



Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



**Colinearidade e Concorrência em Olimpíadas Internacionais de
Matemática: uma reflexão voltada para o ensino da Geometria
Plana no Brasil**

Ronald Alexandre Martins

Brasília
2015

Termo de Autorização para Publicação de Teses e Dissertações Eletrônicas (TDE) na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD) e na Biblioteca Digital do PROFMAT (BIT)

Na qualidade de titular dos direitos de autor da presente publicação, autorizo a Universidade de Brasília - UnB, o Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia - IBICT e a Sociedade Brasileira de Matemática - SBM a disponibilizar, de forma gratuita, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o texto integral desta obra, em meio eletrônico na rede mundial de computadores, para fins de leitura, impressão e/ou *download* pela Internet, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

Brasília, 26 de junho de 2015.

Ronald Alexandre Martins.

Ronald Alexandre Martins

Colinearidade e Concorrência em Olimpíadas Internacionais de Matemática: uma reflexão voltada para o ensino da Geometria Plana no Brasil

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do título de MESTRE em Matemática, pelo Departamento de Matemática da Universidade de Brasília.

Orientador: Prof. Dr. Kellcio Oliveira Araújo

Brasília

2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M375c Martins, Ronald Alexandre
Colinearidade e Concorrência em Olimpíadas
Internacionais de Matemática: uma reflexão voltada
para o ensino da Geometria Plana no Brasil / Ronald
Alexandre Martins; orientador Kellcio Oliveira
Araújo. -- Brasília, 2015.
121 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em
Matemática) -- Universidade de Brasília, 2015.

1. Geometria plana. 2. Olimpíadas. 3.
Colinearidade. 4. Concorrência. I. Araújo, Kellcio
Oliveira, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

**Colinearidade e Concorrência em Olimpíadas Internacionais de Matemática:
uma reflexão voltada para o ensino da Geometria Plana no Brasil**

por

Ronald Alexandre Martins *

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, no Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como requisito parcial para a obtenção do título de

MESTRE

Brasília, 26 de junho de 2015.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Kellcio Oliveira Araújo - UnB/DF
Presidente

Prof. Dr. Ricardo Ruviano - UnB/DF
Membro

Prof. Dr. José Eduardo Castilho - FUP/DF
Membro

* O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Ronald Alexandre Martins é graduado em Engenharia Cartográfica pelo Instituto Militar de Engenharia e atualmente é professor de Matemática do Sistema de Ensino Seleção, do Colégio Militar de Brasília e do Colégio-Curso Pódion.

*Dedico este trabalho às pessoas que sempre me apoiaram, independente das circunstâncias.
Somente Deus, eu e elas sabemos quem são.*

Agradecimentos

A Deus, sempre e por absolutamente TUDO.

À minha querida esposa, Katiuza e aos meus filhos, Manuela, Daniel e Ester, pela compreensão, paciência e consentimento durante o período do curso e de elaboração deste trabalho.

Ao Sistema de Ensino Seleção, que acreditou em mim e me abriu as portas para a arte da docência, ao Colégio Militar de Brasília, onde pude conhecer grandes amigos que me inspiraram na carreira, e ao Colégio-Curso Pódion, por me oferecer o desafio de lecionar em turmas compostas por alunos de alto nível intelectual.

Aos meus amigos da Turma 2013 do PROFMAT/UnB, pelo convívio alegre, apoio e palavras de incentivo durante a realização deste sensacional curso: “Vocês são muito bons!”.

Ao meu orientador, professor Kellcio, coordenador regional de iniciação científica da OBMEP, cuja humildade me foi um exemplo e cuja orientação foi de grande importância para que esse trabalho pudesse ser realizado.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), à CAPES e à Universidade de Brasília (UnB) por, respectivamente, realizar, financiar e executar o projeto PROFMAT, que forneceu a muitos professores, como eu, a chance de alcançar o título de Mestre.

Nota do autor

Questões rotuladas como difíceis dentro da Geometria Euclidiana Plana sempre despertaram o meu interesse, desde os tempos de adolescência, época em que era atraído pelas provas de Matemática dos concursos militares, os quais me eram mais conhecidos que as olimpíadas de Matemática. O fascínio era tal que comecei a construir, desde essa época, cadernos com as questões que julgava difíceis ou, pelo menos, interessantes, e que guardo até os dias de hoje como relíquias pessoais.

Lembro-me como ficava maravilhado com problemas geométricos que eram resolvidos por traçados inesperados ou propriedades surpreendentes, difíceis de enxergar em um primeiro momento.

Esse interesse pessoal pelas questões difíceis me levou a prestar o vestibular do Instituto Militar de Engenharia (IME), uma das instituições de ensino superior mais renomadas no Brasil, onde me graduei em Engenharia, mas sempre mantendo viva a paixão pela arte de lecionar Matemática.

Essa paixão inspiradora renovou-se em dois momentos recentes da minha vida como docente: ao assumir em 2013 as aulas da disciplina de Geometria para a turma preparatória IME-ITA, no Colégio-Curso Pódion e, no mesmo ano, ao iniciar as aulas da disciplina MA 13, no mestrado PROFMAT, quando me deparei com listas de exercícios de Geometria raramente trabalhadas no ensino regular de hoje.

Espero que o leitor, ao apreciar este trabalho, possa, assim como eu, sentir o prazer de ser desafiado a buscar mais conhecimento dentro do ensino da Matemática, em especial o da Geometria, buscando melhorar, a cada dia, o ensino básico do nosso país.

O autor.

Resumo

As olimpíadas de Matemática estão cada vez mais ganhando espaço dentro das escolas brasileiras. Esse fato é observado em virtude da crescente participação e interesse dos alunos nas competições nacionais e regionais a cada ano. Isso ocorre porque essas competições, em si, não requerem do aluno, como muitos pensam, memorizações injustas de fórmulas e o conhecimento total da disciplina, mas apenas o conhecimento de alguns conceitos básicos, um raciocínio rápido e certa criatividade. A Geometria sempre esteve presente em todas as olimpíadas de Matemática, apresentando-se como um dos tópicos que os alunos encontram maior dificuldade. Consciente da limitada atenção dada ao ensino da Geometria no Brasil, oferece-se nesse trabalho uma pequena contribuição para ampliar o seu ensino nos bancos escolares, principalmente quanto ao tema Colinearidade e Concorrência, recorrente em diversas olimpíadas, tanto em nível nacional quanto internacional, porém esquecido pelos livros de Matemática atuais. O autor apresenta dados recentes sobre as olimpíadas de Matemática no Brasil e no mundo, e resgata conceitos como os de homotetia, inversão, polaridade, divisão harmônica, circunferência de Apolônio, eixo radical, quadriláteros completos, as retas de Euler, Steiner, Housel, Simson-Wallace, Gauss-Newton, além dos pontos notáveis de Gergonne, Lemoine, Nagel e teoremas como os de Menelaus, Ceva, Arquimedes, Desargues, Pascal, Brianchon, Pappus, Monge, Brahmagupta, Miquel, entre outros.

Palavras-chaves: Geometria plana; olimpíadas; colinearidade; concorrência.

Abstract

The Mathematics Olympiads are increasingly gaining ground in Brazilian schools. This fact is observed because of increasing participation and interest of students in national and regional competitions every year. This is because these competitions, in itself, does not require the student, as many think, unjust recollections of formulas and full knowledge of the discipline, but only the knowledge of some basic concepts, a quick thinking and certain creativity. Geometry has always been present in all the math olympiads, presenting itself as one of the topics that students find most difficult. Aware of the limited attention given to the teaching of Geometry in Brazil, this work offers a little contribution to expand its teaching in school benches, especially on the subject Collinearity and Concurrence, recurring in several olympics problems, both at national and international level, but forgotten by current Mathematics books. The author presents recent data about the Mathematics Olympiads in Brazil and worldwide, and rescues the concepts of homothetic transformation, inversion, polarity, harmonic division, circle of Apollonius, radical axis, complete quadrilaterals, lines of Euler, Steiner, Housel, Simson-Wallace, Gauss-Newton, in addition to the notable points of Gergonne, Lemoine, Nagel and theorems such as Menelaus, Ceva, Archimedes, Desargues, Pascal, Brianchon, Pappus, Monge, Brahmagupta, Miquel, among others.

Keywords: Plane geometry; olympiads; collinearity; concurrence.

Lista de ilustrações

| | |
|--|----|
| Figura 1 – Bissetriz como LG | 17 |
| Figura 2 – Mediatriz como LG | 18 |
| Figura 3 – Tangentes a um círculo traçadas a partir de um ponto exterior | 19 |
| Figura 4 – Triângulo retângulo inscrito em um semicírculo | 19 |
| Figura 5 – Perpendicularidade entre as bissetrizes interna e externa de um triângulo | 20 |
| Figura 6 – Ângulo entre duas bissetrizes internas de um triângulo | 21 |
| Figura 7 – Ângulo entre duas bissetrizes externas de um triângulo | 21 |
| Figura 8 – Ângulo entre bissetriz interna e bissetriz externa relativas a vértices distintos | 22 |
| Figura 9 – Incentro de um triângulo | 23 |
| Figura 10 – Circuncentro de um triângulo | 23 |
| Figura 11 – Exincentro de um triângulo | 24 |
| Figura 12 – Divisão de um segmento por um ponto | 25 |
| Figura 13 – Prova da unicidade na divisão de um segmento por um ponto | 25 |
| Figura 14 – Divisão harmônica | 26 |
| Figura 15 – Configurações para a razão da divisão harmônica | 26 |
| Figura 16 – Relação do ponto médio | 27 |
| Figura 17 – Teorema da bissetriz interna | 28 |
| Figura 18 – Teorema da bissetriz externa | 29 |
| Figura 19 – Recíproca do teorema das bissetrizes | 30 |
| Figura 20 – Divisão harmônica pelo incentro e exincentro | 30 |
| Figura 21 – Potência de um ponto | 31 |
| Figura 22 – Círculos ortogonais | 32 |
| Figura 23 – Círculos ortogonais cortados por uma reta | 33 |
| Figura 24 – Circunferência de Apolônio | 33 |
| Figura 25 – Eixo radical | 34 |
| Figura 26 – Centro radical | 35 |
| Figura 27 – Colinearidade de pontos | 36 |
| Figura 28 – Teorema de Menelaus | 36 |
| Figura 29 – Demonstração do teorema de Menelaus | 37 |
| Figura 30 – Demonstração do teorema recíproco de Menelaus | 38 |

| | |
|--|----|
| Figura 31 – Prova do lema | 39 |
| Figura 32 – Demonstração do teorema de Menelaus trigonométrico | 39 |
| Figura 33 – Teorema de Ceva | 40 |
| Figura 34 – Demonstração do Teorema Ceva | 41 |
| Figura 35 – Demonstração do teorema recíproco de Ceva | 41 |
| Figura 36 – Colinearidade dos pés das bissetrizes externa e da bissetriz interna | 43 |
| Figura 37 – Colinearidade dos pés das bissetrizes externas | 44 |
| Figura 38 – Divisão da mediana pelo baricentro | 45 |
| Figura 39 – Concorrência das alturas de um triângulo | 45 |
| Figura 40 – Ponto de Gergonne | 46 |
| Figura 41 – Ponto de Nagel | 47 |
| Figura 42 – Cevianas isogonais | 48 |
| Figura 43 – Demonstração do ponto de Lemoine - 1ª parte | 48 |
| Figura 44 – Demonstração do ponto de Lemoine - 2ª parte | 49 |
| Figura 45 – Teorema de Monge | 50 |
| Figura 46 – Demonstração do teorema de Monge | 50 |
| Figura 47 – Teorema de Monge-d’Alembert | 51 |
| Figura 48 – Demonstração do teorema de Monge-d’Alembert | 52 |
| Figura 49 – Reta de Euler | 53 |
| Figura 50 – Demonstração da Reta de Euler - 1ª parte | 53 |
| Figura 51 – Demonstração da Reta de Euler - 2ª parte | 54 |
| Figura 52 – Demonstração da Reta de Housel - 1ª parte | 55 |
| Figura 53 – Demonstração da Reta de Housel - 2ª parte | 55 |
| Figura 54 – Demonstração da Reta de Housel - 3ª parte | 56 |
| Figura 55 – Quadrilátero completo | 57 |
| Figura 56 – Demonstração da Reta de Gauss-Newton | 57 |
| Figura 57 – Prova do quadrilátero inscritível | 59 |
| Figura 58 – Lema nº11 de Arquimedes | 59 |
| Figura 59 – Prova do Lema nº11 de Arquimedes | 60 |
| Figura 60 – Demonstração do teorema de Arquimedes | 61 |
| Figura 61 – Quadrilátero de diagonais perpendiculares | 62 |
| Figura 62 – Demonstração do Teorema de Brahmagupta | 62 |
| Figura 63 – Demonstração da Fórmula de Brahmagupta | 63 |
| Figura 64 – Demonstração do teorema de Simson-Wallace | 65 |
| Figura 65 – Demonstração do teorema recíproco de Simson-Wallace | 66 |
| Figura 66 – Demonstração do teorema de Steiner | 66 |
| Figura 67 – Teorema de Miquel para triângulos | 67 |
| Figura 68 – Demonstração do teorema de Miquel para triângulos | 67 |
| Figura 69 – Teorema de Miquel para quadrilátero completo | 68 |
| Figura 70 – Demonstração do teorema de Miquel para quadrilátero completo | 68 |
| Figura 71 – Homotetia de ponto | 69 |

| | |
|---|----|
| Figura 72 – Homotetia de segmento | 70 |
| Figura 73 – Homotetia de ângulo | 70 |
| Figura 74 – Homotetia de polígono | 71 |
| Figura 75 – Homotetia de círculo | 71 |
| Figura 76 – Centros de homotetia para três círculos | 72 |
| Figura 77 – Ponto inverso (A'), pólo (A) e reta polar (a) | 72 |
| Figura 78 – Polaridade | 73 |
| Figura 79 – Reta polar de um ponto exterior ao círculo | 73 |
| Figura 80 – Teorema de Desargues | 74 |
| Figura 81 – Teorema recíproco de Desargues | 76 |
| Figura 82 – Teorema de Pascal | 77 |
| Figura 83 – Demonstração do teorema de Pascal | 78 |
| Figura 84 – Teorema de Pappus | 79 |
| Figura 85 – Demonstração do teorema de Pappus | 79 |
| Figura 86 – Demonstração do teorema de Brianchon | 81 |
| Figura 87 – IMO-2013.1 | 85 |
| Figura 88 – IMO-2013.2 | 85 |
| Figura 89 – OMCS-2014.1 | 86 |
| Figura 90 – OMCS-2014.2 | 87 |
| Figura 91 – OIbM-2010.1 | 88 |
| Figura 92 – OIbM-2010.2 | 88 |
| Figura 93 – OIbM-2010.3 | 89 |
| Figura 94 – OMCPLP-2013.1 | 90 |
| Figura 95 – RMM-2010.1 | 91 |
| Figura 96 – RMM-2010.2 | 91 |
| Figura 97 – OBM-2012.1 | 93 |
| Figura 98 – OBM-2012.2 | 94 |
| Figura 99 – OBM-2012.3 | 94 |
| Figura 100 – APMO-2013.1 | 95 |

Lista de abreviaturas e siglas

| | |
|--------|--|
| APMO | Asian Pacific Mathematics Olympiad |
| CAPES | Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior |
| CGEE | Centro de Gestão e Estudos Estratégicos |
| CNPq | Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico |
| CT&E | Ciência, Tecnologia e Inovação |
| ENEM | Exame Nacional do Ensino Médio |
| IIT | Indian Institute of Technology |
| IME | Instituto Militar de Engenharia |
| IMO | International Mathematical Olympiad |
| IMPA | Instituto de Matemática Pura e Aplicada |
| IMU | International Mathematical Union |
| ITA | Instituto Tecnológico de Aeronáutica |
| LG | Lugar geométrico |
| MEC | Ministério da Educação e Cultura |
| MIT | Massachusetts Institute of Technology |
| MMM | Movimento da Matemática Moderna |
| OBM | Olimpíada Brasileira de Matemática |
| OBMEP | Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas |
| OIbM | Olimpíada Iberoamericana de Matemática |
| OMCPLP | Olimpíada de Matemática da Comunidade de Países de Língua Portuguesa |

| | |
|------------|--|
| OMCS | Olimpíada de Matemática do Cone Sul |
| PCN | Parâmetros Curriculares Nacionais |
| PECI | Preparação Especial para Competições Internacionais |
| PIC | Programa de Iniciação Científica Junior |
| PICME | Programa de Iniciação Científica – Mestrado |
| POTI | Pólos Olímpicos de Treinamento Intensivo |
| PROF | Programa Oficinas de Formação |
| PROFMAT | Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional |
| PUC | Pontifícia Universidade Católica |
| RMM | Romanian Master in Mathematics |
| SBM | Sociedade Brasileira de Matemática |
| UFF | Universidade Federal Fluminense |
| UFMG | Universidade Federal de Minas Gerais |
| UnB | Universidade de Brasília |
| UNICAMP | Universidade de Campinas |
| UNOCHAPECÓ | Universidade Comunitária Regional de Chapecó |

Sumário

| | | |
|----------|---|------------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 1.1 | Objetivos | 1 |
| 1.2 | Motivação e justificativa | 2 |
| 1.3 | Metodologia e apresentação do trabalho | 3 |
| 2 | O ensino da Geometria no Brasil | 5 |
| 3 | As competições olímpicas de Matemática e o Brasil | 9 |
| 3.1 | As competições olímpicas e seus reflexos | 9 |
| 3.2 | As iniciativas atuais para a promoção da Matemática no país | 11 |
| 3.3 | Os resultados observados na pesquisa | 15 |
| 4 | Fundamentação matemática | 17 |
| 5 | Alguns problemas olímpicos | 83 |
| 5.1 | Recomendações | 83 |
| 5.2 | Enunciados e soluções propostas | 84 |
| 6 | Considerações finais | 97 |
| | Referências | 99 |
| | Apêndice | 103 |

Introdução

1.1 Objetivos

A ideia do mestrado PROFMAT é fornecer um aprimoramento na formação profissional dos professores, com ênfase na busca de um domínio aprofundado e articulado do conteúdo matemático para a atuação como docente na educação básica¹ das escolas do país.

Com base nesse pensamento e levando em consideração a conjuntura atual de muitos professores e, por conseguinte, as suas diversas dificuldades, este trabalho objetiva tornar o ensino da Geometria Plana mais instigante, resgatando alguns conceitos e teoremas clássicos já esquecidos no Ensino Básico brasileiro, proporcionando subsídios aos docentes e discentes, em especial no tocante ao conteúdo de Concorrência e Colinearidade, cobrado com frequência nas olimpíadas de Matemática no mundo inteiro.

A intenção do autor é de que esse material possa propiciar a todos – professores e alunos – uma outra visão da Geometria Euclidiana Plana e uma reflexão acerca do ponto de vista das questões olímpicas, como forma de melhorar o processo ensino-aprendizagem dessa disciplina e, possivelmente, como elemento motivador para todos aqueles que buscam aprimorar seus conhecimentos visando à preparação para competições de Matemática no âmbito nacional e internacional.

Assim, pode-se resumir como objetivos para este trabalho:

• **Objetivo geral:**

✓ Apresentar a importância do assunto Colinearidade e Concorrência na preparação de alunos para as competições nacionais e internacionais de Matemática, resgatando conceitos e teoremas clássicos da Geometria Plana, já esquecidos na educação brasileira.

• **Objetivos específicos:**

✓ Fazer um levantamento quantitativo do assunto nas diversas olimpíadas internacionais de Matemática dos últimos 5 anos (2010-2014);

✓ Apresentar e demonstrar os principais tópicos ligados ao assunto Colinearidade e Concor-

¹ A educação básica compreende a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio, e tem por finalidades desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores, contribuindo para a redução das desigualdades sociais (MEC, 2013).

rência na Geometria Plana;

- ✓ Reunir os problemas sobre Colinearidade e Concorrência cobrados nos últimos anos nas diversas olimpíadas para fins de apoio ao treinamento e preparação de alunos e professores;

- ✓ Selecionar e resolver alguns problemas recentes de olimpíadas de Matemática, nacionais e internacionais, envolvendo Colinearidade e Concorrência;

- ✓ Propor uma reflexão sobre o ensino da Matemática, em especial o da Geometria Plana, na educação básica, no sentido de resgatar conceitos e teoremas abandonados, e, quem sabe, até mesmo repensar a maneira de ensinar a disciplina, com um viés desafiador, também voltado para a preparação olímpica.

1.2 Motivação e justificativa

DANTE (1991) afirma que “um dos objetivos do ensino de Matemática é fazer o aluno pensar produtivamente e, para isso, nada melhor que lhe apresentar situações problemas que o envolva, desafie-o e o motive a querer resolvê-las”. Entende-se, assim, que um professor que adiciona às suas aulas questões desafiadoras está cumprindo o seu papel de docente de uma forma diferenciada, uma vez que conseguirá despertar nos seus alunos a criatividade para resolver problemas, fazendo-os utilizar, para isso, os mais variados conceitos matemáticos aprendidos ao longo de sua vida.

O que se tem percebido é que o gosto para a resolução de problemas olímpicos aumenta e torna-se mais empolgante à medida que o aluno percebe que, quanto mais problemas resolvidos ele conhecer, maior será o seu banco de estratégias para a resolução dos próximos problemas e, conseqüentemente, maiores as chances de solucioná-los. Para SARMENTO (2007), resolver um problema de Geometria utilizando diferentes conceitos contribui para despertar no aluno o desejo pela disciplina e o desenvolvimento de habilidades geométricas.

Apesar de a Geometria Euclidiana fazer parte do conteúdo tratado na educação básica, raramente o assunto Colinearidade e Concorrência é ensinado no Ensino Fundamental, no Ensino Médio ou mesmo na maioria dos cursos de graduação em Matemática. Em especial, apenas uma pequena parcela dos estudantes e professores se aprofundam nesse assunto: aqueles que se dedicam às olimpíadas e competições matemáticas.

Dentre as áreas matemáticas exigidas nessas competições, a Geometria é um tópico sempre presente e que é considerado um dos mais difíceis. Analisando as diversas olimpíadas internacionais de Matemática, o autor observou que o assunto Colinearidade e Concorrência tem sido, de certa forma, bastante cobrado, seja diretamente ou indiretamente, nos problemas apresentados. Portanto, é um tema importante a ser estudado e, porque não dizer, resgatado dentro das escolas e nos livros didáticos atuais utilizados no ensino regular do país.

Assim, o presente trabalho se justifica no sentido de mostrar a importância do assunto Colinearidade e Concorrência e suas aplicações na Geometria Plana, em especial, na preparação de jovens para as modernas olimpíadas de Matemática, o que, sem dúvida, traz um diferencial desafiador e motivante para os

educadores e estudantes brasileiros, fomentando o gosto pela Matemática.

1.3 Metodologia e apresentação do trabalho

Com o intuito de atingir os objetivos traçados, o presente trabalho foi desenvolvido mediante a seguinte metodologia:

- ✓ realizar inicialmente uma pesquisa bibliográfica em livros especializados em olimpíadas de Matemática, bem como nos sítios oficiais de cada competição na Internet, fazendo os contatos necessários com os respectivos coordenadores, a fim de coletar o maior número de provas aplicadas nessas competições mundiais nos últimos 5 anos (2010 a 2014);

- ✓ selecionar os problemas de geometria que envolvam diretamente a aplicação dos conceitos de Colinearidade e Concorrência;

- ✓ relacionar conceitos e demonstrar teoremas aplicáveis a uma parte desses problemas, buscando preencher, de forma sequenciada, a lacuna existente nos livros escolares brasileiros sobre o assunto, construindo um instrumental de apoio didático para o ensino voltado à preparação olímpica;

- ✓ apresentar soluções a alguns desses problemas olímpicos utilizando os teoremas estudados, notadamente os cobrados em competições das quais o Brasil participa;

- ✓ elaborar uma coletânea de problemas olímpicos recentes (2010-2014), sobre Colinearidade e Concorrência, visando dar suporte à preparação de alunos e professores; e

- ✓ propor, ao final, o uso de questões olímpicas em sala de aula como desafios no ensino e no aprendizado da Geometria, tanto por parte dos professores quanto dos alunos, bem como a sua introdução nos livros didáticos da educação básica.

Procurou-se, ao longo deste trabalho, apresentar todo o texto, enunciados e demonstrações de uma maneira simplificada e de fácil entendimento, fugindo, às vezes, do formalismo teórico, com fins a possibilitar uma fácil compreensão do tema para professores e alunos da educação básica, construindo assim um instrumental de apoio didático para o ensino voltado à preparação das olimpíadas de Matemática.

As figuras utilizadas para apoiar as demonstrações dos lemas, teoremas e corolários, bem como das soluções dos problemas, foram elaboradas pelo autor com o auxílio do recurso computacional de Matemática dinâmica chamado GeoGebra².

No decorrer do texto, o leitor encontrará ainda, em notas de rodapé, um pouco da história e da biografia de alguns dos matemáticos e dos teoremas citados, que o ajudarão a compreender melhor o momento em que estes teoremas surgiram, qual a sua repercussão à época e qual a sua importância atual.

A dissertação ficou dividida em 6 (seis) capítulos, conforme descrição a seguir.

² Criado por Markus Hohenwarter, o GeoGebra é um programa gratuito multiplataforma de Matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da Matemática do nível básico ao universitário. O programa reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente (BORTOLOSSI; RESENDE; PESCO, 2015)

Neste primeiro capítulo, é feita uma introdução em que são apresentados, dentro do contexto do Programa de Mestrado Profissional em Matemática PROFMAT, os objetivos do trabalho, a motivação e a justificativa do tema desenvolvido, bem como a metodologia empregada pelo autor na sua elaboração.

No segundo capítulo, o autor resgata um pequeno histórico das mudanças sofridas pelo ensino da Matemática no Brasil, notadamente na Geometria, a partir da segunda metade do século XX, quando sérias mudanças no processo ensino-aprendizagem ocorreram no país. O autor sugere então a ideia da utilização da resolução de problemas olímpicos como uma maneira de incrementar esse processo, despertando no aluno da educação básica um interesse maior pela Matemática.

O Capítulo 3 é dedicado à apresentação de algumas características das competições olímpicas matemáticas e seus reflexos positivos no Brasil e no mundo, principalmente para o desenvolvimento das Ciências em geral. O autor cita as várias iniciativas existentes hoje no país, ligadas à preparação de estudantes para uma Matemática desafiadora e emocionante, destacando os resultados recentes alcançados, por exemplo, pela Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Além disso, são apresentados os resultados da pesquisa realizada, justificando a relevância do tema Colinearidade e Concorrência para o trabalho.

No Capítulo 4, o autor apresenta, de forma simples e didática, diversos conceitos e teoremas matemáticos, praticamente ausentes dos livros didáticos atuais, com o intuito de fornecer um embasamento teórico capaz de ajudar os alunos na resolução de muitos problemas olímpicos envolvendo o tema Colinearidade e Concorrência.

O Capítulo 5 contém soluções elaboradas pelo autor para 7 (sete) problemas selecionados sobre Colinearidade e Concorrência, cobrados em olimpíadas recentes, nas quais a participação de estudantes brasileiros é permitida, como forma de aplicar o conteúdo desenvolvido na fundamentação teórica do Capítulo 4.

No Capítulo 6 são apresentadas as considerações finais do autor sobre o trabalho realizado e, por fim, a bibliografia consultada para a sua execução e um Apêndice com os enunciados dos 141 problemas olímpicos encontrados na pesquisa, que poderão auxiliar, em muito, professores e alunos em relação ao tema.

O ensino da Geometria no Brasil

Em 27/01/1921, na Conferência “Geometria e Experiência”, realizada na Academia Prussiana de Ciências, Einstein proferiu: “Atribuo especial importância quanto à visão que tenho à Geometria, porque sem ela eu não teria sido capaz de formular a teoria da relatividade”.
(LORENZATO, 1995)

A Geometria é considerada um dos principais eixos da Matemática para a formação do cidadão porque está sempre presente no seu cotidiano, nas mais variadas situações, como nas construções, na natureza e nos diversos objetos existentes.

A chamada Geometria Euclidiana foi construída com base nos escritos do matemático grego Euclides. Sua obra “Elementos”, escrita por volta do ano 300 a.C., apresenta a Geometria segundo o método dedutivo (ou axiomático), que consiste em iniciar com afirmações chamadas “axiomas” ou “postulados”, os quais são aceitos como verdade, sem necessidade de justificativas, e, a partir daí, ir deduzindo, através de demonstrações, outras afirmações decorrentes, desenvolvendo assim o seu conteúdo (GUALBERTO, 2007).

GONÇALVES e LANDO (2012) apresentam um breve passeio pela história da Educação Brasileira, notadamente da Geometria, desde o início do século XX, quando o Brasil ainda era essencialmente um país agrícola. Destacam que, assim como outras disciplinas passaram por reformas ao longo dos anos, a Matemática também sofreu, principalmente durante a década de 1950 e 1960, quando uma transformação, em especial na forma de aprendizagem da Geometria, foi estabelecida: uma abordagem didática nova e restrita, com a substituição das tradicionais demonstrações, simplesmente, pela apresentação de fórmulas capazes de resolver problemas algébricos e que deveriam ser memorizadas pelos discentes.

Ainda hoje é comum encontrar, no cotidiano escolar, listas de exercícios de geometria nas quais o menos importante é o conhecimento geométrico em si. Na maioria das vezes o que há é uma exaustiva repetição de aplicações algébricas de fórmulas, em detrimento de uma análise, por exemplo, das propriedades geométricas, da condição de existência de uma figura, da visualização de particularidades, e, principalmente, da construção de elementos auxiliares, responsáveis por resoluções de alto teor geométrico, pouco cálculo e livres de algebrismo. A homotetia (do grego: *homo* = “similar” + *thetós* = “posição”), por exemplo, é um conceito envolvendo transformação geométrica, mostrado no Capítulo 4, que resolve problemas difíceis de uma forma simples, sem o uso de cálculos extensos, mas que sequer é citada na maioria dos livros escolares.

SILVA (2014) afirma que a atenção dispensada às demonstrações geométricas ainda é pequena nos

livros didáticos da educação básica brasileira. A priorização no emprego de fórmulas a serem memorizadas e da mecanização de processos ainda é bastante frequente. Para ele, os problemas de geometria não devem se resumir apenas à descoberta de um valor numérico que atenda à proposta de um enunciado. Antes disso, é preciso conceber a figura, reconhecer suas características, interpretar suas propriedades, enfim, uma sequência de raciocínios que pode até não ser percebida, mas que é certamente necessária.

Para GONÇALVES e LANDO (2012), vários foram os motivos que justificam o caos no atual ensino da Geometria, entre eles: a falta de conhecimentos por parte do professor; a importância exagerada dispensada ao livro didático; a fragmentação da disciplina por assunto ou série, e o chamado Movimento da Matemática Moderna¹, ocorrido na década de 1960. A consequência que se colhe no tempo presente é esta: uma geração que não estudou Geometria não sabe como ensiná-la, ficando presa ao que se escreve nos livros didáticos.

Segundo NEVES (2013), diversas pesquisas sobre o aprendizado de Geometria constataam que essa é uma área que apresenta resultados consideravelmente insatisfatórios, uma vez que é menos explorada do que outras áreas da Matemática, não somente nas séries iniciais da educação básica, como também no Ensino Fundamental - Ciclo II e no Ensino Médio.

O que se percebe nas escolas é que o estudo da Geometria, que deveria ocorrer de forma gradativa durante todo o Ensino Fundamental, sendo aprofundada no Ensino Médio, não acontece. Em muitos casos, os alunos chegam ao Ensino Médio sem ter visto nenhuma parte de Geometria; outras vezes, ela é apresentada de uma forma “simplista”, apenas com desenhos e fórmulas que permitem resolver problemas de cálculo.

Segundo pesquisas realizadas por GRILLO (2014), existe uma tendência, em muitas escolas, de se omitir o ensino da Geometria. A disciplina é deixada para o final do período letivo, e qualquer atraso no cronograma das aulas implica na abreviação ou mesmo no cancelamento do seu conteúdo.

LORENZATO (1995) é ainda mais categórico; ele afirma que “a Geometria está ausente ou quase ausente da sala de aula”. Vários trabalhos de pesquisadores brasileiros, entre eles PEREZ (1991) e PAVANELLO (1993), confirmam que essa lamentável realidade educacional é um problema antigo no país.

Para LORENZATO (1995), um dos motivos para a omissão do ensino de Geometria “deve-se à exagerada importância que, entre nós, desempenha o livro didático”. Vários livros didáticos ainda apresentam a Geometria como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, deixando-a para as últimas páginas do livro, aumentando assim as chances de não vir a ser estudada por falta de tempo no ano letivo.

NEVES (2013) acrescenta que, infelizmente, o ensino de Matemática hoje é, de modo geral, orientado pelos processos contidos nos livros didáticos, o que inflexibiliza e limita os professores na busca do ensino dinâmico e atraente da Geometria.

Para se ter uma ideia, MACEDO (2014) afirma que, nas últimas décadas, teoremas como o de Menelaus e o de Ceva, que tratam de Colinearidade e Concorrência, foram excluídos dos livros didáticos do Ensino Básico sem qualquer justificativa, o que levou, naturalmente, as escolas a abandonarem os seus estudos. Apesar de as demonstrações de tais teoremas serem de fácil entendimento e, portanto,

¹ O Movimento da Matemática Moderna (MMM) foi um movimento internacional do ensino da Matemática que surgiu no final da década de 1950 e início de 1960 e se baseava na excessiva preocupação com as estruturas algébricas, utilização de símbolos da teoria dos conjuntos e topologia no processo ensino-aprendizagem das escolas.

perfeitamente adequadas ao nível de conhecimento básico, renegá-los aos alunos, principalmente do Ensino Médio, não foi uma ideia salutar, haja vista que tais conceitos podem facilitar as resoluções de diversos problemas propostos em vestibulares concorridos no país, como o do Instituto Militar de Engenharia (IME) e o do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), e nas diversas olimpíadas de Matemática existentes.

Segundo DE FREITAS (2013), com a atual decadência do ensino de Geometria na educação básica brasileira, tem-se aumentado o interesse de pesquisadores, ligados ao ensino da Matemática, em debater o assunto nas escolas e, até mesmo, nas universidades, principalmente pelo fato de ser uma disciplina em que os docentes se sentem menos preparados, seja pelo desconhecimento em si, seja pelo fato de exigir do profissional a capacidade de fazer desenhos, traçar retas, ângulos, círculos e curvas, muitas vezes a mão livre e sem precisão, no quadro-negro, o que não é agradável para quem não dispõe de certos dons artísticos e de organização.

VIEIRA (2013) ratifica esse entendimento:

“Atualmente, o interesse dos professores pela Geometria tem aumentado. Existe um consenso coletivo sobre a importância dessa área para a formação acadêmica dos alunos. Entretanto, em vários momentos o estudo da Geometria é renegado ou mesmo deixado apenas para o final do ano letivo no ensino básico. [...] O ensino tradicional da Geometria deixa lacunas no conhecimento, pois esse ensino é dado basicamente em aulas expositivas, baseadas em conceitos e fórmulas.”

Recentemente, com o crescente desenvolvimento, divulgação e expressivo resultado das olimpíadas de Matemática no Brasil, torna-se necessário que o material didático das escolas caminhe no sentido de se adequar, em parte, aos assuntos cobrados nessas competições. Uma ideia interessante é que o livro didático contenha seções em que se apresentem problemas e soluções comentadas, descrições do que são as competições olímpicas, quais os seus benefícios, a fim de despertar, desde cedo, o interesse dos alunos por esse tipo de desafio.

Segundo VIEIRA (2013), algumas correntes da educação matemática defendem a importância da utilização, em sala de aula, da resolução de problemas, uma vez que exploram um conhecimento mais aprofundado de assuntos diversos, como forma eficaz de ensino no campo da Geometria.

Além disso, SARMENTO (2007) acrescenta que uma das correntes atuais na educação matemática é utilizar a resolução de problemas como metodologia de ensino, para que o aluno se habitue a criar uma linha de pensamento, construir estratégias de resolução e argumentação, relacionar diferentes conhecimentos, e ser persistente na busca de uma solução. E, de fato, a escolha do método para se abordar um problema não só influencia o modo como se aprende, mas determina muitas vezes o que se aprende e a linha de pensamento a ser seguida.

É com base nesse pensamento transformador que, após trazer uma fundamentação teórica da Geometria Plana, o presente trabalho vai apresentar e resolver 7 (sete) problemas olímpicos envolvendo o tema Colinearidade e Concorrência, a título de exemplo, cobrados em recentes competições realizadas por estudantes brasileiros. A finalidade é evidenciar que apesar de questões desse tipo parecerem, a uma primeira vista, muito difíceis, podem ser resolvidos por meio de conceitos simples, ensinados nas salas de aula das escolas da educação básica do país.

Antes de fazer a fundamentação matemática proposta, o autor aborda, no próximo capítulo, um pequeno histórico das olimpíadas de Matemática no mundo e no Brasil, suas propostas e seus reflexos para o desenvolvimento das Ciências. Além disso, é apresentada uma síntese dos dados quantitativos levantados pelo autor sobre o tema Colinearidade e Concorrência nas olimpíadas internacionais nos últimos 5 anos (2010-2014).

As competições olímpicas de Matemática e o Brasil

“A própria História da Matemática mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática”.
(MEC, 1998)

3.1 As competições olímpicas e seus reflexos

Uma das iniciativas mais antigas de estímulo ao aprendizado e gosto pela Matemática está ligada aos desafios que eram propostos visando à resolução de problemas considerados de alta dificuldade.

A história conta que, em tempos mais antigos, matemáticos trocavam cartas entre si, desafiando-se uns aos outros, propondo questões complicadas e, muitas vezes, reunindo-se em praça pública para a realização de torneios em que era preciso resolver, diante dos mais diversos expectadores, equações inéditas e consideradas de difícil solução.

Esse tipo de competição tomou uma forma mais salutar e harmônica em 1894, na Hungria, com a realização da 1ª Olimpíada de Matemática, a *Eötvös Mathematical Competition*, que teve seu nome mudado para *Kürschák Mathematical Competition* após a Segunda Guerra Mundial. Segundo SUPPA (2007), essa tradicional competição deixou de ser realizada apenas nos anos de 1919, 1920 e 1921 (Primeira Guerra Mundial), 1944, 1945 e 1946 (Segunda Guerra Mundial) e em 1956 (Revolução Húngara).

SUPPA (2007) destaca os nomes de alguns vencedores dessa importante olimpíada: o físico Theodore von Kármán (1881-1963), vencedor em 1897, com 16 anos de idade, cognominado hoje como o “pai da era supersônica”; o também físico Leo Szilard (1898-1964), vencedor em 1916, com 17 anos, que realizou diversos estudos sobre fissão nuclear ao lado de Albert Einstein, e ficou conhecido como um dos pais da bomba atômica; em 1925, outro físico, Edward Teller (1908-2003), com apenas 16 anos de idade, conhecido como “o pai da Bomba H”, dividiu o 1º lugar dessa competição com Laszlo Tisza (1907-2009), professor emérito do Massachusetts Institute of Technology (MIT); em 1937, a vitória ficou com o jovem de 16 anos, John Harsanyi

(1920-2000), economista que dividiu o Prêmio Nobel de Economia de 1994, com o matemático John Nash (1928-2015), pelos relevantes trabalhos desenvolvidos sobre Teoria dos Jogos.

Ao longo dos anos, as competições de Matemática entre estudantes no mundo vêm se mostrando um forte indicador para medir a qualidade do ensino nas escolas e descobrir novos talentos para as Ciências como um todo. O que começou com a Matemática, hoje se espalhou para outras áreas, como Física, Química, Astronomia, Informática, Robótica, Linguística, Biologia, História, Geografia, etc. Algumas dessas olimpíadas consistem em provas teóricas, outras consistem em fazer programas, experimentos, e até mesmo realizar discursos e debates (BERSCH, 2015).

Para BERSCH (2015), muitos alunos pensam que para participar de uma olimpíada de Matemática é preciso ter todo o conteúdo da matéria vista na escola em sua mente. Mas, na verdade, os problemas olímpicos não exigem essa dose maior de conhecimento por parte do aluno, mas sim um pouco de criatividade e uma capacidade de raciocínio rápido, principalmente nas áreas de Álgebra, Combinatória, Geometria e Teoria dos Números.

Qualquer aluno do ensino médio ou fundamental pode adquirir essas características a partir de um programa de aulas específicas, com professores capacitados; da prática da resolução de problemas olímpicos; e da própria experiência adquirida em participações nessas competições oficiais ou simuladas nas escolas.

Para um aluno da educação básica, participar das olimpíadas de Matemática é uma oportunidade diferenciada de melhorar o seu rendimento escolar, aprofundar-se em um assunto de seu interesse, conhecer alunos e professores de toda parte do país e do mundo, concorrer a uma bolsa de estudos nas melhores instituições de ensino, além de viver momentos de descontração, viagens, diversão e a chance de bem representar o Brasil no exterior.

Várias universidades americanas como Harvard, Yale, Princeton, MIT, e outras como Oxford, Cambridge, Indian Institute of Technology (IIT) e a Universidade de Tóquio valorizam e oferecem bolsas a alunos premiados em certas olimpíadas internacionais. Muitos jovens brasileiros, que galgaram medalhas nas olimpíadas científicas, conseguiram bolsas para estudar nas universidades mais bem conceituadas do mundo. Cabe destacar que muitos alunos brasileiros nessas universidades foram considerados destaques entre os demais estudantes de outras nacionalidades.

Motivar jovens a participar de olimpíadas de Matemática é algo que ajuda a desenvolver o pensamento lógico do estudante, fomentando o interesse pela disciplina; o que traz, sem dúvida, reflexos marcantes também para o professor, principalmente pela melhoria do rendimento escolar, mudança de comportamento e empolgação dos alunos durante as aulas.

Ciente da importância dessas competições para o desenvolvimento da Matemática no mundo, em 1959, foi organizada a 1ª Olimpíada Internacional de Matemática, a *International Mathematical Olympiad* - IMO, realizada na Romênia. A partir desse marco, anualmente, uma centena de países apresentam equipes formadas por 6 alunos do Ensino Básico para a competição de Matemática mais importante do planeta. Em 2017, o Brasil terá o privilégio de sediar a 58ª IMO (IMO, 2015).

Cabe destacar que vários jovens medalhistas da IMO conquistaram, mais tarde, já na fase adulta,

prêmios importantes como a Medalha Fields¹. O professor australiano Terence Tao, por exemplo, ganhador da Medalha Fields em 2006, foi a pessoa mais jovem a receber uma medalha de ouro na IMO, em 1988, com apenas 13 anos de idade. A primeira mulher a receber a Medalha Fields, a iraniana Maryam Mirzakhani, em 2014, foi bicampeã da IMO, recebendo duas medalhas de ouro em 1994 e 1995. O primeiro brasileiro a receber a Medalha Fields, Artur Ávila Cordeiro de Melo, em 2014, também foi medalhista de ouro na IMO em 1995, com 16 anos de idade. Artur foi o primeiro matemático na América Latina a receber essa importante comenda (IMO, 2015).

O Brasil iniciou sua participação na IMO em 1979 e desde então vem obtendo resultados cada vez mais expressivos. Ao todo foram 9 medalhas de ouro, 33 de prata, 68 de bronze e 29 menções honrosas (IMO, 2015), o que habilitou o país a participar da *Romanian Master in Mathematics* (RMM), nos anos de 2010, 2012 e 2013, competição considerada difícilíssima, onde só os 15 melhores países classificados na IMO do ano anterior competem entre si (RMM, 2015).

Dentre os brasileiros medalhistas de ouro na IMO, somente dois atingiram o *Perfect Score*, ou seja, gabaritaram a prova (1º lugar absoluto): os renomados professores de Matemática Nicolau Corção Saldanha (PUC-Rio), em 1981, e Ralph Costa Teixeira (UFF), em 1987, sendo este último o único brasileiro a ganhar duas medalhas de ouro na competição (1986 e 1987).

Os bons resultados alcançados pelos brasileiros na IMO se devem muito ao processo seletivo realizado pela Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM). Todos os medalhistas de ouro da IMO já haviam conquistado o ouro na OBM (IMPA, 2015):

- ✓ Nicolau Corção Saldanha: ouro na OBM (1980) e ouro na IMO (1981);
- ✓ Ralph Costa Teixeira: ouro na OBM (1986) e ouro na IMO (1986, 1987);
- ✓ Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira: ouro na OBM (1988, 1989) e ouro na IMO (1990);
- ✓ Artur Ávila Cordeiro de Melo: ouro na OBM (1993, 1994, 1995) e ouro na IMO (1995);
- ✓ Rui Lopes Viana Filho: ouro na OBM (1996, 1998) e ouro na IMO (1998);
- ✓ Gabriel Tavares Bujokas: ouro na OBM (2000, 2002, 2004, 2005) e ouro na IMO (2005);
- ✓ Henrique Pondé de Oliveira Pinto: ouro na OBM (2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008) e ouro na IMO (2009); e
- ✓ Rodrigo Sanches Ângelo: ouro na OBM (2011, 2012, 2013) e ouro na IMO (2012).

3.2 As iniciativas atuais para a promoção da Matemática no país

Os resultados apresentados pelos estudantes brasileiros comprovam que a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), organizadores da OBM, estão trilhando o caminho certo para descobrir jovens talentos nacionais. A ideia original da OBM de estimular o

¹ Prêmio criado pela União Internacional de Matemática (IMU) em 1936, que é concedido a cada 4 anos, durante o Congresso Internacional de Matemática, para até quatro pessoas, com até 40 anos de idade, que tenham feito contribuições relevantes para as ciências matemáticas. A Medalha Fields é oficialmente denominada Medalha Internacional de Descobrimientos Proeminentes em Matemática e é um prêmio muitas vezes visto como a maior honraria que um matemático pode receber (IMU, 2015).

estudo da Matemática pelos alunos brasileiros e desenvolver e aperfeiçoar a capacitação dos professores tem influenciado, sobremaneira, a melhoria do ensino da Matemática no país.

Ciente dessa realidade, a SBM, em estreita cooperação com o IMPA, elaborou recentemente diversos projetos e programas que visam preparar alunos e professores e estimular o uso de material de nível olímpico como veículo para melhorar o ensino de Matemática no país, além de contribuir para a descoberta de talentos para as Ciências em geral.

Dentre esses projetos e programas, é possível citar (OBMEP, 2015):

✓ o **Programa de Iniciação Científica Junior (PIC)**, destinado aos medalhistas da OBMEP, que têm a oportunidade de estudar Matemática em nível olímpico por um ano, em encontros mensais realizados em mais de 180 polos no país, recebendo uma bolsa de estudos do CNPq e material didático (vídeos, banco de questões, etc.);

✓ o **Programa de Iniciação Científica – Mestrado (PICME)** para medalhistas olímpicos que estejam cursando a graduação e desejam realizar estudos avançados, com bolsas do CNPq (IC) e da CAPES (Mestrado);

✓ a **Preparação Especial para Competições Internacionais (PECI)**, que desde 2009 tem preparado medalhistas de ouro selecionados para participar de competições internacionais, mediante aulas virtuais e presenciais;

✓ os **Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI)**, iniciado em 2012, que conta com diversos polos no Brasil que têm o objetivo de ampliar o acesso dos alunos brasileiros a treinamento para competições matemáticas, por meio da disponibilização de vídeos e outros materiais;

✓ o **Programa Oficinas de Formação (PROF)**, iniciado em 2012 e destinado ao aperfeiçoamento dos professores de Matemática das escolas públicas. Tem como objetivo promover a inclusão de atividades extraclasse de resolução de problemas desafiadores, de nível olímpico, nas práticas escolares;

✓ o **Programa Clubes de Matemática**, iniciado em 2013, que conta atualmente com a adesão de cerca de 3.000 alunos em 389 clubes em todo o Brasil, propiciando atividades inovadoras, interessantes e lúdicas, desenvolvidas em um ambiente interativo;

✓ o **Portal da Matemática**, com aplicativos e vídeo-aulas que cobrem todo o currículo da Matemática, do sexto ano do Ensino Fundamental ao terceiro ano do Ensino Médio; e

✓ o **Programa OBMEP na Escola**, que estimula os professores da rede pública do país a desenvolverem projetos e atividades extraclasse nas escolas, contando ainda com um auxílio financeiro (bolsa), fornecida pela CAPES.

