessa seção, vamos definir a geometria do Passo da Montanha e o nível do Passo da Montanha para um dado funcional $I : X \to \mathbb{R}$, em que $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach. Em seguida, vamos usar o Princípio Variacional de Ekeland para provar a existência de uma sequência de Cerami no nível do Passo da Montanha para um funcional I que possua a geometria do Passo da Montanha.

Definição 1.4. *Considere $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach, e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional tal que $I(0) = 0$, dizemos que I possui a geometria do Passo da Montanha, ou abreviadamente, a geometria PM, quando I satisfaz:*

(PM1) *Existem $\rho, \alpha > 0$ tais que $I(u) \geq \alpha > 0$, para todo $u \in X$, com $\|u\| = \rho$;*

(PM2) *Existe $e \in X$, com $\|e\| > \rho$, tal que $I(e) < 0$.*

Definição 1.5. *Considere $\big(X, \|\cdot\|\big)$ um espaço de Banach, e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional que possui a geometria do Passo da Montanha, então fica bem definido o nível do Passo da Montanha para I, ou abreviadamente, o nível PM para I, dado por*

$$c = \inf_{\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}} \max_{t \in [0,1]} I(\tilde{\gamma}(t)), \tag{1.4}$$

em que

$$\tilde{\Gamma} = \{\tilde{\gamma} \in C([0,1], X) \ ; \ \tilde{\gamma}(0) = 0, \ \tilde{\gamma}(1) = e\}. \tag{1.5}$$

Note que, de fato, $\tilde{\Gamma} = \{\tilde{\gamma} \in C([0,1], X) \ ; \ \tilde{\gamma}(0) = 0, \ \tilde{\gamma}(1) = e\} \neq \varnothing$, pois se $\tilde{\gamma}(t) = te$, então $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$. Além disso, pela definição de c concluímos que $c \geq \alpha > 0$. A seguir apresentaremos um resultado que é de suma importância na resolução de inúmeros problemas, pois garante a existência de uma sequência de Cerami no nível PM para um funcional de classe C^1, desde que este satisfaça a geometria PM.

Teorema 1.2. *Sejam $\big(X, \|\cdot\|\big)$ um espaço de Banach, e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 que possui a geometria do Passo da Montanha, então existe uma sequência de Cerami para I no nível do Passo da Montanha, isto é, existe $(u_n) \subset X$, tal que*

$$I(u_n) \to c \quad e \quad \|I'(u_n)\|\big(1 + \|u_n\|\big) \to 0,$$

quando $n \to \infty$, em que c é dado por (1.4).

Prova. A ideia é seguir os passos do Corolário 1.1 para obter a sequência de Cerami procurada. Para isso, dado $\tilde{\Gamma} \subset C([0,1], X)$, definido em (1.5), considere-o como subespaço métrico de $C([0,1], X)$ com a métrica dada pela norma $\|\cdot\|_\infty$, ou seja, $\big(\tilde{\Gamma}, d\big)$ é um espaço métrico tal que

$$d(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2) = \|\tilde{\gamma}_1 - \tilde{\gamma}_2\|_\infty = \max_{t \in [0,1]} \|\tilde{\gamma}_1(t) - \tilde{\gamma}_2(t)\|, \quad \forall \ \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 \in \tilde{\Gamma}.$$

Assim, como $C([0,1], X)$ é espaço métrico completo, basta mostrar que $\tilde{\Gamma}$ é fechado, com respeito a métrica d, para garantir que $\big(\tilde{\Gamma}, d\big)$ é um espaço métrico completo. Dessa forma, dada $(\tilde{\gamma}_n) \subset \tilde{\Gamma}$ uma sequência convergindo para $\tilde{\gamma}$ em $(C([0,1], X)$, quando $n \to \infty$, note que $\tilde{\gamma}_n(0) = 0$ e $\tilde{\gamma}_n(1) = e$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo como $\|\tilde{\gamma}_n - \tilde{\gamma}\|_\infty \to 0$, quando $n \to \infty$, então $\tilde{\gamma}(0) = 0$ e $\tilde{\gamma}(1) = e$, assim $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$, e segue que $\tilde{\Gamma}$ é fechado, portanto $\big(\tilde{\Gamma}, d\big)$ é um espaço métrico completo. Com isso, podemos utilizar a métrica d, que advém da norma, e construir a métrica geodésica $\delta_{\tilde{\Gamma}}$, para $\tilde{\Gamma}$. Como visto na seção anterior, uma vez que $\big(\tilde{\Gamma}, d\big)$ é espaço métrico completo, segue que $\big(\tilde{\Gamma}, \delta_{\tilde{\Gamma}}\big)$ é também um espaço métrico completo, logo podemos aplicar o Teorema 1.1 para esse espaço.

Agora defina o funcional $\Psi : \tilde{\Gamma} \to \mathbb{R}$, dado por

$$\Psi(\tilde{\gamma}) = \max_{t \in [0,1]} I(\tilde{\gamma}(t)). \tag{1.6}$$

Para cada $t \in [0,1]$ fixado, considere $X_t = \left\{\tilde{\gamma}(t)\ ; \tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}\right\} \subset X$. Como por hipótese $I : X \to \mathbb{R}$ é de classe C^1, então é semicontínuo inferiormente, e denotando por I_t a restrição $I|_{X_t}$, segue que $I_t : X_t \to \mathbb{R}$ é semicontínuo inferiormente. Mas observe que $\Psi = \max\limits_{t\in[0,1]} I_t$, e como I_t é semicontínuo inferiormente, para todo $t \in [0,1]$, segue que Ψ é semicontínuo inferiormente.

Por outro lado, dado $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$, como I satisfaz a geometria PM, e vale $\tilde{\gamma}(0) = 0$, $\|\tilde{\gamma}(1)\| > \rho$ e $\tilde{\gamma} \in C([0,1], X)$, então existe $t_0 \in (0,1)$ com $\|\tilde{\gamma}(t_0)\| = \rho$, e por $(PM1)$, segue que

$$\Psi(\tilde{\gamma}) \geq I(\tilde{\gamma}(t_0)) \geq \alpha > 0,$$

assim Ψ é limitado inferiormente. Com isso estamos nas hipóteses do Teorema 1.1, e procedendo para o espaço $\left(\tilde{\Gamma}, \delta_{\tilde{\Gamma}}\right)$ de forma semelhante a prova do Corolário 1.1 , dado $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon = \dfrac{1}{n^2}$, existe $\tilde{\gamma}_n \in \tilde{\Gamma}$, tal que

$$\Psi(\tilde{\gamma}_n) \leq \inf_{\tilde{\gamma}\in\tilde{\Gamma}} \Psi(\tilde{\gamma}) + \frac{1}{n^2} = c + \frac{1}{n^2}, \tag{1.7}$$

e

$$\Psi(\gamma) \geq \Psi(\tilde{\gamma}_n) - \frac{1}{n}\delta_{\tilde{\Gamma}}(\gamma, \tilde{\gamma}_n), \quad \forall \ \gamma \in \tilde{\Gamma}. \tag{1.8}$$

Portanto definindo

$$M_n = \left\{t \in [0,1]\ ;\ I(\tilde{\gamma}_n(t)) = \max_{s\in[0,1]} I(\tilde{\gamma}_n(s)) = \Psi(\tilde{\gamma}_n)\right\},$$

e tomando $\tilde{t}_n \in M_n$, por (1.7) segue que

$$c \leq I(\tilde{\gamma}_n(\tilde{t}_n)) \leq c + \frac{1}{n^2}, \quad \forall \ n \in \mathbb{N},$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty} I(\tilde{\gamma}_n(\tilde{t}_n)) = c. \tag{1.9}$$

Além disso, fixado $n \in \mathbb{N}$, considere $\tilde{\gamma} \in C([0,1], X)$ arbitrário, tal que $\|\tilde{\gamma}\|_{\tilde{\Gamma}} = \|\tilde{\gamma}(\tilde{t}_n)\|$, e $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1) = 0$, então fazendo $\gamma(s) = \tilde{\gamma}_n(s) + t\tilde{\gamma}(s)$, com $t > 0$, como $\tilde{\gamma}_n \in \tilde{\Gamma}$, segue que $\gamma \in \tilde{\Gamma}$, e para t suficientemente pequeno, pela continuidade vale que $\max\limits_{s\in[0,1]} I(\gamma(s)) = I(\gamma(\tilde{t}_n)) = I\left(\tilde{\gamma}_n(\tilde{t}_n) + t\tilde{\gamma}(\tilde{t}_n)\right)$, assim por (1.8) segue que

$$I\left(\tilde{\gamma}_n(\tilde{t}_n) + t\tilde{\gamma}(\tilde{t}_n)\right) - I(\tilde{\gamma}_n(\tilde{t}_n)) \geq -\frac{1}{n}\delta_{\tilde{\Gamma}}\left(\tilde{\gamma}_n + t\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}_n\right).$$

Com isso, dividindo ambos os lados da desigualdade acima por t, e relembrando a definição da distância geodésica $\delta_{\tilde{\gamma}}$, e a definição de $\|\cdot\|_{\tilde{\Gamma}}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\Big[I\left(\tilde{\gamma}_n(\tilde{t}_n) + t\tilde{\gamma}(\tilde{t}_n)\right) - I(\tilde{\gamma}_n(\tilde{t}_n))\Big] &\geq -\frac{1}{nt}\delta_{\tilde{\Gamma}}\left(\tilde{\gamma}_n + t\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}_n\right) \\
&\geq -\frac{1}{nt}\int_0^t \frac{\|\tilde{\gamma}\|_{\tilde{\Gamma}}}{1 + \|\tilde{\gamma}_n + s\tilde{\gamma}\|_{\tilde{\Gamma}}}\,ds \\
&\geq -\frac{1}{nt}\int_0^t \frac{\|\tilde{\gamma}(\tilde{t}_n)\|}{1 + \|\tilde{\gamma}_n(\tilde{t}_n) + s\tilde{\gamma}(\tilde{t}_n)\|}\,ds \\
&\geq -\frac{1}{nt}\|\tilde{\gamma}(\tilde{t}_n)\|\int_0^t \frac{ds}{1 + \|\tilde{\gamma}_n(\tilde{t}_n) + s\tilde{\gamma}(\tilde{t}_n)\|}.
\end{aligned}$$

E como I é de classe C^1, aplicando o limite com $t \to 0$, obtemos que

$$I'(\tilde{\gamma}_n(\tilde{t}_n))\tilde{\gamma}(\tilde{t}_n) \geq -\frac{1}{n}\Big(1 + \|\tilde{\gamma}_n(\tilde{t}_n)\|\Big)^{-1}\|\tilde{\gamma}(\tilde{t}_n)\|.$$

Agora como $\tilde{\gamma}$ é arbitrário, trocando $\tilde{\gamma}$ por $-\tilde{\gamma}$, obtemos

$$I'(\tilde{\gamma}_n(\tilde{t}_n))\tilde{\gamma}(\tilde{t}_n) \leq \frac{1}{n}\Big(1 + \|\tilde{\gamma}_n(\tilde{t}_n)\|\Big)^{-1}\|\tilde{\gamma}(\tilde{t}_n)\|,$$

e assim,

$$\frac{\Big|I'(\tilde{\gamma}_n(\tilde{t}_n))\tilde{\gamma}(\tilde{t}_n)\Big|}{\|\tilde{\gamma}(\tilde{t}_n)\|} \leq \frac{1}{n}\Big(1 + \|\tilde{\gamma}_n(\tilde{t}_n)\|\Big)^{-1},$$

o que implica em

$$0 \leq \Big(1 + \|\tilde{\gamma}_n(\tilde{t}_n)\|\Big)\|I'(\tilde{\gamma}_n(\tilde{t}_n))\|_{X'} \leq \frac{1}{n}.$$

Como $n \in \mathbb{N}$, fixado acima, é qualquer, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \|\tilde{\gamma}_n(\tilde{t}_n)\|\Big)\|I'(\tilde{\gamma}_n(\tilde{t}_n))\|_{X'} = 0. \tag{1.10}$$

Por fim, considerando $(u_n) \subset X$, tal que $u_n = \tilde{\gamma}_n(\tilde{t}_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, por (1.9) e (1.10) segue que

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) = c \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \big(1 + \|u_n\|\big)\|I'(u_n)\|_{X'} = 0.$$

Portanto obtemos uma sequência de Cerami para I no nível PM. ■

Desse modo, encerramos o capítulo com a garantia da existência de uma sequência de Cerami no nível PM para um funcional I sob as hipóteses do Teorema 1.2.

Capítulo 2

Um Problema Autônomo no $\mathbb{R}^N$

O objetivo desse capítulo é analisar determinada classe de problemas autônomos, a fim de relacionar o nível do Passo da Montanha com o nível de mínimo do funcional associado ao problema. Para isso faremos uso de resultados clássicos devidos a Berestycki e Lions [6] para $N \geq 3$, e a Berestycki, Gallouët e Kavian [5], para $N = 2$. Considere o problema apresentado em (3), na introdução desse trabalho, isto é,

$$-\Delta u = h(u), \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

para o qual vamos assumir as seguintes hipóteses sobre h:

(h0) $\quad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e ímpar;

(h1) $\quad$ se $N \geq 3$, $-\infty < \liminf\limits_{s \to 0} \dfrac{h(s)}{s} < \limsup\limits_{s \to 0} \dfrac{h(s)}{s} = -L < 0$,

se $N = 2$, $\lim\limits_{s \to 0} \dfrac{h(s)}{s} = -L \in (-\infty, 0)$;

(h2) $\quad$ se $N \geq 3$, $\lim\limits_{s \to +\infty} |h(s)| s^{-(N+2)/(N-2)} = 0$,

se $N = 2$, para cada $\alpha > 0$ existe um $C_\alpha > 0$, tal que

$$|h(s)| \leq C_\alpha e^{\alpha s^2}, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Associamos ao problema em questão o funcional natural $J : H \to \mathbb{R}$, dado por

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - H(u)\Big)\, dx, \tag{2.1}$$

em que $H(u) = \displaystyle\int_0^u h(s)\, ds$. Sob as hipóteses (h0)-(h2) podemos concluir que J está bem definido, e além disso, é de classe C^1 (cf. Apêndice A.1). Almejamos mostrar que J possui a geometria do Passo da

Montanha, e assim garantir que fica bem definido o nível do Passo da Montanha para J, como dado por

$$b = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)), \tag{2.2}$$

em que

$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^N)); \gamma(0) = 0, J(\gamma(1)) < 0 \right\}, \tag{2.3}$$

pois estamos interessados pelo caso em que b é um nível crítico para o funcional J.

Dizemos que uma solução w para o problema dado em (3) é uma solução com energia mínima se $J(w) = m$, em que

$$m = \inf \left\{ J(u); u \neq 0 \ \text{ e } J'(u) = 0 \right\}. \tag{2.4}$$

Note que m é um nível crítico para o funcional J. Dessa forma, o principal resultado desse capítulo está enunciado no teorema a seguir, e consiste em caracterizar o nível PM para J, relacionando-o com o nível crítico de energia mínima para J.

Teorema 2.1. *Sob as hipóteses (h0)-(h2), segue que*

$$b = m,$$

onde $m, b > 0$, são o nível crítico de energia mínima para J, e o nível PM para J, definidos em (2.2) e (2.4), respectivamente. Além disso, para qualquer solução com energia mínima $w(x)$ para o problema dado em (3), existe um caminho $\gamma \in \Gamma$ tal que $w(x) \in \gamma([0,1])$ e

$$\max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)) = J(w) = m. \tag{2.5}$$

A fim de provar o Teorema 2.1, vamos proceder como Berestycki e Lions em [6], para $N \geq 3$, e como Berestycki, Gallouët e Kavian em [5], para $N = 2$, usando as propriedades de dilatação da função $u_t(x) = u(x/t)$. Vamos utilizar tais resultados para obter uma solução com energia mínima para o problema dado em (3), e então construir um caminho $\gamma \in \Gamma$ que satisfaça (2.5). Em seguida, vamos usar a Identidade de Pohozaev (cf. apêndice B.2), para concluir que $b = m$, e assim completar o resultado.

2.1 A Geometria do Passo da Montanha

Nessa seção vamos mostrar que o funcional J definido em (2.1) possui a geometria do Passo da Montanha. Para isso vamos provar dois resultados. O primeiro garantirá que J satisfaz a primeira condição PM, e o segundo mostrará que J satisfaz a segunda condição PM. Portanto com esses dois resultados cumprimos o objetivo da seção.

Lema 2.1. *Sob as hipóteses (h0)-(h2), concluímos que $J(u)$ possui a primeira condição da geometria do Passo da Montanha, isto é, $J(0) = 0$ e J satisfaz:*

(PM1) *Existem $\rho_0 > 0$ e $\delta_0 > 0$ tais que $J(u) \geq \delta_0$, para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, com $\|u\|_{H^1} = \rho_0$.*

Prova. Como $H(0) = 0$, então $J(0) = 0$. Para provar $(PM1)$ vamos separar os casos em que $N \geq 3$ e $N = 2$.

Para $N \geq 3$. Por (h1), dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$, tal que

$$\frac{h(s)}{s} - \varepsilon < \liminf_{s \to 0} \frac{h(s)}{s} \leq -L, \quad \text{para } \ 0 < s < \delta_\varepsilon,$$

e então

$$-h(s) \geq (L - \varepsilon)s, \quad \text{para } \ 0 \leq s < \delta_\varepsilon.$$

Também por (h2), dado $\varepsilon > 0$, existe $A_\varepsilon > 1$, tal que

$$\frac{|h(s)|}{s^{(N+2)/(N-2)}} \leq \varepsilon, \quad \text{para } s > A_\varepsilon > 1,$$

logo,

$$-h(s) \geq -\varepsilon s^{(N+2)/(N-2)}, \quad \text{para } s > A_\varepsilon > 1.$$

E como podemos supor, sem perda de generalidade, que $0 < \delta_\varepsilon < 1$, então $[\delta_\varepsilon, A_\varepsilon] \neq \varnothing$ é compacto, e a função $s \mapsto \dfrac{|h(s)|}{s^{(N+2)/(N-2)}}$ é contínua, com isso atinge seu máximo M_ε no compacto $[\delta_\varepsilon, A_\varepsilon]$, ou seja

$$-h(s) \geq -M_\varepsilon s^{(N+2)/(N-2)}, \quad \forall \ \ s \in [\delta_\varepsilon, A_\varepsilon].$$

Portanto, fazendo $C_\varepsilon = \max\{M_\varepsilon, \varepsilon\}$, segue que

$$-h(s) \geq (L - \varepsilon)s - C_\varepsilon s^{(N+2)/(N-2)}, \quad \forall \ \ s \geq 0. \tag{2.6}$$

Assim, lembrando que $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$, vale que

$$-H(s) = \int_0^s h(t)\,dt \geq \frac{1}{2}(L - \varepsilon)s^2 - \frac{C_\varepsilon}{2^*}s^{2^*}, \quad \forall \ \ s > 0.$$

Agora, como pela hipótese (h0), h é ímpar, então $H(s)$ é par, isto é, $H(s) = H(-s)$, e fazendo $C'_\varepsilon = \dfrac{C_\varepsilon}{2^*}$, segue que

$$-H(s) \geq \frac{1}{2}(L - \varepsilon)|s|^2 - C'_\varepsilon |s|^{2^*}, \quad \forall \ \ s \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

Então pela continuidade das imersões de Sobolev (cf. Apêndice B.1), segue que $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, logo existe $C''_\varepsilon > 0$, tal que

$$\begin{aligned}
J(u) \ &\geq \ \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}|\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}(L - \varepsilon)\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2\,dx \ - \ C'_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}\,dx \\
&\geq \ \frac{1}{2}\min\{1, L - \varepsilon\}\|u\|^2_{H^1} \ - \ C'_\varepsilon \|u\|^{2^*}_{2^*} \\
&\geq \ \frac{1}{2}\min\{1, L - \varepsilon\}\|u\|^2_{H^1} \ - \ C''_\varepsilon \|u\|^{2^*}_{H^1} \\
&= \ \left(\frac{1}{2}\min\{1, L - \varepsilon\} - C''_\varepsilon \|u\|^{4/(N-2)}_{H^1}\right)\|u\|^2_{H^1}, \quad \forall \ \ u \in H^1(\mathbb{R}^N).
\end{aligned}$$

Assim, tomando $\rho_0 > 0$ suficientemente pequeno, de modo que $\frac{1}{2}\min\{1, L-\varepsilon\} - C''_\varepsilon \rho_0^{4/(N-2)} > 0$, concluímos que, para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, com $\|u\|_{H^1} = \rho_0$, segue que

$$J(u) \geq \left(\frac{1}{2}\min\{1, L-\varepsilon\} - C''_\varepsilon \rho_0^{4/(N-2)}\right)\rho_0^2 = \delta_0 > 0.$$

O que mostra $(PM1)$.

Para $N = 2$. Por (h1), dado $\varepsilon = \frac{L}{2}$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\left|\frac{h(s)}{s} + L\right| < \frac{L}{2}, \quad \text{sempre que} \quad 0 < s < \delta,$$

então

$$-h(s) \geq \frac{Ls}{2}, \quad \text{sempre que} \quad 0 \leq s < \delta.$$

Também por (h2), obtemos que

$$|h(s)| \leq C_\alpha e^{\alpha s^2} \leq C_\alpha s^4 e^{\alpha s^2}, \quad \forall \;\; s \geq 1,$$

logo,

$$-h(s) \geq -C_\alpha s^4 e^{\alpha s^2}, \quad \forall \;\; s \geq 1.$$

Mais ainda, considerando, sem perda de generalidade, que $0 < \delta < 1$, segue que $[\delta, 1] \neq \varnothing$ é compacto, e portanto a função contínua $s \mapsto \frac{|h(s)|}{s^4 e^{\alpha s^2}}$ atinge seu máximo M no compacto $[\delta, 1]$. Assim, obtemos que

$$-h(s) \geq -M s^4 e^{\alpha s^2}, \quad \forall \;\; s \in [\delta, 1].$$

Dessa forma, fazendo $C'_\alpha = \max\{M, C_\alpha\}$, segue que

$$-h(s) \geq \frac{1}{2}Ls - C'_\alpha s^4 e^{\alpha s^2}, \quad \forall \;\; s \geq 0. \tag{2.8}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
-H(s) &= -\int_0^s h(t)\,dt \\
&= \frac{Ls^2}{4} - \int_0^s t^4 e^{\alpha t^2}\,dt \\
&= \frac{Ls^2}{4} - C'_\alpha\left[\frac{1}{2\alpha}s^3(e^{\alpha s^2} - 1) - \frac{3}{2\alpha}\int_0^s t^2(e^{\alpha t^2} - 1)\,dt\right] \\
&\geq \frac{Ls^2}{4} - \frac{C'_\alpha}{2\alpha}s^3(e^{\alpha s^2} - 1).
\end{aligned}$$

Agora, como por (h0) h é ímpar, então $H(s)$ é par, isto é, $H(s) = H(-s)$, e assim

$$-H(s) \geq \frac{Ls^2}{4} - \frac{C'_\alpha}{2\alpha}s^3(e^{\alpha s^2} - 1), \quad \forall \;\; s \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Com isso, aplicando a desigualdade de Hölder (cf. Apêndice B.3), e novamente utilizando as imersões de Sobolev (cf. Apêndice B.1), obtemos que $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$, para $q \in [2, +\infty)$, segue que existe $C''_\alpha > 0$, tal que

$$
\begin{aligned}
J(u) &\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{L}{4}\|u\|_2^2 - \frac{C'_\alpha}{2\alpha}\int_{\mathbb{R}^2} u^3(e^{\alpha u^2} - 1)\, dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{L}{4}\|u\|_2^2 - \frac{C'_\alpha}{2\alpha}\|u\|_6^3 \left(\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha u^2} - 1)^2\, dx\right)^{1/2} \\
&\geq \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{L}{4}\right\}\|u\|_{H^1}^2 - \frac{C''_\alpha}{2\alpha}\|u\|_{H^1}^3 \left(\int_{\mathbb{R}^2} (e^{2\alpha u^2} - 1)\, dx\right)^{1/2} \\
&\geq \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{L}{4}\right\}\|u\|_{H^1}^2 - \frac{C''_\alpha}{2\alpha}\tilde{M}^{1/2}\|u\|_{H^1}^3 \\
&= \left(\min\left\{\frac{1}{2}, \frac{L}{4}\right\} - \frac{C''_\alpha}{2\alpha}\tilde{M}^{1/2}\|u\|_{H^1}\right)\|u\|_{H^1}^2,
\end{aligned}
$$

para $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, tal que $0 < \|u\| < \rho_0$. Em que $\tilde{M}$ e ρ_0 são obtidos por meio da desigualdade de Moser-Trundinger (cf. Adachi e Tanaka [1]). Com efeito, tal desigualdade garante a existência de $\sigma_0 > 0, \tilde{M} > 0$, tais que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\sigma_0 u^2} - 1\right) dx \leq \tilde{M}, \quad \forall \ \|u\|_{H^1} \leq 1.$$

Portanto, para qualquer $C > 0$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\sigma_0 u^2/C^2} - 1\right) dx \leq \tilde{M}, \quad \forall \ \|u\|_{H^1} \leq C. \tag{2.10}$$

Desse modo, escolhendo $\rho_0 > 0$ suficientemente pequeno, tal que $0 < \rho_0 < \sqrt{\frac{\sigma_0}{2\alpha}}$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{2\alpha u^2} - 1\right) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{(\sigma_0 u^2 2\alpha/\sigma_0)} - 1\right) dx \leq \tilde{M}, \quad \forall \ \|u\|_{H^1} \leq \rho_0 < \sqrt{\frac{\sigma_0}{2\alpha}}.$$

Assim, diminuindo $\rho_0 > 0$, se necessário, para que ρ_0 satisfaça

$$\min\left\{\frac{1}{2}, \frac{L}{4}\right\} - \frac{C''_\alpha}{2\alpha}\tilde{M}^{1/2}\rho_0 > 0,$$

concluímos que, para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, com $\|u\|_{H^1} = \rho_0$, vale que

$$J(u) \geq \left(\min\left\{\frac{1}{2}, \frac{L}{4}\right\} - \frac{C''_\alpha}{2\alpha}\tilde{M}^{1/2}\rho_0\right)\rho_0^2 = \delta_0 > 0.$$

O que mostra $(PM1)$ e completa a prova do lema. ■

Lema 2.2. *Sob as hipóteses (h0)-(h2), concluímos que J satisfaz a segunda condição da geometria do Passo da Montanha, ou seja, J satisfaz:*

(PM2) *Existe $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, tal que $\|u_0\|_{H^1} > \rho_0$ e $J(u_0) < 0$.*

Em particular, segue que J possui a geometria PM e o nível b do Passo da Montanha para J, dado em (2.2), está bem definido e é positivo.

