Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Lógica Básica e o Método Axiomático: Uma Introdução Através da Teoria dos Conjuntos

André Anderson da Silva Nunes

Brasília

2015

André Anderson da Silva Nunes

Lógica Básica e o Método Axiomático: Uma Introdução Através da Teoria dos Conjuntos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Helder de Carvalho Matos.

Brasília

2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Nunes, André Anderson da Silva
972l Lógica Básica e o Método Axiomático: Uma Introdução Através da Teoria dos Conjuntos / André Anderson da Silva Nunes; orientador Helder de Carvalho Matos. - Brasília, 2015.
134 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2015.

1. Teoria dos Conjuntos. 2. Método Axiomático. 3. Lógica Básica. I. Matos, Helder de Carvalho, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Lógica Básica e o Método Axiomático: Uma Introdução Através da Teoria dos Conjuntos

por

André Anderson da Silva Nunes *

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE

Brasília, 29 de junho de 2015.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Helder de Carvalho Matos – MAT/UnB (Orientador)

Prof. Dr. Taygoara Felamingo de Oliveira – ENM/UnB

Prof. Dr. Rui Seimetz – MAT/UnB

* O autor foi bolsista CAPES durante a elaboração desta dissertação.

André Anderson da Silva Nunes graduou-se em matemática pela Universidade de Brasília em 2010. É Professor de Educação Básica da Secretaria de Educação do Distrito Federal desde 2012.

Ao meu Senhor, Jesus. E à minha família, reflexo da presença de Deus em minha vida.

Agradecimentos

Chego ao fim de mais um ciclo da minha vida acadêmica com mais créditos a dar do que os que cursei. Foram muitos os incentivadores dessa jornada que se encerra, e o espaço aqui é pequeno para lembrar de todos eles.

Agradeço em primeiro lugar ao meu Senhor, Jesus Cristo, autor e consumador da minha fé. Espero que o Senhor me perdoe pelos momentos em que dividi os assuntos do Reino dos Céus com as atividades acadêmicas. O agradeço por ser o único a estar comigo em todos os momentos dessa caminhada. E também pelos pais que me deste, porque com muitas gotas de suor me impulsionaram para o caminho do conhecimento.

À minha esposa e filhas, que abriram mão da minha presença em muitos momentos importantes e aturaram o meu mau humor nos finais de semestres letivos. Sempre foi por vocês. Espero ter sido um bom representante dessa família por onde passei.

Agradeço ao meu país e aos brasileiros que custearam os meus estudos. Eu tenho uma dívida com este povo e envidarei esforços para quitá-la até o último centavo. Espero ajudar muitos novos brasileiros que passarão pelo meu caminho nas escolas do Distrito Federal da mesma forma que fui ajudado enquanto aluno.

Gostaria de demonstrar em especial minha enorme gratidão aos professores Lineu Neto, Rui Seimetz, Raquel Carneiro Dörr e Maria Terezinha Gaspar que em muito contribuíram para o meu interesse pela Rainha das Ciências. Durante os anos de graduação e mestrado, e agora na minha vida profissional, os senhores continuarão sendo uma grande inspiração.

À Universidade de Brasília que me acolheu e pela qual tenho enorme carinho. Carrego comigo a lição mais valiosa que um diploma da UnB pode oferecer: estou pronto para continuar aprendendo. Terei saudades.

Ao meu orientador e professor, Doutor Helder de Carvalho Matos que fez intervenções preciosas para que esse trabalho pudesse ser aprimorado. Muito obrigado.

“Aprendi a não tentar convencer ninguém. O trabalho de convencer é falta de respeito, é uma tentativa de colonização do outro.”

José de Sousa Saramago

Resumo

A escolha do tema visa introduzir de forma simplificada os princípios do método axiomático, bem como a forma organizada de pensar e argumentar, ambos aplicados à Teoria dos Conjuntos. Convidamos o leitor, principalmente o professor de ensino básico, a buscar o aperfeiçoamento de sua forma de argumentar através de regras convencionalmente aceitas e bem definidas da Lógica Básica. Tal competência argumentativa é fundamental na árdua tarefa de conduzir os discentes a evoluir de um modo informal (no Ensino Fundamental) a um sofisticado método de organização de demonstrações, fundamentado em um sistema dedutivo completo. O modelo axiomático utilizado no ensino básico é o da Geometria Euclidiana Plana. Neste trabalho, entretanto, o investimento foi no tratamento da Teoria dos Conjuntos, dada sua grande importância dentro de todos os outros ramos da Matemática.

Palavras-chave

Teoria dos Conjuntos, Método Axiomático, Lógica Básica.

Abstract

The choice of theme is to provide a simple way of introduction to the principles of axiomatic method and an organized way of thinking and arguing, both applied to Set Theory. We invite the reader, especially the teacher of elementary education, to seek the improvement of their way to argue through conventionally accepted and well-defined rules of the Basic Logic. This argumentative competence is fundamental in the arduous task of leading the students to evolve in an informal way (in elementary school) to a sophisticated method of organizing proofs, based on a complete deductive system. The axiomatic model used in basic education is the Euclidean geometry. In this work, however, the investment was in the treatment of Set Theory, given its great importance in all other branches of mathematics.

Keywords

Set Theory, Axiomatic Method, Basic Logic.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

No processo de ensino-aprendizagem parece ser difícil usar Matemática para treinar o raciocínio lógico dos alunos sem fazer com que eles entendam a noção de demonstração. Conseguir uma justificativa de acordo com certas regras de inferência para mostrar que uma proposição é consequência de outras proposições, previamente admitidas como verdadeiras, é um processo construtivo fundamental de teorias dentro de vários ramos do conhecimento científico, caracterizando o raciocínio dedutivo. Entretanto é comum encontrar um professor da área que já ouviu a pergunta: “Para que serve Matemática?”

Mesmo não sendo possível responder em poucas palavras a esta pergunta, é fundamental não deixar os alunos sem uma resposta razoável. E o mais apropriado talvez seja apontar a principal qualidade da Matemática: ela estabelece verdades imutáveis. A noção de verdade que permeia um teorema demonstrado corretamente prevalece para sempre. E é justamente o entendimento do rigor apresentado nas deduções que nos levam a apreciar essa qualidade ímpar que só a Matemática oferece. Neste contexto inserimos o objetivo geral deste trabalho: apresentar a dinâmica de sistemas axiomáticos por meio do método dedutivo.

Um argumento dedutivo é uma sequência de afirmações que, partindo de axiomas, premissas ou conjecturas, nos leva a conclusões de acordo com regras de inferência válidas. É através desta metodologia que analisamos e descobrimos as consequências de afirmações assumidas como verdadeiras. Ivan Stewart, matemático inglês, escreveu em [24]:

> **“Ninguém te pede para acreditar em axiomas. Aliás, acreditar neles ou duvidar deles é inútil, pois de modo nenhum correspondem à realidade.”**

Explico: não importa se as verdades das quais partimos são ou não aceitas universalmente. De fato, o desenvolvimento histórico da Matemática nos traz um exemplo instrutivo desse ponto de vista: a negação do axioma das paralelas de Euclides - que postula que por um ponto exterior a uma reta passa exatamente uma reta paralela à inicial - levou à descoberta das geometrias não euclidianas. Embora mais a frente discutamos a noção de verdade, deve-se entender que o interessante do método axiomático é organizar as conclusões que decorrem logicamente dessas “verdades” escolhidas.

Assim, nosso foco é sempre o que podemos concluir de forma válida, e não se o ponto de partida é ou não aceito por todos como verdade.

Para atingir o objetivo geral deste trabalho, faremos uma breve exposição da teoria dos conjuntos, com alguns dos resultados mais usados na educação básica. Mais que isso: queremos apresentar um pouco da história que levou à criação dessa teoria por Cantor, incluindo a necessidade de uma estrutura axiomática mais refinada para dar uma base firme à teoria criada por Cantor. E isso foi percebido a partir do surgimento de alguns paradoxos, as vezes tão simples que podem ser discutidos sem dificuldades com os alunos no início do Ensino Médio. Essas contradições aparentes além de apresentadas, servem de justificativa para o uso da linguagem matemática mais formal que elimina a sua ocorrência. A teoria aqui apresentada não será rigorosa, mas sim "ingênua"; o intuito é apenas transmitir as ideias por trás do método axiomático. A exposição feita no capítulo 3 consiste na adaptação da axiomática de Zermelo-Fraenkel para a teoria dos conjuntos. Prosseguiremos apresentando os fundamentos da lógica bivalente, a fim de esclarecer o conceito de argumento válido. Alguns exemplos interessantes fora da matemática pura são apresentados, já que alcançam os editais de concursos públicos de nível médio dentro da área de raciocínio lógico. Finaliza-se esta exposição pertinente aos fundamentos da matemática delineando duas descrições para o conceito de número. Primeiro, uma breve apresentação dos Axiomas de Peano é feita com intuito de descrever ordinalmente o conjunto dos números naturais. A seguir é feita caracterização da ideia de cardinalidade, vital para descrever a quantidade representada por um número natural.

Este trabalho foi desenvolvido a partir da pesquisa bibliográfica das obras mencionadas no campo Referências, da qual se procurou extrair as ideias mais interessantes e aplicáveis ao Ensino Médio acerca do tema desenvolvido. Houve a pretensão de se fazer a transposição para uma linguagem mais acessível do desenvolvimento axiomático da teoria dos conjuntos; um esforço foi feito no sentido de não se abrir mão, porém, da precisão mínima necessária para encorajar o leitor a aperfeiçoar seus métodos de argumentação acerca de proposições no contexto de uma teoria de primeira ordem. Em particular, foi exposta a ideia fundamental do método axiomático: a necessidade de se obter um sistema lógico e fundamentado a partir de um conjunto mínimo de proposições, a partir das quais se pode extrair novas proposições ou conjecturas.

Capítulo 1

Conceitos Iniciais e a Teoria dos Conjuntos de Cantor

Imagine que você queira explicar a um aluno do ensino fundamental o que são conjuntos. Poderia começar dizendo que conjuntos são coleções de objetos. Um aluno mais indagador poderia perguntar: "O que são esses objetos?" A resposta a essa pergunta parece ser simples: os objetos podem ter qualquer natureza, ou seja, podemos falar em um conjunto de pessoas, dos átomos de oxigênio na atmosfera terrestre, dos números que usamos para contagem, das peças de roupa em uma loja. Novos questionamentos poderiam ser levantados a partir daí: E se eu formar um conjunto de conjuntos, o que seria isso? Existe um conjunto sem objeto nenhum?

Um outro questionamento referente à explicação anterior que poderia surgir: "O que são coleções?" Poderíamos abrir então um dicionário e encontrar várias palavras que nos permitissem expressar a ideia de coleção neste contexto: Ajuntamento, reunião de objetos. O aluno, insistente, poderia então perguntar o que é "ajuntamento". Nos envolveríamos então em uma discussão que poderia se estender por muito tempo.

O ponto central desse processo de convencimento do aluno é o seguinte: temos que encontrar alguma sentença que seja aceita por ele sem questionamento para explicar o significado de conjunto. Uma reflexão semelhante também poderia ser levantada dentro da geometria na tentativa de explicar o que é uma reta. De acordo com [6], tem-se:

sf *(de reto)* ***1 Geom*** *Linha que estabelece a mais curta distância entre dois pontos; linha reta.* ***2*** *Traço direito.* ***3*** *Lanço de estrada retilíneo.*

Poderíamos então novamente entrar em um processo de convencimento buscando uma sentença que melhor descrevesse para cada aluno o sentido de reta. E cada escolha, por mais elucidativa que fosse traria limitações. Por exemplo, se escolhêssemos o significado 1 acima, poderíamos então questionar sobre o que seriam retas na superfície terrestre, que sabemos ser "curva". Certamente uma reta curva pareceria estranho a alguém que não teve contato com as geometrias não euclidianas.

O caminho mais objetivo dentro do ensino básico parece ser então apresentar aos alunos modelos que servem de interpretação para os conceitos que desejamos explicar. A finalidade é desenvolver algum critério intuitivo a ser utilizado posteriormente para se decidir se outros modelos satisfazem ou não esse critério. Em caso afirmativo, o conceito se aplica. Caso contrário, o modelo é rejeitado como interpretação. O interessante aqui é que os modelos rejeitados ajudam na compreensão do conceito tanto quanto os modelos aceitos. De fato, um bom ponto de partida para se saber o que alguma coisa é pode ser decidir antes o que esta não é.

A dificuldade que encontramos na exposição anterior será sanada dentro do método axiomático da seguinte forma: admite-se que alguns termos são indefinidos, isto é, são aceitos sem maiores explicações. É o caso de retas, no desenvolvimento axiomático da geometria, e de conjuntos, dentro da Teoria dos Conjuntos. Outro termo indefinido diz respeito a relação de pertinência, que traduz o fato de um elemento ser ou não membro de um conjunto. Os termos indefinidos serão então o ponto de partida da teoria, funcionando como um ponto de concordância que evita regressões infinitas na tentativa de explicá-los.

Ocorre que, não sabendo exatamente qual a ideia que cada pessoa traz dos termos indefinidos, é necessário estabelecer regras que delimitam os usos desses termos. Assim surge a necessidade de adotar algumas sentenças sobre esses termos indefinidos, chamados de axiomas ou postulados, também sem maiores justificativas. Os axiomas regem o uso dos termos indefinidos. O sentido de "sentenças" é o mesmo de "proposições", e será explicado no capítulo 2.

De posse dos axiomas, o problema que se estabelece é o de convencer alguém por métodos puramente dedutivos que uma proposição decorre logicamente de outras. Assim a teoria começa a ganhar corpo a partir da escolha de certos termos indefinidos e da adoção de axiomas que ditam como esses termos podem ser usados. Desses axiomas devemos obter novas conclusões, ou seja, novas sentenças. Essas sentenças devem decorrer logicamente dos axiomas (ou de sentenças previamente demonstradas) por meio de princípios que sejam aceitos tanto por quem as obteve quanto por quem deseja ser convencido de que elas são verdadeiras. Esses critérios necessários para se decidir quando um sentença decorre logicamente de outras dão o contexto em que se inserem os princípios de lógica, cuja culminância é a noção de argumentação apresentada na secção 2.5.

1.1 Conjuntos

Conforme discutido na introdução deste capítulo, o termo *conjunto* será tomado como indefinido, portanto, sem definição. Um critério para a notação seria adotar na indicação de conjuntos apenas letras maiúsculas: A, B, C, etc., ficando reservado para seus elementos as letras minúsculas, x, y, z, etc.. Isto é feito neste trabalho com a seguinte ressalva: existem conjuntos que são elementos de outros conjuntos, então esta notação apresentará uma inconsistência nos contextos em que nos referirmos a um conjunto que é também membro de um conjunto “maior”. Deve ficar claro que quando o contexto sugerir que um elemento pode ser tanto um conjunto como membro de outro conjunto, serão usadas letras minúsculas.

Também assumiremos, como foi dito, a relação de pertinência entre dois objetos, que faz referência ao fato de um elemento ser membro (ou não) de um conjunto. A noção de conjunto que da qual será feito uso aqui é a seguinte:

S é um conjunto se existe algum elemento pertencente a S ou se S é vazio.

A sentença acima não é uma definição de conjunto, mas apenas uma ideia do que significará a afirmação “S é um conjunto”. Intuitivamente um conjunto é uma coleção de objetos distinguíveis fruto de nosso intelecto, concebido como uma entidade única. Os membros que compõe o conjunto são chamados de elementos desse conjunto. Faremos uso dos termos **classe, coleção ou família de conjuntos** quando estivermos tratando de um conjunto cujos elementos também são conjuntos.

Fazendo referência à relação de pertinência, adotaremos o símbolo "$\in$" para construir sentenças do tipo:

$$\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{S}$$

que indica que a é elemento do conjunto S. A notação estabelecida não retrata se a é simplesmente elemento ou se também é um conjunto, mas estabelece que S é conjunto. A negação da afirmação acima é construída com uso do simbolo "$\notin$":

$$\boldsymbol{a} \notin \boldsymbol{S}$$

Do ponto de vista dos fundamentos da matemática a inovação provocada pelo trabalho de Cantor foi a sua insistência na existência de conjuntos infinitos como objetos matemáticos equivalentes a números e a conjuntos finitos. Um relato histórico da vida deste matemático pode ser obtido em [17]. O conceito de infinito por ele desenvolvido tem desempenhado um papel importante dentro da Matemática, sendo tão importante quanto o conceito de número.

1.2 Operações Sobre Conjuntos

Será introduzida na próxima secção os símbolos lógicos que serão usados na formação de sentenças compostas ao longo deste trabalho. Em sala de aula, isto pode ser feito em paralelo com o estudo das operações sobre conjuntos. Essas operações são geralmente tratadas com mais detalhes no primeiro ano do Ensino Médio, precedendo o estudo das funções. Por isso entendemos não ser completamente fora de contexto aproveitar esse desenvolvimento previsto no currículo da Educação Básica para elucidar melhor o uso dos conectivos lógicos da forma que será apresentada nesta secção. Os detalhes acerca do uso de cada um desses conectivos serão dados no próximo capítulo. Por enquanto usaremos tais símbolos apenas como forma de abreviar a escrita de algumas sentenças. O desenvolvimento aqui não é axiomático, ficando a exibição dos axiomas reservada para o capítulo 3.

1.2.1 Princípio da Abstração

A origem da Teoria dos conjuntos pode ser encontrada nos trabalhos do matemático russo Georg Cantor (1845-1918), os quais buscavam a mais primitiva e sintética definição de conjunto. Admitindo a noção primitiva de que um conjunto é algo que possui elementos, passa-se a procurar uma forma de construir conjuntos. Uma vez que conjuntos são frutos de nosso intelecto, uma maneira de formá-los pode ser simplesmente listando seus elementos, um a um, como nos exemplos a seguir.

Exemplo 1.1. *O conjunto* $\mathbb{N}$ = *{0, 1, 2, 3,...} é o conjunto dos números naturais.*

Comentário: Quando fizermos a opção de listar os elementos de um conjunto escreveremos estes elementos entre chaves. Se o conjunto tiver infinitos elementos mas for evidente o padrão que nos permite perceber qual o elemento seguinte a qualquer elemento dado, usaremos reticências para indicar que a sequência prossegue neste padrão. Apresentaremos a partir dos axiomas da teoria dos conjuntos uma interpretação para a natureza cardinal dos números naturais. A natureza ordinal desses números pode ser desenvolvida através dos axiomas de Peano.

Exemplo 1.2. *O conjunto* $\mathbb{Z}$ = *{..., - 2, -1, 0, 1, 2, 3,...} é o conjunto dos números inteiros.*

Comentário: Neste caso, notamos que o conjunto tem seu padrão de "infinitude" em duas direções: a esquerda e a direita de zero. O símbolo $\mathbb{Z}$ é adotado para números inteiros porque essa é a primeira letra da palavra alemã Zahl, que significa número. Podemos obter os números inteiros a partir dos números naturais, por exemplo, por meio da introdução de segmentos orientados.

O método de listagem dos conjuntos tem uma limitação: como poderíamos escrever, por exemplo, o conjunto de todos os números reais? Neste caso não há aparentemente um "padrão" que nos permita descrever todos os números reais em uma lista. Isto porque, se tentarmos escrever os números reais em ordem crescente, por exemplo, entre dois números reais quaisquer que colocarmos na lista sempre haverá um outro real entre eles que não aparecerá na lista. O argumento da diagonalização, dado por Cantor em 1874, é uma prova matemática de que existem conjuntos infinitos que não podem ser postos em correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais. Isto equivale a dizer que não se poder fazer a enumeração desejada para alguns conjuntos infinitos, como é o caso do conjunto dos números reais. De fato, o argumento da

Diagonal de Cantor - apresentado com mais detalhes em [21] e na solução dada ao Problema 20 como aplicação do Teorema 4.24, no apêndice A - possibilita explicar porque é impossível colocar todos os números reais em uma lista enumerável, isto é, uma lista na qual podemos "contar" os elementos. Isto pode ser entendido a partir da afirmação de que *todo número real admite uma representação decimal infinita.* Espera-se que um aluno de Ensino Médio já esteja convencido desta afirmação para os números irracionais e também para dízimas periódicas (decimais com representação infinita). Por isso vejamos como podemos obter a representação infinita de números decimais finitos.

Exemplo 1.3. *Mostre que* $0{,}\bar{9}$ *é igual a 1, onde* $0{,}\bar{9} = 0{,}999...$.

Solução. Fazendo-se $x = 0{,}\bar{9}$, tem-se $10\,x = 9{,}\bar{9}$, de onde subtraindo a segunda equação da primeira obtemos $9\,x = 9$, ou seja, $x = 1$. Vemos assim que o número 1 admite representação decimal infinita $0{,}\bar{9}$.

Exemplo 1.4. *Obtenha uma representação decimal infinita para o número racional* $\frac{3}{4}$.

Solução. Sabe-se que a divisão de 3 por 4 é 0,75. Esta representação, entretanto, é finita. Para obter a representação decimal infinita, podemos fazer uso do mesmo raciocínio aplicado no exemplo anterior para escrever $0{,}05 = 0{,}04\bar{9}$. Sendo $x = 0{,}04\bar{9}$ obtemos, sucessivamente, ao se multiplicar a igualdade anterior por 100 e por 1000, $100\,x = 4{,}\bar{9}$ e $1000\,x = 49{,}\bar{9}$, respectivamente. Subtraindo as duas últimas igualdades chegamos a $900\,x = 45$, ou seja, $x = \frac{1}{20} = 0{,}05$. Assim, a decimal 0,75 pode ser reescrita como $0{,}7 + 0{,}05 = 0{,}7 + 0{,}04\bar{9} = 0{,}74\bar{9}$.

Exemplo 1.5. *Mostre que é impossível enumerar uma lista contemplando todos os números reais. Este exemplo terá como consequência a não enumerabilidade do conjunto dos números reais, conforme apresentado no Capítulo 4.*

Solução. O argumento usado aqui é denominado "método da diagonal de Cantor", e nos mostra que independentemente da lista de números reais que montemos, sempre deixaremos algum número de fora. Vamos considerar apenas os números reais no intervalo [0, 1]. Suponha então que exista uma lista completa de números reais neste intervalo, cada número com sua representação decimal infinita: x_1, x_2, x_3, ..., onde se tem $x_i = 0, b_{i1}b_{i2}b_{i3}b_{i4}...$ para cada i natural. Seja o número w $= 0, a_1a_2a_3a_4...$, onde $a_i = 0$ se $b_{ii} \neq 0$ e $a_i = 1$ se $b_{ii} = 0$. Observe que w é um número real pertencente ao intervalo, com representação decimal infinita e é diferente de cada x_i pois $a_i \neq b_{ii}$ para todo i. Em particular, w $\neq x_1$ pois o primeiro algarismo decimal de w, que é a_1, é diferente do primeiro algarismo decimal de x_1, que é b_{11}. Logo, qualquer que seja a lista infinita de números reais no intervalo [0, 1] não será suficiente para descrever todos os números reais, já que w como construído neste exemplo não fará parte desta lista.

Diante do problema da ineficiência em descrever conjuntos infinitos "muito grandes" listando seus elementos, como é o caso do conjunto dos números reais, a saída encontrada por Cantor foi estabelecer o conceito de "fórmula de x". Uma noção mais detalhada sobre essas fórmulas será dada no capítulo 2. Por enquanto, afirmaremos que uma fórmula em x é uma sentença declarativa sobre x a qual pode ser classificada como verdadeira ou falsa. Assim, uma fórmula, ou sentença, ou ainda proposição sobre x é uma sequência finita de palavras (ou símbolos), incluindo o próprio x e representada por *P(x)*, onde podemos substituir a ocorrência de x por um objeto de natureza adequada à formula.

Exemplo 1.6. *Um exemplo de fórmula seria, dado o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, a sentença $x \in A$. Neste caso, P(1), P(2) e P(3) são verdadeiras e P(5) é falsa.*

Para descrever conjuntos através do uso de fórmulas, faremos uso do seguinte princípio:

Princípio da Abstração: Uma fórmula *P(x)* define um conjunto A se e somente se $a \in A \longleftrightarrow P(a)$, ou seja, os $a \in A$ são os únicos para os quais *P(a)* é verdadeira.

Conforme veremos na próxima secção, um conjunto ficará unicamente determinado pelos seus elementos, de forma que se dois conjuntos possuem exatamente os mesmos elementos então eles são iguais. Assim, ao aplicarmos o Princípio da Abstração para descrever um conjunto, este conjunto será único. Na notação a seguir, a barra "/" é lida como "tal que" e escreve-se

$$\mathrm{A} = \{x \ / \ P(x)\}$$

para significar que o conjunto A é o conjunto formado por todos os elementos x tais que $P(x)$ é verdadeira.

A partir do Princípio da Abstração podemos compreender a existência de um conjunto que não possui elemento nenhum.

Exemplo 1.7. *Seja* $C = \{$*Segunda, Terça, Quarta, Quinta, Sexta*$\}$ *o conjunto dos nomes dos dias da semana. Considere o conjunto* $D = \{x/\ x \in C$ *e* x *é nome de um mês*$\}$*. Quais são os elementos de* D*?*

Solução. O conjunto D é construído escolhendo, dentre os elementos do conjunto C, aqueles que também são nomes de meses. Uma vez que nenhum dos elementos de C é também o nome de um mês, o conjunto D não possui elementos. Como o princípio da abstração implica que D deve existir, escreveremos que D $=\{\ \}$ para significar que nenhum elemento satisfaz a propriedade exigida para pertencer a D. Outra notação utilizada é a que faz uso do símbolo $\emptyset$, que significa conjunto vazio, isto é, sem elementos. No exemplo em questão, D $= \emptyset$.

1.2.2 Igualdade de Conjuntos

Para avaliar se dois conjuntos são iguais, devemos verificar se possuem os mesmos elementos. Assim assumimos que dois conjuntos são iguais se satisfazem o princípio da extensão:

Princípio da extensão: *Dois conjuntos são iguais se e somente se possuem os mesmos elementos.*

Uma consequência do princípio da extensão é que se existe um elemento que está em A mas não está em B, então necessariamente A e B são conjuntos distintos, isto é A $\neq$ B.

A Figura 1.1 mostra o *diagrama de Venn* para dois conjuntos, A e B, que possuem os mesmos elementos. Neste diagrama cada conjunto é representado por uma elipse e, já que possuem exatamente os mesmos elementos, as circunferências que envolvem esses círculos coincidem (estão sobrepostas).

Cabe observar que as elipses no diagrama passam impressão de que os conjuntos que elas representam são limitados. Isso nem sempre é verdade, como pode ser percebido pela Figura A.1 do Apêndice A, que serve de apoio à solução do Problema 19 do

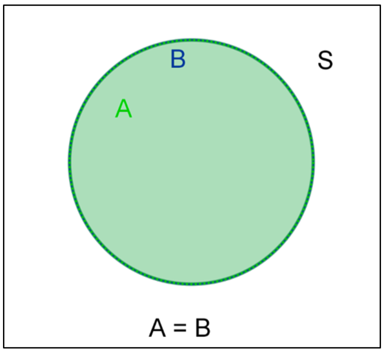

Figura 1.1: Diagrama de Venn - Igualdade de conjuntos.

