

**ANÁLISE NUMÉRICA NÃO-LINEAR DE ELEMENTOS DE  
CONCRETO ESTRUTURAL CONSIDERANDO A  
VARIÇÃO DE ADERÊNCIA**

**WASHINGTON GULTENBERG DE MOURA LUKE**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS  
E CONSTRUÇÃO CIVIL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ANÁLISE NUMÉRICA NÃO-LINEAR DE ELEMENTOS DE  
CONCRETO ESTRUTURAL CONSIDERANDO A  
VARIAÇÃO DE ADERÊNCIA**

**WASHINGTON GULTENBERG DE MOURA LUKE**

**ORIENTADOR: DSc. LUCIANO MENDES BEZERRA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E  
CONSTRUÇÃO CIVIL**

**PUBLICAÇÃO: E.DM-018A/15**

**BRASÍLIA/DF: AGOSTO – 2015**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ANÁLISE NUMÉRICA NÃO-LINEAR DE ELEMENTOS DE  
CONCRETO ESTRUTURAL CONSIDERANDO  
A VARIAÇÃO DE ADERÊNCIA**

**WASHINGTON GULTENBERG DE MOURA LUKE**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A  
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ESTRUTURAS E  
CONSTRUÇÃO CIVIL.**

**APROVADO POR:**

---

**Professor Luciano Mendes Bezerra, DSc. (UnB)**  
**(Orientador)**

---

**Prof. Paulo Chaves de Rezende Martins, Dr. ECP (UnB)**  
**(Co-orientador)**

---

**Prof. José Manoel Morales Sánchez, DSc. (UnB)**  
**(Examinador Externo)**

---

**Prof. Marcos Honorato de Oliveira, DSc. (UnB)**  
**(Examinador Interno)**

**BRASÍLIA, AGOSTO/2015.**

## FICHA CATALOGRÁFICA

LUKE, WASHINGTON GULTENBERG DE MOURA	
Análise numérica não-linear de elementos de concreto estrutural considerando a variação de aderência [Distrito Federal] 2015.	
xviii, 148p., 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2015).	
Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.	
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.	
1. Concreto estrutural	2. Aderência
3. Análise estrutural	4. Análise numérica
I. ENC/FT/UnB	II. Título (série)

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

LUKE, W. G. M. (2015). Análise numérica não-linear de elementos de concreto estrutural considerando a variação de aderência. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-018A/15, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 148p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Washington Gultenberg de Moura Luke

TÍTULO: Análise numérica não-linear de elementos de concreto estrutural considerando a variação de aderência.

GRAU: Mestre

ANO: 2015

É concedida a Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Washington Gultenberg de Moura Luke  
SQN 103, Bloco E, Apto 604.- Asa Norte  
70732-050, Brasília - DF  
wvcluke@gmail.com

Dedico este trabalho a minha amada e dedicada esposa Valéria, a minha querida filha Victória e ao meu filho Caio. Sem vocês nada seria possível.

## AGRADECIMENTO

Agradeço primeiramente a Deus por estar sempre comigo nesta jornada, me dando saúde, força, sabedoria, inteligência e por sempre derramar suas bênçãos sobre mim nos momentos mais difíceis.

Agradeço também às pessoas que me apoiaram nesta caminhada, onde busco realizar parte de meus sonhos; amigos que proporcionaram meu crescimento pessoal e profissional, através de conselhos, orientações e palavras tranquilizadoras em momento turbulento. Agradeço o abraço fraterno e a atenção a mim dispensada.

Também, expresso aqui, meu verdadeiro, cordial e afetuoso agradecimento:

- À minha família, esposa e filhos, que sempre me apoiaram na busca de meus sonhos, estando ao meu lado em todos os momentos e decisões tomadas, nunca se furtando ao enfrentamento das dificuldades colocadas em nossas vidas, sempre com um belo sorriso, um carinhoso abraço e um gentil beijo! Vocês são a base de minha vida, sem vocês não teria conseguido. Amo muito vocês: VALERIA, VICTÓRIA e CAIO.

- Ao meu orientador, Professor Dr. Luciano Mendes Bezerra, que dedicou parte de seu tempo, ajudando-me a chegar ao final deste trabalho. Com sua paciência, dedicação e sapiência, conduziu-me em todos os momentos desta pesquisa. Obrigado pela ajuda na concretização de mais um sonho!

- Ao Professor Dr. Paulo Chaves de Rezende Martins que fez parte de minha caminhada no Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil da Universidade de Brasília, transferindo parte de seus conhecimentos, para que eu me torne um profissional mais preparado e que em vários momentos me acalmaram nas dificuldades enfrentadas. Meu muito obrigado!

- Aos meus amigos do PECC, em especial, ao colega Virley Lemos de Souza que me apoiou nesta travessia e que nas dificuldades me acalmava com seus conselhos e que nas horas de alegria transformou momentos de descontração em marcas inesquecíveis.

- Ao meu amigo Capitão Paiva Rodrigues por me apoiar na decisão de continuar nos estudos e na defesa da dissertação. É nessas horas que reconhecemos um grande amigo.

“Combati o bom combate, terminei a corrida, mantive a fé.”

2 Timóteo 4:7

## RESUMO

### ANÁLISE NUMÉRICA NÃO-LINEAR DE ELEMENTOS DE CONCRETO ESTRUTURAL CONSIDERANDO A VARIAÇÃO DE ADERÊNCIA.

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um ambiente computacional voltado à análise numérica não-linear de elementos de concreto estrutural (armado e/ou protendido) considerando a variação de aderência. O programa realiza o cálculo do equilíbrio de elementos de vigas de concreto estrutural, limitados por duas seções de descontinuidade consecutivas (fissuras ou juntas abertas), levando-se em conta o deslizamento aço-concreto, quando não é mais possível conservar a hipótese de Bernoulli-Navier. O software desenvolvido na linguagem MATLAB permite a comparação entre o Modelo da Aderência Perfeita (MAP) e o Modelo da Aderência Variável (MAV), para um mesmo elemento de viga, servindo de predictor para ensaios e análise de comportamento de peças de concreto estrutural submetidas a esforços de flexo-compressão reta. São empregados vários métodos e técnicas de cálculo numérico para obtenção do equilíbrio do elemento de concreto estrutural, tanto no MAP como no MAV. Para o desenvolvimento das rotinas do MAV foi utilizada a base teórica do estudo de REZENDE MARTINS, P.C. – *Modélisation du Comportement Jusqu'à la Rupture en Flexion de Poutres en Béton a Précontrainte Exterieur ou Mixte. Thèse de Doctorat – Mécanique des Sols et Structures - Ecole Centrale des Arts et Manufactures de Paris, França, 1989*. Para validação do programa proposto foram realizados vários testes numéricos, comparando-se os resultados do programa com dados clássicos disponíveis na literatura. No caso do MAV, comparou-se os resultados com aqueles apresentados por COHN, M.Z. & RIVA, P. no trabalho intitulado “A Comprehensive Study of the Flexural Behaviour of Structural Concrete Elements”, p365-413. Corso di Perfezionamento per le Costruzioni in Cemento Armato, Fratelli Pesenti, Politecnico di Milano, Itália. Studi e Ricerche – Vol. 9, 1987. Como conclusão do presente estudo, pode-se mostrar que o MAP, que trata de elementos de concreto com armadura interna perfeitamente aderente, é um caso particular do MAV. Isto acontece quando o eixo de deslocamento longitudinal nulo se confunde com a linha neutra de deformação. No caso geral, o primeiro é distinto do segundo em razão da variação da posição do eixo neutro ao longo da viga devida às singularidades constituídas pelas fissuras/juntas.

## ***ABSTRACT***

### **NON-LINEAR NUMERICAL ANALYSIS OF STRUCTURAL CONCRETE ELEMENTS CONSIDERING ADHERENCE VARIATION**

This research shows the development of a computing environment facing towards the non-linear numerical analysis of structural (reinforced and/or prestressed) concrete elements considering adherence variation.

The program calculates the balance of beam structural concrete elements, limited by two straight sections of discontinuity (cracks or open joints), minding the steel-concrete sliding when Bernoulli-Navier hypothesis is no longer possible to be conserved.

The software developed in MATLAB allows comparison between Perfect Adherence Model (MAP) and Variable Adherence Model (MAV) to a same beam element, being used as a predictor for tests and structural concrete pieces behavior analysis when submitted straight flexo-compression efforts.

A major set of methods and techniques of numerical calculation are used to obtain balance on structural concrete elements both in MAP and MAV.

To develop MAV's routines, the theoretical basis of the study from REZENDE MARTINS, P.C – Modelisation du Comportement Jusqu'à la Rupture en Flexion de Poutres en Béton a Précontrainte Exterieur ou Mixte. Thèse de Doctorat – Mécanique des Sols et Structures - Ecole Centrale des Arts et Manufactures de Paris, France, 1989, was used. In order to validate the proposed program, many numerical tests were made, comparing those program results with classic data available in the literature.

In MAV's case, the results are compared with those shown by COHN, M.Z. & RIVA, P. at work entitled "A Comprehensive Study of the Flexural Behaviour of Structural Concrete Elements", p365-413. Corso di Perfezionamento per le Costruzioni in Cemento Armato, Fratelli Pesenti, Politecnico di Milano, Italy. Studi e Ricerche – Vol. 9, 1987.

To conclude this study, it can be shown that MAP, which deals with concrete elements with a perfectly gripped internal armor, is a particular case of MAV. This happens when the null longitudinal displacement axis is mistaken with the neutral axis of deformation. In general, the first axis is different from the second due the neutral axis position variation along the beam because of the singularities of each crack/joint.

## Sumário

1 - INTRODUÇÃO.....	1
1.1 - JUSTIFICATIVA .....	2
1.2 - OBJETIVOS.....	2
1.2.1 - Geral .....	2
1.2.2 - Específicos .....	2
2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	3
2.1 - LEIS DE COMPORTAMENTO DOS MATERIAIS.....	3
2.1.1 - Classificação dos tipos de concretos .....	3
2.1.2 - Diagramas de tensão versus deformação.....	5
2.2 - FENÔMENO DE ADERÊNCIA AÇO-CONCRETO.....	16
2.2.1 – Generalidades .....	16
2.2.2 – Histórico do fenômeno de aderência .....	21
2.2.3 - Leis de tensão de aderência entre aço e concreto.....	28
2.3 - EQUILÍBRIO DE ELEMENTO DE CONCRETO ESTRUTURAL CONSIDERANDO O MODELO DE ADERÊNCIA PERFEITA (MAP).....	32
2.3.1 - Generalidades.....	32
2.3.2 - Hipóteses de cálculo .....	33
2.3.3 - Equações gerais.....	34
2.3.4 - Seções de concreto estrutural sujeitas a flexo-compressão .....	39
2.3.5 - Comprimento de ancoragem de barra tracionada.....	42
2.3.6 - Métodos de cálculo.....	45
2.3.7 - Integração numérica .....	52
2.3.8 - Características geométricas das seções transversais .....	59
2.3.9 - Diagramas de Cálculo.....	63
2.4 - EQUILÍBRIO DE ELEMENTO DE CONCRETO ESTRUTURAL CONSIDERANDO O MODELO DE ADERÊNCIA VARIÁVEL (MAV).....	69
2.4.1 - Generalidades.....	69

2.4.2 - Hipóteses de cálculo .....	70
2.4.3 - Equações gerais .....	74
2.4.4 - Algoritmo de Cálculo do Modelo de Aderência Variável (MAV) .....	85
2.4.5 – Correlação entre MAP e MAV .....	96
3 – METODOLOGIA DE DESENVOLVIMENTO DO CARPE2 .....	99
3.1 – Descrição do Programa CARPE.....	99
3.2 – Descrição do Programa CARPE2.....	103
4 – VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS DE CARPE2.....	107
4.1 – PROGRAMA CARPE2 E ÁBACOS DE PFEIL E DE VENTURINI (Aderência Perfeita) .....	107
4.2 – PROGRAMA CARPE2 E PROGRAMA MOCURO (Aderência Variável) .....	114
4.2.1 – Programa CARPE2 - Modelo de MARTINS (Aderência Variável) .....	114
4.2.2 – Programa MOCURO - Modelo de COHN E RIVA (Aderência Variável) ...	115
5 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES PARA PESQUISAS FUTURAS .....	126
5.1 - CONCLUSÕES GERAIS .....	126
5.2 - RECOMENDAÇÕES PARA PESQUISAS FUTURAS .....	128
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	129
ANEXO A - ROTEIRO PARA CÁLCULO DE USB e $\mathcal{E}SB$ .....	134
ANEXO B - TESTES DO SUBPROGRAMA ADHERE .....	139
ANEXO C - EXEMPLOS DE GRÁFICOS GERADOS PELO CARPE2 (MAP).....	141
ANEXO D - CÓDIGO FONTE MOMENTO – CURVATURA (MAP) .....	144

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2. 1 - Valores estimados de módulo de elasticidade em função da resistência característica à compressão do concreto (considerando o uso de granito como agregado graúdo) (Fonte: NBR 6118:2014).....	8
Tabela 2. 2 - Parâmetros para definição da curva tensão de aderência versus deslizamento para barras nervuradas (Fonte: CEB-FIB 2010).....	31
Tabela A. 1 – Entrada de Adhere.....	138
Tabela A. 2 – Unidades de CARPE.....	138
Tabela B. 1 - Dados tensão de aderência-deslizamento (Fonte: MARTINS,1989).....	139
Tabela B. 2 - Dados de entrada para subprograma Adhere.....	140
Tabela B. 3 – Deformação de acordo com LV e USB.....	140

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Elemento de concreto entre duas fissuras (Fonte: MARTINS, 1989).....	1
Figura 2.1.1 - Diagrama tensão-deformação idealizado para o concreto a compressão (Fonte: NBR 6118/14) .....	7
Figura 2.1.2 - Diagrama tensão-deformação do concreto para compressão uniaxial. (Fonte: CEB, 1990).....	9
Figura 2.1.3 - Diagrama tensão-deformação bilinear na tração (Fonte: NBR 6118/14).....	11
Figura 2.1.4 - Diagrama $\sigma_c - \epsilon_c$ para o concreto na zona tracionada.....	12
Figura 2.1.5 - Diagrama tensão-deformação real dos aços brasileiros. (Fonte: ABNT NBR) .....	13
Figura 2.1.6 - Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras passivas com ou sem patamar de escoamento (CA-25, CA-50 e CA-60).....	14
Figura 2.1.7 - Diagrama tensão-deformação para aços de armadura ativas.....	15
Figura 2.1.8 - Diagrama tensão-deformação para aços de armadura ativas.....	15
Figura 2.2.1 - Fissuração por tração (Fonte: FUSCO, 1995). .....	18

Figura 2.2.2 - Aderência por adesão (Fonte: FUSCO, 1995).....	19
Figura 2.2.3 - Aderência por atrito (Fonte: FUSCO, 1995). ....	19
Figura 2.2.4 - Interação mecânica entre as nervuras da barra de aço e o concreto ao redor (Fonte: FUSCO, 1995).....	20
Figura 2.2.5 - Elemento de ligação (Fonte: NGO, 1967).....	22
Figura 2.2.6 - Curva tensão de aderência x deslizamento (Fonte: MIRZA, 1979).....	23
Figura 2.2.7 - Relação local da tensão de aderência x deslizamento (Fonte: YANKELESKY, 1985).....	24
Figura 2.2.8 – Elemento de concreto submetido a flexão composta reta. (Fonte: COHN&RIVA, 1987) .....	24
Figura 2.2.9 - Curva tensão de aderência x deslizamento (Fonte: MARTINS, 1989).....	25
Figura 2.2.10 - Propagação do cone formado por fissuras ao redor da barra de aço. (Fonte: UIJL, 1996).....	26
Figura 2.2.11 - Estádios decorrentes da propagação das fissuras. (Fonte: UIJL, 1996).....	26
Figura 2.2.12 - Curva tensão de aderência x deslizamento (Fonte: MIRZA, 1979).....	29
Figura 2.2.13 - Relação local da tensão de aderência x deslizamento (Fonte: YANKELESKY, 1985).....	29
Figura 2.2.14 - Curva tensão de aderência x deslizamento (Fonte: MARTINS, 1989).....	30
Figura 2.2.15 - Curva tensão de aderência x deslizamento (Fonte: CEB-FIB, 2010). ....	30
Figura 2.3.1 - Equilíbrio da Seção Transversal. ....	32
Figura 2.3.2 - Diagrama de deformações de acordo com a hipótese de Bernoulli para peças esbeltas (a seção transversal permanece plana na deformação por flexão e o diagrama de deformação é linear). (Fonte: LEONHARDT e MÖNNING, 1977).....	33
Figura 2.3.3 - Seção transversal em flexão composta reta. (Fonte: Autor).....	35
Figura 2.3.4 - Deformações da Seção Transversal. ....	36
Figura 2.3.5 - (a) Seção em concreto estrutural; (b) Distribuição das deformações na seção transversal. (Fonte: PRAZERES, 2002).....	39
Figura 2.3.6 - Transferência de força normal para o concreto. (Fonte: UFPR, 2006).....	43
Figura 2.3.7 - Transferência de força normal para o concreto. (Fonte: UFPR, 2006).....	44

Figura 2.3.8 - Método Newton-Raphson.(Fonte: CUNHA,1993).....	46
Figura 2.3.9 - Divisão da seção transversal.....	54
Figura 2.3.10 - Diagrama tensão-deformação idealizado do concreto. (Fonte: NBR 6118/14) .....	56
Figura 2.3.11 - Diagramas tensão-deformação dos aços tipo A e B. (Fonte: ABNT NBR) .....	57
Figura 2.3.12 - Algoritmo da rotina para cálculo dos esforços resistentes. ....	58
Figura 2.3.15 - Cálculo do cg das barras de aço.....	63
Figura 2.3.16 - Diagrama de Interação Momento Fletor – Esforço Normal. ....	64
Figura 2.3.17 - Diagrama de Interação Momento Fletor – Esforço Normal. ....	64
Figura 2.3.18 - Diagrama Esforço Normal – Deformação .....	66
Figura 2.3.19 - Diagrama Esforço Normal – Deformação .....	67
Figura 2.3.20 - Diagrama Momento Fletor – Esforço Normal – Curvatura.....	68
Figura 2.4.1 - Viga com fissuras sucessivas.....	69
Figura 2.4.2 - Evolução do eixo neutro de deformação e de rotação das seções (Fonte: MARTINS, 1989). ....	70
Figura 2.4.3 - O equilíbrio de um elemento considerando o deslizamento aço-concreto (Fonte: MARTINS, 1989). ....	72
Figura 2.4.4 - Aderência Aço-Concreto (Fonte: BARBOSA, 2001).....	74
Figura 2.4.5 - Deslizamento da armadura em relação ao concreto.....	75
Figura 2.4.6 - Curva tensão de aderência x deslizamento. (Fonte: MARTINS, 1989).....	77
Figura 2.4.7 - Deformação do concreto ao redor da barra (Fonte: BARBOSA, 2001) .....	79
Figura 2.4.8 - Perturbação local das deformações decorrentes da abertura de uma fissura. (Fonte: MARTINS e FOURE, 1990).....	86
Figura 2.4.9 - Caracterização do deslocamento relativo da seção de junta (J) em relação à seção (V) localizada na metade da distância até a junta seguinte. (Fonte: MARTINS e FOURE, 1990).....	87
Figura 2.4.10 - Idealização da lei de aderência-deslizamento. (Fonte: MARTINS, 1989)..	89

Figura 2.4.11 - Evolução da tensão de aderência e do deslizamento ao longo de uma viga para níveis crescentes de sobre-tensão do cabo interno. (Fonte: MARTINS&FOURE, 1990) .....	91
Figura 2.4.12 – Hipóteses adicionais de deformação.....	92
Figura 2.4.13 - Fluxograma de Equilíbrio de Elemento Estrutural (Fonte: MARTINS,1989) .....	95
Figura 2.4.14 – Equilíbrio da Seção Transversal.....	96
Figura 2.4.15 – Correlação entre MAV e MAP .....	97
Figura 3.1.1 - Tela de entrada de dados do programa CARPE .....	99
Figura 3.1.2 - Tela de opções de saída de dados do programa CARPE.....	100
Figura 3.1.3 - Discretização da seção da viga .....	101
Figura 3.1.4 - Divisão das seções de aço e concreto.....	102
Figura 3.2.1 – Diagrama de interação momento- esforço normal.....	103
Figura 3.2.2– Diagrama momento - curvatura conhecendo-se o valor do esforço normal	104
Figura 3.2.3– Diagrama esforço normal – deformação normal para carga variável com excentricidade fixa .....	104
Figura 3.2.4 – Diagrama esforço normal – curvatura para carga variável com excentricidade fixa .....	105
Figura 3.2.5 – Diagrama momento - curvatura para carga variável com excentricidade fixa .....	105
Figura 4.1.1 - Ábaco de PFEIL (1976) .....	108
Figura 4.1.2 - Ábaco de VENTURINI (1987).....	110
Figura 4.1.3 - Diagramas Momento x Normal gerado pelo programa CARPE2 .....	111
Figura 4.1.4 - Diagramas Momento x Normal gerado pelo programa CARPE2 .....	111
Figura 4.1.5 – Diagramas Momento x Curvatura (Fonte: PRAZERES, 2002).....	113
Figura 4.1.6 – Diagramas Momento x Curvatura gerados pelo CAPRE2 .....	113
Figura 4.2.1 - Elemento de concreto estrutural estudado por COHN & RIVA (1987) .....	116

Figura 4.2.2 - Tabela utilizada nos estudos de COHN E RIVA (1987) que serviu de entrada de dados para o programa CARPE2. ....	117
Figura 4.2.3 – Lei tensão-deformação para aço passivo e para aço ativo propostas por SARGIN. (Fonte: COHN & RIVA, 1987).....	118
Figura 4.2.4 – Lei tensão-deformação para concreto comprimido de SARGIN; Lei tensão-deformação para concreto tracionado de GIURIANI. (Fonte: COHN & RIVA, 1987) ....	119
Figura 4.2.5 – Lei tensão de aderência - deslizamento (a) aço passivo GIURIANI; (b) aço ativo REINHARDT. (Fonte: COHN & RIVA, 1987) .....	120
Figura 4.2.6 – Lei tensão de aderência - deslizamento (Fonte: MARTINS, 1989).....	121
Figura 4.2.7 - Curva tensão de aderência x deslizamento (Fonte: CEB-FIB, 2010). ....	122
Figura 4.2.8 - Espaçamento entre nervuras segundo a NBR 7480 (ABNT, 1996).....	122
Figura 4.2.9 – Diagramas Momento x Curvatura para taxa de armadura .....	123
Figura 4.2.10 – Diagramas Momento x Curvatura para taxa de armadura .....	124
Figura 4.2.11 – Diagramas Momento x Curvatura para taxa de armadura .....	124
Figura 4.2.12 – Diagramas Momento x Curvatura para taxa de armadura .....	124
Figura 4.2.13 – Diagramas Momento x Curvatura para taxa de armadura .....	125
Figura A. 1 – Elemento de concreto estrutural.....	134
Figura A. 2 – Seção não fissurada .....	136
Figura A. 3 – Relação de deformações entre seções.....	137
Figura B. 1 - Diagrama tensão de aderência-deslizamento (Fonte: MARTINS,1989).....	139
Figura C. 1 - Diagrama momento fletor -esforço normal .....	141
Figura C. 2 - Diagrama momento-curvatura .....	141
Figura C. 3 - Diagrama esforço normal – deformação .....	142
Figura C. 4 - Diagrama esforço normal – curvatura .....	142
Figura C. 5 - Diagrama momento fletor – curvatura .....	143

## LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIACÕES.

$b$  – Base da seção transversal

$h$  – Altura de seção transversal

$d$  – Altura útil da seção transversal

$d'$  – Distância da fibra inferior mais externa ao centro de gravidade da armadura de aço inferior

$d''$  – Distância da fibra superior mais externa ao centro de gravidade da armadura de aço superior

$I$  – Momento de inércia da seção transversal

$x$  – Posição da linha neutra na seção transversal

$z$  – Distância entre a resultante dos esforços de compressão no concreto e a resultante dos esforços de tração ou compressão na armadura inferior

$A_s$  – Área da armadura de aço inferior

$A'_s$  – Área da armadura de aço superior

$A_c$  – Área da seção de concreto

$E_c$  – Módulo de deformação longitudinal do concreto

$E_s$  – Módulo de deformação longitudinal do aço

$EI$  – Rigidez a flexão da seção transversal

$f_{ck}$  – Resistência característica a compressão do concreto

$f_{cd}$  – Resistência de projeto a compressão do concreto

$f_{yk}$  – Resistência característica do aço

$f_{yd}$  – Resistência de projeto do aço

$\gamma_s$  – Coeficiente de minoração do aço

$\sigma_c$  – Tensão de compressão no concreto

$\sigma_s$  – Tensão de tração ou compressão na armadura de aço inferior

$\sigma'_s$  – Tensão de tração ou compressão na armadura de aço superior

$\epsilon_c$  – Deformação unitária de encurtamento do concreto

$\epsilon_{ccu}$  – Deformação última de encurtamento do concreto

$\epsilon_{su}$  – Deformação última de alongamento da armadura tracionada

$\epsilon_s$  – Deformação unitária no centro da armadura de aço inferior

$\epsilon'_s$  – Deformação unitária no centro da armadura de aço superior

$\epsilon_b$  – Deformação unitária na base da seção transversal

$\epsilon_t$  – Deformação unitária no topo da seção transversal

$\epsilon_0$  – Deformação unitária no eixo de referência da seção transversal

$M_d$  – Momento fletor resistente da seção referido ao centro de gravidade da seção transversal

$M_{ds}$  – Momento fletor resistente da seção referido ao centro de gravidade da armadura de Aço inferior

$\mu_d$  – Momento fletor reduzido (valor adimensional)

$N_d$  – Esforço normal resistente da seção

$P$  – Carga concentrada

$v_d$  – Esforço normal normalizado (valor adimensional)

$\varphi$  - Curvatura da seção transversal

$\omega$  - Taxa mecânica de armadura

$R_c$  – Resultante das forças de compressão no concreto

$R_s$  – Resultante das forças de tração ou compressão na armadura inferior

$R'_s$  – Resultante das forças de tração ou compressão na armadura superior

$\alpha$  - Fator que considera a forma parabólica do trecho inicial do diagrama tensão-deformação do concreto

$\xi$  - Distância da fibra superior mais externa a linha neutra (forma adimensional)

$N$  – Número de pontos de integração

$\Delta h$  – Largura da subdivisão da seção transversal

$y_i$  – Distância de uma fibra qualquer referida ao centro geométrico da seção transversal

$\sigma(y_i)$  – Tensão em uma fibra qualquer referida ao centro geométrico da seção transversal

$\epsilon(y_i)$  – Deformação unitária de uma fibra qualquer referida ao centro geométrico da seção transversal

$\delta$ - Deflexão (flecha)

$J$  – Matriz jacobiana

$K$  – Matriz de rigidez da seção transversal

$e$  – Vetor das deformações

## 1 - INTRODUÇÃO

O presente estudo trata do cálculo do equilíbrio de elementos de viga de concreto estrutural, submetidos a esforços de flexo-compressão reta, limitados por duas juntas ou fissuras consecutivas, levando-se em conta o deslizamento aço-concreto, onde não é mais possível conservar a hipótese de Bernoulli-Navier, que diz que seções transversais permanecem planas e normais ao eixo da viga quando esta se deforma.

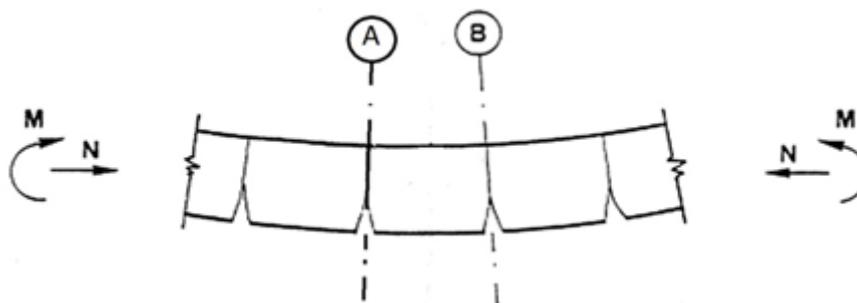


Figura 1.1 - Elemento de concreto entre duas fissuras (Fonte: MARTINS, 1989)

Será mostrado, neste trabalho, que o modelo de elasticidade não-linear clássico, que trata de elementos de concreto com armadura interna perfeitamente aderente, denominado aqui por Modelo de Aderência Perfeita (MAP), é um caso particular do Modelo de Aderência Variável (MAV).

A dissertação é composta por cinco capítulos, cujas características são destacadas abaixo.

O primeiro capítulo trata da justificativa e dos objetivos do estudo sobre variação de aderência da armadura nos elementos de concreto estrutural.

O segundo capítulo contém uma revisão bibliográfica sobre o comportamento dos materiais constituintes dos elementos de concreto e apresenta alguns aspectos dos fenômenos de aderência, com destaque para os modelos de aderência perfeita e aderência variável.

O terceiro capítulo discorre sobre a metodologia para implementação do programa CARPE2, que teve como ponto de partida o trabalho de MARTINS (1989). O programa CARPE2 foi desenvolvido na linguagem do software MATLAB e FORTRAN.

O quarto capítulo tem por finalidade apresentar testes de validação de resultados obtidos pelo programa CARPE2 com relação ao Modelo de Aderência Perfeita (MAP) e ao Modelo de Aderência Variável (MAV).

O quinto capítulo apresenta as conclusões assim como as recomendações para pesquisas futuras sobre a variação de aderência aço-concreto nos elementos de concreto estrutural.

## **1.1 - JUSTIFICATIVA**

A justificativa de se fazer um programa computacional para análise e obtenção de esforços resistentes em elementos de viga de concreto estrutural está na necessidade de simular situações reais, por meio de ensaios mecânicos de laboratório. Com o emprego das simulações computacionais dos elementos estruturais, consegue-se otimizar o planejamento e a execução de ensaios de laboratórios, como também validar os resultados obtidos na análise experimental.

## **1.2 - OBJETIVOS**

### 1.2.1 - Geral

O objetivo principal da dissertação de mestrado é o desenvolvimento de um programa de computador, chamado CARPE2, que dimensione um elemento de viga de concreto estrutural, submetidos a esforços de flexo-compressão reta, limitado por duas juntas ou fissuras consecutivas, levando-se em consideração o deslizamento entre o aço e o concreto, empregando o Modelo de Aderência Variável (MAV) proposto por MARTINS (1989).

### 1.2.2 - Específicos

O estudo teórico sobre a aderência entre o aço e o concreto será desenvolvido e apresentado no corpo da dissertação comparando-se o Modelo da Aderência Perfeita (MAP), que utiliza referências clássicas da literatura, com o Modelo da Aderência Variável (MAV) que está baseado no trabalho de MARTINS (1989).

A partir desse estudo, foi elaborado um programa de computador, utilizando a linguagem MATLAB, para servir de previsor para ensaios e análise de comportamento de peças de concreto estrutural submetidas a esforços de flexo-compressão reta.

Os resultados do programa CARPE2 são, então, confrontados com resultados obtidos por COHN & RIVA (1987). Essas comparações permitirão avaliar a performance do CARPE2 com relação ao Modelo de Aderência Variável (MAV) proposto por MARTINS (1989).

## **2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

Abaixo, são apresentados os principais estudos realizados para atender aos objetivos propostos neste trabalho:

- Estudos das leis de comportamento do aço e do concreto, destacando-se seus diagramas de tensão versus deformação.
- Estudo do fenômeno de aderência, descrevendo suas principais características e referenciais teóricos de alguns pesquisadores desta área.
- O estudo do equilíbrio de elemento de concreto estrutural considerando o Modelo de Aderência Perfeita (MAP).
- O estudo do equilíbrio de elemento de concreto estrutural considerando o Modelo de Aderência Variável (MAV).

### **2.1 - LEIS DE COMPORTAMENTO DOS MATERIAIS**

Este capítulo apresenta os conceitos básicos sobre o comportamento dos materiais empregados no concreto estrutural. Para os modelos constitutivos do aço e do concreto, são apresentados os parâmetros mais importantes com relação à aderência entre ambos materiais.

#### **2.1.1 - Classificação dos tipos de concretos**

##### **a) Concreto Simples**

O concreto é um material composto, constituído por cimento, água, agregado miúdo e agregado graúdo. Pode também conter adições e aditivos químicos, com a finalidade de melhorar ou modificar suas propriedades básicas.

A NBR 6118/14 (item 3.1.2) define elementos de concreto simples estrutural como: “elementos estruturais elaborados com concreto que não possui qualquer tipo de armadura ou que a possui em quantidade inferior ao mínimo exigido para o concreto armado”.

## b) Concreto Armado

Conceitua-se concreto armado como a união do concreto simples as armaduras de aço de tal modo que ambos resistam solidariamente aos esforços solicitantes.

No entanto, o conceito de concreto armado envolve ainda o fenômeno da aderência, pois não basta apenas juntar os dois materiais. Para existir o concreto armado, é necessário ocorrer a solidariedade entre o concreto e o aço para que os elementos estruturais possam resistir às tensões a que estão submetidas.

De forma esquemática, pode-se dizer que o concreto armado é formado por 3 parcelas, como indicado abaixo:

$$\text{concreto armado} = \text{concreto simples} + \text{armadura} + \text{aderência}$$

Nas peças de concreto armado, a armadura de aço é chamada “passiva” porque as tensões e deformações nela aplicadas se devem exclusivamente aos carregamentos externos.

A NBR 6118/14 (item 3.1.3) define elementos de concreto armado como:

“aqueles cujo comportamento estrutural depende da aderência entre concreto e armadura e nos quais não se aplicam alongamentos iniciais das armaduras antes da materialização dessa aderência”.

A NBR 6118/14 (item 3.1.4) define armadura passiva como:

“qualquer armadura que não seja usada para produzir forças de protensão, isto é, que não seja previamente alongada”.

## c) Concreto Protendido

O concreto protendido tem por princípio básico a aplicação de tensões prévias de compressão nas regiões da peça que serão tracionadas pela ação do carregamento externo aplicado. Com isso, as tensões de tração são diminuídas ou até mesmo anuladas pelas tensões de compressão pré-existentes ou pré-aplicadas na peça. A protensão visa eliminar a característica negativa da baixa resistência do concreto à tração (BASTOS, 2006).

A NBR 6118/14 (item 3.1.4) define elementos de concreto protendido como:

“aqueles nos quais parte das armaduras é previamente alongada por equipamentos especiais de protensão com a finalidade de, em condições de serviço, impedir ou limitar a fissuração e os deslocamentos da estrutura e propiciar o melhor aproveitamento de aços de alta resistência no estado limite último (ELU)”.

A NBR 6118/14 (item 3.1.6) define armadura ativa (de protensão) como:

“armadura constituída por barra, fios isolados ou cordoalhas, destinada à produção de forças de protensão, isto é, na qual se aplica um pré-alongamento inicial”.

#### d) Concreto Estrutural

Segundo a NBR 6118/14 (item 3.1.1), concreto estrutural é o termo que se refere ao espectro completo das aplicações do concreto como material estrutural e cujos elementos estruturais elaborados com concreto são classificados em: elementos de concreto simples, elementos de concreto armado e elementos de concreto protendido.

Ressalta-se que no contexto desta pesquisa, as expressões “elementos de concreto armado e elementos de concreto protendido” são tratadas indistintamente como elemento de concreto estrutural.

Destaca-se, também, que nos estados limites últimos (ruptura), a armadura protendida funciona como uma armadura de tração, de maneira idêntica a armadura das peças de concreto armado. A única diferença consiste no pré-alongamento da armadura protendida, que é incorporado à mesma durante a protensão. O pré-alongamento ou alongamento inicial somar-se-á ao alongamento devido à flexão da peça.

#### 2.1.2 - Diagramas de tensão versus deformação

Nas aplicações estruturais, as tensões e as deformações são grandezas fundamentais para a análise das estruturas. A representação gráfica que relaciona tais grandezas é o diagrama tensão x deformação que, de maneira geral, define o comportamento mecânico do material em um estado uniaxial de tensão. No diagrama tensão-deformação têm-se, no eixo das abscissas, as deformações, e no eixo das ordenadas, as tensões, de tal forma que a curva que relaciona as tensões às deformações é a curva que irá caracterizar o comportamento do material diante das solicitações a ele imposto.

Para o caso de materiais de comportamento linear elástico, o diagrama tensão-deformação é uma reta. Por sua vez, o concreto apresenta o diagrama tensão-deformação na forma de uma curva, caracterizando assim o seu comportamento não-linear.

Os modelos constitutivos para o concreto e o aço empregados nesta pesquisa levam em conta as leis de comportamento uniaxiais, considerando apenas o processo de carregamento (TELLES,1976).

#### 2.1.2.1 - Concreto

O concreto apresenta propriedades mecânicas dependentes da intensidade de solicitação. Comporta-se como material frágil quando submetido a tensão de tração. Por outro lado, apresenta comportamento que pode ser admitido como plástico sob compressão.

A literatura técnica apresenta várias possibilidades para esses comportamentos, porém neste trabalho foram abordadas as propostas apresentadas pela NBR 6118:2014 e pelo Código Modelo do CEB-FIP MC90, ambas para o concreto submetido a compressão. Para o concreto sob tração, utilizaram-se as proposições da NBR 6118:2014 e de GRELAT (1978).

##### 2.1.2.1.1 - Concreto comprimido

###### a) NBR 6118/14

Para o dimensionamento de seções transversais de peças de concreto armado no estado limite último, a NBR 6118/14 (item 8.2.10.1), indica o diagrama tensão-deformação a compressão como sendo um diagrama simplificado, composto por uma curva de grau “n” que passa pela origem e tem seu vértice no ponto de abscissa  $\epsilon_{c2}$  e ordenada  $0,85f_{cd}$  e de uma reta entre as deformações  $\epsilon_{c2}$  e  $\epsilon_{cu}$ , tangente a curva e paralela ao eixo das abscissas.(Figura 2.1.1).

A equação da curva de grau “n” tem a forma:

$$\sigma_c = 0,85 \cdot f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^n \right] \quad (2.1.1a)$$

onde: (2.1.1b)

Para  $f_{ck} \leq 50$  MPa:  $n = 2$

Para  $f_{ck} > 50$  MPa:  $n = 1,4 + 23,4 [(90 - f_{ck})/100]^4$  (2.1.1c)

O diagrama tensão-deformação idealizado para elementos de concreto comprimido está ilustrado abaixo:

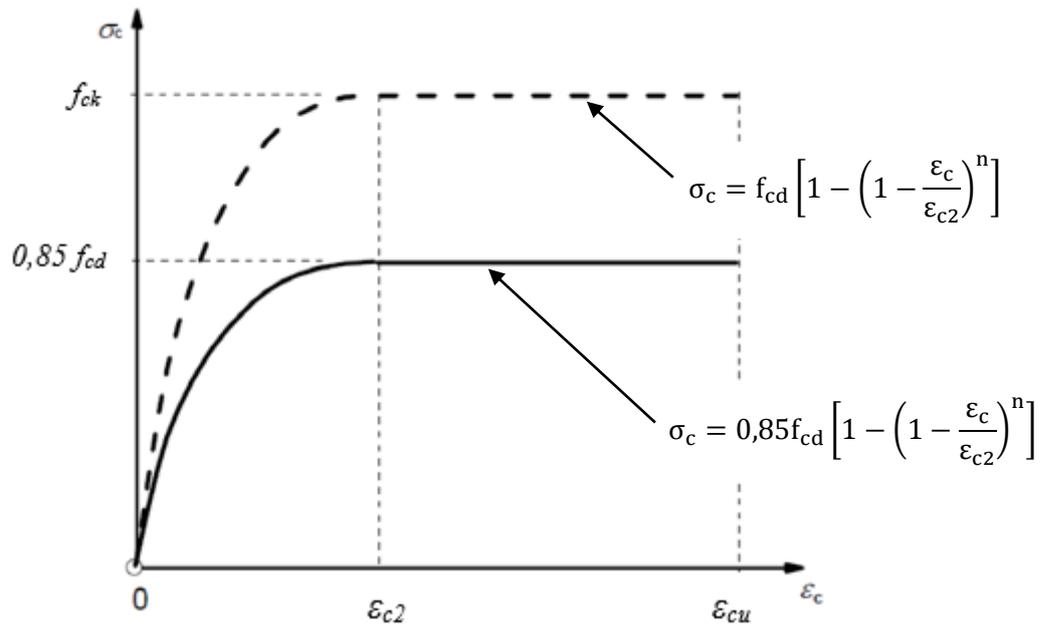


Figura 2.1.1 - Diagrama tensão-deformação idealizado para o concreto a compressão

(Fonte: NBR 6118/14)

Os valores a serem adotados para os parâmetros  $\varepsilon_{c2}$  (deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico) e  $\varepsilon_{cu}$  (deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura) são definidos a seguir:

- para concreto de classes até C50:

$$\varepsilon_{c2} = 0,2 \%$$

$$\varepsilon_{cu} = 0,35 \%$$

- para concreto de classes C55 até C90:

$$\varepsilon_{c2} = 0,2 \% + 0,0085\% (f_{ck} - 50)^{0,53} \quad (2.1.2a)$$

$$\varepsilon_{cu} = 0,26 \% + 3,5\% [(90 - f_{ck})/100]^4 \quad (2.1.2b)$$

Para tensões de compressão menores que  $0,5 \cdot f_c$ , pode-se admitir uma relação linear entre tensões e deformações, adotando-se para módulo de elasticidade o valor secante dado pela Equação (2.1.3a).

O módulo de elasticidade secante a ser utilizado nas análises elásticas de projeto, especialmente para determinação de esforços solicitantes e verificação de estados limites de serviço, deve ser calculado pela expressão:

$$E_{cs} = \alpha_i \cdot E_{ci} \quad (2.1.3a)$$

sendo

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \cdot \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0 \quad (2.1.3b)$$

A tabela abaixo apresenta valores estimados arredondados que podem ser usados no projeto estrutural.

Tabela 2. 1 - Valores estimados de módulo de elasticidade em função da resistência característica à compressão do concreto (considerando o uso de granito como agregado graúdo) (Fonte: NBR 6118:2014)

Classe de resistência	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50	C60	C70	C80	C90
$E_{ci}$ (GPa)	25	28	31	33	35	38	40	42	43	45	47
$E_{cs}$ (GPa)	21	24	27	29	32	34	37	40	42	45	47
$\alpha_i$	0,85	0,86	0,88	0,89	0,90	0,91	0,93	0,95	0,98	1,00	1,00

A deformação elástica do concreto depende da composição do traço do concreto, especialmente da natureza dos agregados.

Na avaliação do comportamento de um elemento estrutural ou seção transversal, pode ser adotado módulo de elasticidade único, à tração e à compressão, igual ao módulo de deformação secante  $E_{cs}$ .

No cálculo das perdas de protensão, pode ser utilizado em projeto o módulo de elasticidade inicial  $E_{ci}$ .

O módulo de elasticidade em uma idade menor que 28 dias pode ser avaliado pelas expressões a seguir, substituindo  $f_{ck}$  por  $f_{cj}$ .

$$E_{ci}(t) = \left[ \frac{f_c(t)}{f_c} \right]^{0,5} \cdot E_{ci}, \text{ para os concreto com } f_{ck} \text{ de 20 MPa a 45 MPa;} \quad (2.1.3c)$$

$$E_{ci}(t) = \left[ \frac{f_c(t)}{f_c} \right]^{0,3} \cdot E_{ci}, \text{ para os concretos com } f_{ck} \text{ de 50 MPa a 90 MPa.} \quad (2.1.3d)$$

onde:

$E_{ci}(t)$  é a estimativa do módulo de elasticidade do concreto em uma idade entre 7 dias e 28 dias;

$f_c(t)$  é a resistência à compressão do concreto na idade em que se pretende estimar o módulo de elasticidade, em megapascal (MPa).

b) CEB-FIP MC90 / SARGIN (1971)

A expressão preconizada pelo MC90 do CEB (1990), correspondente ao diagrama tensão-deformação do concreto comprimido, emprega a formulação proposta por SARGIN (1971).

Ensaaios realizados em corpos de prova não confinados conduzem a uma curva tensão axial versus deformação axial com o aspecto apresentado na Figura 2.1.2.

A curva tensão x deformação apresenta uma primeira parte caracterizada por um ramo ascendente com módulo de elasticidade tangente na origem igual a  $E_c$ . O pico da curva, ponto  $(f_{cm}, \epsilon_{co})$ , corresponde ao valor médio da resistência a compressão  $f_{cm}$  do concreto. A outra parte é descendente, indo, inicialmente, do ponto máximo até o ponto  $(\epsilon_{c1}, 0,5 f_{cm})$ , de acordo com a Equação 2.1.4, e a partir desse ponto para  $\sigma_c / 0,5 f_{cm} < 0,5$ , segundo a expressão (2.1.6).

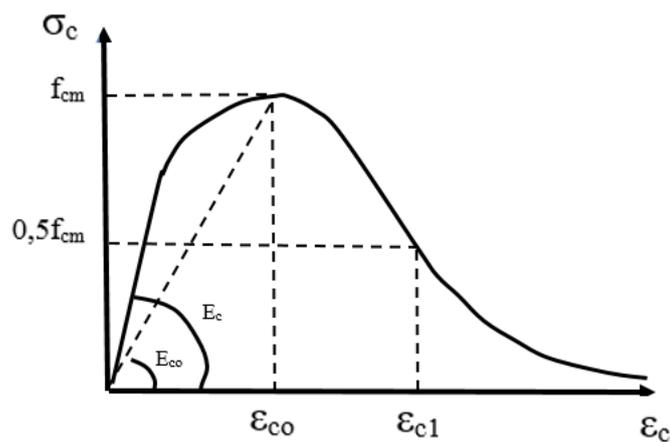


Figura 2.1.2 - Diagrama tensão-deformação do concreto para compressão uniaxial. (Fonte: CEB, 1990)

A tensão de compressão no concreto é dada por:

$$\sigma_c = \frac{\frac{E_c}{E_{co}} \cdot \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{co}} - \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_{co}}\right)^2}{1 + \left(\frac{E_c}{E_{co}} - 2\right) \cdot \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{co}}} \cdot f_{cm} \quad (2.1.4)$$

onde:

$f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{ MPa}$  : valor médio da resistência a compressão do concreto;

$f_{ck}$  : resistência característica do concreto;

$E_c = 10^4 [f_{ck} + 8]^{1/3}$  : módulo de elasticidade [ MPa ] tangente do concreto;

$E_{co} = f_{cm} / 0,0022$  : módulo secante da origem ao valor máximo da tensão de compressão

$f_{cm}$  ;

$\varepsilon_{co} = - 0,0022$ ;

Para a parte descendente do diagrama tensão x deformação, a equação 2.1.4 é válida apenas para valores de  $\sigma_c / f_{cm} \geq 0,5$ .

