



**ANÁLISE DO CRESCIMENTO À FADIGA, INTERAÇÃO E COALESCÊNCIA DE  
MÚLTIPLAS TRINCAS COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DUAL**

**ELVIS PEREIRA DE SANTANA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ANÁLISE DO CRESCIMENTO À FADIGA, INTERAÇÃO E  
COALESCÊNCIA DE MÚLTIPLAS TRINCAS COM O  
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DUAL**

**ELVIS PEREIRA DE SANTANA**

**ORIENTADOR: ARTUR PORTELA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E  
CONSTRUÇÃO CIVIL**

**PUBLICAÇÃO: E.DM-023A/15**

**BRASÍLIA/DF: DEZEMBRO - 2015**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ANÁLISE DO CRESCIMENTO À FADIGA, INTERAÇÃO E  
COALESCÊNCIA DE MÚLTIPLAS TRINCAS COM O MÉTODO DOS  
ELEMENTOS DE CONTORNO DUAL**

**ELVIS PEREIRA DE SANTANA**

**DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE  
ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE  
TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE  
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU  
DE MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.**

**APROVADA POR:**



---

**Prof. Artur Portela, PhD (ENC-UnB)  
(Orientador)**



---

**Prof. William Taylor Matias Silva, PhD (ENC-UnB)  
(Examinador Interno)**



---

**Prof. Éder Lima de Albuquerque, PhD (ENM-UnB)  
(Examinador Externo)**

**BRASÍLIA/DF, 07 DE DEZEMBRO DE 2015.**

## FICHA CATALOGRÁFICA

SANTANA, ELVIS, Análise do Crescimento à Fadiga, Interação e Coalescência de Múltiplas Trincas com o Método dos Elementos de Contorno Dual [Distrito Federal] 2015. xvi, 72p., 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2015). Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.	
1.Chapa com múltiplas trincas	2.Método dos Elementos de Contorno Dual
3.Integral J	4.Fatores de intensidade de tensão
5.Coalescência de trincas	6.Linkup de trincas
7.Análise de fadiga	
I.ENC/FT/UnB	II.Título (Mestre)

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SANTANA, E. (2015). Análise do Crescimento à Fadiga, Interação e Coalescência de Múltiplas Trincas com o Método dos Elementos de Contorno Dual. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-023A/15, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 72p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Elvis Pereira de Santana.

TÍTULO: Análise do Crescimento à Fadiga, Interação e Coalescência de Múltiplas Trincas com o Método dos Elementos de Contorno Dual.

GRAU: Mestre

ANO: 2015

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.



---

Elvis Pereira de Santana  
Rua 25 Norte Lt. 05 Bloco D Apto 2106.  
71.917-180 - Águas Claras - Brasília - DF - Brasil.

*Dedico esse trabalho à minha família que sempre me apoia incondicionalmente.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus por me dar força e luz para vencer os desafios. Agradeço ao *PECC - Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil*, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, pela oportunidade de realizar esse mestrado. Agradeço ao professor e amigo *Artur Portela* pela amizade e pela orientação impecável, imprescindíveis para êxito neste trabalho. Agradeço a todos os meus amigos do programa, que sempre se mostraram parceiros. Também, a todos os professores do PECC que contribuíram para o meu crescimento intelectual e pessoal.

## RESUMO

### ANÁLISE DO CRESCIMENTO À FADIGA, INTERAÇÃO E COALESCÊNCIA DE MÚLTIPLAS TRINCAS COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DUAL

**Autor:** Elvis Pereira de Santana

**Orientador:** Artur Portela

**Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil**

**Brasília, dezembro de 2015**

Dano múltiplo e generalizado devido à fadiga tem sido um problema em aviões e na indústria da construção civil, há muito tempo. Componentes estruturais desenvolvem trincas em vários locais que crescem em percursos que são difíceis de prever. Quando duas trincas se aproximam, seus campos de tensão se influenciam mutuamente levando a um efeito de aumento ou blindagem que depende da posição e orientação das trincas. Uma vez que não existem métodos analíticos generalizados para prever campos de tensão na trinca, a simulação do crescimento de múltiplas trincas, e da coalescência (*linkup*) entre elas, são importantes e desafiadoras tarefas de uma área de pesquisa que ainda está se desenvolvendo. Este trabalho descreve uma aplicação bidimensional do Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD) para a análise de modo misto do crescimento de múltiplas trincas na mecânica da fratura linear elástica, sob carregamento de fadiga. O processo de crescimento de trinca é simulado com uma análise de extensão incremental de múltiplas trincas baseada no critério da máxima tensão principal. Para cada incremento da análise, em que as extensões da trinca são modeladas com novos elementos de contorno, o MECD é aplicado para realizar uma análise de tensão de região única da estrutura trincada e a Integral J é utilizada para calcular os fatores de intensidade de tensão. A análise incremental é baseada na técnica de predição-correção que define, em cada incremento da análise, a direção e a extensão das múltiplas trincas, levando em conta assim a discretização da análise e garantindo que o requisito da unicidade do percurso seja satisfeito. Baseado no critério de plastificação do ligamento, que assume que quando as zonas plásticas de duas trincas adjacentes se tocam, o ligamento entre elas falha e as trincas coalescem, chapas com múltiplas trincas podem ser analisadas. A vida à fadiga e a resistência residual da estrutura são introduzidas como um procedimento de pós-processamento dos resultados do crescimento das múltiplas trincas. Resultados dessa análise incremental são apresentados para várias geometrias com danos generalizados, demonstrando a acurácia e eficiência das estratégias adotadas na análise.

**Palavras-chave:** Chapa com múltiplas trincas; Método dos elementos de contorno dual; Integral J; Fatores de intensidade de tensão; Coalescência de trincas; *Linkup* de trincas; Análise de fadiga.

## **ABSTRACT**

### **ANALYSIS OF FATIGUE GROWTH, INTERACTION AND LINKUP OF MULTIPLE CRACKS WITH DUAL BOUNDARY ELEMENT METHOD**

**Author: Elvis Pereira de Santana**

**Supervisor: Artur Portela**

**Graduate Program in Structures and Civil Construction**

**Brasília, december of 2015**

Multiple-site and widespread fatigue damage have been an issue to the aircraft and civil construction industry for a long period. Structural components develop cracks at several locations which grow with crack paths that are difficult to predict. When two cracks approach one to another, their stress fields influence each other leading to an enhancing or shielding effect which depends on the position and orientation of the cracks. Since there are no generalized analytical methods for predicting crack stress fields, simulation of multiple-crack growth, and the linkup between them, are important and challenging tasks of an research area that is still evolving. This work describes a two dimensional application of the dual boundary element method (DBEM) to the analysis of mixed-mode multiple-crack growth in linear elastic fracture mechanics, under fatigue loading. The crack-growth process is simulated with an incremental multiple-crack extension analysis based on the maximum principal stress criterion. For each increment of the analysis, in which crack extensions are modeled with new boundary elements, the DBEM is applied to perform a single-region stress analysis of the cracked structure and the J-integral is used to compute the stress intensity factors. The incremental analysis is based on a prediction-correction technique that defines, in each increment of the analysis, the direction and the extension of the multiple cracks, thus taking into account the discreteness of the analysis and ensuring that the requirement of the path uniqueness be satisfied. Based on the ligament yield criterion which assumes that when the plastic zones of two adjacent cracks touch each other, the ligament between them fails and the cracks coalesce, plates with multiple-site damage can be analyzed. The fatigue life and residual strength of the structure are introduced as a post-processing procedure on the results of the multiple-crack growth. Results of this incremental analysis are presented for several geometries with multiple-site damage, demonstrating the accuracy and efficiency of the strategies adopted in the analysis.

**Keywords:** Multiple-cracked plate; Dual boundary element method; J-integral; Stress intensity factors; Crack coalescence; Crack linkup; Fatigue analysis.

# SUMÁRIO

<b>LISTA DE TABELAS</b>	<b>x</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>xiii</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS E NOMENCLATURA</b>	<b>xiv</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 MOTIVAÇÃO . . . . .	2
1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO . . . . .	8
<b>2 OBJETIVOS</b>	<b>10</b>
<b>3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>11</b>
3.1 MÉTODOS NUMÉRICOS APLICADOS NA ANÁLISE DE FRATURA .	11
3.2 APLICAÇÕES DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DUAL	17
<b>4 FUNDAMENTOS TEÓRICOS</b>	<b>20</b>
4.1 O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DUAL . . . . .	20
4.2 CÁLCULO DOS FATORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO . . . . .	21
4.3 RESISTÊNCIA RESIDUAL E VIDA À FADIGA . . . . .	23
4.4 COALESCÊNCIA DE TRINCAS . . . . .	25
4.5 DIREÇÃO DOS INCREMENTOS DE CRESCIMENTO DE MÚLTIPLAS TRINCAS . . . . .	26
4.6 EXTENSÃO DOS INCREMENTOS DE CRESCIMENTO DE MÚLTIPLAS TRINCAS . . . . .	28
4.7 ANÁLISE INCREMENTAL DO CRESCIMENTO DE MÚLTIPLAS TRINCAS . . . . .	30
<b>5 METODOLOGIA</b>	<b>32</b>
5.1 ASPECTOS GERAIS . . . . .	32
5.2 ASPECTOS ESPECÍFICOS . . . . .	32
<b>6 RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>36</b>
6.1 INTRODUÇÃO . . . . .	36
6.2 CHAPA COM UMA TRINCA CURVADA INTERNA . . . . .	36
6.3 CHAPA COM TRÊS TRINCAS DE BORDA . . . . .	40
6.4 CHAPA COM UMA TRINCA BIFURCADA . . . . .	41

6.5	CHAPA COM DUAS TRINCAS PARALELO-ENVIESADAS INTERNAS	46
6.6	CHAPA COM UMA LINHA DE FUROS DE FIXADORES, COM TRINCAS	49
6.6.1	Primeiro cenário de MSD . . . . .	50
6.6.2	Segundo cenário de MSD . . . . .	56
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES</b>	<b>63</b>
7.1	CONCLUSÕES . . . . .	63
7.1.1	Publicações . . . . .	64
7.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS . . . . .	65
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>66</b>

## LISTA DE TABELAS

6.1	Fator de intensidade de tensão $K_I/(\sigma\sqrt{\pi c})$ para a trinca curvada, ponta <i>A</i> . . . . .	37
6.2	Fator de intensidade de tensão $K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi c})$ para a trinca curvada, ponta <i>A</i> . . . . .	37
6.3	Fator de intensidade de tensão $K_I/(\sigma\sqrt{\pi c})$ para a trinca curvada, ponta <i>B</i> . . . . .	37
6.4	Fator de intensidade de tensão $K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi c})$ para a trinca curvada, ponta <i>B</i> . . . . .	38
6.5	Fatores de intensidade de tensão para a trinca bifurcada. . . . .	44
6.6	Fatores de intensidade de tensão normalizados para as duas trincas paralelo- enviesadas internas. . . . .	47

## LISTA DE FIGURAS

1.1	Jatos Comet em pleno voo. . . . .	4
1.2	Boeing 737-200 da Aloha Airlines após o acidente em 1988 - fotografia 1. .	5
1.3	Boeing 737-200 da Aloha Airlines após o acidente em 1988 - fotografia 2. .	5
1.4	Point Pleasant Bridge - Colagem com fotos tiradas antes e após o colapso ocorrido em 15/12/1967. Mostra também uma barra de olhal do tipo da que rompeu por fadiga e causou o colapso da ponte. . . . .	7
1.5	Ruínas da Point Pleasant Bridge após o colapso em 15/12/1967. . . . .	8
4.1	Análise em região única com o MECD. . . . .	20
4.2	Sistema de coordenadas de referência e caminho de contorno para a Integral J. .	22
4.3	Números dos caminhos de contorno para a Integral J no MECD. . . . .	23
4.4	Dano generalizado em pontos de rebite da fuselagem devido à fadiga. . . .	25
4.5	Critério do contato de zonas plásticas ou da plastificação do ligamento, para a coalescência de trincas. . . . .	25
4.6	Direção da extensão incremental da trinca. . . . .	27
5.1	Algoritmo preditor-corretor para a extensão de uma única trinca. . . . .	33
5.2	Algoritmo para propagação de múltiplas trincas. . . . .	34
6.1	Chapa retangular com uma trinca interna curvada ( $H/W = 2.0$ , $a/W = 0.1$ ) e tensão $\sigma$ remota aplicada. . . . .	36
6.2	Forma final da trinca curvada, após um crescimento à fadiga devido a $1,012,419 \times 10^9$ ciclos de carga. . . . .	38
6.3	Fatores de intensidade de tensão e resistência residual da trinca curvada, ao longo do crescimento à fadiga devido a $1,012,419 \times 10^9$ ciclos de carga. . .	39
6.4	Chapa retangular com três trincas de borda ( $H/W = 2.0$ , $a/W = 0.1$ ) e tensão $\sigma$ nas extremidades. . . . .	40
6.5	Formas finais das três trincas de borda após 14 incrementos de crescimento. Caso a) - incrementos com comprimento igual a 2 vezes o comprimento do menor elemento de ponta da trinca, caso b) - ... igual 4 vezes... . . . .	41
6.6	Fatores de intensidade de tensão e resistência residual das três trincas de borda, ao longo dos 14 incrementos de crescimento das trincas. . . . .	42
6.7	Configuração deformada da chapa com três trincas de borda; note que a abertura das trincas do lado esquerdo força a trinca do lado direito a se fechar gradualmente, após o incremento 4. . . . .	43

6.8	Chapa retangular com uma trinca bifurcada interna ( $H/W = 1.0$ , $a/W = 0.025$ e $b/a = 1.0$ ) e tração uniforme $\sigma$ nas extremidades. . . . .	44
6.9	Forma final da trinca bifurcada após um crescimento à fadiga devido a $4,780,649 \times 10^6$ ciclos de carga. . . . .	45
6.10	Fatores de intensidade de tensão, resistência residual e vida da trinca bifurcada, ao longo do crescimento da trinca à fadiga devido a $4,780,649 \times 10^6$ ciclos de carga. . . . .	45
6.11	Chapa retangular com duas trincas paralelo-enviesadas internas ( $h/b = 1.0$ , $2a/d = 0.2$ , $e/f = 3.0$ ) e tensão $\sigma$ aplicada nas extremidades. . . . .	46
6.12	Forma final das trincas paralelo-enviesadas internas após um crescimento à fadiga da trinca devido a $2.40974 \times 10^3$ ciclos de carga, considerando $da/dN = 4.624 \times 10^{-12} K^{3.3}$ . . . . .	47
6.13	Fatores de intensidade de tensão, resistência residual e vida à fadiga das trincas paralelo-enviesadas internas, ao longo do crescimento à fadiga devido a $2.40974 \times 10^3$ ciclos de carga, considerando $da/dN = 4.624 \times 10^{-12} K^{3.3}$ . . . . .	48
6.14	Chapa com uma linha de furos, com trincas, de fixadores ( $h/w = 0.5$ , $d/w = 0.05$ ) com tração uniforme $\sigma$ aplicada nas extremidades da chapa e, os números de referência das trincas. . . . .	49
6.15	Geometria inicial do primeiro cenário de MSD. . . . .	50
6.16	Percursos e vida à fadiga do primeiro cenário de MSD, ao longo de 20 incrementos de crescimento das trincas. . . . .	51
6.17	Configuração deformada do painel – 1ª coalescência, no primeiro cenário de MSD. . . . .	52
6.18	Configuração deformada do painel – 2ª coalescência, no primeiro cenário de MSD. . . . .	53
6.19	SIF do crescimento das trincas à direita do primeiro e do terceiro furos, no primeiro cenário de MSD. . . . .	54
6.20	RS do crescimento das trincas à direita do primeiro e do terceiro furos, no primeiro cenário de MSD. . . . .	55
6.21	Geometria inicial do segundo cenário de MSD. . . . .	56
6.22	Percursos e vida à fadiga do segundo cenário de MSD, ao longo de 18 incrementos de crescimento das trincas, que correspondem a 86,334,740 ciclos de carga. . . . .	57
6.23	Configuração deformada do painel – 1ª coalescência, no segundo cenário de MSD. . . . .	58
6.24	Configuração deformada do painel – 2ª coalescência, no segundo cenário de MSD. . . . .	59
6.25	SIF do crescimento das trincas à direita do segundo e do terceiro furos, no segundo cenário de MSD. . . . .	60

6.26 RS do crescimento das trincas à direita do segundo e do terceiro furos, no segundo cenário de MSD. . . . .	61
---	----

# LISTA DE SÍMBOLOS E NOMENCLATURA

## Símbolos do Alfabeto Grego

- $\beta$  Ângulo de correção para a direção tangente  $\theta_{t(n)}$ , prevista pelo critério de máxima tensão principal
- $\Delta K_{eff}$  Variação do fator de intensidade de tensão efetivo
- $\delta_{ij}$  Delta de Kronecker
- $\Gamma_c$  Trinca livre de tração
- $\nu$  Coeficiente de Poisson
- $\sigma_y$  Tensão de escoamento do material
- $\sigma_{c*}$  Resistência residual, calculada para o comprimento inicial da trinca
- $\sigma_c$  Resistência residual
- $\sigma_r$  Tensão aplicada de referência
- $\theta_{t(n+1)}$  Direção do próximo incremento de extensão de trinca
- $\theta_t$  Coordenada angular da tangente ao percurso da trinca, calculada

## Símbolos do Alfabeto Latino

- $f_{\Gamma}^{\cdot}$  Símbolo integral do valor principal de Cauchy
- $f_{\Gamma}^{\times}$  Símbolo integral do valor principal de Hadamard
- $a$  Comprimento da trinca
- $C$  Constante dependente do material, na lei de Paris
- $c_{ij}(P)$  Coeficiente dado por:  $\frac{1}{2}\delta_{ij}$
- $da$  Comprimento do incremento de trinca
- $dN$  Número incremental de ciclos de carga
- $D_{ijk}(P, Q)$  Derivada de  $U_{ij}(P, Q)$
- $E$  Módulo de elasticidade

$i$	$i$ -ésima iteração de predição-correção da direção de extensão da trinca
$ij$	Componentes cartesianas
$J$	Valor da Integral J
$J^{II}$	Componente da Integral J petinente ao modo II
$J^I$	Componente da Integral J petinente ao modo I
$K_{Ic}$	Resistência à fratura
$K_{Ieq*}$	Fator de intensidade de tensão equivalente do modo I, calculado para o comprimento inicial da trinca
$K_{Ieq}$	Fator de intensidade de tensão equivalente do modo I
$K_{II}$	Fator de intensidade de tensão do modo II
$K_I$	Fator de intensidade de tensão do modo I
$m$	Constante dependente do material, na lei de Paris
$N$	Número de ciclos de carga
$n$	$n$ -ésimo incremento de extensão de uma trinca ativa
$n_i$	Componente $i$ -ésima da normal unitária que aponta para fora do contorno no ponto $P$
$P$	Ponto de contorno da trinca
$p^i$	Localização da ponta da trinca na iteração $i$
$Q$	Ponto de contorno do domínio
$R$	Razão de amplitude de tensão do ciclo de carga
$r$	Distância medida a partir da ponta da trinca
$r_y$	Diâmetro da zona plástica na ponta da trinca
$S$	Contorno arbitrário circundando a ponta da trinca
$S_{ijk}(P, Q)$	Derivada de $T_{ij}(P, Q)$
$t_j$	Componentes de tração
$T_{ij}(P, Q)$	Solução fundamental de Kelvin para tração
$u_i$	Componentes de deslocamento

$U_{ij}(P, Q)$  Solução fundamental de Kelvin para deslocamento

$W$  Densidade de energia de deformação

### **Nomenclatura**

CAPES Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

ELSEVIER Editora holandesa de literatura médica e científica

FIT Fator de Intensidade de Tensão

HCE *Hybrid Crack Element*

MEC Método dos Elementos de Contorno

MECD Método dos Elementos de Contorno Dual

MEF Método dos Elementos Finitos

MSD *Multiple Site Damage*

NTSB *National Transportation Safety Board*

PUM *Partition of Unity Method*

RS *Residual Strength*

SIF *Stress Intensity Factors*

XFEM *Extended Finite Element Method*

# 1 - INTRODUÇÃO

Falha catastrófica por fratura de estruturas de engenharia é causada por trincas que se estendem além de um comprimento seguro. Trincas, presentes de alguma forma em todas as estruturas, ou como resultado de defeitos de fabricação ou como dano localizado em função do uso, podem crescer. O crescimento da trinca conduz a um decréscimo na resistência estrutural. Assim, quando o carregamento de serviço não pode ser sustentado pela resistência residual atual, ocorre fratura levando à falha da estrutura. Fratura, o evento final catastrófico que aparece muito rapidamente, é precedida do crescimento de trinca que se desenvolve lentamente durante as condições normais de serviço, principalmente por fadiga devido aos ciclos de carga.

A mecânica da fratura linear elástica pode ser usada para descrever o comportamento das trincas. O postulado fundamental desta área de estudo é que o comportamento da trinca é determinado exclusivamente pelos valores dos fatores de intensidade de tensão, que são uma função do carregamento aplicado e da geometria da estrutura trincada e, assim, desempenham um papel fundamental nas aplicações da mecânica da fratura linear elástica.

Os processos de crescimento de trinca são simulados com uma análise incremental de extensão da trinca. Para cada incremento de extensão da trinca, uma análise de tensão é realizada e os fatores de intensidade de tensão são calculados. Os percursos das múltiplas trincas, previstos assim de forma incremental, são calculados através de um critério definido em termos dos fatores de intensidade de tensão.

A geometria das estruturas de engenharia que continuamente muda com a extensão de múltiplas trincas, requer o uso de métodos numéricos para calcular os fatores de intensidade de tensão. O método dos elementos de contorno (MEC) é uma técnica numérica bem estabelecida na comunidade de engenharia, veja Brebbia [1] e Brebbia, Telles e Wrobel [2]. O método dos elementos de contorno tem sido aplicado com sucesso aos problemas lineares elásticos em domínios que não contém trincas. Para problemas de trinca simétricos somente um lado da trinca precisa ser modelado e uma análise com o MEC para uma região única pode ser usada. Entretanto, numa análise de uma região única, a solução de problemas gerais de trinca não pode ser obtida com a aplicação direta do MEC, porque a sobreposição das bordas da trinca causa um problema mal postado. Entre as técnicas idealizadas para superar essa dificuldade, as mais gerais são o método das sub-regiões, apresentado por Blandford, Ingraffea e Liggett [3] e o método dos elementos de contorno dual (MECD), pioneiramente apresentado na Elasticidade por Portela, Aliabadi e Rooke [4]. A principal

desvantagem do método das sub-regiões é que a introdução de contornos artificiais, que conectam as trincas ao contorno tal que o domínio seja particionado em sub-regiões sem trincas, é não única e assim o método não pode ser facilmente implementado em um procedimento automático para simular o crescimento de múltiplas trincas.

Por outro lado, o MECD é a técnica idealizada mais eficiente para superar essa dificuldade. Ele introduz duas equações independentes, as equações integrais de contorno de deslocamento e de tração, com a equação de deslocamento aplicada por colocação em uma das superfícies da trinca e a equação de tração na outra. Com esta estratégia, problemas de modo misto gerais podem ser resolvidos em uma formulação de contorno de região única, com ambas as superfícies da trinca discretizadas com elementos de contorno. O uso das equações integrais duais foi primeiro reportado por Bueckner [5], em problemas de trinca, e por Watson [6], no método dos elementos de contorno. A base teórica do MECD foi apresentada por Hong e Chen [7]. Um artigo com uma completa revisão do método dos elementos de contorno dual foi apresentado por Chen e Hong [8].

Este trabalho trata da aplicação do MECD na análise do crescimento de múltiplas trincas utilizando a mecânica da fratura linear elástica. As equações integrais de contorno duais são apresentadas e, também, a estratégia definida de modelagem da trinca e o cálculo dos fatores de intensidade de tensão através da Integral J. Uma análise incremental de extensão das trincas é realizada para determinar o percurso das trincas. Para cada incremento da análise, em que as extensões da trinca são modeladas com novos elementos de contorno, o MECD é aplicado para a análise de tensão e a Integral J é usada para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão. A análise incremental é baseada numa técnica de predição-correção para definir a direção das múltiplas trincas em cada incremento; o critério da máxima tensão principal, para direção do crescimento da trinca, é introduzido para determinar a direção real de cada extensão de trinca. O número de ciclos de carga do incremento corrente da análise é calculado com a lei de Paris, para a trinca dominante. Com este valor, e ainda com a lei de Paris, a extensão das múltiplas trincas é corrigida. Também, será abordada neste trabalho a coalescência de trincas com base no critério proposto por Swift [49]. Este critério estabelece que um ligamento, que é a extensão de material que separa duas pontas de trinca, falhará se a soma das extensões das duas zonas plásticas das duas pontas de trinca igualar à extensão do ligamento. Os resultados dessas análises incrementais do crescimento de múltiplas trincas à fadiga e da coalescência são apresentados para várias geometrias.

## **1.1 - MOTIVAÇÃO**

Assim como em outras áreas da engenharia, na engenharia de aviação os acidentes com

aviões são fontes de ensinamentos e ajudam a avançar o conhecimento e conseqüentemente aumentar a segurança dos usuários. Entidades como o *National Transportation Safety Board* (NTSB) dos Estados Unidos da América documentam detalhadamente os estudos realizados para interpretar as causas desses acidentes. Alguns casos marcantes, em virtude de suas conseqüências, são abordados por Wanhill [50], nomeadamente as perdas dos aviões Comet e o acidente ocorrido com o Boeing 737-200 da Aloha Airlines em 1988. O Comet I, desenvolvido pela Havilland Aircraft Company do Reino Unido, foi o primeiro avião a jato comercial. A Figura 1.1 ilustra algumas dessas aeronaves em pleno voo.