Prova. Primeiramente observe que pela prova do Lema 2.1, vale que $J(u) > 0, \ \ \forall \ \ u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, com $0 < \|u\|_{H^1} \leq \rho_0$, em que ρ_0 é dado em $(PM1)$. Assim se mostrarmos que

$$\Gamma = \{\gamma(t) \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^N)) \ ; \ \gamma(0) = 0, J(\gamma(1)) < 0\} \neq \varnothing,$$

existe $\gamma \in \Gamma$ e $u_0 = \gamma(1)$ satisfaz que $J(u_0) < 0$, e então, necessariamente, $\|u_0\|_{H^1} > \rho_0$. Como na seção seguinte vamos exibir um caminho $\gamma \in \Gamma$, podemos assumir que $\Gamma \neq \varnothing$, portanto J satisfaz (PM2). Com isso, J tem a geometria PM, e dessa forma, faz sentido definir b. Agora, dado $\gamma \in \Gamma$, como $\gamma \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^N))$, $\|\gamma(0)\|_{H^1} = 0$, e também $J(\gamma(1)) < 0$, o que implica em $\|\gamma(1)\|_{H^1} > \rho_0$, então pela continuidade existe $\bar{t} \in (0,1)$, com $\|\gamma(\bar{t})\|_{H^1} = \rho_0$ e assim $\max\limits_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) \geq J(\gamma(\bar{t})) \geq \delta_0$, em que δ_0 é dado pelo Lema 2.1. Com isso, concluímos que

$$b = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) \geq \delta_0 > 0,$$

o que completa o resultado. ■

2.2 A Existência de um Caminho $\gamma \in \Gamma$

O intuito dessa seção é mostrar que $\Gamma = \big\{\gamma(t) \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^N)); \gamma(0) = 0, J(\gamma(1)) < 0\big\} \neq \varnothing$, e que existe $\gamma \in \Gamma$ que satisfaça (2.5). Para isso, vamos fazer uso dos resultados de Berestycki e Lions [6] e Berestycki, Gallouët e Kavian [5], que garantem a existência de uma solução com energia mínima para o problema dado em (3) sob as hipóteses (h0)-(h2), contanto que $H(s_0) > 0$, para algum $s_0 > 0$. O resultado é enunciado a seguir.

Proposição 2.1. *Sob as hipóteses (h0)-(h2), vale que*

(i) Se $H(s_0) > 0$ para algum $s_0 > 0$, então $m > 0$ e existe uma solução w para o problema dado em (3), com energia mínima, tal que $w > 0$ em $\mathbb{R}^N$, e como qualquer ponto crítico de J, w satisfaz a Identidade de Pohozaev (cf. Apêndice B.2):

$$(N-2)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2\, dx = 2N \int_{\mathbb{R}^N} H(w)\, dx;$$

(ii) O problema dado em (3) tem uma solução não trivial se, e somente se, $H(s_0) > 0$, para algum $s_0 > 0$.

Prova. (i) Para $N \geq 3$, o resultado segue de Berestycki e Lions [6], pelos Teoremas 1 e 2. Para $N = 2$, o resultado segue de Berestycki, Gallouët e Kavian [5], pelo Teorema 1.

(ii) Por (i) se existe $s_0 > 0$, tal que $H(s_0) > 0$, então existe uma solução não trivial para o problema dado em (3). Por outro lado, suponha que o problema dado em (3) possui uma solução u, não trivial. Considerando $N \geq 3$ por Berestycki e Lions [6], Corolário 1, segue que u satisfaz a Identidade de Pohozaev, isto é,

$$(N-2)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx = 2N\int_{\mathbb{R}^N} H(u)\, dx.$$

Desse modo, como u é solução não trivial do problema em (3), então $H(u(x)) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, ou seja, u não é constante, logo $\|\nabla u\|_2^2 > 0$, e pela Identidade de Pohozaev, concluímos que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} H(u)\, dx > 0$. Isso implica que existe $s_0 \in \mathbb{R}$, tal que $H(s_0) > 0$, caso contrário, a integral não seria positiva. Além disso, por hipótese h é ímpar, logo H é par e assim, sem perda de generalidade, podemos considerar $s_0 > 0$, já que $H(s_0) = H(-s_0) > 0$. Agora considerando $N = 2$, por Berestycki, Gallouët e Kavian [5], u é solução clássica do problema em (3) e também satisfaz a Identidade de Pohozaev, assim segue que $H(u(x))$ é contínua em $\mathbb{R}^2$, e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} H(u)\, dx = 0$. Dessa forma, supondo que $H(s) \leq 0, \quad \forall \quad s \in \mathbb{R}$, então $H(u(x)) \leq 0, \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}^2$, e pela continuidade de $H(u(x))$, isso implica que $H(u(x)) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$, o que gera contradição. Portanto, existe $x_0 \in \mathbb{R}^2$, tal que $s_0 = u(x_0) > 0$, e $H(s_0) > 0$. ■

Agora, com a garantia da existência de uma solução para o problema apresentado em (3), vamos utilizá-la para construir o caminho que satisfaça (2.5). Para isso, utilizamos o resultado a seguir.

Proposição 2.2. *Sob as hipóteses (h0)-(h2) e supondo que $H(s_0) > 0$, para algum $s_0 > 0$. Seja v uma solução clássica para problema dado em (3) com $v(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Então, existe um caminho $\gamma \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^N))$, tal que $\gamma(t)(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $t \in (0,1]$, também $\gamma(0) = 0$, $J(\gamma(1)) < 0$, $v \in \gamma([0,1])$ e γ satisfaz (2.5), isto é,*

$$\max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) = J(v).$$

Em particular, para a solução com energia mínima w obtida pela Proposição 2.1, concluímos que

$$0 < b = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) \leq J(w) = m. \tag{2.11}$$

A fim de provar a Proposição 2.2 vamos precisar de alguns resultados precedentes. Primeiramente, dado $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, um ponto crítico não trivial de J, vamos definir a função

$$v_t(x) = v(x/t), \quad \text{para } t > 0.$$

Os próximos dois resultados garantem algumas propriedades para tal função.

Lema 2.3. *Para $N \geq 2$ e para qualquer $t > 0$, a função v_t satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $\|\nabla v_t\|_2^2 = t^{N-2}\|\nabla v\|_2^2$;

(ii) Para qualquer função contínua F satisfazendo $\displaystyle\limsup_{s\to 0^+}\frac{|F(s)|}{s^2} < +\infty$, vale que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(v_t)\, dx = t^N\int_{\mathbb{R}^N} F(v)\, dx;$$

(iii) $\|v_t\|_q^q = t^N \|v\|_q^q$, *para qualquer* $q \in [2, \infty)$.

Prova. (i) Como $\nabla v_t(x) = \dfrac{1}{t}\nabla v(x/t)$, fazendo a mudança de variáveis $y = x/t$, obtemos

$$\|\nabla v_t\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_t(x)|^2\, dx = \frac{1}{t^2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v(x/t)|^2\, dx = t^{N-2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v(y)|\, dy = \|\nabla v\|_2^2,$$

concluindo (i).

(ii) Como $v > 0$ é solução do problema em (3), então para $N \geq 3$, por Berestycki e Lions [6], Teorema 1, e para $N = 2$, por Berestycki, Gallouët e Kavian [5], Teorema 1, sabemos que v é radial e decrescente, portanto v é limitada. Logo existe $M > 0$, tal que $|v(x)| \leq M$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^N$. Além disso, como F é contínua e $\limsup\limits_{s\to 0^+} \dfrac{|F(s)|}{s^2} = S < +\infty$, segue que dado $\varepsilon = 1$ existe $\delta > 0$, tal que $|F(s)| < (S+1)s^2$, sempre que $0 < s < \delta$. Sem perda de generalidade, considerando $\delta < M$, como F é contínua, a função $s \mapsto \dfrac{|F(s)|}{s^2}$ assume seu máximo $\tilde{C}$ no compacto $[\delta, M]$. Desse modo, se $C = \max\{\tilde{C}, S+1\}$, então $0 < s \leq M$, implica que

$$\frac{|F(s)|}{s^2} \leq C.$$

Com isso, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(v(x))\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(v(x))}{(v(x))^2}(v(x))^2\, dx \leq C\int_{\mathbb{R}^N} (v(x))^2\, dx < +\infty,$$

logo $F \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e a integral faz sentido. Assim, aplicando a mudança de variáveis $y = v/t$, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(v_t(x))\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} F(v(x/t))\, dx = t^N \int_{\mathbb{R}^N} F(v(y))\, dy,$$

o que mostra (ii).

(iii) Fazendo $F = |\cdot|^q$ em (ii), claramente, F é contínua e $\limsup\limits_{s\to 0^+} \dfrac{|F(s)|}{s^2} = |s|^{q-2} = 0 < +\infty$, logo vale que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_t(x)|^q\, dx = t^N \int_{\mathbb{R}^N} |v(y)|^q\, dy,$$

mas isso implica que $\|v\|_q^q = \|v\|_q^q$, o que mostra (iii). ∎

Lema 2.4. *Para $N = 2$ e para qualquer $t > 0$, a função v_t satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} H(v_t)\, dx = 0;$

(ii) $J(v_t) = J(v);$

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} h(v_t)v_t\,dx = t^2\|\nabla v\|_2^2.$

Prova. (i) Como v é ponto crítico de J, então pela Proposição 2.1, v satisfaz a Identidade de Pohozaev. Além disso, H é contínua, e usando (h1), obtemos que

$$0 \le \limsup_{s\to 0^+} \frac{|H(s)|}{s^2} = \limsup_{s\to 0^+} \frac{\left|\int_0^s h(t)\,dt\right|}{s^2} \le \limsup_{s\to 0^+} \frac{1}{s}\int_0^s \frac{|h(t)|}{t}\,dt = \lim_{s\to 0^+} \frac{|h(s)|}{s} = L < +\infty,$$

logo, fazendo $F = H$ em (ii) do Lema 2.3 com $N = 2$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} H(v_t)\,dx = t^2 \int_{\mathbb{R}^2} H(v)\,dx = \frac{t^2}{4}(2-2)\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla w|^2\,dx = 0,$$

o que prova (i).

(ii) Observe que

$$\begin{aligned} J(v_t) &= \int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{2}|\nabla v_t|^2 - H(v_t)\right)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{2}|\nabla v_t|^2\,dx \\ &= \frac{1}{2}\|\nabla v_t\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2 - \int_{\mathbb{R}^2} H(v)\,dx \\ &= J(v), \end{aligned}$$

onde usamos (i) e o Lema 2.3 com $N = 2$, e assim concluímos (ii).

(iii) Como v é ponto crítico de J, então $J'(v)v = 0$, ou seja, $\|\nabla v\|_2^2 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} h(v)v\,dx$, assim como h é contínua, e

$$0 \le \limsup_{s\to 0^+} \frac{|h(s)s|}{s^2} = \lim_{s\to 0^+} \frac{|h(s)|}{s} = L < +\infty,$$

fazendo $F(s) = h(s)s$ em (ii) do Lema 2.3 com N=2, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} h(v_t(x))v_t(x)\,dx = t^2\int_{\mathbb{R}^2} h(v(x))v(x)\,dx = t^2\|\nabla v\|_2^2,$$

o que conclui (iii). ∎

Prova da Proposição 2.2. Vamos separar a prova em dois casos:

Caso 1. Para $N \ge 3$. Como v é ponto crítico de J pela Identidade de Pohozaev, obtemos que

$$\frac{(N-2)}{2N}\|\nabla v\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} H(v)\,dx.$$

Portanto, segue que

$$J(v_t) = \frac{t^{N-2}}{2}\|\nabla v\|_2^2 - t^N \int_{\mathbb{R}^N} H(v)\, dx = \left(\frac{1}{2}t^{N-2} - \frac{N-2}{2N}t^N\right)\|\nabla v\|_2^2. \tag{2.12}$$

Com isso, concluímos que:

(a) $\max\limits_{t>0} J(v_t) = J(v)$;
(b) $J(v_t) \to -\infty$, quando $t \to +\infty$;
(c) $\|v_t\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \to 0$, quando $t \to 0$.

De fato, por (2.12), obtemos

$$\frac{d}{dt}J(v_t) = \left(\frac{N-2}{2}t^{N-3} - \frac{N-2}{2}t^{N-1}\right)\|\nabla v\|_2^2.$$

Logo, se $\dfrac{d}{dt}J(v_t) = 0$, então $t = 1$, e segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}J(v_t)\Big|_{t=1} &= \frac{N-2}{2}\Big((N-3)t^{N-4} - (N-1)t^{N-2}\Big)\|\nabla v\|_2^2\Big|_{t=1} \\
&= -(N-2)\|\nabla v\|_2^2 \\
&< 0.
\end{aligned}$$

Assim, $t = 1$ é ponto de máximo da função $t \mapsto J(v_t)$, ou seja, $\max\limits_{t>0} J(v_t) = J(v_1) = J(v)$, e obtemos (a). Para ver (b), basta fazer $t \to +\infty$ em (2.12). E para provar (c), usamos (i) do Lema 2.3, e (iii) do Lema 2.3, com $q = 2$, e assim concluímos que

$$\|v_t\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \|\nabla v_t\|_2^2 + \|v_t\|_2^2 = t^{N-2}\|\nabla v\|_2^2 + t^N\|v\|_2^2 \to 0, \text{ quando } t \to 0.$$

Portanto, por (b) podemos escolher $l > 1$ tal que $J(v_l) < 0$, e então afirmamos que $\gamma : [0,1] \to H^1(\mathbb{R}^N)$, dado por $\gamma(t) = v_{lt}$, para $t \in (0,1]$, e $\gamma(0) = 0$, é o caminho que estamos procurando. De fato, por Berestycki Lions [6] e Berestycki, Gallouët e Kavian [5], obtemos que v é solução clássica para problema em (3), então $v \in C^2(\mathbb{R}^N)$ e assim $\gamma(t) = v(x/(lt))$ é contínua em $(0,1]$. Para mostrar a continuidade de $\gamma(t)$ em $t = 0$, lembramos que por (c), vale que

$$\|\gamma(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \|v_{lt}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \to 0 = \gamma(0), \text{ quando } t \to 0.$$

Desse modo, $\gamma \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^N))$. Além disso, $\gamma(t)(x) = v_{lt}(x) = v(x/(lt)) > 0$, $\forall\ v \in \mathbb{R}^N$ e $t \in (0,1]$, pois v é positiva em $\mathbb{R}^N$. Também, $\gamma(0) = 0$, por definição, e $J(\gamma(1)) = J(v_l) < 0$. E ainda

$$v(x) = v\Big(\frac{1}{l}lx\Big) = v_{l\frac{1}{l}}(x) = \gamma\Big(\frac{1}{l}\Big)(x) \in \gamma([0,1]),$$

pois $\dfrac{1}{l} \in (0,1)$, já que $l > 1$. Por fim, note que

$$J(v) = J\Big(\gamma\Big(\frac{1}{l}\Big)\Big) \le \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) = \max_{t\in[0,1]} J(v_{lt}) \le \max_{t>0} J(v_{lt}) = \max_{t>0} J(v_t) = J(v),$$

ou seja, $\max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) = J(v)$. O que conclui o caso 1.

Caso 2. Para $N = 2$. Nesse caso a construção do caminho é mais complicada. Em primeiro lugar observamos que pelas hipóteses (h0)-(h2), existem constantes $\alpha, C > 0$, tais que

$$|h(s)| \leq Ce^{\alpha s^2}|s|, \quad \forall \ s \in \mathbb{R}.$$

Com efeito, por (h1), dado $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$, tal que $|h(s)| < (1+L)|s|, \quad \forall \ 0 < s < \delta$. Agora, como α dado por (h2) é positivo, então $e^{\alpha s^2} > 1$, e segue que

$$|h(s)| \leq (1+L)|s| < (1+L)e^{\alpha s^2}|s|, \quad \forall \ 0 < s < \delta.$$

Também, considerando $R = \max\{1, \delta\}$, por (h2) existe $C_\alpha > 0$, tal que

$$|h(s)| \leq C_\alpha e^{\alpha s^2} \leq C_\alpha e^{\alpha s^2}|s|, \quad \text{para} \ \ s > R.$$

E por fim, pela continuidade de h, dada por (h0), a função $s \mapsto \dfrac{|h(s)|}{e^{\alpha s^2}|s|}$ assume seu máximo M no compacto $[\delta, R]$, ou seja, vale que $|h(s)| \leq Me^{\alpha s^2}|s|$, para todo $\delta \leq s \leq R$. Com isso, fazendo $C = \max\{1+L, C_\alpha, M\}$, e lembrando que por (h0) h é ímpar, segue que

$$|h(s)| \leq Ce^{\alpha s^2}|s|, \quad \forall \ s \in \mathbb{R}. \tag{2.13}$$

Agora, considerando $\theta \in [0,1]$, observe que

$$\begin{aligned} J(\theta v_t) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(\theta v_t)|^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^2} H(\theta v_t)\,dx \\ &= \frac{\theta^2}{2}\|\nabla v_t\|_2^2 - \int_{\mathbb{R}^2} H(\theta v_t)\,dx. \end{aligned}$$

Assim, pelo Lema 2.3 e por (2.13), obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}J(\theta v_t) &= \theta\|\nabla v_t\|_2^2 - \int_{\mathbb{R}^2} h(\theta v_t)v_t\,dx \\ &\geq \theta\|\nabla v_t\|_2^2 - \theta C\int_{\mathbb{R}^2} e^{\alpha\theta^2 v_t^2}v_t^2\,dx \\ &\geq \theta\|\nabla v_t\|_2^2 - \theta C\int_{\mathbb{R}^2} e^{\alpha v_t^2}v_t^2\,dx \\ &= \theta\left(\|\nabla v\|_2^2 - Ct^2\int_{\mathbb{R}^2} e^{\alpha v^2}v^2\,dx\right). \end{aligned}$$

Logo, se considerarmos $l \in (0,1)$, suficientemente pequeno, tal que

$$\|\nabla v\|_2^2 - Cl^2\int_{\mathbb{R}^2} e^{\alpha v^2}v^2\,dx > 0,$$

então para tal l, concluímos que

$$\frac{d}{d\theta}J(\theta v_l) \geq 0, \quad \forall \ \theta \in [0,1],$$

ou seja, $\theta \mapsto J(\theta v_l)$ é uma função não decrescente, para $\theta \in [0,1]$. Dessa forma, usando (ii) do Lema 2.4, segue que

$$J(\theta v_l) \leq J(v_l) = J(v), \quad \forall \ \theta \in [0,1]. \tag{2.14}$$

Por outro lado, fixando $r > 1$ por (i) do Lema 2.3, e (iii) do Lema 2.4, obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}J(\theta v_r)\Big|_{\theta=1} &= \left(\theta\|\nabla v_r\|_2^2 - \int_{\mathbb{R}^2} h(\theta v_r)v_r\,dx\right)\Big|_{\theta=1}\\ &= \|\nabla v\|_2^2 - r^2\|\nabla v\|_2^2 = (1-r^2)\|\nabla v\|_2^2\\ &< 0.\end{aligned}$$

E também,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}\int_{\mathbb{R}^2} H(\theta v_r)\,dx\Big|_{\theta=1} &= \int_{\mathbb{R}^2} h(\theta v_r)v_r\,dx\Big|_{\theta=1}\\ &= r^2\|\nabla v\|_2^2\\ &> 0.\end{aligned}$$

Com isso, concluímos que $\theta \mapsto J(\theta v_r)$ é uma função decrescente em $\theta = 1$, enquanto a função $\theta \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} H(\theta v_r)\,dx$ é crescente em $\theta = 1$. Dessa forma, é possível considerar $\theta_1 \in (1,+\infty)$, suficientemente perto de 1, de modo que usando (ii) do Lema 2.4, vale que

$$J(\theta v_r) \leq J(v_r) = J(v), \quad \forall \ \theta \in [1,\theta_1], \tag{2.15}$$

e por (i) do Lema 2.4, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} H(\theta_1 v_r)\,dx > \int_{\mathbb{R}^2} H(v_r)\,dx = 0.$$

Agora, considere para $t \geq 1$ a sequência $(\theta_1 v_r)_t = \theta_1 v_{rt}$. Então novamente pelo Lema 2.3 (i) e (ii), com $N = 2$, segue que

$$\begin{aligned}J(\theta_1 v_{rt}) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(\theta_1 v_{rt})|^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^2} H(\theta_1 v_{rt})\,dx\\ &= \frac{\theta_1^2}{2}\|\nabla v_r\|_2^2 - t^2\int_{\mathbb{R}^2} H(\theta_1 v_r)\,dx.\end{aligned}$$

Portanto a função $t \mapsto J(\theta_1 v_{rt})$ é decrescente, para $t \geq 1$, e $J(\theta_1 v_{rt}) \to -\infty$, quando $t \to +\infty$. Com isso, é possível escolher $s >> 1$, suficientemente grande, tal que $J(\theta_1 v_{rs}) < 0$. Além disso, por (2.15) concluímos que

$$J(\theta_1 v_{rt}) \leq J(\theta_1 v_r) \leq J(v), \quad \forall \ t \geq 1. \tag{2.16}$$

Finalmente, de acordo com as conclusões acima, definimos os seguintes caminhos:

- $\phi_1 : [0,1] \to H^1(\mathbb{R}^2)$, dado por $\phi_1(\theta) = \theta v_l$;
- $\phi_2 : [l,r] \to H^1(\mathbb{R}^2)$, dado por $\phi_2(t) = v_t$;

- $\phi_3 : [1, \theta_1] \to H^1(\mathbb{R}^2)$, dado por $\phi_3(\theta) = \theta v_r$;
- $\phi_4 : [1, s] \to H^1(\mathbb{R}^2)$, dado por $\phi_4(t) = \theta_1 v_{rt}$.

E reparametrizando-os, para o intervalo $[0, 1]$, obtemos:

- $\gamma_1 : [0, 1] \to H^1(\mathbb{R}^2)$, dado por $\gamma_1(t) = \phi_1(t)$;
- $\gamma_2 : [0, 1] \to H^1(\mathbb{R}^2)$, dado por $\gamma_2(t) = \phi_2((1-t)l + tr)$;
- $\gamma_3 : [0, 1] \to H^1(\mathbb{R}^2)$, dado por $\gamma_3(t) = \phi_3((1-t) + t\theta_1)$;
- $\gamma_4 : [0, 1] \to H^1(\mathbb{R}^2)$, dado por $\gamma_4(t) = \phi_4((1-t) + ts)$.

Desse modo, definindo $\gamma : [0, 1] \to H^1(\mathbb{R}^2)$, dado por:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(4t), & \text{se} \quad 0 \le t \le 1/4, \\ \gamma_2(4t-1), & \text{se} \quad 1/4 \le t \le 1/2, \\ \gamma_3(4t-2), & \text{se} \quad 1/2 \le t \le 3/4, \\ \gamma_4(4t-3), & \text{se} \quad 3/4 \le t \le 1, \end{cases}$$

construímos o caminho desejado. De fato, como v é solução clássica do problema dado em (3), então $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$ o que garante a continuidade de γ_2 e γ_4. Além disso, γ_1 e γ_3 são segmentos de reta, logo são contínuos. Também, vale que

$$\gamma_1\Big(4 \cdot \frac{1}{4}\Big) = \gamma_2\Big(4 \cdot \frac{1}{4} - 1\Big) = v_l, \quad \gamma_2\Big(4 \cdot \frac{1}{2} - 1\Big) = \gamma_3\Big(4 \cdot \frac{1}{2} - 2\Big) = v_r \ \text{ e } \gamma_3\Big(4 \cdot \frac{3}{4} - 2\Big) = \gamma_4\Big(4 \cdot \frac{3}{4} - 3\Big) = \theta_1 v_r,$$

desse modo, concluímos que γ é contínuo, ou seja, $\gamma \in C([0, 1], H^1(\mathbb{R}^N))$. Observe também que

$$\gamma(0) = \gamma_1(0) = 0 \cdot v_l = 0 \ \text{ e } \ J(\gamma(1)) = J(\gamma_4(1)) = J(\phi_4(s)) = J(\theta_1 v_{rs}) < 0.$$

E ainda que,

$$v = \phi_2(1) = \phi_2\left(\Big(1 - \frac{1-l}{r-l}\Big)l + \frac{1-l}{r-l}r\right) = \gamma_2\Big(\frac{1-l}{r-l}\Big) = \gamma_2(4\tilde{t} - 1) = \gamma(\tilde{t}), \quad \text{com } \ \tilde{t} = \frac{1}{4}\Big(\frac{1+r-2l}{r-l}\Big).$$

E como $r > 1 > l$, então $0 < \dfrac{1-l}{r-l} < 1$ e $0 < \tilde{t} = \dfrac{1}{4}\Big(\dfrac{1-l}{r-l} + 1\Big) < \dfrac{1}{4}2 = \dfrac{1}{2}$, ou seja, $v = \gamma(\tilde{t}) \in \gamma([0, 1])$.

Por fim, para mostrar que $\gamma(t)(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$, $t \in (0, 1]$ e que $\max\limits_{t \in [0,1]} = J(v)$, vamos separar em casos:

- se $0 \le t \le \dfrac{1}{4}$. Por (2.14), segue que

$$J(\gamma(t)) = J(\gamma_1(4t)) = J(4tv_l) \le J(v).$$

E lembrando que $v(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$, então

$$\gamma(t)(x) = 4tv_l(x) = 4tv(x/l) > 0, \quad t \neq 0.$$

- se $\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}$. Considerando $\bar{t} = 4t - 1$ e $t^* = (1 - \bar{t})l + \bar{t}r$, observe que $0 < \bar{t} < 1$ e $l < t^* < r$, logo pelo Lema 2.4 (ii), segue que

$$J(\gamma(t)) = J(\gamma_2(\bar{t})) = J(\phi_2(t^*)) = J(v_{t^*}) = J(v).$$

Também, $\gamma(t)(x) = v_{t^*} = v(x/t^*) > 0$, pois v é positiva.

- se $\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}$. Fazendo $\bar{t} = 4t - 2$ e $t^* = (1 - \bar{t}) + \bar{t}\theta_1$, veja que $0 < \bar{t} < 1$ e $1 < t^* < \theta_1$, logo por (2.15), vale que

$$J(\gamma(t)) = J(\gamma_3(\bar{t})) = J(\phi_3(t^*)) = J(t^* v_r) \leq J(v).$$

E ainda, $\gamma(t)(x) = t^* v_r(x) = t^* v(x/r) > 0$, pois v é positiva.

- se $\frac{3}{4} \leq t \leq 1$. Tomando $\bar{t} = 4t - 3$ e $t^* = (1 - \bar{t}) + \bar{t}s$, note que $0 < \bar{t} < 1$ e $1 < t^* < s$, logo por (2.16), obtemos que

$$J(\gamma(t)) = J(\gamma_4(\bar{t})) = J(\phi_4(t^*)) = J(\theta_1 v_{rt^*}) \leq J(v).$$

E ainda, $\gamma(t)(x) = \theta_1 v_{rt^*} = \theta_1 v(x/(rt^*)) > 0$, pois v é positiva.

Portanto, concluímos que $\gamma(t)(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$, $t \in (0, 1]$ e também, como $0 < \tilde{t} < 1$, concluímos que

$$J(v) = J(\gamma(\tilde{t})) \leq \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) \leq J(v),$$

ou seja, $\max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) = J(v)$. O que conclui o caso 2.

Para completar a prova, considerando w uma solução de energia mínima obtida pela Proposição 2.1, uma vez que construímos $\gamma \in \Gamma$, tal que

$$\max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) = J(w) = m,$$

concluímos que

$$0 < b = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) \leq \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) = J(w) = m.$$

Com isso, provamos que $0 < b \leq m$, e completamos a prova da proposição. ∎

Note que além de garantir a existência de um caminho $\gamma \in \Gamma$ satisfazendo (2.5), a Proposição 2.2 mostra que $b \leq m$. Logo resta provar que $m \leq b$ para concluir a prova do Teorema 2.1.

2.3 Uma Caracterização do Nível do Passo da Montanha

Nessa seção desejamos mostrar que $m \leq b$, e por meio de (2.11) concluir que $m = b$, caracterizando b, o nível PM para J, como sendo o nível crítico de energia mínima para J definido em (2.4). Para provar que $b \geq m$, vamos definir o conjunto $\mathcal{P}$ das funções não triviais que satisfazem a Identidade de Pohozaev, então vamos mostrar que $m = \inf\limits_{u\in\mathcal{P}} J(u)$ e que $\gamma([0,1]) \cap \mathcal{P} \neq \varnothing, \quad \forall\, \gamma \in \Gamma$. Disso vamos concluir que $b \geq m$, o que completará o resultado.

