Rafael Nunes Teixeira

Um Modelo Para Orçamentos Mentais: Teoria do Consumidor e Escolhas Imprecisas

Brasília - Brasil

2016, Fevereiro

Rafael Nunes Teixeira

Um Modelo Para Orçamentos Mentais: Teoria do Consumidor e Escolhas Imprecisas

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia pelo Programa de Pós-Graduação em Economia da Universidade de Brasília

Universidade de Brasília – UnB

Faculdade de Administração, Contabilidade e Economia

Programa de Pós-Graduação em Economia

Orientador: José Guilherme de Lara Resende

Brasília - Brasil

2016, Fevereiro

Rafael Nunes Teixeira
Um Modelo Para Orçamentos Mentais:
Teoria do Consumidor e Escolhas Imprecisas/ Rafael Nunes Teixeira. – Brasília - Brasil, 2016, Fevereiro-
59 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: José Guilherme de Lara Resende

Dissertação (Mestrado) – Universidade de Brasília – UnB
Faculdade de Administração, Contabilidade e Economia
Programa de Pós-Graduação em Economia, 2016, Fevereiro.

1. Economia Comportamental 2. Orçamentos Mentais 3. Escolhas Imprecisas I. José Guilherme de Lara Resende II. Universidade de Brasília. III. Faculdade de Administração, Contabilidade e Economia IV. Modelo Para Orçamentos Mentais: Teoria do Consumidor e Escolhas Imprecisas

Rafael Nunes Teixeira

Um Modelo Para Orçamentos Mentais: Teoria do Consumidor e Escolhas Imprecisas

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia pelo Programa de Pós-Graduação em Economia da Universidade de Brasília

Trabalho aprovado. Brasília - Brasil, 29 de fevereiro de 2016:

José Guilherme de Lara Resende
Orientador

Professor: Gil Riella
Convidado 1

Professor
Convidado 2

Brasília - Brasil
2016, Fevereiro

Resumo

Geralmente, a Teoria Econômica pressupõe que dinheiro é um bem fungível. Entretanto, evidências da Economia Comportamental (Thaler (1999), Hastings e Shapiro (2013)) indicam que em vários comportamentos esse pressuposto pode falhar. Uma possível explicação para tal falha é o uso de Orçamentos Mentais, que indica que pessoas classificam seu dinheiro em categorias de consumo. Nesse trabalho desenvolvemos um modelo teórico que absorve a ideia de Orçamentos Mentais e discutimos as consequências desse tipo de pressuposto na Teoria do Consumidor. Além disso, ressaltamos algumas observações comportamentais de tal agente. Isso cria novas interpretações para algumas anomalias como a Reversão de Preferência.

Palavras-chaves: Economia Comportamental. Orçamentos Mentais. Contabilidade Mental. Teoria do Consumidor. Reversão de Preferência. Escolha Imprecisa.

Abstract

Commonly, Economic Theory assumes that money is fungible. However, evidence from Behavioral Economics (Thaler (1999), Shapiro and Hastings (2013)) indicates that in many behaviors this assumption may fail. One possible explanation for this failure is the use of Mental Budgets, which indicates that people classify their money into expenditure categories. In this work, we developed a theoretical model that absorbs the idea of Mental Budgets and discuss the consequences of such assumption for the Consumer Theory. In addition, we highlight some behavioral observations of such agent. This creates new interpretations for some anomalies such as the Preference Reversal.

Key-words: Behavioral Economics. Mental Budgeting. Mental Accounting. Consumer Theory. Preference Reversal. Inaccurate Choice.

Lista de abreviaturas e siglas

MBM	Maximizador com Orçamentos Mentais
WTP	Disposição a Pagar
AR	Regra de Alocação
FAR	Regra de Alocação Completa
CAR	Regra de Alocação Contínua
IAR	Regra de Alocação Crescente
SIAR	Regra de Alocação Estritamente Crescente
PAR	Regra de Alocação Proporcional

Sumário

Introdução

Um dos principais tópicos em Economia Comportamental é o conceito de Contabilidade Mental. Thaler (1999) descreve que: "Contabilidade Mental é um conjunto de operações cognitivas usadas por indivíduos e famílias para organizar, avaliar e manter o controle de suas atividades financeiras" (Thaler (1999), p.183, tradução nossa). Essas operações cognitivas são observadas por meio de vários comportamentos diferentes que apontam que as pessoas não tratam dinheiro como fungível. Isso é, as pessoas comportam-se como se dinheiro não fosse mutualmente intercambiável para toda e qualquer situação.

Um importante desenvolvimento teórico de Contabilidade Mental é a ideia de Orçamentos Mentais. Tal ideia indica que pessoas classificam seu dinheiro pelo tipo do gasto e compram respeitando as restrições impostas por esse dinheiro então classificado. Thaler (1999) argumenta que: "Tanto as fontes quanto os usos de fundos são identificados em sistemas de contabilidades mentais ou reais. Gastos são agrupados em categorias (despesas com a casa, comida, etc.) e os gastos, as vezes, são restritos por orçamentos implícitos ou explícitos." (Thaler (1999), p.183, tradução nossa)

A teoria de Orçamentos Mentais foi inicialmente proposta por Thaler (1985), contudo a análise empírica de Heath e Soll (1996) foi determinante para o seu progresso. Hearth e Soll selecionaram um grupo de estudantes de MBA que haviam demonstrado possuir orçamentos predeterminados para comida, entretenimento e roupas. Em seguida, os autores simularam diferentes situações e analisaram as escolhas hipotéticas feitas pelos sujeitos experimentais. A análise demonstrou que ganhar ou perder um objeto ou quantia de dinheiro associada a uma dessas categorias (e.g. roupas) levava a grandes mudanças no consumo de objetos da mesma categoria (e.g. roupas), mas não levava a mudanças no consumo de objetos em outras categorias (e.g. comida). Normalmente, a teoria econômica tentaria explicar tal padrão de escolha pelas noções de Efeito Renda e Efeito Saciação (utilidade marginal decrescente). Contudo, a análise feita por Heath e Soll indica que as escolhas observadas contradizem tais explicações[1] e, nesse sentido, esse experimento é

[1] Suponha o seguinte padrão de resposta para exemplificar como essas contradições poderiam ocorrer:
Evento 1: Você gastou 50$ em um ingresso de uma partida de futebol (Entretenimento):
(Questão 1) Você compraria um ingresso para o teatro por 25$ na próxima semana? "Não."
Evento 2: Você ganhou o ingresso para a partida de futebol citado acima (Entretenimento):
(Questão 2) Você compraria um ingresso para o teatro por 25$ na próxima semana? "Sim."
Evento 3: Você gastou 50$ em uma vacina contra gripe semana passada:
(Questão 3) Você compraria um ingresso para o teatro por 25$ na próxima semana? "Sim."
O padrão de resposta descrito pelas as questões 1 e 2 poderia ser explicado pelo Efeito Renda, mas reduz o impacto de Efeito Saciação. O padrão nas questões 1 e 3 poderia ser explicados pelo Efeito Saciação, mas reduz o impacto do Efeito Renda. Várias perguntas semelhantes à essas foram feitas e um padrão de resposta similar ao descrito acima foi encontrado. Para maiores informações, veja Hearth e Soll (1996).

uma forte evidência de que os consumidores pensam por meio de múltiplos orçamentos.

Várias pesquisas empíricas analisando esse tipo de comportamento foram desenvolvidas na última década, criando assim novas evidências de que as pessoas agem como se usassem Orçamentos Mentais. Antonides, de Groot e van Raaij (2011) descrevem que grande parte da população holandesa usa Orçamentos Mentais em suas decisões diárias e investigam quais características pessoais poderiam estar relacionadas ao seu uso. Fennema e Penkins (2008) descrevem como alguns treinamentos podem diminuir alguns usos de Orçamentos Mentais. Hastings e Shapiro (2013) analisam o consumo real de gasolina e seus resultados "consistentemente rejeitam a hipótese nula que indivíduos tratam o "dinheiro da gasolina" como fungível com outras rendas" (Hastings e Shapiro (2013), p.1449, tradução nossa). Hastings e Shapiro perceberam que mudanças no preço da gasolina sistematicamente levam a mudanças na qualidade da gasolina consumida. Então, os autores compararam essas mudanças com outras alterações no consumo de gasolina decorrentes de outros tipos de variações (e.g. variação na renda) e concluiram que seus dados não poderiam ser totalmente explicados pelo Efeito Renda. Além disso, seus resultados indicam que um modelo adaptado para Orçamentos Mentais teria o melhor ajuste para seus dados.

Embora a pesquisa empírica evidencie que as pessoas se comportam como se estivessem usando Orçamentos Mentais, modelos teóricos incorporando esse tipo de ideia são quase ausentes na literatura. Alguns estudos tentaram incorporar Orçamentos Mentais, contudo tais modelos focam outros aspectos das escolhas (e.g. preferência e auto-controle). Por exemplo, Thaler (1985) propõe um modelo com Utilidade de Transação e vários orçamentos, mas o autor não descreve muitas consequências teóricas [2] de se assumir múltiplos orçamentos. De forma semelhante, David Just (2013) apresenta um modelo com vários orçamentos e uma utilidade dependente do contexto, mas também foca a utilidade e não a classificação de dinheiro em categorias.

O trabalho aqui apresentado desenvolve um modelo teórico que capta a ideia de Orçamentos Mentais e investiga minuciosamente as suas consequências na Teoria do Consumidor. Ao desenvolver um modelo formal para Orçamentos Mentais, somos capazes de compreender implicações teóricas e empíricas que podem ser usados para verificar se a tal teoria é apropriada. Além disso, um modelo formal pode levar a novas intuições sobre o comportamento de pessoas que percebem o dinheiro como infungível.

O modelo proposto difere do tradicional problema do consumidor pela forma na qual o agente formula sua restrição orçamentária. Além disso, o modelo descreve a ideia de Orçamentos Mentais de um modo semelhante ao apresentado em Thaler (1985) e Just (2013), mas difere de tais artigos devido à sua formalização cuidadosa e ao fato de assumir as preferências tradicionais (i.e. transitiva e completa). Normalmente, a maior parte das

[2] Thaler (1985) descreve muitas consequências práticas de assumir múltiplos orçamentos

anomalias descritas pela Economia Comportamental estão associadas a uma inconsistência na ordenação da preferência entre objetos. Uma vez que assumimos as preferências tradicionais, seremos capazes de observar as implicações unicamente decorrentes de Orçamentos Mentais. Esta é uma nova maneira de proceder e cria novas interpretações para alguns fenômenos já discutidos na literatura (e.g. Reversão de Preferência). Para melhor identificar tais fenômenos ligados aos Orçamentos Mentais, criaremos o termo Escolhas Imprecisas. Discutiremos também que essa distinção entre uma inconsistência na ordenação da preferência e uma inconsistência na percepção das restrições pode ser fundamental para os melhores desenhos experimentais.

A próxima seção descreve a configuração geral do modelo. A segunda seção descreve o problema do consumidor usando a configuração descrita. Na terceira seção, vamos mostrar as consequências gerais de considerar este tipo de agente na Teoria do Consumidor. A quarta seção analisa comportamentos associados a esse tipo de agente e define o conceito de Escolha Imprecisa, contrastando tal conceito com uma Reversão de Preferência. Na quinta seção, há uma discussão sobre futuras modificações para o modelo apresentado. A última seção é uma pequena conclusão geral.

1 Configuração para Orçamentos Mentais

Considere o Conjunto de Consumo, $X = \mathbb{R}^n_+$, onde um vetor $\mathbf{x} \in X$ representa a cesta de consumo e x_i é a quantidade consumida do bem na coordenada i do vetor $\mathbf{x}$. O consumidor tem uma relação de preferência sobre esse Conjunto de Consumo, $\succsim \subseteq X \times X$. Durante o texto consideraremos os seguintes axiomas sobre $\succsim$:

- **A1-Completa:** Para todo $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \in X$, ou $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$ ou $\mathbf{y} \succsim \mathbf{x}$.
- **A2-Transitiva:** Para qualquer $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ e $\mathbf{z} \in X$, se $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$ e $\mathbf{y} \succsim \mathbf{x} \implies \mathbf{x} \succsim \mathbf{z}$.
- **A3-Contínua:** Para todo sequência $\{(\mathbf{x}^n, \mathbf{y}^n)\}_{n=1}^{\infty}$ com $\mathbf{x}^n \succsim \mathbf{y}^n$ para todo n, $\mathbf{x} = lim_{n\to\infty}\mathbf{x}^n$ e $\mathbf{y} = lim_{n\to\infty}\mathbf{y}^n \implies \mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$.

Quando necessário, os seguintes axiomas serão usados:

- **A4-Fortemente Monótona:** Para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, se $\mathbf{x} \gg \mathbf{y}$ (i.e. $x_i > y_i \,\forall\, i$) $\implies \mathbf{x} \succ \mathbf{y}$
- **A5-Localmente Não Saciada:** Para todo $\mathbf{x} \in X$ e todo $\epsilon > 0$, existe um $\mathbf{y} \in X$ tal que $||\mathbf{y} - \mathbf{x}|| < \epsilon$ e $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$.

Assumindo os axiomas **A1**, **A2** e **A3**, a relação de preferência, $\succsim$, pode ser representada por uma função de utilidade contínua, $U : X \to \mathbb{R}$ (Debreu (1954)).