Capítulo 5. Naquela Figura é estabelecida uma bijeção entre dois conjuntos infinitos e ilimitados, sendo o uso dos diagramas considerado em virtude do seu apelo visual. Ainda, sempre que considerarmos diagramas, os conjuntos nele representados são considerados contidos em um conjunto universo mais amplo S. Tal fato sera indicado pela presença S fora das elipses dos conjuntos por elas representados.

Exemplo 1.8. *Os conjuntos* $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ *e* $B = \{\{1,\ 2\},\ \{3\}\}$ *são iguais?*

Solução. Observe que o conjunto A possui como elementos os números 1, 2 e 3. Já o conjunto B possui como elementos os conjuntos $\{1,\ 2\}$ e $\{3\}$. Como os elementos de A e B são distintos, o princípio da extensão não é satisfeito, logo $A \neq B$. O conjunto B é uma **classe** de conjuntos (seus elementos são todos conjuntos).

Exemplo 1.9. *Os conjuntos* $C = \{1,\ 2\}$ *e* $D = \{\{1,\ 2\}\}$*. São iguais?*

Solução. Note que o conjunto C possui dois elementos, a saber, os números 1 e 2. O conjunto D, por outro lado, é um conjunto unitário, isto é, possui apenas um elemento que é o conjunto $\{1,\ 2\}$. Sendo C e D dois conjuntos finitos com um número diferente de elementos, $C \neq D$. O conjunto D, assim como o conjunto B do exemplo anterior é uma classe.

Exemplo 1.10. *Representaremos o conjunto* $E = \{\ \}$*, que não possui nenhum elemento, pelo símbolo* $\emptyset$*. Qual a diferença entre os conjuntos* $E = \emptyset$ *e* $F = \{\ \emptyset\ \}$*?*

Solução. O conjunto $E = \emptyset$ não possui nenhum elemento. Por outro lado o conjunto F é unitário, e seu elemento único é o conjunto $\emptyset$. O conjunto F é, portanto, uma classe.

1.2.3 Inclusão

Observando os conjuntos A $=$ {a, e, i, o, u} e B $= \{x \,/\, x$ é letra do alfabeto latino$\}$, vemos que todos os elementos de A são elementos de B, mas existem elementos de B que não estão em A. Distinguiremos dois casos, apresentados nas definições a seguir.

Definição 1.11 (Inclusão)**.** *Um conjunto A é* ***subconjunto*** *de um conjunto B se e somente se todo elemento de A é também elemento de B.*

A definição traduz a ideia de que o conjunto A "está dentro" do conjunto B. Essa consideração inclui tanto a possibilidade de A ser igual ao conjunto B como a possibilidade de o conjunto B possuir elementos que não estão em A. A notação que usaremos para indicar que A é um subconjunto de B será $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, que se lê "A está contido em B". Alguns autores usam a notação A $\subseteq$ B para frisar a possibilidade de valer A $=$ B. Se quisermos eliminar esta possibilidade de igualdade entre estes conjuntos usaremos a expressão *subconjunto próprio*, definida a seguir.

Definição 1.12 (Inclusão Própria)**.** *Um conjunto A é um* ***subconjunto próprio*** *de um conjunto B se e somente se A é um subconjunto de B e B não é um subconjunto de A.*

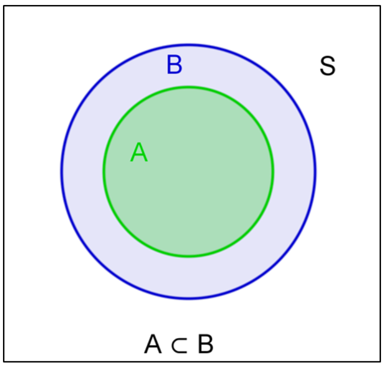

Figura 1.2: Diagrama de Venn - Inclusão própria de conjuntos.

Os conjuntos A $=$ {a, e, i, o, u} e B $= \{x \,/\, x$ é letra do alfabeto latino$\}$ ilustram o conceito de inclusão própria, cuja notação será $\mathbf{A} \subsetneq \mathbf{B}$. Nesta notação está explícito que A está contido em B e também que A é diferente de B. A Figura 1.2 ilustra esta situação. Observa-se que a Figura 1.1 simboliza também a inclusão $A \subset A$, caso em que a inclusão não é própria.

Uma consequência imediata das definições acima é que para qualquer conjunto A vale a relação $A \in A$. Isto porque qualquer elemento de A é elemento de A. Também $\emptyset \subset A$ para qualquer conjunto $A \neq \emptyset$. De fato, para que a última inclusão fosse falsa deveríamos exibir ao menos um elemento de $\emptyset$ que não fosse elemento de A. Isto é impossível de ser feito, já que o conjunto vazio não possui elementos. Somos forçados então a admitir a inclusão como verdadeira.

Existe uma diferença conceitual entre as relações adotadas até agora denotadas pelos símbolos "$\subset$" (inclusão) e "$\in$" (pertinência). O símbolo de inclusão é usado para relacionar dois conjuntos, enquanto o símbolo de pertinência relaciona um elemento e um conjunto (embora o elemento também possa ele próprio ser um conjunto). Observe, por exemplo, que a relação de inclusão sempre satisfaz a condição reflexiva $A \subset A$, mas não é necessariamente verdade que $A \in A$. Outra diferença que pode ser observada: se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $x \in A$ implica $x \in B$; mas $x \in B$ por sua vez implica $x \in C$, de onde conclui-se que $A \subset C$, valendo a propriedade transitiva. Por outro lado, se $A \in B$ e $B \in C$ não necessariamente é verdade que $A \in C$, como podemos notar observando o contraexemplo dos conjuntos $A = \{1, 2\}$, $B = \{0, \{1, 2\}\}$ e $C = \{\{0, \{1, 2\}\}, 3\}$.

Um importante critério para verificar a igualdade de dois conjuntos é o teorema a seguir.

Teorema 1.13. *Um conjunto A é igual a um conjunto B se e somente se A é subconjunto de B e B é subconjunto de A.*

Demonstração. O teorema acima é do tipo "se e somente se", ou seja, faz duas afirmações que podem ser consideradas separadamente:

1. Se $A \subset B$ e $B \subset A$ então $A = B$
2. Se $A = B$ então $A \subset B$ e $B \subset A$

A primeira afirmação é consequência do principio da extensão. De fato, se $A \subset B$ sabemos que todo elemento de A é também elemento de B. De $B \subset A$ temos que todo elemento de B é também elemento de A. Assim, A e B têm os mesmos elementos, logo são iguais.

A segunda afirmação é provada de modo análogo: Sendo A = B, os dois conjuntos possuem exatamente os mesmos elementos (princípio da extensão). Assim, todo elemento de A é também elemento de B: A $\subset$ B; também todo elemento de B é elemento de A: B $\subset$ A. Segue-se que são válidas as duas inclusões. $\square$

O pequeno quadrado no canto inferior direito acima, por ser comum em textos matemáticos, servirá como indicador de que a demonstração do teorema está concluída. A título de curiosidade, alguns autores usam a abreviação "c.q.d." para significar "como queria demonstrar" em alternativa ao quadrado anterior.

Uma espécie interessante de proposições na qual fazemos uso de inclusões são as do tipo " **Todo A é B.**". Sentenças como essa afirmam que A está contido no conjunto B. O exemplo a seguir, elaborado pela FCC - *Fundação Carlos Chagas*, ilustra como avaliar afirmações deste tipo fazendo uso dos diagramas apresentados.

Exemplo 1.14 (FCC/2004)**.** ***Considerando "Todo livro é instrutivo" como uma proposição verdadeira, é correto inferir que:***

(A) "Nenhum livro é instrutivo" é uma proposição necessariamente verdadeira;

(B) "Algum livro é instrutivo" é uma proposição necessariamente verdadeira;

(C) "Algum livro não é instrutivo" é uma proposição verdadeira ou falsa;

(D) "Algum livro é instrutivo" é uma proposição verdadeira ou falsa;

(E) "Algum livro não é instrutivo" é uma proposição necessariamente verdadeira;

Solução. Esse problema traz cinco afirmações (as alternativas A, B, C, D e E), sendo cada uma referente a uma proposição (ou sentença) que está entre aspas. Apenas uma alternativa deve ser apontada como correta. O diagrama da Figura 1.3 representa a situação "Todo livro é instrutivo", onde A é o conjunto de todos os objetos instrutivos (o que engloba todos os livros, porém não só estes) e B é o conjunto de todos os livros. A seguir é feita a análise das alternativas candidatas a solução do problema:

(A) Errada. Para que a alternativa A estivesse correta seria necessário que nenhum elemento de B estivesse em A, o que não ocorre.

(B) A alternativa B está correta já que a afirmação "Todos os livros são instrutivos" pode ser enfraquecida para considerar apenas "Alguns livros são instrutivos" e isto não provoca nenhuma contradição.

(C) Embora não tenha ficado totalmente claro no enunciado, esta alternativa trouxe a afirmação de que a sentença entre aspas pode ser verdadeira ou falsa, dependendo do caso considerado (indeterminação). Isto não procede, já que se todos os livros são instrutivos não é possível haver algum livro não instrutivo, sendo portanto a proposição entre aspas sempre falsa.

(D) Cabe observação análoga à da alternativa C. Neste caso a sentença entre aspas é sempre verdadeira, e isto decorre da proposição "Todo livro é construtivo". Não cabe a possibilidade de considerar essa sentença falsa.

(E) Errada, de acordo com a observação na alternativa C.

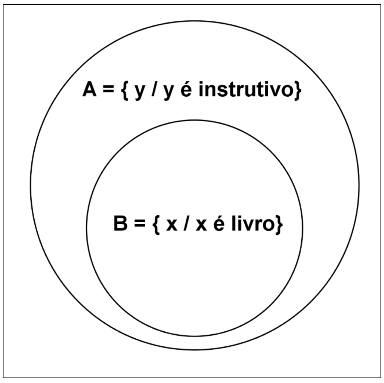

Figura 1.3: Diagrama - Exemplo 1.14

1.2.4 Intersecção

A intersecção de dois conjuntos A e B tem por objetivo obter um novo conjunto formado pelos elementos que estão simultaneamente em A e em B. A definição seguinte formaliza esta ideia, onde a notação $A \cap B$ deve ser lida como "A intersecção com B" e aponta para o novo conjunto formado.

Definição 1.15 (Intersecção). *A intersecção $A \cap B$ entre dois conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos que estão em ambos, A e a B. Simbolicamente, tem-se $A \cap B = \{\ x \ /\ x \in A \ e\ x \in B\}$.*

Observa-se que se um dos conjuntos, A ou B é o conjunto $\emptyset$, tem-se $\text{A} \cap \text{B} = \emptyset$. De fato, como não existem elementos em $\emptyset$, não podem existir elementos na intersecção porque isto implicaria a existência de algum $\text{x} \in \emptyset$. Pode acontecer também o caso da intersecção entre dois conjuntos não vazios ser "$\emptyset$". Sempre que a intersecção entre dois conjuntos for o conjunto vazio, diremos que estes conjuntos **são disjuntos**. A Figura 1.4 apresenta o diagrama de Venn para conjuntos não disjuntos. O diagrama da Figura 1.5 ilustra a representação de conjuntos disjuntos.

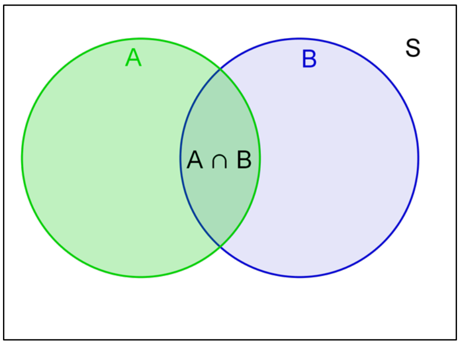

Figura 1.4: Diagrama de Venn - Intersecção de conjuntos.

1.2.5 União

A operação de união de conjuntos será definida para fornecer uma forma de construir novos conjuntos a partir de dois conjuntos preexistentes. Unir dois conjuntos significa juntar seus elementos em um conjunto que contém todos os elementos dos conjuntos iniciais, formando uma só coleção de objetos. Se os dois conjuntos iniciais são finitos e não possuem nenhum elemento em comum, ou seja, os conjuntos são disjuntos, então o conjunto resultante possui um número de elementos igual à soma do número de elementos dos dois conjuntos considerados a princípio.

Definição 1.16 (União). *A união $A \cup B$ entre dois conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos que estão em A ou em B (ou em ambos). Simbolicamente, representa-se:* $A \cup B = \{x \ / \ x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

O conjunto $A \cup B$ é chamado de união de A e B. Observa-se que a definição acima engloba o tanto casos em que os dois conjuntos não tem elemento algum em comum (é o caso da união disjunta) como casos em que existem elementos comuns aos conjuntos A e B. As Figuras 1.5 e 1.6 ilustram, respectivamente, essas duas possibilidades. A área hachurada representa o conjunto resultante.

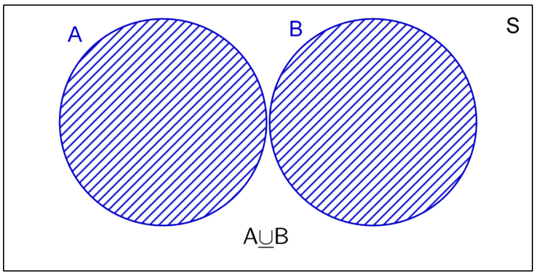

Figura 1.5: Diagrama de Venn - União Disjunta de conjuntos.

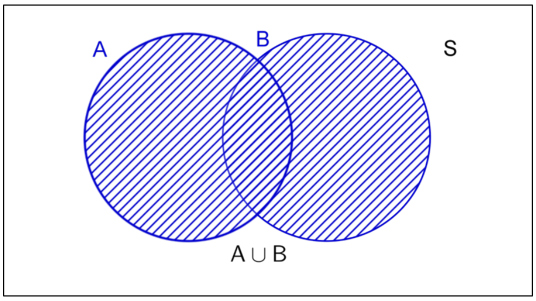

Figura 1.6: Diagrama de Venn - União de conjuntos.

Os diagramas anteriores são ferramentas importantes na construção de argumentos em que aparecem sentenças do tipo **"Nenhum A é B"**, **"Algum A é B"**, **"Algum A não é B"**. Dizer que "Nenhum A é B" é logicamente equivalente a dizer "Nenhum B é A". O diagrama da Figura 1.5 isto esclarece essa observação. Já sentenças do tipo

“Algum A não é B” são bem representadas pelos diagramas das Figuras 1.5 e 1.6, já que em ambos existe ao menos um elemento do conjunto B que não é elemento do conjunto A. Essa afirmação também é equivalente logicamente à afirmação “Algum B não é A”. Por fim, sentenças do tipo “Algum A é B” são bem representadas pelos diagramas das Figuras 1.2 e 1.6, já que em ambos está clara a ideia de que existe ao menos um elemento de A que também é elemento de B. Embora do ponto de vista lógico as duas interpretações sejam perfeitamente aceitáveis, eventualmente a sentença “Algum A é B” pode ser citada pressupondo que “Nem todo A é B”. o contexto deve deixar claro a mensagem a ser transmitida. Dizer que “Algum A é B” também é logicamente equivalente a dizer que “Algum B é A”. O exemplo seguinte foi extraído de prova de concurso público elaborado pela Escola de Administração Fazendária - ESAF.

Exemplo 1.17 (ESAF/1998)**.** ***Sabe-se que existe pelo menos um A que é B. Sabe-se também que todo B é C. Segue-se, portanto, necessariamente que:***

(A) Todo C é B;

(B) Todo C é A;

(C) Algum A é C;

(D) Nada que não seja C é A;

(E) Algum A não é C;

Solução. Como “existe pelo menos um A que é B”, então A e B não são disjuntos. Existe a possibilidade de validade do diagrama da Figura 1.4 e da Figura 1.2, neste último caso com duas possibilidades distintas: $A \subset B$ e $B \subset A$. Da afirmação todo B é C, sabemos que Vale o diagrama da Figura 1.2 com $B \subset C$. Se vale o diagrama da Figura 1.4 para A e B, podemos obter duas possibilidades de diagramas que relacionam A e C, conforme figura 1.7. Feitas essas considerações analisam-se a seguir as afirmações propostas como resposta ao problema.

(A) É errada, dado que existe a possibilidade de ser $B \neq C$.

(B) Errada, basta analisar que exite a possibilidade de existirem elementos de A que não estão em C;

(C) Verdadeira, uma vez que não sendo A e B disjuntos, possuem elementos em comum. Além disso, todo B é A, em particular os elementos comuns de A e B estão em C. Logo existe algum A que é C (e B);

(D) Errado, existe a possibilidade de elementos de A não estarem em C;

(E) Embora exista esta possibilidade ela não necessariamente é verdadeira, como ilustra o diagrama 1.7;

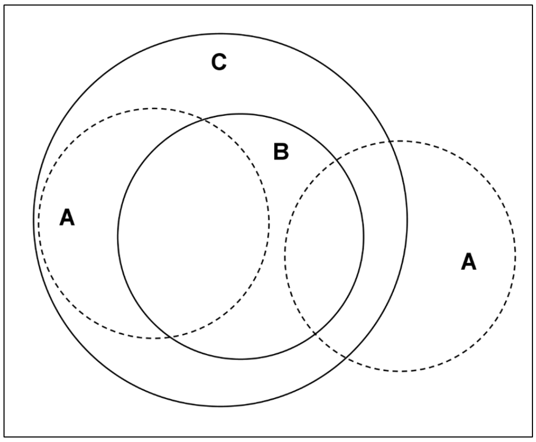

Figura 1.7: Diagrama - Exemplo 1.17

1.2.6 Diferença

A diferença entre dois conjuntos A e B (nesta ordem) origina um subconjunto de A que contem apenas os elementos de A que não estão em B. Quando os dois conjuntos são finitos e B $\subset$ A então o número de elementos da diferença A - B é igual à diferença entre o número de elementos de A e o número de elementos de B.

Definição 1.18 (Diferença)**.** *A diferença A - B entre dois conjuntos, A e B, nesta ordem, é o conjunto formado pelos elementos de A que não são elementos de B. Simbolicamente:* $A - B = \{x \; / \; x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

A Figura 1.8 ilustra o diagrama de Venn para a diferença A - B. Observa-se que a inversão dos papéis de A e B na definição anterior produz o conjunto B - A que, em geral, é diferente do conjunto A - B. Observando um $x \in$ A-B, temos que $x \in A$ e $x \notin B$. Dessa forma, não pode ser $x \in B - A$, já que para isto deveria valer $x \in B$. A diferença é igual se A = B.

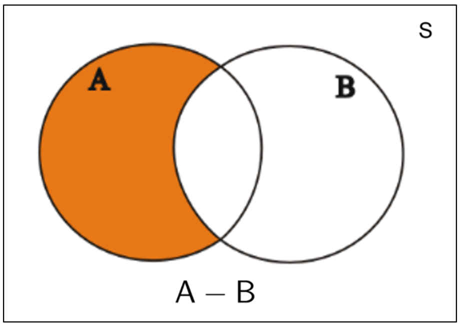

Figura 1.8: Diagrama de Venn - Diferença de Conjuntos.

Define-se também a diferença simétrica entre A e B (notação: A Δ B), cujo diagrama está representado na Figura 1.9:

Definição 1.19 (Diferença Simétrica)**.** *A diferença simétrica $A \triangle B$ entre dois conjuntos A e B é o conjunto formado pela união dos conjuntos A - B e B - A. Representa-se* $A \ \Delta \ B = (A - B) \cup (B - A)$.

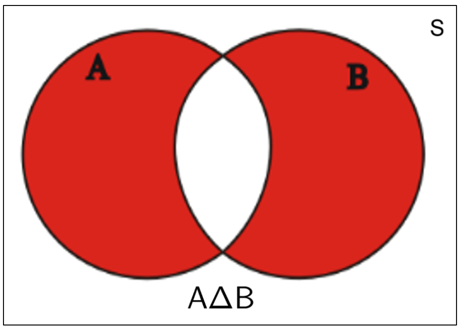

Figura 1.9: Diagrama de Venn - Diferença Simétrica de Conjuntos.

1.2.7 Complementar

Quando trabalhamos com conjuntos estamos implicitamente admitindo que estes estão dentro de um conjunto Universo que os contém. O axioma da especificação, no capítulo 3, elucidará a necessidade de aplicar o princípio da abstração apenas aos elementos de um conjunto preexistente, a fim de se evitar o surgimento de alguns paradoxos. Denotando esse conjunto universo por S e sendo A $\subset$ S estamos aptos a considerar o complementar A^C de A referente a S:

Definição 1.20 (Complementar)**.** *O complementar A^C de um conjunto A é o conjunto pelos elementos do conjunto universo S que não pertencem a A. Simbolicamente tem-se:* $A^C = S - A$

Assim, o conjunto A^C consiste nos elementos de S que não pertencem ao conjunto A. O diagrama está representado na Figura 1.10.

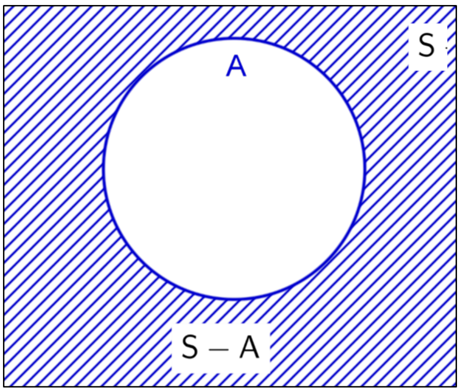

Figura 1.10: Diagrama de Venn - Complementar de conjunto.

1.3 Relações e Funções

Até o momento vimos como obter novos conjuntos a partir de conjuntos já conhecidos por meio das operações listadas na secção 1.2. Entretanto, nada do que foi apresentado até o momento nos permite ordenar os elementos de um conjunto. A partir da noção de par ordenado, será possível não só ordenar elementos de um conjunto, mas também ter-se-á uma nova operação que permitirá a partir de dois conjuntos A e B gerar o conjunto produto cartesiano de A por B. Para isto é necessário fazer uso do conceito de Relação. Alguns tipos de relações especiais, as funções biunívocas, serão usadas para se comparar o número de elementos de dois conjuntos, característica mais geralmente denotada por cardinalidade. Tais ferramentas serão amplamente utilizadas no capítulo 4 para aprofundar o estudo da Teoria dos Conjuntos. O leitor interessado pode aprofundar a compreensão dos aspectos desta secção nas referências [5], [9] e [13].

1.3.1 Pares Ordenados

Considere o conjunto $A = \{c, d\}$. Essa listagem dos elementos de A não apresenta qualquer indício de ordenação. A fim de escrever os elementos de A de forma ordenada, faz-se uso do conceito de par ordenado. Intuitivamente um par ordenado é uma entidade formada por dois objetos em uma ordem específica. Pares ordenados possibilitam obter uma nova forma de construir conjuntos a partir de outros conjuntos já existentes. Na definição a seguir faz-se uso da notação $(c, d) = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ para representar o conjunto gerado a partir da ordenação dos objetos c e d, com c sendo o primeiro e d o segundo elemento dessa ordenação. Os termos "primeiro" e "segundo" serão esclarecidos no Capítulo 4, após a apresentação dos Axiomas de Peano.

Definição 1.21 (Par Ordenado)**.** *O par ordenado de c e d com primeira coordenada c e segunda coordenada d é o conjunto* $(c, d) = \{\{c\}, \{c, d\}\}$.

Se quisermos escrever o par ordenado com primeira coordenada d e segunda coordenada c, escrevemos $(d, c) = \{\{d\}, \{c, d\}\}$. O teorema seguinte ilustra uma propriedade desejável para pares ordenados iguais. Em alguns livros, o conceito de par ordenado é adotado como indefinido e o teorema a seguir é tomado como axioma.

Teorema 1.22. *Se (a, b) e (c, d) são pares ordenados tais que $(a, b) = (c, d)$, então $a = c$ e $b = d$.*

Demonstração. Consideram-se separadamente duas possibilidades quanto aos elementos a e b: $a = b$ ou $a \neq b$. Primeiro, suponha que $a = b$. Neste caso tem-se na notação estabelecida $(a, b) = \{\{a\}, \{a, a\}\}$, que pode ser abreviado por $(a, b) = \{\{a\}\}$. Sendo $(a, b) = (c, d)$ tem-se $(c, d) = \{\{c\}, \{c, d\}\} = \{\{a\}\}$ e o conjunto (c, d) deve ser unitário, ou seja, $\{c\} = \{c, d\} = \{a\}$ de onde $c = d = a = b$, uma vez que dois conjuntos são iguais se e somente se possuem os mesmos elementos. Suponha agora que não vale a igualdade entre a e b, isto é, seja $a \neq b$. Tem-se $\{a, b\} \neq \{a\}$ e $\{a\} \neq \{c, d\}$ (devido ao número diferente de elementos nos conjuntos). De $(a, b) = (c, d)$ e da definição de par ordenado, conclui-se que $\{a\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$, de onde conclui-se que $\{a\} = \{c\}$ e $a = c$. Também $\{c, d\} = \{a, b\}$ e como $a = c$ e $a \neq b$ deve ser $b = d$.

□

1.3.2 Produto Cartesiano

Dados dois conjuntos não vazios A e B, o produto cartesiano de A por B (notação $A \times B$) é uma forma de construir um novo conjunto a partir de A e B.

Definição 1.23 (Produto Cartesiano). *O produto cartesiano de dois conjuntos, A e B, é o conjunto* $A \times B = \{(a, b) \ / \ a \in A \text{ e } b \in B\}$.

1.3.3 Relações de Equivalência

Definição 1.24 (Relação Binária). *Um subconjunto R do produto cartesiano* $A \times A$ *é uma relação binária sobre A. Se* $(a, b) \in R$ *então escreve-se* ***aRb***.

Observemos a relação de igualdade, considerando três conjuntos, A, B e C. Ela satisfaz a três propriedades:

1. $A = A$, pois todo elemento de A está em A.
2. Se $A = B$ então $B = A$. Isto porque se $A = B$ então todo elemento de A está em B e todo elemento de B está em A. A inversão da ordem de escrita destas duas frases mostra que $B = A$.
3. Se $A = B$ e $B = C$ então $A = C$. De fato as duas primeiras igualdades apontam que A e C tem exatamente os mesmos elementos de B. Assim, os elementos de A e C são os mesmos.

Definição 1.25 (Relação de Equivalência). *Uma relação binária R sobre A é uma* ***relação de equivalência*** *se e somente se satisfaz:*

1. *Reflexiva:* ***aRa*** *para todo* $a \in A$.

2. *Simetrica: Se* ***aRb*** *então* ***bRa****.*

3. *Transitiva: Se* ***aRb*** *e* ***bRc*** *então* ***aRc****.*

Definição 1.26 (Classe de Equivalência)**.** *Seja R uma relação de equivalência sobre A. A classe de equivalência de* $a \in A$ *gerada por R é o conjunto* $[a] = \{b \in A \ / \ \boldsymbol{bRa}\}$.

Exemplo 1.27. *Sendo* $\mathbb{Z}$ *o conjunto de números inteiros, podemos definir a relação* ***aRb*** *se e só se a e b deixam o mesmo resto na divisão por dois. A relação R assim definida é reflexiva, simétrica e transitiva. Neste caso o conjunto* $\mathbb{Z}$ *fica dividido em duas classes de elementos: pares (resto zero) e ímpares (resto um). Representamos estas classes por:* $[0] = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}$ *e* $[1] = \{..., -3, -1, 1, 3, ...\}$.