Verdadeiramente, o Brasil, pela sua extensão territorial, diversidade de regiões e grande população, é naturalmente um país competitivo. No quesito matemático, esse fato é indiscutível, uma vez que existem, na atualidade, diversas competições, em nível regional e estadual, podendo ser citadas, a título de exemplo:

✓ Olimpíada Campinense de Matemática (SP);

✓ Olimpíada Capixaba de Matemática (ES);

- ✓ Olimpíada Cearense de Matemática (CE);
- ✓ Olimpíada de Matemática da UNICAMP (SP);
- ✓ Olimpíada da Matemática do Estado de Goiás (GO);
- ✓ Olimpíada de Matemática de Rio Preto (SP);
- ✓ Olimpíada de Matemática do Estado do Rio de Janeiro (RJ);
- ✓ Olimpíada de Matemática do Estado do Rio Grande do Norte (RN);
- ✓ Olimpíada de Matemática do Grande ABC (SP);
- ✓ Olimpíada Interestadual de Matemática (ES, MG, RJ, SP);
- ✓ Olimpíada Mineira de Matemática (MG);
- ✓ Olimpíada Paraense de Matemática (PA);
- ✓ Olimpíada Paulista de Matemática (SP)²;
- ✓ Olimpíada Pessoense de Matemática (PB);
- ✓ Olimpíada Regional de Matemática da Grande Porto Alegre (RS);
- ✓ Olimpíada Regional de Matemática da UNOCHAPECÓ (SC);
- ✓ Olimpíada Regional de Matemática de Mato Grosso (MT);
- ✓ Olimpíada Regional de Matemática de Ribeirão Preto (SP);
- ✓ Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina (SC);
- ✓ Olimpíada Relâmpago da PUC (RJ);
- ✓ Olimpíada São Carlense de Matemática (SP), entre outras.

Em nível nacional, o Brasil possui duas olimpíadas de Matemática, organizadas pela SBM. A principal delas é a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), iniciada em 1979, aberta a todos os estudantes do Ensino Fundamental, a partir do sexto ano, do Ensino Médio e também do Ensino Universitário, e que é responsável pela seleção do grupo de alunos a representar o Brasil em olimpíadas internacionais. A segunda competição é a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), criada em 2005, exclusiva para alunos do ensino público, cuja repercussão atual tem sido bastante expressiva, uma vez que atingiu a marca de mais de 19 milhões de participantes em 99% dos municípios brasileiros, fazendo dela a maior olimpíada de Matemática do mundo (DA SILVA, 2013).

Uma das contribuições da OBMEP para o país é que até 2011, a maioria dos alunos medalhistas brasileiros e que representavam o Brasil nas competições internacionais eram estudantes da rede particular de ensino. Poucos eram os que estudavam em escolas públicas, notadamente os alunos dos colégios militares. Com o advento da OBMEP, o Brasil teve em sua equipe de competidores da IMO, no ano de 2013, três participantes de escolas públicas não militares, que receberam 2 medalhas de prata e 1 de bronze, fato

² A Olimpíada Paulista de Matemática é a mais antiga olimpíada do gênero no país. Sua primeira edição ocorreu em 1977, patrocinada pela Academia Paulista de Ciências (IMPA, 2015).

bastante motivador para o ensino público no país (OBMEP, 2015).

Por sua dimensão e abrangência nacionais, a OBMEP foi classificada por MARANHÃO (2010) como uma das maiores iniciativas governamentais no processo ensino-aprendizagem de Matemática que foi capaz de melhorar a motivação, o interesse e desempenho dos alunos nas escolas públicas brasileiras.

Em 2011, o Centro de Gestão e Estudos Estratégicos (CGEE)³ avaliou os impactos da OBMEP após 5 anos de sua existência no Brasil, apresentando resultados bastante significativos na vida dos alunos, dos professores e das próprias escolas, que fizeram dessa competição uma olimpíada de Matemática mundialmente reconhecida (CGEE, 2011).

O CGEE entrevistou, ao todo, dez mil pessoas, entre alunos, professores, gestores, pais e responsáveis, em diversas partes do país. Dentre as conclusões dessa avaliação, vale destacar que (CGEE, 2011):

- ✓ o material didático distribuído às escolas (banco de questões e apostilas do Programa de Iniciação Científica), tanto para os alunos quanto para os professores, foi considerado importante, não apenas para a preparação olímpica, mas principalmente para o uso em sala de aula, por ser um material inovador, desafiador e que exige o raciocínio lógico dos alunos, fazendo muitos docentes repensarem suas práticas pedagógicas;

- ✓ houve unanimidade sobre o alto nível de dificuldade das provas em relação ao nível de ensino-aprendizagem nas escolas, ficando claramente perceptível a baixa qualidade do ensino público atual;

- ✓ ficou evidente, para os professores, que a olimpíada é um canal para a excelência na educação pública;

- ✓ existem desigualdades entre o ensino das escolas públicas nas diferentes regiões do país, bem como entre as escolas federais, municipais e estaduais, com destaque positivo para os colégios militares;

e

- ✓ a valorização e o reconhecimento dos alunos premiados e dos professores participantes despertam o interesse pelo estudo da Matemática e também a melhora do ambiente de aprendizagem oferecido nas escolas.

Os fatores negativos apontados pela pesquisa concentraram-se no alto nível de exigência da prova frente à situação do ensino público na maioria das escolas, principalmente em relação ao conteúdo de Geometria. Entretanto, os diversos segmentos consultados relacionaram positivamente essa dificuldade como geradora de uma conseqüente e gradual melhoria da qualidade do ensino público (CGEE, 2011).

Por fim, a avaliação feita pelo CGEE serviu para refletir a importância das olimpíadas como um instrumento para o avanço da educação brasileira, pois se observou que (CGEE, 2011):

- ✓ 59% dos professores confirmaram que os alunos passaram a estudar mais Matemática após a participação na olimpíada;

³ O Centro de Gestão e Estudos Estratégicos (CGEE) é uma associação civil sem fins lucrativos e de interesse público, qualificada como Organização Social pelo executivo brasileiro, sob a supervisão do Ministério da Ciência e Tecnologia. Constitui-se em instituição de referência para o suporte contínuo de processos de tomada de decisão sobre políticas e programas de ciência, tecnologia e inovação (CT&I) (CGEE, 2011).

- ✓ 61% dos professores informaram que o desempenho dos alunos em Matemática, em sala de aula, melhorou;
- ✓ 69% dos alunos disseram que passaram a se interessar mais pela Matemática em decorrência de sua participação na competição;
- ✓ 74% dos pais e responsáveis responderam que os filhos passaram a estudar mais Matemática;
- e
- ✓ 78% dos pais responderam que o interesse dos filhos pela Matemática aumentou.

Além disso, em 2014, um estudo encomendado pelo IMPA à Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) mostrou que os estudantes que frequentam aulas preparatórias para a OBMEP em suas escolas obtêm, em média, 16 pontos a mais na prova de Matemática do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) (TOKARNIA, 2014).

Diante do exposto, não há dúvidas de que a utilização das olimpíadas nas escolas e no ensino em geral da Matemática constitui um fator de estímulo ao estudo da disciplina entre os alunos; incentiva o aperfeiçoamento dos professores e sua valorização profissional; identifica jovens talentos, motivando-os ao ingresso nas áreas científicas e tecnológicas; e, acima de tudo, contribui para a melhoria da qualidade da educação no Brasil.

Conhecedor dessa realidade, o autor procurou trazer a público, no presente trabalho, a necessidade de se olhar para as competições matemáticas como uma importante alavanca pedagógica no processo de impulsionar o ensino da Matemática no âmbito nacional, escolhendo, em particular, a Geometria Plana, pela sua dificuldade entre os alunos, e o tema Colinearidade e Concorrência, pela sua expressiva incidência em problemas olímpicos a nível mundial.

3.3 Os resultados observados na pesquisa

Na pesquisa realizada, foi possível coletar, mediante o contato por email com dezenas de coordenadores de olimpíadas no mundo e por meio da busca nos sítios eletrônicos oficiais da Internet, o total de 283 provas aplicadas entre os anos de 2010 e 2014, contemplando 62 competições, em mais de 50 países, em todos os continentes. A distribuição dessas provas, por ano, é a seguinte: 2010 (58 provas); 2011 (59 provas); 2012 (59 provas); 2013 (56 provas); 2014 (51 provas).

Das 283 provas, 37%, ou seja, 104 delas, continham pelo menos um problema envolvendo diretamente o tema Colinearidade ou Concorrência. Verificou-se que este percentual de incidência é aproximadamente regular a cada ano: 2010 (34%); 2011 (41%); 2012 (34%); 2013 (46%); 2014 (27%) (ver Apêndice).

É importante citar que os problemas que envolviam este tema de uma forma indireta foram descartados pelo autor, bem como as provas encontradas em idiomas originais de difícil tradução (escritas não alfabéticas). Além disso, outras competições deixaram de ser analisadas pelo fato de o país não disponibilizar, por motivos diversos, as suas provas.

Das 104 provas contendo problemas sobre o tema, foi possível extrair 141 questões (73 sobre Coline-

aridade e 68 sobre Concorrência), apresentadas pelo autor no Apêndice a este trabalho. Desse total, 7 (sete) problemas foram selecionados e resolvidos pelo autor no Capítulo 5. A seleção dessas questões baseou-se na diversidade das técnicas usadas para solucioná-las e na condição de pertencer a uma competição em que a participação de estudantes brasileiros fosse permitida.

No próximo capítulo, denominado “Fundamentação matemática” são apresentados uma série de conceitos matemáticos, muitos deles não presentes nos livros didáticos escolares, que ajudam a dar embasamento teórico aos professores e estudantes na preparação para as competições olímpicas, em especial, envolvendo o tema Colinearidade e Concorrência. Somente após isso, no Capítulo 5, esses conceitos serão aplicados na resolução dos problemas selecionados.

Fundamentação matemática

“Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso, aprendemos sempre.”

Paulo Freire

Neste capítulo serão apresentadas algumas definições, proposições, lemas, teoremas e corolários que ajudarão os estudantes na resolução de problemas olímpicos envolvendo o assunto Colinearidade e Concorrência. Para não torná-lo tão extenso, alguns pré-requisitos da Geometria Euclidiana, usuais no Ensino Fundamental ou Médio, deixarão de ser demonstrados propositalmente, uma vez que se considera o leitor conhecedor de tais conceitos, já bastante consolidados no meio matemático.

Definição 4.1 (Bissetriz). *A bissetriz de um ângulo é uma semirreta interna com origem em seu vértice, que o divide em dois outros ângulos adjacentes e congruentes.*

Proposição 4.1. *A bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos lados desse ângulo.*

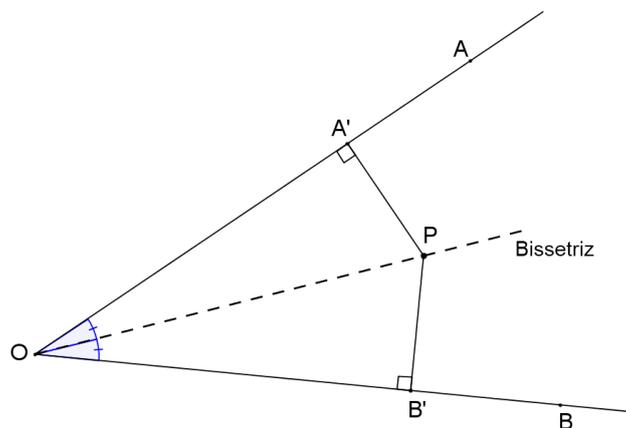


Figura 1 – Bissetriz como LG

Prova. Suponha inicialmente que P pertença à bissetriz do ângulo $\angle AOB$. Sejam A' e B' os pés das perpendiculares baixadas de P a cada um dos lados do referido ângulo (Figura 1). Então, tem-se que os triângulos

$OA'P$ e $OB'P$ são congruentes, uma vez que $\angle A'OP = \angle B'OP$, $\angle OA'P = \angle OB'P = 90^\circ$ e OP é lado comum aos triângulos. Portanto, $PA' = PB'$.

Reciprocamente, seja P um ponto no interior do ângulo $\angle AOB$, tal que $PA' = PB'$, onde A' e B' são os pés das perpendiculares baixadas de P aos lados desse ângulo. Então, tem-se que os triângulos retângulos $A'OP$ e $B'OP$ são congruentes, uma vez que possuem catetos congruentes $PA' = PB'$ e hipotenusa OP como lado comum. Portanto, $\angle A'OP = \angle B'OP$ e P pertence à bissetriz do ângulo $\angle AOB$. \square

Definição 4.2 (Mediatriz). A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular a esse segmento e que contém o seu ponto médio.

Proposição 4.2. A mediatriz de um segmento é o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos extremos desse segmento.

Prova. Seja M o ponto médio do segmento AB e m a reta mediatriz desse segmento. Se P é um ponto qualquer de m , então os triângulos retângulos PMA e PMB são congruentes, com catetos $MA = MB$ e MP comum, logo, $PA = PB$ (Figura 2).

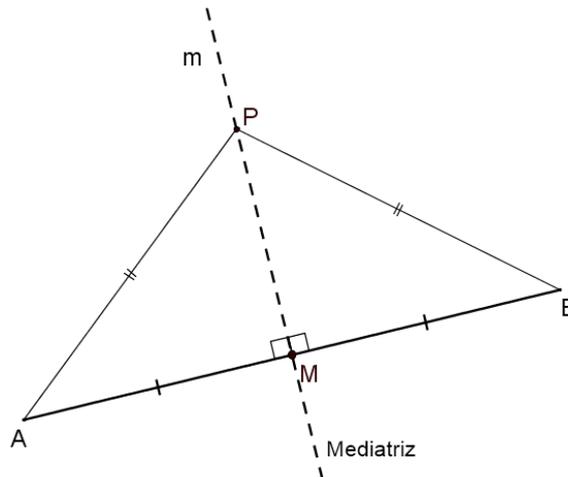


Figura 2 – Mediatriz como LG

Reciprocamente, seja P um ponto no plano tal que $PA = PB$. Então, o triângulo PAB é isósceles de base AB . Por este motivo, a altura PM , relativa à base AB , divide-a ao meio, e, portanto PM é a mediatriz de AB . \square

Proposição 4.3. Sejam P um ponto exterior a um círculo de centro O e raio r , PA e PB as duas tangentes ao círculo traçadas a partir de P (Figura 3). Então,

- (i) $PA = PB$;
- (ii) PO é bissetriz dos ângulos $\angle AOB$ e $\angle APB$;
- (iii) PO é mediatriz da corda AB .

Prova. Como $OA = OB = r$, $\angle PAO = \angle PBO = 90^\circ$ e PO é lado (hipotenusa) comum dos triângulos retângulos PAO e PBO , então tais triângulos são congruentes, com $PA = PB$. Além disso, nesses triângulos,

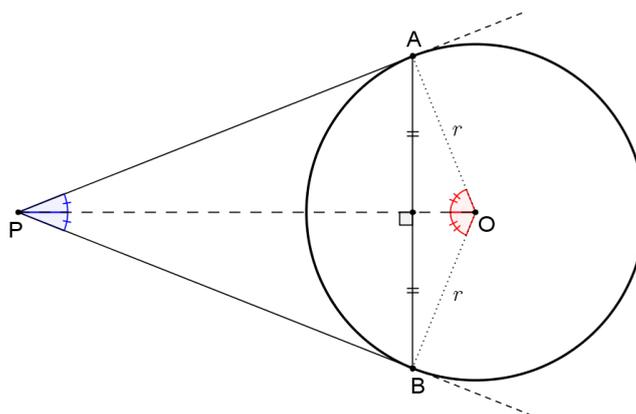


Figura 3 – Tangentes a um círculo traçadas a partir de um ponto exterior

$\angle APO = \angle BPO$ e $\angle AOP = \angle BOP$ e, portanto, PO é bissetriz dos ângulos $\angle AOB$ e $\angle APB$. Ademais, uma vez que P e O são equidistantes dos pontos A e B , PO é altura dos triângulos isósceles APB e AOB , dividindo AB ao meio. Assim, PO é mediatriz da corda AB , passando por seu ponto médio. \square

Definição 4.3 (Mediana). *A mediana de um triângulo é o segmento que possui uma extremidade em um dos vértices e a outra no ponto médio do lado oposto.*

Proposição 4.4. *Todo triângulo inscrito em um semicírculo é retângulo, com a hipotenusa sendo o diâmetro e a mediana relativa à hipotenusa tendo comprimento igual ao raio do círculo circunscrito ao triângulo (circuncírculo).*

Prova. Sejam ABC um triângulo retângulo em A e Γ o seu circuncírculo de raio r . Como o ângulo inscrito $\angle BAC = 90^\circ$, então o arco \widehat{BC} , que não contém A , mede 180° , fazendo de BC o diâmetro de Γ . Se O é o centro do círculo Γ , então O é médio de BC e AO é o raio de Γ e também a mediana do triângulo ABC ($AO = BO = CO = r$) (Figura 4). \square

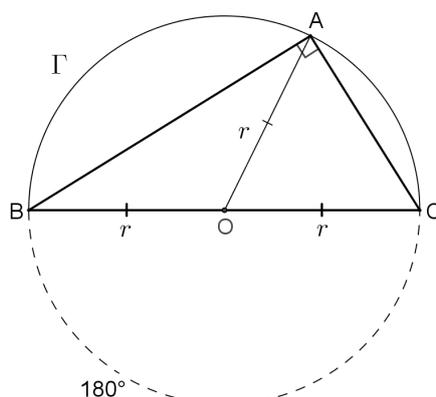


Figura 4 – Triângulo retângulo inscrito em um semicírculo

Nota: O arco \widehat{BAC} é chamado arco-capaz da corda BC (ou do ângulo $\angle A$), pois qualquer ponto genérico A deste arco estabelece um ângulo de medida constante $\angle BAC = 90^\circ$.

Definição 4.4 (Bissetriz interna). A bissetriz interna de um triângulo é o segmento que possui uma extremidade em um dos vértices e a outra no lado oposto, e que divide o ângulo interno desse vértice em dois ângulos adjacentes e congruentes.

Definição 4.5 (Bissetriz externa). A bissetriz externa de um triângulo é o segmento que possui uma extremidade em um dos vértices e a outra no prolongamento do lado oposto, e que divide o ângulo externo desse vértice em dois ângulos adjacentes e congruentes.

Proposição 4.5. A bissetriz interna e a bissetriz externa relativas a um vértice de um triângulo são perpendiculares entre si.

Prova. Seja ABC um triângulo e sejam AD e AE suas bissetrizes interna e externa, respectivamente. Chamando $\angle BAC = 2\theta$, tem-se $\angle BAD = \angle DAC = \theta$. Além disso, $\angle CAF = 180^\circ - 2\theta$, donde $\angle CAE = \angle EAF = \frac{180^\circ - 2\theta}{2} = 90^\circ - \theta$ (Figura 5).

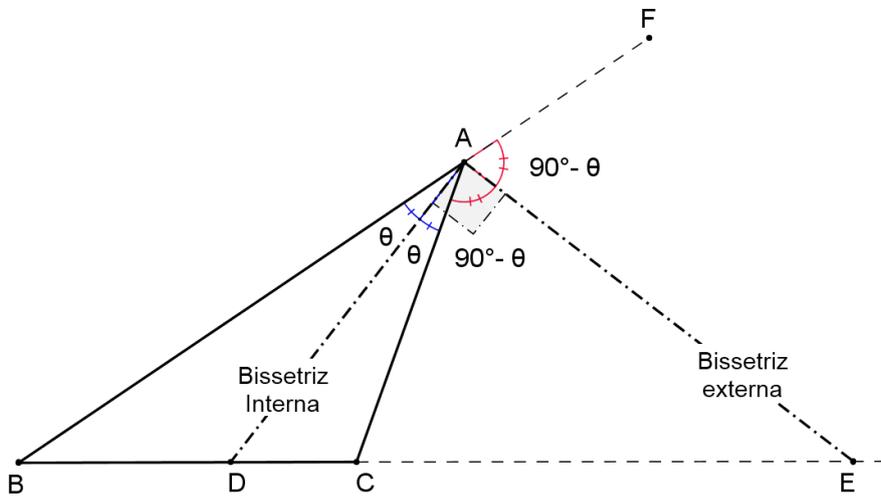


Figura 5 – Perpendicularidade entre as bissetrizes interna e externa de um triângulo

Portanto, $\angle DAE = \angle DAC + \angle CAE = \theta + 90^\circ - \theta = 90^\circ$, ou seja, $AD \perp AE$. \square

Proposição 4.6. O ângulo formado entre duas bissetrizes internas de um triângulo é igual a um reto mais a metade do terceiro ângulo desse triângulo.

Prova. Seja I o ponto de interseção das bissetrizes internas dos ângulos $\angle ABC$ e $\angle ACB$ do triângulo ABC (Figura 6).

No triângulo BIC , tem-se

$$\begin{aligned}\angle BIC &= 180^\circ - \left(\frac{\angle ABC}{2} + \frac{\angle ACB}{2} \right) \\ \angle BIC &= \frac{360^\circ - (\angle ABC + \angle ACB)}{2} \\ \angle BIC &= \frac{360^\circ - (180^\circ - \angle BAC)}{2} = \frac{180^\circ + \angle BAC}{2} \\ \angle BIC &= 90^\circ + \frac{\angle BAC}{2}.\end{aligned}$$

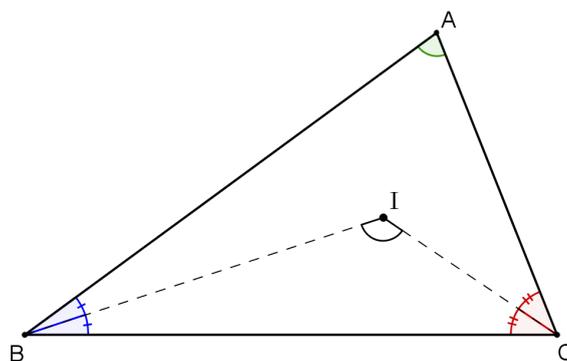


Figura 6 – Ângulo entre duas bissetrizes internas de um triângulo

□

Proposição 4.7. *O ângulo formado entre duas bissetrizes externas de um triângulo é igual a um reto menos a metade do terceiro ângulo desse triângulo.*

Prova. Seja I_A o ponto de interseção das bissetrizes externas dos ângulos $\angle ABC$ e $\angle ACB$ do triângulo ABC (Figura 7).

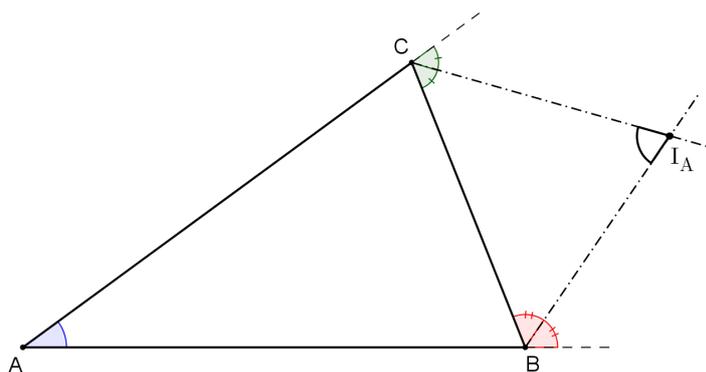


Figura 7 – Ângulo entre duas bissetrizes externas de um triângulo

No triângulo $BI_A C$, tem-se $\angle BI_A C = 180^\circ - (\angle BCI_A + \angle CBI_A)$.

Mas, $\angle BCI_A = \frac{180^\circ - \angle ACB}{2} = 90^\circ - \frac{\angle ACB}{2}$ e $\angle CBI_A = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2} = 90^\circ - \frac{\angle ABC}{2}$.

Logo,

$$\angle BI_A C = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\angle ACB}{2} + 90^\circ - \frac{\angle ABC}{2} \right)$$

$$\angle BI_A C = \frac{\angle ACB + \angle ABC}{2} = \frac{180^\circ - \angle BAC}{2}$$

$$\angle BI_A C = 90^\circ - \frac{\angle BAC}{2}.$$

□

Proposição 4.8. *O ângulo formado entre uma bissetriz interna e uma bissetriz externa, relativas a vértices distintos de um triângulo, é igual à metade do terceiro ângulo desse triângulo.*

Prova. Seja I_B o ponto de interseção da bissetriz interna do ângulo $\angle ABC$ com a bissetriz externa do ângulo $\angle ACB$ do triângulo ABC (Figura 8).

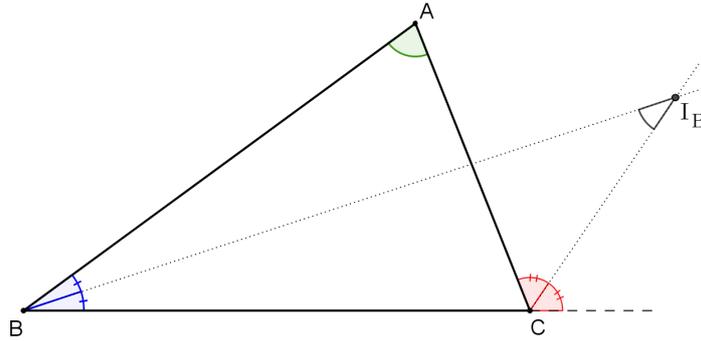


Figura 8 – Ângulo entre bissetriz interna e bissetriz externa relativas a vértices distintos

No triângulo $BI_B C$, tem-se

$$\begin{aligned}\angle BI_B C &= 180^\circ - \left(\frac{\angle ABC}{2} + \angle ACB + \frac{180^\circ - \angle ACB}{2} \right) \\ \angle BI_B C &= 90^\circ - \frac{\angle ABC}{2} - \frac{\angle ACB}{2} \\ \angle BI_B C &= 90^\circ - \left(\frac{\angle ABC + \angle ACB}{2} \right) \\ \angle BI_B C &= 90^\circ - \left(\frac{180^\circ - \angle BAC}{2} \right) \\ \angle BI_B C &= \frac{\angle BAC}{2}.\end{aligned}$$

□

Teorema 4.1 (Incentro). *As bissetrizes internas de um triângulo são concorrentes em um ponto I , denominado Incentro, que é o centro do círculo inscrito nesse triângulo (incírculo).*

Demonstração. Sejam AD , BE e CF as bissetrizes internas do triângulo ABC . Seja I o ponto de interseção de BE e CF . Assim, tem-se que I , por estar sobre BE é equidistante dos lados AB e BC , e por estar sobre CF é equidistante dos lados BC e AC . Consequentemente, I é equidistante dos lados AB e AC , e, desse modo, também está sobre a bissetriz AD (Figura 9).

Ademais, se I é equidistante dos lados do triângulo ABC , sejam L , M e N os pés das perpendiculares baixadas de I até os lados do triângulo. Dessa forma, existe um círculo (incírculo) com centro em I (incentro), que passa pelos pontos L , M e N , cujo raio é dado por $r = IL = IM = IN$ e está inscrito no triângulo ABC . □

Proposição 4.9. *A área de um triângulo é igual ao produto do seu semiperímetro pelo raio do seu incírculo.*

Prova. Sejam p o semiperímetro do triângulo ABC e sejam L , M e N os pés das perpendiculares baixadas do seu incentro I até os lados do triângulo (Figura 9). Dessa forma, o raio do incírculo de ABC é igual a $r = IL = IM = IN$.

A área de ABC pode ser dada pela soma das áreas dos triângulos BIC , CIA e AIB , ou seja,

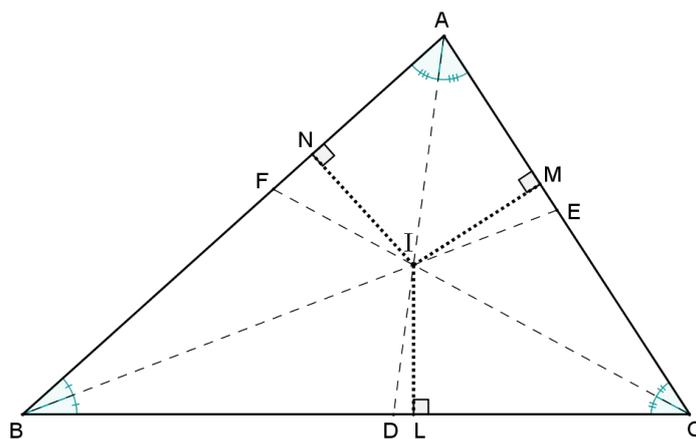


Figura 9 – Incentro de um triângulo

$$\begin{aligned}
 [ABC] &= [BIC] + [CIA] + [AIB] \\
 [ABC] &= \frac{BC \cdot IL}{2} + \frac{AC \cdot IM}{2} + \frac{AB \cdot IN}{2} \\
 [ABC] &= \frac{BC \cdot r}{2} + \frac{AC \cdot r}{2} + \frac{AB \cdot r}{2} \\
 [ABC] &= \left(\frac{BC + AC + AB}{2} \right) \cdot r \\
 [ABC] &= p \cdot r.
 \end{aligned}$$

□

Teorema 4.2 (Circuncentro). *As três mediatrizes de um triângulo se encontram em um único ponto O , chamado Circuncentro, que é o centro do circuncírculo desse triângulo.*

Demonstração. Sejam u , v e w , respectivamente, as mediatrizes relativas aos lados AB , BC e AC do triângulo ABC , e L , M e N os respectivos pontos médios desses lados (Figura 10).

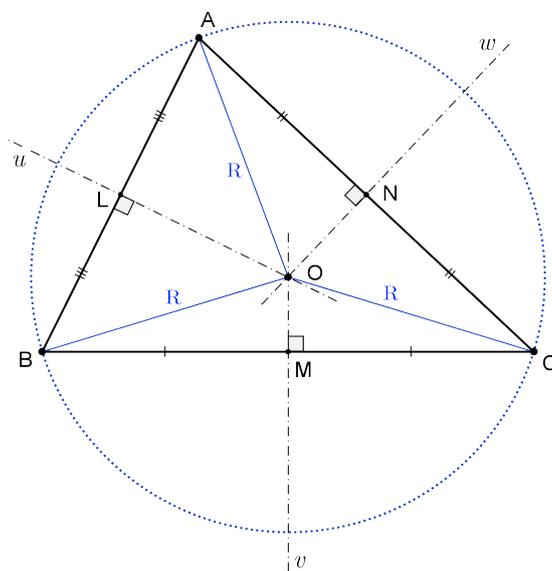


Figura 10 – Circuncentro de um triângulo

Seja O , inicialmente, o ponto de encontro de u e w . Como O está sobre essas mediatrizes, tem-se, pela Proposição 4.2, que

$$\begin{cases} OA = OB \\ OA = OC \end{cases} \Rightarrow OA = OB = OC = R \text{ (raio)}.$$

Com isso, conclui-se que O é equidistante dos vértices A , B e C e, portanto, O é centro do circuncírculo do triângulo ABC , de raio R .

Como o raio R do circuncírculo do triângulo ABC corta a corda BC no seu ponto médio M , sob um ângulo reto (ver Proposição 4.3), conclui-se que OM está contido na mediatriz v de BC . Assim, as três mediatrizes concorrem no ponto O (Figura 10). \square

FEITOSA (2013) demonstra a concorrência das mediatrizes no circuncentro de um triângulo utilizando números complexos.

Definição 4.6 (Exincírculo). O círculo tangente internamente aos prolongamentos dos lados AB e AC e tangente externamente ao terceiro lado BC de um triângulo ABC é chamado círculo exinscrito (ou exincírculo) relativo ao lado BC (ou ao vértice A) do triângulo.

Teorema 4.3 (Exincentro). O centro I_A do exincírculo relativo ao lado BC (ou ao vértice A) de um triângulo ABC , é chamado Exincentro e é o ponto de interseção das bissetrizes externas dos ângulos $\angle B$ e $\angle C$ e da bissetriz interna do ângulo $\angle A$ do triângulo.

Demonstração. Sejam b e c as bissetrizes externas dos ângulos $\angle B$ e $\angle C$, respectivamente, e I_A o ponto de interseção entre elas. Como $I_A \in b$, I_A é equidistante dos lados AB e BC ; e como $I_A \in c$, I_A é equidistante de AC e BC . Assim, I_A é equidistante de AB e AC , e, portanto, pertence à bissetriz interna a do ângulo $\angle A$ ($I_A \in a$) (Figura 11).

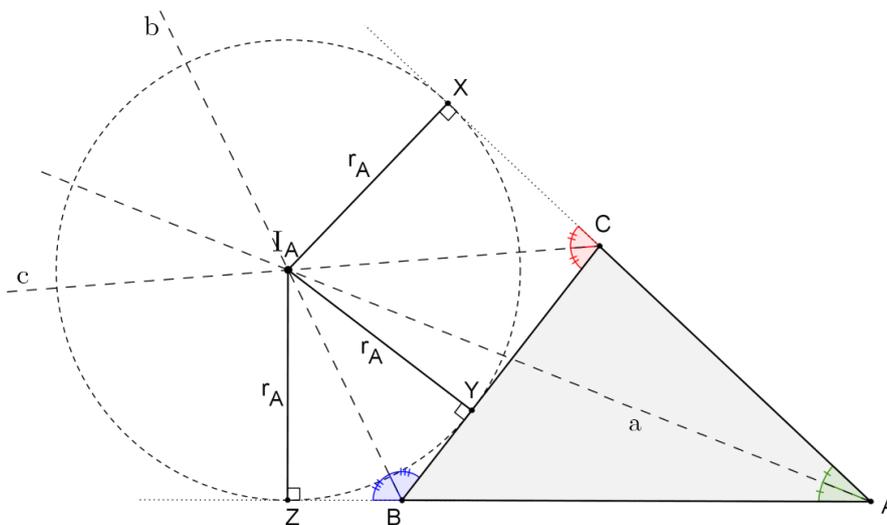


Figura 11 – Exincentro de um triângulo

Sejam X , Y e Z os pés das perpendiculares baixadas de I_A a cada um dos lados do triângulo ABC ou seus prolongamentos (Figura 11). Denotando por r_A a distância comum entre I_A e os lados do triângulo,

existe um círculo (exincírculo) com centro em I_A (exincentro) de raio $r_A = I_A X = I_A Y = I_A Z$, tangente ao lado BC e aos prolongamentos dos lados AB e AC (Figura 11). \square

Nota: Todo triângulo admite exatamente três exincírculos.

Definição 4.7 (Divisão de um segmento interiormente). Diz-se que o ponto M divide interiormente um segmento AB na razão k ($k > 0$) quando M é interior ao segmento e $\frac{MA}{MB} = k$ (Figura 12).

Definição 4.8 (Divisão de um segmento exteriormente). Diz-se que o ponto N divide exteriormente um segmento AB na razão k ($k > 0$) quando N é exterior ao segmento e $\frac{NA}{NB} = k$ (Figura 12).

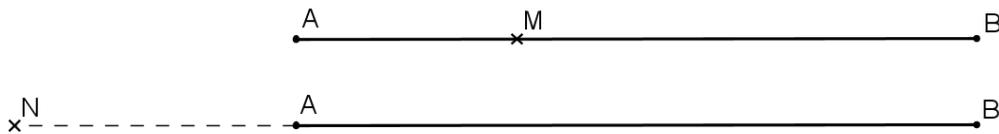


Figura 12 – Divisão de um segmento por um ponto

Nota: Observa-se que para $k = 1$, o ponto N , exterior ao segmento AB , é um ponto no infinito (ponto impróprio).

Proposição 4.10 (Unicidade). Dado um segmento AB e uma razão k , existe apenas um ponto M que divide interiormente e apenas um ponto N que divide exteriormente esse segmento nessa razão.

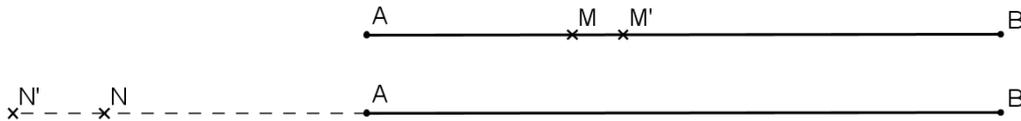


Figura 13 – Prova da unicidade na divisão de um segmento por um ponto

Prova. Considere inicialmente que exista um ponto M' que divida AB interiormente na mesma razão k que o ponto M , também interior ao segmento (Figura 13). Assim, $k = \frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B}$.

Aplicando as propriedades das proporções, tem-se

$$\frac{MA + MB}{MB} = \frac{M'A + M'B}{M'B}$$

$$\frac{AB}{MB} = \frac{AB}{M'B}$$

$$MB = M'B$$

$$M \equiv M'.$$

Analogamente, considere que exista um ponto N' que divida AB exteriormente na mesma razão k que o ponto N , também exterior ao segmento (Figura 13). Assim, $k = \frac{NA}{NB} = \frac{N'A}{N'B}$.

Aplicando, mais uma vez, as propriedades das proporções, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{NB - NA}{NB} &= \frac{N'B - N'A}{N'B} \\ \frac{AB}{NB} &= \frac{AB}{N'B} \\ NB &= N'B \\ N &\equiv N'.\end{aligned}$$

Portanto, conclui-se que os pontos M e N são únicos. \square

Definição 4.9 (Divisão harmônica). Quando um segmento AB está dividido por dois pontos M (interiormente) e N (exteriormente), na mesma razão k , diz-se que o segmento está dividido harmonicamente. Os pontos M e N são chamados conjugados harmônicos de AB na razão k , e a sequência de pontos (N, A, M, B) forma uma quádrupla harmônica, com $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k$ (Figura 14).

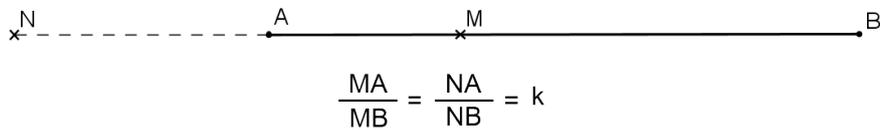


Figura 14 – Divisão harmônica

Nota: As configurações para k , razão da divisão harmônica, são mostradas na Figura 15.

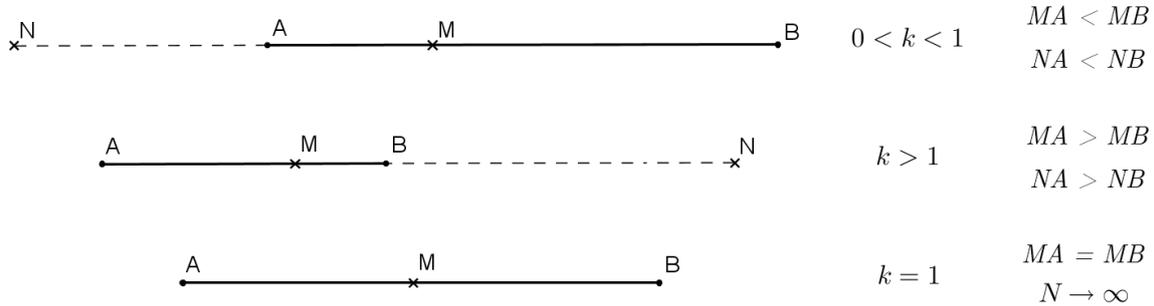


Figura 15 – Configurações para a razão da divisão harmônica

Proposição 4.11. A distância entre dois conjugados harmônicos de um segmento é igual à média harmônica entre as distâncias do ponto divisor exterior a cada um dos extremos do segmento.

Prova. Considere inicialmente o segmento AB dividido harmonicamente pelos pontos M (interior) e N (exterior), na razão $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k$, com $k > 1$ (Figura 15). Assim,

$$\begin{aligned}\frac{MA}{MB} &= \frac{AB - MB}{MB} = \frac{AB}{MB} - 1 = \frac{NA - NB}{NB} - 1 = \frac{NA}{NB} \\ \frac{NA - NB}{MB} &= \frac{NA}{NB} + 1 \\ MB &= \frac{NA - NB}{\frac{NA}{NB} + 1} = \frac{NB \cdot (NA - NB)}{NA + NB}.\end{aligned}$$

Como $MN = MB + NB$ (Figura 15), então

$$MN = MB + NB = \frac{NB \cdot (NA - NB)}{NA + NB} + NB$$

$$MN = \frac{NB \cdot (NA - NB) + NB \cdot (NA + NB)}{NA + NB}$$

$$MN = \frac{2 \cdot NA \cdot NB}{NA + NB} \quad (\text{razão harmônica entre } NA \text{ e } NB).$$

Analogamente, considerando-se o caso em que $0 < k < 1$, chega-se ao mesmo resultado¹. O caso em que $k = 1$ é um caso especial, pois o ponto N sendo impróprio, implica que a distância MN é infinita. \square

Corolário 4.1. *Se os pontos M e N dividem harmonicamente o segmento AB , então os pontos A e B também dividem harmonicamente o segmento MN .*

Prova. De fato, basta permutar, simplesmente, os meios ou os extremos da proporção. Se $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$, então $\frac{AN}{AM} = \frac{BN}{BM}$.

Novamente, um caso especial ocorre se M é médio de AB , donde $k = 1$ e N tende ao infinito (impróprio). \square

Teorema 4.4. *Se O é o ponto médio do segmento AB , e M e N pontos que o dividem harmonicamente, então $OA \cdot OB = OM \cdot ON$.*

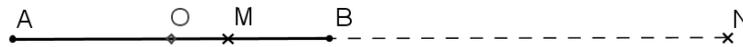


Figura 16 – Relação do ponto médio

Demonstração. Sem perda de generalidade, com O, A, B, M e N distintos, considere a Figura 16, em que a razão harmônica é igual a $k > 1$. Assim,

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$$

$$\frac{OM + OA}{OB - OM} = \frac{ON + OA}{ON - OB}$$

$$(OM + OA)(ON - OB) = (ON + OA)(OB - OM)$$

$$OM \cdot ON - OB \cdot OM + OA \cdot ON - OA \cdot OB = OB \cdot ON - OM \cdot ON + OA \cdot OB - OA \cdot OM.$$

Como $OA = OB$, a equação reduz-se a

$$OM \cdot ON - OA \cdot OB = -OM \cdot ON + OA \cdot OB$$

$$OA \cdot OB = OM \cdot ON.$$

Analogamente, considerando-se o caso em que $0 < k < 1$, chega-se ao mesmo resultado. \square

¹ Essa segunda parte da prova será deixada a cargo do leitor.

Nota: Pela sequência de raciocínio desenvolvida, é fácil observar que a recíproca desse teorema também é válida, ou seja, se O é o ponto médio do segmento AB e $OA \cdot OB = OM \cdot ON$, então M e N são pontos que dividem harmonicamente o segmento AB ².

Teorema 4.5 (Bissetrizes). *As bissetrizes interna e externa de um triângulo dividem o lado oposto em partes proporcionais aos lados adjacentes.*

Demonstração. Seja AD a bissetriz interna e AD' a bissetriz externa relativas ao ângulo $\angle A$ do triângulo ABC .

(i) Bissetriz Interna:

Traçando-se CE , paralela a AD , tem-se $\angle BEC = \angle BAD = \angle DAC = \angle ECA$ (Figura 17). Assim, o triângulo ECA é isósceles, com $AC = AE$.

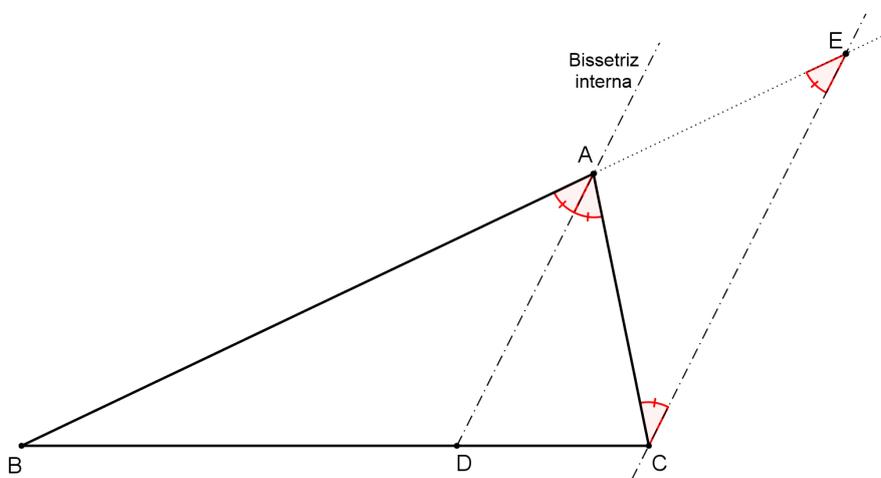


Figura 17 – Teorema da bissetriz interna

Pela Lei de Proporcionalidade de Tales³, $\frac{BA}{BD} = \frac{AE}{DC}$, ou seja, $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$.

(ii) Bissetriz Externa:

Traçando-se CE' , paralela a AD' , tem-se $\angle CE'A = \angle D'AE = \angle D'AC = \angle E'CA$ (Figura 18). Assim, o triângulo $E'CA$ é isósceles, com $AC = AE'$.

Pela Lei de Proporcionalidade de Tales, $\frac{BA}{BD'} = \frac{E'A}{CD'}$, ou seja, $\frac{AB}{BD'} = \frac{AC}{CD'}$. □

Nota: É importante observar que se o triângulo for isósceles, o teorema da bissetriz externa fica comprometido quando aplicado ao vértice de ângulo desigual, uma vez que essa bissetriz externa será paralela à base do triângulo. No caso de o triângulo ser equilátero, esse fato ocorre para todos os vértices.

Corolário 4.2 (Divisão harmônica pelos pés das bissetrizes). *Os pés das bissetrizes interna e externa relativas a um vértice de um triângulo dividem o lado oposto harmonicamente, na mesma razão dos lados adjacentes.*

² A demonstração da recíproca do teorema será deixada a cargo do leitor.

³ Tales de Mileto foi um matemático grego que viveu no Séc. VII a.C. Sua Lei ou Teorema de Proporcionalidade diz que quando duas retas secantes interceptam um feixe de retas paralelas, os segmentos correspondentes determinados são proporcionais.

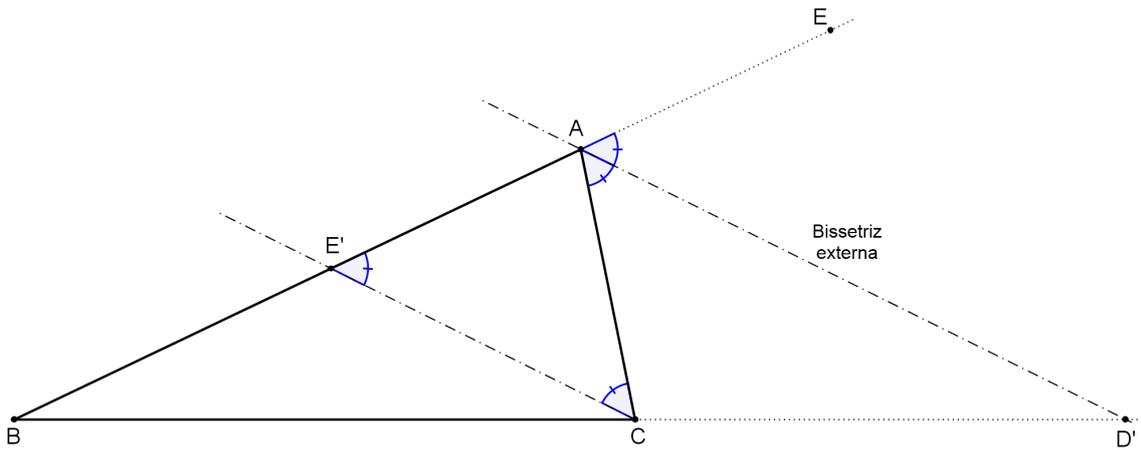


Figura 18 – Teorema da bissetriz externa

Prova. Sejam $k = \frac{AB}{AC}$ a razão dos lados do triângulo escaleno ABC que concorrem no vértice A e AD e AD' as suas bissetrizes interna e externa, respectivamente, relativas ao ângulo $\angle A$.