Nos modelos tradicionais, dado um vetor de preços, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$, e uma riqueza, $w \in \mathbb{R}_+$, o Conjunto Orçamentário, $B(\mathbf{p}, w) = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in X, \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \leq w\}$, é definido para descrever as restrições de recursos do agente. Diferentemente, um agente com Orçamentos Mentais tem que classificar seu dinheiro em categorias e identificar quais objetos cada categoria possui. O agente portanto possui uma **Categorização de Despesas** identificando a **Categoria de Despesa** para cada objeto e uma **Regra de Alocação** identificando as **Alocações Mentais**, que representam a quantidade de dinheiro para cada categoria:

Definições:

- **D1-Categorização de Despesas:** Dado um $n \in \mathbb{N}$, uma **Categorização de Despesas** $\mathcal{J}$ é uma partição do conjunto $\{1, ..., n\}$. Um subconjunto qualquer $J \in \mathcal{J}$ é uma **Categoria de Despesa**.
- **D2-Regra de Alocação** (AR)**:** A **Regra de Alocação** é uma função $W : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{J} \to \mathbb{R}_+$. $W(w, J)$ é uma **Alocação Mental** e define a renda destinada à categoria J quando a riqueza do consumidor é w.

- **D3-Regra de Alocação Completa** (FAR)**:** Uma AR é completa quando $\sum_{J \in \mathcal{J}} W(w, J) = w$.

As definições **D1**, **D2** e **D3** são suficientes para definir um problema de maximização para um agente com Orçamentos Mentais:

$\text{Max}_{x \in X} U(\mathbf{x})$ s.a. $\sum_{i \in J} x_i p_i \leq W(w, J)\ \forall J \in \mathcal{J}$

Definiremos as seguintes propriedades uma vez que serão de grande utilidade nas próximas seções:

- **D4-Regra de Alocação Contínua** (CAR): $W(.)$ é uma função contínua.
- **D5-Regra de Alocação Crescente** (IAR): $\forall w', w \in \mathbb{R}_+$, tal que $w' > w \implies W(w', J) \geq W(w, J) \forall J \in \mathcal{J}$.
- **D6-Regra de Alocação Estritamente Crescente** (SIAR): $\forall w', w \in \mathbb{R}_+$, tal que $w' > w \implies W(w', J) > W(w, J) \forall J \in \mathcal{J}$.
- **D7-Regra de Alocação Proporcional** (PAR):$\exists \beta_J \geq 0$, tal que $\forall w \in \mathbb{R}_+, W(w, J) = \beta_J w$[1].

A Categorização de Despesas é o resultado de um processo cognitivo e absorve a ideia de que "despesas são agrupadas em categorias". A Regra de Alocação define as restrições para cada Categoria de Despesa. A Regra de Alocação é considerada Completa para melhor definir as restrições e evitar situações em que o agente cometeria um erro na sua alocação de recursos. Regras definindo o que poderia ser feito com tais erros podem ser assumidas, mas não serão discutidas nesse trabalho.

D4-D5-D6-D7 são propriedades descrevendo uma Regra de Alocação como funções bem comportadas. Se o agente usa uma CAR, uma pequena mudança em w leva a pequenas mudanças em todas as Alocações Mentais. Se uma IAR ou uma SIAR é assumida, toda Alocação Mental é, respectivamente, não decrescente ou cresceste em w. Uma PAR indica que cada categoria sempre possui uma razão exata da renda. É fácil verificar que toda SIAR é uma IAR e, se a Regra de Alocação é Completa, toda IAR é uma CAR[2] uma vez que pequenas mudanças em w levariam a mudanças menores ou iguais em cada Alocação Mental. Além disso, uma PAR é uma IAR e, se $\forall J \in \mathcal{J}, \beta_J > 0$, uma PAR é uma SIAR.

Colocando a Categorização de Despesas em uma perspectiva comportamental, se um objeto não fosse classificado em qualquer categoria, seria possível observar essa "não

[1] E fácil perceber que se a Regra de Alocação é Completa e Proporcional, então $\sum_{j=1}^{m} \beta_j = 1$.
[2] A prova é encontrada no anexo.

categoria” como uma categoria por si[3], sendo possível representá-la como um conjunto da partição. Considerar a Categorização de Despesas como não ambígua, i.e. cada objeto sendo membro de uma e apenas uma categoria, pode ser um forte pressuposto em um momento ex-ante. Por exemplo, estudos sobre similaridade (e.g. Tversky e Gati (1978)) mostram que objetos podem ter várias classificações em uma perspectiva psicológica. Além disso, Cheema e Soman (2006) descrevem ambiguidades e mudanças no que poderia ser identificado como a Categoria de Despesa de um objeto. Contudo, no momento da decisão, um objeto observado em mais de uma Categoria de Despesa levaria a comparações indiretas entre todos os objetos dessas categorias, o que poderia fazer com que essas categorias possam ser tratadas comportamentalmente como uma só.

As Regras de Alocação descritas aqui são úteis para modelar o comportamento de agentes que tratam o dinheiro como infungível. Apesar de existir várias evidências empíricas mostrando que as pessoas têm diferentes orçamentos para diferentes tipos de gastos, não há evidências indicando que a Regra de Alocação é relacionada apenas à riqueza ou que ela possa ser definida por funções bem comportadas. Mais que isso, há várias evidências mostrando (e.g., Milkman e Beshears (2009), Levav e McGraw(2009)) que diferentes fontes de riquezas e diferentes contextos podem levar a diferentes usos do dinheiro. Isso implica que é provável existir diferentes valores para uma Alocação Mental partindo de uma mesma riqueza. Algumas dessas situações são discutidas na quinta seção, mas não serão incorporadas nesse trabalho.

Apesar de haver outras possíveis maneiras de descrever a Regra de Alocação ou a Categorização de Despesas, os simples pressupostos descritos nessa e na próxima seção são suficientes para termos um problema do consumidor bem definido e apresentar um modelo similar a Thaler (1985) e Just (2013). O modelo ainda fornece uma estrutura formal para se pensar o processo geral de Orçamentos Mentais, o que não é observado em nenhum outro trabalho. Tal formalização permite pensar possíveis modificações para se incorporar outros comportamentos. Iremos discutir isso durante a quinta seção.

[3] Ao menos, todos os objetos não classificados tratados de maneira semelhante numa situação descrevendo gastos formariam uma dessas categorias.

2 Orçamento Mental na Teoria do Consumidor: O Maximizador com Orçamentos Mentais (MBM)

O agente discutido nesse trabalho é nomeado Maximizador com Orçamentos Mentais (MBM). O MBM é um agente que possui uma Função de Utilidade contínua, $U : X \rightarrow \mathbb{R}$, uma Categorização de Despesas $\mathcal{J}$, e uma Regra de Alocação Completa $W(.)$.

Portanto, dado um MBM, um vetor de preços, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$, e uma riqueza, $w \in \mathbb{R}^n_{+}$, o **Conjunto Orçamentário Categorizado** é definido por:

$$CB(\mathbf{p}, w) = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in X, \textstyle\sum_{i \in J} x_i p_i \leq W(w, J) \ \forall J \in \mathcal{J}\}$$

Temos todos os conceitos necessários para definir o problema do consumidor de um MBM:

$$\text{Max}_{x \in X} U(\mathbf{x}) \quad \text{s.a.} \quad \sum_{i \in J} x_i p_i \leq W(w, J) \, \forall J \in \mathcal{J} \tag{2.1}$$

Como $\mathcal{J}$ é uma partição, cada $i \in \{1, ..., n\}$ é parte de uma única Categoria de Despesa e não há ambiguidades nas restrições. Portanto, o Conjunto Orçamentário Categorizado define um conjunto compacto e, como $U(.)$ é uma função contínua, sempre existe uma solução para esse problema.

Assumindo as condições necessárias e suficientes para se usar o método de Lagrange temos:

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = U(x) - \textstyle\sum_{J \in \mathcal{J}} \lambda_J (\displaystyle\sum_{i \in J} x_i p_i - W(w, J) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$$

As condições de primeira ordem são:

$$\delta \mathcal{L}(x,\lambda,\mu) / \delta x_i = \delta U(x) / \delta x_i - \lambda_J p_i + \mu_i ; \ \forall i \in J$$

Se $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ é a solução do Langrangiano tal que x_a^*,$x_b^*, \lambda_J > 0$ são coordenadas de $\mathbf{x}^*$ e $\boldsymbol{\lambda}^*$, e $a, b \in J$ temos:

$$\delta U(x^*) / \delta x_a^* = \lambda_J p_a \quad \text{e} \quad \delta U(x^*) / \delta x_b^* = \lambda_J p_b$$

$^{\delta U(x^*)/\delta x_a^*}\big/_{\delta U(x^*)/\delta x_b^*} = {}^{p_b}\!/_{p_a}$, $\forall a$ e $b \in J$

Em seguida, exemplificaremos o problema do consumidor utilizando um agente MBM:

Exemplo 1 - (Ana)

Ana tem uma função de utilidade $U(.) = x^{0.8}y^{0.2} + z + \frac{1}{2}t$, na qual x representa comida, y bebida, z casa noturna e t teatro. Ana categoriza dois tipos de gastos, alimentação $F = \{x, y\}$ e entretenimento $E = \{z, t\}$. Considerando uma riqueza de 50, $w = 50$, sua Regra de Alocação é tal que ela aloca 20$ para entretenimento e 30$ para alimentação. Os preços são $p_x = 2$, $p_y = 1$, $p_z = 1$,$p_t = 0.6$. A maximização de utilidade de Ana é:

$$\text{Max}_{x,y,z,t\in R_+} x^{0.8}y^{0.2} + z + \frac{1}{2}t$$
$$\text{s.a } 2x + y \leq 30$$
$$z + 0.6t \leq 20$$

A escolha ótima de Ana nessa situação é $x^* = 12, y^* = 6, z^* = 20, t^* = 0$.

A Categorização reduz o nível de utilidade de Ana. Se Ana tivesse apenas um orçamento, sua utilidade seria igual a 50. Nesta situação, o nível de utilidade de Ana é quase 30. No entanto, Ana está escolhendo sua melhor cesta. Isto é, um agente com Orçamentos Mentais percebe um conjunto diferente de cestas factíveis (CB e não B), mas, tendo em conta este conjunto de cestas factíveis, o agente escolhe a melhor opção.

Deve-se notar que Ana iria gastar todo o seu dinheiro indo à casa noturna se o dinheiro fosse tratado de forma regular. Na situação do MBM, os objetos não estão competindo para o mesmo recurso, levando-a a consumir outros bens. Este exemplo ilustra um importante aspecto hipotético de Orçamentos Mentais (Thaler e Shefrin (1981), Shefrin e Thaler (1992)): "auto-controle"[1]. A Categorição de Despesas cria um compromentimento com alguns tipos de consumos[2].

Este é um comportamento associado com esta tipo de configuração. Antes de

1 Ao mesmo tempo, Orçamentos Mentais podem levar a comportamentos estranhos, uma vez que poderiam alocar todo o seu dinheiro em um único objeto, ilustrando o que poderia ser o "oposto de auto-controle"

2 Similar a uma pessoa que tem Petit Gateau como sua comida favorita mas escolhe comer um bife durante o almoço pois Petit Gateau não é um alimento para tal ocasião. Um agente que se comporta dessa maneira pode não ter dinheiro alocado para a sobremesa. Outra possibilidade é que ele está escolhendo entre diferentes categorias (Furtado, Nascimento e Riella (2015))

explorar outros comportamentos relacionados a Orçamentos Mentais, vamos investigar as suas consequências teóricas.

3 Consequências na Teoria do Consumidor

Como a Teoria do Consumidor tradicional iria se alterar se consideramos um agente MBM? Nessa seção definiremos a Correspondência de Demanda, a Utilidade Indireta e o Problema de Minimização do Dispêndio para um MBM. A estrutura formal bem definida nos permite discutir em quais circunstâncias seria possível preservar algumas das propriedades obtidas para o consumidor tradicional para cada um desses problemas. O modelo desenvolvido aqui, portanto, permite novas observações sobre as possíveis consequências na teoria econômica de se assumir um agente que não trata dinheiro como fungível.

As demonstrações para essa seção estão no anexo.

3.1 Implicações na Correspondência de Demanda

A Correspondência de Demanda (Walrasiana), $D : \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}^n_{+} \rightrightarrows \mathbb{R}^n_{+}$, $D(\mathbf{p}, w) \rightrightarrows \mathbf{x}$, é a regra que caracteriza os vetores ótimos de consumos para cada vetor de preço, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$, e riqueza, $w \in \mathbb{R}_+$. Uma vez que o teorema de Weirstrass garante a existência de um máximo para o problema de um consumidor MBM (veja **Equação 2.1**), a correspondência, $D(\mathbf{p}, w)$, é sempre bem definida.

No problema de consumidor tradicional, se assumirmos que $U(.)$ é contínua e representa uma preferência Localmente Não Saciável, a Correspondência de Demanda satisfaz as propriedades abaixo. Após cada propriedade, discutiremos sobre quais condições elas contínuam válidas para a Correspondência de Demanda do MBM.

1. **Homogeneidade de Grau Zero em** $(\mathbf{p}, w)$. A Correspondência de Demanda de um MBM usando uma PAR satisfaz essa propriedade.

2. **Lei de Walras**: $\mathbf{p} \times \mathbf{x} = w \; \forall D(\mathbf{p},w)$. A Correspondência de Demanda de um MBM com uma preferência Fortemente Monótona[1] satisfaz essa propriedade.

