Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

Construção de mosaicos inspirados nas obras de Maurits Cornelis Escher.

Emerson Teixeira de Andrade

Emerson Teixeira de Andrade

Construção de mosaicos inspirados nas obras de Maurits Cornelis Escher.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Rui Seimetz.

Brasília

2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

TEIXEIRA DE ANDRADE, EMERSON
TEM53c Construção de mosaicos inspirados nas obras de Maurits Cornelis Escher. / EMERSON TEIXEIRA DE ANDRADE; orientador RUI SEIMETZ. -- Brasília, 2015.
139 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2015.

1. Mosaicos inspirados nas obras de Maurits Cornelis Escher.. 2. Ladrilhamentos com polígonos regulares. I. SEIMETZ, RUI, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciêncis Exatas
Departamento de Matemática

Construção de mosaicos inspirados nas obras de Maurits Cornelis Escher.

por

Emerson Teixeira de Andrade*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – para obtenção do grau de

MESTRE

Brasília, 19 de junho de 2015.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Rui Seimetz – MAT/UnB (Orientador)

Prof. Dr. Guy Grebot – MAT/UnB

Prof. Dr. Antonio Luiz de Melo – FUP/UnB

* O autor foi bolsista CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Emerson Teixeira de Andrade graduou-se em matemática pela UnB – Universidade de Brasília em 2001. É servidor público desde 2000. Atua como professor de matemática na rede pública de ensino do Distrito Federal na região administrativa do Guará. Trabalhou com alunos de ensino médio e fundamental também na Samambaia e na Ceilândia.

À minha família.

Agradecimentos

Agradeço a Deus e Nossa Senhora que estavam sempre presentes em minhas orações, Aos meus pais Averaldo Teixeira de Andrade e Maria Esther Teixeira, aos meus filhos Igor da Costa Teixeira de Andrade e Enzo Rodrigues Teixeira de Andrade, aos meus irmãos Evaldo César Teixeira de Andrade, Érica Maria Teixeira de Andrade e Mônica Maria dos Santos pelo carinho e apoio, ao meu orientador Professor Doutor Rui Seimetz que sempre acreditou na minha capacidade,ao Professor Guy Grebot que na reta final foi imprescindível na conclusão do trabalho à minha mulher Camila Maria de Oliveira e meu enteado Vinícius que me proporcionaram a tranquilidade exigida para cumprir essa tarefa árdua do Mestrado. Agradeço aos meus amigos do mestrado em especial Gustavo Candeia, Ulysses e Emmanoel que sempre se dispuseram a estudar em grupo e graças a eles e aos demais colegas não abandonei o curso nos momentos mais difíceis.

“Eu não cresço. Dentro de mim está a criança da minha infância.” (M.C. Escher)

Resumo

Diante do aumento da falta de interesse em estudar matemática por parte de alunos do ensino básico, o autor se viu necessitado em desenvolver algo que fizesse com que os alunos percebessem alguns conceitos básicos de geometria e sua relação com a arte, bem como mostrar diversas aplicações no cotidiano.

Este trabalho tem como base a construção de tipos de mosaicos que podem ser obtidos com polígonos regulares e mostrar como fazer figuras abstratas auto encaixáveis a partir destes mosaicos.

Serão exibidos trabalhos práticos realizados pelo autor em escolas públicas do Distrito Federal nos últimos 15 anos que foram devidamente registrados e avaliados com o rigor matemático adequado, visando sempre uma interligação entre os conteúdos dados em sala de aula e as práticas sugeridas nos trabalhos concretos.

Por fim, serão mostradas técnicas utilizadas por MC Escher para a construção de mosaicos a partir dos mesmos polígonos regulares e a possibilidade de fazê-los a partir de mosaicos constituídos de polígonos regulares diferentes.

Palavras-chave

Mosaicos, Escher, Auto Encaixáveis, Polígonos Regulares, Trabalhos práticos .

Abstract

Given the increasing lack of interest in studying mathematics by elementary school students, the author found himself in need to develop a text that would make the students realize and understand some basic concepts of geometry and its relation to art, as well as display various applications in real world. This work is based on the construction of types of tiles that can be built with regular polygons and show how to make abstract figures self dockable from these mosaics. We show practical work that the author applied in public schools in Brasília Distrito Federal for the past 15 years. They have been properly recorded and evaluated with the appropriate mathematical rigidity, always seeking a connection between the content data in the classroom and the practices suggested in concrete work. Finally they will be shown the techniques used by MC Escher for building mosaics from the same regular polygons and the possibility of getting them from different regular polygons made up of mosaics.

Keywords

Mosaics, Escher, Auto Interlocking, Regular Polygons, Practical work.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

Convencer que a matemática é importante e que tudo que o aluno aprende em sala de aula será utilizado na sua vida pode parecer utopia mas com um pouco de criatividade e paixão esse desejo pode ser realizado.

Uma maneira de tornar a matemática mais palpável é trabalhar com geometria de forma concreta e fazer com que os alunos não só vejam com os olhos mas sintam com as mãos o que se aprende dos conteúdos escritos no quadro negro.

Este trabalho tem como objetivo o estudo de polígonos regulares, as medidas de seus ângulos internos e as possibilidades de usá-los na construção de um mosaico.

Serão mostrados neste trabalho diferentes maneiras de se encaixar polígonos regulares num ladrilhamento.

Para tanto organizou-se o trabalho em onze capítulos. Nos capítulos 1 e 2 abordam-se os conceitos e conteúdos de ladrilhamentos (formas de recobrir uma superfície no plano).

No capítulo 3 tem-se uma breve explicação do conceito de isometria no plano e suas aplicações.

No capítulo 4 os tipos de polígonos regulares que podem se encaixar são obtidos de acordo com os valores de seus ângulos internos.

No capítulo 5 serão mostrados trabalhos práticos realizados com alunos de ensino básico em escolas da rede pública do Distrito Federal.

No capítulo 6 tem-se uma breve biografia do artista holandês MC Escher no período que ele trabalhou os mosaicos a partir de polígonos regulares.

No capítulo 7 técnicas usadas por Escher são mostradas e explicadas passo a passo através das isometrias no plano.

No capítulo 8 mostra-se que as técnicas utilizadas por Escher são facilmente aplicáveis em trabalhos práticos com alunos de ensino básico.

No capítulo 9 apresenta-se construções diferentes das aplicadas por Escher em mosaicos constituídos por polígonos diferentes.

No capítulo 10 uma sequência didática de prática em sala de aula é proposta aos professores de matemática ou de arte utilizando os conceitos desenvolvidos neste trabalho.

No capítulo 11 tem-se as considerações finais onde as vantagens de se trabalhar estes mosaicos fortalece o aprendizado do aluno e o estímulo em aprender matemática.

Capítulo 1

Figuras auto encaixáveis

1.1 Ladrilhamento com quadrados, triângulos e hexágonos.

Ladrilhamento está muito presente no dia a dia das pessoas. Basta dar uma olhada para o chão do banheiro do seu apartamento por exemplo.

Sabe-se que em geral os revestimentos usados na construção civil são constituídos de cerâmica pré-moldada com uma camada de louça ou porcelanato que melhora a impermeabilização.

Fazer um piso ou parede inteiramente desta forma seria muito dispendioso e por isso pensou-se em realizá-lo por partes através de peças planas em forma de polígonos.

O mais comum é a forma quadrada ou retangular por ser de mais fácil construção e corte, mas não é muito incomum ver outros tipos de polígono nestas construções.

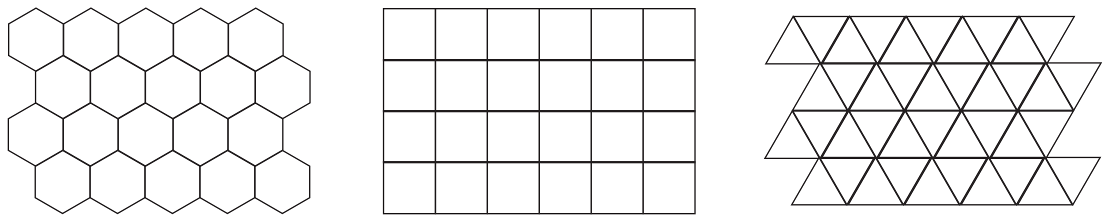
Outra forma comum de se juntar polígonos numa superfície plana é por meio de triângulos equiláteros.

O ladrilhamento então seria a montagem destas peças planas de forma que elas fechassem qualquer superfície plana determinada, ou seja, sem superposição ou buracos. O foco deste trabalho é ladrilhamento periódico. Existe bibliografia a respeito de ladrilhamento aperiódico.(SALLUM,2007).

Um outro exemplo clássico de ladrilhamento além dos quadrados, triângulos e retângulos é a colmeia de abelha, que é constituída de hexágonos.

Definição 1.1. *Ladrilhamento é a justaposição de peças planas de forma que não haja superposição ou buracos. (SALLUM,2007)*

Na figura 1.1 têm-se exemplos de ladrilhamentos.



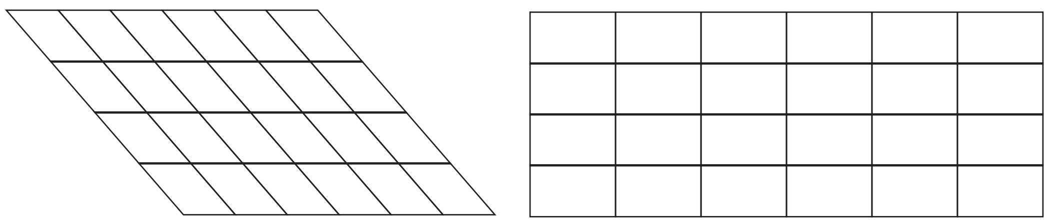
Ladrilhamento com hexágonos — Ladrilhamento com quadrados — Ladrilhamento com triângulos

Figura 1.1 Tipos comuns de ladrilhos

1.2 Variações de ladrilhamentos comuns.

Utilizando-se os conceitos vistos na seção anterior pode-se notar com facilidade que é possível "montar"estes ladrilhos de formas diferentes utilizando outros polígonos.

Em relação ao quadrado por exemplo, realizando um esticamento, ou seja, variando o tamanho de seus lados ou de seus ângulos de forma que o quadrilátero obtido continue com dois pares de lados paralelos, obtêm-se um retângulo, losango ou paralelogramo conforme figura 1.2.



Ladrilhamento com paralelogramos — Ladrilhamento com retângulos

Figura 1.2 Outras variações de ladrilhos

O que se aborda neste trabalho é quais tipos de peças planas poderíamos ter nestes ladrilhamentos e qual a justificativa matemática para eles existirem, bem como as possibilidades de se ter figuras abstratas construídas a partir de polígonos regulares.

Capítulo 2

Polígonos regulares com um vértice comum.

2.1 Triangularização de polígono regular.

Antes de se pensar em juntar polígonos regulares é preciso conhecer as medidas dos ângulos internos dos mesmos e para isso será usado o fato de que para cada polígono com n lados é possível dividi-lo em $(n-2)$ triângulos, dividindo estes polígonos a partir de segmentos traçados saindo de um vértice qualquer fixo e terminando nos outros vértices, onde cada segmento unindo os vértices é único e está no interior do polígono. Essa técnica chamada de triangularização será usada para calcular a soma dos ângulos internos de um polígono qualquer com n lados conforme figura 2.1.

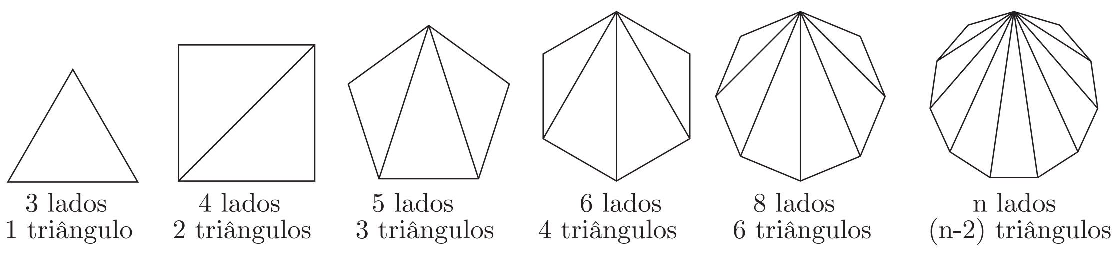


Figura 2.1 Triangularização de polígonos

Portanto se um polígono tem n lados ele terá $(n-2)$ triângulos e como a soma dos ângulos internos de cada triângulo é $180°$ o valor da soma destes ângulos internos deste polígono será encontrado pelo produto destes valores, ou seja: $180(n-2)$, mas como trata-se de polígonos regulares a medida de cada ângulo interno será obtida pelo quociente dessa soma pela quantidade de lados (vértices) deste polígono. O ângulos internos de um polígono regular com n lados então é dado por $\dfrac{180(n-2)}{n}$

Na tabela 2.1 têm-se alguns exemplos de polígonos regulares e seus respectivos nomes quanto as suas respectivas medidas de seus ângulos internos.

Polígono com n lados	ângulo interno (graus)	Polígono com n lados	ângulo interno (graus)
3	60	23	3780/23
4	90	24	165
5	108	25	828/5
6	120	26	2160/13
7	900/7	27	500/3
8	135	28	1170/7
9	140	29	4860/29
10	144	30	168
11	1620/11	31	5220/31
12	150	32	675/4
13	1980/13	33	5580/33
14	1080/7	34	2880/17
15	156	35	1188/7
16	315/2	36	170
17	2700/17	37	6300/37
18	160	38	3240/19
19	3060/19	39	6660/39
20	162	40	171
21	3420/21	41	7020/41
22	1800/11	42	1200/7

Tabela 2.1 Ângulos internos de alguns polígonos

Na tabela 2.2 têm-se os nomes de alguns polígonos regulares quanto à quantidade de lados. Observe que seus nomes tem origem na língua grega.

Polígono	Nome	Polígono	Nome
3	Triângulo	23	Icosakaitrigono
4	Quadrado	24	Icosakaitetragono
5	Pentágono	25	Icosakaipentágono
6	Hexágono	26	Icosakaihexágono
7	Heptágono	27	Icosakaiheptágono
8	Octógono	28	Icosakaioctógono
9	Eneágono	29	Icosakaieneágono
10	Decágono	30	Triacontágono
11	Umdecágono	31	Triacontakaihenágono
12	Dodecágono	32	Triacontakaidigono
13	Tridecágono	33	Triacontakaitrigono
14	Tetradecágono	34	Triacontakaitetragono
15	Pentadecágono	35	Triacontakaipentágono
16	Hexadecágono	36	Triacontakaihexágono
17	Heptadecágono	37	Triacontakaiheptágono
18	Octodecágono	38	Triacontakaioctógono
19	Eneadecágono	39	Triacontakaieneágono
20	Icoságono	40	Tetracontágono
21	Icosakaihenágono	41	Tetracontakaihenágono
22	Icosakaidigono	42	Tetracontakaidigono

Tabela 2.2 Nomes de alguns polígonos

Um ladrilhamento em uma superfície plana só é possível se a soma dos ângulos internos dos polígonos que se encontram em um vértice for de 360°.

De início tem-se a junção de 3 polígonos regulares, já que não seria possível fazê-lo com 2 pois um deles teria que ter um ângulo interno maior que 180° (absurdo).

Pode-se também fazer essa junção com 4 polígonos mas isso só será mostrado posteriormente no capítulo 4.

Vamos denotar por F um polígono de x lados ou ângulos congruentes Exemplo: para $x = 5$ tem-se um pentágono F em que um ângulo interno mede 108°.

Os valores de um ângulo interno de dois polígonos com x lados e y lados, respectivamente, serão: $\dfrac{180(x-2)}{x}$ e $\dfrac{180(y-2)}{y}$ e o objetivo é encontrar uma relação direta entre essas duas incógnitas já que a terceira será fixada.

Capítulo 3

Isometria no plano.

Neste capítulo será usado como referência (LIMA,1996) para descrever as isometrias no plano.

3.1 O que é isometria no plano?

A isometria entre dois planos Π e Π' é uma função $T : \Pi \longrightarrow \Pi'$ que preserva distâncias. Isso significa que, para quaisquer pontos X, $Y \in \Pi$, pondo $X' = T(X)$ e $Y' = T(Y)$, tem-se: $d(X', Y') = d(X, Y)$.

Toda isometria $T : \Pi \longrightarrow \Pi'$ transforma retas em retas e consequentemente segmentos de reta em segmentos de reta.

Além disso toda isometria no plano transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares, toda isometria é uma bijeção e sua inversa ainda é uma isometria.

As demonstrações detalhadas das informações acima estão na referência (LIMA,1996), [5] páginas 13-15.

Usando os fatos acima, para duas retas r e s contidas em Π, x e y pontos em r, a imagem de um segmento de reta $XY \subset r$ pela isometria $T : r \to s$ é o segmento de reta $X'Y' \subset s$, onde $X' = T(X)$ e $Y' = T(Y)$. Portanto dado $Z \in r$ tem-se $Z' = T(Z)$.

Com isso: $Z \in XY \Leftrightarrow \overline{XY} = \overline{XZ} + \overline{ZY} \Leftrightarrow \overline{X'Y'} = \overline{X'Z'} + \overline{Z'Y'} \Leftrightarrow Z' \in X'Y'$.

Isso mostra que a isometria T leva segmento em segmento.

Existem quatro tipos de isometria no plano: Translação, Rotação, Reflexão e Reflexão com deslizamento.

3.2 Translação.

Sejam A e B pontos distintos do plano Π. Uma translação $T_{AB} : \Pi \to \Pi$ é uma função onde um dado $X \in \Pi$ tem como imagem $X' = T(X)$, sendo este último o quarto vértice de um paralelogramo $ABXX'$ com AB e AX lados não colineares.

Salientamos que a translação T_{AB} não possui pontos fixos. De fato, para todo ponto X em Π, com $T(X) = X'$, tem-se que a distância de $d(X, X')$=$d(A, B)$.

A translação $T_{AB} : \Pi \to \Pi$ é uma isometria. Para justificar essa afirmação, sejam dois pontos quaisquer A,$B \in \Pi$ e suas imagens $X = T_{AB}(A)$, $X' = T_{AB}(B)$. Se a reta r que contém A e B é paralela ou igual à reta s que contém X e X' então T_{AB}, restrita à r, é a translação $T_{XX'} : s \to s$, logo a $d(X, X') = d(A, B)$. Se r não é paralela ou igual a s então AX e BX' são lados opostos de um paralelogramo, logo o mesmo ocorre com AB e XX'. Segue que a $d(X, X') = d(A, B)$.

Da igualdade dos segmentos $\overline{XX'}$ e $\overline{AB}$, ou seja, $\overline{XX'} = \overline{AB}$, tem-se que o percurso de A para X será o mesmo de B para X' mantendo a direção e o sentido de um vetor $\vec{v}$ paralelo ao segmento AX conforme figura 3.1.

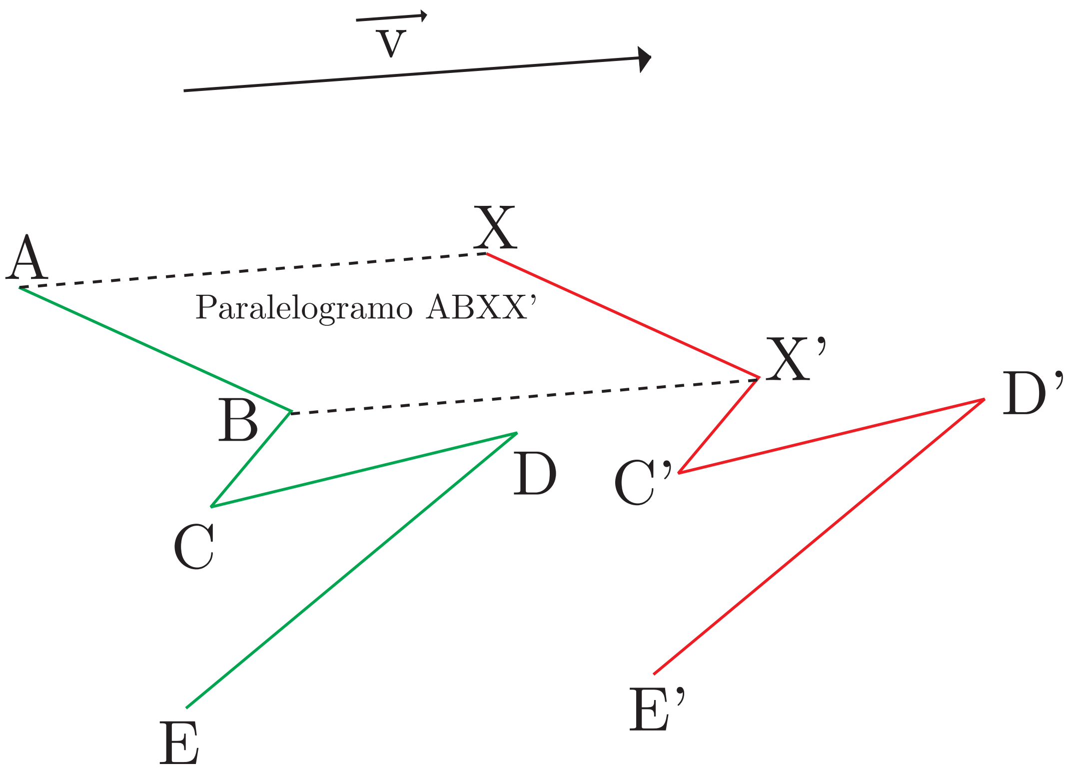


Figura 3.1 Translação da curva "verde" em relação ao vetor v

Ao leitor interessado em mais detalhes sobre translação vide (LIMA,1996), [5].

3.3 Rotação.

Seja O um ponto no plano Π e $\alpha=$ XÔX' um ângulo com origem em O. A rotação do ângulo α em torno do ponto O é a função $\rho_{O,\alpha} : \Pi \to \Pi$ onde $\rho_{O,\alpha}(O) = O$ e para qualquer ponto $A \neq O$ em Π tem-se $\rho_{O,\alpha}(A) = A'$ onde A' é um ponto de Π tal que $d(A, O) = d(A', O)$ e $\alpha =$ AÔA'.

O sentido de rotação de X para X' é o mesmo de A para A'. Na figura 3.2 tem-se uma rotação com sentido horário.

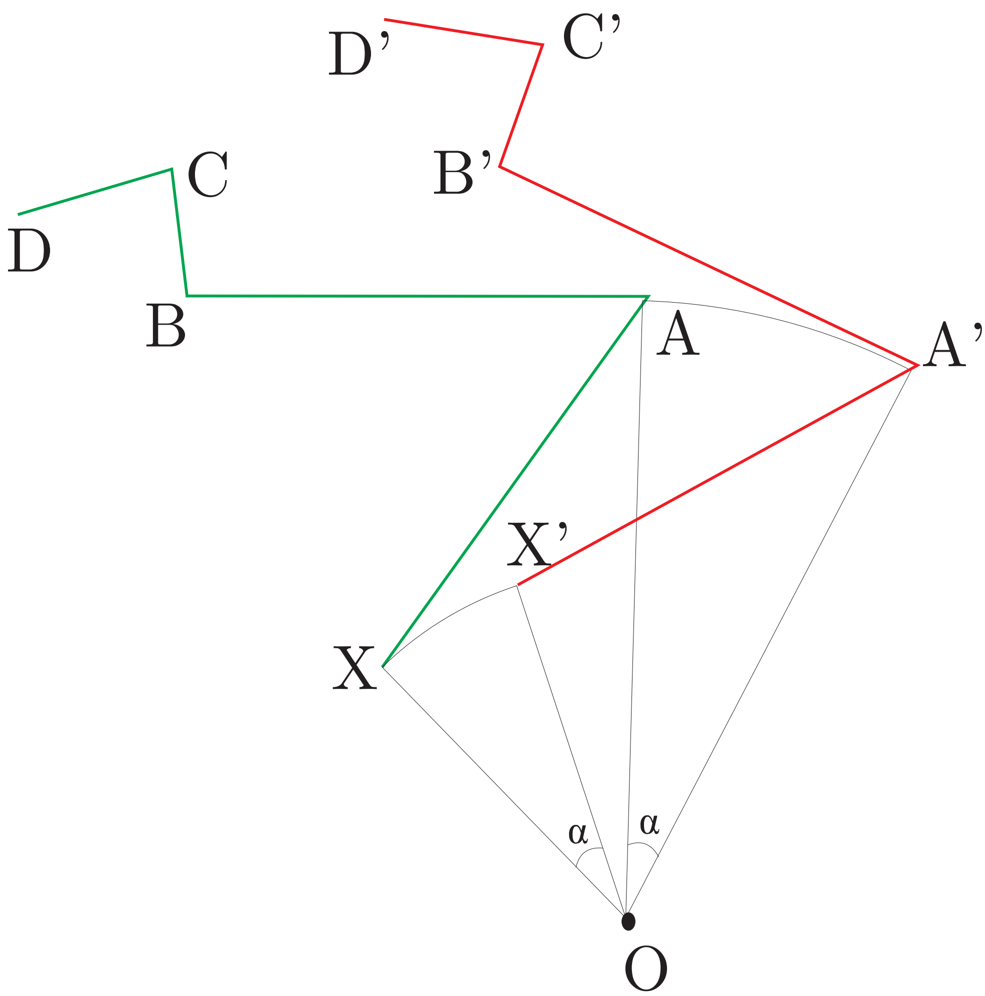


Figura 3.2 Rotação da curva "verde" em relação ao ângulo α

3.4 Reflexão.

Seja r uma reta no plano Π. A reflexão no plano em torno da reta r é a função $R_r : \Pi \to \Pi$ de forma que $R_r(X) = X$ para todo $X \in r$ e para $X \notin r$ tem-se $R_r(X) = X'$ de forma que a mediatriz do segmento XX' é a reta r.

Uma reflexão R_r é uma isometria. A demonstração deste fato está em (LIMA,1996) páginas 16-18.

Na figura 3.3 tem-se uma reflexão em torno de uma reta r. .

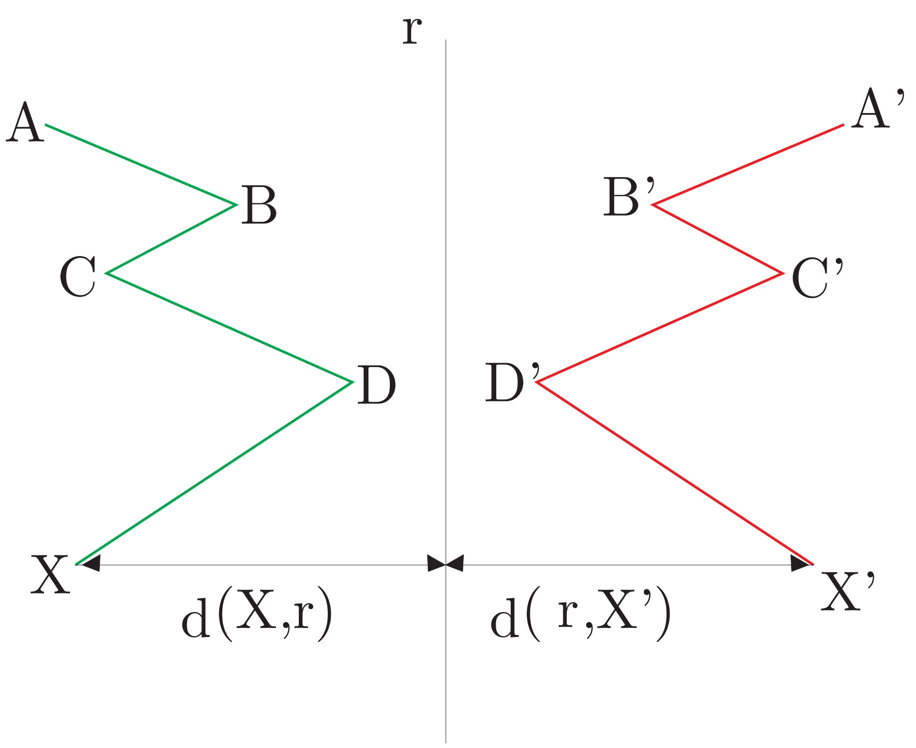


Figura 3.3 Reflexão da curva "verde" em relação a reta r

3.5 Reflexão com deslizamento.

A reflexão com deslizamento nada mais é que a composição de uma Reflexão com uma Translação e não será abordada neste trabalho.

O leitor interessado encontrará uma abordagem detalhada deste assunto em (LIMA,1996-página 23). Na mesma referência o leitor tem estudos detalhados de isometrias próprias e impróprias no plano, além de composição de isometrias no plano.

Capítulo 4

Polígonos regulares que se encaixam num vértice.

Para haver um encaixe perfeito entre polígonos é preciso que a soma dos ângulos internos destes polígonos seja $360°$ como no caso dos ladrilhos quadráticos que era constituido de quatro quadrados com ângulos internos de $90°$ cada totalizando assim $360°$.

Em 2.1 foi mencionado que seria impossível encaixar dois polígonos apenas, pois cada um teria que ter $180°$ como ângulo interno para que a soma destes ângulos num vértice fosse $360°$.

A ideia agora é verificar quais os polígonos poderiam ser encaixados em torno de um único vértice usando três polígonos regulares.

Fixa-se então um polígono e encontra-se uma relação direta entre os outros dois polígonos que terão x e y lados, respectivamente.

Recordamos que um polígono regular com x lados tem ângulo interno com medida igual a $\dfrac{180(x-2)}{x}$ graus e de y lados tem o ângulo interno medindo $\dfrac{180(y-2)}{y}$ graus.

4.1 Utilizando três polígonos em torno de um vértice fixando um triângulo equilátero

A medida de um ângulo interno de x lados será somado a medida de um ângulo interno de y lados mais a medida de um ângulo interno de um polígono regular fixo F de forma que o resultado desta soma seja 360°.

$$\frac{180(x-2)}{x}+\frac{180(y-2)}{y}+F=360$$

De início será fixado um triângulo regular (equilátero) pois é o polígono com menor quantidade de ângulos conhecido e cujo ângulo interno é de 60°. Teremos então:

$$\frac{180(x-2)}{x}+\frac{180(y-2)}{y}+60=360$$
$$\frac{6xy-6y-6x}{xy}=\frac{5xy}{xy}$$
$$xy-6y-6x=0$$
$$xy-6y=6x$$
$$y(x-6)=6x$$
$$y=\frac{6x}{x-6}$$

Na equação anterior, x e y são as quantidades de lados de cada polígono. Assim são números inteiros e positivos e portanto y deverá ser maior ou igual a 7 e x maior que 6.