Na equação (2.1.4), o valor de  $\varepsilon_{c1}$ , correspondente a  $\sigma_c = 0,5 f_{cm}$  no ramo descendente, é dado por:

$$\frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{co}} = \left(0,25 \cdot \frac{E_c}{E_{co}} + 0,5\right) + \left[0,25 \cdot \left(0,5 \cdot \frac{E_c}{E_{co}} + 1\right)^2 - 0,5\right]^{0,5} \quad (2.1.5)$$

Para valores de  $\sigma_c / f_{cm} < 0,5$  a expressão que fornece o valor de  $\sigma_c$  no ramo descendente, toma a seguinte forma:

$$\sigma_c = \left[ \left( \frac{\xi}{\frac{\varepsilon_{cl}}{\varepsilon_{co}} - \frac{2}{\left(\frac{\varepsilon_{cl}}{\varepsilon_{co}}\right)^2}} \right) \cdot \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{co}}\right)^2 + \left( \frac{4}{\frac{\varepsilon_{cl}}{\varepsilon_{co}}} - \xi \right) \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{co}} \right]^{-1} \cdot f_{cm} \quad (2.1.6)$$

onde:

$$\zeta_r = \frac{4 \cdot \left[ \left( \frac{\varepsilon_{cl}}{\varepsilon_{co}} \right)^2 \cdot \left( \frac{E_c}{E_{co}} - 2 \right) + 2 \cdot \frac{\varepsilon_{cl}}{\varepsilon_{co}} - \frac{E_c}{E_{co}} \right]}{\left[ \frac{\varepsilon_{cl}}{\varepsilon_{co}} \cdot \left( \frac{E_c}{E_{co}} - 2 \right) + 1 \right]^2} \quad (2.1.7)$$

#### 2.1.2.1.2 - Concreto tracionado

##### a) NBR 6118/14

O diagrama tensão-deformação do concreto a tração do concreto não fissurado, segundo a NBR 6118:2014 (item 8.2.10.2), é representado pela Figura 2.1.3. A deformação máxima de alongamento é de 0,15 ‰, e o módulo tangente inicial ( $E_{ci}$ ) pode ser adotado como  $\text{tg } \alpha$ .

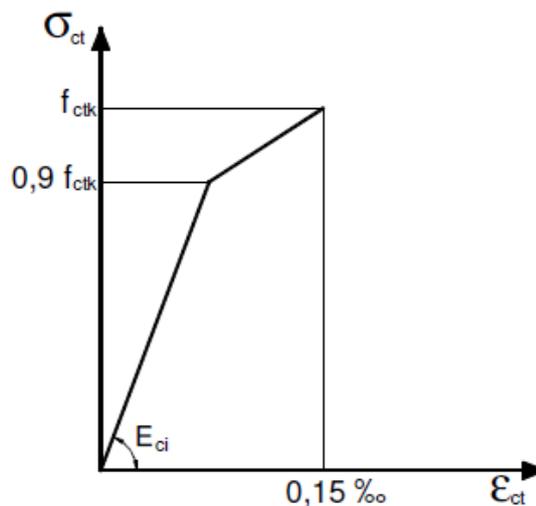


Figura 2.1.3 - Diagrama tensão-deformação bilinear na tração (Fonte: NBR 6118/14)

##### b) GRELAT (1978)

O equilíbrio da seção em flexão é desenvolvido no presente trabalho em termos de deformações médias através de um diagrama fictício. Esse diagrama representa a contribuição média do concreto tracionado entre duas fissuras sucessivas na rigidez do elemento. É o chamado efeito “Tension Stiffening”, cuja formulação atribui à zona tracionada da seção uma distribuição linear de tensões de acordo com o diagrama da Figura 2.1.4, conforme proposto por GRELAT (1978).

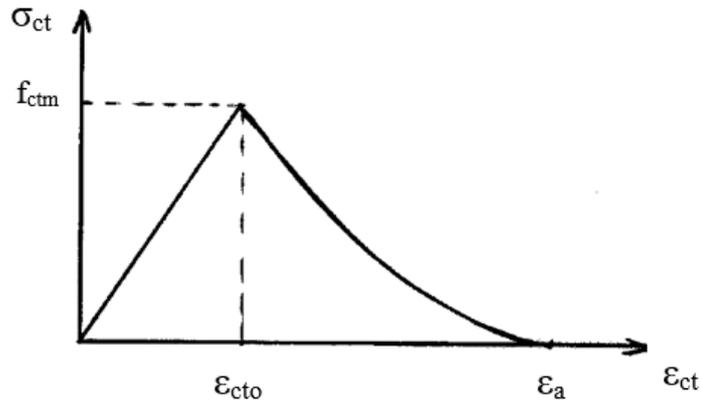


Figura 2.1.4 - Diagrama  $\sigma_c - \epsilon_c$  para o concreto na zona tracionada.  
(Fonte: GRELAT, 1978)

A tensão de tração  $\sigma_{ct}$  da fibra tracionada cresce proporcionalmente à deformação correspondente  $\epsilon_{ct}$  até um ponto  $(\epsilon_{cto}, f_{ctm})$ , a partir do qual decresce com uma lei parabólica. A contribuição do concreto em tração desaparece quando a deformação máxima atinge o limite de elasticidade do aço mais tracionado.

$$\sigma_{ct} = E_c \cdot \epsilon_{ct} \quad \text{para} \quad 0 < \epsilon_{ct} < \epsilon_{cto} \quad (2.1.8)$$

$$\sigma_{ct} = f_{ctm} \cdot \left[ \frac{(\epsilon_a - \epsilon_{ct})}{(\epsilon_a - \epsilon_{cto})} \right]^2 \quad \text{para} \quad \epsilon_{cto} < \epsilon_{ct} < \epsilon_a \quad (2.1.9)$$

$$\sigma_{ct} = 0 \quad \text{para} \quad \epsilon_a < \epsilon_{ct} \quad (2.1.10)$$

onde

$f_{ctm} = 0,30 f_{ck}^{2/3}$  : valor médio da resistência a tração do concreto;

$\epsilon_{cto}$  = deformação a tração correspondente a  $f_{ctm}$ ;

$\epsilon_a$  = limite de elasticidade longitudinal do aço mais tracionado;

$E_c$  = módulo de elasticidade tangente do concreto na origem.

A contribuição do concreto à tração é empregada apenas quando adotado o diagrama tensão-deformação para análises de comportamento.

### 2.1.2.2 – AÇO

Distinguem-se dois tipos de aço: aços passivos para reforço (concreto armado) e aços ativos para protensão (concreto protendido).

#### 2.1.2.2.1 – AÇOS PASSIVOS

Os aços passivos considerados no presente trabalho são os do tipo laminados a quente e trefilados a frio.

Os diagramas tensão x deformação dos aços laminados a quente (CA-25 e CA-50) e trefilados a frio (CA-60) apresentam características diferentes. Os aços CA-25 e CA-50 apresentam patamar de escoamento bem definido Figura 2.1.5a, e a resistência de início de escoamento ( $f_y$ ) fica bem caracterizada no diagrama, o que não ocorre nos aços CA-60.

Por este motivo, nos aços CA-60 a resistência de escoamento é convencional, sendo escolhida a resistência correspondente a deformação residual de 2 ‰ Figura 2.1.5b. Isto significa que, se o aço for tensionado até o valor de  $f_y$  e esta tensão for completamente retirada, o aço não voltará ao seu estado natural pré-tensão, pois restará nele uma deformação de 2 ‰, chamada deformação residual ou permanente.

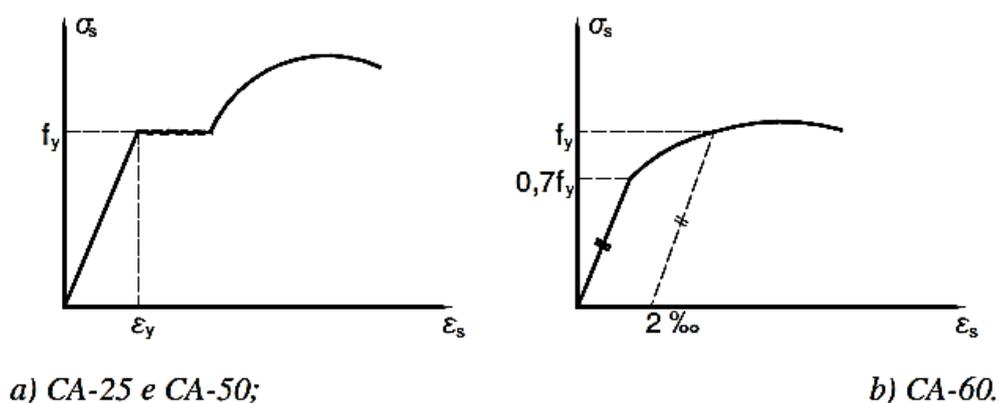


Figura 2.1.5 - Diagrama tensão-deformação real dos aços brasileiros. (Fonte: ABNT NBR)

A NBR 6118/14 (item 8.3.6) permite, para cálculo nos Estados Limites de Serviço e Último, utilizar o diagrama simplificado mostrado na Figura 2.1.6 para os aços com ou sem patamar

de escoamento. O diagrama é válido para intervalos de temperatura entre  $-20^{\circ}\text{C}$  e  $150^{\circ}\text{C}$  e pode ser aplicado para tração e compressão.

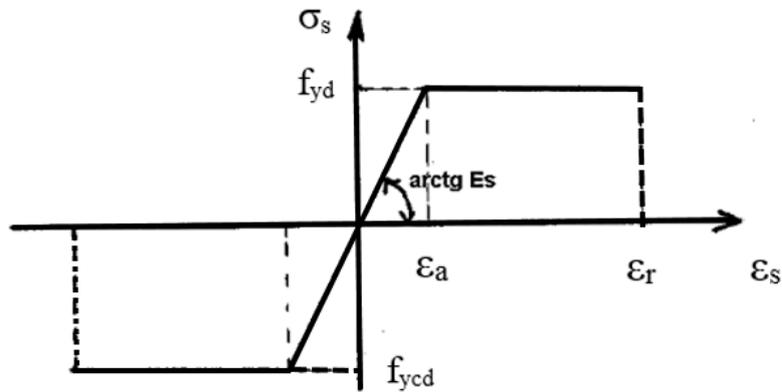


Figura 2.1.6 - Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras passivas com ou sem patamar de escoamento (CA-25, CA-50 e CA-60)

Lei elasto-plástica com relação a tensão-deformação do aço:

$$\sigma_s = -f_{ycd} \quad \text{para} \quad \varepsilon \cdot E_s < f_{ycd} \quad (2.1.11)$$

$$\sigma_s = \varepsilon \cdot E_s \quad \text{para} \quad (-f_{ycd}) \leq \varepsilon \cdot E_s \leq f_{yd} \quad (2.1.12)$$

$$\sigma_s = f_{yd} \quad \text{para} \quad \varepsilon \cdot E_s > f_{yd} \quad (2.1.13)$$

$$\varepsilon_r = 10\% \quad (\text{deformação no final do patamar plástico})$$

$$E_{s, tg} = E_s \quad \text{para} \quad |\sigma_s| \leq f_{yd} \quad (2.1.14)$$

$$E_{s, tg} = 0 \quad \text{para} \quad |\sigma_s| > f_{yd} \quad (2.1.15)$$

$$E_{s, sec} = \left| \frac{\sigma_s}{\varepsilon} \right| \quad (2.1.16)$$

#### 2.1.2.2.2 – AÇOS ATIVOS

Para o cálculo nos estados limites de serviço e último adota-se, neste trabalho, o diagrama simplificado preconizado pela NBR 6118:2014, conforme mostrado na Figura 2.1.7.

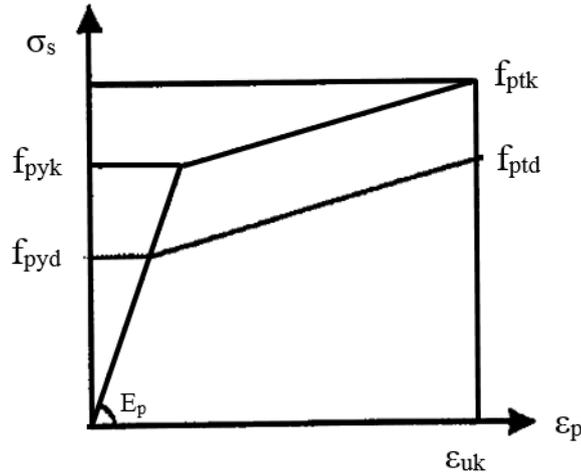


Figura 2.1.7 - Diagrama tensão-deformação para aços de armadura ativos.  
(Fonte: NBR 6118:2014)

O comportamento mais realista das armaduras de protensão pode ser definido como representado pelo gráfico da Figura 2.1.8. A parte linear vai até  $f_{pe} = 0,9 f_{pyk}$  e a deformação residual correspondente à tensão de escoamento convencional  $f_{pyk}$  igual a 1‰.

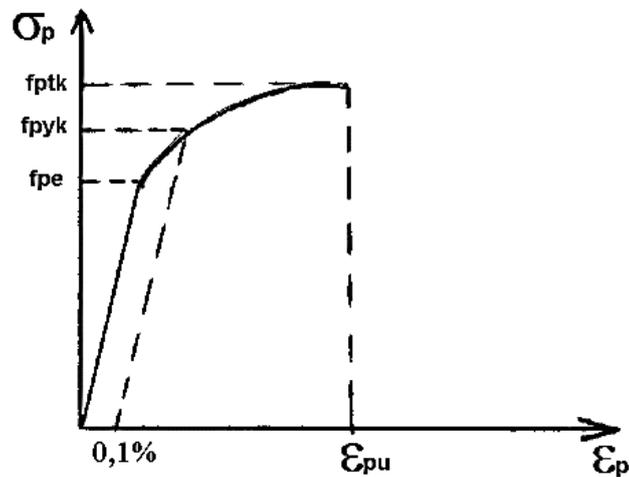


Figura 2.1.8 - Diagrama tensão-deformação para aços de armadura ativos

Segundo REIS (2003), a melhor representação da curva tensão-deformação do aço ativo é dada pela função modificada de Ramberg-Osgood, sugerida por MATTOCK (1979).

Para Aços de Baixa Relaxação (RB)

$$\sigma_p = 2.10^5 \cdot \varepsilon_p \cdot \left\{ 0,025 + \frac{0,975}{\left[ 1 + (118 \cdot \varepsilon_p)^{10} \right]^{0,1}} \right\} \leq 1860 \text{ MPa} \quad \sigma_p > f_{pe} \quad (2.1.17)$$

Para Aços de Relaxação Normal (RN)

$$\sigma_p = 2.10^5 \cdot \varepsilon_p \cdot \left\{ 0,03 + \frac{0,97}{\left[ 1 + (121 \cdot \varepsilon_p)^6 \right]^{0,167}} \right\} \leq 1860 \text{ MPa} \quad (2.1.18)$$

Estas equações fornecem a tensão de escoamento dos cabos a uma deformação de 1%, tensão de ruptura de 1860 MPa e aproximam bem os resultados experimentais, além de expressar a relação tensão-deformação em uma única equação.

## 2.2 - FENÔMENO DE ADERÊNCIA AÇO-CONCRETO

### 2.2.1 – Generalidades

Concreto estrutural é o concreto simples com barras de aço nele imersas. O concreto estrutural é um material de construção composto, no qual a ligação entre o concreto e a armadura de aço é devida à aderência do cimento e a efeitos de natureza mecânica. (LEONHARDT e MÖNNING, 1977)

A aderência entre a armadura de aço e o concreto é um dos mecanismos mais importantes para a existência das peças de concreto estrutural, sendo responsável pela ancoragem dessa armadura na massa de concreto e, ainda, serve para impedir o escorregamento dessa armadura nos segmentos entre fissuras, limitando a abertura.

A transmissão de esforços entre a barra de aço e o concreto é realizada por meio das tensões de aderência que atuam na interface entre os materiais. Essas tensões afetam o comportamento e a distribuição dos esforços e das deformações ao longo dos elementos. Considerando uma estrutura submetida a um carregamento progressivo, a tensão de aderência entre o aço e o concreto aumenta até um nível de carregamento, a partir do qual a aderência começa a se deteriorar, gradualmente, podendo vir a comprometer a segurança da estrutura.

As barras da armadura devem absorver os esforços de tração que surgem nas peças submetidas à flexão ou à tração, uma vez que o concreto possui alta resistência à compressão, porém pequena resistência à tração.

Devido à aderência, as deformações das barras de aço e do concreto que as envolve devem ser iguais, isto é,  $\varepsilon_{\text{aço}} = \varepsilon_{\text{concreto}}$ . Como o concreto tracionado não acompanha as grandes deformações do aço, o concreto acaba se fissurando na zona de tração. Com isso, os esforços de tração são absorvidos apenas pelo aço.

Uma viga de concreto simples romperia bruscamente após a primeira fissura. A armadura deve ser colocada na zona de tração das peças estruturais e, sempre que possível, na direção dos esforços internos de tração. Por sua vez, a alta resistência à compressão do concreto deve ser aproveitada na flexão de peças estruturais como vigas e lajes. Em peças submetidas apenas a compressão, as armaduras podem aumentar a capacidade de carga a compressão. (LEONHARDT e MÖNNING, 1977)

Na compressão e na tração, antes da fissuração, a armadura e o concreto vizinho possuem deformações iguais. Tão logo haja fissuração do concreto, essas deformações, nas proximidades da fissura, passam a ser diferentes, isto é, a armadura alonga-se mais que o concreto. A diferença de alongamentos entre os materiais indica que ocorreu um deslizamento da armadura em relação ao concreto. A quantidade de deslizamento, observada de cada lado da fissura, é igual à própria abertura da fissura. Com isso, pode-se classificar a aderência em dois tipos: aderência perfeita e aderência variável. Quando não é observado o deslizamento entre o aço e o concreto, em que há igualdade de deformações entre os materiais, tem-se a chamada aderência perfeita. No caso em que os alongamentos entre os materiais diferem entre si, a aderência é chamada variável.

O estudo da aderência variável entre as barras da armadura e o concreto que as envolve está, portanto, intimamente relacionado com a fissuração.

Nas peças de concreto estrutural, a aderência existente entre a armadura e o concreto permite que as tensões de tração possam ser absorvidas pelas armaduras. Desse modo, é possível a realização de peças estruturais com o emprego simultâneo de dois materiais diferentes.

Quando as solicitações são suficientemente baixas, o concreto ainda é resistente à tração. Neste caso, diz-se que o concreto está no estágio I. Porém, aumentando-se as solicitações

nas fibras mais tracionadas, é atingida a tensão  $\sigma_{ct} = f_{ct}$  (concrete tension) de ruptura de concreto à tração, ocasionando a fissuração da peça. Agora, o concreto está no estágio II.

Com a passagem do estágio I para o estágio II, nas seções fissuradas, a tensão de tração no concreto se anula,  $\sigma_{ct} = 0$ , havendo um correspondente aumento da tensão de tração na armadura  $\sigma_{st}$  (steel tension).

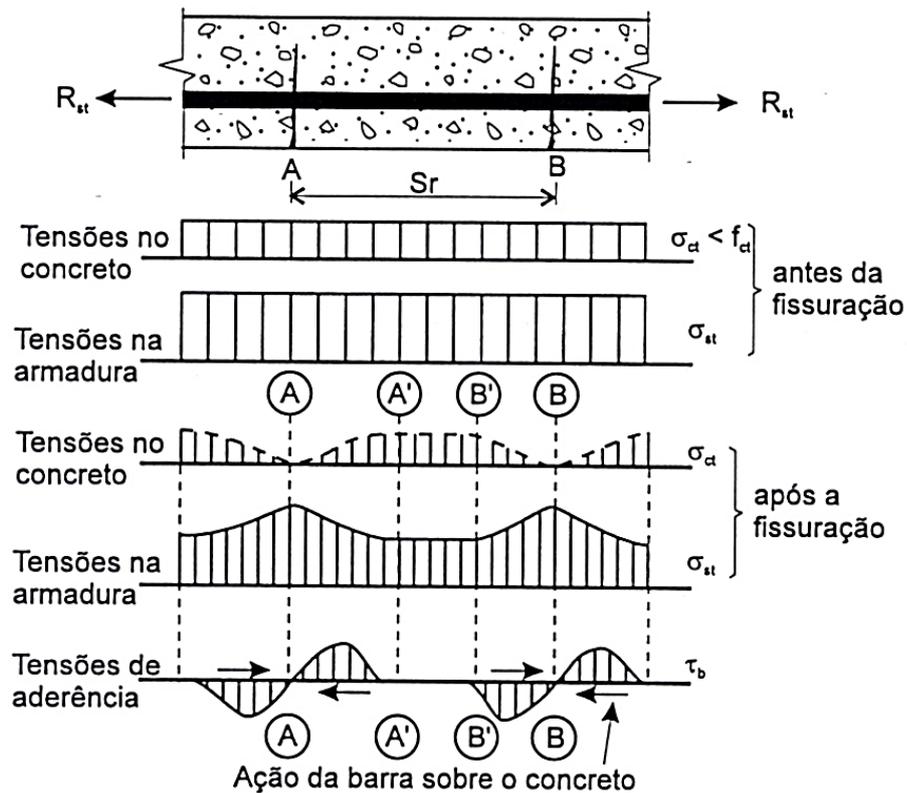


Figura 2.2.1 - Fissuração por tração (Fonte: FUSCO, 1995).

Nas seções fissuradas, a tensão na armadura atinge o seu valor máximo. À medida que se consideram seções mais afastadas da fissura, essa tensão  $\sigma_s$  diminui e o concreto passa novamente a ser tracionado, como consequência da aderência existente entre os dois materiais. A transferência de tensões da armadura para o concreto ocorre em trechos cujo comprimento é tanto menor quanto maior for a aderência entre o aço e o concreto.

A existência do concreto armado/protendido decorre essencialmente da aderência existente entre os seus materiais componentes. Observa-se, no entanto, que essa aderência é composta por diversas parcelas, que decorrem de diferentes fenômenos que intervêm na ligação do aço ao concreto.

Os modos de transferência de tensões entre o aço e o concreto podem ser representados por três tipos:

- a) Aderência por adesão: forças na interface entre os dois materiais, provocadas pelo efeito de colagem entre a nata de cimento e a superfície do aço, sendo de natureza físico-química. (Figura 2.2.2)

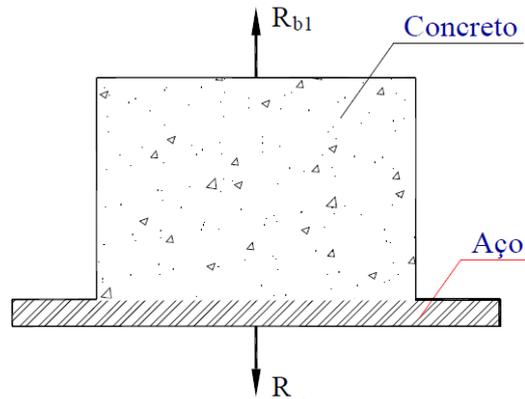


Figura 2.2.2 - Aderência por adesão (Fonte: FUSCO, 1995).

- b) Aderência por atrito: força de contato entre os dois materiais que se manifesta após a ruptura da adesão, quando há tendência ao deslocamento relativo entre a barra de aço e o concreto. (Figura 2.2.3)

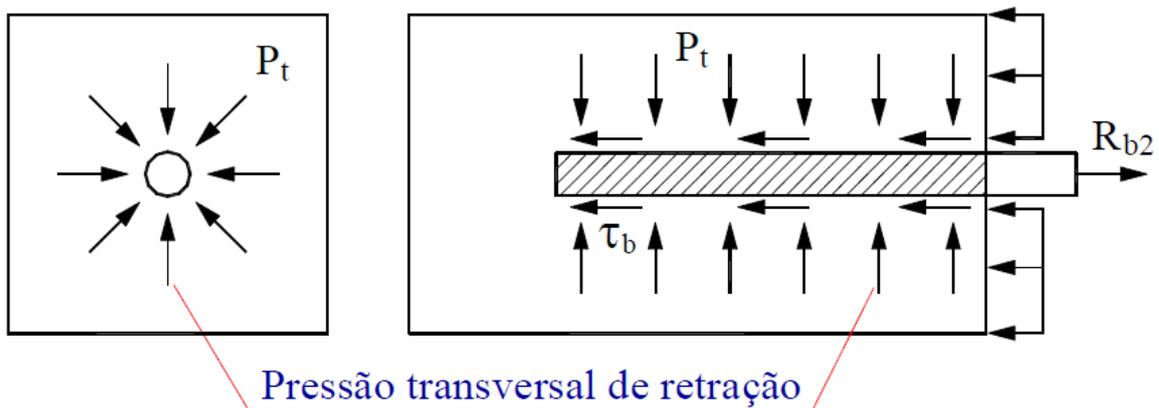


Figura 2.2.3 - Aderência por atrito (Fonte: FUSCO, 1995).

- c) Aderência por interação mecânica: principalmente para as barras com nervuras após a ruptura da adesão, as saliências se intertravam no concreto, constituindo um terceiro elemento resistente ao escorregamento da barra (Figura 2.2.4).

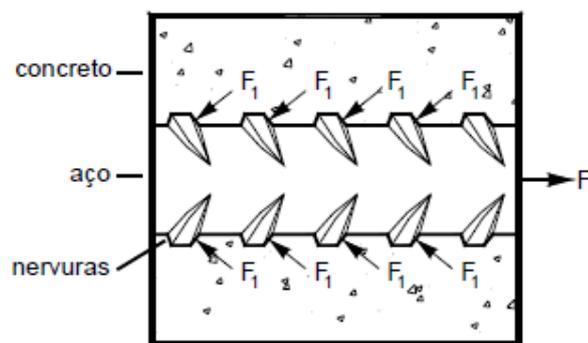


Figura 2.2.4 - Interação mecânica entre as nervuras da barra de aço e o concreto ao redor (Fonte: FUSCO, 1995).

Deve-se ressaltar que a separação da aderência nas três parcelas citadas é meramente esquemática, não sendo possível determinar cada uma delas isoladamente. Além disso, a aderência de uma barra de aço ao concreto que a envolve é função de ponto, sendo o seu valor fortemente influenciado pela retração, pela fluência e pela fissuração do concreto. Desse modo, por meio de ensaios, são determinados valores médios globais de aderência, que são suficientes para efeito de projeto.

A seguir são apresentados alguns fatores que influenciam o comportamento da aderência entre o concreto e o aço, distribuídos em 3 grupos que possuem características afins:

#### **GRUPO 1 – Carregamento e fissuração**

- a) Tipo de carregamento: para um mesmo deslizamento, o módulo da tensão de aderência para cargas de tração é bastante parecido com o módulo da tensão de aderência para cargas de compressão, para tensões no aço abaixo da tensão de escoamento. Após o escoamento, o diâmetro da barra submetida a tração é notadamente reduzido devido ao efeito de Poisson, afetando consideravelmente a aderência;
- b) Distribuição e tipos de microfissuras e fissuras ao longo da estrutura.

#### **GRUPO 2 – Propriedades do Concreto**

- a) Resistência do concreto: o aumento da capacidade do concreto em suportar ações, ao redor da barra de aço, aumenta a tensão máxima de aderência, pois o cone de fissuração que é formado ao redor da barra, devido ao efeito de arrancamento, estará mais resistente;

- b) Condições da mistura do concreto fresco: a homogeneidade e a estabilidade da mistura do concreto fresco garante uma igualdade nas condições de aderência ao longo da barra de aço e um melhor aproveitamento das propriedades do concreto endurecido;
- c) Adensamento do concreto fresco: após a colocação do concreto na forma, ele deve ser compactado (adensado) de forma a provocar a saída do ar e melhorar o seu contato com as barras de aço, evitando o surgimento de vazios;
- d) Cura do concreto: conjunto de medidas necessárias para evitar a evaporação da água que deverá hidratar o cimento;
- e) Cobrimento de concreto ao redor das barras de aço: influencia o cone de fissuração formado ao redor da barra de aço.

### **GRUPO 3 – Propriedades do Aço**

- a) Limite de escoamento do aço: quando a deformação por tração na barra de aço atinge e ultrapassa o limite de escoamento, o diâmetro da barra é consideravelmente reduzido afetando a aderência;
- b) Diâmetro das barras de aço: o diâmetro da barra de aço afeta a área superficial de aderência;
- c) Espaçamento entre as barras de aço: com o aumento do espaçamento entre as barras de aço, o comportamento da tensão de aderência tende a melhorar, pois a sobreposição da área de influência do cone de fissuração ao redor da barra tende a diminuir;
- d) Formas e dimensões das nervuras das barras de aço: afeta a interação mecânica entre a barra de aço e o concreto (Figura 2.2.4);
- e) Tratamento superficial do aço: afeta a adesão e a resistência por atrito entre a barra de aço e o concreto.

#### **2.2.2 – Histórico do fenômeno de aderência**

A seguir são apresentados trabalhos que mostram estudos teóricos, experimentais e numéricos relacionados ao fenômeno de aderência entre o aço e o concreto de estruturas de concreto estrutural.

WATSTEIN (1941), a partir do ensaio de arrancamento (*pull-out test*), estudou o comportamento da tensão de aderência ao longo de barras de aço. Com o uso de extensômetros mecânicos, realizou medições do alongamento e da tensão da parte da barra ancorada no cilindro de concreto.

CLARK (1949), a partir de vários ensaios feitos em vigas submetidas a flexão e também por meio de ensaios de arrancamento, comparou os dados da resistência ao deslizamento do aço em relação ao concreto fazendo-se variar a resistência do concreto, o comprimento e o diâmetro das barras ancoradas no interior do concreto.

PERRY (1966) analisou a distribuição da tensão de aderência ao longo de barras de aço a partir ensaios de carregamento em vigas bi-apoiadas e também ensaio de arrancamento (*pull-out test*). Com os resultados dos ensaios, verificou a influência da distribuição do momento fletor ao longo do elemento, na relação entre a tensão de aderência e o deslizamento ao longo da barra de aço.

NGO (1967) empregou o método dos elementos finitos na elaboração de um modelo numérico para estudar o comportamento de vigas de concreto armado considerando os efeitos das tensões de aderência. A rigidez da aderência entre as barras de aço e o concreto foi representada por um elemento finito de ligação adimensional (Figura 2.2.5) colocado entre os elementos finitos que representam o concreto e os elementos finitos que representam as barras de aço.

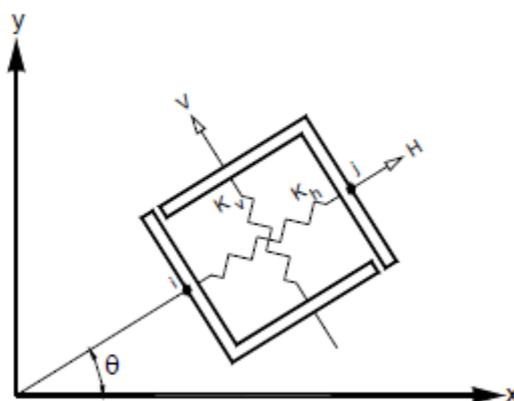


Figura 2.2.5 - Elemento de ligação (Fonte: NGO, 1967).

MIRZA (1979) estudou o comportamento entre a tensão de aderência e o deslizamento entre o aço e o concreto, sob influência da variação do diâmetro das barras, da resistência a compressão do concreto e do carregamento, conseguindo com isso uma relação empírica entre a tensão de aderência e o deslizamento, para ser empregada na modelagem de um elemento finito.

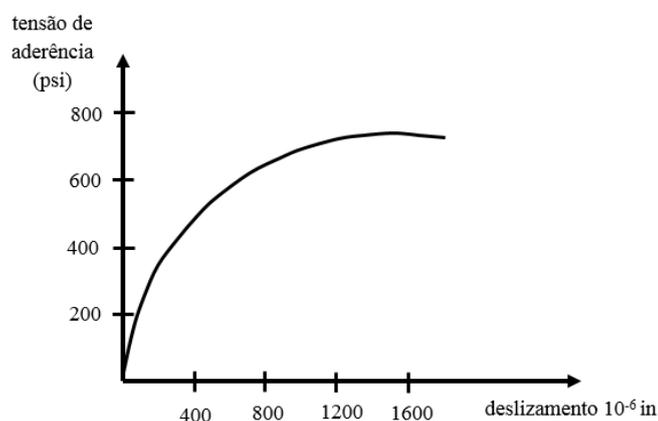


Figura 2.2.6 - Curva tensão de aderência x deslizamento (Fonte: MIRZA, 1979).

TASSIOS (1981) elaborou um modelo analítico para ser introduzido em programas computacionais para a análise da tensão e deformação de elementos de concreto armado. O desenvolvimento conceitual é feito a partir do estudo analítico das relações entre a tensão de aderência local e o deslizamento local ao longo de uma barra, assumindo leis não-lineares locais com diferentes estádios do comportamento global da interface, e em algumas expressões empíricas das propriedades dos materiais.

YANKELEVSKY (1985), baseado em equações de equilíbrio das forças atuantes na interface entre a barra de aço e o concreto, para um elemento infinitesimal, e na relação local entre a tensão de aderência e o deslizamento, propôs um elemento finito unidimensional para consideração da tensão de aderência e o deslizamento na interface aço-concreto.

Na Figura 2.2.7, apresenta-se os quatro estádios em que foi dividido o comportamento do fenômeno de aderência a partir da relação tensão de aderência x deslizamento:

- (a) Estádio I- contato inicial entre o aço e o concreto em que o deslizamento entre os dois materiais tem um correspondente aumento da tensão de aderência até o limite  $\tau_y$ ;

- (b) Estádio II- início da quebra da aderência onde o deslizamento entre os dois materiais ocorre sem um acréscimo da tensão de aderência;
- (c) Estádio III- há uma redução da tensão de aderência até chegar a uma tensão última;
- (d) Estádio IV - passa a ser dada por fricção.

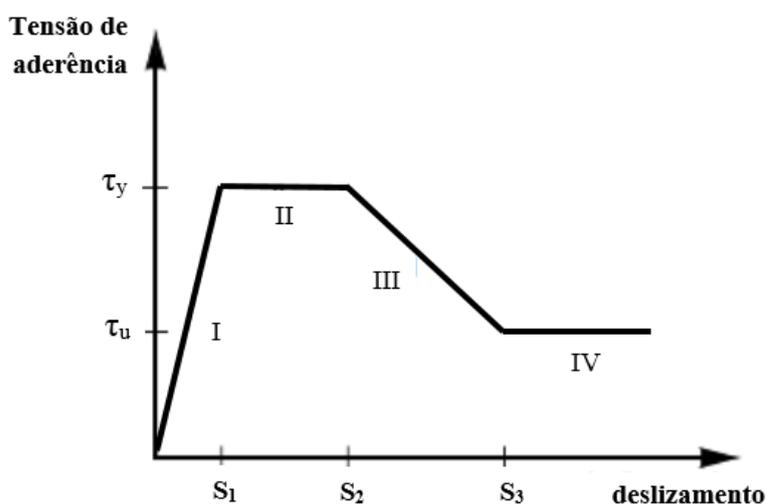


Figura 2.2.7 - Relação local da tensão de aderência x deslizamento (Fonte: YANKELESKY, 1985).

COHN e RIVA (1987) desenvolveram uma formulação geral do comportamento a flexão do concreto armado, protendido e parcialmente protendido levando-se em conta tanto o fenômeno de aderência, a partir da relação tensão de aderência x deslizamento, como a relação do momento x curvatura. A formulação abrange as respostas dos três tipos de estruturas citadas para todos os estádios de carga até a ruptura.

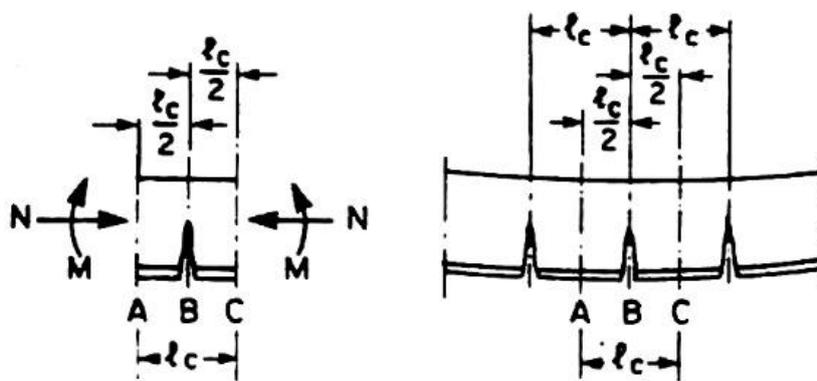


Figura 2.2.8 – Elemento de concreto submetido a flexão composta reta. (Fonte: COHN&RIVA, 1987)

MARTINS (1989) apresenta um modelo matemático da tensão de aderência e deslizamento relativo entre o aço e o concreto na forma de uma curva poligonal. Nota-se que o ramo descendente da curva proposta por YANKELEVSKY (1985) e MARTINS (1989) são semelhantes. Porém, a proposta de MARTINS (1989) possibilita reproduzir diversas outras funções e acompanhar a forma da lei experimental estabelecida.

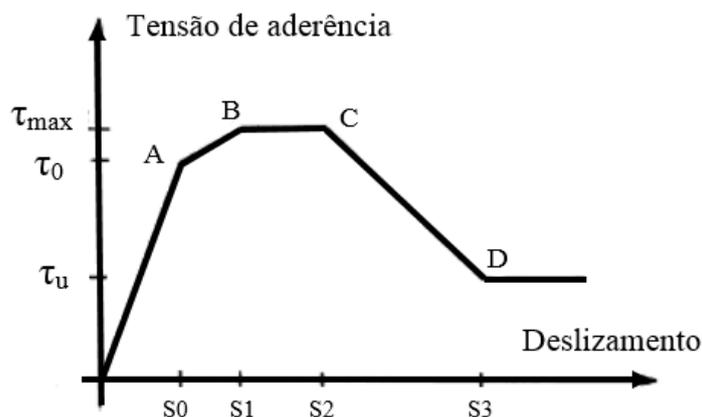


Figura 2.2.9 - Curva tensão de aderência x deslizamento (Fonte: MARTINS, 1989).

ROSA (1994) apresentou uma análise comparativa das várias curvas de aderência x deslizamento entre o aço e o concreto quando aplicadas ao método dos elementos finitos. Foi analisado o desempenho quanto ao tempo de processamento, número de interações necessárias, facilidade de utilização e precisão dos resultados obtidos quando comparados com os resultados de ensaio.

UIJL (1996) criou um modelo de aderência baseado na capacidade de confinamento do concreto ao redor da barra de aço encravada em um cilindro de concreto (Figura 2.2.10). Descreveu no seu modelo a relação entre o deslocamento radial e a tensão de compressão radial na interface dos dois materiais. Mostrou, ainda, que a aderência entre a barra e o concreto é descrita em três estádios (Figura 2.2.11):

- (a) Estádio I – o contato inicial entre o aço e o concreto é mantido pela adesão e o entrelaçamento da cimentação na superfície do aço. Nesse estágio, a tensão de aderência tem valores pequenos;
- (b) Estádio II – inicia a quebra da aderência que é governada pelo apoio das saliências da barra no concreto. A concentração das forças na frente das saliências causa a formação de um cone de fissuras, iniciado na crista dessas saliências; e

(c) Estádio III – as fissuras alcançam a superfície externa e a tensão de aderência é reduzida repentinamente. O mecanismo de transferência da tensão é dado também pela fricção.

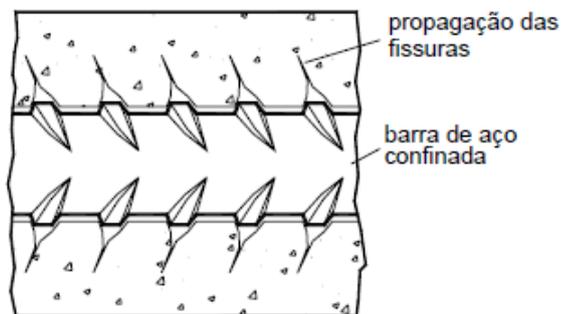


Figura 2.2.10 - Propagação do cone formado por fissuras ao redor da barra de aço. (Fonte: UIJL, 1996)

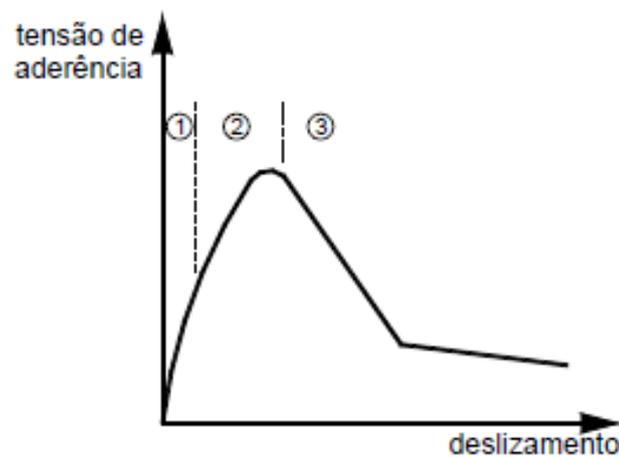


Figura 2.2.11 - Estádios decorrentes da propagação das fissuras. (Fonte: UIJL, 1996)

YANKELEVSKY (1997) desenvolveu elementos finitos bidimensionais, que representam o comportamento da interface entre o aço e o concreto, para estruturas submetidas a ensaio de tração. A rigidez dos elementos incorpora parâmetros do aço, do concreto e da relação entre a tensão de aderência x deslizamento.

BARBOSA (1998), com o objetivo de quantificar a influência de alguns parâmetros sobre a relação tensão de aderência e deslizamentos, desenvolveu um estudo experimental sobre estruturas de concreto de alto desempenho armadas com aços de elevado limite elástico, A partir dos estudos realizados, concluiu o seguinte:

- (a) o uso de estribos pode influenciar na força de arrancamento da barra vertical;
- (b) a resistência de aderência é menos sensível ao posicionamento da barra, que no caso do concreto convencional; e
- (c) existe uma baixa variação da tensão de aderência devida à posição da barra.

DESIR (1998) propôs uma modelagem numérica para simular o comportamento do fenômeno da aderência entre o aço e o concreto utilizando leis constitutivas baseadas nos conceitos da termodinâmica clássica, o qual considera a interface como sendo uma superfície de descontinuidade. Este modelo numérico foi incorporado na formulação de um elemento finito que representa tanto o aço quanto o concreto, onde cada material tem um comportamento próprio definido por uma lei constitutiva separada.

SHEHATA (1999) verificou a influência da aderência entre o aço e o concreto na capacidade de rotação de vigas biapoiadas de concreto de alta resistência e de resistência normal. Os resultados obtidos com os ensaios práticos da capacidade de rotação foram comparados com resultados obtidos através de equações teóricas propostas na literatura.

ZUO (2000), estudando a relação entre as diferentes características do concreto armado em vigas e a tensão de aderência entre o aço e concreto, para poder chegar a um modelo numérico mais realista dessa tensão, após ensaiar 64 vigas de concreto armado com diferentes propriedades, propôs uma equação para o comprimento de ancoragem por transpasse de barras de aço em vigas, onde esse comprimento depende das características da interface.

BARBOSA (2001) estudou o comportamento da aderência aço-concreto para barras de fabricação nacional de seção circular com sete diâmetros distintos (6,3, 8,0, 10,0, 12,5, 16,0, 20,0 e 25,0 mm) e barras de seção quadrada com três tamanhos de lado (6,3, 8,0 e 10,0 mm); foram empregados, nesse estudo, concretos de cinco classes de resistência a compressão (20, 40, 60, 80 e 100 MPa). Realizou-se dois tipos de ensaio de aderência: ensaio de tirantes (tração simétrica) e ensaio de arrancamento (pull out test). Para cada dimensão de barra e para cada classe de resistência do concreto. Os resultados experimentais foram comparados com especificações de normas e com formulações teóricas propostas por diversos autores para a relação tensão de aderência x deslizamento. Efetuou-se uma análise estatística dos resultados experimentais, procurando identificar a influência dos diversos parâmetros que

afetam o comportamento da aderência aço-concreto. A partir da análise realizada, procurou-se estabelecer equações para o cálculo da tensão de aderência.

MARINS NETO (2007) estudou os aspectos das propriedades do concreto, das propriedades do aço e das interações entre eles, com particular interesse na deterioração da aderência que ocorre na interface aço-concreto com o objetivo principal de desenvolver uma modelagem numérica capaz de investigar, de forma mais realista, o comportamento de vigas de concreto armado, considerando a não-linearidade física dos materiais e os efeitos do deslizamento entre a armadura de aço e o concreto. Com o Método dos Elementos Finitos e com um procedimento incremental-iterativo de carregamento, os comportamentos dos materiais puderam ser representados na modelagem numérica computacional, possibilitando o uso de diferentes curvas representativas das tensões de aderência que se opõem ao deslizamento da armadura.

### 2.2.3 - Leis de tensão de aderência entre aço e concreto

A complexidade do fenômeno da aderência entre a armadura de aço e o concreto leva à realização de numerosas investigações práticas e também a vários estudos teóricos na busca de uma lei que exprima a evolução da tensão de aderência ( $\tau$ ) em função do deslizamento ( $S$ ).

Dentre as diversas leis de tensão de aderência existentes na literatura, destacam-se as leis de MIRZA (1979), YANKELEVSKY (1985) e CEB (1990) por apresentarem uma correlação com a lei desenvolvida por MARTINS (1989).

Em MIRZA (1979), é apresentado um polinômio de quarta ordem baseado nos resultados experimentais de amostras de concreto armado, que incluem variações nos níveis de carregamento, na espessura de cobrimento do concreto e na resistência de compressão do concreto (Figura 2.2.12):

$$\tau_{(x)} = 1,95 \cdot 10^6 \cdot S_{(x)} - 2,35 \cdot 10^9 \cdot S_{(x)}^2 + 1,39 \cdot 10^{12} \cdot S_{(x)}^3 - 0,33 \cdot 10^{15} \cdot S_{(x)}^4 \quad (2.2.1)$$

A tensão de aderência é dada em libra por polegada quadrada (*psi*) e o deslizamento em polegada (*in*).



Figura 2.2.12 - Curva tensão de aderência x deslizamento (Fonte: MIRZA, 1979).