Isto nos permite considerar um novo conjunto, $\mathbb{Z}_2 = \{[0], [1]\}$ *do qual podemos estudar e extrair propriedades acerca da paridade de números inteiros.*

1.3.4 Partições

Uma relação de equivalência R sobre A é importante porque induz uma partição sobre o A. Isto é permite agrupar os elementos de A em grupos de elementos chamados de classes de equivalência, nos quais os elementos de cada membro possuem uma propriedade comum, evidenciada por R. A ideia é construir um conjunto A' a partir de A e, a partir do estudo das propriedades de A', obter novas conclusões sobre o conjunto A.

Definição 1.28 (Partição)**.** *Uma partição P de um conjunto A é uma coleção de subconjuntos* ***não vazios*** *de A satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. *Os elementos de P são dois a dois disjuntos.*

2. *Cada elemento de A pertence a algum elemento de P.*

Exemplo 1.29. *Sabe-se que a divisão por* $n \neq 0$ *em* $\mathbb{Z}$ *por meio do algoritmo de Euclides deixa apenas restos 0, 1, ..., n - 1. Todo número inteiro pode ser agrupado então em uma dessas n classes de restos. Definindo R sobre* $\mathbb{Z}$ *de modo que* ***aRb*** *se e só se a e b deixam o mesmo resto r,* $0 \leq r \leq n - 1$*, quando divididos por n. Verificar que R é uma relação de equivalência.*

Verificação:

1. Reflexiva: Como o resto r na divisão por n é único nas condições dadas, segue-se que **aRa** para qualquer a inteiro.

2. Simetrica: Se a e b deixam o mesmo resto na divisão por n (**aRb**), então b e a o fazem (**bRa**)

3. Transitiva: Se a e b deixam o mesmo resto r na divisão por n (**aRb**), e b e c também deixam o mesmo resto(**bRc**), pela unicidade do resto deixado por b, segue-se que o resto deixado por c também é r. Segue-se que a e c também deixam o mesmo resto na divisão por n (**aRc**).

Exemplo 1.30. *A relação de equivalência R do exemplo anterior induz sobre $\mathbb{Z}$ a formação de n classes de conjuntos, chamadas de classe de equivalência módulo n e representadas por [0], [1], ..., [n-1].*

Se n = 4, por exemplo, essas classes são:

1. *[0] = { ..., -8, -4, 0, 4, 8, ... }*

2. *[1] = {..., -7, -3, 1, 5, ...}*

3. *[2] = {..., -6, -2, 2, 6, ...}*

4. *[3] = {..., -5, -1, 3, 7, ...}*

   Observa-se que nenhuma das quatro classes é vazia e que qualquer número inteiro estará alocado em apenas um dos conjuntos, ou seja, as classes são duas a duas disjuntas.

Especificamente no exemplo anterior o símbolo *[0]* foi usado para representar o conjunto { ..., -8, -4, 0, 4, 8, ... }. Entretanto, qualquer outro elemento deste conjunto poderia ser representante desta classe, demodo que poder-se-ia escrever *[4]* ou *[8]*, por exemplo. Mais geralmente, se $b \in [a]$ então ***bRa*** e da simetria de R vale ***aRb*** implica que $b \in [a]$. A proposição seguinte mostra que estas duas classes são iguais. Além disso, nenhuma classe de equivalência é vazia,pois da propriedade reflexiva de R tem-se sempre ***aRa***, logo $a \in [a]$.

Proposição 1.31. *Seja R uma relação de equivalência sobre A. Se $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ então $[a] = [b]$.*

Demonstração. Suponha que exista um elemento $c \in [a] \cap [b]$. Neste caso, valem as conclusões:

1. *Como $c \in [a]$ tem-se **cRa**.*

2. *De $c \in [b]$ tem-se **cRb***

3. *Da simetria de R, vale **bRc**.*

4. *Da transitividade de R e dos passos 1 e 3, tem-se **bRa**.*

5. *A simetria de R garante também **aRb**.*

Assim, $a \in [b]$ e $[a] \subset [b]$, já que a pode ser qualquer elemento de [a]. Analogamente $[b] \subset [a]$ e os dois conjuntos são iguais pelo teorema 1.13. □

A ligação entre relações de equivalência e partições está especificada no teorema a seguir.

Teorema 1.32. *Seja R é uma relação de equivalência sobre o conjunto A. O conjunto $P = \{[x] \; / \; x \in A\}$ de todas as classes de equivalência segundo R é uma partição de A.*

Demonstração. O conjunto P satisfaz as três condições para ser uma partição de A. A propriedade reflexiva de R assegura que cada $a \in A$ está em uma (única) classe de equivalência, a saber, a classe *[a]*. Logo as classes são não vazias e cobrem todo o conjunto A. A proposição 1.29 garante que as classes são duas a duas disjuntas. □

A importância deste teorema no contexto deste trabalho reside no desenvolvimento do Capítulo 4, onde a relação de equipotência entre dois conjuntos é reconhecida como relação de equivalência. Tal relação induz uma partição no conjunto de todos os conjuntos (embora o uso do princípio da abstração para determinar este conjunto leve a um paradoxo). A partir da separação dos conjuntos em classes nas quais os membros tem o "mesmo número de elementos", podemos abstrair essa propriedade comum e definir cada classe de equivalência como o número cardinal que dá significado ao número de elementos dos seus conjuntos membros. Para isto serão necessárias as definições a seguir.

1.3.5 Funções

Os livros didáticos usados nos Ensinos Fundamental e Médio normalmente trazem a definição de uma função $\boldsymbol{f} : A \longrightarrow B$ como um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$. Esse é o caminho seguido neste trabalho também, embora seja evidente que esta definição tenha suas limitações. A principal delas é não transmitir claramente a ideia de função como correspondência, transformação ou dependência de uma grandeza em relação a outra, noções estas essenciais para modelagens matemáticas de problemas práticos. A justificativa para a definição de função a seguir reside no fato deste trabalho ser voltado para o ramo de Fundamentos da Matemática, com a principal finalidade de contribuir para o desenvolvimento da competência argumentativa dentro da Teoria dos Conjuntos.

Definição 1.33 (Função)**.** *Uma função $\boldsymbol{f}$ de um conjunto A num conjunto B é um subconjunto de $A \times B$ que satisfaz às duas propriedades:*

1. *Para cada $a \in A$ existe um $b \in B$ tal que $(a,\ b) \in \boldsymbol{f}$.*

2. *Se $(a,\ b)$ e $(a,\ c)$ pertencem a $\boldsymbol{f}$, então $b = c$.*

As duas propriedades acima indicam que cada elemento de A está associado a um único elemento de B por meio de um par ordenado. Desta forma não é possível em uma função que um elemento $a \in A$ não apareça relacionado em algum par ordenado elemento de $\boldsymbol{f}$. Também não é admitido que algum elemento de A figure em dois pares ordenados distintos da função.

Resumidamente, a função $\boldsymbol{f}$ associa a cada elemento de A um único elemento de **B**. O conjunto A é chamado de **domínio** de $\boldsymbol{f}$ e o conjunto B de **contradomínio** de $\boldsymbol{f}$. Como é possível que existam elementos de B que não figuram em nenhum par ordenado pertencente a $\boldsymbol{f}$, define-se o conjunto **imagem** de A sob $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{f(A)} = \{\mathrm{b}\ /\ \mathrm{b} \in \mathrm{B} \text{ e } (\mathrm{a},\ \mathrm{b}) \in \boldsymbol{f}\}$. É importante observar que um mesmo elemento b $\in$ B pode aparecer em pares ordenados distintos, mas cada elemento a $\in$ A só aparece em um único par ordenado.

Duas classes particularmente importantes de funções são a classe das funções injetivas e a das funções sobrejetivas. A intersecção dessas duas classes de funções fornece o conjunto das funções bijetivas ou bijeções.

Função Injetiva

Definição 1.34 (Função Injetiva)**.** *Uma função $\boldsymbol{f}$ de um conjunto A num conjunto B é injetiva se satisfaz:*

1. *Se (a, b), (a', b) $\in \boldsymbol{f}$ então a = a'.*

   Ou equivalentemente,

2. *Se a $\neq$ a' e (a, b), (a', b') $\in \boldsymbol{f}$ então b $\neq$ b'.*

Intuitivamente a existência de uma função injetiva $\boldsymbol{f : A \to B}$ significa que o conjunto B não têm menos elementos do que o conjunto A.

Função Sobrejetiva

Se por um lado as funções injetivas indicam que o número de elementos de B não é inferior ao número de elementos de A, por outro o conceito de funções sobrejetiva intuitivamente estabelece que o número de elementos de B não supera o número de elementos de A.

Definição 1.35 (Função Sobrejetiva)**.** *Uma função $\boldsymbol{f}$ de um conjunto A num conjunto B é sobrejetiva se dado qualquer b $\in$ B existe (a, b) $\in \boldsymbol{f}$.*

Função Bijetiva

O processo de contagem pode ser entendido como uma maneira de associar o número de elementos de um conjunto a elementos de outro que se deseja contar. Por exemplo, os dedos de uma mão podem ser usados por uma criança para contar o número de colegas em sala de aula. Embora nem sempre haja uma correspondência exata entre o número de dedos e o número de colegas, este procedimento é eficiente porque faz com que o número de colegas seja comparado com um conjunto com o mesmo "tamanho" de outro conjunto já conhecido. Essa noção será melhor descrita pelo conceito de cardinalidade, que é a classe de conjuntos entre os quais pode ser definida uma bijeção,cuja definição se segue.

Definição 1.36 (Bijeção)**.** *Uma função $\boldsymbol{f}$ de um conjunto A num conjunto B é uma bijeção se e somente se $\in \boldsymbol{f}$ é injetiva e sobrejetiva .*

Quando dois conjuntos são finitos, só é possível definir uma bijeção entre eles se ambos tem o mesmo número de elementos. O mesmo não acontece com dois conjuntos infinitos. É possível, por exemplo, definir uma bijeção entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos naturais pares, que é subconjunto próprio de $\mathbb{N}$.

1.4 Números Naturais

O que é número? Como podemos definir o que é um? Ou dois? Certamente uma das noções matemáticas mais importantes que compreendemos desde cedo é a de contagem. Através da contagem começamos a desenvolver o entendimento do conceito (abstrato) de número. Por este ponto de vista, número (cardinal) é o resultado de um processo de contagem, indicando uma quantidade. Entretanto o conceito de número é mais abrangente que o de número cardinal. Pode envolver também números reais, como resultado da uma medida da altura de uma pessoa, por exemplo. Não é raro encontrar em geometria exemplos de segmentos incomensuráveis quando aplicamos o Teorema de Pitágoras a triângulos com catetos de medidas inteiras.

O estudo dos números naturais no sentido ordinal pode ser feito de um modo mais objetivo usando os axiomas de Peano. Esse método consiste em listar algumas propriedades que desejamos que o nosso conjunto de números possua (geralmente facilmente percebidas no uso prático) e, a partir dessa lista de propriedades usamos nossos princípios de lógica para obter mais propriedades, as vezes não tão evidentes. A compreensão do que são os números naturais vem a medida que avançamos no desenvolvimento da teoria e nos apropriamos das propriedades que são demonstradas. Essa atitude de listar axiomas que fundamentam toda uma teoria prevalece hoje dentro da matemática. Acrescenta-se ainda que é desejável que a lista de axiomas seja a menor possível. Também é importante que os axiomas sejam independentes, ou seja, um axioma não pode ser deduzido a partir dos demais axiomas adotados. Outra questão mais delicada que se coloca é a completude dos axiomas escolhidos, no seguinte sentido: gostar-se-ia que fosse possível decidir para qualquer proposição na teoria se esta é verdadeira (válida) ou não, a partir dos axiomas adotados.

Depois de desenvolvida a teoria dos números naturais, pode-se estender sucessivamente o conceito de número, obtendo os conjuntos dos números inteiros, racionais, reais e complexos. Duas referência que trazem essa construção são [5] e [7]. Nesse contexto, ganham sentido as palavras de Leopold Kronecker (1823 - 1891):

> **"Deus criou os números naturais. Tudo o mais é produto da mão do homem."**

Existe uma dificuldade para definir o conceito preciso de conjunto: a possibilidade da regressão infinita. Qualquer que seja a frase que usemos para explicar o que é um conjunto, faremos uso de palavras que podem não ser previamente compreendidas pelo indivíduo para o qual pretendemos explicar o conceito. É uma situação semelhante a de explicar o que é uma reta, ou um ponto, ou um plano. Cada explicação usa palavras que também podem demandar maiores explicações, e assim entramos numa discussão sem fim para explicar algo que é simples de compreender intuitivamente. Assim, consideramos alguns termos, como conjuntos, pontos, retas, planos, como sendo entes primitivos, admitidos sem maiores explicações. Não é importante saber dizer com precisão o que são esses objetos, mas sim o que podemos fazer com eles.

Admitidos os entes primitivos o foco passa a ser a necessidade de descrever com precisão de qual forma pode-se fazer uso deles. Com esse propósito é adotado um conjunto de proposições, chamados axiomas ou postulados, que são o ponto de partida da teoria. Os axiomas permitirão compreender melhor os entes primitivos a partir das propriedades que são deduzidas por meio dos princípios da lógica bivalente.

Capítulo 2

A Lógica Bivalente

A visão de que a matemática é, em algum sentido, redutível à lógica formal, decorre do logicismo defendido por Bertrand Russell (1872 - 1970) que, como Kurt Gödel (1906 - 1978), é considerado um dos lógicos mais importantes do século XX. Russell fez contribuições inovadoras para os fundamentos da matemática e para o desenvolvimento da lógica formal contemporânea, bem como para a filosofia analítica. Neste trabalho é feita referência ao paradoxo de Russel, no capítulo 3, cuja descoberta levou ao aperfeiçoamento do axioma da abstração na Teoria dos Conjuntos. Remetemos o leitor a [17] para um maior contato com as biografias e contribuições desses grandes nomes.

A Lógica que desenvolveremos nesta dissertação é bivalente, ou seja, só admite, para cada sentença, os valores lógicos verdadeiro e falso. Não há uma terceira opção. Valem os dois princípios:

Princípio da não contradição: Se uma sentença for verdadeira, não poderá ser também falsa.

Princípio do terceiro excluído: Dada uma sentença, ou ela é verdadeira ou é falsa. Se a sentença é falsa, sua negação é verdadeira.

Neste capítulo procura-se descrever as principais noções necessárias à compreensão de argumentos válidos. Inicia-se justificando a importância do estudo da Lógica, passando depois a um importante campo de aplicação dentro da Matemática: as teorias axiomáticas. Procura-se mostrar que, mesmo o emprego do Método Axiomático parte de métodos de investigação menos formais e evolui, aplicando-se regras de dedução até atingir um sistema mais complexo, onde a precisão na escrita e nas deduções é fundamental. Promove-se uma breve discussão sobre o que é verdade, embora o importante aqui não será o que é ou não verdade, mas sim quais conclusões decorrem quando consideramos algumas sentenças verdadeiras. A culminância deste capítulo é a secção 2.5, onde se trabalha a noção de Argumentação Lógica. A fim de apresentar a alunos de Educação Básica um primeiro contato com a noção de argumento é possível e desejável que se faça uso de diagramas. Entretanto é importante mostrar aos alunos as limitações advindas desse uso. Procura-se mostrar isto apresentando algumas ilusões de ótica na secção 2.2. É interessante desenvolver no aluno a percepção da necessidade de uma metodologia mais precisa de argumentar, o que pode ser feito por meio da proposição de charadas lógicas como as apresentadas nos problemas 7 a 16 do capítulo 5. Uma enorme quantidade de exercícios pode ser obtida na referência [4].

2.1 Por que estudar princípios de Lógica?

Algumas práticas comuns são usadas para descobrir resultados de uma maneira informal em matemática. O processo de tentativa e erro, o uso de recursos computacionais e o desenho e observação de diagramas são algumas das possibilidades de investigação que podem ser exploradas no início do estudo de um problema matemático. Embora tais ferramentas sejam um bom ponto de partida, podem não ser a melhor forma de convencer alguém de que as conclusões que você chegou são de fato verdadeiras. Você pode ser questionado, por exemplo, se o desenho no qual se baseou representa de forma abrangente toda a situação em estudo. Isso se não houver reclamações sobre a qualidade do seu desenho. Neste caso você terá que argumentar de forma eficiente a fim de convencer seus interlocutores da confiabilidade de suas observações. O sucesso ou o fracasso da sua defesa dependerá, dentre outros motivos, da aceitação ou não de seus argumentos. Torna-se assim importante o conhecimento de regras comuns da boa argumentação, que norteiam o que são ou não argumentos válidos. É neste contexto que aparece a importância do estudo da lógica. As regras apresentadas aqui são apenas um resumo de como estabelecer em bases mais firmes as observações informais extraídas dos recursos citados no início do capítulo.

2.2 O Método Axiomático

Este trabalho visa chamar atenção para o que talvez seja um dos maiores motivos para que a matemática seja pouco apreciada por um grande número de alunos de Ensino Básico: ao invés de instigar nossos alunos a descobrir resultados e propor soluções para problemas que se apresentam no cotidiano, simplesmente expondo resultados finalizados sem mostrar as dificuldades enfrentadas durante a sua construção. Isso acontece principalmente quando seguimos a ordem de exposição de livros didáticos, muitas vezes sem qualquer vínculo com o contexto em que esses conceitos foram desenvolvidos e as perguntas a que respondem.

O método axiomático é uma maneira de organizar e dar precisão a uma teoria em estudo. É através dessa organização que se obtém uma estrutura mais clara e rigorosa de conclusões obtidas as vezes informalmente. Ao mesmo tempo que o método axiomático permite organizar resultados de investigações informais, permite também que se verifique se tais conclusões estão corretas. Para isto, faz-se uso de uma lista de critérios aceitos de forma universal. A importância desse rigor pode ser apreciada observando que ao longo da história da civilização, diferente do que ocorre em outras áreas do conhecimento - onde o avanço tecnológico ajuda a promover uma constante revisão da noção de verdade - um teorema Matemático corretamente demonstrado não deixa de ser verdadeiro jamais.

Embora seja valioso colocar o resultado de uma investigação em bases formais mais rigorosas, uma reflexão deve ser feita acerca da ordem na qual as coisas acontecem. Parafraseando a Doutora Tatiana Roque em sua obra [19] (um dos vencedores do 55º Prêmio Jabuti de 2013, na categoria Ciências Exatas, Tecnologia e Informática), é comum a apresentação de resultados prontos e acabados de resultados matemáticos aos nossos alunos, sem que seja dada a uma prévia do processo de evolução até a elaboração de um conceito, ou de uma teoria, por exemplo. Deve-se ter em mente que, tão importante quanto o enunciado preciso e a demonstração rigorosa de um teorema, é o processo que levou a sua elaboração e descoberta: os erros cometidos durante o desenvolvimento, os problemas que ele objetiva solucionar e como se deu a investigação que levou ao resultado final. É esse conhecimento que torna a matemática prática e útil à humanidade, sendo a abstração uma das partes que a compõem e não a sua totalidade. Antes de chegar ao resultado final que é o enunciado e a demonstração de que (sob determinadas condições) uma conclusão é verdadeira, passa-se pelo processo de investigação.

2.2.1 O método da Tentativa e Erro

O método da tentativa e erro pode ser ilustrado pelo que hoje conhecemos como método da falsa posição: partindo de um palpite inicial como resposta a um problema, refinamos a escolha até chegar a uma resposta final correta. Uma aplicação desse método pode ser a resolução de equações de primeiro grau de forma puramente aritmética, por exemplo. Isto era feito no Papiro de Rhind, datado de 1.650 a.C no Egito. Nele estão contidos cerca de 85 problemas tratando de armazenamento de grãos, preço do pão, alimentação dos animais, etc. Um desses problemas (exemplo a seguir) ilustra o uso do método da falsa posição, no qual o termo montão é usado em referência à quantidade desconhecida.

Exemplo 2.1. *Um montão, mais a sua metade, seus dois terços, todos juntos são 26. Diga-me, quanto é esse montão?*

Solução: Tomando 18 como valor falso, isto é, como solução inicial, sua metade (que é 9) e seus dois terços (que é 12) somados resultam em $18 + 9 + 12 = 39$. Como o resultado deveria se 26, deve ser feito um ajuste no palpite inicial. Este ajuste era feito por semelhança de triângulos (o que, observa-se, só é possível porque o problema equivale a resolver uma equação linear). Chegava-se à situação: 18 está para x, assim como 39 está para 26, portanto $x = 18 \times 26\ /\ 39 = 12$. Logo 12 é o valor do montão.

Em problemas de modelagem por meio de funções, podemos usar o método da bisseção, por exemplo, para descobrir raízes difíceis de se obter de forma exata. É o caso do cálculo de raízes enésimas de um número dado. É preciso ter em mente que este método é perfeitamente válido e em nada deixa a desejar, principalmente em problemas práticos.

Um engenheiro civil, por exemplo, ao dimensionar uma estrutura, não sabe inicialmente o peso que ela suportará, já que este peso depende das dimensões das lajes, vigas e pilares que ele não calculou ainda. Por outro lado, o cálculo desses elementos depende de quanto peso a estrutura suportará, incluindo seus próprios pesos. A partir de um palpite inicial, o engenheiro projeta estes elementos e vai redimensionando seus tamanhos de forma a obter a solução mais econômica e com máxima segurança possível.

2.2.2 O auxílio dos Recursos Computacionais

A via de ligação entre Matemática e tecnologia deve ser de mão dupla: da mesma forma que a Matemática deve ser usada para compreender e promover o desenvolvimento da tecnologia, a tecnologia pode e deve ser usada como ferramenta para entender a Matemática. É o que acontece quando fazemos uso de planilhas eletrônicas para acompanhar, por exemplo, a evolução do saldo devedor de um financiamento bancário. Neste caso usamos o conhecimento matemático para "programar" a planilha e nos beneficiamos da agilidade e rapidez que este recurso oferece. De acordo com [15], página 87:

> **"Já se pensando na Tecnologia para a Matemática, há programas de computador (softwares) nos quais os alunos podem explorar e construir diferentes conceitos matemáticos, referidos a seguir como programas de expressão. Os programas de expressão apresentam recursos que provocam, de forma muito natural, o processo que caracteriza o "pensar matematicamente", ou seja, os alunos fazem experimentos, testam hipóteses, esboçam conjecturas, criam estratégias para resolver problemas. São características desses programas: a) conter um certo domínio de saber matemático - a sua base de conhecimento; b) oferecer diferentes representações para um mesmo objeto matemático - numérica, algébrica, geométrica; c) possibilitar a expansão de sua base de conhecimento por meio de macro construções; d) permitir a manipulação dos objetos que estão na tela."**

2.2.3 A Confiabilidade no Uso de Diagramas

A ideia desta secção é justificar a necessidade de desenvolver um método mais preciso de argumentação que não dependa exclusivamente da percepção visual que, as vezes, pode ser enganosa. Para mostrar aos alunos porque é necessário usar diagramas com cautela, podemos apresentar diversas situações de ilusões de ótica, conforme as mostradas nas figuras a seguir. É uma tarefa importante mostrar que o uso de diagramas pode conduzir a interpretações erradas quando realizado sem o devido cuidado.

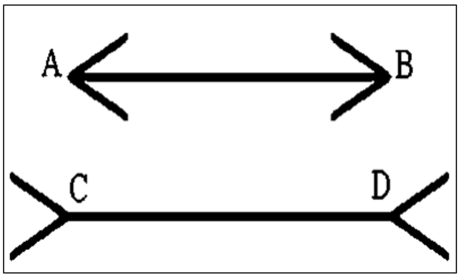

Figura 2.1: Qual dos segmentos é o maior?

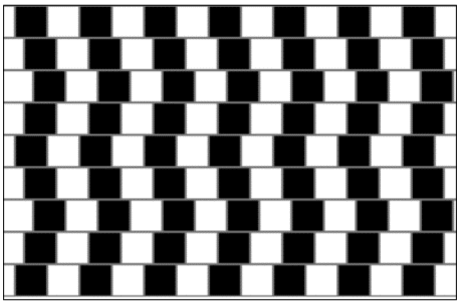

Figura 2.2: As retas horizontais são paralelas?

Na Figura 2.1, encontramos dois segmentos de reta de mesmo tamanho. O que os alunos responderão quando perguntados qual dos dois segmentos, AB ou CD, é maior? Após ouvir algumas respostas à pergunta, podemos sugerir que esses alunos utilizem uma régua para testar suas respostas. Uma outra imagem interessante que pode ser usada no desenvolvimento da geometria é a da Figura 2.2: *A Ilusão da parede do Café*, primeiramente descrita pelo Dr. Richard Gregory. Nesta imagem, tenta-se confundir a relação de paralelismo entre duas retas. As linhas horizontais são duas a duas paralelas. Na Figura 2.3 temos a *Ilusão da grade de Hermann*, que aparentemente mostra pontos cinza nas intersecções entre faixas brancas verticais e horizontais. Esses pontos cinza não existem, e desaparecem se olharmos fixamente para eles. Esta ilusão foi descoberta por Ludimar Hermann em 1870. Na figura 2.4 temos a duas linhas que aparentam ser arcos devido à convergência das retas não verticais para um único ponto na região entre as retas verticais. A distorção é produzida pelo padrão das linhas do fundo que simula um desenho de perspectiva e cria a falsa impressão de profundidade. Esta ilusão foi descoberta pelo psicólogo alemão Ewald Hering, em 1861.

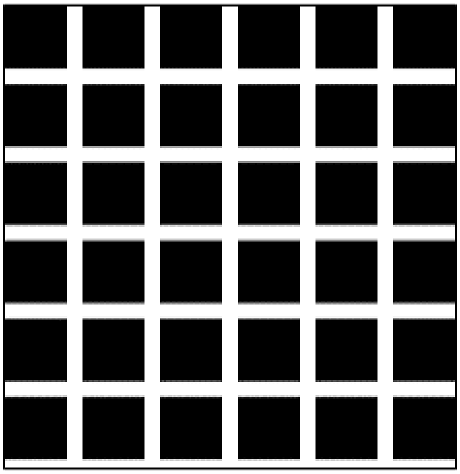

Figura 2.3: Quantos pontos cinzas existem na figura?

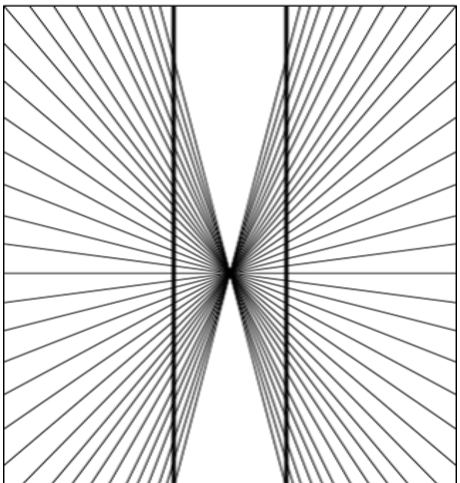

Figura 2.4: As retas verticais são paralelas?

2.3 O que são Sentenças?

Dentro da língua portuguesa não é difícil encontrar exemplos de frases de duplo sentido, isto é, frases ambíguas que deixam o leitor na dúvida acerca da verdadeira mensagem que se pretende transmitir. Por exemplo:

O aluno disse ao professor que sua argumentação estava incorreta.