Assim:

$$\frac{6x}{x-6}\geq 7$$

Dessa forma:

$$6x\leq 7(x-6)$$
$$x\leq 42$$

Portanto

$$6<x\leq 42$$

Analisando estes valores numa planilha eletrônica tem-se as seguintes possibilidades.

x	y	Triângulo
7	42	3
8	24	3
9	18	3
10	15	3
11	66/5	3
12	12	3
13	78/7	3
14	21 /2	3
15	10	3
16	48/5	3
17	102/11	3
18	9	3
19	114/13	3
20	60/7	3
21	126/15	3
22	33/4	3
23	138/17	3
24	8	3
25	150/19	3
26	39/5	3
27	162/21	3

x	y	Triângulo
28	84/11	3
29	174/23	3
30	15/2	3
31	186/25	3
32	96/13	3
33	198/27	3
34	51/7	3
35	210/29	3
36	108/15	3
37	222/31	3
38	57/8	3
39	234/33	3
40	120/17	3
41	246/35	3
42	7	3

7	42	3
8	24	3
9	18	3
10	15	3
12	12	3

Combinações possíveis para haver o encaixe

Tabela 4.1 Fixando um triângulo na justaposição de três polígonos

Da tabela 4.1. percebe-se que as combinações se repetem e serão considerados apenas os resultados que compõem o encaixe de três polígonos regulares em torno de apenas um vértice.

Na próxima seção veremos todas as possibilidades de se encaixar três polígonos regulares onde um deles é um triângulo equilátero.

4.1.1 Encaixando heptágono, tetracontakaidigono e triângulo.

O primeiro caso a ser analisado é o caso 7-42-3, onde o "7"representa um heptágono, o "42"representa um tetracontakaidigono e o "3"representa um triângulo equilátero.

Depois de ter estes polígonos encaixados a pergunta é se eles podem ser expandidos, ou seja, a superfície plana a ser coberta com estes polígonos não tem espaços vazios entre eles pois a soma dos ângulos internos dos polígonos que se encaixam em um vértice deverá ser sempre igual a 360°.

Na figura 4.1 tem-se o encontro destes três polígonos e a representação no plano do resultado e a tentativa de se expandir este mosaico por toda superfície plana.

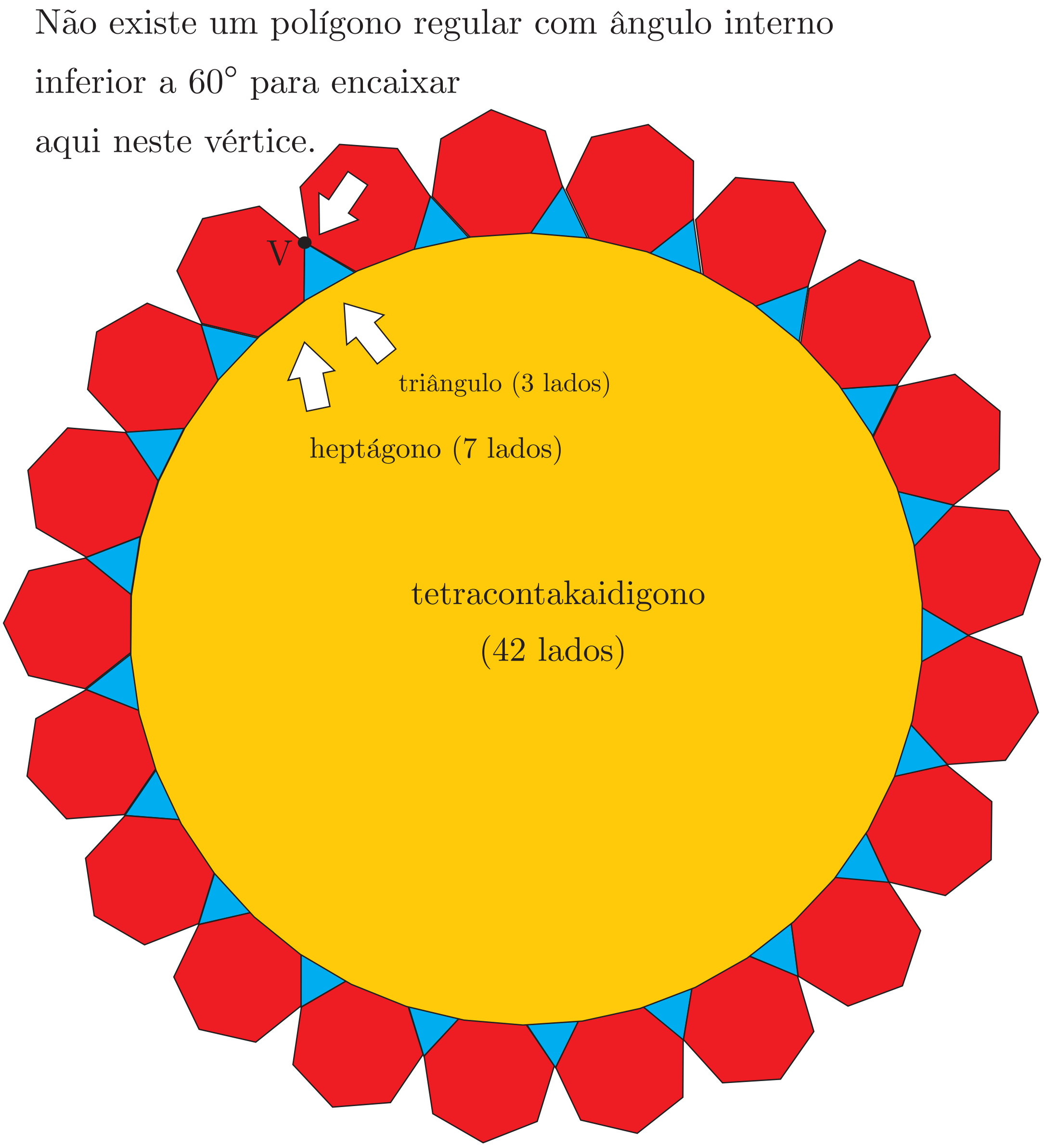


Figura 4.1 Encaixando heptágono,tetracontakaidigono e triângulo equilátero

Percebe-se que para se expandir essa figura teria que existir um polígono com ângulo interno de $(300/7)°$ Pois a soma dos ângulos em torno do vértice V , por exemplo, é composta por dois ângulos internos de heptágonos e de um triângulo é de $(2220/7)°$.

4.1.2 Encaixando octógono, icosakaitetragono e triângulo.

O segundo caso a ser analisado é o caso 8-24-3, onde o "8"representa um octógono, o "24"representa um icosakaitetragonoo e o "3"representa um triângulo equilátero.

Na figura 4.2 tem-se a justaposição destes três polígonos e a tentativa frustrada de se expandir este mosaico, pois a soma dos ângulos internos dos octógono e do triângulo equilátero no vértice V é 330° e teria que existir um polígono com ângulo interno de 30° para a soma chegar a 360° e haver o encaixe perfeito.

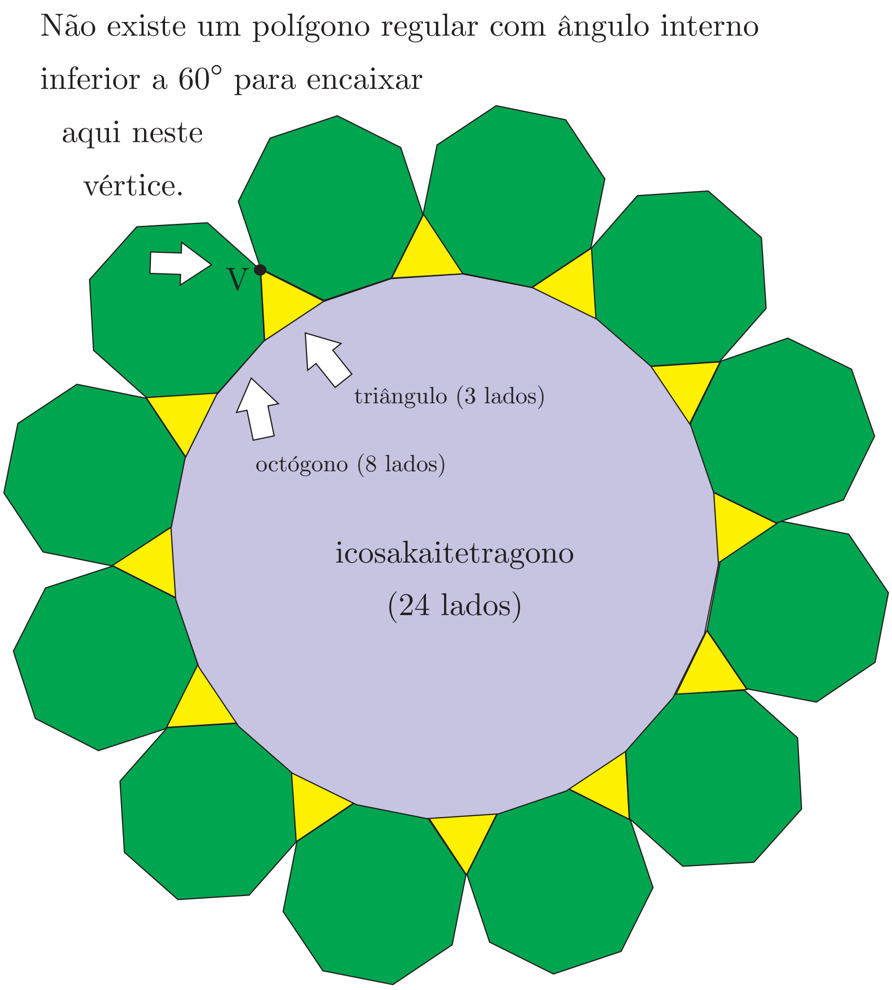


Figura 4.2 Encaixando octógono, icosakaitetragono e triângulo equilátero

4.1.3 Encaixando eneágono, octodecágono e triângulo.

O terceiro caso a ser analisado é o caso 9-18-3, onde o "9"representa um eneágono, o "18"representa um octodecágono e o "3"representa um triângulo equilátero.

Na figura 4.3 tem-se a justaposição destes três polígonos.A tentativa de se expandir este mosaico não é possível pois a soma dos ângulos internos dos eneágonos e do, triângulo equilátero no vértice V é 340° e para isso deveria existir um polígono com um ângulo interno de 20°, para a soma chegar a 360°, o que torna essa expansão impossível.

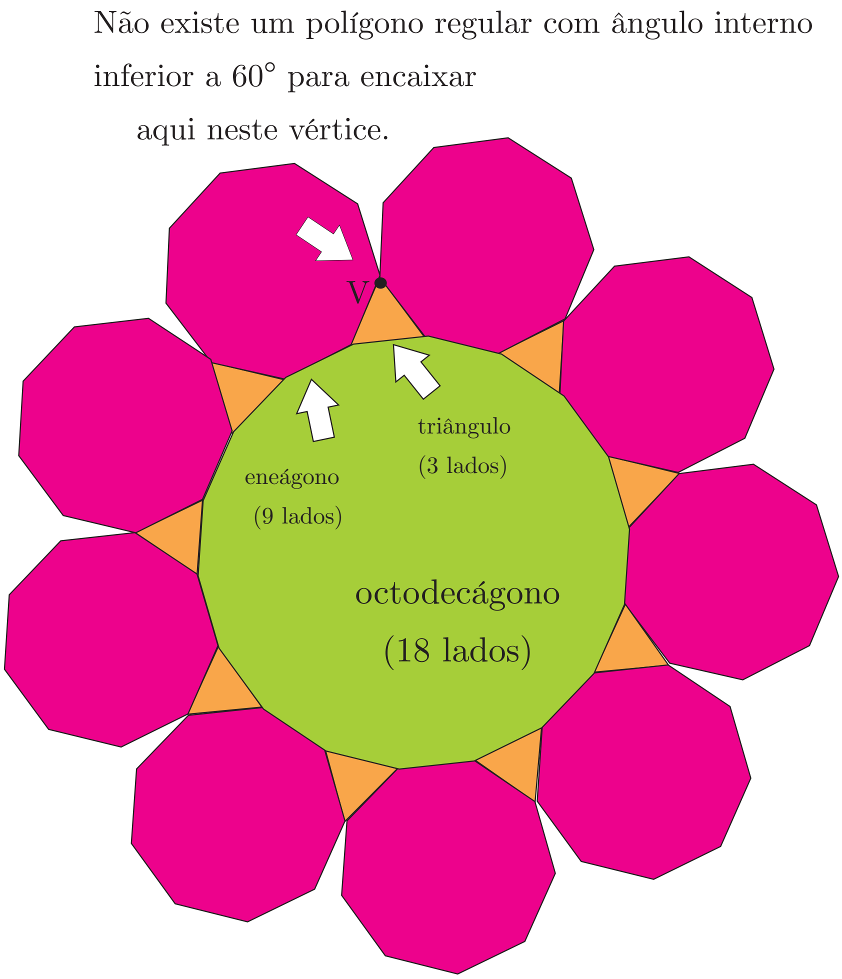


Figura 4.3 Encaixando eneágono, octodecágono e triângulo equilátero

4.1.4 Encaixando decágono, pentadecágono e triângulo.

O quarto caso a ser analisado é o caso 10-15-3, onde o "10"representa um decágono, o "15"representa um pentadecágono e o "3"representa um triângulo equilátero.

Na figura 4.4 tem-se a justaposição destes três polígonos em torno do vértice V e mais uma vez não se consegue a soma exata de 360° para o encaixe ser perfeito.

A soma dos ângulos internos dos decágonos e do triângulo equilátero no vértice V é 348° e não é possível construir um polígono com 12° para que esse encaixe seja perfeito.

Na figura 4.4 é possível também perceber que um oitavo pentadecágono não se encaixaria no espaço que sobrou.

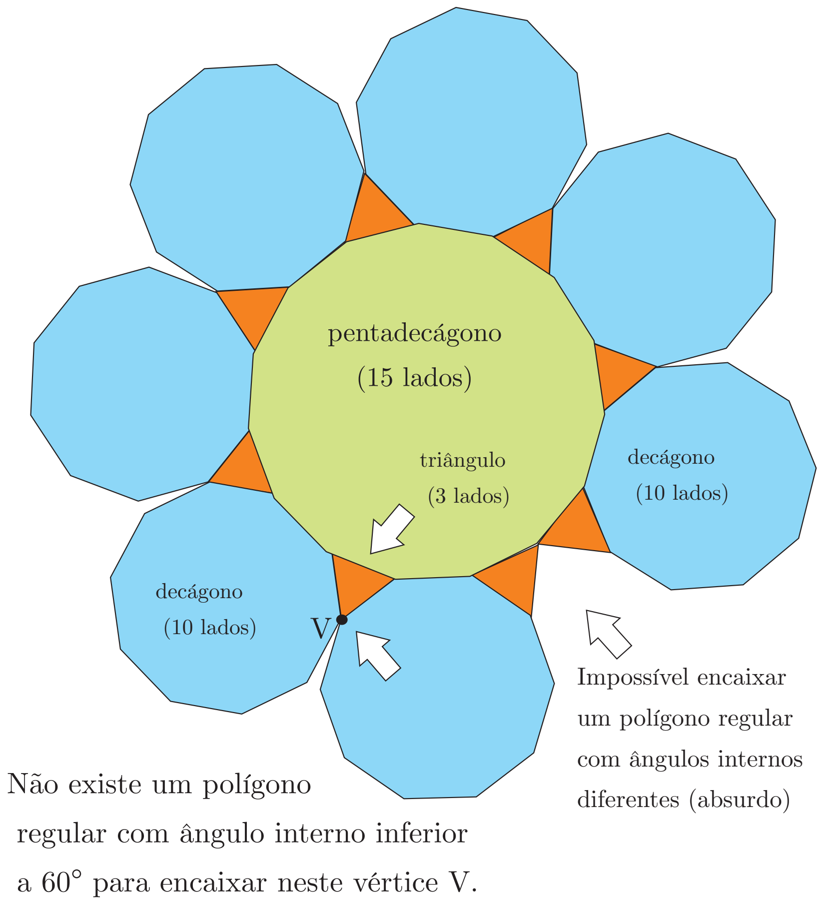


Figura 4.4 Encaixando decágono, pentadecágono e triângulo equilátero

4.1.5 Encaixando dodecágono, dodecágono e triângulo equilátero.

O quinto caso a ser analisado é 12-12-3, onde o "12"representa dodecágonos e o 3"representa um triângulo equilátero.

Na figura 4.5 tem-se a justaposição destes três polígonos e a perfeita expansão na superfície.

A soma dos ângulos internos do dodecágono, do triângulo e do outro dodecágono é exatamente 360° e com isso não sobrarão espaços vazios na sobreposição destes polígonos.

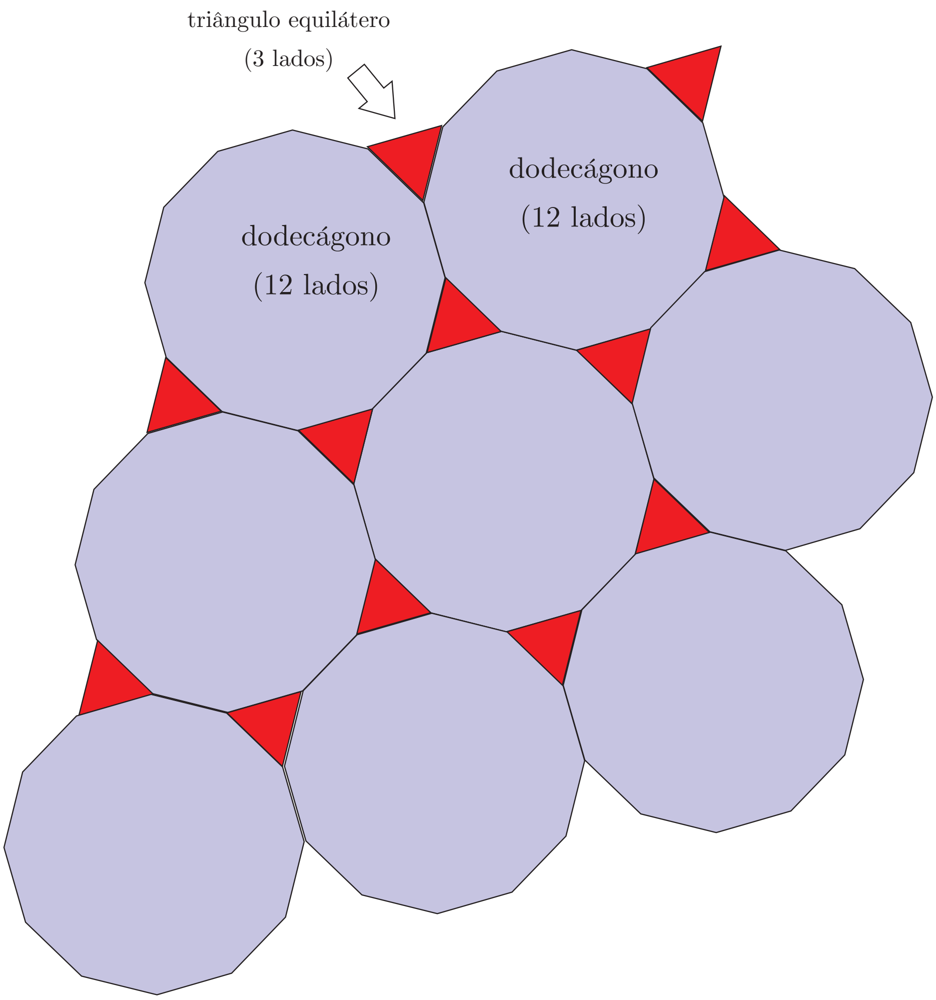


Figura 4.5 Encaixando dodecágono, dodecágono e triângulo equilátero

Observa-se que é possível expandir este mosaico pois em cada vértice de justaposição dos polígonos regulares é possível obter a soma dos ângulos sendo 360°.

4.2 Utilizando três polígonos regulares em torno de um vértice fixando um quadrado.

Depois de ter fixado o triângulo agora é a vez de fixar o quadrado e analisar as possibilidades de encaixe de três polígonos em torno de um vértice sendo que um deles é o quadrado, ou seja 90° teremos então:

$$\frac{180(x-2)}{x} + \frac{180(y-2)}{y} + 90 = 360$$
$$\frac{180(x-2)}{x} + \frac{180(y-2)}{y} = 270$$
$$xy - 4y = 4x$$
$$y(x-4) = 4x$$
$$y = \frac{4x}{x-4}$$

Na equação anterior, x e y são as quantidades de lados de cada polígono. Assim são números inteiros e positivos e portanto y deverá ser maior ou igual a 5 e x maior que 4.

$$\frac{4x}{x-4} \geq 5$$
$$4x \leq 5(x-4)$$
$$x \leq 20$$

Portanto

$$4 < x \leq 5$$

Analisando estes valores na tabela 4.2 tem-se as seguintes possibilidades.

x	y	Quadrado
5	20	4
6	12	4
7	28/3	4
8	8	4
9	36/5	4
10	20/3	4
11	44/7	4
12	6	4
13	52/9	4
14	28/5	4
15	60/11	4
16	16/3	4
17	68/13	4
18	36/7	4
19	76/15	4
20	5	4

5	20	4
6	12	4
8	8	4

Combinações possíveis para haver o encaixe

Tabela 4.2 Fixando um quadrado na justaposição de três polígonos

Na Tabela 4.2 vê-se todas as possibilidades de se encaixar três polígonos regulares fixando um quadrado.

4.2.1 Encaixando pentágono, icoságono e quadrado.

O sexto caso a ser analisado é o caso 5-20-4, onde o "5"representa um pentágono, o "20"representa um icoságono e o "4"representa um quadrado.

Depois de ter estes polígonos encaixados a pergunta é se eles podem ser expandidos.

Na figura 4.6 tem-se a justaposição destes três polígonos e a tentativa de se expandir este mosaico.

A soma dos ângulos internos do quadrado, do pentágono e do outro quadrado é 288° e faltaria 72° para que a soma chegasse a 360° e houvesse o encaixe perfeito.

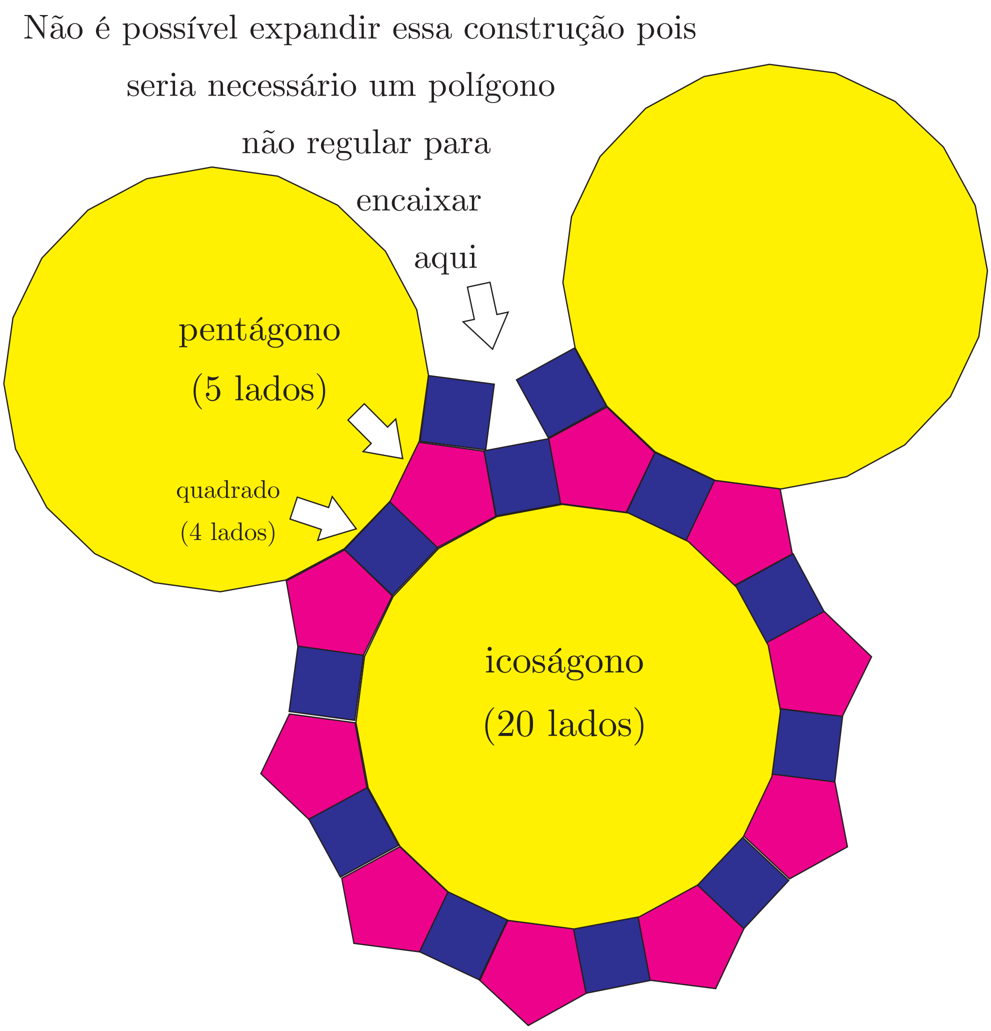


Figura 4.6 Encaixando pentágono, icoságono e quadrado

4.2.2 Encaixando hexágono, dodecágono e quadrado.

O sétimo caso a ser analisado é o caso 6-12-4, onde o "6"representa um hexágono, o "12"representa um dodecágono e o "4"representa um quadrado.

Na figura 4.7 tem-se a justaposição destes três polígonos e a expansão das figuras numa superfície.

A soma dos ângulos internos do dodecágono, do hexágono e do quadrado é 360° e será possível cobrir toda superfície plana com estes três polígonos.

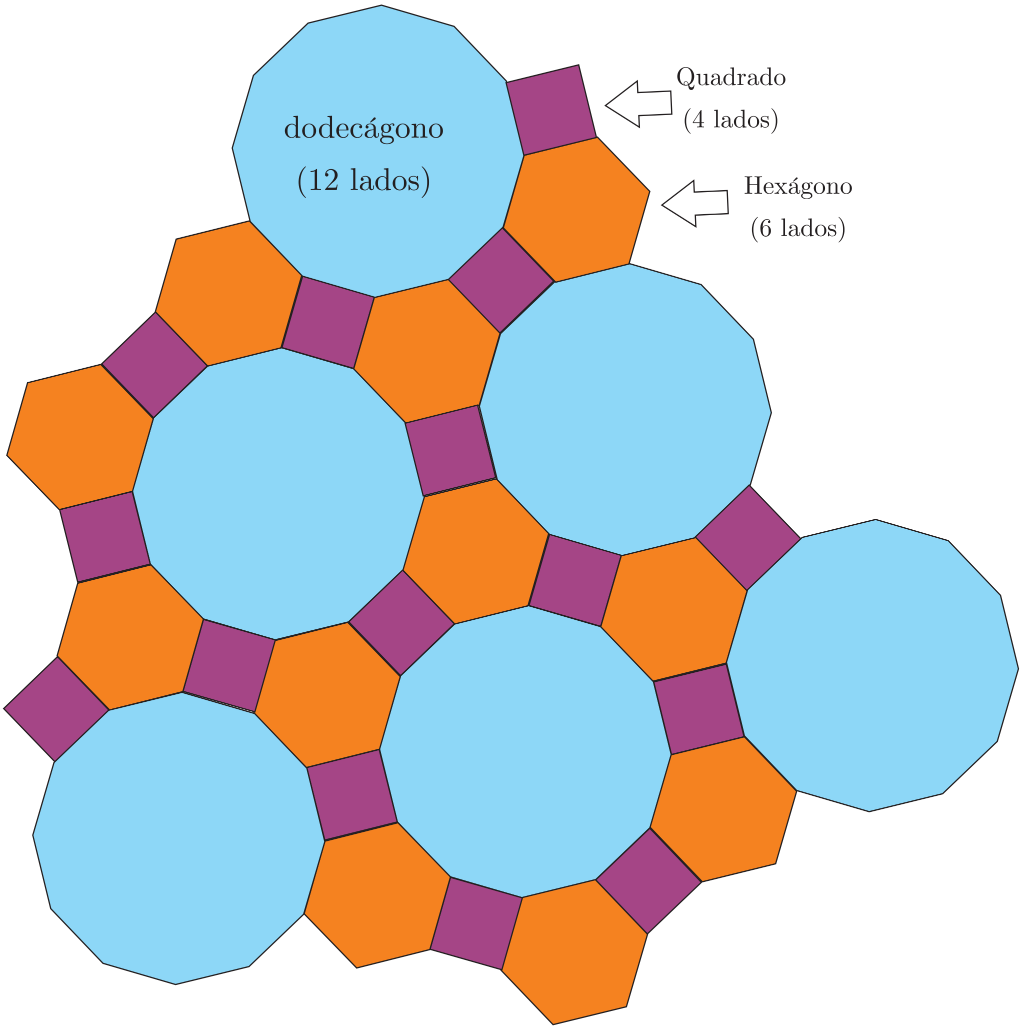


Figura 4.7 Encaixando hexágono, dodecágono e quadrado

Observa-se que é possível expandir este mosaico pois em cada vértice de justaposição dos polígonos regulares é possível obter a soma dos ângulos sendo 360°.

4.2.3 Encaixando octógono, octógono e quadrado.

O oitavo caso a ser analisado é o caso 8-8-4, onde o "8"representa um octógono, o "8"representa outro octógono e o "4"representa um quadrado.

Depois de ter estes polígonos encaixados a pergunta é se eles podem ser expandidos.

Na figura 4.8 tem-se a justaposição destes três polígonos e a expansão das figuras na superfície, pois a soma dos ângulos internos dos polígonos utilizados será sempre 360°.