Pelo Teorema 4.5, tem-se que $k = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ e, ao mesmo tempo, $k = \frac{AB}{AC} = \frac{BD'}{D'C}$. Portanto, $k = \frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C}$, o que mostra que os pontos D e D' dividem harmonicamente o lado BC do triângulo ABC na razão k . \square

Nota: Observa-se que no caso de o triângulo ser isósceles ou equilátero, o teorema continua válido, com o pé da bissetriz interna sendo o ponto médio da base ($k = 1$) e o pé da bissetriz externa tendendo ao infinito (impróprio), conforme a Figura 15.

Teorema 4.6 (Recíproco das bissetrizes). *Sejam D e D' pontos sobre a reta que contém o lado BC de um triângulo ABC , tais que D é interior e D' é exterior a BC . Se $\angle DAD' = 90^\circ$ e $\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C}$ (isto é, D e D' dividem harmonicamente BC), então AD é bissetriz interna e AD' é bissetriz externa relativas ao ângulo $\angle A$ do triângulo ABC .*

Demonstração. Traçando por D uma paralela à reta AD' , sejam P e Q seus pontos de interseção com os lados AB e AC , respectivamente (Figura 19).

Com isso, tem-se as seguintes semelhanças de triângulos:

$$\triangle PBD \sim \triangle ABD' \Rightarrow \frac{DB}{D'B} = \frac{PD}{AD'} \text{ e} \quad (1)$$

$$\triangle CDQ \sim \triangle CD'A \Rightarrow \frac{CD}{CD'} = \frac{DQ}{D'A}. \quad (2)$$

Uma vez que, por hipótese, $\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C}$ ou $\frac{DB}{D'B} = \frac{DC}{D'C}$, de (1) e (2) decorre que

$$\frac{PD}{AD'} = \frac{DQ}{D'A}$$

$$PD = DQ.$$

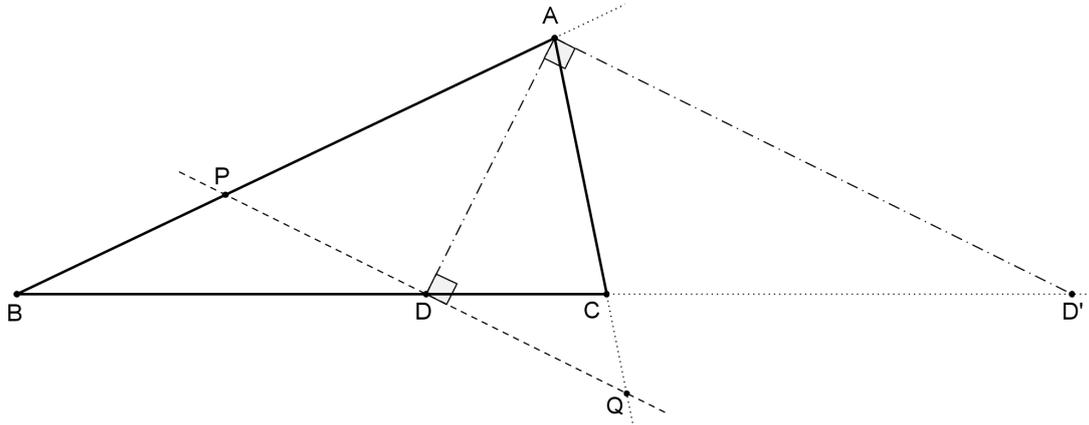


Figura 19 – Recíproca do teorema das bissetrizes

Logo, o ponto D é médio de PQ . Como $PQ \parallel AD'$ e $DA \perp AD'$, então $AD \perp PQ$ (Figura 19).

Assim, AD é mediana e altura do triângulo PAQ que, por sua vez, é isósceles. Desse modo, AD também é bissetriz de $\angle PAQ = \angle BAC$.

Finalmente, se AD é a bissetriz interna do triângulo ABC e, por hipótese, $AD' \perp AD$ ($\angle DAD' = 90^\circ$), então, pela Proposição 4.5, AD' é a bissetriz externa do triângulo ABC . \square

Proposição 4.12 (Divisão harmônica pelo Incentro e Exincentro). *O incentro e o exincentro relativo a um vértice de um triângulo dividem harmonicamente a bissetriz interna relativa a esse mesmo vértice.*

Prova. Sejam AD e CF duas bissetrizes internas do triângulo ABC . Sejam ainda I o incentro e I_A o exincentro relativo ao vértice A desse triângulo (Figura 20).

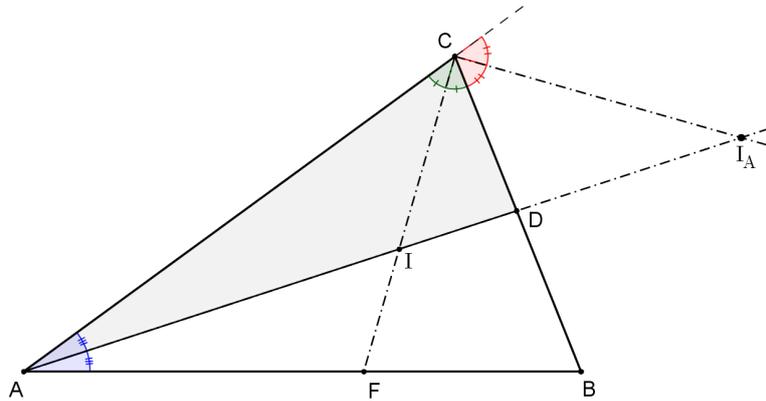


Figura 20 – Divisão harmônica pelo incentro e exincentro

Observando o triângulo ACD , tem-se que CI é sua bissetriz interna e CI_A é sua bissetriz externa relativas ao vértice C (Figura 20). Portanto, pelo Teorema 4.5, aplicado nesse triângulo, tem-se

$$\frac{CA}{IA} = \frac{CD}{ID} \text{ ou } \frac{CA}{CD} = \frac{IA}{ID} \quad (3)$$

e

$$\frac{CA}{I_A A} = \frac{CD}{I_A D} \text{ ou } \frac{CA}{CD} = \frac{I_A A}{I_A D}. \quad (4)$$

De (3) e (4), chega-se à conclusão que $\frac{IA}{ID} = \frac{I_A A}{I_A D}$, o que mostra que I e I_A dividem harmonicamente a bissetriz AD do triângulo ABC . \square

Definição 4.10 (Potência de ponto). A potência de um ponto P , em relação a um círculo Γ , de centro O e raio r , é dada por $Pot_{\Gamma}(P) = PO^2 - r^2$.

Observa-se que:

- ✓ se P é exterior à Γ , $PO > r$ e $Pot_{\Gamma}(P) > 0$ (positiva);
- ✓ se P pertence à circunferência de Γ , $PO = r$ e $Pot_{\Gamma}(P) = 0$ (nula); e
- ✓ se P é interior à Γ , $PO < r$ e $Pot_{\Gamma}(P) < 0$ (negativa).

Nota: O centro de um círculo é o ponto de potência mínima: $PO = 0$ e $Pot_{\Gamma}(O) = -r^2$.

Proposição 4.13. Sejam P um ponto exterior a um círculo Γ de centro O e raio r . Por P traçam-se uma tangente PT e uma secante que corta Γ nos pontos A e B (Figura 21). Então, a potência de P em relação ao círculo Γ é dada por

$$Pot_{\Gamma}(P) = PT^2 = PA \cdot PB.$$

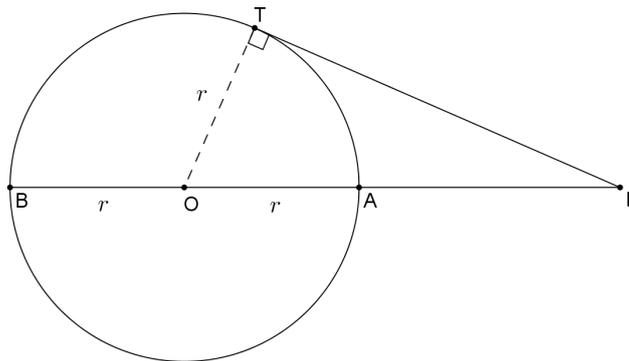


Figura 21 – Potência de um ponto

Prova. Unindo-se o ponto O ao ponto T , obtém-se um triângulo retângulo OTP , onde, por Pitágoras, tem-se

$$PO^2 = PT^2 + r^2$$

$$PT^2 = PO^2 - r^2 = Pot_{\Gamma}(P)$$

$$PT^2 = (PA + r)^2 - r^2 = Pot_{\Gamma}(P)$$

$$PT^2 = PA^2 + 2r \cdot PA = Pot_{\Gamma}(P)$$

$$PT^2 = PA \cdot (PA + 2r) = Pot_{\Gamma}(P)$$

$$PT^2 = PA \cdot PB = Pot_{\Gamma}(P).$$

\square

Proposição 4.14 (Divisão harmônica em círculos ortogonais). *Os extremos dos diâmetros de dois círculos ortogonais⁴, quando alinhados, dividem-se harmonicamente.*

Prova. Sejam dois círculos ortogonais, λ_1 e λ_2 , de centros O_1 e O_2 e diâmetros AB e MN , respectivamente, com T sendo uma das suas interseções (Figura 22). A potência do ponto O_1 de λ_1 , em relação ao círculo λ_2 , de acordo com a Proposição 4.13, é dada por

$$O_1M \cdot O_1N = O_1T^2.$$

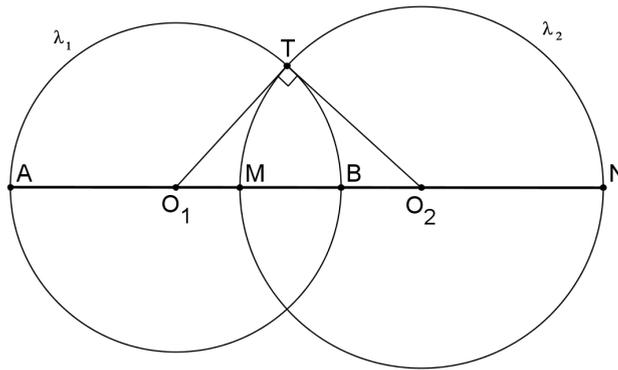


Figura 22 – Círculos ortogonais

Como $O_1T = O_1A = O_1B$, decorre que $O_1M \cdot O_1N = O_1A \cdot O_1B$, sendo O_1 médio de AB . Pela recíproca do Teorema 4.4, a sequência de pontos (A, M, B, N) formam uma quádrupla harmônica.

Analogamente, prova-se o mesmo para o ponto O_2 de λ_2 . □

Na realidade, esta Proposição 4.14 pode ser generalizada segundo o teorema a seguir.

Teorema 4.7. *Se uma reta corta dois círculos ortogonais passando por um dos centros desses círculos, as interseções desta reta com as circunferências formam uma quádrupla harmônica.*

Demonstração. Seja r uma reta que corta dois círculos ortogonais, λ_1 e λ_2 , passando pelo centro O_1 de λ_1 , e determinando os pontos P e Q na circunferência de λ_1 e os pontos R e S na circunferência de λ_2 (Figura 23).

Se T é um dos pontos de interseção de λ_1 e λ_2 , então a potência do ponto O_1 , em relação ao círculo λ_2 , é dada por

$$O_1R \cdot O_1S = O_1T^2.$$

Como $O_1T = O_1P = O_1Q$, decorre que $O_1R \cdot O_1S = O_1P \cdot O_1Q$, sendo O_1 médio de PQ . Pela recíproca do Teorema 4.4, a sequência de pontos (P, R, Q, S) formam uma quádrupla harmônica.

O mesmo resultado pode ser encontrado se a reta r passasse pelo centro O_2 de λ_2 . □

⁴ Dois círculos são ortogonais quando se cortam de tal modo que as tangentes em cada um dos pontos de interseção são perpendiculares (ADAM, 1986). MORGADO, WAGNER e JORGE (1990a) complementam dizendo que dois círculos são ortogonais quando a normal de um é a tangente do outro e vice-versa.

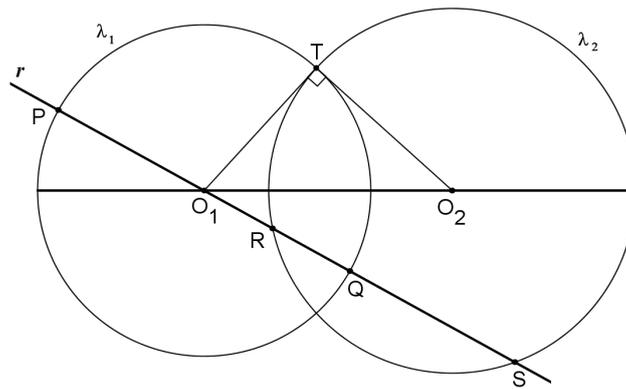


Figura 23 – Círculos ortogonais cortados por uma reta

Teorema 4.8 (Circunferência de Apolônio). *Dados dois pontos A e B , o lugar geométrico dos pontos P do plano que possuem razão $\frac{PA}{PB} = k$, sendo k uma constante real positiva diferente de 1 ($0 < k \neq 1$), é uma circunferência cujo centro está sobre a reta AB , chamada circunferência de Apolônio⁵ do segmento AB na razão k .*

Demonstração. Sejam M e N os conjugados harmônicos do segmento AB na razão k , ou seja,

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k = \frac{PA}{PB}.$$

Assim, M e N pertencem ao mesmo LG que P .

Observando o triângulo APB na Figura 24, se $\frac{MA}{MB} = \frac{PA}{PB}$ e $\frac{NA}{NB} = \frac{PA}{PB}$, então, pelo Teorema 4.6, recíproco das bissetrizes, conclui-se que PM é a sua bissetriz interna e PN é a sua bissetriz externa.

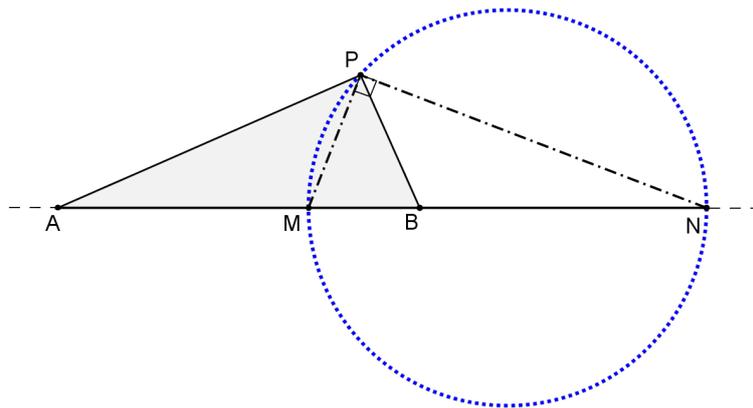


Figura 24 – Circunferência de Apolônio

Como M e N são fixos para o segmento AB na razão k (ver Proposição 4.10) e estão sobre a reta suporte de AB , com as bissetrizes tais que $PM \perp PN$ (ver Proposição 4.5), então o LG dos pontos P estará sobre o arco-capaz de 90° do segmento MN , ou seja, a circunferência de diâmetro MN (ver Proposição 4.4), com M e N sendo os conjugados harmônicos do segmento AB na razão k . \square

⁵ Apolônio de Perga foi um matemático grego do Séc. III a.C. que trouxe grandes contribuições à Geometria, notadamente quanto ao estudo das Cônicas (MUNIZ NETO, 2013).

Uma demonstração simples desse teorema, usando Geometria Analítica, pode ser visto em SHINE (2009). Alguns autores chamam também essa circunferência de círculo de Apolônio.

Definição 4.11 (Eixo radical). *Dados dois círculos não concêntricos, chama-se eixo radical desses círculos ao lugar geométrico de todos os pontos de igual potência em relação a esses dois círculos.*

Proposição 4.15. *O eixo radical de dois círculos não concêntricos é uma reta perpendicular ao segmento que une os centros desses círculos.*

Prova. Sejam dois círculos, Γ_A e Γ_B , de centros A e B e raios r e R , respectivamente. Sejam ainda M o ponto médio do segmento AB e P um ponto qualquer do plano, com igual potência em relação a Γ_A e Γ_B , e H a projeção de P sobre AB (Figura 25). Então,

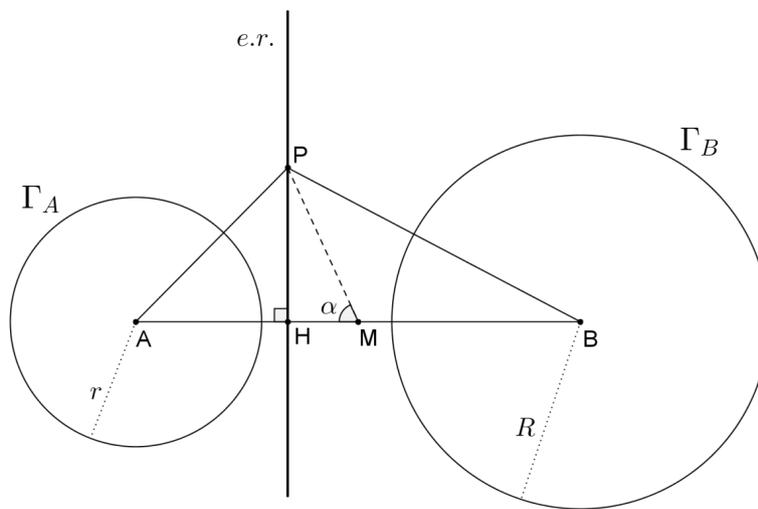


Figura 25 – Eixo radical

$$Pot_{\Gamma_A}(P) = Pot_{\Gamma_B}(P)$$

$$PA^2 - r^2 = PB^2 - R^2$$

$$PB^2 - PA^2 = R^2 - r^2. \quad (5)$$

Unindo-se P a M e aplicando a lei dos cossenos nos triângulos PMB e PMA , tem-se:

$$\Delta PMB: \quad PB^2 = BM^2 + PM^2 + 2 \cdot BM \cdot PM \cdot \cos \alpha, \text{ e}$$

$$\Delta PMA: \quad PA^2 = AM^2 + PM^2 - 2 \cdot AM \cdot PM \cdot \cos \alpha.$$

Subtraindo-se essas duas equações, uma vez que $AM = BM = \frac{AB}{2}$, obtém-se

$$PB^2 - PA^2 = 2 \cdot (BM + AM) \cdot (PM \cdot \cos \alpha) = 2 \cdot AB \cdot (PM \cdot \cos \alpha).$$

Mas, $PM \cdot \cos \alpha = MH$. Assim, de (5), chega-se a

$$PB^2 - PA^2 = R^2 - r^2 = 2 \cdot AB \cdot MH$$

$$MH = \frac{R^2 - r^2}{2 \cdot AB}.$$

Como o valor de $R^2 - r^2$ é constante e AB é fixo, conclui-se que MH é constante, independente da posição do ponto P ao longo da reta perpendicular que passa pela sua projeção H sobre AB . Logo, o lugar geométrico dos pontos P de igual potência em relação aos dois círculos dados é uma reta PH perpendicular ao segmento que une os centros desses círculos. \square

Teorema 4.9 (Centro radical). *Dados três círculos de centros não colineares, os três eixos radicais relativos a cada par de círculos concorrem em um único ponto, chamado Centro Radical, que possui igual potência em relação aos círculos dados.*

Demonstração. Sejam três círculos A , B e C , de centros não alinhados e os respectivos eixos radicais e_{AB} , e_{AC} e e_{BC} , entre cada par de círculos (Figura 26).

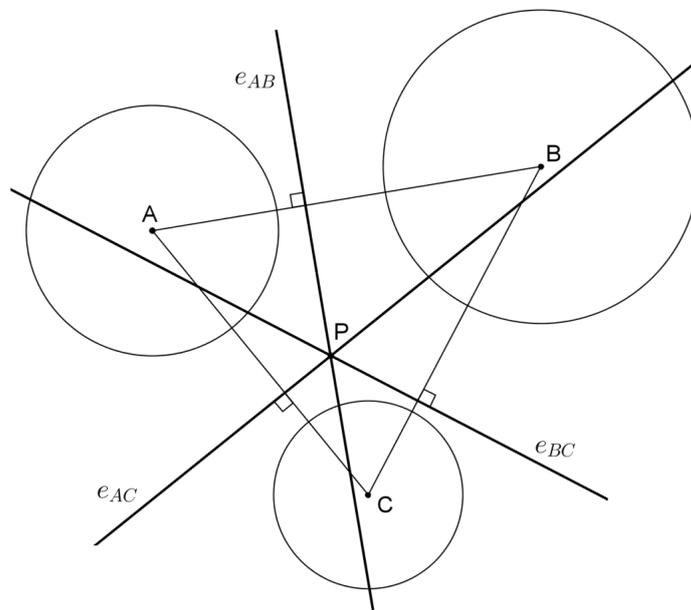


Figura 26 – Centro radical

Seja P o ponto de interseção entre e_{AB} e e_{AC} , ou seja, P é único com

$$P \in e_{AB} \Rightarrow Pot_A(P) = Pot_B(P), \text{ e}$$

$$P \in e_{AC} \Rightarrow Pot_A(P) = Pot_C(P).$$

Portanto, $Pot_B(P) = Pot_C(P) \Rightarrow P \in e_{BC}$.

Assim, os três eixos radicais e_{AB} , e_{AC} e e_{BC} concorrem no ponto P , centro radical dos círculos A , B e C , que possui igual potência em relação a esses círculos. \square

Definição 4.12 (Concorrência de retas). *Três ou mais retas são concorrentes quando passam por um mesmo ponto.*

Definição 4.13 (Colinearidade de pontos). *Três ou mais pontos são colineares quando pertencem a uma mesma reta.*

Nota: Uma forma simples de comprovar a colinearidade de pontos é por meio da soma das medidas dos ângulos existentes entre eles: se a soma dos ângulos adjacentes for igual a 180° (ângulo raso), então há colinearidade entre os pontos (Figura 27).

Se $\angle ABE + \angle EBD + \angle DBC = 180^\circ$, então A, B e C são colineares.

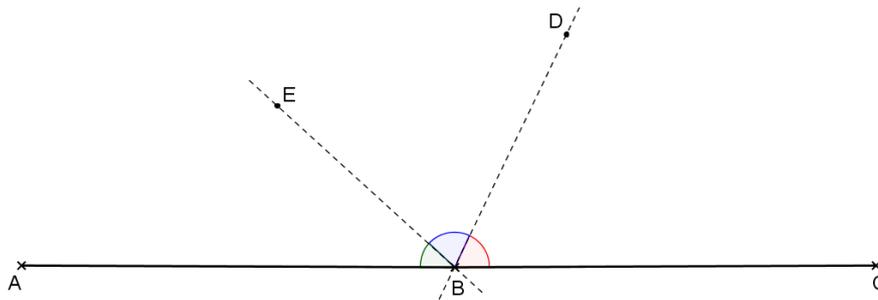


Figura 27 – Colinearidade de pontos

Segundo POSAMENTIER e SALKIND (1996), problemas que tratam de Colinearidade e Concorrência são normalmente complicados, trabalhosos e, conseqüentemente, impopulares entre os alunos. Entretanto, dois teoremas famosos reduziram essas dificuldades: o primeiro é creditado a Menelaus⁶, relacionado à colinearidade de pontos, e o segundo, ao matemático italiano Ceva⁷, relacionado à concorrência de retas.

Para EVES (1972), os teoremas de Menelaus e Ceva são teoremas poderosos que lidam de forma elegante com muitos problemas sobre colinearidade de pontos e concorrência de retas. MUNIZ NETO (2013) dá muita importância a esses dois teoremas clássicos, pois servem de base para demonstrar diversos outros teoremas e resolver uma série de problemas de olimpíadas de Matemática.

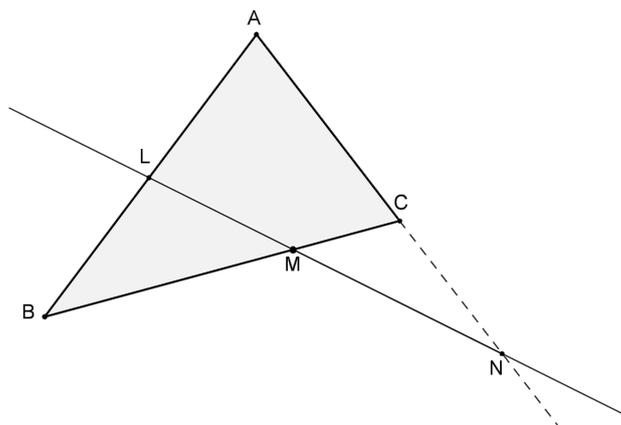


Figura 28 – Teorema de Menelaus

⁶ Menelaus de Alexandria era matemático e astrônomo que viveu no Egito por volta do ano 100 d.C. Escreveu vários tratados de Geometria, Trigonometria e Mecânica, e teve seu teorema de colinearidade de pontos esquecido por 15 séculos, sendo redescoberto só em 1678, por Giovanni Ceva (MACEDO, 2014).

⁷ Giovanni Ceva era matemático e engenheiro italiano do século XVII. Em 1678, na sua obra *De lineis rectis*, publicou o teorema de Menelaus e o teorema de concorrência de retas que leva seu nome (DE FREITAS, 2013).

Teorema 4.10 (Menelaus). *Dada uma reta qualquer que corta as retas suportes dos lados de um triângulo ABC nos pontos L, M e N , respectivamente, conforme a Figura 28, então, considerando razões orientadas⁸, tem-se que $\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = -1$.*

Demonstração. Traçando-se por A, B e C retas paralelas à reta original e prolongando-se o lado BC até o ponto D , pertencente à paralela que passa por A , conforme a Figura 29, forma-se um feixe de quatro retas paralelas cortadas por três transversais AB, AN e DB , donde, pela Lei da Proporcionalidade de Tales, tem-se

$$\frac{AL}{DM} = \frac{LB}{MB}, \text{ que fornece } DM = \frac{AL \cdot MB}{LB} \quad (6)$$

e

$$\frac{NC}{MC} = \frac{NA}{MD}, \text{ que fornece } MD = \frac{NA \cdot MC}{NC}. \quad (7)$$

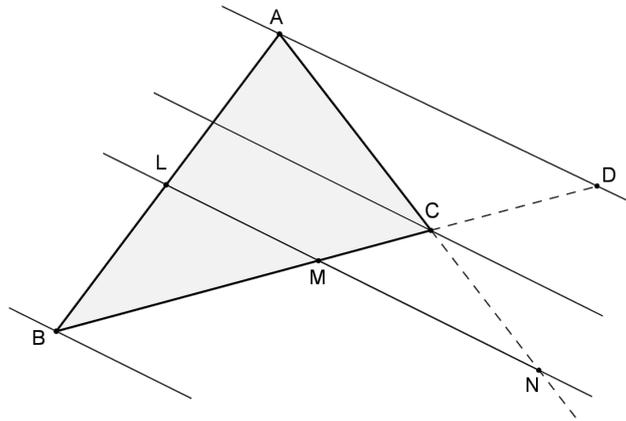


Figura 29 – Demonstração do teorema de Menelaus

De (6) e (7), considerando-se a orientação dos segmentos, obtém-se

$$\frac{AL \cdot MB}{LB} = -\frac{NA \cdot MC}{NC}$$

$$\frac{AL}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = -1, \text{ ou seja, } \frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = -1.$$

□

Quando são consideradas as razões orientadas no teorema de Menelaus, isto é, quando as medidas de comprimento utilizadas são algébricas, diz-se que ele está na sua versão completa. Alguns autores como GUALBERTO (2007) e MORGADO, WAGNER e JORGE (1990b), apresentam o teorema utilizando medidas geométricas de comprimento (razões sempre positivas), gerando o produto final das razões igual a 1. Neste caso, diz-se que o teorema está na sua versão básica.

O inconveniente da versão básica é que a recíproca do teorema não é sempre verdadeira. Um contra-exemplo simples ocorre quando os pontos L, M e N são médios dos lados do triângulo ABC . Neste

⁸ Dados três pontos colineares P, A e B , em qualquer ordem, a razão orientada $\frac{PA}{PB}$ é positiva se os segmentos PA e PB têm mesmo sentido e, negativa, se tiverem sentidos opostos.

caso, os pontos não são colineares, mas o produto das razões é igual a 1 (DE FREITAS, 2013). Se o professor ou o aluno têm ciência dessa particularidade e toma o devido cuidado no momento da resolução de um problema, pode aplicar o teorema recíproco de Menelaus na sua versão básica.

Teorema 4.11 (Recíproco de Menelaus). *Se L , M e N são, respectivamente, pontos sobre as retas suportes dos lados AB , BC e AC de um triângulo ABC e $\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = -1$, considerando as razões orientadas, então L , M e N são colineares.*

Demonstração. Supondo que a reta LM corte o lado AC num ponto N' (Figura 30), pelo teorema de Menelaus (versão completa), L , M e N' são colineares, com

$$\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN'}{N'A} = -1.$$

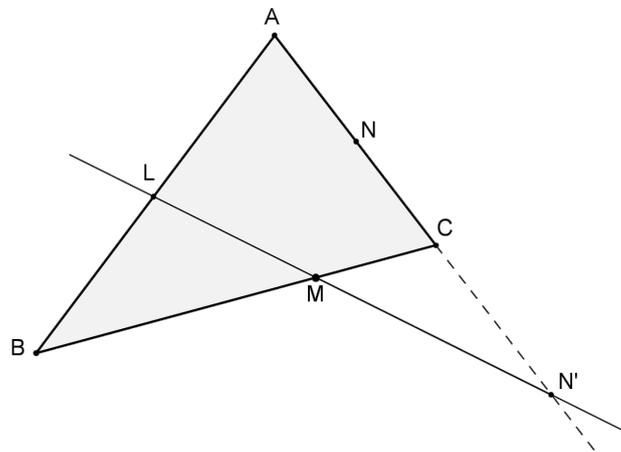


Figura 30 – Demonstração do teorema recíproco de Menelaus

Se, por hipótese, $\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = -1$, então $\frac{CN}{NA} = \frac{CN'}{N'A}$, o que é possível se $N \equiv N'$. Logo, L , M e N são colineares. \square

Nota: Os pontos colineares L , M e N são chamados por EVES (1972) de pontos de Menelaus.

Existem outras formas de demonstrar o teorema de Menelaus. Por exemplo, NEVES (2013) o demonstra utilizando semelhança de triângulos e EVES (1972) por meio do cálculo de áreas.

Teorema 4.12 (Menelaus trigonométrico). *Dada uma reta qualquer que corta as retas suportes dos lados AB , BC e CA de um triângulo ABC , nos pontos L , M e N , respectivamente, conforme a Figura 28, então*

$$\frac{\text{sen} \angle ACL}{\text{sen} \angle LCB} \cdot \frac{\text{sen} \angle BAM}{\text{sen} \angle MAC} \cdot \frac{\text{sen} \angle CBN}{\text{sen} \angle NBA} = -1.$$

Demonstração. Para demonstrar este teorema, considere o lema a seguir.

Lema 4.1. *Dados um triângulo ABC e a ceviana⁹ AD , então $\frac{BD}{DC} = \frac{AB \cdot \text{sen} \angle BAD}{AC \cdot \text{sen} \angle DAC}$.*

⁹ Ceviana é todo segmento que liga um vértice de um triângulo ao seu lado oposto ou ao seu prolongamento. Esse termo foi dado em homenagem ao matemático Giovanni Ceva que publicou este teorema em 1678 (COXETER; GREITZER, 1967).

Prova. Seja AH a altura relativa ao vértice A do triângulo ABC (Figura 31). Então, a área do triângulo BAD pode ser dada por

$$[BAD] = \frac{BD \cdot AH}{2} = \frac{AB \cdot AD}{2} \cdot \text{sen} \angle BAD, \text{ donde}$$

$$BD = \frac{AB \cdot AD}{AH} \cdot \text{sen} \angle BAD. \quad (8)$$

Da mesma forma, a área do triângulo DAC é dada por

$$[DAC] = \frac{DC \cdot AH}{2} = \frac{AC \cdot AD}{2} \cdot \text{sen} \angle DAC, \text{ donde}$$

$$DC = \frac{AC \cdot AD}{AH} \cdot \text{sen} \angle DAC. \quad (9)$$

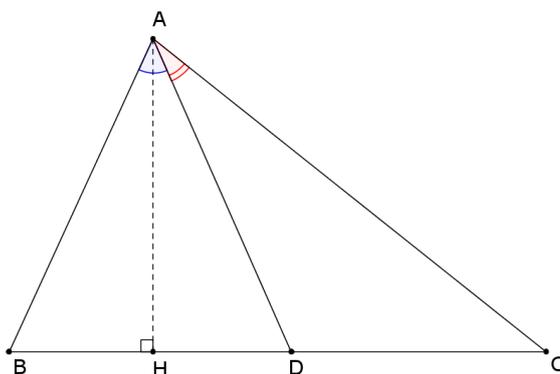


Figura 31 – Prova do lema

Dividindo (8) por (9), tem-se $\frac{BD}{DC} = \frac{AB \cdot \text{sen} \angle BAD}{AC \cdot \text{sen} \angle DAC}$. □

Nota: Observe que se os ângulos $\angle BAD$ e $\angle DAC$ forem iguais, ou seja, se AD for bissetriz interna relativa ao vértice A , o lema acima gera o teorema da bissetriz interna. Em outras palavras, o teorema da bissetriz interna é um caso particular do Lema 4.1.

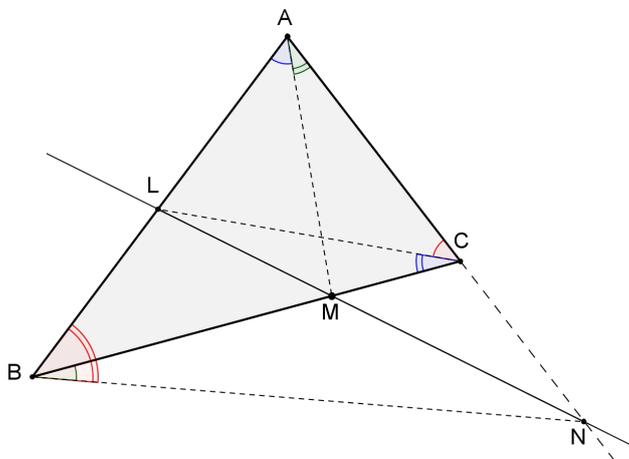


Figura 32 – Demonstração do teorema de Menelaus trigonométrico

Portanto, com base no Lema 4.1, e, observando a Figura 32, pode-se escrever, após traçar as cevianas AM , BN e CL ,

$$\frac{AL}{LB} = \frac{AC \cdot \text{sen}\angle ACL}{CB \cdot \text{sen}\angle LCB}, \quad \frac{BM}{MC} = \frac{BA \cdot \text{sen}\angle BAM}{AC \cdot \text{sen}\angle MAC} \quad \text{e} \quad \frac{CN}{NA} = \frac{CB \cdot \text{sen}\angle CBN}{BA \cdot \text{sen}\angle NBA}.$$

Multiplicando-se essas três igualdades, obtém-se

$$\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = \frac{AC \cdot \text{sen}\angle ACL}{CB \cdot \text{sen}\angle LCB} \cdot \frac{BA \cdot \text{sen}\angle BAM}{AC \cdot \text{sen}\angle MAC} \cdot \frac{CB \cdot \text{sen}\angle CBN}{BA \cdot \text{sen}\angle NBA},$$

como o teorema de Menelaus fornece, para os pontos L , M e N , $\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = -1$, então,

$$\frac{\text{sen}\angle ACL}{\text{sen}\angle LCB} \cdot \frac{\text{sen}\angle BAM}{\text{sen}\angle MAC} \cdot \frac{\text{sen}\angle CBN}{\text{sen}\angle NBA} = -1.$$

□

Nota: Observe que as razões trigonométricas também são orientadas, ou seja, o sentido em que o ângulo é marcado importa: $\angle NBA = -\angle ABN$. Cabe destacar que a recíproca desse teorema também é válida ¹⁰.

USUI (2014), trabalhando com trigonometria esférica, demonstra uma série de relações interessantes usando o teorema de Menelaus. Já GUALBERTO (2007) prova, pelo Princípio da Indução, o que chama de “Teorema Generalizado de Menelaus”, que pode ser aplicado a um polígono de $n > 3$ lados, mas cujo recíproco não é sempre verdadeiro.

A vantagem do teorema de Menelaus é provar, de forma simples, a colinearidade entre pontos, tema muitas vezes cobrado em problemas olímpicos.

Teorema 4.13 (Ceva). *Se um triângulo ABC possui três cevianas, AM , BN e CL , concorrentes num ponto P , conforme a Figura 33, então $\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$.*

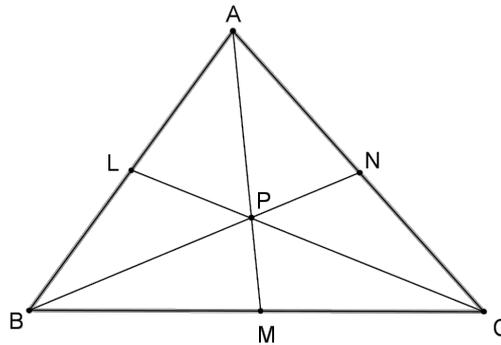


Figura 33 – Teorema de Ceva

Demonstração. Traçando-se por A uma reta paralela ao lado BC e prolongando-se as cevianas BN e CL até encontrar essa reta nos pontos B' e C' , respectivamente, conforme a Figura 34, formam-se os seguintes casos de semelhança de triângulos:

$$\triangle CMP \sim \triangle C'AP, \text{ donde } \frac{MC}{AC'} = \frac{PM}{PA}; \quad (10)$$

$$\triangle BMP \sim \triangle B'AP, \text{ donde } \frac{BM}{B'A} = \frac{PM}{PA}; \quad (11)$$

¹⁰ A demonstração da recíproca do teorema será deixada a cargo do leitor.

$$\triangle BCN \sim \triangle B'AN, \text{ donde } \frac{B'A}{BC} = \frac{NA}{NC}; \text{ e} \quad (12)$$

$$\triangle BCL \sim \triangle AC'L, \text{ donde } \frac{BC}{AC'} = \frac{LB}{LA}. \quad (13)$$

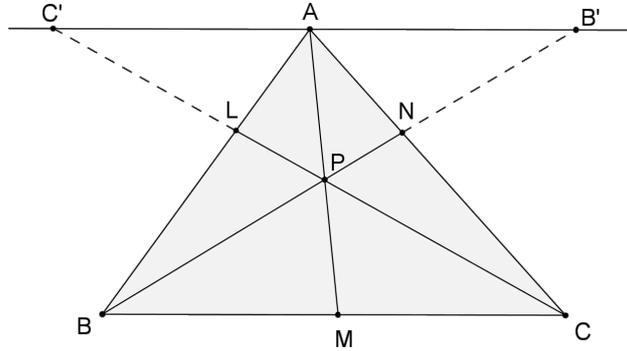


Figura 34 – Demonstração do Teorema Ceva

De (10) e (11), tem-se

$$\frac{MC}{AC'} = \frac{BM}{B'A} \text{ ou } \frac{B'A}{AC'} = \frac{BM}{MC}. \quad (14)$$

Multiplicando-se membro a membro as igualdades (12) e (13), tem-se

$$\frac{B'A}{AC'} = \frac{NA}{NC} \cdot \frac{LB}{LA}. \quad (15)$$

Por fim, comparando-se (14) e (15), chega-se a

$$\frac{BM}{MC} = \frac{NA}{NC} \cdot \frac{LB}{LA}, \text{ ou seja, } \frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1.$$

□

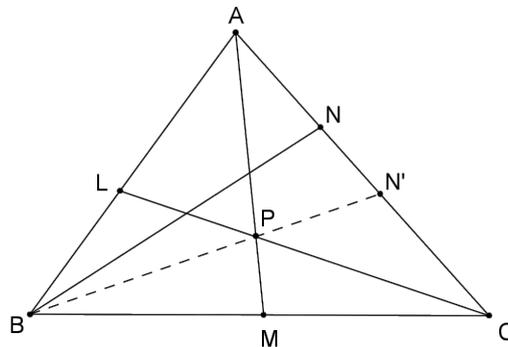


Figura 35 – Demonstração do teorema recíproco de Ceva

Teorema 4.14 (Recíproco de Ceva). Se AM , BN e CL são três cevianas de um triângulo ABC e o produto $\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$, então AM , BN e CL são concorrentes num ponto.

Demonstração. Considere P a interseção de AM e CL . Traçando-se a ceviana BN' que passa por P , conforme a Figura 35, pelo teorema de Ceva, tem-se $\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN'}{N'A} = 1$.

Se, por hipótese, $\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$, então $\frac{CN'}{N'A} = \frac{CN}{NA}$, o que é possível se $N' \equiv N$. Logo, AM , BN e CL são concorrentes no ponto P . \square

Outra demonstração do teorema de Ceva, utilizando o conceito de área, pode ser vista em NEVES (2013) e em GUALBERTO (2007).

Teorema 4.15 (Ceva trigonométrico). *Se um triângulo ABC possui três cevianas AM , BN e CL , concorrentes num ponto P , conforme a Figura 33, então*

$$\frac{\text{sen}\angle ABN}{\text{sen}\angle NBC} \cdot \frac{\text{sen}\angle BCL}{\text{sen}\angle LCA} \cdot \frac{\text{sen}\angle CAM}{\text{sen}\angle MAB} = 1.$$

Demonstração. Com base na Figura 33, a aplicação da Lei dos Senos nos triângulos ACP , ABP e BCP , produz, respectivamente,

$$\Delta ACP: \frac{\text{sen}\angle CAP}{CP} = \frac{\text{sen}\angle PCA}{PA},$$

$$\Delta ABP: \frac{\text{sen}\angle ABP}{AP} = \frac{\text{sen}\angle PAB}{PB},$$

$$\Delta BCP: \frac{\text{sen}\angle BCP}{BP} = \frac{\text{sen}\angle PBC}{PC}.$$

Multiplicando-se essas três igualdades, obtém-se

$$\frac{\text{sen}\angle CAP}{CP} \cdot \frac{\text{sen}\angle ABP}{AP} \cdot \frac{\text{sen}\angle BCP}{BP} = \frac{\text{sen}\angle PCA}{PA} \cdot \frac{\text{sen}\angle PAB}{PB} \cdot \frac{\text{sen}\angle PBC}{PC},$$

$$\frac{\text{sen}\angle ABP}{\text{sen}\angle PBC} \cdot \frac{\text{sen}\angle BCP}{\text{sen}\angle PCA} \cdot \frac{\text{sen}\angle CAP}{\text{sen}\angle PAB} = 1,$$

$$\frac{\text{sen}\angle ABN}{\text{sen}\angle NBC} \cdot \frac{\text{sen}\angle BCL}{\text{sen}\angle LCA} \cdot \frac{\text{sen}\angle CAM}{\text{sen}\angle MAB} = 1.$$

\square

Nota: A recíproca desse teorema também é válida ¹¹.

EVES (1972) apresenta como exercício para o leitor provar o que chama de “Teorema Generalizado de Ceva”, aplicável a um polígono de gênero ímpar n ($n > 3$).

Uma das vantagens do teorema de Ceva é provar, de forma simples, a existência de vários pontos notáveis num triângulo, como o incentro, baricentro, ortocentro, ponto de Gergonne, ponto de Nagel, ponto de Lemoine, etc.

Proposição 4.16. *Num triângulo escaleno, os pés das bissetrizes internas de dois ângulos e o pé da bissetriz externa do terceiro ângulo são colineares.*

¹¹ A demonstração da recíproca do teorema será deixada a cargo do leitor.

Prova. Sejam BN e CL as bissetrizes internas e AM a bissetriz externa do triângulo escaleno ABC (Figura 36). Pelo teorema da bissetriz interna (Teorema 4.5(i)), aplicado ao vértice C , tem-se

$$\frac{CA}{AL} = \frac{CB}{LB} \text{ ou } \frac{CA}{CB} = \frac{AL}{LB}. \quad (16)$$

Pelo teorema da bissetriz externa (Teorema 4.5(ii)), aplicado ao vértice A , tem-se

$$\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{MC} \text{ ou } \frac{AB}{AC} = \frac{BM}{MC}. \quad (17)$$

Pelo teorema da bissetriz interna (Teorema 4.5(i)), aplicado ao vértice B , tem-se

$$\frac{BC}{CN} = \frac{BA}{NA} \text{ ou } \frac{BC}{BA} = \frac{CN}{NA}. \quad (18)$$

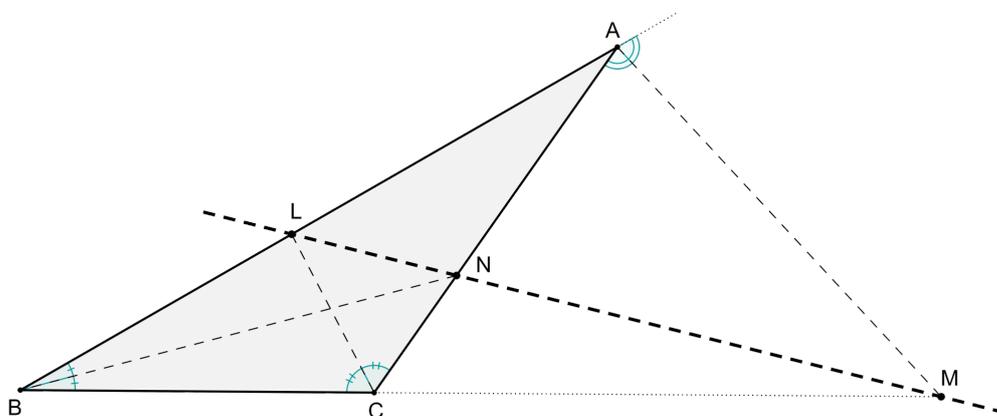


Figura 36 – Colinearidade dos pés das bissetrizes externa e da bissetriz interna

Multiplicando-se, membro a membro, as equações (16), (17) e (18), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{CA}{CB} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} &= \frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \\ \frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} &= 1. \end{aligned}$$

Observa-se, pela Figura 36, que tal equação, ao usar as razões orientadas (versão completa do teorema de Menelaus), resulta -1, e, desse modo, pelo teorema recíproco de Menelaus (Teorema 4.11), aplicado ao triângulo ABC , os pontos L , M e N (pés das bissetrizes) são colineares. \square

Proposição 4.17. *Os pés das três bissetrizes externas de um triângulo escaleno são colineares.*

Prova. Considere o triângulo escaleno ABC da Figura 37. Sejam b_a , b_b e b_c as bissetrizes externas dos ângulos $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$, respectivamente, e A' , B' e C' , os pontos de encontro dessas bissetrizes com os lados opostos aos respectivos ângulos.