Concebido para grande altitude, entrou em serviço em 1951. Em 1954 ocorreram trágicos acidentes com esses aviões após 1286 e 903 voos, que tiveram como origem a propagação de trincas de fadiga conduzindo à desintegração da cabine pressurizada, matando dezenas de pessoas. A investigação das causas dos acidentes revelou que, embora concebidos e testados para as condições de serviço, o projeto apresentava deficiências quanto à detenção da propagação das trincas (*crack arrest capability*). Em particular, qualquer trinca longitudinal atingindo o seu comprimento crítico de propagação, continuaria a propagar-se instavelmente até a completa ruptura da fuselagem, ocasionando a desintegração da estrutura. Um fato curioso é que as janelas empregadas nos aviões eram grandes e quadrangulares, o que favorecia a concentração de tensão nos cantos e a propagação de trincas. Após esses acidentes as aeronaves passaram a ser concebidas com janelas pequenas e ovais.

O acidente com o Boeing 737-200 da Aloha Airlines, felizmente com muito menos perdas de vidas do que com os acidentes dos Comet, deu lições importantes quanto à resistência à fadiga. A cerca de 7300 m de altitude, parte da fuselagem se destacou do avião, criando uma súbita descompressão da cabine. O avião perdeu a parte superior da fuselagem, acima do piso da cabine, ao longo de cerca de 5,5 m de comprimento desde a porta da entrada, conforme pode ser visto nas Figuras 1.2 e 1.3. Foram perdidos também os reforços da fuselagem em toda essa área, mas, ainda sim, foi possível a aterrissagem do avião danificado. As investigações das causas do acidente revelaram a ocorrência de danos na estrutura da fuselagem, particularmente devido à coalescência de pequenas trincas (*Multiple Site Damage - MSD*) de fadiga emanando de furos de rebites adjacentes, ao longo de uma junta de sobreposição da fuselagem, o que diminuiu a capacidade resistente da estrutura.

Um outro problema que foi detectado envolveu os ensaios realizados pelo fabricante. Por economia, uma fuselagem que tinha sido sujeita a ensaio de pressão até ao carregamento último, foi em seguida ensaiada à fadiga. Os resultados do ensaio de fadiga foram melhorados pelas tensões residuais de compressão originadas pelo ensaio de pressão anterior: tensões residuais de compressão, resultantes desse carregamento inicial, retardaram o desenvolvimento de trincas de fadiga e, em conseqüência disso, não havia



Figura 1.1: Jatos Comet em pleno voo. Fonte: Página "Inspeção de Equipamentos: Estudo de Casos".<sup>1</sup>

indicações de que a fuselagem era inadequada do ponto de vista da resistência à fadiga.

Essas catástrofes, somadas a outras que ocorreram na sequência, revelaram a necessidade de conceber a estrutura da fuselagem dotando-a da capacidade de deter trincas que possam se desenvolver e contribuíram decisivamente para uma nova filosofia de projeto, incorporando tolerância ao dano.

Segundo Castro *et al.* [51], acompanhando o fenômeno da fadiga, as aeronaves foram sendo projetadas de forma a não desenvolverem trincas durante uma vida de serviço previamente definida. Os acidentes com os aviões Comet e o progresso da Mecânica da Fratura a partir de meados do século XX fez com que o projeto considerasse a tolerância ao dano, que é admitido desde que a sua evolução seja controlada. Desta forma, conseguiram-se economias de peso, mas, simultaneamente passaram a ser necessárias inspeções periódicas durante a vida útil da aeronave. O balanço entre custo-benefício em virtude dessas inspeções é positivo.

De acordo com Kebir *et al.* [52], MSD é uma configuração de pequenas trincas que pode ser encontrada em aviões em envelhecimento e que adversamente pode afetar a tolerância ao

---

<sup>1</sup>Disponível em: <http://inspecaoequipto.blogspot.com.br/2014/02/caso-060-avioes-comet-falhas-por-fadiga.html>; acesso em dez/2015.



Figura 1.2: Boeing 737-200 da Aloha Airlines após o acidente em 1988 - fotografia 1. Fonte: Página "Inspeção de Equipamentos: Estudo de Casos". <sup>1</sup>



Figura 1.3: Boeing 737-200 da Aloha Airlines após o acidente em 1988 - fotografia 2. Fonte: Página "Inspeção de Equipamentos: Estudo de Casos". <sup>1</sup>

dano da estrutura da fuselagem. É definido como a ocorrência simultânea de várias trincas de fadiga no mesmo elemento estrutural. Este fenômeno geralmente ocorre em áreas com muitos pontos críticos (furos de fixadores, por exemplo) que estão sujeitos ao mesmo nível de tensão, como em juntas rebitadas da fuselagem. O crescimento de trincas generalizadas pode enfraquecer grandemente qualquer parte da estrutura. Eles afirmam também que, ultimamente, cerca de 50% dos aviões a jato da frota em operação têm mais de 15 anos de idade. O crescente número de aeronaves mais velhas em serviço, assim como as novas exigências de aeronavegabilidade tem incitado os fabricantes a desenvolverem métodos para entender melhor o comportamento de estruturas com múltiplas trincas. O principal objetivo é fornecer os modelos de engenharia para avaliar MSD em relação aos problemas dos programas de manutenção de aeronaves em envelhecimento, assim como para o projeto de novas.

Kebir *et al.* [52] afirmam que, assim como no caso de trinca única, o MSD pode ser dividido em fenômenos diferentes: iniciação da trinca, crescimento da trinca e resistência residual. A principal particularidade no caso de MSD é que os estágios são fortemente vinculados. O comportamento de uma trinca dependerá do comportamento das trincas adjacentes. A resistência residual da estrutura será profundamente influenciada pela configuração das trincas iniciais e dos padrões de desenvolvimento delas. Cabe ressaltar que a coalescência pode ocorrer com o crescimento das múltiplas trincas, reduzindo a resistência residual da estrutura, ou mesmo ocasionando a sua ruptura.

Um outro acidente catastrófico e marcante na engenharia estrutural ocorreu com a ponte Point Pleasant, que liga Point Pleasant (Virgínia Oeste) a Kanauga (Ohio). Ela colapsou por volta de 5h:00m p.m. de 15/12/1967. Quarenta e seis pessoas morreram, nove ficaram feridas e 31 de 37 carros que estavam na ponte caíram com ela. Vinte e quatro veículos caíram no rio Ohio e sete caíram na costa de Ohio. Não havia pedestres na ponte na hora do colapso. A colagem de fotos da Figura 1.4 e a Figura 1.5 ilustram a ponte antes e após sofrer o colapso.

De acordo com o *National Transportation Safety Board* (NTSB), a falha inicial na estrutura da ponte foi uma trinca de fadiga na borda inferior do olhal de uma barra de olhal. Essa trinca foi seguida por uma fratura dúctil na borda superior do mesmo olhal, separando a barra do conjunto estrutural de suspensão da ponte ao qual estava ligada. Imediatamente após a separação desta barra, a sua barra irmã deslizou de sua junção com pino, movendo-se para o leste e em direção à costa oeste da Virgínia, resultando que dentro de um período de cerca de 1 minuto, os 213 m do vão central, os dois vãos laterais de 116 m e as torres colapsaram. A fratura foi causada pelo desenvolvimento de uma trinca de comprimento crítico ao longo dos 40 anos de vida da estrutura, como resultado da ação na junção de corrosão sob tensão e fadiga sob corrosão.



Figura 1.4: Point Pleasant Bridge - Colagem com fotos tiradas antes e após o colapso ocorrido em 15/12/1967. Mostra também uma barra de olhal do tipo da que rompeu por fadiga e causou o colapso da ponte. Fonte: Site do Wikispaces. <sup>2</sup>

Alguns fatores que contribuíram para o colapso da ponte, foram:

- em 1927, quando a ponte foi projetada, os fenômenos da corrosão sob tensão e fadiga sob corrosão não eram admitidos passíveis de ocorrerem nas classes de materiais da ponte e sob as condições de exposição que normalmente eram encontradas, em áreas rurais;
- a locação da falha era inacessível para inspeção visual;
- a falha não poderia ter sido detectada por nenhum método de inspeção conhecido no estado da arte atual, sem desmontar a junção da barra de olhal.

Esse acidente acabou mudando a forma que os Estados Unidos inspecionava pontes e levou ao desenvolvimento do *National Bridge Inspection Standards*.

<sup>2</sup>Disponível em: [https://failures.wikispaces.com/Silver+Bridge+\(Point+Pleasant\)+Collapse](https://failures.wikispaces.com/Silver+Bridge+(Point+Pleasant)+Collapse); acesso em dez/2015.

<sup>3</sup>Disponível em: <http://www.daldermaterialsconsulting.com/html/failure-analysis-engineering.html>; acesso em dez/2015.



Figura 1.5: Ruínas da Point Pleasant Bridge após o colapso em 15/12/1967. Fonte: Site do Edward Dalder, Ph.D. <sup>3</sup>

Diante dessas catástrofes fica evidente a necessidade de aprofundar o estudo de fenômenos como o crescimento de trincas de fadiga e a coalescência em estruturas de aeronaves, pontes e demais estruturas sujeitas a solicitações semelhantes que submetem a estrutura a elevado número de ciclos. Ao encontro dessa necessidade, este trabalho tratará da implementação do método dos elementos de contorno dual (MECD) para a análise de estruturas com múltiplas trincas e da coalescência. O MECD, proposto por Portela, Aliabadi e Rooke [4], será utilizado devido às inúmeras vantagens dele comparado aos demais métodos numéricos existentes, para a análise do crescimento de trincas, quer sejam únicas ou múltiplas e, com ou sem ocorrência de coalescência, conforme demonstrado por esses autores.

## **1.2 - ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO**

Esse trabalho está estruturado da seguinte forma: após essa introdução são apresentadas na Seção 2, as metas a serem alcançadas com o desenvolvimento desse trabalho. Já a Seção 3 traz uma revisão bibliográfica sobre os métodos numéricos aplicados na análise de fratura e, em específico, sobre as aplicações do Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD). Na sequência, Seção 4, são mostrados os fundamentos teóricos dos temas imprescindíveis à consecução dos objetivos propostos. Nesta seção serão abordados: o

MECD; os princípios para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão; os conceitos necessários ao cálculo da resistência residual e a vida à fadiga; os procedimentos para definição da direção dos incrementos de crescimentos de múltiplas trincas; os fundamentos para a extensão dos incrementos e para a análise incremental do crescimento de múltiplas trincas. Por sua vez, a Seção 5, relata a metodologia a ser seguida para o atingimento das metas estabelecidas. Na Seção 6 será feita a aplicação dos programas desenvolvidos a partir de exemplos amplamente conhecidos por essa área de análise da engenharia e, também, ilustrado a eficácia dos procedimentos de análise adotados nesse trabalho, comparando-se os resultados obtidos a partir desses exemplos com aqueles obtidos e publicados por pesquisadores reconhecidos nesse campo da engenharia. Finalmente, a Seção 7 apresenta as conclusões e as sugestões para futuros desenvolvimentos.

## 2 - OBJETIVOS

Implementar o MECD, proposto por Portela, Aliabadi and Rooke [4], para a análise do crescimento de múltiplas trincas devido à fadiga e análise da coalescência de trincas alinhadas, em domínios bidimensionais. Essa implementação será complementar aos programas já desenvolvidos, em Fortran, por Portela, que permitem a análise do crescimento de uma única trinca.

Também, implementar a geração gráfica automática dos resultados das análises, como: configuração indeformada com a malha de discretização com elementos de contorno; configuração deformada da estrutura, percurso de propagação e a coalescência das trincas; percurso de propagação e a coalescência das trincas em função do número de ciclos de carga necessários; gráficos de resistência residual (RS) e dos fatores de intensidade de tensão (FITs), ambos em função do número de incrementos de extensão das trincas. E, apresentar essas saídas gráficas ao usuário, em tempo de execução, assim como permitir o salvamento delas em arquivo eletrônico. Isso dota o analista de ferramentas robustas e imprescindíveis nesse tipo de análise, já que esses resultados gráficos propiciam a validação dos dados de entrada e a análise crítica concernente à coerência dos dados de saída com a teoria e os procedimentos adotados. Além de manter a memória das análises executadas.

Por fim, validar os programas desenvolvidos a partir de exemplos já conhecidos na bibliografia correlata, conforme apresenta a Seção 6, e que exigem robustez, precisão e flexibilidade dos programas e do método numérico empregados.

## 3 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 3.1 - MÉTODOS NUMÉRICOS APLICADOS NA ANÁLISE DE FRATURA

Dentro dos limites da análise linear elástica, o campo de tensão é infinito na ponta de uma trinca. Isto foi primeiramente reportado por Brahtz [9] e depois por Williams [10], quem, após uma investigação da forma analítica dessas singularidades, demonstrou que sob todas as combinações possíveis das condições de contorno, a tensão se torna infinita na ponta de uma trinca. De um ponto de vista físico, campos elásticos infinitos não fazem sentido. Todavia, tensões infinitas não podem ser ignoradas já que sua presença indica que novos fenômenos (isto é, plasticidade, fratura, etc) podem ocorrer, gerando dano localizado em situações práticas. Neste trabalho, o termo *singularidade* é usado para denotar os casos em que o campo de tensão elástica se torna infinito. Se  $r$  denota a distância medida a partir da ponta da trinca, o campo de tensão é da ordem  $r^{-1/2}$ , que se torna singular quando  $r$  tende a zero. O fator de intensidade de tensão (SIF), definido na ponta da trinca, é uma medida da intensidade dessa singularidade.

A presença da singularidade de tensão no modelo numérico cria dificuldades numéricas consideráveis em virtude da necessidade de representar simultaneamente ambas as tensões singular e a finita no modelo numérico. A performance das mais importantes abordagens que tem sido idealizadas para superar essa dificuldade, no método dos elementos finitos (MEF), no método dos elementos finitos estendidos (XFEM), no método dos elementos de contorno (MEC) e em métodos sem malha, são sucintamente revisadas na sequência.

Um procedimento comum, usado nas aplicações iniciais da mecânica da fratura com o método dos elementos finitos, é ignorar a presença de singularidade e tentar diminuir seu efeito na solução geral usando refinamento da malha na vizinhança da ponta da trinca. O valor numérico das componentes da tensão calculadas na ponta da trinca será sempre finito, mas, pode ser feito tão grande quanto desejado aumentando-se o refinamento da malha. Obviamente, este procedimento é dependente da malha e, se ele converge, produzirá uma taxa de convergência lenta em todo o domínio do problema, como mostrado por Tong *et al.* [11]. Isto é obviamente uma consequência da impossibilidade de representar simultaneamente ambas as tensões singular e a finita no modelo numérico, simplesmente com um procedimento de refinamento de malha. Nessa abordagem, os fatores de intensidade de tensão são calculados a partir de um procedimento de correlação,

envolvendo uma comparação entre os resultados numéricos do campo de deslocamento ou do de tensão e as respectivas soluções analíticas, representadas na forma de uma expansão em séries de autofunções em volta da ponta da trinca. Tipicamente, os fatores de intensidade de tensão obtidos a partir desse procedimento de correlação nos pontos nodais da face da trinca, são então extrapolados para a ponta da trinca. Consequentemente, os fatores de intensidade de tensão não podem ser computados precisamente somente com o procedimento de refinamento da malha. Isto é mostrado, por exemplo, no trabalho de Portela *et al.* [4], onde os valores dos fatores de intensidade de tensão, calculados por um procedimento de correlação dos deslocamentos, são comparados com aqueles valores obtidos com a técnica da Integral J, para vários problemas de trinca analisados com o método dos elementos de contorno dual.

O uso de elementos finitos isoparamétricos *quarter-point*, introduzidos por Henshell [12] e Barsoum [13], sugeriu a aplicação destes elementos na ponta da trinca, como uma alternativa ao procedimento de refinamento da malha. Entretanto, enquanto os elementos finitos *quarter-point* representam o comportamento de deslocamento  $r^{1/2}$  e introduz uma singularidade  $r^{-1/2}$  no campo de tensão, o uso de elementos *quarter-point* no método dos elementos de contorno, no qual deslocamentos e trações são aproximados independentemente, permite somente que o comportamento de deslocamento seja representado apropriadamente. Esta característica foi notada primeiramente por Cruse *et al.* [14], quem introduziu os elementos de contorno *quarter-point* com tração singular para a correta representação da singularidade do campo de tensão. Os fatores de intensidade de tensão podem ser calculados a partir dos elementos *quarter-point* por um procedimento de correlação de deslocamento. A aplicação deste procedimento sobre elementos *quarter-point*, apresentada primeiro por Blandford *et al.* [15], era chamada fórmula *two-point* por Smith [16]. O cálculo dos fatores de intensidade de tensão a partir dos elementos de contorno *quarter-point* de tração singular foi apresentado por Martinez *et al.* [17], quem tem mostrado que o uso de valores nodais de tração na ponta da trinca de elemento singular é menos sensível à discretização do que qualquer um dos procedimentos de correlação de deslocamento. Em geral, a precisão dos fatores de intensidade de tensão, calculados a partir dos elementos de contorno *quarter-point* pelo procedimento de correlação de deslocamento, depende do tamanho desses elementos, como relatado por Harrop [18], quem estudou o caso dos elementos finitos *quarter-point* e concluiu que é impossível recomendar uma dimensão particular para o elemento *quarter-point*, adequado para todas as situações.

Enquanto os métodos mencionados acima representam a singularidade de tensão no modelo numérico, uma abordagem alternativa, desenvolvida por Symm [19] em teoria potencial, é baseada na subtração desta singularidade do modelo numérico. Em aplicações da mecânica da fratura, a técnica da subtração da singularidade é um procedimento que usa a solução

particular singular do problema de trinca para regularizar o campo de tensão e para introduzir, simultaneamente, os fatores de intensidade de tensão como incógnitas primárias adicionais no problema. Esta abordagem foi primeiro aplicada por Xanthis *et al.* [20] para problemas anti-planos e por Aliabadi *et al.* [22] para resolver problemas de trinca simétricos usando o método dos elementos de contorno. A análise de problemas simétricos com a técnica da subtração da singularidade é direta, porque as trações singulares estão entre as incógnitas do problema, quando somente metade do problema é considerado com as condições de contorno adequadas ao longo da linha de simetria.

No caso de problemas não simétricos, as trações singulares não estão entre as incógnitas dos elementos de contorno e, conseqüentemente, não existe singularidade no modelo numérico a ser subtraída. A aplicação do método dos elementos de contorno para sub-regiões é uma forma óbvia para contornar esta dificuldade, como mostrado por Aliabadi [21]. Entretanto, contornos artificiais introduzidos por este método não são estritamente necessários na análise de um problema de trinca. Um estratégia alternativa, desenvolvida por Portela *et al.* [23], primeiro introduz equações de tensão de um ponto interno, aproximando à ponta da trinca, como incógnitas primárias na formulação de elemento de contorno. Então, o campo de tensão, singular neste ponto interno, pode agora ser regularizado com a técnica da subtração da singularidade. A extensão dessa técnica de subtração de singularidade para a análise do modo de abertura pura de trincas agudas foi primeiro reportada por Portela *et al.* [24].

Alternativamente, o cálculo dos fatores de intensidade de tensão pode ser baseado nas integrais de contorno que são independentes do caminho. A Integral J tem sido usada efetivamente no método dos elementos de contorno dual, como uma técnica de pós-processamento, para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão, conforme Portela *et al.* [4]. Um simples procedimento, baseado na decomposição do campo elástico em suas respectivas componentes modais simétrica e anti-simétrica, é usado para desacoplar os fatores de intensidade de tensão de um problema de modo misto. Embora esta técnica não realize uma regularização do campo elástico com a subtração da singularidade na ponta da trinca, é muito precisa porque usa o campo elástico calculado nos pontos internos, que é uma operação altamente precisa no método dos elementos de contorno devido ao uso das soluções fundamentais do campo elástico.

Como uma alternativa à técnica de pós-processamento da Integral J, o cálculo direto dos fatores de intensidade de tensão, como incógnitas primárias adicionais no método dos elementos de contorno dual, foi primeiro apresentado por Portela *et al.* [25]. A fim de evitar dificuldades numéricas que surgem da presença de singularidades no modelo numérico, é conveniente subtrair esta singularidade do problema original, antes de ser resolvido pelo método numérico. Esta regularização considera uma solução particular do problema e força o campo elástico original ser idêntico à esta solução particular, no ponto singular. Em

virtude da estrutura analítica da solução particular singular que representa o campo elástico na ponta da trinca, o problema modificado inclui os fatores de intensidade de tensão como incógnitas primárias adicionais. Finalmente, o método numérico pode ser facilmente aplicado para resolver o problema modificado, que é agora regular, e conseqüentemente conduz a soluções altamente precisas mesmo com malhas não refinadas (grosseiras). Apesar de sua precisão, esta técnica nunca foi aplicada para simular processos de crescimento de trinca.

No MEF, o elemento de ponta de trinca híbrido (HCE), veja Tong *et al.* [11], é um método muito preciso para o cálculo direto dos fatores de intensidade de tensão e coeficientes de termos de ordem superior da expansão de Williams, como reportado por Karihaloo *et al.* [26] e Xiao *et al.* [27]. O HCE representa uma trinca com um único superelemento que é conectado de forma compatível com os elementos finitos em volta. É muito eficiente na análise de corpos com muitas trincas, como reportado por Zeng *et al.* [28]. O HCE é formulado de um funcional variacional simplificado usando deslocamento assintótico truncado da ponta da trinca e expansões de tensão e deslocamento de contorno entre elementos compatíveis com os elementos finitos regulares. Em sua implementação, uma malha de elementos finitos geral é usada formando o HCE a partir dos elementos em volta da trinca. Apesar de sua precisão, o uso do HCE apresenta algumas dificuldades. Efetivamente, a exclusão dos modos de corpo rígido nos deslocamentos assintóticos truncados cria saltos entre estes deslocamentos e os deslocamentos dos elementos de contorno. Se somente o HCE for usado, a parte da trinca dentro do HCE não precisa acomodar-se à malha de elementos finitos. Entretanto, as faces da trinca distantes da ponta da trinca, fora da região do HCE, devem adaptar-se à malha de elementos finitos. Isto é mais uma desvantagem do HCE na simulação dos processos de crescimento de trinca.

Métodos sem malha, veja Belytschko *et al.* [29], têm recebido muita atenção recentemente, uma vez que eliminam a necessidade de uma malha de discretização e, assim, eles parecem demonstrar um significativo potencial para problema de contorno móvel inerente em processos de crescimento de trinca. Desde que esses métodos usam somente um conjunto disperso de pontos nodais no domínio e sem conectividade de elemento, a remalhagem requerida pelo FEM é evitada, o que simplifica dramaticamente o processo de modelagem. Revisões abrangentes dos métodos sem malha podem ser encontradas em Li *et al.* [30] e Liu *et al.* [31]. Nestes métodos, a aproximação por mínimos quadrados móveis é possivelmente o método mais usado para interpolar dados discretos com uma boa precisão. A ordem de continuidade da aproximação pode ser ajustada para o valor desejado, como reportado por Sladek *et al.* [32]. O tratamento das descontinuidades na trinca, a principal questão dos métodos sem malha modernos, tem sido modelado de diferentes formas; Carpinteri *et al.* [33] usou uma extensão virtual da trinca na direção da tangente à ponta da trinca, enquanto Wen *et al.* [34] considerou funções base enriquecidas na interpolação dos

mínimos quadrados móveis. Funções peso ou base enriquecidas, incorporando *a priori* o conhecimento de que a solução é uma função salto ao longo da descontinuidade e um campo de deslocamento assintótico na ponta da trinca, têm sido aplicadas de forma bem sucedida em problemas de fratura, como relatado por Fleming *et al.* [35], Lu *et al.* [36] e Gu *et al.* [37]. Entretanto, a principal dificuldade desta estratégia é que a área de enriquecimento tem que ser limitada quando múltiplas trincas são densamente distribuídas ou quando as pontas das trincas estão próximas aos contornos, que é uma desvantagem desta nova geração de métodos sem malha.

O método dos elementos finitos estendidos (XFEM), desenvolvido por Belytschko *et al.* [38], é uma ferramenta de modelagem numérica moderna que oferece grande flexibilidade na análise dos processos de fratura. O XFEM enriquece o espaço local de aproximação do elemento finito padrão para incorporar *a priori* o conhecimento da solução, com uma função de descontinuidade de deslocamento sobre a trinca e a solução assintótica nos nós que contornam a ponta da trinca, com o uso do método da partição da unidade (PUM), veja Melenk *et al.* [39]. Como resultado, o modelo numérico é composto de três tipos de elementos finitos: elementos não enriquecidos, elementos totalmente enriquecidos e elementos parcialmente enriquecidos, os chamados elementos *blending*. Em um elemento *blending*, somente alguns dos nós são enriquecidos, o que adiciona à aproximação termos parasitários. O erro causado por estes termos parasitários, que é parcialmente responsável pela degradação da taxa de convergência e limita a precisão do método, isso foi identificado por Chessa *et al.* [40].

Em virtude do processo de enriquecimento, o XFEM supera a necessidade de usar malhas de elementos finitos conformando com a descontinuidade da trinca, assim como a remalhagem adaptativa assim que a trinca cresce, como é o caso com o FEM. Todavia, ele não elimina completamente a necessidade de um refinamento de malha adequado na vizinhança da trinca. As principais razões por trás desta característica do método são, primeiramente, e exatamente igual ao que acontece com o FEM, a precisão da solução aumenta com o decréscimo da dimensão do elemento finito; em segundo lugar, a malha de elementos finitos é usada também para definir a geometria da trinca de forma implícita. As dimensões dos elementos devem, portanto, ser pequenas o bastante para capturar adequadamente as características da geometria da trinca e, conseqüentemente, o XFEM ainda precisa de uma malha que seja refinada o suficiente na vizinhança das trincas com relação ao comprimento característico dessas trincas. A precisão da solução dos campos locais em volta da ponta da trinca é uma consequência direta da escolha realizada pelas funções de enriquecimento que definem *a priori* o conhecimento da solução. Efetivamente, os campos de enriquecimento clássicos não são capazes de fornecer estimativas confiáveis dos fatores de intensidade de tensão, diretamente, como mostrado por Chahine *et al.* [41].