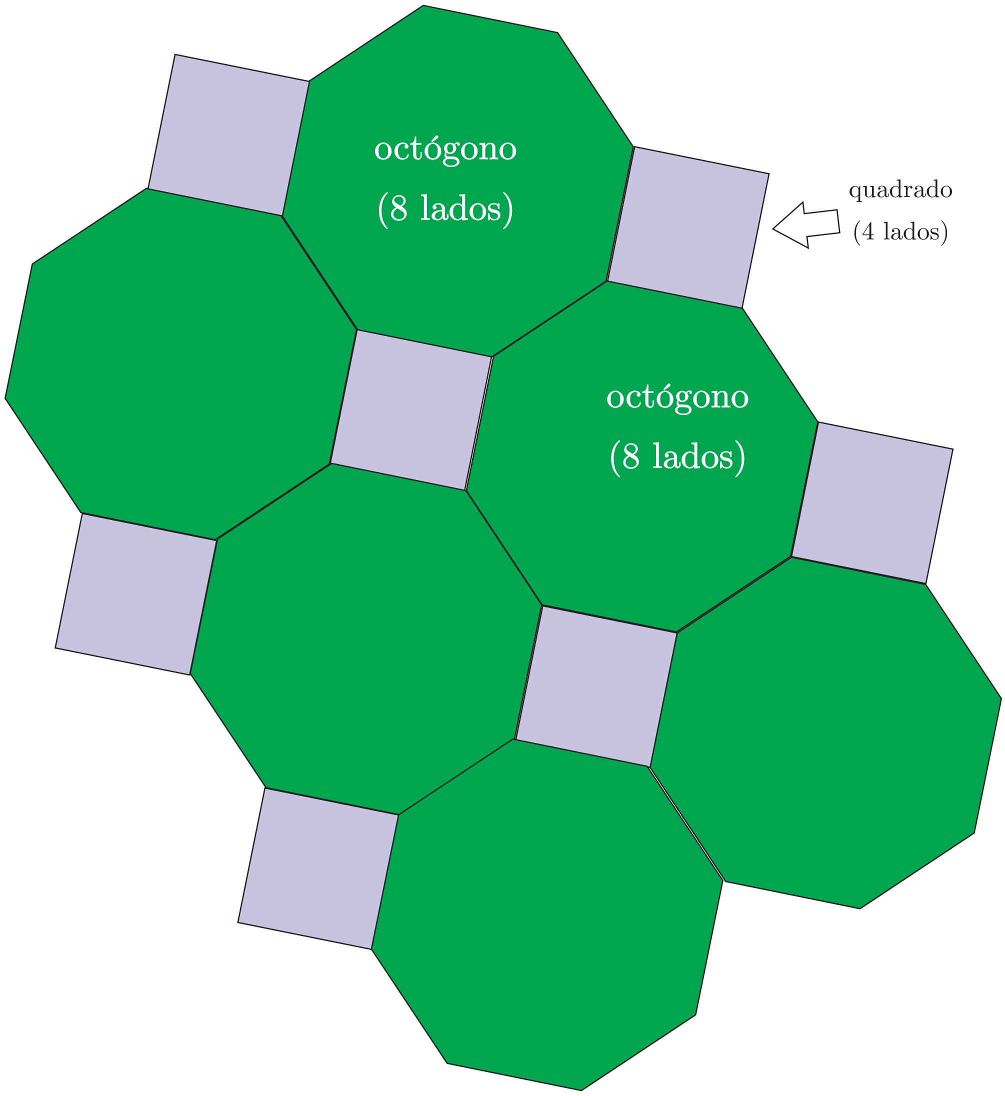


Figura 4.8 Encaixando octógono, octógono e quadrado

Observa-se que é possível expandir este mosaico pois em cada vértice de justaposição dos polígonos regulares é possível obter a soma dos ângulos sendo 360°.

4.3 Utilizando três polígonos em torno de um vértice fixando um Pentágono.

Depois de ter fixado o triângulo e o quadrado agora é a vez de fixar o pentágono e analisar as possibilidades de encaixe de três polígonos em torno de um vértice sendo que um deles é o pentágono, ou seja 90° teremos então:

$$\frac{180(x-2)}{x} + \frac{180(y-2)}{y} + 108 = 360$$

De maneira similar a 4.1 e 4.2 considerando os valores para x e y, tem-se:

$$4 < x \leq 20$$

Analisando estes valores na Tabela 4.3 tem-se as seguintes possibilidades. Mas será analisada apena uma pois as outras apareciam em casos anteriores.

x	y	Pentágono
4	**20**	**5**
5	**10**	**5**
6	15/2	5
7	70/11	5
8	40/7	5
9	90/17	5
10	**5**	**5**
11	110/23	5
12	60/13	5
13	130/29	5
14	35/8	5
15	42215	5
16	80/19	5
17	170/41	5
18	45/11	5
19	190/47	5
20	**4**	**5**

5	**10**	**5**

Combinação possível
descartando os casos
já estudados

Tabela 4.3 Fixando um pentágono na justaposição de três polígonos

4.3.1 Encaixando pentágono, decágono e pentágono.

O nono caso a ser analisado é o caso 5-10-5, onde o "5"representa um pentágono, o "10"representa um decágono e o "5"representa um pentágono.

Depois de ter estes polígonos encaixados a pergunta é se eles podem ser expandidos.

Na figura 4.9 tem-se a justaposição destes três polígonos na construção do mosaico. Para que haja uma expansão destas figuras numa superfície seria preciso existir um polígono com ângulo interno de 36° para se juntar aos três pentágonos no vértice V já que a soma dos ângulos internos de três pentágonos é de 324°.

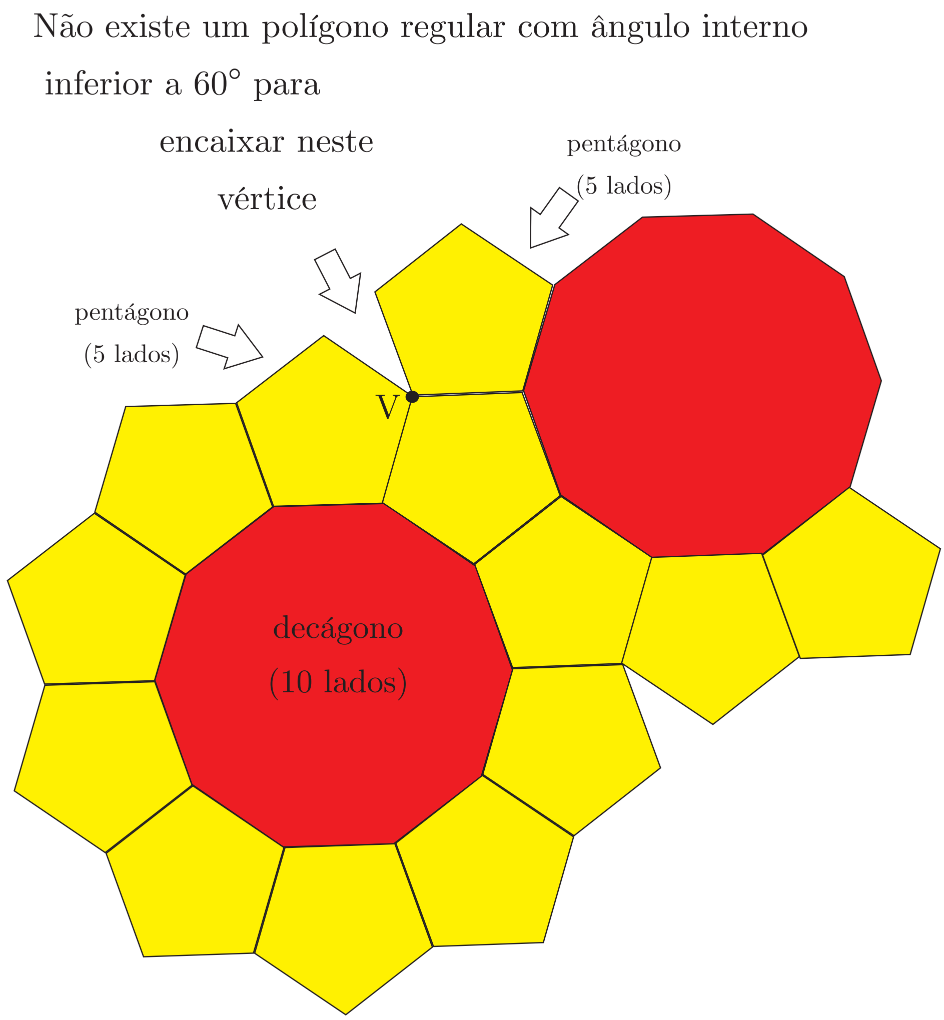


Figura 4.9 Encaixando pentágono, decágono e pentágono

4.4 Utilizando três polígonos regulares em torno de um vértice fixando um hexágono.

Depois de ter fixado o triângulo, o quadrado e o pentágono agora é a vez de fixar o hexágono e analisar as possibilidades de encaixe de três polígonos em torno de um vértice sendo que um deles é o pentágono, ou seja 120° teremos então:

$$\frac{180(x-2)}{x} + \frac{180(y-2)}{y} + 120 = 360$$
$$y(x-3) = 3x$$
$$y = \frac{3x}{x-3}$$

Similarmente a 4.1 e 4.2 tem-se:

$$3 < x \leq 12$$

Analisando estes valores na tabela 4.4 tem-se as seguintes possibilidades. Mas será analisada apenas uma pois as utras duas já foram citadas na tabela 4.2.

x	y	Hexágono
4	**12**	**6**
5	15/2	6
6	**6**	**6**
7	21/4	6
8	24/5	6
9	9/2	6
10	30/7	6
11	33/8	6
12	**4**	**6**

6	**6**	**6**

Combinação possível descartando os casos já estudados

Tabela 4.4 Fixando um hexágono na justaposição de três polígonos

4.4.1 Encaixando hexágono, hexágono e hexágono.

O décimo caso a ser analisado é o caso 6-6-6, onde os "6"representam os três hexágonos.

Na figura 4.10 tem-se a junção destes três polígonos e a construção do mosaico clássico que é a colmeia de abelha.

O encaixe é perfeito pois a soma dos ângulos internos de três hexágonos é 360° e não sobram espaços vazios na expansão desta construção.

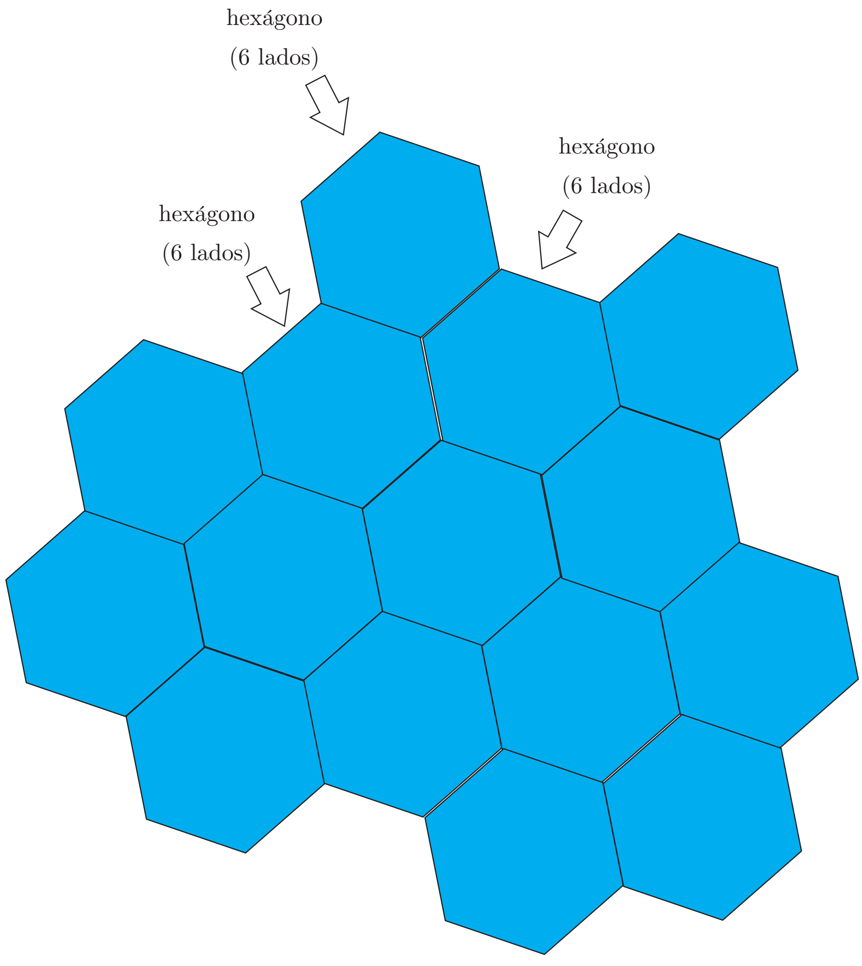


Figura 4.10 Encaixando hexágono, hexágono e hexágono

Observa-se que é possível expandir este mosaico pois em cada vértice de justaposição dos polígonos regulares é possível obter a soma dos ângulos sendo 360°.

4.5 Utilizando quatro polígonos regulares em torno de um vértice fixando dois triângulos.

Dois polígonos serão fixados agora F e G e uma relação direta entre os outros dois que serão chamados de x e de y aqui.

$$\frac{180(x-2)}{x} + \frac{180(y-2)}{y} + 60 + 60 = 360$$

De maneira análogoga aos casos anteriores tem-se:

$$3 < x \leq 12$$

Analisando estes valores na Tabela 4.5 tem-se duas possibilidades de construção de mosaicos fixando dois triângulos.

x	y	Triângulo	Triângulo
4	12	3	3
5	15/2	3	3
6	6	3	3
7	21/4	3	3
8	24/5	3	3
9	9/2	3	3
10	30/7	3	3
11	33/8	3	3
12	4	3	3

3	3	4	12
6	6	3	3

Combinações possíveis descartando os casos já estudados

Tabela 4.5 Fixando dois triângulos na justaposição de quatro polígonos

4.5.1 Encaixando triângulo, triângulo, quadrado e dodecágono.

O décimo primeiro caso a ser analisado é o caso 3-3-4-12, onde os "3"representam triângulos equiláteros, o "4"representa um quadrado e o "12"representa um dodecágono.

Na figura 4.11 tem-se a justaposição destes quatro polígonos numa expansão pela superfície pois a soma dos ângulos internos três triângulos e dois quadrados é 360° assim como a soma dos ângulos internos do dodecágono, do quadrado e de dois triângulos também, o que torna essa construção possível de se expandir.

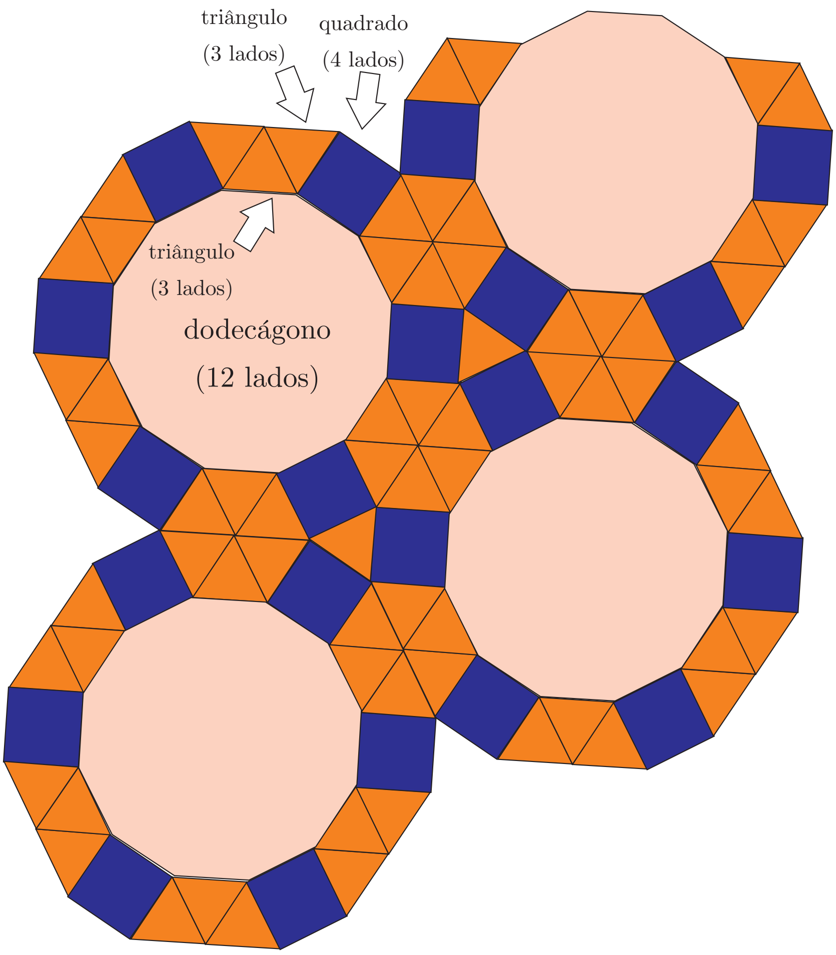


Figura 4.11 Encaixando dois triângulos equiláteros, quadrado e dodecágono

Observa-se que é possível expandir este mosaico pois em cada vértice de justaposição dos polígonos regulares é possível obter a soma dos ângulos sendo 360°.

4.5.2 Encaixando triângulo, triângulo, quadrado e dodecágono de forma diferente.

O décimo segundo caso a ser analisado é o caso 3-3-4-12, onde os "3"representam triângulos equiláteros, o "4"representa um quadrado e o "12"representa um dodecágono.

Na figura 4.12 tem-se a justaposição destes quatro polígonos numa superfície plana de maneira diferente.

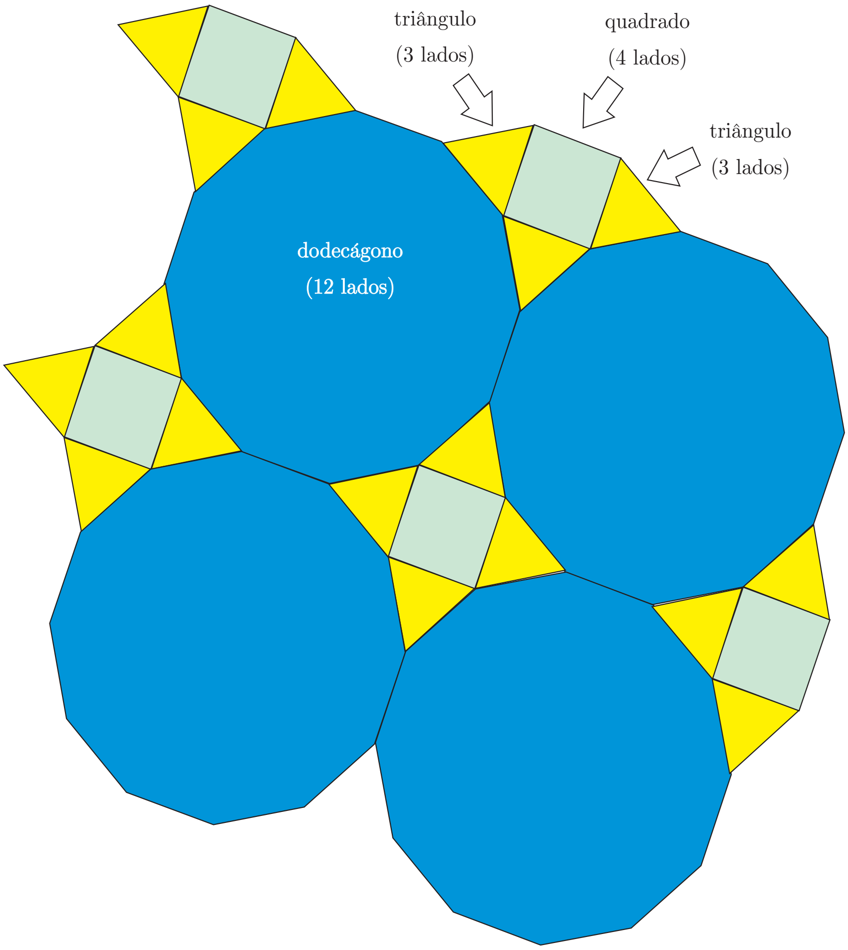


Figura 4.12 Encaixando dois triângulos, quadrado e dodecágono de maneira diferente

Observa-se que é possível expandir este mosaico pois em cada vértice de justaposição dos polígonos regulares é possível obter a soma dos ângulos sendo 360°.

4.5.3 Encaixando hexágono, hexágono, triângulo e triângulo.

O décimo terceiro caso a ser analisado é o caso 6-6-3-3, onde os "6"representam hexágonos e os "3"representam triângulos equiláteros.

Na figura 4.13 tem-se a justaposição destes quatro polígonos na expansão das figuras na superfície já que a soma dos ângulos internos de dois hexágonos e dois triângulos é 360°.

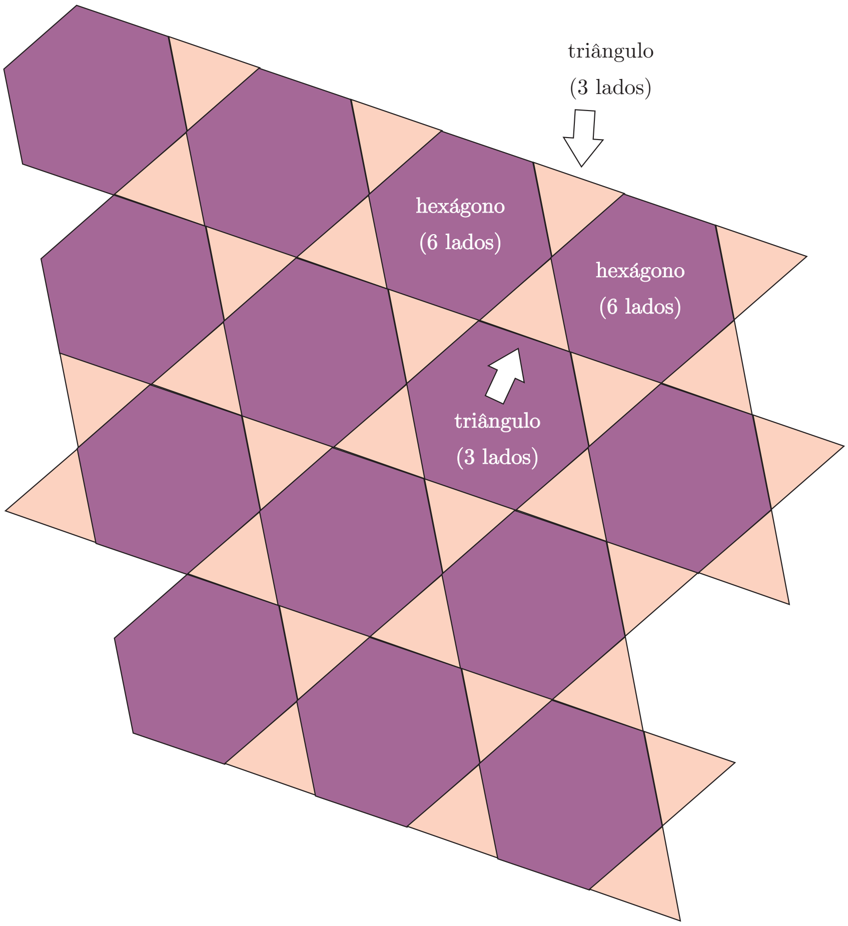


Figura 4.13 Encaixando dois hexágonos e dois triângulos equiláteros

Observa-se que é possível expandir este mosaico pois em cada vértice de justaposição dos polígonos regulares é possível obter a soma dos ângulos sendo 360°.

4.5.4 Encaixando hexágono, hexágono, triângulo e triângulo de forma diferente.

O décimo quarto caso a ser analisado é o caso 6-6-3-3, onde os "6"representam hexágonos e os "3"representam triângulos equiláteros.

Na figura 4.14 tem-se a justaposição destes quatro polígonos na expansão das figuras de um modo diferente da anterior cuja soma dos ângulos internos também é de 360°.

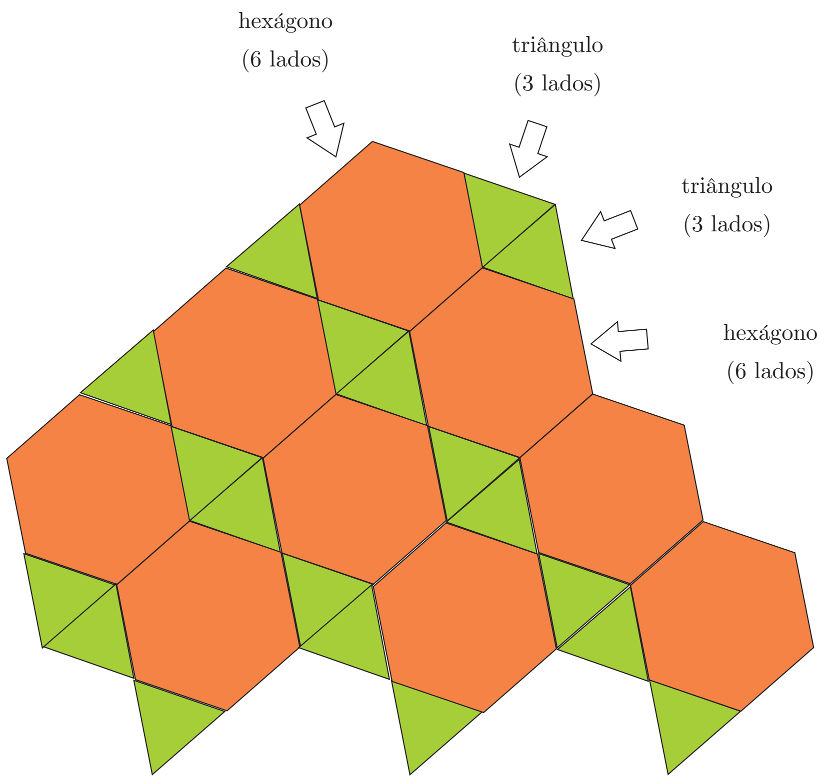


Figura 4.14 Encaixando dois hexágonos e dois triângulos equiláteros de forma diferente

Observa-se que é possível expandir este mosaico pois em cada vértice de justaposição dos polígonos regulares é possível obter a soma dos ângulos sendo 360°.

4.6 Utilizando quatro polígonos em torno de um vértice fixando um triângulo e um quadrado.

Encaixando hexágono, hexágono, triângulo e triângulo de maneira diferente.

Serão fixados agora os ângulos 60° e 90° teremos então:

$$\frac{180(x-2)}{x} + \frac{180(y-2)}{y} + 60 + 90 = 360$$

$$y(5x-12)=12x$$
$$y=\frac{12x}{5x-12}$$

Assim como em 4.1 e 4.2 tem-se:

$$3<x\leq 12$$

Analisando estes valores na Tabela 4.6 tem-se uma possibilidade de construção de mosaico fixando um quadrado e um triângulo equilátero.

x	y	Triângulo	Quadrado
3	12	3	4
4	6	3	4
5	60/13	3	4
6	4	3	4
7	84/23	3	4
8	42209	3	4
9	108/33	3	4
10	60/19	3	4
11	132/43	3	4
12	3	3	4

4	6	3	4

} Combinação possível descartando os casos já estudados

Tabela 4.6 Fixando um triângulo e um quadrado na justaposição de quatro polígonos

4.6.1 Encaixando quadrado, hexágono, triângulo e quadrado.

O décimo quinto caso a ser analisado é o caso 4-6-3-4, onde os "4"representam quadrados, o "6"representa um hexágono e o "3"representa um triângulo equilátero.

Depois de ter estes polígonos encaixados a pergunta é se eles podem ser expandidos.

Na figura 4.15 tem-se a justaposição destes quatro polígonos regulares e a expansão das figuras num a superfície uma vez que a soma dos ângulos internos de dois quadrados, de um triângulo e de um hexágono é de 360°.

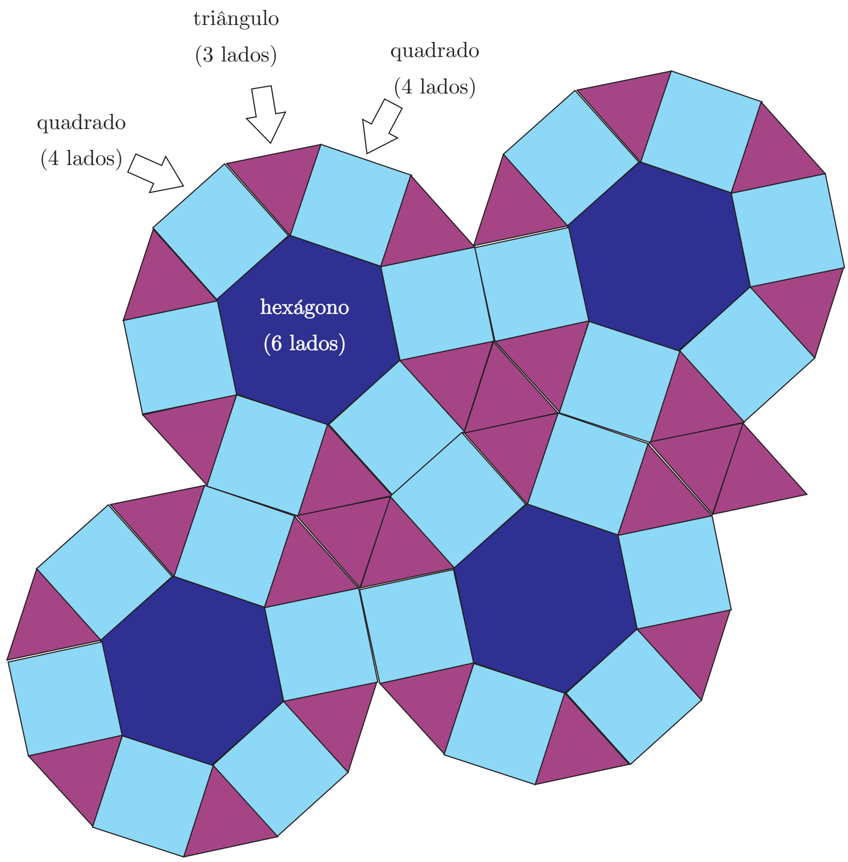


Figura 4.15 Encaixando quadrado, hexágono, triângulo e quadrado

Observa-se que também é possível expandir este mosaico pois em cada vértice de justaposição dos polígonos regulares é possível obter a soma dos ângulos sendo 360°.

4.6.2 Encaixando quadrado, hexágono, triângulo e quadrado de uma segunda forma.

O décimo sexto caso a ser analisado é o caso 4-6-3-4, onde os "4"representam quadrados, o "6"representa um hexágono e o "3"representa um triângulo equilátero.

Na figura 4.16 tem-se a junção destes quatro polígonos e a expansão na superfície com os mesmos polígonos utilizados no caso anterior.