Pelo teorema da bissetriz externa (Teorema 4.5(ii)), aplicado ao triângulo ABC , tem-se

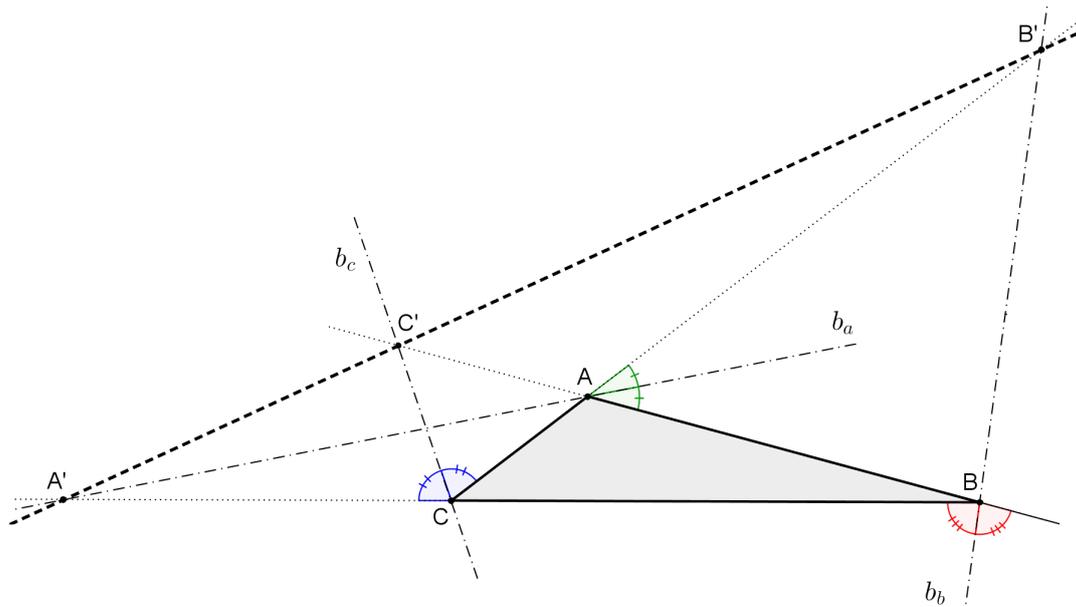


Figura 37 – Colinearidade dos pés das bissetrizes externas

$$\begin{aligned}
 \text{- vértice } A: & \quad \frac{AB}{A'B} = \frac{AC}{CA'} \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{A'B}{CA'}; \\
 \text{- vértice } B: & \quad \frac{BA}{B'A} = \frac{BC}{B'C} \quad \text{ou} \quad \frac{BC}{BA} = \frac{B'C}{B'A}; \\
 \text{- vértice } C: & \quad \frac{CA}{C'A} = \frac{BC}{BC'} \quad \text{ou} \quad \frac{CA}{BC} = \frac{C'A}{BC'}.
 \end{aligned}$$

Multiplicando-se, membro a membro, essas três igualdades, obtém-se

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{A'B}{CA'} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{BC'}, \quad \text{ou} \\
 &\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1,
 \end{aligned}$$

que, pelo teorema recíproco de Menelaus (Teorema 4.11), conclui-se que A' , B' e C' , pés das bissetrizes externas dos ângulos do triângulo ABC , são colineares. \square

Teorema 4.16 (Baricentro). *As três medianas de um triângulo são concorrentes em um ponto G , chamado Baricentro, que as divide na razão $\frac{1}{2}$.*

Demonstração. Sejam AM , BN e CL as medianas do triângulo ABC .

Calculando o produto das razões $\frac{AL}{LB}$, $\frac{BM}{MC}$ e $\frac{CN}{NA}$, uma vez que $AL = LB$, $BM = MC$ e $CN = NA$, tem-se

$$\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1,$$

que, pelo teorema recíproco de Ceva (Teorema 4.14), aplicado ao triângulo ABC , conclui-se que as medianas AM , BN e CL são concorrentes em um ponto. Seja G este ponto.

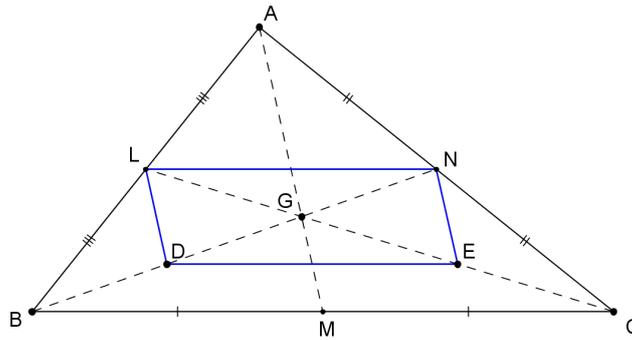


Figura 38 – Divisão da mediana pelo baricentro

Considere agora os pontos D , médio de BG , e E , médio de CG . Traçando-se as bases médias LN e DE dos triângulos ABC e GBC , respectivamente, tem-se (Figura 38)

$$\Delta ABC: \quad LN \parallel BC \text{ e } LN = \frac{BC}{2},$$

$$\Delta GBC: \quad DE \parallel BC \text{ e } DE = \frac{BC}{2}.$$

Com isso, $LN = DE$ e $LN \parallel DE$, fazendo com que o quadrilátero $LNDE$ seja um paralelogramo com G sendo o ponto de encontro das suas diagonais. Assim, $NG = GD = DB$ e $LG = GE = EC$. Analogamente, tem-se $AF = FG = GM$, com F sendo médio de AG .

$$\text{Portanto, } G \text{ divide as medianas na razão } \frac{GM}{AG} = \frac{GN}{BG} = \frac{GL}{CG} = \frac{1}{2}. \quad \square$$

FEITOSA (2013) demonstra a concorrência das medianas no baricentro utilizando números complexos.

Teorema 4.17 (Ortocentro). *As três alturas de um triângulo são concorrentes em um ponto H , chamado Ortocentro.*

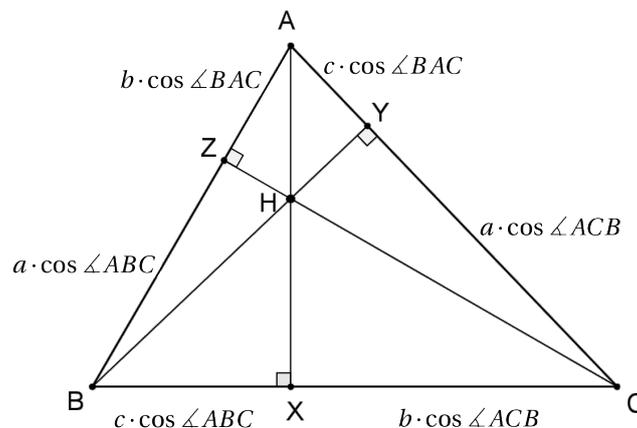


Figura 39 – Concorrência das alturas de um triângulo

Demonstração. Dado um triângulo ABC , com lados $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$, e alturas AX , BY e CZ (Figura 39), pode-se escrever, com o apoio da Trigonometria,

$$\left\{ \begin{array}{l} AZ = b \cdot \cos \angle BAC \\ ZB = a \cdot \cos \angle ABC \\ BX = c \cdot \cos \angle ABC \\ XC = b \cdot \cos \angle ACB \\ CY = a \cdot \cos \angle ACB \\ YA = c \cdot \cos \angle BAC \end{array} \right.$$

Fazendo o produto das razões $\frac{AZ}{ZB}$, $\frac{BX}{XC}$ e $\frac{CY}{YA}$ obtém-se, como resultado,

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = \frac{b \cdot \cos \angle BAC}{a \cdot \cos \angle ABC} \cdot \frac{c \cdot \cos \angle ABC}{b \cdot \cos \angle ACB} \cdot \frac{a \cdot \cos \angle ACB}{c \cdot \cos \angle BAC}, \text{ ou seja,}$$

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1,$$

que, pelo teorema recíproco de Ceva (Teorema 4.14), aplicado ao triângulo ABC , conclui-se que as alturas AX , BY e CZ concorrem em um ponto. Tal ponto H é denominado ortocentro. \square

Teorema 4.18 (Ponto de Gergonne). *Se X , Y e Z são os pontos de contato do incírculo do triângulo ABC com seus lados AB , AC e BC , respectivamente, conforme a Figura 40, então as cevianas AZ , BY e CX são concorrentes num ponto G' , chamado Ponto de Gergonne¹².*

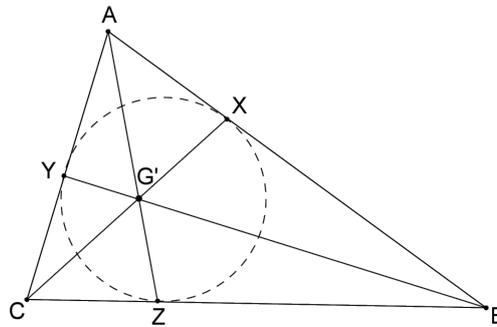


Figura 40 – Ponto de Gergonne

Demonstração. Calculando o produto das razões $\frac{AX}{XB}$, $\frac{BZ}{ZC}$ e $\frac{CY}{YA}$, uma vez que as tangentes ao incírculo do triângulo ABC , traçadas de A , B e C , fornecem $AX = AY$, $BX = BZ$ e $CY = CZ$, tem-se

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BZ}{ZC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1,$$

que, pelo teorema recíproco de Ceva (Teorema 4.14), aplicado ao triângulo ABC , conclui-se que as cevianas AZ , BY e CX são concorrentes em um ponto. Tal ponto G' é denominado ponto de Gergonne. \square

¹² Joseph-Diez Gergonne (1771-1859) foi um matemático e militar francês, que muito contribuiu para o desenvolvimento da Geometria Projetiva no Séc XIX (MUNIZ NETO, 2013).

Teorema 4.19 (Ponto de Nagel). Se X , Y e Z são os pontos de contato dos excírculos do triângulo ABC com seus lados AB , AC , e BC , respectivamente, conforme a Figura 41, então as cevianas AZ , BY e CX são concorrentes num ponto N , chamado Ponto de Nagel¹³.

Demonstração. Sejam J , K e L os centros dos excírculos do triângulo ABC de perímetro $2p$. Os pontos de tangência dessas circunferências com os lados do triângulo são, respectivamente, Q , X e P (excírculo de centro J), U , Y e T (excírculo de centro K) e S , Z e R (excírculo de centro L) (Figura 41).

Sejam ainda $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$ os lados do triângulo ABC .

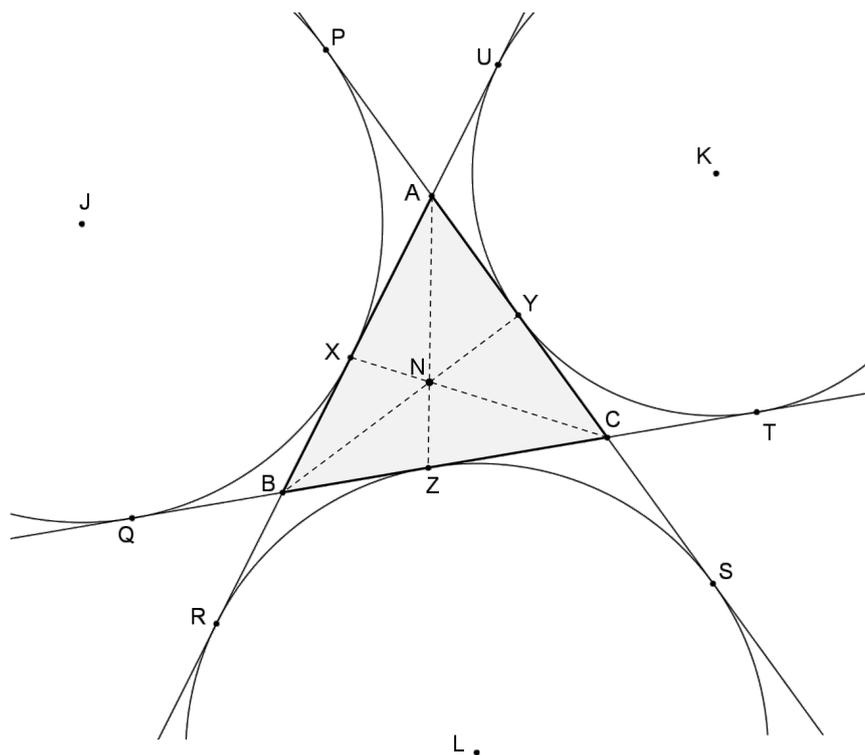


Figura 41 – Ponto de Nagel

Tomando por base o excírculo de centro L , tem-se $AR = AS$, $BR = BZ$ e $CS = CZ$, o que fornece

$$AR = AS$$

$$AB + BR = AC + CS$$

$$c + BZ = b + CZ.$$

Como $c + BZ + b + CZ = a + b + c = 2p$, decorre que $c + BZ = b + CZ = p$, ou seja,

$$BZ = p - c, \tag{19}$$

$$CZ = p - b. \tag{20}$$

Analogamente, tomando por base os outros dois excírculos, chega-se a

¹³ Christian Heinrich von Nagel (1803-1882) foi um matemático alemão, que desenvolveu diversos trabalhos envolvendo a geometria dos triângulos (MUNIZ NETO, 2013).

$$CY = p - a, \quad (21)$$

$$AY = p - c, \quad (22)$$

$$AX = p - b, \quad (23)$$

$$BX = p - a. \quad (24)$$

Fazendo o produto das razões $\frac{AX}{XB}$, $\frac{BZ}{ZC}$ e $\frac{CY}{YA}$, a partir dos resultados (19), (20), (21), (22), (23) e (24), obtém-se

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BZ}{ZC} \cdot \frac{CY}{YA} = \frac{p-b}{p-a} \cdot \frac{p-c}{p-b} \cdot \frac{p-a}{p-c} = 1,$$

que, pelo teorema recíproco de Ceva (Teorema 4.14), aplicado ao triângulo ABC , conclui-se que as cevianas AZ , BY e CX concorrem em um ponto. Tal ponto N é denominado ponto de Nagel. \square

Definição 4.14 (Cevianas isogonais). Se as cevianas AD e AE , relativas ao vértice A do triângulo ABC , formam ângulos congruentes com os lados AB e AC , respectivamente, então essas cevianas são chamadas Isogonais (Figura 42).

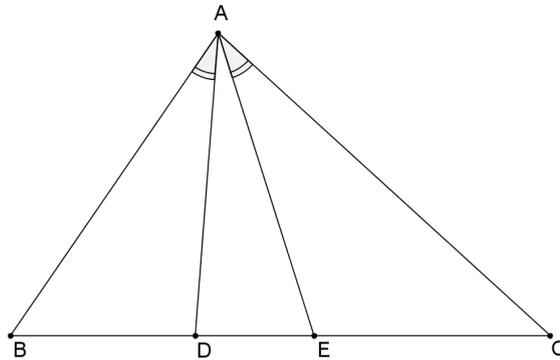


Figura 42 – Cevianas isogonais

Definição 4.15 (Simediana). Chama-se Simediana à isogonal da mediana de um triângulo.

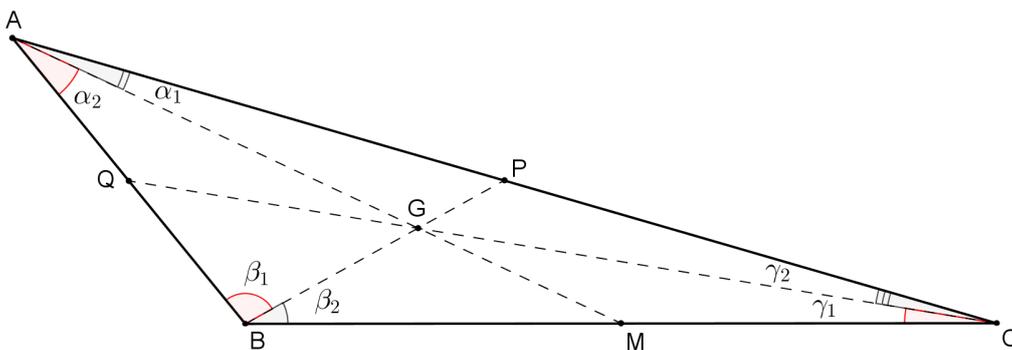


Figura 43 – Demonstração do ponto de Lemoine - 1ª parte

Teorema 4.20 (Ponto de Lemoine). *As três simedianas de um triângulo são concorrentes em um ponto K , chamado Ponto Simediano ou Ponto de Lemoine¹⁴.*

Demonstração. Seja o triângulo ABC com medianas AM , BP e CQ , as quais determinam, nos vértices do triângulo, os ângulos α_1 , α_2 , β_1 , β_2 , γ_1 e γ_2 (Figura 43).

Se pelo Teorema 4.16, essas medianas concorrem no baricentro G , então, pelo teorema de Ceva trigonométrico (Teorema 4.15), é possível afirmar que

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}\alpha_2} \cdot \frac{\operatorname{sen}\beta_1}{\operatorname{sen}\beta_2} \cdot \frac{\operatorname{sen}\gamma_1}{\operatorname{sen}\gamma_2} = 1, \quad (25)$$

onde $\alpha_1 + \alpha_2 = \angle BAC$, $\beta_1 + \beta_2 = \angle ABC$ e $\gamma_1 + \gamma_2 = \angle BCA$.

Sejam AM' , BP' e CQ' as simedianas do triângulo ABC (Figura 44). Pelo teorema recíproco de Ceva trigonométrico, as simedianas serão concorrentes se

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_2}{\operatorname{sen}\alpha_1} \cdot \frac{\operatorname{sen}\beta_2}{\operatorname{sen}\beta_1} \cdot \frac{\operatorname{sen}\gamma_2}{\operatorname{sen}\gamma_1} = 1. \quad (26)$$

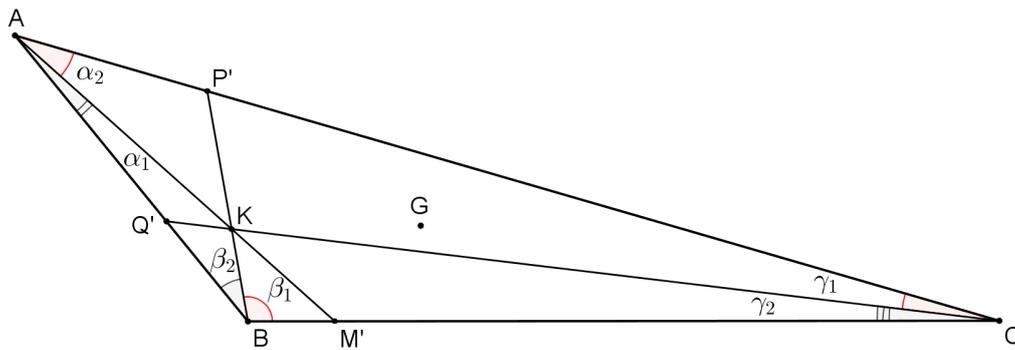


Figura 44 – Demonstração do ponto de Lemoine - 2ª parte

Uma vez que as simedianas são isogonais das medianas, os ângulos determinados nos vértices do triângulo ABC são os mesmos α_1 , α_2 , β_1 , β_2 , γ_1 e γ_2 , mas numa ordem inversa, onde $\alpha_2 + \alpha_1 = \angle BAC$, $\beta_2 + \beta_1 = \angle ABC$ e $\gamma_2 + \gamma_1 = \angle BCA$ (Figura 44). Portanto, a equação (26) é verdadeira, uma vez que é equivalente à equação (25), donde se conclui que as simedianas concorrem em um ponto K (ponto de Lemoine). \square

Nota: Os pontos G (baricentro) e K (simediano ou de Lemoine) são chamados conjugados isogonais.

MUNIZ NETO (2013) prova a seguinte propriedade do ponto Simediano: a soma dos quadrados das distâncias de um ponto aos lados de um triângulo é mínima se, e somente se, este ponto for o ponto de Lemoine do triângulo.

Teorema 4.21 (Monge¹⁵). *Dados três círculos de raios distintos, não situados completamente no interior uns dos outros, então as tangentes comuns externas a cada par de círculos determinam três pontos colineares (Figura 45).*

¹⁴ Emile Lemoine (1840-1912) foi um engenheiro e matemático francês que contribuiu principalmente com o estudo dos triângulos na Geometria, descobrindo o ponto notável que leva o seu nome em 1873 (SMITH, 1896).

¹⁵ Gaspard Monge (1746-1818) foi um matemático francês considerado o pai da Geometria Descritiva, tendo contribuído muito também na área da Geometria Projetiva.

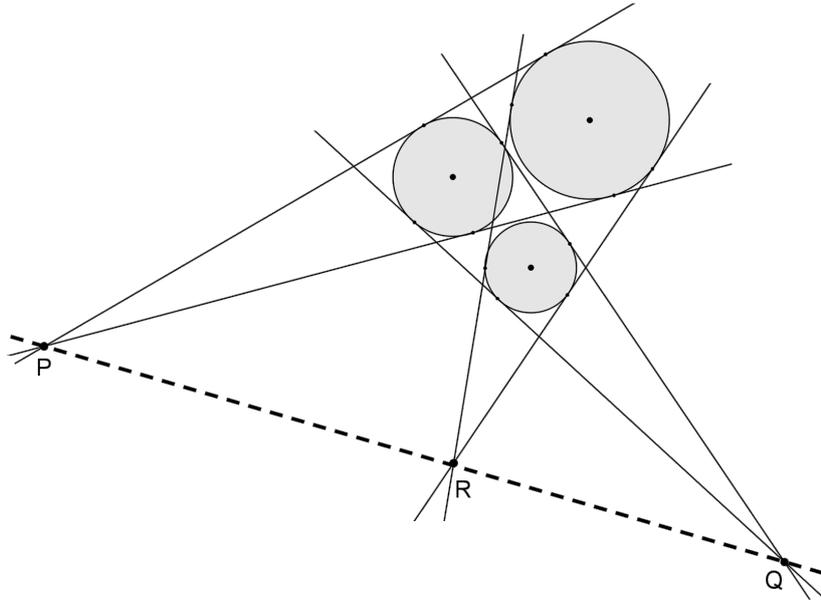


Figura 45 – Teorema de Monge

Demonstração. Denotando por A , B e C os centros dos círculos, então cada terno de pontos (P, A, C) , (R, B, C) e (Q, B, A) pertencem a uma reta, que passa por dois centros e pelo ponto exterior de onde partem as tangentes comuns aos círculos (Figura 46).

Sejam X , Y e Z pontos de encontro das tangentes comuns externas que determinam um triângulo XYZ de lados tangentes aos círculos e que englobam os três círculos dados (Figura 46). Assim, XA , YB e ZC são bissetrizes internas do triângulo XYZ que se encontram no seu incentro I (ver Proposição 4.3).

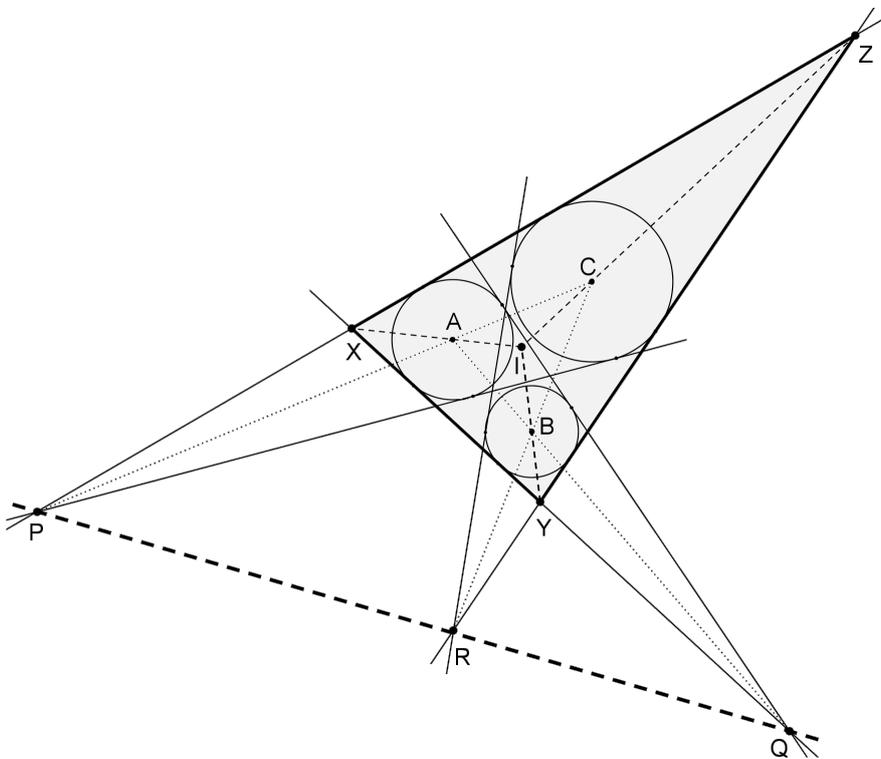


Figura 46 – Demonstração do teorema de Monge

Aplicando o teorema de Menelaus (Teorema 4.10), na sua versão básica, no triângulo IXZ , cortado

pela reta PC , tem-se $\frac{ZP}{PX} \cdot \frac{XA}{AI} \cdot \frac{IC}{CZ} = 1$, que fornece

$$\frac{ZP}{PX} = \frac{CZ}{IC} \cdot \frac{AI}{XA}. \quad (27)$$

Analogamente, no triângulo IXY , cortado pela reta QA , tem-se $\frac{IA}{AX} \cdot \frac{XQ}{QY} \cdot \frac{YB}{BI} = 1$, que fornece

$$\frac{XQ}{QY} = \frac{BI}{YB} \cdot \frac{AX}{IA}. \quad (28)$$

De igual modo, no triângulo IZY , cortado pela reta RC , tem-se $\frac{IB}{BY} \cdot \frac{YR}{RZ} \cdot \frac{ZC}{CI} = 1$, que fornece

$$\frac{YR}{RZ} = \frac{CI}{ZC} \cdot \frac{BY}{IB}. \quad (29)$$

Multiplicando-se as equações (27), (28) e (29), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{ZP}{PX} \cdot \frac{XQ}{QY} \cdot \frac{YR}{RZ} &= \frac{CZ}{IC} \cdot \frac{AI}{XA} \cdot \frac{BI}{YB} \cdot \frac{AX}{IA} \cdot \frac{CI}{ZC} \cdot \frac{BY}{IB} \\ \frac{ZP}{PX} \cdot \frac{XQ}{QY} \cdot \frac{YR}{RZ} &= 1. \end{aligned}$$

Tal expressão, pelo teorema recíproco de Menelaus (Teorema 4.11), aplicado ao triângulo XYZ , garante que os pontos P , Q e R são colineares. \square

Nota: O teorema é válido quando a posição relativa entre os três círculos permitir a existência dos três pares de tangentes comuns externas.

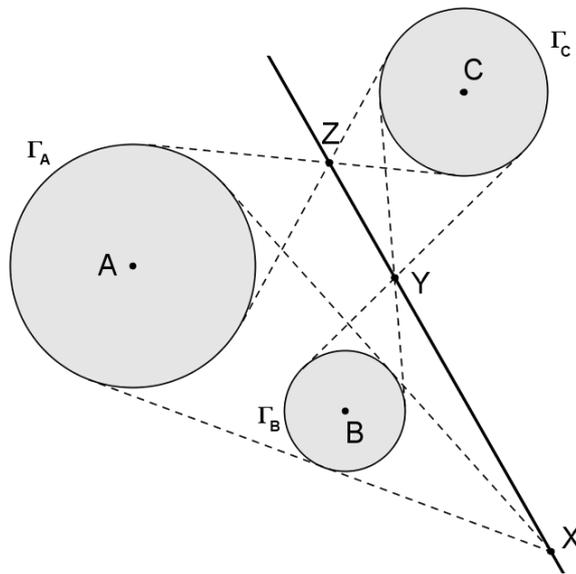


Figura 47 – Teorema de Monge-d'Alembert

Teorema 4.22 (Monge-d'Alembert¹⁶). *Dados três círculos de raios distintos, com pelo menos dois pares deles exteriores entre si, então as tangentes comuns internas de dois pares de círculos e as tangentes comuns externas do par de círculos restante determinam três pontos colineares (Figura 47).*

¹⁶ Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) foi um matemático e físico francês do séc. XVIII que teve grande destaque nas áreas de Mecânica, Álgebra e Cálculo.

Demonstração. Sejam A, B e C os centros de três círculos Γ_A, Γ_B e Γ_C , de raios r_A, r_B e r_C , respectivamente (Figura 47).

Se Z e Y são os pontos de interseção das tangentes comuns internas de Γ_A e Γ_C e de Γ_B e Γ_C , respectivamente, e X é o ponto de interseção das tangentes comuns externas de Γ_A e Γ_B , então X, Y e Z serão colineares se, aplicando o teorema de Menelaus (Teorema 4.10), na sua versão básica, no triângulo ABC (Figura 48), for encontrada a igualdade, ou seja,

$$\frac{AZ}{ZC} \cdot \frac{CY}{YB} \cdot \frac{BX}{XA} = 1. \quad (30)$$

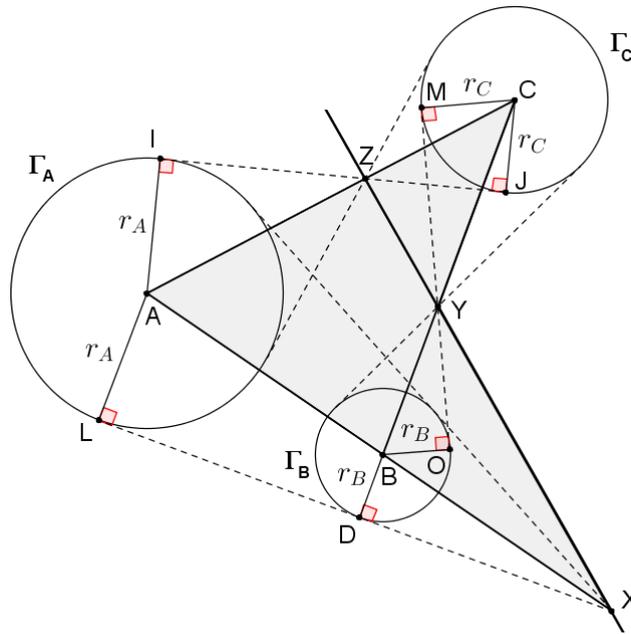


Figura 48 – Demonstração do teorema de Monge-d'Alembert

Considere a Figura 48, onde $AI = AL = r_A$, $BO = BD = r_B$ e $CJ = CM = r_C$. Como os triângulos retângulos AIZ e CJZ são semelhantes, então $\frac{AZ}{ZC} = \frac{r_A}{r_C}$. Analogamente, os triângulos retângulos CMY e BOY são semelhantes, com $\frac{CY}{YB} = \frac{r_C}{r_B}$; e, os triângulos retângulos BDX e ALX também são semelhantes, com $\frac{BX}{XA} = \frac{r_B}{r_A}$.

Desse modo, tem-se, a partir da equação (30), que

$$\frac{AZ}{ZC} \cdot \frac{CY}{YB} \cdot \frac{BX}{XA} = \frac{r_A}{r_C} \cdot \frac{r_C}{r_B} \cdot \frac{r_B}{r_A} = 1,$$

o que confirma que os pontos X, Y e Z estão alinhados. \square

Nota: O teorema é válido quando a posição relativa entre os três círculos permitir a existência de dois pares de tangentes comuns internas e um par de tangentes comuns externas.

Teorema 4.23 (Reta de Euler). O ortocentro H , o circuncentro O e o baricentro G de um triângulo são colineares e pertencem à reta chamada Reta de Euler¹⁷, com G dividindo o segmento OH ¹⁸ na razão $\frac{OG}{GH} = \frac{1}{2}$ (Figura 49).

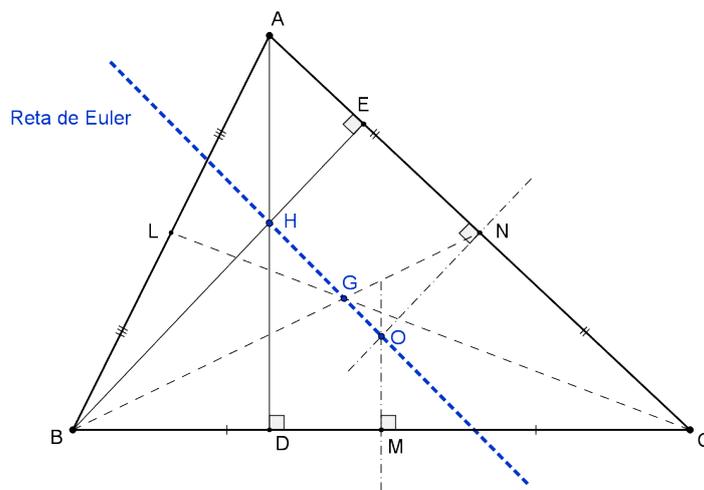


Figura 49 – Reta de Euler

Demonstração. Seja ABC um triângulo cujos pontos médios dos seus lados são os pontos L , M e N . Sejam ainda H o seu ortocentro e O o seu circuncentro (Figura 49).

Traçando-se o segmento MN , obtém-se dois triângulos semelhantes, ABH e MNO , com três lados paralelos dois a dois: $AH \parallel MO$, $BH \parallel NO$ e $AB \parallel MN$ (Figura 50).

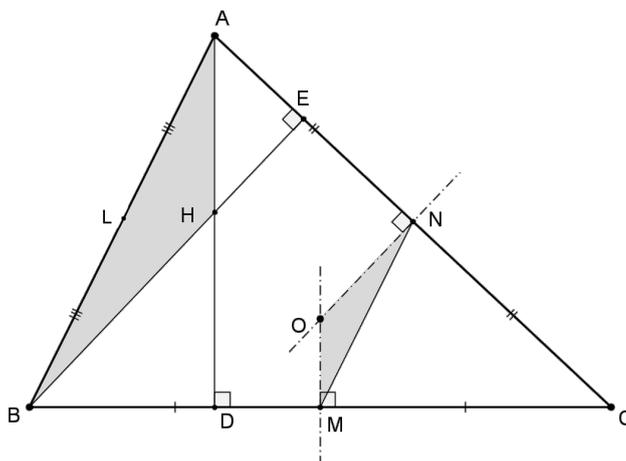


Figura 50 – Demonstração da Reta de Euler - 1ª parte

Como MN é base média do triângulo ABC , tem-se $\frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}$ e, por conseguinte,

$$\frac{NO}{BH} = \frac{MO}{AH} = \frac{1}{2}. \quad (31)$$

¹⁷ O suíço Leonhard Euler viveu no séc. XVIII e até hoje é considerado o matemático que mais publicou trabalhos relevantes. Suas contribuições variam da Física à Matemática, da Geometria à Combinatória, passando ainda pela Teoria dos Números (MUNIZ NETO, 2013).

¹⁸ MUNIZ NETO (2013) denomina o segmento OH de **mediana de Euler** do triângulo.

Considere agora que, ao traçar a mediana AM , esta encontre o segmento HO no ponto T (Figura 51), obtendo-se também outros dois triângulos semelhantes, AHT e MOT , com

$$\frac{MO}{AH} = \frac{OT}{HT} = \frac{TM}{TA}. \quad (32)$$

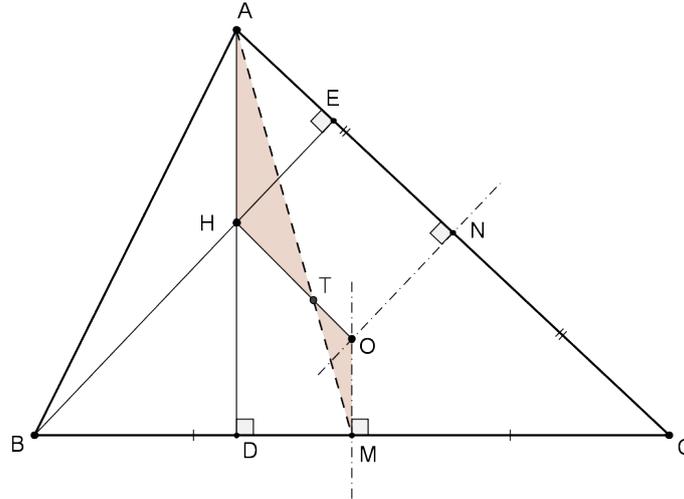


Figura 51 – Demonstração da Reta de Euler - 2ª parte

De (31) e (32), tem-se que $\frac{TM}{TA} = \frac{1}{2}$, o que faz de T , conforme o Teorema 4.16, o baricentro G do triângulo ABC ($T \equiv G$). Logo, o ortocentro H , o circuncentro O e o baricentro G são colineares, com $\frac{OG}{GH} = \frac{1}{2}$. \square

Nota: Observe que em um triângulo equilátero, a reta de Euler não está definida, uma vez que as medianas, as alturas e as mediatrizes são concorrentes num mesmo ponto, com $G \equiv H \equiv O$.

NEVES (2013) demonstra a colinearidade de G , H e O na reta de Euler usando coordenadas cartesianas.

Teorema 4.24 (Reta de Housel). *O baricentro G , o incentro I e o ponto de Nagel N de um triângulo são colineares e pertencem à reta chamada Reta de Housel, com G dividindo o segmento IN na razão $\frac{IG}{GN} = \frac{1}{2}$.*

Demonstração. Sejam os pontos G e I , respectivamente, o baricentro e o incentro do triângulo ABC , de lados $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$. Seja p o semiperímetro de ABC e $[ABC]$ a sua área. Sabe-se que, pelo Teorema 4.16, o ponto G divide a mediana AM na razão 1:2, ou seja, se $GM = u$, então $AG = 2u$ (Figura 52).

Ligando-se I a M e prolongando-se o segmento $IG = t$ até um ponto N , tal que $GN = 2t$, formam-se dois triângulos semelhantes: IGM e NGA (caso LAL). Sendo $\angle IMG = \angle NAG$, então $IM \parallel NA$ (Figura 52).

Deseja-se provar, portanto, que N é o ponto de Nagel do triângulo ABC .

Com base no Teorema 4.19, dadas as cevianas AZ , BY e CX do triângulo ABC , concorrentes em N , tem-se que N será o ponto de Nagel de ABC se forem verificadas as seguintes igualdades:

- ✓ Lado a: $BZ = p - c$, $CZ = p - b$;
- ✓ Lado b: $AY = p - c$, $CY = p - a$;

✓ Lado c: $AX = p - b$, $BX = p - a$.

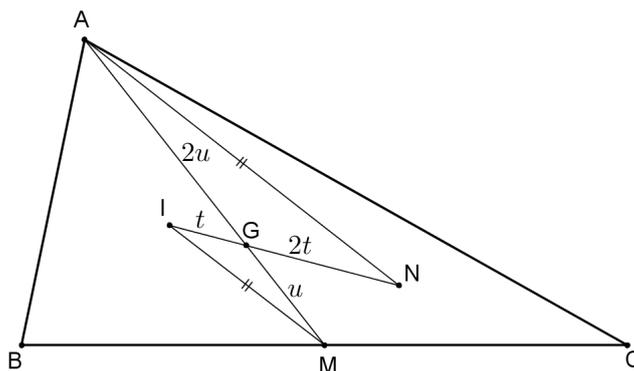


Figura 52 – Demonstração da Reta de Housel - 1ª parte

Basta provar essas igualdades para um dos lados – por exemplo, o lado a – que os demais lados são provados analogamente. Dessa forma, prolongando-se AN até encontrar o lado a em Z , deve-se provar que $BZ = p - c$ e que $CZ = p - b$ (Figura 53).

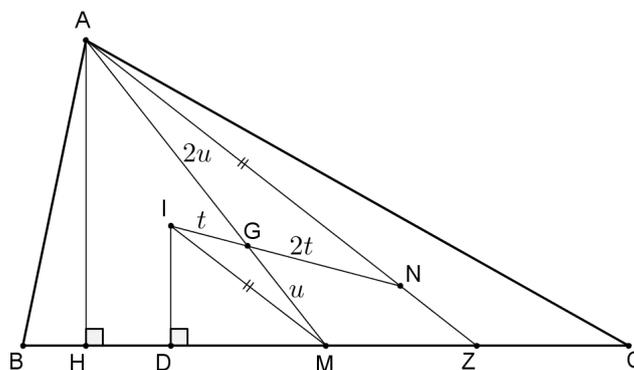


Figura 53 – Demonstração da Reta de Housel - 2ª parte

Seja AH a altura relativa ao lado a de ABC e D a projeção ortogonal de I sobre este mesmo lado (Figura 53). Uma vez que $IM \parallel NA$, tem-se dois triângulos semelhantes: IDM e AHZ . Portanto,

$$\frac{HZ}{DM} = \frac{AH}{ID}. \quad (33)$$

Pelo Teorema 4.1 e pela Proposição 4.9, tem-se que $ID = r$ (raio do incírculo do triângulo ABC) e $AH = \frac{2 \cdot [ABC]}{a} = \frac{2 \cdot pr}{a}$. Logo, $\frac{AH}{ID} = \frac{2p}{a}$ e, de (33), conclui-se que $\frac{HZ}{DM} = \frac{2p}{a}$, donde

$$HZ = \frac{2p}{a} \cdot DM. \quad (34)$$

Com base na Figura 54, onde $AE = AF = y$, $BD = BF = x$ e $CD = CE = z$, é fácil ver que $x + y + z = p$, ou seja, $BD = x = p - (y + z) = p - b$. Assim,

$$\begin{aligned} DM &= BM - BD = \frac{a}{2} - (p - b) \\ DM &= \frac{a}{2} - \frac{a + b + c}{2} + b \end{aligned}$$

$$DM = \frac{b-c}{2}.$$

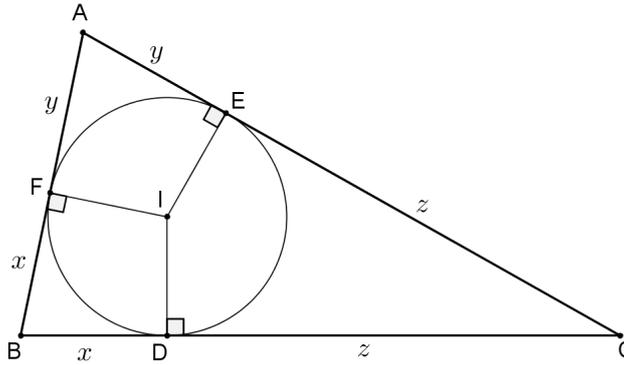


Figura 54 – Demonstração da Reta de Housel - 3ª parte

Substituindo este valor em (34), obtém-se $HZ = \frac{2p}{a} \cdot \frac{b-c}{2} = \frac{p(b-c)}{a}$.

Ademais, aplicando-se a Lei dos Cossenos no triângulo ABC , tem-se que $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$.

Mas, como $c \cdot \cos \hat{B} = BH$, então $BH = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$.

Finalmente,

$$BZ = BH + HZ$$

$$BZ = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} + \frac{p(b-c)}{a}$$

$$BZ = \frac{a^2 + c^2 - b^2 + (a+b+c)(b-c)}{2a}$$

$$BZ = \frac{a^2 + c^2 - b^2 + ab - ac + b^2 - bc + bc - c^2}{2a}$$

$$BZ = \frac{a^2 + ab - ac}{2a}$$

$$BZ = \frac{a+b-c}{2}$$

$$BZ = p - c.$$

E ainda, $CZ = a - BZ = a - (p - c) = a - \frac{a+b+c}{2} + c = \frac{2a - a - b - c + 2c}{2} = \frac{a+c-b}{2}$, ou seja,

$$CZ = p - b.$$

Analogamente, prova-se para o lado b , que $AY = p - c$ e $CY = p - a$; e para o lado c , que $AX = p - b$ e $BX = p - a$, o que faz de N o ponto de Nagel do triângulo ABC , com $\frac{IG}{GN} = \frac{1}{2}$. \square

Definição 4.16 (Reta de Nagel). A reta que passa pelo incentro I e pelo circuncentro O de um triângulo é chamada Reta de Nagel.

Definição 4.17 (Reta de Newton). A reta que une os pontos médios das diagonais de um quadrilátero convexo, não paralelogramo, é chamada Reta de Newton¹⁹.

Definição 4.18 (Quadrilátero completo). Sejam quatro retas de um plano em que cada uma intercepta as outras em apenas um ponto, não havendo triplas retas concorrentes. A essa configuração dá-se o nome de Quadrilátero Completo (Figura 55).

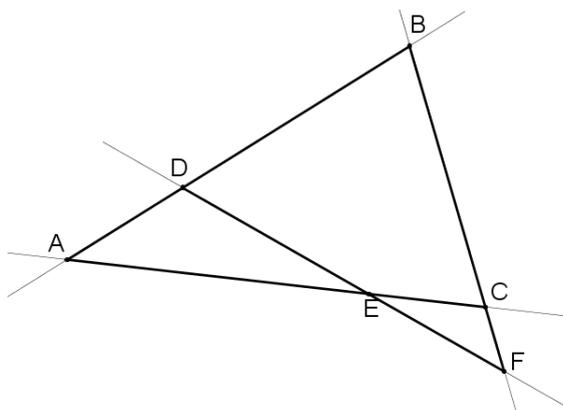


Figura 55 – Quadrilátero completo

Nota: Um quadrilátero completo possui seis pontos de interseção (A, B, C, D, E, F), três diagonais (AF, BE, CD) e forma quatro triângulos (ABC, BDF, CEF, DEA) (Figura 55).

Teorema 4.25 (Reta de Gauss-Newton). Os pontos médios das diagonais de um quadrilátero completo são colineares e formam a reta de Gauss-Newton²⁰.

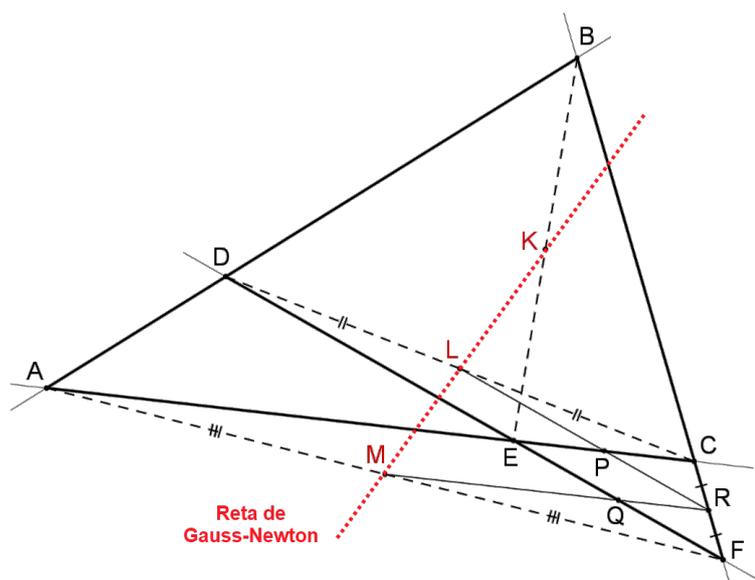


Figura 56 – Demonstração da Reta de Gauss-Newton

¹⁹ Isaac Newton (1642-1727) foi um cientista inglês que se destacou em várias áreas do conhecimento, principalmente na Matemática e na Física.

²⁰ Carl Friedrich Gauss (1777-1855) foi um matemático e físico alemão que deixou inúmeras contribuições nas mais diversas Ciências.

Demonstração. Sejam K , L e M , respectivamente, os pontos médios das diagonais BE , DC e AF do quadrilátero completo $ADBCFE$.

Traçando-se por M uma paralela à AC , esta encontra CF em R e, como M é médio de AF , então R é médio de CF e, portanto, MR é base média do triângulo ACF . Analogamente, LR é base média do triângulo FDC e paralela à reta DF (Figura 56).

Sejam P o ponto de encontro de AC com LR e Q o ponto de encontro de DF com MR .

Pela Lei de Proporcionalidade de Tales no triângulo ACF :

$$\left. \begin{array}{l} FM = MA \\ FR = RC \end{array} \right\} \Rightarrow FQ = QE \text{ (} Q \text{ é médio de } FE\text{)}.$$

Analogamente, no triângulo FDC :

$$\left. \begin{array}{l} CL = LD \\ CR = RF \end{array} \right\} \Rightarrow CP = PE \text{ (} P \text{ é médio de } CE\text{)}.$$

Desse modo, a reta QP (Q e P médios) encontra K (médio de BE), formando a base média do triângulo EBF .

O teorema de Menelaus (Teorema 4.10), aplicado no triângulo CEF , cortado pela reta AB , fornece

$$\frac{CA}{AE} \cdot \frac{ED}{DF} \cdot \frac{FB}{BC} = 1, \quad (35)$$

que comprova o alinhamento já conhecido dos pontos A , D e B .

As bases médias dos triângulos formados determinam as seguintes equações (Figura 56):

$$CA = 2 \cdot RM \text{ (}\Delta FCA\text{)},$$

$$AE = 2 \cdot MQ \text{ (}\Delta FAE\text{)},$$

$$ED = 2 \cdot PL \text{ (}\Delta CED\text{)},$$

$$DF = 2 \cdot LR \text{ (}\Delta CDF\text{)},$$

$$FB = 2 \cdot QK \text{ (}\Delta EFB\text{)},$$

$$BC = 2 \cdot KP \text{ (}\Delta EBC\text{)}.$$

Substituindo essas seis equações em (35), obtém-se:

$$\frac{2 \cdot RM}{2 \cdot MQ} \cdot \frac{2 \cdot PL}{2 \cdot LR} \cdot \frac{2 \cdot QK}{2 \cdot KP} = 1, \text{ ou}$$

$$\frac{QK}{KP} \cdot \frac{PL}{LR} \cdot \frac{RM}{MQ} = 1.$$

Tal expressão, pelo teorema recíproco de Menelaus (Teorema 4.11), aplicado ao triângulo QPR , garante que os pontos K , L e M são colineares. \square

Uma outra forma interessante de demonstrar este teorema é utilizando a Geometria Analítica ²¹.