Lema 2.5. *Considere* $\mathcal{P} = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \;;\; (N-2)\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2\,dx \;-\; 2N\int_{\mathbb{R}^N} H(w)\,dx = 0 \right\}$, *o conjunto das funções não triviais de* $H^1(\mathbb{R}^N)$ *que satisfazem a Identidade de Pohozaev. Então*

$$\inf_{u\in\mathcal{P}} J(u) = m,$$

em que m é o nível crítico de energia mínima para J definido em (2.4).

Prova. Vamos separar a prova em dois casos, para $N \geq 3$ e para $N = 2$.

Para $N \geq 3$. Nesse caso vamos usar a ideia de Coleman, Glazer e Martin [8], assim como em Berestycki e Lions [6]. Primeiramente definimos

$$\mathcal{S} = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} H(u)\,dx = 1 \right\}.$$

Então afirmamos que existe uma bijeção $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{P}$ dada por $\Phi(u)(x) = u(x/t_u)$, onde $t_u = \left(\frac{1}{2^*}\right)^{1/2} \|\nabla u\|_2$. De fato, Φ está bem definida, pois dado $u \in \mathcal{S}$, segue que

$$\begin{aligned} N\frac{(N-2)}{2N}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\Phi(u)|^2\,dx - N\int_{\mathbb{R}^N} H(\Phi(u))\,dx &= N\frac{1}{2^*}t_u^{N-2}\|\nabla u\|_2^2 - Nt_u^N\int_{\mathbb{R}^N} H(u))\,dx \\ &= N\frac{1}{2^*}\left(\frac{1}{2^*}\right)^{(N-2)/2}\|\nabla u\|_2^N - N\left(\frac{1}{2^*}\right)^{N/2}\|\nabla u\|_2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo $\Phi(u)$ satisfaz a Identidade de Pohozaev, e como $0 \notin \mathcal{S}$, então $u \neq 0$, logo $\Phi(u) \neq 0$, ou seja, $\Phi(u) \in \mathcal{P}$. Além disso, dado $u \in \mathcal{P}$ segue que u satisfaz a Identidade de Pohozaev, logo

$$\left(\frac{1}{2^*}\right)\|\nabla u\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} H(u)\,dx, \tag{2.17}$$

assim definindo $\bar{u}(x) = u(x\bar{t})$, em que $\bar{t} = \left(\frac{1}{2^*}\right)^{1/N} \|\nabla u\|_2^{2/N}$, segue por (2.17) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} H(\bar{u})\,dx = \bar{t}^{-N}\int_{\mathbb{R}^N} H(u)\,dx = \left[\left(\frac{1}{2^*}\right)\|\nabla u\|_2^2\right]^{-1}\int_{\mathbb{R}^N} H(u)\,dx = 1.$$

Portanto $\bar{u} \in \mathcal{S}$ e vale que

$$\Phi(\bar{u})(x) = \bar{u}(x/t_{\bar{u}}) = u(x\bar{t}/t_{\bar{u}}) = u(x),$$

pois

$$
\begin{aligned}
t_{\bar{u}} &= \left(\frac{1}{2^*}\right)^{1/2} \|\nabla \bar{u}\|_2 \\
&= \left(\frac{1}{2^*}\right)^{1/2} \bar{t}^{-(N-2)/2} \|\nabla u\|_2 \\
&= \left(\frac{1}{2^*}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{1}{2^*}\right)^{1/N} \|\nabla u\|_2^{2/N}\right]^{-(N-2)/2} \|\nabla u\|_2 \\
&= \left(\frac{1}{2^*}\right)^{1/N} \|\nabla u\|_2^{2/N} \\
&= \bar{t}.
\end{aligned}
$$

Assim Φ é sobrejetiva. Para mostrar a injetividade de Φ, note que dados $u_1, u_2 \in \mathcal{S}$ com $\Phi(u_1) = \Phi(u_2)$, segue que

$$u_1(x/t_{u_1}) = u_1(x/t_{u_2}), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Portanto, basta mostrar que $t_{u_1} = t_{u_2}$ para concluir que $u_1 = u_2$. Ou seja, basta mostrar que $\|\nabla u_1\|_2 = \|\nabla u_2\|_2$. Mas como $\|\nabla \Phi(u_1)\|_2 = \|\nabla \Phi(u_2)\|_2$, então $t_{u_1}^{N-2}\|\nabla u_1\|_2 = t_{u_2}^{N-2}\|\nabla u_2\|_2$, logo

$$\left(\frac{1}{2^*}\right)^{(N-2)/2} \|\nabla u_1\|_2^{N-2} = \left(\frac{1}{2^*}\right)^{(N-2)/2} \|\nabla u_2\|_2^{N-2},$$

portanto, concluímos que $\|\nabla u_1\|_2 = \|\nabla u_2\|_2$ e vale que $u_1 = u_2$, portanto Φ é injetiva. Dessa forma, como Φ é uma correspondência biunívoca entre $\mathcal{S}$ e $\mathcal{P}$, segue que

$$\inf_{u \in \mathcal{P}} J(u) = \inf_{u \in \mathcal{S}} J(\Phi(u)) = \inf_{u \in \mathcal{S}} \left[\frac{1}{N}\left(\frac{1}{2^*}\right)^{(N-2)/2} \|\nabla u\|_2^N\right],$$

já que

$$
\begin{aligned}
J(\Phi(u)) &= \frac{1}{2} t_u^{N-2} \|\nabla u\|_2^2 - t_u^N \int_{\mathbb{R}^N} H(u)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2^*}\right)^{1/2} \|\nabla u\|_2\right]^{N-2} \|\nabla u\|_2^2 - \left[\left(\frac{1}{2^*}\right)^{1/2} \|\nabla u\|_2\right]^N \\
&= \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right] \left(\frac{1}{2^*}\right)^{(N-2)/2} \|\nabla u\|_2^N \\
&= \frac{1}{N}\left(\frac{1}{2^*}\right)^{(N-2)/2} \|\nabla u\|_2^N.
\end{aligned}
$$

Agora por Berestycki e Lions [6] (cf. Teorema 2), sabemos que $\inf\limits_{u \in \mathcal{S}} \|\nabla u\|_2^2$ é atingido em algum $\tilde{u} \in \mathcal{S}$ e que $\Phi(\tilde{u}) \in \mathcal{P}$ é uma solução com energia mínima para o problema em (3). Portanto, concluímos que

$$m = J(\Phi(\tilde{u})) = \inf_{u \in \mathcal{S}} J(\Phi(u)) = \inf_{u \in \mathcal{P}} J(u).$$

Assim provamos o lema para $N \geq 3$.

Para $N = 2$. Nesse caso o conjunto das funções não triviais de $H^1(\mathbb{R}^2)$ que satisfazem a Identidade de Pohozaev é dado por

$$\mathcal{P} = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}\ ;\ \int_{\mathbb{R}^2} H(u)\, dx = 0 \right\},$$

com isso obtemos que $J(u) = \dfrac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2$, para $u \in \mathcal{P}$. Por Berestycki, Gallouët e Kavian [5] (cf. Etapa 4, prova do Teorema 1), segue que $\inf\limits_{u\in\mathcal{P}} \|\nabla u\|_2^2$ é atingido em algum $\tilde{u} \in \mathcal{P}$ e que $\Phi(\tilde{u}) \in \mathcal{P}$ é uma solução com energia mínima para (3), após fazer uma mudança de variáveis $\bar{u}(x) = \tilde{u}(x/t)$, para t adequado. Portanto, obtemos que

$$\inf_{u\in\mathcal{P}} J(u) = \frac{1}{2}\inf_{u\in\mathcal{P}} \|\nabla u\|_2^2 = J(\bar{u}) = m.$$

O que completa a prova do lema. ∎

Lema 2.6. *Considere $\mathcal{P}$ e m como definidos no Lema 2.5, e em (2.4), respectivamente. Então para qualquer $\gamma \in \Gamma$, o conjunto $\gamma([0,1]) \cap \mathcal{P}$ é não vazio.*

Prova. Primeiramente defina para $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ o funcional

$$P(u) = \frac{N-2}{2}\|\nabla u\|_2^2 - N\int_{\mathbb{R}^N} H(u)\,dx = NJ(u) - \|\nabla u\|_2^2.$$

Vamos novamente separa os casos $N \geq 3$ e $N = 2$.

Para $N \geq 3$. Em primeiro lugar afirmamos que existe $\tilde{\rho}_0 > 0$, tal que $0 < \|u\|_{H^1} < \tilde{\rho}_0$ implica que $P(u) > 0$. De fato, como na prova do Lema 2.1, obtemos

$$\begin{aligned}
P(u) &\geq \frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,dx + \frac{N(L-\varepsilon)}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2\,dx - NC'_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}\,dx \\
&\geq \frac{1}{2}\min\left\{\frac{N-2}{2}, \frac{N(L-\varepsilon)}{2}\right\}\|u\|_{H^1}^2 - NC'_\varepsilon\|u\|_{2^*}^{2^*} \\
&\geq \left(\frac{1}{2}\min\left\{\frac{N-2}{2}, \frac{N(L-\varepsilon)}{2}\right\} - NC''_\varepsilon\|u\|_{H^1}^{4/(N-2)}\right)\|u\|_{H^1}^2,
\end{aligned}$$

assim tomando $\tilde{\rho}_0 > 0$ suficientemente pequeno, tal que

$$\frac{1}{2}\min\left\{\frac{N-2}{2}, \frac{N(L-\varepsilon)}{2}\right\} - NC''_\varepsilon(\tilde{\rho}_0)^{4/(N-2)} > 0,$$

segue que

$$P(u) \geq \left(\frac{1}{2}\min\left\{\frac{N-2}{2}, \frac{N(L-\varepsilon)}{2}\right\} - NC''_\varepsilon\|u\|_{H^1}^{4/(N-2)}\right)\|u\|_{H^1}^2 = \tilde{\delta}_0 > 0,$$

para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, com $0 < \|u\|_{H^1} < \tilde{\rho}_0$. Uma vez que para cada $\gamma \in \Gamma$ vale que $\gamma(0) = 0$, e como $\gamma \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^N))$, existe $\tilde{t} \in (0,1)$, suficientemente pequeno, tal que $\|\gamma(\tilde{t})\|_{H^1} < \tilde{\rho}_0$, e assim $P(\gamma(\tilde{t})) > 0$. Também

$$P(\gamma(1)) = NJ(\gamma(1)) - \|\nabla(\gamma(1))\|_2^2 \leq NJ(\gamma(1)) < 0.$$

Além disso, como $P(u) = NJ(u) - \|\nabla u\|_2^2$ é contínuo, pois J é contínuo, segue que $t \mapsto P(\gamma(t))$ é contínua em $[0,1]$. Portanto existe $t_\gamma \in (\tilde{t}, 1)$, tal que $P(\gamma(t_\gamma)) = 0$, o que implica em $\|\gamma(t_\gamma)\|_{H^1} > \tilde{\rho}_0$, pois $P(u) > 0$, para $0 < \|u\|_{H^1} < \tilde{\rho}_0$. Agora, como $\gamma(t_\gamma) \in \gamma([0,1])$ e

$$\gamma(t_\gamma) \in \mathcal{P} = \Big\{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}\ ; P(u) = 0\Big\},$$

segue que $\gamma(t_\gamma) \in \gamma([0,1]) \cap \mathcal{P}$, ou seja, $\gamma([0,1]) \cap \mathcal{P}$ é não vazio, provando o lema para $N \geq 3$.

Para $N = 2$. Nesse caso $P(u) = -2\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} H(u)\,dx$, logo P não possui a componente $\|\nabla u\|_2^2$ e portanto vamos proceder de forma diferente. Primeiramente tomando $\rho(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \rho(x)\,dx = 1$ e $\rho(x) \geq 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^2$, definimos para qualquer $\gamma \in \Gamma$ e para $\varepsilon > 0$,

$$\gamma_\varepsilon(t)(x) = (\rho_\varepsilon * \gamma(t))(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \rho_\varepsilon(x-y)\gamma(t)(y)\,dy,$$

em que $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N}\rho(x/\varepsilon)$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$. E com isso afirmamos que

i) Para todo $\varepsilon > 0$ e para cada $t \in [0,1], \gamma_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$;
ii) $\gamma_\varepsilon(t) : [0,1] \to L^\infty(\mathbb{R}^2)$ é contínuo;
iii) $\displaystyle\max_{t\in[0,1]} \|\gamma_\varepsilon(t) - \gamma(t)\|_{H^1} \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$.

De fato, dados $\varepsilon > 0$, $t \in [0,1]$ como ρ_ε tem suporte compacto em $\mathbb{R}^2$, considere $\Omega_\varepsilon \subset\subset \mathbb{R}^2$, com $\operatorname{supp}\rho_\varepsilon \subset \Omega_\varepsilon$. Então, como ρ_ε é contínua, é limitada em Ω_ε e segue que $\rho_\varepsilon \in L^\infty(\Omega_\varepsilon) \subset L^2(\Omega_\varepsilon)$, e também $\gamma(t) \in H^1(\mathbb{R}^2) \subset L^2(\mathbb{R}^2)$, logo aplicando a desigualdade de Hölder (cf. Apêndice B.3), obtemos que

$$|\gamma_\varepsilon(t)(x)| = \int_{\Omega_\varepsilon} \rho_\varepsilon(y)\gamma(t)(x-y)dy \leq \|\rho_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\|\gamma(t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^2,$$

isto é,

$$\|\gamma_\varepsilon(t)\|_\infty \leq \|\rho_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}\|\gamma(t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} < +\infty.$$

Ou seja, $\gamma_\varepsilon(t) \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Além disso, como $\gamma(t) \in H^1(\mathbb{R}^2)$, então $\gamma(t) \in L^2(\mathbb{R}^2)$, e como $\rho_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, segue que

$$D^\alpha\gamma_\varepsilon(t) = (D^\alpha\rho_\varepsilon) * \gamma(t) \in L^2(\mathbb{R}^2), \quad \forall\ \ |\alpha| \leq 1,$$

e mais ainda, pela desigualdade de Hölder e pelo Teorema de Tonelli (cf. Apêndices B.3 e B.4), obtemos

$$\begin{aligned}
\|(D^\alpha\rho_\varepsilon) * \gamma(t)\|_2^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \Big|(D^\alpha\rho_\varepsilon) * \gamma(t)\Big|^2 dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} \|D^\alpha\rho_\varepsilon\|_{L^1(\Omega_\varepsilon)} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \big|D^\alpha\rho_\varepsilon(y)\big|\gamma^2(t)(x-y)\,dy\right) dx \\
&= \|D^\alpha\rho_\varepsilon\|_{L^1(\Omega_\varepsilon)} \int_{\Omega_\varepsilon} \big|D^\alpha\rho_\varepsilon(y)\big| \left(\int_{\mathbb{R}^2} \gamma^2(t)(x-y)\,dx\right) dy \\
&= \|D^\alpha\rho_\varepsilon\|_{L^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \|\gamma(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 < +\infty, \quad \forall\ |\alpha| \leq 1.
\end{aligned}$$

Logo $(D^\alpha\rho_\varepsilon) * \gamma(t) \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $\forall\ |\alpha| \leq 1$, e assim $\rho_\varepsilon * \gamma(t) \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Portanto $\gamma_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$. O que prova (i). Também dados $s_1, s_2 \in [0,1]$ aplicando outra vez a desigualdade de Hölder, vale que

$$\begin{aligned}
\|\gamma_\varepsilon(s_1) - \gamma_\varepsilon(s_2)\|_\infty &= \|\rho_\varepsilon * (\gamma(s_1) - \gamma(s_2))\|_\infty \\
&= \left\| \int_{\Omega_\varepsilon} \rho_\varepsilon(y)\Big(\gamma(s_1)(x-y) - \gamma(s_2)(x-y)\Big)\,dx \right\|_\infty \\
&\leq \|\rho_\varepsilon\|\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\|\gamma(s_1) - \gamma(s_2)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\
&\leq \|\rho_\varepsilon\|\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\|\gamma(s_1) - \gamma(s_2)\|_{H^1} \to 0,
\end{aligned}$$

quando $s_1 \to s_2$, pois $\gamma \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^2))$. Assim $\gamma_\varepsilon \in C([0,1], L^\infty(\mathbb{R}^2))$, o que prova (ii). Agora considere a função $\beta : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, dada por $\beta(t,\varepsilon) = \|\gamma_\varepsilon(t) - \gamma(t)\|_{H^1}$. Observe que novamente pelo Teorema de Tonelli, para todo $|\alpha| \leq 1$, vale que

$$\|(D^\alpha \rho_\varepsilon) * (\gamma(s_1) - \gamma(s_2))\|_2^2 \leq \|D^\alpha \rho_\varepsilon\|_{L^1(\Omega_\varepsilon)} \|(\gamma(s_1) - \gamma(s_2))\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \to 0,$$

quando $s_1 \to s_2$. Logo pela continuidade de γ, obtemos também que $\gamma_\varepsilon \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^2))$. Com isso, β é contínua na variável t. Mais ainda, como $[0,1]$ é compacto, β é uniformemente contínua em t. Assim dado $\tilde{\varepsilon} > 0$, existe $\tilde{\delta} > 0$, tal que $|s_1 - s_2| < \tilde{\delta}$, implica que

$$0 < \beta(s_1, \varepsilon) < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + \beta(s_2, \varepsilon). \tag{2.18}$$

Então vamos escrever $[0,1] = \bigcup_{i=0}^{i=k} [t_i, t_{i+1}]$, em que $|t_i - t_{i+1}| < \tilde{\delta}$, para todo $i = 0, 1, ..., k$. Logo para qualquer $i \in \{1, ..., k\}$, dados $s_1, s_2 \in [t_i, t_{i+1}]$ vale (2.18). Além disso, pelo Teorema B.5.1 (cf. Apêndice B.5), para qualquer $t \in [0,1]$ fixado, como $\rho_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, segue que

$$D^\alpha \gamma_\varepsilon(t) = (D^\alpha \rho_\varepsilon) * \gamma(t) \to D^\alpha \gamma(t), \quad \text{em} \quad L^2(\mathbb{R}^2), \quad \forall \ |\alpha| \leq 1,$$

quando $\varepsilon \to 0$. Ou seja, $\gamma_\varepsilon(t) = \rho_\varepsilon * \gamma(t) \to \gamma(t)$, em $H^1(\mathbb{R}^2)$, quando $\varepsilon \to 0$. Isto é,

$$\beta(t, \varepsilon) \to 0, \quad \text{quando} \ \varepsilon \to 0. \tag{2.19}$$

Com isso, para cada $i \in \{1, ..., k\}$ tome $\tilde{t}_i \in (t_i, t_{i+1})$, e note que por (2.19) existe $\tilde{\delta}_i > 0$, tal que

$$0 < \beta(\tilde{t}_i, \varepsilon) < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}, \tag{2.20}$$

sempre que $0 < \varepsilon < \tilde{\delta}_i$. E definindo $\delta = \min\limits_{0 \leq i \leq k} \{\tilde{\delta}_i\}$, para qualquer $t \in [0,1]$ existe $i \in \{1, ..., k\}$, tal que $t \in [t_i, t_{i+1}]$, assim, por (2.18) e por (2.20), concluímos que

$$0 < \beta(t, \varepsilon) < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + \beta(\tilde{t}_i, \varepsilon) < \tilde{\varepsilon},$$

sempre que $0 < \varepsilon < \delta$. Dessa forma, obtemos que $\max\limits_{t \in [0,1]} \beta(t, \varepsilon) \leq \tilde{\varepsilon}$, sempre que $0 < \varepsilon < \delta$. Portanto, concluímos que

$$\max_{t \in [0,1]} \beta(t, \varepsilon) \to 0,$$

quando $\varepsilon \to 0$, o que prova (iii).

Agora por (h1), dado $\varepsilon = \dfrac{L}{2}$ existe $\delta > 0$, tal que $\left| \dfrac{h(s) + L}{s} \right| < \varepsilon$, para $0 < s < \delta$, e com isso $-h(s) \geq \dfrac{Ls}{2} > 0$ e $-H(s) \geq \dfrac{Ls^2}{4} > 0$, para $0 \leq s < \delta$. Logo se $0 < \|u\|_\infty < \delta$, concluímos que

$$P(u) = -2 \int_{\mathbb{R}^2} H(u) \, dx \geq \frac{L}{2} \|u\|_2^2 > 0. \tag{2.21}$$

Assim, como J é contínuo e por (iii), segue que $\gamma_\varepsilon(t) \to \gamma(t)$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$, quando $\varepsilon \to 0$, para qualquer

$t \in [0,1]$, observamos que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, segue que

$$\begin{aligned} P(\gamma_\varepsilon(1)) &= -2\int_{\mathbb{R}^2} H(\gamma_\varepsilon(1))\,dx \\ &\leq \|\nabla\gamma_\varepsilon(1)\|_2^2 - 2\int_{\mathbb{R}^2} H(\gamma_\varepsilon(1))\,dx \\ &= 2J(\gamma_\varepsilon(1)) \\ &\approx 2J(\gamma(1)) \\ &< 0. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Além disso, note que, para todo $\varepsilon > 0$, vale que $\gamma_\varepsilon(0) = \gamma(0) = 0$, e como concluímos em (ii) que $\gamma_\varepsilon(t) \in C([0,1], L^\infty(\mathbb{R}^2))$, logo para t suficientemente pequeno, vale que $\|\gamma_\varepsilon(t)\|_\infty < \delta$ implicando por (2.21) que $P(\gamma_\varepsilon(t)) > 0$. Dessa forma, considerando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, por (2.22), vale que $P(\gamma_\varepsilon(1)) < 0$, e ainda vale que $P(\gamma_\varepsilon(t)) > 0$, para $t \approx 0$. Então como $t \mapsto P(\gamma_\varepsilon(t))$ é contínua, existe $t_\varepsilon \in (0,1)$ com $P(\gamma_\varepsilon(t_\varepsilon)) = 0$, e por (2.21), concluímos que $\|\gamma_\varepsilon(t_\varepsilon)\|_\infty > \delta$, com isso, $\gamma_\varepsilon(t_\varepsilon) \in \mathcal{P}$.

Por fim, considerando $\varepsilon_n \to 0$, com $t_{\varepsilon_n} \to t_\gamma$, para algum $t_\gamma \in (0,1)$, quando $n \to +\infty$, segue que

$$\begin{aligned} \|\gamma_{\varepsilon_n}(t_{\varepsilon_n}) - \gamma(t_\gamma)\|_{H^1} &\leq \|\gamma_{\varepsilon_n}(t_{\varepsilon_n}) - \gamma(t_{\varepsilon_n})\|_{H^1} + \|\gamma(t_{\varepsilon_n}) - \gamma(t_\gamma)\|_{H^1} \\ &\leq \max_{t\in[0,1]} \|\gamma_\varepsilon(t) - \gamma(t)\|_{H^1} + \|\gamma(t_{\varepsilon_n}) - \gamma(t_\gamma)\|_{H^1}, \end{aligned}$$

e então por (iii) e pela continuidade de γ, segue que o lado direito da desigualdade acima converge para zero, quando $n \to \infty$. Ou seja,

$$\|\gamma_{\varepsilon_n}(t_{\varepsilon_n}) - \gamma(t_\gamma)\|_{H^1} \to 0, \tag{2.23}$$

quando $n \to \infty$. Portanto pela continuidade de P concluímos por (2.23) que

$$P(\gamma(t_{\varepsilon_n})) \to P(\gamma(t_\gamma)),$$

quando $n \to \infty$. E como $\gamma_{\varepsilon_n}(t_{\varepsilon_n}) \in \mathcal{P}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $P(\gamma_{\varepsilon_n}(t_{\varepsilon_n})) = 0$, e passando o limite com $n \to \infty$, obtemos $P(\gamma(t_\gamma)) = 0$. Para concluir que $\gamma(t_\gamma) \in \mathcal{P}$, resta mostrar que $\gamma(t_\gamma) \neq 0$. Para isso, relembramos que por Berestycki, Gallouët e Kavian [5] (cf. Etapa 3, prova do Teorema 1), segue que

$$\inf_{u\in\mathcal{P}} \|\nabla u\|_2^2 = 2m \geq 2b > 0.$$

Portanto $\|u\|_{H^1} \geq \sqrt{2m}$, $\forall\ u \in \mathcal{P}$, logo $\|\gamma_{\varepsilon_n}(t_{\varepsilon_n})\|_{H^1} \geq \sqrt{2m}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e assim por (2.23), quando $n \to \infty$, segue que $\|\gamma_{\varepsilon_n}(t_{\varepsilon_n})\|_{H^1} \to \|\gamma(t_\gamma)\|_{H^1}$, e passando o limite, quando $n \to \infty$, segue que

$$\|\gamma(t_\gamma)\|_{H^1} \geq \sqrt{2m} > 0.$$

Ou seja, $\gamma(t_\gamma) \neq 0$, com isso $\gamma(t_\gamma) \in \mathcal{P}$ e como $\gamma(t_\gamma) \in \gamma([0,1])$, segue que $\gamma(t_\gamma) \in \gamma([0,1]) \cap \mathcal{P}$. Provando que $\gamma([0,1]) \cap \mathcal{P}$ é não vazio, também quando $N = 2$. O que encerra a prova do lema. ■

Para encerrar o capítulo, utilizando os resultados dos Lemas 2.5 e 2.6, obtemos que

$$\begin{aligned} m &= \min_{u \in \mathcal{P}} J(u) \\ &\leq J(\gamma(t_\gamma)) \\ &\leq \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)) \end{aligned}$$

e portanto

$$m \leq \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)) = b.$$

Assim concluímos que $b = m$ e como na seção anterior já havíamos obtido um caminho que satisfaz (2.5), completamos a prova do Teorema 2.1.

Capítulo

3

Uma Solução Positiva para um Problema Assintoticamente Linear e Autônomo no Infinito

Considere o problema dado em (1), mencionado na introdução desse trabalho, cujas principais vantagens são o fato de assumirmos hipóteses que tornam a não linearidade assintoticamente linear, e fazem com que o problema associado ao "infinito" seja autônomo. Lembremos que estamos nos referindo ao problema dado por

$$-\Delta u + V(x)u = f(u), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

em que $N \geq 2$. E assumimos que o potencial $V \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ satisfaz:

(V1) existe $\alpha > 0$, tal que $V(x) \geq \alpha$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$;

(V2) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} V(x) = V(+\infty) \in (0, +\infty)$;

e que o termo não linear $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ satisfaz:

(f1) $f(s)s^{-1} \to 0$, quando $s \to 0^+$;

(f2) existe $a \in (0, +\infty)$, tal que $f(s)s^{-1} \to a$, quando $s \to +\infty$, e

$$a > \inf \sigma\big(-\Delta + V(x)\big),$$

em que $\sigma\big(-\Delta + V(x)\big)$ denota o espectro do operador autoadjunto $-\Delta + V(x) : H^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$.

O objetivo desse capítulo é utilizar os resultados dos capítulos anteriores para demonstrar que, sob certas condições, garantimos a existência de $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, uma solução positiva, e logo após, a existência de uma solução com energia mínima, para o problema em questão. A princípio, vamos estudar dois resultados:

Teorema 3.1. *Sob as hipóteses (V1), (V2), (f1), (f2) e supondo que* $F(s) = \int_0^s f(t)\,dt$ *satisfaça*

(f3) *existe* $\delta > 0$*, tal que* $2F(s)s^{-2} \leq V(+\infty) - \delta$*, para todo* $s \in \mathbb{R}^+$.