Agora vejamos. Quem argumentou de forma incorreta? O aluno ou o professor? Se você estava presente na sala de aula no momento da argumentação, certamente será capaz de decidir quem argumentou de forma incorreta. Mas se este não é o caso, a ambiguidade da frase acima poderia levá-lo a entender que o erro foi do professor, sendo que a frase poderia ser reescrita de forma mais clara:

O aluno disse que a argumentação do professor estava incorreta.

Também seria válido o entendimento de que o erro na argumentação foi do aluno. Aliás, considerando os papéis sociais de ambos, professor e aluno, talvez esta fosse a interpretação natural. Sendo este o caso a frase poderia ser reescrita de forma a deixar de ser ambígua:

O aluno disse que sua argumentação estava incorreta.

Assim, percebemos que existem algumas dificuldades inerentes à linguagem que usamos para nos comunicar. No exemplo anterior, enfrentamos uma frase cujo sentido, apesar de completo, levou a duas interpretações distintas. Em algumas situações pode ser necessário eliminar totalmente as ambiguidades desse tipo. É o caso, por exemplo, dos contratos de alto valor assinados entre grandes empresas; ou mesmo a redação de leis que integram o ordenamento jurídico de um país. Observemos o que estabelece a

Constituição Federal de 1.988, em seu artigo quinto, caput:

> **"[...] Todos são iguais perante a lei, sem distinção de qualquer natureza, garantindo-se aos brasileiros e aos estrangeiros residentes no País a inviolabilidade do direito à vida, à liberdade, à igualdade, à segurança e à propriedade, nos termos seguintes: [...]"**

Seria lícito então assumir, já que não está explícito no artigo, que o estrangeiro que esteja no Brasil apenas de passagem, não sendo portanto residente, não possui direito à vida? A resposta é não, essa tese não encontra respaldo constitucional. A imprecisão devido à redação do artigo não tira do estrangeiro em trânsito pelo país o direito à vida.

Observe que, de uma forma sutilmente diferente do que foi apresentado no exemplo anterior, não existe dúvida quanto ao que está escrito no caput do artigo quinto. De fato os direitos mencionados se aplicam certamente aos brasileiros e estrangeiros residentes no país. Não há nenhum conflito no sentido de a quem se aplicam os direitos, que são válidos para cidadãos que satisfaçam qualquer uma das condições. O que existe é uma dúvida acerca do universo ao qual a declaração se aplica. A lista esgota-se nos dois casos (brasileiros e estrangeiros residentes) ou abrange também estrangeiros em trânsito no país? Certamente a intenção do legislador foi garantir o direito à vida para todos no país, mas a redação não foi eficiente a ponto de traduzir esse objetivo plenamente.

Consideremos ainda uma terceira situação, que abrange um ponto de constante debate entre cristãos acerca do tema eternidade. Ressalta-se que, exatamente por haver grande número de adeptos e também de não adeptos ao cristianismo em todos os segmentos sociais, faremos essa menção com um objetivo: provocar a reflexão acerca da noção de verdade como algo absoluto. De fato por vezes essa noção depende também dos valores que cada indivíduo traz consigo.

No novo testamento, no livro de Lucas, capítulo 23, é narrada a história da crucificação de Jesus ao lado de dois ladrões, dos quais um recebeu a salvação (vida eterna).

No verso 43 está escrito:

> **"E disse-lhe Jesus: Em verdade te digo que hoje estarás comigo no Paraíso.** (tradução Almeida corrigida e revisada)"

O versículo mencionado é ponto de discordância entre cristãos pelo seguinte: de um lado há quem defenda que no momento após a morte de ambos (Jesus e o ladrão arrependido), eles foram para o paraíso (exatamente como está escrito no versículo). De outro lado, há quem argumente, baseado em outros trechos da bíblia que isto não é possível. O próprio Jesus, inclusive, teria ressuscitado três dias após sua morte e só depois ascendido aos céus. São dois pontos de vista conflitantes dentro de uma mesma crença. Mas qual a verdadeira origem dessa discordância?

A resposta parece estar na tradução das escrituras para a língua portuguesa. O conectivo "que" apresentado na tradução do versículo não consta no texto original em grego. Na escrita grega as frases são escritas todas juntas e sem o conetivo mencionado. Imagine então que a tradução fosse:

> **"Em verdade te digo hoje estarás comigo no Paraíso."**

Deve ficar claro que existe uma dificuldade de entender se o vocábulo hoje se refere ao momento da fala ou ao momento do encontro no paraíso. Analisando isoladamente o versículo é simplesmente uma questão de colocar a vírgula após o vocábulo "hoje" ou após a palavra "digo", respectivamente.

Os pontos de vista acima decorrem exatamente da dificuldade existente na tradução de textos de um idioma para outro. E esses conflitos, embora cada vez mais presentes no mundo globalizado e interligado dos dias de hoje, não podem afetar a precisão da argumentação requerida, por exemplo, ao se trabalhar fundamentos da matemática; em particular a teoria dos conjuntos, que é ponto de partida para muitas outras, requer a eliminação de certos paradoxos (apresentados mais a frente), o que é feito exigindo-se maior precisão na linguagem. É nesse sentido que aparece a necessidade de se desenvolver uma linguagem comum, mais precisa e de domínio universal, que permita eliminar conflitos como os mencionados.

Vamos então dar um primeiro passo no sentido de esclarecer quais serão as frases objeto dos princípios da boa argumentação que se pretende desenvolver neste trabalho. Gostaríamos de considerar apenas afirmações às quais podemos atribuir uma das qualidades: verdadeiro ou falso (mas não ambos simultaneamente). Então seria natural de imediato excluirmos frases do tipo:

Frases interrogativas:

Você gosta de Matemática?

Frases exclamativas:

Passei!

Frases imperativas:

Estude diariamente.

A lista acima não esgota todos os tipos de frases que serão excluídas do estudo da lógica neste trabalho. Podemos analisar um tipo de afirmação que faz referência a si mesma, e que, por isso, não possui valor lógico verdadeiro ou falso:

Esta frase é falsa.

Admitindo que a frase é de fato verdadeira, estaremos afirmando que ela também é falsa (pelo conteúdo nela expresso). Assim ela seria simultaneamente verdadeira e falsa. De modo análogo, ao assumirmos que a frase é falsa, então intuitivamente o contrário (a negação) o que a frase afirma deve ser verdadeiro. Consequentemente, assumindo que a frase é falsa chegamos à conclusão que ela é também verdadeira. Pelo exposto independentemente do valor lógico que se atribui à frase obtemos uma situação paradoxal. Situações como essa (em que uma afirmação é simultaneamente verdadeira e falsa) são indesejáveis dentro de uma teoria. São consideradas contradições. Entretanto, não se deve desprezar de todo as contradições pois são, como veremos a frente, a base de um método de demonstrar resultados conhecido como método de *redução ao absurdo*.

2.4 A Noção de Verdade

Uma sentença é uma frase com sentido completo à qual podemos atribuir o valor lógico de verdadeiro (V) ou falso (F). Caso uma sentença assuma o valor lógico verdadeiro, diremos que ela é verdadeira. Caso o valor lógico seja falso, diremos que a sentença é falsa. Pelo princípio da não contradição uma frase pode assumir apenas um desses valores lógicos. Pela restrição que fizemos ao significado de sentenças, podemos aplicar sempre o princípio do terceiro excluído. Então uma sentença será verdadeira ou falsa (mas nunca ambos). Se for verdadeira, sua negação será falsa, e vice-versa.

Entenderemos de forma intuitiva que uma sentença é verdadeira se o conteúdo que ela transmite está em concordância com a realidade, no seguinte sentido: existe um procedimento para verificar se ela descreve ou não o conteúdo transmitido. Assim deve ser possível, de alguma forma, decidir se uma sentença é verdadeira ou não. Dois métodos bastante usados para se decidir sobre a veracidade de uma sentença são o empírico e o dedutivo. Adiante, teceremos breves comentários sobre ambos.

2.4.1 O método Empírico

Uma característica que algumas sentenças possuem é a possibilidade de se verificar se o conteúdo que traduzem está ou não em concordância com os fatos observáveis. Se quisermos testar a afirmação "Há uma bola atrás do carro." podemos fazer isto verificando diretamente se atrás do carro mencionado há realmente uma bola.

Outra sentença pode exigir uma observação mais sofisticada: "Ouvir a sonata para dois pianos em dó maior de Mozart torna o indivíduo mais inteligente". Para testar essa afirmação podemos, por exemplo, organizar dois grupos de indivíduos. Um deles seria exposto diariamente à sonata e o outro não. Ao fim, comparando-se testes antes e depois da exposição dos dois grupos, poderíamos decidir, usando alguma estatística, se é ou não verdadeira a afirmação feita.

De um modo bastante grosseiro é assim que se testa a eficácia de um determinado medicamento pra o tratamento de alguma enfermidade: Um grupo recebe a medicação verdadeira e outro grupos recebe apenas placebos. Suponha que, ao final da observação, verificarmos que 90% dos indivíduos que recebeu a medicação apresentou melhora significativa, enquanto os indivíduos do grupo placebo permaneceram com os sintomas apresentados no início do estudo. Isso significa que a afirmação "a medicação é eficiente" é verdadeira? Aqui vemos que de uma forma rígida a afirmação não é completamente verdadeira no sentido de que não é válida para todos os indivíduos. Mas é inegável que a medicação produz o efeito desejado no tratamento da doença para a maioria dos indivíduos. Assim, sob certas condições, a sentença "a medicação é eficiente" pode ser considerada verdadeira. Vê-se assim que o conceito de verdade não é absoluto.

2.4.2 O método Dedutivo

O método dedutivo consiste em, partindo de premissas, axiomas ou conjecturas que são aceitos como válidos, obter conclusões fazendo uso de regras previamente definidas no estudo da lógica. Por meio do método dedutivo é possível investigar consequências dessas proposições que consideramos como ponto de partida para aprofundamento de uma teoria. Assim sendo, nota-se que o método dedutivo parte de casos gerais e, a medida que conclusões vão sendo obtidas das premissas iniciais, vão surgindo também casos particulares interessantes aos quais a teoria em questão se aplica.

Aqui cabe uma observação que caracteriza e diferencia a Matemática de outros ramos científicos: as verdades estabelecidas na Matemática jamais mudam. Um teorema provado corretamente será verdadeiro para sempre. Em outras palavras, uma argumento válido dentro de uma teoria matemática conduz a verdades imutáveis. Essa singularidade por si só já deveria ser suficiente para esclarecer a um aluno de ensino básico a importância de se aprender matemática.

2.4.3 O método Indutivo

O método indutivo é a forma de raciocinar partindo de casos particulares observados, passando por casos mais gerais até atingir uma conclusão que abarca as observações feitas inicialmente. A ciência de um modo geral evolui a partir da observação de experimentos que visam reproduzir muitas vezes fenômenos pouco conhecidos. Após realização de testes, geralmente controlando e mudando algumas das variáveis em observação, começa a surgir uma ideia de como explicar o fenômeno em estudo. Alguns palpites que surgem podem ser usados para tentar explicar ou prever resultados de repetições similares ao fenômeno. Se essas conjecturas se ajustam satisfatoriamente aos fatos observados, e se não produzem contradições entre eles, tem inicio uma teoria indutiva.

Diferentemente da Matemática, entretanto, uma verdade dentro de uma teoria científica não é revestida de imutabilidade. Como exemplo, podemos lembrar que a segunda Lei de Newton funcionou bem no mundo macroscópico por anos, mas precisou ser ajustada a medida que surgiram novas tecnologias capazes de permitir a observação do movimento de partículas microscópicas. Assim, o avanço na própria tecnologia permite que constantemente teorias científicas sejam revisadas e aperfeiçoadas.

Isso não significa entretanto que o método indutivo não tenha valor dentro da Matemática. Historicamente podemos observar que muito do conhecimento matemático de que dispomos hoje é fruto de conjecturas que foram confirmadas posteriormente com argumentos indutivos. Algumas dessas conjecturas, aliás, demoraram anos para alcançar o status de teorema.

2.4.4 Conetivos lógicos e tabelas verdade

A partir da ideia de sentenças desenvolvida nos tópicos anteriores, pode ser necessário, a fim de contemplar mais discursos da linguagem natural, formar novas sentenças a partir de algumas sentenças mais simples. Para formar sentenças compostas a partir de sentenças simples faremos uso de conectivos lógicos. Os utilizados neste trabalho serão, com seus respectivos símbolos: a negação $\neg$ (não); a conjunção $\wedge$ (e); a disjunção $\vee$ (ou); o condicional $\longrightarrow$ (se... então...); e o bicondicional $\longleftrightarrow$ (se, e somente se). O leitor pode aprofundar os conhecimentos acerca da aplicação da lógica à matemática em [1]. Para uma discussão mais profunda acerca da linguagem simbólica da lógica, da teoria da inferência e da definição, pode-se consultar [26].

Nesta secção faremos uma breve discussão das sentenças compostas que são formadas por meio do uso de conectivos lógicos. Esse estudo faz parte do chamado cálculo sentencial, que pode ser estudado em maiores detalhes em [23]. É por meio dele que se pretende desenvolver a noção de argumento válido apresentada na próxima secção. Embora o foco desta dissertação seja o desenvolvimento do cálculo sentencial, é importante ter conhecimento que este não é capaz de traduzir satisfatoriamente todos os discursos da linguagem. O complemento necessário é desenvolvido no cálculo de predicados, que abarca sentenças que envolvem os quantificadores universal e existencial. Neste trabalho, emprega-se tais quantificadores após breve explicação no capítulo 3. Além da referência já citada, sugere-se a leitura de [20], que aplica estes conceitos ao desenvolvimento de teorias axiomáticas.

A cada sentença composta formada a partir de sentenças simples deve ser possível atribuir um dos valores lógicos V (verdadeiro) ou F (falso). Entretanto, o valor lógico de uma sentença composta deve ser fixado a partir dos valores lógicos das sentenças simples que a compõem. Para este propósito faz-se uso de tabelas verdade. Uma tabela verdade é uma forma de considerar todas as possibilidades de combinação de valores lógicos para as sentenças simples a fim de definir o valor lógico da sentença composta com o uso do conectivo em questão. Dessa forma será possível decidir, conhecendo a tabela verdade de cada conectivo lógico, se a sentença composta é verdadeira ou falsa a partir dos valores lógicos de suas sentenças componentes.

Antes de passar a uma breve exposição das tabelas verdade de cada conectivo apresentado, adotaremos a seguinte convenção, com finalidade abreviativa: a cada sentença simples será atribuída uma letra maiúscula: P, Q, R,... Uma sentença composta será formada então por sentenças simples ligadas por um conectivo. Desse modo, as letras maiúsculas representam sempre sentenças (simples), mas nem toda sentença será representada por uma letra maiúscula (a exemplo das compostas).

2.4.5 Negação

Seja a sentença:

P : João gosta de matemática.

A negação de P é:

¬ P : João não gosta de matemática.

A partir dos princípios enunciados para uma lógica bivalente, sabemos que esta sentença é verdadeira ou falsa, mas não ambos. Como consequência do princípio do terceiro excluído, se a sentença inicial for verdadeira, sua negação (¬ P) será falsa. Se por outro lado P for falsa, sua negação será verdadeira.

De forma resumida, vale a regra: O valor lógico da negação de uma sentença P é F (falso) quando P é V (verdadeiro) e é V quando P é F. Ou seja, a negação de uma sentença tem valor lógico oposto ao da sentença em questão.

A Tabela 2.1 a seguir é a tabela verdade da negação. Observe que o conectivo de negação estabelece o valor lógico da uma sentença em que é empregado automaticamente a partir do momento que se conhece o valor lógico da sentença original. Na tabela, esta relação é considerada para sentenças que estão na mesma linha. Ou seja, se P é V, ¬ P é F, e vice-versa. A tabela possui apenas duas linhas porque é formada a partir da consideração dos valores lógicos de apenas da sentença P.

Tabela 2.1: Tabela Verdade - Negação

P	**$\neg$ P**
V	F
F	V

2.4.6 Conjunção

Considere as sentenças simples:

P : João é professor.

Q : João gosta de matemática.

A conjunção das sentenças acima é a sentença composta:

P $\wedge$ Q : João é professor e João gosta de matemática.

A sentença P pode assumir os valores lógicos V ou F; de modo análogo a sentença Q pode assumir qualquer um desses dois valores. Assim, temos um total de $2 \times 2 = 4$ combinações distintas a considerar para a sentença composta formada, resumidas nas quatro linhas da Tabela 2.2.

Tabela 2.2: Tabela Verdade - Conjunção

P	**Q**	**P $\wedge$ Q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A justificativa é bastante intuitiva. Na linguagem corrente, consideraríamos a sentença composta "**João é professor e gosta de matemática**" falsa se uma das duas sentenças simples que a compõem fosse falsa. Por exemplo, se é verdade que "**João é professor**", mas se é falso que "**João gosta de matemática**", não consideraríamos verdadeira a afirmação composta por ambas já que esta indicaria que ele possui as duas qualidades: ser professor e (também) gostar de matemática.

Resumindo temos a seguinte regra: Uma conjunção terá valor lógico V (verdadeiro) quando as sentenças que a compõem são ambas V, sendo F (falso) quando ao menos uma das sentenças é F (falso).

Uma observação sobre o uso de tabelas verdade deve ser feita. A partir do momento que conhecemos os valores lógicos das sentenças simples (no caso anterior as sentenças **P** e **Q**), fica imediatamente definido o valor lógico da conjunção formada por ambas. Sabemos neste caso com qual linha da tabela estamos trabalhando. Se porém, durante uma argumentação (trataremos do assunto adiante) não conhecemos o valor lógico de uma das sentenças simples, ou de ambas, devemos explorar todas as possibilidades, considerando as linhas da tabela que representam a totalidade situação em estudo.

Um exercício interessante é o de observar o que acontece com a negação da conjunção. Incluindo a coluna dessa negação na tabela verdade da conjunção e considerando o que sabemos da negação obtém-se a Tabela 2.3 a seguir.

Tabela 2.3: Tabela Verdade - Negação da Conjunção

P	**Q**	**P $\wedge$ Q**	**$\neg$ (P $\wedge$ Q)**
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Os parênteses foram usados em $\neg$ (P $\wedge$ Q) para evitar confusão entre a negação da conjunção e a conjunção em que a primeira sentença simples é uma negação, representada por ($\neg$ P) $\wedge$ Q. Observando a tabela anterior, vemos que a negação de uma conjunção será verdadeira sempre que ao menos uma das sentenças, P ou Q, for falsa.

Isso quer dizer que, para obter o valor lógico V para uma conjunção, devemos ter que $\neg$ P ou $\neg$ Q (ou ambas) deve ser V.

A Tabela 2.4 ilustra outra situação importante envolvendo conjunções: a contradição formada pela conjunção de uma proposição com sua negação. Uma contradição é uma sentença composta que é sempre falsa, independentemente do valor lógico das sentenças simples que a compõem.

Em matemática é comum fazer uso do método de redução ao absurdo como forma de argumentar que um resultado é verdadeiro. Este método consiste no seguinte: pretendendo-se demonstrar que uma sentença P é verdadeira, nega-se essa afirmação (isto é, assume-se que $\neg$ P é verdadeira) a fim de obter uma contradição. O que seria essa contradição? Seria, do ponto de vista lógico, qualquer sentença composta que é sempre falsa. Como exemplo, a conjunção entre uma sentença simples e sua negação, onde é avaliada a possibilidade de validar duas afirmações contrárias simultaneamente.

Tabela 2.4: Tabela Verdade - Conjunção entre uma sentença e sua negação

P	$\neg$ **P**	**P** $\wedge$ ($\neg$ **P**)
V	F	F
F	V	F

2.4.7 Disjunção

O conectivo "ou" tem dois usos distintos na linguagem corrente. Essas duas ocorrências levam à existência, do ponto de vista lógico, de dois tipos de disjunção (sentença composta em que duas sentenças são ligadas pela palavra "ou"): a inclusiva e a exclusiva. Na disjunção inclusiva pelo menos uma das sentenças tem que ser verdadeira ou as duas têm que ser verdadeiras. Já na disjunção exclusiva uma das sentenças tem que ser verdadeira e a outra tem que ser falsa; ou seja, as sentenças não podem ser ambas verdadeiras ou ambas falsas. Um exemplo de argumento válido que será estudado na secção 2.5 é o silogismo disjuntivo, ilustrado a seguir através de uma situação cotidiana:

Ele tem mais que 16 anos ou ele é criança.
Ele não tem mais que 16 anos.
Logo, ele é criança.

Uma comparação entre a operação de união de dois conjuntos (conforme definida no capítulo 1) e os dois usos distintos do conectivo de disjunção pode ser feita: quando se fala na união de dois conjuntos A e B disjuntos, está sendo feita referência ao conjunto formado pelos elementos de A ou B em sentido exclusivo; a união de conjuntos não disjuntos, por outro lado, aponta para o uso inclusivo da disjunção uma vez que existem elementos que estão em ambos os conjuntos, A e B. Para caracterizar melhor cada uma dessas conjunções, apresentam-se mais dois exemplos que ilustram esses usos, bem como as tabelas verdades desses conectivos.

Disjunção Exclusiva

Para avaliar o primeiro uso possível do conectivo "ou" considere as sentenças:

P : George é paulista.

Q : George é paraibano.

Construindo a disjunção a partir de P e Q obtemos:

P $\veebar$ Q : George é paulista ou George é paraibano.

Considerando que a naturalidade de um cidadão é única, entendemos que apenas uma das sentenças, P ou Q, será verdadeira, mas não ambas. Isto porque ao afirmarmos que George tem determinada naturalidade dentre as 27 possíveis, existem outras 26 naturalidades que não são a dele; ou seja, para uma afirmação desse tipo, existem vinte e seis modos distintos de negá-la. Ao atribuir o valor lógico V para a sentença **George é paulista**, somos forçados (pela unicidade da naturalidade e pela bivalência da lógica em estudo) a admitir que a sentença **George é paraibano** é F.

No exemplo em consideração, o conectivo "ou" atua em sentindo exclusivo, isto é, não é possível que as duas sentenças conectadas por ele sejam ambas verdadeiras. Assumindo que uma delas é verdadeira, fica excluída a possibilidade das outras também o serem. Chamaremos esta disjunção de disjunção exclusiva. Adotaremos o símbolo $\veebar$ para diferenciar o conectivo exclusivo do inclusivo, comentado no próximo tópico.

Define-se a tabela verdade da disjunção exclusiva (Tabela 2.5) a partir da seguinte regra: a disjunção exclusiva composta por duas sentenças simples será V quando uma das sentenças for V e a outra for F; caso as duas sentenças possuam o mesmo valor lógico (ambas V ou ambas F), a disjunção será F.

Tabela 2.5: Tabela Verdade - Disjunção Exclusiva

P	**Q**	**P $\veebar$ Q**
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disjunção Inclusiva

Consideremos as sentenças:

P : Ouvir Mozart torna o indivíduo mais inteligente.

Q : O universo está em expansão.

A disjunção pode ser escrita como:

P $\vee$ Q : Ouvir Mozart torna o indivíduo mais inteligente ou o universo está em expansão.

Percebemos que (aparentemente) não há nenhuma relação entre as duas sentenças. O fato de o universo estar ou não em expansão em nada parece interferir na inteligência de um indivíduo que escuta Mozart. Diferente do exemplo apresentado para discutir disjunções exclusivas, onde havia uma relação prévia entre as sentenças simples, agora as sentenças aparentam ser independentes uma da outra. Assim, nada impede que ambas sejam verdadeiras simultaneamente. Esse tipo de disjunção é inclusivo porque inclui a possibilidade de ambas as sentenças simples serem verdadeiras.

Consideremos agora a disjunção formada pelas sentenças P e Q. Na linguagem natural, quando dizemos "P ou Q", queremos expressar que pelo menos uma das sentenças é verdadeira. Mas nada impede que ambas sejam verdadeiras. O que entendemos é que a sentença composta P $\vee$ Q é falsa apenas se ambas, P e Q, forem falsas.

Assim, definimos a tabela verdade da disjunção inclusiva a partir da seguinte regra: a disjunção inclusiva formada por duas sentenças simples será F apenas quando as duas sentenças forem ambas F. Caso contrário, a disjunção será V, conforme Tabela 2.6.

Tabela 2.6: Tabela Verdade - Disjunção Inclusiva

P	**Q**	**P $\vee$ Q**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

De agora em diante será usado o termo disjunção fazendo referência a disjunção inclusiva. Na Tabela 2.7 avaliamos a negação da disjunção. Observamos nessa tabela que para que a negação de uma disjunção seja verdadeira, devemos ter necessariamente que ambas as sentenças que compõem a disjunção sejam falsas.

Tabela 2.7: Tabela Verdade - Negação da Disjunção Inclusiva

P	**Q**	**P $\vee$ Q**	**$\neg$ (P $\vee$ Q)**
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

Na tabela 2.8 a seguir apresentamos a tabela verdade de um caso particular de disjunção, formada por uma sentença e sua negação. Observe que, uma vez fixado o valor lógico da sentença P, ficam definidos os valores lógicos de sua negação $\neg$ P e da disjunção P $\vee$ ($\neg$ P), motivo pelo qual a tabela apresenta apenas duas linhas.

Essa disjunção assume sempre o valor lógico V, seja a sentença P V ou F. Uma sentença composta que assume sempre o valor verdadeiro, independente dos valores assumidos pelas sentenças simples que a compõem é chamada de **tautologia**.

Uma **demonstração** é uma sequência finita de afirmações, cada uma decorrendo da anterior por meio de regras de inferência (como a tautologia anterior), sendo que

Tabela 2.8: Tabela Verdade - Disjunção entre uma sentença e sua negação.

P	**¬ P**	**P ∨ (¬ P)**
V	F	V
F	V	V

a afirmação inicial já tenha sido estabelecida como verdadeira e a sentença final é o teorema que se deseja demonstrar. Não é raro em Matemática fazer uso da disjunção anterior como um passo válido na demonstração de um teorema. Este passo é posto em prática no momento que consideramos um argumento do tipo "ou uma propriedade é válida ou não é". A partir daí consideram-se os dois casos separadamente para se chegar a uma mesma conclusão.

2.4.8 Condicional

Neste tópico será abordada a formação de sentenças compostas do tipo "se (antecedente) então (consequente)." Sendo P e Q sentenças, o condicional formado por elas será representado por P $\longrightarrow$ Q, onde a sentença P é a antecedente e Q o consequente. De início é importante observar que há a intenção dentro de uma teoria matemática de que sentenças condicionais signifiquem que sempre que o antecedente for verdadeiro, então o consequente será também verdadeiro. O desejo é estabelecer que o consequente é deduzido do antecedente. Quando esse objetivo for alcançado, ter-se-á o conceito de implicação lógica (símbolo $\Longrightarrow$), abordado adiante. De forma resumida, uma implicação lógica será uma sentença condicional que é verdadeira sempre que as premissas são verdadeiras. Para que se substitua o conectivo "$\longrightarrow$" (que apenas interliga duas sentenças) pelo símbolo "$\Longrightarrow$" (que representa uma implicação lógica) é necessário que se apresente uma argumentação válida, num sentido que explicaremos na secção 2.5.

Por ora, a preocupação será em definir a tabela verdade da condicional como uma sentença composta, sem que exista necessariamente relação de decorrência entre as sentenças usadas na sua composição. Consideremos, então, as sentenças:

P : Os europeus fumam muito.

Q : O Brasil possui os melhores jogadores de futebol.