Quanto mais próximas essas funções de enriquecimento estão dos campos assintóticos exatos, melhor é a precisão da solução. Uma vez que os campos assintóticos exatos são conhecidos apenas para geometrias de trinca e cargas muito simples, esta dependência direta da precisão da solução, do processo de enriquecimento, é uma séria desvantagem do XFEM. Técnicas alternativas de enriquecimento na ponta da trinca têm sido idealizadas para simular falha e ainda permitir a estimativa direta dos fatores de intensidade de tensão. A respeito disso, Liu *et al.* [42] introduziu um método que é ainda dependente do PUM, mas com funções específicas de enriquecimento que são as séries de Williams. A área na qual os nós são enriquecidos por funções singulares pode ser diferente da área usada para extrair os fatores de intensidade de tensão, que é a área onde os graus de liberdade associados com a mesma função singular de enriquecimento são restringidos a serem iguais. A partição da unidade subjacente é inativada simplesmente atribuindo zero para os graus de liberdade regulares na zona de extração dos fatores de intensidade de tensão. Xiao *et al.* [43] têm mostrado que estas abordagens não preveem precisamente os coeficientes dos termos de ordem superior nos campos elásticos assintóticos na ponta da trinca. Formulações modernas do XFEM dependem da expansão de Williams truncada, que é dedicada somente a trincas retas. No caso geral de trincas não retas, a zona singular de enriquecimento deve ser definida numa escala em que a trinca possa ser considerada reta. Portanto, a malha de elementos finitos deve ser refinada o suficiente para se ajustar a esta escala. Estratégias tem sido desenvolvidas para lidar com estas escalas variadas que são necessárias para simular corpos com trincas. Estas estratégias podem usar métodos de energia acoplados, como apresentado por Ben Dhia *et al.* [44], métodos de decomposição do domínio, como apresentado por Guidault *et al.* [45], homogeneização, como apresentado por Belytschko *et al.* [46] ou MEF generalizado, como reportado por Kim *et al.* [47]. A característica principal do XFEM reside em sua grande flexibilidade na análise numérica do processo de fratura, alcançado pelo processo de enriquecimento implementado no espaço local de aproximação do elemento finito padrão. A precisão do XFEM é assim totalmente dependente da escolha das funções de enriquecimento usadas na formulação, a fim de aproximar o campo elástico singular na ponta da trinca.

Uma avaliação da performance dos métodos baseados no MEC e sua comparação com XFEM, na modelagem de estruturas com trincas submetidas a crescimento devido à fadiga, foi realizada por Dong e Atluri [48]. Após um completo exame de um grande conjunto de exemplos numéricos de diversos graus de complexidade, esses pesquisadores concluíram que os métodos baseados no MEC: a) são muito mais precisos que o XFEM, para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão, assim como das taxas de crescimento da trinca à fadiga; b) requerem malhas significativamente mais grosseiras do que no XFEM, e assim resulta em uma significativa economia de custo computacional e, o mais importante, uma considerável economia dos custos de trabalho humano na geração de malhas; c) requerem um esforço

mínimo para a modelagem de propagação de trincas não lineares sob fadiga, sem usar *level set* ou métodos de marcha rápida para rastrear a superfície da trinca; d) podem facilmente executar análise de fratura e fadiga de estruturas complexas, tal como estruturas trincadas reparadas com faixas de compósitos e de dano em materiais heterogêneos.

### **3.2 - APLICAÇÕES DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DUAL**

O Método dos Elementos de Contorno Dual foi pioneiramente proposto e implementado numericamente, em 1992 por Portela, Aliabadi e Rooke [4], para problemas de trinca em domínios bidimensionais no âmbito da mecânica linear elástica. As equações duais do método são as integrais de contorno de deslocamento e de tração. Quando a equação de deslocamento é aplicada em uma das superfícies da trinca e a de tração na outra, problemas gerais de trinca de modo misto podem ser resolvidos com a formulação em região única. Logo a seguir, a técnica da subtração da singularidade foi proposta por esses autores [25]. Esta técnica consiste em um procedimento de regularização que usa uma solução particular singular do problema de trinca para introduzir os fatores de intensidade de tensão como incógnitas adicionais ao problema. A análise com elementos de contorno de região única de um problema geral de trinca restringe a disponibilidade das soluções particulares singulares, válidas no domínio global do problema. Uma estratégia de modelagem, que considera uma partição automática do domínio do problema em: próximo à ponta da trinca e distante dela, foi proposta para superar esta dificuldade.

Em 1993, Mellings e Aliabadi [61], estudaram a aplicação do MECD para problemas inversos de potencial na identificação de trincas. Nessa análise a localização e a dimensão de trincas internas em estruturas bidimensionais foram obtidas. Essa metodologia foi apresentada como um suplemento aos métodos de teste não destrutivos experimentais, para mais precisão no procedimento de identificação.

No campo da mecânica da fratura dinâmica, o MECD dual foi aplicado utilizando uma formulação que não exige a integração no domínio, para problemas gerais dinâmicos de trinca em um material elástico linear. Nesse caso, integrais de domínio na equação da elastodinâmica são transformadas em integrais de contorno usando os métodos de reciprocidade dual, conforme foi proposto por Fedelinski, Aliabadi e Rooke [62].

A análise incremental da propagação de trinca em modo misto, considerando a mecânica da fratura elástica linear, com o MECD, foi feita por Portela, Aliabadi e Rooke [63]. Os processos de crescimento foram simulados com uma análise incremental de extensão de trinca baseada no critério da máxima tensão principal, que é expressa em termos dos fatores

de intensidade de tensão. Onde, para cada incremento de extensão, o MECD foi aplicado para realizar uma análise de tensão em região única da estrutura trincada e a técnica da Integral J foi usada para calcular os fatores de intensidade de tensão. Quando a extensão da trinca é modelada como novos elementos de contorno, a remalhagem não é necessária por causa da análise em região única, uma característica intrínseca do MECD.

O método dos elementos de contorno dual foi aplicado em problemas de trincas termoelásticas, por Prasad, Aliabadi e Rooke [64]. Nesse caso, o MECD não exige a discretização do domínio e permite também uma análise em região única, para problemas de trinca termoelástico em estado permanente. Os problemas são resolvidos pelo MECD, que usa equações de deslocamento e de temperatura em uma superfície da trinca e as equações de tração e de fluxo na outra superfície da trinca. As integrais de domínio são transformadas em integrais de contorno usando a técnica de Galerkin e, os fatores de intensidade de tensão (FITs) são calculados pela Integral J.

Ratificando a ampla aplicabilidade que o MECD dual tem, a análise anisotrópica de trincas em laminados compostos foi realizada por Sollero e Aliabadi [65]. Já a formulação para a mecânica da fratura elastoplástica foi apresentada por Leitao, Aliabadi e Rooke [66], em que para evitar colocação nas pontas das trincas (trincas curvadas e trincas de borda), ambas as superfícies da trinca foram discretizadas com elementos quadráticos descontínuos. Enquanto que o comportamento elastoplástico foi modelado através do uso de uma aproximação para a componente plástica do tensor de deformação na região onde a plastificação era esperada.

O MECD foi aplicado em problemas de contato de face de trinca, em 1995, por Leitao, Aliabadi e Rooke [67]. Também, em 1995, a simulação elastoplástica do crescimento de trinca à fadiga foi apresentada por Leitao, Aliabadi e Rooke [68]. No ano seguinte, Corradi, Aliabadi e Marchetti [69] apresentaram o MECD de rigidez variável para problemas de trinca elastoplástica de modo misto. Ainda em 1996, Salgado e Aliabadi [70] aplicaram o MECD para a análise de painéis enrijecidos, com trinca. Problemas transientes de trinca termoelástica foram analisados com o MECD por Prasad, Aliabadi e Rooke [71]. Em 1998, o MECD foi aplicado em problemas termoelásticos de trinca em domínio tridimensional por Dell'Erba, Aliabadi e Rooke [72]. Aliabadi, Wen e Rooke [73] apresentaram a análise com o método dos elementos de contorno dinâmico, no campo da mecânica da fratura 3D. Ainda, no âmbito do MECD dinâmico em domínios tridimensionais, a análise de trinca também foi apresentada por Wen, Aliabadi e Rooke [74]. Uma formulação dependente do tempo, do MECD, para problemas de trinca dinâmicos tridimensionais foi mostrada por Wen, Aliabadi e Young [75]. Ainda, abordando este tema, Wen, Aliabadi e Young [76], apresentaram estudos, em 1999.

O MECD mostra ser adequado à análise do crescimento de trinca em chapas carregadas

com flexão e tração. Isso foi mostrado por Dirgantara e Aliabadi [77]. Em 2001, Dirgantara e Aliabadi [78], apresentaram uma formulação do MECD para a análise, dentro da mecânica da fratura, de cascas de cisalhamento deformáveis. No campo da mecânica da fratura dinâmica anisotrópica, Albuquerque, Sollero e Aliabadi [79], apresentaram estudos utilizando o MECD. O crescimento à fadiga de trincas em domínios tridimensionais também foi estudado por Cisilino e Aliabadi [80], em 2004. A instabilidade de chapas trincadas pode ser averiguada com o MECD, o que foi mostrado por Purbolaksono e Aliabadi [81]. Problemas anisotrópicos de trinca em domínios 3D foram analisados com o MECD rápido, conforme Benedetti, Milazzo e Aliabadi [82]. O MECD rápido também foi aplicado por Wen, Aliabadi e Young [76], para a análise de problemas elastodinâmicos tridimensionais de trinca. No que concerne à modelagem de percursos curvados de trincas, estudos foram mostrados por Wen e Aliabadi [83], com o método dos elementos de contorno dual. Recentemente, em 2013, Di Pisa e Aliabadi [84] apresentaram a análise do crescimento à fadiga de trinca em estruturas de chapas montadas, com o MECD.

Diante desse breve apanhado das aplicações do MECD pode-se observar a flexibilidade e a amplitude da utilidade dele em diversos problemas da mecânica da fratura, e em várias outras áreas da engenharia. Resolvendo com precisão, eficiência, robustez e “elegância” problemas extremamente complexos e embaraçadores a outros métodos numéricos de ampla utilização na engenharia.

## 4 - FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 4.1 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DUAL

O MECD permite a análise de qualquer problema de trinca com a formulação dos elementos de contorno em uma região única, conforme representado na Figura 4.1. As

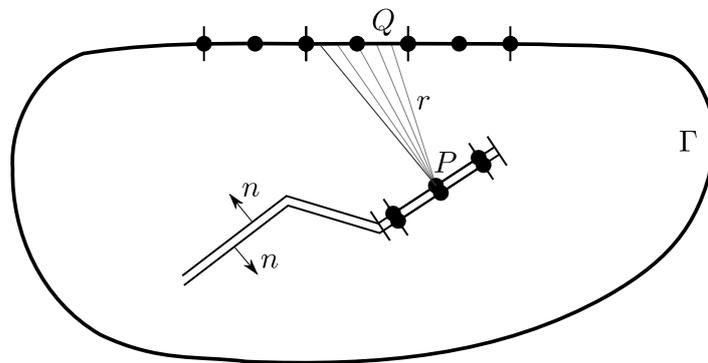


Figura 4.1: Análise em região única com o MECD.

equações nas quais o MECD é baseado são as equações integrais de contorno Somiglianas de deslocamento e de tração, conforme foi apresentado por Portela, Aliabadi e Rooke [4]. Na ausência de forças de corpo e assumindo a continuidade dos deslocamentos no ponto de contorno  $P$ , a representação da integral de contorno das componentes de deslocamento  $u_i$  é dada por

$$c_{ij}(P)u_j(P) + \oint_{\Gamma} T_{ij}(P, Q)u_j(Q)dS(Q) = \int_{\Gamma} U_{ij}(P, Q)t_j(Q)dS(Q), \quad (4.1)$$

onde  $i$  e  $j$  denotam as componentes cartesianas;  $T_{ij}(P, Q)$  e  $U_{ij}(P, Q)$  representam, respectivamente, as soluções fundamentais de Kelvin para tração e deslocamento, no ponto de contorno  $Q$ ; o símbolo  $\oint_{\Gamma}$  representa a integral de valor principal de Cauchy, e o coeficiente  $c_{ij}(P)$  é dado por  $\frac{1}{2}\delta_{ij}$  para um contorno suave no ponto  $P$ , em que  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker. Na ausência de forças de corpo e assumindo a continuidade de deformações e de trações em  $P$ , no contorno suave, as componentes de tração  $t_j$  são dados por

$$\frac{1}{2}t_j(P) + n_i(P) \oint_{\Gamma} S_{ijk}(P, Q)u_k(Q)d\Gamma(Q) = n_i(P) \oint_{\Gamma} D_{ijk}(P, Q)t_k(Q)d\Gamma(Q), \quad (4.2)$$

em que  $S_{ijk}(P, Q)$  e  $D_{ijk}(P, Q)$  contêm derivadas, respectivamente, de  $T_{ij}(P, Q)$  e  $U_{ij}(P, Q)$ ; o símbolo  $\oint_{\Gamma}$  representa o valor principal de Hadamard e  $n_i$  denota a componente  $i$ -ésima da normal unitária que aponta para fora do contorno no ponto  $P$ . As equações (4.1) e (4.2) são a base do MECD, como apresentado por Portela, Aliabadi e Rooke [4].

Em trinca livre de tração  $\Gamma_c$ , as equações (4.1) e (4.2) são simplificadas; as equações de deslocamento e de tração são dadas respectivamente por

$$c_{ij}(P)u_j(P) + \int_{\Gamma_c} T_{ij}(P, Q)u_j(Q)d\Gamma(Q) = 0 \quad (4.3)$$

and

$$n_i(P) \oint_{\Gamma_c} S_{ijk}(P, Q)u_k(Q)d\Gamma(Q) = 0. \quad (4.4)$$

O MECD transforma as equações integrais de contorno (4.1) a (4.4), adequadamente, em um sistema de equações algébricas lineares, por meio da colocação nodal e integração ao longo dos elementos de contorno. As trações e os deslocamentos desconhecidos do contorno podem então ser obtidos resolvendo-se este sistema de equações que inclui as condições de contorno.

Este trabalho adota a estratégia de modelagem do MECD apresentada por Portela, Aliabadi e Rooke [4], que considera segmentos retos de trinca discretizados com elementos de contorno quadráticos descontínuos. Elementos quadráticos contínuos são usados ao logo dos contornos gerais remanescentes do problema, exceto na intersecção entre uma trinca e uma borda, onde elementos de contorno semi-descontínuos são usados. Elementos de contorno descontínuos *self-point* são integrados analiticamente, enquanto que a quadratura Gaussiana, executada com a integração de subelementos, é realizada para as demais integrações, veja Liu, Beer e Meek [53].

## 4.2 - CÁLCULO DOS FATORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO

A Integral J é usada para calcular os fatores de intensidade de tensão. Considere um sistema cartesiano de referência definido na ponta de uma trinca livre de tração, como representado na Figura 4.2. A Integral J é definida como

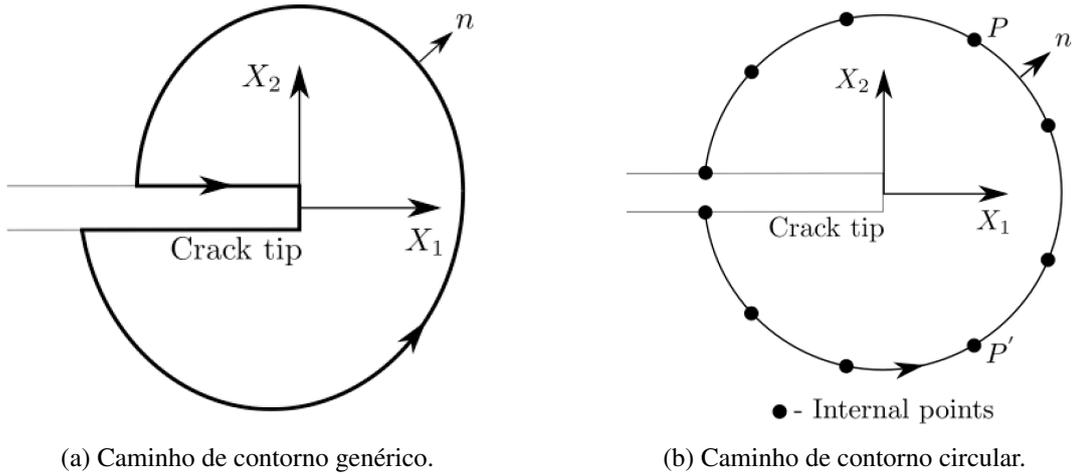


Figura 4.2: Sistema de coordenadas de referência e caminho de contorno para a Integral J.

$$J = \int_S (W n_1 - t_j u_{j,1}) dS, \quad (4.5)$$

onde  $S$  é um contorno arbitrário circundando a ponta da trinca,  $W$  é a densidade de energia de deformação,  $t_j$  são as componentes de tração e  $n_1$  é a componente- $x$  da normal (unitária) ao caminho de contorno, que aponta para fora dele. A relação entre a Integral J e os fatores de intensidade de tensão é dada por

$$J = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'}, \quad (4.6)$$

onde  $E'$  é o módulo de elasticidade  $E$  para o estado plano de tensão e  $E' = E/(1 - \nu^2)$  para o estado plano de deformação.

Para decompor os fatores de intensidade de tensão da Equação (4.6), a Integral J é representada pela soma de duas integrais como  $J = J^I + J^{II}$ , onde os índices sobrescritos indicam o modo de deformação pertinente. Para essa representação ser possível, é suficiente considerar um contorno que é simétrico em relação ao eixo da trinca, como mostrado na Figura 4.2 e decompor os campos de deslocamento e de tensão em suas componentes simétrica e anti-simétrica. Seguindo esse procedimento as componentes da Integral J podem ser expressas como

$$J^m = \int_S (W^m n_1 - t_j^m u_{j,1}^m) dS, \quad (4.7)$$

para  $m = I$  ou  $m = II$ . A relação entre as componentes da Integral J e os fatores de intensidade de tensão é dada agora por

$$J^I = \frac{K_I^2}{E'}, \quad J^{II} = \frac{K_{II}^2}{E'}. \quad (4.8)$$

A implementação desse procedimento no MECD é direta, como relatado por Portela, Aliabadi e Rooke [4]. Um caminho de contorno circular em volta da ponta da trinca é definido automaticamente com um conjunto de pontos internos em posições simétricas em relação ao eixo da trinca, como mostrado na Figura 4.3. A integração ao longo do caminho

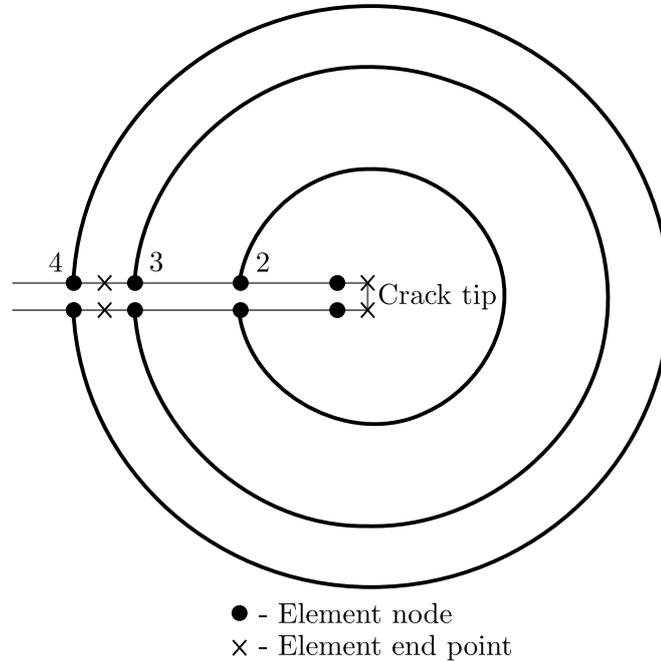


Figura 4.3: Números dos caminhos de contorno para a Integral J no MECD.

de contorno é realizada pela regra do trapézio. Por uma questão de simplicidade somente caminhos circulares, centrados na ponta da trinca e contendo um par de nós sobre a trinca, são considerados; cada caminho é referido por um número que cresce conforme o raio do contorno cresce, como representado na Figura 4.3.

O método da Integral J é efetivo para a determinação dos fatores de intensidade de tensão, porque o campo elástico interior pode ser precisamente determinado ao longo do caminho de contorno com o método dos elementos de contorno dual, uma vez que a variação exata do campo elástico interior é construída dentro da solução fundamental do problema.

### 4.3 - RESISTÊNCIA RESIDUAL E VIDA À FADIGA

Numa análise de modo misto, um fator de intensidade de tensão equivalente do modo I pode ser definido, veja Broek [54]. Para o critério da máxima tensão principal, é dado por

$$K_{Ieq} = K_I \cos^3 \frac{\theta_t}{2} - 3K_{II} \cos^2 \frac{\theta_t}{2} \sin \frac{\theta_t}{2}. \quad (4.9)$$

A condição de fratura então segue de  $K_{Ieq} = K_{Ic}$ , em que  $K_{Ic}$  é a resistência à fratura.

Um diagrama de resistência residual mostra a variação na carga máxima que a estrutura trincada pode suportar, a carga que causa instabilidade à fratura, conforme o comprimento da trinca varia. Para um dado comprimento de trinca, a relação entre a resistência residual  $\sigma_c$  e a tensão aplicada de referência  $\sigma_r$  é definida por

$$\sigma_c = \frac{K_{Ic}}{K_{Ieq}} \sigma_r. \quad (4.10)$$

A cada passo da análise incremental a resistência residual é representada convenientemente de forma normalizada como:

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_{c*}} = \frac{K_{Ieq*}}{K_{Ieq}} \quad (4.11)$$

onde  $\sigma_{c*}$  e  $K_{Ieq*}$  representam, respectivamente, a resistência residual e o correspondente fator de intensidade de tensão equivalente do Modo I, calculado para o comprimento inicial da trinca.

Em geral, o crescimento da trinca por fadiga é conduzido por carga de amplitude variável. No caso mais simples, os ciclos de carga têm uma amplitude constante e pode ser descrito por uma carga de amplitude constante e com uma razão de amplitude de tensão também constante.

Um diagrama de vida à fadiga mostra a variação no número de ciclos de carga, requeridos para estender a trinca, em função do comprimento da trinca. É calculado a partir do modelo empírico de Paris, definido como

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_{eff})^m, \quad (4.12)$$

onde  $a$  é o comprimento da trinca,  $N$  é o número de ciclos de carga,  $C$  e  $m$  são constantes dependentes do material e  $\Delta K_{eff}$  é a variação do fator de intensidade de tensão efetivo. O modelo de Tanaka foi aplicado no presente trabalho com  $\Delta K_{eff}$  definido por

$$\Delta K_{eff}^2 = \Delta K_I^2 + 2\Delta K_{II}^2. \quad (4.13)$$

A variação do fator de intensidade de tensão de cada modo individual é dado por  $\Delta K = K_{max} - K_{min} = K_{max}(1 - R)$  na qual  $R = K_{min}/K_{max} = \sigma_{min}/\sigma_{max}$  é a razão de amplitude de tensão do ciclo de carga. A integração da Equação (4.12), com a regra do trapézio, é usada neste trabalho para calcular tanto o número de ciclos de carga requerido para estender a trinca um dado incremento, quanto o incremento na extensão da trinca que resulta de um dado número de ciclos de carga.

## 4.4 - COALESCÊNCIA DE TRINCAS

Dano generalizado é um problema típico em aviões mais velhos, começando quando o montante das cargas cíclicas de pressão atuantes na fuselagem conduz ao início de trinca e propagação em vários pontos de rebite, como esquematicamente representado na Figura 4.4. Essas trincas interagem e, quando uma situação crítica é alcançada, subitamente

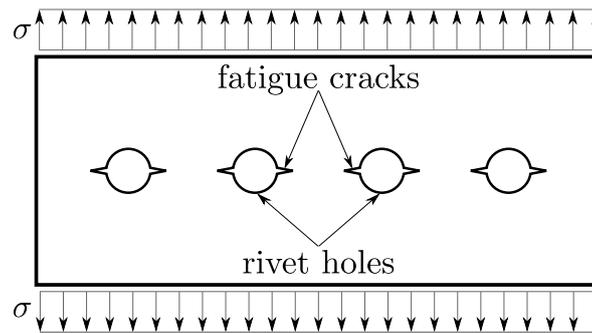


Figura 4.4: Dano generalizado em pontos de rebite da fuselagem devido à fadiga.

a coalescência de trincas (*linkup*) pode ocorrer reduzindo a resistência residual da estrutura. O cenário de falha é governado por uma trinca longa e principal que é formada por sucessivas coalescências de pequenas trincas alinhadas que reduz a integridade estrutural global.

A coalescência de múltiplas trincas é considerada neste trabalho. Por questão de simplicidade, o critério de coalescência de pontas de trincas mais extensivamente aplicado, que é o da plastificação do ligamento, também conhecido como o modelo de contato de zonas plásticas de Swift [49], é adotado aqui. Este critério é baseado na suposição que o ligamento entre duas trincas adjacentes falha e as trincas coalescem, quando suas zonas plásticas se tocam, como esquematicamente representado na Figura 4.5.

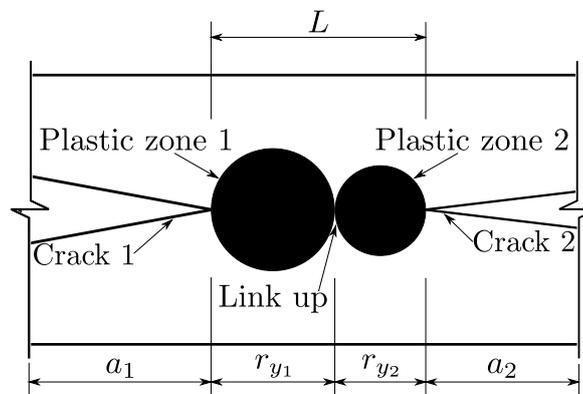


Figura 4.5: Critério do contato de zonas plásticas ou da plastificação do ligamento, para a coalescência de trincas.