Segue que o problema dado em (1) tem uma solução positiva.

Teorema 3.2. *Sob as hipóteses (V1) e (V2), assim como*

(V3) $V(x) \leq V(+\infty)$*, para todo* $x \in \mathbb{R}^N$,

e supondo (f1) e (f2), assim como

(f4) *definindo* $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *por* $G(s) = \frac{1}{2}f(s)s - F(s)$*, vale que*

(i) $G(s) \geq 0$*, para todo* $s \geq 0$*;*
(ii) existe $\delta > 0$*, tal que*

$$2F(s)s^{-2} \geq V(+\infty) - \delta \ \Rightarrow \ G(s) > \delta.$$

Segue que o problema dado em (1) tem uma solução positiva.

Observações: **(1)** Os Teoremas 3.1 e 3.2 serão provados por um argumento variacional. Como estamos buscando soluções positivas, vamos assumir sem restrição, que $f(s) = 0$, para todo $s \leq 0$.

(2) Se $G(s) \geq 0, \ \forall\ s \geq 0$, e $a < V(+\infty)$, então (f3) é válido. De fato, supondo que $G(s) \geq 0, \ \forall\ s \geq 0$, segue que $\frac{2F(s)}{s^2}$ é uma função não decrescente, para todo $s > 0$, pois

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{2F(s)}{s^2}\right) = \frac{4s}{s^4}\left[\frac{f(s)s}{2} - F(s)\right] = \frac{4G(s)}{s^3} \geq 0, \quad \forall\ s > 0.$$

Além disso, por (f2) concluímos (3.7), ou seja, vale que $\lim_{s\to+\infty}\frac{2F(s)}{s^2} = a$, e como $a < V(+\infty)$, dado $\varepsilon = \frac{(V(+\infty) - a)}{2} > 0$, existe $s_0 > 0$ tal que $\frac{2F(s)}{s^2} < a + \varepsilon \leq V(+\infty) - \delta$, para todo $s > s_0$, em que $0 < \delta \leq (V(+\infty) - a) - \varepsilon$. E como $\frac{2F(s)}{s^2}$ é não decrescente, para $s > 0$, dado $s_1 > s_0$, segue que

$$\frac{2F(s)}{s^2} \leq \frac{2F(s_0)}{s_0^2} \leq \frac{2F(s_1)}{s_1^2} < V(+\infty) - \delta, \quad \forall\ 0 < s \leq s_0.$$

Logo, $\frac{2F(s)}{s^2} < a + \varepsilon \leq V(+\infty) - \delta$, para todo $s \in \mathbb{R}^+$, ou seja, vale (f3).

(3) Se $f(s)s^{-1}$ é uma função não decrescente, para todo $s > 0$, então (f4) é válido. Com efeito, por (f1) segue que $f(s)s^{-1}$ não é constante, e supondo que seja não decrescente, dado $t > 0$, para todo

$0 \leq s < t$, segue que

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t f(r)\,dr \\ &= \int_0^s f(r)\,dr + \int_s^t f(r)\,dr \\ &= F(s) + \int_s^t r\frac{f(r)}{r}\,dr \\ &< F(s) + \frac{f(t)}{t}\int_s^t r\,dr \\ &= F(s) + \frac{1}{2}f(t)t - \frac{f(t)}{t}\frac{s^2}{2} \\ &< F(s) - \frac{f(s)}{s}\frac{s^2}{2} + \frac{1}{2}f(t)t \\ &= -G(s) + \frac{1}{2}f(t)t, \end{aligned}$$

ou seja,

$$G(s) = F(s) - \frac{f(s)}{s}\frac{s^2}{2} < F(t) - \frac{f(t)}{t}\frac{t^2}{2} = G(t), \quad \forall \;\; 0 \leq s < t,$$

e assim, $G(s)$ é uma função não decrescente para $s \geq 0$, em particular, $G(s) > G(0) = 0$, para todo $s > 0$, o que verifica (f4) (i).

Para mostrar que vale (f4) (ii), vamos supor por contradição que não existe $\delta > 0$, tal que

$$2F(s)s^{-2} \geq V(+\infty) - \delta, \quad \text{implica que} \;\; G(s) > \delta,$$

assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $s_n > 0$, tal que

$$2\frac{F(s_n)}{s_n^2} \geq V(+\infty) - \frac{1}{n}, \quad \text{implica que} \;\; G(s_n) < \frac{1}{n},$$

então claramente, $G(s_n) \to 0$, quando $n \to \infty$. Como $G(s)$ é não decrescente, para $s \geq 0$, então $G(s_n) \to 0$ implica que $s_n \to 0^+$, quando $n \to \infty$. Caso contrário, existiria $\tilde{s} > 0$, tal que $s_n \geq \tilde{s} > 0$, para todo $n > n_0$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Logo, $G(s_n) \geq G(\tilde{s}) > 0$, para todo $n > n_0$, o que contradiria $G(s_n) \to 0$, quando $n \to \infty$. Além disso, como por (f1) e (f2) concluímos (3.3), então segue que

$$V(+\infty) - \frac{1}{n} \leq 2\frac{F(s_n)}{s_n^2} \leq \varepsilon + \frac{C_\varepsilon}{p}s_n^{p-2},$$

e fazendo $n \to \infty$, por (V2), obtemos que

$$0 < V(+\infty) \leq 2\frac{F(s_n)}{s_n^2} \leq \varepsilon \to 0, \quad \text{quando} \;\; \varepsilon \to 0^+,$$

o que gera contradição. Portanto, (f4) (ii) é satisfeita.

(4) Como exemplo de potencial $V(x)$ satisfazendo as hipóteses (V1), (V2) e V(3) podemos considerar

$$V(x) = \frac{C_1|x|}{1+|x|} + C_2,$$

em que C_1 e C_2 são constantes positivas. De fato, para (V1) fazendo $\alpha = C_2$ segue que $V(x) \geq \alpha$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Também, fazendo $V(+\infty) = C_1 + C_2 \in (0, +\infty)$, segue que $\lim\limits_{|x|\to+\infty} V(x) = V(+\infty)$, o que nos dá (V2). Além disso,

$$V(x) = \frac{C_1|x|}{1+|x|} + C_2 \leq V(+\infty), \qquad \text{para todo } \; x \in \mathbb{R}^N,$$

o que garante (V3).

(5) Como exemplo de função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, satisfazendo (f1), (f2), (f3) e (f4), podemos considerar

$$f(s) = \begin{cases} \dfrac{Cs^2}{1+s}, & \text{se } \; s > 0, \\ 0, & \text{se } \; s \leq 0, \end{cases}$$

em que C é uma constante positiva, dada de modo que $V(+\infty) > C > \inf \sigma\big(-\Delta + V(x)\big)$. De fato, como

$$f(s)s^{-1} = \frac{Cs}{1+s} \to 0, \quad \text{quando } \; s \to 0^+,$$

então vale (f1). Para (f2), basta fazer $a = C$ e observar que

$$f(s)s^{-1} = \frac{Cs}{1+s} \to C, \quad \text{quando } \; s \to +\infty.$$

Para (f3), observamos que, para todo $s \in \mathbb{R}^+$ vale que

$$\begin{aligned} 2F(s)s^{-2} &= C - \frac{2C}{s} + \frac{2C\log(s+1)}{s^2} \\ &\leq C - \frac{2C}{s} + \frac{2Cs}{s^2} \\ &= C \\ &\leq V(+\infty) - \delta, \end{aligned}$$

em que tomamos $0 < \delta \leq V(+\infty) - C$. E finalmente, para (f4), basta notar que

$$\frac{d}{ds} f(s)s^{-1} = \frac{C}{(1+s)^2} > 0,$$

logo, $f(s)s^{-1}$ é crescente, em particular, não decrescente, para $s \geq 0$. Assim, pela observação (3), vale (f4).

Iniciando o argumento variacional, a fim de resolver o problema apresentado em (1), associamos ao mesmo o funcional $I : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\Big)\, dx \; - \; \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\, dx, \tag{3.1}$$

em que $F(u) = \displaystyle\int_0^u f(s)\, ds$. Assim, vamos, consequentemente, trabalhar em $H^1(\mathbb{R}^N) \equiv H$, com a norma

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\Big)\, dx.$$

Por (V1) e (V2), podemos concluir que esta norma é equivalente à norma padrão de $H^1(\mathbb{R}^N)$. De fato, como V é contínua, por (V2) segue que V é limitada. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$, tal que $V(x) < \varepsilon + V(+\infty)$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, com $|x| > r$, e como V é contínua, atinge seu máximo M no compacto $B_r[0] \subset \mathbb{R}^N$, então se definimos $\tilde{V} = \max\{\varepsilon + V(+\infty), M\}$, obtemos que $V(x) < \tilde{V}, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^N$. Também, considerando $\alpha > 0$, dado por (V1), se definimos $\tilde{\alpha} = \min\{\alpha, 1\}$, então segue que

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}\|u\|^2_{H^1} &= \tilde{\alpha}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^2 + u^2\right) dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right) dx \\
&= \|u\|^2 \\
&\leq (\tilde{V}+1)\|u\|^2_{H^1},
\end{aligned}$$

o que prova a equivalência das normas.

3.1 A Geometria do Passo da Montanha

O objetivo dessa seção é mostrar que quando o funcional I está sob as hipóteses (V1), (f1) e (f2), ele possui a geometria PM. Lembrando que $I(0) = 0$, por meio do Lema 3.1 e do Lema 3.2, chegamos a conclusão desejada. Também almejamos obter uma sequência de Cerami no nível PM de I, para isso vamos aplicar o Princípio Variacional de Ekeland, estudado no Capítulo 1.

Lema 3.1. *Sob as hipóteses (V1), (f1) e (f2), concluímos que* $I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + o(\|u\|^2)$ *e* $I'(u)u = \|u\|^2 + o(\|u\|^2)$, *quando* $u \to 0$, *em* H.

Prova. Por (f1) e (f2), fixado $p \in (2, 2^*)$ e dado $\varepsilon > 0$, considerando $s > 0$, existe $\delta_\varepsilon > 0$, tal que $\left|\frac{f(s)}{s}\right| < \varepsilon$, quando $0 < s < \delta_\varepsilon$, logo $|f(s)| < \varepsilon|s|$, sempre que $0 < s < \delta_\varepsilon$. Também, existe $A_\varepsilon > 1$, tal que $\left|\frac{f(s)}{s}\right| < a + \varepsilon$, quando $s > A_\varepsilon$. Logo

$$|f(s)| < (a+\varepsilon)|s| < (a+\varepsilon)|s|^{p-1}, \quad \text{sempre que} \quad s > A_\varepsilon,$$

pois $|s| < |s|^{p-1}$, já que $s > 1$ e $p - 1 > 1$. Portanto, se $0 < s < \delta_\varepsilon$, ou se $s > A_\varepsilon$, então segue que

$$|f(s)| < \varepsilon|s| + (a+\varepsilon)|s|^{p-1}.$$

Agora, como $s \mapsto \frac{|f(s)|}{|s|^{p-1}}$ é função contínua em $[\delta_\varepsilon, A_\varepsilon]$, assume máximo M_ε no compacto $[\delta_\varepsilon, A_\varepsilon]$, assim

$$|f(s)| \leq M_\varepsilon|s|^{p-1}, \quad \forall\ s \in [\delta_\varepsilon, A_\varepsilon].$$

Logo, estabelecendo $C_\varepsilon = \max\{M_\varepsilon, (a+\varepsilon)\}$ concluímos que $|f(s)| \leq \varepsilon|s| + C_\varepsilon|s|^{p-1}$, para todo $s > 0$. Como consideramos $f(s) = 0$, para $s \leq 0$, então a desigualdade vale trivialmente para $s \leq 0$, e portanto obtemos

$$|f(s)| \leq \varepsilon|s| + C_\varepsilon|s|^{p-1}, \quad \forall\ s \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Além disso, se $s > 0$ então

$$|F(s)| \leq \int_0^s |f(t)|\,dt \leq \int_0^s \left(\varepsilon t + C_\varepsilon t^{p-1}\right) dt = \frac{\varepsilon}{2}|s|^2 + \frac{C_\varepsilon}{p}|s|^p.$$

E como $F(s) = 0$, quando $s \leq 0$, segue que

$$|F(s)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|s|^2 + \frac{C_\varepsilon}{p}|s|^p, \quad \forall\ s \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Por isso, para cada $u \in H$, fazendo $s = u(x)$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, concluímos que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} F(u)\,dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2\,dx + \frac{C_\varepsilon}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p\,dx = \frac{\varepsilon}{2}\|u\|_2^2 + \frac{C_\varepsilon}{p}\|u\|_p^p.$$

Como por hipótese $p \in (2, 2^*)$, pelas imersões de Sobolev (cf. Apêndice B.1), vale que $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$. Além disso, como a norma de H é equivalente a norma usual de $H^1(\mathbb{R}^N)$, então obtemos que $H \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ e portanto existe uma constante positiva C_p, que depende unicamente de p, tal que $\|u\|_p \leq C_p\|u\|$. Assim, obtemos que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} F(u)\,dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}C_2^2\|u\|^2 + \frac{C_\varepsilon}{p}C_p^p\|u\|^p.$$

E quando $u \to 0$ em H, considerando $\|u\| < 1$, consequentemente $\|u\|^p < \|u\|^2$, então segue que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} F(u)\,dx\right| \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}C_2^2 + \frac{C_\varepsilon}{p}C_p^p\right)\|u\|^2.$$

E a desigualdade acima implica que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} F(u)\,dx = o(\|u\|^2)$, quando $u \to 0$ em H. De forma análoga, por (3.2), e considerando que $u \to 0$ em H, vale que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^N} f(u)u\,dx\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(u)||u|\,dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\varepsilon|u| + C_\varepsilon|u|^{p-1}\right)|u|\,dx \\
&\leq \varepsilon\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2\,dx \ + \ C_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p\,dx \\
&= \varepsilon\|u\|_2^2 + C_\varepsilon\|u\|_p^p \\
&\leq \varepsilon C_2^2\|u\|^2 \ + \ C_\varepsilon C_p^p\|u\|^p \\
&\leq \left(\varepsilon C_2^2 + \ C_\varepsilon C_p^p\right)\|u\|^2.
\end{aligned}$$

O que implica que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f(u)u\,dx = o(\|u\|^2)$, quando $u \to 0$ em H. E assim concluímos o lema. ■

Corolário 3.1. *Sob as hipóteses (V1), (f1), (f2), existe $\rho_0 > 0$ satisfazendo:*

(i) qualquer ponto crítico não trivial u de I satisfaz $\|u\| \geq \rho_0$;

(ii) para qualquer sequência Palais-Smale (u_n) no nível $b \neq 0$, vale que $\liminf_{n\to\infty} \|u_n\| \geq \rho_0$.

Prova. (i) Suponha por contradição que existe $(u_n) \subset H$ uma sequência de pontos críticos não triviais de I, tal que $\|u\| \to 0$ em H, quando $n \to \infty$. Então como $I'(u_n) = 0,\ \forall\ n$, segue que $I'(u_n)u_n = 0,\ \forall\ n$. Assim pelo Lema 3.1, obtemos

$$0 = \frac{I'(u_n)u_n}{\|u_n\|^2} = \frac{\|u_n\|^2}{\|u_n\|^2} + \frac{o(\|u_n\|^2)}{\|u_n\|^2} = 1 + \frac{o(\|u_n\|^2)}{\|u_n\|^2},$$

o que é uma contradição, pois $\lim_{n\to\infty} \dfrac{o(\|u_n\|^2)}{\|u_n\|^2} = 0$. Portanto vale (i).

(ii) Dada $(u_n) \subset H$, uma sequência Palais-Smale no nível $b \neq 0$, segue que $I(u_n) \to b$ e $I'(u_n) \to 0$, quando $n \to \infty$. Suponha que para tal sequência $\liminf_{n\to\infty} \|u_n\| = 0$. Então existe (v_n) uma subsequência de (u_n), tal que $\lim_{n\to\infty} \|v_n\| = 0$, logo $v_n \to 0$ em H, e então pelo Lema 3.1, segue que

$$b = \lim_{n\to\infty} I(v_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\|v_n\|^2 + o(\|v_n\|^2) \right) = 0.$$

Ou seja, uma contradição. Portanto $\liminf_{n\to\infty} \|u_n\| \geq \rho_0 > 0$, para algum $\rho_0 > 0$.

Lema 3.2. *Sob as hipóteses (V1), (f1) e (f2) existe $v \in H$ satisfazendo $\|v\| > \rho_0$ e $I(v) < 0$.*

Prova. Como o operador $-\Delta + V(x)$ é autoadjunto, pois é simétrico, o ínfimo de seu espectro pode ser caracterizado como segue (cf. Apêndice B.6)

$$\inf \sigma\big(-\Delta + V(x)\big) = \inf_{u\in H:\, \|u\|_2=1} \big\langle -\Delta u + V(x)u, u\big\rangle = \inf_{u\in H:\, \|u\|_2=1} \|u\|^2, \tag{3.4}$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno de $L^2(\mathbb{R}^N)$. Como por hipótese vale que $\inf \sigma\big(-\Delta + V(x)\big) < a$, pela definição de ínfimo é possível encontrar $\tilde{u} \in H$, tal que $||\tilde{u}||_2 = 1$ e $\|\tilde{u}\| < a$. Substituindo, se necessário, $\tilde{u}$ por $|\tilde{u}|$, podemos supor que $\tilde{u} \geq 0$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. A fim de provar o lema, é suficiente mostrar que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{I(t\tilde{u})}{t^2} = L < 0. \tag{3.5}$$

De fato, se mostrarmos que vale (3.5), então dado $\varepsilon > 0$, com $L + \varepsilon < 0$, existe $t_\varepsilon > 0$, tal que $t \geq t_\varepsilon$ implica que $\left| \dfrac{I(t\tilde{u})}{t^2} - L \right| < \varepsilon$. Assim $I(t\tilde{u}) < (\varepsilon + L)t^2 < 0$, logo $v = t\tilde{u}$, para algum $t \geq t_\varepsilon$, garante o resultado. Sendo assim, basta provar (3.5). Primeiro vamos mostrar que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(t\tilde{u})}{t^2}\, dx = \frac{1}{2}a. \tag{3.6}$$

Para isso vamos separar os casos em que $\tilde{u}(x) > 0$ e $\tilde{u}(x) = 0$. Como $\tilde{u}$ é definida q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\tilde{u}$ está definida em todo $\mathbb{R}^N$. Desse modo, considere primeiro $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $\tilde{u}(x) > 0$, dado $\varepsilon > 0$, assim como na prova do Lema 3.1, por (f2), se $s > A_\varepsilon$, então

$\left|\dfrac{f(s)-as}{s}\right| < \varepsilon$, e como $t \to \infty$ podemos considerar $t > A_\varepsilon$, e segue que

$$\left|\frac{F(t)}{t^2} - \frac{1}{2}a\right| \leq \int_0^{A_\varepsilon} \frac{|f(s)-as|}{t^2}\,ds + \int_{A_\varepsilon}^{t} \frac{\varepsilon s}{t^2}\,ds.$$

Agora, como a função $s \mapsto |f(s)-as|$ é contínua, assume máximo $\tilde{M}$ no compacto $[0, A_\varepsilon]$, e com isso, obtemos que

$$\left|\frac{F(t)}{t^2} - \frac{1}{2}a\right| \leq \frac{\tilde{M}A_\varepsilon}{t^2} + \frac{\varepsilon}{2t^2}(t^2 - A_\varepsilon^2) = \frac{2\tilde{M}A_\varepsilon - \varepsilon A_\varepsilon^2}{2t^2} \; + \; \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, $\displaystyle\limsup_{t\to+\infty}\left|\frac{F(t)}{t^2} - \frac{1}{2}a\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, e como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, se $\varepsilon \to 0^+$, segue que

$$\lim_{s\to\infty} \frac{F(s)}{s^2} = \frac{1}{2}a, \tag{3.7}$$

e portanto, concluímos que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{F(t\tilde{u}(x))}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{F(t\tilde{u}(x))}{(t\tilde{u}(x))^2}(\tilde{u}(x))^2 = \frac{1}{2}a(\tilde{u}(x))^2. \tag{3.8}$$

Agora dado x tal que $\tilde{u}(x) = 0$, segue que

$$\frac{F(t\tilde{u}(x))}{t^2} = F(0) = 0 = \frac{1}{2}a(\tilde{u}(x))^2, \quad \forall\, t > 0. \tag{3.9}$$

Assim, combinando (3.8) e (3.9), concluímos que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{F(t\tilde{u}(x))}{t^2} = \frac{1}{2}a(\tilde{u}(x))^2, \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \tag{3.10}$$

Por outro lado, por (f1) e (f2) existe uma constante $C > 0$, tal que

$$0 \leq \left|\frac{f(s)}{s}\right| \leq C, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}. \tag{3.11}$$

De fato, $\left|\dfrac{f(s)}{s}\right| < \varepsilon$, quando $0 < s < \delta_\varepsilon$, e $\left|\dfrac{f(s)}{s}\right| < a + \varepsilon$, quando $s > A_\varepsilon$, e pela continuidade da função $s \mapsto \left|\dfrac{f(s)}{s}\right|$, segue que ela assume máximo $\tilde{C}_\varepsilon > 0$ no compacto $[\delta_\varepsilon, A_\varepsilon]$ e então $\left|\dfrac{f(s)}{s}\right| \leq \tilde{C}_\varepsilon$, quando $s \in [\delta_\varepsilon, A_\varepsilon]$. Logo,

$$\left|\frac{f(s)}{s}\right| \leq C = \max\{a + \varepsilon, \tilde{C}_\varepsilon\},$$

sempre que $s > 0$ e como $f(s) = 0$, se $s \leq 0$, então concluímos (3.11). Com isso, $|f(s)| \leq C|s|, \;\; \forall\, s \in \mathbb{R}$, e como $F(s) = 0$, quando $s \leq 0$, segue que

$$|F(s)| \leq \int_0^s |f(t)|\,dt \leq C\int_0^s t\,dt = \frac{C}{2}|s|^2,$$

e portanto

$$0 \leq \frac{|F(s)|}{|s|^2} \leq \frac{C}{2}, \quad \forall \ s \in \mathbb{R}. \tag{3.12}$$

Consequentemente, fazendo $s = t\tilde{u}(x)$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, obtemos que

$$0 \leq \frac{|F(t\tilde{u}(x))|}{t^2} \leq \frac{C}{2}(\tilde{u}(x))^2, \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \tag{3.13}$$

Agora, como $(\tilde{u}(x))^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e por (3.10) vale a convergência q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (cf. Apêndice B.7), obtemos que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(t\tilde{u}(x))}{t^2}\, dx = \frac{1}{2}a \int_{\mathbb{R}^N} (\tilde{u}(x))^2\, dx = \frac{1}{2}a, \tag{3.14}$$

ou seja, concluímos (3.6). Assim como $\|\tilde{u}\|^2 < a$, segue que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{I(t\tilde{u})}{t^2} = \frac{1}{2}\|\tilde{u}\|^2 - \lim_{t\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(t\tilde{u}(x))}{t^2}\, dx = \frac{1}{2}(\|\tilde{u}\|^2 - a) < 0, \tag{3.15}$$

com isso, obtemos (3.5) e fazendo $v = t_\varepsilon \tilde{u}$, segue o resultado. ■

De acordo com a prova do Lema 3.1 , note que

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\, dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \left| \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\, dx \right| \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\varepsilon}{2} C_2^2 \|u\|^2 - \frac{C_\varepsilon}{p} C_p^p \|u\|^p \\ &\geq \|u\|^2 \left(\frac{1 - \varepsilon C_2^2}{2} - \frac{C_\varepsilon C_p^p}{p} \|u\|^p \right). \end{aligned}$$

Assim, podemos tomar $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que

$$\frac{1 - \varepsilon C_2^2}{2} = 2\tilde{\rho} > 0,$$

e fazendo $0 < \|u\| = \rho = \left(\dfrac{p\tilde{\rho}}{C_\varepsilon C_p^p} \right)^{p-1}$, então vale que

$$I(u) \geq \rho^2 \big(2\tilde{\rho} - \tilde{\rho} \big) = \rho^2 \tilde{\rho} = \alpha > 0, \quad \forall \ u \in H, \quad \text{com} \quad \|u\| = \rho > 0,$$

o que mostra a primeira condição da geometria PM para I. Além disso, como o Lema 3.2 garante a existência de $v = t\tilde{u}$, tal que $I(v) < 0$, e t pode ser tomado suficientemente grande de modo que $\|v\| > \rho$, segue a segunda condição da geometria PM para I. Portanto, concluímos que I possui a geometria PM. Desse modo, definindo

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H), \gamma(0) = 0 \text{ e } I(\gamma(1)) < 0\},$$

segue que $\Gamma \neq \varnothing$, pois o caminho $\gamma(t) = tv$, que une 0 a v, pertence a Γ. Logo está bem definido

$$c \equiv \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)),$$

que é chamado nível do Passo da Montanha para I.

Além disso, podemos ainda definir alternativamente

$$\tilde{\Gamma} = \{\tilde{\gamma} \in C([0,1], H), \tilde{\gamma}(0) = 0 \text{ e } \tilde{\gamma}(1) = v\}.$$

Observe que $\tilde{\Gamma} \neq \varnothing$, pelo mesmo argumento usado para Γ, e definindo

$$\tilde{c} \equiv \inf_{\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}} \max_{t \in [0,1]} I(\tilde{\gamma}(t)), \tag{3.16}$$

afirmamos que $\tilde{c} = c$. De fato, como $I(\tilde{\gamma}(1)) = I(v) < 0$, para todo $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$, então $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$. Dessa forma, pela definição de ínfimo, segue que $c \leq \tilde{c}$. Agora dado um caminho arbitrário $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$, defina $e = 2v = 2t_\varepsilon \tilde{u}$, onde estamos usando a definição de v dada no Lema 3.2. Assim definindo γ como sendo o caminho

$$\gamma(t) = \begin{cases} \tilde{\gamma}(2t), & \text{se } \ 0 \leq t \leq 1/2, \\ 2tv, & \text{se } \ 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

segue que $\gamma \in \Gamma$, pois como $2t_\varepsilon > t_\varepsilon$, pela prova do Lema 3.2, concluímos que $I(\gamma(1)) = I(e) < 0$. Observe também que pela definição de γ, segue que

$$\tilde{c} \leq \max_{t \in [0,1]} I(\tilde{\gamma}(t)) \leq \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)),$$

logo, aplicando o ínfimo sobre Γ, segue que $\tilde{c} \leq c$, e concluímos a igualdade.

Com isso, podemos considerar a definição alternativa para o nível do Passo da Montanha, dada em (3.16). Além disso, como o funcional I tem a geometria PM, podemos aplicar o Princípio Variacional de Ekeland (cf. Teorema 1.2), e então garantir a existência de uma sequência de Cerami para I no nível c, isto é, uma sequência $(u_n) \subset H$, tal que

$$I(u_n) \to c \quad \text{e} \quad \|I'(u_n)\|_{H^{-1}}(1 + \|u_n\|) \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty.$$

3.2 A Limitação da Sequência de Cerami

Nessa seção buscamos limitar a sequência de Cerami obtida na seção anterior. Para isso, vamos supor por contradição que existe uma subsequência de (u_n), ainda denotada por (u_n), tal que $||u_n|| \to +\infty$, quando $n \to \infty$. Então, para tal subsequência, definimos $w_n = u_n ||u_n||^{-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e chegaremos a uma contradição. Veja que (w_n) é limitada e que, a menos de subsequência, satisfaz exatamente uma das seguintes alternativas:

(1) existe $\alpha > 0,\ 0 < r < +\infty$ e $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{y_n+B_r} w_n^2\,dx \geq \alpha > 0; \tag{3.17}$$

(2) para qualquer $r > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\,\in\,\mathbb{R}^N} \int_{y+B_r} w_n^2\,dx = 0. \tag{3.18}$$

Onde $B_r = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| \leq r\}$.