A partir dessas sentenças podemos formar dois condicionais distintos, dependendo da posição que cada uma ocupa em relação ao conectivo:

P $\longrightarrow$ Q : Se Os europeus fumam muito então o Brasil possui os melhores jogadores de futebol.

Q $\longrightarrow$ P : Se O Brasil possui os melhores jogadores de futebol então os europeus fumam muito.

Nota-se que aparentemente não existe qualquer relação de causa e efeito entre as sentenças P e Q. Apesar disso, devemos definir quando as sentenças condicionais serão verdadeiras e quando serão falsas a partir dos valores lógicos assumidos por P e Q. Considerando apenas o primeiro caso, a tabela verdade que define o condicional está na Tabela 2.9 (onde P é o antecedente e Q o consequente).

Tabela 2.9: Tabela Verdade - Condicional.

P	**Q**	**P $\longrightarrow$ Q**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Observando a Tabela 2.9, podemos elaborar a seguinte regra: o valor lógico de uma sentença condicional é falso apenas no caso em que o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso, sendo verdadeiro nos demais casos.

A explicação para os valores adotados na última coluna da tabela está relacionada com o conceito de implicação lógica, mencionado anteriormente. Ou seja, gostaríamos que o condicional refletisse as propriedades da implicação lógica. Se a partir da veracidade de P pudéssemos concluir a veracidade de Q, seria razoável que P $\longrightarrow$ Q fosse verdadeira também. Isso justifica a definição da primeira linha.

Para a segunda linha, se P assume valor lógico V mas Q é falsa, então a condicional não deveria ser considerada verdadeira (porque não reflete a ideia de que Q é consequência de P).

Para interpretar a definição dada na terceira e quarta linhas da tabela, consideremos a sentença composta $(P \wedge Q) \longrightarrow P$. Gostaríamos de poder concluir que essa condicional é sempre verdadeira, independente do valor lógico do antecedente $P \wedge Q$ e do consequente P. Para ver de que forma seria possível validar essa conclusão, suponhamos que Q seja F e P seja V. Então o antecedente $P \wedge Q$ é F e o consequente é também é V. Esse é o caso da terceira linha da Tabela 2.9. Trocando os valores lógicos de P e Q, obtemos a quarta linha da tabela verdade. Como é desejável que em ambos os casos (terceira e quarta linhas) a condicional seja verdadeira definimos seu valor conforme já apresentado.

É importante esclarecer que as considerações dos parágrafos anteriores foram feitas apenas para justificar a definição da tabela verdade da condicional. A intenção, como já dito, é apresentar a lógica adotada para definir a tabela de modo que sejam válidas certas regras de inferência quando estivermos considerando implicações lógicas de fato. Algumas dessas regras são usadas com frequência e constituirão sempre um passo válido dentro de um argumento.

Façamos também a avaliação do que significa negar uma sentença condicional. Se a ideia por trás da definição da tabela da sentença condicional é que ela seja verdadeira quando o consequente decorre do antecedente (embora este tipo de sentença esteja definido também para casos em que não existe relação de causa e efeito entre as sentenças que o compõem), podemos então concordar que a condicional é falsa quando, simultaneamente, o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso. Isso equivale a dizer que a conjunção formada pelo antecedente e a negação do consequente é falsa, conforme resumido na Tabela 2.10 (obtida acrescentando duas colunas à Tabela 2.9).

Assim um exemplo de condicional e sua respectiva negação são:

$\mathbf{P \longrightarrow Q}$: Se Os europeus fumam muito então o Brasil possui os melhores jogadores de futebol.

$\mathbf{P \wedge (\neg\, Q)}$: Os europeus fumam muito e o Brasil não possui os melhores jogadores de futebol.

Tabela 2.10: Tabela Verdade - Negação da Condicional.

P	**Q**	$\mathbf{P \longrightarrow Q}$	$\mathbf{\neg\,(P \longrightarrow Q)}$	$\mathbf{P \wedge (\neg\, Q)}$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F

2.4.9 Bicondicional

A definição da sentença bicondicional será feita a partir do exemplo apresentado no tópico anterior. Esse tipo de sentença é representada pelo conectivo "$\longleftrightarrow$", que é lido como "se e somente se". Retomando as sentenças:

P : Os europeus fumam muito.

Q : O Brasil possui os melhores jogadores de futebol.

Obtém-se o bicondicional:

P $\longleftrightarrow$ Q : Os europeus fumam muito se e somente se o Brasil possui os melhores jogadores de futebol.

Como visto no tópico anterior, dadas duas sentenças simples p e q, é possível formar com elas duas sentenças condicionais distintas: P $\longrightarrow$ Q e Q $\longrightarrow$ P. A sentença bicondicional é a conjunção dessas duas sentenças. Assim, o condicional é verdadeiro sempre que as duas sentenças condicionais são ambas verdadeiras ou ambas falsas. A Tabela 2.11 ilustra esta observação.

A partir da interpretação da Tabela 2.11 vale ainda notar que uma sentença bicondicional é verdadeira quando as duas sentenças que a compõem são ambas verdadeiras ou ambas falsas. Quando ambas as sentenças componentes têm valores lógicos diferentes, a bicondicional é falsa. Exemplificando, a sentença "**Os europeus fumam muito se e somente se o Brasil possui os melhores jogadores de futebol.**" é

Tabela 2.11: Tabela Verdade - Bicondicional.

P	**Q**	**P $\longrightarrow$ Q**	**Q $\longrightarrow$ P**	**P $\longleftrightarrow$ Q**
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

verdadeira sempre que as duas sentenças condicionais a seguir são ambas verdadeiras ou ambas falsas:

P $\longrightarrow$ Q : Se Os europeus fumam muito então o Brasil possui os melhores jogadores de futebol.

Q $\longrightarrow$ P : Se O Brasil possui os melhores jogadores de futebol então os europeus fumam muito.

Caso uma das sentenças condicionais seja verdadeira e a outra falsa (valores lógicos diferentes), o bicondicional será falso.

A ideia por trás do bicondicional é o conceito de equivalência lógica, cujo símbolo adotado aqui será "$\Longleftrightarrow$". A equivalência lógica significa que duas sentenças estão ligadas de tal forma que, se uma das duas é verdadeira (ou falsa) é possível deduzir, através de um argumento válido, que a outra também é verdadeira (ou falsa). A equivalência lógica entre duas sentenças P e Q significa que são válidas simultaneamente as implicações lógicas P $\Longrightarrow$ Q e Q $\Longrightarrow$ P. Por isso, em uma teoria matemática, para provar que duas afirmações são equivalentes (na presença dos axiomas dessa teoria), costuma-se separar a argumentação em duas partes, avaliadas separadamente: A "ida" P $\Longrightarrow$ Q, e a "volta" Q $\Longrightarrow$ P.

2.5 Argumentação Lógica

Uma sentença simples pode assumir dois valores lógicos, verdadeiro ou falso. Portanto, se tivermos n sentenças independentes formando uma sentença composta teremos que considerar 2^n linhas na tabela verdade para varrer todas as combinações de valores lógicos possíveis entre tai sentenças. No caso de uma sentença composta com apenas 4 proposições simples, seriam necessárias 16 linhas! Assim, torna-se desejável o desenvolvimento de um método menos trabalhoso no estudo de proposições maiores. A base para simplificar a avaliação de sentenças maiores (bem como argumentos) é a adoção de algumas sentenças que são sempre verdadeiras como regras de inferência. A validação dessas regras se dá pelo uso de tabelas verdades, mas elas poderão ser empregadas em outros proposições mais complexas, evitando a construção de tabelas maiores. Isso é fundamental ainda na escrita de argumentos, permitindo "enxugar" a escrita da validação.

Definição 2.2. *Uma Tautologia é uma proposição composta cuja última coluna da tabela verdade assume sempre o valor lógico Verdadeiro.*

A definição anterior resgata o conceito de tautologia mencionado na secção 2.5.3 e é essencial na defesa de argumentos com várias sentenças simples. Um argumento é uma sequência finita de passos por meio dos quais partimos de algumas proposições inicialmente admitidas como verdadeiras (premissas) e, usando regras válidas de inferência, chegamos a uma proposição final (conclusão).

Definição 2.3. *Um argumento é toda afirmação de que uma dada sequência finita de proposições $P_1, P_2, ..., P_n$ implica uma proposição Q. As proposições $P_1, P_2, ..., P_n$ são as premissas do argumento e a sentença Q é a conclusão. Indica-se este argumento por $P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q$.*

O exemplo clássico de argumento é o silogismo, que é qualquer argumento composto por duas premissas e uma conclusão. Exemplificando:

"Todo homem é mortal. Sócrates é homem. Logo, Sócrates é mortal."

A análise da validade de um argumento é fundamental não só dentro da Matemática, mas em todas as demais áreas do conhecimento. Um argumento pode ser classificado como válido ou inválido, e nunca como verdadeiro ou falso. Diz-se que o argumento é válido quando sua conclusão Q é uma consequência obrigatória do seu conjunto de premissas $P_1, P_2, ..., P_n$.

Definição 2.4. *Um argumento* $P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q$ *é válido se a conclusão* Q *é verdadeira todas as vezes que as premissas* $P_1, P_2, ..., P_n$ *são todas as verdadeiras.*

Dito de outra forma, a verdade das premissas é incompatível com a falsidade da conclusão. A partir da Definição 2.4, pode-se estabelecer um critério para a validar um argumento fazendo uso de uma sentença condicional. Esse é o conteúdo do Teorema 2.5.

Teorema 2.5. *O argumento* $P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q$ *é válido se e somente se a condicional* $(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \longrightarrow Q$ *é tautológica.*

Demonstração. Devem ser justificadas duas afirmações, pois o teorema é do tipo "se e somente se". A primeira é: Se o argumento $P_1, P_2, ..., P_n \vdash$ Q é válido então a condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \longrightarrow$ Q é tautológica. Partindo da validade do argumento, sabemos então que sendo suas premissas verdadeiras também será verdadeira a conjunção dessas sentenças. Sendo a conclusão verdadeira (pela validade do argumento), conclui-se que a condicional formada pela conjunção das premissas como antecedente e com consequente igual à conclusão do argumento será verdadeira, ficando excluída a possibilidade de ocorrência da segunda linha da Tabela 2.9. A condicional será portanto tautológica. A outra afirmação (recíproca) a ser provada é: Se a condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \longrightarrow$ Q é tautológica então o argumento $P_1, P_2, ..., P_n \vdash$ Q é válido. Isso é verdade porque se a condicional é tautológica, então não ocorre a combinação de valores lógicos da segunda linha da tabela 2.9. Assim, se as premissas são verdadeiras, o mesmo acontece com a conjunção P $= P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n$. Sendo a condicional tautológica, essa situação é representada pela linha 1 da tabela 2.9, de onde conclui-se que a conclusão é verdadeira e o argumento é válido. □

Em virtude do teorema anterior, representamos um argumento válido substituindo o símbolo "$\vdash$" pelo símbolo "$\Longrightarrow$", onde Q é verdadeira sempre que $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n$ é verdadeira: $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \Longrightarrow Q$**.** O símbolo "$\Longrightarrow$" se diferencia do conectivo "$\longrightarrow$" da seguinte forma: enquanto o primeiro representa uma condicional da qual partiu-se de antecedentes verdadeiros e chegou-se a um consequente também verdadeiro, o segundo símbolo abarca todas as possibilidades de formação de uma condicional listadas na referida tabela. Ainda, deve-se diferenciar tautologia de argumento válido: enquanto um argumento válido será sempre associado a uma sentença condicional, uma tautologia pode não assumir essa forma, como a disjunção formada por uma sentença e por sua negativa.

Argumentar de forma válida é importante quando se deseja dar base sólida a alguma tese defendida. A validação de um argumento pode ser feita por meio de tabelas verdade ou por meio de regras de inferência. As tabelas verdade apresentadas nas secções anteriores possibilitam a avaliação de sentenças compostas por meio da listagem de todas as combinações possíveis de valores lógicos (verdadeiro ou falso) para cada uma das sentenças simples componentes.

Exemplo 2.6. *Uma forma de representar argumentos é apresentada a seguir, onde as proposições (1), (2) e (3) acima da linha são as premissas do argumento e a proposição (4) abaixo da linha é a conclusão. Avaliar a validade deste argumento.*

$$
\begin{array}{cc}
\textbf{(1)} & \mathbf{A} \longrightarrow (\neg\, \mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) \\
\textbf{(2)} & \neg\, \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B} \\
\textbf{(3)} & \mathbf{D} \wedge \neg\, \mathbf{C} \\
\hline
\textbf{(4)} & \mathbf{B} \longrightarrow \neg\, \mathbf{D}
\end{array}
$$

Solução. Para avaliar a validade do argumento, deve-se considerar que as premissas são todas verdadeiras e verificar se dessa consideração a tese (conclusão) também é verdadeira. É interessante iniciar a avaliação do argumento pela premissa (3) uma vez que se trata de uma conjunção e, para que seja verdadeira, fixa automaticamente o valor lógico das sentenças que a compõem. Assim D e $\neg$ C são verdadeiras, de onde conclui-se que C é falsa. Outra conjunção aparece na premissa (1): $\neg$ B $\wedge$ C. Como C é falsa, a conjunção de (1) é falsa também, e para que o condicional seja verdadeiro A deve ser falsa, portanto $\neg$ A é verdadeira. Na premissa (2) sendo o antecedente verdadeiro a conclusão B deve ser verdadeiro para que o condicional seja verdadeiro. Tem-se assim que B e D são verdadeiras e A e C são falsas. Estas são as únicas combinações de valores lógicos que tornam as três premissas do argumento verdadeiras simultaneamente. Com esses valores a conclusão do argumento, condicional (4), é falsa. Não se tem então que a verdade das premissas leva à verdade da conclusão. O argumento é, portanto, inválido.

O exemplo anterior mostra como se analisa a validade de um argumento por meio das tabelas verdades (porém sem construir toda a tabela de cada sentença). Embora esse método seja viável em casos como o apresentado anteriormente, perde em praticidade a medida que cresce o número de sentenças componentes. Além do exemplo já apresentado de que a disjunção formada por uma proposição e por sua negação, tem-se diversas outras tautologias, das quais listamos as mais utilizadas na Tabela 2.12. Estas tautologias serão usadas como regras de inferência, isto é, um passo válido dentro de um argumento. Embora Tautologias e argumentos válidos sejam conceitualmente diferentes, toda tautologia da forma condicional é também um argumento válido. Com essa observação, usamos na Tabela 2.12 o símbolo $\Longrightarrow$ para compor as tautologias condicionais listadas.

Tabela 2.12: Regras de Inferência.

Adição	$\mathrm{P} \Longrightarrow (\mathrm{P} \vee \mathrm{Q})$	$\mathrm{P} \Longrightarrow (\mathrm{Q} \vee \mathrm{P})$
Simplificação	$\mathrm{P} \vee \mathrm{Q} \Longrightarrow \mathrm{P}$	$\mathrm{P} \vee \mathrm{Q} \Longrightarrow \mathrm{Q}$
Conjunção	$\mathrm{P}, \mathrm{Q} \Longrightarrow \mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}$	$\mathrm{P}, \mathrm{Q} \Longrightarrow \mathrm{Q} \wedge \mathrm{P}$
Absorção	$\mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{Q} \Longrightarrow \mathrm{P} \longrightarrow (\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q})$	–
Moduns ponens	$\mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{Q}, \mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$	–
Moduns tollens	$\mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{Q}, \neg\, \mathrm{Q} \Longrightarrow \neg\, \mathrm{P}$	–
Silogismo disjuntivo	$\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}, \neg\, \mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$	$\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}, \neg\, \mathrm{Q} \Longrightarrow \mathrm{P}$
Silogismo hipotético	$\mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{Q}, \mathrm{Q} \longrightarrow \mathrm{R} \Longrightarrow \mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{R}$	–

Exemplo 2.7. *Façamos a validação da regra de inferência Moduns ponens da Tabela 2.13. Observa-se que de acordo com o Teorema 2.3 o argumento $(P \longrightarrow Q,\ P) \vdash Q$ é válido se e somente se é tautológica a condicional $[(P \longrightarrow Q) \wedge P] \longrightarrow Q$. Uma vez que a condicional avaliada apresenta somente o valor V na última coluna, trata-se de uma tautologia. O argumento é portanto válido, motivo pelo qual essa regra pode ser adotada dentro de outros argumentos como um passo válido. As Tabelas 2.14 e*

2.15 validam as regras Modus tollens e Silogismo disjuntivo. De posse das regras de inferência da Tabela 2.12 é possível validar argumentos mais complexos.

Tabela 2.13: Validação - *Moduns ponens.*

$\mathbf{P}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{P \longrightarrow Q}$	$\mathbf{(P \longrightarrow Q) \wedge P}$	$\mathbf{[(P \longrightarrow Q) \wedge P] \longrightarrow Q}$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Tabela 2.14: Validação - *Moduns tollens.*

$\mathbf{P}$	$\mathbf{\neg P}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{\neg Q}$	$\mathbf{P \longrightarrow Q}$	$\mathbf{(P \longrightarrow Q \wedge \neg Q) \longrightarrow \neg P}$
V	F	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	V

Tabela 2.15: Validação - Silogismo disjuntivo.

$\mathbf{P}$	$\mathbf{\neg P}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{P \vee Q}$	$\mathbf{[(P \vee Q) \wedge \neg P] \longrightarrow Q}$
V	F	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	V	F	F	V

Exemplo 2.8. *Uma equivalência é uma sentença composta por duas implicações. De fato,* $(P \longrightarrow Q \wedge Q \longrightarrow P) \longleftrightarrow (P \longleftrightarrow Q)$ *é tautológico, como mostra a Tabela 2.16, e o segundo bicondicional pode ser substituído pelo símbolo "*$\Longleftrightarrow$*". Nesta tabela verdade, não foi construída uma coluna de valores lógicos para cada sentença formada, como nas anteriores. Ao invés disso, os valores lógicos foram listados sob cada conectivo lógico, representando a sentença que estes símbolos abrangem. A coluna do primeiro bicondicional que aparece mostra que este é tautológico.*

Tabela 2.16: Validação - Exemplo 2.8.

(P	$\longrightarrow$	**Q)**	$\wedge$	**(Q**	$\longrightarrow$	**P)**	$\longleftrightarrow$	**(P**	$\longleftrightarrow$	**Q)**
V	V	V	F	V	V	V	**V**	V	F	V
V	F	F	V	F	V	V	**V**	V	V	F
F	V	V	V	V	F	F	**V**	F	V	V
F	V	F	F	F	V	F	**V**	F	F	F

O Exemplo 2.10 mostrará uma forma de organizar um argumento evidenciando e justificando os passos e regras utilizados na sua dedução. Na dedução deste exemplo é aplicada a regra obtida no Exemplo 2.9.

Exemplo 2.9. *A equivalência* $\neg\ (P \wedge Q) \Longleftrightarrow (\neg\ P) \vee (\neg\ Q)$ *é verificada na tabela 2.17. A equivalência é um bicondicional sempre verdadeiro, isto é, um bicondicional tautológico.*

Tabela 2.17: Validação - Exemplo 2.9.

$\neg$	**(P**	$\wedge$	**Q)**	$\longleftrightarrow$	(¬	**P)**	$\vee$	(¬	**Q)**
F	V	V	V	**V**	F	V	**F**	F	V
V	V	F	F	**V**	F	V	**V**	V	F
V	F	F	V	**V**	V	F	**V**	F	V
V	F	F	F	**V**	V	F	**V**	V	F

Exemplo 2.10. *Validar o argumento* $\boldsymbol{(P \wedge Q) \longrightarrow R}$ *,* $\boldsymbol{\neg R \vdash \neg P \vee \neg Q}$ *fazendo uso de regras de inferência.*

Solução: O silogismo (argumento com duas premissas) pode ser justificado pelos 4 passos a seguir.

(1)	$\mathbf{(P \wedge Q) \longrightarrow R\ ,\ \neg\ R \Rightarrow \neg\ (P \wedge Q)}$	Premissas, Moduns tollens
(2)	$\mathbf{\neg\ (P \wedge Q) \Longleftrightarrow \neg\ P \vee \neg\ Q}$	Negação da conjunção
(3)	$\mathbf{\neg\ (P \wedge Q) \Rightarrow \neg\ P \vee \neg\ Q}$	(2)
(4)	$\mathbf{(P \wedge Q) \longrightarrow R\ ,\ \neg\ R \Rightarrow \neg\ P \vee \neg\ Q}$	(1) e (3), Silogismo Hipotético

Capítulo 3

A Teoria dos Conjuntos Axiomatizada

Intuitivamente entendemos por conjunto uma coleção de objetos de qualquer tipo. Então, podemos falar no conjunto de todos os brasileiros; no conjunto de todas os livros escritos por um autor; ou ainda no conjunto de todos os conjuntos. Na rotina informal, fazemos uso das palavras "conjunto", "classe" e "coleção" como sendo sinônimas.

É atribuída ao Matemático Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor (1845 - 1918) uma das teorias mais inovadoras e dos últimos séculos: a Teoria dos Conjuntos. Embora nascido em São Petersburgo (1845), na Rússia, emigrou com sua família para a Alemanha em 1856, quando ainda tinha 11 anos. Na Universidade de Berlim, teve contato com Hermann Schwarz e assistiu a palestras de Weierstrass, Kummer e Kronecker. Após se mudar para Halle e receber influência de Heine resolveu o problema em aberto sobre a singularidade da representação de uma função como uma série trigonométrica. Tal problema havia sido atacado sem sucesso por nomes como Dirichlet, Lipschitz e Riemann. Trocou correspondências com Dedekind a fim ouvir sua opinião acerca de suas descobertas. Em uma dessas cartas, em 1877, demonstrou sua descoberta da existência de uma bijeção entre pontos no intervalo fechado [0, 1] e os pontos no espaço p-dimensional. Surpreso com sua descoberta, exclamou:

"Eu vejo isso, mas não acredito!"

Georg Cantor fundou a teoria dos conjuntos e introduziu o conceito de números infinitos com a descoberta dos números cardinais. Morreu em 1918 na cidade alemã de

Halle. Uma biografia mais detalhada Cantor e dos matemáticos aqui citados pode ser encontrada em [17]. Nas palavras de David Hilbert:

"O melhor produto de um gênio da matemática e uma das realizações supremas da atividade puramente intelectual humana."

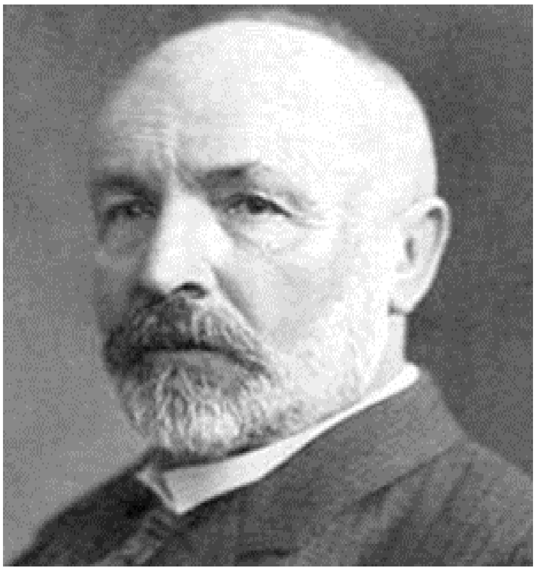

Figura 3.1: Georg Cantor (1845 a 1918), fundador da teoria dos conjuntos.

Os axiomas da Teoria dos Conjuntos são adequados para fornecer uma resposta clara e construtiva à pergunta: exatamente que pressupostos além da lógica elementar são necessários como base para fundamentar a Matemática Moderna? O ponto de partida para esse desenvolvimento foi a descoberta feita, por volta de 1900, de vários paradoxos na teoria intuitiva dos conjuntos. Nesta teoria é admitida a existência de conjuntos de objetos com uma propriedades determinadas sem qualquer critério. Apenas pronunciamos uma propriedade e consideramos que existe um conjunto cujos elementos satisfazem essa propriedade, sem qualquer restrição. Um exemplo é a menção que fizemos no início do capítulo ao "conjunto de todos os conjuntos". Uma abordagem axiomática é necessária para evitar esses paradoxos.

Neste capítulo, além dos símbolos lógicos já estudados no capítulo anterior, serão empregados o quantificador universal *para todo* x, ($\forall$ x), e o quantificador existencial *para alguns* x, ($\exists\ x$). Também merece menção o símbolo ($\exists! x$) para há *exatamente* *um x tal que*. Esses quantificadores são necessários porque as sentenças formadas com os conectivos estudados no capítulo 2 não são suficientes para abarcar toda a teoria em estudo. O escopo (abrangência) de um quantificador é o próprio quantificador junto com a menor fórmula imediatamente após ele, que será sempre indicada entre parênteses. Assim, na fórmula "$(\forall\ x)(x = y) \vee y = \emptyset$" o escopo do quantificador "$(\forall\ x)$" é a fórmula "$(\forall\ x)(x = y)$".

Também será adotada a seguinte convenção de dominância relativa entre os conectivos sentenciais do capítulo 2, visando evitar o uso excessivo de parênteses: a convenção é que "$\leftrightarrow$" e "$\rightarrow$" dominam "$\wedge$" e "$\vee$". Assim, P $\rightarrow$ (Q $\vee$ R) pode ser reescrita sem os parênteses como P $\rightarrow$ Q $\vee$ R. Se a intenção fosse escrever (P $\rightarrow$ Q) $\vee$ R , o uso do sinal de pontuação seria obrigatório.

3.1 Os paradoxos da teoria dos Conjuntos

Uma maneira de construir os números naturais cardinais a partir da teoria dos conjuntos seria a seguinte: 0 (zero) seria o número de elementos do conjunto vazio: $\emptyset$; 1 (um) seria o número de elementos de $\{\emptyset\}$; 2 (dois) seria o número de elementos do conjunto formado pelos dois anteriores: $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; 3 (três) seria o número de elementos do conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. E assim por diante. E os demais conjuntos, que não são formados a partir deste processo? Bem, estes poderiam ser relacionados com exatamente um dos conjuntos anteriores. A propriedade observada seria o número de elementos que o dado conjunto possui. Por exemplo o conjunto *{a}*, por possuir um elemento, estaria relacionado com o conjunto $\{\emptyset\}$, que também possui apenas um elemento. Um inconveniente, porém, acompanha essa construção: os termos zero, um, dois, etc, como ainda não estão definidos precisamente não podem ser usados para estabelecer uma tal relação entre esses conjuntos. A saída encontrada seria então a mesma utilizada pelo homem da Antiguidade: quando desejava contar um rebanho, associava a cada membro uma pedrinha ou uma marca em um osso, por exemplo. Isto corresponde ao conceito recente de bijeção entre dois conjuntos. Dois conjuntos se equivalem, neste sentido, se é possível estabelecer uma bijeção entre eles. Como será visto no capítulo 4, a relação assim estabelecida é uma relação de equivalência. Considerando então o universo como sendo o conjunto de todos os conjuntos (aqui tem-se uma aplicação irrestrita do princípio da abstração), teríamos induzida pela relação citada e pelo teorema 1.32 uma partição do conjunto universo. Isto porque sempre existe uma bijeção entre quaisquer dois conjuntos de uma dada classe de equivalência, mas não existe uma bijeção entre conjuntos de classes distintas (proposição 1.31). Intuitivamente, os conjuntos dentro de uma mesma classe de equivalência possuem uma propriedade comum: o número de elementos ou, mais precisamente, a cardinalidade. O número um seria, então, a classe de equivalência formada pelos conjuntos em bijeção com o conjunto $\{\emptyset\}$.