A extensão da zona plástica na ponta das trincas pode ser estimada usando o modelo de Irwin ou o de Dugdale. Assim como os fatores de intensidade de tensão crescem, a extensão das zonas plásticas também crescerá até que elas se toquem e as trincas coalesçam. Neste estudo a extensão das zonas plásticas é calculada usando o modelo de Dugdale [57], expresso por

$$r_y = \frac{\pi}{8} \left( \frac{K_I}{\sigma_y} \right)^2, \quad (4.14)$$

onde  $\sigma_y$  é o valor da tensão de escoamento do material,  $r_y$  é o valor do diâmetro da zona plástica, representado na Figura 4.5, e os valores dos fatores de intensidade de tensão são determinados pela análise com o MECD em cada ciclo computacional do crescimento das trincas.

Vale ressaltar que a Equação (4.14) depende somente do FIT relativo ao modo I, isso, porque a propagação de trinca tende a acontecer nesse modo.

O comprimento calculado do ligamento plástico pode ser menor ou maior do que os incrementos correntes de extensão das trincas coalescendo. Por isso, para garantir a eficiência da análise numérica, o valor da distância efetiva de coalescência que é considerado, é o máximo entre o comprimento calculado do ligamento plástico e o comprimento dos incrementos de extensão de trinca. A coalescência é discretizada com um único novo elemento de contorno em cada face da trinca. Note que o comprimento do incremento de extensão da trinca dominante pode sempre ser definido como o resultado de um compromisso entre acurácia e custo computacional, isto é, quanto menor o comprimento do incremento de extensão da trinca, mais acurada e dispendiosa é a análise.

## 4.5 - DIREÇÃO DOS INCREMENTOS DE CRESCIMENTO DE MÚLTIPLAS TRINCAS

Entre os vários critérios que tem sido propostos para descrever a direção local do crescimento da trinca no modo misto, um dos mais comumente usados é baseado na máxima tensão principal na ponta da trinca, veja Erdogan e Sih [55]. O critério da máxima tensão principal postula que o crescimento de uma trinca ocorrerá na direção perpendicular à máxima tensão principal. Assim, a direção do crescimento da trinca local  $\theta_t$  é determinada pela condição de que a tensão de cisalhamento local seja nula, que é

$$K_I \sin \theta_t + K_{II}(3 \cos \theta_t - 1) = 0, \quad (4.15)$$

onde  $\theta_t$  é uma coordenada angular da tangente ao percurso da trinca, centrada na ponta da

trinca e medida do eixo da trinca para a ponta da mesma. Como um critério contínuo, a máxima tensão principal não leva em conta a discretização do procedimento de extensão da trinca. Portanto, numa análise incremental as trajetórias dos percursos das múltiplas trincas, previstas pela Equação (4.15), devem ser corrigidas para dar a direção real do incremento de extensão da trinca, tal que a exigência da unicidade de percurso seja satisfeita.

O procedimento aplicado para definir a direção do  $n$ -ésimo incremento de extensão de uma trinca ativa introduz um ângulo de correção  $\beta$  para a direção tangente  $\theta_{t(n)}$  prevista pelo critério de máxima tensão principal, como mostrado na Figura 4.6. Este ângulo de

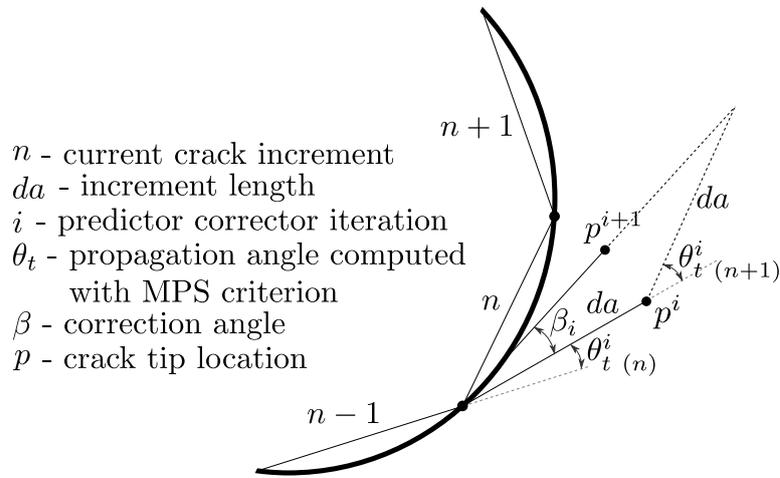


Figura 4.6: Direção da extensão incremental da trinca.

correção é dado por  $\beta = \theta_{t(n+1)}/2$ , no qual  $\theta_{t(n+1)}$  é a direção do próximo incremento de extensão da trinca, também calculado com o critério da máxima tensão principal. Esse procedimento preditor-corretor pode ser aplicado iterativamente, para todas as trincas ativas simultaneamente para considerar a interação entre elas, enquanto cada correção for menor do que a anterior. Para o corrente  $n$ -ésimo incremento de extensão das trincas ativas, a  $i$ -ésima iteração pode ser resumida como segue. Veja também o fluxograma esquemático desse algoritmo na Figura 5.1.

- Antes da primeira iteração, para cada trinca ativa calcula-se a direção da tangente ao caminho da trinca  $\theta_{t(n)}^i$  com o critério da máxima tensão principal, Equação (4.15) e estende-se a trinca um incremento para  $p^i$ ;
- Inicia-se um *loop* de iteração para prever a corrigir a direção da extensão das trincas ativas, simultaneamente;
- Realiza-se uma análise de tensão para calcular os fatores de intensidade de tensão para os incrementos de extensão da trinca corrente;

- Realiza-se um loop nas trincas ativas e com os novos fatores de intensidade de tensão e o critério da máxima tensão principal, Equation (4.15), calcula-se a direção do próximo caminho da trinca  $\theta_{t(n+1)}^i$ ;
- Define-se o ângulo de correção  $\beta^i = \theta_{t(n+1)}^i/2$ , medido a partir do incremento de extensão da trinca da iteração anterior;
- Corrige-se o incremento de extensão da trinca  $da$  para sua nova direção, dada por  $\theta_{t(n)}^{i+1} = \theta_{t(n)}^i + \beta^i$ , movendo-se a ponta da trinca para  $p^{i+1}$ ;
- Finaliza-se o loop executando na trinca ativa e volta-se ao segundo passo para atualizar o loop de iteração, enquanto  $|\beta^{i+1}| < |\beta^i|$  ou, equivalentemente  $|K_{II}(P^{i+1})| < |K_{II}(P^i)|$ .

#### 4.6 - EXTENSÃO DOS INCREMENTOS DE CRESCIMENTO DE MÚLTIPLAS TRINCAS

Quando a análise se refere ao crescimento de uma única trinca, o comprimento do incremento de extensão da trinca  $da$  pode ser definido arbitrariamente. Entretanto, algumas restrições neste comprimento são introduzidas para garantir a eficiência da análise numérica. Este incremento da extensão da trinca pode ser discretizado com um número fixo de elementos de contorno; por uma questão de simplicidade, dois pares de novos elementos de contorno idênticos são usados neste trabalho. A fim de evitar dificuldades numéricas, no que se refere ao tamanho relativo de elementos vizinhos, o comprimento do incremento da extensão da trinca é mantido entre limites convenientes definidos em termos do comprimento do elemento vizinho, calculado no ciclo anterior da análise incremental. Dessa forma, os limites do incremento de extensão de trinca são usualmente definidos como 1 e 4 vezes, respectivamente, o comprimento do elemento vizinho. Além desta restrição, o comprimento do incremento de extensão da trinca pode ser definido como resultado de uma relação direta entre precisão e custo computacional, isto é, quanto menor o comprimento do incremento de extensão da trinca, mais precisa e dispendiosa é a análise.

A análise incremental do crescimento devido à fadiga de uma única trinca é baseada na extensão da trinca com um incremento de comprimento especificado que conduz ao cálculo do correspondente número incremental de ciclos de carga necessários para estender a trinca esse incremento, através da integração da Equação (4.12).

Na análise do crescimento de múltiplas trincas, esse procedimento é usado somente para as trincas dominantes que são definidas dentro de uma pequena vizinhança do valor máximo de

$K_I$ , relativo a todas as trincas ativas, calculado em cada ciclo da análise incremental. Neste caso, a análise é baseada no número de incrementos de ciclos de carga  $dN$ , calculado a partir das trincas dominantes que estende um incremento de comprimento especificado. Este incremento  $dN$ , é atribuído a todas as trincas no ciclo computacional corrente, é então usado para calcular as extensões dos incrementos individuais de trinca  $da_i$ , através da integração da Equação (4.12). O procedimento básico usado para definir a extensão dos incrementos de crescimento de múltiplas trincas, em cada ciclo computacional da análise incremental, pode ser resumido como segue. Veja também o fluxograma esquemático desse algoritmo na Figura 5.2.

- Define-se as trincas dominantes dentro de uma pequena vizinhança do valor máximo do fator de intensidade de tensão  $K_I$ , calculado a partir de todas as trincas;
- O número incremental de ciclos de carga  $dN$ , usado para estender as trincas dominantes com o incremento de comprimento especificado  $da$ , é calculado a partir da integração da Equação (4.12);
- Para cada trinca calcula-se o comprimento do incremento da extensão da trinca  $da_i$ , através da integração da Equação (4.12), com o valor de  $dN$  obtido das trincas dominantes;
- Interrompe-se o crescimento de uma trinca sempre que seu  $da_i$  calculado, não estiver de acordo com um comprimento adequado; neste caso, armazena-se o menor valor calculado  $da_i$ , da trinca que não foi estendida, para executar um possível reinício em um ciclo posterior da análise;
- Força-se o reinício de cada trinca que não cresceu, no ciclo anterior da análise, sempre que sua extensão armazenada for maior que um comprimento adequado.

O incremento de extensão calculado de cada trinca não dominante, sempre menor do que o incremento de extensão das trincas dominantes, é também discretizado com dois novos elementos de contorno. Assim, para garantir a eficiência da análise numérica, as mesmas restrições impostas ao comprimento dos incrementos de extensão de trinca definidas para as trincas dominantes, são consideradas aqui. Incrementos superdimensionados não ocorrem, uma vez que um dado incremento de extensão das trincas dominantes é o limite. Por outro lado, incrementos subdimensionados podem atrasar seu crescimento para outro ciclo da análise incremental, como explanado anteriormente.

Um parâmetro adicional de intensidade de tensão pode ser adotado para o controle do tamanho dos incrementos de crescimento das trincas e que também pode ser utilizado para a definição de quais trincas devem continuar crescendo, quais devem entrar em dormência

(*crack arrest*) e quais devem ter o crescimento retomado. Esse parâmetro é geralmente designado como  $K_{th}$ , e também é denominado nível limiar de intensidade de tensão, que tem sido introduzido e usado para descrever o comportamento do material em situações onde, devido a ambientes agressivos, o crescimento subcrítico da trinca precede fratura catastrófica. O  $K_{th}$  descreve o nível  $K$  acima do qual pode-se observar o crescimento da trinca usando um sistema de monitoramento de extensão de trinca para um tempo especificado de observação, mas que abaixo dele tal fato não é observado. Em alguns casos, esse valor  $K_{th}$  pode corresponder a um verdadeiro limiar de intensidade de tensão para a iniciação da trinca (ou para o *crack arrest*).

#### **4.7 - ANÁLISE INCREMENTAL DO CRESCIMENTO DE MÚLTIPLAS TRINCAS**

A análise incremental de extensão de trinca assume uma discretização linear segmentada dos percursos de trinca desconhecidos. Para cada incremento de extensão da trinca, o MECD é aplicado para realizar uma análise de tensão da estrutura com trincas e a Integral J é usada para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão. Os passos desse ciclo computacional básico, repetidamente executado para qualquer número de ciclos da análise incremental, são resumidos como segue:

- Como uma inicialização, introduz-se o valor limite superior para o incremento de extensão de trinca; realiza-se uma análise de tensão com o MECD da estrutura com trincas e calcula-se os fatores e intensidade de tensão; assume-se que todas as trincas podem crescer e especifica-se uma extensão inicial de trinca  $da$ , que é o mínimo valor entre o valor limite superior dado e três vezes o comprimento do elemento da ponta da trinca, para as trincas dominantes e a metade deste valor para as trincas remanescentes;
- Calcula-se a direção da tangente ao percurso da trinca, com o critério da máxima tensão principal e define-se as trincas dominantes, dentro de uma pequena vizinhança do valor máximo do fator de intensidade de tensão  $K_I$ , calculado a partir de todas as trincas;
- Usa-se dois pares de novos elementos de contorno idênticos para discretizar os incrementos de extensão, na direção tangente, das trincas ativas;
- Corrige-se a direção dos incrementos de extensão da trinca, como explanado na Seção (4.5);

- Realiza-se uma análise de tensão com o MECD da estrutura trincada e calcula-se os fatores de intensidade de tensão;
- Corrige-se o comprimento dos incrementos de extensão de trinca, conforme explanado na Seção (4.6);
- Repete-se todos os passos acima sequencialmente até que um número especificado de ciclos da análise incremental seja atingido.

Os resultados obtidos de uma análise incremental de extensão de trincas são: diagramas dos percursos das trincas, diagramas da variação dos fatores de intensidade de tensão ao longo do percurso de cada trinca, o diagrama de vida à fadiga da estrutura e o diagrama de resistência residual ao longo do percurso de cada trinca.

## **5 - METODOLOGIA**

### **5.1 - ASPECTOS GERAIS**

Os procedimentos necessários às análises propostas nesse trabalho foram detalhados na Seção 4.

Programas, em Fortran, para a análise incremental do crescimento de uma única trinca foram desenvolvidos por Portela utilizando o MECD, também proposto por ele. Entretanto, serão implementadas novas rotinas complementares as já desenvolvidas e as modificações que forem necessárias à análise do crescimento de múltiplas trincas, da coalescência e da interação entre elas.

### **5.2 - ASPECTOS ESPECÍFICOS**

Os programas existentes que serão utilizados, citados na seção anterior, faz a análise completa da propagação de uma única trinca. Desde a análise de tensões com o MECD, crescimento da trinca, entre outros, até à emissão dos resultados das análise de forma gráfica. Excetuando-se a parte do código que aplica o MECD, os algoritmos principais são: primeiro, o preditor-corretor, que realiza a orientação do incremento de crescimento da trinca e, pode ser visto no fluxograma da Figura 5.1. Para expandir o programa e propiciar a análise do crescimento de múltiplas trincas, o código será modificado aplicando esse algoritmo em todas as trincas da estrutura sob análise. Segundo, um dos principais algoritmos propostos como complemento, para a consecução dos objetivos desse trabalho pode ser visto no fluxograma esquemático da Figura 5.2. Ele controla a extensão das trincas, inclusive define as trincas dominantes dentre as existentes na peça em análise, determina as trincas que continuam crescendo, as que entrarão em dormência e as que pararão de crescer, conforme explanado na Seção 4.6.

No que se refere à coalescência de trincas, os procedimentos explicados na Seção 4.4 serão implementados. De forma sintética, a cada extensão feita nas múltiplas trincas, será feita a verificação se as zonas plásticas à frente da ponta de cada trinca se tocam. Caso isso aconteça, será feita a união geométrica das respectivas trincas e a interrupção da propagação

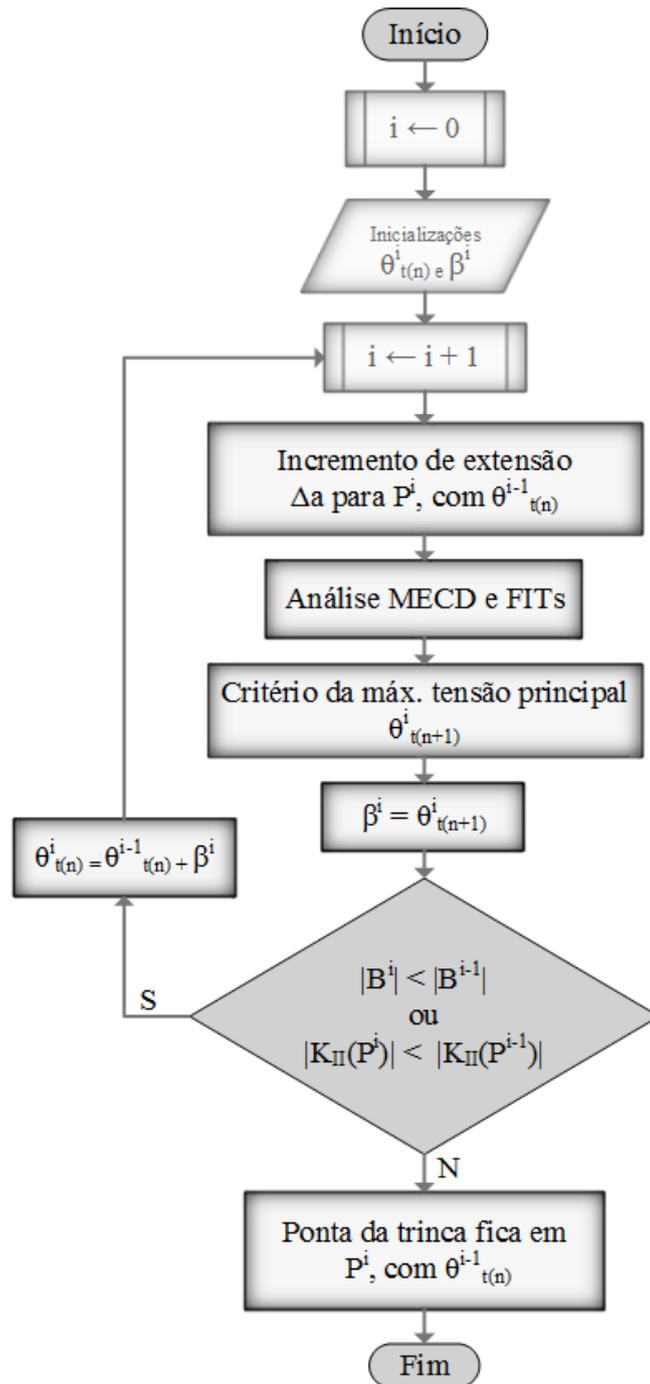


Figura 5.1: Algoritmo predictor-corrector para a extensão de uma única trinca.

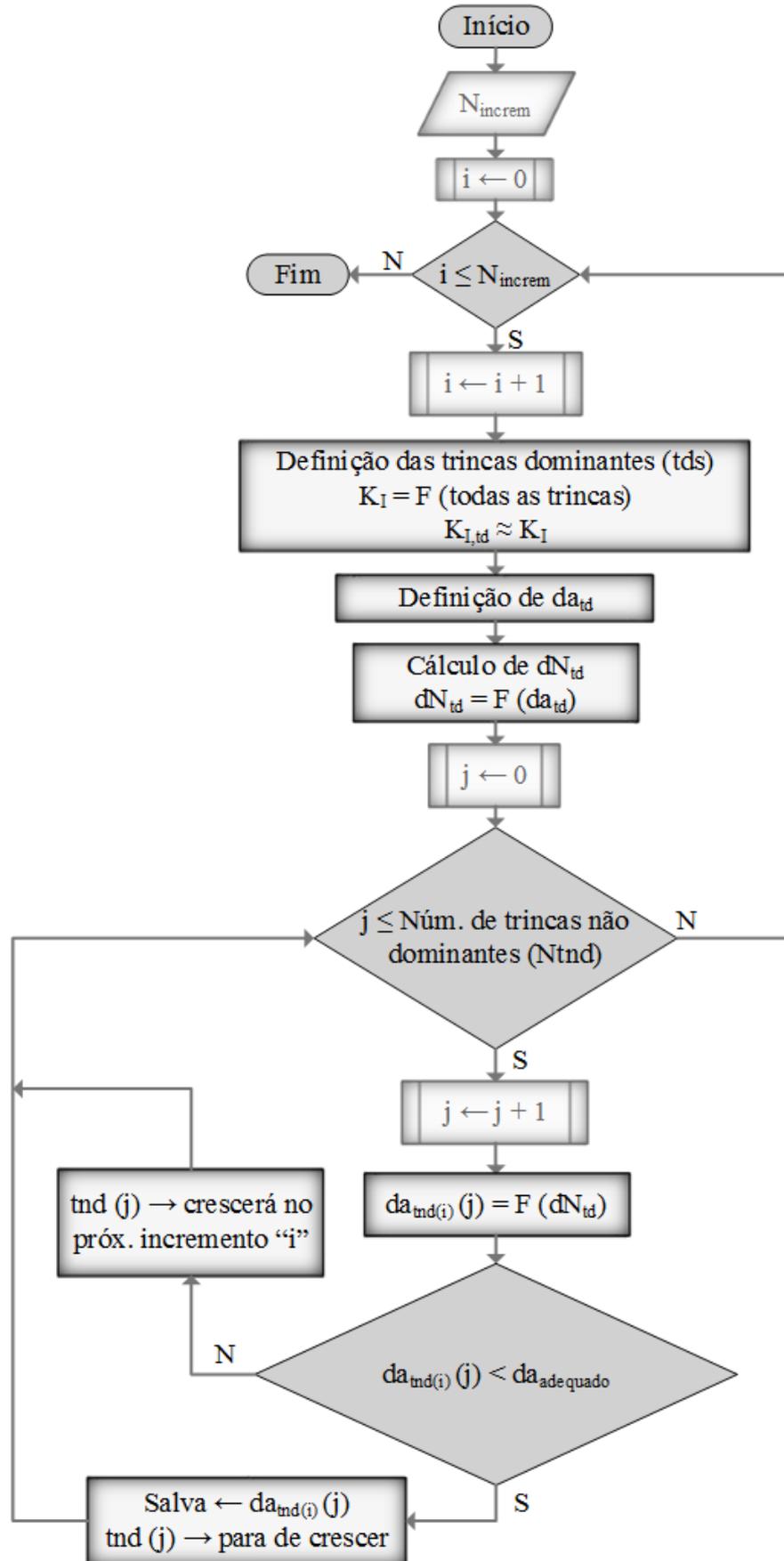


Figura 5.2: Algoritmo para propagação de múltiplas trincas.

das mesmas.

Para a validação dos programas desenvolvidos nesse trabalho e a avaliação dos resultados gerados, em comparação àqueles obtidos pela comunidade de engenharia afim, inclusive utilizando outros métodos numéricos já citados neste trabalho, alguns exemplos bem conhecidos nessa área de pesquisa serão resolvidos, conforme Seção 6.

## 6 - RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 6.1 - INTRODUÇÃO

A estratégia de modelagem do MECD, apresentada na Seção 4.1, foi usada para obter os resultados numéricos. Os fatores de intensidade de tensão foram calculados a partir da Integral J, como referido na Seção 4.2, em geral usando o caminho de contorno número 5 com 32 pontos. A equação de Paris, apresentada na Seção 4.3, foi usada para calcular a taxa de crescimento da trinca e o número de ciclos de carga de fadiga necessários para um incremento de extensão da trinca, com os parâmetros  $C = 4.624 \times 10^{-12}$  e  $m = 3.3$  e com a razão de amplitude de tensão do ciclo de carga  $R = 2/3$ , a menos que expresso de outra forma.

### 6.2 - CHAPA COM UMA TRINCA CURVADA INTERNA

Considere agora uma chapa com uma trinca curvada interna, como representado na Figura 6.1. Um dos segmentos da trinca é horizontal com comprimento  $a$ , enquanto o outro faz

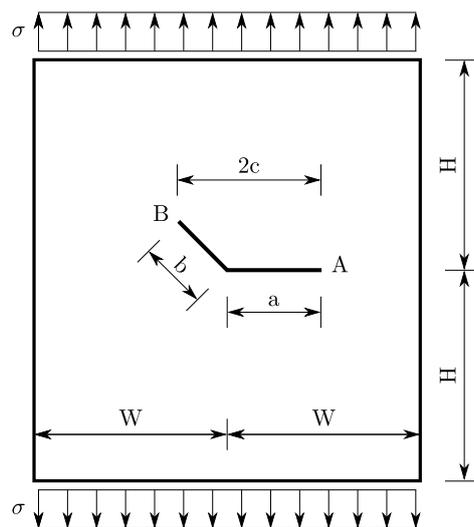


Figura 6.1: Chapa retangular com uma trinca interna curvada ( $H/W = 2.0$ ,  $a/W = 0.1$ ) e tensão  $\sigma$  remota aplicada.

um ângulo de  $45^\circ$  com a horizontal e tem um comprimento  $b$ ; a projeção horizontal total da trinca é dada por  $2c = a + b\sqrt{2}/2$ . A curva da trinca está no centro da chapa que tem altura

igual a duas vezes sua largura e é carregada nas extremidades com uma tração uniforme  $\sigma$ . Três casos foram considerados:  $b/a = 0.2, 0.4, \text{ e } 0.6$ , com  $a/W = 0.1$ . Uma malha de 48 elementos de contorno quadráticos foi utilizada, na qual os segmentos horizontal e inclinado da trinca foram discretizados com 5 e 4 elementos descontínuos, respectivamente, em cada face da trinca. Os fatores de intensidade de tensão foram obtidos para ambas as pontas A e B, da trinca. Resultados precisos para comparação foram publicados por Murakami [58].

As Tabelas 6.1 a 6.4 apresentam os valores de  $K_I/(\sigma\sqrt{\pi c})$  e  $K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi c})$ , assim como os valores apropriados da referência [58], como uma função de  $b/a$ , para as pontas A e B da trinca, respectivamente. Mesmo com a malha não refinada utilizada, os resultados obtidos

Tabela 6.1: Fator de intensidade de tensão  $K_I/(\sigma\sqrt{\pi c})$  para a trinca curvada, ponta A.

$b/a$	$K_I/(\sigma\sqrt{\pi c})$	
	Integral J	Murakami [58]
0.2	0.996	0.995
0.4	0.991	0.990
0.6	0.988	0.986

Tabela 6.2: Fator de intensidade de tensão  $K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi c})$  para a trinca curvada, ponta A.

$b/a$	$K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi c})$	
	Integral J	Murakami [58]
0.2	0.030	0.028
0.4	0.035	0.033
0.6	0.032	0.030

Tabela 6.3: Fator de intensidade de tensão  $K_I/(\sigma\sqrt{\pi c})$  para a trinca curvada, ponta B.

$b/a$	$K_I/(\sigma\sqrt{\pi c})$	
	Integral J	Murakami [58]
0.2	0.604	0.598
0.4	0.576	0.574
0.6	0.570	0.568

para este caso mostra uma excelente precisão, equivalendo aos valores de referência até à segunda casa decimal.