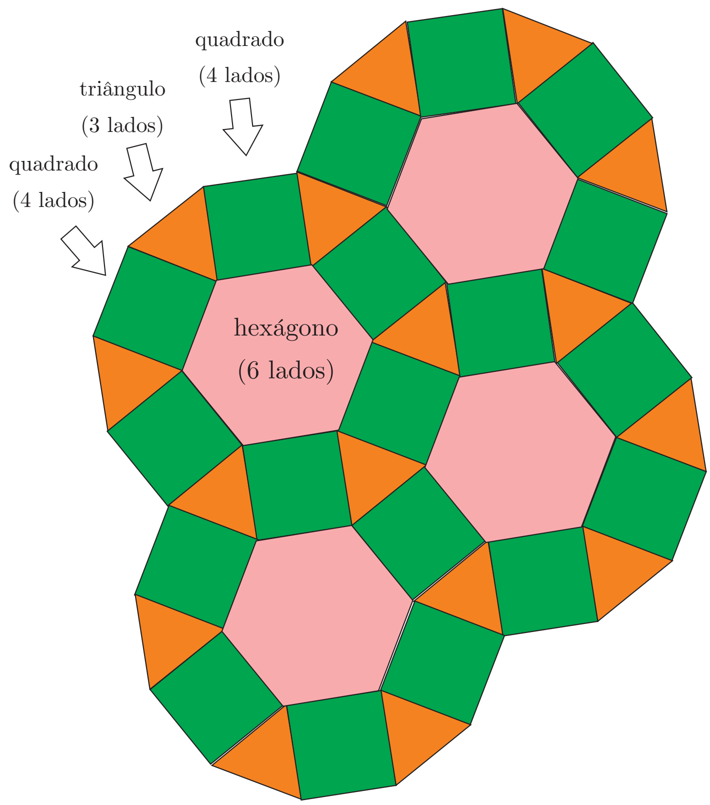


Figura 4.16 Encaixando quadrado, hexágono, triângulo e quadrado de uma segunda maneira

Observa-se mais uma vez que é possível expandir este mosaico pois em cada vértice de justaposição dos polígonos regulares é possível obter a soma dos ângulos sendo 360° assim como o caso anterior.

4.6.3 Encaixando quadrado, hexágono, triângulo e quadrado de uma terceira forma.

O décimo sétimo caso a ser analisado é o caso 4-6-3-4, onde os "4"representam quadrados, o "6"representa um hexágono e o "3"representa um triângulo equilátero.

Na figura 4.17 tem-se a justaposição destes quatro polígonos e sua expansão na superfície plana de uma terceira forma.

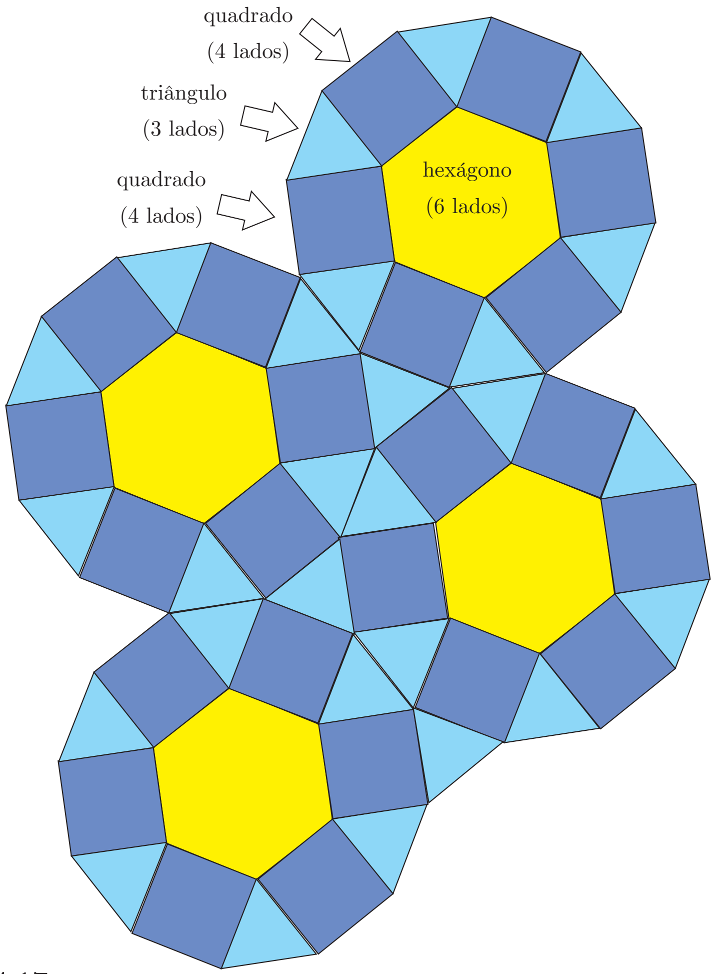


Figura 4.17 Encaixando quadrado, hexágono, triângulo e quadrado de uma terceira maneira

Observa-se de novo que é possível expandir este mosaico pois em cada vértice de justaposição dos polígonos regulares é possível obter a soma dos ângulos sendo 360° assim como os dois casos anteriores.

4.7 Utilizando quatro polígonos em torno de um vértice fixando dois quadrados.

Serão fixados agora os ângulos 90° e 90° teremos então:

$$\frac{180(x-2)}{x} + \frac{180(y-2)}{y} + 90 + 90 = 360$$

$$y = \frac{2x}{x-2}$$

Por 4.1 tem-se:

$$2 < x \leq 6$$

Analisando estes valores na Tabela 4.7 tem-se uma possibilidade de construção de mosaico fixando dois quadrados.

x	y	Quadrado	Quadrado
3	6	4	4
4	4	4	4
5	10/3	4	4
6	3	4	4

4	4	4	4	} Combinação possível descartando os casos já estudados

Tabela 4.7 Fixando dois quadrados na justaposição de quatro polígonos

4.7.1 Encaixando quadrado, quadrado, quadrado e quadrado .

O décimo oitavo caso a ser analisado é o caso 4-4-4-4, onde os "4"representam quadrados.

Na figura 4.18 tem-se a justaposição destes quatro polígonos e a expansão na superfície formando o ladrilhamento mais comum que existe pois a soma dos ângulos internos de quatro quadrados é 360°.

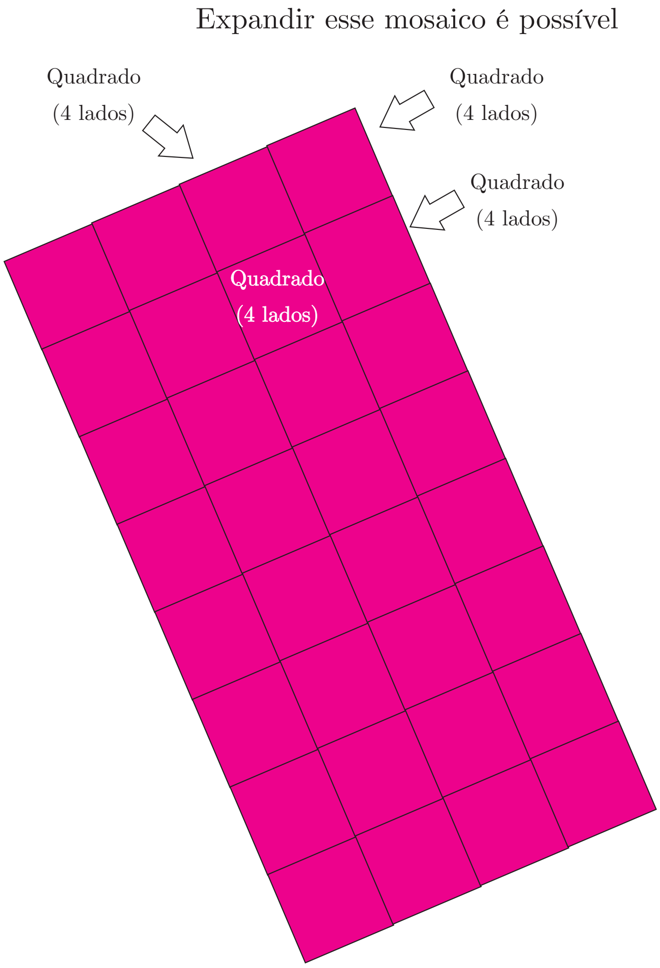


Figura 4.18 Encaixando quatro quadrados num vértice

Observa-se que é possível expandir este mosaico pois em cada vértice de justaposição dos polígonos regulares é possível obter a soma dos ângulos sendo 360°, no caso são quatro ângulos retos.

4.8 Utilizando cinco polígonos em torno de um vértice fixando três triângulos equiláteros.

Serão fixados agora os ângulos 60°, 60° e 60° teremos então:

$$\frac{180(x-2)}{x} + \frac{180(y-2)}{y} + 60 + 60 + 60 = 360$$

$$y = \frac{2x}{x-2}$$

Analogamente a 4.1 tem-se:

$$2 < x \leq 6$$

Analisando estes valores na Tabela 4.8 tem-se uma possibilidade de construção de mosaico fixando três triângulos equiláteros.

x	y	Triângulo	Triângulo	Triângulo
3	6	3	3	3
4	4	3	3	3
5	10/3	3	3	3
6	3	3	3	3

3	6	3	3	3
4	6	3	3	3

Combinações possíveis descartando os casos já estudados

Tabela 4.8 Fixando três triângulos na justaposição de cinco polígonos

4.8.1 Encaixando triângulo, hexágono, triângulo, triângulo e triângulo.

O décimo nono caso a ser analisado é o caso 3-3-3-3-6, onde os "3"representam triângulos equiláteros e o "6"representa um hexágono.

Na figura 4.19 tem-se a justaposição destes cinco polígonos e a expansão na superfície pois a soma dos ângulos internos de quatro triângulos e um hexágono é de 360°.

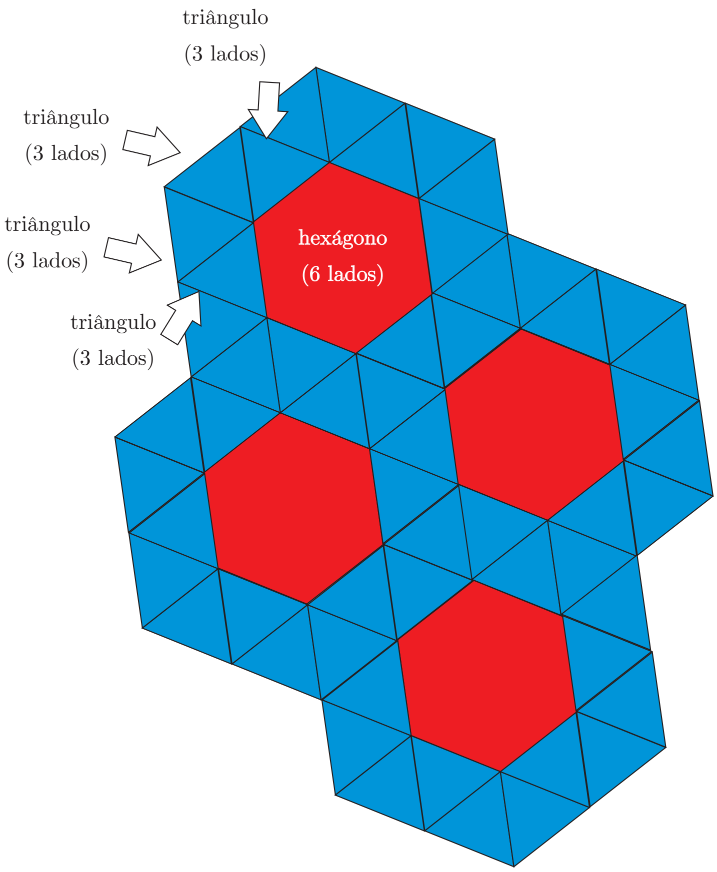


Figura 4.19 Encaixando triângulo, hexágono, triângulo, triângulo e triângulo

Observa-se que é possível expandir este mosaico pois em cada vértice de justaposição dos polígonos regulares é possível obter a soma dos ângulos sendo 360° .

4.8.2 Encaixando quadrado, quadrado,triângulo, triângulo e triângulo.

O vigésimo caso a ser analisado é o caso 4-4-3-3-3 onde os "4"representam quadrados, o "3"representam triângulos equiláteros.

Na figura 4.20 tem-se a junção destes cinco polígonos e a expansão na superfície pois a soma dos ângulos internos de dois quadrados e de três triângulos é de 360°.

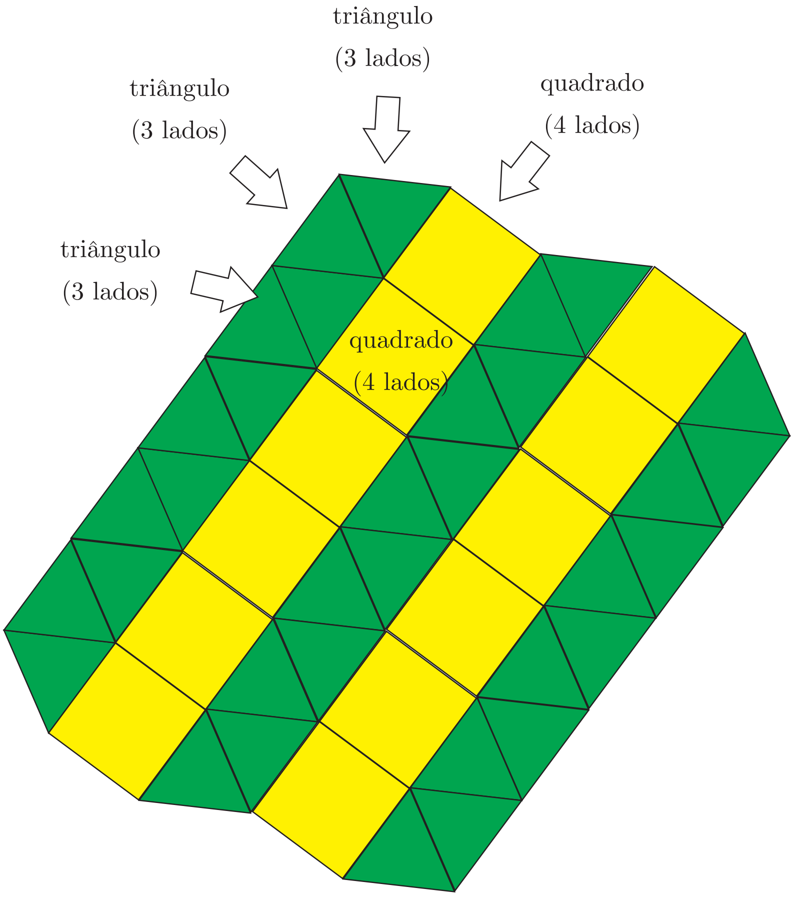


Figura 4.20 Encaixando quadrado, quadrado,triângulo, triângulo e triângulo

Observa-se que é possível expandir este mosaico pois em cada vértice de justaposição dos polígonos regulares é possível obter a soma dos ângulos sendo 360°.

4.9 Utilizando seis polígonos em torno de um vértice fixando quatro triângulos.

Serão fixados agora os ângulos 60°, 60°, 60° e 60° teremos então:

$$\frac{180(x-2)}{x} + \frac{180(y-2)}{y} + 60 + 60 + 60 + 60 = 360$$

$$y = \frac{3x}{2x-3}$$

Assim como em 4.1

$$2 < x \leq 6$$

Analisando estes valores na Tabela 4.9 tem-se uma possibilidade de construção de mosaico fixando seis triângulos equiláteros.

x	y	Triângulo	Triângulo	Triângulo	Triângulo
3	3	3	3	3	3
4	2,4	3	3	3	3
5	15/7	3	3	3	3
6	2	3	3	3	3

3	3	3	3	3	3

Combinação possível descartando os casos já estudados

Tabela 4.9 Fixando quatro triângulos na justaposição de seis polígonos

4.9.1 Encaixando triângulo, triângulo, triângulo, triângulo, triângulo e triângulo.

O vigésimo primeiro caso a ser analisado é o caso 3-3-3-3-3-3, onde os "3"representam triângulos equiláteros.

Na figura 4.21 tem-se a justaposição destes seis polígonos e a expansão na superfície já que a soma dos ângulos internos de seis triângulos é de 360°.

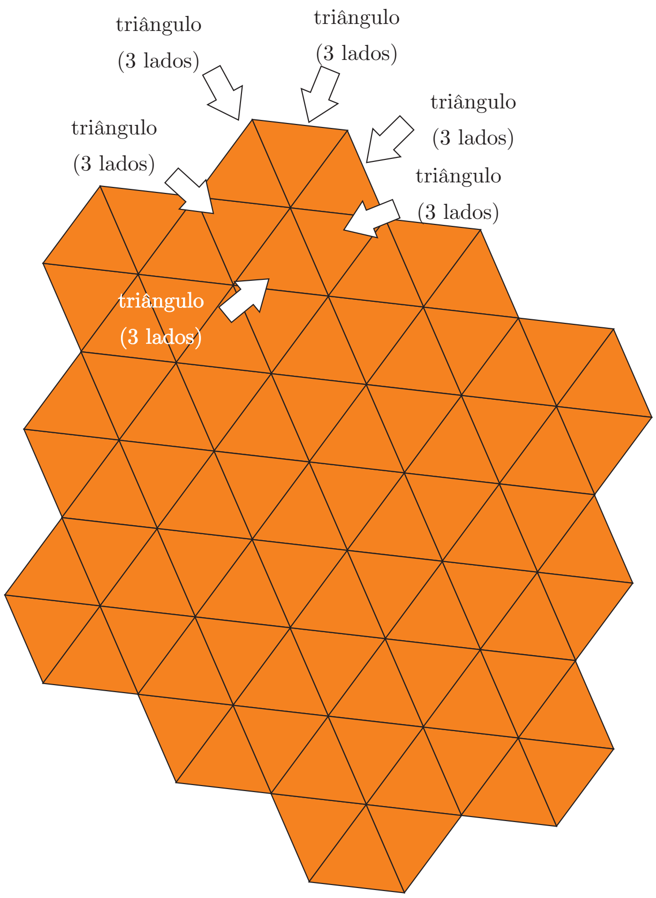


Figura 4.21 Encaixando triângulo, triângulo, triângulo, triângulo, triângulo e triângulo

Utilizar mais que seis polígonos regulares na construção de mosaicos é impossível, pois sabe-se que o menor ângulo do polígono regular com menos lados possíveis é de 60° e se for colocado sete destes polígonos regulares a soma seria igual a 420° e superaria os 360° exigidos para que o encaixe ficasse perfeito.

Capítulo 5

Trabalhos sobre mosaicos com polígonos regulares realizados com alunos de ensino básico

5.1 Proposta de trabalho para construção de mosaicos.

Trabalhar geometria com alunos de ensino básico de escola pública não é uma tarefa muito fácil, e como os alunos fazem de tudo para escapar das contas matemáticas foi preciso desenvolver uma técnica mais manual e concreta.

Primeiramente foi explicado a eles o que era ladrilhamento e onde poderíamos encontrar isso.

Foi sugerido que se olhasse para o chão e logo veio o primeiro exemplo.

Daí começaram-se os trabalhos de cálculo do que viera a ser um ladrilhamento e porque a soma destes ângulos internos destes polígonos tinham que ser 360°.

Foi lançado então um desafio para tentar descobrir se existia outra forma de montar estes mosaicos com polígonos diferentes dos quadriláteros.

Para facilitar o entendimento foi provado em sala a fórmula que encontra a soma dos ângulos internos de um polígono regular e o valor de cada ângulo interno.

Em seguida recortou-se em papel cartão vários polígonos, cada tipo com uma cor diferente e pediu-se que os alunos escrevessem dentro deles os valores dos ângulos internos de cada um.

Agora ficou mais fácil resolver o desafio proposto anteriormente como um quebra cabeça observando-se além do encaixe o resultado da soma dos ângulos internos de cada polígono.

Neste momento o interesse dos alunos ficou muito claro e a participação foi absoluta.

Depois de vários minutos as primeiras possibilidades foram surgindo e os mosaicos mais básicos foram aparecendo.

Aos poucos os mosaicos mais elaborados também eram encontrados e comemorados pelos grupos.

5.2 Construindo mosaicos com polígonos regulares.

Agora que os alunos sabiam montar todos os mosaicos possíveis construídos a partir de polígonos regulares a turma foi dividida em grupos para que o trabalho de confecção de mosaicos fosse realizado.

Para facilitar a vida dos alunos foi distribuído moldes dos polígonos regulares em material mais resistente para que eles riscassem e cortassem os polígonos em papel cartão para realização da colagem em cartolina para futura exposição.

O início de cada trabalho era feito em sala de aula , mas como debandava muito tempo foi proposto que eles continuassem em casa. Após alguns dias e com a chegada da data de entrega os trabalhos foram finalmente expostos para os alunos e demais membros da comunidade escolar.

Figura 5.1 Trabalho sobre mosaicos com alunos do EJA

Na figura 5.1 tem-se um registro dos alunos do EJA Escola para Jovens e Adultos de Ceilândia com seus trabalhos prontos.

Figura 5.2 Trabalho sobre mosaicos com alunos do EJA

Na figura 5.2 mostra uma foto com alunos de outra turma do EJA que também realizou o trabalho.

Capítulo 6

O artista holandês Maurits Cornelis Escher

6.1 A vida dedicada à arte.

Maurits Cornelis Escher nasceu em Leeuwarden Holanda em 17 junho de 1898. Apesar de não ser bom aluno destacou-se logo cedo nas aulas de desenho. Estudou arquitetura mas seu gosto estava mais para artes decorativas e influenciado por um professor passou a adotar técnicas de xilogravura e litografia (ERNST,1991).

Tanto a xilogravura (gravada sobre madeira) quanto a litogravura (gravada sobre pedra) recebem tinta antes de serem prensadas com papel para serem gravadas as imagens esculpidas em alto relevo.(FERREIRA,1987)numa espécie de produção em série como numa gráfica.

Não bastasse seu dotes nas artes ele passou usar a matemática em sua arte. Utilizou-se das proporções, séries logarítmicas, transformações algébricas, distorções espaciais e principalmente da geometria descritiva, passando assim a ser admirado por matemáticos e físicos, sendo considerado apenas um geômetra pelas academias de arte(MENDONÇA,2009).

Escher se deslumbrava com as regularidades e estruturas matemáticas e continuidade aproveitando-se disso para reproduzir em três dimensões muitas de suas obras(ERNST,1991). Será abordado neste trabalho basicamente o período de 1937-1945 onde se destacou pelos ladrilhamentos e metamorfoses.

6.2 Os ladrilhamentos de Escher

O ladrilhamento consiste no preenchimento do plano sem superposição ou espaços vazios entre as figuras, e o fato de se poder estender estas figuras indefinidamente tornou este padrão ideal para as pretensões de Escher. A primeira obra foi Oito cabeças de 1922 figura 6.1 que se encaixam umas as outras repetindo o padrão quatro vezes (TJABBES,2011).

Figura 6.1 Oito cabeças em xilogravura de 1922 (Fonte: Tjabbes.2011)

Escher foi influenciado por seu irmão Berend que forneceu livros de matemática para que ele viesse a se familiarizar com tipos de ladrilhamentos possíveis de serem usados. Os principais eram constituídos de quadrados, losangos, triângulos, Hexágonos e retângulos.

A partir destes ladrilhamentos básicos Escher passou a criar os seus próprios ladrilhos e desenhou dentro deles várias figuras como répteis e aves.

Para conseguir tal proeza, Escher usou sistemas de repetição utilizando a isometria matemática: Translação, reflexão e rotação.

Escher deixou uma grande contribuição nesta técnica de ladrilhamento pois não só desenvolveu imagens a partir de figuras geométricas como quadrados, triângulos e hexágonos, como as mudou no decorrer destas obras, transformando peixes em aves por exemplo.

Um exemplo clássico desta transformação é a obra Ciclo de 1938 que transformava duendes e pedras na figura 6.2.

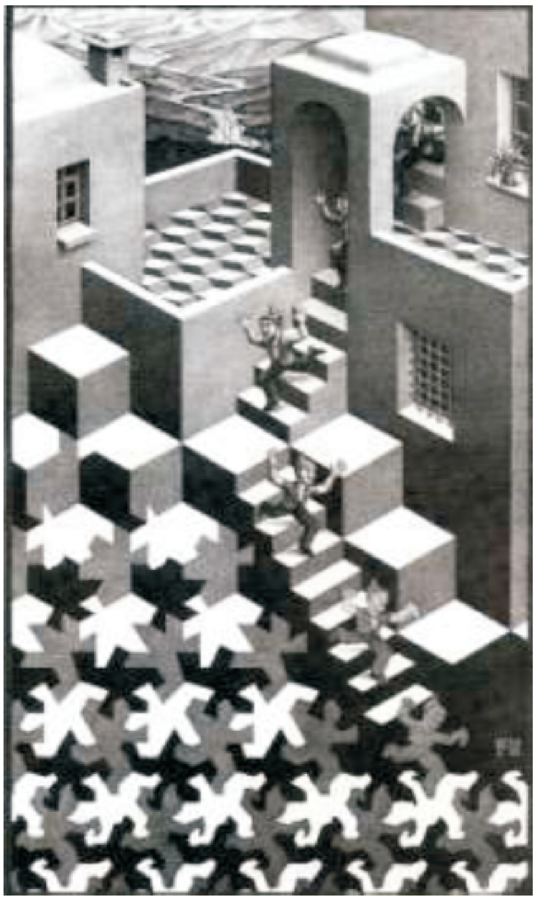


Figura 6.2 Ciclo em litografia de 1938 (Fonte: Ernst. 1991)

6.3 A contribuição do artista.

MC Escher figura 6.3 deixou um legado enorme para a arte e a matemática, e continua inspirando milhões de pessoas em todo mundo com a sua genialidade e criatividade.

Ele faleceu em 27 de março de 1972 no hospital Diakonessenhuis, Hilversum, Holanda.

Figura 6.3 Maurits Cornelis Escher (Fonte: Ernst. 1991)

Capítulo 7

Técnicas usadas por MC Escher na criação de mosaicos

7.1 Construção por Rotação.

Escher sempre utilizava nas suas construções as técnicas de isometria, que utilizam curvas de um desenho e as repetem gerando novas curvas através de uma rotação, translação ou reflexão conforme explicado no Capítulo 3.

Primeiramente será utilizada a técnica da rotação a partir de um triângulo equilátero.

Crie uma curva no vértice superior do triângulo equilátero conforme figura 7.1 e terminando no no vértice inferior a esquerda, podendo entrar ou sair do triângulo.

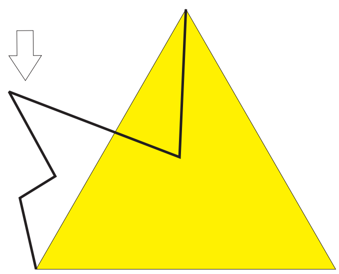


Figura 7.1

Em seguida faça uma rotação desta curva com sentido anti horário de 60° em torno do vértice superior

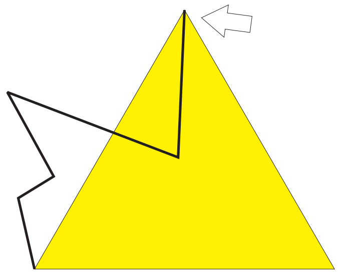


Figura 7.2

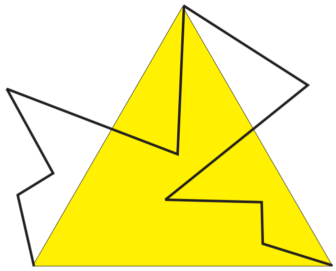


Figura 7.3

Faça agora outra curva desta vez na aresta da base do triângulo até o ponto médio como na figura 7.5.

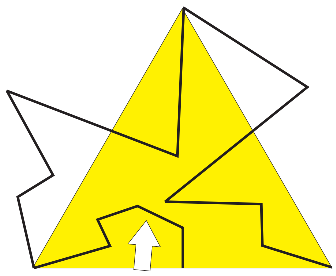


Figura 7.4

Faça uma rotação desta nova curva de 180° em torno do ponto médio da aresta da base figura 7.6.

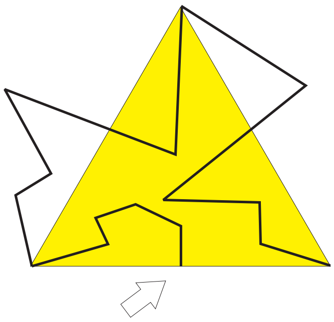


Figura 7.5

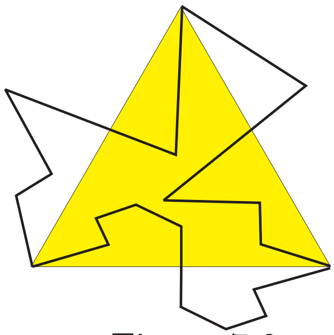


Figura 7.6

A figura formada é auto encaixável, ou seja, se encaixa nela mesma formando um mosaico sem que haja superposição de figuras ou parte delas. Ela será usada como base para construção do mosaico. figura 7.8.

Observe que a área da figura é encontrada é igual a área do triângulo original pois as figuras que "saem"do Triângulo são congruentes as que "entram"e uma compensa a outra.

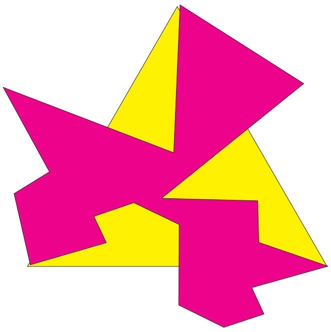


Figura 7.7

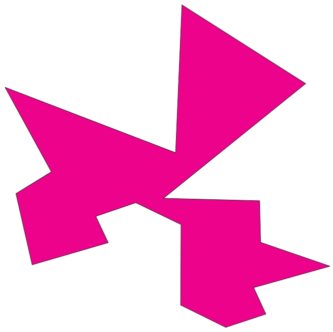


Figura 7.8

Para conseguir a expansão desta figura e consequentemente o ladrilhamento com fechamento da superfície basta que a nova figura seja girada em 60°.

Com um total de cinco rotações seis figuras auto encaixáveis aparecerão. figura 7.9.