Proposição 4.18 (Quadrilátero inscritível). *Um quadrilátero convexo é inscritível se, e somente se, seus ângulos opostos são suplementares.*

Prova. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em um círculo. Se $\angle A = \alpha$ e $\angle C = \gamma$, então o arco $\widehat{BCD} = 2\alpha$ e o arco $\widehat{DAB} = 2\gamma$. Assim, $2\alpha + 2\gamma = 360^\circ$ e $\alpha + \gamma = 180^\circ$ (suplementares).

Reciprocamente, seja $ABCD$ um quadrilátero com ângulos opostos $\angle DAB$ e $\angle BCD$, tais que $\angle DAB + \angle BCD = 180^\circ$.

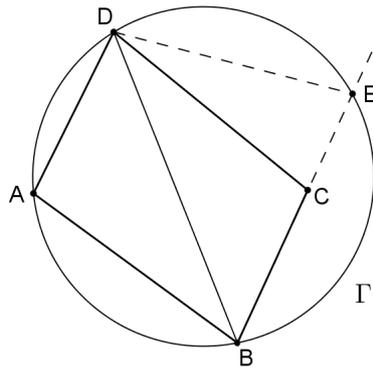


Figura 57 – Prova do quadrilátero inscritível

Considere o circuncírculo Γ do triângulo DAB . Seja C um ponto (interior ou exterior a Γ), em que E é a interseção de BC com Γ (Figura 57). Desse modo, $\widehat{DAB} + \widehat{BED} = 360^\circ$ e, conseqüentemente, $\angle DAB + \angle BED = 180^\circ$, ou seja, $\angle BED = \angle BCD$ e $E \equiv C$. Logo, $ABCD$ é inscritível. \square

Nota: Um quadrilátero inscritível também é chamado de quadrilátero cíclico.

Proposição 4.19 (Lema nº11 de Arquimedes²²). *Sejam AC e BD duas cordas perpendiculares de um círculo de centro O e raio r , que se cruzam no ponto X . Se $AX = a$, $BX = b$, $CX = c$ e $DX = d$, então $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4r^2$ (Figura 58).*

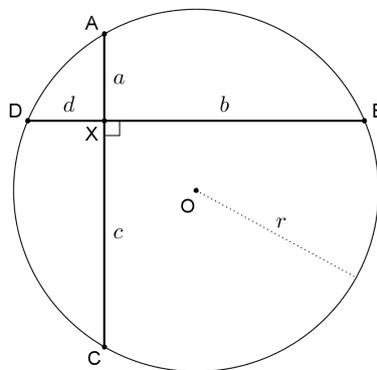


Figura 58 – Lema nº11 de Arquimedes

²¹ Essa outra forma de demonstrar o teorema será deixada a cargo do leitor.

²² Este lema faz parte da obra *Book of Lemmas*, manuscrito que chegou à Europa em 1659, no idioma árabe, e cuja autoria é atribuída ao matemático grego Arquimedes. O livro é uma coleção de 15 lemas envolvendo círculos (HEATH, 2010).

Prova. Traçando-se por O as paralelas $OE \parallel BD$ e $OF \parallel CA$, tem-se que E e F são pontos médios de AC e BD (Proposição 4.3), respectivamente (Figura 59). Logo,

$$BF = \frac{BD}{2} = \frac{b+d}{2}, \text{ e}$$

$$CE = \frac{AC}{2} = \frac{a+c}{2}.$$

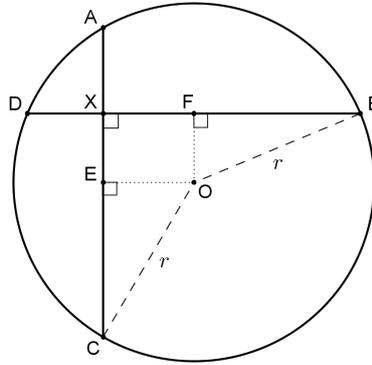


Figura 59 – Prova do Lema nº11 de Arquimedes

Além disso,

$$OE = BX - BF = b - \frac{b+d}{2} = \frac{b-d}{2}, \text{ e}$$

$$OF = CX - CE = c - \frac{a+c}{2} = \frac{c-a}{2}.$$

Nos triângulos retângulos OCE e OBF , tem-se, respectivamente,

$$r^2 = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-d}{2}\right)^2 \text{ e} \quad (36)$$

$$r^2 = \left(\frac{b+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-a}{2}\right)^2. \quad (37)$$

Somando-se as equações (36) e (37), obtém-se

$$2r^2 = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-d}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-a}{2}\right)^2$$

$$2r^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 + 2b^2 + 2d^2}{4}$$

$$4r^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

□

Teorema 4.26 (Arquimedes). *Seja um quadrilátero inscritível em um círculo de raio r , cujas diagonais são perpendiculares entre si. Se a, b, c e d são os lados desse quadrilátero, então $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8r^2$.*

Demonstração. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível, com lados $AB = a, BC = b, CD = c$ e $DA = d$, sendo X o ponto de encontro das diagonais AC e BD , perpendiculares entre si (Figura 60).

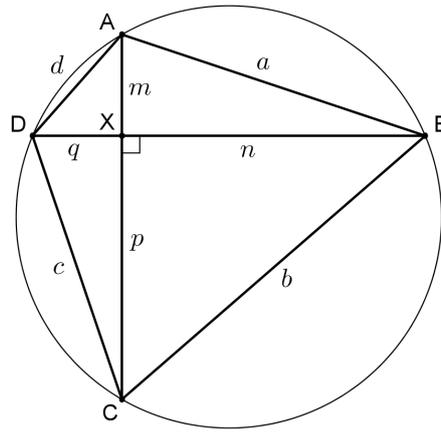


Figura 60 – Demonstração do teorema de Arquimedes

Chamando $AX = m$, $BX = n$, $CX = p$ e $DX = q$, tem-se, nos triângulos retângulos AXB , BXC , CXD e DXA , que

$$m^2 + n^2 = a^2,$$

$$n^2 + p^2 = b^2,$$

$$p^2 + q^2 = c^2,$$

$$q^2 + n^2 = d^2.$$

Somando-se essas quatro equações, obtém-se

$$2(m^2 + n^2 + p^2 + q^2) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Do Lema nº11 de Arquimedes (Proposição 4.19), sabe-se que $4r^2 = m^2 + n^2 + p^2 + q^2$. Assim,

$$2(4r^2) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

$$8r^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

□

Proposição 4.20. *Se um quadrilátero qualquer, de lados a , b , c e d , nesta ordem, possui diagonais perpendiculares entre si, então $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.*

Prova. Seja um quadrilátero com lados a , b , c e d , de diagonais perpendiculares, que se cruzam no ponto X , conforme Figura 61.

Chamando $AX = m$, $BX = n$, $CX = p$ e $DX = q$, tem-se, nos triângulos retângulos AXB e CXD , que

$$m^2 + n^2 = a^2,$$

$$p^2 + q^2 = c^2.$$

Somando-se essas duas equações, obtém-se

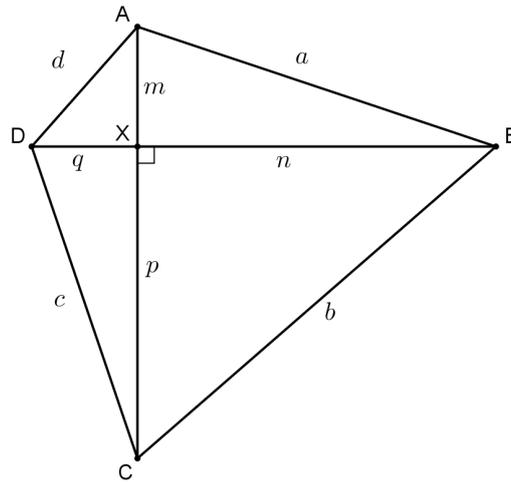


Figura 61 – Quadrilátero de diagonais perpendiculares

$$m^2 + n^2 + p^2 + q^2 = a^2 + c^2. \quad (38)$$

Nos triângulos retângulos BXC e DXA , tem-se

$$n^2 + p^2 = b^2,$$

$$q^2 + n^2 = d^2.$$

Somando-se agora essas duas equações, obtém-se

$$n^2 + p^2 + q^2 + m^2 = b^2 + d^2. \quad (39)$$

Finalmente, de (38) e (39), conclui-se que $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. \square

Teorema 4.27 (Brahmagupta). *Se um quadrilátero inscritível possui diagonais perpendiculares que se cruzam num ponto X , então a perpendicular baixada de X a cada um dos lados do quadrilátero corta o lado oposto no seu ponto médio.*

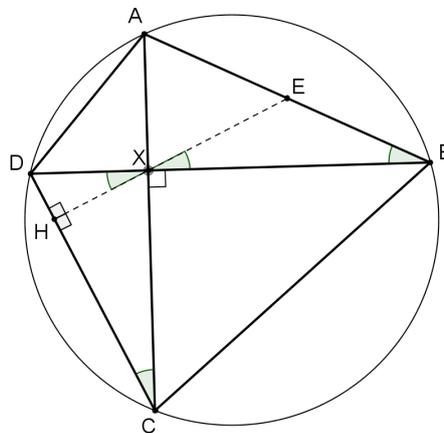


Figura 62 – Demonstração do Teorema de Brahmagupta

Demonstração. Seja o quadrilátero inscrito $ABCD$, com diagonais perpendiculares que se cruzam no ponto X , traçando-se por X uma perpendicular XH ao lado CD , esta reta corta o lado oposto AB no ponto E . Com isso, considerando os conceitos de ângulos opostos pelo vértice, ângulos inscritos num círculo e semelhança de triângulos ($\triangle DXH \sim \triangle DCX$), tem-se (Figura 62):

$$\angle BXE = \angle DXH = \angle DCX = \angle DCA = \angle DBA.$$

Assim, o triângulo XEB é isósceles, com $XE = BE$. Desse modo, pela Proposição 4.4, XE é mediana relativa à hipotenusa do triângulo retângulo AXB , com $XE = BE = AE$ e, portanto, E é ponto médio de AB .

Analogamente, prova-se o mesmo para as outras perpendiculares traçadas por X a cada um dos outros lados do quadrilátero. \square

Nota: Quando um quadrilátero inscrito possui lados, diagonais e área dados por números inteiros, ele é chamado por SASTRY (2003) de quadrilátero de Brahmagupta.

Proposição 4.21 (Fórmula de Brahmagupta). *Se um quadrilátero inscrito de lados a, b, c e d tem semiperímetro p , então sua área é dada por $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.*

Prova. Seja o quadrilátero inscrito $ABCD$, com $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, BD = x$ e $\angle BAD = \alpha$, sendo o semiperímetro $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ (Figura 63).

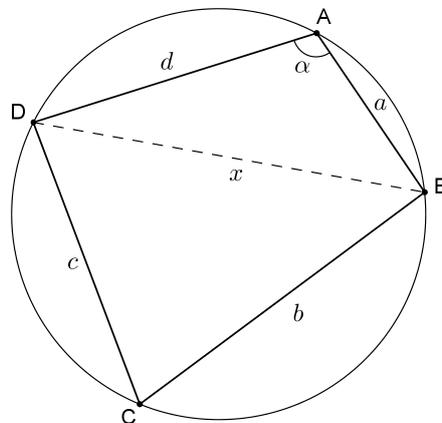


Figura 63 – Demonstração da Fórmula de Brahmagupta

A área do quadrilátero $ABCD$ pode ser dada pela soma das áreas dos triângulos BAD e BCD , ou seja,

$$[ABCD] = [BAD] + [BCD] = \frac{1}{2}ad \cdot \text{sen } \alpha + \frac{1}{2}bc \cdot \text{sen } (180^\circ - \alpha)$$

$$[ABCD] = \frac{1}{2}(ad + bc) \cdot \text{sen } \alpha$$

$$[ABCD] = \frac{1}{2}(ad + bc) \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}. \quad (40)$$

Por outro lado, aplicando a Lei dos Cossenos nos triângulos BAD e BCD , tem-se

$$x^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos \alpha, \text{ e}$$

$$x^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos \alpha.$$

Subtraindo-se essas duas equações e isolando os termos, obtém-se

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2ad + 2bc}.$$

Substituindo este valor em (40), chega-se a

$$\begin{aligned} [ABCD] &= \frac{1}{2} (ad + bc) \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2ad + 2bc} \right)^2} \\ [ABCD] &= \frac{1}{2} (ad + bc) \sqrt{\frac{(2ad + 2bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{(2ad + 2bc)^2}} \\ [ABCD] &= \frac{1}{2} (ad + bc) \sqrt{\frac{(2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2)(2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2)}{4(ad + bc)^2}} \\ [ABCD] &= \frac{1}{4} \sqrt{[(a + d)^2 - (b - c)^2][(b + c)^2 - (a - d)^2]} \\ [ABCD] &= \frac{1}{4} \sqrt{[(a + d + b - c)(a + d - b + c)][(b + c + a - d)(b + c - a + d)]} \\ [ABCD] &= \frac{1}{4} \sqrt{(2p - 2c)(2p - 2b)(2p - 2d)(2p - 2a)} \\ [ABCD] &= \frac{1}{4} \sqrt{16 \cdot (p - a)(p - b)(p - c)(p - d)} \\ [ABCD] &= \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}. \end{aligned}$$

□

Nota: Observa-se nesta fórmula que se o quadrilátero $ABCD$ degenerar-se em um triângulo, por exemplo, ABC , isto é, $D \equiv A$ e $d \rightarrow 0$, a área desse triângulo será dada por meio da simplificação

$$[ABC] = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)},$$

que corresponde à conhecida fórmula de Heron²³ para triângulos²⁴.

Teorema 4.28 (Simson-Wallace²⁵). *Os pés das perpendiculares traçadas de um ponto da circunferência circunscrita a um triângulo aos lados desse triângulo são colineares e pertencem à reta de Simson-Wallace, relativa a esse ponto.*

Demonstração. Seja P um ponto da circunferência circunscrita ao triângulo ABC . A partir de P traçam-se perpendiculares a cada um dos lados de ABC , cortando BC em L , AC em M e AB em N (Figura 64).

²³ Heron, Hero ou Herão de Alexandria foi um matemático e engenheiro grego, do Séc. I, que ficou especialmente conhecido pela fórmula que leva seu nome e se aplica ao cálculo da área de um triângulo (MUNIZ NETO, 2013).

²⁴ É importante lembrar que não há inconsistência nessa conclusão, uma vez que todo triângulo é inscritível em uma circunferência.

²⁵ Robert Simson e William Wallace foram dois matemáticos escoceses dos Séc. XVIII e XIX. Apesar de a descoberta da reta ter sido feita por Simson, foi Wallace quem a publicou em 1797 (MUNIZ NETO, 2013).

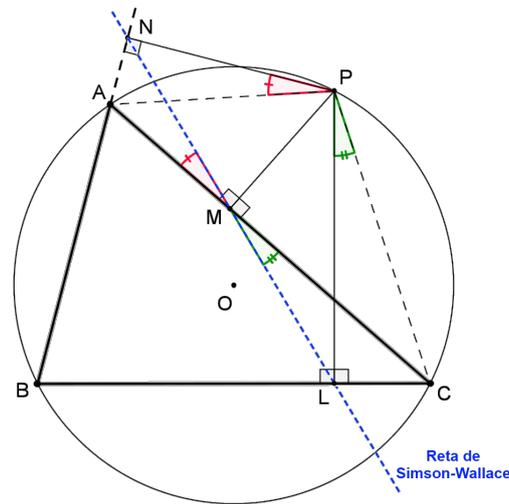


Figura 64 – Demonstração do teorema de Simson-Wallace

Assim, tem-se que os quadriláteros $PNAM$ e $MLCP$ são inscritíveis e, portanto,

$$\angle NPA = \angle NMA, \quad (41)$$

$$\angle LMC = \angle LPC. \quad (42)$$

Além disso, os quadriláteros $BNPL$ e $BAPC$, sendo também inscritíveis, garantem a igualdade dos ângulos em P , $\angle NPL$ e $\angle APC$, opostos ao vértice B , ou seja,

$$\angle NPL = \angle APC$$

$$\angle NPA + \angle APL = \angle APL + \angle LPC$$

$$\angle NPA = \angle LPC. \quad (43)$$

Uma vez que os pontos A , M e C são colineares, das igualdades (41), (42) e (43) decorre que $\angle NMA = \angle LMC$ (opostos pelo vértice M), o que mostra que os pontos L , M e N são colineares, pertencendo à reta chamada reta de Simson-Wallace do triângulo ABC , relativa a esse ponto P . \square

Teorema 4.29 (Recíproco de Simson-Wallace). *Se os pés das perpendiculares de um ponto aos lados de um triângulo são colineares, então este ponto pertence à circunferência circunscrita ao triângulo.*

Demonstração. Sejam L , M e N os pés das perpendiculares traçadas do ponto P a cada um dos lados do triângulo ABC , tais que pertencem a uma mesma reta r .

Assim, o quadrilátero $PNAM$ é inscritível no círculo de diâmetro PA , com $\angle NPA = \angle NMA$, e o quadrilátero $MLCP$ é inscritível no círculo de diâmetro PC , com $\angle LMC = \angle LPC$. Como $\angle NMA = \angle LMC$ (opostos pelo vértice M), decorre que $\angle NPA = \angle NMA = \angle LMC = \angle LPC$.

Além disso, observa-se, na Figura 65, que $\angle BAP = 90^\circ + \theta$ (ângulo externo do triângulo ANP) e que $\angle BCP = \angle LCP = 180^\circ - (90^\circ + \theta) = 90^\circ - \theta$ (triângulo LCP), ou seja, $\angle BAP$ e $\angle LCP$ são suplementares.

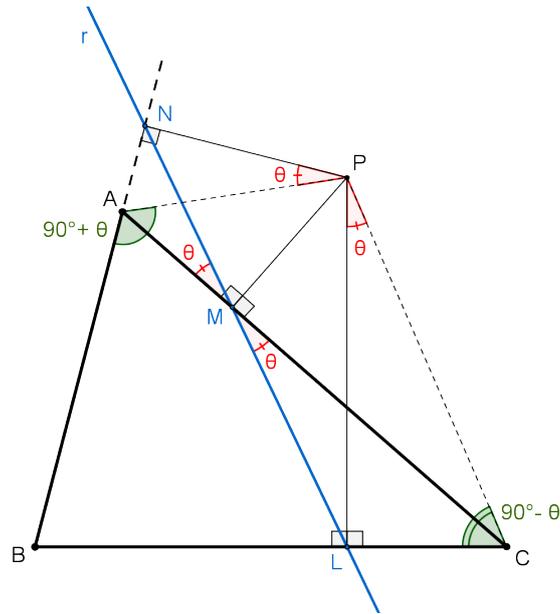


Figura 65 – Demonstração do teorema recíproco de Simson-Wallace

Portanto, o quadrilátero $BAPC$ é inscritível e o ponto P pertence à circunferência circunscrita ao triângulo ABC . \square

FEITOSA (2013) demonstra o teorema de Simson-Wallace e seu recíproco utilizando números complexos.

Teorema 4.30 (Reta de Steiner). *Os simétricos de um ponto da circunferência circunscrita a um triângulo em relação aos lados desse triângulo são colineares e pertencem à reta de Steiner que, por sua vez, é paralela à reta de Simson-Wallace, relativa a esse ponto.*

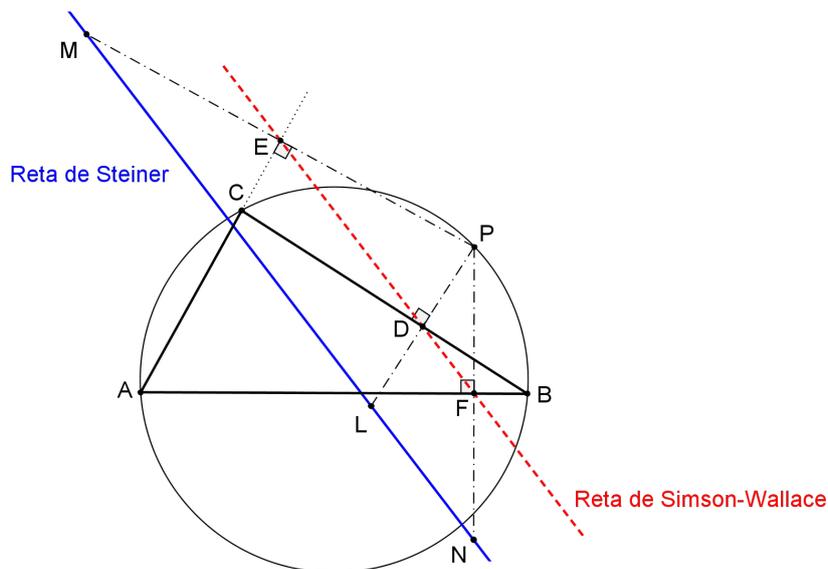


Figura 66 – Demonstração do teorema de Steiner

Demonstração. Sejam P um ponto da circunferência circunscrita ao triângulo ABC e L, M e N os simétricos de P em relação aos lados BC, AC e AB , com $PL \cap BC = \{D\}$, $PM \cap AC = \{E\}$ e $PN \cap AB = \{F\}$ (Figura 66). Em outras palavras, D, E e F são os pontos médios de BC, AC e AB , respectivamente.

Sabe-se, pelo teorema de Simson-Wallace (Teorema 4.28), que os pontos D, E e F — pés das perpendiculares baixadas de P aos lados do triângulo ABC — são colineares e estão sobre a reta de Simson-Wallace.

Como $DF \parallel LN$ (base média do triângulo PLN) e $ED \parallel ML$ (base média do triângulo PML), então L, M e N são colineares e paralelos à reta de Simson-Wallace, relativa ao ponto P . \square

Teorema 4.31 (Miquel para triângulos). *Seja ABC um triângulo e D, E e F pontos sobre os lados BC, AC e AB , respectivamente. Então os circuncírculos Γ_A, Γ_B e Γ_C dos triângulos AFE, BDF e CED , respectivamente, têm um ponto em comum M , denominado ponto de Miquel²⁶, relativo aos pontos D, E e F (Figura 67).*

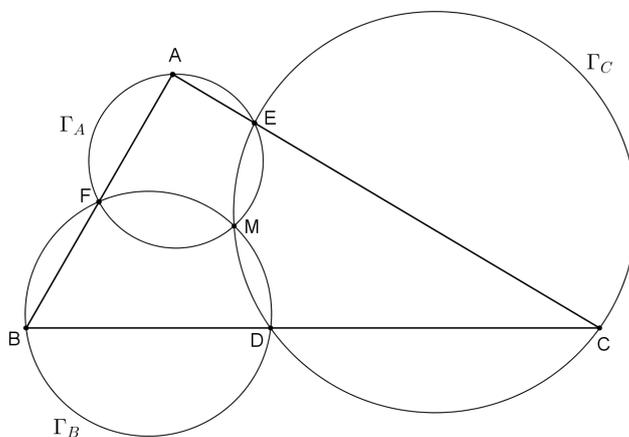


Figura 67 – Teorema de Miquel para triângulos

Demonstração. Seja M o outro ponto comum (além de D) aos circuncírculos Γ_B e Γ_C dos triângulos BDF e CED , respectivamente (Figura 67).

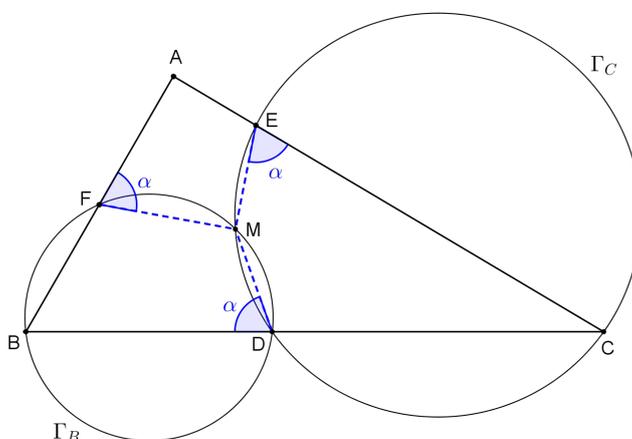


Figura 68 – Demonstração do teorema de Miquel para triângulos

²⁶ Auguste Miquel (1816-1851) foi um matemático francês que demonstrou diversos teoremas na Geometria Plana envolvendo círculos e polígonos. Este teorema foi publicado por ele em 1838 (POSAMENTIER e SALKIND, 1996).

Se $\angle CEM = \alpha$, então $\angle AEM = 180^\circ - \alpha$. Além disso, $\angle CDM = 180^\circ - \alpha$, uma vez que $CEMD$ é inscrito em Γ_C . Por conseguinte, $\angle BDM = \alpha$ e $\angle BFM = 180^\circ - \alpha$, pois $BDMF$ é inscrito em Γ_B (Figura 68). Logo, $\angle AFM = \alpha$. E como $\angle AEM = 180^\circ - \alpha$, o quadrilátero $AFME$ é inscrito em um círculo Γ_A , com o ponto M pertencendo aos três círculos Γ_A , Γ_B e Γ_C . Tal ponto é chamado de ponto de Miquel, relativo aos pontos D , E e F . \square

Teorema 4.32 (Miquel para quadrilátero completo). *As circunferências circunscritas aos quatro triângulos formados num quadrilátero completo se encontram em um ponto comum, denominado ponto de Miquel desse quadrilátero (Figura 69).*

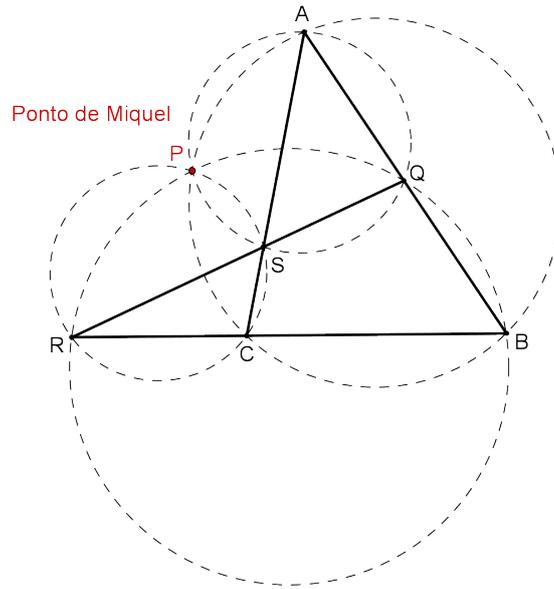


Figura 69 – Teorema de Miquel para quadrilátero completo

Demonstração. Considere o quadrilátero completo $AQBCRS$ (Figura 69). Traçando-se as circunferências circunscritas aos triângulos ABC e CRS , tem-se, inicialmente, dois pontos de interseção: P e C (Figura 70).

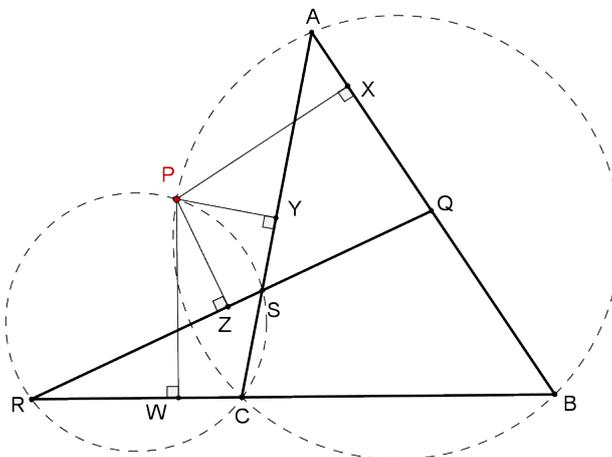


Figura 70 – Demonstração do teorema de Miquel para quadrilátero completo

Baixando por P as perpendiculares PW , PX e PY , a cada um dos lados BC , AB e AC , respectivamente, do triângulo ABC , tem-se, pelo teorema de Simson-Wallace (Teorema 4.28), que W , X e Y são colineares.

Analogamente, as perpendiculares baixadas de P ao triângulo CRS determinam que W , Y e Z são colineares.

Portanto, os pontos W , X , Y e Z pertencem à reta de Simson-Wallace, relativa ao ponto P .

Uma vez que PX , PY e PZ são perpendiculares aos segmentos AQ , AS e QS , respectivamente, pelo teorema recíproco de Simson-Wallace (Teorema 4.29), tem-se que P pertence à circunferência circunscrita ao triângulo AQS .

Analogamente, sendo PX , PW e PZ perpendiculares aos segmentos BQ , RB e RQ , respectivamente, tem-se que P pertence à circunferência circunscrita ao triângulo BRQ .

Desse modo, P é o ponto comum às circunferências circunscritas aos triângulos ABC , CRS , AQS e BRQ do quadrilátero completo $AQBCRS$. \square

DE FREITAS (2013) demonstra o teorema de Miquel para quadrilátero completo utilizando medidas de ângulos nos círculos.

Definição 4.19 (Homotetia). *Dado um ponto fixo O e uma constante real k ($k \neq 0$), chama-se homotetia de centro O e razão k à transformação geométrica que a todo ponto A faz corresponder um ponto-imagem A' , tal que $\frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}} = k$ ou $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$.*

O ponto A' pertence à reta OA e é chamado ponto homotético de A , de razão k , em relação a O (centro de homotetia).

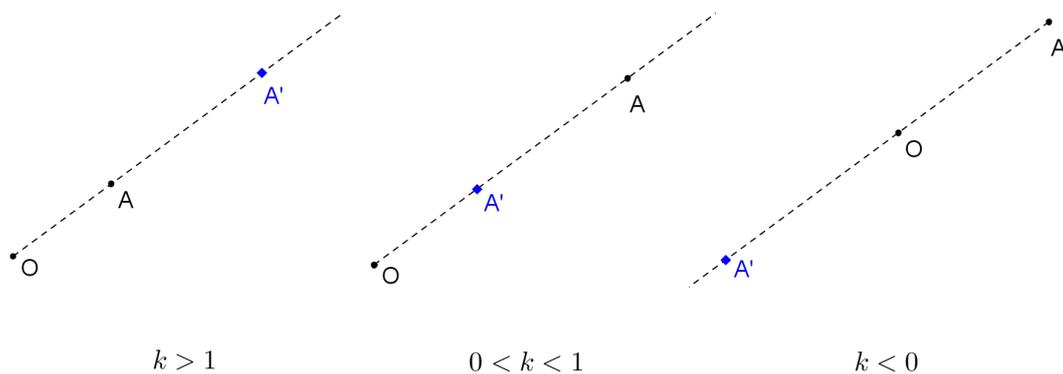


Figura 71 – Homotetia de ponto

Se $k > 0$, então A' está na semirreta \overrightarrow{OA} (homotetia direta); se $k < 0$, então A' está na semirreta oposta \overrightarrow{AO} (homotetia inversa); se $0 < k < 1$, então A' está entre O e A (Figura 71). Ainda, se $k = -1$, a transformação é uma simetria de centro O , e se $k = 1$ a transformação é uma identidade.

Propriedade 1: A homotetia leva pontos em pontos alinhados com o seu homotético e o centro de homotetia (Figura 71).

Propriedade 2: A homotetia leva segmentos em segmentos paralelos (Figura 72).

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = k \quad (\text{Configuração de Tales})$$

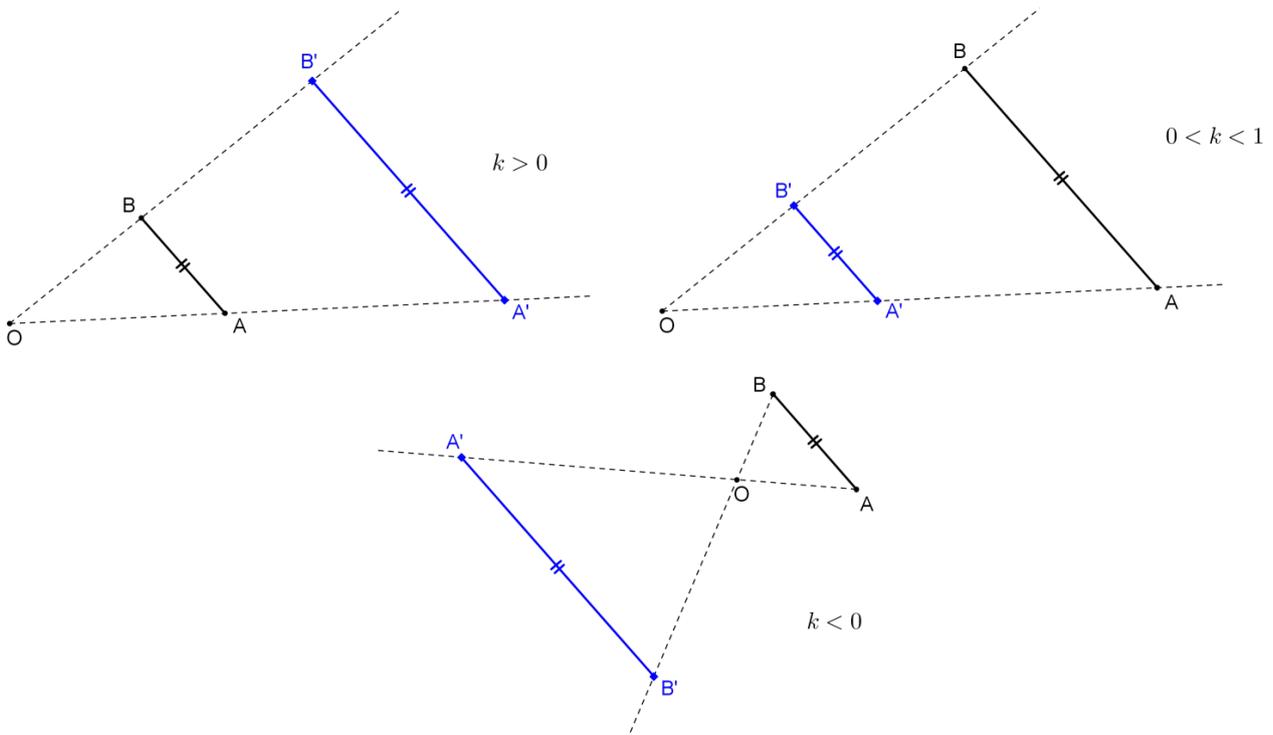


Figura 72 – Homotetia de segmento

Propriedade 3: A homotetia leva ângulos em ângulos congruentes (Figura 73).

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = k$$

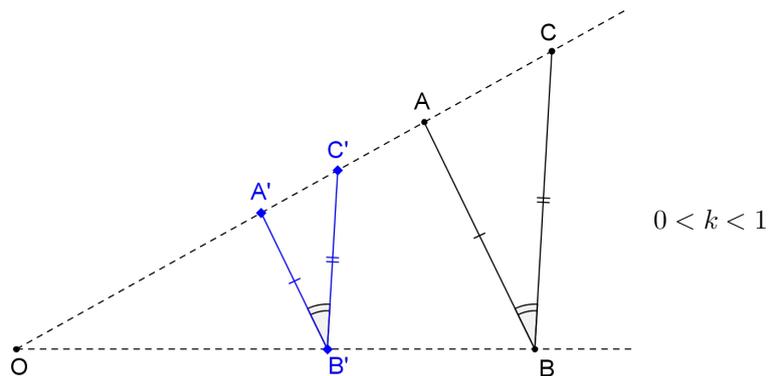


Figura 73 – Homotetia de ângulo

Propriedade 4: A homotetia leva um polígono em outro polígono semelhante (Figura 74).

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k, \text{ e}$$

$$\frac{[A'B'C']}{[ABC]} = k^2$$

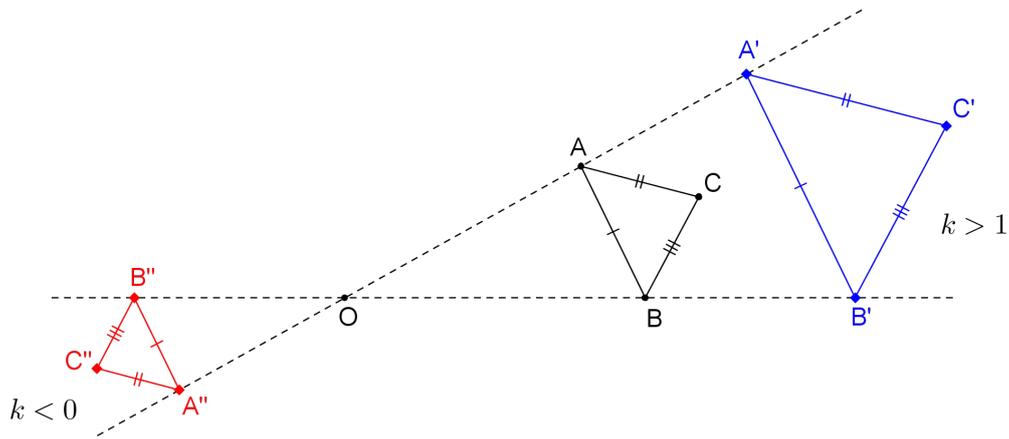


Figura 74 – Homotetia de polígono

Propriedade 5: A homotetia leva círculos em círculos.

Propriedade 6: Dois círculos não concêntricos e de raios distintos são relacionados por meio de duas homotetias: uma direta e outra inversa.

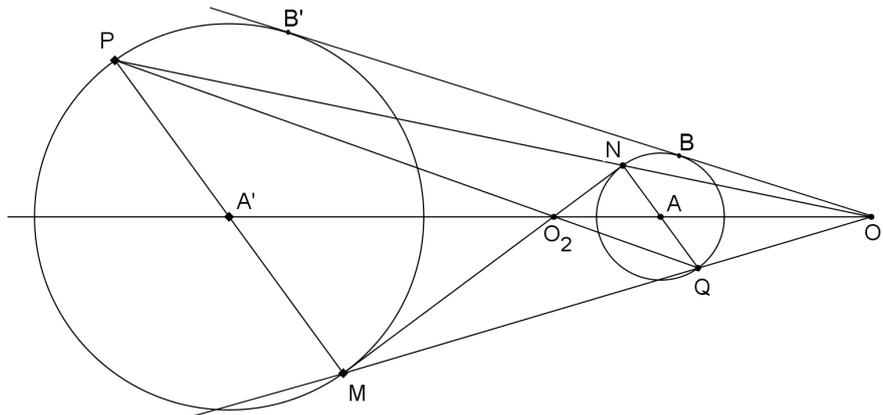


Figura 75 – Homotetia de círculo

Na Figura 75, observa-se, por exemplo:

- ✓ Centro O_1 : A e A' , N e P , Q e M , B e B' são homotéticos (homotetia direta);
- ✓ Centro O_2 : A e A' , N e M , Q e P são homotéticos (homotetia inversa);
- ✓ Em ambas as homotetias, tem-se $NQ \parallel PM$.

Propriedade 7: As tangentes comuns a dois círculos passam pelo centro de homotetia.

- ✓ Centro O_1 : O_1 , B e B' são colineares;
- ✓ Centro O_2 : O_2 , N e M são colineares.

Propriedade 8: Três círculos de raios distintos, exteriores entre si, determinam sempre seis centros de homotetia, que, por sua vez, são colineares três a três (Figura 76).

No quadrilátero completo da Figura 76, as quatro retas que contém, cada uma, três centros de homotetia, são chamadas eixos de homotetia dos três círculos (ADAM, 1986). Observa-se que os centros de homotetias diretas O_{e23} , O_{e13} e O_{e12} são colineares, conforme se demonstrou no teorema de Monge (Teorema

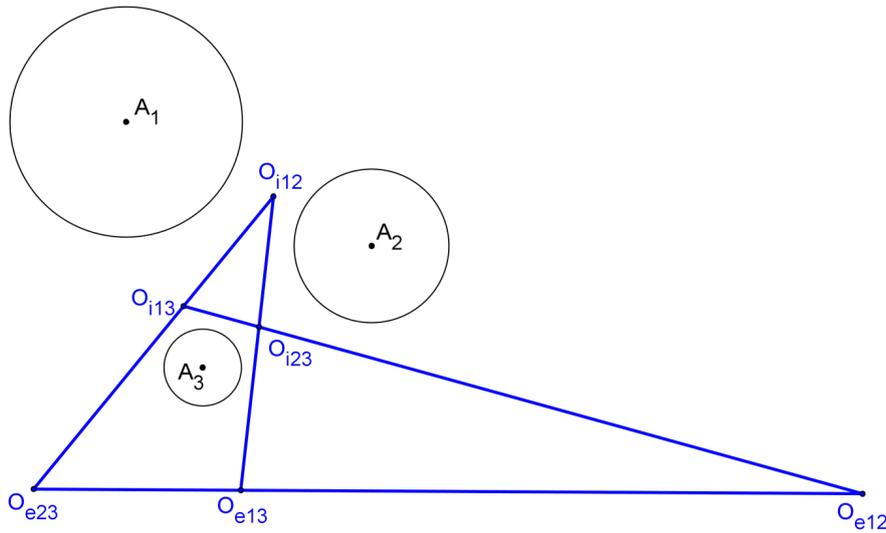


Figura 76 – Centros de homotetia para três círculos

4.21), e cada dois centros de homotetia inversa e um centro de homotetia direta (O_{i12}, O_{i13} e O_{e23} ; O_{i12}, O_{i23} e O_{e13} ; O_{i13}, O_{i23} e O_{e12}) são colineares, conforme se demonstrou no teorema de Monge-D'Alembert (Teorema 4.22).

No caso de os três círculos dados terem centros colineares, o quadrilátero completo supracitado seria degenerado numa reta – a reta que une os centros dos círculos – a qual conteria também os seis centros de homotetia.

Definição 4.20 (Inversão). Dado um círculo Γ de centro O e raio k , chama-se inversão de centro O e raio k à transformação geométrica que a todo ponto A faz corresponder um ponto-imagem A' , pertencente à semirreta \overrightarrow{OA} , tal que $OA \cdot OA' = k^2$ (Figura 77).

O ponto A' é chamado inverso de A em relação ao círculo Γ . A reta a que passa pelo ponto A' e é perpendicular à semirreta \overrightarrow{OA} é chamada reta polar de A em relação ao círculo Γ , e o ponto A é chamado pólo da reta a em relação ao círculo Γ .

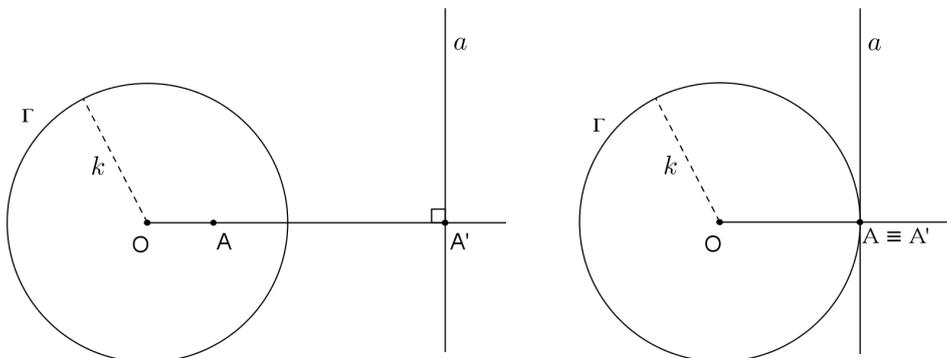


Figura 77 – Ponto inverso (A'), pólo (A) e reta polar (a)

Nota: Se um ponto A pertence à circunferência, então o seu inverso A' é coincidente, e a sua reta polar é a tangente à circunferência passando por ele (Figura 77). De fato, se $OA = k$ e $OA \cdot OA' = k^2$, então $OA' = k$ e $A \equiv A'$.

Definição 4.21 (Polaridade). A transformação geométrica que leva um ponto à sua reta polar ou que leva uma reta ao seu pólo é chamada polaridade.

Proposição 4.22. Sejam A e B dois pontos do plano e a e b suas respectivas polares em relação a um círculo Γ . Se $B \in a$, então $A \in b$. Neste caso, os pontos A e B são chamados conjugados.

Prova. Sejam O o centro do círculo Γ , de raio k , e A e B pontos cujas polares são a e b , respectivamente.

Ligando-se O a B , seja B' um ponto de OB tal que $AB' \perp OB$ (Figura 78).

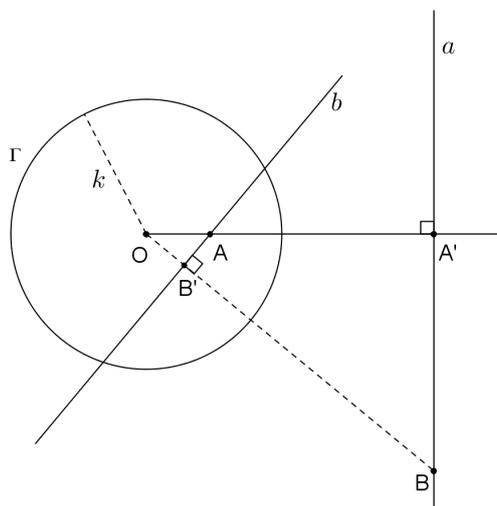


Figura 78 – Polaridade

Neste caso, tem-se que os triângulos $OB'A$ e $OA'B$ são semelhantes, com

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'},$$

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB'.$$

Como, por hipótese, $OA \cdot OA' = k^2$, então $OB \cdot OB' = k^2$ e, portanto, B' é o inverso de B em relação ao círculo Γ e a reta $AB' = b$ é a sua polar, com $A \in b$. \square

Proposição 4.23. A polar de um ponto exterior a um círculo passa pelos pontos de contato das tangentes ao círculo traçadas a partir desse ponto exterior.

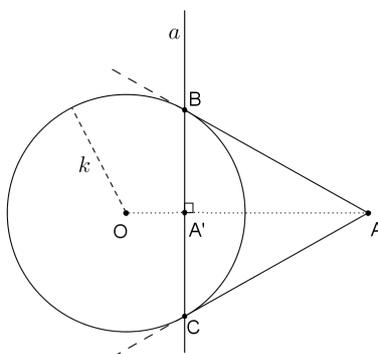


Figura 79 – Reta polar de um ponto exterior ao círculo

Prova. Com base na Proposição 4.22, se A pertence à reta polar de B então B pertence à reta polar de A . Ao mesmo tempo, se A pertence à reta polar de C então C pertence à reta polar de A . Logo, BC é a reta polar de A (Figura 79). \square

CASTRO (2000) diz que um ponto e uma reta são **incidentes** quando o ponto pertence à reta, o que é o mesmo que dizer que a reta passa pelo ponto. Assim, a polaridade (Definição 4.21) é uma transformação que preserva incidências. Além disso, as polaridades não só preservam, mas também **dualizam**, a relação de incidência (AUFFINGER; VALENTIM, 2003).

Na Geometria Projetiva, quando acontece a troca dos termos ponto por reta, reta por ponto e, conseqüentemente, de seus adjetivos relacionados, por exemplo, concorrente por colinear, e vice-versa, diz-se que a proposição resultante é a proposição **dual** da original, evidenciando o chamado “princípio da dualidade” (AUFFINGER; VALENTIM, 2003).

De fato, se a polar de A passa pelo ponto B então a polar de B passa por A (Proposição 4.22). Além disso, se três pólos são colineares, então as respectivas polares são concorrentes (AUFFINGER; VALENTIM, 2003).

Segundo FARIA (2013), o princípio da dualidade traz duas grandes vantagens à Geometria Projetiva:

- ✓ permite a obtenção de resultados, através dos duais de teoremas, proposições, etc., e
- ✓ confere-lhe um poder de síntese, permitindo limitar o número de demonstrações, pois a demonstração de resultados duais fica justificada pelo próprio princípio.