3. Se a preferência, $\succsim$, é convexa (tal que $U(.)$ é quase-côncava) então $D(\mathbf{p}, w)$ **é um conjunto convexo**. Se $\succsim$ é estritamente convexa (tal que $U(.)$ é estritamente quase-côncava) então $D(\mathbf{p}, w)$ **consiste em um único elemento.** A convexidade e unicidade de $D(\mathbf{p}, w)$ sobre tais condições ainda são válidas para a Correspondência de Demanda de um MBM.

[1] É possível enfraquecer essa suposição. Por exemplo, assumindo que para cada $J \in \mathcal{J}$ existe um objeto i tal que para qualquer $\mathbf{x} \in X$ um aumento nesse i levaria a um aumento na utilidade. Outra possibilidade é considerar uma preferências que é "localmente não saciável" em cada categoria.

Uma PAR é uma forte suposição para uma Regra de Alocação mas é necessária para se manter a Homogeneidade de Grau Zero. Discutiremos mais sobre isso na próxima seção, 3.2.

Dada uma Regra de Alocação Completa, a Lei de Walras é satisfeita se uma preferência Fortemente Monótona[2] é assumida. Se a Lei de Walras não está satisfeita, a Regra de Alocação está atribuindo dinheiro excessivo para a Alocação Mental de uma Categoria de Despesa cujos objetos têm um ponto de saciação (i.e. um aumento do consumo nesta categoria não irá melhorar a utilidade, mas ainda há dinheiro para ser utilizado em objetos desta categoria). Veja o Exemplo 2 abaixo:

Exemplo 2 - (Lei de Walras)

Considere um agente que consome dois objetos, x e y, e com a seguinte função de utilidade: $U = Min\{x, y\}$. Os preços de x e y são $p_x = p_y = 1$. A Categorização de Despesas do agente divide $X = \{x, y\}$ em $J = \{x\}$ e $K = \{y\}$. A Regra de Alocação é tal que $W(w, J) = w\ \forall w \in [0, 1)$, $W(w, J) = 1\,\forall w \geq 1$ e $W(w, K) = 0 \forall w \in [0, 1)$, $W(w, K) = w - 1 \forall w \geq 1$.

Se $w = 0.5$, $W(w, J) = 0.5$ e $w(w, K) = 0$. As cestas ótimas são quaisquer entre $[0, 0]$ e $[0.5, 0]$.

Nesse exemplo, a Regra de Alocação está atribuindo dinheiro para ser gasto somente em x, mas o consumo de apenas x não leva a aumentos na utilidade. Portanto, não é necessariamente ótimo gastar completamente a renda.

É possível redefinir a Regra de Alocação a fim de descrever um fim para esse dinheiro extra. Por exemplo, este dinheiro extra poderia ser descrito como uma diferente fonte de poupança. Outra possibilidade é alocar o dinheiro extra para categorias específicas, a exemplo do que poderia acontecer com "rendas inesperadas" (*windfalls*). Evidências experimentais (e.g. Milkman e Beshears (2009)) descrevem que *windfalls* têm elevada propensão em serem gastos em determinadas classes de objetos (gastos "superficiais").

3.2 Implicações na Utilidade Indireta

A função de Utilidade Indireta descreve o nível máximo de utilidade que pode ser alcançado dado um vetor de preços, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$, e uma riqueza, $w \in \mathbb{R}_+$. Para o MBM,

[2] Ver nota 1.

$v : \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}$ é definida como:

$$v(\mathbf{p}, w) : \ \text{Max}_{x \in X} U(\mathbf{x}) \quad \text{s.a.} \quad \sum_{i \in J} x_i p_i \leq W(w, J) \forall J \in \mathcal{J} \tag{3.1}$$

No problema do consumidor tradicional, se assumirmos que $U(.)$ é contínua e que representa uma preferência Localmente Não Saciável, a função de Utilidade Indireta satisfaz as propriedades abaixo. Depois de cada propriedade, discutimos as condições em que elas ainda são válidas para Utilidade Indireta do MBM:

1. **Homogênea de Grau Zero em $(\mathbf{p}, w)$.** A Utilidade Indireta de um MBM usando uma PAR satisfaz esta propriedade.

2. **Contínua em** $(\mathbf{p}, w)$. A Utilidade Indireta de um MBM usando uma CAR satisfaz esta propriedade.

3. **Estritamente Crescente em w.** A Utilidade Indireta de dois MBMs diferentes satisfazem esta propriedade: um MBM com uma preferência Localmente Não Saciável e uma SIAR ou um MBM com uma preferência Fortemente Monótona e uma IAR.

4. **Decrescente em p**. Não existem requisitos adicionais necessários.

5. **quase-convexa em $(\mathbf{p}, w)$.** A Utilidade Indireta de um MBM não necessariamente mantem esta propriedade para qualquer Regra de Alocação assumida.

A não Homogeneidade de Grau Zero na Utilidade Indireta quando o MBM não usa uma PAR leva a observações interessantes. A utilidade de um MBM pode até subir quando $\mathbf{p}$ e w se alteram pela a mesma proporção (em algumas situações, até se w aumenta menos que $\mathbf{p}$). Isso pode ser associado à Ilusão Monetária (ver Shafir, Diamond, Tversky (1997) para uma discussão interessante desse tópico). Essa ilusão descreve uma tendência de agentes preferirem uma situação onde há um aumento do salário (ou riqueza) acompanhado por uma aumento ainda maior no nível de preços em detrimento de se manter na situação sem mudanças, e.g. $v(1.07w, 1.1\mathbf{p}) > v(w, \mathbf{p})$. Veja o **Exemplo 3** abaixo:

Exemplo 3 - (Homogeneidade de Grau Zero)

Suponha um agente que consome dois objetos, x e y, com a seguinte função de utilidade: $U = x + 2y$. Os preços de x e y são $p_x = p_y = 1$. A Categorização de Despesas do agente divide $X = \{x, y\}$ em $J = \{x\}$ e $K = \{y\}$. A Regra de Alocação é tal que $W(w, J) = w \quad \forall w \in [0, 1)$, $W(w, J) = 1 \; \forall w \geq 1$ e $W(w, K) = 0 \; \forall w \in [0, 1)$, $W(w, K) = w - 1 \; \forall w \geq 1$.

Se $w = 1$. Qualquer $\lambda < 1$ terá $v(\lambda \mathbf{p}, \lambda w) = v(\mathbf{p}, w)$. Qualquer $\lambda > 1$, $v(\lambda p, \lambda w) > v(p, w)$.

A Regra de Alocação pode começar atribuindo dinheiro para categorias cujo consumo de seus objetos leva a um menor aumento de utilidade se comparados ao consumo de objetos preço equivalentes de outras categorias. Com o aumento da riqueza, a Regra de Alocação pode atribuir mais dinheiro para essas outras categorias, fazendo assim com que um aumento da renda junto a um aumento no nível dos preços (mesmo com um menor aumento na renda) seja desejável. Essa situação pode exemplificar um Ilusão Monetária como descrito acima: Comparando quantidades similares[3], y é preferível à x. Nessa situação, um aumento da riqueza leva a uma alocação proporcionalmente maior para y e, mesmo que haja um aumento ainda maior nos preços, o nível de utilidade pode subir.

A continuidade da $v(\mathbf{p}, w)$ para um MBM que usa uma CAR mostra que pouco é necessário para obter uma Utilidade Indireta bem-comportada. No entanto, uma CAR não garante que a Utilidade Indireta seja crescente em w. Veja o **Exemplo 4** abaixo:

Exemplo 4 - (Estritamente Crescente em w)

Considere um agente que consome dois objetos, x e y, e com a seguinte função de utilidade:$U = x^{0.99}y^{0.1}$. Os preços de x e y são $p_x = p_y = 1$. Categorização de Despesas do agente divide $X = \{x, y\}$ em $J = \{x\}$ e $K = \{y\}$. A Regra de Alocação é tal que $W(w, J) = w/2 \quad \forall w \in [0, 2)$, $W(w, J) = 2/w \; \forall w \geq 2$ e $W(w, K) = w/2 \; \forall w \in [0, 2)$, $W(w, K) = (w - (2/w) \; \forall w \geq 2$.

Neste exemplo, a Regra de Alocação é tal que um aumento de w, quando $w > 2$, levará a um aumento do consumo em y mas a uma diminuição de x. Uma vez que a utilidade marginal de x é maior do que a utilidade marginal de y, esta variação leva a uma diminuição no nível de utilidade. Além disso, a cesta ótima quando $w = 2$ não é factível para qualquer $w \neq 2$, portanto o nível máximo de utilidade que esse agente pode atingir é quando $w = 2$, i.e. $v(p, 2) > v(p, w) \, \forall w \neq 2$.

Mesmo quando um MBM possui uma IAR, a Utilidade Indireta pode ter Intervalos de Saciação e em tais intervalos mudanças na riqueza ou nos preços não implicam mudanças na utilidade. Por exemplo, no **Exemplo 2**, para toda riqueza tal que $0 \leq w \leq 1$ a utilidade é igual a zero, apenas quando a riqueza é tal que $w > 1$, quando há um aumento

[3] Os preços são os mesmos.

na utilidade.

A terceira propriedade descreve as situações em que $v(\mathbf{p}, w)$ é Estritamente Crescente em w e mostra em quais situações o MBM não possui um Intervalo de Saciação. Contudo, como descrito na seção anterior, a Lei de Walras não é necessariamente satisfeita quando a preferência é Localmente Não Saciável e o MBM usa uma SIAR.

A quinta propriedade mostra que a Utilidade Indireta não é necessariamente quase-convexa para qualquer Regra de Alocação descrita na seção 1. Isso demonstra que para muitos casos o padrão de escolha associado a um MBM não segue as mesmas regularidades de um agente que não usa Orçamentos Mentais. Nesse sentido, esse padrão não pode ser representado por uma preferência que permaneça transitiva, completa, contínua e independente do preço. A Regra de Alocação muda o conjunto de cestas factíveis para cada preço e riqueza e define um padrão de escolha diretamente relacionada a esses fatores. Contudo, um agente MBM em uma situação fora do mercado (diretamente comparando cestas, sem o uso de dinheiro) teria uma preferência bem definida. Por exemplo, no **Exemplo 4**: Com preços $p_x = 0.5$, $p_y = 0.5$ e riqueza $w = 2$, o agente iria consumir $(2, 2)$. Ao se mudar os preços para $p_x^{'} = 1$ e $p_y^{'} = 1$, e riqueza $w^{'} = 4$, o agente iria consumir $(1, 3)$. Mas, ao se perguntar diretamente qual dessas cestas o agente preferiria, ele iria preferir estritamente $(1, 3)$ em detrimento de $(2, 2)$. Diferentes escolhas são observadas com diferentes preços e riquezas.

3.3 Implicações no Problema de Minimização do Dispêndio

O Problema de Minimização do Dispêndio de um MBM encontra a mínima quantidade de dinheiro que seria necessário para se comprar uma cesta que atinja um nível predeterminado de utilidade ao mesmo tempo que satisfaça as restrições impostas pela Regra de Alocação. A função é normalmente definida por $e : \mathbb{R}^n_{++} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n_{+}$ onde $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ é conjunto definido pelos o níveis de utilidade maiores $U(0)$ e que $U(.)$ pode atingir, i.e. $\mathcal{U} := \{u | u = U(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in R^n_{+}, U \geq U(0)\}$. Para o MBM, devemos tratar de dois problemas que não aparecem na Minimização do Dispêndio tradicional.

Primeiro, w não é necessariamente igual à soma dos gastos, $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$, uma vez que a Lei de Walras não é satisfeita. Observe o seguinte exemplo:

Exemplo 5 - (Lei de Walras e Limite Superior da Utilidade)

Suponha um agente que consuma dois bens, x e y, com a função de utilidade $U = x - y$. Os preços de x e y são $p_x = p_y = 1$. A Categorização de Despesas divide X em $J = \{x\}$ e $K = \{y\}$, e a Regra de Alocação é tal que $W(w, J) = w/2\ \forall w \in [0, 2)$,

$W(w,J) = 1 \forall w \geq 2$ e $W(w,K) = w/2 \forall w \in [0,1)$, $W(w,K) = w - 1 \forall w \geq 2$.

Queremos definir a Minimização do Dispêndio de uma maneira que o exemplo acima é descrito como $e(p,1) = 2$, mas $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 1$. Por esse motivo, assumimos que o agente pode alocar recursos na forma de $d \in \mathbb{R}_+$. d é usado para ilustrar o dinheiro que o agente não gasta devido a um erro na alocação (como descrito na segunda propriedade da seção 3.1). Nesse sentido, d incorpora a diferença entre w e $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$. Veja a **Equação 3.2** abaixo para um melhor entendimento.