O raciocínio anterior carece, entretanto, de uma análise mais cuidadosa: ao aplicar irrestritamente o princípio da abstração, não existe qualquer certeza de que o conjunto formado pela fórmula *S(x)* existe de fato. Pior que isso: se existir, o conjunto invocado pode trazer consigo contradições para a Teoria. O próprio Cantor descobriu vários paradoxos suscitados pela teoria dos conjuntos. Embora não tenha trabalhado explicitamente com axiomas, uma análise prévia dos teoremas demonstrados por ele apontam que era admitido o princípio da abstração. Uma consequência desse princípio é o paradoxo de de Russel, descoberto em 1901 por Bertrand Russel, que percebeu que uma contradição poderia derivar do uso (implícito) do princípio da abstração considerando o conjunto de todas as coisas que têm a propriedade de não serem membros de si mesmos. A fórmula que origina esse paradoxo decorre do uso do princípio da abstração, por isso enunciamos antes sua fórmula simbólica:

$$(\exists\ \boldsymbol{y})(\forall\ \boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{y} \leftrightarrow \boldsymbol{S(x)}).$$

Consideremos então o conjunto A cujos membros não são elementos de si mesmos. Seria o conjunto A membro de si mesmo? Para elucidar o que acontece, temos a fórmula de aplicação do princípio de abstração com $\boldsymbol{S(x)} = \boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{x}$:

$$(\exists\ \boldsymbol{A})(\forall\ \boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \leftrightarrow \boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{x}).$$

Se na formula anterior for feito $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}$, obtêm-se:

$$(\exists\ \boldsymbol{A})(\forall\ \boldsymbol{A})(\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{A} \leftrightarrow \boldsymbol{A} \notin \boldsymbol{A}).$$

Ou seja, o conjunto A é membro dele mesmo se e somente se não é membro dele mesmo. Desde que a tabela verdade de uma bicondicional do tipo P $\leftrightarrow \neg$ P apresenta apenas valor lógico F (Tabela 3.1), trata-se de uma contradição.

Tabela 3.1: Contradição - Bicondicional.

P	$\leftrightarrow$	$\neg$ P
V	F	F
F	F	V

Assim, não é possível decidir se o conjunto A é ou não membro de si mesmo em cair em contradição. Isto mostra que se desejamos usar os princípios da lógica bivalente não é possível permitir de forma consistente a autoafirmação de que para cada propriedade há um correspondente conjunto cujos elementos têm essa propriedade. O princípio da abstração deve, então, ser reformulado de forma a evitar essas contradições. o bloqueio desse tipo de paradoxo é feito restringindo a aplicação do princípio da abstração apenas a conjuntos previamente existentes, evitando assim formar conjuntos que abarcam contradições como o conjunto A. Isto é feito com o axioma da especificação. Neste axioma, se uma declaração *S(x)* é aplicada aos elementos de um conjunto A, então há sempre um subconjunto A_S de A que contém exatamente aqueles elementos x de A tais que *S(x)* é verdade.

O paradoxo de Russell faz parte da classe dos paradoxos lógicos. A outra classe é a do paradoxos semânticos. O mais velho paradoxo semântico é o paradoxo do mentiroso, de Epimenides. Epimenides, o cretense, disse: "Eu estou mentindo". Se a declaração for verdade, então ele está mentindo e a afirmação é falsa. Se a afirmação é falsa, então ele não está mentindo e a afirmação é verdadeira. Outro paradoxo semântico é o paradoxo de Grelling-Nelson do heterológico. Um predicado é chamado heterológico se a sentença que atribui ao predicado a propriedade expressa pelo predicado é falsa. Portanto, o predicado "vermelho" é heterológico já que a sentença "o predicado 'vermelho' é vermelho" é falsa. A contradição surge perguntando se o predicado "heterológico" é ele próprio heterológico. Claramente, se for, podemos inferir que não é, e se não então ele é. Cada um desses paradoxos surge ao devido à liberdade existente na língua portuguesa de montar expressões (sequência de letras e sinais de pontuação) que fazem referência a outras expressões. Qualquer linguagem com tais meios ilimitados de expressão possibilita a formação de paradoxos semânticos. Por isso é importante fazer a distinção entre a linguagem objeto - aqui a simbologia adotada na teoria dos conjuntos - e a metalinguagem, isto é, a língua em que falamos sobre a linguagem objeto. Aparece então a necessidade de aplicação da lógica simbólica, que dá maior precisão às teorias matemáticas. Paradoxos simples como esse podem ser usados para justificar aos alunos do Ensino Básico o porquê do uso da linguagem simbólica dentro da matemática.

Ressalta-se que esses paradoxos são contradições aparentes, já que podem ser expulsos da Teoria dos Conjuntos mediante sua adequada axiomatização, o que foi feito por Zermelo e Fraenkel. Também é necessário o emprego de certas restrições ao uso da linguagem, o que é feito por meio da lógica simbólica, mas precisa que a linguagem corrente. Não se propõe aqui que sejam trabalhados os axiomas da teoria dos conjuntos com os alunos de Ensino Básico, mas sim mostrar informalmente as ideias por trás desses axiomas e o efeito que elas produzem sobre a teoria. O que pode ser extraído daqui não é a formalidade da linguagem utilizada, mas sim as ideias que ela possibilita entender. O espírito aqui é o de David Hilbert (1862 - 1943):

"Ninguém poderá nos expulsar do Paraíso que Cantor criou."

A seguir são apresentados alguns dos axiomas usados na construção da Teoria dos Conjuntos, seguidos de um breve comentário de sua importância dentro da teoria. A exposição é uma adaptação das exposições em [12], [23] e [25], e o sistema de axiomas se deve a Zermelo-Fraenkel. Através desses axiomas é possível construir de forma segura (isto é, sem paradoxos) um grande número de conjuntos e desenvolver o conceito de número natural a partir dos conjuntos de números. De posse dos números naturais, pode-se ampliar o conceito de número, da forma como é feito em [5] ou [7].

3.2 Axioma da Extensão

Axioma 1 (Extensão). $(\forall\, x)(x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B$

Em palavras: Dados dois conjuntos A e B, se para todo elemento x é satisfeita a condição de que x pertente a A se e somente se x pertence (também) a B, então os conjuntos A e B são iguais.

Dois conjuntos são iguais somente se possuem exatamente os mesmos elementos, isto é, todos os elementos de A estão em B e todos os elementos de B estão em A. Não pode haver um elemento que esteja em A e não esteja em B, e vice-versa. Uma maneira de verificarmos que dois conjuntos são iguais é validar duas condições separadamente (mas que devem ser válidas simultaneamente para que se verifique a igualdade): todo elemento de A é deve ser também elemento de B (o que significa que o conjunto A está contido no conjunto B); e todo elemento de B é também elemento de A (o conjunto B está contido no conjunto A).

3.3 Axioma da Especificação

O seguinte Axioma é na verdade um axioma esquemático, no seguinte sentido: a partir dele, infinitos axiomas podem ser gerados dentro da teoria, bastando para isto variar a sentença *S(x)* que aparece na sua formulação.

Axioma 2 (Especificação)**.** $(\exists\ \boldsymbol{B})(\forall\ \boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B} \leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{S(x)})$

Em palavras: Sejam um conjunto A e $S(x)$ uma sentença à qual se pode verificar o valor lógico de Verdadeiro ou Falso para todos elementos x de A. Existe um conjunto B tal que para todo x, x pertence a B se e somente se x pertence a A e $S(x)$ é verdadeira.

O axioma da especificação significa que partindo de um conjunto A previamente existente, podemos separar alguns elementos de A que satisfazem à uma propriedade descrita pela sentença $S(x)$. Não existem no conjunto B elementos que não estejam em A. Se a sentença é falsa para todos os elementos de A, então B é o conjunto vazio. Se é verdadeira para todos os elementos de A, então B é igual a A. Caso $S(x)$ seja verdadeira para alguns elementos e falsa para outros, o conjunto B é um subconjunto próprio de A. Esse axioma, ao mesmo tempo que elimina o paradoxo de Russel, também restringe a formação de novos conjuntos pois sua aplicação requer a existência prévia de um conjunto ao qual $S(x)$ se aplica.

Na presença deste axioma não é possível construir o paradoxo de Russel, já que sua formulação daria $(\exists\ B)(\forall\ x)(x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B)$, que não é uma contradição. Assim, embora este axioma restrinja a formação de conjuntos, ele também elimina o paradoxo de Russel da Teoria dos conjuntos. Isso é desejável para alcançar o objetivo de construir uma teoria dos conjuntos consistente.

3.4 Axioma da União

Axioma 3 (União)**.** $(\exists\ \boldsymbol{C})(\forall\ \boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C} \leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B})$

Em palavras: Dados dois conjuntos A e B, existe um conjunto C tal que x pertence a C se e somente se x pertence a A ou x pertence a B.

Posteriormente será visto que o axioma da União pode ser deduzido dos próximos dois axiomas: o axioma do pareamento e o axioma da soma. Dessa forma, o axioma da União não é independente dos demais e poderia ser tratado como um teorema dentro da teoria. Entretanto, esta sentença é introduzida como axioma a fim de simplificar o desenvolvimento da teoria, possibilitando desenvolver alguns tópicos da mesma antes de abordar formalmente os outros dois axiomas. O axioma da união torna possível, a partir de dois conjuntos dados, construir um novo conjunto que tem os dois conjuntos iniciais como subconjuntos, desde que nenhum dos dois conjuntos dados inicialmente seja subconjunto do outro.

3.5 Axioma do Pareamento

Os axioma do Pareamento, da Soma e da Potência têm caráter construtivo: permitem se gerar novos conjuntos a partir de conjuntos já existentes.

Axioma 4 (Pareamento). $(\exists\ \boldsymbol{A})(\forall\ \boldsymbol{z})(\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{A} \leftrightarrow \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{z} = \boldsymbol{y})$

Em palavras: existe um conjunto A tal que, para todo z, z pertence a A se e somente se z é igual a x ou z é igual a y.

Este axioma afirma que dados quaisquer dois conjuntos ou elementos, denominados x e y, existe um conjunto formado por esses dois elementos: é o conjunto A = {x, y}. A partir desse axioma torna-se possível a construção de conjuntos que definem pares ordenados.

3.6 Axioma da Soma

Axioma 5 (Soma). $(\exists\ \boldsymbol{C})(\forall\ \boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C} \leftrightarrow (\exists\ \boldsymbol{B})(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{A})$

Em palavras: Existe um conjunto C tal que para todo x, x pertence a C se e somente se existe um conjunto B tal que x pertence a B e B pertence a A.

A ideia do axioma é assegurar a existência da união de uma família (ou classe) de conjuntos. Seja, por exemplo, a família A = $\{A_1, A_2, ..., A_n, a\}$ onde cada A_i, i = *1, 2,*

... n é um conjunto e $\boldsymbol{a}$ é um elemento que não é um conjunto. A união dessa família é o conjunto C formado pelos elementos dos conjuntos que pertencem a A, o que exclui o elemento $\boldsymbol{a}$ (notação: C $= \cup$ A).

3.7 Axioma da Potência

Axioma 6 (Potência)**.** $(\exists\ \boldsymbol{B})(\forall\ \boldsymbol{C})(\boldsymbol{C} \in \boldsymbol{B} \leftrightarrow \boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{A})$

Em palavras: Dado um conjunto A, existe um conjunto B tal que, para todo C, C pertence a B se e somente se C é subconjunto de A.

O axioma da Potência afirma que existe um conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de um dado conjunto A, chamado de conjunto potência de A, representado pela notação $\mathbb{P}$(A). Esse nome é dado em referência ao fato de que se A tem n elementos então o conjunto $\mathbb{P}$(A) tem 2^n elementos. A tomada do conjunto potência é uma forma de construir conjuntos "maiores" a partir de um conjunto dado. O conjunto potência tem papel fundamental no estudo dos cardinais, conforme desenvolvido no capítulo 4.

3.8 Axioma da Regularidade

Axioma 7 (Regularidade)**.** $\boldsymbol{A} \neq \varnothing \rightarrow (\exists\ \boldsymbol{x})[\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \wedge (\forall\ \boldsymbol{y})\ (\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{y} \notin \boldsymbol{A})]$

Em palavras: Se um conjunto A não é vazio, então existe um x tal que x pertence a A e para todo y, se y pertence a x então y não pertence a A.

Comentário: A ideia por trás desse axioma é evitar a consideração de conjuntos que são elementos de si próprios. Já abordamos a possibilidade de um conjunto ser membro de si próprio. O conjunto de todos os torcedores do Vasco, por exemplo, não é ele próprio um torcedor do Vasco. Por outro lado já foi mencionado que o conjunto de todos os conjuntos conduziu a paradoxo de Russel. Sendo assim é natural querer evitar situações do tipo A $\in$ A. O axioma vai adiante, evitando que aconteçam ciclos do tipo A $\in$ B $\wedge$ B $\in$ C $\wedge$ C $\in$ A onde os conjuntos A, B e C são distintos.

3.9 Axioma dos Cardinais

Dois conjuntos são equivalentes, ou equipotentes, quando existe uma bijeção entre eles. A notação usada aqui para representar este fato será A $\approx$ B. O número cardinal de um conjunto finito representa o número de elementos que este conjunto possui. Existem cardinais diferentes para conjuntos infinitos, conforme será explorado no capítulo 4.

Axioma 8 (Cardinais)**.** $\mathfrak{K}(A) = \mathfrak{K}(B) \leftrightarrow A \approx B$*.*

Em palavras: Dados dois conjuntos, A e B, o cardinal de A, $\mathfrak{K}$(A), é igual ao cardinal de B, $\mathfrak{K}$(B), se e somente se o conjunto A é equivalente ao conjunto A.

Este axioma é empregado para assegurar que, dado qualquer conjunto, ele possui um cardinal associado, e que dois conjuntos possuem o mesmo cardinal apenas se estão dentro da mesma classe de equivalência na partição induzida pela relação de equivalência "$\approx$". Aliás este é o conceito de cardinal: é a classe de equivalência de conjuntos equipotentes.

3.10 Axioma da Infinitude

Dos axiomas apresentados até aqui, não existe qualquer garantia de que exista de fato algum conjunto. O próximo axioma chama à existência um conjunto, mas não apenas isto, garante ainda que este conjunto é infinito.

Axioma 9 (Infinitude)**.** $(\exists\ A)(\ \emptyset \in A \wedge (\ \forall\ B)(B \in A \rightarrow B \cup \{B\} \in A)$

Em palavras: Existe um conjunto A tal que vazio pertence a A e, para todo conjunto B, se B pertence a A então a união de B com {B} também pertence a A.

Este axioma garante que o processo de construção dos números naturais como comentado no início deste capítulo pode continuar de forma infinita. Assim, zero seria a classe de equivalência de $\emptyset$; 1 seria a classe de equivalência de $\{\emptyset\}$; 2 a classe de $\{\emptyset$, $\{\emptyset\}$; e assim por diante. O conjunto universo ao qual se aplica a partição induzida pela relação de equivalência $\approx$ é o conjunto A deste axioma.

3.11 Axioma da Escolha

O seguinte axioma admite varias formulações, dentre as quais escolhemos a seguinte, sem emprego da linguagem simbólica:

Axioma 10 (Escolha)**.** ***Para qualquer conjunto A existe uma função f tal que para qualquer $B \subset A$ não vazio $f(B) \in B$.***

O axioma da escolha estabelece que, dada uma família de conjuntos não vazios, existe uma função que seleciona um elemento de cada cada conjunto dessa família de conjuntos. Esse axioma é necessário, por exemplo, na demonstração dada ao Teorema 4.12, no capítulo 4.

Capítulo 4

Caracterizações Ordinal e Cardinal do conjunto $\mathbb{N}$

Para delinear o conceito de número, podemos partir de dois conjuntos: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\{a, b, c, d, e\}$. Esses conjuntos são iguais? Certamente não, dado que não possuem exatamente os mesmos elementos. Os elementos desse conjunto não têm sequer a mesma natureza (um conjunto possui números, o outro letras). A propriedade comum a esses conjuntos que pode ser observada ignorando todos os outros atributos é a "igual quantidade de elementos que possuem". A igualdade deve ser interpretada da seguinte forma: é a possibilidade de se poder formar pares com um membro de cada conjunto, sem que algum elemento fique sem par ou que algum seja repetido na formação de pares diferentes. Dessa forma conseguimos abstrair a propriedade de número 5 em seu sentido cardinal como sendo uma característica comum a esses dois conjuntos.

A noção de cardinalidade foi formulada por Georg Cantor entre 1874 e 1884. Ele estabeleceu a cardinalidade como um ferramenta de comparação de conjuntos finitos. Mas Cantor foi ainda mais longe: provou que os conjuntos infinitos não têm todos o mesmo "tamanho". Os conjuntos que podiam ser postos em correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais eram chamados de conjuntos enumeráveis. É o caso do conjunto dos números pares, dos inteiros e dos racionais, por exemplo. Já os números irracionais e os reais são exemplos de conjuntos em que essa correspondência não é possível, sendo estes exemplos de conjuntos não enumeráveis. Sua conclusão sobre a não enumerabilidade dos números reais veio utilizado o célebre argumento da diagonal. Ficou então comprovada a existência de tipos diferentes de infinitude, fazendo-se distinção entre conjuntos enumeráveis (que podem ser postos em uma lista ordenada) e conjuntos não enumeráveis (que não se podem listar). Aos números cardinais desses conjuntos deu o nome de números cardinais transfinitos (o número cardinal de um conjunto infinito). Abriu-se espaço para a "hipótese do contínuo", ainda hoje foco de muitas pesquisas. Nos últimos anos de vida Cantor tentou provar, sem o conseguir, tal hipótese: existem conjuntos de "tamanho" intermediário entre o conjunto dos naturais (enumeráveis) e os reais (contínuo)? Somente em 1963, Paul Cohen demonstrou impossibilidade de demonstrar esta conjectura. Esta hipótese foi o número um dos 23 Problemas de Hilbert apresentados na conferência do Congresso Internacional de Matemática de 1900.

4.1 Axiomas de Peano

A construção dos números naturais e suas propriedades pode ser feita a partir dos axiomas da Teoria dos Conjuntos. Uma tal abordagem pode ser encontrada em [12], [23] e [25]. A partir da construção dos números naturais, o conceito de número pode ser sucessivamente ampliado de forma a obter os conjuntos dos números inteiros, racionais, reais e complexos. Essas construções podem ser estudadas em [5] e [7]. Neste capítulo considera-se duas caracterizações dos números Naturais: ordinal e cardinal. Na caracterização ordinal o ponto de partida é a axiomática de Peano, cujos pressupostos são a existência do conjunto $\mathbb{N}$ e de uma função injetiva $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, chamada função sucessor, satisfazendo os três axiomas a seguir.

Axioma 11. *Existe uma função injetiva $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.*

Axioma 12. *Existe um único elemento $1 \in \mathbb{N}$ tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Axioma 13. *Se $X \subset \mathbb{N}$ satisfaz as propriedades (i) $1 \in X$ e (ii) $n \in X \to n + 1 \in X$, então $X = \mathbb{N}$:*

O Axioma 13 é conhecido como princípio de indução finita. O exemplo a seguir ilustra uma aplicação do uso do raciocínio indutivo baseado neste princípio.

Exemplo 4.1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $n \neq s(n)$. Seja X o subconjunto de números naturais para os quais a afirmação $n \neq s(n)$. O axioma 12 garante que $1 \neq s(n)$ para todo n, em particular $1 \neq s(1)$, de onde $1 \in X$. Se $n \neq s(n)$ então do axioma 11 e da* *definição de injetividade tem-se $s(n) \neq s(s(n))$. Logo, valem para X as condições (i) e (ii) do Axioma 13 e $X = \mathbb{N}$.*

4.2 Ordem e o Princípio da Boa Ordenação em $\mathbb{N}$

Uma operação sobre $\mathbb{N}$ é uma aplicação que associa a cada par de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ um número natural que é o resultado da operação. Admitindo-se definidas sobre $\mathbb{N}$ as operações de adição e multiplicação (maiores detalhes podem ser obtidos em [14]), valem as seguintes igualdades para a função sucessor:

$$\boldsymbol{m + 1 = s(m)}$$
$$\boldsymbol{m + s(n) = s(n + m)}$$
$$\boldsymbol{m \cdot 1 = m}$$
$$\boldsymbol{m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m}$$

Dados dois números naturais, escreve-se $n < m$ quando existe um $p \in \mathbb{N}$ tal que valha a igualdade $n + p = m$. A notação $n \leqslant m$ significa que $n < m$ ou $n = m$. Uma das mais importantes propriedades da relação de ordem $n < m$ é o princípio da boa ordenação.

Teorema 4.2. *Qualquer subconjunto não vazio $S \subset \mathbb{N}$ possui um elemento n_0 tal que $n_0 \leq n$ para todo $n \in S$.*

Demonstração. Suponha que $1 \in$ S. Se existissem $m, p \in \mathbb{N}$ tais que $m + p = 1$, então se $p = 1$ seria $1 = s(m)$; se $p \neq 1$, então existe k natural tal que $s(k) = p$ e seriam válidas as igualdades $1 = m + p = m + s(k) = s(m + k)$; em qualquer dos casos, o axioma 12 é contrariado. Logo 1 é o menor elemento de $\mathbb{N}$, e também será o menor elemento de S. Se $1 \notin$ S, considere o conjunto X dos números naturais tais que $\{1, 2, 3, ..., n\} \subset \mathbb{N}$ - S. O conjunto X não vazio pois S $\neq \emptyset$. Tem-se $1 \in$ X pois X é o complementar de S relativamente a $\mathbb{N}$. Se valesse a condição *(ii)* do axioma 13, então seria X $= \mathbb{N}$. Isto não é possível, já que S $\neq \emptyset$, tem-se então X $\neq \mathbb{N}$. Portanto existe algum $n \in$ X tal que $s(n)$ não pertence a X. Este $s(n) \in$ S e cumpre o papel de n_0, pois qualquer $n < s(n)$ pertence a X (e não a S). □

Estabelecida a "boa ordem" no conjunto dos números naturais, falta atribuir significado ao que são os elementos da lista ordenada obtida como consequência dos axiomas de Peano. Os próximos exemplos, construídos com emprego do princípio de indução finita, mostram uma relação de ordem entre dois números com significado cardinal, conceito este que será explicitado mais adiante.

Exemplo 4.3. *Seja P(S) o conjunto das partes do conjunto S, isto é,* $X \in P(S)$ *se e somente se* $X \subset S$*. Por exemplo, se* $S = \emptyset$ *o único subconjunto de S é o próprio* $\emptyset$*, logo* $P(S) = \{ \emptyset \}$*. Se S é finito e possui n elementos então P(S) possui* 2^n *elementos. De fato, Seja* $X \subset \mathbb{N}$ *o conjunto dos naturais para os quais a afirmação é válida. Se S é unitário, isto é,* $S = \{x_1\}$ *então* $P(S) = \{\emptyset, S\}$*, de onde* $1 \in X$*. Fazendo agora* $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *e supondo válida a afirmação de que P(S) tem* 2^n *elementos. Fazendo* $S' = S \cup \{x_{n+1}\}$*, vê-se que todo subconjunto de S é também subconjunto de S'. Além disso, os subconjuntos de S' que não são subconjuntos de S são exatamente aqueles que possuem o elemento* x_{n+1}*. Como existem* 2^n *conjuntos sem* x_{n+1}*, existem igualmente* 2^n *subconjuntos com o elemento* x_{n+1} *(basta acrescentar* x_{n+1} *em cada um dos conjuntos que não o possuem para varrer todas as possibilidades). Logo S' tem exatamente* $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ *subconjuntos. Tem-se então que se* $n \in X$ *então* $n + 1 \in X$*. Pelo princípio de indução finita (axioma 13) tem-se* $X = \mathbb{N}$*.*

Exemplo 4.4. *Para mostrar que* $n < 2^n$*, considere S o conjunto dos números naturais tais que a desigualdade é verdadeira. Tem-se* $1 \in S$ *pois* $1 < 2$*. Suponha válida a desigualdade para n, deve-se mostrar que* $n + 1 < 2^{n+1}$*. De fato,* $n + 1 < 2^n + 1 < 2^n + 2 < 2^n + 2^n < 2^{n+1}$*. Assim, se* $n \in S$ *então* $n + 1 \in S$*. Conclui-se do axioma 13 que* $S = \mathbb{N}$ *e a desigualdade é valida para todo número natural. Esse resultado juntamente com o resultado exposto no exemplo anterior mostra que o número de elementos de um conjunto finito é menor que o número de elementos das partes desse conjunto.*

4.3 Conjuntos Finitos e Infinitos

Diz-se que dois conjuntos finitos têm o mesmo número de elementos quando existe uma bijeção entre esses conjuntos. A próxima definição estabelece essa forma quantitativa de comparação entre dois conjuntos. Como referência inicial de comparação, faz-se uso de um subconjunto finito do conjunto dos números naturais, da forma como descrito pelos axiomas de Peano.

Definição 4.5. *Um conjunto S se diz finito quando* $S = \emptyset$ *ou quando existe um número natural n e uma correspondência biunívoca entre os elementos de S e o conjunto {1, 2,* *3, ..., n}.*

Para os próximos resultados, adotou-se a notação $I_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Teorema 4.6. *Se $S \subset I_n$ e $f : S \to I_n$, então $S = I_n$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que existam para alguns $n \in \mathbb{N}$, f : S $\to I_n$ bijeção com S $\subsetneq I_n$ e seja n_0 o menor natural para o qual isto acontece. Tem-se necessariamente $n_0 > 1$ pois o único subconjunto próprio de I_1 é o vazio e sobre ele não é possível definir bijeção. Como f : S $\to I_{n_0}$ é uma bijeção, existe único s_0 para o qual $f(s_0) = n_0$. Restringindo f a S - $\{s_0\} \neq \emptyset$, tem-se ainda uma bijeção sobre I_{n_0-1}, o que contraria a minimalidade de n_0. □

Corolário 4.7. *Não existe uma bijeção entre um conjunto finito S e um de seus subconjuntos $A \subsetneq S$.*

Demonstração. Como S é finito existe uma bijeção g : S $\to I_n$. A restrição g_A de g ao subconjunto próprio A de S também é bijeção sobre um subconjunto próprio B de I_n. Se existisse uma bijeção f : A $\to$ S, então a composta $g \circ f \circ g_A^{-1}$: B $\to I_n$ seria uma bijeção, contrariando o teorema anterior. □

Pode acontecer que não exista um natural n que satisfaça as condições da definição anterior. Neste caso, o conjunto será infinito, conforme a próxima definição.

Definição 4.8. *Um conjunto S se diz infinito quando não é finito.*

No desenvolvimento da teoria axiomática dos conjuntos, o Axioma 8 estabelece que dados dois conjuntos A e B, existe um número cardinal associado a cada um deles, $\mathfrak{K}$(A) e $\mathfrak{K}$(B), bem como esses cardinais são iguais se e somente se os dois conjuntos são equivalentes, isto é, existe uma bijeção entre A e B, conforme definição 4.5.