A seguir mostra-se a curva de YANKELEVSKY (1985) representada por quatro estádios. (Figura 2.2.13)

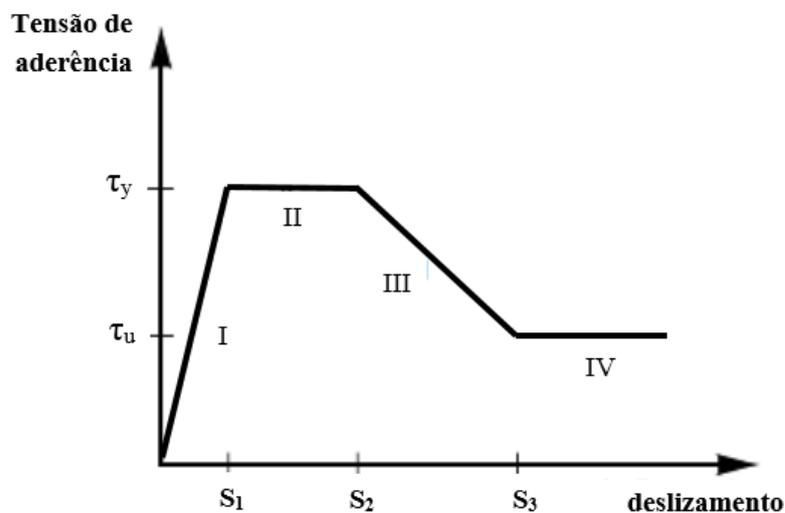


Figura 2.2.13 - Relação local da tensão de aderência x deslizamento (Fonte: YANKELESKY, 1985)

Em MARTINS (1989), é proposto um modelo matemático de forma polinomial representativo da curva tensão de aderência x deslizamento. A curva apresenta 5 regiões, cujos limites foram obtidos de uma bateria de ensaios de laboratório de rompimento de vigas de concreto estrutural. (Figura 2.2.14)

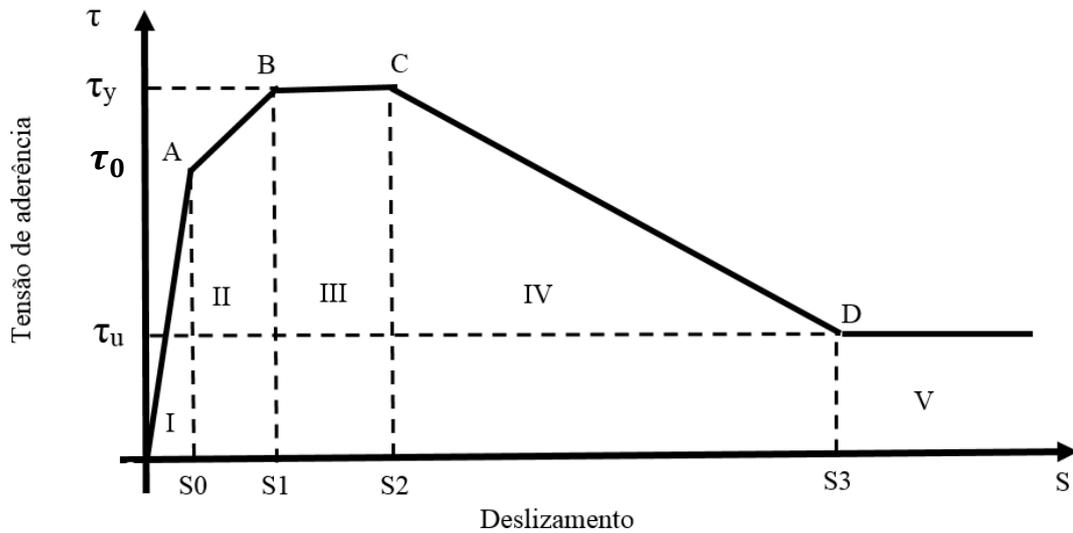


Figura 2.2.14 - Curva tensão de aderência x deslizamento (Fonte: MARTINS, 1989).

No modelo de curva proposto pelo CEB-FIB (2010), a relação entre a tensão de aderência ( $\tau$ ) e o deslizamento ( $s$ ) é representada em quatro estádios (Figura 2.2.15):

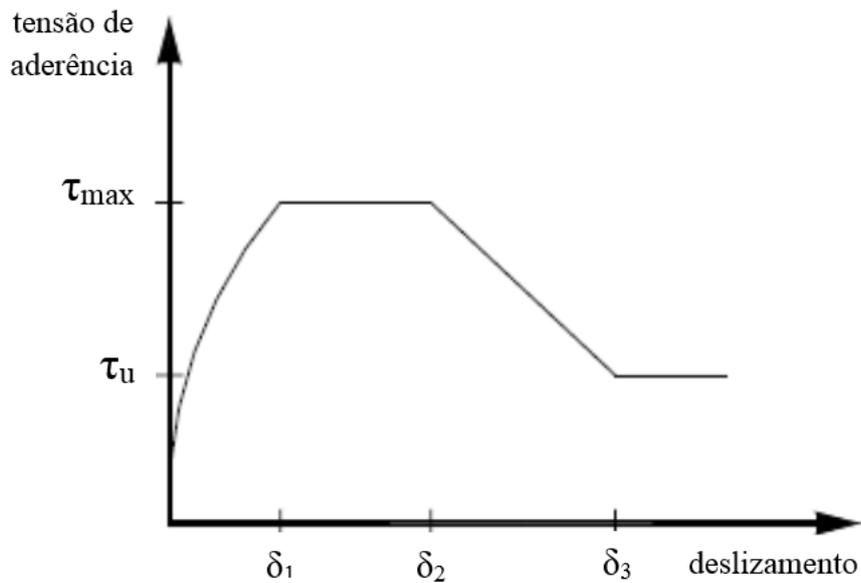


Figura 2.2.15 - Curva tensão de aderência x deslizamento (Fonte: CEB-FIB, 2010).

onde:

$\tau$  – tensão de aderência para um dado deslizamento  $\delta$ ;

$\tau_{\max}$  – máxima tensão de aderência;

$\tau_f$  – tensão final de aderência

$\delta_1$  – deslizamento referente à máxima tensão de aderência;

$\delta_2$  – deslizamento referente ao ponto de início do trecho descendente da tensão de aderência;

$\delta_3$  – deslizamento referente à tensão final de aderência;

O cálculo da tensão de aderência do CEB é dado por:

$$\tau = \tau_{\text{máx}} \cdot \left( \frac{\delta}{\delta_1} \right)^\alpha \quad 0 \leq \delta \leq \delta_1 \quad (2.2.2a)$$

$$\tau = \tau_{\text{máx}} \quad \delta_1 < \delta \leq \delta_2 \quad (2.2.2b)$$

$$\tau = \tau_{\text{máx}} - (\tau_{\text{máx}} - \tau_f) \cdot \left( \frac{\delta - \delta_2}{\delta_3 - \delta_2} \right) \quad \delta_2 < \delta \leq \delta_3 \quad (2.2.2c)$$

$$\tau = \tau_f \quad \delta_3 < \delta \quad (2.2.2d)$$

A Tabela 2.1 apresenta os parâmetros para definir a relação tensão de aderência x deslizamento para barra nervurada.

Tabela 2. 2 - Parâmetros para definição da curva tensão de aderência versus deslizamento para barras nervuradas (Fonte: CEB-FIB 2010)

Valor	Ruptura por arrancamento		Ruptura por fendilhamento			
	Condições de aderência		Condições de aderência			
	Boas	Todos os outros casos	Boas		Todos os outros casos	
Concreto não-confinado			Concreto confinado	Concreto não-confinado	Concreto confinado	
$\delta_1$	1,0mm	1,8mm	$\delta(\tau_{\text{max}})$	$\delta(\tau_{\text{max}})$	$\delta(\tau_{\text{max}})$	$\delta(\tau_{\text{max}})$
$\delta_2$	2,0mm	3,6mm	$\delta_1$	$\delta_1$	$\delta_1$	$\delta_1$
$\delta_3$	$s_{r-1}$	$s_{r-1}$	$1,2 \delta_1$	$s_{r-1}$	$1,2 \delta_1$	$0,5 s_{r-1}$
$\alpha$	0,4		0,4			
$\tau_{\text{max}}$	$2,5 \sqrt{f_{ck}}$	$1,25 \sqrt{f_{ck}}$	$7,0 \cdot \left(\frac{f_{ck}}{20}\right)^{0,25}$	$8,0 \cdot \left(\frac{f_{ck}}{20}\right)^{0,25}$	$5,0 \cdot \left(\frac{f_{ck}}{20}\right)^{0,25}$	$5,5 \cdot \left(\frac{f_{ck}}{20}\right)^{0,25}$
$\tau_f$	$0,40 \tau_{\text{max}}$	$0,40 \tau_{\text{max}}$	0	$0,40 \tau_{\text{max}}$	0	$0,40 \tau_{\text{max}}$

$s_{r-1}$  é o espaçamento entre nervuras.

Resumidamente, podem-se classificar as leis de tensão de aderência quanto à sua forma geométrica da seguinte maneira:

**Poligonal:** representadas por segmentos de retas caracterizando os estádios da relação tensão de aderência x deslizamento. Exemplo: YANKELEVSKY (1985) e MARTINS (1989);

**Polinomial:** representadas por um polinômio definido pelo grau de interpolação dos resultados obtidos nos ensaios. Exemplo: MIRZA (1979);

**Mista:** combinação das outras formas apresentadas. Exemplo: CEB (2010).

## 2.3 - EQUILÍBRIO DE ELEMENTO DE CONCRETO ESTRUTURAL CONSIDERANDO O MODELO DE ADERÊNCIA PERFEITA (MAP)

### 2.3.1 - Generalidades

O Modelo de Aderência Perfeita (MAP) trata do equilíbrio da seção de elemento de concreto estrutural, submetido a flexão composta reta, com o emprego do método de análise não-linear, considerando a aderência perfeita entre aço-concreto.

Uma seção de concreto estrutural fissura e plastifica quando submetida a um par de esforços solicitantes externos ( $N$ ,  $M$ ). Por meio da deformação da seção, obtêm-se os esforços resistentes internos ( $N_r$ ,  $M_r$ ) que permitem equilibrar as solicitações externas.

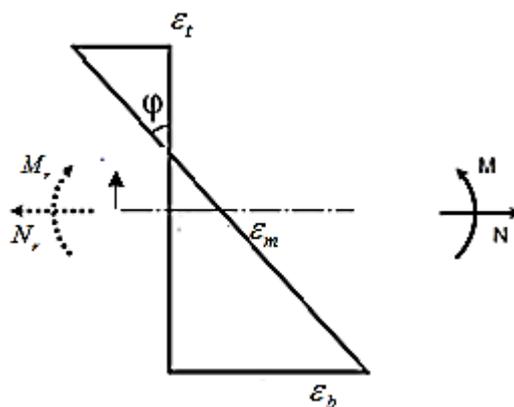


Figura 2.3.1 - Equilíbrio da Seção Transversal.

### 2.3.2 - Hipóteses de cálculo

Para a obtenção do equilíbrio da seção, são normalmente assumidas as seguintes hipóteses de cálculo: (DÉSIR,1993 ; LEONHARDT e MÖNNING,1977 ; MARTINS,1989).

(a) as deformações e os deslocamentos são pequenos. Portanto podem-se relacionar os deslocamentos com as deformações pela expressão:

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{E.I(x)} \quad (2.3.1)$$

onde:

$\frac{d^2v(x)}{dx^2}$  :: equação diferencial da linha elástica

$M$  :: momento fletor

$E.I$  :: rigidez flexional

(b) a hipótese de BERNOULLI-NAVIER é válida até a ruptura. A seção homogeneizada permanece plana e perpendicular a fibra média após a deformação de uma peça de concreto. Ou seja, as seções transversais permanecem planas após a deformação do elemento. Daí resulta que as deformações  $\epsilon'$  das fibras de uma seção são proporcionais às suas distâncias  $y$  à linha neutra (linha de deformação nula), ou seja, o diagrama de deformação é retilíneo LEONHARDT e MÖNNING (1977).

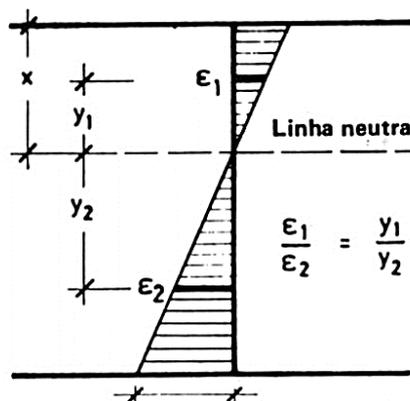


Figura 2.3.2 - Diagrama de deformações de acordo com a hipótese de Bernoulli para peças esbeltas (a seção transversal permanece plana na deformação por flexão e o diagrama de deformação é linear). (Fonte: LEONHARDT e MÖNNING, 1977).

(c) a resistência à tração do concreto não é levada em conta, isto é, zonas de concreto, nas

quais surgem deformações longitudinais de tração, são consideradas sem efeito, resultando daí que para todas as forças de tração necessárias ao equilíbrio interno devem ser providenciadas armaduras de aço.

(d) a hipótese sobre a aderência perfeita entre o aço e o concreto, ou seja, elementos de aço e de concreto de seção transversal que se situem em fibras de igual distância da linha neutra, sofrem as mesmas deformações.

(e) as curvas tensão-deformação dos materiais são as obtidas para solicitações unidirecionais.

(f) as cargas são estáticas, monotônicas e crescentes. A capacidade de carga de uma seção de concreto estrutural é esgotada quando o concreto rompe a compressão ou o aço a tração. As cargas são consideradas de curta duração, quer dizer que não se consideram os efeitos diferidos do comportamento dos materiais.

(g) em termos de solicitações, considera-se a interação esforço normal-momento fletor, porém a influência do esforço cortante é desprezada.

### 2.3.3 - Equações gerais

O sistema fundamental de equações necessário para resolver o problema do o equilíbrio de uma seção transversal homogênea de concreto solicitada por um par de esforços externos ( $M, N$ ) é representado pelo sistema matricial mostrado abaixo (MARTINS, 1989):

$$\begin{bmatrix} N - N_r \\ M - M_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_r}{\partial \varphi} & \frac{\partial N_r}{\partial \varepsilon_m} \\ \frac{\partial M_r}{\partial \varphi} & \frac{\partial M_r}{\partial \varepsilon_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (2.3.2)$$

onde:

$M, N$  são momento fletor e esforço normal solicitantes da seção;

$M_r, N_r$  são momento fletor e esforço normal resistentes da seção;

$\varepsilon_m$  é a deformação média, numa fibra qualquer livremente escolhida, aqui adotada à meia altura da seção ( $h/2$ );

$\varphi$  é a curvatura da seção.

A formulação geral do modelo matemático para o comportamento de vigas considera relações de equilíbrio, no nível da seção transversal da viga, que associam tensões com esforços internos. Tais tensões devem estar em equilíbrio com o esforço normal e o momento fletor atuantes na seção transversal. Assim, as resultantes das tensões normais longitudinais, integradas ao longo da seção transversal, devem ser iguais ao esforço normal e ao momento fletor solicitantes. Figura 2.3.3).

Para o caso geral do estudo da flexão composta reta, o esforço normal resistente ( $N_r$ ) é obtido por meio do cálculo da integral de área das tensões em cada ponto da seção:

$$N_r = \int \sigma \cdot dA \quad (2.3.3)$$

Por sua vez, o momento fletor ( $M_r$ ) é calculado pela integral de área do produto das tensões pela distância  $y$  de cada ponto ao eixo médio da seção, de acordo com a equação:

$$M_r = - \int \sigma \cdot y \cdot dA \quad (2.3.4)$$

O sinal negativo que aparece na equação do momento fletor resistente ( $M_r$ ) deve-se à convenção de sinais adotada: uma tensão normal positiva (tração) em uma fibra inferior ( $y$  negativo) provoca um momento fletor positivo. E, uma tensão normal negativa (compressão) em uma fibra superior ( $y$  positivo) também provoca um momento fletor positivo (Figura 2.3.3).

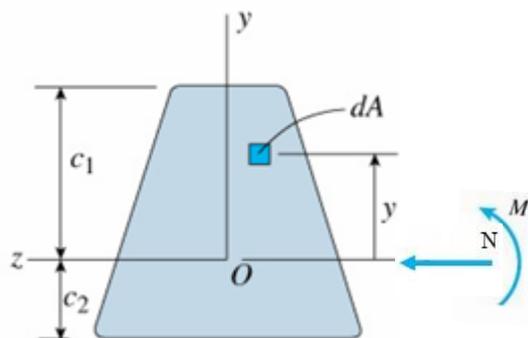


Figura 2.3.3 - Seção transversal em flexão composta reta. (Fonte: Autor)

Considerando a hipótese de seções planas, o estado de deformação pode ser definido por meio da deformação normal  $\epsilon_m$ , avaliada no eixo médio, e a curvatura  $\varphi$  da seção.

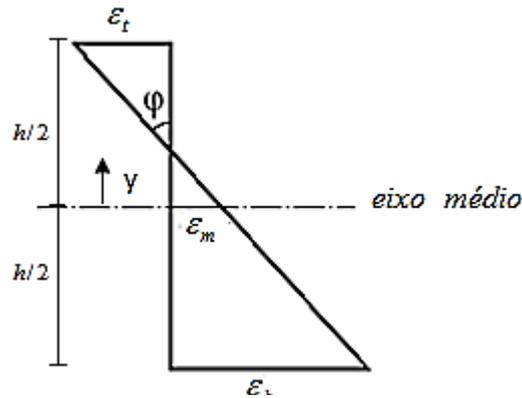


Figura 2.3.4 - Deformações da Seção Transversal.

As grandezas  $\epsilon_m$  e  $\varphi$  são denominadas deformações generalizadas da seção e podem ser relacionadas com as deformações unitárias na base e no topo da seção como:

$$\epsilon_m = \frac{\epsilon_b + \epsilon_t}{2} \quad (2.3.5)$$

$$\varphi = \frac{\epsilon_b - \epsilon_t}{h} \quad (2.3.6)$$

onde:

$\epsilon_b$  é a deformação unitária normal na base da seção (lado inferior) e para tração,  $\epsilon_b > 0$

$\epsilon_t$  é a deformação no topo da seção (lado superior) e, para compressão,  $\epsilon_t > 0$ ; e

$y$  é o eixo vertical da seção, tem origem no eixo médio e é positivo quando dirigido para cima.

Para a verificação do equilíbrio de seção de elemento de concreto estrutural, faz-se a análise não-linear física executando o cálculo das deformações  $\epsilon(y)$  de uma fibra distante  $y$  do eixo médio da seção, em função da deformação média ( $\epsilon_m$ ) e da curvatura ( $\varphi$ ), conforme equação:

$$\epsilon(y) = \epsilon_m - \varphi \cdot y \quad (2.3.7)$$

A tensão normal  $\sigma(y)$ , em um ponto de coordenada  $y$  da seção transversal, pode ser escrita como sendo uma função da deformação unitária específica  $\varepsilon(y)$ , isto é,  $\sigma = f(\varepsilon(y))$ .

Os esforços resistentes  $(N_r, M_r)$  são funções tanto da deformação da seção no eixo médio como da curvatura da seção, ou seja,  $N_r(\varepsilon_m, \varphi)$  e  $M_r(\varepsilon_m, \varphi)$ .

Agrupando-se os esforços resistentes e as deformações generalizadas da seção, em notação vetorial, tem-se:

$$F_r = \begin{Bmatrix} N_r \\ M_r \end{Bmatrix} \quad (2.3.8)$$

$$e = \begin{Bmatrix} \varepsilon_m \\ \varphi \end{Bmatrix} \quad (2.3.9)$$

onde:

$F_r$  é denominado vetor de forças internas ou resistentes da seção;

$e$  é denominado vetor deformações generalizadas da seção.

Utilizando a notação vetorial para a equação da deformação,  $\varepsilon(y) = \varepsilon_m - \varphi \cdot y$ , obtém-se:

$$\varepsilon(y) = \varepsilon_m - \varphi \cdot y = \langle 1 - y \rangle \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_m \\ \varphi \end{Bmatrix} = a.(y) \cdot e \quad (2.3.10)$$

com  $a.(y) = \langle 1 - y \rangle$

Também de forma compacta, o vetor de forças internas pode ser expresso como:

$$F_r = \begin{Bmatrix} N_r \\ M_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_A \sigma(y) \cdot dA \\ - \int_A \sigma(y) \cdot y \cdot dA \end{Bmatrix} = \int_A a.(y)^T \cdot \sigma(y) \cdot dA \quad (2.3.11)$$

Sabendo-se que a matriz de rigidez da seção é definida como sendo a derivada do vetor de forças ( $F_r$ ) da seção em relação ao vetor de deformações ( $e$ ), tem-se:

$$k(e) = \frac{\partial F_r}{\partial e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_r}{\partial \varepsilon_m} & \frac{\partial N_r}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial M_r}{\partial \varepsilon_m} & \frac{\partial M_r}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \quad (2.3.12)$$

Substituindo-se as equações 2.3.3 e 2.3.4 nos elementos da matriz de rigidez  $k$  de 2.3.12, obtém-se:

$$\frac{\partial N_r}{\partial \varepsilon_m} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_m} \int \sigma(\varepsilon(\varepsilon_m, \varphi)) dA \quad (2.3.13)$$

$$\frac{\partial N_r}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \int \sigma(\varepsilon(\varepsilon_m, \varphi)) dA \quad (2.3.14)$$

$$\frac{\partial M_r}{\partial \varepsilon_m} = - \frac{\partial}{\partial \varepsilon_m} \int \sigma(\varepsilon(\varepsilon_m, \varphi)) \cdot y \cdot dA \quad (2.3.15)$$

$$\frac{\partial M_r}{\partial \varphi} = - \frac{\partial}{\partial \varphi} \int \sigma(\varepsilon(\varepsilon_m, \varphi)) \cdot y \cdot dA \quad (2.3.16)$$

Desenvolvendo as equações de 2.3.13 a 2.3.16, obtêm-se as seguintes equações:

$$\frac{\partial N_r}{\partial \varepsilon_m} = \int \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_m} \cdot dA \quad (2.3.17)$$

$$\frac{\partial N_r}{\partial \varphi} = \int \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} \cdot dA \quad (2.3.18)$$

$$\frac{\partial M_r}{\partial \varepsilon_m} = - \int \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_m} \cdot y \cdot dA \quad (2.3.19)$$

$$\frac{\partial M_r}{\partial \varphi} = - \int \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} \cdot y \cdot dA \quad (2.3.20)$$

Sendo  $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = E_t(\varepsilon)$  o módulo de deformação tangente, ressaltando que  $\varepsilon(y) = \varepsilon_m - \varphi \cdot y$ ,

as equações de 2.3.17 a 2.3.20 podem ser escritas da forma:

$$\frac{\partial N_r}{\partial \varepsilon_m} = \int E_t(\varepsilon).dA \quad (2.3.21)$$

$$\frac{\partial N_r}{\partial \varphi} = -\int E_t(\varepsilon).y.dA \quad (2.3.22)$$

$$\frac{\partial M_r}{\partial \varepsilon_m} = -\int E_t(\varepsilon).y.dA \quad (2.3.23)$$

$$\frac{\partial M_r}{\partial \varphi} = \int E_t(\varepsilon).y^2.dA \quad (2.3.24)$$

Substituindo as equações 2.3.21 a 2.3.24 na equação 2.3.12, chega-se a matriz rigidez  $k$  de 2.3.25:

$$k(e) = \frac{\partial F_r}{\partial e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_r}{\partial \varepsilon_m} & \frac{\partial N_r}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial M_r}{\partial \varepsilon_m} & \frac{\partial M_r}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \int_A \begin{bmatrix} E_t(y) & -E_t(y).y \\ -E_t(y).y & E_t(y).y^2 \end{bmatrix}.dA \quad (2.3.25)$$

#### 2.3.4 - Seções de concreto estrutural sujeitas a flexo-compressão

As equações apresentadas no item anterior se aplicam a uma seção homogênea de concreto simples, mas elas também são válidas para uma seção de concreto estrutural (PRAZERES, 2002).

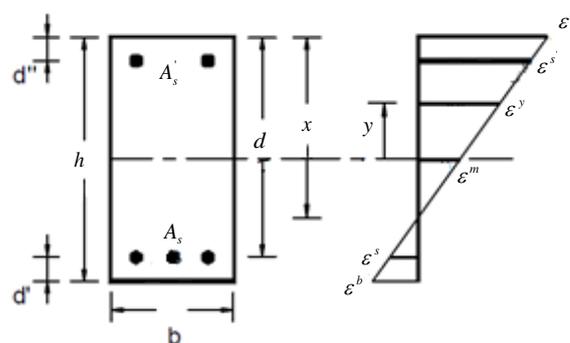


Figura 2.3.5 - (a) Seção em concreto estrutural; (b) Distribuição das deformações na seção transversal. (Fonte: PRAZERES, 2002)

Considera-se que as deformações unitárias que definem o estado de deformação em uma seção em concreto estrutural são a deformação no topo da seção  $\varepsilon_{c_{\max}}$ , relacionada com o esmagamento do concreto, e a deformação  $\varepsilon_s$  na armadura mais tracionada.

A partir destas deformações,  $\varepsilon_{c_{\max}}$  e  $\varepsilon_s$ , pode-se determinar as deformações  $\varepsilon_t$  e  $\varepsilon_b$  como sendo:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_{c_{\max}} \quad (2.3.26)$$

$$\varepsilon_b = \varepsilon_{c_{\max}} - (\varepsilon_{c_{\max}} - \varepsilon_s) \frac{h}{d} \quad (2.3.27)$$

Pode-se ainda calcular os valores do vetor de deformações generalizadas da seção,  $\varepsilon_m$  e  $\varphi$ , por meio das equações 2.3.5 e 2.3.6.

Ainda com relação a uma seção de concreto estrutural, em que o concreto resiste apenas às tensões de compressão e o aço às tensões de tração e de compressão, as equações de esforço normal e momento fletor resistentes, quando a seção está sujeita à flexão composta reta, são:

$$N_r = \int_{A_c} \sigma_c \cdot dA_c + \int_{A_s} \sigma_s \cdot dA_s + \int_{A'_s} \sigma'_s \cdot dA'_s \quad (2.3.28)$$

$$M_r = - \int_{A_c} \sigma_c \cdot y_c \cdot dA_c - \int_{A_s} \sigma_s \cdot y_s \cdot dA_s - \int_{A'_s} \sigma'_s \cdot y'_s \cdot dA'_s \quad (2.3.29)$$

onde:

$A_c$  é a área de concreto da seção resistindo a tensões de compressão;

$A_s$  é a área de armadura inferior da seção; e

$A'_s$  é a área de armadura superior da seção.

Usualmente, despreza-se a variação de deformações na área de cada barra da armadura. Com esta consideração, para a obtenção da matriz de rigidez da seção, devem-se incluir as parcelas de rigidez referentes à armadura, conforme a expressão abaixo:

$$k = \int_A \begin{bmatrix} E_t(y) & -E_t(y).y \\ -E_t(y).y & E_t(y).y^2 \end{bmatrix} dA + \begin{bmatrix} E_s(\varepsilon).A_s & -E_s(\varepsilon).y_s.A_s \\ -E_s(\varepsilon).y_s.A_s & E_s(\varepsilon).y_s^2.A_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E'_s(\varepsilon).A'_s & -E'_s(\varepsilon).y'_s.A'_s \\ -E'_s(\varepsilon).y'_s.A'_s & E'_s(\varepsilon).y'^2_s.A'_s \end{bmatrix} \quad (2.3.30)$$

As equações de Nr, Mr e k (2.3.28, 2.3.29 e 2.3.30) podem ser escritas de forma compacta, como representado a seguir:

$$F_r = \begin{Bmatrix} N_r \\ M_r \end{Bmatrix} = \int_A a.(y)^T .\sigma_c(y).dA + a.(y_s)^T .\sigma_s.A_s + a.(y'_s)^T .\sigma'_s.A'_s \quad (2.3.31)$$

$$k = \int_{A_c} a.(y)^T .E_c(y).a.(y).dA + a.(y_s)^T .E_s(y_s).a.(y_s) + a.(y'_s)^T .E_s(y'_s).a.(y'_s) \quad (2.3.32)$$

onde:

$$a.(y) = \langle 1 - y \rangle \quad (2.3.33)$$

Pode-se, ainda, expressar as equações  $F_r$  e  $k$  (2.3.31 e 2.3.32) como sendo formadas por três parcelas:

$$F_r = F_C + F_S + F'_S \quad (2.3.34)$$

$$k = k_C + k_S + k'_S \quad (2.3.35)$$

onde:

$$F_C = \int_A a.(y)^T .\sigma_c(y).dA \quad (2.3.36)$$

$$F_S = a.(y_s)^T .\sigma_s.A_s \quad (2.3.37)$$

$$F'_S = a.(y'_s)^T .\sigma'_s.A'_s \quad (2.3.38)$$

$$k_C = \int_{A_c} a.(y)^T .E_c(y).a.(y).dA \quad (2.3.39)$$

$$k_S = a.(y_s)^T .E_s(y_s).a.(y_s) \quad (2.3.40)$$

$$k'_S = a.(y'_s)^T .E_s(y'_s).a.(y'_s) \quad (2.3.41)$$

onde:

$F_C, F_S, F'_S, k_C, k_S, k'_S$  são parcelas de força e de rigidez para o concreto, armadura inferior e armadura superior, respectivamente.

Como se pode observar, expressando-se  $F-F_r$  chega-se ao sistema fundamental de equações necessário para resolver o problema do equilíbrio de uma seção transversal de concreto estrutural solicitada por um par de esforços externos (M, N):

$$F - F_r = k.e \Leftrightarrow \begin{bmatrix} N - N_r \\ M - M_r \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_r}{\partial \varphi} & \frac{\partial N_r}{\partial \varepsilon_m} \\ \frac{\partial M_r}{\partial \varphi} & \frac{\partial M_r}{\partial \varepsilon_m} \end{bmatrix}}_k \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (2.3.42)$$

onde:

$F = [N \quad M]^T$  é denominado vetor de forças externas ou solicitantes da seção;

$F_r = [N_r \quad M_r]^T$  é denominado vetor de forças internas ou resistentes da seção;

$k$  é denominado a matriz de rigidez da seção de concreto estrutural; e

$e = [\varepsilon_m \quad \varphi]^T$  é denominado vetor deformações generalizadas da seção.

### 2.3.5 - Comprimento de ancoragem de barra tracionada

Com o intuito de se realizar uma comparação entre o Modelo de Aderência Perfeita (MAP) e o Modelo de Aderência Variável (MAV), passa-se ao cálculo do comprimento de ancoragem da barra de aço imersa no bloco de concreto considerando a aderência perfeita entre o aço e o concreto.

No caso do MAP, considera-se que a tensão tangencial de aderência é constante. Porém, no caso do MAV a tensão de aderência não apresenta linearidade. Citam-se como exemplos as leis de MIRZA (1979), YANKELEVSKY (1985), CEB (1990) e MARTINS (1989) , já apresentadas neste trabalho.

A Figura 2.3.6 mostra a transferência da força normal  $F_s$  atuante na barra de aço para o bloco de concreto. Essa transferência de força é possível devido ao desenvolvimento de tensões tangenciais de aderência  $\tau_{b,x}$  entre a armadura e o concreto.

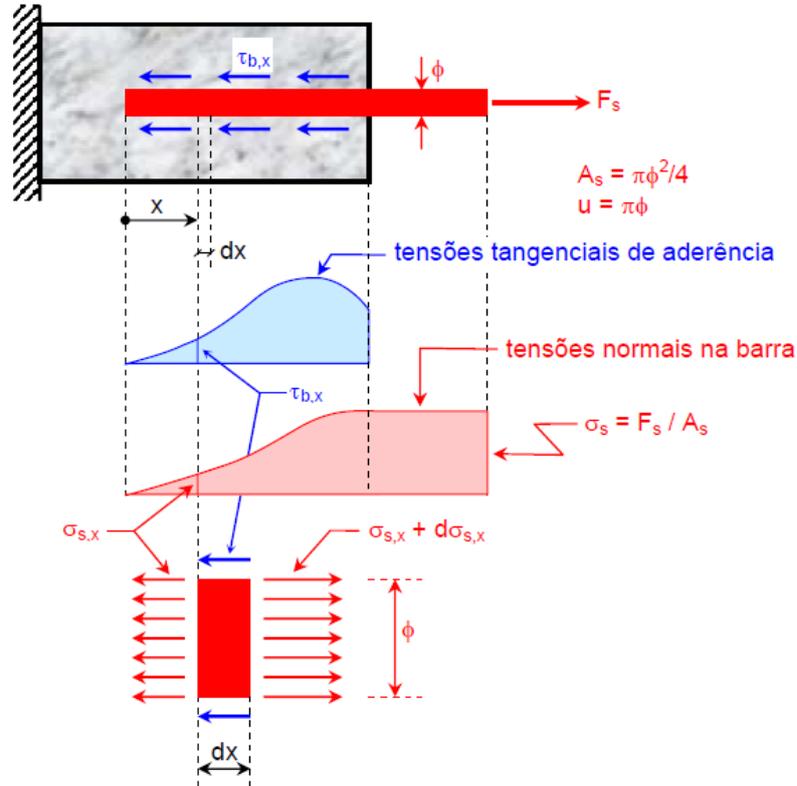


Figura 2.3.6 - Transferência de força normal para o concreto. (Fonte: UFPR, 2006)

Fazendo o equilíbrio de forças atuantes no elemento de barra  $dx$ , tem-se:

$$A_s \cdot \sigma_{s,x} + u \cdot dx \cdot \tau_{b,x} = A_s \cdot (\sigma_{s,x} + d\sigma_{s,x}) \quad (2.3.43)$$

$$u \cdot dx \cdot \tau_{b,x} = A_s \cdot d\sigma_{s,x} \quad (2.3.44)$$

$$\pi \cdot \phi \cdot dx \cdot \tau_{b,x} = \frac{\pi \cdot \phi^2}{4} d\sigma_{s,x} \quad (2.3.45)$$

$$\tau_{b,x} = \frac{\phi}{4} \frac{d\sigma_{s,x}}{dx} \quad (2.3.46)$$

$$\frac{d\sigma_{s,x}}{dx} = \frac{4}{\phi} \tau_{b,x} \quad (2.3.47)$$

De acordo com UFPR (2006), a solução da equação só é possível se for conhecida a variação de  $\tau_{b,x}$  ao longo de  $x$ . A solução simplificada admite que a tensão de aderência está uniformemente distribuída ao longo do trecho da barra situada dentro do bloco de concreto.

$$\frac{d\sigma_{s,x}}{dx} = \frac{4}{\phi} \tau_{b,unif} \quad (2.3.48)$$

$$d\sigma_{s,x} = \left( \frac{4}{\phi} \cdot \tau_{b,unif} \right) \cdot dx \quad (2.3.49)$$

$$\sigma_{s,x} = \left( \frac{4}{\phi} \cdot \tau_{b,unif} \right) \cdot x \quad (2.3.50)$$

Esta equação corresponde a uma reta e a Figura 2.3.7 mostra o esquema simplificado de transferência de força atuante na barra para o bloco de concreto, observa-se que  $\tau_{b,unif}$  é constante e  $\sigma_{s,x}$  varia linearmente.

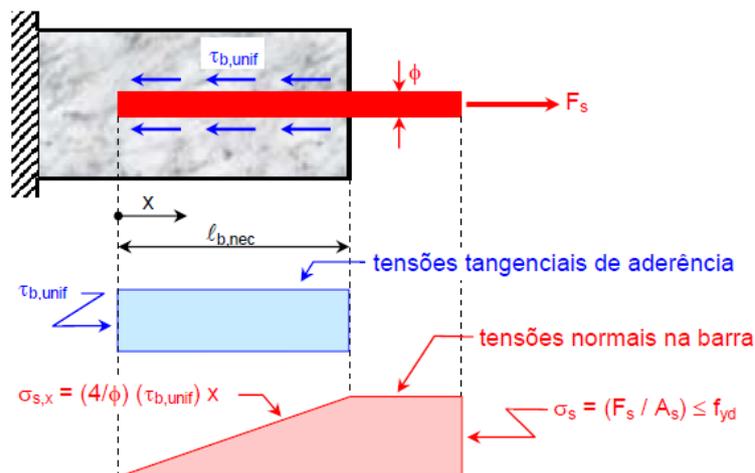


Figura 2.3.7 - Transferência de força normal para o concreto. (Fonte: UFPR, 2006)

A partir da Figura 2.3.7, é possível determinar o comprimento de ancoragem necessário  $l_{b,nec}$  para tornar nula, no final da barra, a tensão normal nela atuante, ou seja, o comprimento de

ancoragem necessário para que a força atuante na barra possa ser integralmente transferida para o concreto.

Do diagrama de tensões normais ilustrado na Figura 2.3.7, pode-se estabelecer:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{s,x} = 0 \quad (2.3.51)$$

$$x = l_{b,nec} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{s,x} = \sigma_s = \frac{F_s}{A_s} \quad (2.3.52)$$

De acordo com UFPR (2006), substituindo-se os valores de 2.3.52 na equação 2.3.50 obtém-se os valores de  $\sigma_s$  e  $l_{b,nec}$  abaixo:

$$\sigma_s = \left( \frac{4}{\phi} \cdot \tau_{b,unif} \right) \cdot l_{b,nec} \quad (2.3.53)$$

$$l_{b,nec} = \frac{\phi \cdot \sigma_s}{4 \tau_{b,unif}} \quad (2.3.54)$$

### 2.3.6 - Métodos de cálculo

Os métodos de cálculo numérico utilizados na criação do programa CARPE2 para o cálculo do equilíbrio de uma seção transversal de concreto estrutural, submetida a flexo-compressão reta, considerando o Modelo de Aderência Perfeita (MAP) são apresentados abaixo:

- Método de Newton-Raphson para obtenção de raiz de Função Não-Linear
- Método de Newton-Raphson para Sistemas de Equações Não-Lineares
- Método do Ponto Médio - Integração Numérica

#### 2.3.6.1 - Método de Newton-Raphson para obtenção de raiz de Função Não-Linear

O Método de Newton-Raphson baseia-se na aproximação da raiz da função  $f(x)$  através de sucessivas tangentes. Partindo de  $(x_0)$  que é uma estimativa inicial da raiz  $(r_1)$  da função  $f(x)$ , determina-se a Tangente 1 a função  $f(x)$  em  $P_0$ . A Tangente 1 interceptará o eixo das abscissas em  $(x_1)$  e determinará o ponto  $P_1$  no qual se calculará a Tangente 2 a função  $f(x)$  que interceptará o eixo das abscissas em  $(x_2)$  aproximando-se da raiz procurada  $(r_1)$ . Repete-se esse processo até que a precisão desejada seja atingida. (CUNHA, 1993)

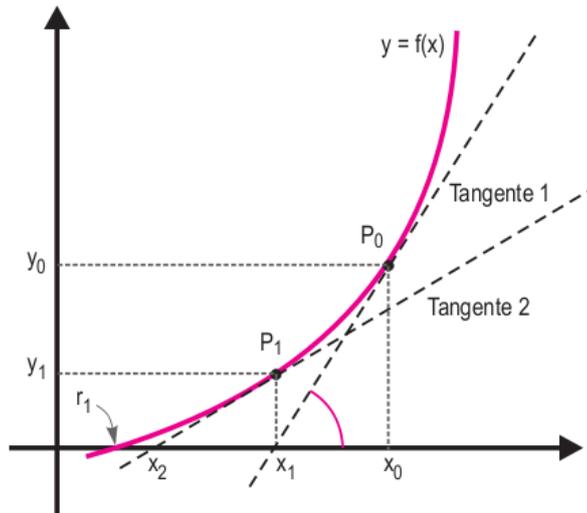


Figura 2.3.8 - Método Newton-Raphson.(Fonte: CUNHA,1993)

Assim, observando a figura acima obtém-se a equação a seguir:

$$\frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0) \quad (2.3.55)$$

que, explicitando o valor de  $x_1$ , fica:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (2.3.56)$$

Genericamente, o processo consiste em evoluir da aproximação  $x_k$  para aproximação  $x_{k+1}$  usando a fórmula:

$$x_{(k+1)} = x_{(k)} - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad , \quad k = 0,1,2,\dots \quad (2.3.57)$$

O processo iterativo deve ser realizado até que a norma da diferença entre duas soluções consecutivas  $x_{(k)}$  e  $x_{(k+1)}$  seja menor do que uma tolerância pré-estabelecida.

$$|x_{(k+1)} - x_{(k)}| < \textit{tolerância} \quad (2.3.58)$$

### 2.3.6.2 - Método de Newton-Raphson para a obtenção do Diagrama Momento-Curvatura

Para a obtenção do diagrama momento-curvatura é necessário calcular o valor da deformação  $\varepsilon_m$ , para uma curvatura especificada  $\varphi$ , que torne o esforço normal resistente igual ao esforço normal solicitante.

Para isso, resolve-se um problema de cálculo de raízes de funções. A equação a ser resolvida é dada pela diferença do esforço normal solicitante  $N$  com o esforço normal resistente  $N_r$ .

$$N_{des}(\varepsilon_m) = N - N_r(\varepsilon_m) = 0 \quad (2.3.59)$$

onde:

$N_{des}(\varepsilon_m)$  representa o desequilíbrio entre as forças normais solicitante e resistente.

Para obtenção de um determinado ponto do diagrama momento-curvatura,  $N_r$  é escrito como função de  $\varepsilon_m$  porque a curvatura  $\varphi$  é mantida fixa.

O Método de Newton será aplicado para resolver a equação abaixo:

$$\varepsilon_{m(k+1)} = \varepsilon_{m(k)} - \left( \frac{\partial N_{des}(\varepsilon_m)}{\partial \varepsilon_m} \right)^{-1} N_{des}(\varepsilon_m)_{(k)} \quad (2.3.60)$$

Da equação 2.3.59, a derivada da função  $N_{des}(\varepsilon_m)$  é

$$\frac{\partial N_{des}(\varepsilon_m)}{\partial \varepsilon_m} = \frac{\partial N}{\partial \varepsilon_m} - \frac{\partial N_r(\varepsilon_m)}{\partial \varepsilon_m} = 0 - k_{11}(\varepsilon_m) \quad (2.3.61)$$

Como se pode verificar, a derivada da função  $N_{des}(\varepsilon_m)$  é igual a componente (1,1) da matriz de rigidez (k) da seção, com o sinal trocado. Ou seja,

$$\frac{\partial N_{des}(\varepsilon_m)}{\partial \varepsilon_m} = -k_{11}(\varepsilon_m) = -\int_A E_t(y).dA \quad (2.3.62)$$

Para esclarecer o raciocínio do parágrafo anterior, transcreve-se a matriz de rigidez da seção:

$$k(e) = \frac{\partial F_r}{\partial e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_r}{\partial \varepsilon_m} & \frac{\partial N_r}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial M_r}{\partial \varepsilon_m} & \frac{\partial M_r}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \int_A \begin{bmatrix} E_t(y) & -E_t(y) \cdot y \\ -E_t(y) \cdot y & E_t(y) \cdot y^2 \end{bmatrix} \cdot dA \quad (2.3.63)$$

Dessa forma, pode-se escrever a equação de recorrência baseado no Método de Newton-Raphson para obtenção de  $\varepsilon_m$  que iguala o esforço solicitante  $N$  ao esforço resistente  $N_r$ .

$$\varepsilon_{m(k+1)} = \varepsilon_{m(k)} - \frac{1}{k_{11}(\varepsilon_m)_{(k)}} (N - N_r(\varepsilon_m)_{(k)}) \quad (2.3.64)$$

Para se obter um ponto do diagrama momento-curvatura, procede-se da seguinte forma (PRAZERES,2002):

- (a) considera-se como conhecido o valor do esforço normal  $N_r$ ,
- (b) escolhe-se um valor para a curvatura  $\varphi$ ,
- (c) determina-se  $\varepsilon_m$  iterativamente pela fórmula acima,
- (d) calcula-se o momento fletor  $M(\varepsilon_m, \varphi)$  pela equação

$$M_r = - \int_{A_c} \sigma_c \cdot y_c \cdot dA_c - \int_{A_s} \sigma_s \cdot y_s \cdot dA_s - \int_{A'_s} \sigma'_s \cdot y'_s \cdot dA'_s \quad (2.3.65)$$

Variando-se o valor da curvatura de zero até um determinado valor máximo, para um incremento apropriado, e repetindo-se o processo acima, obtém-se o diagrama momento-curvatura para um determinado valor de esforço normal.

### 2.3.6.3 - Método de Newton-Raphson para Sistemas de Equações Não-Lineares

A solução de um sistema não-linear consiste em determinar pontos no subespaço do problema que solucione o conjunto de equações. Os pontos de solução estão na intersecção das curvas que representam as equações. O processo de solução a ser visto é uma

generalização do Método de Newton-Raphson para sistemas de equações não-lineares (CUNHA, 1993).

Seja o sistema de equações não-lineares:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{2.3.66}$$

O sistema pode ser representado de forma vetorial:

$$F(\underline{x}) = \underline{0} \tag{2.3.67}$$

onde:  $\underline{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T$

Sabe-se do Método de Newton-Raphson para equações escalares que, a cada iteração determina-se a reta tangente ao gráfico da função no ponto inicial. No caso de sistemas de equações, determina-se o hiperplano tangente ao politopo determinado pelo sistema de equações no ponto inicial. O processo é semelhante ao caso escalar, no qual se utiliza a expansão em Série de Taylor vetorial no ponto  $\underline{x}^{(0)}$ .

$$F(\underline{x}) = F(\underline{x}^{(0)}) + J(\underline{x}^{(0)})(\underline{x} - \underline{x}^{(0)}) \tag{2.3.68}$$

onde:

$$J(\underline{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{2.3.69}$$

é chamada de matriz Jacobiana.

Igualando-se a zero, chega-se ao processo iterativo para sistemas de equações não-lineares:

$$F(\underline{x}) = F(\underline{x}^{(0)}) + J(\underline{x}^{(0)})(\underline{x} - \underline{x}^{(0)}) = \underline{0} \quad (2.3.70)$$

que de forma genérica torna-se:

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} - [J(\underline{x}^{(k)})]^{-1} F(\underline{x}^{(k)}) \quad (2.3.71)$$

Fazendo  $\underline{\Delta x}^{(k)} = \underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}^{(k)}$ , tem-se:

$$\underline{\Delta x}^{(k)} = -[J(\underline{x}^{(k)})]^{-1} F(\underline{x}^{(k)}) \quad (2.3.72)$$

Multiplicando-se a equação vetorial por  $[J(\underline{x}^{(k)})]$ , tem-se:

$$J(\underline{x}^{(k)})\underline{\Delta x}^{(k)} = -F(\underline{x}^{(k)}) \quad (2.3.73)$$

Observa-se que em cada iteração do Método de Newton-Raphson para sistemas de equações não-lineares resolve-se um sistema de equações lineares.

O processo iterativo deve ser realizado até que a norma da diferença entre duas soluções consecutivas  $\underline{x}^{(k)}$  e  $\underline{x}^{(k+1)}$  seja menor do que uma tolerância pré-estabelecida.

$$\|\underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}^{(k)}\| < \textit{tolerância} \quad (2.3.74)$$

#### 2.3.6.4 - Método de Newton-Raphson para obtenção das deformações generalizadas

Um problema importante na análise de seções de concreto estrutural consiste na determinação das deformações generalizadas  $e = [\varepsilon_m, \varphi]^T$ , provocadas pelo carregamento, conhecidas as forças externas ou solicitantes  $F = [N, M]^T$  atuantes na seção (PRAZERES, 2002).

A solução do problema recai na resolução da equação de equilíbrio:

$$\begin{bmatrix} N - N_r \\ M - M_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_r}{\partial \varphi} & \frac{\partial N_r}{\partial \varepsilon_m} \\ \frac{\partial M_r}{\partial \varphi} & \frac{\partial M_r}{\partial \varepsilon_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \varphi \end{bmatrix} \Leftrightarrow F - F_r = k.e \quad (2.3.75)$$

ou

$$F_{des}(e) = F - F_r(e) = 0 \quad (2.3.76)$$

onde:

$F_{des}(e)$  representa o desequilíbrio (diferença) entre as forças solicitantes (F) e as forças resistentes ( $F_r$ ).