Além disso, há níveis de utilidade que o agente não podeira atingir devido as suas restrições mentais. No **Exemplo 5**, o nível de utilidade que o agente pode atingir é limitado por 1, portanto a função de dispêndio tradicional desse agente não teria solução para qualquer $u > 1$. Para evitar esse tipo de situação, definimos o Problema de Minimização do Dispêndio na região onde ele tem sempre solução. Então, dado um vetor de preço, $\mathbf{p}^* \in R^n_{++}$, define-se $\hat{u} := Sup\{v(\mathbf{p}^*, w) \forall w \in R_+\}$ onde $v(\mathbf{p}^*, w)$ é a Utilidade Indireta do mesmo MBM. Muda-se $\mathcal{U}$ para $\mathcal{U}'(\mathbf{p}^*) := \{u \in R | U(0) \leq u < \hat{u}\}$. Então, a Minimização do Dispêndio do MBM é definida como a função $e : \mathbb{R}^n_{++} \times \mathcal{U}' \to \mathbb{R}_+$:

$$e(\mathbf{p}, u): \ \mathrm{Min}_{\mathbf{x} \in X, d \in \mathbb{R}_+} d + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \quad s.a \quad U(\mathbf{x}) \geq u \tag{3.2}$$

$$\sum_{i \in J} x_i p_i \leq W(d + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i, J) \forall J \in \mathcal{J}$$

No problema do consumidor tradicional, se assumirmos que $U(.)$ é contínua e que representa uma preferência Localmente Não Saciável, a Minimização do Dispêndio satisfaz as propriedades abaixo. Depois de cada propriedade, discutimos as condições em que elas ainda são válidas para Utilidade Indireta do MBM:

1. **Zero Quando u Assume o Menor Nível de Utilidade**. Não existem requisitos adicionais.

2. **Homogênea de Grau 1 em $\mathbf{p}$**. A Minimização do Dispêndio de um MBM usando uma PAR satisfaz essa propriedade.

3. **Contínua em $(\mathbf{p}, u)$.** A Minimização do Dispêndio de dois MBMs diferentes satisfazem esta propriedade: uma MBM com uma preferência Localmente Não Saciável e uma SIAR ou um MBM com preferência Fortemente Monótona e uma IAR.

4. **Para todo $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$, Estritamente Crescente em u.** A Minimização do Dispêndio de um MBM usando uma CAR satisfaz essa propriedade.

5. **Crescente em p.** A Minimização do Dispêndio de um MBM usando uma IAR satisfaz essa propriedade.

6. **Côncavo em p.** A Minimização do Dispêndio de um MBM não necessariamente mantem esta propriedade para qualquer Regra de Alocação assumida.

Não há muitos comentários a serem feitos sobre as propriedades um, dois, cinco e seis. Vamos destacar a relação entre as propriedades três e quatro e a Utilidade Indireta.

A continuidade da função de Dispêndio é atingida uma vez se assume uma Preferência Fortemente Monótona e uma IAR ou uma preferência Localmente Não Saciável e uma SIAR. Estes requisitos são diferentes dos necessários para alcançar a continuidade da Utilidade Indireta. Veja o **Exemplo 2**, a Regra de Alocação é Crescente e $e(\mathbf{p}, 0) = 0$ mas $e(\mathbf{p}, \epsilon) > 1\, \forall \epsilon > 0$. A Utilidade Indireta é contínua, mas o problema Minimização de Dispêndio do mesmo agente não é.

A Minimização Despesas é estritamente crescente em u uma vez que uma CAR é assumida. Deve-se notar que os pressupostos exigidos pela Utilidade Indireta (propriedades dois e três) e aquelas exigidas pelo problema Despesas Minimização (propriedades três e quatro) são simétricas. Isso é importante para a relação de dualidade entre a função Dispêndio e a Utilidade Indireta.

3.4 Dualidade

Normalmente, se um consumidor tem uma função de utilidade contínua e crescente estritamente então dado $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$,$w \in \mathbb{R}_{++}$ e $u \in \mathcal{U}$, a seguinte relação de dualidade é válida: $v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = u$ e $e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, w)) = w$. Em que condições essas relações são satisfeitas na configurações de um MBM?

Assumir uma CAR não garante que o Função de Utilidade Indireta de MBM seja estritamente crescente em w. Nesse caso, é possível ter vários valores de riqueza, w_n, atingindo o mesmo nível de utilidade, $v(\mathbf{p}, w_1) = v(\mathbf{p}, w_2) = u$ e $w_1 \neq w_2$. Nestas situações, o valor da Minimização do Dispêndio seria o mínimo entre estes diferentes valores de riqueza, i.e. dado um u, defina $W := \{w_n \in R_+ | v(\mathbf{p}, w_n) = u\}$ e nós teremos $e(\mathbf{p}, u) = min\{W\}$. Portanto, $e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, w))$ não é necessariamente w. Contudo, provamos[4] que uma CAR garante que $e(p, u)$ é estritamente crescente em u e que se $(\mathbf{x}^*, d^*)$ é o argumento mínimo de $e(\mathbf{p}, u)$, então $U(\mathbf{x}^*) = u$. Isso é suficiente para provar que $v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = u$.

Somente quando o agente utiliza uma IAR ou SIR e tem, respectivamente, preferências Fortemente Monótonas ou Localmente Não Saciáveis, $v(\mathbf{p}, w)$ é estritamente crescente em w. Como descrevemos na segunda seção, cada SIAR é uma IAR, e cada IAR é uma CAR. Então, quando a Utilidade Indireta é estritamente crescente em w, a Minimização do Dispêndio do mesmo agente é estritamente crescente em u.

4 Anexo da Seção 3.3.

Proposição: Seja $v(\mathbf{p}, w)$ e $e(\mathbf{p}, u)$ a Utilidade Indireta e a Minimização do Dispêndio para um MBM com uma IAR e uma função de utilidade contínua representando uma preferência Fortemente Monótona. Portanto, $\forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}, w \in \mathbb{R}_+$ e $u \in \mathcal{U}'$, teremos:

1)$e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, w)) = w$,

2)$v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = u$.

Prova:

(1) Fixe $(\mathbf{p}, w)$. Por definição $e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, w)) \leq w$. Suponha que $e(\mathbf{p}, u) < w$ onde $u = v(\mathbf{p}, w)$. Como $e(.)$ é contínua, existe um $\epsilon > 0$ tal que $e(\mathbf{p}, u + \epsilon) < w$. Defina $w_\epsilon = e(\mathbf{p}, u + \epsilon)$, por definição $v(\mathbf{p}, w_\epsilon) \leq u + \epsilon$. Como $v(.)$ é estritamente crescente em w, isso é uma contradição: $v(\mathbf{p}, w) = u > v(\mathbf{p}, w_\epsilon) = u + \epsilon > u$. Portanto, $e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, w)) = w$.

(2) Fixe $(\mathbf{p}, u)$. Por definição $v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) \geq u$. Suponha que $v(\mathbf{p}, w) > u$ onde $e(\mathbf{p}, u) = w$. Como $v(.)$ é contínua, existe um $\epsilon > 0$ tal que $v(\mathbf{p}, w - \epsilon) > u$. Defina $u_\epsilon = v(\mathbf{p}, w - \epsilon)$, por definição $e(\mathbf{p}, u_\epsilon) \leq w - \epsilon$. Como $e(.)$ é estritamente crescente em u, isso é uma contradição: $e(\mathbf{p}, u_e) > e(\mathbf{p}, u)$ e $e(\mathbf{p}, u_\epsilon) \leq w - \epsilon < w = e(\mathbf{p}, u)$. Portanto, $v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = u$.

4 O Comportamento do MBM

Mostramos que um agente MBM pode sofrer de ilusão monetária, ter problemas de auto-controle e ter uma ”ordenação de preferência” diretamente dependente dos preços e da riqueza. Nesta seção, vamos discutir e definir a ideia de Escolhas Imprecisas e argumentar como esse conceito pode ajudar em procedimentos experimentais.

4.1 Reversão de Preferência e Escolhas Imprecisas

Segundo Kahenman e Ritov (1994): “Diz-se existir uma Reversão de Preferência quando duas estratégias equivalentes para verificar uma preferência entre objetos leva a resultados conflitantes” (Kahneman e Ritov(1994), p.25, tradução nossa).

Reversões de Preferência são frequentemente associadas com qualquer violação dos axiomas normativos que definem a preferência. Lichtenstein e Slovic (1971) e Grether e Plott (1979) foram os primeiros a analisar tais comportamentos. Nestes estudos, por meio de experimentos, os autores sistematicamente encontraram inconsistências comparando as escolhas entre pares de loterias de valores esperados semelhantes e suas respectivas Disposições a Pagar (WTP)[1]. Estes pares de loteria eram compostas por uma de maior chance e menor ganho e outra com uma menor chance e maior prêmio. Os autores descobriram que a maioria dos indivíduos relataram uma maior WTP para a loteria com a menor probabilidade, mas escolhiam a loteria com maior probabilidade.

Na teoria econômica, se é dada uma maior precificação à opção A do que à opção B, espera-se que A seja preferível a B. Isto é, $WTP(A) > WTP(B) \iff A \succ B$. Na Reversão de Preferência demonstrada por Lichtenstein e Slovic (1971), os indivíduos relataram $WTP(B) > WTP(A)$, mas preferiram estritamente A à B, $A \succ B$. Este padrão de escolha geralmente está relacionado a possíveis inconsistências da preferência. Neste sentido, modelos teóricos foram desenvolvidos tentando incorporar este tipo de comportamento adaptando as preferências. Por exemplo, Graham e Sugden (1982) sugeriram capturar esse comportamento considerando as preferências como não transitivas. Tversky, Sattath e Slovic (1988) sugeriram o uso de preferências dependentes do contexto.

Em uma abordagem diferente, Tversky, Slovic e Kahneman (1990) usam uma configuração experimental para explicar Reversões de Preferência (de loterias) usando uma noção de "superfaturamento" (*overpricing*) da loteria de maior risco. "Interpretamos o superfaturamento de “tiros arriscados” como um efeito da compatibilidade escala: porque

[1] A Disposição de Pagar (WTP) de um objeto é definida como a quantidade de dinheiro que faz o agente indiferente entre o dinheiro e o objeto.

os preços e os retornos são expressos nas mesmas unidades, retornos são mais ponderados nos preços do que nas escolhas" (Tversky, Slovic e Kahneman (1990), p. 214, tradução nossa).

Esta explicação baseia-se em dificuldades para avaliar os objetos em diferentes contextos. Uma avaliação ocorre em termos de escolha, outra em termos monetários. Um modelo com Orçamentos Mentais, que incorpora um aspecto incomparabilidade do dinheiro, pode levar a situações que poderiam ser descritas como uma Reversão de Preferência de uma forma similar à ideia descrita por Tversky, Slovic e Kahneman (1990). Uma vez que cada categoria de objetos é comparada em diferentes noções de dinheiro, é possível que, em termos preferenciais $A \succ B$, mas em termos monetários $WTP(B) > WTP(A)$. No entanto, diferentemente de uma Reversão de Preferência, esse padrão de escolha para um agente MBM não está associado com a sua preferência entre objetos, mas com o fato do MBM pensar dinheiro de uma forma infungível. Observe Exemplo de Ana novamente:

Exemplo 1 - (Ana):

$$\text{Max}_{x,y,z,t \in R_+} \; x^{0.8}y^{0.2} + z + \tfrac{1}{2}t$$

$$\text{s.a} \;\; 2x + y \leq 30$$

$$z + 0.6t \leq 20$$

A escolha ótima do Ana é $x^* = 12, y^* = 6, z^* = 20, t^* = 0$, com:

$^{\delta U(x^*)}/_{\delta x} = {}^{0.8(6^{0.2})}/_{12^{0.2}} = 0.6964$, $p_x = 2$

$^{\delta U(x^*)}/_{\delta z} = 1$, $p_z = 1$

Ana estaria em uma melhor situação se trocasse todas as suas unidades de x e y por mais unidades de z. Ela está disposta a pagar 2\$[2] pela unidade marginal adicional x mas apenas 1\$[3] pela unidade marginal adicional z, embora a utilidade marginal de z seja maior do que a utilidade marginal de x. Isso acontece devido ao fato de que cada quantidade de dinheiro é retirada de uma conta diferente e que tais quantidades não são diretamente comparáveis. Portanto, observa-se 1 indiferente à z, 1\$ $\sim z$, e x indiferente à 2 ,$x \sim 2\$$, no entanto, estes valores monetários não são percebidas como comparáveis.

O comportamento descrito poderia ser visto como uma Reversão de Preferência, contudo não há nenhuma mudança na ordenação da preferência entre objetos. O fato do dinheiro não ser tratado como fungível leva a esta situação. Este padrão de escolha é o que definimos como uma **Escolha Imprecisa**, uma situação com as mesmas consequên-

[2] Estes valores são por unidade.
[3] O agente estaria disposto a pagar até 1.2\$ por unidade.

cias comportamentais de uma Reversão de Preferência, mas causada pelo uso de vários orçamentos.

O MBM não percebe o dinheiro como fungível, mas o agente ainda escolhe de forma ótima. A divisão de dinheiro em categorias cria uma comparação monetária diferente para cada categoria e estas comparações monetárias não são necessariamente as mesmas descritas pela preferência. Assim, uma Escolha Imprecisa ocorre devido a uma diferença entre as comparações monetárias e a ordenação da preferência entre objetos. Isso é, na presença de uma Escolha Imprecisa, a preferência é bem determinada, $A \succ B$, mas a multiplicidade das restrições orçamentárias leva a diferentes comparações monetárias, $WTP(B) > WTP(A)$.

A existência da Escolha Imprecisa leva a importantes implicações experimentais. Muitos experimentos consideram a WTP como um reflexo da preferência e isso pode não ser verdade para um agente que não trata o dinheiro como fungível. Neste sentido, um desenho experimental deve controlar se as mudanças nas escolhas ocorrem devido a uma mudança na percepção das restrições ou devido a uma mudança na ordenação da preferência entre objetos. Por exemplo, objetos que são classificados pelo agente em categorias diferentes não podem ter sua WTP diretamente comparados.