As dimensões da trinca curvada foram mudadas para os valores  $b/a = 0.6$  e  $a/W = 0.3$ , para realizar um análise à fadiga e melhorar os resultados gráficos. A equação de Paris foi usada com os parâmetros  $C = 4.624 \times 10^{-12}$  e  $m = 3.3$  e com a razão de amplitude de tensão do ciclo de carga  $R = 2/3$ . Um valor máximo do incremento de

Tabela 6.4: Fator de intensidade de tensão  $K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi c})$  para a trinca curvada, ponta B.

$b/a$	$K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi c})$	
	Integral J	Murakami [58]
0.2	-0.555	-0.557
0.4	-0.602	-0.607
0.6	-0.623	-0.627

extensão da trinca igual a três vezes o comprimento do menor elemento da ponta da trinca foi atribuído para a trinca dominante, em um número total de 10 incrementos de crescimento da trinca. A trinca curvada cresceu até à forma final representada na Figura 6.2, onde pode

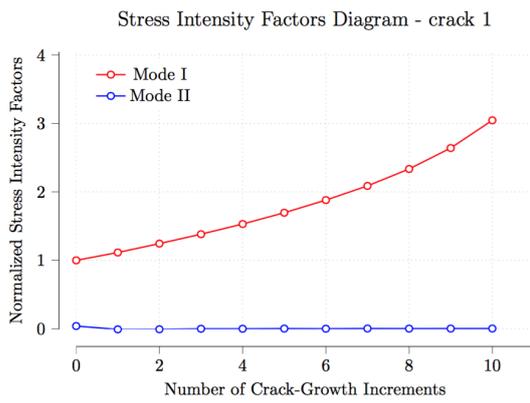


Figura 6.2: Forma final da trinca curvada, após um crescimento à fadiga devido a  $1,012,419 \times 10^9$  ciclos de carga.

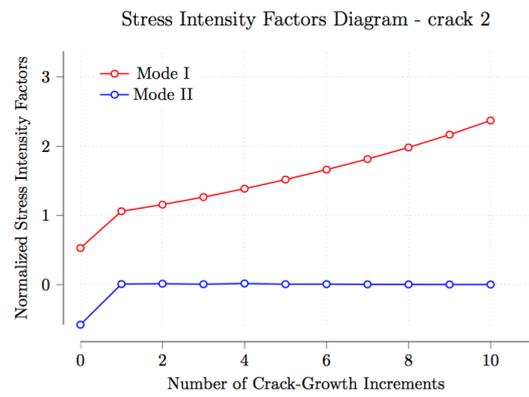
ser visto que o percurso da trinca tende a ser perpendicular ao caminho da carga, que segue aproximadamente as trajetórias de tensão que estão na direção da máxima tensão principal, em cada ponto do percurso da trinca.

Os diagramas dos fatores de intensidade de tensão e resistência residual de ambas as pontas da trinca, em função do crescimento da trinca, estão representados na Figura 6.3; eles mostram que ao longo do percurso da trinca, o fator de intensidade de tensão do modo I cresce lentamente enquanto o do modo II tende a zero rapidamente. Este resultado está de acordo com o conceito generalizado de que a extensão da trinca usualmente acontece no modo I ou próximo dele, veja Broek [60]. Além disso, a resistência residual decresce monotonicamente ao longo do percurso da trinca, como uma consequência direta da variação do fator de intensidade de tensão.

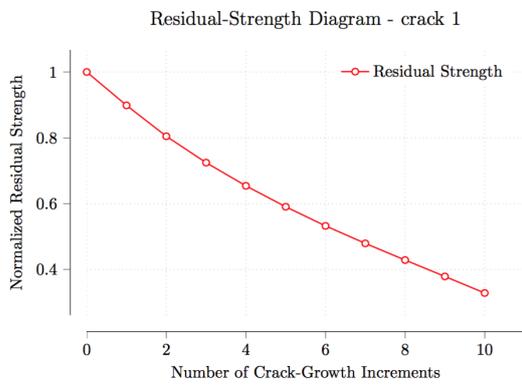
Como pode ser visto na Figura 6.3, a ponta B da trinca foi dominante durante os três primeiros incrementos de extensão da trinca, o que corresponde a  $6.523960 \times 10^8$  ciclos de carga. Nos dois incrementos subsequentes ambas as pontas da trinca assumiram o papel de trinca dominante, enquanto que a ponta A foi a dominante do 6º incremento até o fim da



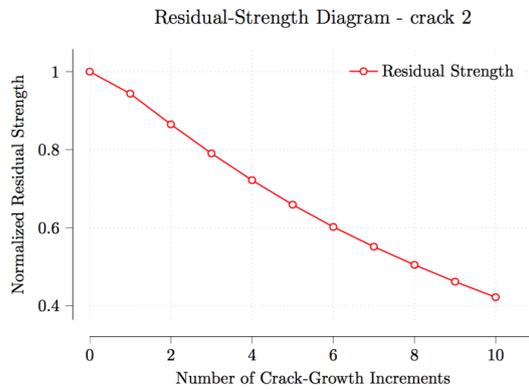
(a) SIF – ponta A da trinca.



(b) SIF – ponta B da trinca.



(c) RS - ponta A da trinca.



(d) RS - ponta B da trinca.

Figura 6.3: Fatores de intensidade de tensão e resistência residual da trinca curvada, ao longo do crescimento à fadiga devido a  $1,012,419 \times 10^9$  ciclos de carga.

análise de crescimento da trinca.

### 6.3 - CHAPA COM TRÊS TRINCAS DE BORDA

Considere agora uma chapa retangular com três trincas de borda, como mostrado na Figura 6.4. A chapa, carregada nas extremidades com uma tração uniforme  $\sigma$ , é simétrica sobre um

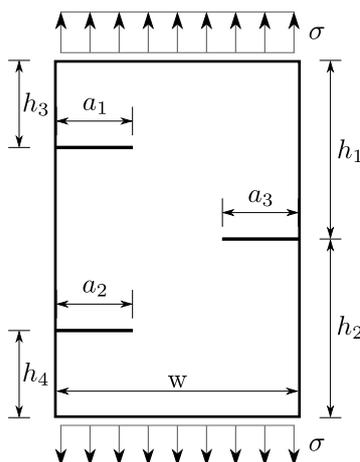


Figura 6.4: Chapa retangular com três trincas de borda ( $H/W = 2.0$ ,  $a/W = 0.1$ ) e tensão  $\sigma$  nas extremidades.

eixo horizontal contendo a trinca número 3 que está na borda direita. Uma análise de fadiga foi realizada usando a equação de Paris com os parâmetros  $C = 4.624 \times 10^{-12}$  e  $m = 3.3$  e com razão de amplitude de tensão dos ciclos de carga  $R = 2/3$ .

Uma malha de 54 elementos de contorno quadráticos foi utilizada, com 5 elementos em cada lado horizontal, 10 elementos em cada borda vertical e 4 elementos descontínuos em cada face da trinca escalonados para a frente da trinca nas razões de 0.4, 0.3, 0.2 e 0.1, nessa ordem. Um incremento de extensão de trinca igual a duas vezes o comprimento do menor elemento da ponta da trinca foi atribuído para as trincas dominantes, em um total de 14 incrementos de crescimento da trinca. As trincas cresceram até à forma final mostrada na Figura 6.5, onde pode ser visto que o critério de unicidade do percurso de trinca é satisfeito para todas as trincas, independentemente do tamanho do incremento de extensão de trinca considerado. Os diagramas SIF e RS da ponta das trincas 1 e 3, em função do crescimento delas, são apresentados na Figura 6.6; eles mostram que ao longo do percurso da trinca 1, o fator de intensidade de tensão do modo I cresce lentamente enquanto o do modo II tende a zero muito rapidamente. Em relação ao percurso da trinca 3, note que apesar do comportamento de aumento monotônico do SIF de modo I ao longo do percurso de uma trinca ser uma característica típica dessa formulação, não é uma regra geral. De fato, casos do fator de intensidade de tensão do modo I diminuindo ao longo do percurso de trinca é muito

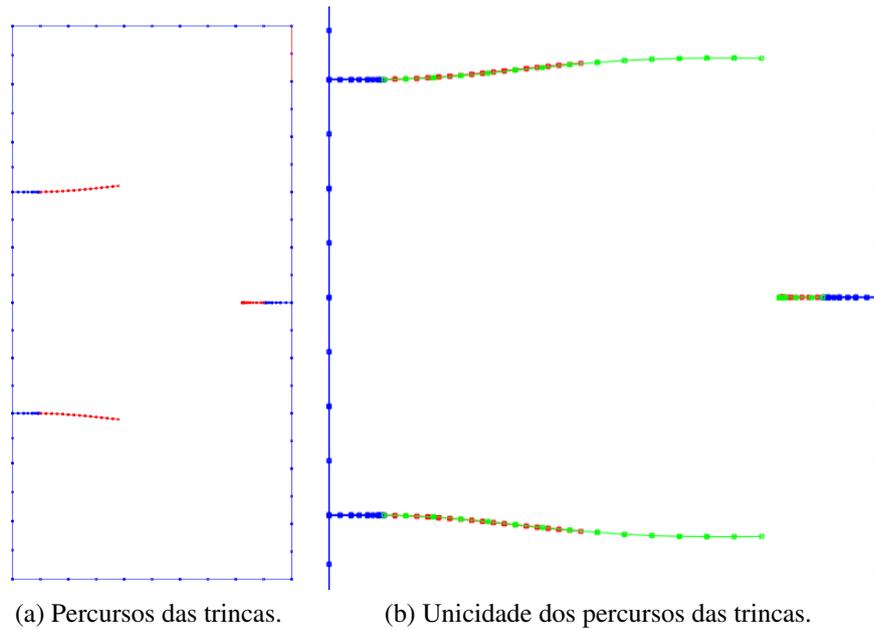


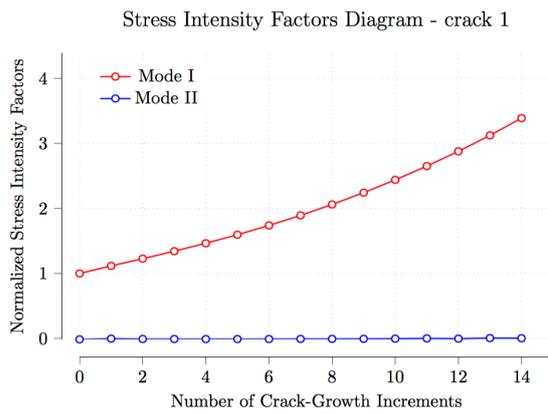
Figura 6.5: Formas finais das três trincas de borda após 14 incrementos de crescimento. Caso a) - incrementos com comprimento igual a 2 vezes o comprimento do menor elemento de ponta da trinca, caso b) - ... igual 4 vezes...

comum, conduzindo a um aumento da respectiva tensão residual. Este efeito é chamado de detenção do crescimento da trinca ou simplesmente detenção da trinca, veja Broek [60], como representado na Figura 6.7. Como pode ser visto nas Figuras 6.6 e 6.7, a trinca 3 que eventualmente tem seu crescimento detido pela abertura simultânea das outras trincas, não influencia a resistência residual da estrutura durante todo o processo de crescimento da trinca.

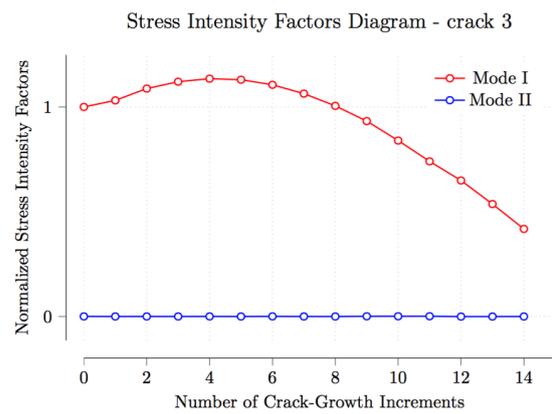
## 6.4 - CHAPA COM UMA TRINCA BIFURCADA

Considere agora uma chapa com uma trinca interna bifurcada, como representado na Figura 6.8, com  $b/a = 1.0$ ,  $H/W = 1.0$ ,  $a/W = 0.025$  e  $\theta = 45^\circ$ ; a projeção horizontal total da trinca é dada por  $2c = a + b\sqrt{2}/2$ . A chapa é carregada nas extremidades com uma tração uniforme  $\sigma$ , aplicada nas bordas superior e inferior.

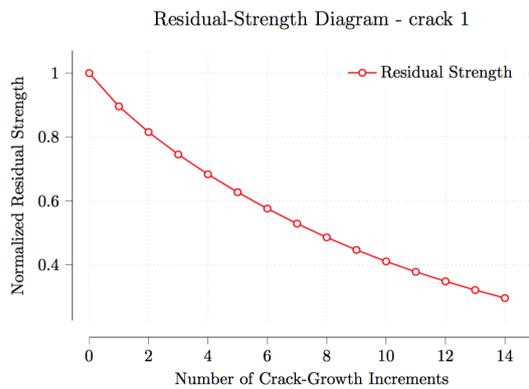
Uma malha de 44 elementos de contorno quadráticos foi utilizada, na qual os segmentos horizontal e inclinado da trinca foram discretizados com 4 elementos descontínuos em cada face da trinca, com comprimentos escalonados no sentido para a ponta com as proporções 0.4, 0.3, 0.2 e 0.1, nessa ordem. Os fatores de intensidade de tensão foram obtidos para as pontas A e B da trinca com a Integral J, a partir do caminho de contorno 5 com 32 pontos. Resultados precisos para comparação foram publicados por Chen e Hasebe [59].



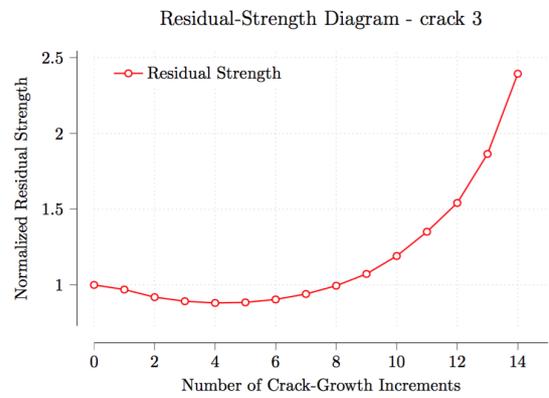
(a) SIF – ponta da trinca 1.



(b) SIF – ponta da trinca 3.



(c) RS – ponta da trinca 1.



(d) RS – ponta da trinca 3.

Figura 6.6: Fatores de intensidade de tensão e resistência residual das três trincas de borda, ao longo dos 14 incrementos de crescimento das trincas.

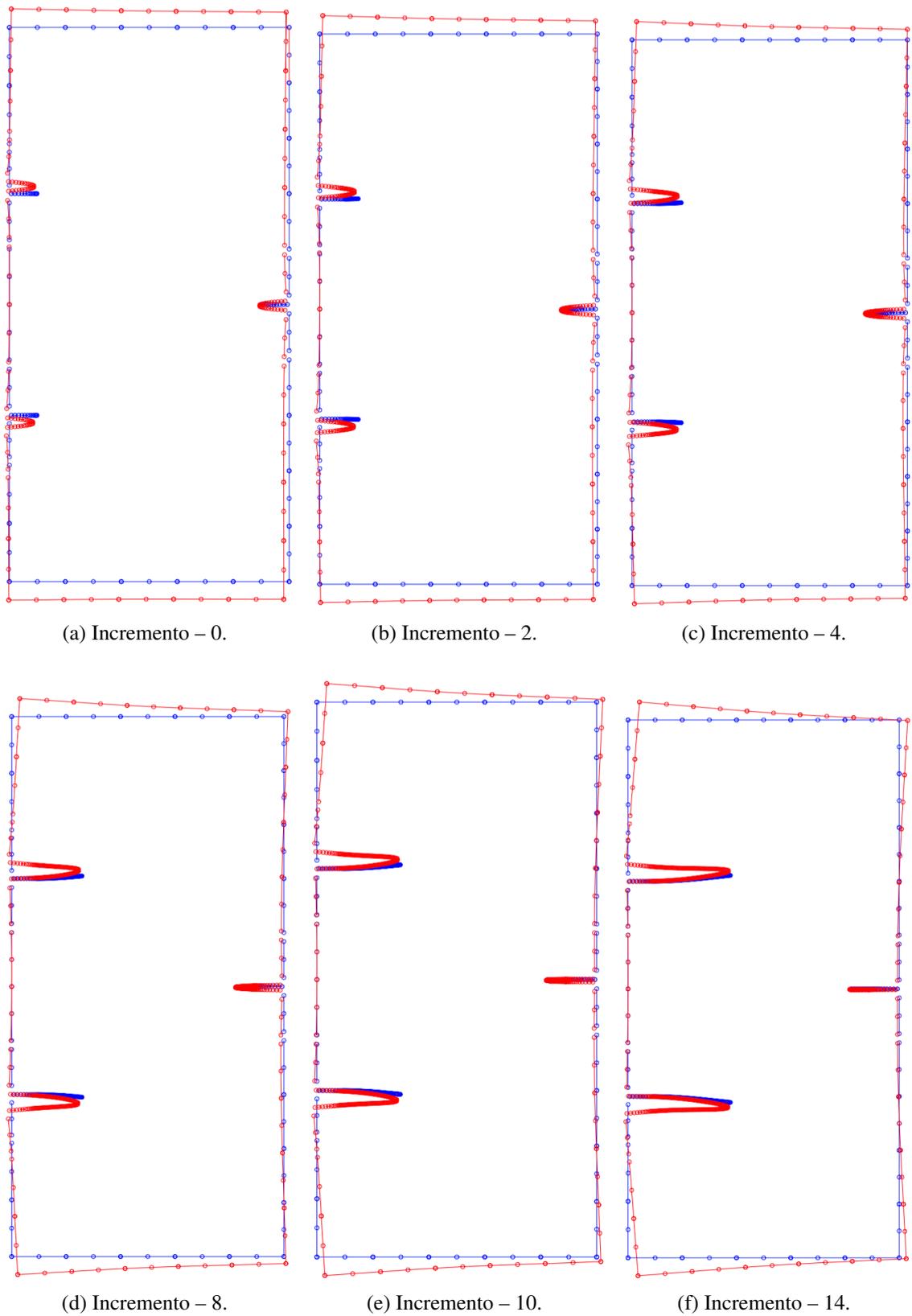


Figura 6.7: Configuração deformada da chapa com três trincas de borda; note que a abertura das trincas do lado esquerdo força a trinca do lado direito a se fechar gradualmente, após o incremento 4.

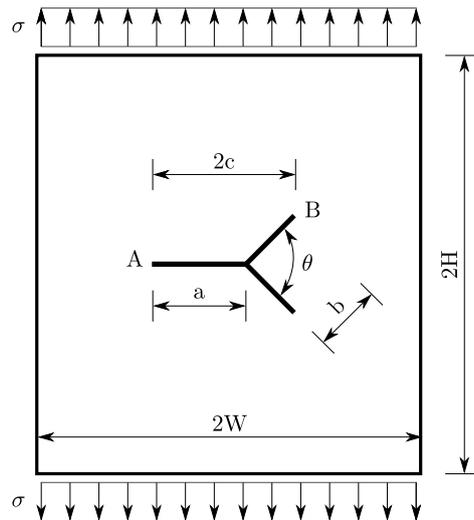


Figura 6.8: Chapa retangular com uma trinca bifurcada interna ( $H/W = 1.0$ ,  $a/W = 0.025$  e  $b/a = 1.0$ ) e tração uniforme  $\sigma$  nas extremidades.

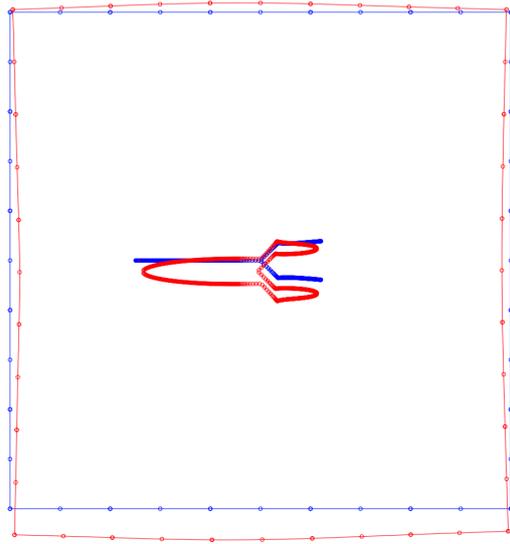
Mesmo com essa malha extremamente grosseira, os resultados obtidos para este caso, Tabela 6.5, mostram uma excelente precisão, sendo equivalentes aos valores de referência até à segunda casa decimal.

Tabela 6.5: Fatores de intensidade de tensão para a trinca bifurcada.

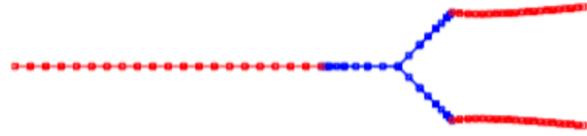
Modo - Ponta	$K/(\sigma\sqrt{\pi c})$	
	Integral J	Chen e Hasebe [59]
$K_I - A$	1.044	1.046
$K_I - B$	0.495	0.495
$K_{II} - B$	0.506	0.508

As dimensões da trinca bifurcada foram mudadas para os valores ( $a/W = 0.05$ ) para executar uma análise de fadiga e melhorar os resultados gráficos. A equação de Paris foi usada com os parâmetros  $C = 6.9 \times 10^{-12}$  e  $m = 3.0$  e, com a razão de amplitude de tensão do ciclo de carga  $R = 2/3$ . Um valor máximo do incremento de extensão da trinca igual a duas vezes o comprimento do menor elemento da ponta da trinca foi atribuído para as trincas dominantes, em um total de 20 incrementos de crescimento da trinca. A trinca bifurcada cresceu até à forma final representada na Figura 6.9, onde pode ser visto novamente que o percurso das trincas tende a ser perpendicular ao caminho da carga, que segue aproximadamente as trajetórias de tensão que estão na direção da máxima tensão principal, em cada ponto do percurso das trincas.

A Figura 6.10 apresenta os diagramas dos fatores de intensidade de tensão de ambas as pontas A e B da trinca, em função do crescimento da trinca, assim como os respectivos diagramas de resistência residual da chapa. Como pode ser visto na Figura 6.10, a ponta A foi

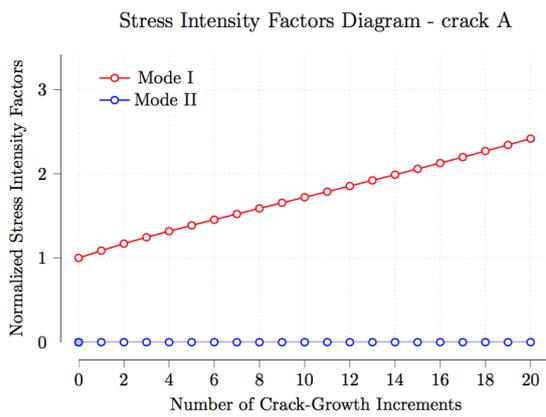


(a) Chapa trincada deformada.

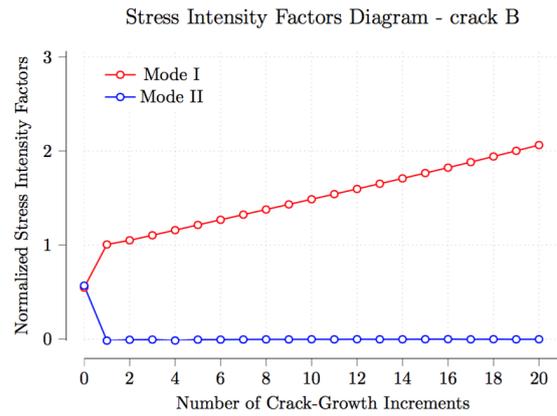


(b) Percurso das trincas.

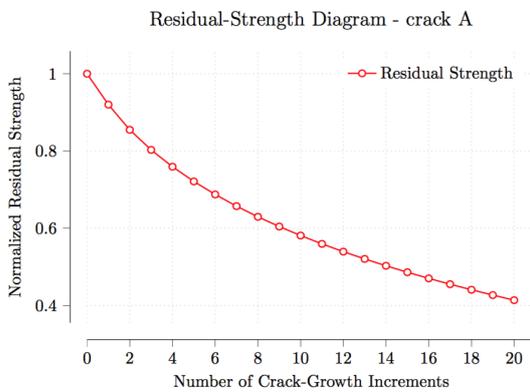
Figura 6.9: Forma final da trinca bifurcada após um crescimento à fadiga devido a  $4,780,649 \times 10^6$  ciclos de carga.



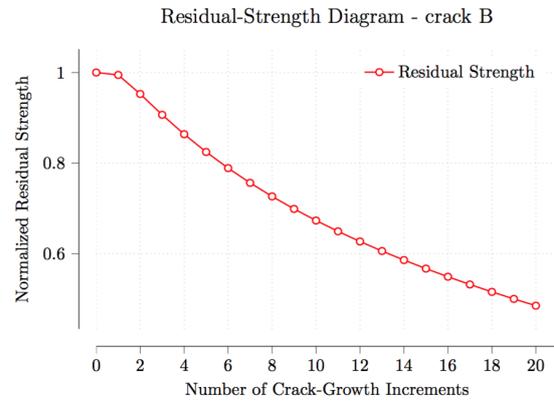
(a) SIF – ponta A da trinca.



(b) SIF – ponta B da trinca.



(c) RS – ponta A da trinca.



(d) RS – ponta B da trinca.

Figura 6.10: Fatores de intensidade de tensão, resistência residual e vida da trinca bifurcada, ao longo do crescimento da trinca à fadiga devido a  $4,780,649 \times 10^6$  ciclos de carga.

a dominante durante toda a análise de crescimento e conseqüentemente tem uma influência direta na resistência residual da chapa.