Definição 4.9. *Os conjuntos A e B são equivalentes se e somente se existe uma correspondência biunívoca entre eles. Neste caso, escreve-se $A \approx B$.*

Das propriedades das bijeções conclui-se que a relação "$\approx$" é reflexiva, simétrica e transitiva. De fato, A $\approx$ A sob a bijeção identidade. Se f : A $\to$ B é uma bijeção então sua inversa f^{-1} : B $\to$ A também o é. Logo, A $\approx$ B implica B $\approx$ A. Finalmente, a transitividade é verificada notando que se A $\approx$ B sob a bijeção f : A $\to$ B e B $\approx$ C sob a bijeção g : B $\to$ C, então A $\approx$ C sob a também bijeção $f \circ g$.

Quando A e B são conjuntos equivalentes, diz-se que eles possuem a mesma cardinalidade. Quando um conjunto é finito, sua cardinalidade corresponde ao número de elementos que ele possui. Existem cardinais infinitos diferentes, como o cardinal dos números naturais, $\aleph_0$, e o dos números reais (contínuo), $\aleph$, onde $\aleph$ é a letra “aleph” do alfabeto hebraico.

Exemplo 4.10. *Geometricamente pode-se estabelecer uma bijeção entre os dois segmentos de reta paralelos AB e CD da Figura 4.1 da seguinte forma: traçam-se as semirretas CA e DB, que se encontram no ponto P. Para qualquer ponto X no segmento AB sua imagem será o ponto Y de CD que é a intersecção da semirreta PX com o segmento CD. Observa-se assim que os segmentos de reta mesmo tendo comprimento diferentes, têm a mesma cardinalidade.*

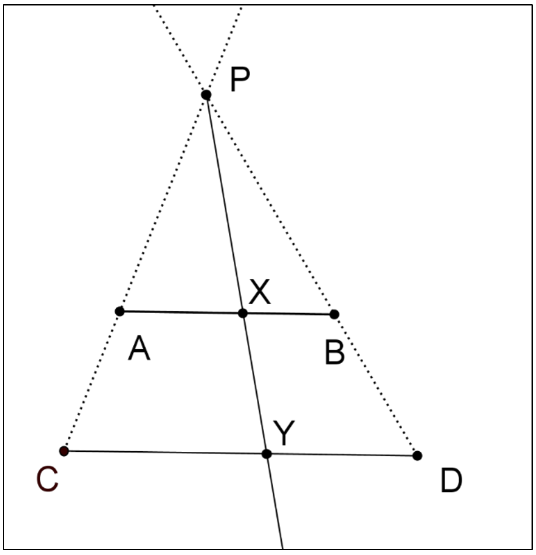

Figura 4.1: Exemplo 4.10

4.4 Conjuntos Enumeráveis

Já foi visto no exemplo 4.1 que se o conjunto S tem n elementos então P(S) tem 2^n elementos, de modo que $\mathfrak{K}(\mathrm{S}) < \mathfrak{K}(\mathrm{P(S)})$. Para conjuntos infinitos, tem-se a cadeia de desigualdades, que apontam o conjunto $\mathbb{N}$ como o menor cardinal infinito:

$$\mathfrak{K}(\mathbb{N}) < \mathfrak{K}(P(\mathbb{N})) < \mathfrak{K}(P(P(\mathbb{N}))) < \ldots$$

Para estabelecer essas desigualdades, iniciamos justificando porque o menor conjunto infinito enumerável é o conjunto dos números naturais. A seguir, mostraremos que os conjuntos numéricos dos inteiros $\mathbb{Z}$ e dos racionais $\mathbb{Q}$ têm o mesmo cardinal de $\mathbb{N}$, enquanto o conjunto dos números reais forma um contínuo com cardinal superior ao desses conjuntos. Uma vez que o conjunto dos números reais pode ser particionado por dois subconjuntos disjuntos, a saber o conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$ e o conjunto dos irracionais $\mathbb{I}$, sendo $\mathbb{Q}$ enumerável concluiremos que a não enumerabilidade de $\mathbb{R}$ se deve ao conjunto $\mathbb{I}$.

Definição 4.11. *Um conjunto S é enumerável se e somente se S é finito ou se existe uma correspondência biunívoca f :* $\mathbb{N} \to S$ *(isto é,* $S \approx \mathbb{N}$*).*

Quando o conjunto S é infinito e existe a bijeção *f*, S é dito infinito enumerável. Uma bijeção do conjunto $\mathbb{N}$ no conjunto S é dita uma enumeração dos elementos de S. Assim, ao se escrever S = $\{s_1, s_2, ..., s_n, ...\}$, fica subentendida a existência de uma bijeção f : $\mathbb{N} \to$ S tal que *f(n)* = s_n. O teorema a seguir mostra porque o menor cardinal infinito é $\aleph_0 = \mathfrak{K}(\mathbb{N})$.

Teorema 4.12. *Seja S um conjunto infinito. Então S possui um subconjunto enumerável.*

Demonstração. Se S é um conjunto infinito, podemos escolher um elemento de S e chamá-lo de s_1. O conjunto S - $\{s_1\}$ é infinito, logo pode-se tomar nele um elemento $s_2 \neq s_1$. Supondo já escolhidos $s_1, s_2, ..., s_n$, escolhe-se $s_{n+1} \in$ S - $\{s_1, s_2, ..., s_n\}$, que ainda é infinito. Tem-se assim um subconjunto enumerável S' = $\{s_1, s_2, ..., s_n, ...\} \subset$ S, onde a função $f : \mathbb{N} \to$ S dada por *f(n)* = s_n é injetiva, sendo uma bijeção de $\mathbb{N}$ sobre S' = $f(\mathbb{N})$. □

Teorema 4.13. *Todo subconjunto infinito* $S \subset \mathbb{N}$ *é enumerável.*

Demonstração. Sendo S é um subconjunto de $\mathbb{N}$, satisfaz o princípio da boa ordenação e é possível enumerar seus elementos da seguinte forma: escolhe-se o menor elemento de S, nomeando-o s_1. O conjunto S - $\{s_1\}$ é infinito e está contido em $\mathbb{N}$, logo pode-se tomar também seu menor elemento $s_2 \neq s_1$. Supondo já escolhidos $s_1, s_2, ..., s_n$, escolhe-se $s_{n+1} \in$ S - $\{s_1, s_2, ..., s_n\}$, que ainda é infinito e contido em $\mathbb{N}$. Esse processo deve varrer todos os elementos de S pois, caso contrário, existirá um s $\in$ S que será maior que todos os elementos de S, o que é absurdo pois S é infinito, logo é ilimitado. Assim, tem-se uma enumeração ordenada S $= \{s_1 < s_2 < ... < s_n < ...\} \subset$ S, onde a função $f\colon \mathbb{N} \to$ S dada por *f(n)* $= s_n$ é uma bijeção de $\mathbb{N}$ sobre S $= f(\mathbb{N})$.

□

Corolário 4.14. *Todo subconjunto infinito de um conjunto infinito enumerável é também enumerável.*

Demonstração. Sendo A $\subset$ S dois conjuntos infinitos com S enumerável, existe uma bijeção f : S $\to \mathbb{N}$. Considerando a restrição de f ao subconjunto A tem-se como imagem o subconjunto também infinito f(A) $= \mathbb{N}'$ de $\mathbb{N}$, que é enumerável pelo teorema anterior. A é equivalente a um enumerável, logo é enumerável.

□

Corolário 4.15. *Se f : $R \to S$ é injetiva e S é enumerável então R é enumerável.*

Demonstração. Se S é enumerável então a f : R $\to f$(R) é uma bijeção sobre um subconjunto de S. Pelo corolário anterior f(S) também é enumerável. Mas R $\approx$ f(R) e portanto R é enumerável. □

Corolário 4.16. *Se f: $R \to S$ é sobrejetiva e R é enumerável então S é enumerável.*

Demonstração. Sendo f sobrejetiva, admite inversa à direita injetiva, de modo que existe uma função injetiva f^{-1} : S $\to$ R, com R enumerável. Segue-se o resultado do corolário anterior. □

O teorema a seguir caracteriza os conjuntos infinitos como sendo aqueles que admitem sempre uma bijeção com um subconjunto próprio. Esse teorema ilustra porque nem sempre é válida a constatação usada por Euclides em Os Elementos de que " o todo é maior que a parte."

Teorema 4.17. *Um conjunto S é infinito se e somente se existe uma bijeção entre S e um de seus subconjuntos próprios.*

Demonstração. Supondo que S seja infinito, pelo Teorema 4.11 possui um subconjunto enumerável S'$= \{s_1, s_2, ..., s_n, ...\}$. Suprimindo s_1 de S, obtém-se um subconjunto próprio de S e pode-se definir a bijeção f : S $\to$ S-$\{s_1\}$ da seguinte forma: *f(x)* $= x$ se $x \notin$ S' e *f(s_n)* $= s_{n+1}$ para $s_n \in$ S'. Reciprocamente, se existe uma bijeção de S sobre um de seus subconjuntos próprios, o Corolário 4.7 garante que S não é finito, logo pela Definição 4.8 S é infinito. □

Exemplo 4.18. *Seja* $\mathbb{P}$ = *{2, 4, 6, 8, ...} o conjunto dos números naturais pares. Tem-se* $\mathbb{P} \subsetneq \mathbb{N}$. *Definindo* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{P}$ *por f(n) = 2n, tem-se que f é uma bijeção. Segue-se do teorema anterior que que o conjunto* $\mathbb{N}$ *é infinito.*

A equivalência estabelecida pelo Teorema 4.14 poderia ser adotada como definição para conjuntos infinitos. O próximo teorema permitirá concluir que o conjunto dos números inteiros é enumerável, isto é, $\mathbb{Z}$ é equivalente a $\mathbb{N}$.

Teorema 4.19. *Se R e S são conjuntos enumeráveis, então* $R \cup S$ *é enumerável.*

Demonstração. Suponha que R $\cap$ S = $\emptyset$. Se R e S são finitos com m e n elementos respectivamente, então R $\cup$ S será finito com m + n elementos. Isto porque existem bijeções $f : I_m \to$ R e $g : I_n \to$ S, logo pode-se definir a bijeção h: $I_{m+n} \to$ R $\cup$ S tal que *h(k) = f(k)* se k $\leq$ m e *h(k) = g(k-m)* m < k $\leq$ m + n. Se R é finito e S infinito, então pode-se escrever R = $\{r_1, r_2, ..., r_k\}$ e S = $\{s_1, s_2, ..., s_n, ...\}$. Define-se então a bijeção $g : \mathbb{N} \to$ R $\cup$ S fazendo *g(n)* = r_n para n $\leq$ k e *g(n)* = s_{n-k} para n > k. Caso sejam R = $\{r_1, r_2, ..., r_n, ...\}$ e S = $\{s_1, s_2, ..., s_n, ...\}$, estabelece-se $f : \mathbb{N} \to$ R $\cup$ S por *f(2n - 1)* = r_n e *f(2n)* = s_n, onde f é uma bijeção que leva os naturais ímpares de $\mathbb{N}$ nos elementos de R e os naturais pares nos elementos de S. Alternativamente a essas considerações, se for R $\cap$ S $\neq \emptyset$, basta aplicar essas ponderações aos conjuntos disjuntos A e B - A.

□

Exemplo 4.20. *O conjunto* $\mathbb{Z}$ *é enumerável. De fato,* $\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup$ *{0}* $\cup \mathbb{N}$, *onde* $-\mathbb{N}$ = *{-1, -2, -3, ...}. Para ver isto basta aplicar o teorema anterior duas vezes aos três conjuntos* $-\mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ *e {0} que são enumeráveis e formam uma partição de* $\mathbb{Z}$.

O próximo teorema permitirá estabelecer a a equivalência entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números racionais.

Teorema 4.21. *Se R e S são enumeráveis, então o produto cartesiano* $R \times S$ *é enumerável.*

Demonstração. Se R = $\emptyset$ ou S = $\emptyset$ então A $\times$ B = $\emptyset$ e vale o teorema. Supor então que ambos, R e S, são não vazios. Escrevendo R = $\{r_1, r_2, ..., r_n, ...\}$ e S = $\{s_1, s_2, ..., s_n, ...\}$, pode-se definir a função $f :$ R $\times$ S $\to \mathbb{N}$ por f(r_k, s_n) = $2^k \cdot 3^n$. O Teorema Fundamental da Aritmética assegura que a função f assim definida é injetiva. O conjunto R $\times$ S é então equivalente a f(R $\times$ S) $\subset \mathbb{N}$, que é enumerável pelo Teorema 4.12.

□

Exemplo 4.22. *O conjunto* $\mathbb{Q}$ *dos números racionais é enumerável. De fato, pode-se estabelecer a função sobrejetiva* $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ *por* $f(m,n) = \dfrac{m}{n}$*. Pelo Corolário 4.15 segue-se o resultado.*

Exemplo 4.23. *A Figura 4.2 a seguir ilustra um procedimento para listar os números racionais, evidenciando sua enumerabilidade.*

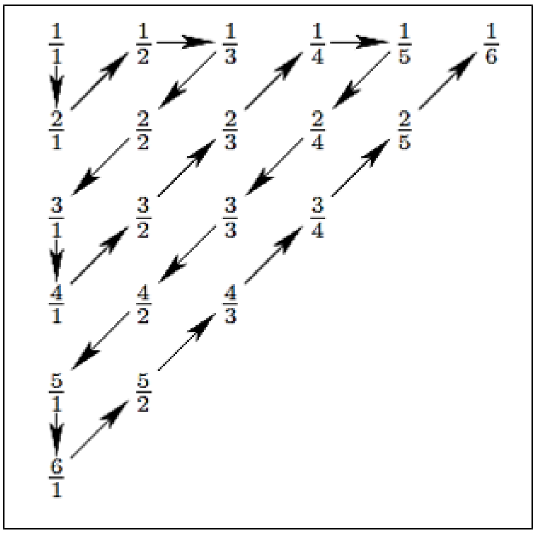

Figura 4.2: Exemplo 4.23

4.5 Conjuntos Não Enumeráveis

Já foi estabelecido nos Exemplos 4.3 e 4.4 que a cardinalidade de um conjunto finito é menor que a cardinalidade do conjunto das partes desse conjunto. Falta verificar que isto se aplica também a conjuntos infinitos. Isto será feito no próximo teorema. O conjunto $\mathcal{F}(\mathrm{R};\, \mathrm{S})$ representa o conjunto de todas as funções $f : \mathrm{R} \to \mathrm{S}$.

Teorema 4.24. *Seja R um conjunto arbitrário e S um conjunto contendo pelo menos dois elementos. Nenhuma função* $g : R \to \mathcal{F}(R;\, S)$ *é sobrejetiva.*

Demonstração. Dada $g : \mathrm{R} \to \mathcal{F}(\mathrm{R};\, \mathrm{S})$, seja g_r o valor de g no ponto $r \in \mathrm{R}$. Isto significa que $r \mapsto g_r$, isto é, g_r é uma função de $\mathcal{F}(\mathrm{R};\, \mathrm{S})$. Será construída a seguir uma função $f : \mathrm{R} \to \mathrm{S}$ tal que $f \notin g(R)$. Para isto, escolhe-se, para cada r um valor diferente de $g_r(r)$ em S, o que é possível pois S tem ao menos dois elementos. A função f é diferente de cada g_r pois $g_r(r) \neq f(r)$. Assim, g não é sobrejetiva.

$\square$

Sendo P(S) o conjunto das partes do conjunto S, e considerando o conjunto {0,1}, existe uma bijeção h : P(S) $\rightarrow \mathcal{F}$(S; {0, 1}). Tal bijeção é obtida associando-se a cada S $\in$ P(S) a função característica de S h_S : S $\rightarrow$ {0, 1} tal que h_S(s)= 1 se s $\in$ S e h_S(s)= 0 se s $\notin$ S. Se houvesse para algum conjunto S uma bijeção f : S $\rightarrow$ P(S), então a composta h $\circ$ f : S $\rightarrow \mathcal{F}$(S; {0, 1}) seria também uma bijeção, contrariando o teorema anterior. Assim, os cardinais de S e P(S) são diferentes. Como existe sempre uma função injetiva f : S $\rightarrow$ P(S) dada por $f(s) = \{s\}$, conclui-se que $\mathfrak{K}$(S) < $\mathfrak{K}$(P(S)).

Tem-se assim $\mathfrak{K}(\mathbb{N}) = \mathfrak{K}(\mathbb{Z}) = \mathfrak{K}(\mathbb{Q}) = \aleph_0$. O conjunto P($\mathbb{N}$) tem cardinalidade superior a $\aleph_0$. É o que está expresso na próxima proposição. Além disso, pelo Exemplo 1.5 sabemos que o intervalo aberto (0, 1) tem cardinal superior a $\aleph_0$.

Proposição 4.25. *O conjunto P($\mathbb{N}$) dos subconjuntos de $\mathbb{N}$ não é enumerável.*

Demonstração. Cada subconjunto X de $\mathbb{N}$ pode ser interpretado como uma sequência ordenada infinita de zeros e uns da seguinte forma: se o n-ésimo termo da sequência é zero, então n $\notin$ X. Se é um, n $\in$ X. Usando o argumento da diagonal de Cantor como usado no Exemplo 1.5, concluímos que nenhuma enumeração esgotará todos subconjuntos de $\mathbb{N}$. $\square$

Alguns exemplos são apresentados a seguir para indicar quais ideias podem ser utilizadas com alunos de Ensino Médio.

Exemplo 4.26. *Sejam dois intervalos não degenerados [a, b] e [c, d]. Definindo a função g : [a, b] $\rightarrow$ [c, d] onde Y = g(X) e* $Y = \dfrac{d-c}{b-a} \cdot (X - a) + c$, *tem-se que g é uma bijeção. A Figura 4.3 ilustra o procedimento de obtenção de g fazendo uso de semelhança de triângulos. Na figura foram fixados os pontos A e B - de coordenadas a e b sobre o eixo X; e os pontos C e D - de coordenadas c e d - sobre o eixo Y.*

Exemplo 4.27. *O exemplo anterior esclarece acerca da possibilidade de definir uma bijeção entre dois intervalos onde um deles está propriamente contido no outro. Assim, por exemplo, Os intervalos [-2, 2] e [0, 1] têm o mesmo número de elementos (mesma cardinalidade), mesmo sendo [0, 1] $\subsetneq$ [-2, 2]. Isso só é possível porque esses dois conjuntos são infinitos. Pode-se também definir uma bijeção entre um intervalo aberto e o conjunto dos números reais: h : (-a, a) $\rightarrow \mathbb{R}$ por* $h(x) = \frac{x}{a^2-x^2}$. *Se a = 4, por exemplo, o gráfico da função é o da Figura 4.4.*

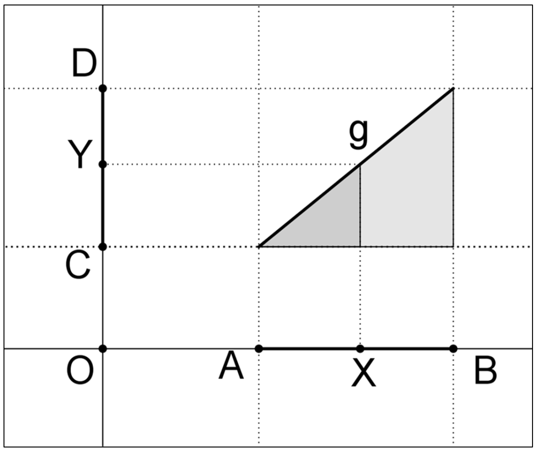

Figura 4.3: Exemplo 4.27

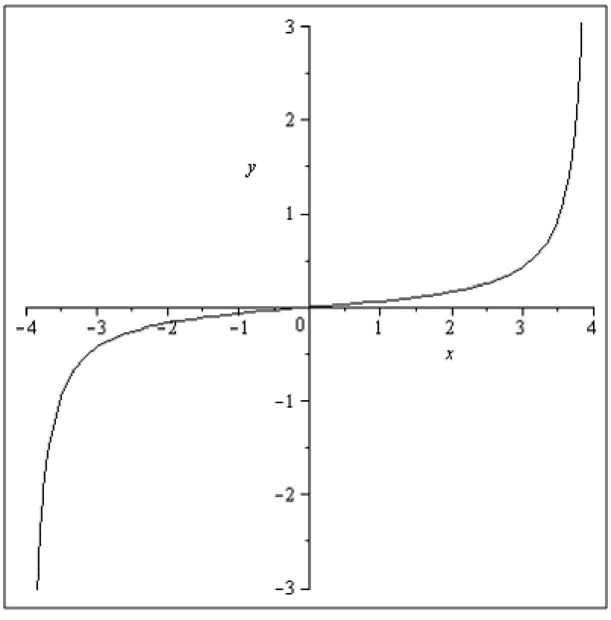

Figura 4.4: Gráfico de $h(x) = \frac{x}{a^2-x^2}$

Capítulo 5

Aplicações ao Ensino Médio

Este capítulo traz exercícios a serem aplicados aos alunos de Ensino Médio após a exposição teórica dos assuntos aqui abordados. A proposta é que os conceitos de tabelas verdade sejam trabalhados conjuntamente com a tradicional abordagem de operações com conjuntos que antecede o estudo das funções de primeiro e segundo grau no primeiro ano do Ensino Médio. Após esse estudo das tabelas verdade e de argumentação lógica, os alunos estariam prontos para resolver os 16 primeiros problemas da lista deste capítulo. Espera-se que os conteúdos trabalhados nesta etapa sejam capazes de fazer com que o aluno desenvolva as habilidades de:

- Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa.

- Exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.

- Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.

- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.

- Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Finalizada a primeira parte, faço a sugestão de trabalhar conjuntos infinitos a partir da exibição do filme **"Os Infinito de Cantor"**, da Série Matemática na Escola. Esse vídeo e um guia do professor com sugestões de atividades podem ser obtidos em [18].

O termo de cessão foi dado pelo autor diretamente ao Ministério da Educação - MEC, que permite o uso do recurso para distribuição, tradução, edição, excetuando-se o uso comercial. O filme tem duração aproximada de 15 minutos e simula um diálogo entre o matemático George Cantor e seu amigo Lukas Zweig. Neste vídeo, está um resumo dos principais pontos abordados no capítulo 4, cujos principais objetivos são:

- Abordar os temas de cardinalidade, conjuntos e subconjuntos infinitos, correspondência biunívoca;
- Apresentar uma demonstração matemática simples usando o Método da "Redução ao Absurdo";
- Incentivar o aluno a pensar abstratamente com exemplos contra-intuitivos.

Assim será possível propor os 4 últimos exercícios da lista deste capítulo, completando a abordagem dos seguintes conteúdos: conjuntos infinitos, cardinalidade, demonstração por redução ao absurdo, método da diagonal de Cantor e a existência de diferentes números cardinais infinitos. Cabe ressaltar que adicionalmente pode ser apresentada em sala de aula a biografia de Cantor, que se encontra detalhada no sítio referenciado em [17]. Essa é uma excelente oportunidade para apresentar os conceitos desenvolvidos por Cantor como fruto de um processo humano, portanto carecendo de aperfeiçoamento, sendo esse processo de criação permeado por críticas e sugestões de grandes matemáticos da época, relacionando assim etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade.

Ao fim deste trabalho espera-se que se cumpra o que está disposto nas orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais:

> **"É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. "**

5.1 Problemas

Os problemas 1 a 17 seguir são voltados para a compreensão do uso das tabelas verdade dos conectivos lógicos, bem como para a tradução, para linguagem simbólica, de situações - problema apresentadas na linguagem corrente. Os três últimos exercícios são referentes à teoria dos conjuntos de Cantor.

Problema 1.

A tabela 5.1 a seguir resume, para as sentenças P e Q, as principais sentenças compostas formadas fazendo uso dos conectivos lógicos. A tabela 5.2 associa a cada sentença composta da tabela 5.1 uma propriedade exclusiva deste tipo de sentença. Complete-as.

Tabela 5.1: Tabela Verdade - Todos os Conectivos

P	**Q**	**$\neg$ P**	**P $\wedge$ Q**	**P $\vee$ Q**	**P $\veebar$ Q**	**P $\rightarrow$ Q**	**P $\leftrightarrow$ Q**
V	V	F	V		F		V
V	F	F				F	
F	V	V					
F	F	V		F	F		V

Tabela 5.2: Propriedades dos Conectivos

Sentença	**É verdadeira se...**	**É falsa se...**
$\neg$ P	P é falso.	
P $\wedge$ Q		Um dos dois, ou ambos, for falso.
P $\vee$ Q	P ou Q (ou ambos) é verdade.	
P $\veebar$ Q	P e Q têm valores lógicos diferentes.	
P $\rightarrow$ Q		P é verdade e Q é falso.
P $\leftrightarrow$ Q		P e Q tem valores lógicos distintos.

Problema 2.

Usando os conectivos lógicos e as letras P, Q, R, etc. para representar sentenças simples (isto é, sentenças que não contem conectivos lógicos), traduza as sentenças compostas a seguir para a linguagem simbólica.

(a) Amanhã irá chover ou fazer sol.

(b) Se Joana é economista, então ela não entende de contas públicas.

(c) Devo ir ao trabalho de ônibus ou de táxi.

(d) Se eu fosse o presidente eu seria famoso.

(e) Se estou cansado ou com fome, então não posso estudar.

(f) Se João acorda cedo e não enfrenta trânsito, então ele chega feliz ao trabalho; e se não acorda cedo e pega trânsito, ele não chega feliz ao trabalho.

Problema 3.

(a) O que podemos dizer da sentença $\neg\, \boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q} \leftrightarrow \boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}$ *se soubermos que* $\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{Q}$ *é verdadeira?*

(b) O que podemos dizer da sentença $\neg\, \boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q} \leftrightarrow \boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}$ *se soubermos que* $\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{Q}$ *é falsa?*

(c) Suponha que o valor lógico de $\boldsymbol{P} \leftrightarrow \boldsymbol{Q}$ *é verdade. O que se pode dizer sobre o valor lógico das sentenças* $\boldsymbol{P} \leftrightarrow \neg\, \boldsymbol{Q}$ *e* $\neg\, \boldsymbol{P} \leftrightarrow \boldsymbol{Q}$ *?*

(d) Suponha que o valor lógico de $\boldsymbol{P} \leftrightarrow \boldsymbol{Q}$ *é falso. O que se pode dizer sobre o valor lógico das sentenças* $\boldsymbol{P} \leftrightarrow \neg\, \boldsymbol{Q}$ *e* $\neg\, \boldsymbol{P} \leftrightarrow \boldsymbol{Q}$ *?*

Problema 4.

Sejam as sentenças da tabela 5.3 a seguir, com seus respectivos valores lógicos. Transcreva para linguagem comum e diga qual o valor lógico das sentenças compostas seguintes.

(a) $A \to \neg(B \wedge C)$.

(b) $D \leftrightarrow (E \to B)$.

(c) $B \wedge (C \vee D)$.

(d) $(D \to A) \vee E$.

(e) $C \leftrightarrow (D \wedge \neg E) \vee B$.

(f) $(B \leftrightarrow C) \wedge (\neg E \veebar D)$

Tabela 5.3: Problema 4

Símbolo	**Sentença**	**Valor Lógico**
A	O ano tem 9 meses.	F
B	O Brasil fica na América do Sul.	V
C	Cantor Criou a Teoria dos Conjuntos.	V
D	Dedekind escreveu Os Lusíadas.	F
E	Euclides foi o autor de Os Elementos.	V

Problema 5.