4.2 Escolhas imprecisas e "Economia de dar presentes"

Uma implicação interessante de Escolhas Imprecisas foi descrita por Thaler (1985) quando ele analisou a Economia de dar presentes:

> "A análise das regras orçamentais sugere que os preços sombras de categorias e momentos específicos podem variar. Isto implica que os indivíduos não conseguem realizar algumas operações de arbitragem internas que, em princípio, poderiam aumentar a utilidade. Em contraste, a teoria padrão implica que todos os produtos que são consumidos em quantidades positivas têm a mesma utilidade marginal por dólar, e na ausência de restrições do mercado de capitais, as variações ao longo do tempo são limitadas pelas taxas de juros reais.
>
> Uma vez que a restrição de que todos os preços sombra sejam iguais é retirada, a aparente anomalia é facilmente compreensível. As categorias que são vistas como luxos tendem a ter altos k's[4]. Um indivíduo gostaria de ter uma pequena porção do fruto proibido, mas problemas de auto-controle impedem isso. " (Thaler (1985), p.27, tradução nossa)

[4] k_i é como Thaler (1985) definiu a restrição orçamentária para a categoria i.

A análise de dar presentes descrita por Thaler está usando o Multiplicador de Lagrange para observar uma Escolha Imprecisa e ele a usa para descrever o porquê das pessoas gostarem de receber presentes. Primeiro, vamos entender como é possível observador uma Escolha Imprecisa com o Multiplicador de Lagrange, então vamos usar isso para dar uma dica de como dar um bom presente teórico.

Considere o seguinte Lagrangiano descrevendo o problema do consumidor de um agente MBM:

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = U(x) - \textstyle\sum_{X_j \in J} \lambda_j (\sum_{i \in J} x_i p_i - W(w, J)) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$$

Denote $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ como a solução do problema tal que $y \in J \in \mathcal{J}$, $z \in K \in \mathcal{J}$ e $\lambda_{J,K} > 0$:

$^{\delta U(x^*)}/_{\delta x_y} = \lambda_J p_y$ e $^{\delta U(x^*)}/_{\delta x_z} = \lambda_K p_z$

Na solução de um agente que não possui vários orçamentos, todos os objetos (ponderados pelos seus preços) têm a mesma utilidade marginal e λ é visto como um preço-sombra, que indica o aumento da utilidade dado um aumento marginal de w. Para um agente MBM, uma vez que cada Categoria de Despesa está relacionada com uma λ_J diferente, as utilidades marginais dos objetos (ponderados pelos seus preços) são iguais apenas para objetos na mesma Categoria.

Se, por exemplo, $\lambda_K > \lambda_J$, um aumento marginal de riqueza para a categoria K conduziria a um maior aumento na utilidade do que um aumento marginal de riqueza para a categoria J. Ambas as mudanças seriam ótimas e gastariam o mesmo valor monetário, mas uma seria preferível à outra. Para entender isso melhor, considere a seguinte versão modificada (tendo $\lambda \gg 0$) do exemplo da Ana:

Exemplo 6 - (Ana 2)

$$\text{Max}_{x,y,z,t \in R_+} x^{0.8} y^{0.2} + z$$
$$\text{s.a. } 2x + y \leq 30$$
$$z \leq 20$$

O Lagrangeano associado ao problema desta Maximização é $\mathcal{L}(.) = x^{0.8}y^{0.2} + z - \lambda_F(2x + y - 30) - \lambda_E(z - 20) + \mu_x x + \mu_y y + \mu_z z$. A solução é $x^* = 12, y^* = 6, z^* = 20$ e $\lambda_F = 0.3482$, $\lambda_E = 1$.

Para Ana, qualquer aumento marginal do consumo na categoria E seria preferível a um aumento marginal na categoria F. Este padrão é sustentado enquanto λ_E for maior que λ_F. Neste sentido, um aumento marginal de dinheiro levaria a um maior aumento de utilidade caso seja alocado na Categoria E em comparação ao aumento caso esse dinheiro fosse alocado na Categoria F.

Podemos observar o benefício em dar presentes nesse exemplo. Suponha que o dinheiro alocado para o entretenimento seja inferior à 21 quando o dinheiro total de Ana for igual a 51, i.e. $W(51, E) < 21$. Dar a ela uma entrada para a casa noturna (uma unidade de z) levaria a um aumento de utilidade maior do que dar a ela um dólar, mesmo que ela fosse "capaz" de comprar a entrada. Embora o multiplicador de Lagrange possa mudar bastante com maiores mudanças de riqueza, um objeto de uma categoria associado a um multiplicador Langrageano relativamente grande [5] é um bom candidato para um bom presente teórico.

4.3 Observações Experimentais e Escolhas Imprecisas

Como identificar uma categoria?

Normalmente, num procedimento experimental, a categoria de um objeto é predeterminada pelos pesquisadores ou identificada por uma percepção auto-relatada de semelhança entre objetos (e.g. Heath e Soll (1996), Cheema e Soman (2006)). Estes métodos podem levar a intuições interessantes, mas Categoria de Despesa do objeto pode não ser igual ao resultado categorização observada nestas perspectivas auto-relatadas. É possível identificar a categorização das despesas observando um comportamento?

Se um objeto consumido de uma categoria tem sua utilidade relacionada a um objeto consumido e categorizado em outra categoria, uma mudança de preço para qualquer objeto consumido dentro de qualquer uma destas categorias levaria a mudanças de consumo em ambas as categorias. De maneira semelhante, uma mudança de riqueza que altera a quantidade de dinheiro alocado em uma categoria que possui um objeto consumido e com utilidade relacionada a um objeto consumido em outra categoria levariam a mudanças de consumo em ambas as categorias. Neste sentido, não é fácil diferenciar as categorias de cada objeto por uma simples análise de alterações de riqueza e de preço. No entanto, como Heath e Soll (1996) e Hastings e Shapiro (2013) fizeram, é possível obter observações importantes inspecionando os Efeitos Renda e Substituição para estas mudanças.

Uma Escolha Imprecisa é a maneira mais transparente para detectar a Categoria

[5] Em comparação aos multiplicadores de Lagrange das outras categorias.

de Despesa para diferentes objetos. Dois objetos devem ser comparados em diferentes perspectivas monetárias para que uma Escolha Imprecisa ocorra e, portanto, cada objeto tem que estar em uma categoria diferente. Ao mesmo tempo, uma Escolha Imprecisa não poderia acontecer para objetos na mesma categoria. Assim, para um MBM, dado dois objetos A, B em X, se uma quantidade de A, x_A, é preferível a uma quantidade de B, x_B, tal que $x_A \succ x_B$ e o MBM está disposto a pagar mais por x_B do que x_A, $WTP(x_A) < WTP(x_B)$, A e B devem ser de categorias diferentes.

É possível simular uma Escolha Imprecisa a fim de identificar se dois objetos têm a mesma categoria. Para fazê-lo, compare quantidades de A e B, x_A e x_B, e identifique uma quantidade em que haja indiferença, $\hat{x}_A \sim \hat{x}_B$. Se A e B estão ambos na mesma categoria, espera-se que $WTP(\hat{x}_A) \cong WTP(\hat{x}_B)$[6]. Se $WTP(\hat{x}_A) \neq WTP(\hat{x}_B)$, os objetos estão sendo avaliados em diferentes perspectivas monetárias e têm diferentes categorias. Por exemplo, se uma pessoa tem uma categoria para as despesas com alimentos e outra para despesas com transporte, um procedimento experimental pode comparar gramas de filé com litros de gasolina. Uma pessoa pode ser indiferente entre 10 litros de gasolina e 900 gramas de filé, mas essa mesma pessoa poderia estar disposta a pagar mais pelos 10 litros de gasolina.

Como discutido na primeira seção, há evidências de que a Categoria de Despesa de um objeto pode mudar com o contexto. Nesse sentido, é possível tentar entender melhor esse padrão ao observar essas mudanças através da simulação de Escolhas Imprecisas em diferentes contextos. Contudo, é importante ressaltar que para que uma inconsistência entre as Disposições a Pagar seja considerada uma Escolha Imprecisa, a preferência não pode alterar com o contexto da escolha. Isto significa que, em diferentes contextos, as quantidades observadas como indiferentes têm de se manter inalteradas. Isto é, se há uma indiferença entre $\hat{x}_A$ e $\hat{x}_B$ em um contexto, não podemos encontrar uma indiferença entre $\tilde{x}_A$ e $\hat{x}_B$ com $\tilde{x}_A \neq \hat{x}_B$ em outro contexto.

A realização desses procedimentos daria mais informações sobre o processo de categorização e ajudaria no desenvolvimento de uma teoria melhor.

Como identificar uma Regra de Alocação?

Dada uma Categorização de Despesas, a Regra de Alocação pode ser identificada através da análise da quantidade de dinheiro gasta em cada categoria para diferentes valores de riqueza. Neste sentido, dado um vetor $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$, temos $\sum_{i \in J} x_i p_i \leq W(w, J) \forall J \in \mathcal{J}$, deve-se mudar a riqueza, w, e calcular as diferentes Alocações Mentais para cada categoria, $W(w, J)$ $\forall J \in \mathcal{J}$. No entanto, o fato de que a Lei de Walras pode não ser satisfeita

[6] $WTP(\hat{x}_A) \cong WTP(\hat{x}_B)$ não é conclusivo para mostrar que os objetos estão na mesma categoria.

cria algumas dificuldades neste procedimento. Sem a Lei de Walras, $\exists J \in \mathcal{J}$ tal que $\sum_{i \in J} x_i p_i < W(w, J)$ e $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < w$, assim, há uma quantidade de dinheiro em algumas categorias que não é gasta. Nestas situações, uma mudança nos preços seria necessária para identificar corretamente as Alocações Mentais[7]. Um aumento de preços para um objeto consumido na categoria associada com o dinheiro extra, como descrito na seção 3.2, levaria a um aumento na quantidade de dinheiro gasto nesta categoria, sem alterar os gastos nas outras categorias.

Como discutido na primeira seção, há evidências de que diferentes fontes de riqueza podem levar a diferentes Alocações Mentais. Além disso, o modelo aqui proposto identifica a Regra de Alocação independente dos preços. Este procedimento pode elucidar essas características e dar uma melhor compreensão da Regra de Alocação.

[7] Uma vez que há muitas categorias podendo ter o dinheiro que não é gasto.

5 Alterações Adicionais na Modelagem do MBM

O modelo apresentado aqui possui uma configuração simples e formal que capta a ideia de Orçamentos Mentais. Por ser simples, ele ignora algumas evidências experimentais. Por ser formal, providencia uma configuração para se pensar sobre as alterações necessárias.

Evidências experimentais mostram que a Categorização de Despesas pode ser dependente de contexto (Cheema e Soman (2006)). Por exemplo, alterar o conjunto de objetos disponíveis (Tversky e Gati (1978)) ou criar situações em que se enfatizam alguns aspectos da escolha (Cheema e Soman (2006)) podem mudar Categoria de Despesas de um objeto. Mais pesquisas são necessárias para se entender melhor o processo de Categorização de Despesas. Um modelo que endogeniza o processo de categorização pode descrever comportamentos como "*penny-a-dia*" (Gourville (1998)) como a seguinte descrição exemplifica:

> "John começa seu dia em um café local com um café com leite grande e um jornal. Juntos, ele gasta em café e jornal um pouco mais de US $ 3 por dia. Ele então pega o transporte público para chegar ao trabalho. Um dia, Mary se junta a John para o café da manhã, e ele diz a ela que ele não gosta de transportes públicos, mas que ele não pode se dar ao luxo de comprar um carro. Mary diz que ela acabou de comprar um carro pequeno, financiado em US $ 99 por mês. John suspira e diz que ele sabe que esse financiamento é possível, mas que ele não pode sequer se dar ao luxo de gastar US $ 99 extras por mês. Maria responde que se ele desistisse do café com leite e jornal todas as manhãs, ele poderia comprar o carro. John decide comprar o carro e desistir dos agrados da manhã . "(Gilboa, Postlewaite e Shmeidler (2009), p.2, tradução nossa)

Neste exemplo, John pode ter uma preferência bem definida entre carros e café da manhã e não percebe que estes objetos estavam competindo pelos mesmos recursos. Ao dar uma "nova perspectiva", ele é capaz de comparar estes objetos em uma perspectiva de recursos. Este tipo de comportamento pode ser causado por uma alteração da categorização.

Experimentos sobre Contabilidade Mental, incluindo Kahneman e Tversky (1981), descrevem que perder um objeto ou perder uma quantidade equivalente de dinheiro levam a comportamentos diferentes. Em ambas as situações, a riqueza total é a mesma e o modelo descrito teria de observar o mesmo comportamento em ambas as situações.

Outras evidências experimentais mostram que diferentes fontes de dinheiro podem levar a diferentes comportamentos (e.g. Milkman e Beshears (2009), McGrew e Levav (2009)). O modelo ignora a fonte do rendimento como uma variável que define as Alocações Mentais. Neste sentido, a Regra de Alocação pode ser alterada para considerar essas variáveis.

Todos os fenômenos descritos nesta secção estão relacionadas a efeitos enquadramento (*framing effects*) e uma ruptura do pressuposto de invariância, i.e. "diferentes representações do mesmo problema de escolha devem produzir a mesma preferência" (Kahneman e Tversky (1986), p.S253, tradução nossa). Ou seja, todas as situações descritas aqui têm o mesmo conjunto de objetos, mas peculiaridades do contexto levam a resultados diferentes. Da mesma forma que os efeitos enquadramento estão sendo incorporados na função de utilidade, eles podem ser incorporados nas restrições. A realização dos procedimentos descritos na Seção 4.3 daria muitos insights nesse sentido.