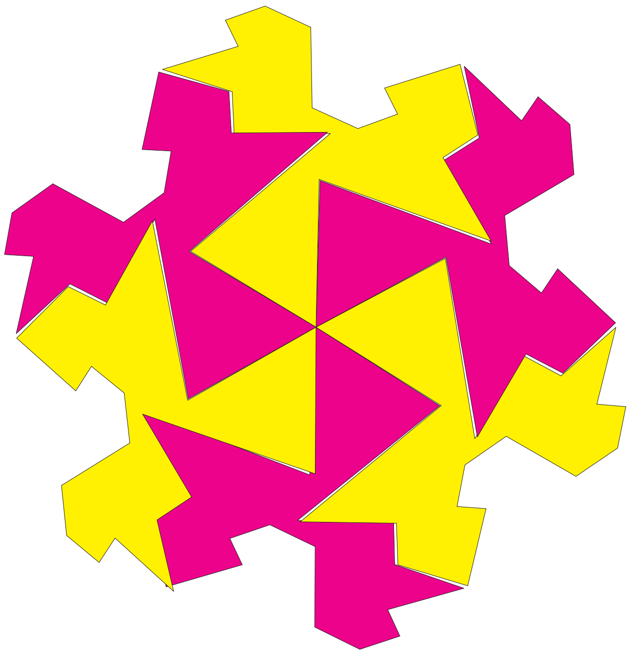


Figura 7.9

Essa nova figura se comportará como um Hexágono e se expandirá por uma superfície como uma colmeia. 7.10.

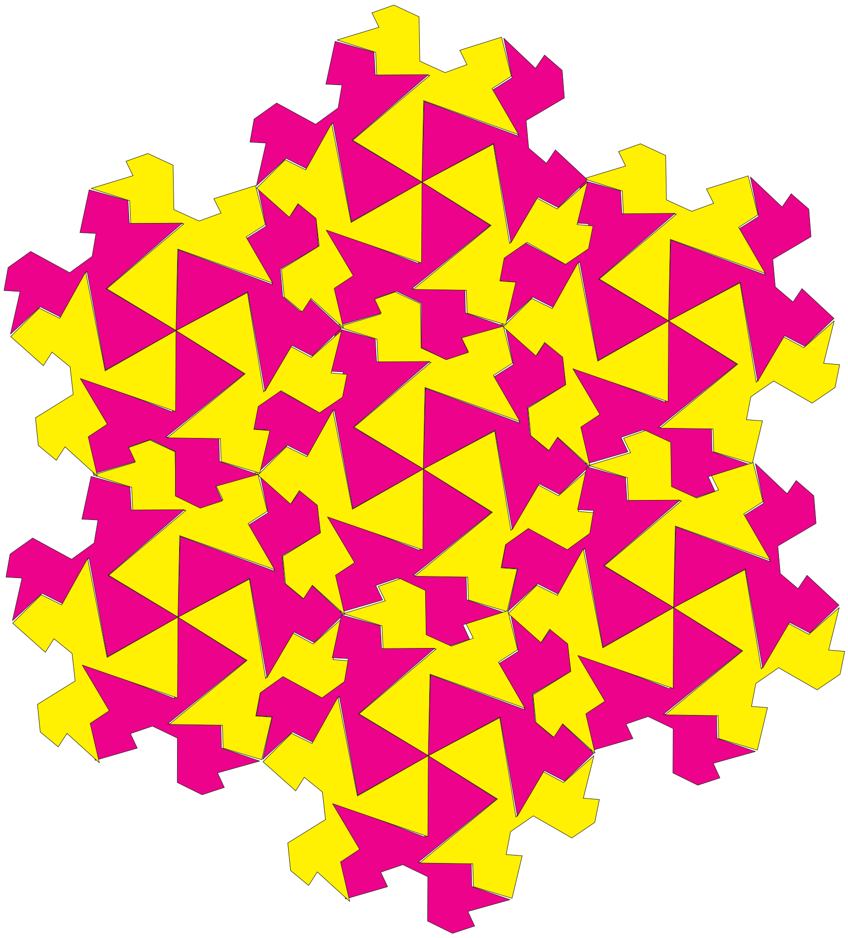


Figura 7.10

7.2 Construção por Translação

Será utilizada agora a Translação para construção de uma figura abstrata auto encaixável.

Crie uma curva começando pelo vértice superior esquerdo figura 7.11 e terminando no vértice inferior esquerdo, podendo entrar ou sair dele.

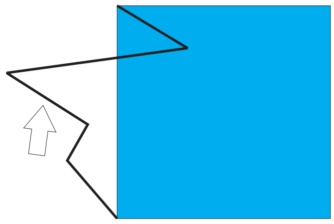


Figura 7.11

Em seguida translade esta curva para o lado oposto do quadrado ocupando os vértices superior direito e inferior direito.figura 7.13.

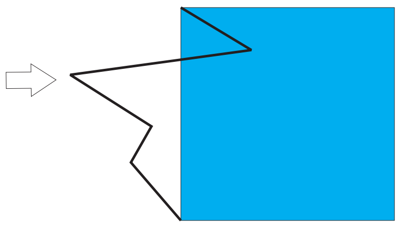


Figura 7.12

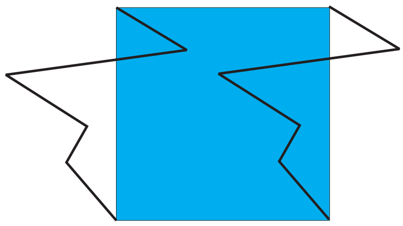


Figura 7.13

Faça agora outra curva na aresta da base do Quadrado figura 7.14.

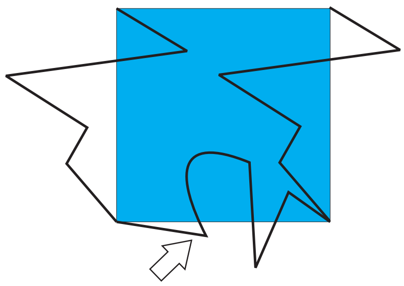


Figura 7.14

Translade essa nova curva para a aresta superior do Quadrado figura 7.16.

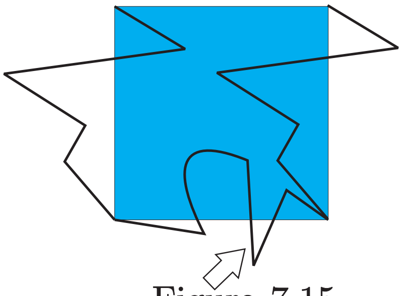


Figura 7.15

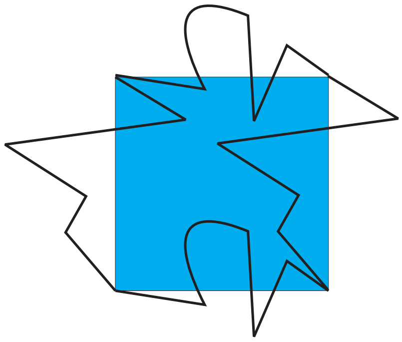


Figura 7.16

A nova figura formada é auto encaixável e será usada como base para construção do mosaico. Observe que a área da figura é encontrada é igual a área do Quadrado original pois as figuras que "saem"do Quadrado são congruentes as que "entram"e uma compensa a outra.

Figura 7.17

Figura 7.18

Para conseguir a expansão desta figura e consequentemente o ladrilhamento com fechamento da superfície basta que a nova figura seja transladada horizontalmente e verticalmente figura 7.19.

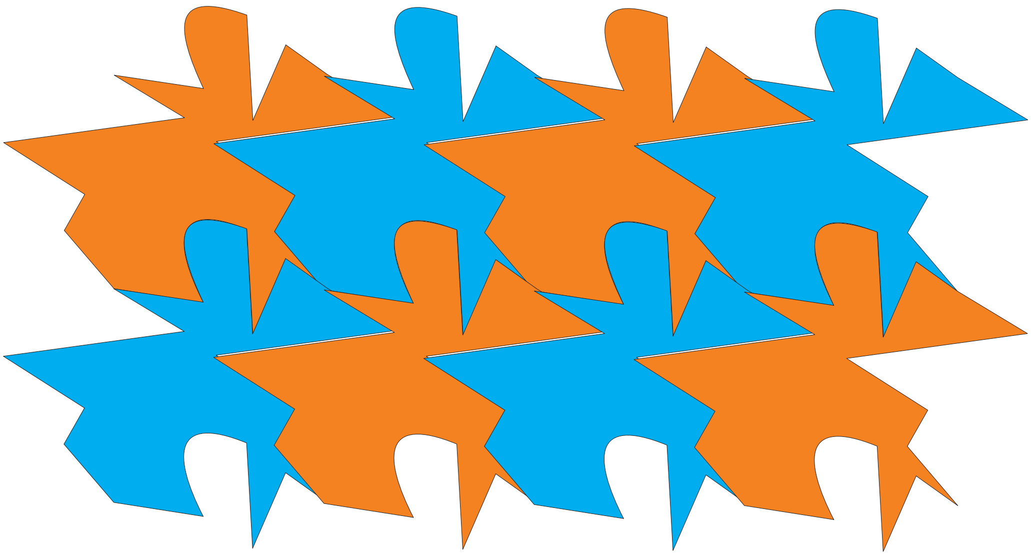


Figura 7.19

Expandir essas figuras numa superfície é perfeitamente possível. figura 7.20.

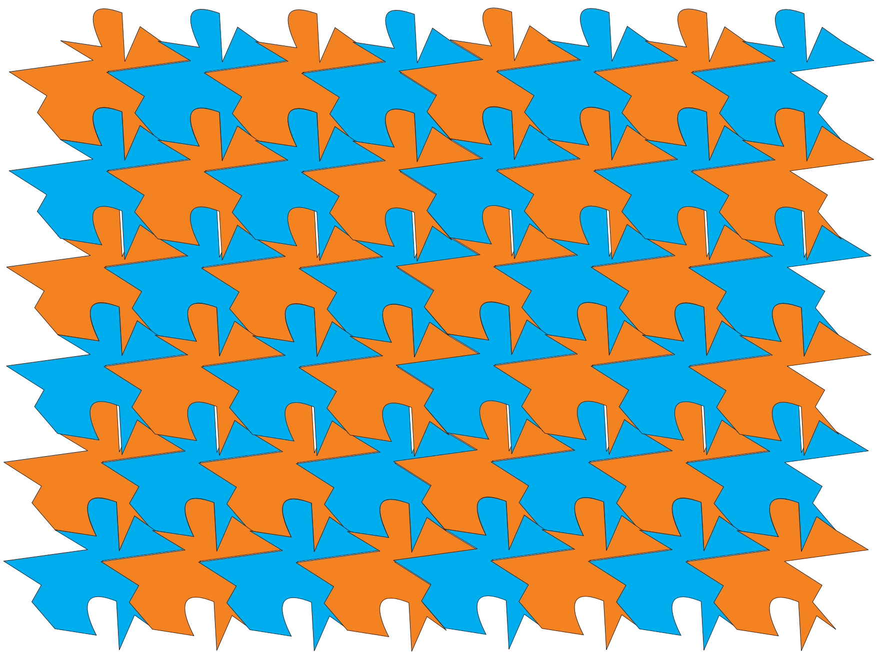


Figura 7.20

7.3 Construção por Reflexão

Para a utilização da reflexão como modo de construção a figura indicada é o losango ou quadrado rotacionado em 45°. Crie uma curva na aresta esquerda inferior do losango figura 7.21.

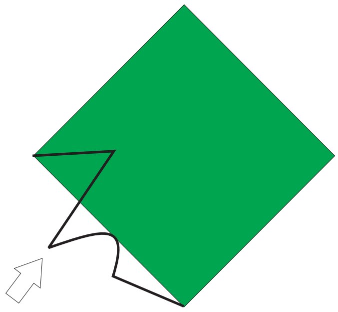


Figura 7.21

Em seguida reflita essa curva em relação a vertical (linha imaginária que liga os vértices superior e inferior do losango)e coloque-a na aresta direita inferior figura 7.23.

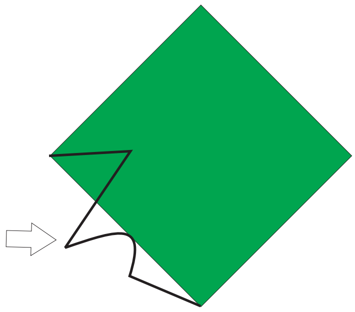


Figura 7.22

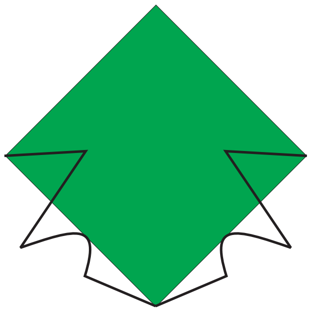


Figura 7.23

Rotacione em 90°essa curva em relação ao vértice da direita do losango figura 7.25.

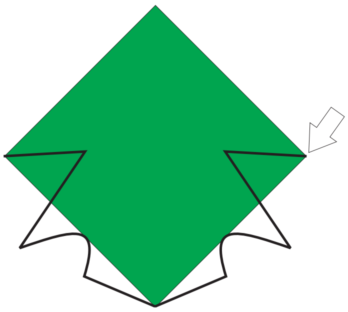


Figura 7.24

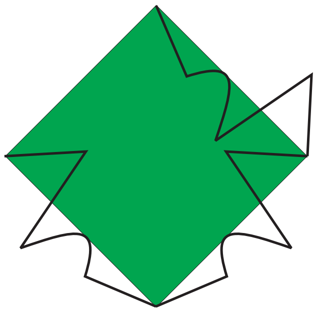


Figura 7.25

Reflita essa curva conseguida em relação a vertical (linha imaginária) e a coloque na aresta superior da esquerda. figura 7.27.

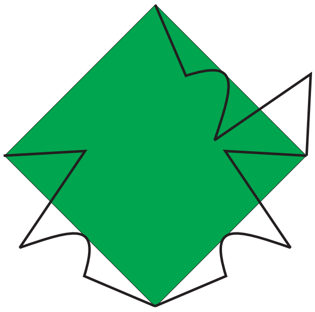


Figura 7.26

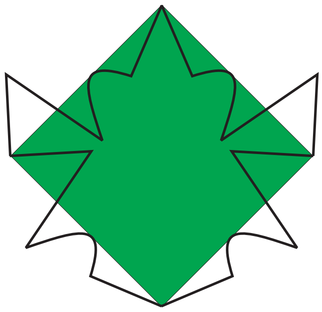


Figura 7.27

A nova figura formada é auto encaixável e será usada como base para construção do mosaico. figura 7.29. Observe que a área da figura é encontrada é igual a área do Losango original pois as figuras que "saem"do Losango são congruentes as que "entram"e uma compensa a outra.

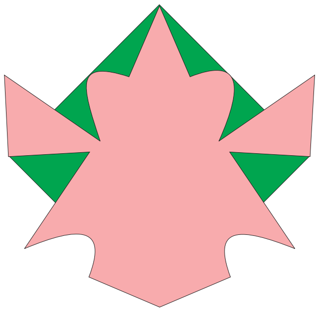


Figura 7.28

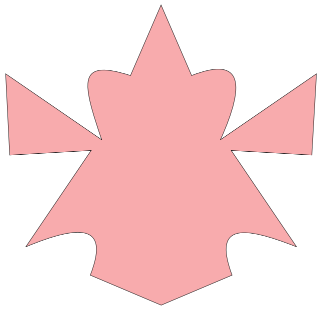


Figura 7.29

Para conseguir a expansão desta figura e consequentemente o ladrilhamento com fechamento da superfície basta que a nova figura seja refletida horizontalmente e verticalmente em relação a ela mesma. figura 7.30.

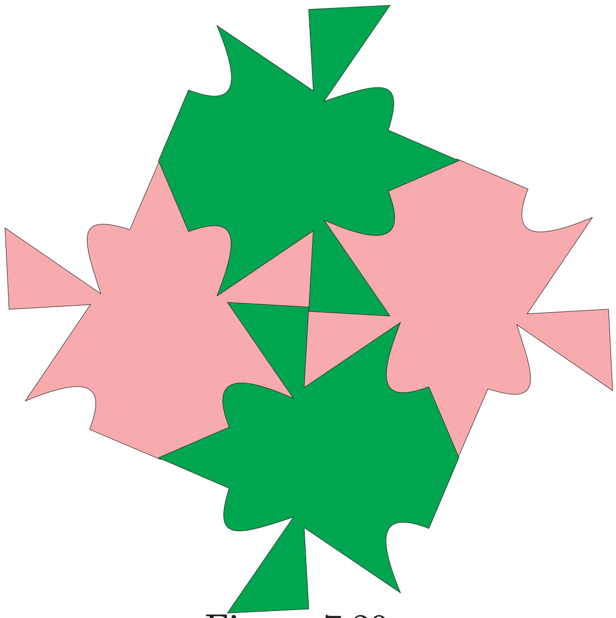


Figura 7.30

Expandir essas figuras numa superfície é perfeitamente possível. figura 7.31.

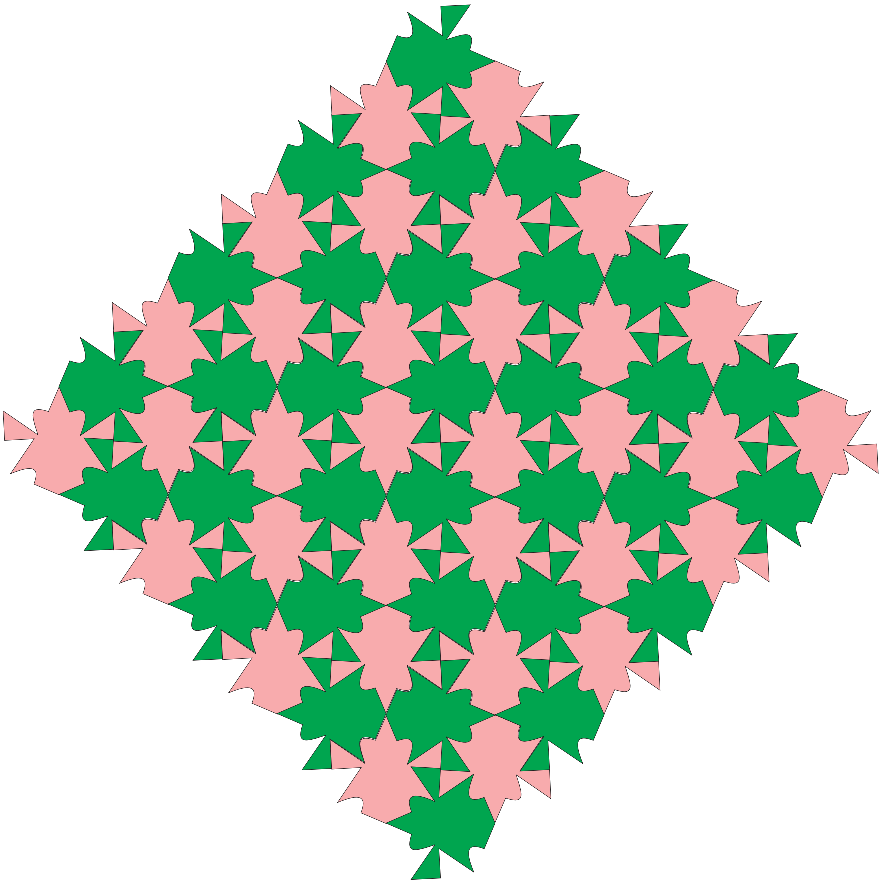


Figura 7.31

7.4 Construção por rotação no Hexágono.

Essa construção foi amplamente utilizada por MC Escher. Essa técnica consiste em aproveitar o Hexágono pra criar as figuras abstratas auto encaixáveis. Para começar cria-se uma curva no vértice superior a direita do Hexágono. figura 7.32.

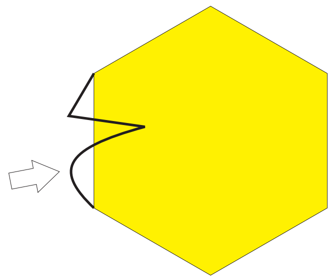


Figura 7.32

Em seguida rotacione essa curva em 120° em relação ao vértice adjacente inferior no sentido horário. figura 7.34.

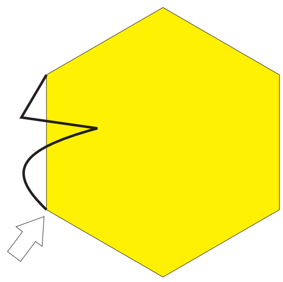


Figura 7.33

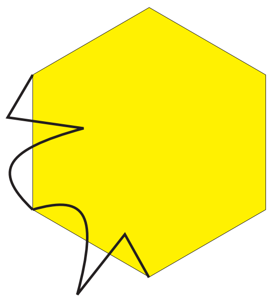


Figura 7.34

Crie outra curva na aresta inferior a direita do hexágono imediatamente após a última que foi rotacionada.figura 7.35.

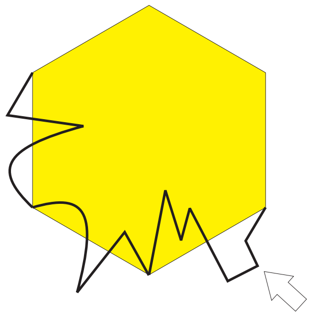


Figura 7.35

Rotacione também essa curva em relação ao próximo vértice em 120° no sentido horário. figura 7.37.

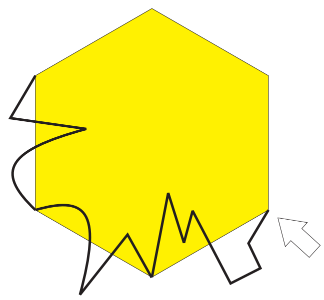


Figura 7.36

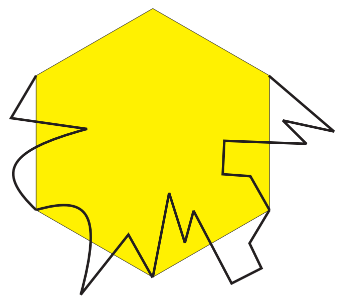


Figura 7.37

Na aresta superior a direita do hexágono crie uma última curva. figura 7.38.

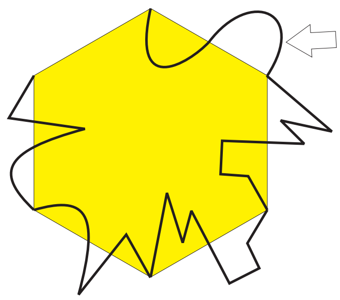


Figura 7.38

Rotacione também essa última curva em 120° em sentido horário em relação ao vértice superior do hexágono conforme figura 7.40.

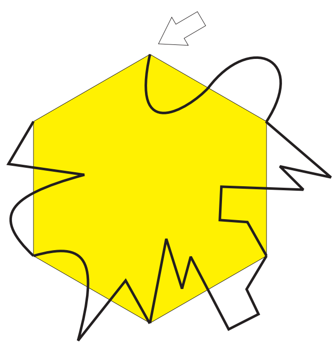


Figura 7.39

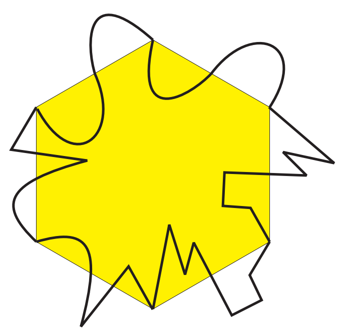


Figura 7.40

A figura encontrada já é auto encaixável figura 7.42. Observe que a área da figura é encontrada é igual a área do Hexágono original pois as figuras que "saem"do Hexágono são congruentes as que "entram"e uma compensa a outra.

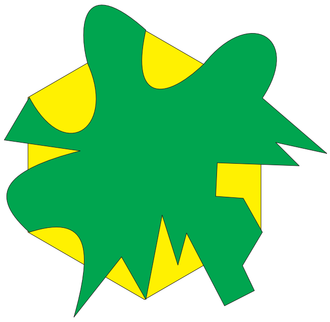


Figura 7.41

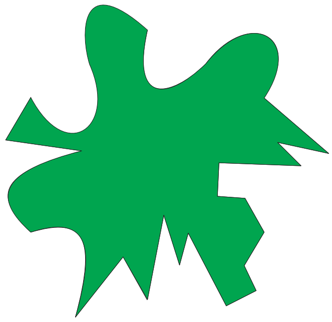


Figura 7.42

Para expandir a figura basta rotacionar a figura pronta em 120° e encaixá-la. figura 7.43.

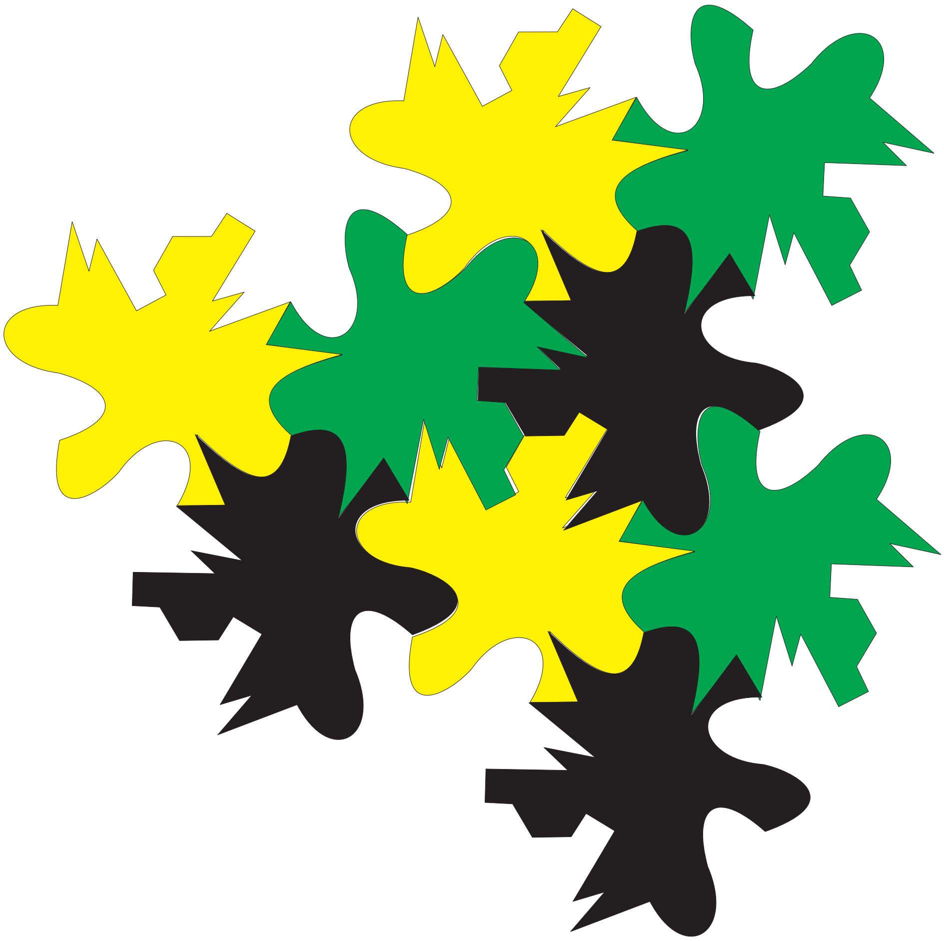


Figura 7.43

Repita este processo e terá a expansão por toda a superfície. figura 7.44.

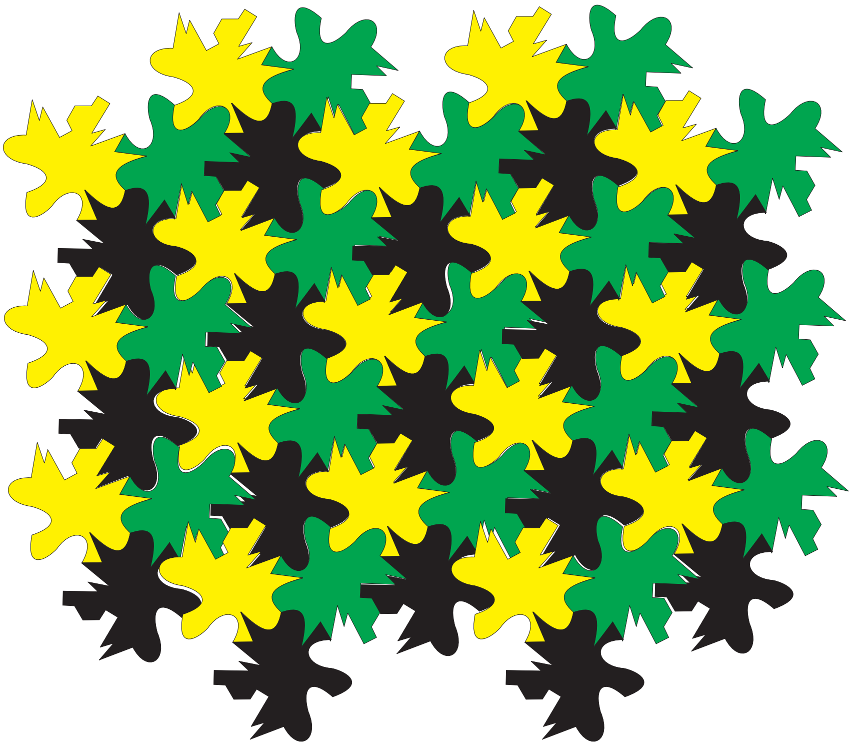


Figura 7.44

Capítulo 8

Utilizando as técnicas de Escher nos trabalhos de escola

8.1 Obra famosa de Escher

Nessa obra Escher utilizou a rotação num hexágono para construir lagartos que se encaixam neles mesmos. figura 8.1.