Na solução da equação 2.3.75, utiliza-se o Método de Newton-Raphson para calcular as raízes  $e_r$  que zeram a função  $F_{des}(e)$ .

O ponto correspondente ao valor de deformação que zera a função, pelo método de Newton-Raphson para funções vetoriais de duas variáveis, é calculado como mostrado a seguir:

$$e^{(k+1)} = e^{(k)} - [J(e)^{(k)}]^{-1} \cdot F_{des}(e^{(k)}) \quad (2.3.77)$$

com

$$J(e) = \frac{\partial F_{des}(e)}{\partial e} = \frac{\partial F(e)}{\partial e} - \frac{\partial F_r(e)}{\partial e} = 0 - \int_A \begin{bmatrix} E_t(\varepsilon) & -E_t(\varepsilon) \cdot y \\ -E_t(\varepsilon) \cdot y & E_t(\varepsilon) \cdot y^2 \end{bmatrix} \cdot dA = -k(e) \quad (2.3.78)$$

ou

$$J(e) = -k(e) \quad (2.3.79)$$

onde:

- $e$  é o vetor de deformações generalizadas; e
- $\mathbf{J}(e)$  é matriz jacobiana da função  $F_{des}(e)$ .

No presente caso, a matriz jacobiana tem o mesmo valor da matriz de rigidez (k) da seção com o sinal trocado. Isto é,  $J(e) = -k(e)$ .

Para o cálculo das deformações generalizadas na seção, o processo iterativo segue a fórmula a seguir:

$$e^{(k+1)} = e^{(k)} - k(e^{(j)})^{-1} \cdot (F - F_r(e^{(j)})) \quad (2.3.80)$$

Resolvendo-se o problema para um vetor de forças externas  $\mathbf{F}$  conhecidas, obtém-se as respectivas deformações  $\mathbf{e}_r$ , definindo-se, portanto, um ponto na trajetória de equilíbrio da seção. Para construção da trajetória de equilíbrio completa, considera-se um novo valor de  $\mathbf{F}$  (novo passo de carga), calculam-se novas deformações, e assim por diante.

O processo iterativo deve ser realizado até que a norma da diferença entre duas soluções consecutivas  $e^{(k)}$  e  $e^{(k+1)}$  seja menor do que uma tolerância pré-estabelecida.

$$\|e^{(k+1)} - e^{(k)}\| < \textit{tolerância} \quad (2.3.81)$$

### 2.3.7 - Integração numérica

As integrais abaixo podem ser avaliadas numericamente utilizando-se diversas técnicas de quadratura, tais como o Método do Ponto Médio, Método dos Trapézios, Método de Simpson, Método de Gauss, etc. (BURGOYNE,1990; BURDEN,1993).

Neste trabalho, será empregado o Método do Ponto Médio devido aos resultados contidos no artigo intitulado: “Aplicação de Métodos Numéricos na Análise Computacional de Seções de Concreto Armado Submetidas a Flexão Composta Reta.” O artigo foi apresentado no V Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, em 2002. (PRAZERES, 2002).

$$F_r = \begin{Bmatrix} N_r \\ M_r \end{Bmatrix} = \int_A a.(y)^T .\sigma_c (y).dA + a.(y_s)^T .\sigma_s .A_s + a.(y'_s)^T .\sigma'_s .A'_s \quad (2.3.82)$$

e

$$k = \int_{A_c} a.(y)^T .E_c (y).a.(y).dA + a.(y_s)^T .E_s (y_s).a.(y_s) + a.(y'_s)^T .E_s (y'_s).a.(y'_s) \quad (2.3.83)$$

$$\text{onde } a.(y) = \langle 1 - y \rangle \quad (2.3.84)$$

O processo de integração numérica consiste na transformação de uma integral definida em um somatório, conforme descrito abaixo:

$$I = \int_y f(y)dy \cong \sum_{i=1}^n f(y_i)w_i \quad (2.3.85)$$

onde :

$n$  é o número de pontos de integração;

$y_i$  a coordenada do ponto  $i$ ;

$f(y_i)$  é o valor da função no ponto  $y_i$ ; e

$w_i$  o peso do ponto  $i$ .

### 2.3.7.1 - Método do Ponto Médio

As equações dos esforços normais ( $N$ ,  $M$ ) e da matriz de rigidez ( $k$ ) apresentam as seguintes formas:

$$N = \sum_{i=1}^n \sigma(y_i) \cdot \Delta h \cdot b \quad (2.3.86)$$

$$M = - \sum_{i=1}^n \sigma(y_i) \cdot y_i \cdot \Delta h \cdot b \quad (2.3.87)$$

$$k = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} 1 & -y_i \\ -y_i & y_i^2 \end{bmatrix} \cdot E_t(y_i) \cdot \Delta h \cdot b \quad (2.3.88)$$

As equações acima podem ser generalizadas para

$$F_c \cong \sum_{i=1}^n f(y_i) \Delta h \quad (2.3.89)$$

$$k_c \cong \sum_{i=1}^n g(y_i) \Delta h \quad (2.3.90)$$

onde:

$\Delta h$  corresponde a um peso de integração constante, dado pela divisão da altura  $h$  da seção pelo número de subdivisões  $n_d$  da seção; e

$f(y_i)$  é uma matriz coluna (2 x 1) e  $g(y_i)$  é uma matriz quadrada de ordem 2.

$$f(y_i) = \begin{pmatrix} 1 \\ -y_i \end{pmatrix} \sigma(y_i) \cdot b \quad (2.3.91)$$

$$g(y_i) = \begin{pmatrix} 1 & -y_i \\ -y_i & y_i^2 \end{pmatrix} E_c(y_i) b \quad (2.3.92)$$

No método do ponto médio, o número de subdivisões da seção é igual ao número de pontos de integração ( $n = n_d$ ).

Como o método do ponto médio é uma fórmula de Newton-Cotes do tipo aberta, ele não considera os pontos extremos do intervalo de integração.

Observa-se que tão mais preciso serão os resultados, quanto maior for o valor de  $n$ , e menor o valor de  $\Delta h$ . Há um limite de razoabilidade acima do qual não adianta elevar “n” pois não haverá maior precisão nos resultados ( $n \leq 10$ ).

A Figura 2.3.9 mostra um exemplo de divisão da seção para  $n = n_d = 8$ .

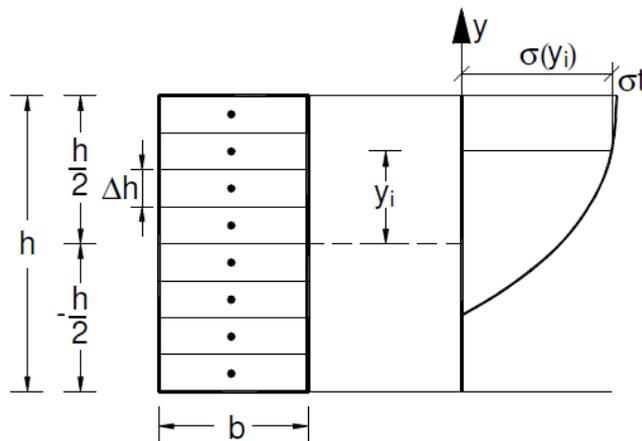


Figura 2.3.9 - Divisão da seção transversal.

As integrais  $F_c$  e  $k_c$  (2.3.89 e 2.3.90), avaliadas sobre a seção retangular de concreto estrutural, apresentam a seguinte forma:

$$F_c \cong \int_A a(y)^T \sigma(y) dA = \int_{-h/2}^{h/2} a(y)^T \cdot \sigma(y) \cdot b \cdot dy = \int_{-h/2}^{h/2} f(y) \cdot dy \cong \sum_{i=1}^n f(y_i) \cdot \Delta h \quad (2.3.93)$$

$$k_c \cong \int_A a(y)^T E_c(y) \cdot a(y) \cdot dA = \int_{-h/2}^{h/2} a(y)^T \cdot E_c(y) \cdot a(y) \cdot b \cdot dy = \int_{-h/2}^{h/2} g(y) \cdot dy \cong \sum_{i=1}^n g(y_i) \cdot \Delta h \quad (2.3.94)$$

onde:

$$f(y_i) = a(y_i)^T \sigma(y_i) b \quad (2.3.95)$$

$$g(y_i) = a(y_i)^T E_c(y_i) a(y_i) b \quad (2.3.96)$$

são funções que correspondem aos integrandos das equações Fc e kc. (2.3.93 e 2.3.94).

O procedimento de integração numérica pode ser utilizado para diversos tipos de relações constitutivas, tanto do concreto como do aço, e para diversos estados de deformação da seção, não se restringindo aos estados limites.

### 2.3.7.2 - Algoritmo da rotina para cálculo dos esforços resistentes

Com relação aos dados de entrada do programa, destaca-se a importância da escolha de duas variáveis para se definir o estado de deformação da seção transversal de concreto estrutural.

Tais variáveis podem ser:

- a deformação no topo da seção  $\varepsilon_t$  e a deformação na base da seção  $\varepsilon_b$  ;
- a deformação no topo  $\varepsilon_t$  e a curvatura da seção  $\varphi$  ; e
- a deformação em um ponto arbitrário da seção  $\varepsilon_m$  e a curvatura  $\varphi$  .

Dentre as possibilidades apresentadas, escolheu-se a primeira ( $\varepsilon_t$  e  $\varepsilon_b$ ) devido à simplificação do processo da programação computacional.

Para resolução do problema de equilíbrio da seção, deve-se, primeiramente, realizar a transformação da deformação unitária do centro da seção da armadura inferior  $\varepsilon_s$ , em deformação unitária na base da seção de concreto.

$$\varepsilon_b = \varepsilon_t - (\varepsilon_t - \varepsilon_s) \cdot \frac{h}{d} \quad (2.3.97)$$

As equações  $\varepsilon_m$  e  $\varphi$  são definidas abaixo:

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_t + \varepsilon_b}{2} \quad (2.3.98)$$

$$\varphi = \frac{-\varepsilon_t + \varepsilon_b}{h} \quad (2.3.99)$$

Com os valores ( $\varepsilon_m$  e  $\varphi$ ) e a distância  $y$  da fibra em relação ao centro médio da seção, calcula-se a deformação unitária em uma fibra qualquer da seção por meio da equação:

$$\varepsilon(y) = \varepsilon_m - y.\varphi \quad (2.3.100)$$

A seguir, o problema é calcular as integrais de área dadas pelas equações:

$$M = -\int \sigma.y.dA \quad (2.3.101)$$

$$N = \int \sigma.dA \quad (2.3.102)$$

Para  $f_{ck} \leq 50$  MPa ( $n = 2$ ), a distribuição das tensões no concreto comprimido ocorre de acordo com o diagrama parábola-retângulo cuja tensão última correspondente a deformação  $\varepsilon_{cu} = 0,0035$  vale  $0,85f_{cd}$ , onde  $f_{cd}$  é a resistência de projeto à compressão do concreto.

A resistência à tração do concreto é desprezada.

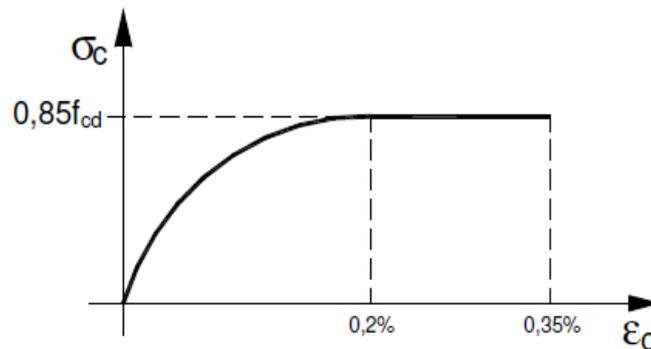


Figura 2.3.10 - Diagrama tensão-deformação idealizado do concreto. (Fonte: NBR 6118/14)

Para os aços do tipo A, a distribuição das tensões se comporta de acordo com o modelo linear elástico perfeitamente plástico, com tensão de escoamento  $f_y$ .

Para os aços do tipo B, a distribuição das tensões empregam o modelo linear elástico até  $0,7f_{yd}$  com curva de transição até  $f_{yd}$ , a partir da qual o aço entra na fase de encruamento que termina na ruptura.

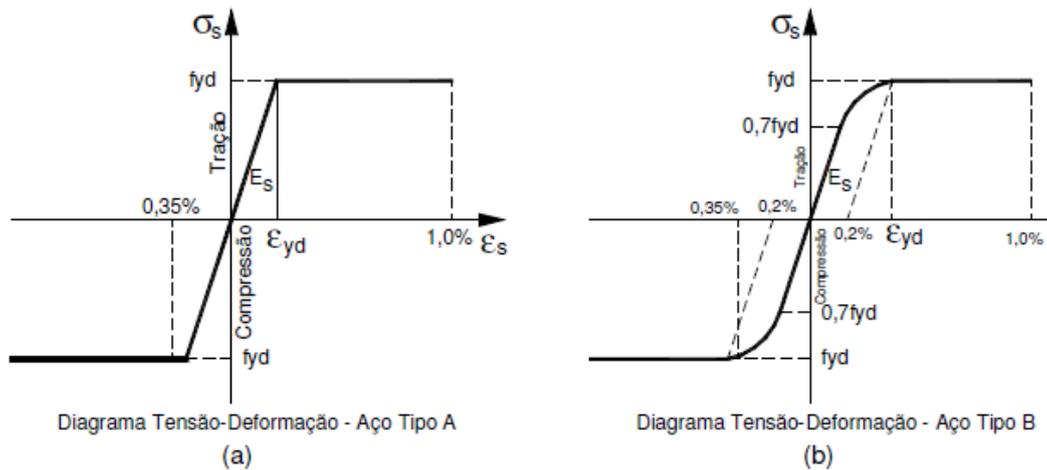


Figura 2.3.11 - Diagramas tensão-deformação dos aços tipo A e B. (Fonte: ABNT NBR)

Com base em PRAZERES (2002), é proposto um algoritmo (Figura 2.3.12) para o cálculo dos esforços resistentes numa seção transversal de concreto estrutural submetida a esforços de flexo-compressão.

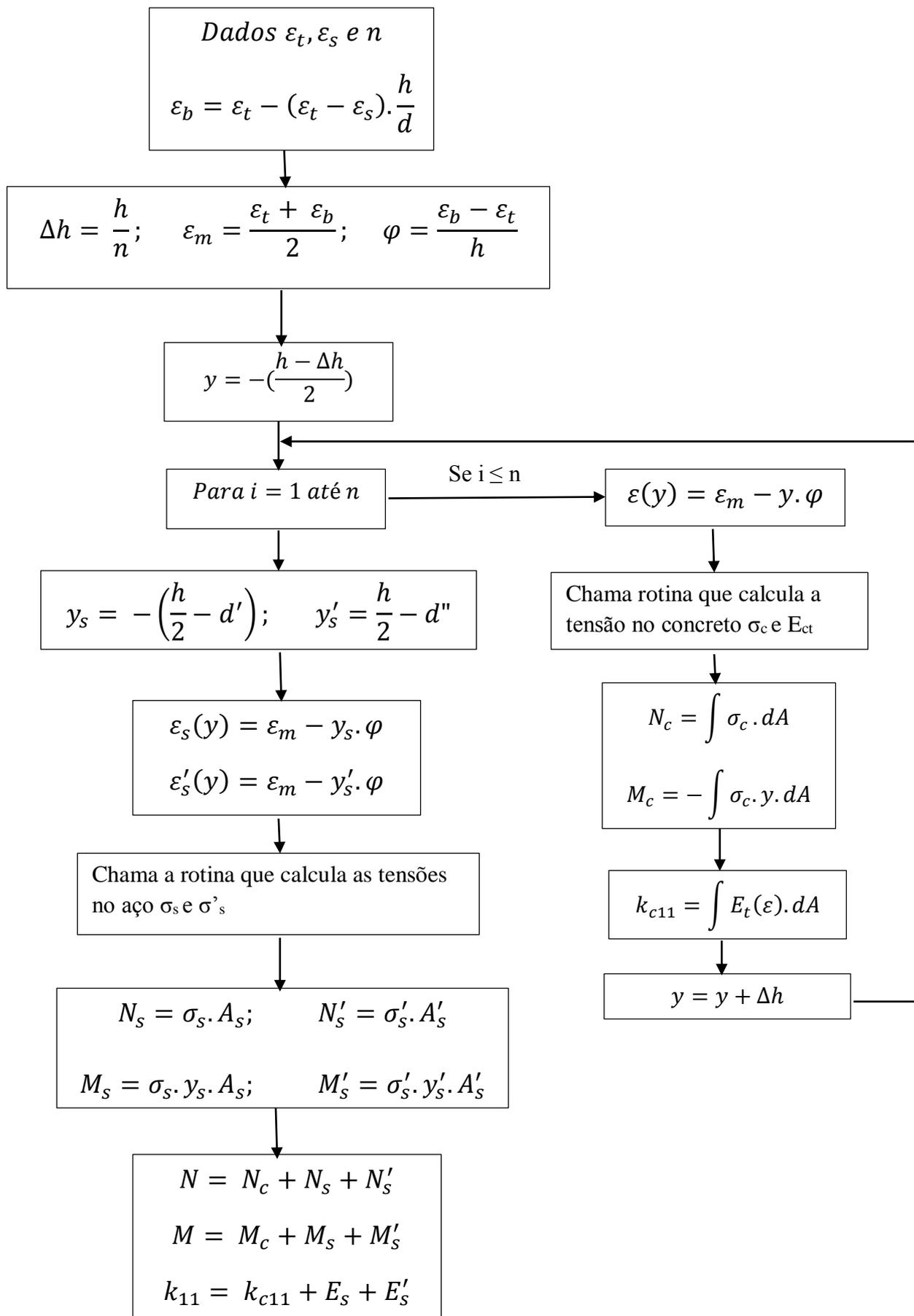


Figura 2.3.12 - Algoritmo da rotina para cálculo dos esforços resistentes

### 2.3.8 - Características geométricas das seções transversais

As propriedades geométricas da seção transversal que podem ser implementadas no programa computacional CARPE2 são: a área, o centróide, o momento estático, o momento de inércia e o produto de inércia.

A formulação desenvolvida permite que a seção transversal da viga de concreto possa assumir outras formas além da retangular, inclusive seções vazadas.

#### 2.3.8.1 - Área da Seção Transversal

A área da seção transversal é calculada com base na área de um polígono que pode ser obtida por meio de um somatório simples, baseada na soma de áreas de triângulos, conforme descrito a seguir.

Sejam  $x_i$  e  $y_i$  as coordenadas do vértice  $v_i$  do polígono P, com  $n$  vértices. A área do polígono é dada por:

$$A(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i \cdot y_{i+1} - y_i \cdot x_{i+1}) \quad (2.3.103)$$

Observa-se que, na expressão acima, quando se tem  $i = n - 1$ , é necessário ter  $x_n = x_0$  e  $y_n = y_0$ , de acordo com a definição de polígono, caracterizando o seu fechamento.

O sinal da área calculada indica o sentido da sequência de vértices. A área será negativa se os vértices estiverem em sentido horário, ou positiva se em sentido anti-horário.

#### 2.3.8.2 - Centróide da Seção Transversal

O centróide é o ponto no interior de uma figura geométrica que define o centro geométrico. Se a figura geométrica possui um corpo de densidade uniforme então o centróide coincide com o centro de massa e se a figura geométrica está submetida a um campo gravitacional então este ponto coincide com o centro de gravidade.

O centróide da seção transversal, que leva em conta o centróide de um polígono fechado, definido por  $n$  vértices, pode ser calculado utilizando-se uma fórmula que recebe as coordenadas dos vértices  $(x_i, y_i)$  e também a sua área  $(A)$ .

Para os cálculos das coordenadas do centróide  $(x_c, y_c)$  utilizam-se as fórmulas abaixo:

$$x_c = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} + x_i)(x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1})}{3.A(P)} \quad (2.3.104)$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (y_{i+1} + y_i)(x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1})}{3.A(P)} \quad (2.3.105)$$

### 2.3.8.3 - Cálculo do Momento Estático

É conhecido que o momento estático pode ser obtido pelas equações abaixo:

$$Q_x = \int y.dA \quad (2.3.106)$$

$$Q_y = \int x.dA \quad (2.3.107)$$

onde:

y é a distância ao eixo de referência x de dA

x é distância ao eixo de referência y de dA

dA é o elemento de área

Sabe-se, também, que a área de um polígono pode ser obtida por meio do somatório de áreas de triângulos conforme já comentado neste trabalho.

Da geometria analítica, pode-se obter o centro de gravidade de um triângulo pela expressão:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad (2.3.108)$$

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \quad (2.3.109)$$

sendo o terceiro ponto de coordena (0,0) tem-se:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{3} \quad (2.3.110)$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{3} \quad (2.3.111)$$

Da Equação 2.3.103 e Equações 2.3.110 e 2.3.111, pode-se concluir que o momento estático de um triângulo é dado por:

$$Q_x = \sum_{i=1}^n \frac{1}{6} \cdot (x_i \cdot y_{i+1} + x_{i+1} \cdot y_i) \cdot (x_i + x_{i+1}) \quad (2.3.112)$$

$$Q_y = \sum_{i=1}^n \frac{1}{6} \cdot (x_i \cdot y_{i+1} + x_{i+1} \cdot y_i) \cdot (y_i + y_{i+1}) \quad (2.3.113)$$

#### 2.3.8.4 - Cálculo do Momento de Inércia

Para o cálculo do momento de inércia, utiliza-se o artifício de dividir o triângulo em duas partes  $A_1$  e  $A_2$ , passando uma linha paralela ao eixo em que se quer calcular o momento de inércia.

$$A = A_1 + A_2 \quad (2.3.114)$$

$$\frac{A_1}{x} = \frac{A_2}{y} \quad (2.3.115)$$

Para inércia em relação ao eixo  $y$ , faz-se  $x = y_i$  e  $y = y_{i+1} - y_i$ , para se obter  $A_1$ :

$$A_1 = \frac{y_i \cdot A_2}{y_{i+1} - y_i} \quad (2.3.116)$$

Da Equação 2.3.114 e Equação 2.3.116, pode-se concluir que  $A_1$  e  $A_2$  assumem a forma:

$$A_1 = \frac{y_i \cdot A}{y_{i+1}} \quad (2.3.117)$$

$$A_2 = \frac{(y_{i+1} - y_i) \cdot A}{y_{i+1}} \quad (2.3.118)$$

Sabe-se, também, que o momento de inércia do triângulo é dado pela expressão:

$$I = \frac{b \cdot h^3}{36} = \frac{A \cdot h^2}{18} \quad (2.3.119)$$

Empregando-se o teorema dos eixos paralelos mais a Equação 2.3.117, a Equação 2.3.118 e a Equação 2.3.119 encontra-se a expressão para o cálculo do momento de inércia em x:

$$I_x = \sum_{i=1}^n \frac{A}{6} \cdot (y_{i+1}^2 + y_i^2 + y_i \cdot y_{i+1}) \quad (2.3.120)$$

De forma análoga, encontra-se o momento de inércia em y:

$$I_y = \sum_{i=1}^n \frac{A}{6} \cdot (x_{i+1}^2 + x_i^2 + x_i \cdot x_{i+1}) \quad (2.3.121)$$

### 2.3.8.5 - Cálculo do Produto de Inércia

Para o cálculo do produto de inércia, foi utilizado um processo semelhante ao da inércia e a expressão final é:

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{12} (x_i^2 \cdot y_i \cdot y_{i+1}) + \frac{1}{24} (x_i^2 \cdot y_{i+1}^2) - \frac{1}{12} (x_i x_{i+1} y_i^2) + \frac{1}{12} (x_i x_{i+1} y_{i+1}^2) - \frac{1}{24} (x_{i+1}^2 \cdot y_i^2) - \frac{1}{12} (x_{i+1}^2 \cdot y_{i+1} \cdot y_i) \right] \quad (2.3.122)$$

### 2.3.8.6 – Centro de gravidade da armadura

A posição do centro de gravidade das armaduras longitudinais, na seção transversal, pode ser obtida pela expressão:

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i} \quad (2.3.123)$$

onde:

$\bar{y}$  é a altura do centro de gravidade (cg) em relação a linha de referência

$y_i$  é a altura de cada barra em relação a linha de referência

$A_i$  é a área de cada barra

A Figura 2.3.15 abaixo ilustra a aplicação da expressão de cálculo do cg.

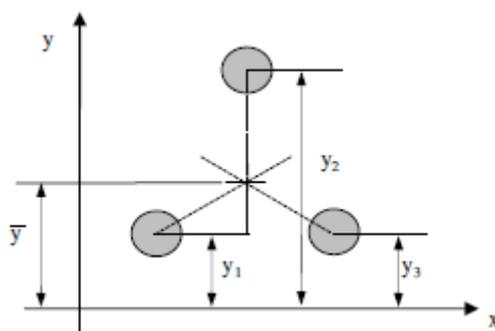


Figura 2.3.15 - Cálculo do cg das barras de aço

### 2.3.9 - Diagramas de Cálculo

A seguir, são apresentados os diagramas que podem ser gerados pelo programa CARPE2, que foram desenvolvidos neste trabalho.

- Diagrama de Interação Esforço Normal - Momento Fletor
- Diagrama Esforço Normal x Deformação
- Diagrama Esforço Normal x Curvatura
- Diagrama Momento Fletor x Curvatura

#### 2.3.9.1 - Diagrama de Interação Esforço Normal - Momento Fletor

Os diagramas de interação Esforço Normal - Momento Fletor são curvas geradas a partir das deformações de estados limites que relacionam o máximo momento fletor com o máximo esforço normal ao qual uma seção de uma peça de concreto estrutural é capaz de suportar simultaneamente (FUSCO, 1981).

Esta situação é genérica, e não implica que a seção esteja em um estado de deformação delimitado pelos domínios de deformação (Domínios 1, 2, 3, 4, 4a, e 5, definidos na NBR-6118:2014).

Os domínios de deformação representam apenas uma situação de ruína, e que uma seção em um estado de deformação anterior à ruína encontra-se totalmente fora destes domínios de deformação.

A superfície de interação momento fletor x esforço normal limita a região em que uma seção de concreto pode trabalhar sem atingir a ruína.

Por exemplo, o ponto P no interior da superfície de interação (Figura 2.3.16) encontra-se na área segura de trabalho, enquanto que para o ponto Q deve-se redimensionar a seção transversal.

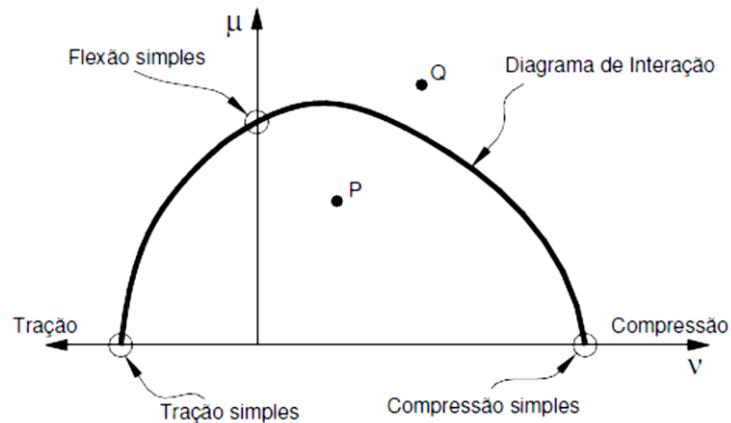


Figura 2.3.16 - Diagrama de Interação Momento Fletor – Esforço Normal.

Abaixo, apresenta-se um exemplo de diagrama de Interação Momento Fletor e Esforço Normal gerado pelo programa CARPE2. (Figura 2.3.15)

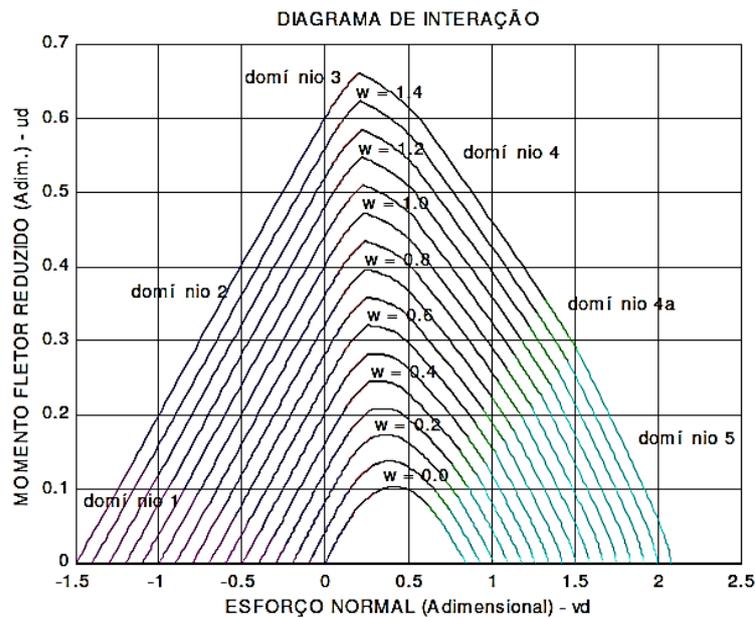


Figura 2.3.17 - Diagrama de Interação Momento Fletor – Esforço Normal.

O diagrama de interação Esforço Normal – Momento Fletor pode ser obtido fazendo-se variar as deformações  $\varepsilon_{c_{\max}}$  e  $\varepsilon_s$  da seção, de forma a percorrer todos os domínios de deformação correspondentes aos estados limites últimos da seção. Desta forma, cada par  $(\varepsilon_{c_{\max}}, \varepsilon_s)$  corresponde a um ponto  $(N, M)$  na superfície de interação.

Para se determinar um ponto da superfície de interação, adota-se o seguinte procedimento (PRAZERES, 2002):

(a) Definem-se as deformações  $\varepsilon_{c_{\max}}$  e  $\varepsilon_s$  correspondente a um determinado domínio de deformação;

(b) Obtém-se as deformações

$$\varepsilon_t = \varepsilon_{\max} \quad (2.3.124)$$

$$\varepsilon_b = \varepsilon_{c_{\max}} - (\varepsilon_{c_{\max}} - \varepsilon_s) \frac{h}{d} \quad (2.3.125)$$

(c) Calculam-se as deformações generalizadas da seção ;

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_t + \varepsilon_b}{2} \quad (2.3.126)$$

$$\varphi = \frac{-\varepsilon_t + \varepsilon_b}{h} \quad (2.3.127)$$

(d) Calculam-se os esforços  $N$  e  $M$  atuantes na seção através das equações:

$$N_r = \int_{A_c} \sigma_c \cdot dA_c + \int_{A_s} \sigma_s \cdot dA_s + \int_{A'_s} \sigma'_s \cdot dA'_s \quad (2.3.128)$$

$$M_r = - \int_{A_c} \sigma_c \cdot y_c \cdot dA_c - \int_{A_s} \sigma_s \cdot y_s \cdot dA_s - \int_{A'_s} \sigma'_s \cdot y'_s \cdot dA'_s \quad (2.3.129)$$

No diagrama de interação Esforço Normal – Momento Fletor, utilizam-se os valores normalizados adimensionais  $\nu$  e  $\mu$  do esforço normal  $N_d$  e o momento fletor  $M_d$  de projeto, respectivamente (Fusco, 1981).

$$\nu = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} \quad (2.3.130)$$

$$\mu = \frac{M_d}{A_c \cdot h \cdot f_{cd}} \quad (2.3.131)$$

onde:

$f_{cd}$  é a resistência à compressão de projeto do concreto.

A quantidade da armadura é expressa pela taxa mecânica

$$\omega = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{A_c \cdot f_{cd}} \quad (2.3.132)$$

onde:

$f_{yd}$  é a resistência à tração de projeto do aço,

$A_s$  corresponde a área total de aço na seção.

### 2.3.9.2 - Diagrama Esforço Normal x Deformação

Os diagramas de Esforço Normal - Deformação ( $\nu, \varepsilon$ ) são diagramas que relacionam o esforço normal com a deformação da seção. (FUSCO,1981).

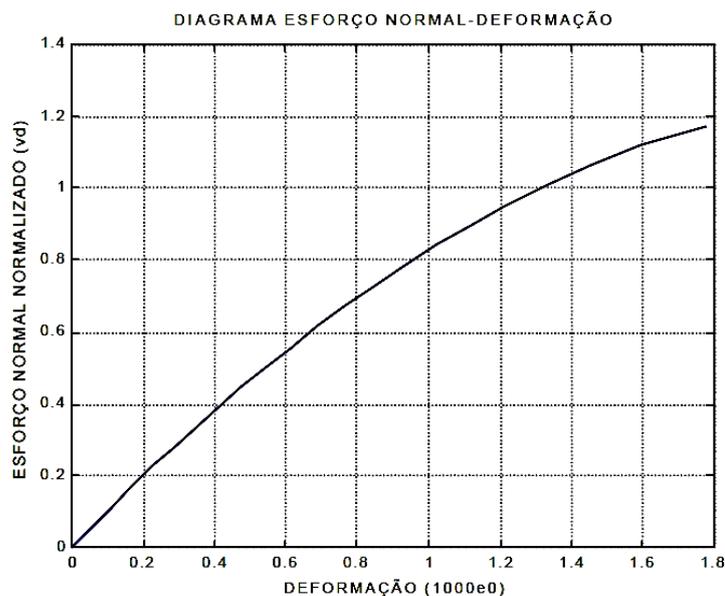


Figura 2.3.18 - Diagrama Esforço Normal – Deformação

O procedimento de cálculo para obtenção do diagrama de Esforço Normal - Deformação está descrito no item 2.3.7 – Integração Numérica.

### 2.3.9.3 – Diagrama Esforço Normal x Curvatura

Os diagramas de Esforço Normal - Curvatura são diagramas que relacionam o esforço normal com a curvatura da seção.

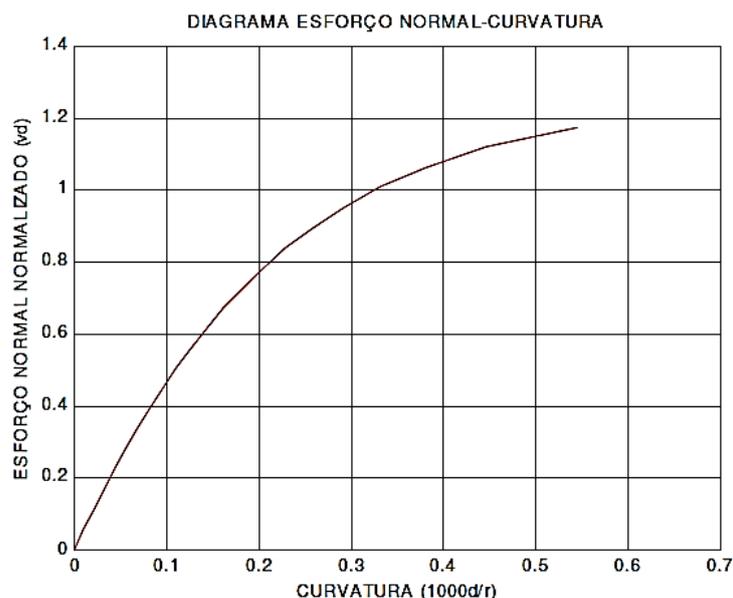


Figura 2.3.19 - Diagrama Esforço Normal – Deformação

O procedimento de cálculo para obtenção do diagrama de Esforço Normal-Curvatura está descrito no item 2.3.7 – Integração Numérica.

### 2.3.9.4 - Diagrama Momento Fletor x Curvatura

Os diagramas de Momento Fletor-Esforço Normal-Curvatura ( $\mu, \nu, \varphi$ ) são diagramas que relacionam o momento fletor com a curvatura da seção. Conhecendo-se o momento fletor e o esforço normal aos quais a seção está sujeita, obtém-se a curvatura da seção por intermédio do diagrama ( $\mu, \nu, \varphi$ ) (FUSCO, 1981).

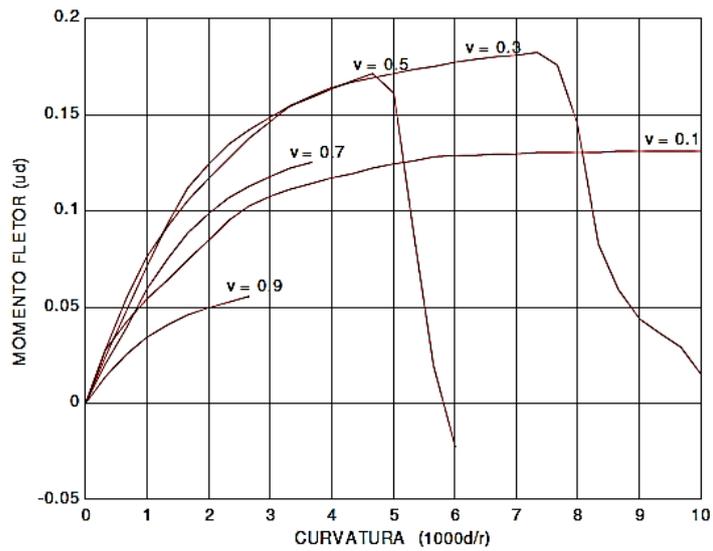


Figura 2.3.20 - Diagrama Momento Fletor – Esforço Normal – Curvatura

O procedimento de cálculo para obtenção do diagrama Momento Fletor-Esforço Normal-Curvatura está descrito no item 2.3.6.2 - Método de Newton-Raphson para a Obtenção do Diagrama Momento-Curvatura.

Os ramos descendentes da figura 2.3.20 não tem significado para projeto pois representam situação posterior à plastificação/ruptura dos materiais.

## 2.4 - EQUILÍBRIO DE ELEMENTO DE CONCRETO ESTRUTURAL CONSIDERANDO O MODELO DE ADERÊNCIA VARIÁVEL (MAV)

### 2.4.1 - Generalidades

Este item trata do comportamento de um elemento de viga em concreto estrutural, submetido a flexão composta reta, compreendido entre duas fissuras de flexão sucessivas (MARTINS, 1989). Seja, por exemplo, o elemento compreendido entre as fissuras A e B, apresentado na Figura 2.4.1.

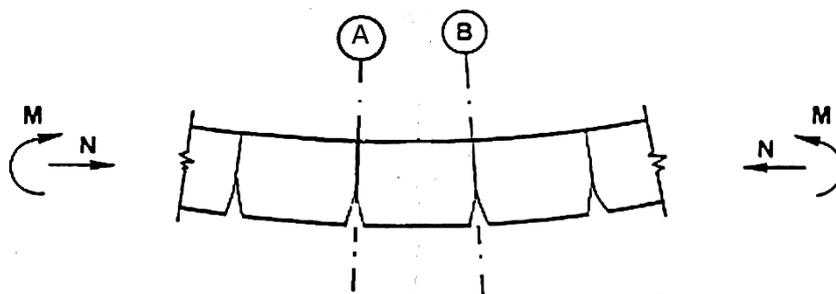


Figura 2.4.1 - Viga com fissuras sucessivas

Considera-se a degradação da aderência aço-concreto depois da abertura das fissuras, uma vez que o Modelo de Aderência Perfeita (MAP) da teoria da elasticidade não-linear clássica não é mais aplicável. Fica, no entanto, a possibilidade do acesso às expressões que relacionam o MAP ao Modelo de Aderência Variável (MAV) proposto neste estudo. Isso permite guardar para o MAP as variáveis independentes  $\varepsilon_{cg}$  e  $\varphi$ , que representam as deformações generalizadas, para o cálculo do equilíbrio das seções críticas do elemento de concreto estrutural.

Leva-se em conta, também, a influência fundamental do comportamento do concreto entre duas fissuras para estabelecimento das condições de equilíbrio nas bordas de uma aduela. Isso permite considerar a influência de parâmetros reconhecidos como importantes, tais como: relação entre o comprimento e a altura da aduela, partilha das tensões longitudinais no concreto, posição do eixo neutro ao longo da aduela, etc.

## 2.4.2 - Hipóteses de cálculo

Devido à perda de aderência entre o aço e o concreto, depois da abertura das fissuras, é preciso encontrar uma hipótese de cálculo para substituir aquela de seções planas com aderência perfeita girando em torno da linha neutra de deformação (hipótese de BERNOULLI-NAVIER).

A hipótese, que permite relacionar as deformações do concreto às do aço tensionado, numa seção fissurada, foi fornecida pelas pesquisas de GIURIANI (1982), na Itália, sobre peças de concreto armado fletidas e pode ser escrita da seguinte maneira:

*“Uma seção fissurada se deforma, depois da abertura da fissura, girando em torno do eixo de deslocamento nulo, relativo à seção mediana entre duas fissuras consecutivas.”*

O eixo de deslocamento longitudinal nulo é, pois, distinto da linha neutra de deformação. No caso geral, o primeiro é distinto do segundo em razão da variação da posição do eixo neutro ao longo da viga devido às singularidades constituídas pelas fissuras/juntas, conforme Figura 2.4.2.

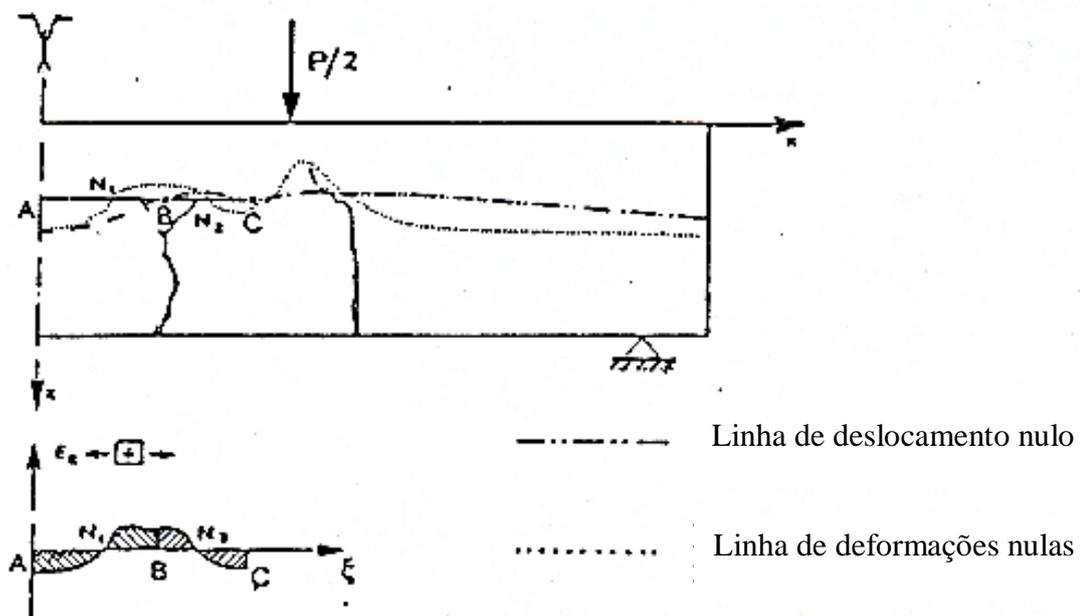


Figura 2.4.2 - Evolução do eixo neutro de deformação e de rotação das seções (Fonte: MARTINS, 1989).

A hipótese do eixo de deslocamento nulo permitirá, conjuntamente com aquelas expostas abaixo, modelar uma aduela como um corpo deformado em seu conjunto, levando em conta a evolução das condições de aderência entre o aço tensionado e o concreto de cobertura.

A Figura 2.4.3 assinala a posição do eixo de deslocamento nulo (rotação) que corresponde ao ponto de ordenada  $(-y_0)$ , sobre o eixo Y, cuja origem é o eixo neutro de deformação da seção fissurada.

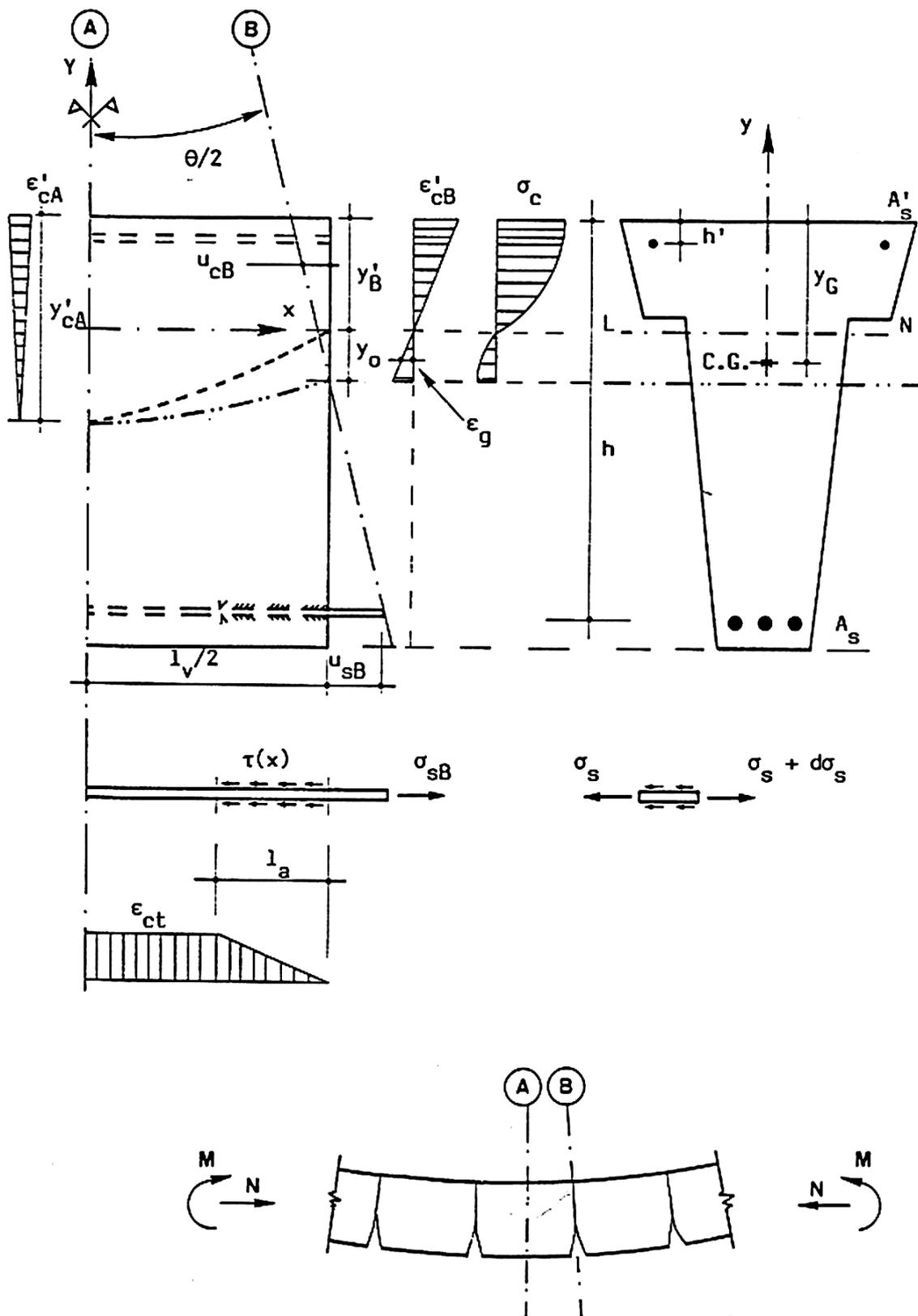


Figura 2.4.3 - O equilíbrio de um elemento considerando o deslizamento aço-concreto (Fonte: MARTINS, 1989).