Conclusão

A pesquisa sobre Contabilidade Mental começou tentando responder uma pergunta "Como pessoas pensam sobre o dinheiro?" (Thaler (2015)). Na Teoria do Consumidor, dinheiro e preferências são representados de maneiras diferentes. Preferência é representada pela Função de Utilidade e os Axiomas da Escolha Revelada, enquanto o dinheiro é representado pela Restrição Orçamentaria. Mais do que isso, o consumidor habitual tem uma preferência independente dos vetor de preços. Evidências experimentais (como as descritas em Thaler (1999)) podem sugerir que fazer parte de uma transação ou a forma pela a qual o preço é observado podem mudar "utilidade" de um objeto. No entanto, a representação de "como pessoas pensam sobre o dinheiro" na Teoria do Consumidor realiza-se principalmente sobre a percepção da Restrição Orçamentária. Neste sentido, e utilizando as evidências relacionadas ao Orçamento Mental, descrevemos aqui um modelo tentando incorporar algumas ideias associadas com a noção de que o dinheiro é tratado como infungível.

O modelo proposto leva a observações interessantes sobre a Teoria do Consumidor descritas na seção 2 e 3. A homogeneidade, continuidade e outras propriedades usuais encontradas nas análises do consumidor só são preservadas se a forma como o dinheiro é classificado segue algumas regularidades. Estas observações podem ser usadas para testar outras implicações e construir melhores teorias como foi discutido na seção 4. Além disso, o fato de a quase-convexidade da Utilidade Indireta não ser necessariamente preservada mesmo se uma PAR é assumida indica que o padrão de escolha de um MBM não pode ser totalmente incorporado por uma função de utilidade modificada que respeite os axiomas regulares (transitividade, completude, continuidade e independência dos preços).

Analisando as consequências do uso de múltiplos orçamentos, na seção 4, descreve-se que algumas anomalias podem ser explicadas por uma incapacidade do consumidor observar suas restrições de uma forma ”holística”. Nós descrevemos o conceito de Escolha Imprecisas para ilustrar uma escolha similar a uma Reversão de Preferência, mas causada pela percepção das restrições e não devido a uma inconsistência na ordenação de preferências entre objetos.

O foco habitual da Economia Comportamental é a formulação da preferência, deixando a percepção das restrições de lado. Se Orçamentos Mentais ocorrem como as evidências experimentais indicam, os desenhos experimentais devem controlar a possibilidade de que as mudanças de comportamento ocorram devido à percepção das restrições, e não são necessariamente relacionadas a formulação das preferências. Nesse sentido, a Disposição a Pagar de objetos de diferentes categorias pode não representar a ordenação de preferência entre esses objetos.

O modelo aqui apresentado tenta ajudar o entendimento da percepção das restrições. Uma melhor compreensão desse fator pode ser fundamental para o desenvolvimento da teoria econômica mais precisa.

Referências

ANTONIDES, G; DE GROOT, I. ; VON RAAIJ, F. Mental budgeting and the management of household finance, *Journal of Economic Psychology*, v. 32, n. 4, p. 546-555, 2011.

CHEEMA, A.; SOMAN, D. Malleable mental accounting: The effect of flexibility on the justification of attractive spending and consumption decisions, *Journal of Consumer Psychology*, v.16, n.1, p. 33-44, 2006.

DEBREU, G. Representation of a preference ordering by a numerical function In: THRALL, R.; DAVIS, R, COOMBS, C. *Decision Process*, pp. 159-165, John Wiley, Nova Iorque, 1954.

FENNEMA, M. ; PERKINS, J. Mental budgeting versus marginal decision making: Training, experience and justification effects on decisions involving sunk costs, *Journal of Behavioral Decision Making*, v. 21, n.3, p 225-239. 2008

FURTADO, B; NASCIMENTO, L, RIELLA, G. Rational choice with categories, *mimeo*, Univesidade de Brasília, 2015.

GILBOA, I; POSTLEWAITE, A; SCHMEIDLER, D. The complexity of the consumer problem and mental accounting, *mimeo*, Pinhas Sapir Center for Development, Tel Aviv University, 2009.

GOURVILLE, John T. Pennies-a-day: The effect of temporal reframing on transaction evaluation, *Journal of Consumer Research*, v. 24, n. 4, p. 395-403, 1998.

GRETHER, D.; PLOTT, C. Economic theory of choice and the preference reversal phenomenon, *The American Economic Review*, V. 69, N. 4, p. 623-638, 1979.

HASTINGS, J; SHAPIRO, J. Fungibility and Consumer Choice: Evidence from Commodity Price Shocks. *The Quarterly Journal of Economics*, v. 128, n. 4, p. 1449-1498, 2013.

HEATH, C.; SOLL, J. Mental budgeting and consumer decisions, *Journal of Consumer Research*, v. 23, n. 1, p. 40-52, 1996.

JUST, D. Introduction to Behavioral Economics. Wiley Global Education, Primeira Edição, Estados Unidos, 2013. p. 505.

KAHNEMAN, D.; RITOV, I. Determinants of stated willingness to pay for public goods: A study in the headline method, *Journal of Risk and Uncertainty*, v.9, n.1, p. 5-37, 1994.

KAHNEMAN, D.; TVERSKY, A. The Framing of decisions and the psychology of choice, *Science*, v. 211, n. 4481, p. 453–458, 1981.

KAHNEMAN, D.; TVERSKY, A. Rational Choice and the Framing of Decisions, *The Journal of Business*, v. 59, n. 4, p. S251-278, 1986.

LEVAV, J.; MCGRAW, P. Emotional accounting: How feelings about money influence consumer choice, *Journal of Marketing Research*, v. 46, n.1, p. 66-80, 2009.

LICHTENSTEIN, S.; SLOVIC, P. Reversals of preference between bids and choices in gambling decisions, *Journal of experimental psychology*, v. 89, n.1, p. 46-55 1971

LOOMES, G.; SUGDEN, R. Regret theory: An alternative theory of rational choice under uncertainty, *The economic journal*, v. 92, n. 368, p. 805-824, 1982.

MILKMAN, K.; BESHEARS, J. Mental accounting and small windfalls: Evidence from an online grocer. *Journal of Economic Behavior Organization*, v. 71, n. 2, p. 384-394, 2009.

SHAFIR, E.; DIAMOND, P.; TVERSKY, A. Money illusion. *The Quarterly Journal Of Economics*, v. 112, n. 2, p. 341-374, 1997.

SHEFRIN, H.; THALER, R. An economic theory of self-control, *Journal of Political Economy*, v. 39, p. 392-406, 1981.

THALER, R. Mental accounting and consumer choice, *Marketing science*, v. 4, n.3, 199-214. 1985

THALER, R. Mental accounting matters, *Journal of Behavioral decision making*, v. 12, n. 3, 183-206, 1999.

THALER, R. Misbehaving: The Making of Behavioral Economics. WW Norton Company, Primeira Edição, Estados Unidos, 2015. p. 358.

THALER, R.; SHEFRIN, H. An Economic Theory of Self-Control, *Journal of Political Economy*, v. 89, n. 2, p. 392-406, 1981.

TVERSKY, A.; GATI, I.. Studies of similarity. In ROSCH, E.; Lloyd, B., Cognition and Categorization. Lawrence Elbaum Associates, p.79-98, 1978.

TVERSKY, A.; SATTATH, S.; SLOVIC, P. Contingent weighting in judgment and choice, *Psychological Review*, Vol 95, n.3, p. 371-384, 1988.

TVERSKY, A.;SLOVIC, P.; KAHNEMAN, D. The Causes of Preference Reversal, *American Economic Review*, v. 80, p. 204-217, 1990.

Anexos

ANEXO A – Provas para Seção 3

IAR Completa $\implies$ CAR Completa

Dado qualquer $\epsilon > 0$ defina $\delta := \epsilon/2$. Seja w' e w tal que $|w - w'| < \delta$ (sem perda de generalidade, vamos considerar $w > w'$), como assumimos uma IAR temos $W(w, J) \geq W(w', J) \forall J \in \mathcal{J}$. Considere $e_J := |W(w, J) - W(w', J)|$, uma FAR garante que $\sum_{J \in \mathcal{J}} e_J = \delta$, portanto temos $0 \leq e_J \leq \delta \forall J \in \mathcal{J}$. Concluímos que $|w - w'| < \delta \implies |W(w, J) - W(w', J)| < \epsilon \forall J \in \mathcal{J}$. $\blacksquare$

ANEXO B – Provas para Seção 4

B.1 Correspondência de Demanda

1) Homogeneidade de Grau Zero em $(\mathbf{p}, w)$

Prova: Dada uma Categorização de Despesas e assumindo uma Regra de Alocação Proporcional,

O Conjunto Categorizado para $(\mathbf{p}, w)$ é $CB(\mathbf{p}, w) = \{\mathbf{x}|\mathbf{x} \in X, \sum_{\mathbf{i \in J}} x_i p_i \leq W(w, J) \forall J \in \mathcal{J}\}$, como uma PAR é assumida, podemos rescrever o conjunto em $CB(\mathbf{p}, w) = \{\mathbf{x}|\mathbf{x} \in X, \sum_{\mathbf{i \in J}} x_i p_i \leq \beta_j w \forall J \in \mathcal{J}\}$.

Dado qualquer $\lambda > 0$, o Conjunto Categorizado para $(\lambda\mathbf{p}, \lambda w)$ é $CB((\lambda\mathbf{p}, \lambda w)) = \{\mathbf{x}|\mathbf{x} \in X, \sum_{\mathbf{i \in J}} \lambda x_i p_i \leq W(\lambda w, J) \forall J \in \mathcal{J}\}$ como uma PAR é assumida, podemos reescrever o conjunto em $CB((\lambda\mathbf{p}, \lambda w)) = \{\mathbf{x}|\mathbf{x} \in X, \sum_{\mathbf{i \in J}} \lambda x_i p_i \leq \beta_j \lambda w \forall J \in \mathcal{J}\} = \{\mathbf{x}|\mathbf{x} \in X, \sum_{\mathbf{i \in J}} x_i p_i \leq \beta_j w \forall J \in \mathcal{J}\} = CB(\mathbf{p}, w)$

Portanto, $D(\mathbf{p}, w)$ e $D(\lambda\mathbf{p}, \lambda w)$ são iguais.$\blacksquare$

2) Lei de Walras: $\mathbf{p} \times \mathbf{x} = w$ **para todo** $\mathbf{x}(\mathbf{p}, w)$**.**

Veja Exemplo 2 para uma situação em que a Preferência é Localmente Não Saciável mas a Lei de Walras não está satisfeita.

Prova: Dada uma Categorização de Despesas e assumindo uma Regra de Alocação Completa e uma Preferência Fortemente Monótona,

Suponha por absurdo que a Lei de Walras não é satisfeita e considere $\mathbf{x^1} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, w)$ tal que $\mathbf{p}\mathbf{x^1} < w$. Como uma FAR é assumida, $\sum_{J \in \mathcal{J}} W(w, J) = w$ e $\exists J \in \mathcal{J}$ tal que $\sum_{i \in J} x_i^1 p_i < W(w, J)$. Pegue um objeto na Categoria J, $\hat{i} \in J$, e $\exists \delta_{\hat{i}} > 0$ tal que $(\sum_{i \in J} x_i^1 p_i) + \delta_{\hat{i}} p_{\hat{i}} \leq W(w, J)$. Agora considere a nova cesta $\mathbf{x^2}$ tal que $x_i^2 = x_i^1$ e $x_{\hat{i}}^2 = x_{\hat{i}}^1 + \delta_{\hat{i}}$. Como a preferência é Fortemente Monótona $\mathbf{x^2} \succ \mathbf{x^1}$, mas temos $\sum_{i \in J} x_i^2 p_i \leq W(w, J) \forall J \in \mathcal{J}$. Isso é a contradição com $\mathbf{x^1} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, w)$. $\blacksquare$

3)Convexidade\Unicidade:

Prova: Dada uma Categorização de Despesas

1) Pegue elementos quaisquer $\mathbf{x^1}$ e $\mathbf{x^2}$ de $x(\mathbf{p}, w)$. Defina $\mathbf{x^3} = \alpha\mathbf{x^1} + (1-\alpha)\mathbf{x^2}$ para qualquer $\alpha \in [0, 1]$. $U(\mathbf{x^1}) = U(\mathbf{x^2})$ e $\mathbf{px^1} \leq w$, $\mathbf{px^2} \leq w$. Além disso, $\sum_{i\in J} x_i^n p_i \leq W(w, J)\forall J \in \mathcal{J}$ para $n = \{1, 2\}$. Multiplicando ambos lados por α temos $\alpha \sum_{i\in J} x_i^n p_i \leq \alpha W(w, J)\forall J \in \mathcal{J}$, então $\alpha \sum_{i\in J} x_i^1 p_i + (1-\alpha) \sum_{i\in J} x_i^2 p_i = \sum_{i\in J} x_i^3 p_i \leq \alpha W(w, J) + (1-\alpha)W(w, J) = W(w, J)\forall J \in \mathcal{J}$. como $U(.)$ é quase-côncava, $U(\mathbf{x^3}) \geq U(\mathbf{x^1}) = U(\mathbf{x^2})$, como $U(\mathbf{x^1})$ é máximo de $x(p, w)$ e $\mathbf{x^3}$ é factível, então $\mathbf{x}^3$ é elemento de $x(\mathbf{p}, w)$.