## 6.5 - CHAPA COM DUAS TRINCAS PARALELO-ENVIESADAS INTERNAS

Considere agora uma chapa quadrada com duas trincas paralelo-enviesadas internas, como representado na Figura 6.11, com  $h/b = 1.0$ ,  $2a/d = 0.2$  e  $e/f = 3.0$ ; as projeções

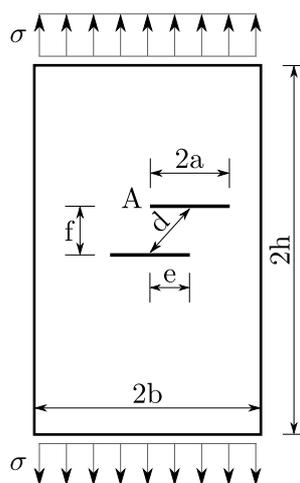


Figura 6.11: Chapa retangular com duas trincas paralelo-enviesadas internas ( $h/b = 1.0$ ,  $2a/d = 0.2$ ,  $e/f = 3.0$ ) e tensão  $\sigma$  aplicada nas extremidades.

horizontal e vertical das trincas são centralizadas. A chapa é carregada nas extremidades por uma tração uniforme  $\sigma$ , aplicada nas bordas superior e inferior.

Uma malha com 62 elementos de contorno quadráticos foi utilizada, na qual os segmentos da trinca foram discretizados com 8 elementos descontínuos em cada face da trinca, com comprimentos escalonados no sentido para a ponta da trinca nas seguintes proporções 0.4, 0.3, 0.2 e 0.1, nessa ordem. Os fatores de intensidade de tensão foram obtidos para a ponta A da trinca com a Integral J a partir do caminho de contorno 5 com 32 pontos. Resultados precisos para comparação foram publicados por Murakami [58].

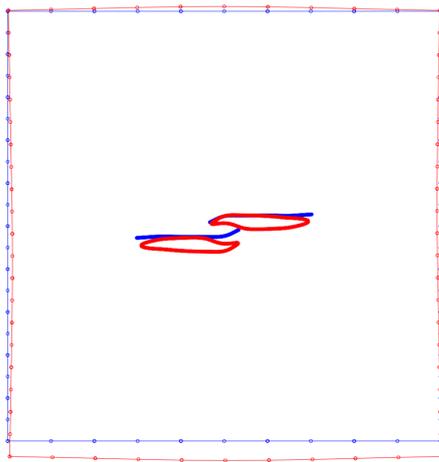
Os resultados obtidos para este caso, apresentados na Tabela 6.6, mostram uma excelente precisão, correspondendo aos valores de referência com erro máximo de 0.003%.

A equação de Paris foi usada para uma análise de fadiga com os parâmetros  $C = 4.624 \times 10^{-12}$  e  $m = 3.3$  e, com razão de amplitude de tensão do ciclo de carga  $R = 2/3$ . Um valor máximo do incremento de extensão de trinca igual a 4 vezes o comprimento do menor elemento de ponta de trinca foi atribuído para as trincas dominantes, em um total de 20

Tabela 6.6: Fatores de intensidade de tensão normalizados para as duas trincas paralelo-enviesadas internas.

Modo - Ponta	$K/(\sigma\sqrt{\pi a})$	
	Integral J	Murakami [58]
$K_I - A$	1.013	1.009

incrementos de crescimento de trinca. As trincas cresceram até à forma final representada na Figura 6.12, onde pode ser visto que a direção de crescimento das pontas internas das



(a) Chapa trincada deformada.



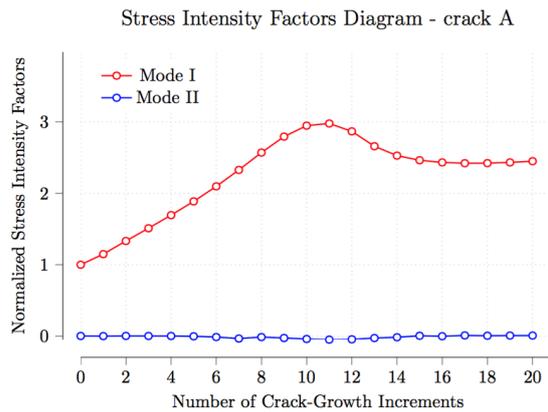
(b) Crack paths.

Figura 6.12: Forma final das trincas paralelo-enviesadas internas após um crescimento à fadiga da trinca devido a  $2.40974 \times 10^3$  ciclos de carga, considerando  $da/dN = 4.624 \times 10^{-12} K^{3.3}$ .

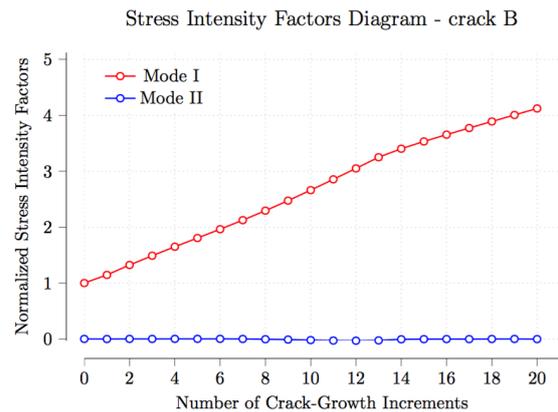
trincas, inicialmente quase retas e perpendiculares ao percurso da carga, mudou assim que elas se aproximaram em uma forma típica que resulta da interação dos campos de tensão em volta das pontas dessas trincas; as tensões de tração local não são mais paralelas à tração aplicada e as trincas se curvam inclinando uma na direção da outra. Por outro lado, a direção de crescimento das pontas externas das trincas foi praticamente uma reta e perpendicular ao caminho da carga aplicada na chapa.

Os diagramas dos fatores de intensidade de tensão e resistência residual das pontas internas e externas das trincas, em função do crescimento destas, estão apresentados na Figura 6.13; eles mostram que ao longo do percurso das trincas, o fator de intensidade de tensão do modo I cresce lentamente enquanto que o do modo II tende a zero muito rapidamente. Além disso, a resistência residual diminui lentamente ao longo do percurso das trincas como um consequência direta da variação do fator de intensidade de tensão.

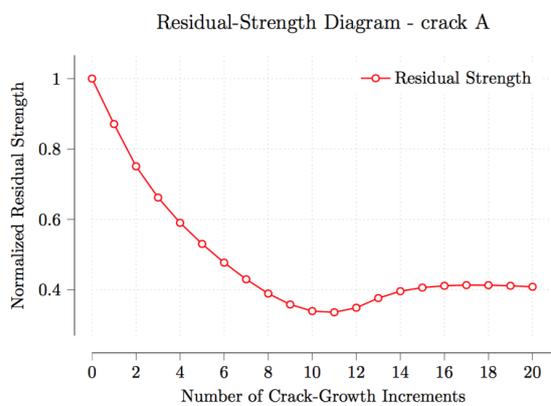
Como pode ser visto na Figura 6.13, todas as pontas das trincas foram simultaneamente dominantes durante os três primeiros incrementos de extensão das trincas, que



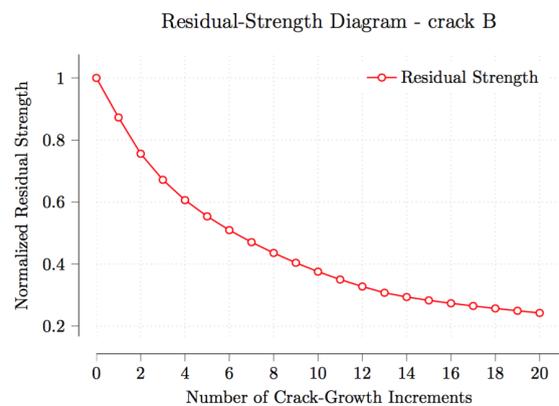
(a) SIF – ponta A da trinca.



(b) SIF – ponta externa da trinca.



(c) RS - ponta A da trinca.



(d) RS - ponta externa da trinca.

Figura 6.13: Fatores de intensidade de tensão, resistência residual e vida à fadiga das trincas paralelo-enviesadas internas, ao longo do crescimento à fadiga devido a  $2.40974 \times 10^3$  ciclos de carga, considerando  $da/dN = 4.624 \times 10^{-12} K^{3.3}$ .

correspondem a  $1.52199 \times 10^3$  ciclos de carga. Nos próximos 9 incrementos, que correspondem a  $2.28401 \times 10^3$  ciclos de carga, as pontas internas das trincas desempenharam o papel de trinca dominante, enquanto as pontas externas foram as dominantes do 13º incremento até o fim da análise de crescimento.

## 6.6 - CHAPA COM UMA LINHA DE FUROS DE FIXADORES, COM TRINCAS

Esta aplicação trata da análise de fadiga de dano generalizado (MSD) em uma linha de furos de um painel com largura finita. A influência de dois cenários de MSD no painel trincado foi estudada com a análise incremental, com MECD, do crescimento das trincas para prever: crescimento, interação e coalescências de várias trincas no painel. A análise forneceu detalhes da forma que trincas de MSD crescem e coalescem formando uma trinca principal que pode conduzir à falha global. O critério de plastificação do ligamento para a coalescência de trincas leva em conta uma zona plástica significativa à frente das pontas das trincas, que limita a capacidade da chapa de suportar carga adicional. Portanto, uma condição crítica do painel é alcançada quando a zona plástica de uma ponta de uma trinca em crescimento toca a zona plástica de uma ponta de trinca mais próxima em crescimento, oriunda de um furo adjacente. Quando essa condição ocorre, uma nova trinca principal é gerada e a falha do painel pode ser prevista à medida que a nova trinca principal avança através dos furos remanescentes no alinhamento.

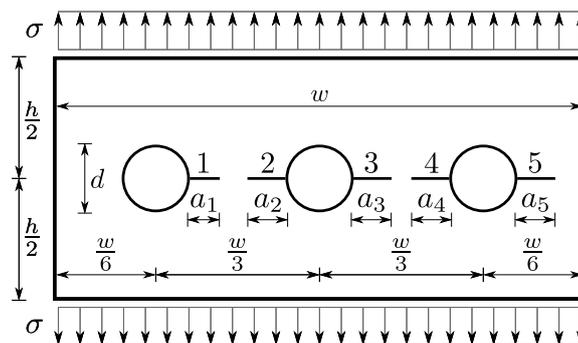


Figura 6.14: Chapa com uma linha de furos, com trincas, de fixadores ( $h/w = 0.5$ ,  $d/w = 0.05$ ) com tração uniforme  $\sigma$  aplicada nas extremidades da chapa e, os números de referência das trincas.

Considere um painel retangular de largura  $w$  e altura  $h$ , com uma linha de três furos de fixadores, trincados, de diâmetro  $d$ , com um arranjo arbitrário de pequenas trincas com os comprimentos de referência  $a_1, a_2, a_3, a_4$  e  $a_5$ , sob uma tração uniforme  $\sigma$  aplicada nas extremidades da chapa, na direção perpendicular ao eixo da trinca, como é esquematicamente representado na Figura 6.14.

Foram assumidas para a chapa as constantes elásticas  $E = 73.1 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.33$  e tensão de escoamento  $\sigma_y = 0.345 \text{ GPa}$ . Considerou-se que os furos contém várias combinações de pequenas trincas radiais iniciais, abrangendo a espessura da chapa, que são referidas como dano generalizado (MSD), enquanto o termo "trinca principal" é usado para descrever uma trinca grande conectando dois ou mais furos. A equação de Paris é usada para a análise de fadiga com os parâmetros  $C = 4.624 \times 10^{-12}$  e  $m = 3.3$ , e com a razão de amplitude de tensão do ciclo de carga  $R = 2/3$ . Todas as trincas são modeladas com 5 elementos descontínuos quadráticos em cada face da trinca, como comprimentos escalonados no sentido para as respectivas pontas na proporções 0.4, 0.3, 0.2 e 0.1, nessa ordem. Os fatores de intensidade de tensão foram obtidos com a Integral J, a partir do caminho de contorno 2 com 32 pontos. Um valor máximo do incremento de extensão da trinca igual a 4 vezes o comprimento do menor elemento de ponta de trinca foi atribuído para as trincas dominantes, em um total de 20 e 18 incrementos de crescimento de trinca que, respectivamente, correspondem a duas análises diferentes. Por uma questão de simplificação, somente dois diferentes cenários de MSD são estudados com o objetivo de determinar como os cenários assumidos podem afetar a vida do painel, como também as tendências no crescimento das trincas e suas coalescências.

### 6.6.1 - Primeiro cenário de MSD

A geometria inicial das trincas desse cenário, o comprimento definido das trincas iniciais e suas locações relativas aos furos do painel, estão esquematicamente representados na

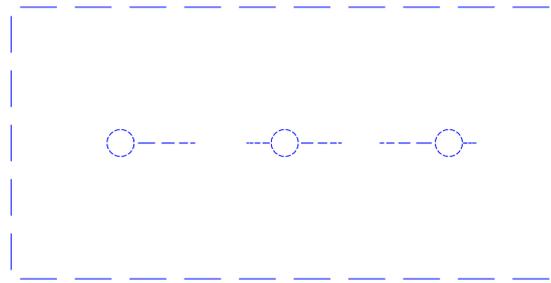


Figura 6.15: Geometria inicial do primeiro cenário de MSD.

Figura 6.14. As trincas foram consideradas com os comprimentos normalizados  $a_1/w = 0.113$ ,  $a_2/w = 0.045$ ,  $a_3/w = 0.08$ ,  $a_4/w = 0.103$  e  $a_5/w = 0.025$ , como mostrado na Figura 6.15.

O percurso e a respectiva vida à fadiga das trincas de MSD do painel, ao longo de 20 incrementos de crescimento das trincas, são representados na Figura 6.16, onde pode ser visto que as trincas começam crescendo de maneira lenta e estável, com as trincas

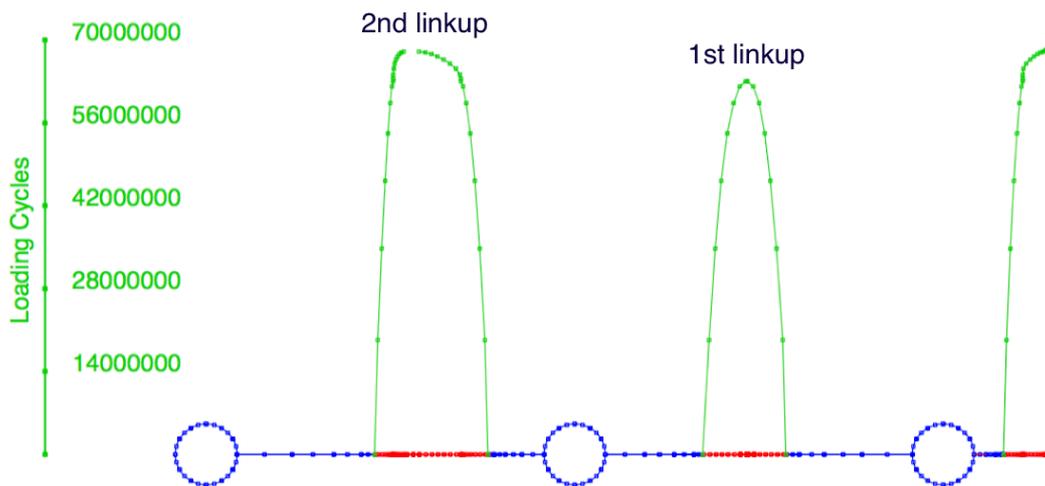
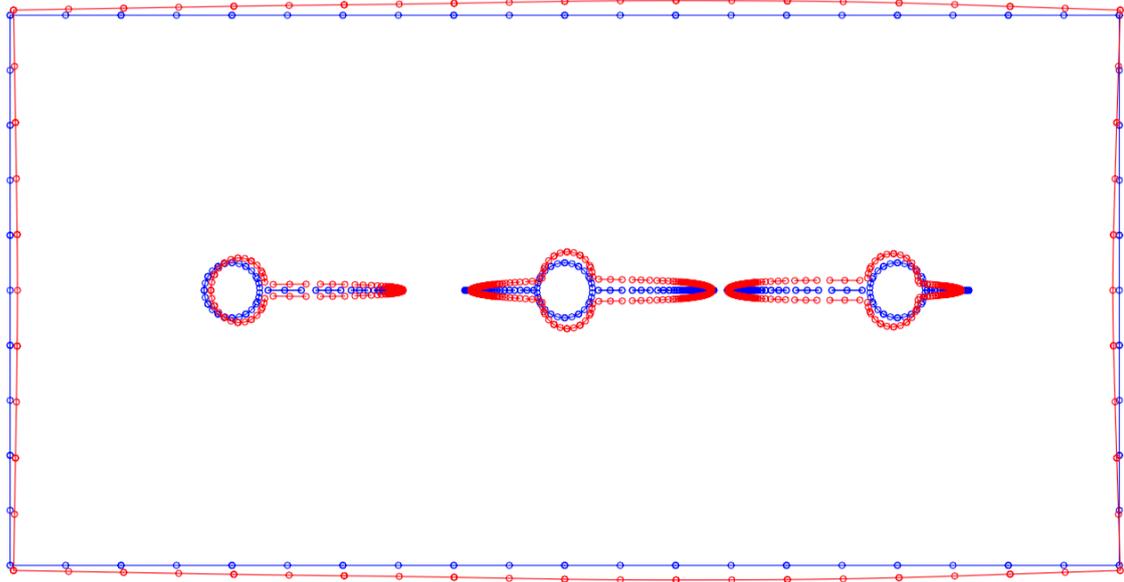


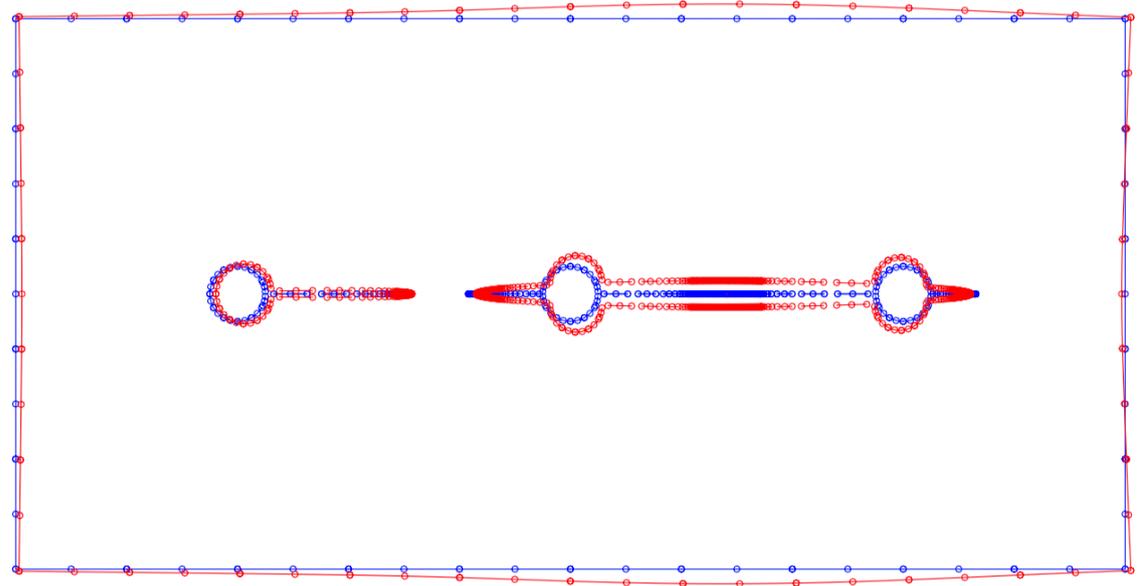
Figura 6.16: Percursos e vida à fadiga do primeiro cenário de MSD, ao longo de 20 incrementos de crescimento das trinças.

dominantes crescendo, respectivamente, à direita do segundo furo (trinca 3) e à esquerda do terceiro furo (trinca 4). Estas trinças realizam a primeira coalescência do painel após 63,068,071 ciclos de carga, em 7 incrementos de crescimento das trinças, resultando em uma trinca principal com pontas nas trinças 2 e 5, conforme mostrado na Figura 6.17. Essa coalescência foi realizada com a plastificação do ligamento, conforme Dugdale, normalizada pela largura da chapa  $w$ , igual a 0.011278, que é cerca de 10 vezes maior que o ligamento de ponta da trinca. Este processo continua com a trinca principal apresentando um crescimento altamente acelerado. Agora, a trinca à direita do primeiro furo (trinca 1) também cresce rapidamente na presença da ponta da trinca principal à esquerda do segundo furo (trinca 2). Essas trinças realizam a segunda coalescência do painel após 68,095,920 ciclos de carga, que correspondem a 16 incrementos de crescimento das trinças, resultando em uma trinca principal muito maior com raiz no primeiro furo e com sua ponta à direita do terceiro furo (trinca 5), como mostrado na Figura 6.18. Essa coalescência também foi realizada com o critério da plastificação do ligamento de Dugdale, normalizada pela largura  $w$  da chapa, igual a 0.011172, que é cerca do dobro do ligamento da ponta da trinca.

Os fatores de intensidade de tensão e a resistência residual das trinças crescendo à direita do primeiro e terceiro furos, trinças 1 e 5, respectivamente, são apresentados nas Figuras 6.19 e 6.20, onde pode ser claramente visto o forte impacto das coalescências na propagação das trinças de furos adjacentes; essas trinças foram fortemente influenciadas pela presença da trinca principal, em ambas as coalescências, através das discontinuidades mostradas nas Figuras 6.19 e 6.20. Antes das trinças iniciais terem coalescido, a trinca à direita do terceiro furo (trinca 5) cresceu comparativamente de forma mais lenta, como pode ser visto na Figura 6.16. Entretanto, após a segunda coalescência estas trinças cresceram muito rápido,

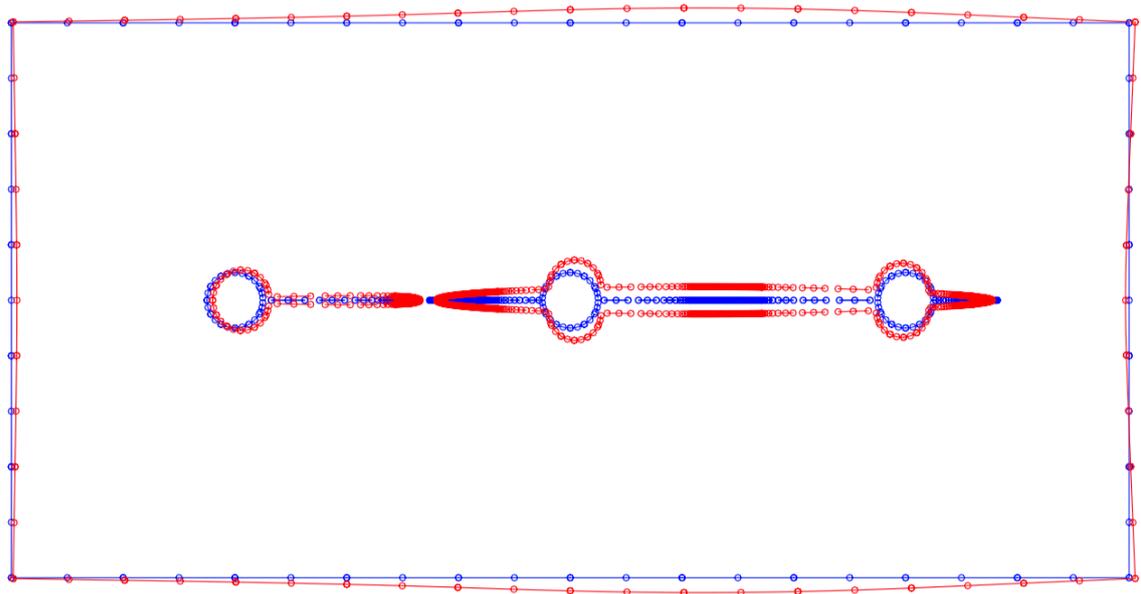


(a) Após 62, 179, 451 ciclos de carga.

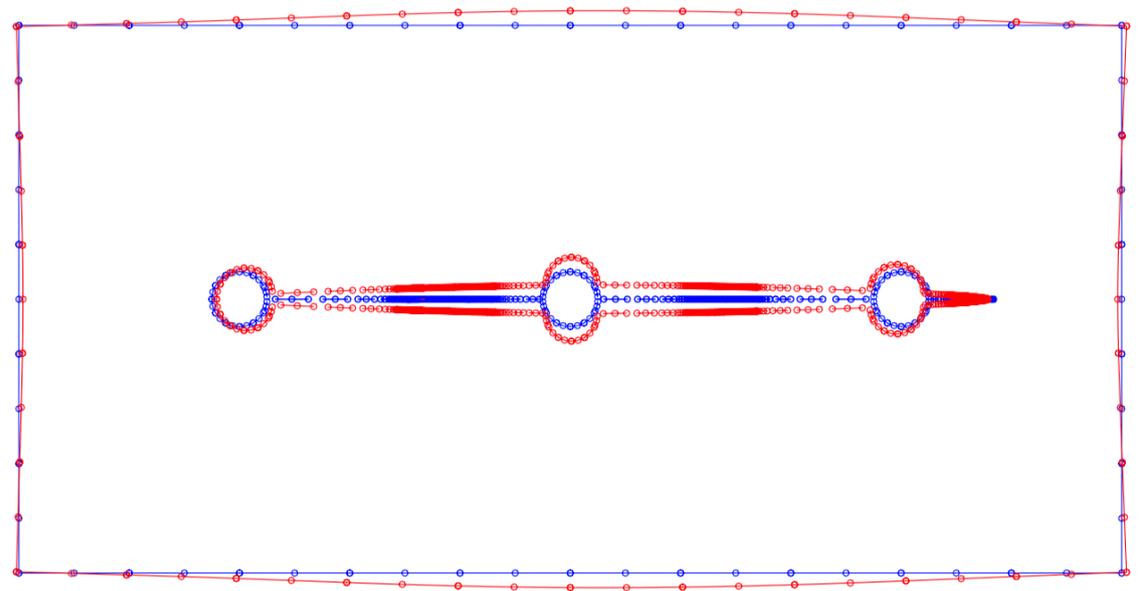


(b) 1ª coalescência, após 63, 068, 071 ciclos de carga.

Figura 6.17: Configuração deformada do painel – 1ª coalescência, no primeiro cenário de MSD.