As hipóteses de ordem geral necessárias ao desenvolvimento da formulação do Modelo de Aderência Variável (MAV) entre aço-concreto são as seguintes:

- carregamento quase estático, monótono, crescente;
- os efeitos do esforço cortante são desprezados;
- o momento fletor é considerado constante ao longo da aduela; e
- as seções permanecem planas pelo menos na parte do concreto comprimido depois da fissuração.

Para o desenvolvimento das equações de equilíbrio do elemento de concreto estrutural, levando-se em conta a aderência variável entre o aço e o concreto, são consideradas as leis propostas por MARTINS (1989):

- a lei tensão x deformação do concreto ( $\sigma_c$  x  $\varepsilon_c$ ) uni-axial para o concreto;
- a lei tensão x deformação do aço ( $\sigma_s$  x  $\varepsilon_s$ ) do aço; e
- a lei de tensão aderência-deslizamento aço-concreto.

Para poder modelar o comportamento do concreto ao longo da aduela, indispensável para resolução de seu equilíbrio, são apresentadas as hipóteses complementares abaixo:

- a partilha das deformações das fibras de concreto adjacentes as barras de aço tensionado;
- a superfície plana dos diagramas de deformação de compressão das seções medianas e das fissuras são iguais; e
- as deformações do concreto sobre a fibra mais comprimida evoluem segundo uma lei parabólica entre a seção de fissura e aquela a meia-aduela.

Antes de passar ao desenvolvimento das equações que governam o modelo, é preciso assinalar que as hipóteses formuladas acima não implicam na particularização do comportamento do elemento, sobretudo no que concerne ao tipo de fissuração. Isto quer dizer que a separação entre duas fissuras consecutivas é qualquer, o que vem admitir que se pode passar de um valor fraco (MAP) a um mais importante do tipo fissuração discreta como, por exemplo, a abertura de junta.

Resulta desse raciocínio que o Modelo de Aderência Perfeita (MAP) é na realidade uma simplificação deste Modelo de Aderência Variável (MAV), mais geral, caso se iguale o ponto de deslocamento nulo,  $u_c = 0$ , ao de deformação nula,  $\varepsilon_c = 0$ .

### 2.4.3 - Equações gerais

A partir do trabalho de MARTINS (1989), apresentam-se as equações que norteiam a formulação do equilíbrio do elemento de concreto estrutural, considerando a variação de aderência aço-concreto.

#### 2.4.3.1 - Equação Diferencial de Aderência (EDA)

Segundo BARBOSA (2001), o equilíbrio do elemento de concreto estrutural, Figura 2.4.4, permite deduzir a Equação Diferencial de Aderência (EDA) em termos das características geométricas da barra, da tensão axial no aço e a tensão de aderência entre a armadura e o concreto que a envolve, escrevendo-se:

$$A_s \cdot \sigma_s(x) + \tau_s(x) \cdot \pi \cdot \phi \cdot dx = [\sigma_s(x) + d\sigma_s(x)] \cdot A_s \quad (2.4.1)$$

sabendo-se que  $A_s = \pi \cdot \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \pi \phi = \frac{4A_s}{\phi}$ , simplificando-se a equação acima, tem-se:

$$\frac{d\sigma_s(x)}{dx} = \frac{4}{\phi} \cdot \tau_s(x) \quad (2.4.2)$$

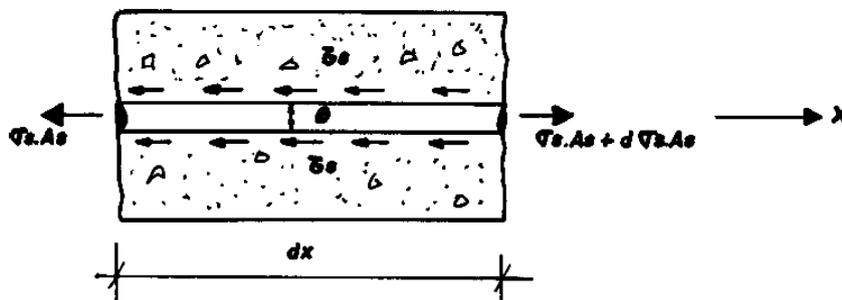


Figura 2.4.4 - Aderência Aço-Concreto (Fonte: BARBOSA, 2001).

Considera-se que a barra possui seção transversal equivalente circular de diâmetro  $\phi$ . Prescinde-se, neste caso, do aspecto geométrico mais acurado quando da existência de mossas ou saliências.

Na compressão e na tração antes da fissuração, a armadura e o concreto vizinho possuem deformações iguais,  $\epsilon_{\text{aço}} = \epsilon_{\text{concreto}}$ . Tão logo haja fissuração do concreto, essas deformações, nas proximidades da fissura, passam a ser diferentes: a armadura alonga-se mais que o concreto. A diferença de alongamentos entre os materiais implica na existência de deslizamento da armadura em relação ao concreto (Figura 2.4.5).

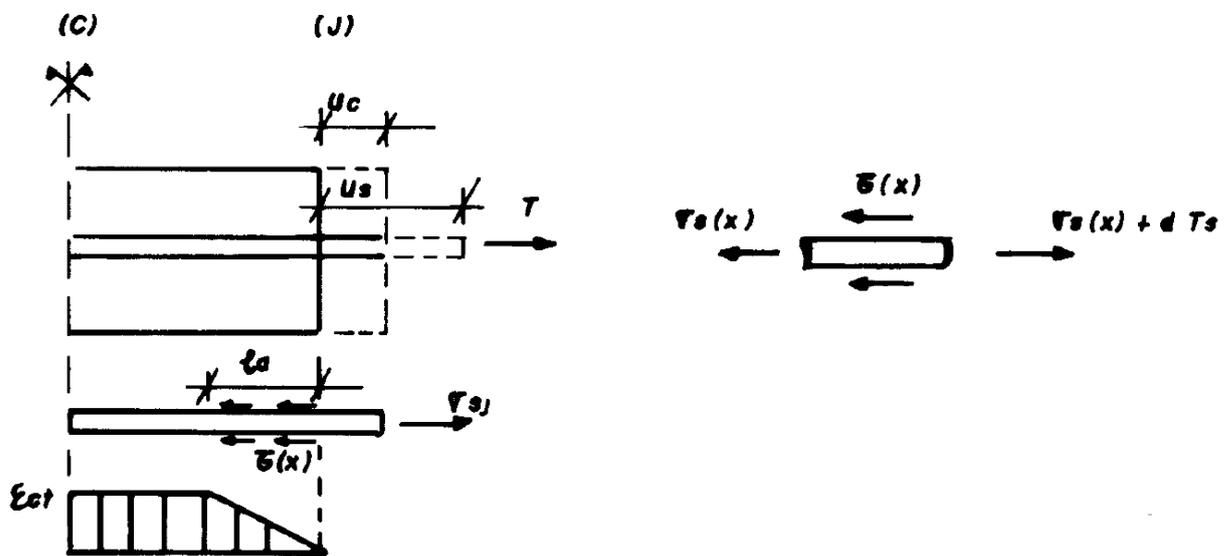


Figura 2.4.5 - Deslizamento da armadura em relação ao concreto  
(Fonte: BARBOSA, 2001).

A Equação 2.4.2 pode ser desenvolvida em termos do deslizamento relativo entre o aço e o concreto supondo-se que as parcelas concernentes aos materiais aço e concreto sejam representados por funções contínuas diferenciáveis, e que o limite de aplicação das leis de aderência fique restrito ao regime linear de comportamento mecânico das tensões  $\sigma_s$  e  $\sigma_c$ .

O deslizamento relativo aço-concreto para o elemento diferencial é:

$$s(x) = u_s(x) - u_c(x) \quad (2.4.3)$$

onde:

$s(x)$  = deslizamento relativo entre o aço e o concreto

$u_s(x)$  = deslocamento no aço

$u_c(x)$  = deslocamento no concreto

Derivando-se a equação  $s(x) = u_s(x) - u_c(x)$  em relação a “x” e, para simplificar a notação matemática, abstraindo-se dos argumentos das funções, lembrando que a deformação específica é  $u' = \varepsilon$ , vem:

$$s' = u'_s - u'_c \quad \text{ou} \quad s' = \varepsilon_s - \varepsilon_c \quad (2.4.4)$$

$$s'' = u''_s - u''_c \quad \text{ou} \quad s'' = \varepsilon'_s - \varepsilon'_c \quad (2.4.5)$$

Para o regime linear elástico,  $\sigma = E.\varepsilon$ , a Equação 2.4.2 fica:

$$\frac{d\sigma_s(x)}{dx} = \frac{4}{\phi}.\tau_s(x) \Rightarrow \frac{d\varepsilon_s(x)}{dx} = \frac{4}{\phi.E_s}.\tau_s \quad (2.4.6)$$

substituindo-se a Equação 2.4.6 na Equação 2.4.5, obtém-se a Equação Diferencial de Aderência (EDA) em função do deslizamento relativo aço-concreto  $s(x)$ :

$$s'' - \frac{4}{\phi.E_s}.\tau_s = -\varepsilon'_c \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 s(x)}{dx^2} - \frac{4}{\phi.E_s}.\tau_s(x) = -\frac{d\varepsilon_c(x)}{dx} \quad (2.4.7)$$

A Equação Diferencial de Aderência (2.4.7), classificada como equação diferencial ordinária de 2ª ordem, não-homogênea, necessita dos seguintes parâmetros para sua resolução:

- caracterização do tipo de aço e de sua equação constitutiva,  $\sigma_s = E_s.\varepsilon_s$ ;
- geometria da barra, no caso particular, o seu diâmetro;
- lei de tensão de aderência  $\tau_s(x)$  compatível com a solicitação que origina o deslizamento  $s(x)$ ;
- lei de distribuição das deformações específicas ao longo da barra, relacionada diretamente com a lei da aderência.

Essas variáveis mostram a necessidade fundamental de se pesquisar uma função de tensão de aderência  $\tau_s(x)$  adequada, visto que os diversos parâmetros estão intimamente ligados a essa lei. A lei de tensão de aderência  $\tau_s(x)$  utilizada neste estudo é a lei proposta por MARTINS (1989).

#### 2.4.3.2 - Modelo da Lei de Tensão de Aderência versus Deslizamento Aço-Concreto

O modelo matemático da lei de tensão de aderência  $\tau_s(x)$  proposto por MARTINS (1989) é uma combinação de uma curva poligonal representativa da aderência versus deslizamento relativo aço-concreto (Figura 2.4.6) e de um diagrama de deformação específica do concreto, relacionado à distância da fissura (ou descontinuidade física) até o eixo de simetria do elemento estrutural analisado.

Para resolver a Equação (2.4.7) aplica-se a expressão de  $\tau_s(x)$ , Equação (2.4.8 – a b c d e), correspondente a cada uma das cinco zonas de deslizamento aço-concreto da Figura 2.4.6.

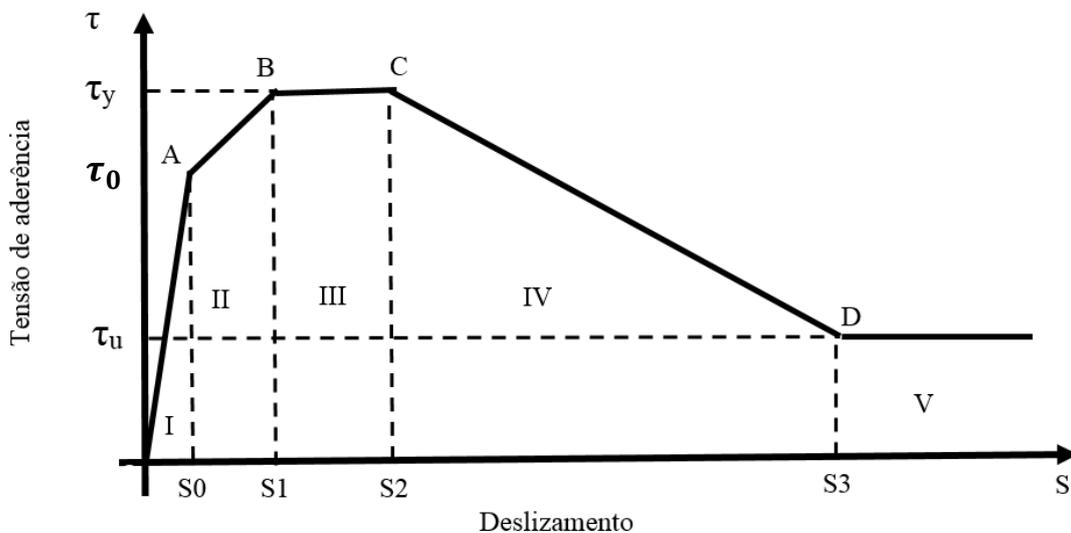


Figura 2.4.6 - Curva tensão de aderência x deslizamento. (Fonte: MARTINS, 1989)

As equações da tensão de aderência  $\tau_s(x)$  em função do deslizamento relativo aço-concreto  $s(x)$  propostas por MARTINS (1989), conforme a zona de deslizamento, são:

$$(a) \text{ Zona I: } \tau(x) = \frac{\tau_0}{S_0} S(x) \quad (2.4.8 a)$$

$$(b) \text{ Zona II: } \tau(x) = k_0 + \frac{\tau_y - \tau_0}{S_1 - S_0} S(x) \quad \text{onde } k_0 = \frac{\tau_0 S_1 - \tau_y S_0}{S_1 - S_0} \quad (2.4.8 \text{ b})$$

$$(c) \text{ Zona III: } \tau(x) = \tau_y \quad (2.4.8 \text{ c})$$

$$(d) \text{ Zona IV: } \tau(x) = \tau_1 - \frac{\tau_y - \tau_u}{S_3 - S_2} S(x) \quad (2.4.8 \text{ d})$$

$$(e) \text{ Zona V: } \tau(x) = \tau_u \quad (2.4.8 \text{ e})$$

Admitindo-se válida a repartição bi-linear das deformações do concreto ao redor da barra, Figura 2.4.7, pode-se escrever:

$$\varepsilon_c(x) = \frac{\varepsilon_{ct}(l_a - x)}{l_a} \quad , \quad \text{para } x \leq l_a \quad (2.4.9a)$$

$$\varepsilon_c(x) = \varepsilon_{ct} \quad , \quad \text{para } x > l_a \quad (2.4.9b)$$

onde:

$\varepsilon_{ct}$  é a deformação máxima de tração entre duas fissuras, geralmente suposta igual a  $\varepsilon_{ctk}$  ;

$l_a$  é o comprimento de ancoragem da barra, aquele no qual o deslizamento relativo não é nulo;

$x$  representa a região de aderência variável e tem como origem o ponto em que  $\varepsilon_c$  alcança o valor  $\varepsilon_{ct}$ , conforme ilustra a Figura 2.4.7.

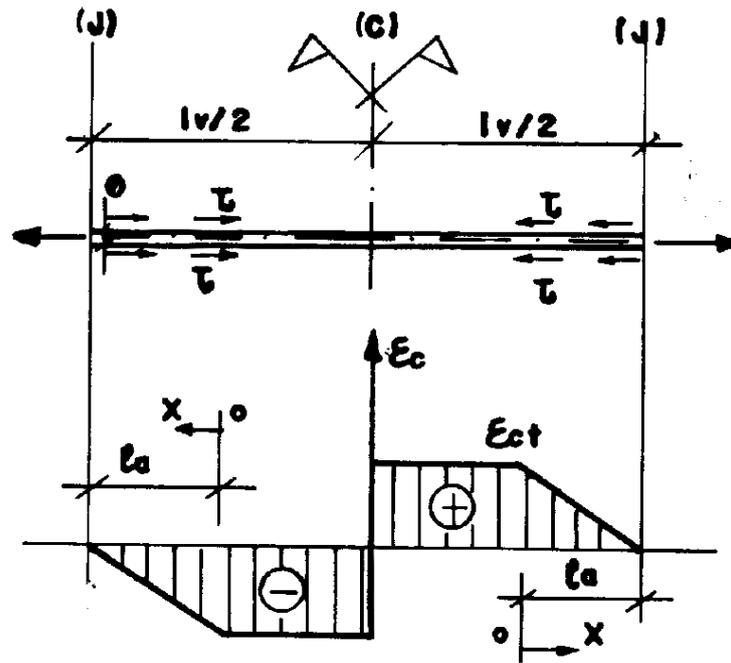


Figura 2.4.7 - Deformação do concreto ao redor da barra (Fonte: BARBOSA, 2001)

Substituindo-se a Equação 2.4.9 na Equação 2.4.7, que relaciona o deslocamento relativo entre a barra de aço e o concreto de cobertura com a tensão de aderência aço-concreto, tem-se:

$$\frac{d^2S(x)}{dx^2} - \frac{4}{E_s \cdot \phi} \cdot \tau(x) = \frac{\varepsilon_{ct}}{l_a} \quad (2.4.10)$$

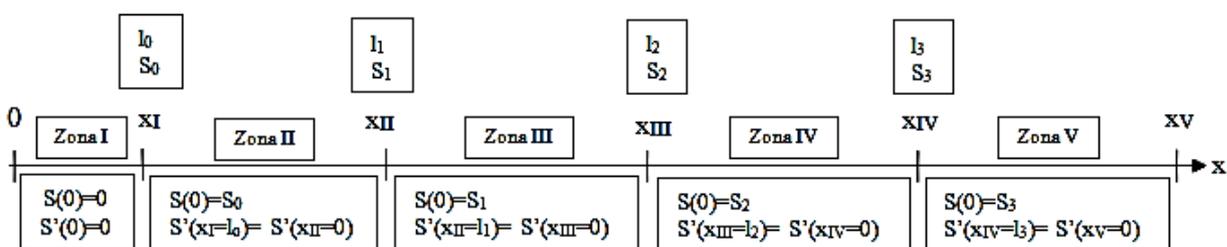
Dando prosseguimento à resolução da Equação Diferencial de Aderência (EDA) (2.4.10), utilizando-se das expressões de tensão de aderência  $\tau(x)$ , (2.4.8 – a b c d e), calculadas de acordo com as zonas de deslizamento  $s(x)$ , Figura 2.4.6, obtém-se as equações dos itens abaixo que serão apresentadas ao longo deste capítulo:

- Tensão de aderência  $\tau(x)$
- Deslizamento  $S(x)$
- Deformação do aço  $\varepsilon_{SB}$
- Comprimento de ancoragem  $l_a$
- Comprimento de aderência  $l_0, l_1, l_2, l_3$  que varia conforme a zona de deslizamento

O desenvolvimento algébrico completo da resolução da equação diferencial de aderência (EDA), consta dos estudos de MARTINS (1989).

A seguir são apresentados os resultados oriundos da equação diferencial de aderência (EDA), correspondentes a cada uma das cinco zonas de deslizamento, conforme o esquema das condições de contorno abaixo.

**Esquema apresentando as condições de contorno de deslizamento e deformação**



**Legenda:**

$X_I, X_{II}, X_{III}, X_{IV}, X_V$  representa a região de aderência variável

S significa deslizamento relativo entre o aço e o concreto

$S' = u'_s - u'_c = \epsilon_s - \epsilon_c$  representa a deformação

$S_0, S_1, S_2, S_3$  são deslizamentos conhecidos

$l_0, l_1, l_2, l_3$  são comprimentos de aderência correspondentes aos deslizamentos conhecidos

$l_a$  é o comprimento de ancoragem

$l_v$  é o comprimento da aduela, distância entre duas fissuras sucessivas

$U_{sb}$  é deslocamento do aço no nível da junta ou fissura

A Tabela 2.4.1 contém as constantes utilizadas na resolução da equação diferencial de aderência conforme as zonas de deslizamento I, II, III, IV e V propostas por MARTINS (1989).

Tabela 2.4. 1 - Constantes para equação diferencial de aderência conforme as zonas de deslizamento I, II, III, IV e V (Fonte: MARTINS,1989)

ZONAS	$\alpha_n$	$AKn$	$l_n$
ZONA I	$\alpha_0 = \sqrt{\frac{4 \cdot \tau_0}{S_0 \cdot \phi \cdot E_C}}$	-----	$l_0$
ZONA II	$\alpha_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot AK1}{\phi \cdot \varepsilon_{ac}}}$	$AK0 = \frac{(\tau_0 \cdot S_1 - \tau_y \cdot S_0)}{(S_1 - S_0)}$ $AK1 = \frac{(\tau_y - \tau_0)}{(S_1 - S_0)}$ $ALAMB = S_0 + \frac{AK_0}{AK_1}$ $BETA = \frac{\sinh(\alpha_0 \cdot l_0)}{\alpha_1 \alpha_0 l_0}$	$l_1$ $l_{01} = l_0 + l_1$
ZONA III	$\alpha_2 = (\alpha_1 ALAMB + \frac{\varepsilon_{ct}}{\alpha_1 \cdot l_{01}}) \cdot \sinh(\alpha_1 \cdot l_1) + \varepsilon_{ct} \cdot BETA \cdot \alpha_1 \cdot \cosh(\alpha_1 \cdot l_1)$ $\alpha_y = \sqrt{\frac{2 \cdot \tau_y}{\phi \cdot \varepsilon_{ac}}}$		$l_2$
ZONA IV	$\alpha_3 = \sqrt{\frac{4 \cdot AK3}{\phi \cdot \varepsilon_{ac}}}$ $\alpha_4 = 2 \cdot \alpha_y^2 \cdot l_2 + \alpha_2 + \frac{\varepsilon_{ct} \cdot l_2}{l_{02}}$	$AK3 = \frac{(\tau_y - \tau_u)}{(S_3 - S_2)}$	$l_3$ $l_{02} = l_0 + l_1 + l_2$
ZONA V	$\alpha_5 = \alpha_4 \cdot \cos(\alpha_3 \cdot l_3) - (\alpha_3 \cdot (S_2 - \frac{\tau_1}{AK3}) - \frac{\varepsilon_{ct}}{\alpha_3 \cdot l_3})$ $\alpha_u = \sqrt{\frac{2 \cdot \tau_u}{\phi \cdot \varepsilon_{ac}}}$		$l_{03} = l_0 + l_1 + l_2 + l_3$

Seguem abaixo, as equações que fazem parte da resolução da Equação Diferencial de Aderência conforme as cinco zonas de deslizamento propostas por MARTINS (1989).

**Zona I:  $0 \leq S(x) \leq S_0$**

(a) Tensão de Aderência:  $\tau(x)_I = \frac{\tau_0}{S_0} S(x)_I$  (2.4.11 a)

(b) Deslizamento:  $S(x)_I = \frac{\varepsilon_{ct}}{\alpha_0^2 \cdot x} [\cosh(\alpha_0 \cdot x) - 1]$  (2.4.11 b)

(c) Deformação do aço:  $\varepsilon_s(x)_I = \frac{\varepsilon_{ct}}{x} \cdot \frac{\sinh(\alpha_0 \cdot x)}{\alpha_0}$  (2.4.11 c)

(d) Comprimento de ancoragem ( $l_a$ ): (2.4.11 d)

Se  $x \leq \frac{L_v}{2}$  então

$$l_a(x)_I = x \cdot \left( \frac{\alpha_0^2 \cdot u_{sb}}{\varepsilon_{ct}} - \alpha_0^2 \cdot \frac{L_v}{2} \right) + \alpha_0^2 \cdot \frac{x^2}{2} - \cosh(\alpha_0 \cdot x) + 1$$
 (2.4.11 e)

se não

$$l_a(x)_I = \frac{x \cdot \alpha_0^2 \cdot u_{sb}}{\varepsilon_{ct}} - \alpha_0^2 \cdot \frac{L_v^2}{8} - \cosh(\alpha_0 \cdot x) + 1$$
 (2.4.11 f)

(e) Comprimento  $l_0$  correspondente ao deslizamento  $S_0$ :

$$l_0(x)_I = \alpha_0^2 \cdot S_0 \cdot x - \varepsilon_{ct} \cdot \cosh(\alpha_0 \cdot x) + \varepsilon_{ct}$$
 (2.4.11 g)

**Zona II:  $S_0 < S(x) \leq S_I$**

(a) Tensão de Aderência:  $\tau(x)_{II} = AK_0 + \frac{\tau_y - \tau_0}{S_1 - S_0} S(x)_{II}$  (2.4.12 a)

(b) Deslizamento: (2.4.12 b)

$$S(x)_{II} = (ALAMB + \frac{\varepsilon_{ct}}{\alpha_1^2 \cdot x}) \cdot \cosh(\alpha_1(x-l_0)) + \varepsilon_{ct} \cdot BETA \cdot \sinh(\alpha_1(x-l_0)) - \frac{AK0}{AK1} - \frac{\varepsilon_{ct}}{\alpha_1^2 \cdot x}$$

(c) Deformação do aço: (2.4.12 c)

$$\varepsilon_s(x)_{II} = (\alpha_1 \cdot ALAMB + \frac{\varepsilon_{ct}}{\alpha_1 \cdot x}) \cdot \sinh(\alpha_1(x-l_0)) + \varepsilon_{ct} \cdot \alpha_1 \cdot BETA \cdot \cosh(\alpha_1(x-l_0))$$

(d) Comprimento de ancoragem ( $l_a$ ): (2.4.12 d)

Se ( $x \leq l_v/2$ ) então

$$l_a(x)_{II} = (ALAMB + \frac{\varepsilon_{ct}}{\alpha_1^2 \cdot x}) \cdot \cosh(\alpha_1(x-l_0)) + \varepsilon_{ct} \cdot BETA \cdot \sinh(\alpha_1(x-l_0)) - \frac{AK0}{AK1} - \frac{\varepsilon_{ct}}{\alpha_1^2 \cdot x} - u_{sb} + \varepsilon_{ct} \cdot (\frac{l_v}{2} - \frac{x}{2})$$

se não

$$l_a(x)_{II} = (ALAMB + \frac{\varepsilon_{ct}}{\alpha_1^2 \cdot x}) \cdot \cosh(\alpha_1(x-l_0)) + \varepsilon_{ct} \cdot BETA \cdot \sinh(\alpha_1(x-l_0)) - \frac{AK0}{AK1} - \frac{\varepsilon_{ct}}{\alpha_1^2 \cdot x} - u_{sb} + \varepsilon_{ct} \cdot \frac{l_v^2}{8x}$$

(e) Comprimento  $l_1$  correspondente ao deslizamento  $S_1$  (2.4.12 e)

$$l_1(x) = (ALAMB \cdot (l_0 + x) + \frac{\varepsilon_{ct}}{\alpha_1^2}) \cdot \cosh(\alpha_1 \cdot x) + \varepsilon_{ct} \cdot BETA \cdot (l_0 + x) \cdot \sinh(\alpha_1 \cdot x) - \frac{AK0}{AK1} \cdot x - \frac{AK0}{AK1} \cdot l_0 - \frac{\varepsilon_{ct}}{\alpha_1^2} - S_1 \cdot (x + l_0)$$

### Zona III: $S_1 < S(x) \leq S_2$

(a) Tensão de aderência:  $\tau(x)_{III} = \tau_y$  (2.4.13 a)

(b) Deslizamento:  $S(x)_{III} = (2 \cdot \alpha_y^2 + \frac{\varepsilon_{ct}}{x}) \cdot \frac{(x-l_{01})^2}{2} + \alpha_2 \cdot (x-l_{01}) + S_1$  (2.4.13 b)

(c) Deformação do aço:  $\varepsilon_s(x)_{III} = (2 \cdot \alpha_y^2 + \frac{\varepsilon_{ct}}{x}) \cdot (x-l_{01}) + \alpha_2$  (2.4.13 c)

(2.4.13 d)

(d) Comprimento de ancoragem ( $l_a$ ):

Se ( $x \leq l_v/2$ ) então

$$l_a(x)_{III} = (2\alpha_y^2 + \frac{\varepsilon_{ct}}{x}) \frac{(x-l_{01})^2}{2} + \alpha_2(x-l_{01}) + S_1 - u_{SB} + \varepsilon_{ct} \left( \frac{l_v}{2} - \frac{x}{2} \right)$$

se não

$$l_a(x)_{III} = (2\alpha_y^2 + \frac{\varepsilon_{ct}}{x}) \frac{(x-l_{01})^2}{2} + \alpha_2(x-l_{01}) + S_1 - u_{SB} + \frac{\varepsilon_{ct} l_v^2}{8x}$$

(e) Comprimento  $l_2$  correspondente ao deslizamento  $S_2$  (2.4.13 e)

$$\alpha_y^2 l_2^3 + (\alpha_y^2 l_{01} + \frac{\varepsilon_{ct}}{2} + \alpha_2) l_2^2 + (\alpha_2 l_{01} + S_1 - S_2) l_2 + (S_1 - S_2) l_{01} = 0$$

**Zona IV:  $S_2 < S(x) \leq S_3$**

(a) Tensão de aderência:  $\tau(x)_{IV} = \tau_1 - \frac{\tau_y - \tau_u}{S_3 - S_2} S(x)_{IV}$  (2.4.14 a)

(b) Deslizamento: (2.4.14 b)

$$S(x)_{IV} = \frac{\alpha_4}{\alpha_3} \cdot \sin(\alpha_3(x-l_{02})) + (S_2 - \frac{\tau_1}{AK3} - \frac{\varepsilon_{ct}}{\alpha_3^2 \cdot x}) \cos(\alpha_3(x-l_{02})) + \frac{\tau_1}{AK3} + \frac{\varepsilon_{ct}}{\alpha_3^2 \cdot x}$$

(c) Deformação do aço: (2.4.14 c)

$$\varepsilon_s(x)_{IV} = \alpha_4 \cdot \cos(\alpha_3(x-l_{02})) - \alpha_3 (S_2 - \frac{\tau_1}{AK3} - \frac{\varepsilon_{ct}}{\alpha_3^2 \cdot x}) \cdot \sin(\alpha_3(x-l_{02}))$$

(d) Comprimento de ancoragem ( $l_a$ ): (2.4.14 d)

Se ( $x \leq l_v/2$ ) então

$$l_a(x)_{IV} = \frac{\alpha_4}{\alpha_3} \sin(\alpha_3(x-l_{02})) + (S_2 - \frac{\tau_1}{AK3} - \frac{\varepsilon_{ct}}{\alpha_3^2 \cdot x}) \cos(\alpha_3(x-l_{02})) + \frac{\tau_1}{AK3} + \frac{\varepsilon_{ct}}{\alpha_3^2 \cdot x} - u_{SB} + \varepsilon_{ct} \left( \frac{l_v}{2} - \frac{x}{2} \right)$$

Se não

$$l_a(x)_{IV} = \frac{\alpha_4}{\alpha_3} \text{sen}(\alpha_3(x-l_{02})) + (S_2 - \frac{\tau_1}{AK3} - \frac{\varepsilon_{ct}}{\alpha_3^2 \cdot x}) \cos(\alpha_3(x-l_{02})) + \frac{\tau_1}{AK3} + \frac{\varepsilon_{ct}}{\alpha_3^2 x} - u_{SB} + \varepsilon_{ct} \left( \frac{l_v^2}{8x} \right)$$

(e) Comprimento  $l_3$  correspondente ao deslizamento  $S_3$  (2.4.14 e)

$$l_3(x) = \frac{\alpha_4}{\alpha_3} (l_{02} + x) \cdot \text{sen}(\alpha_3 \cdot x) + ((S_2 - \frac{\tau_1}{AK3})(l_{02} + x) - \frac{\varepsilon_{ct}}{\alpha_3^2}) \cos(\alpha_3 \cdot x) + (\frac{\tau_1}{AK3} - S_3)(l_{02} + x) + \frac{\varepsilon_{ct}}{\alpha_3^2}$$

**Zona V :  $S(x) > S_3$**

(a) Tensão de aderência:  $\tau(x)_V = \tau_u$  (2.4.15 a)

(b) Deslizamento:  $S(x)_V = (2\alpha_u^2 + \frac{\varepsilon_{ct}}{x}) \frac{(x-l_{03})^2}{2} + \alpha_5(x-l_{03}) + S_3$  (2.4.15 b)

(c) Deformação do aço:  $\varepsilon_s(x)_V = (2\alpha_u^2 + \frac{\varepsilon_{ct}}{x})(x-l_{03}) + \alpha_5$  (2.4.15 c)

(d) Comprimento da ancoragem ( $l_a$ ) : (2.4.15 d)

Se  $(x \leq l_v/2)$  então

$$l_a(x)_V = (2\alpha_u^2 + \frac{\varepsilon_{ct}}{x}) \frac{(x-l_{03})^2}{2} + \alpha_5 \cdot (x-l_{03}) + S_3 - u_{SB} + \varepsilon_{ct} \left( \frac{l_v}{2} - \frac{x}{2} \right)$$
 (2.4.15 e)

se não

$$l_a(x)_V = (2\alpha_u^2 + \frac{\varepsilon_{ct}}{x}) \frac{(x-l_{03})^2}{2} + \alpha_5 \cdot (x-l_{03}) + S_3 - u_{SB} + \frac{\varepsilon_{ct} \cdot l_v^2}{8x}$$
 (2.4.15 f)

2.4.4 - Algoritmo de Cálculo do Modelo de Aderência Variável (MAV)

Neste item, é apresentado o desenvolvimento das fórmulas e equações que definem o algoritmo para o cálculo do equilíbrio de um elemento de viga de concreto estrutural levando-se em conta a aderência variável entre o aço e o concreto, segundo MARTINS (1989).

O principal problema é levar em consideração a influência da abertura da junta no comportamento do elemento de concreto estrutural e da aderência da armadura que atravessa a junta. O modelo utilizado neste trabalho é oriundo do trabalho de MARTINS (1989).

#### 2.4.4.1 - Princípios Básicos do Modelo de Aderência Variável (MAV)

De acordo com MARTINS & FOURE (1990), considera-se o elemento de concreto estrutural compreendido entre dois segmentos pré-fabricados de comprimento  $l_v$ , separados por uma junta, sujeito a uma força normal constante  $N$  e a um momento fletor constante  $M$ .

Se não há nenhuma descontinuidade devida à junta (a), as seções transversais permanecem planas e suas deformações  $\epsilon$  são lineares. O deslocamento de qualquer ponto com relação a uma seção de referência se traduz por uma rotação sobre o eixo neutro, cuja ordenada é constante ( $\epsilon_c = 0$ ) e que também é a linha de deslocamento longitudinal nulo. (a fibra não varia de comprimento).

Quando a junta estiver aberta (b), por uma razão de simetria, a seção (V) no meio do segmento permanece plana no sentido do deslocamento. Isso não significa necessariamente que as deformações  $\epsilon$  são lineares, a menos que o segmento seja longo o suficiente com relação à altura da abertura da junta.

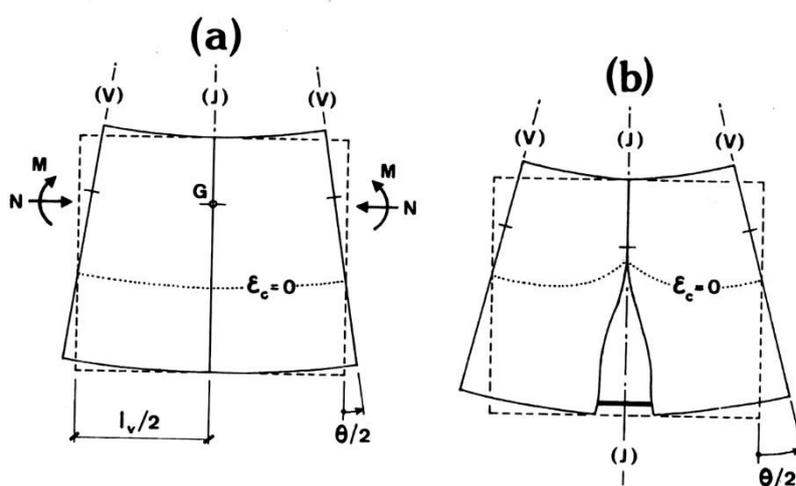


Figura 2.4.8 - Perturbação local das deformações decorrentes da abertura de uma fissura. (Fonte: MARTINS e FOURE, 1990).

Mais uma vez por razão da simetria, a seção (J), que corresponde à parte comprimida da junta e a um ponto da armadura interior equidistante das duas bordas da abertura da junta,

permanece plana. O deslocamento da seção (J) com relação a seção (V) é definido pela rotação  $\theta/2$  sobre o ponto de deslocamento longitudinal nulo, cuja ordenada é  $y_0$ . O ponto de deslocamento nulo não coincide com o eixo neutro, cuja ordenada já não tem mais um valor constante, porque a abertura da junta causa uma perturbação local nas deformações.

Legenda:

- (1)  $\varepsilon_c = 0$  representa a linha de deformação nula
- (2)  $u = 0$  representa a linha de deslocamento nulo

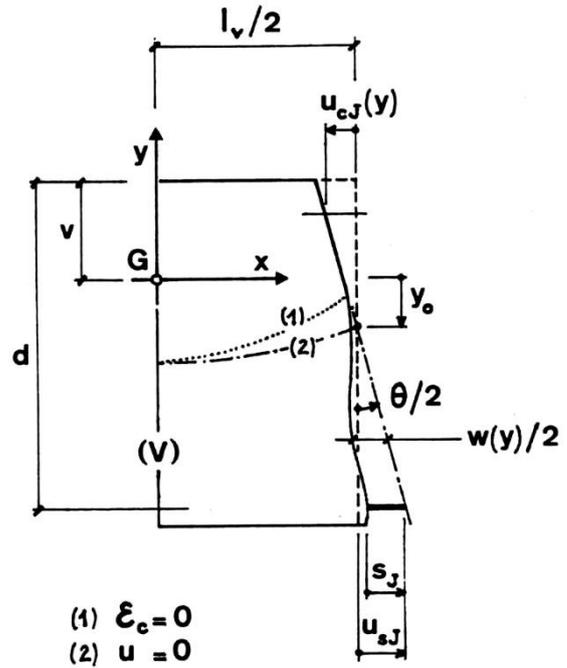


Figura 2.4.9 - Caracterização do deslocamento relativo da seção de junta (J) em relação à seção (V) localizada na metade da distância até a junta seguinte. (Fonte: MARTINS e FOURE, 1990)

O ponto de deslocamento nulo é obtido pela integração ao longo da fibra da ordenada  $y_0$ , entre as seções (V) e (J), região onde a deformação de encurtamento e a deformação de alongamento se compensam. Em geral, o deslocamento longitudinal de qualquer ponto da seção (J) pode ser escrito:

$$u_j(y) = \int_0^{l_v/2} \varepsilon_c(x, y).dx + \frac{1}{2} w.(y) \quad (2.4.17)$$

, em que  $w(y)$  é a abertura da junta na ordenada  $y$  considerada.

Para a ordenada  $y_0$ , o deslocamento  $u_j$  é nulo:

$$u_j(y_0) = 0 \quad (2.4.18)$$

Os deslocamentos das fibras de compressão na seção plana (J) são:

$$u_{cj}(y) = -\frac{\theta}{2}(y - y_0) \quad (2.4.19)$$

Para valores especificados de  $y_0$  e  $\theta$ , a expressão (2.4.19) é uma condição de contorno que permite calcular a deformação de compressão  $\epsilon_{cJ}$  na seção de concreto (J) de acordo com a equação (2.4.17), em que  $w$  é igual a zero.

Na mesma seção (J), o deslocamento da armadura na ordenada  $v - d$  é:

$$u_{sj} = \frac{\theta}{2}(d - v + y_0) \quad (2.4.20)$$

Na mesma ordenada, a diferença no deslocamento entre a armadura e o concreto no nível da junta aberta (Figura 2.4.10) é igual ao deslizamento máximo  $S_j$  da armadura dentro do concreto (para  $x = l_v/2$ ).

$$S_j = u_{sj} - \int_0^{l_v/2} \epsilon_c(x, v-d).dx \quad (2.4.21)$$

,em que  $\epsilon_c(x, v-d)$  é a deformação do concreto no nível da armadura. O deslocamento  $u_{sj}$  e o deslizamento  $S_j$  estão ligados a um aumento na deformação do cabo interno  $\Delta\epsilon_{gj}$  com relação ao estado de pré-deformação  $\epsilon_{sJ}^*$ , que corresponde à deformação zero no concreto, isto é, no início da abertura da junta ( $\epsilon_{sJ}^* = 0$  para uma armadura passiva).

A tensão máxima correspondente na armadura é:

$$\sigma_{sj} = \sigma_{sj}^* + \Delta\sigma_{sj} \quad (2.4.21a)$$

Os valores  $\sigma_{sJ}$  e  $S_j$  constituem as condições de contorno para o estudo da tensão  $\sigma_s(x)$  e do deslizamento  $S(x)$  ao longo da armadura.

Levando-se em consideração a tensão de aderência  $\tau(x)$  que aparece para equilibrar a sobre-tensão  $\Delta\sigma_{sj}$ , após a abertura da junta, tem-se que a sobre-tensão em qualquer abscissa é dada por:

$$\Delta\sigma_s(x) = \Delta\sigma_{sj} - \frac{p_s}{A_s} \int_x^{l_v/2} \tau(x).dx \quad (2.4.22)$$

, em que  $p_s$  e  $A_s$  são o perímetro e a área do aço, respectivamente. O módulo de elasticidade do aço é dado por  $E_s$ . A pré-deformação pode ser considerada constante, independente de  $x$ , para uma viga não muito longa sob um momento fletor constante. Dessa forma, a equação anterior também pode ser escrita em termos de tensões totais  $\sigma_s(x)$  e  $\sigma_{sJ}$ .

A solução  $S(x)$  da Equação 2.4.23 está descrita no item 2.4.3.2.

$$\frac{d^2 S(x)}{dx^2} - \frac{p_s}{E_s A_s} \tau(x) = -\frac{d\varepsilon_c(x, v-d)}{dx} \quad (2.4.23)$$

Cabe lembrar que existe uma relação conhecida entre a tensão de aderência  $\tau(x)$  e o deslizamento  $s(x)$ .

Nessa última equação, a tensão  $\sigma_{cJ}$  (correspondente a deformação  $\varepsilon_{cJ}$ ) e  $\sigma_{sJ}$  devem estar em equilíbrio com as solicitações externas  $N$  e  $M$ .

#### 2.4.4.2 - Tensão de Aderência ( $\tau$ ) versus a Lei de Deslizamento ( $s$ )

Adota-se a lei multilinear Figura 2.4.10) proposta por MARTINS (1989), conforme já apresentado neste trabalho.

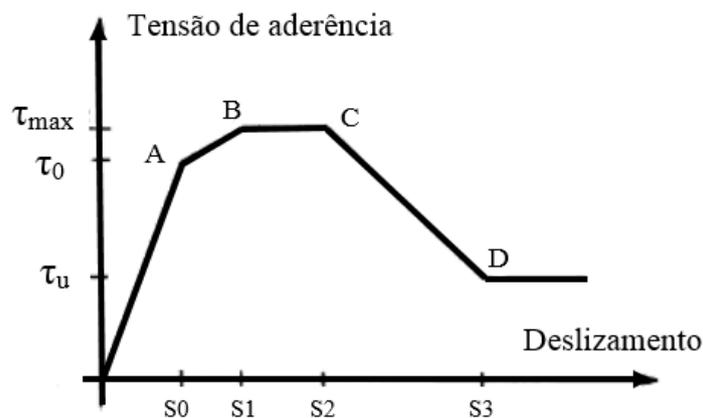


Figura 2.4.10 - Idealização da lei de aderência-deslizamento. (Fonte: MARTINS, 1989)

O uso dessa lei é válida sobre certa distância a partir da seção da junta,  $l_a$ , que é o comprimento de ancoragem para a sobre-tensão da armadura provocada pela abertura da junta. Ressalta-se que para uma distância maior que  $l_a$ , a tensão de aderência  $\tau$  e o deslizamento  $s$  são iguais a zero e que a armadura está sujeita às mesmas variações de deformações  $\Delta\varepsilon$  do concreto que as envolve.

A Figura 2.4.12 mostra esquematicamente a evolução da tensão de aderência  $\tau$  e o deslizamento  $s$  ao longo da armadura para valores crescentes da solicitação, que corresponde a um aumento de valores do comprimento de ancoragem  $l_a$ . Por questão de simetria, o deslizamento precisa ser zero na seção (V) no meio do segmento. Quando  $l_a$  é mais longo do que a metade do comprimento do segmento  $l_v/2$ , o uso da lei ( $\tau$ ,  $s$ ), como descrito acima, leva a uma descontinuidade nos valores de  $\tau$  e  $s$  na seção (V). Fisicamente, deve haver uma pequena zona de transição em torno de (V), em que há uma evolução contínua de  $\tau$  e  $s$ , passando pelo zero em (V). A negligência dessa transição no cálculo não afeta os resultados.

Destaca-se, ainda, que o comportamento mostrado na Figura 2.4.11 depende do pressuposto de que nenhuma fissura ocorra dentro do elemento de concreto estrutural.

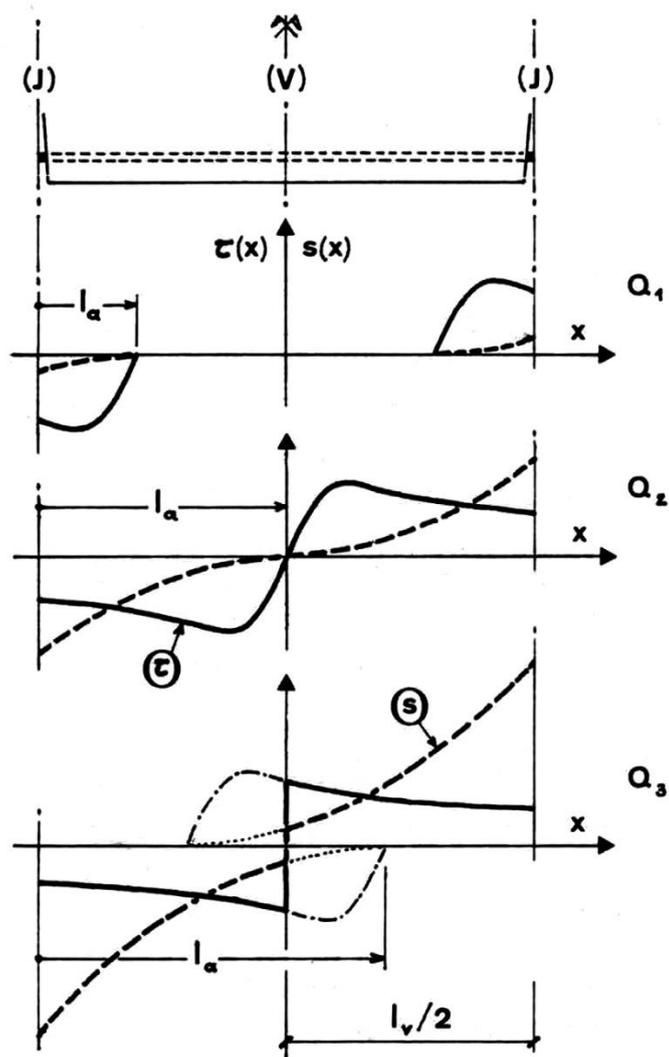


Figura 2.4.11 - Evolução da tensão de aderência e do deslizamento ao longo de uma viga para níveis crescentes de sobre-tensão do cabo interno. (Fonte: MARTINS&FOURE, 1990)

#### 2.4.4.3 - Hipóteses adicionais

As hipóteses adicionais tratam, basicamente, das deformações longitudinais do concreto  $\epsilon_c(x,y)$ , como se pode observar na Figura 2.4.12.