2) Suponha por absurdo que $x(\mathbf{p}, w)$ não consiste em um elemento único e existam $\mathbf{x^1}$ e $\mathbf{x^2}$ elementos de $\mathbf{x}(\mathbf{p}, w)$. Defina $\mathbf{x^3} = \alpha\mathbf{x^1} + (1-\alpha)\mathbf{x^2}$, usando um argumento simular ao acima é possível mostrar que $\sum_{i\in J} x_i^3 p_i \leq W(w, J)\forall J \in \mathcal{J}$. Como $U(.)$ é estritamente quase-côncava, $U(\mathbf{x^3}) > U(\mathbf{x^1}) = U(\mathbf{x^2})$, Isso seria uma contradição com $\mathbf{x^1}$ e $\mathbf{x^2}$ serem máximos. ■

B.2 Utilidade Indireta

1. Homogênea de grau zero em $(\mathbf{p}, w)$

Prova: Dada uma Categorização de Despesas e assumindo uma Regra de Alocação Proporcional,

A Utilidade Indireta de um MBM, dado (p, w), é:

$\text{Max}_{\mathbf{x}\in X} U(\mathbf{x})$ s.a. $\sum_{i\in J} x_i p_i \leq b_J w \forall J \in \mathcal{J}$

Considere $\lambda > 0$ e a Utilidade Indireta, dado $(\lambda\mathbf{p}, \lambda w)$, é:

$\text{Max}_{\mathbf{x}\in X} U(\mathbf{x})$ s.a. $\sum_{i\in J} x_i \lambda p_i \leq b_J \lambda w \forall J \in \mathcal{J}$

Que são o mesmo problema. ■

2. Contínua em $\mathbf{p}, w$

Como $U(x)$ é contínua, se o Conjunto Orçamentário Categorizado é definido por uma correspondência contínua de valores compactos, o Teorema do Máximo iria implicar que $v(\mathbf{p}, w)$ é contínua em $(\mathbf{p}, w)$. Vamos provar que isso é verdadeiro para um MBM que use uma CAR.

Prova: Dada uma Categorização de Despesas e assumindo que uma Regra de Alocação Contínua, temos $CB(\mathbf{p}, w) = \{\mathbf{x}|\mathbf{x} \in X, \sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{J}} x_i p_i \leq W(w, J)\forall J \in \mathcal{J}\}$. Vamos usar $w_J := W(w, J)$ para simplificar a notação.

Para provar a hemi-continuidade superior: Suponha uma sequência convergente qualquer $(\mathbf{p}^m, w^m) \to (\mathbf{p}, w)$ e $\mathbf{x}^m$ tal que $\mathbf{x}^m \in CB(p^m, w^m)\forall m$. Defina $p_i^* := inf\{p_i^m : m = 1, ...\}$ e $w_J^* := sup\{W(w^m, J)\forall m\}\forall J \in \mathcal{J}$. Percebe-se que $p_i^* \in \mathbb{R}_{++}\forall i \in \{1, ..., n\}$ e $w_J^* \in \mathbb{R}_+$ para cada $\forall J \in \mathcal{J}$. Seja $\mathbf{p}^*$ como o vetor de p_i^*s e $\mathbf{w}^*$ como o vetor de w_J^*s. Assim, $\forall m$ temos $CB(p^m, w^m) \subseteq CB^*(\mathbf{p}^*, \mathbf{w}^*) = \{\mathbf{x}|\mathbf{x} \in X, \sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{J}} x_i p_i^* \leq w_J^* \forall J \in \mathcal{J}\}$. O conjunto CB^* é compacto, portanto existe uma subsequência $(\mathbf{x}^{m_k})$ de $(\mathbf{x}^m)$ tal que $\mathbf{x}^{m_k} \to \mathbf{x} \in CB(\mathbf{p}^*, \mathbf{w}^*)$. Como $\forall k$, $\sum_{i\in J} p_i^{m_k} x_i^{m_k} \leq W(w^{m_k}, J)\forall J \in \mathcal{J}$, quando $\mathbf{p}^{m_k} \to \mathbf{p}$, $w^{m_k} \to w$ e $\mathbf{x}^{m_k} \to \mathbf{x}$, temos $\sum_{i\in J} p_i x_i \leq W(w, J)\forall J \in \mathcal{J}$. Isso concluí que CB é definido por uma correspondência hemi-contínua superior em $(\mathbf{p}, w)$.

Para provar a hemi-continuidade inferior: dado $(\mathbf{p}, w)$ um conjunto aberto I tal que $CB(\mathbf{p}, w) \cap I \neq \emptyset$. Pegue $\mathbf{x} \in CB(\mathbf{p}, w) \cap I$, como I é aberto $\exists \lambda \in (0, 1)$ tal que $\lambda x \in I$. Temos $\mathbf{p}.(\lambda \mathbf{x}) < w$, além disso $\sum_{i\in J} \lambda x_i p_i < w_J \forall J \in \mathcal{J}$. Como uma CAR é assumida, $\forall e > 0$, existe δ_j tal que $|w - w'| < \delta_j \implies |W(w, J) - W(w', J)| < e$. Portanto, $\exists \delta > 0$ tal que para todos $(\hat{\mathbf{p}}, \hat{w}) \in B((\mathbf{p}, l), \delta)$, temos $\hat{\mathbf{p}}(\lambda x) < \hat{w}$ e $\sum_{i\in J} \lambda x_i \hat{p}_i < W(\hat{w}, J)\forall J \in \mathcal{J}$. Isso concluí que CB é definido por a correspondência hemi-contínua inferior em $(\mathbf{p}, w)$.

Nos concluímos que CB é definido pela correspondência contínua de valores compactos em $(\mathbf{p}, w)$ e, pelo Teorema do Máximo, $v(\mathbf{p}, w)$ é contínua em $(\mathbf{p}, w)$.■

3. Estritamente Crescente em w

Prova 1 : Dada uma Categorização de Despesas e assumindo uma Regra de Alocação Crescente e uma Preferência Fortemente Monótona,

A Regra de Alocação Crescente implica que se $w' > w$ então $\exists J \in \mathcal{J}$ tal que $W(w', J) > W(w, J)$ e $W(w', K) \geq W(w, K)\forall K \neq J \in \mathcal{J}$.

Considere $\mathbf{x}^*$ como o argmax de $v(\mathbf{p}, w)$. Dado $w' > w$, podemos construir um $\mathbf{x}'$ tal que $x_i' = x_i^* \forall i \in K \neq J \in \mathcal{J}$, $x_i^{*'} > x_i^* \forall i \in J$ tal que $\sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{J}} x_i' p_i \leq W(w, J)\forall J \in \mathcal{J}$. Como a preferência é Fortemente Monótona temos $\mathbf{x}' \succ \mathbf{x}$ que é factível em $v(\mathbf{p}, w')$. Portanto $v(\mathbf{p}, w') \geq U(\mathbf{x}') > U(\mathbf{x}) = v(p, w)$ e a Utilidade Indireta é Crescente Estritamente em w. ■

Prova 2: Dada uma Categorização de Despesas e assumindo uma Regra de Alocação Estritamente Crescente e uma Preferência Localmente Não Saciável,

A Regra de Alocação Estritamente Crescente implica que se $w' > w$ então $W(w', J) > W(w, J)\forall J \in \mathcal{J}$.

Considere $\mathbf{x}^*$ como o argmax de $v(p, w)$. Dado $w' > w$ temos $\sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{J}} x_i^* p_i < W(w', J)\forall J \in$

$\mathcal{J}$, então $\exists\delta$ tal que $\forall\hat{\mathbf{x}} \in B(\mathbf{x},\delta)$, $\sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{X_j}} \hat{x}_i p_i \leq W(w',J) \forall X_j \in J$, como o preferência é Localmente Não Saciável, $\exists\mathbf{x'} \in B(\mathbf{x},\delta)$ tal que $U(\mathbf{x'}) > U(\mathbf{x})$ e é factível em $v(p,w')$. ■

4. Decrescente em p

Prova: Dada uma Categorização de Despesas,

Considere qualquer $\mathbf{p^0} \geq \mathbf{p^1}$ e $\mathbf{x}^*$ o argmax de $v(\mathbf{p^0},w)$.

Temos $\sum_{i\in J} p^1_{x_i} x^*_i \leq \sum_{i\in J} p^0_{x_i} x^*_i \leq W(w,J) \forall J \in \mathcal{J}$. Isso implica que $\mathbf{x}^*$ é factível quando os preços são $\mathbf{p^1}$. Então, $v(\mathbf{p^1},w) \geq U(\mathbf{x}) = v(\mathbf{p^0},w)$.■

5. quase-convexa em (p,w).

Exemplo: Dada uma Categorização de Despesas, e assumindo a Regra de Alocação Proporcional ,

Para qualquer $\mathbf{p}^1$,$\mathbf{p^2} \in \mathbb{R}^n_{++}$ e w_1,$w_2 \in \mathbb{R}_+$ poderíamos definir:

$CB^1(\mathbf{p^1},w^1) = \{x | \sum_{i\in J} p^1_i x_i \leq W(w^1,J) \forall J \in \mathcal{J}\}$ e

$CB^2(\mathbf{p^2},w^2) = \{x | \sum_{i\in J} p^2_i x_i \leq W(w^2,J) \forall J \in \mathcal{J}\}$

e definir $(\mathbf{p}^0,w^0) = (\alpha\mathbf{p^1} + (1-\alpha)\mathbf{p^2}, \alpha w^1 + (1-\alpha)w^2)$ para qualquer $\alpha \in [0,1]$.

$CB^0(p,w) = \{x | \sum_{i\in J} p^0_i x_i \leq W(w^0,J) \forall J \in \mathcal{J}\}$

Normalmente, para provar a quase-convexidade, deveríamos mostrar que se $\mathbf{x} \in CB(p^0,w^0) \implies \mathbf{x} \in CB^1$ ou $\mathbf{x} \in CB^2$

Contudo, considere o seguinte exemplo:

$X = \{x,y\}$ categorizado em $J = \{x\}$ e $K = \{y\}$. Uma PAR define que $\beta_J = \beta_K = 0.5$. Considere $w^1 = 40$, $w^2 = 20$ e $\mathbf{p} := (p_x,p_y)$ tal que $\mathbf{p^1} = (2,4)$ e $\mathbf{p^2} = (4,1)$. Define w^0 para $\alpha = 0.5$.

Temos:

Em $v(p^1,w^1)$, temos $x \leq 10$ e $y < 5$,

Em $v(p^2,w^2)$, temos $x \leq 2.5$ e $y \leq 10$,

Em $v(p^0,w^0)$, temos $x \leq 5$ e $y \leq 6$.

Considere a cesta $x = 5$ e $y = 6$. Esta cesta é factível para $v(p^0,w^0)$, mas não é factível em $v(p^1,w^1)$ pois $y > 5$ e não é factível em $v(p^2,w^2)$ pois $x > 2.5$. É possível construir uma Função de Utilidade contínua que daria uma maior valor de utilidade para esta cesta do que para todas aquelas factíveis em $v(p^0,w^0)$ e $v(p^1,w^1)$. Portanto a Utilidade

Indireta é não é necessariamente quase-convexa em (p, w) mesmo se uma PAR é assumida.

B.3 Minimização do Dispêndio

Alegação: Se $U(.)$ é Contínua e $(\mathbf{x}^*, d^*)$ é argmin de $e(p, u)$ de um MBM usando uma CAR, então $U(x^*) = u$.

Prova: Dada uma Categorização de Despesas,

Suponha que não, então dado $\mathbf{p}$ e $u \in \mathcal{U}'(\mathbf{p})$ e definindo $(\mathbf{x}^*, d^*)$ como argmin de $e(\mathbf{p}, u) = w$ temos $U(\mathbf{x}^*) > u$.

Se $u = U(0)$ isso é impossível, pois $\mathbf{p} \gg 0$ e $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n_+ \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$.

Se $u > U(0)$, como $U(.)$ é contínua $\exists \lambda < 1$ tal que $U(\lambda x^*) > u$, e $\sum_{i \in J} \lambda x_i^* p_i < W(w, J) \forall J \in \mathcal{J}$. Como MBM tem uma CAR, temos $\exists \delta > 0$ tal que $\sum_{i \in J} \lambda x_i^* p_i < W(w - \delta, J) \forall J \in \mathcal{J}$. Além disso, $U(\lambda x^*) > u$ e a $(\lambda x^*, d^*)$ que respeita as restrições criadas pela Regra de Alocação com um gasto $w - \delta < w$. Isso é a contradição com o fato de (x^*, d^*) ser o argmin. ■

1.Zero Quando u Assume o Menor Nível de Utilidade

Prova: Dada uma Categorização de Despesas,

O menor nível de utilidade em $\mathcal{U}'$ é $U(0)$ por definição. Como $\mathbf{p} \gg 0$, para qualquer $\mathbf{x} \neq 0 \in \mathbb{R}^n_+$ temos $\sum_{i=1}^n p_i x_i + d > 0 = \sum_{i=1}^n p_i 0$. ■

2. Homogênea de Grau 1 em p

Prova: Dada uma Categorização de Despesas e assumindo uma Regra de Alocação Proporcional,

Temos que provar que se $w = e(p, u)$, temos $\lambda w = e(\lambda p, u)$.