Por meio dos Lemas 3.3, 3.4 e 3.5, vamos concluir que nenhum desses dois casos pode ocorrer, e assim chegaremos a contradição desejada.

Lema 3.3. *Sob as hipóteses (V1), (V2), (f1), (f2) e (f3) ou (f4), concluímos que (3.18) é impossível para (w_n).*

Prova. Suponha por contradição que (w_n) satisfaça (3.18). Por (V2), dado $\varepsilon > 0$ existe $R_\varepsilon > 0$, tal que $|x| > R_\varepsilon$ implica $|V(x) - V(+\infty)| < \varepsilon$, e como V é contínua, a função $x \mapsto |V(x) - V(+\infty)|$ é contínua no compacto $B_{R_\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^N; 0 \leq |x| \leq R_\varepsilon\}$, então assume máximo $\tilde{M} > 0$ nesse compacto, logo se $M = \max\{\tilde{M}, \varepsilon\}$, segue que

$$|V(x) - V(+\infty)| \leq M, \quad \forall\ \ x \in \mathbb{R}^N.$$

Então, dados $\varepsilon > 0,\ r = R_\varepsilon$ e $y \in \mathbb{R}^N$, por (3.18), para n suficientemente grande, segue que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{B_{R_\varepsilon}+y} \Big(V(x) - V(+\infty) \Big) w_n^2(x)\,dx \right| &\leq M \int_{B_{R_\varepsilon}+y} w_n^2\,dx \\
&\leq M \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_{R_\varepsilon}+y} w_n^2(x)\,dx \\
&< M\varepsilon.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos que

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \big(V(x) - V(+\infty) \big) w_n^2(x)\,dx \right| &\leq \limsup_{n\to\infty} \left| \int_{B_{R_\varepsilon}+y} \big(V(x) - V(+\infty) \big) w_n^2(x)\,dx \right| \\
&+ \varepsilon \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R_\varepsilon}+y} w_n^2(x)\,dx \\
&\leq \varepsilon \Big(M + \limsup_{n\to\infty} \|w_n\| \Big) \\
&= (M+1)\varepsilon.
\end{aligned}$$

E fazendo $\varepsilon \to 0^+$, concluímos que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \big(V(x) - V(+\infty) \big) w_n^2\,dx \to 0$, quando $n \to \infty$. Portanto

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\Big(|\nabla w_n|^2+V(+\infty)\Big)w_n^2\,dx &\leq \lim_{n\to\infty}\|w_n\|^2+\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\big(V(x)-V(+\infty)\big)w_n^2\,dx\\
&= 1+0\\
&= 1.
\end{aligned}$$

E segue que

$$1\geq \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\Big(|\nabla w_n|^2+V(+\infty)\Big)w_n^2\,dx\geq \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}V(+\infty)w_n^2\,dx.$$

Assim, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}w_n^2\,dx\leq\frac{1}{V(+\infty)}. \tag{3.19}$$

Além disso, como $I(u_n)\to c$, e $\|u_n\|\to 0$, então $I(u_n)||u_n||^{-2}\to 0$, quando $n\to\infty$, e como

$$\frac{I(u_n)}{\|u_n\|^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\|u_n\|^2}\int_{\mathbb{R}^N}F(u_n)\,dx=\frac{1}{2}-\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(u_n)}{u_n^2}w_n^2\,dx,$$

concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(u_n)}{u_n^2}w_n^2\,dx=\frac{1}{2}. \tag{3.20}$$

Desse modo, sob a hipótese (f3), combinando (3.19) e (3.20), chegamos uma contradição. De fato, por (f3) obtemos $\delta>0$ tal que, para quase todo $x\in\mathbb{R}^N$, vale que

$$\frac{2F(u_n(x))}{u_n^2(x)}\leq V(+\infty)-\delta.$$

Assim, por (3.20), segue que

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{2F(u_n)}{u_n^2}w_n^2\,dx\\
&\leq \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\Big(V(+\infty)-\delta\Big)w_n^2\,dx\\
&< \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}V(+\infty)w_n^2\,dx\\
&\leq 1,
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue de (3.19), assim chegamos a contradição esperada.

Agora, sob a hipótese (f4), considerando $\delta>0$ dado em (f4), definimos

$$\Omega_n=\left\{x\in\mathbb{R}^N:\ \frac{F(u_n(x))}{u_n(x)^2}\leq\frac{1}{2}\big(V(+\infty)-\delta\big)\right\}.$$

Então, para todo $n\in\mathbb{N}$, vale que

$$\int_{\Omega_n}\frac{F(u_n)}{u_n^2}w_n^2\,dx\leq\frac{1}{2}\left(V(+\infty)-\delta\right)\int_{\Omega_n}w_n^2\,dx\leq\frac{1}{2}\left(V(+\infty)-\delta\right)\frac{1}{V(+\infty)},$$

onde usamos (3.19), na última desigualdade. Assim passando o limite, e aplicando (3.20), obtemos

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{\Omega_n}\frac{F(u_n)}{u_n^2}w_n^2\,dx \leq \frac{1}{2} - \frac{\delta}{V(+\infty)} = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(u_n)}{u_n^2}w_n^2\,dx - \frac{\delta}{V(+\infty)},$$

e assim concluímos que

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{\delta}{2V(+\infty)} \\ &\leq \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(u_n)}{u_n^2}w_n^2\,dx - \limsup_{n\to\infty}\int_{\Omega_n}\frac{F(u_n)}{u_n^2}w_n^2\,dx \\ &\leq \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_n}\frac{F(u_n)}{u_n^2}w_n^2\,dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$0 < \frac{\delta}{2V(+\infty)} \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_n}\frac{F(u_n)}{u_n^2}w_n^2\,dx. \tag{3.21}$$

Também, afirmamos que

$$\limsup_{n\to+\infty}\left|\mathbb{R}^N\setminus\Omega_n\right| = +\infty. \tag{3.22}$$

Para mostrar isso, suponha por contradição que $\limsup_{n\to+\infty}\left|\mathbb{R}^N\setminus\Omega_n\right| < +\infty$. Usando (3.12), concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_n}\frac{F(u_n)}{u_n^2}w_n^2\,dx \leq C\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_n}w_n^2\,dx. \tag{3.23}$$

Além disso, dada uma sequência $(v_n)\subset H$ satisfazendo (3.18) pelo Lema de Lions (cf. Apêndice B.8), segue que $v_n\to 0$ fortemente em $L^q(\mathbb{R}^N)$, para qualquer $q\in(2,2^*)$. Com isso, tomando $q\in(2,2^*)$ e usando a desigualdade de Hölder (cf. Apêndice B.3), com expoentes $s=\dfrac{q}{2}$ e seu conjugado s', segue que

$$\begin{aligned} C\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_n}w_n^2\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N}\chi_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_n}w_n^2\,dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N}(\chi_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_n})^{s'}\,dx\right)^{1/s'}\left(\int_{\mathbb{R}^N}(w_n^2)^{q/2}\,dx\right)^{2/q} \\ &\leq \|\chi_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_n}\|_1^{1/s'}\|w_n\|_q^2. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Assim, combinando (3.23) e (3.24), sob a hipótese de que $\limsup_{n\to+\infty}|\mathbb{R}^N\setminus\Omega_n| < +\infty$, obtemos que

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_n}\frac{F(u_n)}{u_n^2}w_n^2\,dx &\leq C\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_n}w_n^2\,dx \\ &\leq \limsup_{n\to\infty}\|\chi_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_n}\|_1^{1/s'}\limsup_{n\to\infty}\|w_n\|_q^2, \end{aligned}$$

em que $\chi_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_n}$ denota a função característica do conjunto $\mathbb{R}^N\setminus\Omega_n$. Portanto

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_n}\frac{F(u_n)}{u_n^2}w_n^2\,dx = 0. \tag{3.25}$$

O que contradiz (3.21), e assim (3.22) está provado.

Além disso, observamos que como $G(s) \geq 0,\ \forall\ s \in \mathbb{R}$ e como por (f4) vale que $G(u_n) \geq \delta$, $\forall\ x \notin \Omega_n$, então segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(u_n)\,dx \geq \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_n} G(u_n)\,dx \geq \delta \Big|\mathbb{R}^N \setminus \Omega_n\Big|.$$

Portanto, $\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} G(u_n)\,dx = +\infty$. Mas, como (u_n) é sequência de Cerami, então segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(u_n)\,dx = I(u_n) - \frac{1}{2} I'(u_n)u_n \to c,$$

quando $n \to \infty$. O que novamente gera contradição. Portanto sob as hipóteses (f3) ou (f4), mostramos que (3.18) é impossível para (w_n), e o lema está provado. ■

Como pelo Lema 3.3 mostramos que (3.18) é impossível para (w_n), então necessariamente (w_n) satisfaz (3.17). Porém vamos mostrar que (3.17) também não pode ocorrer para (w_n). Para isso, será necessário separar os casos quando (y_n) é limitado ou ilimitado. Os resultados são apresentados a seguir.

Lema 3.4. *Sob as hipóteses (V1), (V2), (f1) e (f2) e supondo que (y_n) seja limitada, concluímos que (3.17) é impossível para (w_n).*

Prova. Como a sequência (w_n) é limitada, a menos de subsequência, $w_n \rightharpoonup w \in H$. Vamos seguir alguns passos para chegar ao resultado.

Passo 1. O limite fraco w é não negativo.

Supondo (3.17) e que (y_n) seja limitado, afirmamos que $w \neq 0$. De fato, pela limitação de (y_n), dado $R > 0$, existe $\tilde{R} > 0$, tal que $B_{R+y_n} \subset B_{\tilde{R}},\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}$, e como $B_{\tilde{R}}$ é domínio limitado, pela compacidade das imersões de Sobolev (cf. Apêndice B.1) obtemos que $H^1(B_{\tilde{R}}) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(B_{\tilde{R}})$. Assim, como $w_n \rightharpoonup w \in H^1(B_{\tilde{R}})$, a menos de subsequência, segue que $w_n \to w$ em $L^2(B_{\tilde{R}})$, e isso implica que

$$\begin{aligned} \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} &\geq \|w\|_{L^2(B_{\tilde{R}})} \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{B_{\tilde{R}}} w_n^2\,dx \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \int_{B_{R+y_n}} w_n^2\,dx \\ &\geq \alpha > 0. \end{aligned}$$

Portanto $w \neq 0$. Além disso, como (u_n) é uma sequência de Cerami, então sabemos que

$$-\Delta u_n + V(x)u_n = f(u_n) + \varepsilon_n, \quad \text{em } H^{-1}(\mathbb{R}^N), \tag{3.26}$$

com $\varepsilon_n \to 0$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$, quando $n \to \infty$. De fato, como $\|I'(u_n)\| \to 0$, quando $n \to \infty$, então $\forall\ v \in H$, segue que

$$\begin{aligned}\varepsilon_n v &= \int_{\mathbb{R}^N}\Big(-\Delta u_n + V(x)u_n - f(u_n)\Big)v\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\Big(\nabla u_n\nabla v + V(x)u_n v - f(u_n)v\Big)\,dx\\ &= I'(u_n)v \to 0,\end{aligned}$$

quando $n\to\infty$, ou seja, $\varepsilon_n \to 0$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$. Portanto dividindo (3.26) por $\|u_n\|$, observamos que

$$-\Delta w_n + V(x)w_n = \frac{f(u_n)}{u_n}w_n + \frac{\varepsilon_n}{\|u_n\|}, \text{ em } H^{-1}(\mathbb{R}^N). \tag{3.27}$$

Assim multiplicando (3.27) por $w_n^- = \max\{-w_n, 0\}$ e integrando, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\Big(|\nabla w_n^-|^2 + V(x)|w_n^-|^2\Big)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N}\frac{\varepsilon_n}{\|u_n\|}w_n^-\,dx,$$

pois $f(u_n(x)) = 0$, se $u_n(x)\le 0$, e $w^-(x) = 0$, se $u_n(x) > 0$; isto é, $f(u_n(x))w_n^-(x)\equiv 0$ em $\mathbb{R}^N$, e isso resulta em

$$\|w_n^-\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N}\frac{\varepsilon_n}{\|u_n\|}w_n^-\,dx. \tag{3.28}$$

E como (w_n^-) também é limitada, e $\varepsilon_n\to 0$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$, quando $n\to\infty$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\varepsilon_n}{\|u_n\|}w_n^-\,dx \to 0,$$

quando $n\to\infty$. Portanto, por (3.28), concluímos que $||w_n^-||\to 0$, quando $n\to\infty$. Agora como $w_n \rightharpoonup w$ em H, a menos de subsequência, $w_n\to w$ em $L^2_{\text{loq}}(\mathbb{R}^N)$, logo $w_n(x)\to w(x)$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, quando $n\to\infty$. E assim, como $w_n^-\to 0$ em H, a menos de subsequência, $w_n^-(x)\to 0$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, quando $n\to\infty$. Dessa forma, fazendo $n\to\infty$, obtemos que

$$w_n(x) = w_n^+(x) + w_n^-(x) \to w^+(x) + 0 = w(x), \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

concluindo o Passo 1.

Passo 2. w é um autovetor de $-\Delta + V(x)$ associado ao autovalor a.

Para provar que $-\Delta w + V(x)w = aw$, vamos mostrar a formulação fraca do problema, para isso, como $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em H, é suficiente mostrar que para qualquer $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, vale que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\nabla w\nabla\varphi + V(x)w\varphi\Big)\,dx = a\int_{\mathbb{R}^N} w\varphi\,dx. \tag{3.29}$$

De fato, se mostrarmos (3.29), para todo $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, dado $v\in H$, tomando uma sequência $(v_n)\subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, com $v_n\to v$ em H, segue que $v_n\to v$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$, e então $v_n\rightharpoonup v$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$, assim como $(v_n)_{x_i}\rightharpoonup v_{x_i}$, $\forall\, i = 1,...,n$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Logo pela caracterização da convergência fraca, lembrando que ∇w, $V(x)w$, $w\in L^2(\mathbb{R}^N)$, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\nabla w\nabla v_n + V(x)wv_n\Big)\,dx \to \int_{\mathbb{R}^N}\Big(\nabla w\nabla v + V(x)wv\Big)\,dx,$$

e também

$$a\int_{\mathbb{R}^N} wv_n\, dx \to a\int_{\mathbb{R}^N} wv\, dx,$$

quando $n \to \infty$. Assim, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\nabla w\nabla v + V(x)wv\Big)\, dx = a\int_{\mathbb{R}^N} wv\, dx, \quad \forall \;\; v \in H,$$

e verificamos a formulação fraca do problema concluindo que w é autovetor de $-\Delta+V(x)$ associado ao autovalor a. Sendo assim, vamos mostrar (3.29). Dado $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, arbitrariamente fixado, multiplicando (3.27) por φ e integrando, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\nabla w_n\nabla\varphi + V(x)w_n\varphi\Big)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(u_n)}{u_n}w_n\varphi\, dx + \int_{\mathbb{R}^N}\frac{\varepsilon_n}{\|u_n\|}\varphi\, dx. \tag{3.30}$$

Como $\varepsilon_n \to 0$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$, e estamos supondo que $\|u_n\|^{-1} \to 0$, quando $n \to \infty$, observamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\varepsilon_n}{\|u_n\|}\varphi\, dx \to 0, \tag{3.31}$$

e também como (w_n) converge fracamente para w em H, então segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\nabla w_n\nabla\varphi + V(x)w_n\varphi\Big)\, dx \to \int_{\mathbb{R}^N}\Big(\nabla w\nabla\varphi + V(x)w\varphi\Big)\, dx. \tag{3.32}$$

De fato, dado $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^N$ com $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$, a menos de subsequência, segue pela compacidade das imersões de Sobolev (cf. Apêndice B.1) que $w_n \rightharpoonup w$ e $\nabla w_n \rightharpoonup \nabla w$ em $L^2(\Omega)$. Como $\nabla\varphi,\ V(x)\varphi,\ \varphi \in L^2(\Omega)$, novamente pela caracterização da convergência fraca, segue que as sequências de integrais convergem, concluindo (3.32).

Além disso, afirmamos também que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(u_n)}{u_n}w_n\varphi\, dx \to a\int_{\mathbb{R}^N} w\varphi\, dx. \tag{3.33}$$

Pois se mostrarmos (3.33), combinando (3.30)-(3.33), obtemos (3.29) e concluímos o Passo 2. Para provar (3.33) primeiramente vamos mostrar que

$$\frac{f(u_n)}{u_n}w_n\varphi \to aw\varphi, \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N. \tag{3.34}$$

Para isso, vamos supor, sem perda de generalidade, que $w(x)$ está definido, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e distinguir os casos em que $w(x) = 0$ e $w(x) \neq 0$. Considere primeiro $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $w(x) = 0$. Por (3.11), vemos que

$$0 \le \left|\frac{f(u_n(x))}{u_n(x)}w_n(x)\varphi(x)\right| \le C|w_n(x)\varphi(x)|,$$

e como $w_n(x) \to w(x) = 0$, obtemos que

$$\frac{f(u_n(x))}{u_n(x)}w_n(x)\varphi(x) \to 0 = aw(x)\varphi(x).$$

Também, dado $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $w(x) \neq 0$, necessariamente $u_n(x) \to +\infty$, pois como $w_n(x) = \dfrac{u_n(x)}{\|u_n\|}$ e supomos que $\|u_n\| \to +\infty$, daí se $(u_n(x))$ fosse limitada, teríamos $w_n(x) \to 0 \neq w(x)$, uma contradição. Logo $u_n(x) \to +\infty$, quando $n \to \infty$, e por (f2), segue que $\dfrac{f(u_n(x))}{u_n(x)} \to a$. Assim, já que $w_n(x) \to w(x)$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, segue que

$$\frac{f(u_n(x))}{u_n(x)} w_n(x)\varphi(x) \to a w(x)\varphi(x), \quad \text{q.t.p. em} \quad \mathbb{R}^N,$$

quando $n \to \infty$, o que prova (3.34).

Por fim, como Ω é um domínio limitado, novamente pela compacidade das imersões de Sobolev (cf. Apêndice B.1), segue que $H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^1(\Omega)$, o que implica, a menos de subsequência, que $w_n \to w$ em $L^1(\Omega)$. Além disso, pelo Teorema de Vainberg (cf. Apêndice B.9), existe $h \in L^1(\Omega)$, tal que

$$|w_n(x)| \leq h(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

e usando novamente (3.11), para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\left| \frac{f(u_n)}{u_n} w_n \varphi \right| \leq C|w_n||\varphi| \leq C|\varphi|h, \quad \text{q.t.p.} \quad \text{em } \Omega. \tag{3.35}$$

Agora usando (3.34) e (3.35) e aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (cf. Apêndice B.7), concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(u_n)}{u_n} w_n \varphi \, dx = \int_\Omega \frac{f(u_n)}{u_n} w_n \varphi \, dx \to a \int_\Omega w\varphi \, dx = a \int_{\mathbb{R}^N} w\varphi \, dx,$$

ou seja, obtemos (3.31), o que finaliza o Passo 2.

Passo 3. Como por hipótese, $a > \inf \sigma\big(-\Delta + V(x)\big)$, o operador $-\Delta + V(x)$ não possui autovetores não negativos associados ao autovalor a.

Suponha por contradição que exista $u \in H$ não negativo e que satisfaça

$$-\Delta u + V(x)u = au, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Primeiramente, fixando uma constante $A > 0$, tal que

$$\inf \sigma\big(- \Delta + V(x)\big) < A < a,$$

pela caracterização do ínfimo do espectro de um operador autoadjunto (cf. Apêndice B.6), segue que

$$\inf \sigma\big(- \Delta + V(x)\big) = \inf_{v \in H \setminus \{0\}} \frac{\|v\|^2}{\|v\|_2^2},$$

logo existe $v \in H$ satisfazendo

$$\frac{\|v\|^2}{\|v\|_2^2} < A.$$

Além disso, como $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em H, consideramos $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Agora, tomando $R > 0$, tal que $\operatorname{supp} v \subset B_R$, e considerando o problema de Dirichlet para $-\Delta + V(x)$ em B_R, se denotarmos por l o ínfimo do espectro de $-\Delta + V(x)$ em B_R, segue que

$$l \leq \frac{\|v\|^2}{\|v\|_2^2} < A < a. \tag{3.36}$$

Por outro lado, como $l = \inf\big(\Delta + V(x)\big)$ sobre B_R, então

$$l = \inf_{v \in H^1(B_R)\setminus\{0\}} \frac{\|v\|_{H^1(B_R)}}{\|v\|^2_{L^2(B_R)}},$$

é um autovalor de $-\Delta + V(x)$ associado a um autovetor v_R e, pela caracterização acima, segue que $v_R \geq 0$, ou $v_R \leq 0$ em B_R. Com isso, pelo Princípio do Máximo Forte (cf. Apêndice B.10), concluímos que $v_R > 0$, ou $v_R < 0$ em B_R, então, sem perda de generalidade, consideramos $v_R > 0$, e assim notamos que $\dfrac{\partial v_R}{\partial \eta} \leq 0$ em ∂B_R. Com efeito, dado $x_0 \in \partial B_R$, segue que

$$\frac{\partial v_R}{\partial \eta} = \lim_{h \to 0^-} \frac{v_R(x_0 + h\eta) - v_R(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{v_R(x_0 + h\eta)}{h} \leq 0,$$

pois $v_R > 0$ em B_R, e $v_R = 0$ em ∂B_R. Então, usando integração por partes, duas vezes, obtemos que

$$\begin{aligned}
l\langle u, v_R\rangle_{B_R} &= \Big\langle u, (-\Delta + V(x))v_R \Big\rangle_{B_R} \\
&= \int_{B_R} \nabla u \nabla v_R \, dx \; - \int_{\partial B_R} \frac{\partial v_R}{\partial \eta} u \, d\sigma + \int_{B_R} V(x) u v_R \, dx \\
&\geq \int_{B_R} \nabla u \nabla v_R \, dx + \int_{B_R} V(x) u v_R \, dx \\
&= \int_{B_R} (-\Delta u) v_R \, dx \; - \int_{\partial B_R} \frac{\partial u}{\partial \eta} v_R \, d\sigma + \int_{B_R} V(x) u v_R \, dx \\
&= \int_{B_R} (-\Delta u) v_R \, dx + \int_{B_R} V(x) u v_R \, dx \\
&= \Big\langle (-\Delta + V(x))u, v_R \Big\rangle_{B_R} \\
&= a\langle u, v_R\rangle_{B_R},
\end{aligned} \tag{3.37}$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{B_R}$ denota o produto interno de $L^2(B_R)$. Mas como $u \geq 0$ e $v_R > 0$, observamos que $\langle u, v_R\rangle_{B_R} > 0$, e por (3.37) concluímos que $l \geq a$, o que contradiz (3.36), e completa o Passo 3.

Por fim, combinando os Passos 1, 2 e 3, chegamos novamente a uma contradição, pois mostramos no Passo 1 que $w \leq 0$, no Passo 2 que w é autovetor de $-\Delta + V(x)$ associado ao autovalor a, e no Passo 3 que $-\Delta + V(x)$ não possui autovetores não negativos associados ao autovalor a. Portanto a contradição vem da suposição inicial de que (w_n) satisfaz (3.17). Com isso, vemos que (3.17) é impossível para (w_n) e o lema está provado. ∎

Lema 3.5. *Sob as hipóteses (V1), (V2), (f1) e (f2), e supondo que, a menos de subsequência, $|y_n| \to +\infty$, quando $n \to \infty$, concluímos que (3.17) é impossível para (w_n).*

Prova. Definindo $\tilde{u}_n(x) = u_n(x+y_n)$ e $\tilde{w}_n(x) = w_n(x+y_n)$, por (3.27), segue que

$$-\Delta\tilde{w}_n + V(x+y_n)\tilde{w}_n = \frac{f(\tilde{u}_n)}{\tilde{u}_n}\tilde{w}_n + \frac{\tilde{\varepsilon}_n}{\|u_n\|}, \tag{3.38}$$

com $\tilde{\varepsilon}_n \to 0$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$, quando $n \to \infty$. De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{\varepsilon_n}}{\|u_n\|} &= -\Delta\tilde{w}_n(x) + V(x+y_n)\tilde{w}_n(x) - \frac{f(\tilde{u}_n(x))}{\tilde{u}_n(x)}\tilde{w}_n(x)\\
&= -\Delta w_n(x+y_n) + V(x+y_n)w_n(x+y_n) - \frac{f(u_n(x+y_n))}{u_n(x+y_n)}w_n(x+y_n)\\
&= \frac{\varepsilon_n(x+y_n)}{\|u_n\|}.
\end{aligned}$$

E como $\varepsilon_n \to 0$ em H^{-1}, quando $n \to \infty$, então $\tilde{\varepsilon}_n \to 0$ em H^{-1}, quando $n \to \infty$, pois

$$\|\tilde{\varepsilon}_n\| = \sup_{\|v\|=1}\left|\int_{\mathbb{R}^N}\tilde{\varepsilon}_n v(x)\,dx\right| = \sup_{\|v\|=1}\left|\int_{\mathbb{R}^N}\varepsilon_n v(x-y_n)\,dx\right| = \|\varepsilon_n\|,$$

e se $v \in H$, então $v_n(x) = v(x+y_n) \in H$ e $\|v_n\| = \|v\|$. Além disso, como $(\tilde{w}_n)$ é limitada, pois (w_n) é limitada, então, a menos de subsequência, $\tilde{w}_n \rightharpoonup \tilde{w}$ fracamente em H e supondo novamente por contradição que (w_n) satisfaça (3.17), existe $r > 0$, tal que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{B_r}\tilde{w}_n^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{B_r+y_n} w_n^2\,dx \geq \alpha > 0.$$

Assim, fazendo $n \to \infty$, como $\tilde{w}_n \rightharpoonup \tilde{w}$ em H, então $\tilde{w}_n \rightharpoonup \tilde{w}$ em $H^1(B_r)$ e como B_r é domínio limitado, pela compacidade das imersões de Sobolev (cf. Apêndice B.1), segue que $H^1(B_r) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(B_r)$. Logo, a menos de subsequência, $\tilde{w}_n \to \tilde{w}$ em $L^2(B_r)$, o que implica em

$$0 < \alpha \leq \lim_{n\to\infty}\int_{R_r}\tilde{w}_n^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\|\tilde{w}_n\|^2_{L^2(B_r)} = \|\tilde{w}\|^2_{L^2(B_r)} \leq \|\tilde{w}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

logo concluímos que $\tilde{w} \neq 0$.