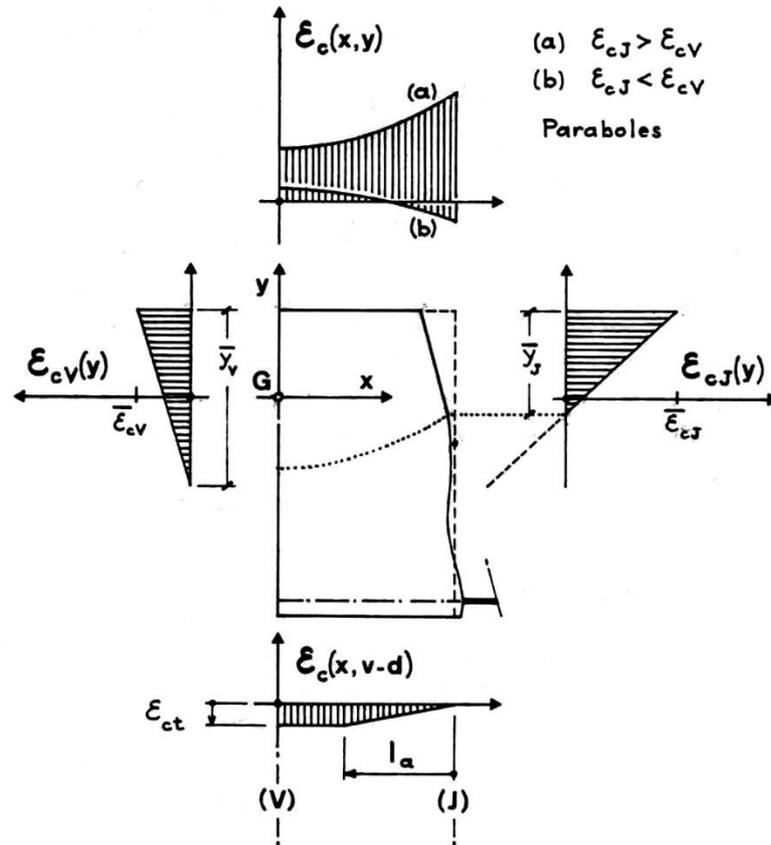


Figura 2.4.12 – Hipóteses adicionais de deformação.  
(Fonte: MARTINS&FOURE, 1990)

Destacam-se, a seguir, alguns pressupostos sobre o estado de deformação do concreto no interior do elemento de concreto estrutural:

- (a) As deformações do concreto comprimido na seção (J) são distribuídas linearmente. Elas são definidas, por exemplo, pela altura  $\bar{y}_j$  da parte comprimida e pelo encurtamento máximo  $\bar{\varepsilon}_{c_j}$ ;
- (b) As deformações do concreto comprimido na seção (V) são distribuídas linearmente, definidas pela altura comprimida  $\bar{y}_v$  e pelo encurtamento máximo  $\bar{\varepsilon}_{c_v}$ . A posição do eixo neutro  $\bar{y}_v$  é calculada de acordo com a hipótese de Navier-Bernoulli aplicada a uma viga feita de um material perfeitamente elástico e resistente à tração;
- (c) Entre as seções (V) e (J), a deformação  $\varepsilon_c(x, y)$  é suposta variar parabolicamente:

$$\varepsilon_c(x, y) = \varepsilon_{c_v}(y) + [\varepsilon_{c_j}(y) - \varepsilon_{c_v}(y)] \cdot \left(\frac{2x}{l_v}\right)^2 \quad (2.4.24)$$

- (d) As deformações  $\varepsilon_{cJ}(y)$  são extrapoladas linearmente no domínio dos alongamentos no trecho até a deformação  $\varepsilon_{ct}$  de ruptura do concreto;
- (e) Uma relação suplementar entre as deformações de compressão nas seções (V) e (J) é obtida assumindo que as áreas limitadas pelos diagramas  $\varepsilon_{cV}(y)$  e  $\varepsilon_{cJ}(y)$  sejam iguais:

$$\frac{1}{2} \overline{\varepsilon_{cv}} \cdot \overline{y_v} = \frac{1}{2} \overline{\varepsilon_{cj}} \cdot \overline{y_j} \quad (2.4.25)$$

- (f) Para calcular a posição do ponto de deslocamento nulo, de acordo com (2.4.18), o termo  $\frac{1}{2} w(y)$  é negligenciado na equação (2.4.17). Isso apenas é verdadeiro para uma viga de concreto estrutural em que esse ponto se situe na parte tracionada e não fissurada do concreto;
- (g) Os alongamentos do concreto no nível do cabo interno,  $\varepsilon_c(x, v - d)$ , variam linearmente ao longo do comprimento de ancoragem  $l_a$ , começando do zero em (J). Além de  $l_a$ , eles têm um valor constante  $\varepsilon_{ct}$ . Para um comportamento perfeitamente linear na tração, tem-se:

$$\varepsilon_{ct} = -\frac{f_{ct}}{E_c} \quad (2.4.25a)$$

,em que  $f_{ct}$  é a resistência à tração e  $E_c$  é o módulo de elasticidade do concreto.

#### 2.4.4.4 - Resolvendo o Problema do MAV

A solução do cálculo do equilíbrio do elemento de concreto estrutural, considerando a variação de aderência entre o aço e o concreto, é apresentada no fluxograma da Figura 2.4.13, cujo desenvolvimento teórico obedece aos passos mostrados a seguir:

- (a) Os esforços solicitantes Esforço Normal e Momento Fletor, N e M, são dados.
- (b) Por sua vez,  $v$  e  $y_v$  são determinados pelo Modelo de Aderência Perfeita (MAP)
- (c) Começa-se com uma primeira estimativa do estado das deformações do concreto comprimido na seção (J):  $\overline{\varepsilon_{cj}}, \overline{y_j}$ .
- (d) Por meio da equação (2.4.25) pode-se calcular  $\overline{\varepsilon_{cv}}$ .

(e) A condição (2.4.18) é descrita de acordo com a equação (2.4.17), em que  $w = 0$ . A expressão de  $\varepsilon_c(x, y)$  para ser integrada é dada por (2.4.24). Com isso, a ordenada do ponto de deslocamento nulo é obtida por:

$$y_0 = \frac{\overline{y_v^2} \cdot (\overline{v} - \overline{y_j}) + 2 \cdot \overline{y_j^2} (\overline{v} - \overline{y_v})}{\overline{y_v^2} + 2\overline{y_j^2}} \quad (2.4.26)$$

(f) A condição (2.4.19) é descrita em outro ponto particular, a fibra extrema  $y = v$ , novamente por meio da integração de (2.4.24). Desse modo, a rotação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\theta = -\frac{2 \cdot \overline{\varepsilon_{cv}} + \overline{\varepsilon_{cj}}}{3(\overline{v} - y_0)} l_v = \frac{(2\overline{\varepsilon_{cv}} + \overline{\varepsilon_{cj}})(\overline{y_v^2} + 2\overline{y_j^2})}{3\overline{y_v} \cdot \overline{y_j} (\overline{y_v} + 2\overline{y_j})} l_v \quad (2.4.27)$$

(g) O deslocamento  $u_{sj}$  é calculado por (2.4.20) e o deslizamento  $s_j$  por (2.4.21). A integração da equação (2.4.23), levando em consideração as condições de contorno, determina a tensão  $\sigma_{sj}$  e o comprimento de ancoragem  $l_a$ .

(h) Pode-se agora calcular os esforços resistentes internos  $M_r$  e  $N_r$ , correspondentes as tensões do concreto comprimido e as armaduras tracionadas na seção (J):

$$N_r = \int_{\overline{v-y_j}}^{\overline{v}} E_c(y) \cdot \varepsilon_{cj}(y) \cdot b(y) \cdot dy + \sum_i E_s(y_{si}) \cdot \varepsilon_{sj,i} \cdot A_{si} \quad (2.4.28)$$

$$M_r = \int_{\overline{v-y_j}}^{\overline{v}} E_c(y) \cdot \varepsilon_{cj}(y) \cdot b(y) \cdot y \cdot dy + \sum_i E_s(y_{si}) \cdot \varepsilon_{sj,i} \cdot y_{si} \cdot A_{si} \quad (2.4.29)$$

, em que  $E_c(y)$  e  $E_c(y_{si})$  são os módulos secantes do concreto e do aço, correspondendo respectivamente as deformações  $\varepsilon_{cj}(y)$  e  $\varepsilon_{sj}(y_{si})$ . Onde  $b(y)$  é a largura da seção na ordenada  $y$ .

(i) Caso não se obtenha o equilíbrio entre os esforços solicitantes externos e os esforços resistentes internos, incrementa-se as variáveis  $\overline{\varepsilon_{cj}} + \Delta\overline{\varepsilon_{cj}}$  e  $\overline{y_j} + \Delta\overline{y_j}$ , e repete-se o processo até atingir-se a o equilíbrio de forças.

**FLUXOGRAMA DO EQUILÍBRIO DO ELEMENTO DE VIGA DE CONCRETO  
ESTRUTURAL SEGUNDO CARPE (MATINS,1989)**

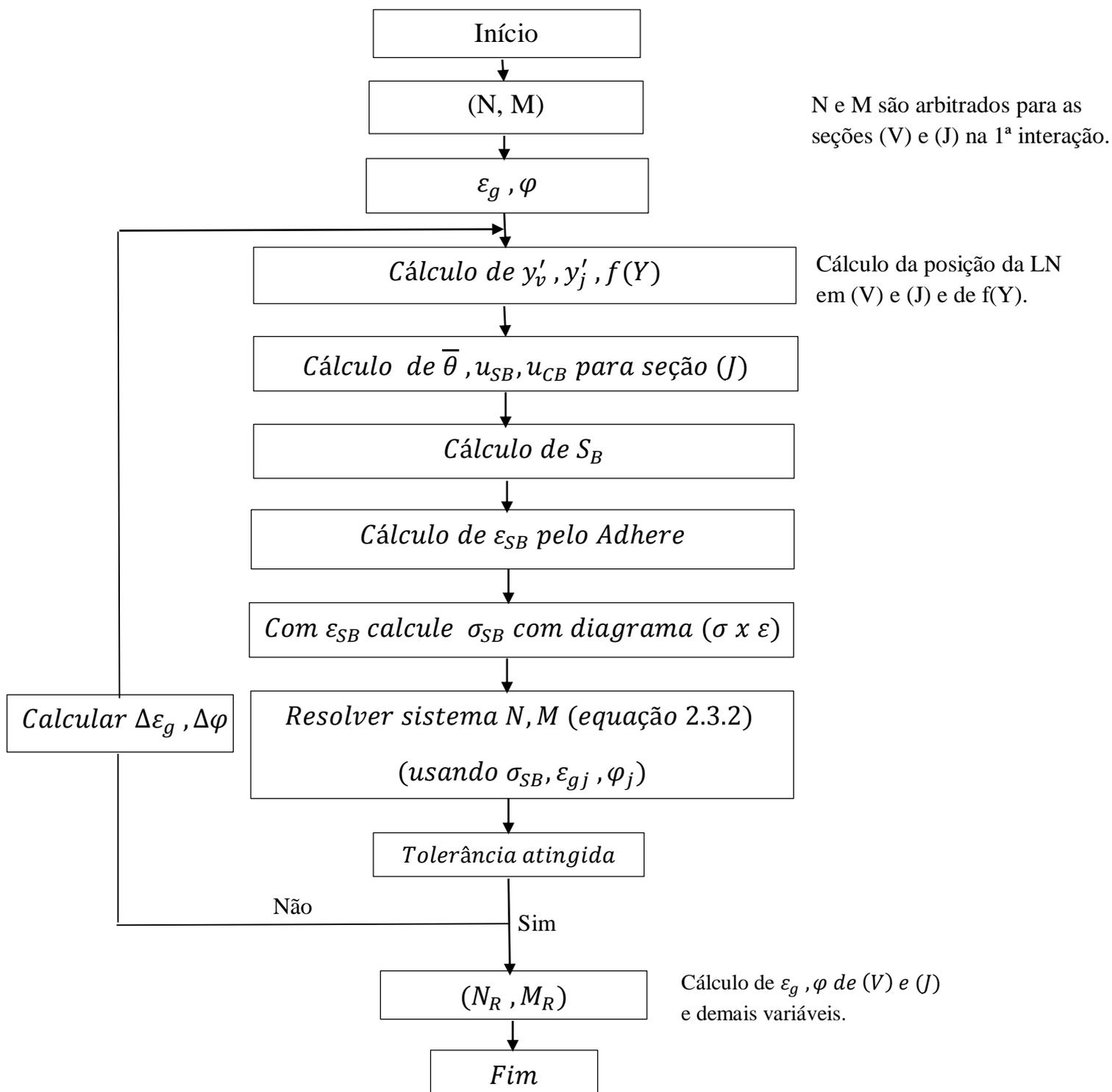


Figura 2.4.13 - Fluxograma de Equilíbrio de Elemento Estrutural (Fonte: MARTINS,1989)

#### 2.4.5 – Correlação entre MAP e MAV

Nos estudos de MARTINS (1989) está demonstrada a correlação entre o Modelo da Aderência Perfeita (MAP), que considera a aderência perfeita aço-concreto, e o Modelo da Aderência Variável (MAV) que leva em conta o deslizamento entre o aço e o concreto.

A teoria clássica da elasticidade não-linear que parte do princípio da aderência perfeita aço-concreto considera dois parâmetros fundamentais:

$\varepsilon_m$  – deformação axial de uma fibra de concreto (em geral o centro de gravidade da seção);  
 $\varphi$  - curvatura da seção.

A lei de variação da deformação numa seção transversal de concreto estrutural em flexão composta reta pelo MAP (Figura 2.4.14) é dada pela Equação 2.4.30 :

$$\varepsilon(y) = \varepsilon_m - \varphi \cdot y \quad (2.4.30)$$

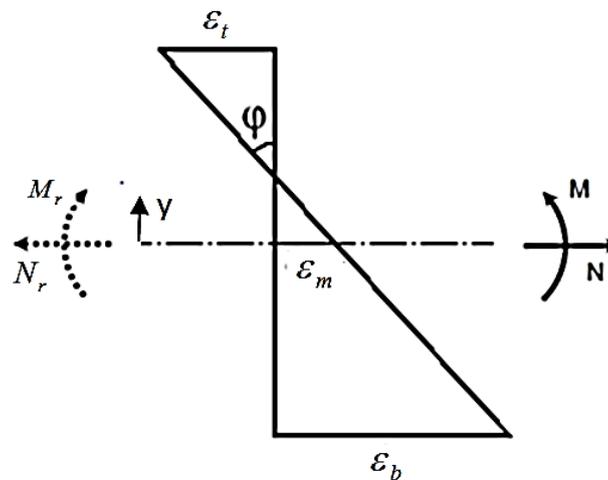


Figura 2.4.14 – Equilíbrio da Seção Transversal

Ressalte-se que a deformação de um elemento de concreto é bastante complexo e depende de vários fatores , cujos principias estão entre os seguintes:

- relação comprimento / altura do elemento
- forma da seção transversal
- tipo de armadura
- lei de aderência aço-concreto

O Modelo da Aderência Variável (MAV), que leva em conta o deslizamento aço-concreto, não se baseia de forma direta nos valores de  $\varepsilon_m$  e  $\varphi$  de uma seção, mas sim em outras grandezas. São elas:

$y_o$  – ordenada do ponto de deslocamento longitudinal nulo

$\theta$  – rotação da seção fissurada em relação a seção mediana do elemento de comprimento  $l_v$

$u_{cb}$  – deslocamento correspondente as fibras de concreto

$u_{sb}$  – deslocamento da barra de aço

Esquemáticamente, a correlação entre os modelos MAV e MAP está apresentada pelos parâmetros mostrados na Figura 2.4.15:

Modelo Aderência Perfeita (MAP)	Correlação	Método Aderência Variável (MAV)
$\varepsilon_m, \varphi$	↔	$y_o, \theta, u_{cb}, u_{sb}$

Figura 2.4.15 – Correlação entre MAV e MAP

Realizou-se, ainda, uma comparação entre MAP e MAV por meio dos critérios da Tabela 2.4.2 mostrada a seguir.

Tabela 2.4 2 – Critérios de comparação entre MAP e MAV.

Critério	MAP	MAV
Problema	Calcular os esforços resistentes (Nr, Mr) da seção transversal de concreto estrutural conhecidos os esforços solicitantes (N, M), considerando a aderência perfeita entre aço e concreto.	Calcular os esforços resistentes (Nr, Mr) da seção transversal de concreto estrutural conhecidos os esforços solicitantes (N, M), considerando a aderência variável entre aço e concreto.
Hipóteses	<ul style="list-style-type: none"> <li>- seção plana permanece plana após deformação</li> <li>- seção gira em torno da linha neutra</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- seção plana permanece plana após rotação</li> <li>- seção gira em torno do ponto de deslocamento nulo</li> <li>- existe relação entre ponto deslocamento nulo e eixo neutro</li> </ul>
Equação a ser resolvida no MAP	$\begin{bmatrix} N - N_r \\ M - M_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int E_t(\varepsilon).dA & - \int E_t(\varepsilon).y.dA \\ - \int E_t(\varepsilon).y.dA & \int E_t(\varepsilon).y^2.dA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{cg} \\ \varphi \end{bmatrix}$	
Equações a serem resolvidas no MAV	$\begin{bmatrix} N - N_r \\ M - M_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int E_t(\varepsilon).dA & - \int E_t(\varepsilon).y.dA \\ - \int E_t(\varepsilon).y.dA & \int E_t(\varepsilon).y^2.dA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{cg} \\ \varphi \end{bmatrix}$ <p style="text-align: center;">e</p> $\frac{d^2s(x)}{dx^2} - \frac{4}{\phi.E_s} .\tau_s(x) = - \frac{d\varepsilon_c(x)}{dx}$	

### 3 – METODOLOGIA DE DESENVOLVIMENTO DO CARPE2

A metodologia de desenvolvimento do programa CARPE2 teve como ponto de partida o trabalho de MARTINS (1989) que deu origem ao programa conhecido por CARPE. As características de desenvolvimento, linguagens de programação, modos de entrada e saídas de dados, objetivos, finalidades e aplicações de ambos os programas, CARPE e CARPE2, são apresentados abaixo.

Do trabalho de MARTINS (1989), CARPE significa “**C**alcul jusqu’à la **R**upture de Poutres à **P**recontrainte **E**xtérieur ou Mixte.

#### 3.1 – Descrição do Programa CARPE

Como CARPE2, objetivo deste trabalho, é extraído de CARPE, desenvolvido por MARTINS (1989), damos, a seguir, uma breve descrição do segundo.

##### (a) Linguagem de Programação

O CARPE, desenvolvido na linguagem FORTRAN, é um programa que permite a análise do comportamento de vigas até a sua ruptura quando submetidas a um carregamento incremental. Quanto ao tipo, as vigas podem isostáticas ou contínuas, com protensão interna, externa ou mista.

##### (b) Entrada e Saída de Dados

A entrada de dados do programa é realizada via arquivo de dados cujas unidades básicas são: metros para comprimento, MPa para tensões e módulo de elasticidade e MN para forças aplicadas.

```
*****
*          PROGRAMA DE ANALISE NAO-LINEAR DE VIGAS CONTINUAS          *
*          MONOLITICAS OU COM ADUELAS PRE-FABRCADAS                  *
*          EN CONCRETO PROTENDIDO COM CABLAGEM INTERNA E/OU EXTERNA   *
*****
DE O ARQUIVO DE DADOS          ==>
```

Figura 3.1.1 - Tela de entrada de dados do programa CARPE

A saída de dados é realizada tanto na tela do computador como por arquivo de dados. Os resultados são fornecidos em metros (comprimento), MPa (tensão) e kN (força). A partir do arquivo de saída, pode-se utilizar outro programa para representar graficamente os resultados do CARPE, por exemplo, o Excel.

No final do processamento, o CARPE apresenta na tela do computador, no formato DOS, as opções de saídas das tabelas para a criação das curvas a serem analisadas pelo usuário em algum outro programa que possua interface gráfica, por exemplo, o Excel.

```
* SAIDA DAS TABELAS PARA AS CURVAS *

1 : CARGA X FLECHA          2 : CARGA X MOMENTO TOT.
3 : CARGA X ABERTURA JUNTA  4 : CARGA X ALTURA JUNTA
5 : CARGA X DEFORMACAO CONCR. 6 : CARGA X DEFORMACAO ACO
7 : CARGA X TENSAO CONCRETO  8 : CARGA X TENSAO DO ACO
9 : CARGA X DESLIZAMENTO     10 : CARGA X UARIACAO DE TENSAO
11 : MOMEN. X ROTACAO        12 : CARGA X MOM. CARGA APPL.
13 : CARGA X FORCA CABO      14 : CARGA X PROTENSAO EXT.
15 : SAIDA GERAL             16 : TERMINA A SESSAO

ESCOLHE UN NUMERO : >
```

Figura 3.1.2 - Tela de opções de saída de dados do programa CARPE

### (c) Considerações Gerais

De forma geral, o programa CARPE possibilita os seguintes estudos:

- A variação da rigidez com o carregamento
- A evolução das tensões nos cabos externos
- A evolução dos deslizamentos dos cabos externos sobre os desviadores
- A influência da variação da excentricidade dos cabos externos
- Os deslocamentos globais das vigas: flechas e rotações
- A fissuração do concreto
- As deformações das seções de concreto
- As deformações das armaduras passivas e/ou ativas
- O comportamento das deformações dos cabos de protensão externa

O CARPE leva em consideração a variação de tensão e excentricidade dos cabos externos; os deslizamentos desses cabos sobre os desviadores; a variação de rigidez devidas à fissuração e à interação momento fletor-esforço axial ; a rigidez à tração do concreto (tension stiffening); leis não-lineares de tensão-deformação para o concreto e o aço.

As seções de discretização das vigas são verticais e simétricas em relação a um eixo OY como mostra a figura abaixo. Pode-se analisar qualquer seção de contorno poligonal, inclusive seções vazadas.

As seções transversais são decompostas em trapézios de concreto enquanto as armaduras são representadas por áreas concentradas no centro de gravidade das barras. A geometria assim definida permite considerar as não-linearidades físicas dos materiais.

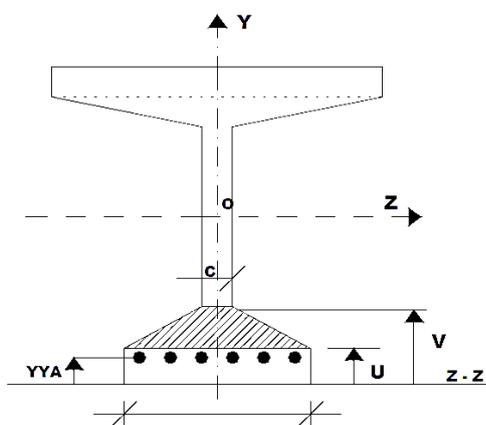


Figura 3.1.3 - Discretização da seção da viga

No estado atual do programa CARPE, é possível estudar vigas com protensão interna com cabos retos e/ou com protensão externa aplicada com cabos poligonais. Não há limitação em relação ao número de pares de cabos a usar. Não há um cálculo automático das perdas de protensão. Porém é possível considerá-las com a redução das tensões dos trechos do cabo no momento de definir a cablagem.

São permitidas cargas concentradas, cargas distribuídas uniformemente ou não, todas elas verticais. Estas cargas são agrupadas em permanentes e variáveis. As cargas permanentes são processadas no início enquanto que as cargas variáveis são definidas por um processo incremental.

O programa permite definir o nível de carga até a ruptura da viga. Para cada incremento de solitação deve-se avaliar o incremento de deformações. Para facilitar o cálculo não-linear, a seção é dividida em camadas horizontais de concreto e aço. (Figura 3.1.4).

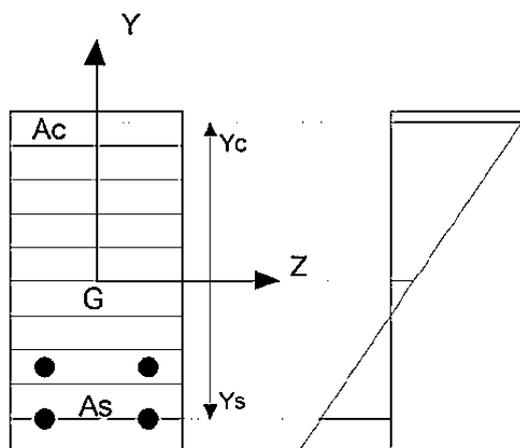


Figura 3.1.4 - Divisão das seções de aço e concreto.

Após verificar o equilíbrio de todas as seções para uma etapa de carga, realiza-se um estudo global que permite estudar a interação entre a viga, o concreto e os cabos de protensão. Deve-se considerar para o cabo de protensão, as não-linearidades geométricas decorrentes da deflexão das vigas. Também são analisados os possíveis deslizamentos do cabo sobre os desviadores.

#### (d) Métodos de Cálculo do CARPE

O programa CARPE de MARTINS (1989) utilizou para o cálculo das expressões de comprimento, deformação e deslizamento oriundas da Equação Diferencial de Aderência, diversos métodos matemáticos clássicos da literatura. Entre eles foram utilizadas algumas rotinas do livro “Numerical Recipes” de WILLIAM H. PRESS (1997), tais como: ZBRAC, ZBRAK, ZBRENT, ZROOTS e LAGUER.

De forma geral, esses métodos são utilizados para resolver as equações 2.4.10 a 2.4.15 relativos ao problema de aderência.

### 3.2 – Descrição do Programa CARPE2

#### (a) Linguagem de programação

O programa CARPE2 foi desenvolvido na linguagem MATLAB e tem como objetivo realizar a análise do elemento de concreto estrutural, compreendido entre duas fissuras consecutivas, considerando a degradação de aderência entre o aço e o concreto.

O software desenvolvido permite a comparação entre o Modelo da Aderência Perfeita (MAP) e o Modelo da Aderência Variável (MAV), para um mesmo elemento de viga, servindo de predictor para ensaios e análise de comportamento de peças de concreto estrutural submetidos a esforços de flexo-compressão reta.

#### (b) Entrada e saída de dados

A entrada de dados é realizada diretamente no ambiente do MATLAB. A saída de dados pode ser realizada via arquivo de texto como na própria tela do programa em forma de tabelas ou em forma de gráficos. Exemplos de diagramas gerados pelo CARPE2 para o Modelo de Aderência Perfeita (MAP), estão ilustrados a seguir:

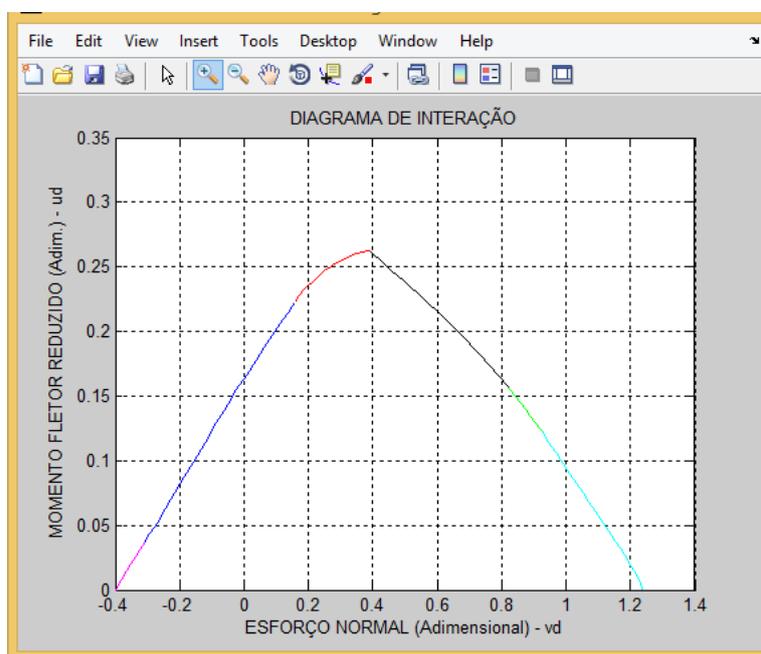


Figura 3.2.1 – Diagrama de interação momento- esforço normal

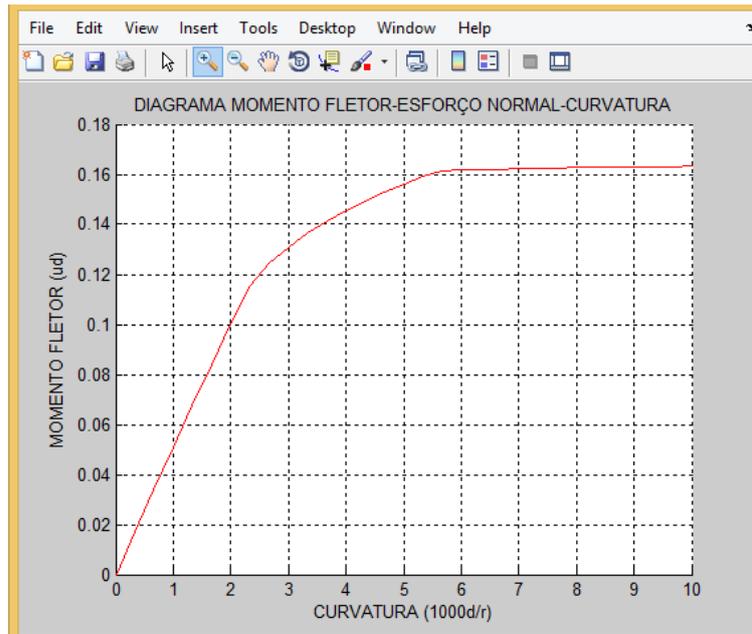


Figura 3.2.2– Diagrama momento - curvatura conhecendo-se o valor do esforço normal

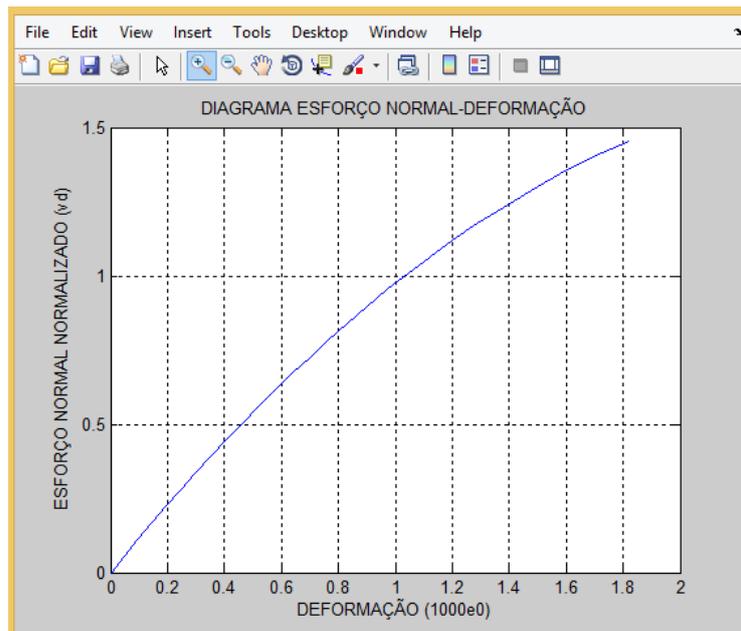


Figura 3.2.3– Diagrama esforço normal – deformação normal para carga variável com excentricidade fixa

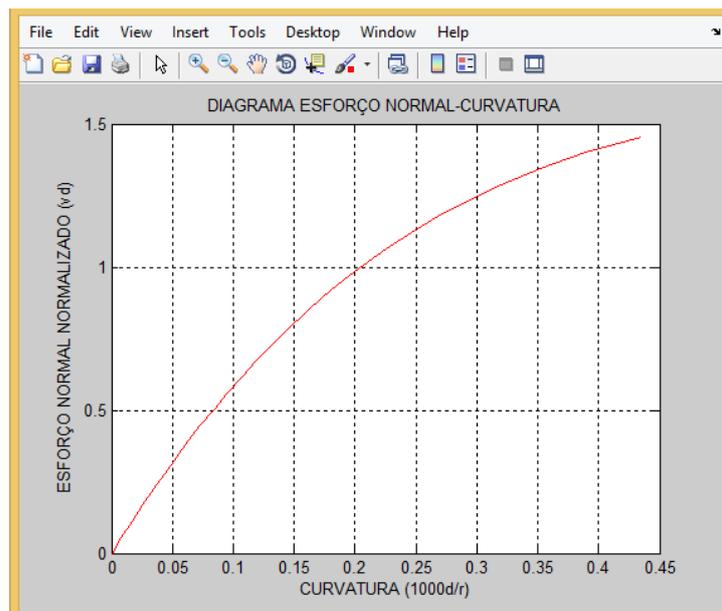


Figura 3.2.4 – Diagrama esforço normal – curvatura para carga variável com excentricidade fixa

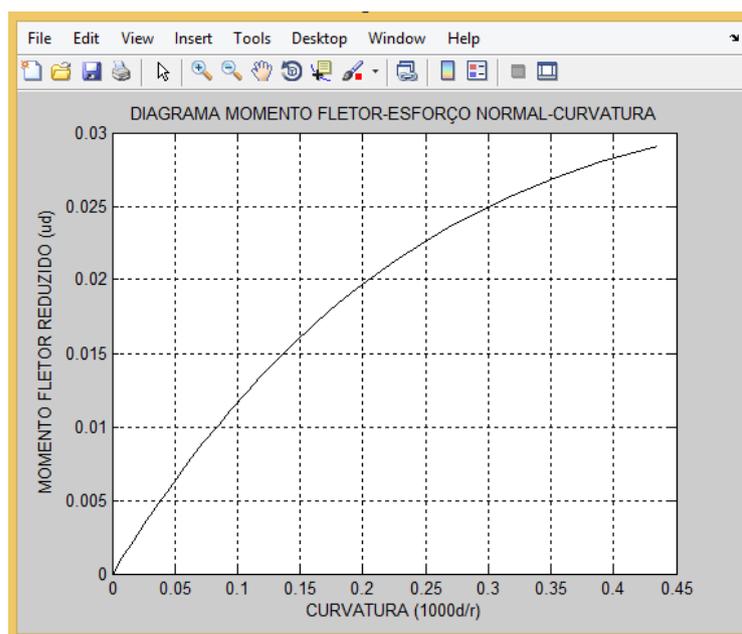


Figura 3.2.5 – Diagrama momento - curvatura para carga variável com excentricidade fixa

### (c) Limitações

O programa CARPE2 apresenta algumas restrições de cálculo. Ele foi desenvolvido para cálculo de seções retangulares com armadura simétrica. Porém, ele pode ser facilmente modificado para atender a outros tipos de seções transversais, inclusive vazadas. Como, também, utilizar outros tipos de leis de tensão x deformação para aço e concreto.

(d) Uso atual

O CARPE2 apresenta diagramas tanto para o Modelo de Aderência Perfeita (MAP) como para o Modelo de Aderência Variável (MAV), tendo em vista as limitações mencionadas em (c), acima.

(e) Métodos de cálculo do CARPE 2

O programa CARPE2, para obtenção do Diagrama de Iteração Esforço Normal x Momento Fletor, Diagrama Esforço Normal x Deformação, Diagrama Esforço Normal x Curvatura e Diagrama Momento Fletor x Curvatura, utiliza vários métodos matemáticos, dentre eles, destacam-se:

- Método de Newton-Raphson para obtenção de raiz de Função Não-Linear
- Método de Newton-Raphson para Sistemas de Equações Não-Lineares
- Método do Ponto Médio - Integração Numérica

(f) Considerações gerais

Um ponto importante na comparação dos dois programas CARPE e CARPE2 são seus objetivos de emprego:

- O CARPE realiza um estudo mais abrangente sobre o comportamento das vigas de concreto estrutural.
- O CARPE2 analisa apenas um elemento de concreto estrutural compreendido entre duas fissuras.
- O CARPE2 visa complementar os estudos e análises do CARPE.

## 4 – VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS DE CARPE2

### 4.1 – PROGRAMA CARPE2 E ÁBACOS DE PFEIL E DE VENTURINI (Aderência Perfeita)

Para validação do programa CARPE2, foram realizados vários testes numéricos, comparando-se os resultados do programa com dados clássicos disponíveis na literatura. Com relação ao Modelo de Aderência Perfeita (MAP), o programa CARPE2 comparou seus resultados com aqueles constantes dos Ábacos de PFEIL (1976) e de VENTURINI (1987) para os quais se obteve muito boa correlação. Os resultados do programa CARPE2 ainda foram comparados com os gráficos e diagramas oriundos do estudo de PRAZERES (2002).

Com o programa CARPE2 desenvolvido na plataforma MATLAB, é possível gerar as ferramentas necessárias para a análise de uma seção de concreto estrutural, das quais podem se destacar: o Diagrama Esforço Normal x Deformação, o Diagrama Esforço Normal x Curvatura, os Diagramas Momento Fletor x Esforço Normal x Curvatura e o Diagrama de Interação Esforço Normal x Momento Fletor.

Para os exemplos abaixo, empregam-se como relação constitutiva para o concreto e o aço, respectivamente, o diagrama parábola-retângulo e o diagrama bilinear para o aço tipo A, de acordo com a NBR 6118:2014.

Para realizar a comparação de resultados entre os ábacos de PFEIL, VENTURINI e CARPE2, foi proposto o seguinte problema:

Obter o momento fletor normalizado adimensional, sabendo-se que a seção retangular de concreto (20 x 50 cm) está submetida a um esforço normal adimensional igual a  $v = 0,4$ . A resistência do concreto é de 20MPa, o aço empregado é o CA-50A, a taxa mecânica de armadura é igual  $w = 0,4$ . A seção de concreto armado possui duas camadas de aço distribuídas simetricamente.

(a) Comparação de resultados entre PFEIL, VENTURINI e CARPE2

Abaixo, está apresentada a solução proposta pelo ábaco de PFEIL. (Figura 4.1.1)

Na apresentação dos resultados, utilizam-se os valores normalizados adimensionais  $v$  e  $\mu$  do esforço normal (Nd) e momento fletor (Md) de projeto, respectivamente. (PFEIL,1976)

$$v = \frac{N_d}{f_c \cdot b \cdot h} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{M_d}{f_c \cdot b \cdot h^2} \quad (4.1)$$

onde:

$f_c$  é a resistência a compressão de projeto do concreto,

$f_s$  é a resistência do aço,  $b$  é base e  $h$  a altura da seção transversal retangular.

A quantidade total de armadura é expressa em função da taxa mecânica  $\omega$ :

$$A_s = \omega \cdot b \cdot h \cdot \frac{f_c}{f_s} \quad \text{e} \quad f_c = 0,85 \cdot f_{cd} \quad \text{e} \quad f_{cd} = \frac{f_{ck}}{1,4} \quad \text{e} \quad f_s = \frac{f_{yk}}{1,15} \quad (4.2 \text{ a b c d})$$

Com base no enunciado do problema, os dados de entrada para o ábaco de PFEIL são  $\omega = 0,4$  e  $v = 0,4$  e relação  $d'/h = 0,04$ . Para os quais se obteve para o momento fletor adimensional valor igual a  $\mu = 0,29$ .

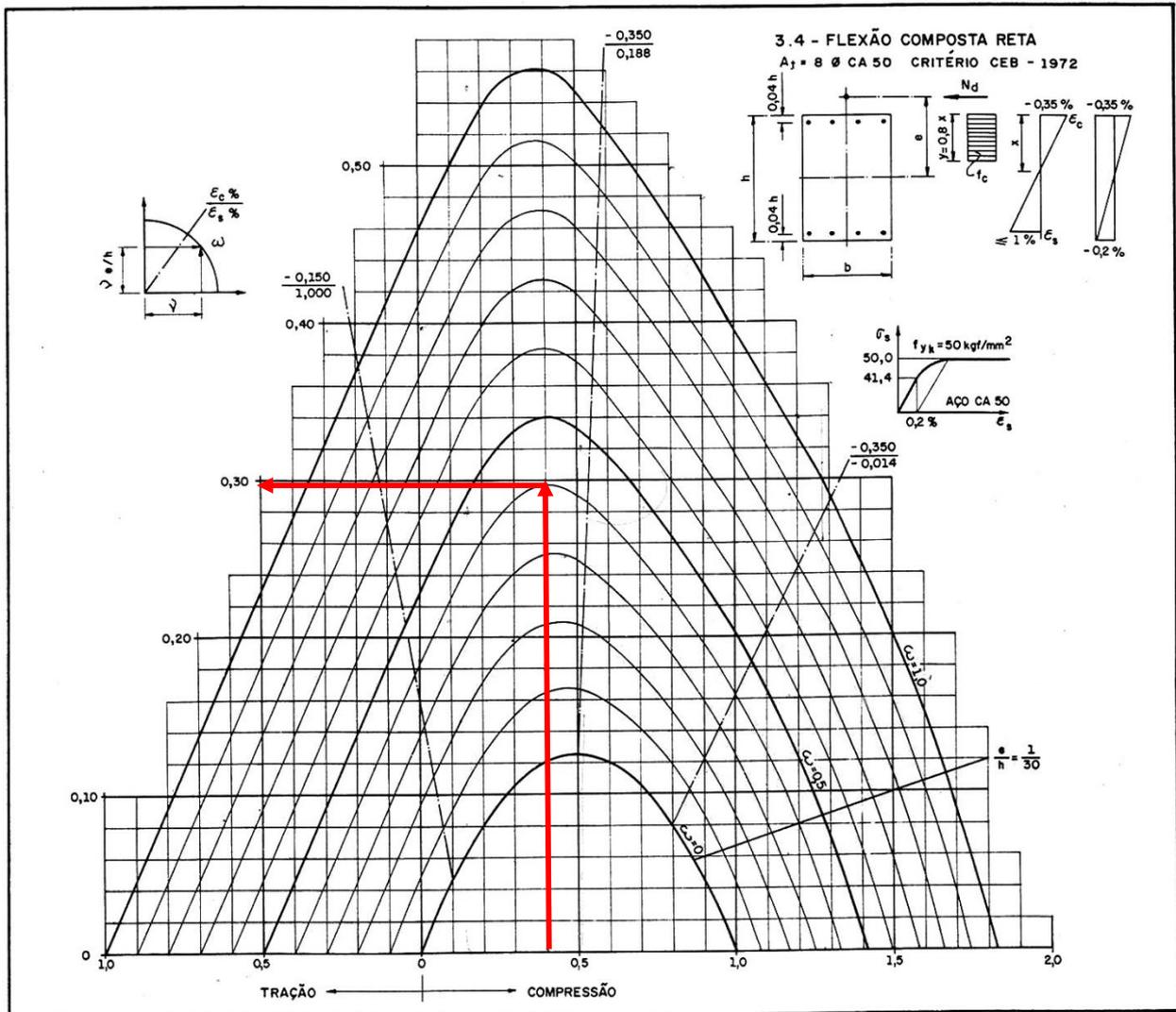


Figura 4.1.1 - Ábaco de PFEIL (1976)

A seguir, está apresentada a solução proposta pelo ábaco de VENTURINI (1987). (Figura 4.1.2)

Na apresentação dos resultados, utilizam-se os valores normalizados adimensionais  $v$  e  $\mu$  do esforço normal ( $N_d$ ) e momento fletor ( $M_d$ ) de projeto, respectivamente.

$$v = \frac{N_d}{f_{cd} \cdot b \cdot h} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{M_d}{f_{cd} \cdot b \cdot h^2} \quad (4.3 \text{ a b})$$

Onde:

$f_{cd}$  é a resistência a compressão de projeto do concreto,

$f_{yd}$  é a resistência do aço,  $b$  é base e  $h$  a altura da seção transversal retangular.

A quantidade total de armadura é expressa em função da taxa mecânica  $\omega$ :

$$A_s = \omega \cdot b \cdot h \cdot \frac{f_{cd}}{f_{yd}} \quad \text{e} \quad f_{cd} = \frac{f_{ck}}{1,4} \quad \text{e} \quad f_{yd} = \frac{f_{yk}}{1,15} \quad (4.4 \text{ a b c})$$

Com base no enunciado do problema, os dados de entrada para o ábaco de VENTURINI são  $\omega = 0,4$  e  $v = 0,4$  e relação  $d'/h = 0,1$ . Para os quais se obteve para o momento fletor adimensional valor igual a  $\mu = 0,26$ .

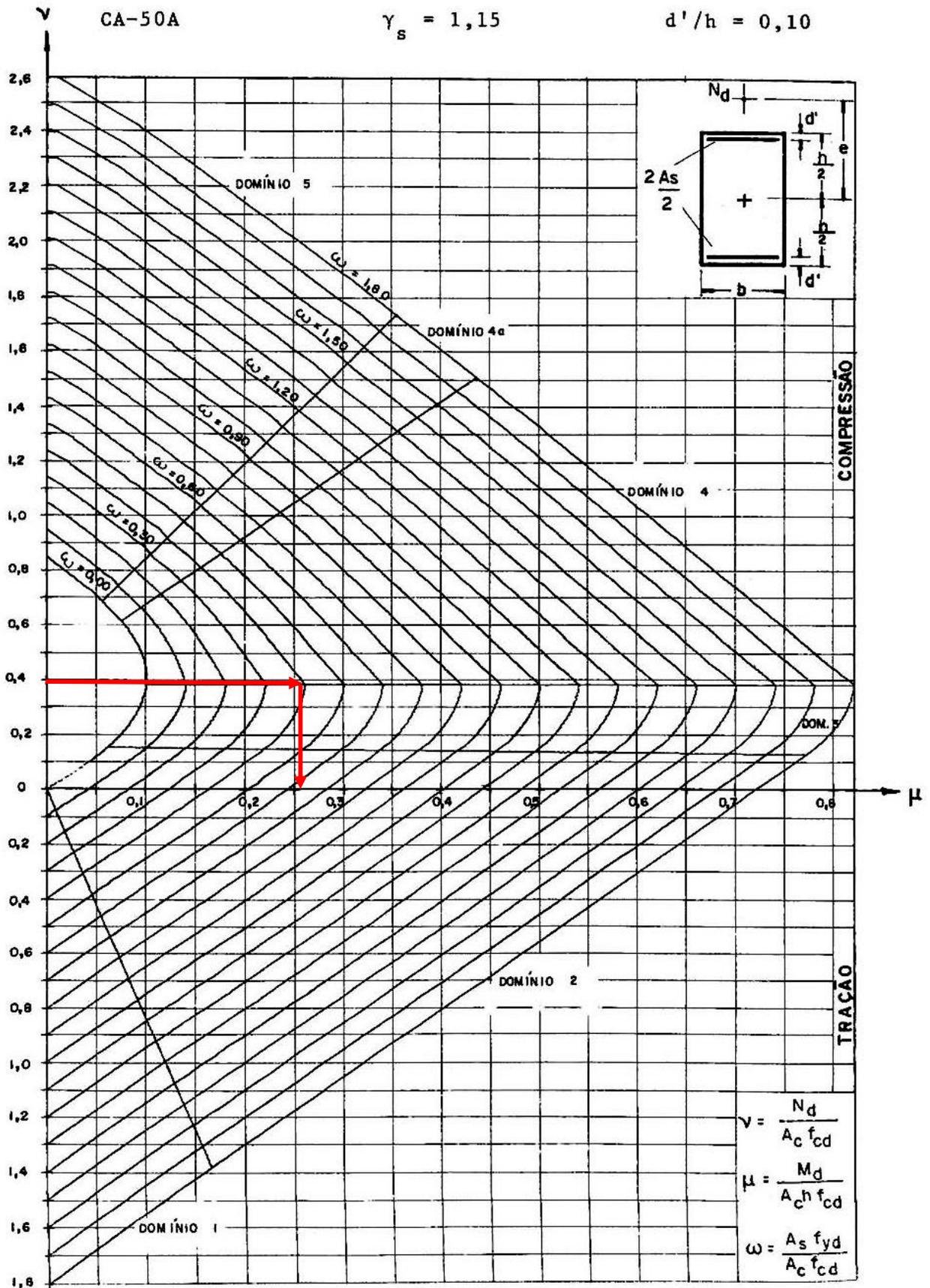


Figura 4.1.2 - Ábaco de VENTURINI (1987)

Com base no enunciado do problema, os dados de entrada para o programa CARPE2 são  $\omega = 0,4$  e  $\nu = 0,4$  e relação  $d'/h = 0,04$ . Para os quais se obteve para o momento fletor adimensional valor igual a  $\mu = 0,287$ . (Figura 4.1.3).