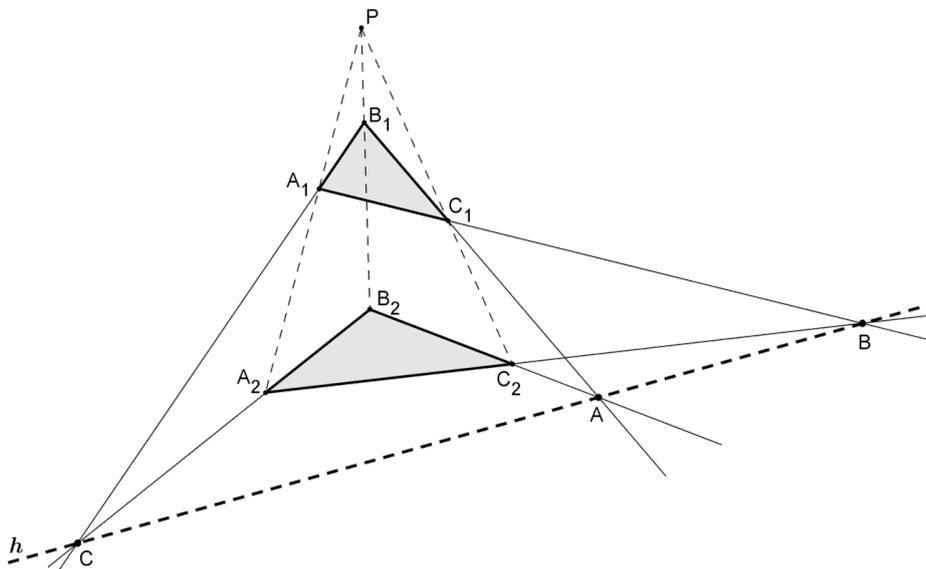


Figura 80 – Teorema de Desargues

Teorema 4.33 (Desargues²⁷). *Se os triângulos $A_1B_1C_1$ e $A_2B_2C_2$ são tais que as retas A_1A_2 , B_1B_2 e C_1C_2 são concorrentes em um ponto P (pólo ou ponto de fuga), conforme a Figura 80, então os lados homólogos desses triângulos (A_1B_1 e A_2B_2 , A_1C_1 e A_2C_2 , B_1C_1 e B_2C_2) intersectam-se, respectivamente, em três pontos colineares C , B e A .*

²⁷ Gerard Desargues (1591-1661) foi um matemático, arquiteto e engenheiro militar francês, considerado o fundador da Geometria Projetiva. Em pleno século XVII, Desargues utilizava técnicas de perspectiva linear a partir da fixação de um ponto de fuga (MUNIZ NETO, 2013).

Demonstração. Considerando o triângulo PB_2C_2 cortado pela reta AB_1 , pode-se aplicar o teorema de Menelaus (Teorema 4.10), na sua versão básica, obtendo-se $\frac{PB_1}{B_1B_2} \cdot \frac{B_2A}{AC_2} \cdot \frac{C_2C_1}{C_1P} = 1$, donde

$$\frac{C_2C_1}{C_1P} = \frac{B_1B_2}{PB_1} \cdot \frac{AC_2}{B_2A}. \quad (44)$$

Analogamente, no triângulo PB_2A_2 , cortado pela reta CB_1 , tem-se, com base no mesmo teorema, que $\frac{PA_1}{A_1A_2} \cdot \frac{A_2C}{CB_2} \cdot \frac{B_2B_1}{B_1P} = 1$, donde

$$\frac{PA_1}{A_1A_2} = \frac{CB_2}{A_2C} \cdot \frac{B_1P}{B_2B_1}. \quad (45)$$

Finalmente, no triângulo PA_2C_2 , cortado pela reta BA_1 , tem-se

$$\frac{PA_1}{A_1A_2} \cdot \frac{A_2B}{BC_2} \cdot \frac{C_2C_1}{C_1P} = 1.$$

Substituindo-se nesta equação os resultados (44) e (45), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{CB_2}{A_2C} \cdot \frac{B_1P}{B_2B_1} \cdot \frac{A_2B}{BC_2} \cdot \frac{B_1B_2}{PB_1} \cdot \frac{AC_2}{B_2A} &= 1 \\ \frac{CB_2}{A_2C} \cdot \frac{A_2B}{BC_2} \cdot \frac{AC_2}{B_2A} &= 1, \text{ ou} \\ \frac{A_2B}{BC_2} \cdot \frac{B_2C}{CA_2} \cdot \frac{C_2A}{AB_2} &= 1. \end{aligned}$$

Tal expressão, pelo teorema recíproco de Menelaus (Teorema 4.11), aplicado ao triângulo $A_2B_2C_2$, garante que os pontos C , B e A são colineares. \square

Nota: Diz-se que os triângulos $A_1B_1C_1$ e $A_2B_2C_2$ estão em perspectiva a partir da reta h (Figura 80), denominada horizonte, ou em perspectiva a partir de P , denominado pólo ou ponto de fuga (MUNIZ NETO, 2013).

Historicamente, o teorema de Desargues foi uma peça fundamental na tarefa de organizar a Geometria Projetiva, devido às relações com seus axiomas básicos. ALCARAZ (2012) detalha esse teorema mostrando sua validade na Geometria Plana e na Geometria Espacial.

Segundo ALCARAZ (2012), o valor do teorema de Desargues e a razão por que a sua formulação sobreviveu há séculos, enquanto outros teoremas geométricos igualmente notáveis foram esquecidos, é que ele abriu um horizonte de possibilidades inesperadas no relacionamento da Álgebra e da Geometria, colocando-o em um patamar semelhante ao quinto postulado de Euclides.

Teorema 4.34 (Recíproco de Desargues). *Se os triângulos $A_1B_1C_1$ e $A_2B_2C_2$ possuem lados homólogos (A_1B_1 e A_2B_2 , A_1C_1 e A_2C_2 , B_1C_1 e B_2C_2) que se intersectam, respectivamente, em três pontos C , B e A colineares, conforme a Figura 81, então as retas A_1A_2 , B_1B_2 e C_1C_2 são concorrentes em um ponto P (pólo ou ponto de fuga).*

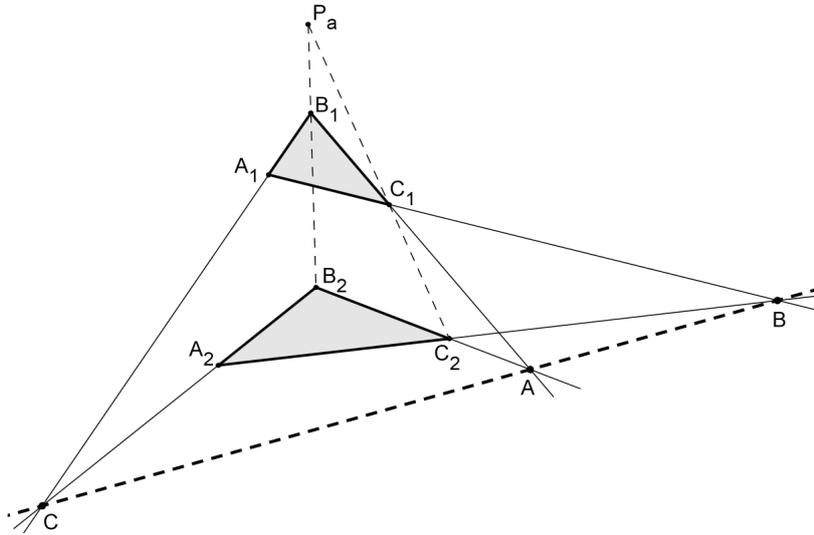


Figura 81 – Teorema recíproco de Desargues

Demonstração. Seja P_a o ponto de encontro das retas B_1B_2 e C_1C_2 , conforme a Figura 81. Dessa forma, o triângulo $P_aB_2C_2$ é cortado pela reta C_1B_1 e a aplicação do teorema de Menelaus (Teorema 4.10), na sua forma básica, fornece

$$\frac{P_aB_1}{B_1B_2} \cdot \frac{B_2A}{AC_2} \cdot \frac{C_2C_1}{C_1P_a} = 1, \text{ ou}$$

$$\frac{P_aB_1}{C_1P_a} = \frac{B_1B_2}{C_2C_1} \cdot \frac{AC_2}{B_2A}. \quad (46)$$

Analogamente, sejam P_b e P_c , respectivamente, os pontos de encontro das retas A_1A_2 com C_1C_2 e A_1A_2 com B_1B_2 . Aplicando-se o mesmo teorema para os triângulos $P_bA_2C_2$ e $P_cA_2B_2$, cortados pelas retas BA_1 e CB_1 , respectivamente, obtém-se

$$\frac{P_bA_1}{A_1A_2} \cdot \frac{A_2B}{BC_2} \cdot \frac{C_2C_1}{C_1P_b} = 1, \text{ ou}$$

$$\frac{C_1P_b}{P_bA_1} = \frac{C_2C_1}{A_1A_2} \cdot \frac{A_2B}{BC_2}, \text{ e} \quad (47)$$

$$\frac{P_cA_1}{A_1A_2} \cdot \frac{A_2C}{CB_2} \cdot \frac{B_2B_1}{B_1P_c} = 1, \text{ ou}$$

$$\frac{P_cA_1}{B_1P_c} = \frac{A_1A_2}{B_2B_1} \cdot \frac{CB_2}{A_2C}. \quad (48)$$

Multiplicando-se as equações (46), (47) e (48), chega-se a

$$\frac{P_aB_1}{C_1P_a} \cdot \frac{C_1P_b}{P_bA_1} \cdot \frac{P_cA_1}{B_1P_c} = \frac{B_1B_2}{C_2C_1} \cdot \frac{AC_2}{B_2A} \cdot \frac{C_2C_1}{A_1A_2} \cdot \frac{A_2B}{BC_2} \cdot \frac{A_1A_2}{B_2B_1} \cdot \frac{CB_2}{A_2C}$$

$$\frac{B_1P_a}{P_aC_1} \cdot \frac{C_1P_b}{P_bA_1} \cdot \frac{A_1P_c}{P_cB_1} = \frac{C_2A}{AB_2} \cdot \frac{B_2C}{CA_2} \cdot \frac{A_2B}{BC_2}.$$

Como os pontos C , A e B são colineares, então, pelo teorema de Menelaus (Teorema 4.10), aplicado ao triângulo $A_2B_2C_2$, tem-se $\frac{C_2A}{AB_2} \cdot \frac{B_2C}{CA_2} \cdot \frac{A_2B}{BC_2} = 1$. Assim,

$$\frac{B_1P_a}{P_aC_1} \cdot \frac{C_1P_b}{P_bA_1} \cdot \frac{A_1P_c}{P_cB_1} = 1,$$

que, pelo teorema recíproco de Menelaus (Teorema 4.11), aplicado ao triângulo $A_1B_1C_1$, conclui-se que os pontos P_a , P_b e P_c estão sobre uma mesma reta.

Finalmente, o fato de P_a ser colinear com B_1B_2 e C_1C_2 ; P_b ser colinear com A_1A_2 e C_1C_2 ; e P_c ser colinear com A_1A_2 e B_1B_2 , implica que $P_a \equiv P_b \equiv P_c \equiv P$ (pólo ou ponto de fuga). \square

O teorema de Desargues e o seu recíproco são válidos também se as retas A_1A_2 , B_1B_2 e C_1C_2 forem paralelas; neste caso, o pólo ou ponto de fuga P é considerado no infinito (MUNIZ NETO, 2013).

Teorema 4.35 (Pascal). *Se um hexágono, com nenhum par de lados opostos paralelos, está inscrito em um círculo, então as interseções dos lados opostos determinam três pontos colineares, cuja reta formada recebe o nome de reta de Pascal²⁸.*

Demonstração. Considere o hexágono $ABCDEF$ inscritível no círculo Γ , cujos prolongamentos dos lados opostos CD e FA , AB e DE , BC e EF se intersectam, respectivamente, em L , M e N (Figura 82).

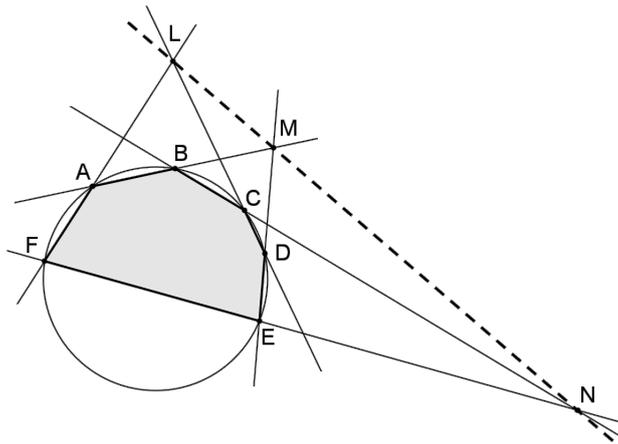


Figura 82 – Teorema de Pascal

Sejam ainda X , Y e Z os pontos de encontro dos prolongamentos dos lados BC e DE , FA e DE , FA e BC , respectivamente (Figura 83).

Tendo por base o triângulo XYZ e as retas LD , NF e AM que o cortam (Figura 83), pode-se aplicar três vezes o teorema de Menelaus (Teorema 4.10), na sua forma básica, obtendo-se, respectivamente,

$$\begin{aligned} \frac{YL}{LZ} \cdot \frac{ZC}{CX} \cdot \frac{XD}{DY} &= 1, \\ \frac{YF}{FZ} \cdot \frac{ZN}{NX} \cdot \frac{XE}{EY} &= 1, \\ \frac{YA}{AZ} \cdot \frac{ZB}{BX} \cdot \frac{XM}{MY} &= 1. \end{aligned}$$

²⁸ Blaise Pascal foi um matemático, físico e filósofo francês do Séc. XVII que inventou a máquina de calcular e tem seu nome associado ao triângulo aritmético formado pelos números binomiais (ANDRADE, 2001). O teorema aqui enunciado também é conhecido como o “Teorema do Hexagrama Místico de Pascal” para o círculo. CATALDO (2013) conta que o presente teorema foi apresentado por Blaise Pascal, quando tinha apenas 16 anos de idade, após estudar, em detalhes, o Teorema de Desargues.

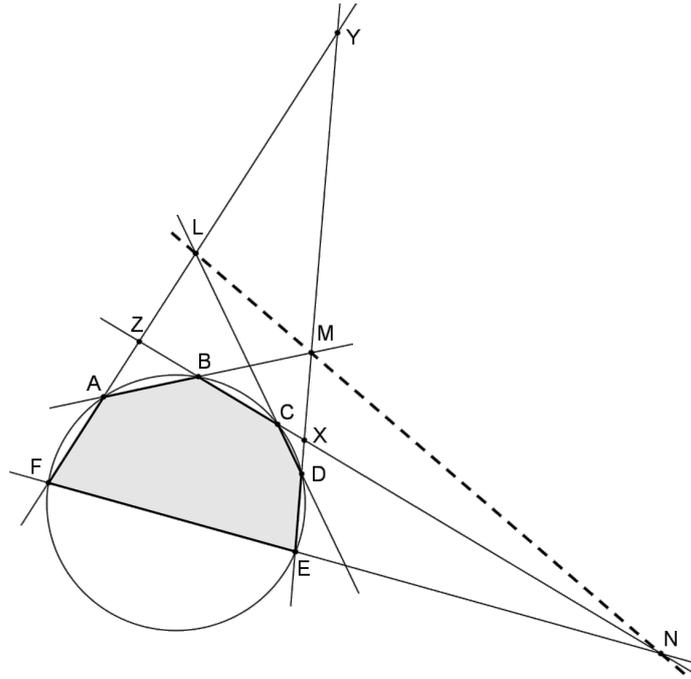


Figura 83 – Demonstração do teorema de Pascal

Multiplicando-se, membro a membro, essas igualdades, obtém-se

$$\frac{YL}{LZ} \cdot \frac{ZC}{CX} \cdot \frac{XD}{DY} \cdot \frac{YF}{FZ} \cdot \frac{ZN}{NX} \cdot \frac{XE}{EY} \cdot \frac{YA}{AZ} \cdot \frac{ZB}{BX} \cdot \frac{XM}{MY} = 1. \quad (49)$$

Considerando as relações de potências dos pontos X , Y e Z , relativas ao círculo Γ ,

$$XC \cdot XB = XD \cdot XE,$$

$$YA \cdot YF = YD \cdot YE,$$

$$ZA \cdot ZF = ZB \cdot ZC,$$

e, substituindo-as em (49), chega-se a $\frac{YL}{LZ} \cdot \frac{ZN}{NX} \cdot \frac{XM}{MY} = 1$, que, pelo teorema recíproco de Menelaus (Teorema 4.11), aplicado ao triângulo XYZ , garante que os pontos L , N e M são colineares. \square

Nota: Se o lado BC for paralelo ao lado DE , por exemplo, o vértice X do triângulo XYZ deixa de existir e a demonstração apresentada falha. Porém, neste caso, pode-se escolher um ponto C' , na circunferência de Γ , o mais próximo possível de C , e considerar o hexágono $ABC'DEF$. Assim, uma vez que a linha de Pascal existe para todas as posições de C' , então vai existir a linha de Pascal também no limite de C (EVES, 1972).

CASTRO (2000) e ANDRADE (2001) comentam que os vértices do hexágono não precisam ser necessariamente distintos, de modo que se fizer coincidir certos pares de vértices, é possível deduzir teoremas análogos ao de Pascal para pentágonos, quadriláteros e até triângulos inscritos num círculo.

Apesar de a demonstração apresentada ser de um hexágono convexo inscrito num círculo, o teorema de Pascal é válido para qualquer hexágono (inclusive os entrecruzados e degenerados), e não apenas inscritos em um círculo, mas também inscritos em cônicas (COXETER; GREITZER, 1967).

CATALDO (2013) confirma que o teorema independe da cônica dada, destacando, inclusive, o caso das cônicas degeneradas. Por exemplo, o teorema de Pascal permanece válido mesmo quando a elipse se degenera em uma circunferência, conforme demonstrado, ou quando a hipérbole se degenera em duas retas concorrentes e, neste caso, leva o nome de teorema de Pappus.

Uma outra demonstração do Teorema de Pascal, via caminho algébrico, pode ser vista em CATALDO (2013).

Teorema 4.36 (Pappus²⁹). *Sejam os pontos A_1, B_1 e C_1 e A_2, B_2 e C_2 pertencentes a duas retas distintas, r_1 e r_2 , respectivamente, conforme a Figura 84. Se os segmentos A_1B_2 e A_2B_1 intersectam-se em C , A_1C_2 e A_2C_1 intersectam-se em B e B_1C_2 e B_2C_1 intersectam-se em A , então os pontos A, B e C são colineares.*

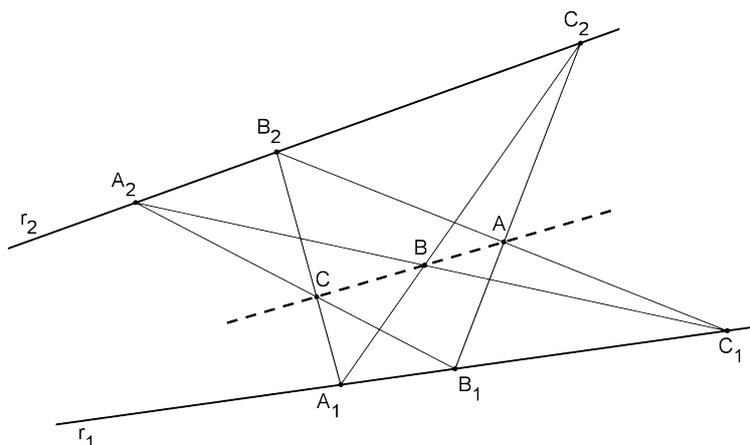


Figura 84 – Teorema de Pappus

Demonstração. Sejam X, Y e Z os pontos de encontro dos segmentos B_1C_2 e A_2C_1 ; A_2C_1 e A_1B_2 ; A_1B_2 e B_1C_2 , respectivamente (Figura 85).

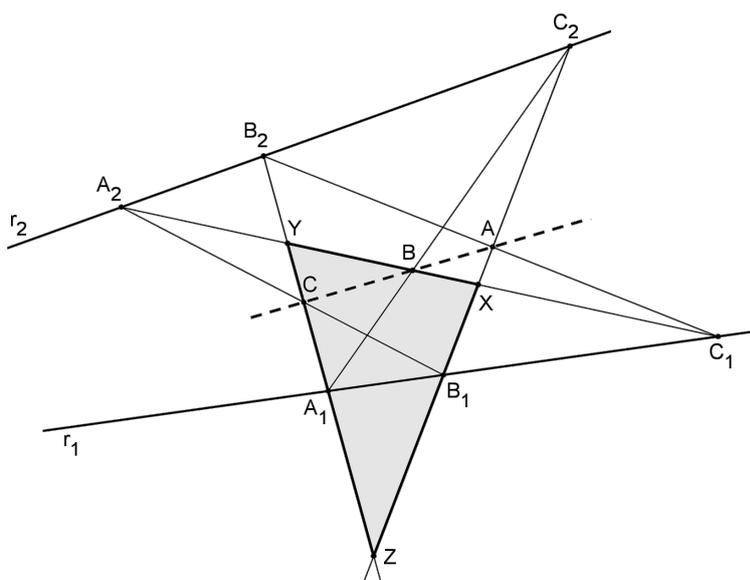


Figura 85 – Demonstração do teorema de Pappus

²⁹ Pappus de Alexandria foi um dos últimos matemáticos geômetras gregos do séc. IV (MUNIZ NETO, 2013).

Tendo por base o triângulo XYZ e as retas A_1C_2 , B_1A_2 e B_2C_1 que o cortam (Figura 85), pode-se aplicar três vezes o teorema de Menelaus (Teorema 4.10), obtendo-se, respectivamente,

$$\frac{XB}{BY} \cdot \frac{YA_1}{A_1Z} \cdot \frac{ZC_2}{C_2X} = 1, \quad (50)$$

$$\frac{XA_2}{A_2Y} \cdot \frac{YC}{CZ} \cdot \frac{ZB_1}{B_1X} = 1, \quad (51)$$

$$\frac{XC_1}{C_1Y} \cdot \frac{YB_2}{B_2Z} \cdot \frac{ZA}{AX} = 1. \quad (52)$$

Considerando ainda as retas r_1 e r_2 , que cortam o triângulo XYZ , tem-se, pelo mesmo teorema, que

$$\frac{XC_1}{C_1Y} \cdot \frac{YA_1}{A_1Z} \cdot \frac{ZB_1}{B_1X} = 1, \quad (53)$$

$$\frac{XA_2}{A_2Y} \cdot \frac{YB_2}{B_2Z} \cdot \frac{ZC_2}{C_2X} = 1. \quad (54)$$

Multiplicando-se (50), (51) e (52), obtém-se

$$\frac{XB}{BY} \cdot \frac{YA_1}{A_1Z} \cdot \frac{ZC_2}{C_2X} \cdot \frac{XA_2}{A_2Y} \cdot \frac{YC}{CZ} \cdot \frac{ZB_1}{B_1X} \cdot \frac{XC_1}{C_1Y} \cdot \frac{YB_2}{B_2Z} \cdot \frac{ZA}{AX} = 1,$$

cujas substituições dos resultados de (53) e (54), garante que

$$\frac{XB}{BY} \cdot \frac{YC}{CZ} \cdot \frac{ZA}{AX} = 1,$$

que, pelo teorema recíproco de Menelaus (Teorema 4.11), aplicado ao triângulo XYZ , permite concluir que os pontos A , B e C são colineares. \square

Nota: Apesar de a demonstração apresentar os pontos A , B e C de maneira ordenada sobre as retas, o teorema de Pappus é válido para pontos em qualquer ordem. Além disso, as retas r_1 e r_2 podem ser paralelas ou concorrentes (MUNIZ NETO, 2013).

O teorema de Pappus serve de base para a Geometria Projetiva moderna e pode ser tratado como um caso particular (ou corolário) do teorema de Pascal, considerando, neste caso, as duas retas como uma cônica degenerada.

CHAVES (2013) apresenta uma demonstração algébrica para este teorema, utilizando, para isso, o teorema de Bézout³⁰.

Teorema 4.37 (Brianchon). *Se um hexágono, com nenhum par de lados opostos paralelos, está circunscrito a um círculo, então as suas três diagonais são concorrentes em um ponto chamado Ponto de Brianchon*³¹.

Demonstração. Seja o hexágono $ABCDEF$ circunscrito a um círculo, com P , Q , R , S , T e U sendo os pontos de tangência dos lados do hexágono com este círculo (Figura 86).

³⁰ Étienne Bézout (1739-1783) foi um matemático francês do séc. XVIII, cujo teorema revela como estimar o número de pontos de interseção de duas curvas planas (CHAVES, 2013).

³¹ Charles Julien Brianchon (1783-1864) foi um matemático e químico francês, conhecido por sua demonstração do teorema geométrico que leva seu nome em 1810 (COXETER; GREITZER, 1967).

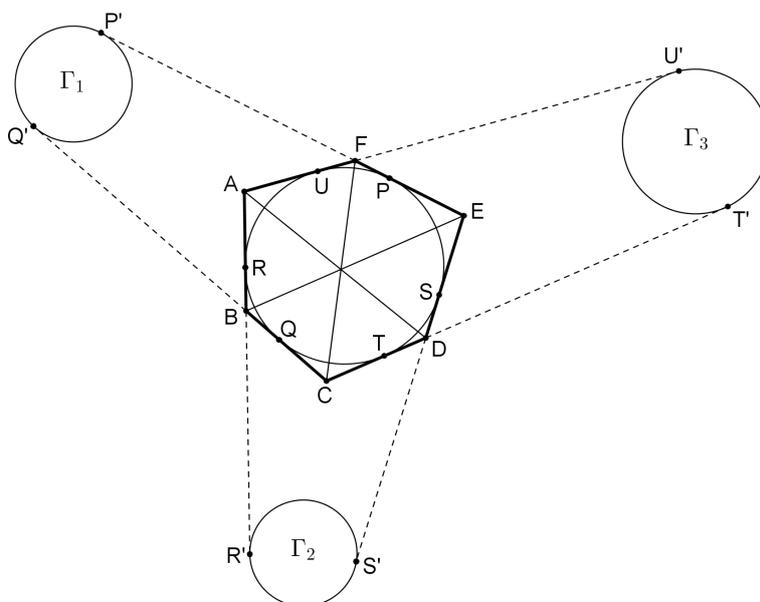


Figura 86 – Demonstração do teorema de Brianchon

Tomem-se, respectivamente, os pontos P' , Q' , R' , S' , T' e U' sobre o prolongamento dos lados EF , CB , AB , ED , CD e AF , de um comprimento tal que $PP' = QQ' = RR' = SS' = TT' = UU'$ permita a construção dos círculos Γ_1 , Γ_2 e Γ_3 , tangentes a esses segmentos nesses pontos (Figura 86).

Como $AR = AU$ e $RR' = UU'$, então $AR' = AU'$ e, assim, o vértice A tem a mesma potência em relação aos círculos Γ_2 e Γ_3 . Analogamente, o mesmo se conclui sobre o vértice D em relação aos mesmos dois círculos. Logo, AD é o eixo radical de Γ_2 e Γ_3 (ver Definição 4.11).

O mesmo raciocínio prova que FC é o eixo radical de Γ_1 e Γ_3 e que BE é o eixo radical de Γ_1 e Γ_2 . Portanto, pelo Teorema 4.9, as diagonais AD , FC e BE do hexágono $ABCDEF$ são concorrentes num ponto, que é o centro radical dos três círculos Γ_1 , Γ_2 e Γ_3 criados. \square

Nota: O hexágono considerado no teorema de Brianchon não precisa ser convexo.

O teorema de Brianchon é o dual do teorema de Pascal na Geometria Projetiva, podendo ser provado facilmente por este princípio. Entretanto, a versão apresentada neste trabalho considera o caso particular da circunferência inscrita, cuja demonstração utilizou apenas conceitos da Geometria Plana.

Finalmente, é importante destacar que as definições, proposições, lemas, teoremas e corolários apresentados pelo autor neste capítulo não esgotam os assuntos necessários à preparação de estudantes para enfrentar uma olimpíada de Matemática, mas servem de embasamento e instrumental para resolver muitos problemas envolvendo o tema Colinearidade e Concorrência, como será visto no capítulo a seguir.

Alguns problemas olímpicos

“Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la”.
(MEC, 1998)

5.1 Recomendações

Antes de iniciar a apresentação e a resolução de alguns problemas olímpicos, selecionados dentre competições nas quais estudantes brasileiros podem concorrer, é importante deixar registradas algumas recomendações ou dicas, reunidas por POLYA (1996) e CASTRO (2013), para facilitar a resolução desse tipo de questão:

- ✓ Compreender primeiro o enunciado, para depois começar;
- ✓ Planejar uma estratégia para resolução;
- ✓ Procurar semelhanças com outros problemas já conhecidos;
- ✓ Fazer esquemas, diagramas ou desenhos, explorando as simetrias existentes;
- ✓ Supor o problema resolvido e partir do fim para o começo;
- ✓ Usar o método de “redução ao absurdo” pode ser uma alternativa;
- ✓ Experimentar, tentar, errar, mas jamais desanimar;
- ✓ Não teimar excessivamente com uma ideia. Se começar a complicar, pode ser que exista outro caminho, menos árduo;
- ✓ Ter certeza de que, ao final, a solução encontrada está coerente, verificando se não entra em conflito com hipóteses e dados iniciais fornecidos no enunciado.

Na seção 5.2 serão apresentados, a título de exemplo, os enunciados de 7 (sete) problemas olímpicos, cobrados nas competições a seguir discriminadas, aplicados nos últimos 5 anos (2010-2014), bem como as respectivas propostas de solução elaboradas pelo autor, utilizando como base os conceitos explorados no

Capítulo 4.

✓ **Olimpíada Internacional de Matemática - IMO:** é a competição mais importante, onde participam cerca de 100 países, com equipes formadas por até 6 alunos com até 20 anos de idade, do Ensino Médio. Criada em 1959, sua prova é constituída por um total de 6 problemas, divididos em dois dias consecutivos com duração de 4 horas e meia;

✓ **Olimpíada de Matemática do Cone Sul - OMCS:** é uma olimpíada internacional que existe desde 1989, da qual participam 8 países da América do Sul: Argentina, Bolívia, Brasil, Chile, Equador, Paraguai, Peru e Uruguai; é composta de 2 provas aplicadas em dias consecutivos, contendo cada uma 3 problemas com duração de 4 horas;

✓ **Olimpíada Iberoamericana de Matemática - OIbM:** é uma competição internacional que existe desde 1985, em que participam os países da América Latina, além da Espanha e de Portugal; é composta de 2 provas, aplicadas em dias consecutivos, cada uma com 3 problemas e duração de 4 horas e meia;

✓ **Olimpíada de Matemática da Comunidade de Países de Língua Portuguesa (Lusofonia) - OMCPLP:** é uma competição internacional criada em 2011 e destinada a alunos do Ensino Médio, com até 18 anos de idade, dos 8 países de expressão portuguesa: Angola, Brasil, Cabo Verde, Guiné-Bissau, Moçambique, Portugal, São Tomé e Príncipe e Timor-Leste; sua prova é constituída por um total de 6 problemas, divididos em dois dias consecutivos, com duração de 4 horas e meia;

✓ **Romanian Masters in Mathematics - RMM:** é a olimpíada internacional que convoca apenas os 15 melhores países do mundo na IMO realizada no ano anterior; é organizada desde 2007 pela Sociedade Científica Romena de Matemática e sua prova é dividida em dois dias consecutivos, com 3 problemas e duração de 4 horas e meia;

✓ **Olimpíada Brasileira de Matemática - OBM:** é a principal olimpíada de Matemática realizada no Brasil, desde 1979, dividida em várias fases e níveis. Na última fase, a prova é discursiva, realizada em 2 dias, com 3 problemas e duração de 4 horas e meia;

✓ **Asian Pacific Mathematics Olympiad - APMO:** é uma olimpíada internacional, iniciada em 1989, que envolve mais de 30 países da Ásia e do Pacífico, incluindo o Brasil. A prova é composta de 5 problemas com 4 horas de duração.

5.2 Enunciados e soluções propostas

Problema 1 (IMO 2013). *Seja ABC um triângulo acutângulo com ortocentro H e seja W um ponto do lado BC , estritamente entre B e C . Os pontos M e N são os pés das alturas traçadas desde B e C , respectivamente. Designa-se por w_1 a circunferência circunscrita ao triângulo BWN ; seja X o ponto de w_1 tal que WX é um diâmetro de w_1 . Analogamente, designa-se por w_2 a circunferência circunscrita ao triângulo CWM ; seja Y o ponto de w_2 tal que WY é um diâmetro de w_2 . Demonstrar que os pontos X , Y e H são colineares.*

Uma solução: Seja Q o outro ponto de encontro entre as circunferências w_1 e w_2 . Uma vez que WX e WY são diâmetros, no círculo w_1 tem-se $\angle XQW = 90^\circ$ e, no círculo w_2 , $\angle WQY = 90^\circ$ (Proposição 4.4). Portanto,

os pontos X, Q e Y são colineares (Figura 87).

(1)

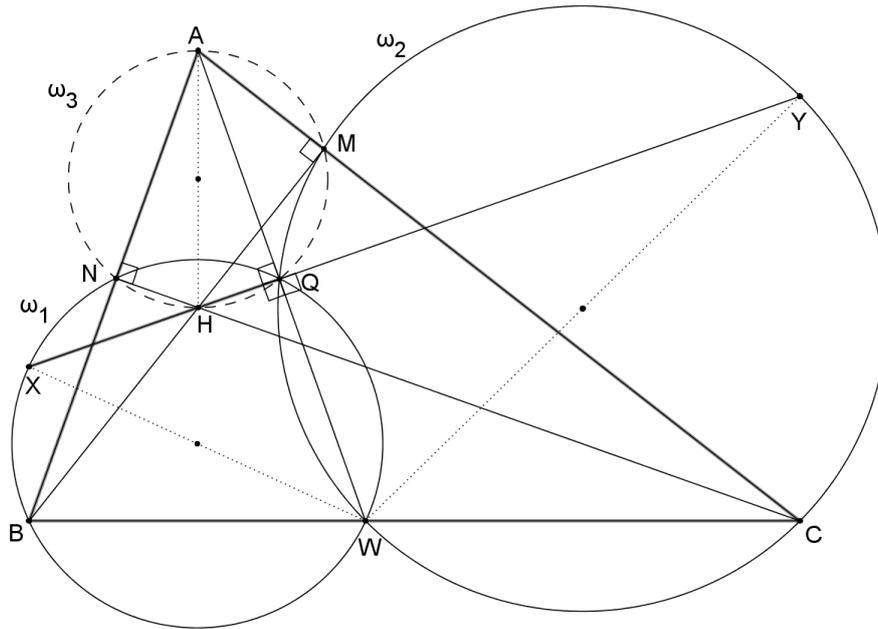


Figura 87 – IMO-2013.1

Como Q é o ponto de Miquel do triângulo ABC , em relação aos pontos W, N e M , então existe uma circunferência w_3 que passa por A, N, M e Q (Teorema 4.31). Uma vez que $\angle ANH = \angle AMH = 90^\circ$, o quadrilátero $ANHM$ é inscrito em w_3 (Proposição 4.18), sendo AH o seu diâmetro. Assim, $\angle AQH = 90^\circ$ e os pontos A, N, H, Q e M pertencem à circunferência w_3 (Figura 87).

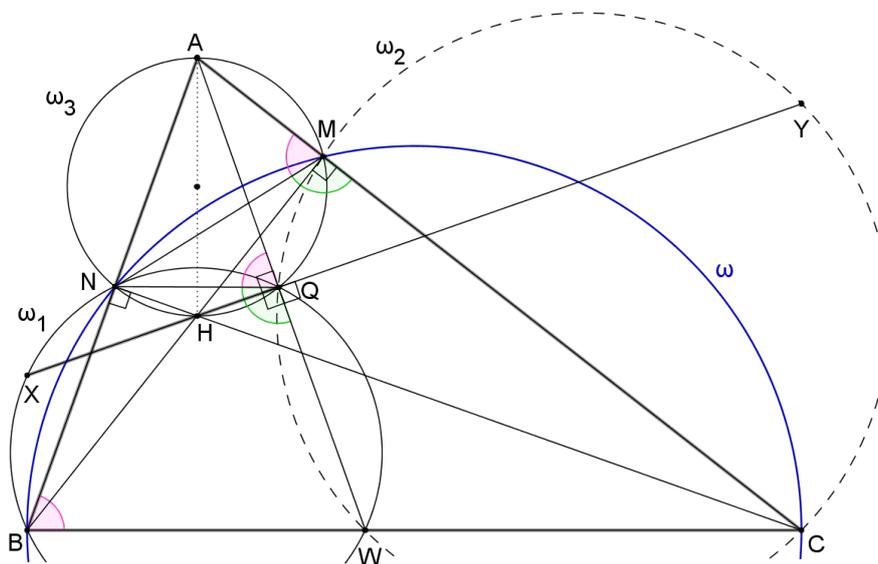


Figura 88 – IMO-2013.2

Além disso, como $\angle BNC = \angle BMC = 90^\circ$, o quadrilátero $BNMC$ é inscrito numa circunferência w de diâmetro BC (Figura 88).

No círculo w_3 , $\angle AQN = \angle AMN = 180^\circ - \angle NMC$. (2)

No círculo w , $180^\circ - \angle NMC = \angle NBC = \angle NBW$. (3)

No círculo w_1 , $\angle NBW = 180^\circ - \angle NQW$. (4)

De (2), (3) e (4), decorre que $\angle AQN = 180^\circ - \angle NQW$, ou seja, $\angle AQN + \angle NQW = 180^\circ$. Assim, os pontos A , Q e W são colineares (Figura 88). Dessa forma, se $\angle AQH = 90^\circ$ e $\angle XQW = 90^\circ$, então os pontos X , H e Q também são colineares. (5)

Portanto, das afirmações (1) e (5), conclui-se que os pontos X , H , Q e Y são colineares. \square

Problema 2 (OMCS 2014). Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em uma circunferência de centro O . Este ponto O está no interior do quadrilátero de modo que os ângulos $\angle BAC$ e $\angle ODA$ são congruentes. As diagonais desse quadrilátero se cortam no ponto E . Por E são traçadas a reta r perpendicular a BC e a reta s perpendicular a AD . A reta r intersecta AD em P e a reta s intersecta BC em M . Seja N o ponto médio de EO . Mostre que M , N e P são colineares.

Uma solução: Seja Γ o círculo de centro O , circunscrito ao quadrilátero $ABCD$, com ângulos tais que $\angle BAC = \angle ODA = \alpha$. Então, $\angle BDC = \angle BAC = \alpha$ (ângulo inscrito em Γ).

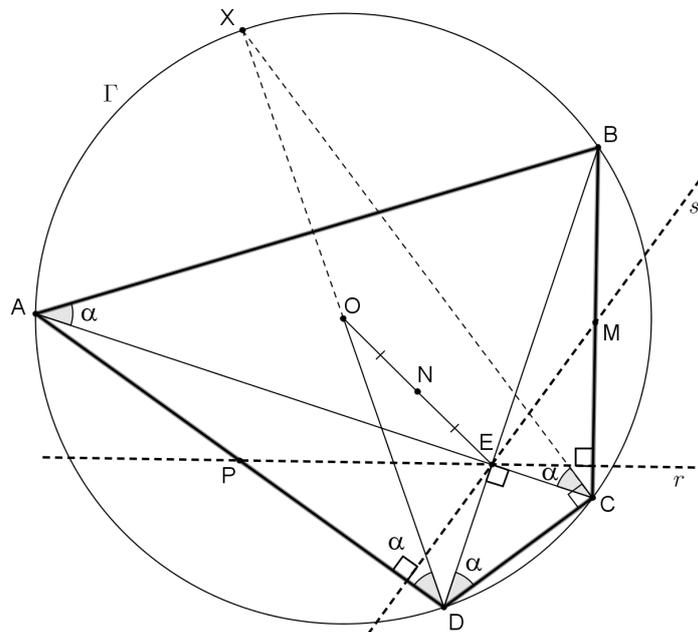


Figura 89 – OMCS-2014.1

Prolongando-se o raio DO determina-se o diâmetro DX em Γ . Unindo-se o ponto X ao vértice C , tem-se $\angle XCA = \angle XDA = \angle ODA = \alpha$ (Figura 89).

No triângulo XCD , inscrito em Γ e retângulo em C (Proposição 4.4), tem-se $\angle ACD = 90^\circ - \alpha$ e, conseqüentemente, $\angle CED = 90^\circ$, ou seja, $AC \perp BD$. Assim, $ABCD$ é um quadrilátero inscritível com diagonais perpendiculares entre si (Figura 89).

Pelo teorema de Brahmagupta (Teorema 4.27), as retas r e s , que se cruzam em E , determinam os

pontos M e P como pontos médios dos lados BC e AD , respectivamente (Figura 90). Logo,

$$\begin{cases} OM \perp BC \Rightarrow OM \parallel r \\ OP \perp AD \Rightarrow OP \parallel s \end{cases}$$

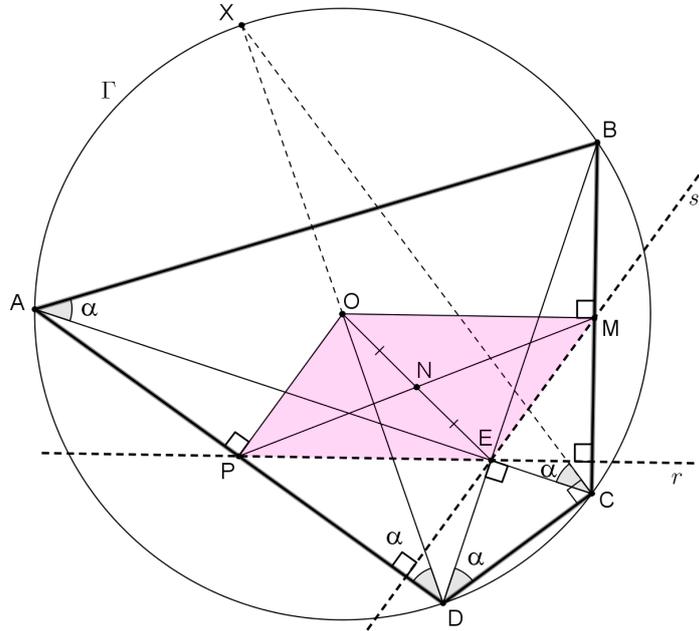


Figura 90 – OMCS-2014.2

Dessa forma, o quadrilátero $POME$ é um paralelogramo e, portanto, suas diagonais se cortam ao meio. Se N é ponto médio de OE , então a outra diagonal PM corta OE em N , o que mostra ser M, N e P colineares, com N sendo também o ponto médio de MP . □

Problema 3 (OIbM 2010). A circunferência Γ inscrita no triângulo escaleno ABC é tangente aos lados BC , CA e AB nos pontos D, E e F , respectivamente. A reta EF corta a reta BC em G . A circunferência de diâmetro GD corta Γ em R ($R \neq D$). Sejam P e Q ($P \neq R, Q \neq R$) as interseções de BR e CR com Γ , respectivamente. As retas BQ e CP cortam-se em X . A circunferência circunscrita ao triângulo CDE corta o segmento QR em M e a circunferência circunscrita ao triângulo BDF corta o segmento PR em N . Demonstrar que as retas PM, QN e RX são concorrentes.

Uma solução: Seja I o centro do círculo Γ . Neste caso, I é o incentro do triângulo ABC , com $ID \perp BC, IE \perp AC$ e $IF \perp AB$ (Teorema 4.1). Desse modo, I também é o ponto de interseção dos círculos λ_b (de diâmetro IB) e λ_c (de diâmetro IC), circunscritos aos triângulos BDF e CDE , respectivamente (Figura 91).

Seja λ é o círculo que possui diâmetro GD . Assim, em resumo, tem-se (Figura 91):

- ✓ Γ : centro I e passa pelos pontos D, E, F, P, Q, R ;
- ✓ λ : diâmetro GD e passa pelos pontos G, D, R ;
- ✓ λ_b : diâmetro BI e passa pelos pontos B, D, I, N, F ; e

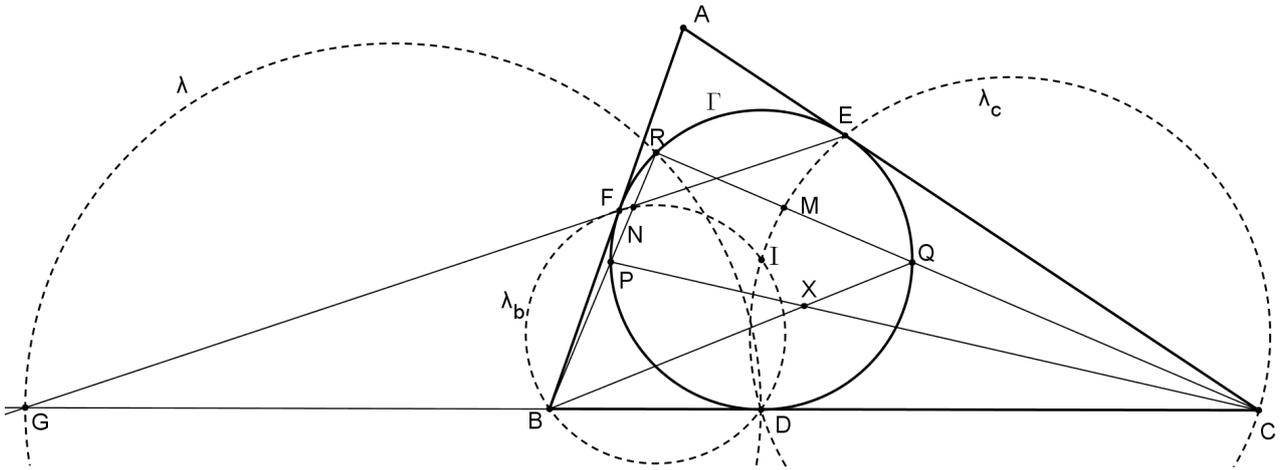


Figura 91 – OIbM-2010.1

✓ λ_c : diâmetro CI e passa pelos pontos C, D, I, M, E .

No círculo Γ , $ID \perp BC$, $IE \perp AC$ e $IF \perp AB$.

No círculo λ_b , $IF \perp FB$ e $ID \perp DB \Rightarrow BI$ é diâmetro $\Rightarrow \angle INB = 90^\circ$.

No círculo λ_c , $IE \perp EC$ e $ID \perp DC \Rightarrow CI$ é diâmetro $\Rightarrow \angle IMC = 90^\circ$.

Ainda, no círculo Γ ,

✓ se N está na corda PR e $IN \perp PR \Rightarrow N$ é médio de PR ; e

✓ se M está na corda QR e $IM \perp QR \Rightarrow M$ é médio de QR . Assim, NM é base média do triângulo RPQ , e, se $NM \parallel PQ$, então $NMQP$ é trapézio (Figura 92).

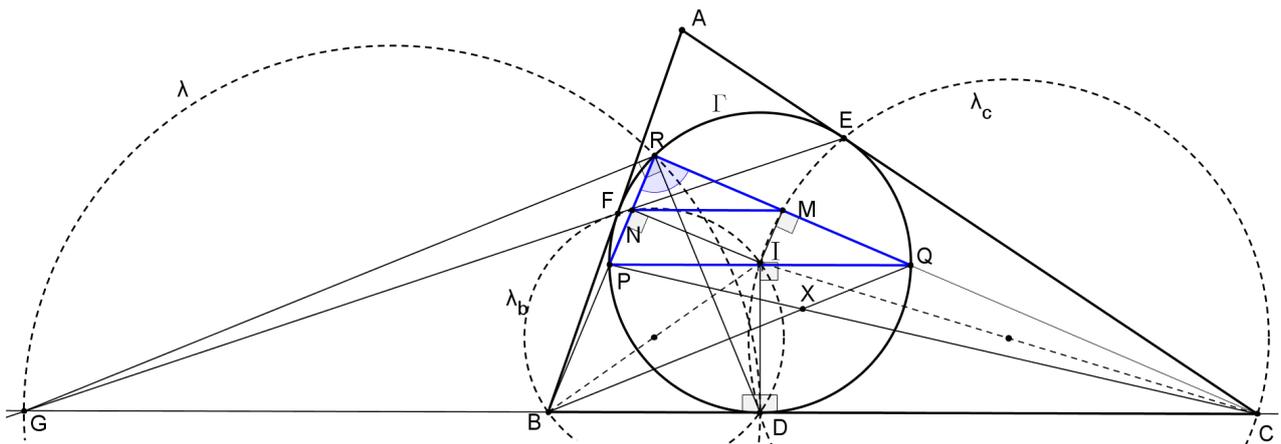


Figura 92 – OIbM-2010.2

Aplicando o teorema de Menelaus (Teorema 4.10), na sua versão básica, no triângulo ABC , cortado pela reta GE , tem-se

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CG}{GB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1.$$

Como as tangentes $AE = FA$, $EC = DC$ e $BF = DB$ (Proposição 4.3), a equação acima reduz-se a

$$\frac{GB}{GC} = \frac{DB}{DC} = k,$$

ou seja, G e D dividem BC harmonicamente na razão k (Definição 4.9). Uma vez que, no círculo λ , $\angle GRD = 90^\circ$ (Proposição 4.4), tem-se que RD e RG são bissetrizes, interna e externa, respectivamente, do triângulo BRC (Teorema 4.6), com λ sendo o seu círculo de Apolônio (Teorema 4.8) na razão k (Figura 92).