Assumindo a PAR, $e(p, u)$ é igual a:

$Min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} : \sum_{i=1}^n p_i x_i + d$ s.ta

$U(x) \geq u$

$\alpha d \geq 0$

$\sum_{i \in J} p_i x_i \leq \beta_i (\sum_{i=1}^n p_i x_i + d) \forall J \in \mathcal{J}$

Defina (x^*, d^*) como o argmax de $e(p, u)$ e temos $w = \sum_{i=1}^n p_i x_i^* + d^*$

Considere agora, $e(\lambda p, u)$, Temos:

$Min_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \sum_{i=1}^{n} \lambda p_i x_i + d$ s.a.

$U(x) \geq u$

$\alpha d \geq 0$

$\sum_{i\in J} \lambda p_i x_i \leq \beta_i(\sum_{i=1}^{n} \lambda p_i x_i + d) \forall J \in \mathcal{J}$

Perceba que se consideramos $d = \lambda d$, ainda teremos o mesmo problema. Portanto, considere (x^*, d^*) como o argmax e $e(\lambda p, u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda p_i x_i^* + \lambda d^* = \lambda w$

3.Contínua em $(\mathbf{p}, u)$

Exemplo 2 mostra que a Minimização de Dispêndio de um MBM com uma IAR e uma Preferência Localmente Não Saciável não é necessariamente contínua**.**

Prova: Dada uma Categorização de Despesas, assumindo uma Preferência Fortemente Monótona e uma Regra de Alocação Crescente ,

Provamos no começo da seção que se x^* é parte do argmin de $e(p, u)$ quando uma CAR é assumida então $U(x^*) = u$;

Primeiro, vamos provar que se a Preferência é Fortemente Monótona e a Regra de Alocação Crescente, podemos considerar $d = 0$.

Suponha que não e temos (x^*, d^*) sendo o argmin de $e(p, u)$ mas com $d > 0$, i.e. $w - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^* > 0$. Então $\exists J \in \mathcal{J}$ tal que $\sum_{i\in J} p_i x_i^* < W(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^* + d, J)$, mas como a Preferência é Fortemente Crescente podemos melhorar a utilidade acrescentando consumo de qualquer bem dessa categoria e diminuindo o d . Assim criamos $x^{'}$ e $d^{'}$ tal que $(x^{'}, d^{'})$ e $x' \geq x$ e $d' < d$ cujo $U(x') > u$. Como a Utilidade é Contínua $\exists \lambda < 1$ tal que $U(\lambda x^{'}) > u$. Dado que estamos assumindo uma IAR, $\exists \delta > 0$ tal que $\sum_{i\in J} \lambda p_i x_i^{'} \leq W(w - \delta, J) \forall J \in \mathcal{J}$, e $w - \delta < w = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^* + d^*$. Isso é a contradição com (x^*, d^*) ser o argmin.

Agora, como $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ é uma função Contínua, temos que determinar uma Correspondência Contínua de valores compactos usando $U(x) \geq u$ e $\sum_{i\in J} x_i p_i \leq W(\sum_{i\in J} p_i x_i, J) \forall J \in \mathcal{J}$ para usar o Teorema do Máximo e mostrar que EMP é Contínua on $(\mathbf{p}, u)$.

Para definir o conjunto compacto vamos fazer o seguinte: dado um vetor $\mathbf{p} \gg 0$ e $u \in \mathcal{U}'(\mathbf{p})$, vamos definir um w' tal que $\mathcal{X}(u, p, w') := \{\mathbf{x} \in R_+^n : U(x) > u, \sum_{i\in J} x_i p_i \leq W(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i, J) \leq W(w', J) \forall J \in \mathcal{J}\} = \{\mathbf{x} \in R_+^n : U(x) > u\} \cup \{\mathbf{x} \in R_+^n : \sum_{i\in J} x_i p_i \leq W(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i, J) \leq W(w', J) \forall J \in \mathcal{J}\}$, como a Regra de Alocação é Crescente isso será possível definir tal w' que leva a um $\mathcal{X}$ que é a conjunto compacto.

Para provar a hemi-continuidade superior da correspondência: Suponha uma sequência $p^m \to p$. Como $\mathcal{U}'$ é contínua em $\mathbf{p}$, $\exists u^m \in \mathcal{U}(p^m)\forall m$ tal que quando $p^m \to p$, $u^m \to u \in \mathcal{U}'(p)$. Defina $u^* := Min\{u^m : m = 1, ...\}$, $p_i^* := Min\{p_i^* : m = 1, ...\}$, $\hat{u} := Max\{u^m : m = 1, ...\}$. $\mathcal{U}'$ é definido de tal forma que sempre exista um w^m tal que $v(p^m, w^m) = u^m$. Considere $w' := max\{w^m : m = 1, ...\}$. Agora considere $(p^m, u^m, w') \to (p, u, w')$, e (x^m) tal que $x^m \in \mathcal{X}(p^m, u^m, w')$. Perceba que $\mathcal{X}(x^m, u^m, w') \subseteq \mathcal{X}(x^*, p^*, w')$, e $\mathcal{X}(x^*, p^*, w')$ é compacto. Então, existe subsequência (x^{m_k}) de (x^m) cujo $x^{m_k} \to x \in \mathcal{X}(x^*, p^*, w')$. Quando $p^m \to p$, $u^m \to u$, $x^m \to x$, temos $U(x) \geq u$, $\sum_{i\in J} x_i p_i \leq W(w, J)\forall J \in \mathcal{J}$ e $x \in \mathbb{R}^n_+$. Então $\mathcal{X}$ é hemicontínua superior em $(\mathbf{p}, u)$.

Para provar o hemi-continuidade inferior da correspondência: Pegue $\mathcal{X}(p, u, w')$ e um conjunto aberto I tal que $I \cap \mathcal{X}(p, u, w') \neq \emptyset$. Como a preferência é Fortemente Monótona, $\exists \mathbf{x} \in I \cap \mathcal{X}(p, u, w')$, tal que $U(\mathbf{x}) > u$. Como I é aberto e U contínua $\exists \lambda < 1$ tal que $\lambda x \in I$, e, $U(\lambda \mathbf{x}) > u$. Então, $\exists \delta_1 > 0$ tal que $\forall \hat{u} \in B(u, \delta_1)$, $U(\lambda \mathbf{x}) > \hat{u}$. Além disso, $\sum_{i\in J} \lambda x_i p_i < W(\sum_{i=1}^n p_i x_i, J)\forall J \in \mathcal{J}$. Como assumimos uma IAR, então $\exists \delta_2 > 0$ tal que $\forall \hat{p} \in B(\mathbf{p}, \delta_2)$, $\sum_{i\in J} \lambda x_i \hat{p}_i \leq W(\sum_{i\in J} x_i \hat{p}_i, J)\forall J \in \mathcal{J}$. Defina $\delta := min\{\delta_1, \delta_2\}$ para todo $(\hat{p}, \hat{u}) \in B((p, u), \delta)$, $X(\hat{p}, \hat{u}, w')$ implica $\sum_{i\in J} \lambda x_i \hat{p}_i \leq W(\sum_{i\in J} \hat{p}_i x_i, J)\forall J \in \mathcal{J}$ e $U(\lambda \mathbf{x}) > \hat{u}$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$. então $I \cap X(\hat{p}, \hat{u}, w') \neq \emptyset$ e $\mathcal{X}$ é hemi-contínua inferior em $(\mathbf{p}, u)$.

$\mathcal{X}$ é definido pela Correspondência contínua de valores compactos em $(\mathbf{p}, u)$ e, pelo Teorema do Máximo, $e(\mathbf{p}, u)$ é contínua em $(\mathbf{p}, u)$. ■

4.Para todo $p \gg 0$, Estritamente Crescente em u

Prova: Dada uma Categorização de Despesas e assumindo a Contínua Regra de Alocação:

Defina $w^1 = e(\mathbf{p}, u^1)$ e $(\mathbf{x^1}, d^1)$ como seu argmin. Dado um $u^2 > u^1$, suponha por contradição que $e(p, u^2) = w^2 \leq w^1$ tal que temos $(\mathbf{x^2}, d^2)$ como seu argmin e $U(x^2) > U(x^1)$. Como a Utilidade é contínua, $\exists \lambda < 1$, tal que $U(\lambda x^2) > U(x^1)$ e $\sum_{i\in J} p_i \lambda x_i^2 < W(w^2, J) \leq W(w^1, J)\forall J \in \mathcal{J}$. Dada uma CAR, $\exists \delta > 0$ tal que $\sum_{i\in J} p_i \lambda x_i^2 \leq W(w^2 - \delta, J) = W(\sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - \delta + d^2, J) < W(w^1, J)\forall J \in \mathcal{J}$ e $(\lambda \mathbf{x^2}, d^2)$ satisfaz todos os requerimentos de $e(\mathbf{p}, u^1)$ com menos gasto, o que é uma contradição com $(\mathbf{x^1}, d^1)$ ser ótimo. ■

5. Crescente em p

Prova: Dada uma Categorização de Despesas e assumindo uma Regra de Alocação Crescente:

Dado $\mathbf{p^1} \geq \mathbf{p}^2$ e $u \in \mathcal{U}'(p^1) \cap \mathcal{U}'(p^2)$. Defina $(x^n, d^n) := argmin\{e(p^n, u)\}$ para $n = 1, 2$. Suponha por contradição que $e(p^1, u) < e(p^2, u)$. Como uma IAR é assumida, temos $\sum_{i \in J} x_i^1 p^2 \leq \sum_{i \in J} x_i^1 p^1 \leq W(\sum_{i=1}^n x_i^1 p^1 + d^1, J) \leq W(\sum_{i=1}^n x_i^2 p^2 + d^2, J) \forall J \in \mathcal{J}$. Então, $\sum_{i \in J} x_i^1 p^2 \leq W(\sum_{i=1}^n x_i^2 p^2 + d^2, J) \forall J \in \mathcal{J}$. Defina $d' = \sum_{i=1}^n x_i^2 p^2 + d^2 - \sum_{i=1}^n x_i^1 p^2$. (x^1, d') satisfaz todos os requerimentos de $e(\mathbf{p}, u^1)$ com menos gasto, o que é uma contradição.■

6. Côncava em p

Exemplo: Dada uma Categorização de Despesas e assumindo uma Regra de Alocação Proporcional :

Fixe um nível de Utilidade $\hat{u} \in \mathcal{U}'(\mathbf{p^1}) \bigcap \mathcal{U}'(\mathbf{p^2})$. Considere $\mathbf{p^0} = \alpha \mathbf{p^1} + (1 - \alpha \mathbf{p^2})$ para $\alpha \in [0, 1]$. Dado $n = 0, 1, 2$, defina x^n como a cesta ótima para o EMP dado $\hat{u}$ e quando os preços são $\mathbf{p}^n$, e $w^n = e(p^n, \hat{u})$.

Normalmente, provaríamos que $\alpha(\sum_{i \in J} x_i^0 p_i^1) + (1-\alpha)(\sum_{i \in J} x_i^0 p_i^2) \nleq \alpha W(e(\mathbf{p}^1, \hat{u}), J) + (1 - \alpha) W(e(\mathbf{p}^2, \hat{u}), J) \forall J \in \mathcal{J}$, e teríamos $e(p^0, \hat{u}) \geq \alpha e(p^1, \hat{u}) + (1 - \alpha) e(p^2, \hat{u})$, i.e. $w^0 \geq \alpha w^1 + (1 - \alpha) w^2$, o que implicaria que $e(p, u)$ é côncava em p.

Contudo, veja o seguinte exemplo:

Considere uma $U(x, y)$ tal que:

$U(x, y) = x + y$ se $0 \leq x \leq 5$ e $0 \leq y \leq 6$

$U(x, y) = 5 + y + 0,0000000001(x - 5)$ se $x \geq 5$ e $0 \leq y \leq 6$

$U(x, y) = 6 + x + 0.00000000001(y - 6)$ se $0 \leq x \leq 5$ e $y \geq 6$

$U(x, y) = 11 + 0,0000000001(x + y - 11)$ se $x \geq 5$ e $y \geq 6$

Essa função de Utilidade é contínua e representa uma preferência Fortemente Monótona.

Defina w_x como a alocação para o bem x e w_y como a alocação para o bem y. Considere um MBM usando uma PAR tal que $w_x = w_y = 0.5w$.

Dado $\hat{u} = 7$ e um $\mathbf{p}^1$ definindo $p_x = 2$ e $p_y = 5$, temos $e(\mathbf{p^1}, \hat{u}) = 20$ com $x^1 = 5$ e $y^1 = 2$.

Dado $\hat{u} = 7$ e um $\mathbf{p}^2$ definindo $p_x = 7$ e $p_y = 0.5$, temos $e(\mathbf{p^2}, \hat{u}) \backsimeq 14$ com $x^2 \backsimeq 1$ e $y^2 \backsimeq 6$

Considere $\alpha = 0.25$ tal que $\mathbf{p}^0$ define $p_x = 6.5$ e $p_y = 0.875$. temos $e(\mathbf{p^0}, \hat{u}) \backsimeq 13$ $x \backsimeq 1$ $y \backsimeq 6$.

Perceba que $e(\mathbf{p^0}, \hat{u}) < e(\mathbf{p^2}, \hat{u}) < e(\mathbf{p^1}, \hat{u})$ então $e(\mathbf{p^3}, \hat{u}) < \alpha e(\mathbf{p^2}, \hat{u}) + (1 - \alpha) e(\mathbf{p^1}, \hat{u})$ e a Minimização do Dispêndio não é necessariamente côncava mesmo se uma

PAR é assumida.