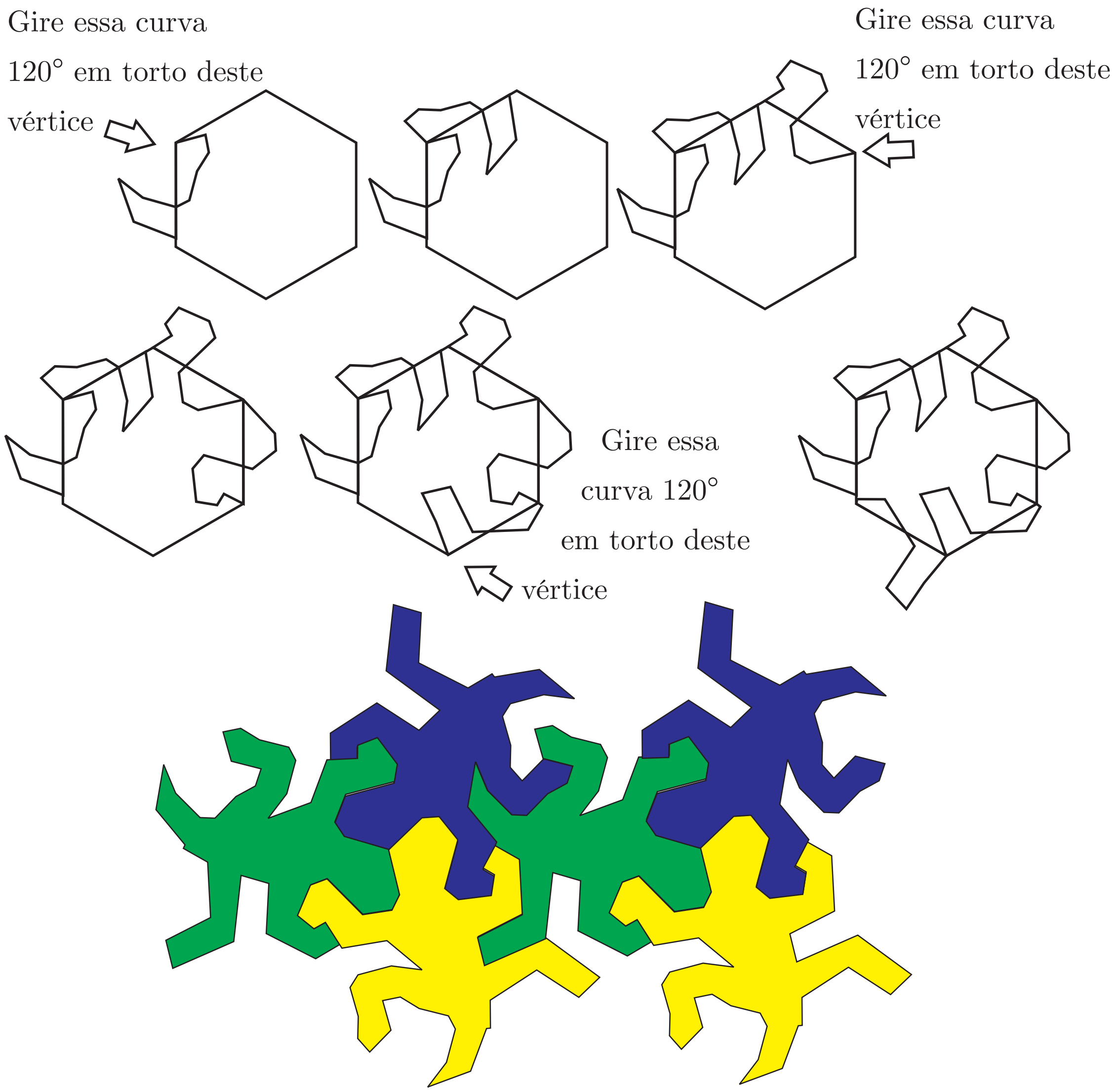


Figura 8.1 Construção do lagarto de Escher

O resultado foi além disso e dá a impressão de estarem saindo do plano e entrando numa terceira dimensão. figura 8.2.

Figura 8.2 Repteis (Fonte: internet)

8.2 Trabalho na escola homenageando Escher.

Após apresentar algumas destas técnicas aos alunos de ensino básico foi proposto aos alunos a construção de uma obra inspirada nessa obra famosa do artista: Répteis.

A ideia era criar uma calçada na escola feita com blocos de concreto na forma de lagarto que se encaixavam perfeitamente.

Alunos de todas as séries do ensino médio se propuseram a ratear as despesas e participar efetivamente do projeto. Após os materiais serem comprados e disponibilizados deu-se início os trabalhos.

No começo os alunos tiveram dificuldade em acertar a proporção de areia, cimento e pó de brita para confecção do concreto. figura 8.3.

Figura 8.3 Alunos preparando a massa de concreto

Após algumas tentativas frustradas chegou-se a uma medida razoável de material que tornava os lagartos mais resistentes após serem retirados da forma. figura 8.4.

Figura 8.4 Enchendo a forma de concreto

Figura 8.5 Tirando os lagartos da forma

Depois de deixar os blocos secarem por três dias os alunos tiveram finalmente a oportunidade de verificar se os blocos realmente se encaixavam. figura 8.6.

Figura 8.6 Conferindo o encaixe dos lagartos

Feito isso agora era hora de pintar os lagartos de três cores diferentes que indicavam as posições relativas às rotações de 120° e começar a fazer a calçada. Na figura 8.7 tem-se a calçada pronta no pátio da escola em Ceilândia. O resultado agradou a toda comunidade escolar e resultou inclusive numa matéria no jornal mais lido da cidade.

Figura 8.7 Calçada pronta

Figura 8.8 Professor Emerson conferindo a calçada do Escher

8.3 Trabalho sobre Escher feito de isopor

Devido ao grande trabalho que a calçada proporcionou aos alunos e o tempo gasto para conclusão, foi necessário pensar em alguma forma diferente de criar estes blocos em forma de lagarto que não fosse de concreto.

Pensou-se então em fazê-lo de isopor, que é um material leve e barato.

A ideia agora era fazer os mesmos lagartos só que usando placas de 50 milímetros de espessura e utilizando uma máquina caseira de cortar isopor.

Essa máquina foi feita com filamento de tungstênio (resistência de chuveiro) e utilizou-se três lâmpadas incandescentes de 150 WHATTS para garantir a resistência adequada e o aquecimento do filamento suficientes para um corte perfeito na placa de isopor.

Ela foi construída num pedaço de madeira (Compensado) com uma área de corte suficientemente grande para se cortar o lagarto de forma perpendicular já que o filamento ficou reto em relação à madeira. figura 9.9.

Figura 8.9 Aluno cortando o lagarto de isopor

Após os lagartos serem cortados o próximo passo era pintar de três cores diferentes como no trabalho anterior. figura 8.10.

Figura 8.10 Aluno pintando o lagarto de isopor

Por ser um material leve a sugestão era colar os lagartos encaixados numa parede visível na escola e após a conclusão da pintura deu-se início essa colagem. figura 8.11.

Figura 8.11 Alunos colando os lagartos na parede

O resultado mais uma vez agradou a todos e despertou a curiosidade da maioria das pessoas que passavam por perto na hora que os alunos concluíam o trabalho.

Na figura 8.12 tem-se autor e a obra dos alunos exposta na parede da escola.

Figura 8.12 Professor Emerson e o trabalho pronto

Uma turma inclusive resolveu fazer um mosaico criado por eles mesmos utilizando a técnica da rotação num hexágono e também colou os trabalhos numa parede da escola. figura 8.13.

Figura 8.13 Alunos colando o trabalho na parede

O resultado pode ser visto na figura 8.14.

Figura 8.14 Trabalho pronto

8.4 Trabalho sobre Escher feito de E.V.A.

Após diversos trabalhos sobre o Escher serem feitos utilizando-se os lagartos como inspiração chegou a hora de observar a criatividade dos alunos.

Foi proposto a eles que criassem imagens abstratas auto encaixáveis inspiradas nas obras do Escher.

Essas obras inéditas eram passadas para um material emborrachado chamado E.V.A em três cores diferentes e cortados com estilete para que fossem colados numa cartolina e expostos para toda comunidade escolar.

Os alunos partiram de um hexágono regular previamente distribuídos a eles em tamanho padrão e os mesmos eram orientados a utilizar a técnica de rotação em hexágono para criarem suas próprias figuras conforme sugestão de trabalho que será mostrado no capítulo 10.

O resultado foi um festival de figuras abstratas e coloridas que encantaram alunos e professores da escola. figuras 8.15 e 8.16.

Figura 8.15 Trabalhos feitos em E.V.A pelos alunos de 2º ano

Otras turmas fizeram o mesmo trabalho.

Figura 8.16 Trabalhos feitos em E.V.A por outra turma de 2º ano

Capítulo 9

Técnica do Escher em mosaicos com polígonos diferentes

9.1 Técnica do Escher no mosaico com octógonos e quadrados

Maurits Cornelis Escher utilizou basicamente construção de mosaicos a partir dos mesmos polígonos como quadrados, triângulos e hexágonos.

Será mostrado agora a possibilidade de usar o método da translação de Escher em mosaicos constituídos de polígonos diferentes como o composto de octógonos e quadrados.

Para um melhor entendimento dessa técnica desenha-se um octógono e quatro quadrados em suas arestas alternadas conforme o mosaico demonstrado anteriormente figura 4.8.

Crie uma curva como nos casos anteriores podendo sair e entrar do octógono na aresta esquerda figura 9.1 começando num vértice e terminando no vértice subsequente e translade essa curva para a aresta oposta paralela figura 9.2.

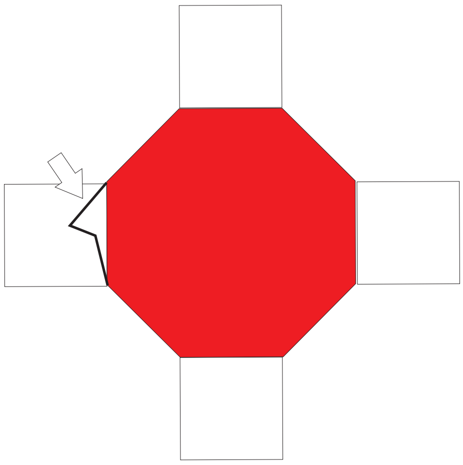


Figura 9.1

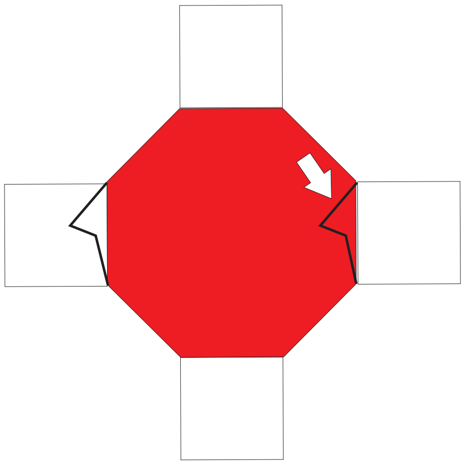


Figura 9.2

Repita o procedimento com uma nova curva no vértice adjacente (inferior a esquerda) figura 9.3 e o translada também para a aresta oposta paralela figura 9.4.

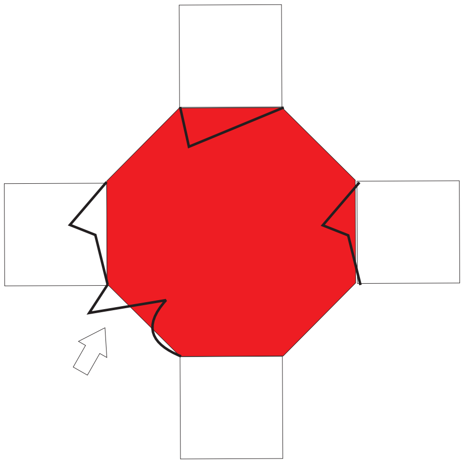


Figura 9.3

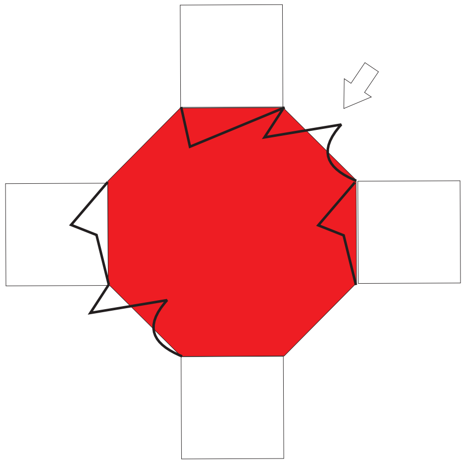


Figura 9.4

Nas duas próximas arestas do Octógono repita este mesmo procedimento figura 9.5 e figura 9.7.

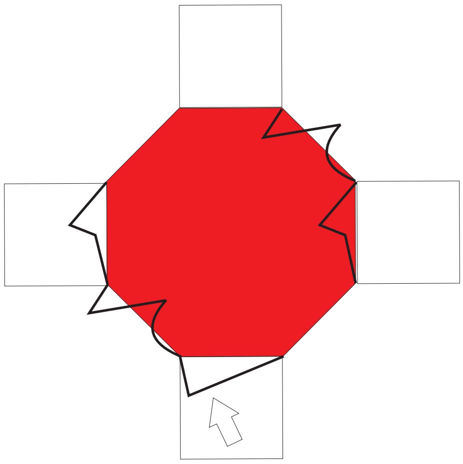


Figura 9.5

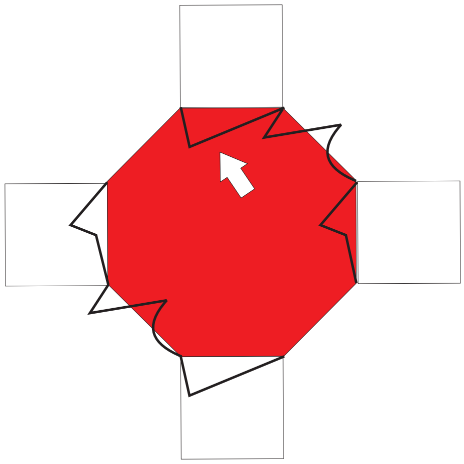


Figura 9.6

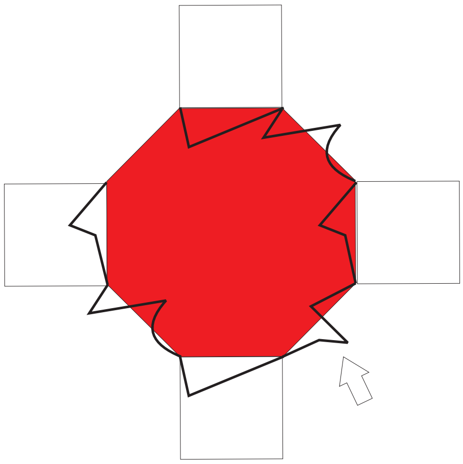


Figura 9.7

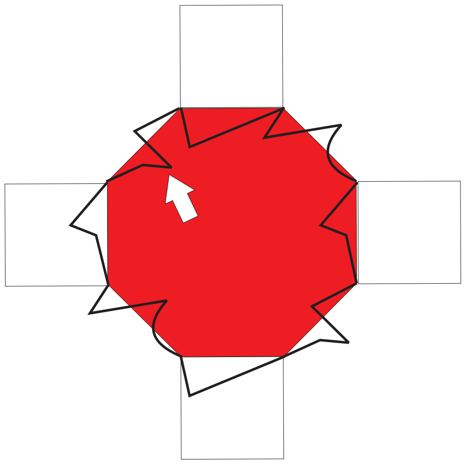


Figura 9.8

Desta vez serão formadas duas figuras diferentes. Uma a partir do octógono que é a junção das oito curvas construídas com os procedimentos adotados. figura 9.10.

A outra figura será formada com as quatro curvas contidas no quadrado. figura 9.11.

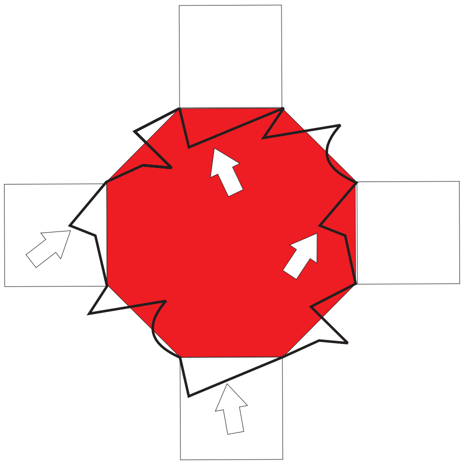


Figura 9.9

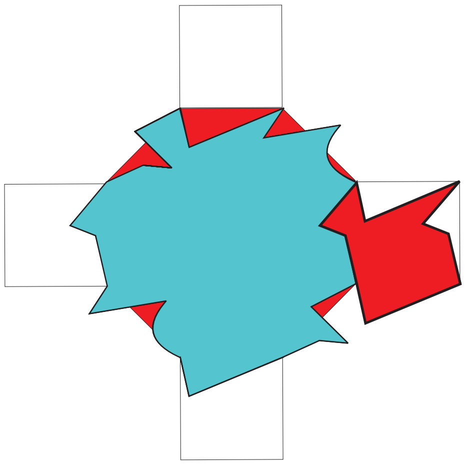


Figura 9.10

Estas duas figuras diferentes e abstratas comporão o mosaico.

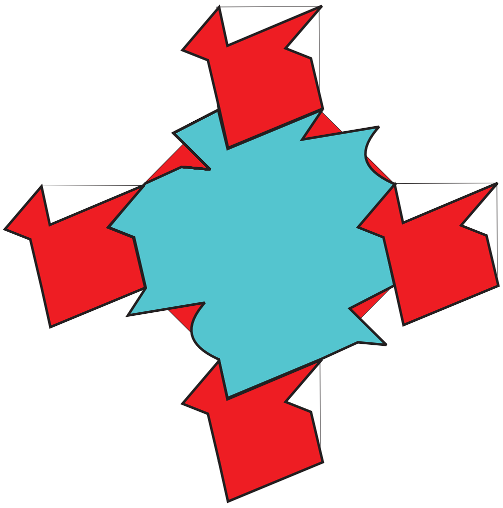


Figura 9.11

Para expandir essas figuras numa superfície é só transladar as figuras diferentes horizontalmente e verticalmente. figura 9.12.

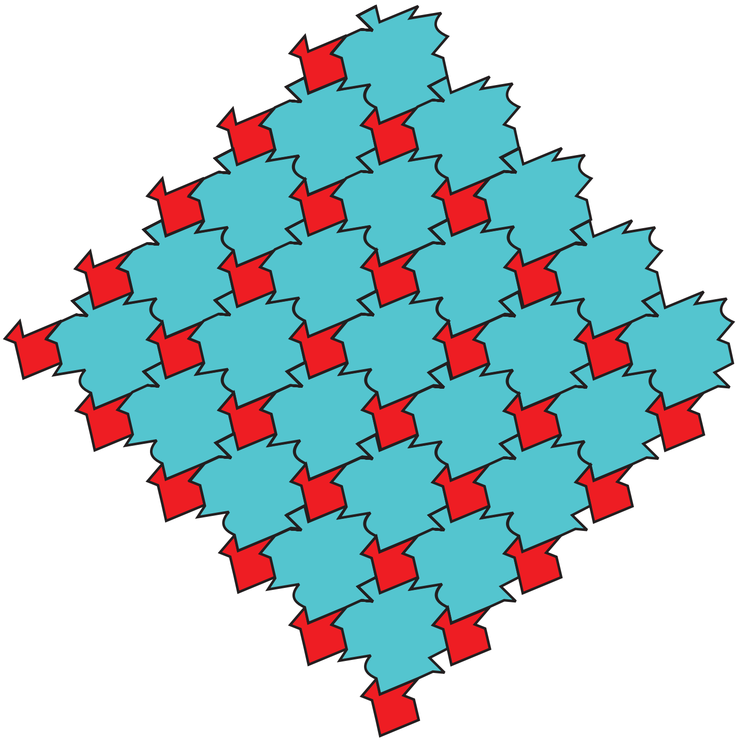


Figura 9.12

9.2 Técnica do Escher no mosaico de Hexágonos e Triângulos

Para se construir um mosaico com figuras abstratas a partir das técnicas utilizadas por Escher é preciso tomar alguns cuidados.

Quando se cria uma curva no Hexágono é preciso que se observe se ela não está utilizando espaços que poderão ser usados na translação. Para isso foi criado estes losangos em cada aresta do Hexágono para delimitar a área utilizável em cada curva criada. figura 9.13. Cria-se então uma curva ou linha curva entre dois vértices do Hexágono e traslade essa linha para a aresta oposta do hexágono.figura 9.14.

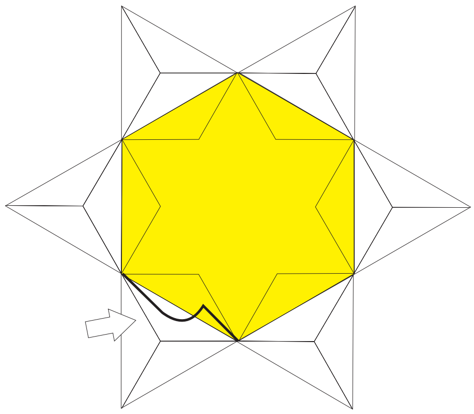


Figura 9.13

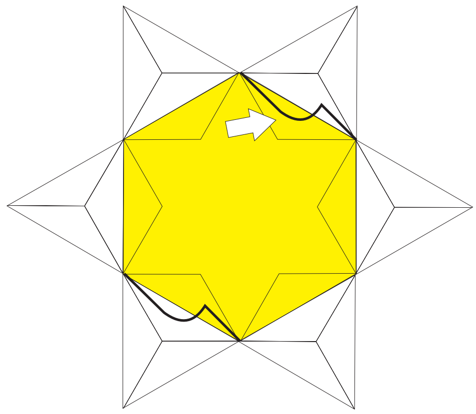


Figura 9.14

Repita o procedimento anterior com outra curva na aresta adjacente (inferior direita) figura 9.15, sempre observando a área permitida para que não ocorra "invasão"na hora do encaixe e em seguida translade também essa curva para a aresta oposta. figura 9.16.

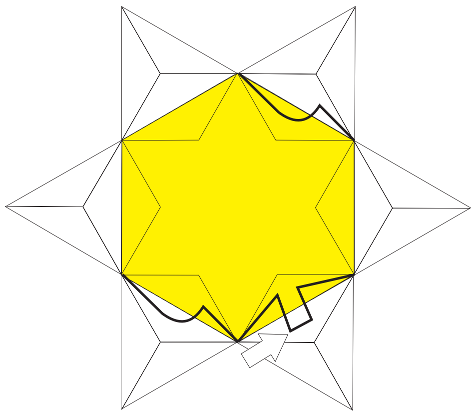


Figura 9.15

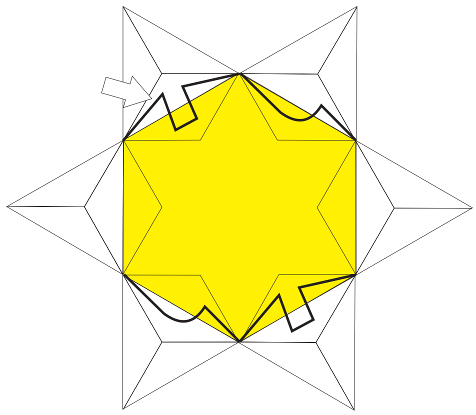


Figura 9.16

Na terceira aresta do hexágono (aresta direita) figura 9.17 faça uma nova curva e translade também para o lado oposto do hexágono figura 9.18.

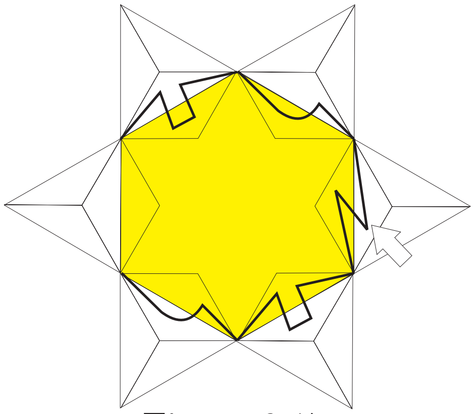


Figura 9.17

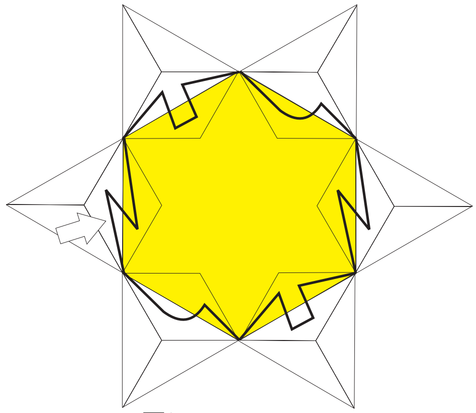


Figura 9.18

A figura formada fará parte do mosaico juntamente com mais duas novas figuras conseguidas através das curvas alternadas e construídas em cima dos Triângulos.

Três destas curvas alternadas figura 9.19 formarão uma figura e as outras três formarão as duas últimas figuras do mosaico. figura 9.20.

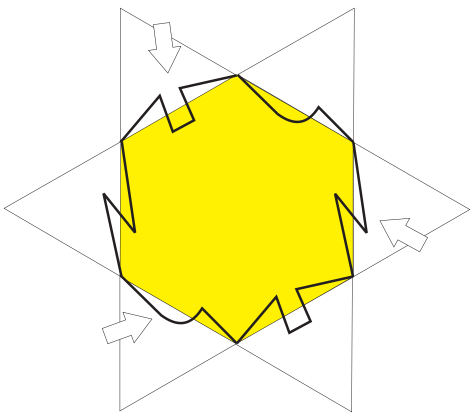


Figura 9.19

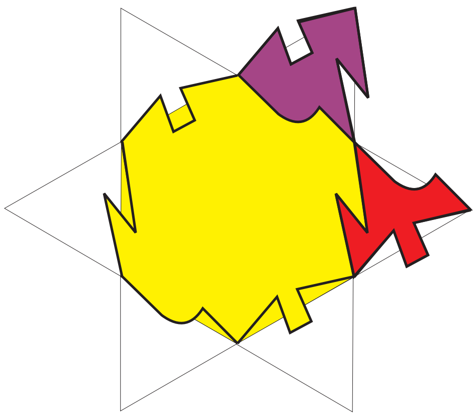


Figura 9.20

As três cores diferentes indicam as três figuras que comporão o mosaico.

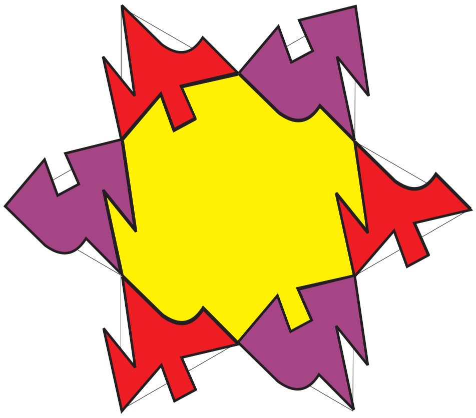


Figura 9.21

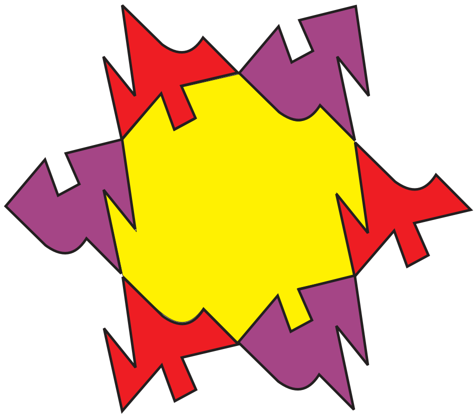


Figura 9.22

Para se conseguir a expansão destas figuras é só transladar cada até que haja o encaixe figura 9.23.

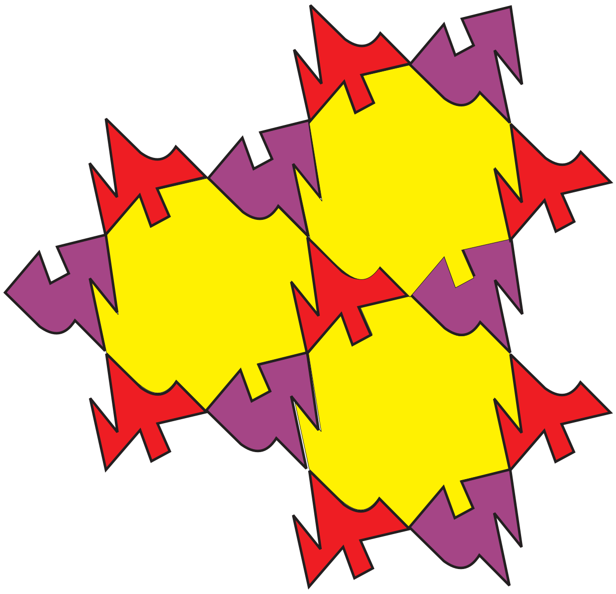


Figura 9.23

O resultado é este mosaico constituído de três figuras abstratas e diferentes que se expandem por uma superfície plana. figura 9.24.

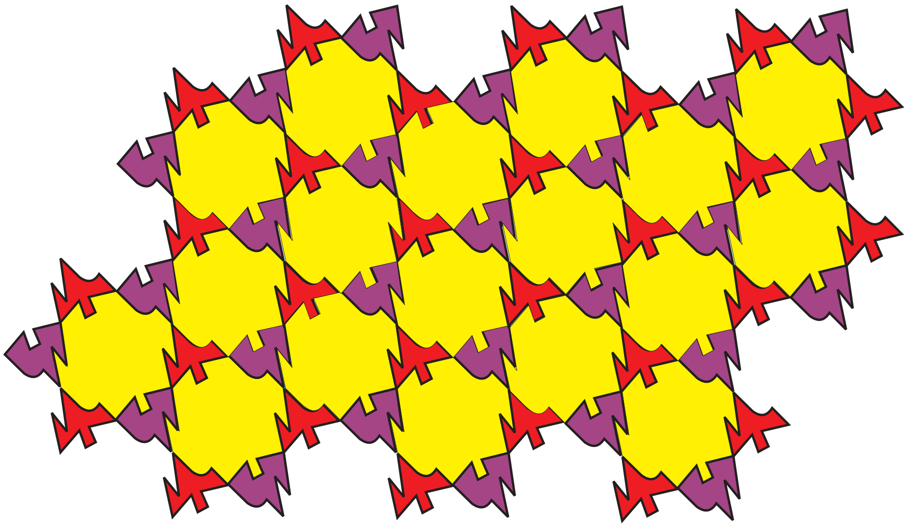


Figura 9.24

9.3 Técnica do Escher no mosaico de Dodecágonos e Triângulos.

Assim como no caso anterior foi criado losangos para impedir que curvas invadam áreas que possam atrapalhar o encaixe futuro. Só que desta vez foram losangos de tamanhos diferentes já que nos triângulos a "invasão"seria menor e no Dodecágono maior.figura 9.25.

Pra começar cria-se uma curva numa aresta do Dodecágono entre dois vértices dentro do losango menor e o translade para a aresta oposta. figura 9.26.