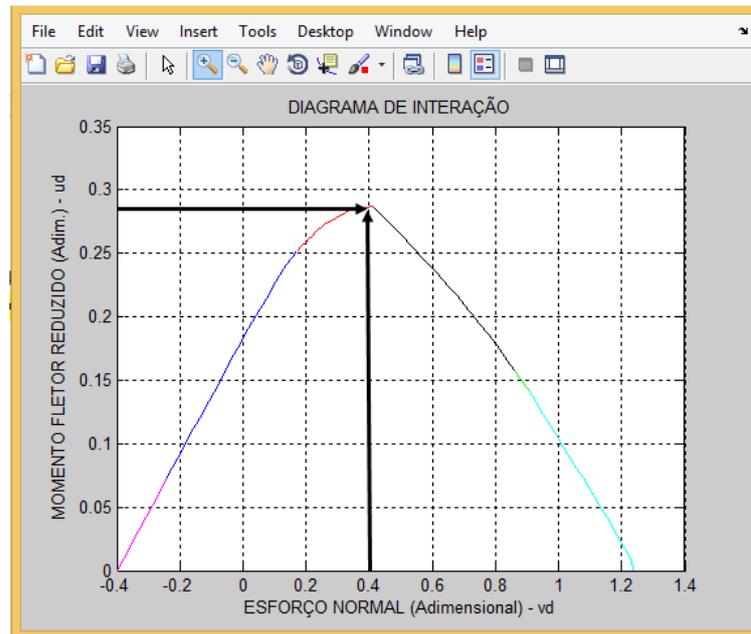


Figura 4.1.3 - Diagramas Momento x Normal gerado pelo programa CARPE2

Com base no enunciado do problema, os dados de entrada para o programa CARPE2 são  $\omega = 0,4$  e  $\nu = 0,4$  e relação  $d'/h = 0,1$ . Para os quais se obteve para o momento fletor adimensional valor igual a  $\mu = 0,263$ . (Figura 4.1.4)

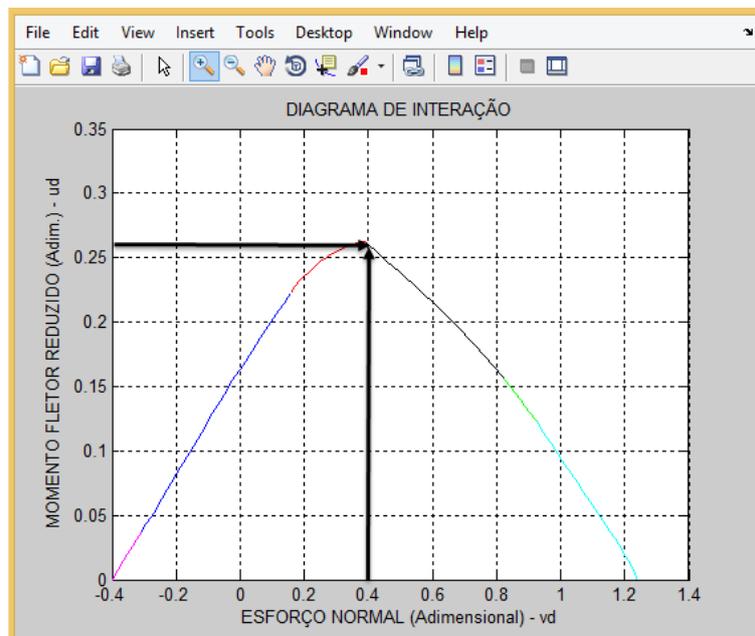


Figura 4.1.4 - Diagramas Momento x Normal gerado pelo programa CARPE2

A Tabela 4.1.1 mostra a comparação de resultados obtidos por PFEIL, VENTURINI e CARPE2.

Tabela 4.1. 1– Comparação entre resultados de PFEIL, VENTURINI e CARPE2

Ábacos	PFEIL	CARPE2	VENTURINI	CARPE2
Relação $d'/h$	0,1		0,04	
$\omega$ (taxa armadura)	0,4	0,4	0,4	0,4
$v$ (esforço normal)	0,4	0,4	0,4	0,4
$\mu$ (momento fletor)	0,29	0,287	0,26	0,263

Na comparação entre PFEIL e CARPE2, verificou-se uma diferença em torno de 1% entre os valores de seus momentos fletores adimensionais.

Na comparação entre VENTURINI e CARPE2, verificou-se, também, uma diferença em torno de 1% entre os valores de seus momentos fletores adimensionais.

(b) Comparação de resultados entre PRAZERES (2002) e CARPE2

Ainda para validação do CARPE2, foram realizadas comparações com os gráficos e diagramas apresentados nos estudos elaborados por PRAZERES (2002) para os quais se obteve perfeita correlação.

Os diagramas momento x curvatura obtidos, tanto para PRAZERES (2002) como para CARPE2, referem-se a uma seção retangular de concreto armado com resistência de 20MPa, aço CA-50A, taxa mecânica de armadura  $w = 0,2435$ , a qual equivale a taxa de armadura de 0,8% e  $d'/h = 0,05$ , com número de pontos de integração igual a 40. Os diagramas momento-curvatura foram gerados para diversos valores de  $v$  (variando de 0,0 a 1,0). Para a integração numérica, foi utilizado o método do Ponto Médio.

A seguir, são apresentados os diagramas gerados por PRAZERES (2002).

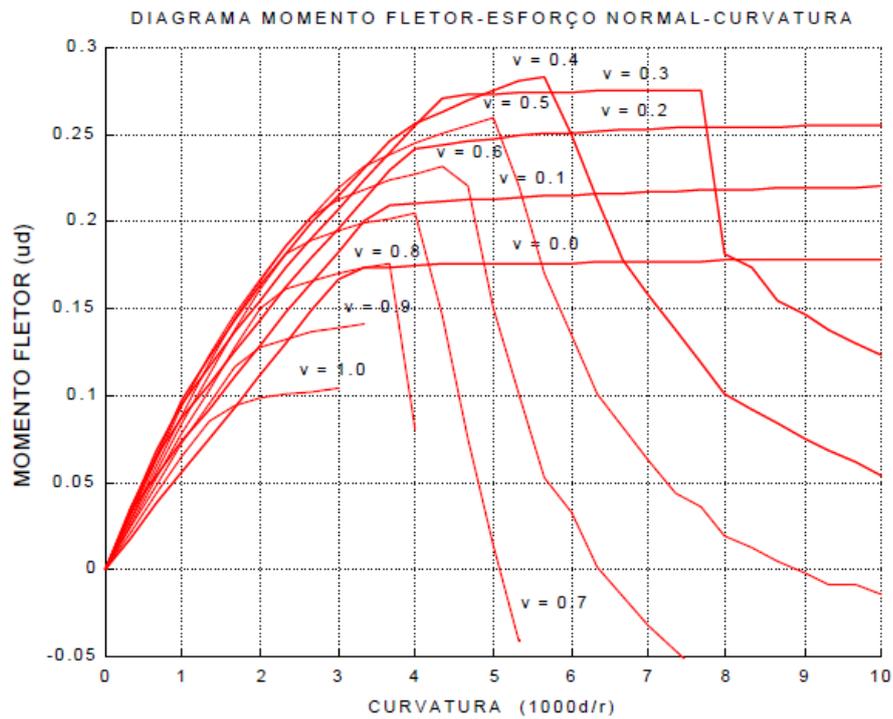


Figura 4.1.5 – Diagramas Momento x Curvatura (Fonte: PRAZERES, 2002)

Abaixo, são mostrados os diagramas gerados por CARPE2.

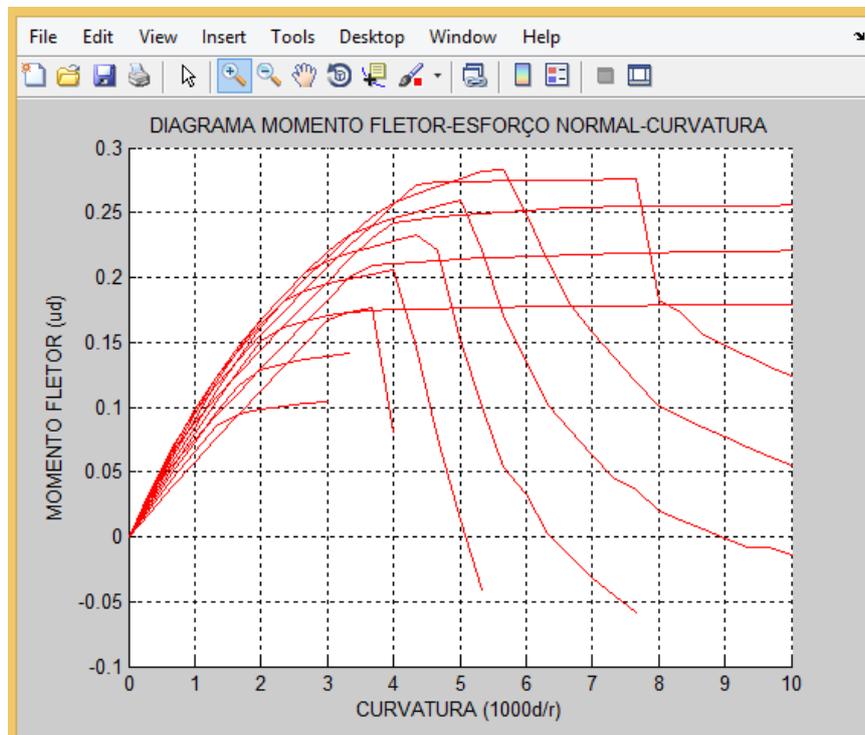


Figura 4.1.6 – Diagramas Momento x Curvatura gerados pelo CAPRE2

Na comparação entre os diagramas gerados por PRAZERES (2002) e CARPE2, observa-se que as curvas geradas em ambos diagramas apresentaram perfeita correlação.

#### **4.2 – PROGRAMA CARPE2 E PROGRAMA MOCURO (Aderência Variável)**

O presente capítulo tem por finalidade realizar a comparação dos resultados obtidos pelo programa CARPE2, baseado nos estudos de MARTINS (1989), com os resultados apresentados pelo programa MOCURO, desenvolvido por COHN e RIVA (1987).

Destaca-se que o programa CARPE2 obtém o equilíbrio do elemento de concreto estrutural, tanto para o Modelo de Aderência Perfeita (MAP) como para o Modelo de Aderência Variável (MAV).

Por sua vez, o programa MOCURO, criado por COHN & RIVA (1987), apresenta apenas resultados para o caso do Modelo de Aderência Variável (MAV).

Ressalta-se, ainda, que não se obteve acesso ao código fonte nem ao programa executável do software MOCURO, têm-se apenas os seus resultados publicados nos estudos de COHN & RIVA (1987).

A seguir, são apresentadas algumas características relativas ao Programa CARPE2 e o Programa MOCURO.

##### **4.2.1 – Programa CARPE2 - Modelo de MARTINS (Aderência Variável)**

Com relação ao Modelo de Aderência Variável (MAV), o embasamento teórico para o desenvolvimento do programa CARPE2 encontra-se nos estudos de MARTINS (1989).

O programa CARPE2, desenvolvido na linguagem MATLAB, permite a comparação entre o Modelo da Aderência Perfeita (MAP) e o Modelo da Aderência Variável (MAV), para um mesmo elemento de viga, servindo de previsor para ensaios e análise de comportamento de peças de concreto estrutural submetidos a esforços de flexo-compressão reta.

Entre os métodos matemáticos utilizados no seu desenvolvimento, destacam-se:

- Newton-Raphson para raiz de equação escalar
- Newton-Raphson para sistema de equações não-lineares
- Método do Ponto Médio (integração numérica para cálculo de tensões normais) – BURDEN (1993)

- Métodos para obtenção de raiz de polinômios (ZBRAC , ZBRAK, ZBRENT, ZROOTS, LAGUER) – adaptação das rotinas de WILLIAM (1996).
- Utilização do subprograma ADHERE que faz parte do programa CARPE original.

Para a resolução da Equação Diferencial de Aderência (EDA – 2.4.10), o programa CARPE2 realizou algumas adaptações no subprograma ADHERE que faz parte do programa CARPE original. O subprograma ADHERE adaptado, que foi elaborado em FORTRAN, agora trabalha integrado ao ambiente MATLAB do programa CARPE2.

$$\frac{d^2S(x)}{dx^2} - \frac{4}{E_s \cdot \phi} \cdot \tau(x) = \frac{\epsilon_{ct}}{l_a} \quad (4.5)$$

Assim, a partir da equação (2.4.10), e para um  $\tau$  conhecido, o subprograma ADHERE calcula as grandezas mostradas abaixo, conforme demonstrado no item 2.4.3.2:

- Deformação do aço  $\epsilon_{SB}$
- Comprimento de ancoragem  $l_a$
- Comprimento de aderência  $l_0, l_1, l_2, l_3$  que varia conforme a zona de deslizamento

#### 4.2.2 – Programa MOCURO - Modelo de COHN E RIVA (Aderência Variável)

Os pesquisadores, COHN & RIVA (1987), criadores do programa MOCURO, baseados nos estudos de GIURIANI (1982), desenvolveram uma formulação geral para o comportamento a flexão de elementos de concreto armado, protendido e parcialmente protendido que leva em conta os princípios do Modelo de Aderência Variável (MAV). Neste modelo, a lei constitutiva do momento x curvatura local é determinada a partir do estudo de um elemento de concreto estrutural que possui o mesmo comprimento do espaçamento ( $l_c$ ) de duas fissuras consecutivas, assumindo ainda ser constante o momento ao longo deste elemento. A curvatura local é definida como a taxa entre a rotação relativa de duas seções (A e B da figura abaixo) e o espaçamento das duas fissuras ( $l_c$ ).

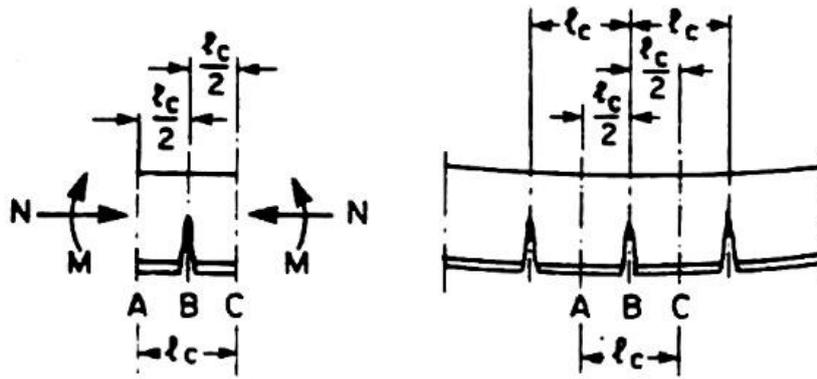


Figura 4.2.1 - Elemento de concreto estrutural estudado por COHN & RIVA (1987)

O programa MOCURO (MOmento CURvatura ROtação) foi desenvolvido para verificar as condições de resposta das seções de concreto em todos os estados de carga. Qualquer seção de concreto simétrica com até quinze camadas de aço carbono e / ou protendido, tanto sob momento positivo ou negativo, pode ser analisado. O programa aceita qualquer lei constitutiva de material tanto experimental como analítico.

COHN e RIVA (1987) utilizaram a tabela apresentada abaixo como dados de entrada para o programa MOCURO. Esta mesma tabela será utilizada para o emprego do CARPE2 nas condições destacadas em vermelho. A comparação será feita para os casos iluminados em amarelo.

$f'_c = 40 \text{ MPa}$ $f_{sy} = 400 \text{ MPa}$ $f_{pu} = 1860 \text{ MPa}$ $f_{pe} = 1116 \text{ MPa} (\bar{K}=1)$				SECTION A						SECTION C						SECTION F							
MODEL	$\omega'_s / \omega_s$	$b/b_\omega$	$\gamma$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30		
COHN RIVA	0.0	1.0	0.0							●	●	●	●	●	●								
		1.5	0.0							●	●	●	●	●	●								
		2.0	0.0								●	●	●	●	●	●							
		2.5	0.0								●	●	●	●	●	●							
		3.0	0.0								●	●	●	●	●	●							
		3.5	0.0								●	●	●	●	●	●							
		4.0	0.0								●	●	●	●	●	●							
		4.5	0.0								●	●	●	●	●	●							
		5.0	0.0								●	●	●	●	●	●							
			0.00	-	0.0													●	●	●	●	●	●
	0.25	-	0.0													●	●	●	●	●	●	●	
	0.50	-	0.0													●	●	●	●	●	●	●	
	0.75	-	0.0													●	●	●	●	●	●	●	
	1.00	-	0.0													●	●	●	●	●	●	●	
COHN RIVA	0.0	-	0.0	●	●	●	●	●	●							●	●	●	●	●	●	●	
		-	1.0	●	●	●	●	●	●								●	●	●	●	●	●	●
ACI	0.0	-	0.0	●	●	●	●	●	●							●	●	●	●	●	●	●	
		-	1.0	●	●	●	●	●	●								●	●	●	●	●	●	●
CEB	0.0	-	0.0	●	●	●	●	●	●							●	●	●	●	●	●	●	
		-	1.0	●	●	●	●	●	●								●	●	●	●	●	●	●

Figura 4.2.2 - Tabela utilizada nos estudos de COHN E RIVA (1987) que serviu de entrada de dados para o programa CARPE2.

(I) Dados de entrada utilizados no programa MOCURO

Nos estudos de COHN&RIVA, o programa MOCURO utiliza como dados de entrada para geração de seus diagramas as leis descritas a seguir:

- Lei tensão-deformação do aço passivo e do aço ativo propostas por SARGIN;
- Lei tensão-deformação do concreto comprimido de SARGIN;
- Lei tensão-deformação do concreto tracionado de GIURIANI;
- Lei tensão de aderência - deslizamento para aço passivo de GIURIANI;
- Lei tensão de aderência-deslizamento para aço ativo de REINHARDT.

(I.1) Lei tensão-deformação do aço passivo e do aço ativo propostas por SARGIN

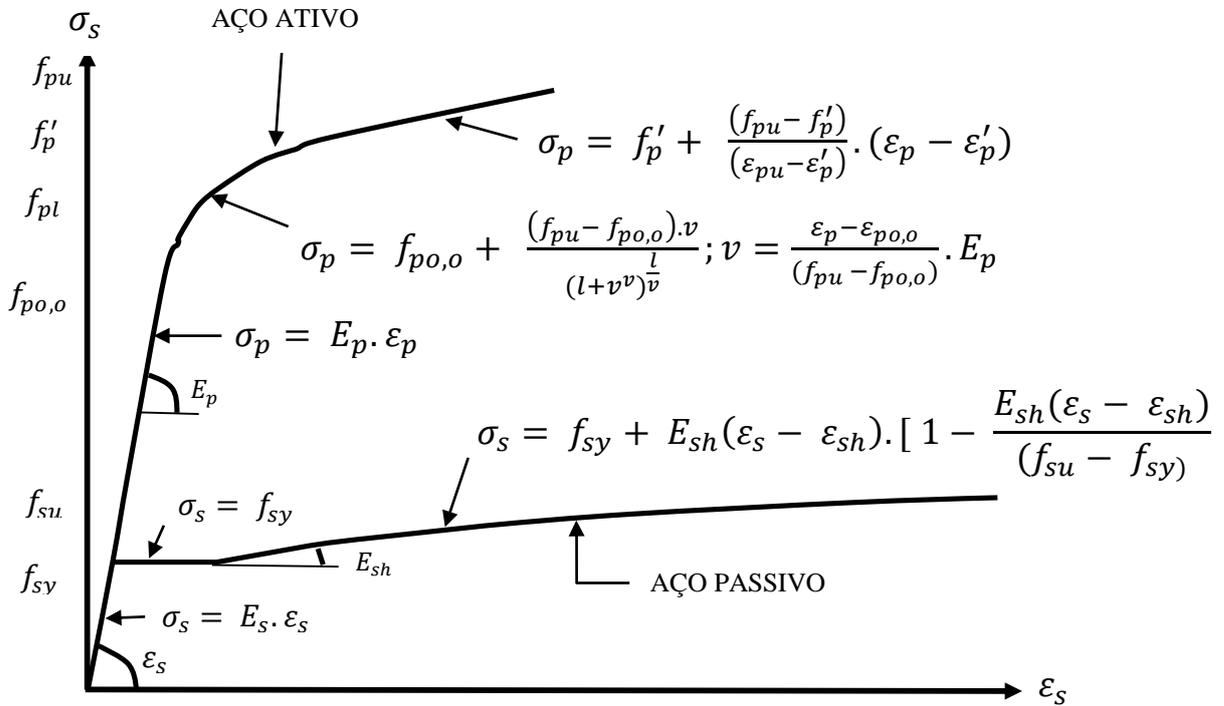


Figura 4.2.3 – Lei tensão-deformação para aço passivo e para aço ativo propostas por SARGIN. (Fonte: COHN & RIVA, 1987)

A seguir, são apresentadas as constantes numéricas utilizadas no emprego da lei de tensão-deformação do aço passivo proposto por SARGIN.

$$f_{sy} = 400 \text{ MPa} \quad f_{su} = 600 \text{ MPa} \quad \epsilon_{sh} = 1\% \quad (4.6 \text{ a b c})$$

$$E_s = 200\,000 \text{ MPa} \quad \epsilon_{su} = 7\% \quad E_{sh} = 6500 \text{ MPa} \quad (4.7 \text{ a b c})$$

De acordo com o diagrama, a formulação para o emprego da lei do aço passivo (reinforcing steel) está descrita abaixo:

$$\epsilon_y = \frac{f_{sy}}{E_s} \quad (4.8 \text{ a b c d})$$

$$\sigma_s = E_s \cdot \epsilon_s \quad \text{para} \quad \epsilon_s < \epsilon_y$$

$$\sigma_s = f_{sy} \quad \text{para} \quad \epsilon_s = \epsilon_y$$

$$\sigma_s = f_{sy} + E_{sh}(\epsilon_s - \epsilon_{sh}) \cdot \left[ 1 - \frac{E_{sh}(\epsilon_s - \epsilon_{sh})}{(f_{su} - f_{sy})} \right] \quad \text{para} \quad \epsilon_y < \epsilon_s < \epsilon_{sh}$$

A seguir, são apresentadas as constantes numéricas utilizadas no emprego da lei de tensão-deformação do aço ativo (prestressing steel) proposto por SARGIN.

$$f_{p0,o} = 1300 \text{ MPa} \quad f_{pl} = 1580 \text{ MPa}, \varepsilon_p = 1\% \quad f'_p = 17,40 \text{ MPa} \quad (4.9 \text{ a b c})$$

$$E_p = 190\,000 \text{ MP} \quad f_{pu} = 1860 \text{ MPa}, \varepsilon_{pu} = 3,5\% \quad \varepsilon'_p = 1,9\% \quad (4.10 \text{ a b c})$$

(I.2) Lei tensão-deformação para concreto comprimido de SARGIN (Figura 2.4.2a), lei tensão-deformação para o aço tracionado proposto por GIURIANI (Figura 2.4.2b).

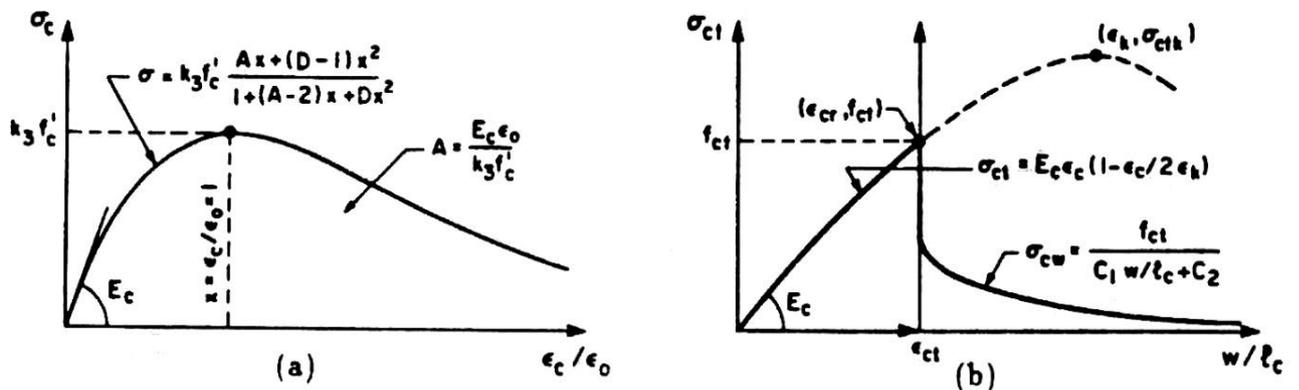


Figura 4.2.4 – Lei tensão-deformação para concreto comprimido de SARGIN; Lei tensão-deformação para concreto tracionado de GIURIANI. (Fonte: COHN & RIVA, 1987)

A seguir, são apresentadas as constantes numéricas utilizadas no emprego da lei de tensão-deformação do concreto comprimido proposto por SARGIN.

$$f'_c = 40 \text{ MPa} \quad \varepsilon_0 = 0,00264 \quad D = 0,362 \quad (4.11 \text{ a b c})$$

$$E_c = 29\,930 \text{ MPa} \quad A = 2,5 \quad k_3 = 0,8 \quad (4.12 \text{ a b c})$$

De acordo com o diagrama, a formulação para o emprego da lei do concreto comprimido (concrete compression) está apresentada abaixo:

$$x = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \quad \text{e} \quad A = \frac{E_c \cdot \varepsilon_0}{k_3 \cdot f'_c} = 2,5 \quad (4.13 \text{ a b})$$

Para  $\varepsilon_c < |0,0035|$

$$\sigma = k_3 \cdot f'_c \cdot \frac{Ax + (D - 1) \cdot x^2}{1 + (A - 2) \cdot x + D \cdot x^2} \quad (4.14)$$

As constantes numéricas utilizadas no emprego da lei de tensão-deformação do concreto tracionado proposto por GIURIANI estão descritas abaixo:

$$f_{ct} = 4,5 \text{ MPa} \qquad c_2 = 2 \qquad \frac{c_1}{l_c} = 12000 \qquad (4.15 \text{ a b c})$$

(I.3) Lei de tensão de aderência - deslizamento para aço passivo de GIURIANI (figura a);  
Lei de tensão de aderência - deslizamento para aço ativo de REINHARDT (figura b).

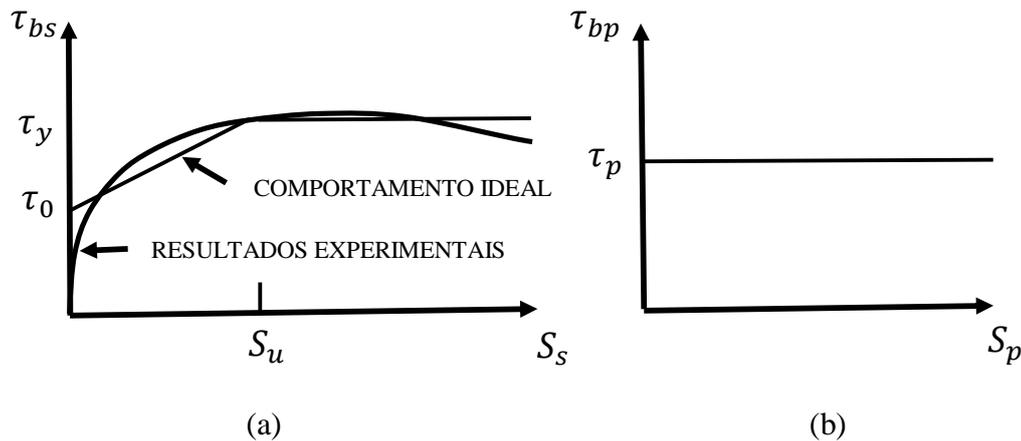


Figura 4.2.5 – Lei tensão de aderência - deslizamento (a) aço passivo GIURIANI; (b) aço ativo REINHARDT. (Fonte: COHN & RIVA, 1987)

As constantes numéricas utilizadas no emprego da lei tensão de aderência-deslizamento para aço passivo são apresentadas a seguir:

$$\tau_0 = 3 \text{ MPa} \qquad \tau_{su} = 10 \text{ MPa} \qquad S_u = 0,5 \text{ mm} \qquad (4.16 \text{ a b c})$$

As constantes numéricas utilizadas no emprego da lei tensão de aderência-deslizamento para aço ativo são apresentadas a seguir:

$$\tau_p = 4 \text{ MPa} \qquad (4.17)$$

(II) Dados de entrada utilizados pelo programa CARPE2

O programa CARPE2 utiliza como dados de entrada para geração de seus diagramas as leis apresentadas no capítulo 2 – Revisão Bibliográfica. As leis empregadas no programa CARPE2 são:

- Lei de tensão-deformação do aço proposta pela NBR 6118:2014
- Lei de tensão-deformação do concreto comprimido apresentado pela NBR 6118:2014 ;
- O programa CARPE2 não considerou a contribuição do concreto tracionado na rigidez da seção de concreto;
- Lei de tensão de aderência - deslizamento de aço proposta por MARTINS (1989). (Figura 4.2.6)

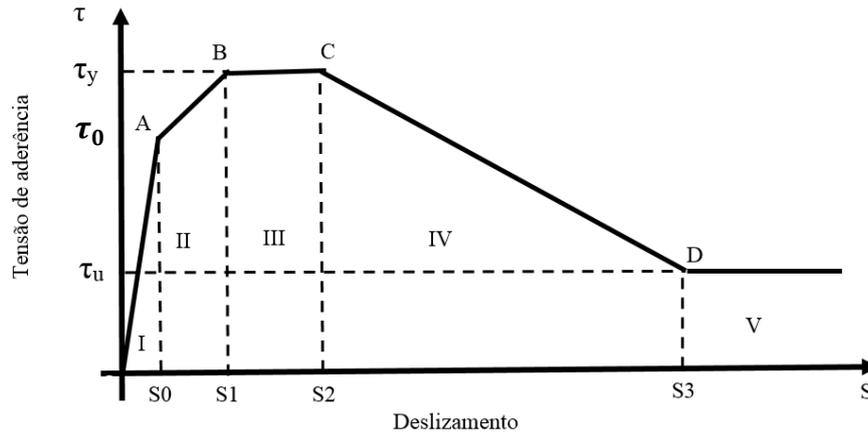


Figura 4.2.6 – Lei tensão de aderência - deslizamento (Fonte: MARTINS, 1989)

Com relação às variáveis constituintes da lei de tensão-deslizamento proposta por MARTINS (1989), foram utilizados os valores apresentados na Tabela 4.1.2:

Tabela 4.1. 2– Tensão de aderência-deslizamento

TENSÃO DE ADERÊNCIA VERSUS DESLIZAMENTO			
$\tau_0 = 3,88 \text{ MPa}$	$\tau_y = 15,81 \text{ MPa}$	$\tau_{y1} = 15,81 \text{ MPa}$	$\tau_u = 6,32 \text{ MPa}$
$S_0 = 0,03 \text{ mm}$	$S_1 = 0,10 \text{ mm}$	$S_2 = 0,20 \text{ mm}$	$S_3 = 0,40 \text{ mm}$

Os valores da tabela acima foram obtidos a partir das informações da tabela do CEB-FIB (2010) apresentada no capítulo 2. Para o presente estudo, foi considerado como dados de entrada os valores da coluna ruptura por arrancamento, com boas condições de aderência. Para consulta, segue a Figura 4.2.7 que apresenta uma vista da referida tabela do CEB-FIB (2010).

Valor	Ruptura por arrancamento		Ruptura por fendilhamento			
	Condições de aderência		Condições de aderência			
	Boas	Todos os outros casos	Boas		Todos os outros casos	
Concreto não-confinado			Concreto confinado	Concreto não-confinado	Concreto confinado	
$\delta_1$	1,0mm	1,8mm	$\delta(\tau_{max})$	$\delta(\tau_{max})$	$\delta(\tau_{max})$	$\delta(\tau_{max})$
$\delta_2$	2,0mm	3,6mm	$\delta_1$	$\delta_1$	$\delta_1$	$\delta_1$
$\delta_3$	$s_{r,1}$	$s_{r,1}$	$1,2 \delta_1$	$s_{r,1}$	$1,2 \delta_1$	$0,5 s_{r,1}$
$\alpha$	0,4		0,4			
$\tau_{max}$	$2,5 \sqrt{f_{ck}}$	$1,25 \sqrt{f_{ck}}$	$7,0 \cdot \left(\frac{f_{ck}}{20}\right)^{0,25}$	$8,0 \cdot \left(\frac{f_{ck}}{20}\right)^{0,25}$	$5,0 \cdot \left(\frac{f_{ck}}{20}\right)^{0,25}$	$5,5 \cdot \left(\frac{f_{ck}}{20}\right)^{0,25}$
$\tau_f$	$0,40 \tau_{max}$	$0,40 \tau_{max}$	0	$0,40 \tau_{max}$	0	$0,40 \tau_{max}$

$s_{r,1}$  é o espaçamento entre nervuras.

Figura 4.2.7 - Curva tensão de aderência x deslizamento (Fonte: CEB-FIB, 2010).

onde:

$\tau$  – tensão de aderência para um dado deslizamento  $\delta$ ;

$\tau_{max}$  – máxima tensão de aderência;

$\tau_f$  – tensão final de aderência

$\delta_1$  – deslizamento referente à máxima tensão de aderência;

$\delta_2$  – deslizamento referente ao ponto de início do trecho descendente da tensão de aderência;

$\delta_3$  – deslizamento referente à tensão final de aderência;

Para o espaçamento médio entre nervuras, foram utilizados as informações da NBR 7480 (ABNT, 1996), (Figura 4.2.8).

Diâmetro (mm)	Intervalo do espaçamento NBR7480/96
8,00	4,00 a 6,40
10,00	5,00 a 8,00
12,50	6,25 a 10,00
16,00	8,00 a 12,80

Figura 4.2.8 - Espaçamento entre nervuras segundo a NBR 7480 (ABNT, 1996)

### (III) Comportamento dos resultados entre MOCURO e CARPE2

Para verificar o comportamento das curvas geradas por CARPE2, são apresentados os gráficos momento-curvatura gerados pelo programa MOCURO desenvolvido por COHN&RIVA (1987).

Observa-se que as curvas geradas pelo programa CARPE2 e pelo programa MOCURO apresentam o mesmo formato, caracterizado por um diagrama bi-linear. Como não foi possível o acesso ao programa MOCURO, foi utilizado neste estudo uma cópia do diagrama original que consta do trabalho de COHN&RIVA (1987).

A seguir, são mostrados 5 pares de diagramas momento-curvatura gerados pelo programa MOCURO e pelo programa CARPE2. Na criação dos diagramas, foram considerados a taxa mecânica de armadura ( $\omega$ ) e a taxa de proporcionalidade entre aço ativo e o aço total ( $\gamma$ ). Nas comparações, utilizou-se  $\gamma = 0$  e  $\omega = 0,10$ ;  $\omega = 0,15$ ;  $\omega = 0,20$ ;  $\omega = 0,25$ ;  $\omega = 0,30$ ;  $\omega = 0,35$  e  $\omega = 0,40$ .

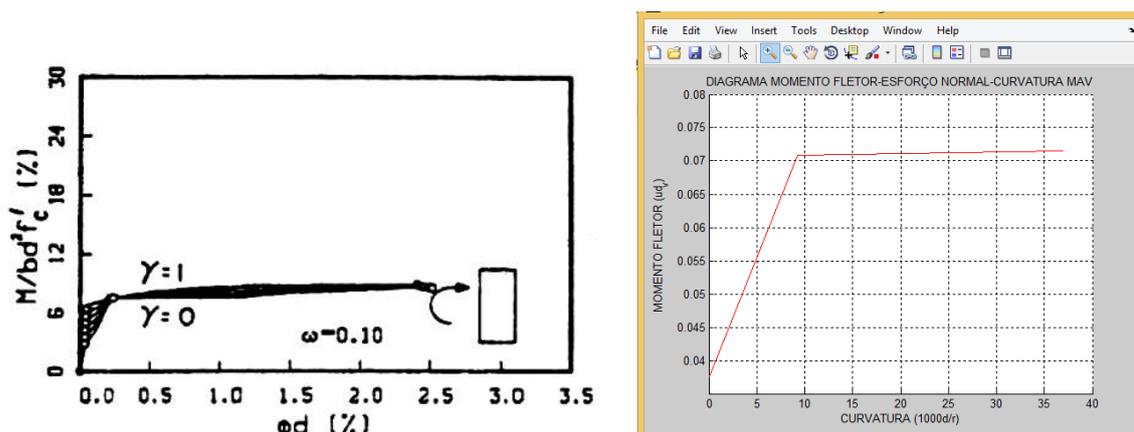


Figura 4.2.9 – Diagramas Momento x Curvatura para taxa de armadura  $\omega = 0.10$  (MOCURO) e  $\omega = 0.15$  (CARPE2)

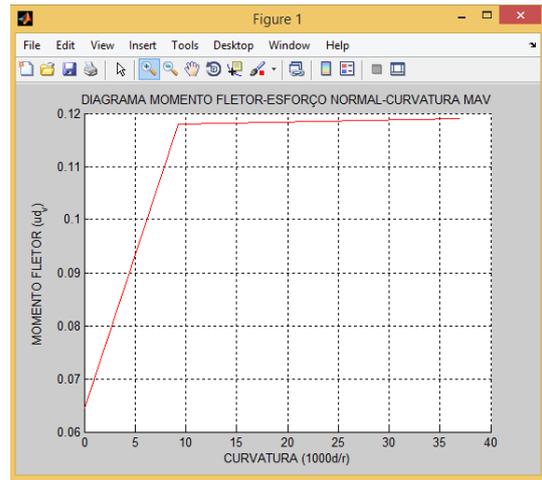
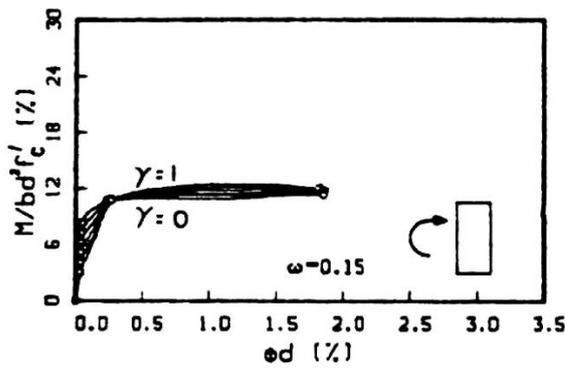


Figura 4.2.10 – Diagramas Momento x Curvatura para taxa de armadura  $\omega = 0.15$  (MOCURO) e  $\omega = 0.25$  (CARPE2)

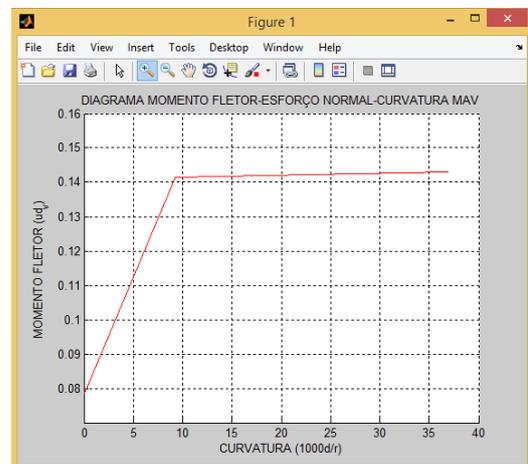
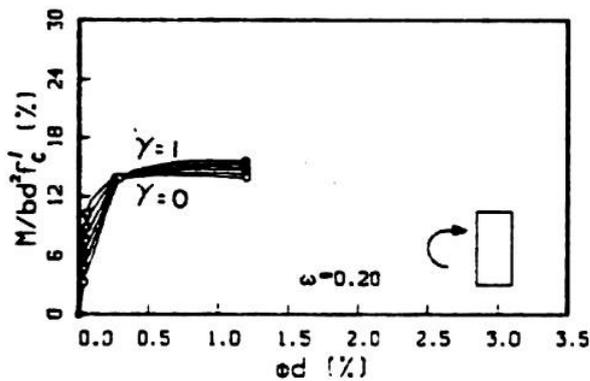


Figura 4.2.11 – Diagramas Momento x Curvatura para taxa de armadura  $\omega = 0.20$  (MOCURO) e  $\omega = 0.30$  (CARPE2)

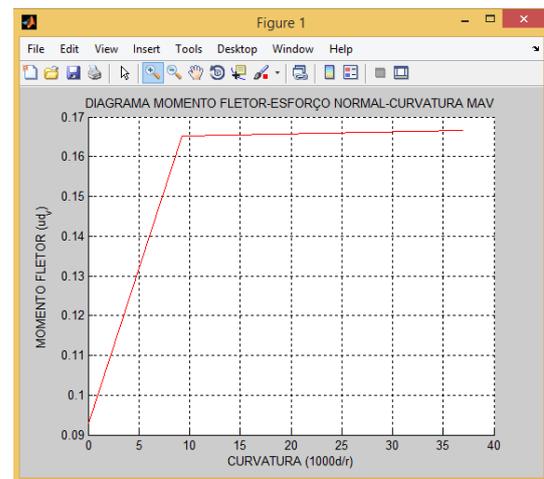
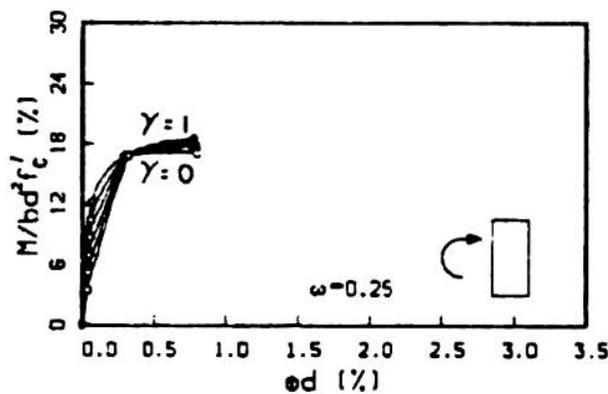


Figura 4.2.12 – Diagramas Momento x Curvatura para taxa de armadura  $\omega = 0.25$  (MOCURO) e  $\omega = 0.35$  (CARPE2)

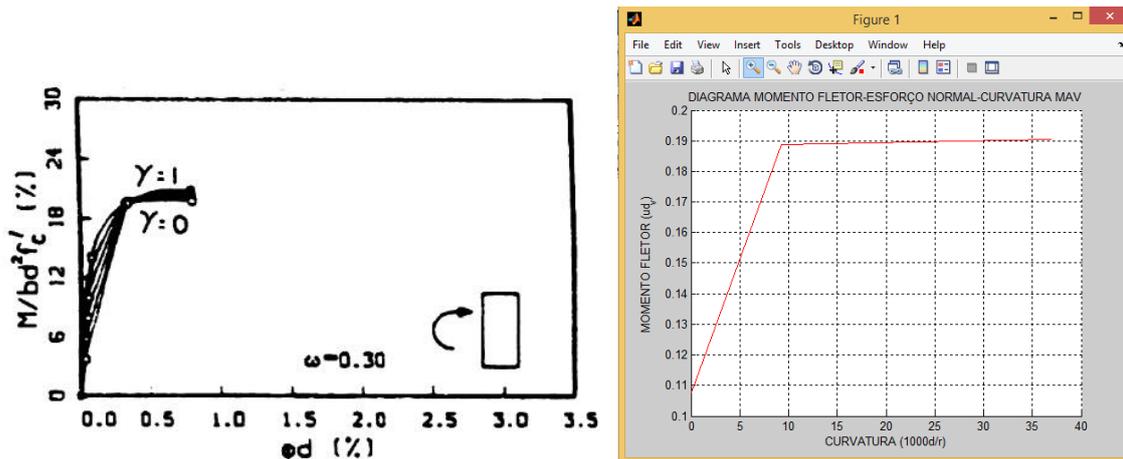


Figura 4.2.13 – Diagramas Momento x Curvatura para taxa de armadura  $\omega = 0.30$  (MOCURO) e  $\omega = 0.40$  (CARPE2)

Da comparação entre os diagramas, pode-se observar que existe boa correlação entre os gráficos momento-curvatura gerados por MOCURO e CARPE2 para diferentes valores de taxas mecânicas de armaduras ( $\omega$ ). Ou seja, quando a taxa de armadura de MOCURO é igual a  $\omega = 0.10$  e a taxa de armadura de CARPE2 é igual a  $\omega = 0.15$ , os gráficos momento-curvatura gerados por ambos programas apresentam boa correlação.

Os valores das taxas de armadura de CARPE2 são superiores, em média, 32 % aos valores das taxas de armadura de MOCURO. As causas prováveis para as diferenças entre os resultados apresentados entre CARPE2 e MOCURO podem ser explicadas pela utilização de métodos matemáticos e leis constitutivas diferentes. Entre eles, podem-se citar, os métodos matemáticos utilizados nos cálculos das integrais, o emprego de leis de tensão de aderência-deslizamento, as leis de tensão-deformação do aço e as leis de tensão-deformação do concreto. Destaca-se, também, que o CARPE2 não leva em consideração a contribuição do concreto tracionado na rigidez do elemento de concreto estrutural. Nos cálculos realizados pelo CARPE2, a matriz de rigidez foi considerada constante tanto para a seção fissurada como para a seção não-fissurada. O CARPE2 não utiliza nos seus cálculos a condição de aço protendido pré-tracionado. Esses fatores também podem ter influenciado nos resultados das comparações realizadas.