Se RD é bissetriz do ângulo $\angle BRC = \angle PRQ$, então RD divide ao meio o arco \widehat{PDQ} de Γ , ou seja, no círculo Γ , $\widehat{PD} = \widehat{DQ}$. Com isso, $ID \perp PQ$. Entretanto, como $ID \perp BC$, então $PQ \parallel BC$ e $PQCB$ é trapézio com X sendo o ponto de encontro de suas diagonais (Figura 92).

Seja Y o ponto de encontro das diagonais do trapézio $NMQP$ (Figura 93). Observando o triângulo RBC e as paralelas PQ e NM em relação à base BC , verifica-se que os triângulos MPC e NQB estão em perspectiva, com seu ponto de fuga no infinito. Assim, pelo teorema de Desargues (Teorema 4.33), tem-se:

$$\left. \begin{array}{l} MP \cap NQ = Y \\ PC \cap QB = X \\ CM \cap BN = R \end{array} \right\} \Rightarrow Y, X \text{ e } R \text{ são colineares.}$$

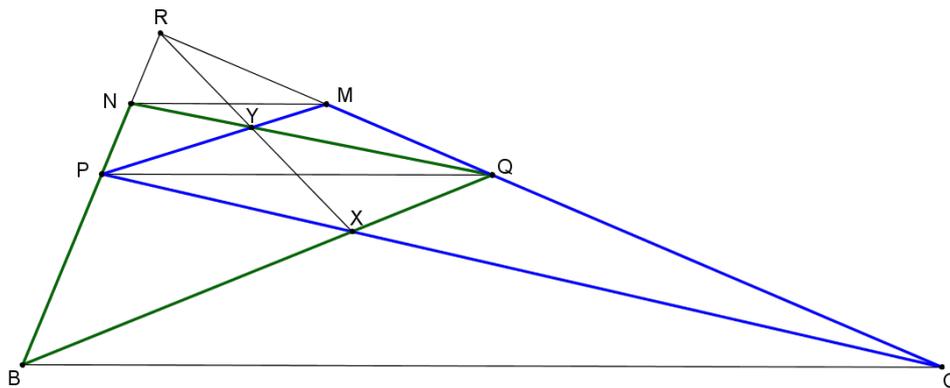


Figura 93 – OIbM-2010.3

Portanto, se Y , X e R são colineares, então as retas PM , QN e RX concorrem em Y . □

Problema 4 (OMCPLP 2013). Considere um triângulo ABC . Seja S a circunferência que tangencia internamente os lados BC , CA e AB do triângulo nos pontos D , E e F , respectivamente. Externamente ao triângulo constroem-se três circunferências S_A , S_B e S_C . A circunferência S_A é tangente a BC no ponto L e aos prolongamentos das retas AB e AC , nos pontos M e N , respectivamente. A circunferência S_B é tangente a AC no ponto E e ao prolongamento da reta BC no ponto P . A circunferência S_C é tangente a AB no ponto F e ao prolongamento da reta BC no ponto Q . Prove que as retas EP , FQ e AL são concorrentes em um único ponto sobre S .

Uma solução: Inicialmente, é importante notar que S_A é um exincírculo do triângulo ABC (Figura 94).

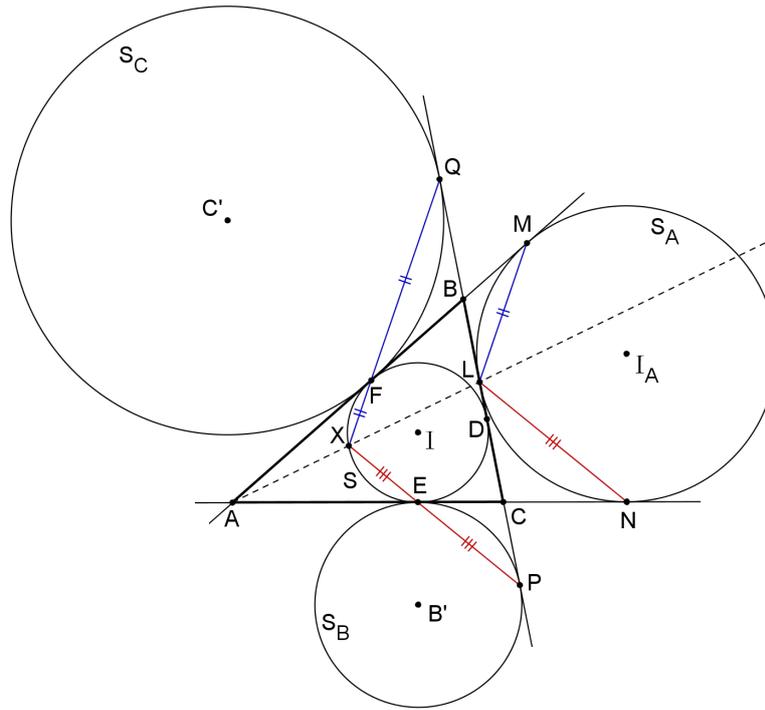


Figura 94 – OMCPLP-2013.1

Seja X um ponto de interseção da reta AL com a circunferência S . Uma vez que as retas AB e AC são tangentes comuns ao incírculo S e ao excírculo S_A do triângulo ABC , a homotetia direta desses círculos em relação ao vértice A mapeia os pontos X, F e E de S nos pontos L, M e N de S_A , respectivamente. Portanto, $FX \parallel ML$ e $EX \parallel NL$ (Figura 94).

Pela homotetia inversa dos círculos S_A e S_C em relação ao vértice B , tem-se que as polares $ML \in S_A$ e $QF \in S_C$ são paralelas (Figura 94). Logo,

$$\left. \begin{array}{l} FX \parallel ML \\ ML \parallel QF \end{array} \right\} \Rightarrow X, F \text{ e } Q \text{ são colineares.}$$

Analogamente, pela homotetia inversa dos círculos S_A e S_B em relação ao vértice C , tem-se que as polares $NL \in S_A$ e $PE \in S_B$ são paralelas (Figura 94). Logo,

$$\left. \begin{array}{l} EX \parallel NL \\ NL \parallel PE \end{array} \right\} \Rightarrow X, E \text{ e } P \text{ são colineares.}$$

Portanto, as retas EP, FQ e AL são concorrentes no ponto X , localizado sobre a circunferência S . \square

Problema 5 (RMM 2010). *Seja $A_1A_2A_3A_4$ um quadrilátero convexo cujos lados opostos não são paralelos. Para cada $i = 1, 2, 3, 4$, defina w_i como o círculo que toca o quadrilátero externamente e é tangente às retas $A_{i-1}A_i, A_iA_{i+1}$ e $A_{i+1}A_{i+2}$ (índices são considerados módulo 4, de modo que $A_0 = A_4, A_5 = A_1$ e $A_6 = A_2$). Seja*

T_i o ponto de tangência de w_i com o lado $A_i A_{i+1}$. Prove que as retas $A_1 A_2$, $A_3 A_4$ e $T_2 T_4$ são concorrentes se, e somente se, as retas $A_2 A_3$, $A_4 A_1$ e $T_1 T_3$ são concorrentes.

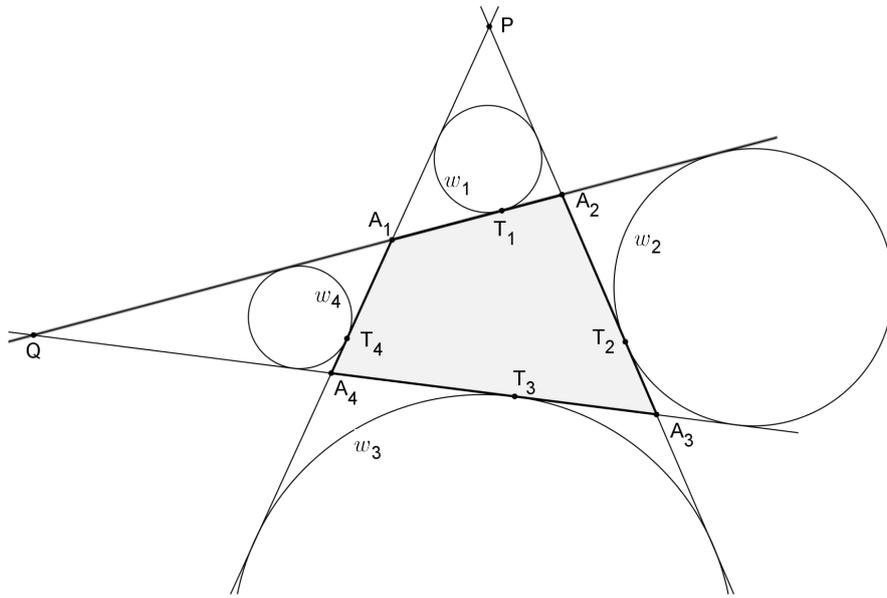


Figura 95 – RMM-2010.1

Uma solução: Uma vez que os lados opostos do quadrilátero $A_1 A_2 A_3 A_4$ não são paralelos, considere que as retas $A_1 A_2$ e $A_3 A_4$ se encontrem no ponto Q e as retas $A_2 A_3$ e $A_4 A_1$ se encontrem no ponto P (Figura 95). Nesse caso, para resolver o problema, basta agora provar que os pontos P , T_1 e T_3 são colineares se, e somente se, os pontos Q , T_4 e T_2 são colineares.

Como existem vários círculos e tangentes comuns (Figura 95), é possível observar algumas homotetias para a resolução do problema.

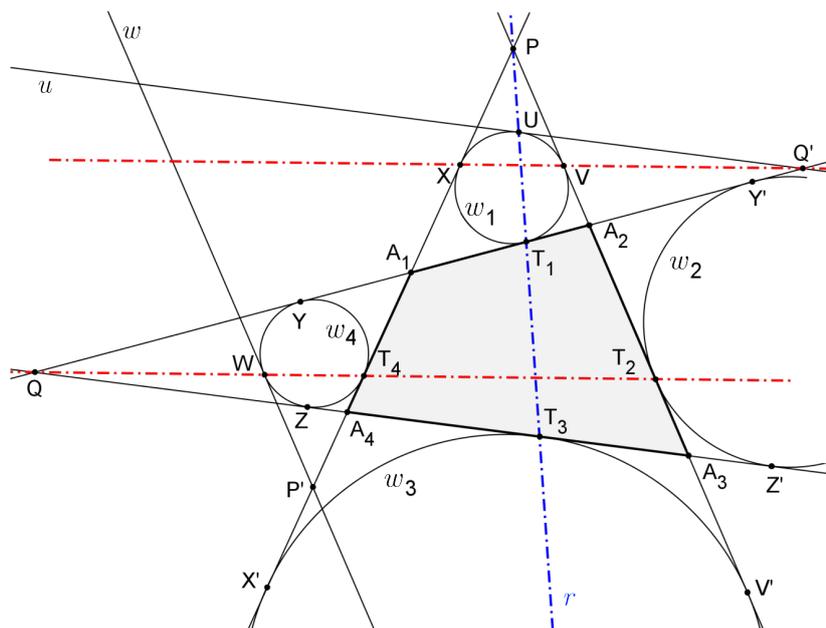


Figura 96 – RMM-2010.2

Sejam os pontos V e X os pontos de tangência das retas A_2A_3 e A_4A_1 com o círculo w_1 , e Y e Z os pontos de tangência das retas A_1A_2 e A_3A_4 com o círculo w_4 , respectivamente (Figura 96).

Inicialmente, considere, por hipótese, que os pontos P , T_1 e T_3 são colineares e estão sobre a reta r . Seja U o outro ponto de interseção de r com w_1 (Figura 96).

Uma vez que as retas A_2A_3 e A_4A_1 são tangentes comuns externas aos círculos w_1 e w_3 , e que P , T_1 e T_3 são colineares, então a homotetia direta com centro em P mapeia o círculo w_1 em w_3 e, conseqüentemente, o ponto U em T_3 . Assim, a reta u , tangente a w_1 em U , é paralela à reta A_3A_4 , tangente a w_3 em T_3 (Figura 96).

As retas A_4A_1 e A_2A_1 são tangentes comuns internas aos círculos w_1 e w_4 . Desse modo, a homotetia inversa com centro em A_1 vai relacionar w_1 e w_4 , bem como as suas polares, XT_1 e T_4Y , de modo inverso, ou seja, os pontos X e T_1 (em w_1) são mapeados em T_4 e Y (em w_4), respectivamente. Como a reta A_3A_4 tangencia w_4 em Z , a mesma homotetia vai mapear o ponto Z no ponto U , dado que a reta u é paralela a A_3A_4 e tangente a w_1 em U . Além disso, o ponto Q será mapeado no ponto Q' , onde $A_3A_4 \cap A_2A_1 = Q$ e $u \cap A_2A_1 = Q'$ (Figura 96).

Considere agora que essa mesma homotetia, centrada em A_1 , mapeie o ponto V de w_1 em um ponto W de w_4 (Figura 96). Assim, a reta w , tangente a w_4 em W , é paralela à reta A_2A_3 , que, por sua vez, é tangente a w_1 em V . (6)

A configuração projetiva de w_1 , com pólo P , tangentes PX e PV , e os pontos P , U e T_1 alinhados, garante que, no pólo Q' , com tangentes $Q'U$ e $Q'T_1$, os pontos Q' , V e X estarão também alinhados. Note-se que XV é a polar de P e que UT_1 é a polar de Q' . Por conseguinte, a homotetia entre os círculos w_1 e w_4 , centrada em A_1 , garante que os pontos homólogos Q , W e T_4 também estarão alinhados, com YZ sendo a polar de Q e WT_4 a polar de P' (Proposição 4.22) (Figura 96).

Pela homotetia inversa entre os círculos w_1 e w_2 , centrada em A_2 , o ponto V (em w_1) é mapeado no ponto T_2 (em w_2).

Agora, seja W' um ponto em w_4 , homólogo de T_2 no tocante à homotetia direta com pólo em Q , entre w_2 e w_4 . Assim, Q , W' e T_2 são colineares. Com isso, a reta tangente a w_4 , passando por W' , é paralela à reta A_2A_3 . Entretanto, de (6), tem-se que a reta paralela a A_2A_3 que tangencia w_1 é a reta w , no ponto W . Portanto, $W' \equiv W$, e Q , W , T_4 e T_2 estão alinhados.

A implicação inversa pedida no problema pode ser demonstrada de modo análogo, ou seja, considerando-se, inicialmente, Q , T_4 e T_2 colineares, chega-se à conclusão que P , T_1 e T_3 também são colineares. □

Problema 6 (OBM 2012). *Dado um triângulo ABC , o exincentro relativo ao vértice A é o ponto de interseção das bissetrizes externas dos ângulos $\angle B$ e $\angle C$. Sejam I_A , I_B e I_C os exincentros do triângulo escaleno ABC relativos a A , B e C , respectivamente, e X , Y e Z os pontos médios de I_BI_C , I_CI_A e I_AI_B , respectivamente. O incírculo do triângulo ABC toca os lados BC , CA e AB nos pontos D , E e F , respectivamente. Prove que as retas DX , EY e FZ têm um ponto em comum pertencente à reta IO , sendo I e O o incentro e o circuncentro do triângulo ABC , respectivamente.*

Uma solução: Sabe-se, pelo Teorema 4.6, que o exincentro relativo a um vértice de um triângulo é o ponto de encontro das bissetrizes externas dos outros dois ângulos, mais a bissetriz interna do ângulo considerado. Desse modo, para o triângulo ABC (Figura 97), cada um dos ternos de pontos (A, I, I_A) , (B, I, I_B) e (C, I, I_C) são colineares.

Sejam $2p$ o perímetro do triângulo ABC , γ a medida do seu ângulo $\angle C$, e w o seu circuncírculo.

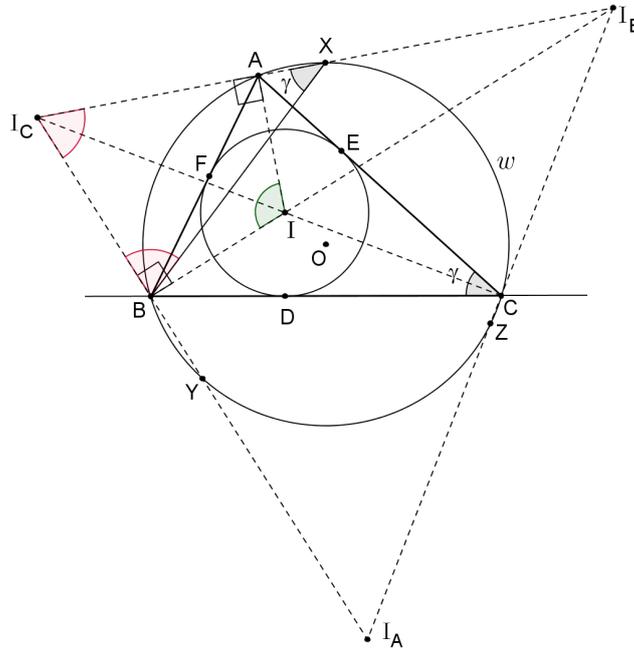


Figura 97 – OBM-2012.1

Uma vez que BI_C e BI_B são, respectivamente, bissetrizes externa e interna, relativas ao vértice B , então $\angle I_C B I_B = 90^\circ$ (Proposição 4.5). Como X é médio de $I_B I_C$, então BX é mediana relativa à hipotenusa do triângulo retângulo $I_C B I_B$, com $BX = I_C X = I_B X$ (Proposição 4.4), ou seja, o triângulo $I_C X B$ é isósceles (Figura 97).

Se os segmentos AI e BI são bissetrizes internas do triângulo ABC , então, $\angle AIB = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$ (Proposição 4.6). Uma vez que AI e AI_C , e BI e BI_C são as bissetrizes interna e externa, relativas aos vértices A e B , respectivamente, ou seja, $AI \perp AI_C$ e $BI \perp BI_C$ (Proposição 4.5), o quadrilátero $AIBI_C$ é inscritível (Proposição 4.18) e $\angle AI_C B = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ (Figura 97).

No triângulo isósceles $I_C X B$ tem-se $\angle X I_C B = \angle X B I_C = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ e, portanto, $\angle I_C X B = \gamma$. Logo, X pertence ao mesmo arco-capaz que o vértice C do triângulo ABC , no circuncírculo w (Figura 97).

Sejam L , M e N os pés das perpendiculares baixadas a partir de I_C , X e I_B , respectivamente, até o lado BC do triângulo ABC (Figura 98). Assim, pela Lei de Proporcionalidade de Tales, M é ponto médio de LN e XM é base média do trapézio retângulo $I_C I_B N L$.

Sejam L' e N' os pés das perpendiculares baixadas de I_C e I_B até as retas suportes dos lados AC e AB , respectivamente, do triângulo ABC (Figura 98). Uma vez que L e L' são os pontos de tangência das tangentes traçadas a partir de C até o excírculo λ_C , tem-se que $CL = CL'$. Além disso, como $BL = BF$ e $AL' = AF$, tem-se

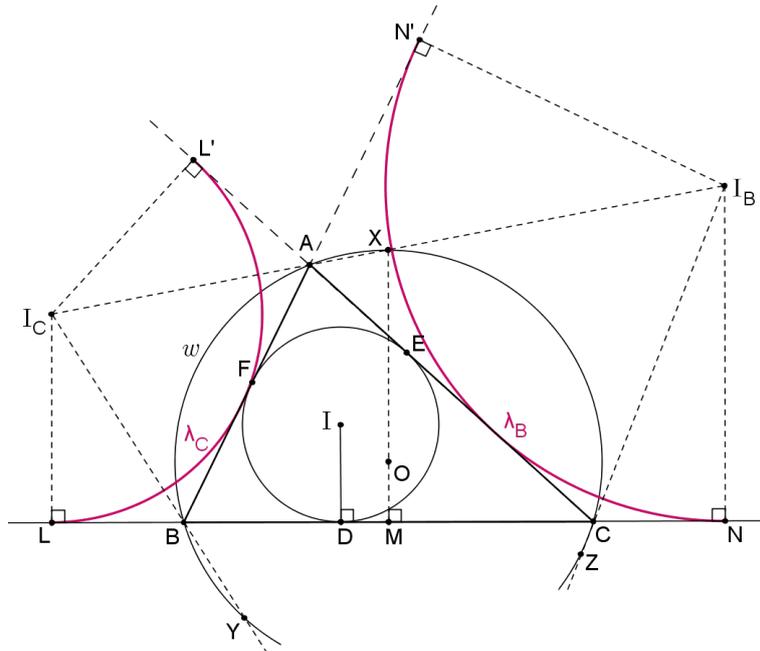


Figura 98 – OBM-2012.2

$$CL + CL' = 2p \Rightarrow 2 \cdot CL = 2p \Rightarrow CL = p.$$

Analogamente,

$$BN + BN' = 2p \Rightarrow 2 \cdot BN = 2p \Rightarrow BN = p.$$

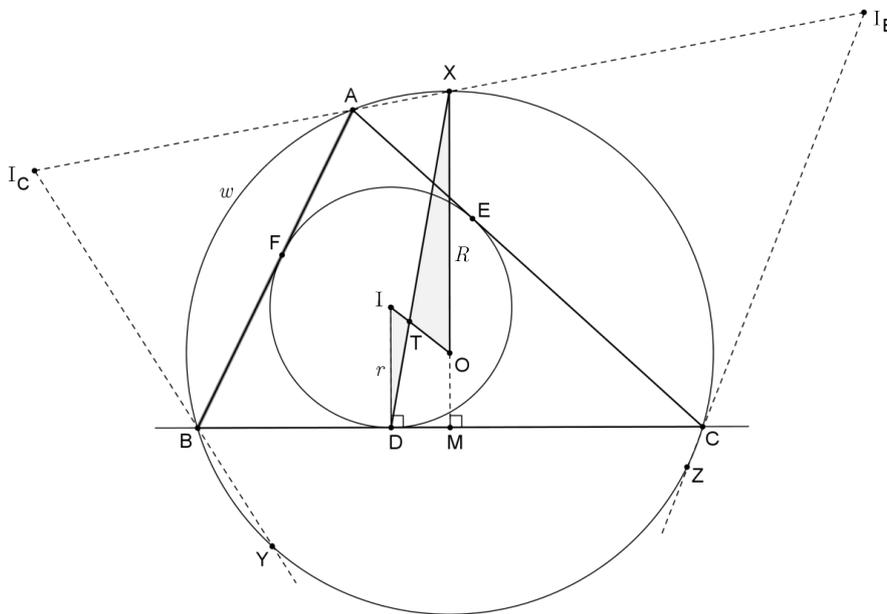


Figura 99 – OBM-2012.3

Se $CL = BN$, então $BL = CN$ e, portanto, M , além de médio de LN , também é ponto médio da corda BC de w . Assim, XM passa pelo centro O de w (Proposição 4.3).

Sejam r e R , respectivamente, o valor dos raios do incírculo e do circuncírculo do triângulo ABC , ou seja, $ID = r$ e $OX = R$ (Figura 99).

Seja T o ponto de interseção entre os segmentos DX e IO . Os triângulos TID e TOX são homotéticos em relação a T e possuem seus lados paralelos, sendo, portanto, semelhantes entre si (Figura 99), de tal forma que $\frac{TI}{TO} = \frac{ID}{OX} = \frac{r}{R}$. (7)

Analogamente, $IE = r$ e $OY = R$. Seja T' o ponto de interseção entre os segmentos EY e IO . Então, os triângulos $T'IE$ e $T'OY$ são homotéticos em relação a T' e semelhantes entre si, com $\frac{T'I}{T'O} = \frac{IE}{OY} = \frac{r}{R}$. (8)

As igualdades (7) e (8) confirmam que $T' \equiv T$.

Finalmente, procedendo-se da mesma forma para o segmento FZ , uma vez que $IF = r$ e $OZ = R$, tem-se que FZ corta IO no mesmo ponto T , e, portanto, os segmentos DX , EY e FZ são concorrentes no ponto T , pertencente à reta IO ¹, tal que $\frac{TI}{TO} = \frac{r}{R}$. \square

Problema 7 (APMO 2013). *Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito no círculo w , e seja P um ponto do prolongamento AC tal que os segmentos PB e PD são tangentes a w . A reta tangente por C intersecta PD no ponto Q e a reta AD no ponto R . Seja E o outro ponto de interseção entre AQ e w . Demonstrar que os pontos B, E, R são colineares.*

Uma solução: Provar que os pontos B, E, R são colineares é o mesmo que provar que as retas AD, CQ e BE são concorrentes no ponto R (Figura 100).

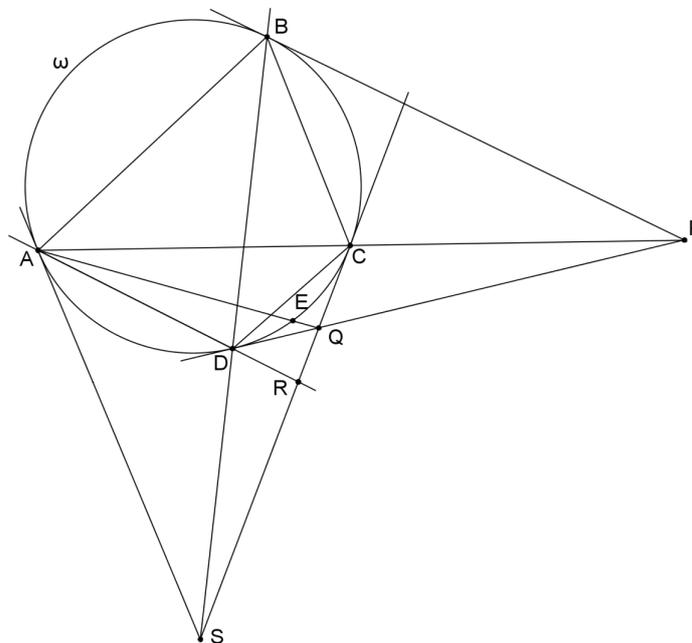


Figura 100 – APMO-2013.1

Sabe-se, pelo enunciado, que $AD \cap CQ = R$.

Por hipótese, considere que a reta BE encontre AD em um ponto R' ($R' \neq R$), ou seja, $AD \cap BE = R'$.

¹ Como foi visto na Definição 4.16, IO é chamada reta de Nagel do triângulo ABC .

Seja S o ponto de encontro da reta CQ com a reta tangente a w passando por A (Figura 100). Usando os conceitos de homotetia e polaridade no círculo w , tem-se que BD é a reta polar do pólo P , bem como AC é a reta polar do pólo S (Proposição 4.23). Uma vez que os pontos P , C e A estão alinhados, então os pontos S , B e D também estarão alinhados (Proposição 4.22). Assim, os pontos C , Q , R e S pertencem a uma mesma reta (Figura 100).

Aplicando o teorema de Pascal (Teorema 4.35) para o hexágono degenerado $AAEBDD$, inscrito em w , tem-se

$$\left. \begin{array}{l} AA \cap BD = S \\ AE \cap DD = Q \\ EB \cap DA = R' \end{array} \right\} \Rightarrow S, Q \text{ e } R' \text{ são colineares.}$$

Se o ponto R' é colinear com S e Q , então também pertence à reta CQ .

Como $AD \cap BE = R'$, mas $R' \in CQ$, então $AD \cap CQ = R = R'$. E se R e R' representam o mesmo ponto ($R' \equiv R$), então, as retas BE , AD e CQ são concorrentes em R ; em outras palavras, os pontos B , E , R são colineares. \square

Considerações finais

As olimpíadas científicas têm ganhado cada vez mais espaço no ambiente escolar nacional. Nesse contexto, destacam-se as diversas competições de Matemática existentes no país, tanto em nível regional quanto nacional.

À medida que um aluno começa a estudar a Matemática por esse prisma, percebe-se o despertar de um interesse maior pela disciplina, melhorando consideravelmente o rendimento escolar do discente.

Uma vez envolvido nas olimpíadas regionais ou nacionais, o estudante começa a querer atingir patamares mais altos, buscando, inclusive, competir em olimpíadas internacionais representando o Brasil no exterior.

Dentre as áreas da Matemática cobradas nas diversas olimpíadas das quais o Brasil participa, a Geometria é, sem dúvida, a área mais temida pelos estudantes. Isso ocorre porque a Geometria sofreu muitas perdas ao longo dos últimos 50 anos, o que prejudicou seu ensino e aprendizado de uma forma muito evidente nas escolas brasileiras.

Com o intuito de tentar melhorar o ensino da Geometria no país, uma vez que tal assunto é um dos mais cobrados nas olimpíadas de Matemática no mundo, o autor procurou demonstrar neste trabalho a importância de se utilizar problemas olímpicos em sala de aula como um fator motivacional e desafiante para aumentar o interesse do aluno pela Matemática.

Ciente da impossibilidade de abordar toda a Geometria, o autor escolheu o tema Colinearidade e Concorrência, na Geometria Plana, principalmente por ser um tema bastante recorrente nas competições olímpicas e também por ser um tópico inexistente na quase totalidade dos livros didáticos atuais, o que, sem dúvida, prejudica a preparação de alunos e, conseqüentemente, o seu desempenho nessas competições, cada vez mais presentes no ambiente escolar brasileiro.

O pouco material encontrado nos livros sobre o tema apresenta questões olímpicas da década de 1980 e 1990. O autor então realizou um levantamento extenso de diversas provas, observando os assuntos cobrados nessas olimpíadas internacionais, nos últimos 5 anos (2010-2014), comprovando a importância do tema escolhido na atualidade. A pesquisa possibilitou a construção de um banco de dados com mais de 140 (cento e quarenta) questões recentes, abordando diretamente o tema Colinearidade e Concorrência, que pode servir de base para que professores venham a utilizar esse material didático em suas aulas. Para tanto, são disponibilizados, no Apêndice, os enunciados originais dessas questões, no idioma inglês, para

composição de possíveis listas de exercícios de treinamento.

Com base no resultado da pesquisa, o autor desenvolveu um ferramental teórico para ajudar professores e estudantes, suprindo uma carência atual nos livros escolares.

Dessa forma, o presente trabalho vem trazer à reflexão dos educadores matemáticos de hoje a necessidade de se resgatar conceitos, já esquecidos no ensino regular, mas considerados importantes do ponto de vista das competições olímpicas, repensando, quem sabe, a maneira de ensinar a Geometria, ou mesmo outras áreas, como a Álgebra, a Combinatória e a Teoria dos Números, temas também bastante cobrados nas competições olímpicas nacionais e internacionais, utilizando esse viés mais desafiador e instigante que a Matemática tem a oferecer. O resultado esperado é somente um: melhorar a qualidade da educação no Brasil.

Referências

ADAM, P. P. *Curso de Geometria Métrica - Tomo I*. 16.ed. Madrid: Euler, 1986.

ALCARAZ, C. T. *Que significa "comprender el teorema de Desargues"?* Revista Miscelânea Matemática, n.54, abr 2012. Sociedad Matematica Mexicana (México). Tlalpan, 2012. Disponível em: <<http://www.miscelaneamatematica.org>>. Acesso em: 10 fev.2015.

ANDRADE, L. N. *A construção de cônicas e o teorema de Pascal*. Revista do Professor de Matemática, n.45, jan-abr, p.17. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2001.

AUFFINGER, A. C. T. C.; VALENTIM, F. J. S. *Introdução à Geometria Projetiva*. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória, 2003. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/~jardim/ma620/geoproj.pdf>>. Acesso em: 20 abr.2015.

BERSCH, T. *Olimpíadas científicas*. Sítio eletrônico. Disponível em: <<http://www.olimpiadascientificas.com>>. Acesso em: 20 fev.2015.

BORTOLOSSI, H. J.; REZENDE, W. M.; PESCO, D. U. *Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro*. Sítio eletrônico. Universidade Federal Fluminense. Niterói, 2015. Disponível em: <<http://www.geogebra.im-uff.mat.br>>. Acesso em: 22 fev.2015.

CASTRO, F. Z. *Uma proposta de sequência didática para treinamento olímpico em Matemática*. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória, 2013.

CASTRO, L. G. M. *Introdução à Geometria Projetiva*. Revista Eureka!, n.8, p.16. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2000.

CATALDO, J. C. *Teorema do Hexágono de Pascal*. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2013.

CENTRO DE GESTÃO E ESTUDOS ESTRATÉGICOS. *Avaliação do impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas*. Série Documentos Técnicos, n. 11, jul. 2011. Brasília, 2011.

CHAVES, J. J. F. *Teorema de Pappus*. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2013.

COXETER, H. S. M.; GREITZER, S. L. *Geometry revisited*. 1. ed. New York: The Mathematical Association of America, 1967.

DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de Matemática*. 2.ed. São Paulo: Ática, 1991.

DA SILVA, C. G. *Resolução de problemas sobre Geometria para as Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP*. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Pará. Belém, 2013.

- DE FREITAS, V. P. *Alguns teoremas clássicos da Geometria Sintética e aplicações*. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Amazonas. Manaus, 2013.
- EVES, H. *A Survey of Geometry*. Revised edition. Boston: Allyn and Bacon, 1972.
- FARIA, R. M. A. *Interpretação geométrica dos problemas clássicos de Desargues, Fagnano e Malfatti*. Dissertação (Mestrado). Universidade dos Açores (Portugal). Ponta Delgada, 2013.
- FEITOSA, L. F. *Aplicações dos números complexos na Geometria Plana*. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa, 2013.
- GONÇALVES J. S.; LANDO, J. C. *O ensino de Geometria em escolas públicas na cidade de Jequié - Bahia*. Revista Eventos Pedagógicos, v. 3, n. 3, p. 363, Ago-Dez. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia. Jequié, 2012.
- GRILLO, J. D. *Atividades e problemas de Geometria Espacial para o Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2014.
- GUALBERTO, K. J. *Colinearidade e Concorrência na Geometria Euclidiana Plana*. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2007.
- HEATH, T. L. *The works of Archimedes*. Edited in modern notation with introductory chapters. New York: Cambridge University Press, 2010.
- INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA. *Olimpíada Brasileira de Matemática*. Sítio eletrônico oficial. Disponível em: <<http://www.obm.org.br>>. Acesso em: 15 fev.2015.
- INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD. Sítio eletrônico oficial. Disponível em: <<https://www.imo-official.org>>. Acesso em: 18 fev.2015.
- INTERNATIONAL MATHEMATICAL UNION. Sítio eletrônico oficial. Disponível em: <<http://www.mathunion.org>>. Acesso em: 17 fev.2015.
- LORENZATO, S. *Porque não ensinar Geometria?* Educação Matemática em Revista, n. 4, sem.1. Universidade de Brasília. Brasília, 1995.
- MACEDO, D. M. R. *Resgatando alguns teoremas clássicos da Geometria Plana*. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Ceará. Juazeiro do Norte, 2014.
- MARANHÃO, T. P. A. *Avaliação de impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas (OBMEP - 2005/2009)*. In: Centro de Gestão e Estudos Estratégicos. Série Documentos Técnicos, n. 11, jul 2011, p. 13-41. Brasília, 2011.
- MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica*. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. Brasília, 2013.
- MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, 1998.
- MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; JORGE, M. *Geometria I*. 5 ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1990a.
- MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; JORGE, M. *Geometria II (Métrica Plana)*. 2 ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1990b.
- MUNIZ NETO, A. C. *Tópicos de Matemática Elementar - Geometria Euclidiana Plana*. v. 2. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.
- NEVES, E. D. *Caracterização e localização dos pontos notáveis do triângulo*. Dissertação (Mestrado). Universidade de São Paulo. São Carlos, 2013.
- OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS. Sítio eletrônico oficial. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br>>. Acesso em: 15 fev.2015.

- PAVANELLO, R. M. *O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências*. Zetetiké: Revista de Educação Matemática, v. 1, n. 1. Universidade de Campinas. Campinas, 1993. Disponível em: <<https://www.fe.unicamp.br/revistas/ged/zetetike/issue/view/166>>. Acesso em: 10 fev.2015.
- PEREZ, G. *Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicas da pesquisa participante no ensino da Geometria para as camadas populares (1º e 2º graus)*. Tese (Doutorado). Faculdade de Educação. Universidade de Campinas. Campinas, 1991.
- POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.
- POSAMENTIER, A. S; SALKIND, C. T. *Challenging problems in Geometry*. 3 ed. New York: Dover Publications, 1996.
- ROMANIAN MASTERS OF MATHEMATICS. Sítio eletrônico oficial. Disponível em: <<http://rmms.lbi.ro/>>. Acesso em: 17 fev.2015.
- SARMENTO, M. I. *Um passeio proveitoso pelos círculos de Apolônio*. Dissertação (Mestrado). Universidade do Porto (Portugal). Porto, 2007.
- SASTRY, K. R. S. *Brahmagupta quadrilaterals: a description*. Crux Mathematicorum, v.29, n.1, p.39. Canadian Mathematical Society (Canadá). Ottawa, 2003.
- SHINE, C. Y. *21 Aulas de Matemática Olímpica*. 1. ed. Coleção Olimpíadas de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.
- SILVA, L. S. C. *O teorema de Morley*. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2014.
- SMITH, D. E. *Biography: Emile Michel Hyacinthe Lemoine*. The American Mathematical Monthly, v.3, n.2, p.29-33. Mathematical Association of America. Springfield, 1896. Disponível em: <<http://poncelet.math.nthu.edu.tw/disk5/js/history/lemoine.pdf>>. Acesso em: 20 mar.2015.
- SUPPA, E. *Eötvös-Kürschák competitions*. Mathematical and Physical Society (Hungria). Budapeste, 2007.
- TOKARNIA, M. *Olimpíada melhora desempenho de estudantes de matemática*. Agência Brasil de Notícias, 30 ago.2014. Brasília: Empresa Brasil de Comunicação - EBC, 2014. Disponível em: <<http://www.ebc.com.br/educacao/2014/08/olimpiada-melhora-desempenho-de-estudantes-de-matematica>>. Acesso em: 20 mar.2015.
- USUI, T. *O globo terrestre e a esfera celeste: uma abordagem interdisciplinar de Matemática, Geografia e Astronomia*. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife, 2014.
- VIEIRA, M. A. *Construções geométricas e os problemas de Apolônio*. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Goiás. Goiânia, 2013.

Apêndice

Na pesquisa realizada para a execução desta dissertação, o autor conseguiu coletar o total de 283 provas olímpicas de Matemática, aplicadas entre os anos de 2010 e 2014, contemplando 62 competições, em mais de 50 países, em todos os continentes.

A distribuição anual dessas provas é a seguinte: 2010 (58 provas); 2011 (59 provas); 2012 (59 provas); 2013 (56 provas); 2014 (51 provas).

Do total de provas encontradas, 104 continham problemas envolvendo o tema Colinearidade e Concorrência de forma direta, sendo possível extrair 141 questões (73 sobre Colinearidade e 68 sobre Concorrência), apresentadas a seguir neste Apêndice, a título de exercícios de treinamento, no idioma inglês e separadas por ano. É apresentada ainda uma tabela-resumo com os dados quantitativos levantados pelo autor na sua pesquisa.

COLETÂNEA 2014

Exercício 1 (Brazilian Math Olympiad 2014). Let ABC be a triangle with incenter I and incircle ω . Circle ω_A is externally tangent to ω and tangent to sides AB and AC at A_1 and A_2 , respectively. Let r_A be the line A_1A_2 . Define r_B and r_C in a similar fashion. Lines r_A , r_B and r_C determine a triangle XYZ . Prove that the incenter of XYZ , the circumcenter of XYZ and I are collinear.

Exercício 2 (British Mathematical Olympiad 2014). Let ABC be a triangle and P be a point in its interior. Let AP meet the circumcircle of ABC again at A' . The points B' and C' are similarly defined. Let O_A be the circumcentre of BCP . The circumcentres O_B and O_C are similarly defined. Let $O_{A'}$ be the circumcentre of $B'C'P'$. The circumcentres $O_{B'}$ and $O_{C'}$ are similarly defined. Prove that the lines $O_AO_{A'}$, $O_BO_{B'}$ and $O_CO_{C'}$ are concurrent.

Exercício 3 (Cono Sur Olympiad 2014). Let $ABCD$ be an inscribed quadrilateral in a circumference with center O such that it lies inside $ABCD$ and $\angle BAC = \angle ODA$. Let E be the intersection of AC with BD . Lines r and s are drawn through E such that r is perpendicular to BC , and s is perpendicular to AD . Let P be the intersection of r with AD , and M the intersection of s with BC . Let N be the midpoint of EO . Prove that M , N , and P lie on a line.

Exercício 4 (European Girls Mathematical Olympiad 2014). Let D and E be points in the interiors of sides AB and AC , respectively, of a triangle ABC , such that $DB = BC = CE$. Let the lines CD and BE meet at F . Prove that the incentre I of triangle ABC , the orthocentre H of triangle DEF and the midpoint M of the arc \widehat{BAC} of the circumcircle of triangle ABC are collinear.

Exercício 5 (Geometrical Olympiad in Honour of I. F. Sharygin 2014). Let ABC be an isosceles triangle with base AB . Line l touches its circumcircle at point B . Let CD be a perpendicular from C to l , and AE , BF be the altitudes of ABC . Prove that D , E , F are collinear.

Exercício 6 (Geometrical Olympiad in Honour of I. F. Sharygin 2014). Given a triangle ABC and an arbitrary point D . The lines passing through D and perpendicular to segments DA , DB , DC meet lines BC , AC , AB at points A_1 , B_1 , C_1 , respectively. Prove that the midpoints of segments AA_1 , BB_1 , CC_1 are collinear.

Exercício 7 (Geometrical Olympiad in Honour of I. F. Sharygin 2014). Let I be the incenter of a circumscribed quadrilateral $ABCD$. The tangents to circle AIC at points A , C meet at point X . The tangents to circle BID at points B , D meet at point Y . Prove that X , I , Y are collinear.

Exercício 8 (Geometrical Olympiad in Honour of I. F. Sharygin 2014). Two circles w_1 and w_2 touch externally at point P . Let A be a point of w_2 not lying on the line through the centers of the circles, and AB , AC be the tangents to w_1 . Lines BP , CP meet w_2 for the second time at points E and F . Prove that line EF , the tangent to w_2 at point A and the common tangent at P concur.

Exercício 9 (Geometrical Olympiad in Honour of I. F. Sharygin 2014). A quadrilateral $KLMN$ is given. A circle with center O meets its side KL at points A and A_1 , side LM at points B and B_1 , etc. Prove that if the circumcircles of triangles KDA , LAB , MBC and NCD concur at point P , then

- a) the circumcircles of triangles KD_1A_1 , LA_1B_1 , MB_1C_1 and NC_1D_1 also concur at some point Q ;
- b) point O lies on the perpendicular bisector to PQ .

Exercício 10 (Indian Regional Mathematical Olympiad 2014). Let D, E and F be the points of contact of the incircle of an acute-angled triangle ABC with BC, CA and AB respectively. Let I_1, I_2 and I_3 be the incentres of the triangles AFE, BDF and CED , respectively. Prove that the lines I_1D, I_2E and I_3F are concurrent.

Exercício 11 (International Tuymaada Olympiad 2014). A parallelogram $ABCD$ is given. The excircle of triangle ABC touches the sides AB at L and the extension of BC at K . The line DK meets the diagonal AC at point X ; the line BX meets the median CC_1 of triangle ABC at Y . Prove that the line YL , median BB_1 of triangle ABC and its bisector CC' have a common point.

Exercício 12 (International Tuymaada Olympiad 2014). The points K and L on the side BC of a triangle ABC are such that $\angle BAK = \angle CAL = 90^\circ$. Prove that the midpoint of the altitude drawn from A , the midpoint of KL and the circumcentre of ABC are collinear.

Exercício 13 (Kürschák/Eötvös Math Competition 2014). We are given an acute triangle ABC , and inside it a point P , which is not on any of the heights AA_1, BB_1, CC_1 . The rays AP, BP and CP intersect the circumcircle of ABC at points A_2, B_2 and C_2 . Prove that the circles AA_1A_2, BB_1B_2 and CC_1C_2 are concurrent.

Exercício 14 (Mediterranean Mathematical Olympiad 2014). In triangle ABC let A', B', C' respectively be the midpoints of the sides BC, CA, AB . Furthermore let L, M, N be the projections of the orthocenter on the three sides BC, CA, AB , and let k denote the nine-point circle. The lines AA', BB', CC' intersect k in the points D, E, F . The tangent lines on k in D, E, F intersect the lines MN, LN, LM in the points P, Q, R . Prove that P, Q and R are collinear.

Exercício 15 (Mexican Mathematical Olympiad 2014). Let Γ_1 be a circle and P a point outside of Γ_1 . The tangents from P to Γ_1 touch the circle at A and B . Let M be the midpoint of PA and let Γ_2 the circle through P, A and B . Line BM cuts Γ_2 at C , line CA cuts Γ_1 at D , segment DB cuts Γ_2 at E and line PE cuts Γ_1 at F , with E in segment PF . Prove that the lines AF, BP , and CE are concurrent.

Exercício 16 (Serbia National Math Olympiad 2014). On sides BC and AC of triangle ABC given are D and E , respectively. Let F ($F \neq C$) be a point of intersection of circumcircle of triangle CED and line that is parallel to AB and passing through C . Let G be a point of intersection of line FD and side AB , and let H be on line AB such that $\angle HDA = \angle GEB$, with A between H and B . If $DG = EH$, prove that point of intersection of AD and BE lie on angle bisector of $\angle ACB$.

Exercício 17 (Singapore Mathematical Olympiad 2014). In the triangle ABC , the excircle opposite to the vertex A with centre I touches the side BC at D (The circle also touches the sides of AB, AC extended). Let M be the midpoint of BC and N the midpoint of AD . Prove that I, M, N are collinear.

Exercício 18 (United States of America Junior Mathematical Olympiad 2014). Let ABC be a triangle with incenter I , incircle γ and circumcircle Γ . Let M, N, P be the midpoints of sides BC, CA, AB and let E, F be the tangency points of γ with CA and AB , respectively. Let U, V be the intersections of line EF with line MN and line MP , respectively, and let X be the midpoint of arc \widehat{BAC} of Γ .

a) Prove that I lies on ray CV .

b) Prove that line XI bisects UV .

Exercício 19 (Vietnamese Math Olympiad 2014). Given a circle (O) and two fixed points B, C on (O) , and an arbitrary point A on (O) such that the triangle ABC is acute. M lies on ray AB , N lies on ray AC such that $MA = MC$ and $NA = NB$. Let P be the intersection of circles (AMN) and (ABC) , with $P \neq A$. If MN intersects BC at Q , prove that A, P and Q are collinear.

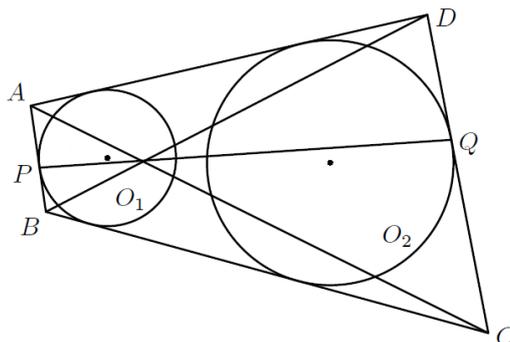
COLETÂNEA 2013

Exercício 20 (Asian Pacific Mathematics Olympiad 2013). Let $ABCD$ be a quadrilateral inscribed in a circle ω , and let P be a point on the extension of AC such that PB and PD are tangent to ω . The tangent at C intersects PD at Q and the line AD at R . Let E be the second point of intersection between AQ and ω . Prove that B, E, R are collinear.