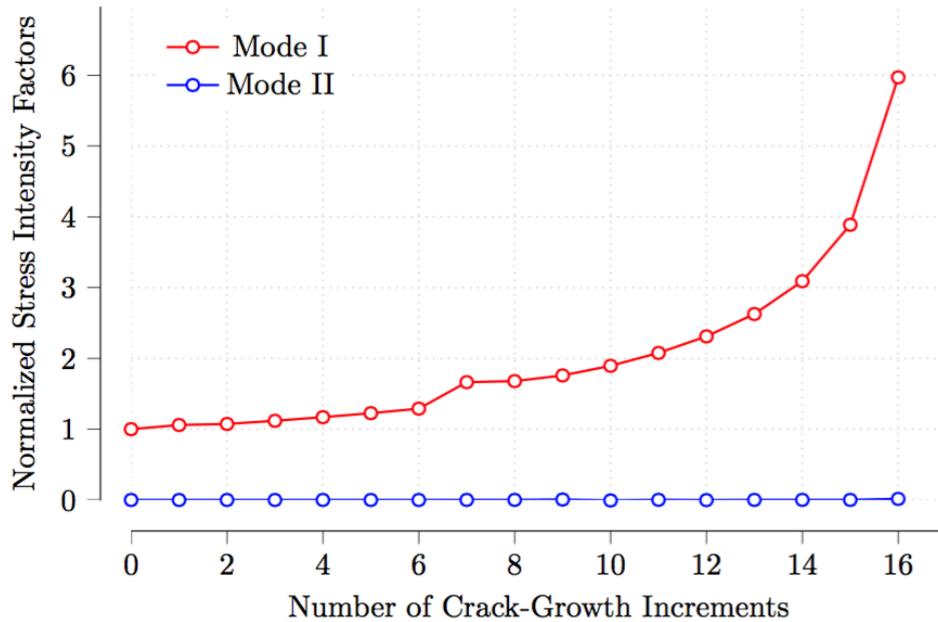
(a) Após 67, 959, 671 ciclos de carga.



(b) 2ª coalescência, após 68, 095, 920 ciclos de carga.

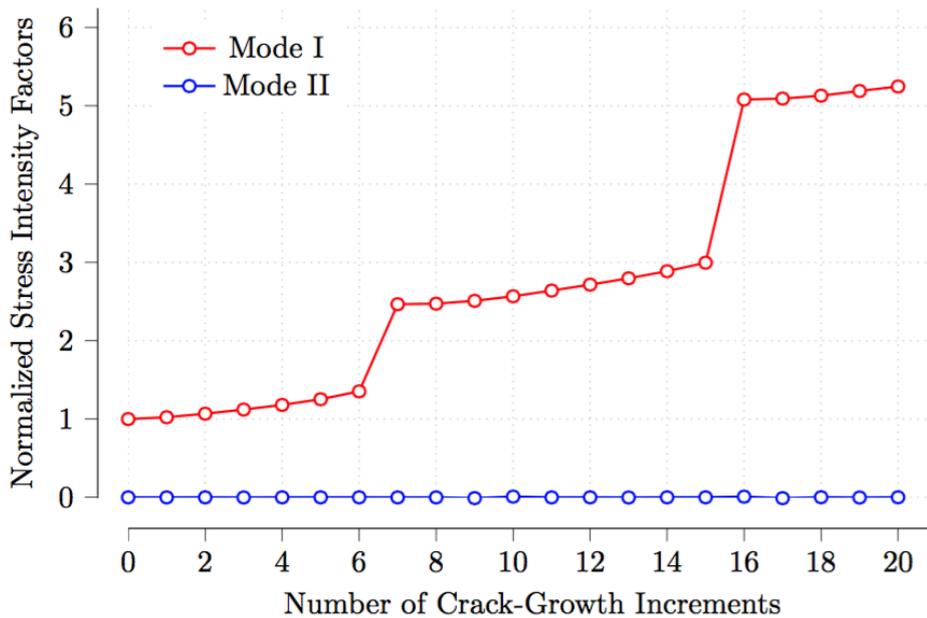
Figura 6.18: Configuração deformada do painel – 2ª coalescência, no primeiro cenário de MSD.

Stress Intensity Factors Diagram - crack 1



(a) SIF – trinca do 1° furo.

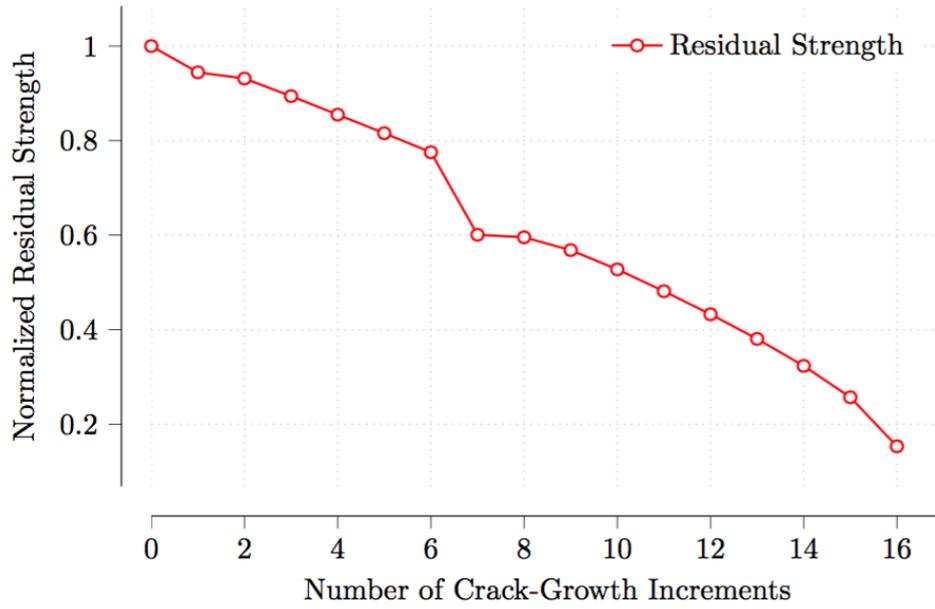
Stress Intensity Factors Diagram - crack 5



(b) SIF – trinca do 3° furo, lado direito.

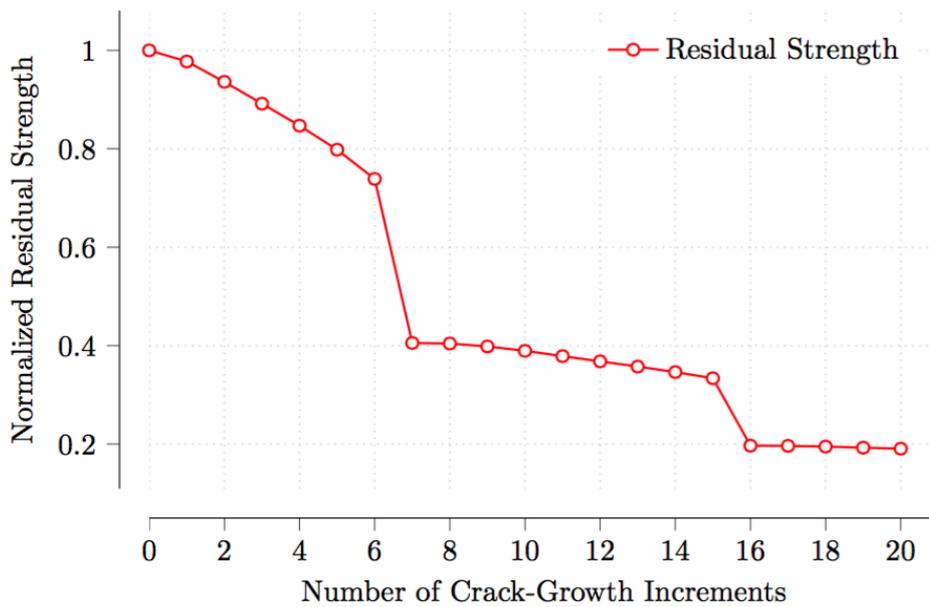
Figura 6.19: SIF do crescimento das trincas à direita do primeiro e do terceiro furos, no primeiro cenário de MSD.

Residual-Strength Diagram - crack 1



(a) RS – trinca do 1º furo.

Residual-Strength Diagram - crack 5



(b) RS – trinca do 3º furo, lado direito.

Figura 6.20: RS do crescimento das trincas à direita do primeiro e do terceiro furos, no primeiro cenário de MSD.

como mostra a Figura 6.16, e pode levar à falha do painel.

Esse cenário de MSD apresentou o avanço da trinca principal desde o terceiro furo até o primeiro furo. Os padrões apresentados nesse cenário sugerem que o crescimento e coalescência tenderão resultar em uma trinca muito maior, que controlará a falha do painel à medida que vai se estendendo através dos outros furos. A presença de uma trinca principal tem um forte efeito nas trincas localizadas imediatamente adjacentes a ela e, portanto, esta é a mais danosa configuração de trinca.

### 6.6.2 - Segundo cenário de MSD

A geometria inicial das trincas desse cenário, o comprimento definido das trincas iniciais e suas locações relativas aos furos do painel, estão esquematicamente representados na

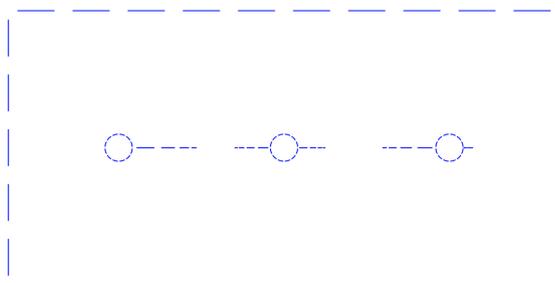


Figura 6.21: Geometria inicial do segundo cenário de MSD.

Figura 6.14. As trincas foram consideradas com os comprimentos normalizados  $a_1/w = 0.118$ ,  $a_2/w = 0.065$ ,  $a_3/w = 0.05$ ,  $a_4/w = 0.098$  e  $a_5/w = 0.018$ , como mostrado na Figura 6.21.

O percurso e respectiva vida à fadiga das trincas de MSD do painel, ao longo de 18 incrementos de crescimento delas, que correspondem a 86,334,740 ciclos de carga, estão representados na Figura 6.22, onde pode ser visto que as trincas começam a crescer de maneira lenta e estável com as trincas dominantes agora crescendo, respectivamente, para a direita do primeiro furo (trinca 1) e para a esquerda do segundo furo (trinca 2). Estas duas trincas realizam a primeira coalescência do painel após 76,869,823 ciclos de carga, em 6 incrementos de crescimento das trincas, resultando em uma trinca principal com ponta na trinca 3, como mostrado na Figura 6.23. Este processo continua com a trinca dominante apresentando um crescimento altamente acelerado. Agora, a trinca à esquerda do terceiro furo (trinca 4) também cresce rapidamente com a presença da ponta da trinca dominante à direita do segundo furo (trinca 3). Essas trincas realizam a segunda coalescência do painel após 85,749,344 ciclos de carga, que correspondem a 15 incrementos de crescimento delas,

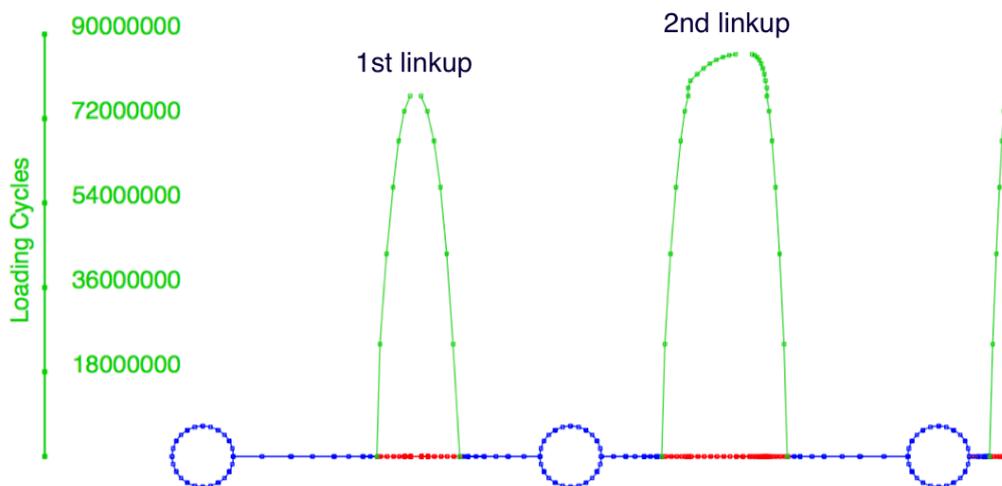


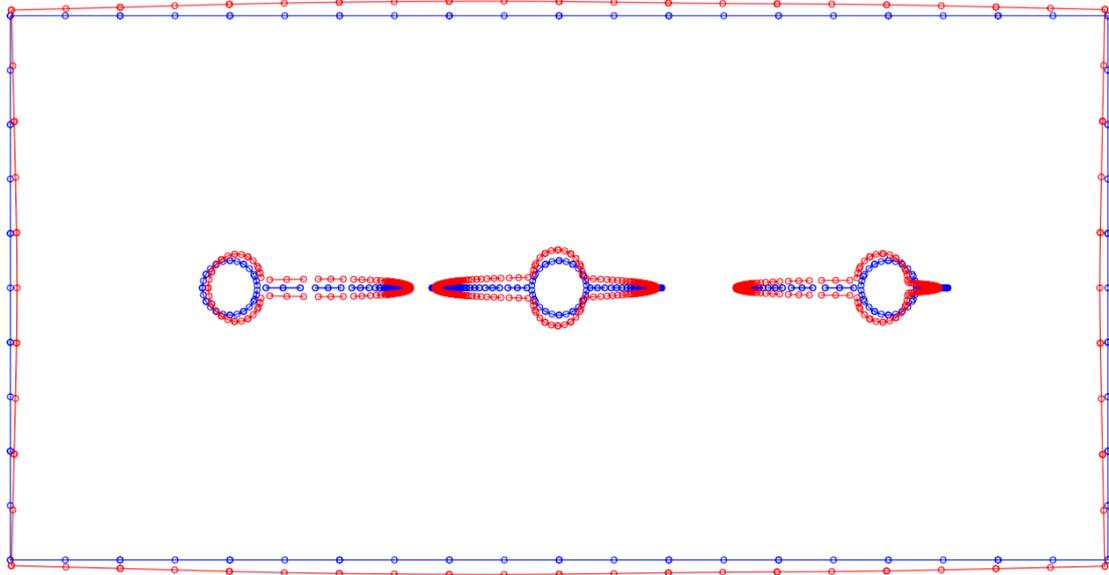
Figura 6.22: Percursos e vida à fadiga do segundo cenário de MSD, ao longo de 18 incrementos de crescimento das trinças, que correspondem a 86, 334, 740 ciclos de carga.

resultando em uma trinca principal muito maior, com raiz no primeiro furo e com sua ponta à direita do terceiro furo (trinca 5), como mostrado na Figura 6.24.

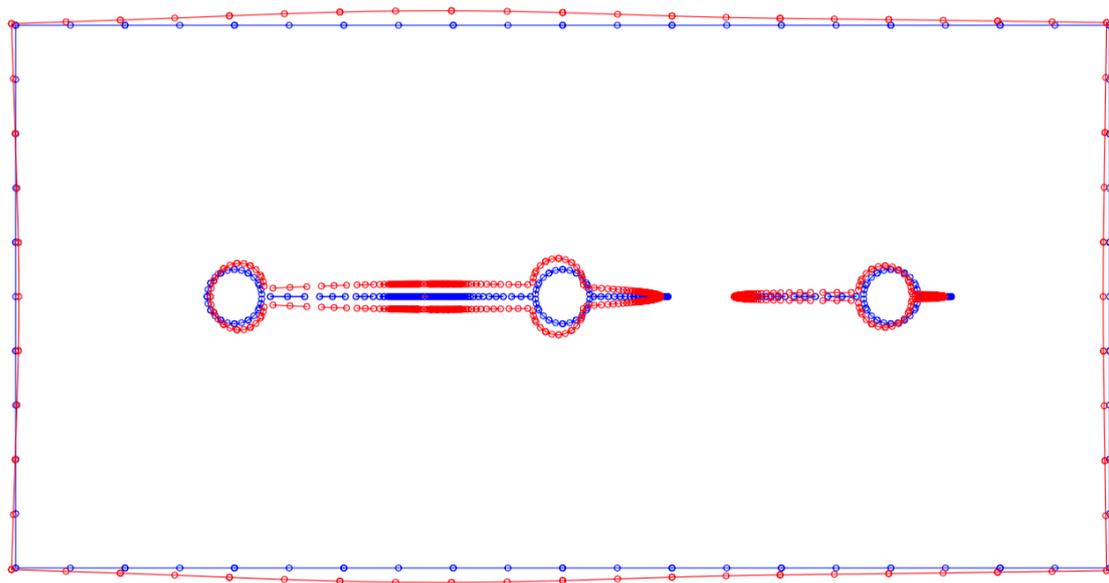
Os fatores de intensidade de tensão e a resistência residual das trinças crescendo à direita do segundo e do terceiro furos, trinças 3 e 5 respectivamente, são apresentados na Figuras 6.25 e 6.26, onde pode ser visto claramente o forte impacto das coalescências no crescimento das trinças de furos adjacentes; essas trinças foram fortemente influenciadas pela presença da trinca principal, em ambas as coalescências, através das descontinuidades mostradas nas Figuras 6.25 e 6.26. Antes das trinças iniciais sofrerem coalescência, a trinca à direita do segundo furo (trinca 3) cresceu comparativamente de forma mais lenta, como pode ser visto na Figura 6.22. Entretanto, entre a primeira e a segunda coalescências essas trinças cresceram muito rápido, como mostra a Figura 6.22, até à ocorrência da segunda coalescência.

Esse cenário de MSD apresentou o avanço da trinca principal desde o primeiro furo até o terceiro furo e, reforça a conclusão depreendida no primeiro cenário de MSD; os padrões observados nesse cenário de MSD sugerem que o crescimento e coalescência de trinças tenderão resultar em uma trinca muito maior que controlará a falha do painel à medida que ela se estende através de outros furos. Uma vez que o processo de avanço começa, as trinças de MSD crescem muito rapidamente e podem causar a falha do painel. A presença de uma trinca principal tem um forte efeito nas trinças localizadas imediatamente adjacentes a ela e, portanto, esta é a mais danosa configuração de trinca.

Os padrões observados em ambos os cenários de MSD sugerem que independente da configuração inicial das trinças, o crescimento e a coalescência delas tenderão resultar em

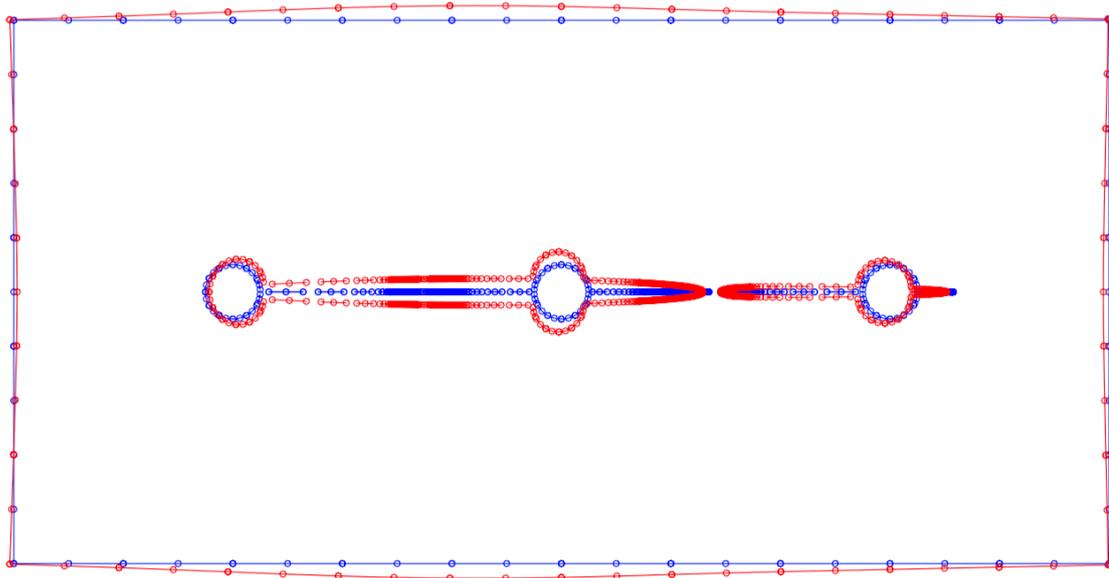


(a) Após 73, 615, 010 ciclos de carga.

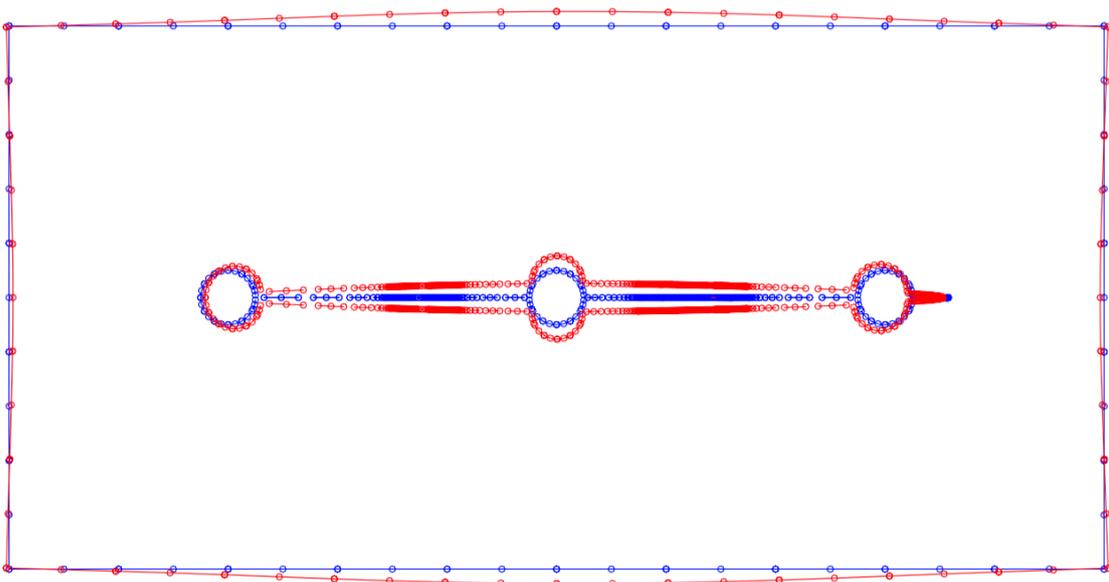


(b) 1ª coalescência, após 76, 869, 823 ciclos de carga.

Figura 6.23: Configuração deformada do painel – 1ª coalescência, no segundo cenário de MSD.



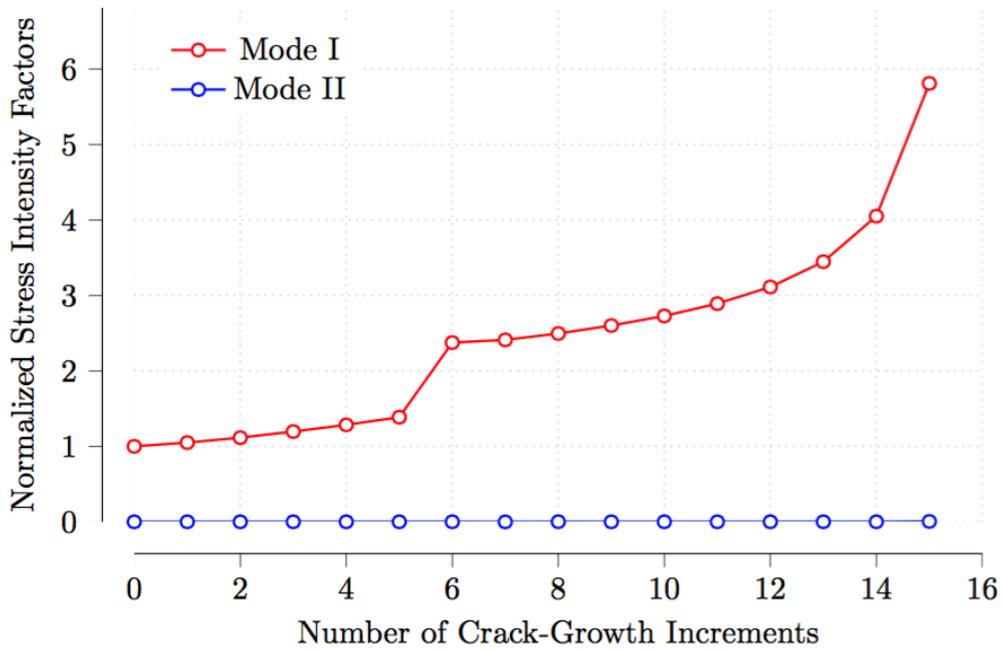
(a) Após 85, 554, 032 ciclos de carga.



(b) 2ª coalescência, após 85, 749, 344 ciclos de carga.