## **5 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES PARA PESQUISAS FUTURAS**

### **5.1 - CONCLUSÕES GERAIS**

O programa CARPE, desenvolvido por MARTINS (1989), teve seus resultados validados e revalidados, com relação o Modelo de Aderência Variável (MAV), tanto na sua tese de doutorado como nos demais trabalhos acadêmicos desenvolvidos ou orientados pelo autor.

O programa CARPE2 utiliza uma linguagem de programação que facilita a interação com o usuário. Destaca-se que a lógica de criação do CARPE2 é diferente do CARPE, porém a base teórica de desenvolvimento de ambos é a mesma contida na tese de doutorado de MARTINS (1989).

Os resultados obtidos pelo programa CARPE2 foram validados para o Modelo de Aderência Perfeita (MAP), quando se realizou comparações com os exemplos apresentados nos ábacos de PFEIL(1976) e VENTURINI(1987) como também nos diagramas contidos nos estudos de PRAZERES (2002).

O programa CARPE2 obtém boa correlação ao comparar seus resultados com aqueles apresentados no trabalho de COHN & RIVA (1987) apenas quando o valor da taxa de armadura de CARPE2 for superior, em média, 32% aos valores das taxas de armadura de MOCURO.

As causas prováveis para as diferenças entre os resultados apresentados entre CARPE2 e MOCURO podem ser explicadas pela utilização de métodos matemáticos e leis constitutivas diferentes. Entre eles, podem-se citar, os métodos matemáticos utilizados nos cálculos da integrais, o emprego de leis de tensão de aderência-deslizamento, as leis de tensão-deformação do aço e as leis de tensão-deformação do concreto. Destaca-se, também, que o CARPE2 não levou em consideração a contribuição do concreto tracionado na rigidez do elemento de concreto estrutural. Nos cálculos realizados pelo CARPE2, a matriz de rigidez foi considerada constante tanto para a seção fissurada como para a seção não-fissurada. O CARPE2 não utiliza nos seus cálculos a condição de aço protendido pré-tracionado. Esses fatores também podem ter influenciado nos resultados das comparações realizadas.

Finalmente, pôde-se mostrar que o Modelo de Aderência Perfeita (MAP), que trata de elementos de concreto com armadura interna perfeitamente aderente, é um caso particular do Modelo de Aderência Variável (MAV). Isto acontece quando o eixo de deslocamento longitudinal nulo se confunde com a linha neutra de deformação. No caso geral, o primeiro é distinto do segundo em razão da variação da posição do eixo neutro ao longo da viga devido as singularidades constituídas pelas fissuras/juntas.(MARTINS, 1989).

## 5.2 - RECOMENDAÇÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

- Complementar o programa CARPE2 com o método dos pares ordenados, apresentados no texto da dissertação, para realizar o cálculo das propriedades geométricas da seção transversal de concreto, como: área seção, centro de gravidade, momento de inércia e produto de inércia.
- Utilizar outras relações constitutivas, não se limitando aquelas contidas na NBR 6118:2014. O programa CARPE2 permite a incorporação de outras leis constitutivas tanto do concreto como do aço. Pode-se alterar o programa para realizar análise de seções onde as armaduras não estão distribuídas simetricamente.
- O programa CARPE2 pode ser facilmente adaptado para realizar análises de seções de concreto além das seções retangulares. Pode-se, inclusive, ser alterado para formas vazadas.
- Por ocasião da alteração do código do programa CARPE2, pode-se prever a inclusão das leis de tração-deformação do concreto. Além de realizar a variação da matriz de rigidez conforme a altura da fissura.
- Realizar ensaios comparando os resultados obtidos pelo CARPE2 com outros autores.
- Criar um ambiente de entrada de dados na forma de caixas de diálogos no ambiente de programação do MATLAB. Posteriormente, elaborar um programa executável do CARPE2 para funcionar independentemente da existência do MATLAB na máquina do usuário.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSAN, ALOISIO ERNESTO – Resistência dos Materiais, Vol 1, Editora Unicamp, São Paulo, 2010

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – ABNT NBR 6118:2014 - Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2004.

BARBOSA, M.P - Uma Contribuição Experimental e Numérica sobre Estruturas de Concreto Armado de Elevado Desempenho: Estudo da Aderência-Ancoragem e o comportamento de Vigas Fletidas. Ilha Solteira. Tese (Livre Docência) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, 1998.

BARBOSA, M.T.G. - Avaliação do Comportamento da Aderência em Concretos de Diferentes Classes de Resistência. Tese de Doutorado – Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2001

BASTOS, P. S.S. – Fundamentos do Concreto Armado. Universidade Estadual Paulista (UNESP), Campus de Bauru/SP, 2006.

BEER, F.P. ; JOHNSTON Jr. E.R. - Resistência dos Materiais - MacGraw-Hill, São Paulo, 1982.

BEER, F.P.; JOHNSTON Jr. E.R.- Mecânica Vetorial para Engenheiros, Vol 01 e 02 - MacGraw-Hill, São Paulo, 1989.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D.- Numerical Analysis, 5ª edição, PWS-KENT - Publishing Company. Boston, 1993.

BURGOYNE, C. J.; CRISFIELD, M. A. - Numerical Integration Strategy for Plates and Shells, Int. J. Num. Meth. Engng., 29, 105-121, 1990.

CLARK, A. P. . Bond of concrete reinforcing bars; ACI Journal, Proc. Vol. 46, November, pp. 161-184, 1949.

COHN, M.Z.; RIVA, P. – A Comprehensive Study of the Flexural Behaviour of Structural Concrete Elements. p365-413. Corso di Perfezionamento per le Costruzioni in Cemento Armato, Fratelli Pesenti, Politecnico di Milano, Italia. Studi e Ricerche – Vol. 9, 1987.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON, CEB – FIP Model Code 1990; Bulletin d'Information, 203-205, 1991.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON, CEB - FIB Model Code 2010; Bulletin d'Information, 65, 2010.

CUNHA, C. – Métodos Numéricos para as Engenharias e Ciências Aplicadas, Editora da UNICAMP, São Paulo, 1993.

DAVIS, C. – Geometria de Triângulos e Polígonos. Assessor de Desenvolvimento e Estudos da Prodabel – Empresa de Informática e Informação do Município de Belo Horizonte

DESIR, J. M., Interface Aço-Concreto: Reformulando os Modelos Constitutivos e Numéricos. Tese de Doutorado – UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1998.

DESIR, J. M. – Análise Não-Linear do Comportamento até a Ruptura de Vigas Contínuas de Concreto com Protensão Externa. 109p. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, 1993.

FUSCO, P. B. - Estruturas de Concreto: Solicitações Normais. Livros Técnicos e Científicos Editora. São Paulo, 1981

FUSCO, P. B. – Técnica de armar as estruturas de concreto; Editora PINI, 1995.

GERE, J.M. – Mecânica dos Materiais, Pioneira Thomson Learning, São Paulo, 2003

GOTO, Y. . Cracks formed in concrete around deformed tension bars; ACI Journal, Proc. Vol. 68, April, pp. 244-251, 1971.

GRELAT A. “Comportement Non-Linéaire e Stabilité des Ossatures em Beton Armé”, Annales de L' I.T.B.T.P., Nov, 1978.

HIBBELER, R. C. – Resistência dos Materiais, 3.º Ed., Editora Livros Técnicos e Científicos, 2000.

KOMATSU, J.S. – Mecânica dos Sólidos 1, Vol 1 e 2 – Editora da Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2005.

KWAK, H. G. ; FILIPPOU, F. C. . A new reinforcing steel model with bond-slip; Journal Structural Engineering and Mechanics, Vol. 3, No. 4, pp. 299-312, 1995.

LEONHARDT, F; MÖNNIG, E. - Construções de concreto: princípios básicos de estruturas de concreto armado. Editora Interciência, 6 v, Rio de Janeiro, 1977.

LIMA, P.R.L; FONTES, C.M.A; LIMA, J.M.F – Análise Não-Linear da Deflexão de Vigas de Concreto Armado. Sitientibus, Feira de Santana, Nr 28, p.91-108, jan./jun., 2003

MARINS NETO, JOAQUIM. Análise numérica não-linear de estruturas de concreto armado considerando o fenômeno da aderência entre o aço e o concreto. Tese de Doutorado. UNICAMP - Campinas, SP: [s.n.], 2007.

MARTINS, P.C.R. – Análise Não-Linear de Estruturas Reticuladas Espaciais de Concreto Armado. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1979.

MARTINS, P.C. R. – Modelisation du Comportement Jusqu'a la Rupture en Flexion de Poutres en Beton a Precontrainte Exterieur ou Mixte. Thèse de Doctorat – Mecanique des Sols et Structures - Ecole Centrale des Arts et Manufactures de Paris, França, 1989.

MARTINS, P.C.R; FOURE, B. – Comportement en Flexion Jusqu'a Rupture des Poutres a Precontrainte Exterieur au Beton. p195-215. XI Congres de la Federation Internationale de la Precontrainte. Hambourg, 1990.

MATTOS, T. S. - Programa para Análise de Superestruturas de Pontes de Concreto Armado e Protendido.167p. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, 2001.

MATTOCK, A. H., “Flexural Strength of Prestressed Concrete Sections by Programmable Calculator”, PCI Journal, V. 24, n. 2,(Jan/Fev), pp. 32-54, 1979.

MELLO, E.L. – Concreto Armado, Resistência Limite a Flexão Composta Normal e Oblíqua. Editora Universidade de Brasília: FINATEC, 2003.

MIRZA, S. M. ; HOUDE, J. . Study of bond stress-slip relationships in reinforced concrete; ACI Journal, Proc. Vol. 76, January, pp. 19-46, 1979.

NGO, D. ; SCORDELIS, A. C. . Finite element analysis of reinforced concrete beams; ACI Journal, Proc. Vol. 64, March, pp. 152-163, 1967.

PERRY, E. S. ; THOMPSON, J. N. . Bond stress distribution on reinforcing steel in beams and pullout specimens; ACI Journal, Proc. Vol. 63, August, pp. 865-875, 1966.

PFEIL, WALTER. Dimensionamento do Concreto Armado à Flexão Composta: Segundo as normas CEB/72 e a nova norma brasileira NB1/75. Livros Técnicos e Científicos. Rio de Janeiro/RJ, 1976.

PRAZERES,P.G.C.; GOMES,J.J.S.; SOUZA,R.M. – Aplicação de Métodos Numéricos na Análise Computacional de Seções de Concreto Armado Submetidas a Flexão Composta Reta. V Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, pp. 1-20, 2002.

REIS, FRANCISCO JOSÉ COSTA. Influência do Nível de Protensão na Deformação de Estruturas Executadas com Protensão Externa. Dissertação de Mestrado. COPPE/UFRJ - Rio de Janeiro/RJ, 2003.

ROSA, W. A. Modelagem do deslizamento entre o aço e o concreto com tensão de aderência não-linear; Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Rio de Janeiro – RJ, Brasil, 1994.

RUSSO, G. ; ZINGONE, G. ; ROMANO, F. . Analytical solution for bond-slip of reinforcing bars in R. C. joints; ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol. 116, No. 2, February, pp. 336-355, 1990.

SARGIN M., Stress – Strain Relationships for Concrete and the Analysis of Structural Concrete Sections. S.M. study n°4, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Canada, 1971.

SHEHATA, A. E. M. ; VENTORINI, L. A. ; SHEHATA, L. C. D. . Bond influence on rotation capacity of high-strength and normal strength concrete beams; ACI International Conference, Gramado – RS, Brazil, pp. 231-252, 1999.

SOLER, J.G.M; SOUZA,A.M. - Programa Didático de Característica Geométrica de Seção Transversal para HP 48G e HP 49. PUC-MG.COBENGE, 2001.

TASSIOS, T. P. ; YANNOPOULOS, P. J. . Analytical studies on reinforced concrete members under cyclic loading based on bond stress-slip relationships; ACI Journal, Proc. Vol. 78, May-June, pp. 206-216, 1981.

UFPR, Universidade Federal do Paraná. Departamento de Construção Civil. Estruturas de Concreto. Capítulo 7 – Aderência entre o concreto e o aço.pdf, ano 2006. Disponível em: <<http://www.cesec.ufpr.br/disciplinas/concreto/material.html>>. Acesso em: 12 maio 2015.

UIJL, J. A. D. ; BIGAJ, A. J. . A bond model for ribbed bars based on concrete confinement; Heron, Vol. 41, No. 3, pp. 201-226, 1996.

VENTURINI, W. S. ; RODRIGUES, R.O. Dimensionamento de Peças Retangulares de Concreto Armado Solicitadas à Flexão Reta. Universidade de São Paulo. São Carlos, 1987.

WATSTEIN, D. Bond stress in concrete pull-out specimens; ACI Journal, Proc. Vol. 38, September, pp. 37-50, 1941.

YANKELEVSKY, D. Z. . New finite element for bond-slip analysis; ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol. 111, No. 7, July, pp. 1533-1542, 1985.

YANKELEVSKY, D. Z. . A two-phase one dimensional model for steel-concrete interaction; Computers & Structures, Vol. 65, No. 6, pp. 781-794, 1997.

ZUO, J. ; DARWIN, D. . Splice strength of conventional and high relative rib area bars in normal and high-strength concrete; ACI Structural Journal, Vol. 97, No. 4, July-August, pp. 630-641, 2000.

WILLIAM H. PRESS . . . [et al.]. Numerical Recipes in Fortran 90: The Art of Parallel Scientific Computing, Volume 2 of Fortran Numerical Recipes, Second Edition, first published 1996. Reprinted with corrections 1997.

## ANEXO A - ROTEIRO PARA CÁLCULO DE $U_{SB}$ e $\epsilon_{SB}$

### I – ROTEIRO DE CÁLCULO DE $U_{SB}$

O Programa CARPE2 baseou a construção de sua codificação distribuídas em três partes:

- 1) Rotinas para criação dos Diagramas que se utilizam do Método de Aderência Perfeita (MAP)
- 2) Rotinas para criação dos Diagramas que se utilizam do Método de Aderência Variável (MAV). Nestas rotinas, são calculados os valores de  $U_{SB}$ .
- 3) Rotina de cálculo da deformação do aço tracionado por meio do subprograma ADHERE que foi extraído do programa CARPE original, que foi elaborado em FORTRAN. O subprograma ADHERE foi adaptado para funcionar de forma integrada ao ambiente do MATLAB.

### Gráfico utilizado para cálculo de $U_{SB}$

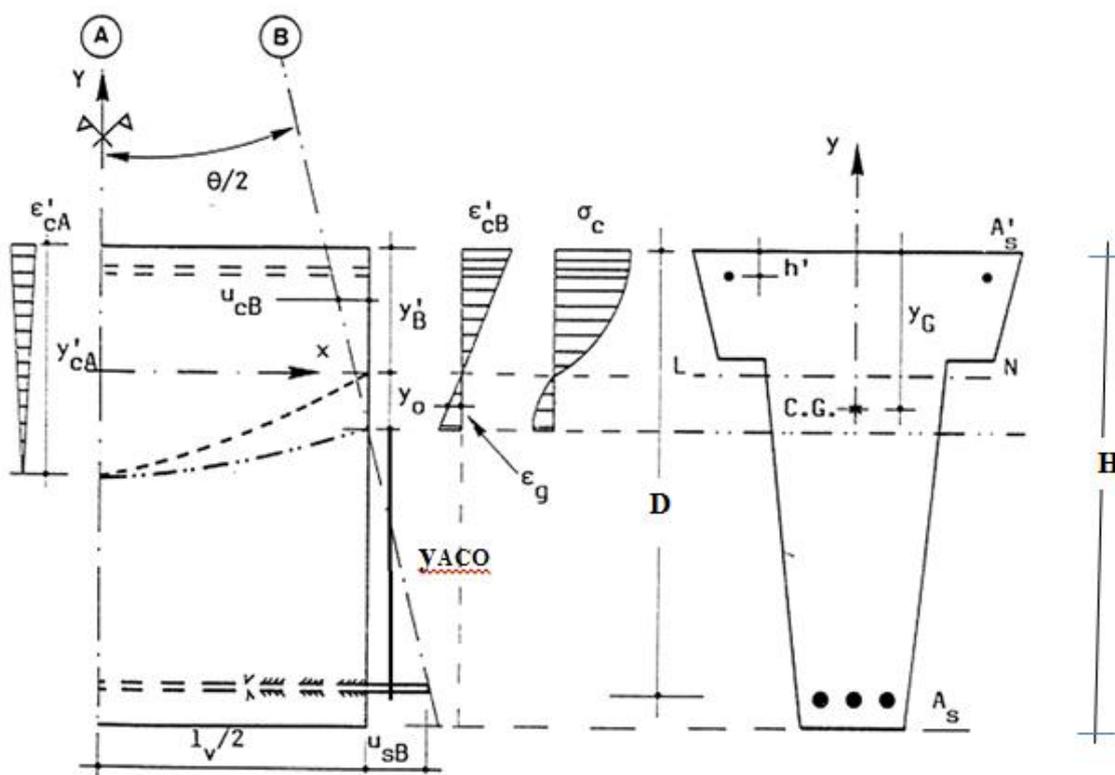


Figura A. 1 – Elemento de concreto estrutural

## 1. SEQUENCIA DE CÁLCULO

As rotinas MAV utilizam o valor de USB para ser fornecido ao subprograma ADHERE que calcula a deformação do aço tracionado localizado na fissura. A figura acima, apresenta a localização de USB cuja expressão de cálculo é dada por:  $USB = (TETA/2)*YACO$ .

Para tanto, são necessários os conhecimentos das curvaturas (CVZA, CVZB) e das alturas das linhas neutra (YA, YB) referentes a seção não-fissurada (A) e a seção fissurada (B).

A sequência geral para o cálculo de USB, obtida da tese de doutorado de MARTINS (1989), está descrita abaixo:

$$USB = (TETA/2) * YACO$$

$$YACO = D - YB - Y0$$

$$TETA = CVZB / FYB$$

$$FYB = 3. * YA * YA / (YA * YA + 2. * YB * YB)$$

$$Y0 = 2. * YB * YB * (YA - YB) / (YA * YA + 2. * YB * YB)$$

Observa-se que para determinação de USB são necessários os valores de TETA e YACO.

Ainda, verifica-se que é preciso saber os valores de Y0 e FYB que por sua vez são funções de YA e YB.

Os pares (CVZA, YA) e (CVZB, YB) são obtidos por meio do equilíbrio das seções (A e B) submetidas a flexão composta reta.

Para o cálculo de YA e de YB, deve-se incluir a contribuição do concreto a tração na rigidez do elemento de concreto não-fissurado. Para isso, pode-se utilizar a lei de GRELAT tanto para obtenção de YA, calculado pelo MAP, como para YB, calculado pelo MAV. No presente estudo, não será incluído a contribuição do concreto a tração, sugere-se considerar este assunto em trabalhos futuros.

Legenda:

CVZA -> Curvatura da Seção Não-Fissurada (A)

YA -> Linha Neutra na Seção Não-Fissurada:  $YA = (EM - CVZA * YM) / CVZA$

CVZB -> Curvatura na Seção Fissurada (B)

YB -> Linha Neutra na Seção Fissurada

MAP -> Método de Aderência Perfeita

MAV -> Método de Aderência Variável

## 1.1 CÁLCULO DE YA NA SEÇÃO A (NÃO FISSURADA)

Os valores de CVZA, EM e YM são obtidos por meio do equilíbrio da seção não-fissurada submetida a flexão composta reta com o uso do Modelo de Aderência Perfeita (MAP), conforme convenção utilizada na figura abaixo.

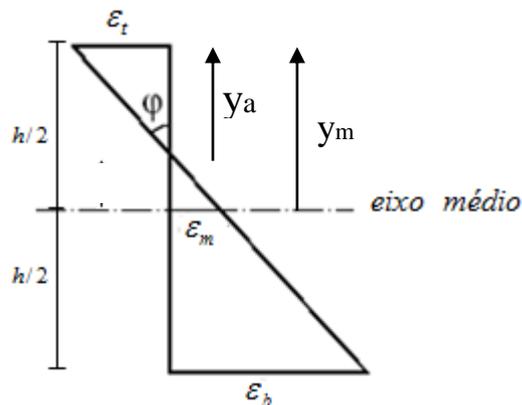


Figura A. 2 – Seção não fissurada

Onde:  $EM = \varepsilon_m = \frac{\varepsilon_b + \varepsilon_t}{2}$ ,  $CVZA = \varphi = \frac{\varepsilon_b - \varepsilon_t}{h}$ ,  $YM = \frac{h}{2}$ ,  $YA = (EM - CVZA * YM) / CVZA$

Formulação auxiliar:  $\varepsilon(y_a) = \varepsilon_t = (\varepsilon_m - \varphi \cdot y_m)$ ,  $\varepsilon_t = \varphi \cdot y_a$ ,  $\varphi \cdot y_a = (\varepsilon_m - \varphi \cdot y_m)$

A partir dos valores de CVZA, EM e YM, obtidos após equilíbrio da seção A, pode-se encontrar o valor de YA pela expressão  $YA = (EM - CVZA * YM) / CVZA$

## 1.2 CÁLCULO DE YB NA SEÇÃO B (FISSURADA)

Os valores de  $\varepsilon_{cb}$  são arbitrados e os valores  $y_a$  e  $\varepsilon_{ca}$  são obtidos da seção não-fissurada (A).

Com isso, pode-se calcular  $y_b$  por meio da expressão  $y_b = \frac{y_a \cdot \varepsilon_{ca}}{\varepsilon_{cb}}$ , relação obtida a partir da

igualdade das áreas de deformações das seções A e B.

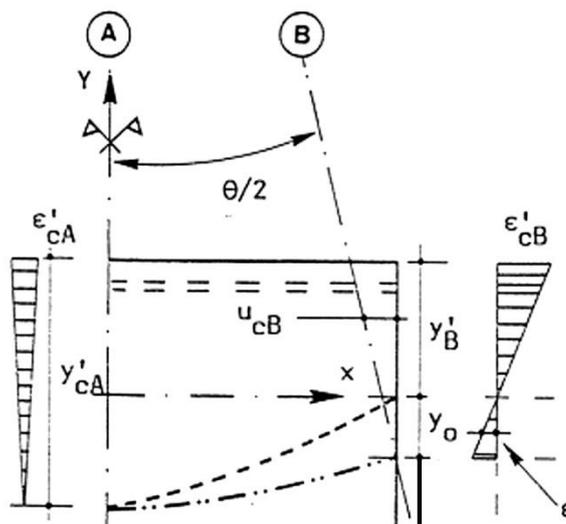


Figura A. 3 – Relação de deformações entre seções

### 1.3 CÁLCULO DE USB

Para o cálculo de USB, são utilizados os valores de TETA e YACO que são obtidos em função de YA, YB, CVZB e D.

$$USB = (TETA/2) * YACO$$

$$YACO = D - YB - Y0$$

$$TETA = CVZB / FYB$$

$$FYB = 3. * YA * YA / (YA * YA + 2. * YB * YB)$$

$$Y0 = 2. * YB * YB * (YA - YB) / (YA * YA + 2. * YB * YB)$$

### 1.4 SEQUÊNCIA DE CÁLCULO DE USB

#### SEÇÃO NÃO FISSURADA "A"

YA, ECA, D -> FORNECIDO POR MAP

LV -> PARA CARACTERIZAR A AREA DA SEÇÃO "A" DISTANTE LV DA SEÇÃO "B"

#### SEÇÃO FISSURADA "B"

Para ECB de -0.0000001 até -0.0035 (deformação encurtamento do concreto na seção fissurada)

$$YB = (YA * ECA) / ECB;$$

$$CVZB = ECB / YB;$$

$$Y0 = 2. * YB * YB * (YA - YB) / (YA * YA + 2. * YB * YB);$$

$$FYB = 3. * YA * YA / (YA * YA + 2. * YB * YB);$$

$$TETA = CVZB / FYB;$$

$$YACO = D - YB - Y0;$$

$$USB = (TETA/2) * YACO;$$

O valor de USB é fornecido como dado de entrada do subprograma ADHERE oriundo do programa CARPE original elaborado em FORTRAN por MARTINS (1989).

FIM ECB

## **II - ROTEIRO DE CÁLCULO DE $\epsilon_{SB}$**

O subprograma ADHERE realiza o cálculo do valor da deformação do aço ( $DEF = \epsilon_{SB}$ )

localizado na fissura para um dado USB proveniente das rotinas MAV.

Os dados de entrada e de saída de ADHERE estão descritos na Tabela A.1.

Tabela A. 1 – Entrada de Adhere

<b>DADOS DE ENTRADA PARA ADHERE</b>	
USB	DESLOCAMENTO DO AÇO NO NÍVEL DA FISSURA
TAU	TENSÃO DE ADERÊNCIA
SLP	DESLIZAMENTO
EAC	MODULO DE ELASTICIDADE DO AÇO
DIA	DIAMETRO DO AÇO
ECT	DEFORMAÇÃO CONCRETO = ECTK
LV	COMPRIMENTO DO ELEMENTO DE VIGA
<b>DADOS DE SAÍDA DE ADHERE</b>	
DEF	DEFORMAÇÃO
SLIP	DESLIZAMENTO
LA	COMPRIMENTO DE ANCORAGEM

As unidades dos dados de entrada e saída de ADHERE são apresentados na Tabela A.2:

Tabela A. 2 – Unidades de CARPE

<b>TABELA DE UNIDADES DO PROGRAMA CARPE</b>			
<b>Dados de Entrada</b>		<b>Dados de Saída</b>	
Comprimento	- m	Comprimento	- m
Tensões	- MPa	Tensões	- MPa
Módulo de elasticidade	- MPa	Módulo de elasticidade	- MPa
Forças aplicadas	- MN	Forças	- MN
Peso próprio	- MN/m		
Carga variável	- MN		

## ANEXO B - TESTES DO SUBPROGRAMA ADHERE

O subprograma Adhere foi elaborado tendo como base o programa CARPE criado por MARTINS (1989). Foram aproveitadas e adaptadas partes da codificação do programa CARPE para a criação do subprograma Adhere.

A seguir são apresentados alguns testes de entrada e saída de dados do subprograma Adhere que trabalhará de forma integrada ao programa CARPE2. O objetivo dos testes é verificar a relação entre as variáveis USB, LV e DEF.

Os valores do diagrama tensão de aderência-deslizamento foram derivados do trabalho de MARTINS (1989), Figura B.1 e Tabela B.1.

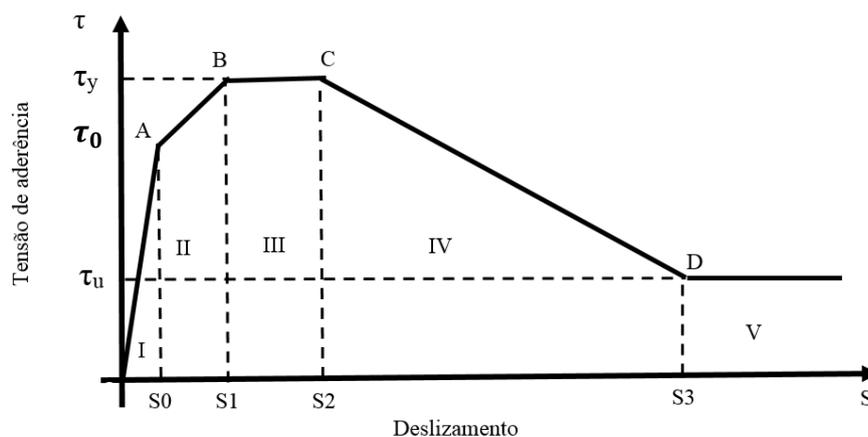


Figura B. 1 - Diagrama tensão de aderência-deslizamento (Fonte: MARTINS,1989)

Tabela B. 1 - Dados tensão de aderência-deslizamento (Fonte: MARTINS,1989)

TENSÃO DE ADERÊNCIA VERSUS DESLIZAMENTO			
$\tau_0 = 1,7 \text{ MPa}$	$\tau_y = 3,8 \text{ MPa}$	$\tau_{y1} = 3,8 \text{ MPa}$	$\tau_u = 1,3 \text{ MPa}$
$S_0 = 0,03 \text{ mm}$	$S_1 = 0,10 \text{ mm}$	$S_2 = 0,18 \text{ mm}$	$S_3 = 0,40 \text{ mm}$

A fissuração deve ser verificada de acordo com os critérios dados no item 17.3.3 da NBR 6118:2014, com os limites estabelecidos no item 13.4.2. De maneira geral, fissuração que respeite esses limites (da ordem de 0,3 mm a 0,4 mm) não acarreta perda de durabilidade ou de segurança quanto aos estados limites últimos e depende da agressividade do meio ambiente.

Para a realização dos testes do subprograma Adhere, são utilizados valores apresentados nas tabelas B.2 e B.3.

Tabela B. 2 - Dados de entrada para subprograma Adhere.

<b>DADOS DE ENTRADA DE ADHERE</b>			
LV = Variável	EAC = 210000	S0 = 0.00003	TAU0 = 1.7
USB = Variável	DIA = 0.008	S1 = 0.0001	TAUY= 3.8
	ECT = 0.00015	S2 = 0.00018	TAU1 = 3.8
		S3 = 0.0004	TAUU = 1.3

Tabela B. 3 – Deformação de acordo com LV e USB.

<b>DADOS DE SAÍDA</b>		
LV	USB	Deformação (DEF)
0,1	0,0050	0,005707768
0,2	0,0060	0,006233334
0,3	0,0070	0,0067172243
0,4	0,0080	0,007168077
0,5	0,0090	0,007591820
0,1	0,0050	0,005707768
	0,0060	0,006233483
	0,0070	0,006717583
	0,0080	0,007168634
	0,0090	0,007592612
0,1	0,0050	0,005707768
0,2		0,005707589
0,3		0,005707292
0,4		0,005706875
0,5		0,005706339

Observações:

- (a) Mantendo-se fixo USB e variando-se o valor de LV, obtém-se uma variação pequena no valor da deformação do aço no nível da fissura.
- (b) Mantendo-se fixo LV e variando-se o valor de USB, obtém-se uma variação crescente no valor da deformação do aço no nível da fissura.

## ANEXO C - EXEMPLOS DE GRÁFICOS GERADOS PELO CARPE2 (MAP)

A seguir são apresentados os gráficos que podem ser gerados pelo CARPE2 nos casos em que se considera o Modelo de Aderência Perfeita (MAP).

Os diagramas obtidos abaixo referem-se a uma seção retangular de 20 x 50cm com resistência de 20MPa, com armadura dupla distribuída simetricamente, aço CA-50A, taxa mecânica de armadura  $w = 0,4$ ,  $d/h = 0,1$  e esforço normal normalizado  $v = 0$ .

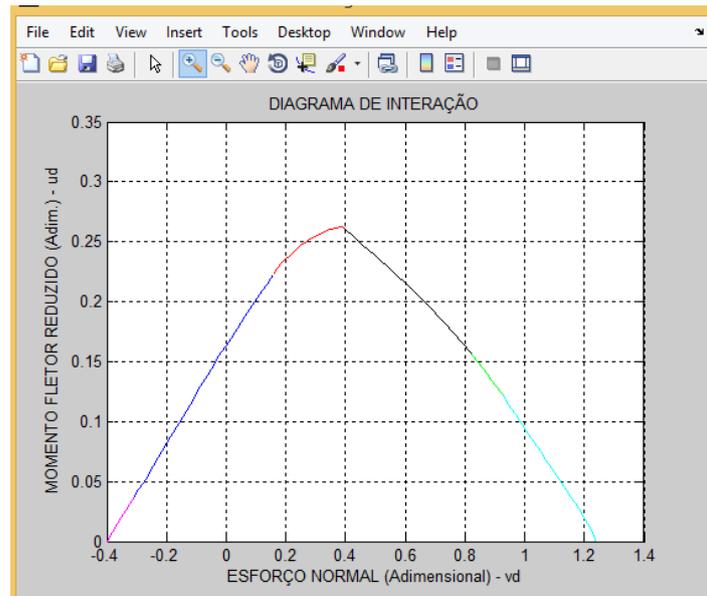


Figura C. 1 - Diagrama momento fletor -esforço normal

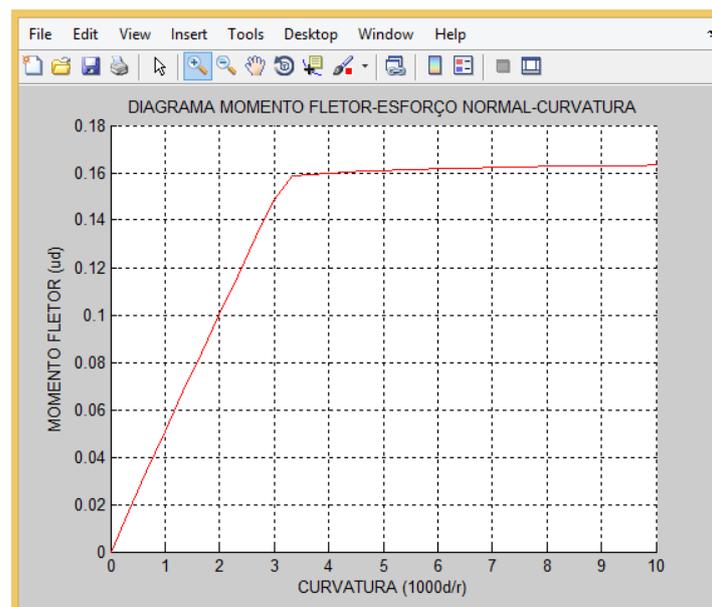


Figura C. 2 - Diagrama momento-curvatura

Os diagramas obtidos abaixo referem-se a uma seção retangular de 20 x 50cm com resistência de 20MPa, com armadura dupla distribuída simetricamente, aço CA-50A, taxa mecânica de armadura  $w = 0,4$ , e  $d/h = 0,1$ . A seção está submetida a uma carga progressiva de compressão com excentricidade fixa.

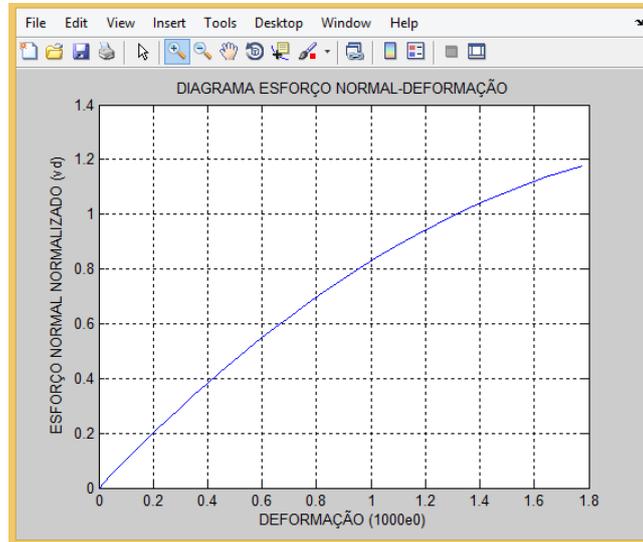


Figura C. 3 - Diagrama esforço normal – deformação

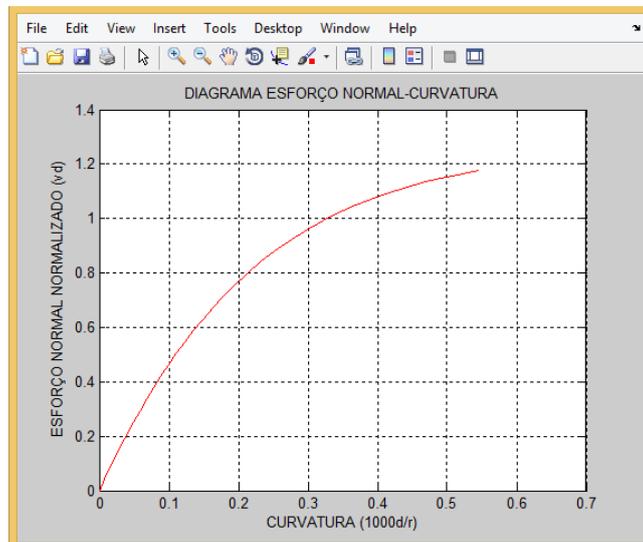


Figura C. 4 - Diagrama esforço normal – curvatura

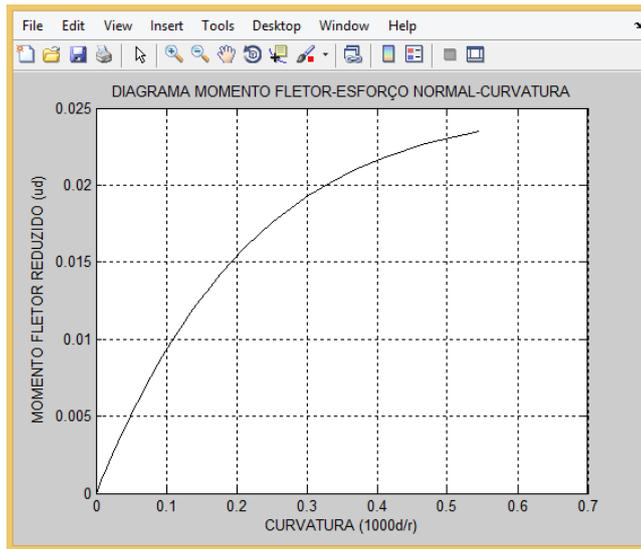


Figura C. 5 - Diagrama momento fletor – curvatura

## ANEXO D - CÓDIGO FONTE MOMENTO – CURVATURA (MAP)

### MODELO DE ADERÊNCIA PERFEITA

O programa CARPE2 é constituído por várias sub-rotinas que criam os gráficos e diagramas tanto para o MAP como para o MAV. Contudo, resolveu-se apresentar apenas o código fonte do diagrama momento – curvatura porque ele envolve os principais métodos e conceitos de programação utilizados nas outras sub-rotinas.

A seguir, encontra-se o código fonte da função escrita na linguagem de programação do MATLAB nomeada por: `diagrama_momento_curvatura_aderencia_perfeita.m`

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Este programa desenha os diagramas momento - curvatura através do método
%de Newton-Raphson.
%O programa gera os diagramas para uma seção transversal retangular de
%concreto com armadura dupla simétrica.
%A área das barras de aço são calculadas em função da taxa mecanica de
%armadura (w) .
%rotinas auxiliares:
% 1)# [e0(j),dNd, Md(j), flpn] = NewtonRaphson(po,fi,Nsd,n,bw,h,dlb,
%dl,fck,fyk,As,Asl,tipo)
% 2)# [fpn,flpn,Md] =
%funcao_auxiliar(pn,fi,Nsd,n,bw,h,dlb,dl,fck,fyk,As,Asl,tipo)
% 3)#
%[Nd,Md,ks,ks11]=flexocompressao(bw,h,dlb,dl,fck,fyk,As,Asl,e0,fi,n,tipo)
%Dados de entrada: seção retangular de concreto e armadura dupla
simetrica.
%Saída do programa: diagramas momento - curvatura
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function diagrama_momento_curvatura_aderencia_perfeita
n = 40;           %número de pontos para os metodos de Gaus e pontos médio
N = 30;           %numero de interações

bw = 20;          %cm - base da seção transversal de concreto
h = 50;           %cm - altura da seção transversal de concreto
Ac = bw*h;        %área da seção transversal

dlb = 5;          %cm - distancia do CG do aço superior até borda superior
dl = 5;           %cm - distancia do do CG do aço inferior até borda
inferior
d = h - dlb;      %distancia da borda superior até aço mais tracionado

fck = 200;        %kgf/cm^2 - resistencia caracteristica a compressão do
concreto
fcd = fck/1.4;    %kgf/cm^2 -resistencia de projeto a compressão do concreto

fyk = 5000;       %kgf/cm^2 - resistencia caracteristica do aço
fyd = fyk/1.15;  %kgf/cm^2 - resistencia de projeto do aço
Es=2.1e6;         %kgf/cm^2 - módulo de deformação longitudinal do aço
eyd = fyd/Es;     %deformação de projeto do aço
```

```

W = 0.4; %taxa mecanica de armadura
As = ((W*Ac*fcd)/fyd)/2; %área da armadura de aço inferior
Asl = As; %área de armadura de aço superior

%define o intervalo de variação da curvatura da seção
fi_i = 0;
fi_f = 0.010/d;
dfi = (fi_f - fi_i)/N;

%Tipo do Aço (Tipo A = 1, Tipo B = 2)
tipo = 1;

%O laço for "v" permite a construção de várias curvas momento-curvatura
vi = 0.0;
vf = 0.0;
for v = vi:0.1:vf
Nsd = -v * (Ac*fcd);
j = 0;
po = 0; %valor inicial da deformação no eixo médio da seção
(h/2)

for fi = fi_i: dfi: fi_f
j = j + 1;
[e0(j),dNd, Md(j), flpn] =
NewtonRaphson(po,fi,Nsd,n,bw,h,dlb,dl,fck,fyk,As,Asl,tipo);

if (flpn == 0)
j = j -1;
break
end

po = e0(j);
fip(j) = fi
vd(j) = dNd / (Ac*fcd);
ud(j) = Md(j) / (Ac*h*fcd);
end

d = h - dl;
curNorm = 1000*d*fip;
hold on;
plot (curNorm(1:j), ud(1:j), 'linestyle','-
','color','r','linewidth',1.2);

end

grid on
zoom on
title('DIAGRAMA MOMENTO FLETOR-ESFORÇO NORMAL-CURVATURA');
xlabel ('CURVATURA (1000d/r)');
ylabel ('MOMENTO FLETOR (ud)');
return

#####Rotinas Auxiliares#####
%-----
%A função a seguir realiza o cálculo de raízes pelo método de Newton-
Raphson
%-----
function [r,dNd, Md, flpn] = NewtonRaphson(po,fi,Nsd, ...
n,bw,h,dlb,dl,fck,fyk,As,Asl,tipo)

```

```

%número máximo de iterações
N=20;

%tolerância
TOL=1e-10;
pn = po;
p = pn;%
i=1;

while i <= N
[fpn,flpn,Md] =
funcao_auxiliar(pn,fi,Nsd,n,bw,h,dlb,dl,fck,fyk,As,Asl,tipo);

if (flpn == 0)
break
end

p = pn + fpn/flpn;
err=abs(p-pn);

if (abs(p-pn)<TOL)
break
else
i = i + 1;
pn = p;
end

end
r = p;
[dNd,ks11, Md] =
funcao_auxiliar(p,fi,Nsd,n,bw,h,dlb,dl,fck,fyk,As,Asl,tipo);
return

%-----
% Função auxilia que recebe e passa valores para a função flexocompressao
%-----
function [dNd,ks11,Md] =
funcao_auxiliar(e0,fi,Nsd,n,bw,h,dlb,dl,fck,fyk,As,Asl,tipo)
[Nd,Md,ks,ks11]=flexocompressao(bw,h,dlb,dl,fck,fyk,As,Asl,e0,fi,n,tipo);
dNd = Nsd - Nd;
return
%-----

%-----
%Esta rotina realiza o cálculo dos esforços resistentes de uma
%seção retangular de concreto armado utilizando o método
%de integração numérica do Ponto Médio.
%-----
function [Nd,Md,ks,ks11]=flexocompressao(b,h,dlb,dl,fck,fyk,As,...
Asl,e0,fi,n,tipo)

d = h - dlb;
Ac = h*b;

fcd = fck/1.4;
fyd = fyk/1.15;

dh = h/n;          %dh é o largura das sub-divisões da seção

```

```

Nc = 0;
Mc = 0;
ksc = zeros(2,2);

y = -(h-dh)/2;      %distância do centro geometrico dos elementos ds = dh*b

%cálculo dos esforços no concreto
for i=1:n
e = e0 - y*fi;
[s,Et] = calcula_tensao_concreto(e,fcd);
Nc = Nc + s*dh*b;
Mc = Mc - s*y*dh*b;

%cálculo da matriz de rigidez da seção de concreto (ksc)
a = [1 -y];
ksc = ksc + a'*Et*a*dh*b;
y = y + dh;
end

%cálculo dos esforços no aço
ysl = (h/2)- dl;      %distância do cg da seção até aço superior
ys = -((h/2)- dlb); %distância do cg da seção até aço inferior
esl = e0 - ysl*fi;   %deformação no aço superior
es = e0 - ys*fi;     %deformação no aço inferior

%Tipo do Aço (Tipo A = 1, Tipo B = 2)
if tipo == 1
[ssl,Es1] = calcula_tensao_aco_tipoA(fyd, esl); %tensão no aço superior
[ss,Es] = calcula_tensao_aco_tipoA(fyd, es);   %tensão no aço inferior
else
[ssl,Es1] = calcula_tensao_aco_tipoB(fyd, esl); %tensão no aço superior
[ss,Es] = calcula_tensao_aco_tipoB(fyd, es);   %tensão no aço inferior
end

%cálculo da matriz de rigidez da seção de aço (kss e kssl)
as = [1 -ys];
kss = as'*Es*as*As;
asl = [1 -ysl];
kssl = asl'*Es1*asl*As1;

Ns = ss*As;          %esforço normal no aço inferior
Ns1 = ssl*As1;      %esforço normal no aço superior
Ms = -ss*As*ys;     %Momento no aço inferior
Ms1 = -ssl*As1*ysl; %Momento no aço superior

%cálculo dos esforços resultantes
Nd = Nc + Ns + Ns1; %esforço normal na seção
Md = Mc + Ms + Ms1; %momento resistente na seção
ks = ksc + kss + kssl; %Matriz de rigidez da seção de concreto armado
ks11 = ks(1,1);

%-----
%Esta rotina realiza o cálculo das tensões no concreto
%-----
function [s,Et] = calcula_tensao_concreto(e,fcd)
ec = -e;
if (ec < 0)
sc = 0;

```

```

Et = 0;
elseif (ec < 0.002)
sc = 0.85*fcd*(1-(1-(ec/0.002))^2);
Et = 0.85*fcd*(-500000*ec + 1000);
elseif (ec < 0.00350001)
sc = 0.85*fcd;
Et = 0;
else
sc = 0;
Et = 0;
end
s = -sc;

%-----
%Esta rotina realiza o cálculo das tensões no aço tipo A
%-----
function [sigma,Et] = calcula_tensao_aco_tipoA(fyd, epslon)
E = 2100000;
H = E * 0.0;
eyd = fyd/E;
eps = abs(epslon);
if (eps < eyd)
sigma = epslon * E;
Et = E;
else
sigma = (fyd + (eps- eyd) * H) * sign(epslon);
Et = H;
%disp('aco escoou!!!!');
end

%-----
%Esta rotina realiza o cálculo das tensões no aço tipo B
%-----
function [sigma,Et] = calcula_tensao_aco_tipoB(fyd, epslon)
E = 2100000;
ey0 = ((0.7*fyd)/E);
eyd = (fyd/E) + 0.002;
a = 1/(45*fyd^2);
b = -((2*0.7)/(45*fyd))+ (1/E);
c = ((0.7^2)/45)-(abs(epslon));
if (abs(epslon) < ey0)
sigma = epslon * E;
Et = E;
elseif (abs(epslon) < eyd)
sigma = ((-b + sqrt((b^2)-4*a*c))/(2*a)) * sign(epslon);
Et = 15/(sqrt((225*(b^2))-20*45*a*c));
else
sigma = fyd * sign(epslon);
Et = 0;
end

```