Exercício 21 (Brazilian Olympic Revenge 2013). Let ABC be an acute triangle. K and L are the intersections of the height from B with the circle of diameter AC , with K closer to B than L . Analogously, X and Y are the intersections of the height from C with the circle of diameter AB , with X closer to C than Y . Prove that the intersection of XL and KY lies on BC .

Exercício 22 (British Mathematical Olympiad 2013). Two circles S and T touch at X . They have a common tangent which meets S at A and T at B . The points A and B are different. Let AP be a diameter of S . Prove that B, X and P lie on a straight line.

Exercício 23 (China Girls Math Olympiad 2013). As shown in the figure below, $ABCD$ is a trapezoid, $AB \parallel CD$. The sides DA, AB, BC are tangent to circle O_1 , and AB touches O_1 at P . The sides BC, CD, DA are tangent to circle O_2 , and CD touches O_2 at Q . Prove that the lines AC, BD, PQ meet at the same point.



Exercício 24 (Estonian Mathematical Olympiad 2013). A convex quadrilateral $ABCD$ where $\angle DAB + \angle ABC < 180^\circ$ is given on a plane. Let E be a point different from the vertices of the quadrilateral on the line interval AB such that the circumcircles of triangles AED and BEC intersect inside the quadrilateral $ABCD$ at point F . Point G is defined so that $\angle DCG = \angle DAB$, $\angle CDG = \angle ABC$ and triangle CDG is located outside quadrilateral $ABCD$. Prove that the points E, F and G are collinear.

Exercício 25 (European Mathematical Cup 2013). Given a triangle ABC let D, E, F be orthogonal projections from A, B, C to the opposite sides respectively. Let X, Y, Z denote midpoints of AD, BE, CF respectively. Prove that perpendiculars from D to YZ , from E to XZ and from F to XY are concurrent.

Exercício 26 (Geometrical Olympiad in Honour of I. F. Sharygin 2013). Let X be a point inside triangle ABC such that $XA \cdot BC = XB \cdot AC = XC \cdot AB$. Let I_1, I_2, I_3 be the incenters of triangles XBC, XCA, XAB . Prove that AI_1, BI_2, CI_3 are concurrent.

Exercício 27 (Geometrical Olympiad in Honour of I. F. Sharygin 2013). Let ABC be a right-angled triangle, with $\angle B = 90^\circ$. The excircle inscribed into the angle $\angle A$ touches the extensions of the sides AB, AC at points A_1, A_2 respectively; points C_1, C_2 are defined similarly. Prove that the perpendiculars from A, B, C to C_1C_2, A_1C_1, A_1A_2 respectively, concur.

Exercício 28 (Geometrical Olympiad in Honour of I. F. Sharygin 2013). The incircle of triangle ABC touches the side AB at point C' ; the incircle of triangle ACC' touches the sides AB and AC at points C_1, B_1 ; the incircle of triangle BCC' touches the sides AB and BC at points C_2, A_2 . Prove that the lines B_1C_1, A_2C_2 , and CC' concur.

Exercício 29 (Geometrical Olympiad in Honour of I. F. Sharygin 2013). Let A_1 and C_1 be the tangency points of the incircle of triangle ABC with BC and AB respectively, A' and C' be the tangency points of the excircle inscribed into the angle $\angle B$ with the extensions of BC and AB respectively. Prove that the orthocenter H of triangle ABC lies on A_1C_1 if and only if the lines $A'C_1$ and BA are orthogonal.

Exercício 30 (Geometrical Olympiad in Honour of I. F. Sharygin 2013). Solve the propositions below:

a) The incircle of a triangle ABC touches AC and AB at points B_0 and C_0 respectively. The bisectors of angles $\angle B$ and $\angle C$ meet the perpendicular bisector to the bisector AL in points Q and P respectively. Prove that the lines PC_0, QB_0 , and BC concur.

b) Let AL be the bisector of a triangle ABC . Points O_1 and O_2 are the circumcenters of triangles ABL and ACL respectively. Points B_1 and C_1 are the projections of C and B to the bisectors of angles $\angle B$ and $\angle C$ respectively. Prove that the lines O_1C_1, O_1B_1 , and BC concur.

c) Prove that two points obtained in pp. a) and b) coincide.

Exercício 31 (German Federal Mathematical Competition 2013). Let $ABCDEF$ be a convex hexagon whose vertices lie on a circle. Suppose that $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$. Show that the diagonals AD, BE and CF are concurrent.

Exercício 32 (Gillis Mathematical Olympiad 2013). $ABCDEF$ is a convex hexagon. Inside the hexagon there is a point K , such that $ABCK$ and $DEFK$ are both parallelograms. Show that the lines connecting A, B, C to the midpoints of CE, DF, AE respectively concur.

Exercício 33 (Harvard-MIT Mathematics Tournament 2013). Let points A and B be on circle ω centered at O . Suppose that ω_A and ω_B are circles not containing O which are internally tangent to ω at A and B , respectively. Let ω_A and ω_B intersect at C and D such that D is inside triangle ABC . Suppose that line BC meets ω again at E and let line EA intersect ω_A at F . If $FC \perp CD$, prove that O, C, D are collinear.

Exercício 34 (Hong Kong Mathematical Olympiad 2013). Let ABC be a triangle with $CA > BC > AB$. Let O and H be the circumcentre and orthocentre of triangle ABC respectively. Denote by D and E the midpoints of the arcs \widehat{AB} and \widehat{AC} of the circumcircle of triangle ABC not containing the opposite vertices. Let D' be the

reflection of D about AB and E' the reflection of E about AC . Prove that O, H, D', E' are concyclic if and only if A, D', E' are collinear.

Exercício 35 (Indonesia National Science Olympiad 2013). Let ABC be an acute triangle and ω be its circumcircle. The bisector of $\angle BAC$ intersects ω at [another point] M . Let P be a point on AM and inside triangle ABC . Lines passing P that are parallel to AB and AC intersects BC on E and F respectively. Lines ME, MF intersects ω at points K, L respectively. Prove that AM, BL, CK are concurrent.

Exercício 36 (International Mathematical Olympiad 2013). Let ABC be an acute triangle with orthocenter H , and let W be a point on the side BC , lying strictly between B and C . The points M and N are the feet of the altitudes from B and C , respectively. Denote by ω_1 is the circumcircle of triangle BWN , and let X be the point on ω_1 such that WX is a diameter of ω_1 . Analogously, denote by ω_2 the circumcircle of triangle CWM , and let Y be the point such that WY is a diameter of ω_2 . Prove that X, Y and H are collinear.

Exercício 37 (International Zhautykov Olympiad 2013). Given a trapezoid $ABCD$ ($AD \parallel BC$) with $\angle ABC > 90^\circ$. Point M is chosen on the lateral side AB . Let O_1 and O_2 be the circumcenters of the triangles MAD and MBC , respectively. The circumcircles of the triangles MO_1D and MO_2C meet again at the point N . Prove that the line O_1O_2 passes through the point N .

Exercício 38 (Iranian Mathematical Olympiad 2013). Suppose line ℓ and four points A, B, C, D lies on ℓ . Suppose that circles ω_1 and ω_2 passes through A and B , and that circles ω'_1 and ω'_2 passes through C and D . If $\omega_1 \perp \omega'_1$ and $\omega_2 \perp \omega'_2$ then prove that lines $O_1O'_2, O_2O'_1$ and ℓ are concurrent where O_1, O_2, O'_1 and O'_2 are center of $\omega_1, \omega_2, \omega'_1$ and ω'_2 , respectively.

Exercício 39 (Iranian Mathematical Olympiad 2013). Let ABC be triangle with circumcircle (O) . Let AO cut (O) again at A' . Perpendicular bisector of OA' cut BC at P_A . The points P_B and P_C are defined similarly. Prove that:

a) points P_A, P_B and P_C are collinear;

b) the distance of O from this line is equal to $\frac{R}{2}$, where R is the radius of the circumcircle (O) .

Exercício 40 (Irish Mathematical Olympiad 2013). A, B and C are points on the circumference of a circle with centre O . Tangents are drawn to the circumcircles of triangles OAB and OAC at P and Q respectively, where P and Q are diametrically opposite O . The two tangents intersect at K . The line CA meets the circumcircle of triangle OAB at A and X . Prove that X lies on the line KO .

Exercício 41 (Italian Mathematical Olympiad 2013). ABC is an isosceles triangle with $AB = AC$ and the angle $\angle BAC < 60^\circ$. Let D be a point on AC such that $\angle DBC = \angle BAC$. E is the intersection between the perpendicular bisector of BD and the line parallel to BC passing through A . F is a point on the line AC such that $FA = 2 \cdot AC$ (A is between F and C). Show that:

a) EB and AC are parallel;

b) the perpendicular from F to AB , the perpendicular from E to AC and BD are concurrent.

Exercício 42 (Junior Balkan Mathematical Olympiad 2013). Let ABC be an acute-angled triangle with $AB < AC$ and let O be the centre of its circumcircle ω . Let D be a point on the line segment BC such that

$\angle BAD = \angle CAO$. Let E be the second point of intersection of ω and the line AD . If M, N and P are the midpoints of the line segments BE, OD and AC , respectively, show that the points M, N and P are collinear.

Exercício 43 (Kazakhstan Mathematical Olympiad 2013). Given triangle ABC with incenter I . Let P, Q be point on circumcircle such that $\angle API = \angle CPI$ and $\angle BQI = \angle CQI$. Prove that BP, AQ and OI are concurrent.

Exercício 44 (Korean Mathematical Olympiad 2013). Let O be circumcenter of triangle ABC . For a point P on segment BC , the circle passing through P, B and tangent to line AB and the circle passing through P, C and tangent to line AC meet at point $Q (\neq P)$. Let D, E be foot of perpendicular from Q to AB, AC ($D \neq B, E \neq C$). Two lines DE and BC meet at point R . Prove that O, P, Q are collinear if and only if A, R, Q are collinear.

Exercício 45 (Lusophone Mathematical Olympiad - CPLP 2013). Consider a triangle ABC . Let S be a circumference in the interior of the triangle that is tangent to the sides BC, CA, AB at the points D, E, F respectively. In the exterior of the triangle we draw three circumferences S_A, S_B, S_C . The circumference S_A is tangent to BC at L and to the prolongation of the lines AB, AC at the points M, N respectively. The circumference S_B is tangent to AC at E and to the prolongation of the line BC at P . The circumference S_C is tangent to AB at F and to the prolongation of the line BC at Q . Show that the lines EP, FQ and AL meet at a point of the circumference S .

Exercício 46 (Macedonia Mathematical Olympiad 2013). An arbitrary triangle ABC is given. There are two lines, p and q , that are not parallel to each other and they are not perpendicular to the sides of the triangle. The perpendicular lines through points A, B and C to line p we denote with p_a, p_b, p_c and the perpendicular lines to line q we denote with q_a, q_b, q_c . Let the intersection points of the lines p_a, q_a, p_b, q_b, p_c and q_c with q_b, p_b, q_c, p_c, q_a and p_a are K, L, P, Q, N and M . Prove that KL, MN and PQ intersect in one point.

Exercício 47 (Mathematical Olympiad of Centroamerica and the Caribbean 2013). Let $ABCD$ be a convex quadrilateral and let M be the midpoint of side AB . The circle passing through D and tangent to AB at A intersects the segment DM at E . The circle passing through C and tangent to AB at B intersects the segment CM at F . Suppose that the lines AF and BE intersect at a point which belongs to the perpendicular bisector of side AB . Prove that A, E , and C are collinear if and only if B, F , and D are collinear.

Exercício 48 (Romanian District Olympiad 2013). Given triangle ABC and the points $D, E \in (BC), F, G \in (CA), H, I \in (AB)$ so that $BD = CE, CF = AG$ and $AH = BI$. Note with M, N, P the midpoints of $[GH], [DI]$ and $[EF]$ and with M' the intersection of the segments AM and BC .

a) Prove that
$$\frac{BM'}{CM'} = \frac{AG}{AH} \cdot \frac{AB}{AC}.$$

b) Prove that the segments AM, BN and CP are concurrent.

Exercício 49 (Swiss Mathematical Olympiad 2013). Let $ABCD$ be a circumscribed quadrilateral with $BC > BA$. The point P lies on the segment BC so that $BP = BA$. Show that the bisector of $\angle BCD$, the perpendicular to BC through P and the perpendicular to BD through A intersect at a point.

Exercício 50 (Turkish Mathematical Olympiad 2013). Let ABC be a triangle such that $AC > AB$. A circle tangent to the sides AB and AC at D and E , respectively, intersects the circumcircle of ABC at K and L . Let X and Y be points on the sides AB and AC , respectively, satisfying

$$\frac{AX}{AB} = \frac{CE}{BD+CE} \quad \text{and} \quad \frac{AY}{AC} = \frac{BD}{BD+CE}.$$

Show that the lines XY , BC and KL are concurrent.

COLETÂNEA 2012

Exercício 51 (Bay Area Mathematical Olympiad 2012). Given a segment AB in the plane, choose on it a point M different from A and B . Two equilateral triangles AMC and BMD in the plane are constructed on the same side of segment AB . The circumcircles of the two triangles intersect in point M and another point N . Prove that

a) lines AD and BC pass through point N ;

b) no matter where one chooses the point M along segment AB , all lines MN will pass through some fixed point K in the plane.

Exercício 52 (Brazilian Math Olympiad 2012). Let ABC be a triangle, M the midpoint of the side AC , and N the midpoint of the side AB . Let r and s be the reflections of BM and CN on the line BC , respectively. Let D and E be the intersection of r and s with the line MN , respectively. X and Y are the points of intersection between the circumcircles triangles BDM and CEN respectively, Z is the intersection of BE and CD , and W is the intersection between r and s . Prove that XY , WZ and BC are concurrent.

Exercício 53 (Brazilian Math Olympiad 2012). Let I_A, I_B, I_C the ex-centers of non-isosceles triangle ABC relative to the sides BC, AC, AB , respectively, and X, Y and Z the midpoints of $I_B I_C, I_C I_A$ and $I_A I_B$, respectively. Let D, E, F be the tangency points of incircle of ABC in the sides BC, AC, AB , respectively. Prove that DX, EY, FZ meets a common point in the line IO , with I and O being the incenter and circumcenter of the triangle ABC .

Exercício 54 (Canadian Mathematical Olympiad 2012). Let $ABCD$ be a convex quadrilateral and let P be the point of intersection of AC and BD . Suppose that $AC + AD = BC + BD$. Prove that the internal angle bisectors of $\angle ACB, \angle ADB$ and $\angle APB$ meet at a common point.

Exercício 55 (Chinese Mathematical Olympiad 2012). In an acute-angled triangle ABC , $AB > AC$. M, N are distinct points on side BC such that $\angle BAM = \angle CAN$. Let O_1 and O_2 be the circumcentres of triangles ABC and AMN , respectively. Prove that O_1, O_2 and A are collinear.

Exercício 56 (European Girls Mathematical Olympiad 2012). Let ABC be an acute-angled triangle with circumcircle Γ and orthocentre H . Let K be a point of Γ on the other side of BC from A . Let L be the reflection of K in the line AB , and let M be the reflection of K in the line BC . Let E be the second point of intersection of Γ with the circumcircle of triangle BLM . Show that the lines KH, EM and BC are concurrent.

Exercício 57 (Geometrical Olympiad in Honour of I. F. Sharygin 2012). Three parallel lines passing through the vertices A, B and C of triangle ABC meet its circumcircle again at points A_1, B_1 and C_1 respectively. Points A_2, B_2 and C_2 are the reflections of points A_1, B_1 and C_1 in BC, CA and AB respectively. Prove that the lines AA_2, BB_2 and CC_2 are concurrent.

Exercício 58 (Geometrical Olympiad in Honour of I. F. Sharygin 2012). Consider a triangle ABC . The tangent line to its circumcircle at point C meets line AB at point D . The tangent lines to the circumcircle of triangle ACD at points A and C meet at point K . Prove that line DK bisects segment BC .

Exercício 59 (Geometrical Olympiad in Honour of I. F. Sharygin 2012). A point M lies on the side BC of square $ABCD$. Let X, Y and Z be the incenters of triangles ABM, CMD and AMD respectively. Let H_x, H_y and H_z be the orthocenters of triangles AXB, CYD and AZD respectively. Prove that H_x, H_y and H_z are collinear.

Exercício 60 (Geometrical Olympiad in Honour of I. F. Sharygin 2012). Let BM be the median of right-angled triangle ABC ($\angle B = 90^\circ$). The incircle of triangle ABM touches sides AB, AM in points A_1, A_2 ; points C_1, C_2 are defined similarly. Prove that lines A_1A_2 and C_1C_2 meet on the bisector of angle $\angle ABC$.

Exercício 61 (Geometrical Olympiad in Honour of I. F. Sharygin 2012). Given triangle ABC and point P . Points A', B', C' are the projections of P to BC, CA, AB . A line passing through P and parallel to AB meets the circumcircle of triangle $PA'B'$ for the second time in point C_1 . Points A_1 and B_1 are defined similarly. Prove that

- a) lines AA_1, BB_1, CC_1 concur;
- b) triangles ABC and $A_1B_1C_1$ are similar.

Exercício 62 (Geometrical Olympiad in Honour of I. F. Sharygin 2012). Given triangle ABC . Consider lines l with the next property: the reflections of l in the sidelines of the triangle concur. Prove that all these lines have a common point.

Exercício 63 (Geometrical Olympiad in Honour of I. F. Sharygin 2012). Point D lies on side AB of triangle ABC . Let ω_1 and Ω_1, ω_2 and Ω_2 be the incircles and the excircles (touching segment AB) of triangles ACD and BCD respectively. Prove that the common external tangents to ω_1 and ω_2, Ω_1 and Ω_2 meet on AB .

Exercício 64 (Geometrical Olympiad in Honour of I. F. Sharygin 2012). A circle ω with center I is inscribed into a segment of the disk, formed by an arc and a chord AB . Point M is the midpoint of this arc \widehat{AB} , and point N is the midpoint of the complementary arc. The tangents from N touch ω in points C and D . The opposite sidelines AC and BD of quadrilateral $ABCD$ meet in point X , and the diagonals of $ABCD$ meet in point Y . Prove that points X, Y, I and M are collinear.

Exercício 65 (Greece National Olympiad 2012). Let an acute-angled triangle ABC with $AB < AC < BC$, inscribed in circle $c(O, R)$. The angle bisector AD meets $c(O, R)$ at K . The circle $c_1(O_1, R_1)$ (which passes from A, D and has its center O_1 on OA) meets AB at E and AC at Z . If M, N are the midpoints of ZC and BE respectively, prove that:

- a) the lines ZE, DM, KC are concurrent at one point T .
- b) the lines ZE, DN, KB are concurrent at one point X .
- c) OK is the perpendicular bisector of TX .

Exercício 66 (Indonesia National Science Olympiad 2012). Given a triangle ABC , let the bisector of $\angle BAC$ meet the side BC and circumcircle of triangle ABC at D and E , respectively. Let M and N be the midpoints

of BD and CE , respectively. Circumcircle of triangle ABD meets AN at Q . Circle passing through A that is tangent to BC at D meets line AM and side AC respectively at P and R . Show that the four points B, P, Q and R lie on the same line.

Exercício 67 (International Tuymaada Olympiad 2012). *Quadrilateral $ABCD$ is both cyclic and circumscribed. Its incircle touches its sides AB and CD at points X and Y , respectively. The perpendiculars to AB and CD drawn at A and D , respectively, meet at point U ; those drawn at X and Y meet at point V , and finally, those drawn at B and C meet at point W . Prove that points U, V and W are collinear.*

Exercício 68 (Korean Mathematical Olympiad 2012). *Let w be the incircle of triangle ABC . Segments BC, CA meet with w at points D, E , respectively. A line passing through B and parallel to DE meets w at F and G (F is nearer to B than G). Line CG meets w at H ($\neq G$). A line passing through G and parallel to EH meets with line AC at I . Line IF meets with circle w at J ($\neq F$). Lines CJ and EG meet at K . Let ℓ be the line passing through K and parallel to JD . Prove that ℓ, IF, ED meet at one point.*

Exercício 69 (Macedonia Mathematical Olympiad 2012). *A fixed circle k and collinear points E, F and G are given such that the points E and G lie outside the circle k and F lies inside the circle k . Prove that, if $ABCD$ is an arbitrary quadrilateral inscribed in the circle k , such that the points E, F and G lie on lines AB, AD and DC , respectively, then the side BC passes through a fixed point collinear with E, F and G , independent of the quadrilateral $ABCD$.*

Exercício 70 (Middle European Mathematical Olympiad 2012). *Let K be the midpoint of the side AB of a given triangle ABC . Let L and M be points on the sides AC and BC , respectively, such that $\angle CLK = \angle KMC$. Prove that the perpendiculars to the sides AB, AC and BC passing through K, L and M , respectively, are concurrent.*

Exercício 71 (National Mathematical Olympiad of Singapore 2012). *The incircle with centre I of the triangle ABC touches the sides BC, CA and AB at D, E, F respectively. The line ID intersects the segment EF at K . Prove that A, K, M are collinear, where M is the midpoint of BC .*

Exercício 72 (Polish Mathematical Olympiad 2012). *Let ABC be a triangle with $\angle A = 60^\circ$ and $AB \neq AC$. If I is the incenter and O is the circumcenter of ABC , prove that perpendicular bisector of AI , line OI and line BC have a common point.*

Exercício 73 (Romanian Masters in Mathematics 2012). *Let ABC be a triangle. Let I and O be the incentre and circumcentre of ABC respectively. Let ω_A be the circle through B and C which is tangent to the incircle of the triangle ABC ; the circles ω_B and ω_C are defined similarly. The circles ω_B and ω_C meet at a point A' distinct from A ; the points B' and C' are defined similarly. Prove that the lines AA', BB' and CC' are concurrent at a point on the line IO .*

Exercício 74 (Russian Mathematical Olympiad 2012). *The point E is the midpoint of the segment connecting the orthocentre of the scalene triangle ABC and the point A . The incircle of triangle ABC is tangent to AB and AC at points C' and B' respectively. Prove that point F , the point symmetric to point E with respect to line $B'C'$, lies on the line that passes through both the circumcentre and the incentre of triangle ABC .*

Exercício 75 (Turkish Mathematical Olympiad 2012). Let B and D be points on segments AE and AF respectively. Excircles of triangles ABF and ADE touching sides BF and DE is the same, and its center is I . BF and DE intersects at C . Let $P_1, P_2, P_3, P_4, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ be the circumcenters of triangles $IAB, IBC, ICD, IDA, IAE, IEC, ICF, IFA$ respectively.

a) Show that points P_1, P_2, P_3, P_4 are concyclic and points Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 are concyclic, and denote centers of these circles as O_1 and O_2 , respectively.

b) Prove that O_1, O_2 and I are collinear.

Exercício 76 (United States of America Mathematical Olympiad 2012). Let P be a point in the plane of triangle ABC , and γ a line passing through P . Let A', B', C' be the points where the reflections of lines PA, PB, PC with respect to γ intersect lines BC, AC, AB respectively. Prove that A', B', C' are collinear.

Exercício 77 (Uzbekistan National Olympiad 2012). Given points A, B, C and D lie a circle, and $AC \cap BD = K$. I_1, I_2, I_3, I_4 are the incenters of ABK, BCK, CDK, DKA , respectively. M_1, M_2, M_3, M_4 are midpoints of arcs $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CA}, \widehat{DA}$ respectively. Prove that $M_1 I_1, M_2 I_2, M_3 I_3, M_4 I_4$ are concurrent.

Exercício 78 (Vietnamese Math Olympiad 2012). Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral with circumcentre O , and the pair of opposite sides not parallel with each other. Let $M = AB \cap CD$ and $N = AD \cap BC$. Denote by P, Q, S, T the intersection of the internal angle bisectors of $\angle MAN$ and $\angle MBN, \angle MBN$ and $\angle MCN, \angle MDN$ and $\angle MAN, \angle MCN$ and $\angle MDN$ respectively. Suppose that the four points P, Q, S, T are distinct.

a) Show that the four points P, Q, S, T are concyclic. Find the centre of this circle, and denote it as I .

b) Let $E = AC \cap BD$. Prove that E, O, I are collinear.

COLETÂNEA 2011

Exercício 79 (Austrian Mathematical Olympiad 2011). Two circles k_1 and k_2 with radii r_1 and r_2 touch each outside at point Q . The other endpoints of the diameters through Q are P on k_1 and R on k_2 . We choose two points A and B , one on each of the arcs \widehat{PQ} of k_1 ($PBQA$ is a convex quadrangle). Further, let C be the second point of intersection of the line AQ with k_2 and let D be the second point of intersection of the line BQ with k_2 . The lines PB and RC intersect in U and the lines PA and RD intersect in V . Show that there is a point Z that lies on all of these lines UV .

Exercício 80 (British Mathematical Olympiad 2011). Let ABC be a triangle with $\angle CAB$ a right-angle. The point L lies on the side BC between B and C . The circle ABL meets the line AC again at M and the circle CAL meets the line AB again at N . Prove that L, M and N lie on a straight line.

Exercício 81 (China Girls Math Olympiad 2011). The excircle (O) of triangle ABC , relative of A , touches BC at M . The points D, E lie on the sides AB, AC respectively such that $DE \parallel BC$. The incircle (O_1) of triangle ADE touches DE at N . If $BO_1 \cap DO = F$ and $CO_1 \cap EO = G$, prove that the midpoint of FG lies on MN .

Exercício 82 (China South East Mathematical Olympiad 2011). In triangle ABC , AA_0, BB_0, CC_0 are the angle bisectors, A_0, B_0, C_0 are on sides BC, CA, AB . Draw $A_0A_1 \parallel BB_0, A_0A_2 \parallel CC_0, A_1$ lies on AC, A_2 lies on

AB. The line A_1A_2 intersects BC at A_3 . The points B_3, C_3 are constructed similarly. Prove that A_3, B_3, C_3 are collinear.

Exercício 83 (Chinese Mathematical Olympiad 2011). On the circumcircle of the acute triangle ABC , D is the midpoint of \widehat{BC} . Let X be a point on \widehat{BD} , E the midpoint of \widehat{AX} , and let S lie on \widehat{AC} . The lines SD and BC have intersection R , and the lines SE and AX have intersection T . If $RT \parallel DE$, prove that the incenter of the triangle ABC is on the line RT .

Exercício 84 (Czech-Polish-Slovak Match 2011). In convex quadrilateral $ABCD$, let M and N denote the midpoints of sides AD and BC , respectively. On sides AB and CD are points K and L , respectively, such that $\angle MKA = \angle NLC$. Prove that if lines BD, KM , and LN are concurrent, then $\angle KMN = \angle BDC$ and $\angle LNM = \angle ABD$.

Exercício 85 (Czech-Slovak Mathematical Olympiad 2011). In acute triangle ABC , which is not equilateral, let P denote the foot of the altitude from C to side AB ; let H denote the orthocenter; let O denote the circumcenter; let D denote the intersection of line CO with AB ; and let E denote the midpoint of CD . Prove that line EP passes through the midpoint of OH .

Exercício 86 (Geometrical Olympiad in Honour of I. F. Sharygin 2011). The incircle of right-angled triangle ABC ($\angle B = 90^\circ$) touches AB, BC, CA at points C_1, A_1, B_1 respectively. Points A_2, C_2 are the reflections of B_1 in lines BC, AB respectively. Prove that lines A_1A_2 and C_1C_2 meet on the median of triangle ABC .

Exercício 87 (Geometrical Olympiad in Honour of I. F. Sharygin 2011). The diagonals of trapezoid $ABCD$ meet at point O . Point M of lateral side CD and points P, Q of bases BC and AD are such that segments MP and MQ are parallel to the diagonals of the trapezoid. Prove that line PQ passes through point O .

Exercício 88 (Geometrical Olympiad in Honour of I. F. Sharygin 2011). Given are triangle ABC and line ℓ . The reflections of ℓ in AB and AC meet at point A_1 . Points B_1, C_1 are defined similarly. Prove that lines AA_1, BB_1, CC_1 concur.

Exercício 89 (Geometrical Olympiad in Honour of I. F. Sharygin 2011). On a circle with diameter AC , let B be an arbitrary point distinct from A and C . Points M, N are the midpoints of chords AB, BC , and points P, Q are the midpoints of smaller arcs related to these chords. Lines AQ and BC meet at point K , and lines CP and AB meet at point L . Prove that lines MQ, NP and KL concur.

Exercício 90 (Geometrical Olympiad in Honour of I. F. Sharygin 2011). Let CX, CY be the tangents from vertex C of triangle ABC to the circle passing through the midpoints of its sides. Prove that lines XY, AB and the tangent at point C to the circumcircle of ABC concur.

Exercício 91 (Geometrical Olympiad in Honour of I. F. Sharygin 2011). Given are triangle ABC and line ℓ intersecting BC, CA and AB at points A_1, B_1 and C_1 respectively. Point A' is the midpoint of the segment between the projections of A_1 to AB and AC . Points B' and C' are defined similarly.

a) Prove that A', B' and C' lie on some line ℓ' .

b) Suppose ℓ passes through the circumcenter of triangle ABC . Prove that in this case ℓ' passes through the center of its nine-points circle.

Exercício 92 (German Federal Mathematical Competition 2011). Given a quadrilateral $ABCD$. The midpoint of the diagonal AC is U , the midpoint of the diagonal BD is V . Let S be the midpoint of the line UV . Prove that the lines connecting the midpoints of opposite sides of $ABCD$ intersect at S .

Exercício 93 (Indian National Mathematical Olympiad 2011). Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral inscribed in a circle Γ . Let E, F, G, H be the midpoints of arcs $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{AD}$ of Γ , respectively. Suppose that $AC \cdot BD = EG \cdot FH$. Show that lines AC, BD, EG, FH are all concurrent.

Exercício 94 (International Mathematics Tournament of the Towns 2011). Four perpendiculars are drawn from four vertices of a convex pentagon to the opposite sides. If these four lines pass through the same point, prove that the perpendicular from the fifth vertex to the opposite side also passes through this point.

Exercício 95 (International Tuymaada Olympiad 2011). In a convex hexagon $AC'BA'CB'$, every two opposite sides are equal. Let A_1 denote the point of intersection of BC with the perpendicular bisector of AA' . Define B_1 and C_1 similarly. Prove that A_1, B_1 , and C_1 are collinear.

Exercício 96 (Iranian Mathematical Olympiad 2011). We have four circles in plane such that any two of them are tangent to each other. Connect the tangency point of two circles to the tangency point of two other circles. Prove that these three lines are concurrent.

Exercício 97 (Iranian Mathematical Olympiad 2011). In triangle ABC , X and Y are the tangency points of incircle (with center I) with sides AB and AC , respectively. A tangent line to the circumcircle of triangle ABC (with center O) at point A , intersects the extension of BC at D . If D, X and Y are collinear then prove that D, I and O are also collinear.

Exercício 98 (Iranian Mathematical Olympiad 2011). Given triangle ABC , D is the foot of the external angle bisector of $\angle A$, I its incenter of ABC and I_a its excenter relative to vertex A . Perpendicular from I to DI_a intersects the circumcircle of triangle in A' . Define B' and C' similarly. Prove that AA', BB' and CC' are concurrent.

Exercício 99 (Kazakhstan Mathematical Olympiad 2011). Let w be the circumcircle of triangle ABC with an obtuse angle C and C' symmetric point of point C with respect to AB . M is midpoint of AB . $C'M$ intersects w at N (C' between M and N). Let BC' second crossing point w in F , and AC' again crosses the w at point E . Let K be the midpoint of EF . Prove that the lines AB, CN and KC' are concurrent.

Exercício 100 (Kyrgyzstan Mathematical Olympiad 2011). For a given chord MN of a circle discussed the triangle ABC , whose base is the diameter AB of this circle, which do not intersect the MN , and the sides AC and BC pass through the ends of M and N of the chord MN . Prove that the heights of all such triangles ABC drawn from the vertex C to the side AB , intersect at one point.

Exercício 101 (Mediterranean Mathematical Olympiad 2011). Let D be the foot of the internal bisector of the angle $\angle A$ of the triangle ABC . The straight line which joins the incenters of the triangles ABD and ACD cut AB and AC at M and N , respectively. Show that BN and CM meet on the bisector AD .

Exercício 102 (Mexican Mathematical Olympiad 2011). Let ABC be an acute triangle and Γ its circumcircle. Let ℓ be the line tangent to Γ at A . Let D and E be the intersections of the circumference with center B and radius AB with lines ℓ and AC , respectively. Prove that the orthocenter of ABC lies on line DE .

Exercício 103 (Montenegro National Math Olympiad 2011). In triangle ABC , let the incircle of center O , which touches the sides AB , BC and AC respectively in points E , F and D . The lines AO and CO intersect EF in points N and M respectively. Prove that the center of the circumcircle of triangle OMN , points O and D lie on a straight line.

Exercício 104 (Romanian Stars of Mathematics 2011). Let ABC be an acute-angled triangle with $AB \neq BC$, M the midpoint of AC , N the point where the median BM meets again the circumcircle of ABC , H the orthocentre of ABC , D the point on the circumcircle for which $\angle BDH = 90^\circ$, and K the point that makes $ANCK$ a parallelogram. Prove the lines AC , KH , BD are concurrent.

Exercício 105 (Russian Mathematical Olympiad 2011). Given is an acute angled triangle ABC . A circle going through B and the triangle's circumcenter, O , intersects BC and BA at points P and Q respectively. Prove that the intersection of the heights of the triangle POQ lies on line AC .

Exercício 106 (Russian Mathematical Olympiad 2011). On side BC of parallelogram $ABCD$ (angle $\angle A$ is acute) lies point T so that triangle ATD is an acute triangle. Let O_1 , O_2 , and O_3 be the circumcenters of triangles ABT , DAT , and CDT respectively. Prove that the orthocenter of triangle $O_1O_2O_3$ lies on line AD .

Exercício 107 (Serbia National Math Olympiad 2011). Let H be orthocenter and O circumcenter of an acuted angled triangle ABC . D and E are feet of perpendiculars from A and B on BC and AC respectively. Let OD and OE intersect BE and AD in K and L , respectively. Let X be intersection of circumcircles of triangles HKD and HLE different than H , and M is midpoint of AB . Prove that K , L , M are collinear if and only if X is circumcenter of triangle EOD .

Exercício 108 (Swiss Mathematical Olympiad 2011). Let ABC a triangle with $\angle CAB = 90^\circ$ and L a point on the segment BC . The circumcircle of triangle ABL intersects AC at M and the circumcircle of triangle CAL intersects AB at N . Show that L , M and N are collinear.

Exercício 109 (United States of America Mathematical Olympiad 2011). In hexagon $ABCDEF$, which is nonconvex but not self-intersecting, no pair of opposite sides are parallel. The internal angles satisfy $\angle A = 3 \cdot \angle D$, $\angle C = 3 \cdot \angle F$, and $\angle E = 3 \cdot \angle B$. Furthermore $AB = DE$, $BC = EF$, and $CD = FA$. Prove that diagonals AD , BE , and CF are concurrent.

Exercício 110 (Vietnamese Math Olympiad 2011). Let AB be a diameter of a circle (O) and let P be any point on the tangent drawn at B to (O) . Define $AP \cap (O) = C \neq A$, and let D be the point diametrically opposite to C . If DP meets (O) second time in E , then, prove that AE , BC , PO concur at M .

COLETÂNEA 2010

Exercício 111 (Asian Pacific Mathematics Olympiad 2010). Let ABC be an acute angled triangle satisfying the conditions $AB > BC$ and $AC > BC$. Denote by O and H the circumcentre and orthocentre, respectively, of the triangle ABC . Suppose that the circumcircle of the triangle AHC intersects the line AB at M different from A , and the circumcircle of the triangle AHB intersects the line AC at N different from A . Prove that the circumcentre of the triangle MNH lies on the line OH .

Exercício 112 (Balkan Mathematical Olympiad 2010). Let ABC be an acute triangle with orthocentre H , and let M be the midpoint of AC . The point C_1 on AB is such that CC_1 is an altitude of the triangle ABC . Let H_1 be the reflection of H in AB . The orthogonal projections of C_1 onto the lines AH_1 , AC and BC are P , Q and R , respectively. Let M_1 be the point such that the circumcentre of triangle PQR is the midpoint of the segment MM_1 . Prove that M_1 lies on the segment BH_1 .

Exercício 113 (Baltic Way 2010). Let $ABCD$ be a square and let S be the point of intersection of its diagonals AC and BD . Two circles k, k' go through A, C and B, D ; respectively. Furthermore, k and k' intersect in exactly two different points P and Q . Prove that S lies on PQ .

Exercício 114 (Benelux Mathematical Olympiad 2010). On a line ℓ there are three different points A, B and P in that order. Let a be the line through A perpendicular to ℓ , and let b be the line through B perpendicular to ℓ . A line through P , not coinciding with ℓ , intersects a in Q and b in R . The line through A perpendicular to BQ intersects BQ in L and BR in T . The line through B perpendicular to AR intersects AR in K and AQ in S .

a) Prove that P, T, S are collinear.

b) Prove that P, K, L are collinear.

Exercício 115 (Brazilian Olympic Revenge 2010). Let ABC to be a triangle and Γ its circumcircle. Also, let D, F, G and E , in this order, on the arc \widehat{BC} which does not contain A satisfying $\angle BAD = \angle CAE$ and $\angle BAF = \angle CAG$. Let D', F', G' and E' to be the intersections of AD, AF, AG and AE with BC , respectively. Moreover, X is the intersection of DF' with EG' , Y is the intersection of $D'F$ with $E'G$, Z is the intersection of $D'G$ with $E'F$ and W is the intersection of EF' with DG' . Prove that X, Y and A are collinear, such as W, Z and A . Moreover, prove that $\angle BAX = \angle CAZ$.

Exercício 116 (Chilean Mathematical Olympiad 2010). The sides BC, CA and AB of a triangle ABC are tangent to a circle at points X, Y and Z respectively. Show that the center of this circle is on the line through the midpoints of AX and BC .

Exercício 117 (Geometrical Olympiad in Honour of I. F. Sharygin 2010). A point E lies on the altitude BD of triangle ABC , and $\angle AEC = 90^\circ$. Points O_1 and O_2 are the circumcenters of triangles AEB and CEB ; points F, L are the midpoints of the segments AC and O_1O_2 . Prove that the points L, E, F are collinear.

Exercício 118 (Geometrical Olympiad in Honour of I. F. Sharygin 2010). Points M and N lie on the side BC of the regular triangle ABC (M is between B and N), and $\angle MAN = 30^\circ$. The circumcircles of triangles AMC and ANB meet at a point K . Prove that the line AK passes through the circumcenter of triangle AMN .

Exercício 119 (Geometrical Olympiad in Honour of I. F. Sharygin 2010). A circle touches the sides of an angle with vertex A at points B and C . A line passing through A intersects this circle in points D and E . A chord BX is parallel to DE . Prove that XC passes through the midpoint of the segment DE .

Exercício 120 (Geometrical Olympiad in Honour of I. F. Sharygin 2010). A point B lies on a chord AC of circle ω . Segments AB and BC are diameters of circles ω_1 and ω_2 centered at O_1 and O_2 respectively. These circles intersect ω for the second time in points D and E respectively. The rays O_1D and O_2E meet in a point F , and the rays AD and CE do in a point G . Prove that the line FG passes through the midpoint of the segment AC .

Exercício 121 (Geometrical Olympiad in Honour of I. F. Sharygin 2010). *The incircle of an acute-angled triangle ABC touches AB, BC, CA at points C_1, A_1, B_1 respectively. Points A_2, B_2 are the midpoints of the segments B_1C_1, A_1C_1 respectively. Let P be a common point of the incircle and the line CO , where O is the circumcenter of triangle ABC . Let also A' and B' be the second common points of PA_2 and PB_2 with the incircle. Prove that a common point of AA' and BB' lies on the altitude of the triangle dropped from the vertex C .*

Exercício 122 (Geometrical Olympiad in Honour of I. F. Sharygin 2010). *A cyclic hexagon $ABCDEF$ is such that $AB \cdot CF = 2 \cdot BC \cdot FA$, $CD \cdot EB = 2 \cdot DE \cdot BC$ and $EF \cdot AD = 2 \cdot FA \cdot DE$. Prove that the lines AD, BE and CF are concurrent.*

Exercício 123 (German Federal Mathematical Competition 2010). *Let ABC be an acute-angled triangle with $BC > CA$. M is the midpoint of AB . The perpendicular bisector of segment AB intersects BC at P and CA at Q . If $PR \perp CA$ ($R \in CA$) and $QS \perp BC$ ($S \in BC$), prove that R, S and M are collinear.*

Exercício 124 (Iberoamerican Olympiad 2010). *The circle Γ is inscribed to the scalene triangle ABC . Γ is tangent to the sides BC, CA and AB at D, E and F respectively. The line EF intersects the line BC at G . The circle of diameter GD intersects Γ in R ($R \neq D$). Let P, Q ($P \neq R, Q \neq R$) be the intersections of Γ with BR and CR , respectively. The lines BQ and CP intersect at X . The circumcircle of triangle CDE meets QR at M , and the circumcircle of triangle BDF meet PR at N . Prove that PM, QN and RX are concurrent.*

Exercício 125 (Iberoamerican Olympiad 2010). *Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral whose diagonals AC and BD are perpendicular. Let O be the circumcenter of $ABCD$, K the intersection of the diagonals, $L \neq O$ the intersection of the circles circumscribed to triangles OAC and OBD , and G the intersection of the diagonals of the quadrilateral whose vertices are the midpoints of the sides of $ABCD$. Prove that O, K, L and G are collinear.*

Exercício 126 (Indian Regional Mathematical Olympiad 2010). *Let ABC be a triangle in which $\angle A = 60^\circ$. Let BE and CF be the bisectors of angles $\angle B$ and $\angle C$ with E on AC and F on AB . Let M be the reflection of A in line EF . Prove that M lies on BC .*

Exercício 127 (Indian National Mathematical Olympiad 2010). *Let ABC be an acute-angled triangle with altitude AK . Let H be its ortho-centre and O be its circumcentre. Suppose KOH is an acute-angled triangle and P its circumcentre. Let Q be the reflection of P in the line HO . Show that Q lies on the line joining the midpoints of AB and AC .*

Exercício 128 (Iranian Mathematical Olympiad 2010). *In a triangle ABC , O is the circumcenter and I is the incenter. X is the reflection of I to O . A_1 is foot of the perpendicular from X to BC . B_1 and C_1 are defined similarly. Prove that AA_1, BB_1 and CC_1 are concurrent.*

Exercício 129 (Iranian Mathematical Olympiad 2010). *In a triangle ABC , $\angle C = 45^\circ$. AD is the altitude of the triangle. X is on AD such that $\angle XBC = 90 - \angle B$ (X is in the triangle). AD and CX cut the circumcircle of ABC in M and N respectively. If tangent to circumcircle of ABC at M cuts AN at P , prove that P, B and O are collinear.*

Exercício 130 (Korean Mathematical Olympiad 2010). *Let I be the incenter of triangle ABC . The incircle touches BC, CA, AB at points P, Q, R . A circle passing through B, C is tangent to the circle I at point X , a*

circle passing through C , A is tangent to the circle I at point Y , and a circle passing through A , B is tangent to the circle I at point Z , respectively. Prove that three lines PX , QY , RZ are concurrent.

Exercício 131 (Korean Mathematical Olympiad 2010). Let $ABCD$ be a cyclic convex quadrilateral. Let E be the intersection of lines AB , CD . P is the intersection of line passing B and perpendicular to AC , and line passing C and perpendicular to BD . Q is the intersection of line passing D and perpendicular to AC , and line passing A and perpendicular to BD . Prove that three points E , P , Q are collinear.

Exercício 132 (Korean Mathematical Olympiad 2010). Given is a trapezoid $ABCD$ where AB and CD are parallel, and A , B , C , D are clockwise in this order. Let Γ_1 be the circle with center A passing through B , Γ_2 be the circle with center C passing through D . The intersection of line BD and Γ_1 is P ($P \neq B$, and $P \neq D$). Denote by Γ the circle with diameter PD , and let Γ and Γ_1 meet at X ($X \neq P$). Γ and Γ_2 meet at Y . If the circumcircle of triangle XY and Γ_2 meet at Q , prove that B , D , Q are collinear.

Exercício 133 (Kürschák/Eötvös Math Competition 2010). Consider a triangle ABC , with the points A_1 , A_2 on side BC ; B_1 , B_2 on side AC ; C_1 and C_2 on side AB such that $AC_1 < AC_2$, $BA_1 < BA_2$, $CB_1 < CB_2$. Let the circles AB_1C_1 and AB_2C_2 meet at A and A' . Similarly, let the circles BC_1A_1 and BC_2A_2 intersect at $B' \neq B$, let CA_1B_1 and CA_2B_2 intersect at $C' \neq C$. Prove that the lines AA' , BB' , CC' are concurrent.

Exercício 134 (Mexican Mathematical Olympiad 2010). Let γ_1 and γ_2 be two circles externally tangent at a point A . A line tangent to γ_1 at B intersects γ_2 at C and D ; then the segment AB is extended to intersect γ_2 at a point E . Let F be the midpoint of \widehat{CD} that does not contain E , and let H be the intersection of BF with γ_2 . Show that CD , AF , and EH are concurrent.

Exercício 135 (Middle European Mathematical Olympiad 2010). We are given a cyclic quadrilateral $ABCD$ with a point E on the diagonal AC such that $AD = AE$ and $CB = CE$. Let M be the center of the circumcircle k of the triangle BDE . The circle k intersects the line AC in the points E and F . Prove that the lines FM , AD and BC meet at one point.

Exercício 136 (Polish Mathematical Olympiad 2010). In the convex pentagon $ABCDE$ all interior angles have the same measure. Prove that the perpendicular bisector of segment EA , the perpendicular bisector of segment BC and the angle bisector of $\angle CDE$ intersect in one point.

Exercício 137 (Romania District Olympiad 2010). A right that passes through the incircle I of the triangle ABC intersects the side AB and CA in P and Q , respectively. We denote $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ and $\frac{PB}{PA} = p$, $\frac{QC}{QA} = q$. If $a^2 = 4bc pq$, prove that the rights AI , BQ and CP are concurrents.

Exercício 138 (Romanian Masters In Mathematics 2010). Let $A_1A_2A_3A_4$ be a quadrilateral with no pair of parallel sides. For each $i = 1, 2, 3, 4$, define ω_i to be the circle touching the quadrilateral externally, and which is tangent to the lines $A_{i-1}A_i$, A_iA_{i+1} and $A_{i+1}A_{i+2}$ (indices are considered modulo 4 so $A_0 = A_4$, $A_5 = A_1$ and $A_6 = A_2$). Let T_i be the point of tangency of ω_i with the side A_iA_{i+1} . Prove that the lines A_1A_2 , A_3A_4 and T_2T_4 are concurrent if and only if the lines A_2A_3 , A_4A_1 and T_1T_3 are concurrent.

Exercício 139 (Russian Mathematical Olympiad 2010). Lines tangent to circle O in points A and B , intersect in point P . Point Z is the center of O . On the minor arc \widehat{AB} , point C is chosen not on the midpoint of the arc.

Lines AC and PB intersect at point D . Lines BC and AP intersect at point E . Prove that the circumcentres of triangles ACE , BCD , and PCZ are collinear.

Exercício 140 (Russian Mathematical Olympiad 2010). Into triangle ABC gives point K lies on bisector of $\angle BAC$. Line CK intersect circumcircle ω of triangle ABC at $M \neq C$. Circle Ω passes through A , touch CM at K and intersect segment AB at $P \neq A$ and ω at $Q \neq A$. Prove, that P, Q, M lies at one line.

Exercício 141 (Russian Mathematical Olympiad 2010). Quadrilateral $ABCD$ is inscribed into circle ω , AC intersect BD in point K . Points M_1, M_2, M_3, M_4 are the midpoints of arcs $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DA}$ respectively. Points I_1, I_2, I_3, I_4 are the incenters of triangles ABK, BCK, CDK, DAK respectively. Prove that lines $M_1I_1, M_2I_2, M_3I_3, M_4I_4$ all intersect in one point.