Também, analogamente ao Lema 3.4 vamos mostrar que $\tilde{w}$ satisfaz

$$-\Delta\tilde{w}_n + V(+\infty)\tilde{w} = a\tilde{w}, \tag{3.39}$$

e como $-\Delta$ não possui autovetor no $\mathbb{R}^N$, com isso, chegaremos a uma contradição. Novamente, para provar (3.39), pela densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ em H, é suficiente mostrar que, para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, vale que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\nabla\tilde{w}\nabla\varphi + V(+\infty)\tilde{w}\varphi\Big)\,dx = a\int_{\mathbb{R}^N}\tilde{w}\varphi\,dx. \tag{3.40}$$

Então fixado $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ dado arbitrariamente, multiplicando (3.38) por φ e integrando, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\nabla\tilde{w}_n\nabla\varphi + V(x+y_n)\tilde{w}_n\varphi\Big)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(\tilde{u}_n)}{\tilde{u}_n}\tilde{w}_n\varphi\,dx + \int_{\mathbb{R}^N}\frac{\tilde{\varepsilon}_n}{\|u_n\|}\varphi\,dx. \tag{3.41}$$

E pelo mesmo argumento apresentado na prova do Lema 3.4, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\tilde{\varepsilon}_n}{\|u_n\|}\varphi\, dx \to 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \nabla\tilde{w}_n \nabla\varphi\, dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \nabla\tilde{w}\nabla\varphi\, dx.$$

Agora vamos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x+y_n)\tilde{w}_n\varphi\, dx \to \int_{\mathbb{R}^N} V(+\infty)\tilde{w}_n\varphi\, dx.$$

De fato, novamente considerando $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^N$ tal que $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$, segue por (V2) que $V(x+y_n) \to V(+\infty)$, uniformemente em Ω. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, $\forall\ x \in \Omega$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tal que

$$|x+y_n| \geq |y_n| - |x| > A_\epsilon > 0, \quad \forall\ \ n \geq n_\varepsilon,$$

pois $|y_n| \to +\infty$, quando $n \to \infty$, assim, pela definição de limite, $\big|V(x+y_n) - V(+\infty)\big| < \varepsilon$, sempre que $n \geq n_\varepsilon$, pois $V(y) \to V(+\infty)$, quando $|y| \to +\infty$. Com isso, concluímos que

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int_\Omega \big(V(x+y_n) - V(+\infty)\big)\tilde{w}_n\varphi\, dx\right| \leq \varepsilon \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega \tilde{w}_n\varphi\, dx \leq \varepsilon\|\varphi\|_\infty \to 0, \quad \text{quando } \varepsilon \to 0^+.$$

Ou seja, vale que

$$\int_\Omega \big(V(x+y_n) - V(+\infty)\big)\tilde{w}_n\varphi\, dx \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty.$$

E desse modo, segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} V(x+y_n)\tilde{w}_n\varphi\, dx &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \big(V(x+y_n) - V(+\infty)\big)\tilde{w}_n\varphi\, dx + \lim_{n\to\infty} V(+\infty)\int_\Omega \tilde{w}_n\varphi\, dx \\
&= 0 + \lim_{n\to\infty} V(+\infty)\int_\Omega \tilde{w}_n\varphi\, dx \\
&= V(+\infty)\int_\Omega \tilde{w}\varphi\, dx \\
&= V(+\infty)\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{w}\varphi\, dx,
\end{aligned}$$

pois como $\tilde{w}_n \rightharpoonup \tilde{w}$ em $L^2(\Omega)$, a penúltima igualdade segue da caracterização da convergência fraca em $L^2(\Omega)$.

Por fim, falta mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(\tilde{u}_n)}{\tilde{u}_n}\tilde{w}_n\varphi\, dx \to a\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{w}\varphi\, dx. \tag{3.42}$$

Para isso, vamos proceder como no Lema 3.4 Primeiramente vamos mostrar que

$$\frac{f(\tilde{u}_n)}{\tilde{u}_n}\tilde{w}_n\varphi \to a\tilde{w}\varphi, \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N. \tag{3.43}$$

Supondo, sem perda de generalidade, que $\tilde{w}(x)$ está definido $\forall\ x \in \mathbb{R}^N$, vamos distinguir os casos em que $\tilde{w}(x) = 0$ e $\tilde{w}(x) \neq 0$. Considere primeiro $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $\tilde{w}(x) = 0$. Por (3.11), observamos que

$$0 \leq \left| \frac{f(\tilde{u}_n(x))}{\tilde{u}_n(x)} \tilde{w}_n(x)\varphi(x) \right| \leq C|\tilde{w}_n(x)\varphi(x)|,$$

e como $\tilde{w}_n(x) \to \tilde{w}(x) = 0$, obtemos que

$$\frac{f(\tilde{u}_n(x))}{\tilde{u}_n(x)} \tilde{w}_n(x)\varphi \to 0 = a\tilde{w}(x)\varphi.$$

Também, considerando $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $\tilde{w}(x) \neq 0$, necessariamente $\tilde{u}_n(x) \to +\infty$, quando $n \to \infty$, pois como $\tilde{w}_n(x) = \dfrac{\tilde{u}_n(x)}{\|\tilde{u}_n\|}$ e supomos que $\|\tilde{u}_n\| \to +\infty$, quando $n \to \infty$, daí se $(\tilde{u}_n(x))$ fosse limitada, teríamos $\tilde{w}_n(x) \to 0 \neq \tilde{w}(x)$, uma contradição. Logo, fazendo $n \to \infty$, segue que $\tilde{u}_n(x) \to +\infty$, e por (f2) vale que $\dfrac{f(\tilde{u}_n(x))}{\tilde{u}_n(x)} \to a$, quando $n \to \infty$. Assim, já que $\tilde{w}_n(x) \to \tilde{w}(x)$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, quando $n \to \infty$ segue que

$$\frac{f(\tilde{u}_n(x))}{\tilde{u}_n(x)} \tilde{w}_n(x)\varphi(x) \to a\tilde{w}(x)\varphi(x), \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

o que prova (3.42). Agora, como Ω é um domínio limitado, novamente pela compacidade das imersões de Sobolev (cf. Apêndice B.1), vale que $H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^1(\Omega)$, o que implica, a menos de subsequência, que $\tilde{w}_n \to \tilde{w}$ em $L^1(\Omega)$. Além disso, pelo Teorema de Vainberg (cf. Apêndice B.9), existe $\tilde{h} \in L^1(\Omega)$, tal que

$$|\tilde{w}_n(x)| \leq \tilde{h}(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

e usando novamente (3.11), para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\left| \frac{f(\tilde{u}_n)}{\tilde{u}_n} \tilde{w}_n\varphi \right| \leq C|\tilde{w}_n||\varphi| \leq C|\varphi|\tilde{h}, \quad \text{q.t.p. em } \Omega. \tag{3.44}$$

Assim, por (3.43) e (3.44), e aplicando novamente o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (cf. Apêndice B.7), concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(\tilde{u}_n)}{\tilde{u}_n} \tilde{w}_n\varphi \, dx = \int_\Omega \frac{f(\tilde{u}_n)}{\tilde{u}_n} \tilde{w}_n\varphi \, dx \to a \int_\Omega \tilde{w}\varphi \, dx = a \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{w}\varphi \, dx,$$

o que prova (3.42). Passando o limite em (3.41), obtemos (3.40), o que conclui a prova do lema. ■

Assim, mostramos que (w_n) não satisfaz (3.17) nem (3.18), o que é uma contradição. Portanto, não existe subsequência de (u_n) que seja ilimitada. Ou seja, (u_n) é uma sequência de Cerami limitada para I, no nível PM.

3.3 Um Ponto Crítico Não-Trivial

O objetivo dessa seção é provar que, a menos de subsequência, a sequência de Cerami (u_n), que obtivemos e mostramos ser limitada, converge fracamente para um ponto crítico não trivial de I.

Primeiramente, considere o problema associado "ao infinito", isto é, o problema autônomo dado por

$$-\Delta u + V(+\infty)u = f(u), \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \tag{3.45}$$

Note que esse é um caso particular do problema apresentado em (3). Vamos fazer uso de alguns resultados do Capítulo 2, para estudá-lo.

Considere $\tilde{I} : H \to \mathbb{R}^N$ o funcional energia associado ao problema (3.45), dado por

$$\tilde{I}(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\Big(|\nabla u|^2 + V(+\infty)u^2\Big)\,dx \; - \; \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\,dx,$$

em que $F(u) = \displaystyle\int_0^u f(s)\,ds$. Uma vez que qualquer solução para (3.45) é não negativa, já que $f(s) = 0$, para $s \leq 0$, podemos considerá-la como uma solução para o problema dado em (3) em que

$$h(s) = \begin{cases} -V(+\infty)s + f(s), & \text{para } s \geq 0, \\ -h(-s), & \text{para } s < 0. \end{cases} \tag{3.46}$$

De fato, note que h satisfaz as hipóteses (h0)-(h2) apresentadas no Capítulo 2, pois vale que:

- como f é contínua, então h é contínua, e por construção h é ímpar, satisfazendo (h0);
- por (f1), segue que $-\infty < \displaystyle\lim_{s\to 0}\frac{h(s)}{s} = \lim_{s\to 0}\left(-V(+\infty) + \frac{f(|s|)}{|s|}\right) = -V(+\infty) < 0$, satisfazendo (h1);
- por (f2), segue que $\displaystyle\lim_{s\to\infty}\frac{|h(s)|}{s^{(N+2)/(N-2)}} = \lim_{s\to\infty} s^{-4/(N-2)}\left(-V(+\infty) + \frac{f(s)}{s}\right) = 0$, satisfazendo (h2) para $N \geq 3$;
- fazendo $\varepsilon = \alpha = p > 0$, concluímos por (3.2) que

$$\begin{aligned} |h(s)| &\leq (1 + V(+\infty))\,(s + f(s)) \\ &\leq C\Big[(1+\alpha)s + C_\alpha s^{p-1}\Big] \\ &\leq C\Big[p + 1 + C_p\Big]e^{ps^2}, \end{aligned}$$

  satisfazendo (h2) para $N = 2$.

Portanto se pela Proposição 2.1 (i), obtivermos uma solução com energia mínima para o problema apresentado em (3), com h dada por (3.46), essa será também uma solução com energia mínima para o problema em (3.45), e a recíproca é verdadeira.

Diante das considerações feitas acima, o resultado seguinte garante que, sob as hipóteses do Teorema 3.1 ou do Teorema 3.2, existe um ponto crítico não trivial para I que é o limite fraco da sequência de Cerami com a qual estamos trabalhando.

Lema 3.6. *Sob as hipóteses (V1), (V2), (f1) e (f2), dada $(u_n) \subset H$ uma sequência limitada $(PS)_c$ para I, a menos de subsequência, vale que $u_n \rightharpoonup u > 0$ e $I'(u) = 0$, desde que ocorra uma das condições* *abaixo:*

(i) (f3) é satisfeita;

(ii) (f4) é satisfeita e

$$V(x) \leq V(+\infty), \quad \forall\ x\ \in \mathbb{R}^N \qquad e \qquad V(x) \not\equiv V(+\infty). \tag{3.47}$$

Prova. Como (u_n) é limitada em H, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em H. Primeiramente vamos mostrar que $I'(u) = 0$. Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em H, para obter que $I'(u) = 0$, como vimos anteriormente, é suficiente provar que $I'(u)\varphi = 0$, para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Denotando por $\big(\cdot,\cdot\big)_H$ o produto interno em H associado a norma escolhida, obtemos que

$$I'(u_n)\varphi - I'(u)\varphi = \big(u_n - u, \varphi\big)_H \ - \int_{\mathbb{R}^N} \big(f(u_n) - f(u)\big)\varphi\, dx \to 0,$$

quando $n \to \infty$, pois como $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em H, então pela compacidade das imersões de Sobolev (cf. Apêndice B.1), a menos de subsequência, segue que $u_n \to u$, fortemente em $L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, para $q \in [2, 2^*)$, e assim $u_n(x) \to u(x)$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, quando $n \to \infty$. Logo, como f é contínua em $\mathbb{R}^N$, obtemos que $f(u_n(x)) \to f(u(x))$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, quando $n \to \infty$. Além disso, dado $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^N$ tal que $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$, obtemos também, pelo Teorema de Vainberg (cf. Apêndice B.9), uma função $h \in L^1(\Omega)$ tal que $|u_n(x)| \leq h(x)$, q.t.p. em Ω, e assim segue que

$$\begin{aligned} |f(u_n) - f(u)||\varphi| &\leq \big(|f(u_n)| + |f(u)|\big)|\varphi| \\ &\leq C\|\varphi\|_\infty\big(|u_n| + |u|\big) \\ &\leq 2C\|\varphi\|_\infty h, \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

E como $\big(f(u_n) - f(u)\big)\varphi \to 0$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, então pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (cf. Apêndice B.7), concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \big(f(u_n) - f(u)\big)\varphi\, dx = \int_\Omega \big(f(u_n) - f(u)\big)\varphi\, dx \to 0,$$

quando $n \to \infty$. E lembrando também que $I'(u_n) \to 0$, quando $n \to \infty$, obtemos que

$$I'(u)\varphi = -\left[\big(u_n - u, \varphi\big)_H - \int_{\mathbb{R}^N} \big(f(u_n) - f(u)\big)\varphi\, dx\right] + I'(u_n)\varphi \to 0,$$

quando $n \to \infty$, assim segue que $I'(u)\varphi = 0$, $\forall\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, e portanto $I'(u) = 0$.

Por fim, para obter o resultado, resta mostrar que $u \neq 0$. Procurando obter uma contradição, supomos que $u = 0$. Nesse caso, afirmamos que (u_n) é também uma sequência $(PS)_c$ para $\tilde{I}$. De fato, quando $n \to \infty$, obtemos que

$$\tilde{I}(u_n) - I(u_n) = \int_{\mathbb{R}^N} \big(V(+\infty) - V(x)\big)u_n^2\, dx \to 0,$$

pois $V(x) \to V(+\infty)$, quando $|x| \to +\infty$. Então dado $\varepsilon > 0$, existe $R_\varepsilon > 0$, tal que $\big|V(x) - V(+\infty)\big| < \varepsilon$, quando $|x| > R_\varepsilon$, assim como $s \mapsto |V(+\infty) - V(x)|$ é função contínua, assume máximo $M_\varepsilon > 0$ em B_{R_ε}. Também, como (u_n) é limitada em H, é limitada em $L^2(\mathbb{R}^N)$, ou seja, $\|u_n\|_2^2 \leq C^2$, para alguma constante $C > 0$, assim concluímos que

$$\big|\tilde{I}(u_n) - I(u_n)\big| \leq M_\varepsilon \|u_n\|^2_{L^2(B_{R_\varepsilon})} + \varepsilon \|u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_{R_\varepsilon})} \leq M_\varepsilon \|u_n\|^2_{L^2(B_{R_\varepsilon})} + \varepsilon C^2,$$

e como $u_n \to 0$ em $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, quando $n \to \infty$, então $\limsup\limits_{n\to\infty} \big|\tilde{I}(u_n) - I(u_n)\big| \leq \varepsilon C^2$, e fazendo $\varepsilon \to 0^+$, segue que

$$\tilde{I}(u_n) = I(u_n) + \int_{\mathbb{R}^N} \big(V(+\infty) - V(x)\big) u_n^2\, dx \to c + 0 = c,$$

quando $n \to \infty$. De forma análoga, observamos que

$$\begin{aligned}
\sup_{\|v\|\leq 1} \left| \Big(\tilde{I}'(u_n) - I'(u_n)\Big)\, v\right| &= \sup_{\|v\|\leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^N} (V(+\infty) - V(x)) u_n v\, dx \right| \\
&\leq M_\varepsilon \sup_{\|v\|\leq 1} \int_{B_{R_\varepsilon}} |u_n||v|\, dx \;+\; \varepsilon \sup_{\|v\|\leq 1} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R_\varepsilon}} |u_n||v|\, dx \\
&\leq M_\varepsilon \|u_n\|^2_{L^2(B_{R_\varepsilon})} \sup_{\|v\|\leq 1} \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \;+\; C\varepsilon \sup_{\|v\|\leq 1} \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq M_\varepsilon \|u_n\|^2_{L^2(B_{R_\varepsilon})} + \; C\varepsilon \to 0,
\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$, e $\varepsilon \to 0^+$, logo (u_n) é sequência $(PS)_c$ para $\tilde{I}$.

Além disso, afirmamos que existe $\alpha > 0$, $0 < r < +\infty$ e $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{y_n + B_r} u_n^2\, dx \geq \alpha > 0. \tag{3.48}$$

De fato, por (3.2) para qualquer $u \in H$, vale que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |f(u)u|\, dx &\leq \varepsilon \|u\|_2^2 + C_\varepsilon \|u\|_p^p \\
&\leq \varepsilon C^2 + C_\varepsilon \|u\|_p^p
\end{aligned} \tag{3.49}$$

e assim, supondo que (u_n) não satisfaça (3.48), para qualquer $r > 0$, vale que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{y+B_r} w_n^2\, dx = 0, \tag{3.50}$$

e dessa forma, pelo Lema de Lions (cf. Apêndice B.8), segue que $(u_n) \to 0$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$, para $q \in (2, 2^*)$, quando $n \to \infty$, e portanto por (3.49)

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n) u_n\, dx \right| \leq \varepsilon C^2 + C_\varepsilon \|u_n\|_p^p \;\to\; \varepsilon C^2,$$

quando $n \to \infty$, e fazendo $\varepsilon \to 0^+$, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n) u_n\, dx \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty. \tag{3.51}$$

Por outro lado, $I'(u_n)u_n \to 0$, quando $n \to \infty$, pois $\|u_n\| \leq C$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e $\|I'(u_n)\| \to 0$, quando $n \to \infty$, então $|I'(u_n)u_n| \leq \|I'(u_n)\| \|u_n\| \leq C\|I'(u_n)\| \to 0$, quando $n \to \infty$. Assim, obtemos que

$$\|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n) u_n\, dx \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Então assumindo que (u_n) satisfaça (3.50), concluímos que $\|u_n\| = I'(u_n)u_n + \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n\,dx \to 0$, quando $n \to \infty$, o que contradiz o Corolário 3.1 (ii), que afirma que $\liminf_{n\to\infty} \|u_n\| \geq \rho_0 > 0$, para algum $\rho_0 > 0$. Portanto (u_n) é uma sequência que satisfaz (3.48).

Agora definindo $\tilde{u}_n(x) = u_n(x + y_n)$, como (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para $\tilde{I}$, então o mesmo vale para $(\tilde{u}_n)$, pois

$$\begin{aligned}
\tilde{I}'(\tilde{u})\varphi &= \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\nabla\tilde{u}_n\nabla\varphi + V(+\infty)\tilde{u}_n\varphi\Big)\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(\tilde{u}_n)\varphi\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N+y_n} \Big(\nabla u_n\nabla\varphi + V(+\infty)u_n\varphi\Big)\,dx - \int_{\mathbb{R}^N+y_n} f(u_n)\varphi\,dx \\
&= \tilde{I}'(u_n)\varphi
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\tilde{I}(\tilde{u}_n) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla\tilde{u}_n|^2 + V(+\infty)\tilde{u}_n^2\Big)\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(\tilde{u}_n)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N+y_n} \Big(|\nabla u_n|^2 + V(+\infty)u_n^2\Big)\,dx - \int_{\mathbb{R}^N+y_n} F(u_n)\,dx \\
&= \tilde{I}(u_n).
\end{aligned}$$

Mais ainda, como (u_n) é limitada em H, então $(\tilde{u}_n)$ também é limitada em H, pois $\|\tilde{u}_n\| = \|u_n\|,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Então, a menos de subsequência, $\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u}$, e dada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, segue que

$$\begin{aligned}
\Big|\tilde{I}'(\tilde{u}_n)\varphi - \tilde{I}'(\tilde{u})\varphi\Big| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} \Big(\nabla\tilde{u}_n - \nabla\tilde{u}\Big)\varphi\,dx + V(+\infty)\int_{\mathbb{R}^N} (\tilde{u}_n - \tilde{u})\varphi\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} \big(f(\tilde{u}_n) - f(\tilde{u})\big)\varphi\,dx\right| \\
&\leq \Big(V(+\infty) + 1\Big)\Big\langle \tilde{u}_n - \tilde{u}, \varphi\Big\rangle_{H^1} + \left|\int_{\mathbb{R}^N} \big(f(\tilde{u}_n) - f(\tilde{u})\big)\varphi\,dx\right| \to 0,
\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$, já que $\big\langle \cdot, \cdot \big\rangle_{H^1}$ representa o produto interno usual de $H^1(\mathbb{R}^N)$ e como $\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u}$ em H, vale que $\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ com a norma usual,isto é, $\big\langle \tilde{u}_n - \tilde{u}, \varphi\big\rangle_{H^1} \to 0$, quando $n \to \infty$. E pelo mesmo argumento que concluímos (3.51), obtemos que $\left|\int_{\mathbb{R}^N} \big(f(\tilde{u}_n) - f(\tilde{u})\big)\varphi\,dx\right| \to 0$, quando $n \to \infty$. Assim, como $\tilde{I}'(u_n)\varphi \to 0$, quando $n \to \infty$, concluímos que $\tilde{I}'(\tilde{u})\varphi = 0,\ \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, implicando que $\tilde{I}'(\tilde{u}) = 0$. Além disso, como (u_n) satisfaz (3.48), então $(\tilde{u}_n)$ satisfaz

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_r} \tilde{u}_n^2\,dx \geq \alpha > 0,$$

e pela convergência fraca, e a compacidade das imersões de Sobolev em domínios limitados (cf. Apêndice B.1), a menos de subsequência, segue que $\tilde{u}_n \to \tilde{u}$ em $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, o que implica em

$$\|\tilde{u}\|^2 \geq \|\tilde{u}\|^2_{L^2(B_r)} = \lim_{n\to\infty} \int_{B_r} \tilde{u}_n^2\,dx \geq \alpha > 0,$$

ou seja, $\tilde{u} \neq 0$. Com isso, concluímos que $\tilde{I}$ tem um ponto crítico não trivial no nível c.

Mas note que, se ocorre (i), considerando h dada por (3.46), vale que

$$H(s) = \int_0^s f(t)\,dt - \int_0^s V(+\infty)t\,dt = F(s) - V(+\infty)\frac{s^2}{2} \leq -\frac{\delta s^2}{2} < 0, \quad \forall\ \ s > 0,$$

então pela Proposição 2.1 (ii), o problema dado em (3) não possui solução não trivial. Entretanto, como $u \in H$ é solução não trivial do problema dado em (3) se, e somente se, u é ponto crítico do funcional

$$J(u) = \frac{1}{2}\left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx \ + \ V(+\infty)\int_{\mathbb{R}^N} u^2\, dx\right] - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\, dx = \tilde{I}(u),$$

e como concluímos que o problema em (3) não possui solução não trivial, então $\tilde{I}$ não possui pontos críticos não triviais, o que gera contradição com $\tilde{u} \neq 0$.

Por outro lado, se ocorre (ii), então $G(s) \geq 0$, para todo $s \in \mathbb{R}$, e pelo Lema de Fatou (cf. Apêndice B.11), obtemos que

$$\begin{aligned}
c &= \lim_{n\to\infty}\left[\tilde{I}(\tilde{u}_n) - \frac{1}{2}\tilde{I}'(\tilde{u}_n)\tilde{u}_n\right] \\
&= \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\frac{1}{2}f(\tilde{u}_n)\tilde{u}_n - F(\tilde{u}_n)\Big)\, dx \\
&= \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} G(\tilde{u}_n)\, dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^N}\liminf_{n\to\infty} G(\tilde{u}_n)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} G(\tilde{u})\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\Big(\frac{1}{2}f(\tilde{u})\tilde{u} - F(\tilde{u})\Big)\, dx \\
&= \tilde{I}(\tilde{u}) - \frac{1}{2}\tilde{I}'(\tilde{u})\tilde{u} \\
&= \tilde{I}(\tilde{u}).
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Pois como $\tilde{u}_n \to \tilde{u}$ em $L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, para $q \in (2, 2^*)$, então $\tilde{u}_n(x) \to \tilde{u}(x)$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, quando $n \to \infty$, e como G é contínua, então $G(\tilde{u}_n(x)) \to G(\tilde{u}(x))$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, quando $n \to \infty$, ou seja,

$$\liminf_{n\to\infty} G(\tilde{u}_n(x)) = G(\tilde{u}(x)), \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Também como $\tilde{I}'(\tilde{u}) = 0$, segue que $\tilde{I}'(\tilde{u})\tilde{u} = 0$, desse modo por (3.52), concluímos que $\tilde{I}(\tilde{u}) \leq c$. Além disso, $\tilde{u} \neq 0$ é um ponto crítico de $\tilde{I}$, e assim, pela Proposição 2.1 (ii), existe $s_0 > 0$, com $H(s_0) > 0$. Portanto, procedendo para $\tilde{u}^-$ como procedemos para w^-, no Passo 1 da prova do Lema 3.4, concluímos que $\tilde{u} \geq 0$, e pelo Princípio do Máximo Forte (cf. Apêndice B.10), segue que $\tilde{u} > 0$ em $\mathbb{R}^N$. Assim, pela Proposição 2.2, existe um caminho $\gamma(t) \in C([0,1], H)$ tal que $\gamma(t,x) > 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^N$, $\forall\ t \in (0,1]$, com $\gamma(0) = 0$, $\tilde{I}(\gamma(1)) < 0$, $\tilde{u} \in \gamma([0,1])$ e

$$\max_{t\in[0,1]} \tilde{I}(\gamma(t)) = \tilde{I}(\tilde{u}).$$

Agora, como estamos sob a hipótese em (3.47), segue que

$$I(\gamma(t)) < \tilde{I}(\gamma(t)), \quad \forall\ t \in (0,1].$$

Portanto,

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) < \max_{t\in[0,1]} \tilde{I}(\gamma(t)) = \tilde{I}(\tilde{u}) \leq c.$$

Ou seja, uma contradição. A contradição vem de supormos que $u = 0$, portanto, concluímos que $u \neq 0$. Por fim procedendo para u^-, como procedemos para w^- no Passo 1 do Lema 3.4, concluímos que u é não negativo, e pelo Princípio do Máximo Forte (cf. Apêndice B.10), segue que $u > 0$, completando a prova do lema. ■

Prova dos Teoremas 3.1 e 3.2. Em primeiro lugar, relembramos que uma sequência de Cerami no nível c para I, é também uma sequência $(PS)_c$ para I. Além disso, exceto quando $V(x) \equiv V(+\infty)$, observamos também que o Lema 3.6 está nas hipóteses do Teorema 3.1 quando ocorre (i), e do Teorema 3.2 quando ocorre (ii). Desse modo, como foi feito nas seções anteriores, sob tais hipóteses obtemos uma sequência de Cerami limitada para I no nível c, que por sua vez é também uma sequência $(PS)_c$ para I e portanto aplicando o Lema 3.6, garantimos a existência de um ponto crítico não trivial para I no nível c, que é uma solução positiva para o problema dado em (1), o que conclui os resultados dos Teoremas 3.1 e 3.2, exceto quando $V(x) \equiv V(+\infty)$.

Então considerando a partir de agora $V(x) \equiv V(+\infty)$, note que $I = \tilde{I}$, vale que

$$\sigma\big(- \Delta + V(+\infty)\big) = [V(+\infty), +\infty),$$

e por (f2), segue que $a > V(+\infty)$. Portanto quando $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno, existe $s > 0$, tal que

$$\begin{aligned} H(s) &= F(s) - \frac{1}{2}V(+\infty)s^2 \\ &> \frac{1}{2}as^2 - \varepsilon s^2 - \frac{1}{2}V(+\infty)s^2 \\ &= \frac{1}{2}s^2\big(a - V(+\infty)\big) - \varepsilon s^2 \\ &> 0. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Com efeito, como mostramos em (3.7), na prova do Lema 3.2, vale que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(s)}{s^2} = \frac{1}{2}a,$$

e assim existe $A_\varepsilon > 0$, tal que $s > A_\varepsilon$ implica que $\left|\dfrac{F(s)}{s^2} - \dfrac{1}{2}a\right| < \varepsilon$. Logo, se $s_0 > A_\varepsilon$, segue que

$$F(s_0) > \frac{1}{2}as_0^2 - \varepsilon s_0^2,$$

e por (3.53), tomando $\varepsilon > 0$, tal que

$$\frac{1}{2}\big(a - V(+\infty)\big) > \varepsilon,$$

vale que $H(s_0) > 0$. Assim, pela Proposição 2.1 (i), obtemos um ponto crítico não trivial para $\tilde{I} = I$, que é uma solução positiva para o problema dado em (3.45), que nesse caso coincide com o problema dado em (1). Com isso, estão provados os Teoremas 3.1 e 3.2. ■

3.4 Uma Solução de Energia Mínima

Nessa última seção, almejamos apenas encontrar uma solução de energia mínima para o problema dado em (1), sob as hipóteses do Teorema 3.2. Para isso, vamos utilizar o fato provado pelas seções anteriores, de que I possui um ponto crítico não trivial.