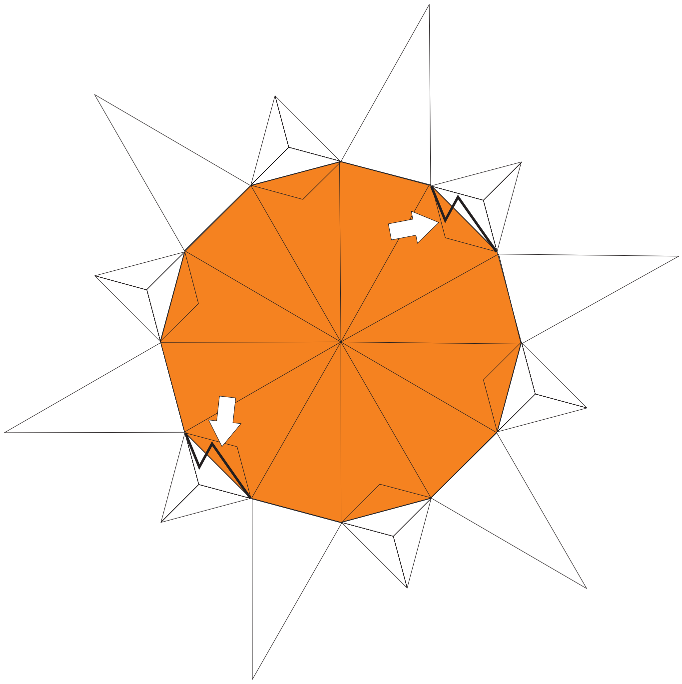


Figura 9.25

Cria-se uma segunda curva na aresta adjacente a primeira e repita o processo criando uma nova curva no losango maior e em seguida translade essa curva para a aresta oposta. figura 9.26.

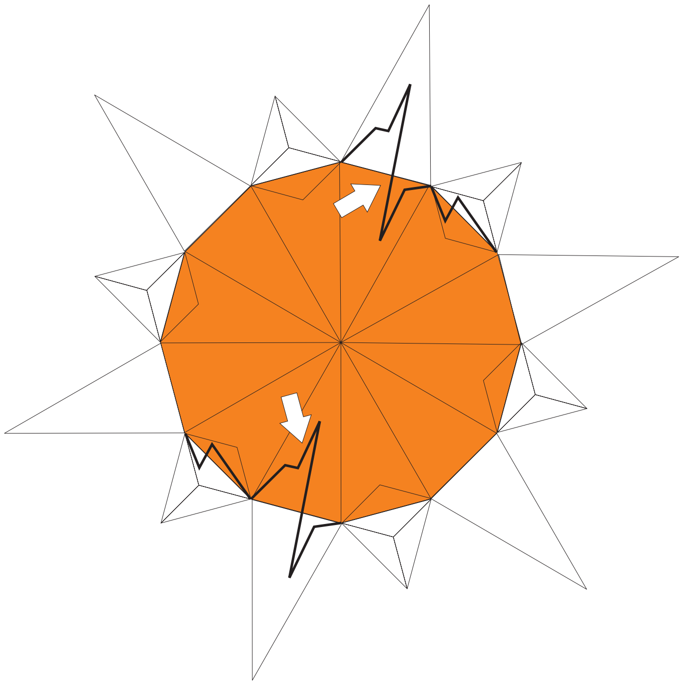


Figura 9.26

Repita o passo anterior na terceira aresta no losango menor e translade também para a aresta oposta. figura 9.27.

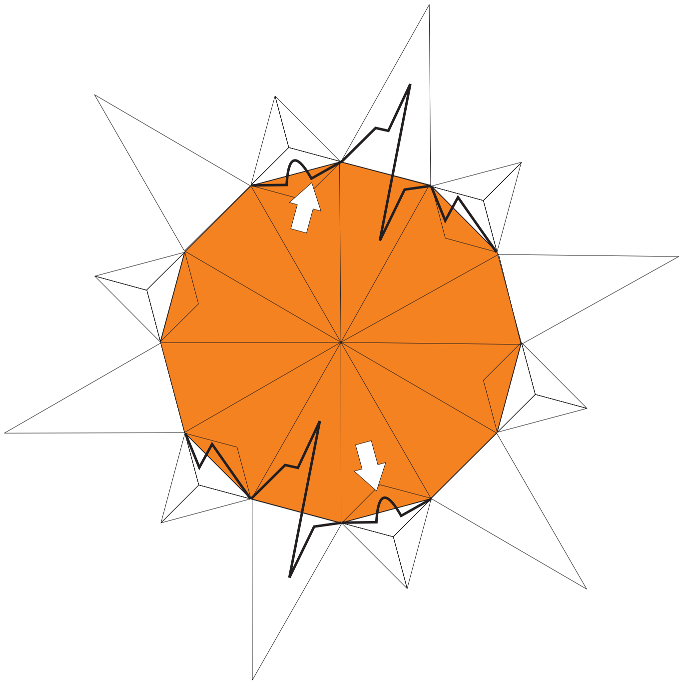


Figura 9.27

Novamente crie uma aresta na quarta aresta do dodecágono no losango maior e translade para a aresta oposta. figura 9.28.

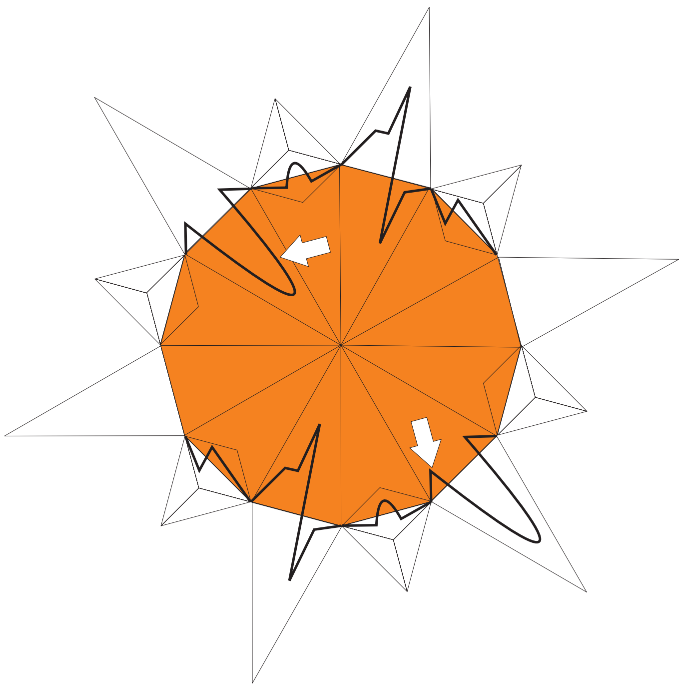


Figura 9.28

Na quinta aresta proceda da mesma forma dentro do losango menor e translade também para a aresta oposta. figura 9.29.

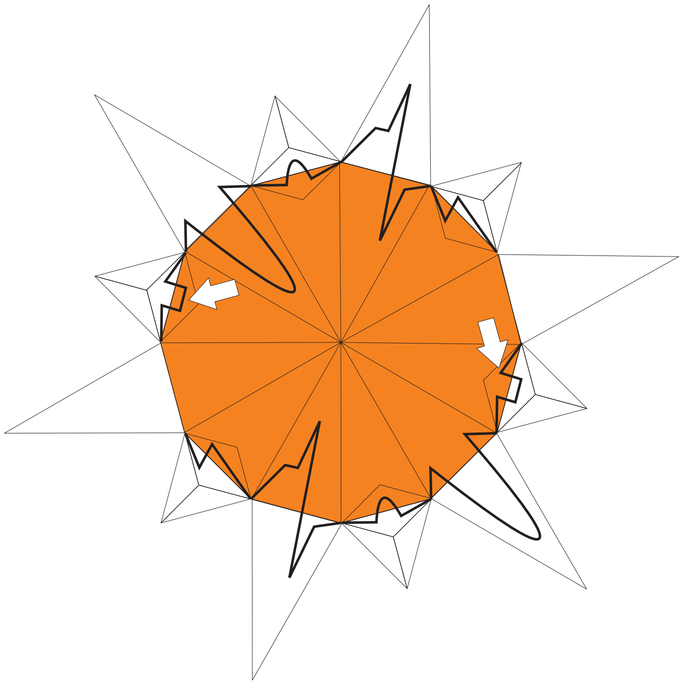


Figura 9.29

Por último crie mais uma curva dentro do último losango maior e translade também para a aresta oposta.figura 9.30.

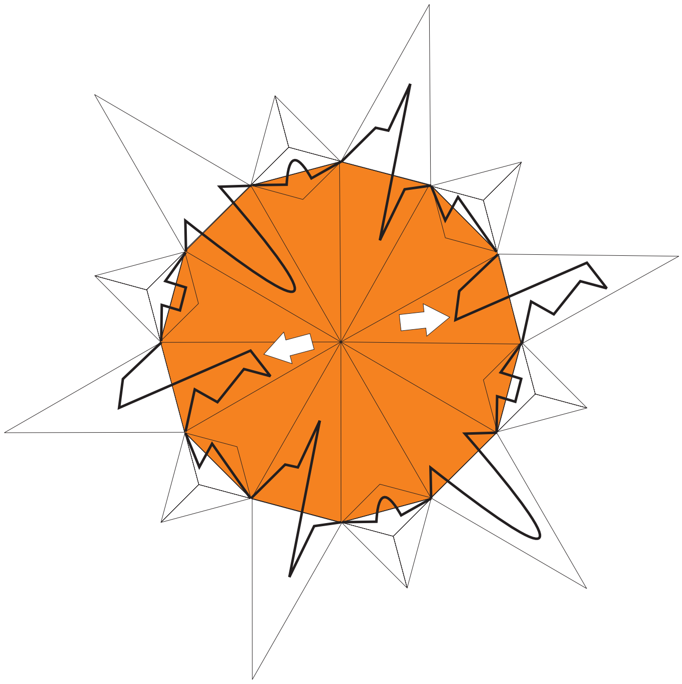


Figura 9.30

Com a figura encontrada é possível fazer os encaixes no mosaico constituídos de dodecágonos e triângulos. figura 9.31.

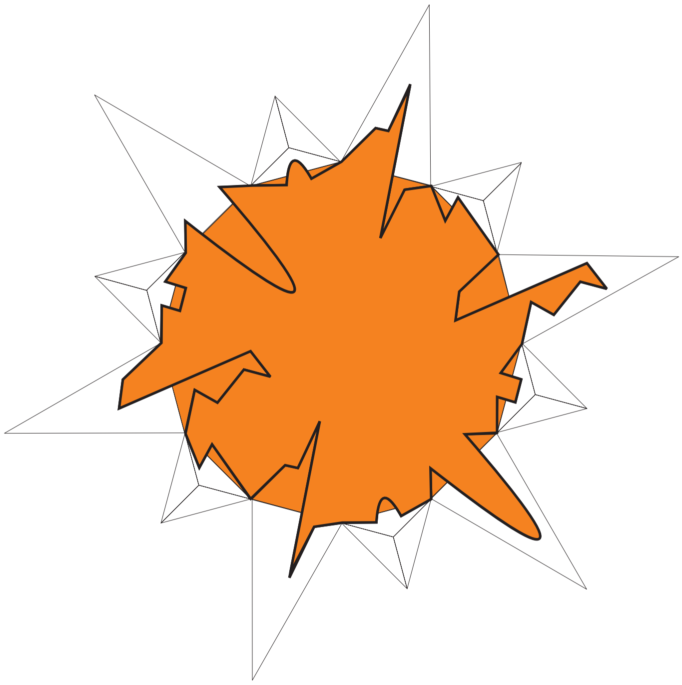


Figura 9.31

Quando se encaixa os dodecágonos é possível ver buracos que ficariam no lugar dos triângulos. Com isso temos mais duas figuras que compõem o mosaico conforme as cores diferentes usada na expansão da imagem. figura 9.32.

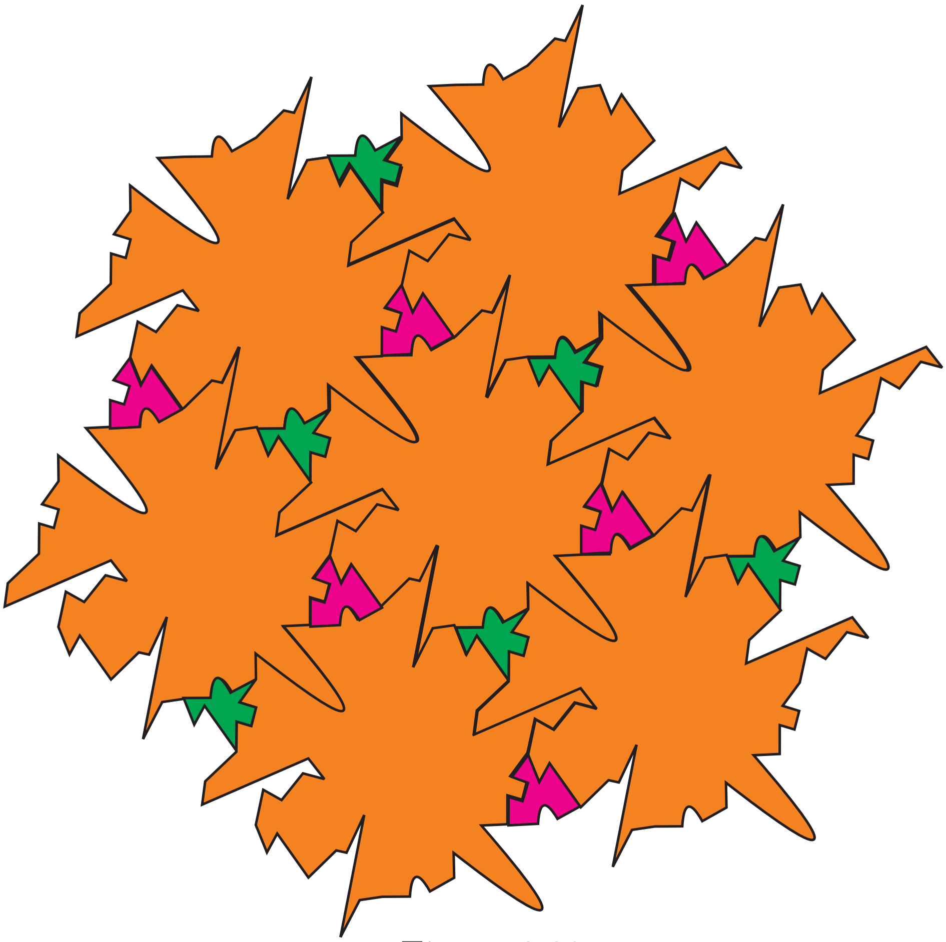


Figura 9.32

Para expandir essas três figuras é preciso transladar cada uma das três figuras e observar se as menores estão de forma alternada ao redor do dodecágono. figura 9.33.

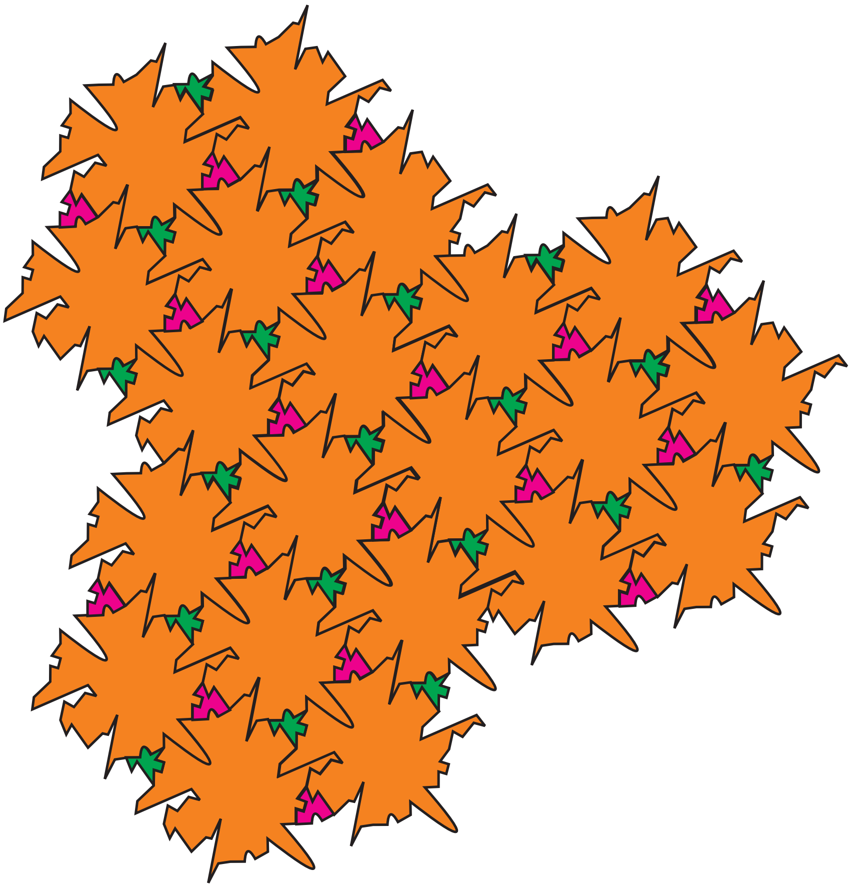


Figura 9.33

9.4 Técnica do Escher no mosaico de Dodecágonos, Hexágonos e Quadrados.

A técnica usada agora será aplicada em um mosaico constituído de três polígonos regulares diferentes e parte-se da ideia inicial de construção deste mosaico para não se "invadir"áreas destinadas aos outros polígonos na hora de criar as curvas.

Assim como no caso anterior foi criado losangos em arestas alternadas do dodecágono.

Pra começar cria-se uma curva numa aresta do Dodecágono entre dois vértices dentro do losango menor e o translada para a aresta oposta. figura 9.34.

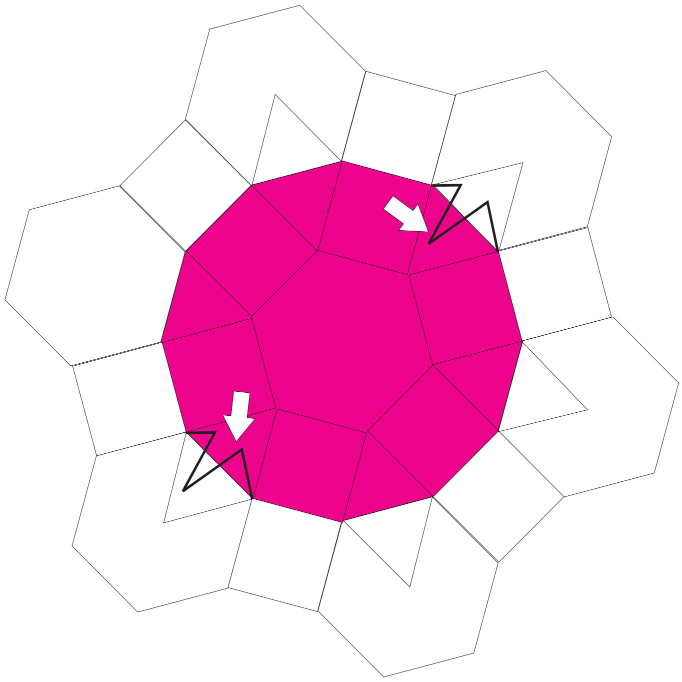


Figura 9.34

Aproveitando a primeira curva criada no primeiro passo rotacione essa linha em 150° em relação ao segundo vértice para que a curva se encaixe na aresta adjacente e em seguida translade também essa nova curva para a aresta oposto. figura 9.35.

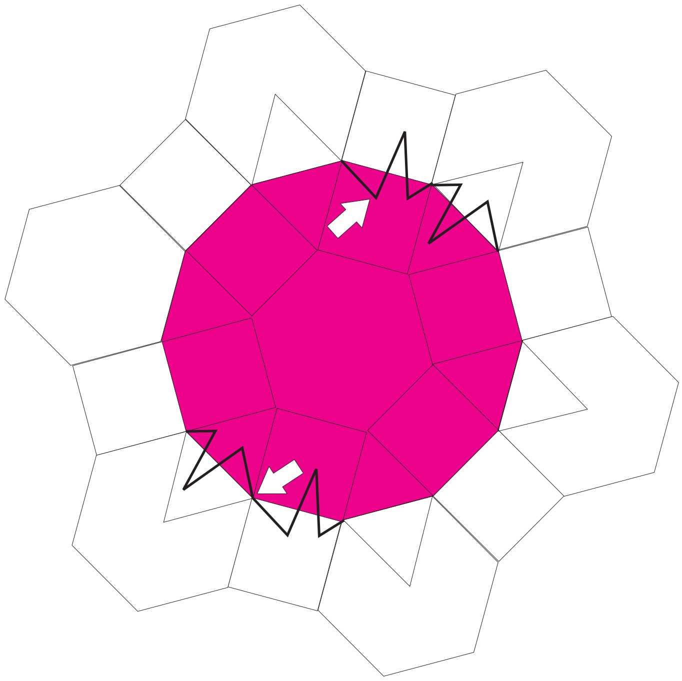


Figura 9.35

Na terceira aresta do dodecágono crie mais uma curva dentro do losango e translade-a para a aresta oposta. figura 9.36.

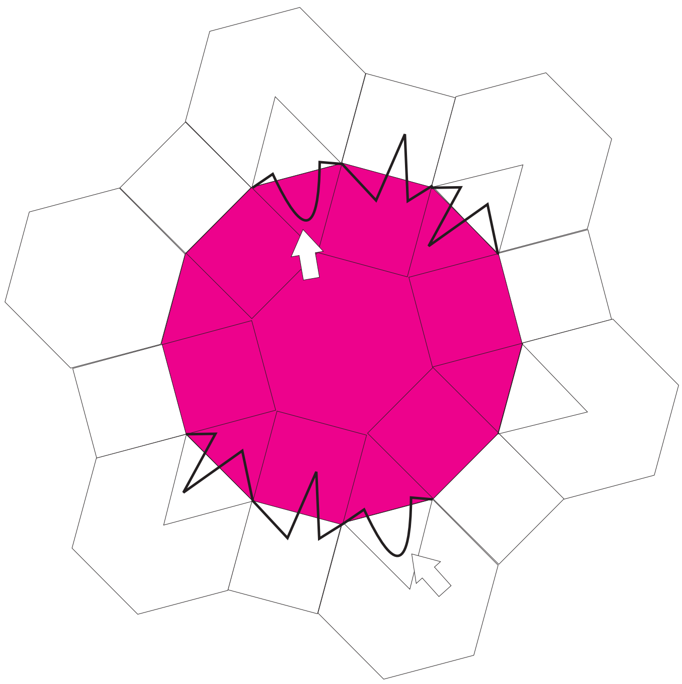


Figura 9.36

Aproveite a curva criada no passo anterior e rotacione em 150° para a aresta ao lado e em seguida translade para a aresta oposta do dodecágono. figura 9.37.

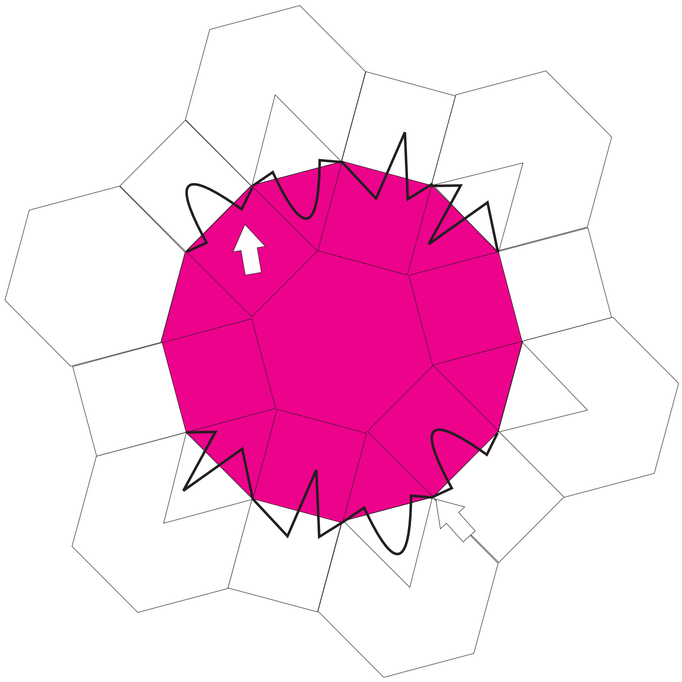


Figura 9.37

Na quinta aresta crie uma nova curva e translade também para a aresta oposta. figura 9.38.

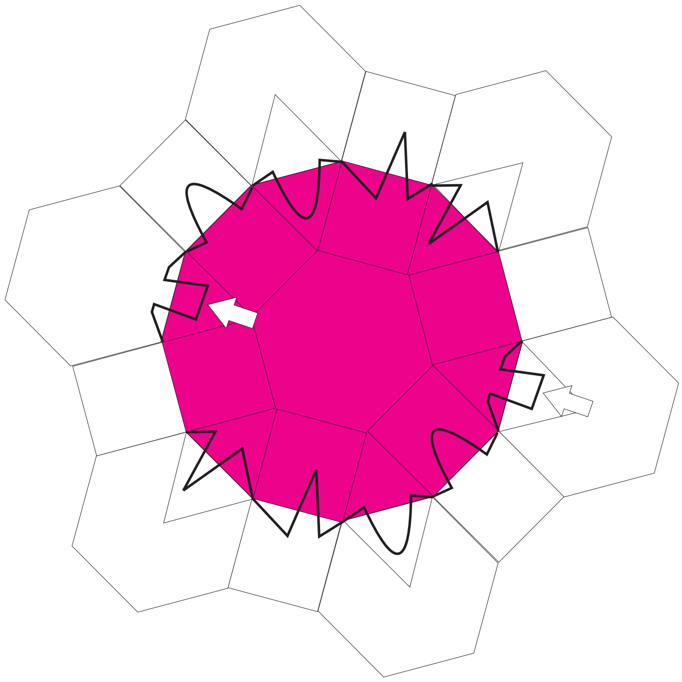


Figura 9.38

Rotacione em 150° essa curva criada na quinta aresta do dodecágono para se encaixar na sexta aresta e em seguida translade também para o lado oposto do polígono para fechar a figura abstrata. figura 9.39.

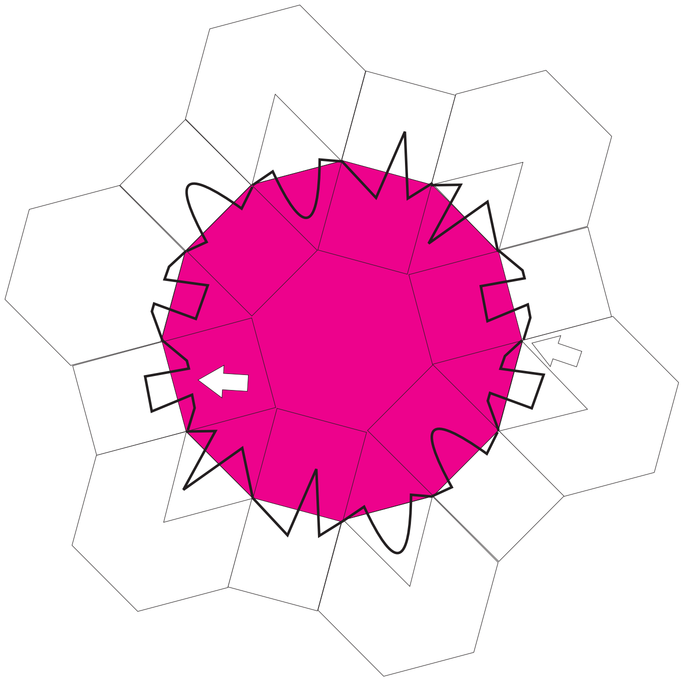


Figura 9.39

Nos seis hexágonos existem três curvas que foram criadas e transladadas na construção da figura. Junte-as ao redor de um hexágono figura 9.40 e com isso têm-se uma figura abstrata gerada a partir do Hexágono.

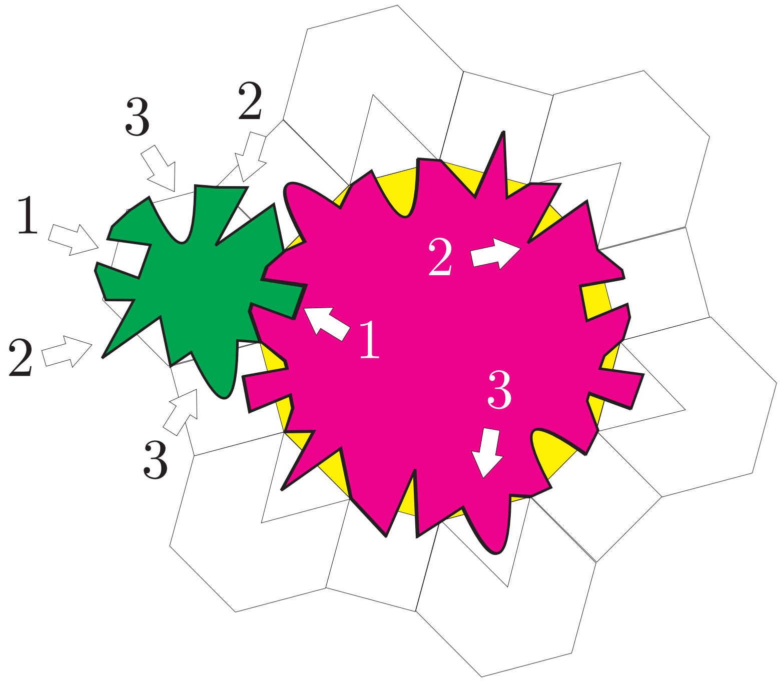


Figura 9.40

Com a figura encontrada é possível fazer os encaixes no mosaico constituídos de dodecágonos, Hexágonos e Quadrados.

Colocando essas 6 figuras abstratas geradas a partir do Hexágono em volta da figura conseguida com o Dodecágono percebe-se seis espaços vazios que serão ocupados por três figuras diferentes geradas a partir do quadrado que compõem o mosaico original.

Essas cinco figuras estão pintadas de cinco cores diferentes para melhor entendimento figura 9.41.