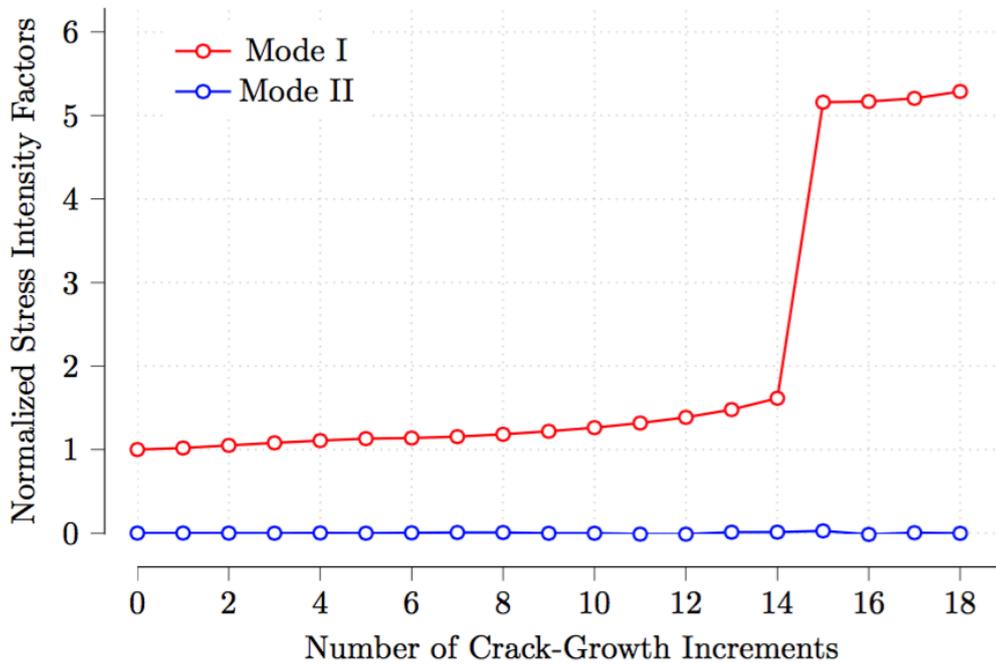
Figura 6.24: Configuração deformada do painel – 2ª coalescência, no segundo cenário de MSD.

Stress Intensity Factors Diagram - crack 3



(a) SIF – trinca do 2º furo, lado direito.

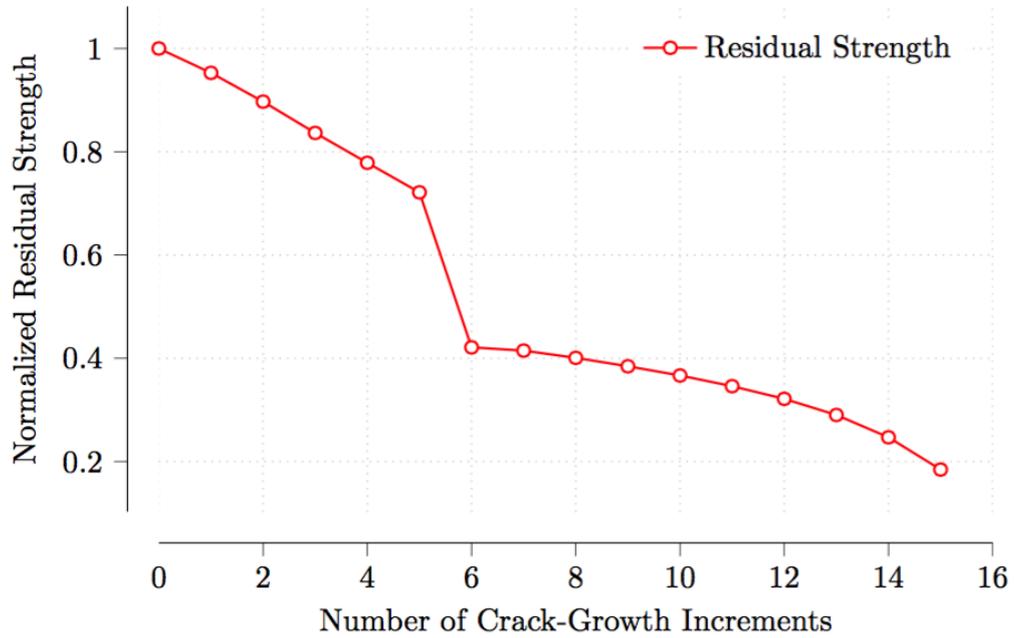
Stress Intensity Factors Diagram - crack 5



(b) SIF – trinca do 3º furo, lado direito.

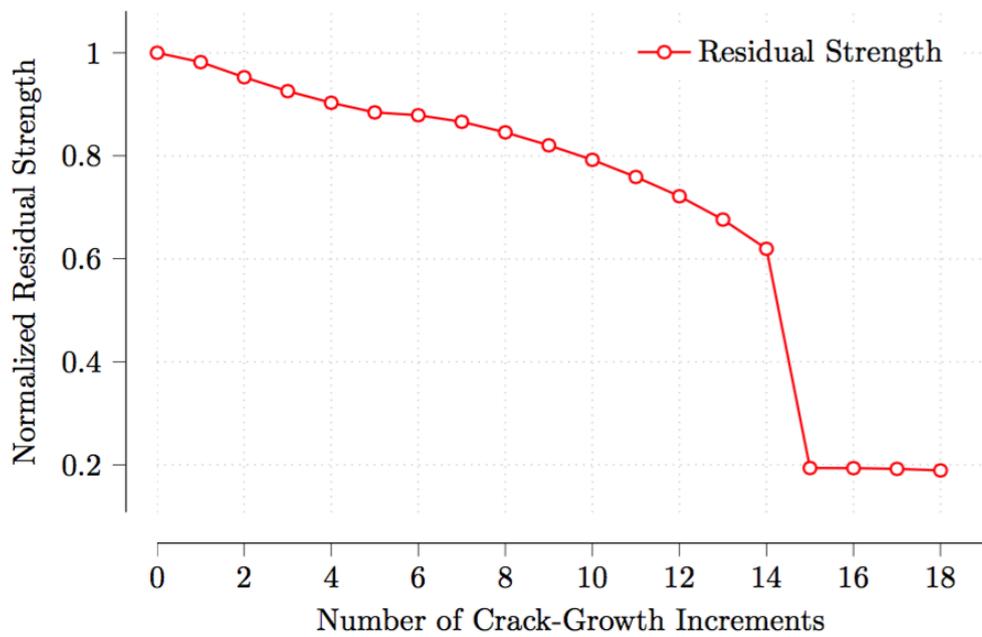
Figura 6.25: SIF do crescimento das trincas à direita do segundo e do terceiro furos, no segundo cenário de MSD.

Residual-Strength Diagram - crack 3



(a) RS – trinca do 2° furo, lado direito.

Residual-Strength Diagram - crack 5



(b) RS – trinca do 3° furo, lado direito.

Figura 6.26: RS do crescimento das trincas à direita do segundo e do terceiro furos, no segundo cenário de MSD.

um trinca muito maior, que controlará a falha prevista do painel à medida que ela se estende através de outros furos. Adicionalmente, o número de ciclos de carga necessários à geração desta falha, após a trinca maior ter alcançado certo comprimento crítico, representa uma pequena porção da vida total do painel e, em situações reais, é certamente afetado pelo tempo de iniciação das trincas em furos inicialmente sem trincas. Baseado nesse padrão, a vida do painel é dependente de quanto tempo leva para uma configuração de trincas de MSD gerar uma trinca maior e crítica.

## 7 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

### 7.1 - CONCLUSÕES

O MECD foi aplicado à análise de fadiga de chapas com múltiplas trincas (MSD) para casos de amplitude constante dos ciclos de carga. Para cada incremento de extensão de trinca uma análise de tensão foi executada usando o MECD e, os fatores de intensidade de tensão foram calculados através da técnica da Integral J. Este passo computacional básico foi repetido durante um número especificado de incrementos de extensão de trinca.

A confiabilidade de todo o processo de análise incremental depende muito da precisão do cálculo dos fatores de intensidade de tensão, assim como da precisão da predição da direção e comprimento dos incrementos de crescimento das trincas. A técnica da Integral J, aplicada em um contorno circular em volta de cada ponta de trinca, foi utilizada para a avaliação dos fatores de intensidade de tensão. Uma vez que a exata variação do campo elástico interior é embutida na solução fundamental do método de elementos de contorno, esta técnica é altamente precisa, como mostrado pelos resultados numéricos obtidos neste trabalho. Um simples procedimento de predição-correção foi adotado para a definição da direção real das múltiplas trincas, que interagem entre si, em cada incremento de extensão; ele prevê a direção da tangente local do percurso contínuo da trinca usando o critério da máxima tensão principal e, então, introduz uma correção global a esta direção para considerar a discretização deste percurso, com informação oriunda de um passo à frente ao do incremento corrente de extensão de trinca.

É de fundamental importância perceber que em um problema de modo misto, a unicidade do percurso das trincas não pode ser obtida se a direção do incremento de extensão dessas trincas não levar em conta a discretização do percurso das mesmas. A extensão das trincas em cada ponta, que foram também corrigidas incrementalmente, foram modeladas convenientemente com novos elementos de contorno. O percurso curvado real de crescimento da trinca foi simulado por partes lineares de incrementos de trinca. A coalescência de trincas adjacentes foi tratada com o critério da plastificação do ligamento. O número de ciclos de carga correspondente ao incremento corrente da análise foi computado com a lei de Paris para as trincas dominantes. Com este valor, e ainda com a lei de Paris, a extensão das múltiplas trincas foi também corrigida. Essa análise incremental permite a coalescência, dormência e retomada de crescimento das trincas.

Resultados dessa análise incremental do crescimento à fadiga de múltiplas trincas foram apresentados para várias geometrias, demonstrando a excelente performance desse modelo em simular o crescimento de múltiplas trincas em modo misto. A sensibilidade dos resultados ao tamanho do incremento de extensão de trinca, baseado na malha inicial, foi investigada. Os casos testados produziram percursos de trinca bem correlacionados, com algumas pequenas diferenças devidas ao erro de discretização verificado no modelo menos refinado.

A análise de coalescência dos dois cenários de MSD forneceu detalhes da maneira na qual as múltiplas trincas de fadiga, independente da configuração inicial, crescem e coalescem formando uma trinca principal que controla a falha prevista do painel, à medida que ela se estende através dos outros furos. Adicionalmente, o número de ciclos de carga necessários para causar a falha prevista do painel, após a trinca maior ter atingido um certo comprimento crítico, representa uma pequena porção da vida total do painel. Baseado nesta análise, a vida do painel é dependente de quanto tempo leva para um cenário particular de múltiplas trincas (MSD) gerar uma trinca grande o bastante e crítica.

Como uma conclusão final, os resultados obtidos neste trabalho demonstram a precisão e eficiência das estratégias adotadas na análise.

### **7.1.1 - Publicações**

Com o intuito de dar publicidade aos trabalhos que foram desenvolvidos por meio dessa dissertação e, dada a importância do assunto ora tratado para essa área de pesquisa, foi elaborado em paralelo o artigo inovador: *Dual Boundary Element Analysis of Fatigue Crack Growth, Interaction and Linkup*, que apresenta coalescências contínuas de trincas, analisadas com o MECD. O mesmo já foi submetido e aceito pela ELSEVIER (<https://www.elsevier.com/>) para publicação em seu *journal: Engineering Analysis with Boundary Elements* (<http://www.journals.elsevier.com/engineering-analysis-with-boundary-elements/>), que tem classificação A1 pela CAPES. A ELSEVIER é a maior editora de literatura médica e científica do mundo, fazendo parte do grupo Reed Elsevier. Localizada em Amsterdã, a companhia tem grandes operações no Reino Unido, EUA, Europa e no Brasil.

Também, foi elaborado um vídeo ilustrativo a partir dos resultados obtidos no exemplo da chapa com uma linha de furos de fixadores, com trincas; que foi apresentado na Seção 6.6. Esse vídeo foi postado no YouTube e está disponível no endereço: [https://www.youtube.com/watch?v=p\\_Y0CviKRZM](https://www.youtube.com/watch?v=p_Y0CviKRZM).

## 7.2 - SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como foi demonstrado nesse trabalho, o MECD resolve com precisão, eficiência e ótima performance problemas quaisquer correlatos à mecânica da fratura. Entretanto, há muito campo nesse segmento a ser explorado. Pode-se citar como necessidades de desenvolvimento e que podem ser estudados em trabalhos futuros:

- a extensão dos conceitos teóricos, procedimentos e estratégias empregados nesse estudo para a análise de domínios tridimensionais;
- a coalescência de trincas não alinhadas e em direções arbitrárias, inclusive, a coalescência delas em configuração diversa daquela de ponta com ponta;
- o desenvolvimento de uma entrada gráfica para a modelagem do domínio, carregamentos e da configuração inicial de MSD. Isso pode ser feito facilmente como um aplicativo *plugin* do AutoCAD, desenvolvido a partir da plataforma .NET da Microsoft.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Brebbia C.A., *The Boundary Element Method for Engineers*. Pentech Press, London, (1978).
- [2] Brebbia C.A., Telles J.C., Wrobel L.C., *Boundary Element Techniques*. Springer, Berlin, (1984).
- [3] Blandorf G.E., Ingraffea A.R., Liggett J.A., Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 17:387–404 (1981).
- [4] Portela A., Aliabadi M.H., Rooke D.P., The dual boundary element method: effective implementation for crack problems, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 33:1269–87, (1992).
- [5] Bueckner H.F., Field singularities and related integral representations, in G. C. Sih (Editor), *Mechanics of Fracture Vol. 1*, Nordhoff, Leyden, The Netherlands, (1973).
- [6] Watson J.O., Hermitian cubic and singular elements for plane strain, in Banerjee and Watson (Editors), *Developments in Boundary Element Methods 4*, Elsevier, Barking, U.K., (1986).
- [7] Hong H-K, Chen J.T., Derivation of integral equations in elasticity. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 114(6):1028–1044 (1988).
- [8] Chen J.T., Hong H-K, Review of dual boundary element methods with emphasis on hypersingular integrals and divergent series. *Applied Mechanics Reviews (ASME)*, 52(1):17–33 (1999).
- [9] Brahtz, J.H.A., Stress Distribution in a Reentrant Corner, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 55:31–37 (1933).
- [10] Williams, M.L., Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension, *J. Applied Mechanics*, 526–528, (1952).
- [11] Tong, P., Pian, T.H.H., Lasry, S.J., A hybrid element approach to crack problems in plane elasticity, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 7:297-308, (1973).
- [12] Henshell, R.D. and Shaw, K.G., Crack Tip Elements are Unnecessary, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 9:495–509, (1975).

- [13] Barsoum, R. S., On the Use of Isoparametric finite elements in Linear Fracture Mechanics, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering* 10, 1, 25–37, (1976).
- [14] Cruse, T.A., Wilson, R.B., Boundary Integral Equation Method for Elastic Fracture Mechanics Analysis, AFOSR-TR-780355, Pratt and Whitney Aircraft Group, (1977).
- [15] Blandford, G.E., Ingraffea, A.R., Liggett, J.A., Two-Dimensional Stress Intensity Factor Computations Using the Boundary Element Method, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 17:387–404, (1981).
- [16] Smith, R.N.L., Mason, J.C., A Boundary Element Method for Curved Crack Problems in Two-Dimensions, in Proc. Fourth Int. Seminar on BEM, C.A. Brebbia (Editor), Springer-Verlag, Berlin, (1987).
- [17] Martinez, J., Dominguez, J., On the Use of Quarter-Point Boundary Elements for Stress Intensity Factor Computations, *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, 20:1941–1950, (1984).
- [18] Harrop, L.P., The Optimum Size of Quarter-Point Crack Tip Elements, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 18:1101–1103, (1982).
- [19] Symm, G.T., Integral Equation Methods in Potential Theory, II. Proceedings of Royal Society, A275, 33–46, (1963).
- [20] Xanthis, L.S., Bernal, M.J.M, Atkinson, C., The Treatment of the Singularities in the Calculation of Stress Intensity Factors Using the Integral Equation Method, *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, 26:285–304, (1981).
- [21] Aliabadi, M.H., An Enhanced Boundary Element Method for Determining Fracture Parameters, Proc. 4th Int. Conf. on Numerical Methods in Fracture Mechanics, San Antonio, Texas, Pineridge Press, 27–39, (1987).
- [22] Aliabadi, M.H., Rooke, D.P., Cartwright, D.J., An Improved Boundary Element Formulation for Calculating Stress Intensity Factors: Application to Aerospace Structures, *J. Strain Analysis*, 22 (4), 1–5 (1987).
- [23] Portela, A., Aliabadi, M.H., Rooke, D.P., Efficient Boundary Element Analysis of Sharp Notched Plates, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 32: 445–470, (1991).
- [24] Portela, A., Aliabadi, M.H., Rooke, D.P., Boundary Element Analysis of V-Notched Plates, Proc. of the fourth International Conference on Boundary Element Technology, Windsor, Canada, edited by C. A. Brebbia, Computational Mechanics Publications, Southampton, UK (1989).

- [25] Portela A., Aliabadi M.H., Rooke D.P., Dual boundary element analysis of cracked plates: singularity subtraction technique, *Int. J. of Fracture*, 55:17-28 (1992).
- [26] Karihaloo, B.L., Xiao, Q.Z., Accurate determination of the coefficients of elastic crack tip asymptotic field by a hybrid crack element with p-adaptivity, *Engng. Fract. Mech.* 68:1609-30, (2001).
- [27] Xiao, Q.Z., Karihaloo, B.L., Liu, X.Y., Direct determination of SIF and higher order terms of mixed-mode cracks by a hybrid crack element, *Int. J. Fract.* 125:207-25, (2004).
- [28] Zeng, D., Katsube, N., Zhang, J.M., Soboyejo, W., Hybrid crack-tip element and its applications, *Finite Elem. Anal. Des.*, 38:319-35, (2002).
- [29] Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Meshless methods: an overview and recent developments, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139, 1-4:3-47, (1996).
- [30] Li, S., Liu, W.K., Meshfree and particle methods and their applications, *Applied Mechanics Reviews*, 54:1-34, (2002).
- [31] Liu, G.R., Gu, Y.T., An introduction to meshfree methods and their programming, Springer Press, Berlin, (2005).
- [32] Sladek, J., Sladek, V., Wunsche, M., Zhang, C., Interface crack problems in anisotropic solids analyzed by the MLPG, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 54:223-252, (2009).
- [33] Carpinteri, A., Ferro, G., Ventura, G., The partition of unity quadrature in element-free crack modeling, *Computers and Structures*, 81:1783-1794, (2003).
- [34] Wen, P.H., Aliabadi, M.H., Applications of meshless method to fracture mechanics with enriched radial basis functions, *Durability of Structures and Health Monitoring*, 3:107-119, (2007).
- [35] Fleming, M., Chu, Y., Moran, B., Belytschko, T., Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 40:1483-504, (1997).
- [36] Lu, Y.Y., Belytschko, T., Tabbara, M., Element-free Galerkin method for wave propagation and dynamic fracture, *Computer Methods in Appl Mech Engng*, 126:131-53, (1995).

- [37] Gu, Y.T., Zhang, L.C., Coupling of the meshfree and finite element methods for determination of the crack tip fields, *Engineering Fracture Mechanics*, 75(5):986–1004, (2008).
- [38] Belytschko, T., Black, T., Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 45:601–620, (1999).
- [39] Melenk, J.M., Babuska, I., The partition of unity finite element method: basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:289–314, (1996).
- [40] Chessa J., Wang H.W., Belytschko T., On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 57:1015-1038, (2003).
- [41] Chahine, E., Laborde, P., Renard, Y., Crack-tip enrichment in the XFEM method using a cutt-off function. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 75(6):629—646, (2008).
- [42] Liu, X.Y., Xiao, Q.Z., Karihaloo, B.L., Xfem for direct evaluation of mixed mode stress intensity factors in homogeneous and bi-materials. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 59:1103–1118, (2004).
- [43] Xiao, Q.Z., Karihaloo, B.L., Direct evaluation of accurate coefficients of the linear elastic crack tip asymptotic field. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 25:719–729, (2003).
- [44] Ben Dhia, H., Rateau, G., The Arlequin method as a flexible engineering design tool. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 62:1442–1462, (2005).
- [45] Guidault, P.A., Allix, O., Champaney, L., Cornuault, C., A multiscale extended finite element method for crack propagation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(5):381–399, (2008).
- [46] Belytschko, T., Song, J.H., Coarse-graining of multiscale crack propagation, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 81(5):537—563, (2009).
- [47] Kim, D.J., Pereira, J.P., Duarte, C.A., Analysis of three-dimentional fracture mechanics problems: A two-scale approach using coarse-generalized fem meshes, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 81:335–365, (2010).
- [48] Dong, L., Atluri, S.N., Fracture and fatigue analyses: SGBEM-FEM or XFEM? Part 1: 2D structures, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 90, 2:91-146, (2013).

- [49] Swift, T., Widespread Fatigue Damage Monitoring – Issues and Concerns, *Proc. 5<sup>th</sup> Int. Conf. on Structural Airworthiness of New and Ageing Aircraft*, 113-150 (1993).
- [50] Wanhill, R. J. H., Milestone case histories in aircraft structural integrity, in: *I Milne, R O Ritchie, B Karihaloo, eds.*, Comprehensive structural integrity, Elsevier, vol.1, 61-72, (2003)
- [51] Castro, P. T.; Matos, P.; Moreira, P.; Tavares, S. e Ritcher-Trummer, V.; Problemas de Fadiga e Fratura em Estruturas de Aviões Fabricadas em Alumínio, *Academia das Ciências de Lisboa*, (2012)
- [52] Kebir, H.; Roelandt, J. M. e Gaudin, J.; Computation of Life Expectancy of Mechanical Structures, *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering - ECCOMAS 2000*, Barcelona, (2000)
- [53] Liu J., Beer G, Meek J.L., Efficient evaluation of integrals of order  $1/r$ ,  $1/r^2$  and  $1/r^3$  using Gauss quadrature, *Engineering Analysis*, 2(3):118–123 (1985).
- [54] Broek, D., *Elementary Engineering Fracture Mechanics*, Martinus Nijhoff, Dordrecht, (1986).
- [55] Erdogan, F., Sih, G.C., On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear, *J. Basic Engng* 85, 519-527 (1963).
- [56] Tada, H., Paris, P., e Irwin, G., *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Second Edition, Paris Productions, Inc., (1985).
- [57] Dugdale, D.S., Yielding of Steel Plates Containing Slits, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 8:100-108, (1960).
- [58] Murakami, Y., Editor, *Stress intensity factors handbook*, 1st edition, vol 2. Pergamon Press (1987).
- [59] Chen, Y.Z., Hasebe, N., New integration scheme for the branch crack problem, *Engineering Fracture Mechanics*, 52(5):791-801, (1995).
- [60] Broek, D., *The Practical Use of Fracture Mechanics*, Kluwer Academic Publishers, London, (1988).
- [61] Mellings S.C., Aliabadi M.H., Dual boundary element formulation for inverse potencial problems in crack identification, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 12:275-281, (1993).
- [62] Fedelinski P., Aliabadi M.H., Rooke D.P., The dual boundary element method in dynamic fracture-mechanics, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 12:203-210, (1993).

- [63] Portela A., Aliabadi M.H., Rooke D.P., Dual boundary element incremental-analysis of crack-propagation, *Computers & Structures*, 46:237-247, (1993).
- [64] Prasad N.N.V., Aliabadi M.H., Rooke D.P., The dual boundary-element method for thermoelastic crack problems, *International Journal of Fracture*, 66:255-272, (1994).
- [65] Sollero P., Aliabadi M.H., Anisotropic analysis of cracks in composite laminates using the dual boundary-element method, *Composite Structures*, 31:229-233, (1995).
- [66] Leitao V., Aliabadi M.H., Rooke D.P., The dual boundary-element formulation for elastoplastic fracture-mechanics, *International J. for Numerical Methods in Engineering*, 38:315-333, (1995).
- [67] Leitao V., Aliabadi M.H., Rooke D.P., Elastoplastic dual boundary elements - application to crack-face contact, *Computers & Structures*, 54:443-454, (1995).
- [68] Leitao V.M.A., Aliabadi M.H., Rooke D.P., Elastoplastic simulation of fatigue-crack growth - dual boundary-element formulation, *International Journal of Fatigue*, 17:353-363, (1995).
- [69] Corradi S., Aliabadi M.H., Marchetti M., A variable stiffness dual boundary element method for mixed-mode elastoplastic crack problems, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 25:43-49, (1996).
- [70] Salgado N.K., Aliabadi M.H., The application of the dual boundary element method to the analysis of cracked stiffened panels, *Engineering Fracture Mechanics*, 54:91-105, (1996).
- [71] Prasad N.N.V., Aliabadi M.H., Rooke D.P., The dual boundary element method for transient thermoelastic crack problems, *International Journal of Solids and Structures*, 33:2695-2718, (1996).
- [72] Dell'Erba D.N., Aliabadi M.H., Rooke D.P., Dual boundary element method for three-dimensional thermoelastic crack problems, *International Journal of Fracture*, 94:89-101, (1998).
- [73] Aliabadi M.H., Wen P.H., Rooke D.P., Dynamic dual boundary element analysis for 3-D fracture mechanics, *20th International Conference on the Boundary Element Method*, Orlando, (1998).
- [74] Wen P.H., Aliabadi M.H., Rooke D.P., Cracks in three dimensions: A dynamic dual boundary element analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 167:139-151, (1998).

- [75] Wen P.H., Aliabadi M.H., Young A., A time-dependent formulation of dual boundary element method for 3D dynamic crack problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45:1887-1905, (1999).
- [76] Wen P.H., Aliabadi M.H., Young A., Dual boundary element methods for three-dimensional dynamic crack problems, *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 34:373-394, (1999).
- [77] Dirgantara T., Aliabadi M.H., Crack growth analysis of plates loaded by bending and tension using dual boundary element method, *International Journal of Fracture*, 105:27-47, (2000).
- [78] Dirgantara T., Aliabadi M.H., Dual boundary element formulation for fracture mechanics analysis of shear deformable shells, *International Journal of Solids and Structures*, 38:44-45, (2001).
- [79] Albuquerque E.L., Sollero P., Aliabadi M.H., Dual boundary element method for anisotropic dynamic fracture mechanics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59:1187-1205, (2004).
- [80] Cisilino A.P., Aliabadi M.H., Dual boundary element assessment of three-dimensional fatigue crack growth, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28:1157-1173, (2004).
- [81] Purbolaksono I., Aliabadi M.H., Dual boundary element method for instability analysis of cracked plates, *CMES - Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 8:73-90, (2005).
- [82] Benedetti I., Milazzo A., Aliabadi M.H., A fast dual boundary element method for 3D anisotropic crack problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 80:1356-1378, (2009).
- [83] Wen P.H., Aliabadi M.H., Dual boundary element method for modelling curved crack paths, *International Journal of Fracture*, 176:127-133, (2012).
- [84] Di Pisa C., Aliabadi M.H., Fatigue crack growth analysis of assembled plate structures with dual boundary element method, *Engineering Fracture Mechanics*, 98:200-213, (2013).