Teorema 3.3. *Sob as hipóteses do Teorema 3.2, o problema dado em (1) tem uma solução com energia mínima. Mais precisamente, existe uma solução $v \in H$, tal que $I(v) = m$, onde*

$$m = \inf\{I(u) \ ; \ u \in H \setminus \{0\}, \ I'(u) = 0\}.$$

Prova. Em primeiro lugar, afirmamos que m está bem definido e satisfaz

$$0 \leq m \leq c,$$

onde c é o nível PM para I. De fato, por (f4) (i), para qualquer ponto crítico u de I, vale que

$$I(u) = I(u) - \frac{1}{2}I'(u)u = \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\frac{1}{2}f(u)u - F(u)\Big)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} G(u)\, dx \geq 0,$$

pois como $G(s) \geq 0, \ \forall \ s \in \mathbb{R}^N$, então $G(u(x)) \geq 0$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, e portanto $\int_{\mathbb{R}^N} G(u)\, dx \geq 0$, logo $I(u) \geq 0$, e pela definição de m, concluímos que $m \geq 0$. Por outro lado, no Lema 3.6, obtemos um ponto crítico não trivial u de I, como um limite fraco de uma sequência limitada (u_n), $(PS)_c$ para I. Portanto, m está bem definido, e novamente por (f4) (i) e pelo Lema de Fatou (cf. Apêndice B.11), segue que

$$\begin{aligned} m &\leq I(u) \\ &= I(u) - \frac{1}{2}I'(u)u \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} G(u)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \liminf_{n\to\infty} G(u_n)\, dx \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} G(u_n)\, dx \\ &= \liminf_{n\to\infty} \left[I(u_n) - \frac{1}{2}I'(u_n)u_n\right] \\ &= c. \end{aligned}$$

Então $I(u) \leq c$, e pela definição de m, segue que $m \in [0, c]$. Por fim, seja (v_n) uma sequência de pontos críticos não triviais de I satisfazendo $I(v_n) \to m \in [0, c]$, quando $n \to \infty$, pelo Corolário 3.1 (i), vale que $\liminf_{n\to+\infty} ||v_n|| \geq \rho_0 > 0$. Agora, procedendo para (v_n) assim como procedemos com (u_n) nas seções anteriores, concluímos que (v_n) é limitada, converge fracamente para $v \neq 0$, e v é um ponto crítico não trivial de I. Assim, pela definição de m, segue que $I(v) \geq m$. Por outro lado, usando outra vez (f4) (i) e o Lema de Fatou (cf. Apêndice B.11), observamos que

$$\begin{aligned}
I(v) &= I(v) - \frac{1}{2}I'(v)v \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} G(v)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \liminf_{n\to\infty} G(v_n)\,dx \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n)\,dx \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left[I(v_n) - \frac{1}{2}I'(v_n)v_n \right] \\
&= \liminf_{n\to+\infty} I(v_n) \\
&= m.
\end{aligned}$$

Assim $I(v) = m$, mostrando que v é uma solução com energia mínima para o problema dado em (1). ■

Apêndice

$\mathcal{A}$

Diferenciabilidade dos Funcionais J e I

O objetivo desse apêndice é garantir a diferenciabilidade dos funcionais J e I, definidos respectivamente em (2.1) e (3.1). Para tanto, vamos definir e provar a diferencialidade de funcionais auxiliares, a saber, $\Upsilon, \Phi, \Psi : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, dados por

$$\Upsilon(u) = \int_{\mathbb{R}^N} H(u)\, dx, \tag{A.1}$$

com $H(s) = \displaystyle\int_0^s h(t)\, dt$ e $h(s)$ satisfazendo (h0)-(h2), como no Capítulo 2,

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\Big)\, dx, \tag{A.2}$$

com $V(x) \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, satisfazendo (V1)-(V2), como no Capítulo 3, e

$$\Psi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\, dx, \tag{A.3}$$

com $F(s) = \displaystyle\int_0^s f(t)\, dt$ e $f(s) \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, satisfazendo (f1)-(f2), como no Capítulo 3.

Vamos precisar de algumas definições.

Definição A.1. *Dado um espaço de Banach X e um funcional $\phi : X \to \mathbb{R}$, dizemos que ϕ possui Derivada de Fréchet no ponto $u \in X$ quando existe um funcional linear $T \in X'$, tal que*

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{\phi(u+v) - \phi(u) - Tv}{\|v\|} = 0. \tag{A.4}$$

Quando existe, T é dita a Derivada de Fréchet de ϕ no ponto $u \in X$, e é o único funcional linear que satisfaz (A.4). Vamos denotar a Derivada de Fréchet por $\phi'(u)$.

Definição A.2. *Se A é um subconjunto aberto de X, dizemos que um funcional $\phi : X \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 em A, ou que $\phi \in C^1(A, \mathbb{R})$, quando existe a Derivada de Fréchet de ϕ, para todo ponto $u \in A$,* *e aplicação $\phi' : A \to X'$ é contínua.*

Definição A.3. *Dado um espaço de Banach X e um funcional $\phi : X \to \mathbb{R}$, dizemos que ϕ possui Derivada de Gateaux no ponto $u \in X$ quando existe um funcional linear T_0, tal que*

$$\lim_{t\to 0} \frac{\phi(u+tv) - \phi(u) - T_0 v}{t} = 0, \quad \forall \ \ v \in X. \tag{A.5}$$

Quando existe, T_0 é dita a Derivada de Gateaux de ϕ no ponto $u \in X$, e é o único funcional linear que satisfaz (A.5). Vamos denotar a Derivada de Gateaux por $D\phi(u)$.

De acordo com o Lema de Schwartz (cf. [21]), um funcional $\phi : X \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 se, e somente se, satisfaz:

(i) Para todo $u \in X$ a Derivada de Gateaux $D\phi(u) : X \to \mathbb{R}$ existe, e é um operador linear limitado;

(ii) O operador diferencial $D\phi : X \to X'$ é contínuo.

E nesse caso a Derivada de Gateaux de ϕ coincide com a Derivada de Fréchet de ϕ.

Vamos usar tal equivalência para mostrar que os funcionais auxiliares definidos em (A.1), (A.2) e (A.3) são de classe C^1.

Proposição A.1. *O funcional $\Upsilon : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, definido em (A.1) pertence a $C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$, e possui derivada dada por*

$$\Upsilon'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} h(u)v\,dx, \quad \forall \ \ v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Prova. Para mostrar a diferenciabilidade de Υ, como já mencionamos, vamos usar a equivalência do Lema de Schwartz. A fim de encontrar a Derivada de Gateaux, dados $x \in \mathbb{R}^N$ e $t \in [0,1]$, defina $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ dado por

$$\theta(s) = H\big(u(x) + stv(x)\big).$$

Então note que $\theta(0) = H(u(x))$, $\theta(1) = H\big(u(x) + tv(x)\big)$ e $\theta'(s) = h\big(u(x) + tsv(x)\big)tv(x)$. Assim, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\tau(x) \in (0,1)$, tal que

$$\frac{\theta(1) - \theta(0)}{t} = \frac{H\big(u(x) + tv(x)\big) - H(u(x))}{t} = h\big(u(x) + t\tau(x)v(x)\big)v(x) \to h(u(x))v(x),$$

quando $t \to 0$. Portanto, vale que

$$\lim_{t\to 0} \frac{H\big(u(x) + tv(x)\big) - H(u(x))}{t} = h(u(x))v(x), \quad \text{q.t.p.} \ \ \text{em } \mathbb{R}^N.$$

A partir de agora considere $N \geq 3$. Observe que por (2.6), segue que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{H\big(u(x)+tv(x)\big)-H(u(x))}{t}\right| &= \Big|h\big(u(x)+t\tau(x)v(x)\big)v(x)\Big| \\
&\leq \left[(L-\varepsilon)\Big|u(x)+t\tau(x)v(x)\Big| + C_\varepsilon\Big|u(x)+t\tau(x)v(x)\Big|^{2^*-1}\right]|v(x)| \\
&\leq \left[(L-\varepsilon)\Big(|u(x)|+|v(x)|\Big) + 2^{2^*-1}C_\varepsilon\Big(|u(x)|^{2^*-1}+|v(x)|^{2^*-1}\Big)\right]|v(x)| \\
&= (L-\varepsilon)\Big[|u(x)v(x)|+|v(x)|^2\Big] + 2^{2^*-1}C_\varepsilon\Big[|u(x)|^{2^*-1}|v(x)|+|v(x)|^{2^*}\Big] \\
&= \nu(x), \quad \text{q.t.p.} \quad \text{em } \mathbb{R}^N.
\end{aligned}$$

Além disso, como $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, usando a desigualdade de Hölder e a continuidade das imersões de Sobolev (cf. Apêndices B.3 e B.1), obtemos que $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$, com $q \in [2, 2^*]$, e com isso, segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nu(x)|\,dx &= (L-\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^N}\Big[|u(x)v(x)|+|v(x)|^2\Big]dx + 2^{2^*-1}C_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}\Big[|u(x)|^{2^*-1}|v(x)|+|v(x)|^{2^*}\Big]dx \\
&\leq (L-\varepsilon)\Big[\|u\|_2\|v\|_2+\|u\|_2^2\Big] + 2^{2^*-1}C_\varepsilon\Big[\|u\|_{2^*}^{2^*-1}\|v\|_{2^*}+\|v\|_{2^*}^{2^*}\Big] \\
&< \tilde{C}\Big[\|u\|\|v\|+\|u\|^2+\|u\|^{2^*-1}\|v\|+\|v\|^{2^*}\Big] \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

Assim, $\nu \in L^1(\mathbb{R}^N)$, e aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (cf. Apêndice B.7), obtemos que

$$\begin{aligned}
D\Upsilon(u)v &= \lim_{t\to 0}\frac{\Upsilon(u+tv)-\Upsilon(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{H\big(u(x)+tv(x)\big)-H(u(x))}{t}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} h(u(x))v(x)\,dx.
\end{aligned}$$

O que garante a existência da Derivada de Gateaux de Υ.

Também, novamente pela desigualdade de Hölder e pelas imersões de Sobolev, segue que

$$\begin{aligned}
\big|D\Upsilon(u)v\big| &\leq \int_{\mathbb{R}^N}|h(u)||v|\,dx \\
&< (L-\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^N}|u||v|\,dx + C_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*-1}|v|\,dx \\
&\leq (L-\varepsilon)\|u\|_2\|v\|_2 + \tilde{C}_\varepsilon\|u\|_{2^*}^{2^*-1}\|v\|_{2^*} \\
&\leq \tilde{C}\Big[\|u\|+\|u\|^{2^*-1}\Big]\|v\|.
\end{aligned}$$

Portanto a aplicação Derivada de Gateaux $D\Upsilon(u) : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ é linear e limitada, para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Agora considere uma sequência arbitrária $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, tal que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, quando $n \to \infty$. Vamos mostrar que $D\Upsilon(u_n) \to D\Upsilon(u)$, quando $n \to \infty$, e assim concluir que o operador $D\Upsilon : H^1(\mathbb{R}^N) \to H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ é contínuo. Primeiramente, como a imersão

$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ é contínua, e $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então $u_n \to u$ em $L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, se $(2^*)'$ é o expoente conjugado de 2^*, segue que

$$|h(u)| \leq (L-\varepsilon)|u| + C_\varepsilon |u|^{2^*-1} \leq C\Big(|u|^{2/2} + |u|^{2^*/(2^*)'}\Big),$$

com isso, para todo $u \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ vale que $h(u) \in L^2(\mathbb{R}^N) + L^{(2^*)'}(\mathbb{R}^N)$, e uma vez que $u_n \to u$ em $L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ por Willem [26] (cf. Teorema A.4), segue que

$$h(u_n) \to h(u), \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^N) + L^{(2^*)'}(\mathbb{R}^N).$$

E como por definição segue que

$$\|h(u)\|_{2\vee(2^*)'} = \inf\Big\{\|h_1\|_2 + \|h_2\|_{(2^*)'} : h_1 \in L^2(\mathbb{R}^N), h_2 \in L^{(2^*)'}(\mathbb{R}^N), h(u) = h_1 + h_2\Big\},$$

tomando $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, pelas imersões de Sobolev, vale que $v \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, então concluímos que

$$\|v\|_{2\vee 2^*} = \|v\|_2 + \|v\|_{2^*}.$$

Assim dados $h_1^n,\ h_1 \in L^2(\mathbb{R}^N)$, e $h_2^n,\ h_2 \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ tais que $h(u_n) = h_1^n + h_2^n$ e $h(u) = h_1 + h_2$, aplicando a desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned}
\big|D\Upsilon(u_n)v - D\Upsilon(u)v\big| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |h(u_n) - h(u)||v|\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |(h_1^n - h_1) + (h_2^n - h_2)||v|\,dx \\
&\leq \|h_1^n - h_1\|_2 \|v\|_2 + \|(h_2^n - h_2\|_{(2^*)'} \|v\|_{2^*} \\
&\leq \Big(\|h_1^n - h_1\|_2 + \|(h_2^n - h_2\|_{(2^*)'}\Big)\|v\|_{2\vee 2^*}.
\end{aligned}$$

E utilizando mais uma vez as imersões de Sobolev, obtemos que

$$\begin{aligned}
\big|D\Upsilon(u_n)v - D\Upsilon(u)v\big| &\leq \inf\big\{\|h_1^n - h_1\|_2 + \|(h_2^n - h_2\|_{(2^*)'}\big\}\, \|v\|_{2\vee 2^*} \\
&= \|(h_1^n - h_1) + (h_2^n - h_2)\|_{2\vee(2^*)'} \big(\|v\|_2 + \|v\|_{2^*}\big) \\
&\leq \tilde{C}\|h(u_n) - h(u)\|_{2\vee(2^*)'}\|v\|.
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\begin{aligned}
\|D\Upsilon(u_n) - D\Upsilon(u)\|_{H^{-1}} &= \sup_{\|v\|\leq 1} |D\Upsilon(u_n)v - D\Upsilon(u)v| \\
&\leq \tilde{C}\|h(u_n) - h(u)\|_{2\vee(2^*)'} \to 0,
\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$. O que mostra a continuidade do operador $D\Upsilon$, e a igualdade $D\Upsilon = \Upsilon'$, para $N \geq 3$.

Agora considere $N=2$. Por (2.8), segue que

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{H\big(u(x)+tv(x)\big)-H(u(x))}{t}\right| &= \Big|h\big(u(x)+t\tau(x)v(x)\big)v(x)\Big| \\
&\leq \left[\frac{L}{2}\big|u(x)+t\tau(x)v(x)\big| + C'_\alpha e^{2\alpha u^2}e^{2\alpha v^2}\big|u(x)+t\tau(x)v(x)\big|^4\right]|v(x)| \\
&\leq \left[\frac{L}{2}\big(|u(x)|+|v(x)|\big) + 2^4C'_\alpha e^{2\alpha u^2}e^{2\alpha v^2}\big(|u(x)|^4+|v(x)|^4\big)\right]|v(x)| \\
&= \frac{L}{2}\Big[|u(x)v(x)|+|v(x)|^2\Big] + 2^4C'_\alpha e^{2\alpha u^2}e^{2\alpha v^2}\Big[|u(x)|^4|v(x)|+|v(x)|^5\Big] \\
&= \nu(x), \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^2.
\end{aligned}
$$

Dados $u,v\in H^1(\mathbb{R}^2)$, existe $C>0$, tal que $\|u\|_{H^1},\ \|v\|_{H^1}\leq C$, assim escolhendo $\alpha>0$ adequadamente, e usando (2.10), além da desigualdade de Hölder, e da continuidade das imersões de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^2)\hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$, com $q\in[2,+\infty)$, concluímos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2}|\nu(x)|\,dx &= \frac{L}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\Big[|u(x)v(x)|+|v(x)|^2\Big]dx + 2^4C'_\alpha\int_{\mathbb{R}^2}e^{2\alpha u^2}e^{2\alpha v^2}\Big[|u(x)|^4|v(x)|+|v(x)|^5\Big]dx \\
&\leq \frac{L}{2}\Big[\|u\|_2\|v\|_2+\|u\|_2^2\Big] + 2^4C'_\alpha\int_{\mathbb{R}^2}e^{2\alpha v^2}(e^{\alpha u^2}-1)\Big[|u(x)|^4|v(x)|+|v(x)|^5\Big]dx \\
&+ 2^4C'_\alpha\int_{\mathbb{R}^2}(e^{2\alpha v^2}-1)\Big[|u(x)|^4|v(x)|+|v(x)|^5\Big]dx + 2^4C'_\alpha\int_{\mathbb{R}^2}\Big[|u(x)|^4|v(x)|+|v(x)|^5\Big]dx \\
&\leq \frac{L}{2}\Big[\|u\|_2\|v\|_2+\|u\|_2^2\Big] + 2^4C'_\alpha\|(e^{\alpha u^2}-1)\|_2\left(\int_{\mathbb{R}^2}e^{4\alpha v^2}\Big[|u(x)|^4|v(x)|+|v(x)|^5\Big]^2dx\right)^{1/2} \\
&+ 2^4C'_\alpha\|(e^{\alpha v^2}-1)\|_2\left(\int_{\mathbb{R}^2}\Big[|u(x)|^4|v(x)|+|v(x)|^5\Big]^2dx\right)^{1/2} + 2^4C'_\alpha\Big[\|u\|_5^4\|v\|_5+\|v\|_5^5\Big] \\
&\leq \frac{L}{2}\Big[\|u\|_2\|v\|_2+\|u\|_2^2\Big] + 2^5C'_\alpha\|(e^{2\alpha v^2}-1)\|_1^{1/2}\Big[\|u\|_{10}^8\|v\|_{10}^2+\|v\|_{10}^{10}\Big]^{1/2} + 2^4C'_\alpha\Big[\|u\|_5^4\|v\|_5+\|v\|_5^5\Big] \\
&+ 2^4C'_\alpha\|(e^{2\alpha u^2}-1)\|_1^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\left\{(e^{4\alpha v^2}-1)\Big[|u(x)|^4|v(x)|+|v(x)|^5\Big]^2+\Big[|u(x)|^4|v(x)|+|v(x)|^5\Big]^2\right\}dx\right)^{1/2} \\
&\leq \frac{L}{2}\Big[\|u\|_2\|v\|_2+\|u\|_2^2\Big] + 2^5C'_\alpha\tilde{M}^{1/2}\Big[\|u\|_{10}^8\|v\|_{10}^2+\|v\|_{10}^{10}\Big]^{1/2} + 2^4C'_\alpha\Big[\|u\|_5^4\|v\|_5+\|v\|_5^5\Big] \\
&+ 2^5C'_\alpha\tilde{M}^{1/2}\left(\|(e^{8\alpha v^2}-1)\|_1^{1/2}\left[\int_{\mathbb{R}^2}\Big[|u(x)|^{16}|v(x)|^4+|v(x)|^{20}\Big]dx\right]^{1/2} + \|u\|_{10}^8\|v\|_{10}^2+\|v\|_{10}^{10}\right)^{1/2} \\
&\leq \frac{L}{2}\Big[\|u\|_2\|v\|_2+\|u\|_2^2\Big] + 2^5C'_\alpha\tilde{M}^{1/2}\Big[\|u\|_{10}^8\|v\|_{10}^2+\|v\|_{10}^{10}\Big]^{1/2} + 2^4C'_\alpha\Big[\|u\|_5^4\|v\|_5+\|v\|_5^5\Big] \\
&+ 2^5C'_\alpha\tilde{M}^{1/2}\left(\tilde{M}^{1/2}\Big[\|u\|_{20}^{16}\|v\|_{20}^4+\|v\|_{20}^{20}\Big]^{1/2} + \|u\|_{10}^8\|v\|_{10}^2+\|v\|_{10}^{10}\right)^{1/2} \\
&< \tilde{C}\Big[\|u\|\|v\|+\|u\|^2+\big(\|u\|^8\|v\|^2+\|v\|^{10}\big)^{1/2}+\|u\|^4\|v\|+\|v\|^5\Big] \\
&+ \tilde{C}\Big[\big[\|u\|^{16}\|v\|^4+\|v\|^{20}\big]^{1/2}+\|u\|^8\|v\|^2+\|v\|^{10}\Big]^{1/2} \\
&< +\infty.
\end{aligned}
$$

Assim, $\nu \in L^1(\mathbb{R}^2)$, e aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos que

$$
\begin{aligned}
D\Upsilon(u)v &= \lim_{t\to 0} \frac{\Upsilon(u+tv)-\Upsilon(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{H\big(u(x)+tv(x)\big)-H(u(x))}{t}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} h(u(x))v(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

O que garante a existência da derivada de Gateaux para Υ. Além disso, dados $u,v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, novamente considerando $C>0$ tal que $\|u\|_{H^1} \le C$, para $\alpha = \dfrac{\sigma_0}{2C^2} > 0$, concluímos ao usar (2.10), a desigualdade de Hölder, e da continuidade das imersões de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$, com $q \in [2,+\infty)$, que

$$
\begin{aligned}
\big|D\Upsilon(u)v\big| &\le \int_{\mathbb{R}^2} |h(u)||v|\,dx \\
&< \frac{L}{2}\int_{\mathbb{R}^2} |u||v|\,dx + C'_\alpha \int_{\mathbb{R}^2} e^{\alpha u^2}|u|^4|v|\,dx \\
&\le \frac{L}{2}\|u\|_2\|v\|_2 + C'_\alpha\|(e^{\alpha u^2}-1)\|_2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u|^8|v|^2\,dx\right)^{1/2} + C'_\alpha \int_{\mathbb{R}^2} |u|^4|v|\,dx \\
&\le \frac{L}{2}\|u\|_2\|v\|_2 + C'_\alpha\|(e^{2\alpha u^2}-1)\|_1^{1/2}\|u\|_{10}^4\|v\|_{10} + C'_\alpha\|u\|_5^4\|v\|_5 \\
&\le \frac{L}{2}\|u\|_2\|v\|_2 + C'_\alpha\tilde{M}_1^{1/2}\|u\|_{10}^4\|v\|_{10} + C'_\alpha\|u\|_5^4\|v\|_5 \\
&\le \tilde{C}\Big[\|u\| + \|u\|^4\Big]\|v\|.
\end{aligned}
$$

Portanto a aplicação Derivada de Gateaux $D\Upsilon(u) : H^1(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ é linear e limitada, para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$.

Agora considere uma sequência arbitrária $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^2)$, tal que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$, quando $n \to \infty$. Note primeiro que como a imersão $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^5(\mathbb{R}^2)$ é contínua, e como $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$, então $u_n \to u$ em $L^2(\mathbb{R}^2)\cap L^5(\mathbb{R}^2)$. Além disso, como (u_n) é convergente, é limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$, isto é, existe $C>0$, tal que $\|u_n\|_{H^1} \le C$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Com isso, escolhendo $\alpha = \dfrac{2\sigma_0}{5C^2} > 0$, por (2.10), segue que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \Big[e^{(u_n^2\alpha/4)}|u_n|\Big]^5\,dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \Big[\Big(e^{(u_n^2\alpha/4)}-1\Big)|u_n| + |u_n|\Big]^5\,dx \\
&\le 2^5\int_{\mathbb{R}^2} \Big[\Big(e^{(u_n^2\alpha/4)}-1\Big)^5|u_n|^5 + |u_n|^5\Big]\,dx \\
&\le 2^5\|u_n\|_{10}^5 \int_{\mathbb{R}^2} \Big(e^{(u_n^2 5\alpha/2)}-1\Big)^{1/2}\,dx + 2^5\|u_n\|_5^5 \\
&\le 2^5\tilde{M}^{1/2}\|u_n\|_{10}^5 + 2^5\|u_n\|_5^5 \\
&< +\infty.
\end{aligned}
$$

Logo, como $(5)' = \dfrac{5}{4}$, é o expoente conjugado de 5, concluímos que $\Big(e^{(u_n^2\alpha/4)}|u_n|\Big)^{5/(5)'} \in L^{(5)'}(\mathbb{R}^2)$, e então podemos escrever

$$
|h(u_n)| \le \frac{L}{2}|u_n| + C'_\alpha\Big[e^{(u_n^2\alpha/4)}|u_n|\Big]^4 \le \tilde{C}\Big[|u_n|^{2/2} + \Big(e^{(u_n^2\alpha/4)}|u_n|\Big)^{5/(5)'}\Big].
$$

Desse modo, como $u_n \in L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^5(\mathbb{R}^2)$ vale que $h(u_n) \in L^2(\mathbb{R}^2) + L^{(5)'}(\mathbb{R}^2)$, e uma vez que $u_n \to u$ em $L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^5(\mathbb{R}^2)$ por Willem [26] (cf. Teorema A.4), segue que

$$h(u_n) \to h(u), \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^2) + L^{(5)'}(\mathbb{R}^2).$$

Mais ainda, como por definição vale que

$$\|h(u)\|_{2\vee(5)'} = \inf\left\{\|h_1\|_2 + \|h_2\|_{(5)'} : h_1 \in L^2(\mathbb{R}^2), h_2 \in L^{(5)'}(\mathbb{R}^2), h(u) = h_1 + h_2\right\},$$

tomando $v \in H^1(\mathbb{R}^2)$ pelas imersões de Sobolev, segue que $v \in L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^5(\mathbb{R}^2)$, logo segue que

$$\|v\|_{2\vee 5} = \|v\|_2 + \|v\|_5.$$

Assim dados $h_1^n,\ h_1 \in L^2(\mathbb{R}^2)$, e $h_2^n,\ h_2 \in L^5(\mathbb{R}^2)$ tais que $h(u_n) = h_1^n + h_2^n$ e $h(u) = h_1 + h_2$, aplicando a desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned}
\big|D\Upsilon(u_n)v - D\Upsilon(u)v\big| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |h(u_n) - h(u)||v|\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |(h_1^n - h_1) + (h_2^n - h_2)||v|\, dx \\
&\leq \|h_1^n - h_1\|_2\|v\|_2 + \|(h_2^n - h_2\|_{(5)'}\|v\|_5 \\
&\leq \Big(\|h_1^n - h_1\|_2 + \|(h_2^n - h_2\|_{(5)'}\Big)\|v\|_{2\vee 5}.
\end{aligned}$$

E utilizando mais uma vez as imersões de Sobolev, obtemos que

$$\begin{aligned}
\big|D\Upsilon(u_n)v - D\Upsilon(u)v\big| &\leq \inf\{\|h_1^n - h_1\|_2 + \|(h_2^n - h_2\|_{(5)'}\}\|v\|_{2\vee 5} \\
&= \|(h_1^n - h_1) + (h_2^n - h_2)\|_{2\vee(5)'}\big(\|v\|_2 + \|v\|_5\big) \\
&\leq \tilde{C}\|h(u_n) - h(u)\|_{2\vee(5)'}\|v\|.
\end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que

$$\begin{aligned}
\big\|D\Upsilon(u_n) - D\Upsilon(u)\big\|_{H^{-1}} &= \sup_{\|v\|\leq 1}\big|D\Upsilon(u_n)v - D\Upsilon(u)v\big| \\
&\leq \tilde{C}\|h(u_n) - h(u)\|_{2\vee(5)'} \to 0,
\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$. O que mostra a continuidade do operador $D\Upsilon$, e a igualdade $D\Upsilon = \Upsilon'$, para $N = 2$.