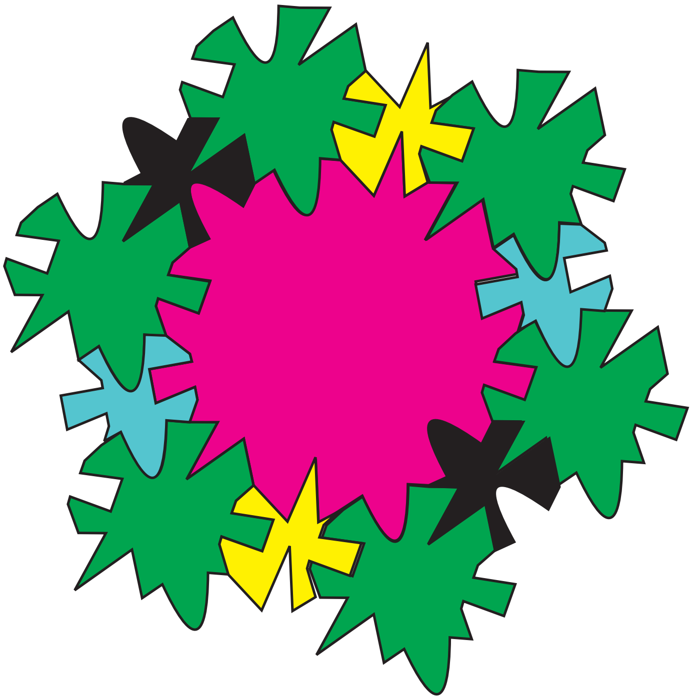


Figura 9.41

Ao expandir as cinco figuras no plano fica claro o porquê do procedimento. figura 9.42.

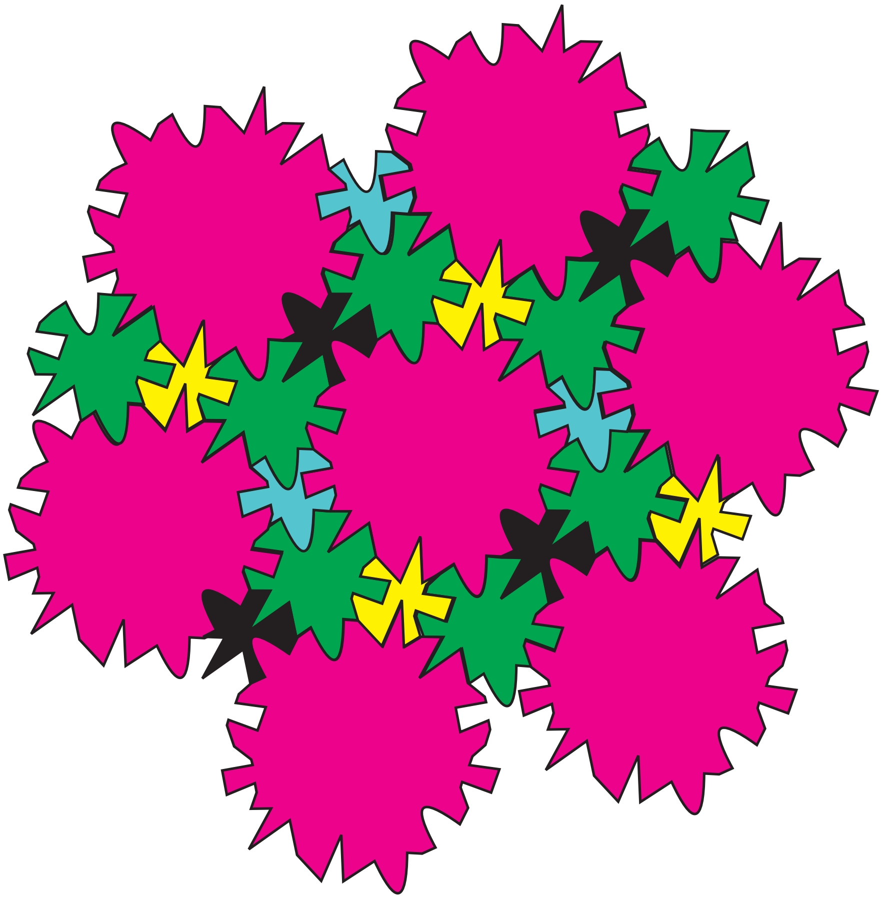


Figura 9.42

Para expandir essas cinco figuras é preciso transladar cada uma em relação ao sentido oposto de cada aresta do dodecágono conforme foram criadas. figura 9.43.

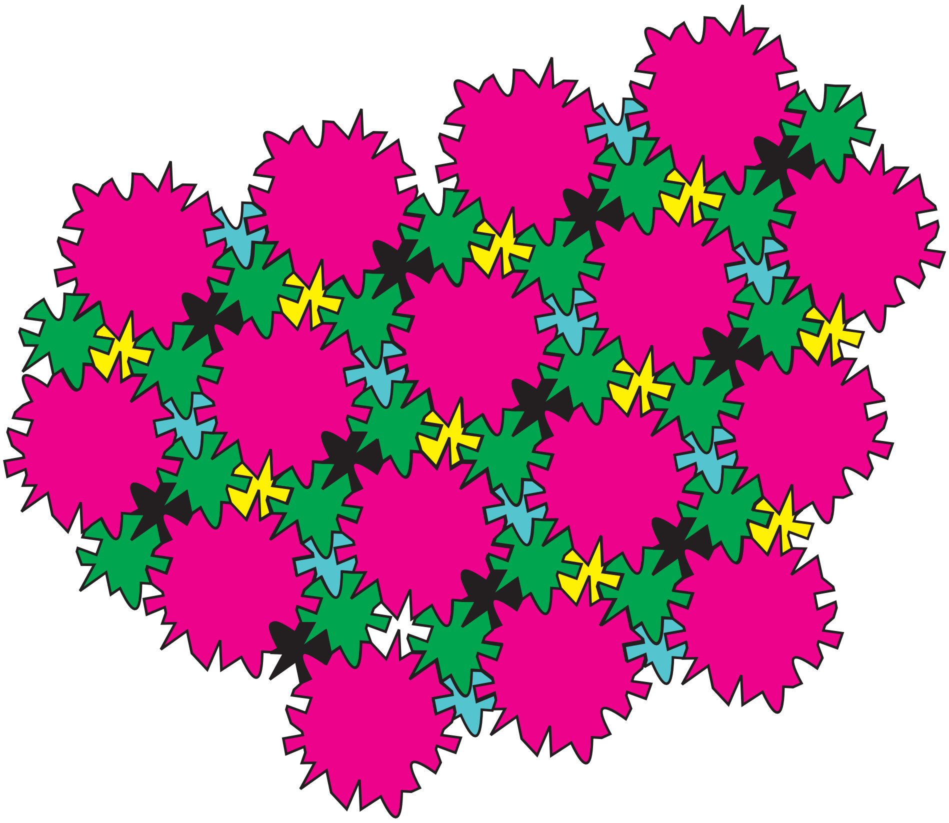


Figura 9.43

Capítulo 10

Sequências didáticas para prática em sala de aula

Uma boa forma de trabalhar geometria plana e essas isometrias com alunos de ensino básico e fazer com que eles desenvolvam seus próprios desenhos auto encaixáveis através de um hexágono por exemplo.

Nesta atividade o aluno perceberá a importância de se construir polígonos bem feitos com o uso de régua e compasso ou utilizar software de computação para construção de figuras precisas.

Uma forma barata e simples de se trabalhar as isometrias utilizadas por Escher é utilizar a proposta a seguir.

Imprima ou tire cópia da folha abaixo e entregue a cada aluno e peça para que ele faça uma curva nas arestas alternadas do hexágono. figura 10.1.

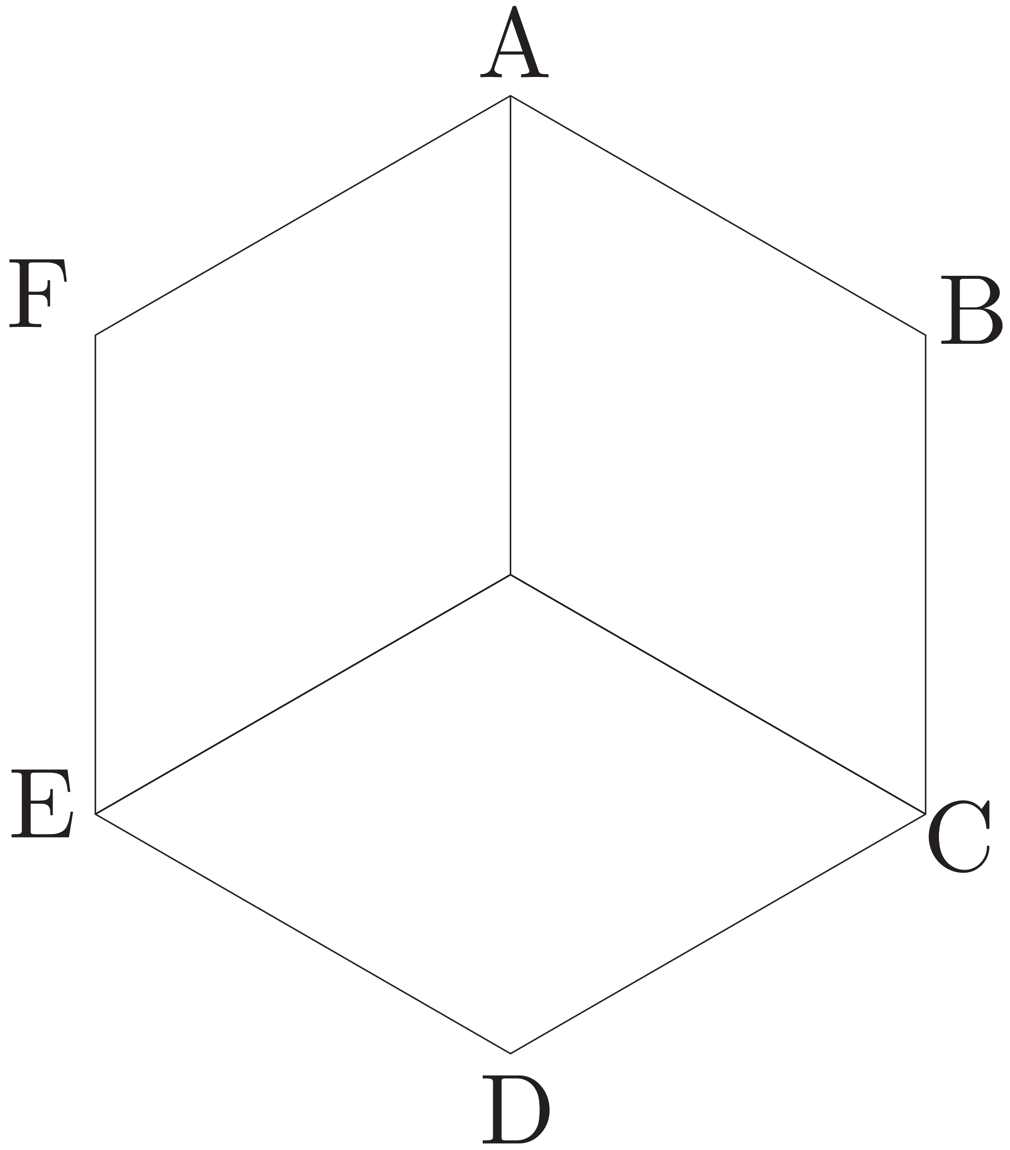


Figura 10.1 Hexágono para sequência didática

Abaixo tem-se um exemplo de curvas em três vértices alternados do hexágono em três cores diferentes para melhor visualização figura 10.2. Em seguida ele deverá tirar uma cópia da folha já desenhada e recortar com uma tesoura cada curva. figura 10.3.

Sobreponha a parte cortada em cima de cada aresta do hexágono, por exemplo a aresta AB. O aluno deverá rotacionar essa figura sobreposta em cima da aresta AB em relação ao vértice B até o vértice A encontrar o vértice C, e em seguida cole na nova posição. figura 10.4.

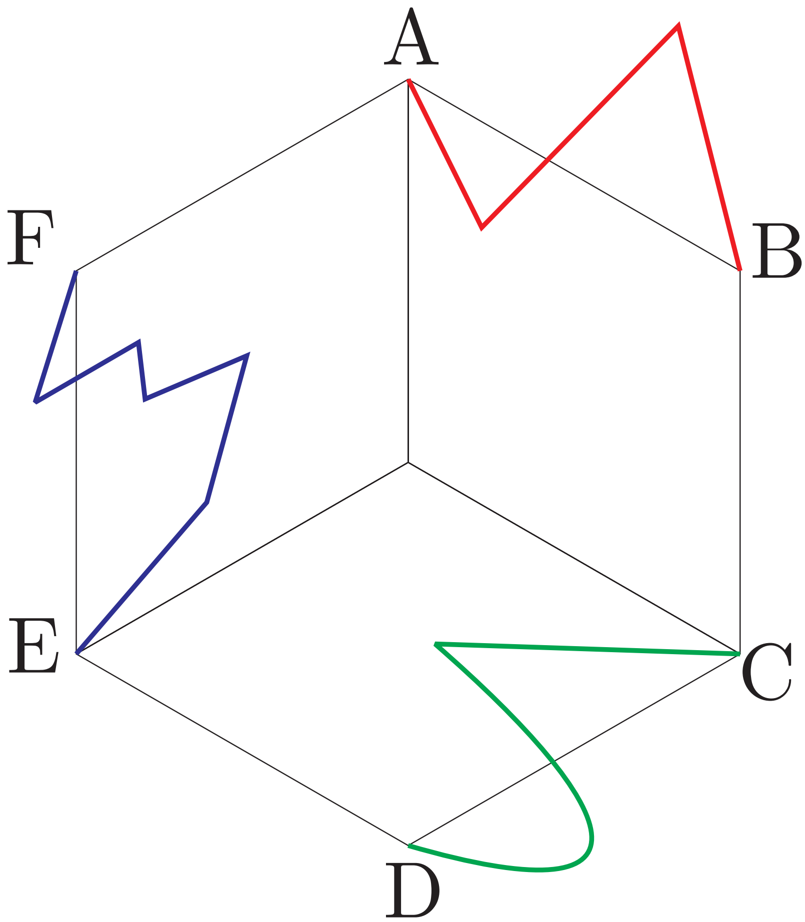


Figura 10.2 Desenhando curvas em lados alternados

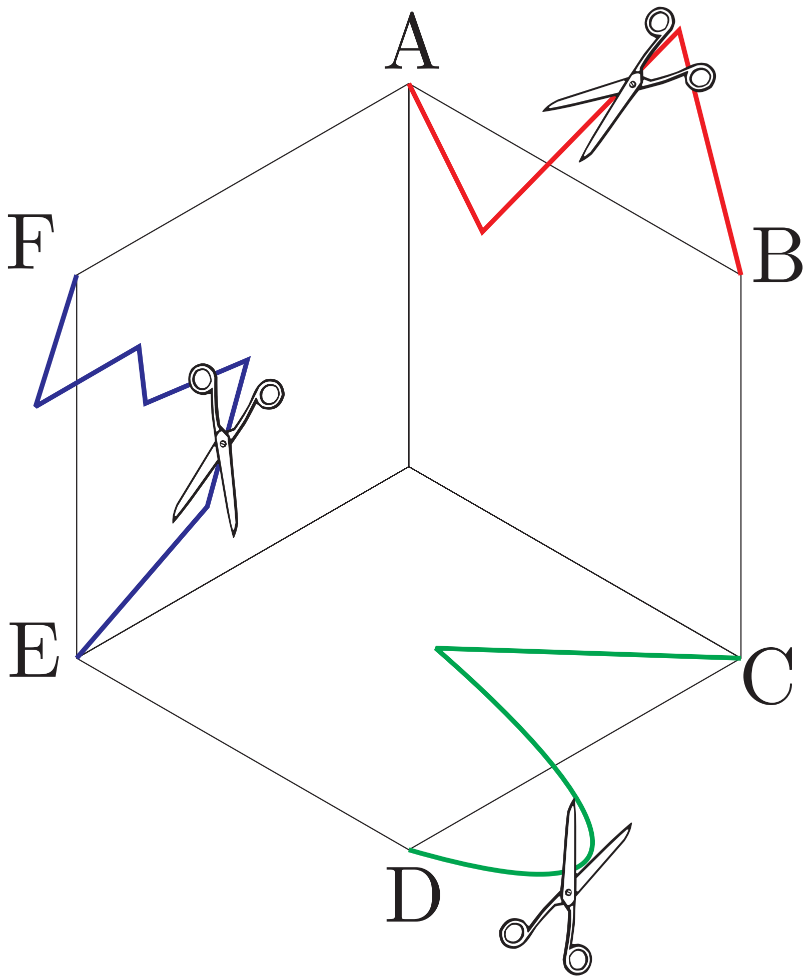


Figura 10.3 Cortando as curvas

Cada curva cortada será colada na aresta adjacente mantendo os vértices B, D e F e levando os vértices A para o C, C para o E e finalmente o E para o A.

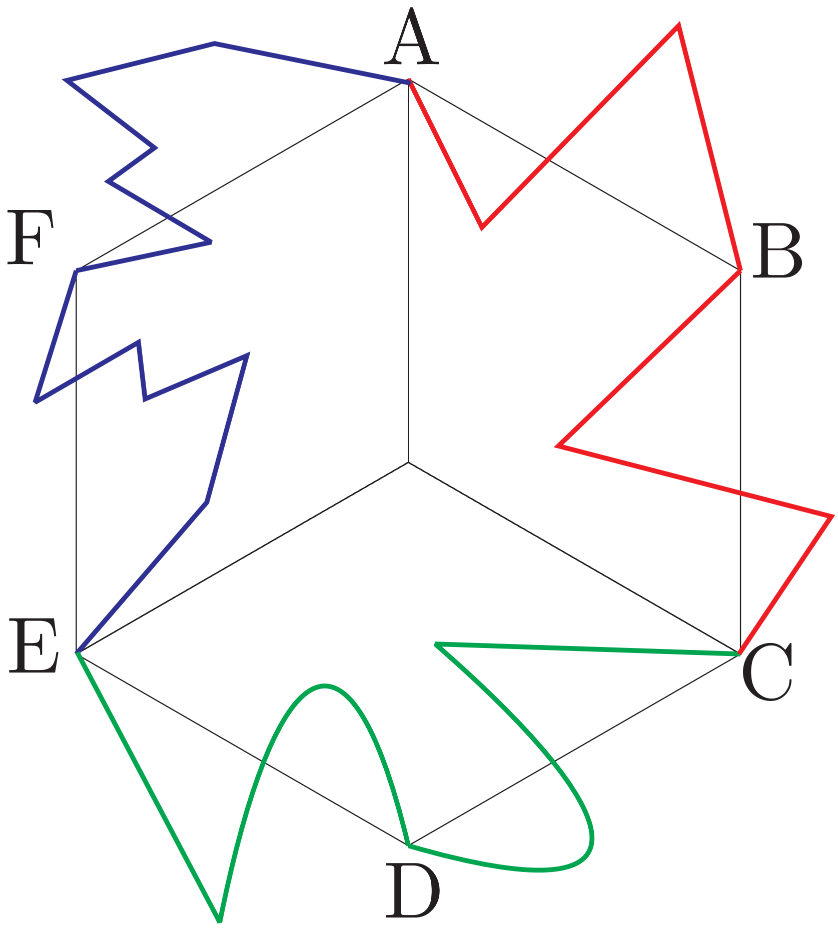


Figura 10.4 Figura pronta a partir do hexágono

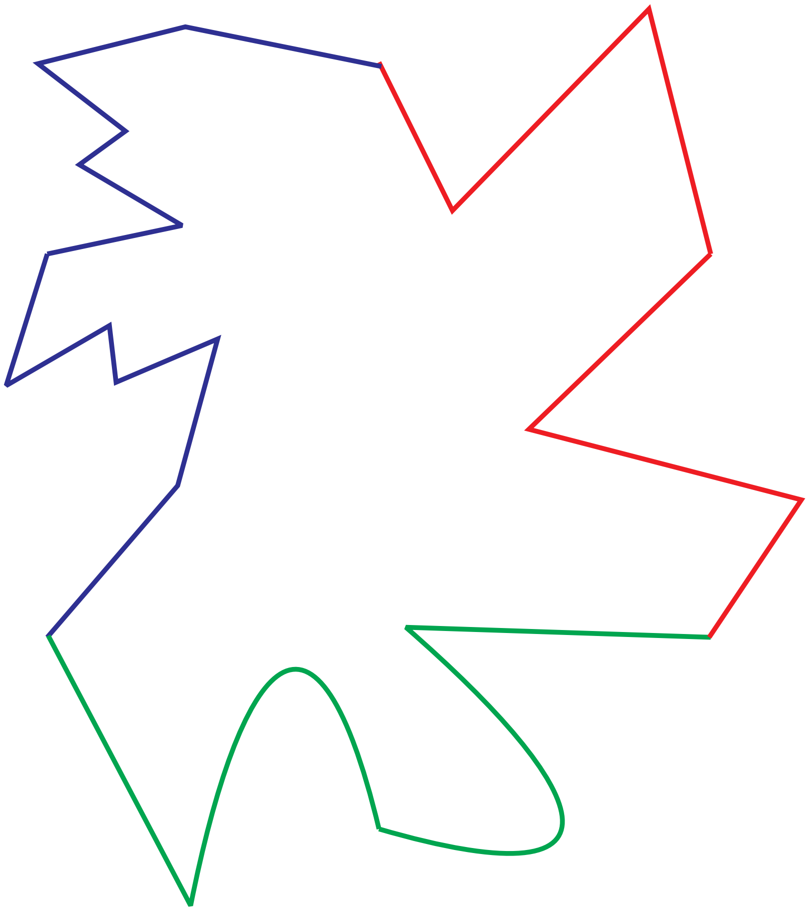


Figura 10.5 Figura que será usada como molde

O molde da figura auto encaixável está pronto, figura 10.5 basta que ele recorte a figura encontrada e use-a para riscar o material que será utilizado na construção do mosaico como EVA ou papel cartão por exemplo.

O aluno deverá recortar uma quantidade razoável de figuras de preferência de três cores diferentes para que fique claro as três posições relativas que as figuras ficarão dispostas depois de encaixadas.figura 10.6.

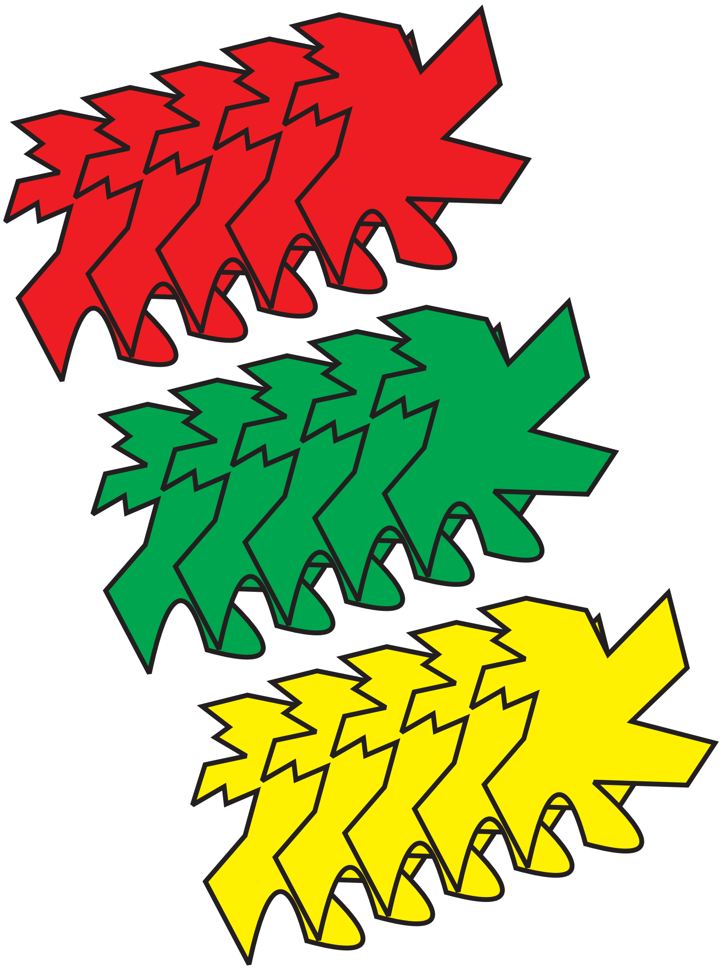


Figura 10.6 Figura já recortadas

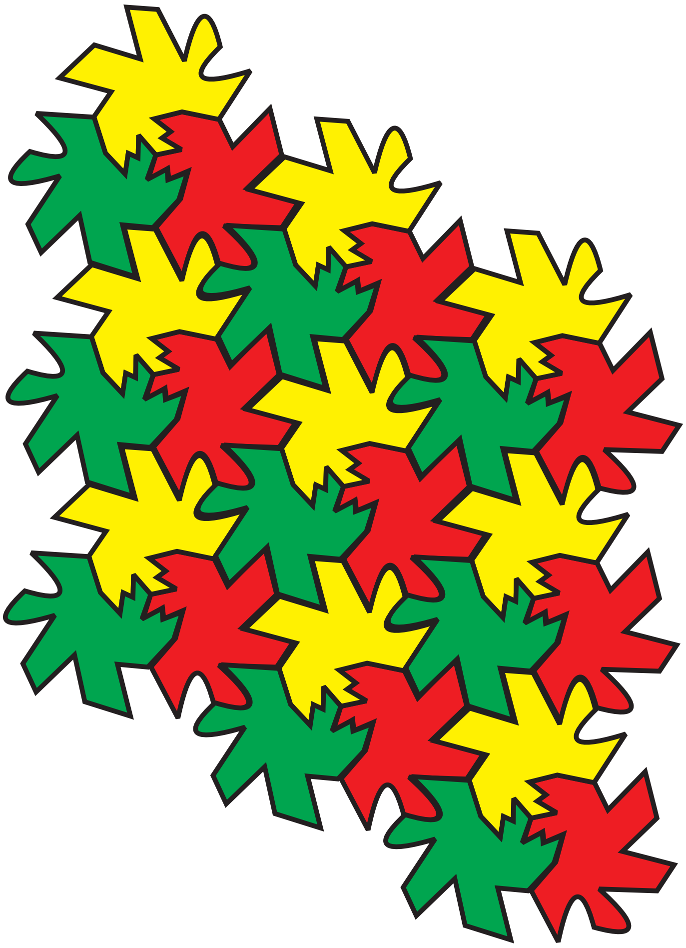


Figura 10.7 Mosaico pronto

O aluno perceberá no momento de encaixar as peças que as figuras de mesma cor estarão "apontadas"para a mesma direção. figura 10.7.

O objetivo deste trabalho é a conscientização do aluno em relação a importância de se conseguir resultados satisfatórios e precisos na execução dos trabalhos assim como na construção civil ou arquitetura, e como a falta destes pré-requisitos pode acarretar em prejuízos para uma empresa ou até mesmo problemas na segurança da obra.

Outra vantagem observada é a participação coletiva e efetiva dos alunos por se tratar de um trabalho prático e visual.

O ponto alto deste trabalho será a exposição para a comunidade escolar. Os trabalhos poderão ser expostos nas paredes da escola para que demais alunos e professores contemplem a criatividade e habilidade deles.

Capítulo 11

Considerações finais

Sempre que um professor sai da prática tradicional de sala de aula para realizar atividades que envolvem participação em grupo e trabalhos concretos ele desperta grande interesse por parte dos jovens em apenderem novos conhecimentos.

A matemática por si só não atrai o interesse da maioria das pessoas e é a grande vilã dos estudantes em qualquer parte do mundo, e sempre que houve essa fuga do cotidiano para algo mais inovador, o aproveitamento nas aulas de matemática foi muito superior e consequentemente notou-se um aumento nas notas dos alunos.

Trabalhar o assunto geometria nos moldes do artista Escher pode muito bem ser compartilhado com professores de outras áreas como Arte e Filosofia, e quando envolve avaliações com pontuações em todas matérias participantes o interesse e o sucesso do resultado é garantido.

Os alunos de hoje estudam várias matérias no ensino fundamental e médio e o número de avaliações bimestrais é grande podendo até causar prejuízo aos alunos que por ventura não conseguirem acompanhar a aprendizagem dos conteúdos. Por isso trabalhar alguns deles de forma interdisciplinar é uma boa sugestão para melhorar os índices de aproveitamento dos jovens nas instituições de ensino de todo país.

Hoje, com a facilidade de se pesquisar na internet, qualquer tema de estudo ficou de fácil acesso e isso apresenta alternativas para o aprendizado na matemática.

Um bom exemplo é o museu do Escher que pode ser visto pela web no link [1].

Existe a possibilidade também de se baixar gratuitamente softwares de edição de imagens vetoriais que auxiliam na construção de figuras bem como tutoriais disponíveis para o auto aprendizado.

Obras famosas de artistas consagrados podem também ser baixados pela internet com poucos cliques e levados na palma da mão com os aparelhos multimídias disponíveis no mercado.

Toda essa facilidade e disponibilidade de recursos está diante dos olhos das pessoas. Elas só precisam ser estimuladas a perceberem isso e desfrutarem do que há de melhor na rede mundial de computadores.

Para estes trabalhos citados aqui foi utilizado o software Corel Draw (versão paga) que permite ao usuário criar polígonos regulares de até 500 lados na versão 12 e aplicar a eles qualquer transformação isométrica como rotação, translação e reflexão.

É possível também mudar as cores e espessuras das linhas que compõem as figuras bem como seu preenchimento para facilitar o diferenciamento e proporcionar um visual melhor.

Demais trabalhos do autor estão disponíveis no website (TEIXEIRA,2015).

Referências Bibliográficas

[1] MENDONÇA, A. N. F., *O espelho mágico de M. C. Escher*, 2009. 23f. Notas de Aula. Impresso.

[2] FERREIRA, A. B. H., *Minidicioário Aurélio.* Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1987

[3] ERNST, B. , *O espelho mágico de M. C. Escher.* Berlim: Taschen, 1991

[4] TJABBES, P., *O mundo mágico de Escher.* São Paulo: Art Unlimited, 2011

[5] LIMA, E.L., *Isometrias.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasilira de Matemática, 1996

[6] SALLUM, E.M. , *Ladrilhamentos: Disponível em <http://www.ime.usp.br/ matemateca/textos/ladrilhamentos.pdf>.Acesso em : 16 de maio de 2015.*

[7] TEIXEIRA, E. , *Site oficial do Professor Emerson Teixeira. Brasília DF: Disponível em <http://www.emersonteixeira.com.br>.Acesso em : 8 de maio de 2015.*