Portanto, mostramos as condições (i) e (ii) do Lema de Schwartz para $N \geq 2$, logo provamos que Υ é de classe C^1. ∎

Proposição A.2. *O funcional $\Phi : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, definido em (A.2) pertence a $C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$, e possui derivada dada por*

$$\Phi'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N}\Big(\nabla u \nabla v + V(x)uv\Big)\, dx, \quad \forall\ v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Prova. Para mostrar que Φ é de classe C^1, vamos novamente usar o Lema de Schwartz. A fim de mostrar (i) do Lema de Schwartz, dados $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, e $t \in \mathbb{R}$, note que

$$\begin{aligned}\frac{\Phi(u+tv)-\Phi(u)}{t} &= \frac{1}{2t}\left[\int_{\mathbb{R}^N}\Big(|\nabla u+tv|^2+V(x)|u+tv|^2\Big)\,dx \; - \int_{\mathbb{R}^N}\Big(|\nabla u|^2+V(x)u^2\Big)\,dx\right]\\ &= \frac{1}{t}\left[\frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\Big(|\nabla v|^2+V(x)v^2\Big)\,dx \; + t\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\nabla u\nabla v+V(x)uv\Big)\,dx\right].\end{aligned}$$

Dessa forma, a Derivada de Gateaux $D\Phi(u)$ existe, e é dada por

$$D\Phi(u)v = \lim_{t\to 0}\frac{\Phi(u+tv)-\Phi(u)}{t} = \int_{\mathbb{R}^N}\Big(\nabla u\nabla v+V(x)uv\Big)\,dx.$$

Assim, dados $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, segue que

$$|D\Phi(u)v| = |\langle u, v\rangle_H| \leq \|u\|\|v\|,$$

em que $\big\langle \cdot, \cdot \big\rangle_H$ representa o produto interno associado a norma $\|\cdot\|$, adotada em H, que como vimos no Capítulo 3, é equivalente a norma usual de $H^1(\mathbb{R}^N)$. Assim segue que a aplicação Derivada de Gateaux $D\Phi(u) : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ é linear e limitada, para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. O que conclui (i) do Lema de Schwartz.

Agora para (ii) considere uma sequência arbitrária $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, tal que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, quando $n \to \infty$. Observe que

$$\begin{aligned}\big\|D\Phi(u_n)-D\Phi(u)\big\|_{H^{-1}} &= \sup_{\|v\|\leq 1}\big|D\Phi(u_n)v-D\Phi(u)v\big|\\ &= \sup_{\|v\|\leq 1}\left|\int_{\mathbb{R}^N}\nabla(u_n-u)\nabla v\,dx+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)(u_n-u)v\,dx\right|\\ &= \sup_{\|v\|\leq 1}\big|D\Phi(u_n-u)v\big|\\ &\leq \sup_{\|v\|\leq 1}\|u_n-u\|\|v\|\\ &= \|u_n-u\| \to 0,\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$. Com isso, mostramos que $D\Phi(u_n) \to D\Phi(u)$, quando $n \to \infty$, e concluímos que o operador $D\Phi = \Phi' : H^1(\mathbb{R}^N) \to H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ é contínuo. Portanto, mostramos (ii), e pelo Lema de Schwartz segue que Φ é de classe C^1. ■

Observe que pela Proposição A.2 obtemos que Φ é de classe C^1, assim, em particular o funcional $\Lambda : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Lambda(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\,dx,$$

é de classe C^1, e tem derivada dada por

$$\Lambda'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\nabla v\,dx, \quad \forall \;\; v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Mais ainda, como o funcional J definido em (2.1) é tal que

$$J(u) = \Lambda(u) - \Upsilon(u), \quad \forall \ u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

então pela Proposição A.1, concluímos que J é a diferença de dois funcionais de classe C^1, portanto J é um funcional de classe C^1, e tem derivada dada por

$$J'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(u)v \, dx, \quad \forall \ v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Proposição A.3. *O funcional $\Psi : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, definido em (A.3) pertence a $C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$, e possui derivada dada por*

$$\Psi'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v \, dx, \quad \forall \ v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Prova. Vamos outra vez usar o Lema de Schwartz. Para encontrar a derivada de Gateaux de Ψ, dado $x \in \mathbb{R}^N$, e $t \in [0,1]$, defina $\eta : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\eta(s) = F\big(u(x) + stv(x)\big).$$

Então note que $\eta(0) = F(u(x))$ e $\eta(1) = F\big(u(x) + tv(x)\big)$, e $\eta'(s) = f\big(u(x) + tsv(x)\big)tv(x)$. Assim, pelo Teorema do Valor Médio existe $\lambda(x) \in (0,1)$, tal que

$$\frac{\eta(1) - \eta(0)}{t} = \frac{F\big(u(x) + tv(x)\big) - F(u(x))}{t} = f\big(u(x) + t\lambda(x)v(x)\big)v(x) \to f(u(x))v(x),$$

quando $t \to 0$. Portanto, vale que

$$\lim_{t \to 0} \frac{F\big(u(x) + tv(x)\big) - F(u(x))}{t} = f(u(x))v(x), \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Além disso, observe que por (3.2), segue que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F\big(u(x) + tv(x)\big) - F(u(x))}{t} \right| &= \Big| f\big(u(x) + t\lambda(x)v(x)\big)v(x) \Big| \\
&\leq \left[\varepsilon \Big| u(x) + t\lambda(x)v(x) \Big| + C_\varepsilon \Big| u(x) + t\lambda(x)v(x) \Big|^{p-1} \right] |v(x)| \\
&\leq \left[\varepsilon \Big(|u(x)| + |v(x)| \Big) + 2^{p-1} C_\varepsilon \Big(|u(x)|^{p-1} + |v(x)|^{p-1} \Big) \right] |v(x)| \\
&= \varepsilon \Big[|u(x)v(x)| + |v(x)|^2 \Big] + 2^{p-1} C_\varepsilon \Big[|u(x)|^{p-1}|v(x)| + |v(x)|^p \Big] \\
&= \kappa(x), \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N.
\end{aligned}$$

Agora como $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, usando a desigualdade de Hölder e a continuidade das imersões de Sobolev

$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$, com $q \in [2, 2^*]$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\kappa(x)|\,dx &= \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} \Big[|u(x)v(x)| + |v(x)|^2\Big]\,dx + 2^{p-1}C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} \Big[|u(x)|^{p-1}|v(x)| + |v(x)|^p\Big]\,dx \\
&\leq \varepsilon\Big[\|u\|_2\|v\|_2 + \|u\|_2^2\Big] + 2^{p-1}C_\varepsilon\Big[\|u\|_p^{p-1}\|v\|_p + \|v\|_p^p\Big] \\
&< C\Big[\|u\|\|v\| + \|u\|^2 + \|u\|^{p-1}\|v\| + \|v\|^p\Big] \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

Assim, $\kappa \in L^1(\mathbb{R}^N)$, e aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\begin{aligned}
D\Psi(u)v &= \lim_{t\to 0} \frac{\Psi(u+tv) - \Psi(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F\big(u(x) + tv(x)\big) - F(u(x))}{t}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f(u(x))v(x)\,dx.
\end{aligned}$$

O que garante a existência da Derivada de Gateaux de Ψ. Também, novamente pela desigualdade de Hölder e pelas imersões de Sobolev, segue que

$$\begin{aligned}
\big|D\Psi(u)v\big| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(u)||v|\,dx \\
&< \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u||v|\,dx + C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1}|v|\,dx \\
&\leq \varepsilon\|u\|_2\|v\|_2 + C_\varepsilon\|u\|_p^{p-1}\|v\|_p \\
&\leq C\Big[\|u\| + \|u\|^{p-1}\Big]\|v\|.
\end{aligned}$$

Desse modo, concluímos que a aplicação Derivada de Gateaux $D\Psi(u) : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ é linear e limitada, para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Agora considere uma sequência arbitrária $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, tal que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, quando $n \to \infty$. A fim de mostrar a continuidade de $D\Psi : H^1(\mathbb{R}^N) \to H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ observe que como a imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$ é contínua, e $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então $u_n \to u$ em $L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$. Além disso, se p' é o expoente conjugado de p, então segue que

$$|f(u)| \leq \varepsilon|u| + C_\varepsilon|u|^{p-1} \leq C\Big(|u|^{2/2} + |u|^{p/p'}\Big),$$

assim, para todo $u \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$ vale que $f(u) \in L^2(\mathbb{R}^N) + L^{p'}(\mathbb{R}^N)$, e uma vez que $u_n \to u$ em $L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$ por Willem [26] (cf. Teorema A.4), segue que $f(u_n) \to f(u)$ em $L^2(\mathbb{R}^N) + L^{p'}(\mathbb{R}^N)$. E como por definição vale que

$$\|f(u)\|_{2\vee p'} = \inf\Big\{\|f_1\|_2 + \|f_2\|_{p'} : f_1 \in L^2(\mathbb{R}^N),\ f_2 \in L^{p'}(\mathbb{R}^N), f(u) = f_1 + f_2\Big\},$$

tomando $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, pelas imersões de Sobolev, segue que $v \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$, então concluímos que

$$\|v\|_{2\vee p} = \|v\|_2 + \|v\|_p.$$

Assim dados $f_1^n,\ f_1 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $f_2^n,\ f_2 \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tais que $f(u_n) = f_1^n + f_2^n$ e $f(u) = f_1 + f_2$, aplicando a desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned}
\big|D\Psi(u_n)v - D\Psi(u)v\big| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(u_n) - f(u)||v|\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |(f_1^n - f_1) + (f_2^n - f_2)||v|\,dx \\
&\leq \|f_1^n - f_1\|_2\|v\|_2 + \|(f_2^n - f_2\|_{p'}\|v\|_p \\
&\leq \Big(\|f_1^n - f_1\|_2 + \|(f_2^n - f_2\|_{p'}\Big)\|v\|_{2\vee p}.
\end{aligned}$$

E utilizando mais uma vez as imersões de Sobolev, obtemos que

$$\begin{aligned}
\big|D\Psi(u_n)v - D\Psi(u)v\big| &\leq \inf\{\|f_1^n - f_1\|_2 + \|(f_2^n - f_2\|_{p'}\}\|v\|_{2\vee p} \\
&= \|(f_1^n - f_1) + (f_2^n - f_2)\|_{2\vee p'}\big(\|v\|_2 + \|v\|_p\big) \\
&\leq C\|f(u_n) - f(u)\|_{2\vee p'}\|v\|.
\end{aligned}$$

Com isso, concluímos que

$$\begin{aligned}
\big\|D\Psi(u_n) - D\Psi(u)\big\|_{H^{-1}} &= \sup_{\|v\|\leq 1}\big|D\Psi(u_n)v - D\Psi(u)v\big| \\
&\leq C\|f(u_n) - f(u)\|_{2\vee p'} \to 0,
\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$. Mostrando que $D\Psi(u_n) \to D\Psi(u)$, quando $n \to \infty$, e assim o operador $D\Phi = \Psi' : H^1(\mathbb{R}^N) \to H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ é contínuo. Portanto, pelo Lema de Schwartz, segue que Ψ é de classe C^1. ■

Por fim, observe que o funcional I definido em (3.1) é tal que

$$I(u) = \Phi(u) - \Psi(u), \quad \forall\ u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

assim segue das Proposições A.2 e A.3 que I é de classe C^1.

Apêndice

$\mathcal{B}$

Resultados Importantes

B.1 Imersões de Sobolev

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, com fronteira suave. Então o Espaço de Sobolev dado por

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \quad \forall\ |\alpha| \leq 1 \right\},$$

é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2 \right) dx \right)^{1/2}.$$

Definição B.1.1. *Sejam E_1, E_2 espaços normados tais que $E_1 \subset E_2$. Dizemos que E_1 está imerso continuamente em E_2, e denotamos $E_1 \hookrightarrow E_2$, quando a aplicação inclusão $i : E_1 \to E_2$ dada por $i(x) = x$, é contínua.*

Definição B.1.2. *Sejam E_1, E_2 espaços normados tais que $E_1 \subset E_2$. Dizemos que E_1 está imerso compactamente em E_2, e denotamos $E_1 \hookrightarrow\hookrightarrow E_2$, quando a aplicação inclusão $i : E_1 \to E_2$ dada por $i(x) = x$, é compacta.*

Os resultados a seguir são baseados em [2], [7] e [12].

Teorema B.1.1. ***(Imersões Contínuas de $H^1(\Omega)$)*** *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, com fronteira suave. Então as seguintes Imersões de Sobolev são contínuas:*

- *para $N \geq 3$ e $q \in [2, 2^*]$, em que $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$, vale que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$;*
- *para $N = 1,\ 2$ e $q \in [2, +\infty)$, vale que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.*

E como consequência, dado q para o qual vale a continuidade da imersão, existe $C_q > 0$ constante, tal que

$$\|u\|_q \leq C_q \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall \;\; u \in H^1(\Omega).$$

Teorema B.1.2. ***(Imersões Compactas de $H^1(\Omega)$)*** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e limitado, com fronteira suave. Então as seguintes imersões de Sobolev são compactas:*

- *para $N \geq 3$ e $q \in [2, 2^*)$, em que $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$, vale que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$;*
- *para $N = 1,\ 2$ e $q \in [2, +\infty)$, vale que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.*

B.2 Identidade de Pohozaev

Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um domínio com fronteira suave, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função contínua e $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$ uma solução fraca para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u), & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Então, u satisfaz a seguinte equação conhecida como Identidade de Pohozaev (cf. [19]):

$$\frac{N-2}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x \cdot \eta(x) \; dS_x = N \int_\Omega G(u) \, dx,$$

em que $G(s) = \displaystyle\int_0^s g(t) \, dt$, e $\eta(x)$ é o vetor normal exterior no ponto $x \in \partial\Omega$.

Além disso, quando $\Omega = \mathbb{R}^N$, então a Identidade de Pohozaev resulta em

$$\frac{N-2}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = N \int_\Omega G(u) \, dx.$$

B.3 Desigualdade de Hölder

Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto mensurável, e $1 \leq p \leq +\infty$. O espaço de Lebesgue dado por

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega |u|^p \, dx < +\infty \right\},$$

é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Definição B.3.1. *Dado $1 < p < +\infty$, dizemos que $p' \in \mathbb{R}$, tal que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

é o expoente conjugado de p. E convencionamos $p' = +\infty$, quando $p = 1$.

O seguinte resultado é baseado em [2] e [7].

Teorema B.3.1. *Dado $1 \leq p \leq +\infty$, considere $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^{p'}(\Omega)$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |uv|\, dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Mais ainda dados $1 \leq p_1, ..., p_k \leq +\infty$ e $u_i \in L^{p_i}$,. para $i = 1, ..., k$, tais que

$$\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{1}{p_i} \leq 1.$$

Então o produto $f = f_1 \cdots f_k \in L^p(\Omega)$ e

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Em particular, se $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, então $f \in L^r(\Omega)$, para todo $r \in [p, q]$, e vale a seguinte desigualdade de Interpolação:

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \| \|_{L^p(\Omega)}^{\alpha} \| \|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha},$$

em que $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{1-\alpha}{q}$, *para* $0 \leq \alpha \leq 1$.

B.4 Teorema de Tonelli

O teorema dessa seção é um caso particular do resultado encontrado em [4] (cf. Teorema 10.9).

Teorema B.4.1. *Sejam Ω_1, $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^N$ conjuntos Lebesgue-mensuráveis e seja $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ uma função Lebesgue-mensurável e não negativa. Então vale que*

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y)\, dx \times dy = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} F(x, y)\, dx\, dy = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} F(x, y)\, dy\, dx.$$

B.5 Funções Regularizantes

Na presente seção vamos apresentar resultados baseados em [2] e [7].

Definição B.5.1. *Uma sequência de Funções Regularizantes* (ρ_ε) *para* $\varepsilon > 0$*, é uma sequência de funções com domínio em* $\mathbb{R}^N$*, tal que*

(i) $\rho_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$*;*
(ii) $supp\, \rho_\varepsilon \subset B_\varepsilon(0)$;
(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon \, dx = 1$;
(iv) $\rho_\varepsilon \geq 0$*, em* $\mathbb{R}^N$*.*

É fácil garantir a existência de uma sequência de funções regularizantes começando com uma função $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\operatorname{supp} \rho \subset B_1[0]$, $\rho \geq 0$ em $\mathbb{R}^N$ e $\rho \not\equiv 0$. Um exemplo é dado pela função

$$\rho(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right), & \text{se} \quad |x| < 1, \\ 0, & \text{se} \quad |x| \geq 1. \end{cases}$$

Através dessa função é possível obter uma sequência de funções regularizantes definindo $\rho_\varepsilon(x) = C\varepsilon^{-N}\rho(x/\varepsilon)$ com $C = \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \rho \, dx\right)^{-1}$.

O seguinte resultado é devido a [7] (cf. Teorema 4.22).

Teorema B.5.1. *Suponha que* $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *com* $1 \leq p < +\infty$*. Então, quando* $\varepsilon \to 0$*,*

$$(\rho_\varepsilon * u) \to u, \quad em \quad L^p(\mathbb{R}^N).$$

B.6 Caracterização Espectral de um Operador Autoadjunto

Seja H um espaço de Hilbert e $T : H \to H$ um operador linear limitado. Identificando H com seu espaço dual H', podemos considerar que T^*, o operador adjunto de T, é um operador limitado de H em H.

Definição B.6.1. *Um operador linear limitado* $T : H \to H$ *é dito autoadjunto quando* $T^* = T$*, ou seja, quando*

$$\big(Tu, v\big)_H = \big(u, Tv\big)_H, \quad \forall \;\; u, v \in H.$$

O seguinte resultado pode ser encontrado em [7] (cf. Proposição 6.9).

Teorema B.6.1. *Seja $T : H \to H$ um operador linear limitado e autoadjunto. Defina*

$$m = \inf_{u \in H,\ \|u\|=1} \big(Tu, u\big)_H$$

e

$$M = \sup_{u \in H,\ \|u\|=1} \big(Tu, u\big)_H.$$

Então $\sigma(T) \subset [m, M]$ e $m,\ M \in \sigma(T)$. Além disso, $\|T\| = \max\{|m|, |M|\}$.

Observe que pelo Teorema B.6.1, concluímos que

$$\inf_{u \in H,\ \|u\|=1} \big(Tu, u\big)_H = m = \min \sigma(T).$$

B.7 Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

O teorema apresentado nessa seção é um caso particular do resultado encontrado em [4] (cf. Teorema 5.6), e [13] (cf. (2.24)).

Teorema B.7.1. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto Lebesgue-mensurável, e (f_n) uma sequência de funções Lebesgue-mensuráveis e integráveis, definidas sobre Ω. Suponha que exista uma função Lebesgue-mensurável $f : \Omega \to \mathbb{R}$, tal que*

$$f_n(x) \to f(x), \quad q.t.p. \quad em\ \Omega.$$

Suponha também que exista uma função integrável $g : \Omega \to \mathbb{R}$, tal que

$$|f_n| \leq g, \quad q.t.p. \quad em\ \Omega, \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}.$$

Então f é integrável e vale que

$$\int_\Omega f\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_n\, dx.$$

B.8 Lema de Lions

O seguinte teorema é caso especial do resultado obtido em [18] (cf. Lema I.1).

Teorema B.8.1. *Sejam $r > 0$, $2 \leq p < 2^*$ e $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência limitada que satisfaz*

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} |u_n|^p\, dx \to 0, \quad quando \quad n \to \infty.$$

Então para $N \geq 3$, vale que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} = 0, \quad \textit{quando} \;\; 2 < q < 2^*.$$

E para $N = 2$, vale que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} = 0, \quad \textit{quando} \;\; 2 < q < +\infty.$$

B.9 Teorema de Vainberg

O seguinte resultado devido a Vainberg e pode ser encontrado em [7] (cf.Teorema 4.9).

Teorema B.9.1. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto Lebesgue-mensurável, (f_n) uma sequência de funções em $L^p(\Omega)$, e $f \in L^p(\Omega)$, tal que*

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Então existem uma subsequência (f_{n_k}) e uma função $h \in L^p(\Omega)$, tais que

(a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$, q.t.p. em Ω;
(b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, q.t.p. em Ω, para todo $k \in \mathbb{N}$.

B.10 Princípio do Máximo Forte

Os resultados dessa seção estão baseados em [11] (cf. § 6.4.2).

Definição B.10.1. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto conexo, e $L : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ um operador diferencial parcial tendo a forma*

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} + cu.$$

Dizemos que L é simétrico quando

$$a^{ij} = a^{ji}, \quad \forall i, j = 1, ..., N.$$

Além disso, dizemos que L é uniformemente elíptico quando existe uma constante $\theta > 0$, tal que, para todo $x \in \Omega$ e $\xi \in \mathbb{R}^N$, vale que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2.$$

Para o próximo resultado conhecido como Princípio do Máximo Forte, vamos considerar L como sendo um operador diferencial parcial, simétrico, uniformemente elíptico, com os coeficientes a^{ij}, b^i, e c

contínuos.

Teorema B.10.1. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto conexo, e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Além disso, suponha que o coeficiente c de L é tal que*

$$c(x) \geq 0, \quad \forall \ x \in \Omega.$$

Então, vale que

(i) se $Lu \leq 0$ em Ω, e u atinge máximo não negativo sobre $\bar{\Omega}$, em um ponto interior, então u é constante em Ω;

(ii) se $Lu \geq 0$ em Ω, e u atinge mínimo não positivo sobre $\bar{\Omega}$, em um ponto interior, então u é constante em Ω.

Pelo resultado do Teorema B.10.1 podemos observar que se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ é uma solução clássica não constante, e não negativa, para o problema

$$\begin{cases} Lu = f(u), & \text{em} \quad \Omega, \\ \ u = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

então supondo que $f(u) \geq 0$ em Ω, por (ii) concluímos que:

(a) ou $\min\limits_{\bar{\Omega}} u = 0$ é não positivo, e assim não pode ser assumido em um ponto interior de Ω, já que u não é constante. Portanto, concluímos que $u > 0$ em Ω;

(b) ou $\min\limits_{\bar{\Omega}} u$ é assumido em um ponto interior de Ω, mas então $\min\limits_{\bar{\Omega}} u > 0$ e assim $u > 0$ em $\bar{\Omega}$, em particular $u > 0$ em Ω.

Portanto, em ambos os casos concluímos que $u > 0$ em Ω. Note também que como o operador possui coeficientes contínuos, se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca para o problema em questão, pela Teoria de Regularidade (cf. [11] § 6.3), concluímos que tal solução é clássica.

B.11 Lema de Fatou

O resultado da presente seção é um caso particular do Lema de Fatou encontrado em [4] (cf. Lema 4.8), e [13] (cf. (2.18)).

Teorema B.11.1. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto Lebesgue-mensurável, e (f_n) uma sequência de funções Lebesgue-mensuráveis, não negativas definidas sobre Ω. Então*

$$\int_\Omega \big(\liminf_{n\to\infty} f_n \big)\, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, dx.$$

Referências Bibliográficas

[1] Adachi, S. and Tanaka, K., Trudinger Type Inequalities in $\mathbb{R}^N$ and their Best Expoents, *Proc. Amer. Math. Soc.* **128**, (2000), 2051-2057. 18

[2] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, Inc, (1975). 75, 77, 78

[3] Ambrosetti, A. and Rabinowitz, P. H., Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications, *J. Functional Analysis* **14**, (1973), 349-381. 1

[4] Bartle, R. G., *The Elements of Integration*, John Wiley & Sons, Inc, (1966). 77, 79, 81

[5] Berestycki, H., Gallouët, T. and Kavian, O., Equations de Champs Scalaires Euclidiens non Linéaires dans le Plan, *C.R. Acad. Sci; Paris Ser. I Math.* **297** (1983), 5, 307-310. 2, 14, 15, 19, 20, 21, 23, 30, 33

[6] Berestycki, H. and Lions, P. L., Nonlinear Scalar Field Equations I, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **82**, (1983), 313-346. 2, 14, 15, 19, 20, 21, 23, 28, 29

[7] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, (2011). 75, 77, 78, 80

[8] Coleman, S., Glaser, V. and Martin, A., Action Minima among Solutions to a Class of Euclidean Scalar Field Equation, *Comm. Math. Phys.* **58**, (1978), 211-221. 28

[9] De Figueiredo, D. G., *The Ekeland variational Principle and Detours*, Springer - Tata Inst. Fund. Res., Bombay, (1989). 2, 4

[10] Ekeland, I., *Convexity methods in Hamiltonian Mechanics*, Springer, (1990). 2, 4

[11] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, Amer. Math. Soc., (1998). 80, 81

[12] Figueiredo, G. J. M., *Uma Introdução à Teoria dos Pontos Críticos*, Notas de Aula da UFPA, (2015). 2, 4, 75

[13] Folland, G. B., *Real Analysis, Modern Techniques and their Applications*, John Wiley & Sons, Inc, (1984). 79, 81

[14] Ghaderi, H., *Mountain Pass Theorems with Ekeland's Variational Principle and an Application to the Semilinear Dirichlet Problem*, Bachelor Thesis for The Bachelor of Science Programme in Mathematics, Uppsala University, (2011). 2

[15] Jeanjean, L., On the Existence of Bounded Palais-Smale Sequences and Applications to a Landesman-Lazer-Type Problem Set on $\mathbb{R}^N$, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **129**, (1999), 787-809. 2

[16] Jeanjean, L. and Tanaka, K., A Positive Solution for an Asymptotically Linear Elliptic Problem on $\mathbb{R}^N$ Autonomous at Infinity, *ESAIM: Cont. Opt. Calc. Var.* **7**, (2002), 597-614. 1, 3

[17] Jeanjean, L. and Tanaka, K., A Remark on Least Energy Solutions in $\mathbb{R}^N$, *Proc. Amer. Math. Soc.* **131**, (2002), 2399-2408. 2, 3

[18] Lions, P. L., The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. The Locally Compact Case. Parts I and II, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéarire* **1**, (1984), 109-145 and 223-283. 2, 3, 79

[19] Pohozaev, S. I., Eigenfuntions of the Equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, *Sov. Math. Doklady* **5**, (1965), 1408-1411. 76

[20] Rabinowitz, P. H., On a class of Nonlinear elliptic Equations, *ZAMP* **43**, (1992), 270-291. 2

[21] Schwartz, J., *Nonlinear Functional Analysis*, Courant Institute, NYU (1964). 65

[22] Stuart, C. A., Bifurcation in $L^p(\mathbb{R}^N)$ for a Semilinear Elliptic Equation, *Proc. London Math. Soc.* **57**, (1988), 511-541. 2

[23] Stuart, C. A. and Zhou, H. S., A Variational Problem Related to Self-trapping of an Electromagnetic Field, *Math. Meth. Appl. Sci.* **19**, (1996), 1397-1407. 1

[24] Stuart, C. A. and Zhou, H. S., Applying the Mountain-Pass Theorem to an Asymtotically Linear Elliptic Equation on $\mathbb{R}^N$, *Comm. Partial Differential Equations* **24**, (1999), 1731-1758. 2

[25] Szulkin, A. and Zou, W. Homoclinic Orbits for Asymptotically Linear Hamiltonian Systems, *J. Funct. Anal.* **187**, (2001), 25-41. 2

[26] Willem, M., *Minimax Theorems*, Birkhäuser, (1996). 67, 70, 73