(a) *Verificar por tabela verdade a validade do argumento* $\boldsymbol{P} \to \neg \boldsymbol{Q}, \neg \boldsymbol{P} \vdash \boldsymbol{Q}$.

(b) *A partir do item anterior, avalie o argumento:*

Se 7 é menor do que 4, então 7 não é primo.

7 não é menor do que 4.

Logo, 7 é primo.

Problema 6.

Testar a validade dos argumentos:

(a) $\boldsymbol{P \lor Q, \neg Q, P \to R \vdash R}$.

(b) $\boldsymbol{\neg P \to Q, P \vdash \neg Q}$.

Problema 7.

É conveniente não confundir a validade de um argumento com a verdade das premissas que o compõem. Para isto, observe o argumento a seguir, formado por sentenças verdadeiras:

Se eu fosse presidente, seria famoso.
Eu não sou presidente.
Então não sou famoso.

Pode-se avaliar a validade do argumento por meio de um contraexemplo. No argumento apresentado substitua "eu" por "Tiradentes". A seguir, responda:

(a) *O argumento é válido para o caso obtido? Por que?*

(b) *Um argumento formado apenas por sentenças verdadeiras será válido sempre?*

(c) *Sob quais condições um argumento estabelece a verdade da conclusão?*

Problema 8.

Observe o argumento, a seguir faça o que se pede:

Todo triângulo é um pentágono. Logo, algum pentágono é triângulo.

(a) *Identifique premissas e conclusão no argumento anterior. Diga qual o valor lógico dessas sentenças.*

(b) *Transcreva o argumento anterior para a linguagem da lógica simbólica.*

(c) *Um argumento formado por sentenças falsas pode ser válido?*

Problema 9.

Escreva o argumento a seguir na forma de linguagem simbólica e demonstre sua validade fazendo uso de regras de inferência.

Se um homem é careca, ele é infeliz.

Se um homem é infeliz, ele morre jovem.

Logo, carecas morrem jovens.

Problema 10.

Use as regras Moduns ponens e Moduns tollens para deduzir as conclusões a partir do conjunto de premissas de cada argumento a seguir.

(a) .

$$\begin{array}{c} \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q} \\ \neg\, \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{R} \\ \neg\, \mathbf{Q} \\ \hline \mathbf{R} \end{array}$$

(b) .

$$\begin{array}{c} \mathbf{P} \rightarrow \neg\, \mathbf{Q} \\ \neg\neg\, \mathbf{Q} \\ \neg\, \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{R} \wedge \mathbf{S} \\ \hline \mathbf{R} \wedge \mathbf{S} \end{array}$$

Problema 11.

(Esaf/2003 - Adaptado) André é inocente ou Beto é inocente. Se Beto é inocente, então Caio é culpado. Caio é inocente se e somente se Denis é culpado. Denis é culpado. O que podemos concluir quanto à culpabilidade de André, Beto, Caio e Denis?

Problema 12.

(FCC/2005) Um argumento é composto pelas seguintes premissas:

(I) ***Se as metas de inflação não são reais, então a crise econômica não demorará a ser superada.***

(II) ***Se as metas de inflação são reais, então os superávits primários não serão fantasiosos.***

(III) ***Os superávits serão fantasiosos.***

Para que o argumento seja válido, a conclusão deve ser:

(a) a crise econômica não demorará a ser superada.

(b) as metas de inflação são irreais ou os superávits são fantasiosos.

(c) as metas de inflação são irreais e os superávits são fantasiosos.

(d) os superávits econômicos serão fantasiosos.

(e) as metas de inflação não são irreais e a crise econômica não demorará a ser superada.

Problema 13.

As seguintes afirmações, todas elas verdadeiras, foram feitas sobre a ordem de chegada dos participantes de uma prova de ciclismo:

(1) ***Guto chegou antes de Aires e depois de Dada;***

(2) ***Guto chegou antes de Juba e Juba chegou antes de Aires, se e somente se Aires chegou depois de Dada;***

(3) ***Cacau não chegou junto com Juba, se e somente se Aires chegou junto com Guto.***

Logo:

(a) Cacau chegou antes de Aires, depois de Dada e junto co Juba.

(b) Guto chegou antes de Cacau, depois de Dada e junto com Aires;

(c) Aires chegou antes de Dada, depois de Juba e antes de Guto.

(d) Aires chegou depois de Juba, depois de Cacau e junto com Dada;

(e) Juba chegou antes de Dada, depois de Guto e junto com Cacau.

Problema 14.

(ESAF/2004) Se a professora de Matemática foi à reunião, nem a professora de inglês nem a professora de Francês deram aula. Se a professora de Francês não deu aula, a professora de português foi à reunião. Se a professora de Português foi à reunião, todos os problemas foram resolvidos. Ora, pelo menos um problema não foi resolvido. Logo:

(a) a professora de Matemática não foi à reunião e a professora de Francês não deu aula;

(b) a professora de Matemática e a professora de Português não foram à reunião;

(c) a professora de Francês não deu aula e a professora de português não foi à reunião;

(d) a professora de Francês não deu aula ou a professora de Português foi à reunião;

(e) a professora de Inglês e a professora de Francês não deram aula;

Problema 15.

Considere as premissas:

(P1) ***Os bebês são ilógicos;***

(P2) ***Pessoas ilógicas são desprezadas;***

(P3) ***Quem sabe amestrar um crocodilo não é desprezado.***

Assinale a única alternativa que não é uma consequência lógica das três premissas apresentadas:

(a) Bebês não sabem amestrar crocodilos.

(b) Pessoas desprezadas são ilógicas.

(c) Pessoas desprezadas não sabem amestrar crocodilos.

(d) Pessoas ilógicas não sabem amestrar crocodilos.

(e) Bebês são desprezados.

Problema 16.

(FCC/2004) Observe a construção de um argumento:

Premissa 1: ***Todos os cachorros têm asas.***

Premissa 2: ***Todos os animais de asas são aquáticos.***

Premissa 3: ***Existem gatos que são cachorros.***

Conclusão: ***Existem gatos que são aquáticos.***

Sobre o argumento A, as premissas P e a conclusão C, é correto dizer que:

(a) A não é válido, P é falso e C é verdadeiro.

(b) A não é válido, P e C são falsos.

(c) A é válido, P e C são falsos.

(d) A não é válido, P ou C são verdadeiros.

(e) A não é válido, P é verdadeiro e C é falso.

Problema 17.

Avalie as situações do ponto de vista lógico.

(a) Se Zeus, o deus mais poderoso de toda a Mitologia Grega é capaz de qualquer coisa, ele pode criar uma pedra tão pesada que não possa levantar?

(b) Um jacaré mantém uma criança em sua boca e diz ao pai da criança que irá soltá-la caso ele adivinhe se irá comê-la ou não. Se o pai não adivinhar o que vai ocorrer, o jacaré irá devorá-la. Que afirmação o pai poderá fazer para obter a criança de volta?

Problema 18.

O Hotel de Georg Cantor possui infinitos quartos, numerados consecutivamente, pelos números naturais 1, 2 3, ... Num final de semana o hotel estava completamento lotado.

(a) O que poderia ser feito para abrigar um recém chegado viajante?

(b) Seria possível abrigar um número infinito (enumerável) de hospedes? De que forma?

Problema 19.

(a) Confirme ou refute a seguinte afirmação:

"A quantidade de elementos de uma parte de um conjunto é menor que a quantidade de elementos do todo."

(b) Estabeleça duas bijeções entre os intervalos [-1, 1] e [-2, 2]: uma crescente e outra decrescente.

(c) Apresente uma enumeração para o produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Problema 20.

Em seu artigo de 1891, Cantor considerou o conjunto T de todas as sequências infinitas de dígitos binários (isto é, consistindo apenas de zeros e uns):

Se $s_1, s_2, ..., s_n$***, ... é qualquer enumeração dos elementos de T, então existe sempre um elemento s de T que não corresponde a nenhum*** s_n ***na enumeração.***

Use o método da diagonal de Cantor para dar uma prova construtiva desse teorema.

Considerações Finais

O capítulo 1 deste trabalho revisou os conceitos básicos de conjuntos que já são usualmente ensinados no primeiro ano do Ensino Médio de acordo com o currículo da Secretaria de Educação do Distrito Federal. Foram consideradas as operações básicas sobre conjuntos e as definições de relações e funções. O capítulo é introdutório, mas sua importância para o desenvolvimento dos conceitos básicos de lógica pois a linguagem desenvolvida nas operações com conjuntos é um ponto de partida para a compreensão dos conectivos lógicos apresentados no capítulo 2. Além disso, é estimulado o uso de diagramas, que será de grande valia na resolução de alguns tipos de problemas lógicos apresentados na lista de problemas.

O capítulo 2 apresenta a novidade que desejamos acrescentar no estudo dos conjuntos. A proposta é que o professor trabalhe em sala de aula o estudo das tabelas verdade de sentenças compostas, bem como os princípios de argumentação lógica, fazendo fazendo para isto emprego destas tabelas e da regra de inferência *Moduns ponens*. A maior parte dos problemas apresentados no capítulo 5 é referente à argumentação lógica. Desenvolver a compreensão do que é um argumento válido e distinguir validade do argumento de verdade das premissas é a meta a se atingir com alunos de Ensino Médio. A maioria dos problemas e exemplos apresentados é originada de de provas de concursos públicos exatamente para cargos que exigem esse nível de escolaridade. Entendo que este é um excelente campo de aplicação para os conceitos e a linguagem desenvolvida dentro da teoria dos conjuntos.

O objetivo dos capítulos 3 e 4 não foi, de forma alguma, sugerir que se trabalhe formalmente os conceitos nele desenvolvidos com alunos do Ensino Médio. O capítulo três é informativo ao professor que lê este texto, mostrando o significado dos axiomas geralmente empregados e o que eles têm de consequência na teoria, sem entretanto desenvolver os teoremas que decorrem desses axiomas. Um estudo mais detalhado foi deixado para o capítulo 4: a ideia que se pretende transmitir nesse capítulo é a noção de conjunto infinito exposta no Teorema 4.12. Isto porque essa ideia derruba historicamente a noção aplicada por Euclides em *Os Elementos* de que o "o todo é maior que a parte". Além disso, embora o conceito de funções sejam bem trabalhado no Ensino Médio para modelagem de situações - problema, me parece fazer falta o desenvolvimento da utilidade em Matemática pura das correspondências biunívocas como entes de comparação do "tamanho" de dois conjuntos infinitos. Tais aplicações levam a resultados que podem ser apreciados pelos alunos, mesmo que causando estranheza, como é o caso de um intervalo limitado possuir o mesmo "número de elementos" da reta real inteira. Além disso, estabelecer bijeções entre conjuntos infinitos, como solicitado nos problemas propostos do capítulo 5, exigem do aluno uma postura construtiva e mais ativa do que a assumida simplesmente na análise de funções apesentadas prontas. Ressalta-se ainda a nova característica que esperamos seja percebida pelos discentes acerca da infinitude dos conjuntos numéricos: Na comparação do conjunto dos números naturais, inteiros e racionais com o conjunto dos irracionais e reais que, tem em comum o fato de serem infinito, mas com cardinais diferentes. Espera-se que essa nova característica enriqueça a forma como os alunos visualizam esses conjuntos, contribuindo para sua formação matemática.

Apêndice A

Soluções aos Problemas do Capítulo 5

O presente apêndice tem por objetivo apresentar sugestões de como responder os problemas propostos no capítulo 5. Boa parte destes problemas admite soluções ligeiramente diferentes das apresentadas aqui. O ideal é que cada leitor desenvolva suas próprias soluções e use as deste apêndice para comparar com as que obteve, construindo assim seu conhecimento. Para facilitar a leitura e compreensão das soluções os enunciados foram repetidos aqui.

1. A tabela 5.1 a seguir resume, para as sentenças P e Q, as principais sentenças compostas formadas fazendo uso dos conectivos lógicos. A tabela 5.2 associa a cada sentença composta da tabela 5.1 uma propriedade exclusiva deste tipo de sentença. Complete essas tabelas.

P	**Q**	$\neg$ **P**	**P** $\wedge$ **Q**	**P** $\vee$ **Q**	**P** $\veebar$ **Q**	**P** $\rightarrow$ **Q**	**P** $\leftrightarrow$ **Q**
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	F	F	V	V

Sentença	É verdadeira se...	É falsa se...
$\neg$ P	P é falso.	P é verdadeiro.
P $\wedge$ Q	Ambos, P e Q, são verdadeiros.	Um dos dois, ou ambos, for falso.
P $\vee$ Q	P ou Q (ou ambos) é verdade.	Ambos, P e Q, são falsos.
P $\veebar$ Q	P e Q têm valores lógicos diferentes.	P e Q têm valores lógicos iguais.
P $\to$ Q	P e Q verdadeiros ou P é falso.	P é verdade e Q é falso.
P $\leftrightarrow$ Q	P e Q tem valores lógicos iguais.	P e Q tem valores lógicos distintos.

2. Usando os conectivos lógicos e as letras P, Q, R, etc. para representar sentenças simples (isto é, sentenças que não contem conectivos lógicos), traduza as sentenças compostas a seguir para a linguagem simbólica.

   (a) Amanhã irá chover ou fazer sol:
   $\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}$

   (b) Se Joana é economista, então ela não entende de contas públicas:
   $\mathbf{P} \longrightarrow \neg\, \mathbf{Q}$

   (c) Devo ir ao trabalho de ônibus ou de táxi.
   $\mathbf{P} \veebar \mathbf{Q}$

   (d) Se eu fosse o presidente eu seria famoso.
   $\mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{Q}$

   (e) Se estou cansado ou com fome, então não posso estudar.
   $\mathbf{P} \vee \mathbf{Q} \longrightarrow \neg\, \mathbf{R}$

   (f) Se João acorda cedo e não enfrenta trânsito, então ele chega feliz ao trabalho; e se não acorda cedo e pega trânsito, ele não chega feliz ao trabalho.
   $\mathbf{P} \wedge \neg\, \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{R}$
   $\neg\, \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q} \longrightarrow \neg\, \mathbf{R}$

3.

(a) O que podemos dizer da sentença $\neg\, \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{P} \vee \mathbf{Q}$ se soubermos que $\mathbf{P} \to \mathbf{Q}$ é verdadeira?

Sendo $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$ verdadeira, elimina-se a possibilidade de ser P verdadeira e Q falsa. Ainda sim é possível que a bicondicional seja falsa (quando P e Q são ambas verdadeiras) ou verdadeira (quando P é falsa qualquer que seja o valor lógico de Q).

(b) O que podemos dizer da sentença $\neg\, \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{P} \vee \mathbf{Q}$ se soubermos que $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$ é falsa?

Se $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$ é falsa então P é verdadeira e Q é falsa. A bicondicional será, portanto, falsa.

(c) Suponha que o valor lógico de $\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}$ é verdade. O que se pode dizer sobre o valor lógico das sentenças $\mathbf{P} \leftrightarrow \neg\, \mathbf{Q}$ e $\neg\, \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}$?

Se $\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}$ é verdadeira, então os valores lógicos de P e Q são iguais. Assim, os valores lógicos de P e $\neg$ Q (e de $\neg$ P e Q) são distintos, de onde conclui-se que $\mathbf{P} \leftrightarrow \neg\, \mathbf{Q}$ e $\neg\, \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}$ são falsas.

(d) Suponha que o valor lógico de $\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}$ é falso. O que se pode dizer sobre o valor lógico das sentenças $\mathbf{P} \leftrightarrow \neg\, \mathbf{Q}$ e $\neg\, \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}$?

Se $\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}$ é falsa, então os valores lógicos de P e Q são diferentes. Assim, os valores lógicos de P e $\neg$ Q (e de $\neg$ P e Q) são iguais, de onde conclui-se que $\mathbf{P} \leftrightarrow \neg\, \mathbf{Q}$ e $\neg\, \mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}$ são verdadeiras.

4. Sejam as sentenças da tabela 5.3 a seguir, com seus respectivos valores lógicos. Transcreva para linguagem comum e diga qual o valor lógico das sentenças compostas seguintes.

Símbolo	**Sentença**	**Valor Lógico**
A	O ano tem 9 meses.	F
B	O Brasil fica na América do Sul.	V
C	Cantor Criou a Teoria dos Conjuntos.	V
D	Dedekind escreveu Os Lusíadas.	F
E	Euclides foi o autor de Os Elementos.	V

(a) $A \to \neg(B \wedge C)$.

Verdadeiro.

(b) $D \leftrightarrow (E \to B)$.

Falso.

(c) $B \wedge (C \vee D)$.

Verdadeiro.

(d) $(D \to A) \vee E$.

Verdadeiro.

(e) $C \leftrightarrow (D \wedge \neg E) \vee B$.

Verdadeiro.

(f) $(B \leftrightarrow C) \wedge (\neg E \veebar D)$

Falso.

5.

(a) Verificar por tabela verdade a validade do argumento $\mathbf{P \to \neg Q, \neg P \vdash Q}$.

Para avaliar o argumento, as premissas $\mathbf{P \to \neg Q}$ e $\mathbf{\neg P}$ devem ser verdadeiras. Para que $\mathbf{\neg P}$ seja verdadeira, obrigatoriamente P deve ser falsa. Sedo P falsa, o condicional $\mathbf{P \to \neg Q}$ será verdadeiro para qualquer valor lógico de Q. Para concluir a invalidade do argumento, basta considerar que Q (conclusão) é falsa. Já que a verdade das premissas é incompatível com a falsidade da conclusão, o argumento é inválido.

(b) A partir do item anterior, avalie o argumento:

Se 7 é menor do que 4, então 7 não é primo.

7 não é menor do que 4.

Logo, 7 é primo.

Considere as sentenças:

P : 7 é menor do que 4.
Q : 7 é primo.

Com essa tradução, o argumento é exatamente o mesmo do item anterior, sendo, portanto, inválido.

6. Testar a validade dos argumentos:

(a) $P \vee Q, \neg Q, P \to R \vdash R$.

Deve ser verificado se quando as premissas sendo verdadeiras a conclusão também o é. Considerando $\neg$ Q verdadeira, tem-se que Q é falsa. Se Q é falsa e $P \vee Q$ é verdadeira, P deve ser verdadeira. Sendo $P \to R$ verdadeira e já que P também é verdadeira, R deve ser verdadeira. A conclusão é então consequência das premissas e o argumento é válido.

(b) $\neg P \to Q, P \vdash \neg Q$.

Sendo verdadeiras as premissas, P é verdadeira por ser uma premissa. Portanto, $\neg$ P é falsa, de modo que $\neg P \to Q$ é verdadeira independente do valor lógico de Q. Se considerarmos que Q é verdadeira, a conclusão $\neg$ Q será falsa, o que torna o argumento inválido.

7. É conveniente não confundir a validade de um argumento com a verdade das premissas que o compõem. Para isto, observe o argumento a seguir, formado por sentenças verdadeiras:

Se eu fosse presidente, seria famoso.
Eu não sou presidente.
Então não sou famoso.

Pode-se avaliar a validade do argumento por meio de um contraexemplo. No argumento apresentado substitua "eu" por "Tiradentes". A seguir, responda:

(a) O argumento é válido para o caso obtido? Por que?

Não, já que Tiradentes é famoso, embora não tenha sido presidente.

(b) Um argumento formado apenas por sentenças verdadeiras será válido sempre?

Nem sempre, como mostra o contraexemplo do item anterior.

(c) Sob quais condições um argumento estabelece a verdade da conclusão?

É necessário que a condicional associada ao argumento (onde o antecedente é a conjunção das premissas e o consequente é a conclusão) seja tautológica, o que não acontece para este argumento.

8. Observe o argumento, a seguir faça o que se pede:

Todo triângulo é um pentágono. Logo, algum pentágono é triângulo.

(a) Identifique premissas e conclusão no argumento anterior. Diga qual o valor lógico dessas sentenças.

Premissa: Todo triângulo é um pentágono.
Conclusão: Algum pentágono é triângulo.
Da geometria plana sabe-se que a premissa e a conclusão são falsas.

(b) Transcreva o argumento anterior para a linguagem da lógica simbólica.

Seja T o conjunto contendo todos os triângulos e P o conjunto contendo todos os pentágonos. A afirmação do argumento se traduz então como:

$$(\forall\ \mathbf{x})(\mathbf{x} \in \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{P})$$

(c) Um argumento formado por sentenças falsas pode ser válido?

Embora formado por sentenças falsas, o argumento anterior é válido. Isso porque já que dados os dois conjuntos T e P para os quais $\mathbf{T} \subset \mathbf{P}$, então qualquer $x \in \mathbf{T} \cap \mathbf{P}$ é simultaneamente triângulo e pentágono.

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Se um homem é careca, ele é infeliz.}\\ \text{Se um homem é infeliz, ele morre jovem.}\end{array}}{\text{Logo, carecas morrem jovens.}}$$

9. Escreva o argumento a seguir na forma de linguagem simbólica e demonstre sua validade fazendo uso de regras de inferência.

   Sejam as sentenças:

   P : O homem é careca.
   Q : O homem é infeliz.
   R : O homem morre jovem.

   O dargumento pode ser traduzido pela condicional associada:

   $$\mathbf{(P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow R) \longrightarrow (P \longrightarrow R).}$$

   Esse argumento válido é a regra de inferência denominada silogismo hipotético, cuja validade pode ser confirmada fazendo a construção da tabela verdade (com 8 linhas) e verificando que é uma tautologia.

10. Use as regras *Moduns ponens* e *Moduns tollens* para deduzir as conclusões a partir do conjunto de premissas de cada argumento a seguir.

(a) .

$$\frac{\begin{array}{c}P \rightarrow Q\\ \neg\, P \rightarrow R\\ \neg\, Q\end{array}}{R}$$

1. $\mathbf{\neg\, Q \wedge (P \rightarrow Q) \Longrightarrow \neg\, P.}$ **(MT)**

2. $\neg\, \mathbf{P} \wedge (\neg\, \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{R}) \Longrightarrow \mathbf{R}$ **(MP)**

(b) .

$$\begin{array}{c} P \to \neg\, Q \\ \neg\neg\, Q \\ \neg\, P \to R \wedge S \\ \hline R \wedge S \end{array}$$

1. $\neg\neg\, \mathbf{Q} \Longrightarrow \mathbf{Q}$**.**

2. $\mathbf{Q} \wedge (\mathbf{P} \to \neg\, \mathbf{Q}) \Longrightarrow \neg\, \mathbf{P}$ **(MT)**

3. $\neg\, \mathbf{P} \wedge (\neg\, \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{R} \wedge \mathbf{S}) \Longrightarrow \mathbf{R} \wedge \mathbf{S}$ **(MP)**

11. (Esaf/2003 - Adaptado) André é inocente ou Beto é inocente. Se Beto é inocente, então Caio é culpado. Caio é inocente se e somente se Denis é culpado. Denis é culpado. O que podemos concluir quanto à culpabilidade de André, Beto, Caio e Denis?

    Sejam as sentenças:

    A : André é inocente;
    B : Beto é inocente;
    C : Caio é inocente;
    D : Denis inocente;

    As afirmações (premissas) são:

1. $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$

2. $\mathbf{B} \longrightarrow \neg\, \mathbf{C}$

3 $\mathbf{C} \longleftrightarrow \neg\, \mathbf{D}$

4. $\neg$ **D**

Já que $\neg$ D é verdadeira, C também o é pela premissa 3. C é verdadeira, então $\neg$ C é falsa e, pela premissa 2 junto com a regra *Moduns tollens* concluímos que $\neg$ B é verdadeira. Como $\neg$ B é verdadeira tem-se B falsa. Da premissa 1 conclui-se que sendo B falsa, A deve ser verdadeira. Logo André e Caio são inocentes e Beto e Denis são culpados.

12. (FCC/2005) Um argumento é composto pelas seguintes premissas:

(I) Se as metas de inflação não são reais, então a crise econômica não demorará a ser superada.

(II) Se as metas de inflação são reais, então os superávits primários não serão fantasiosos.

(III) Os superávits serão fantasiosos.

Para que o argumento seja válido, a conclusão deve ser:

(a) a crise econômica não demorará a ser superada.

(b) as metas de inflação são irreais ou os superávits são fantasiosos.

(c) as metas de inflação são irreais e os superávits são fantasiosos.

(d) os superávits econômicos serão fantasiosos.

(e) as metas de inflação não são irreais e a crise econômica não demorará a ser superada.

Sejam as sentenças:

I : As metas de inflação são reais;
C : A crise econômica demorará a ser superada.
S : Os superávits serão fantasiosos.

As premissas são traduzidas como:

1. $\neg$ **I** $\longrightarrow$ $\neg$ **C.**

2. $\mathbf{I} \longrightarrow \neg\, \mathbf{S}$.

3. **S**.

   Da verdade da premissa 3 conclui-se que ¬ S é falsa. Da premissa 2 e aplicando a regra *Moduns tollens* conclui-se que I é falsa. Se I é falsa, ¬ I é verdadeira. Já que a premissa 1 é verdadeira, deve ser verdadeira também a sentença ¬ C. Logo, C é falsa. A alternativa correta é portanto a A.

13. As seguintes afirmações, todas elas verdadeiras, foram feitas sobre a ordem de chegada dos participantes de uma prova de ciclismo:

(1) Guto chegou antes de Aires e depois de Dada;

(2) Guto chegou antes de Juba e Juba chegou antes de Aires, se e somente se Aires chegou depois de Dada;

(3) Cacau não chegou junto com Juba, se e somente se Aires chegou junto com Guto.

Logo:

(a) Cacau chegou antes de Aires, depois de Dada e junto co Juba.

(b) Guto chegou antes de Cacau, depois de Dada e junto com Aires;

(c) Aires chegou antes de Dada, depois de Juba e antes de Guto.

(d) Aires chegou depois de Juba, depois de Cacau e junto com Dada;

(e) Juba chegou antes de Dada, depois de Guto e junto com Cacau.

A primeira premissa estabelece que Dada chegou antes de Guto, que por sua vez chegou antes de Aires. Essa afirmação é suficiente para garantir a falsidade do consequente da terceira premissa. Da verdade da terceira premissa, concluímos então que Cacau e Juba chegaram juntos, pois o bicondicional é verdadeiro somente se antecedente e consequente têm mesmo valor lógico. Analogamente,sendo a premissa 2 verdadeira e tendo Aires chegado depois de Dada, conclui-se que Juba chegou entre Aires e Guto. Ordenando os competidores numa reta, encontra-se a seguinte classificação, que satisfaz às três premissas:

1º Dada;

2º Guto;

3º Cacau e Juba;

4º Aires;
Alternativa correta: A.

14. (ESAF/2004) Se a professora de Matemática foi à reunião, nem a professora de inglês nem a professora de Francês deram aula. Se a professora de Francês não deu aula, a professora de português foi à reunião. Se a professora de Português foi à reunião, todos os problemas foram resolvidos. Ora, pelo menos um problema não foi resolvido. Logo:

(a) a professora de Matemática não foi à reunião e a professora de Francês não deu aula;

(b) a professora de Matemática e a professora de Português não foram à reunião;

(c) a professora de Francês não deu aula e a professora de português não foi à reunião;

(d) a professora de Francês não deu aula ou a professora de Português foi à reunião;

(e) a professora de Inglês e a professora de Francês não deram aula;

Sejam as sentenças:

M : A professora de Matemática foi à reunião.
I : A professora de Inglês deu aula.
F : A professora de Francês deu aula.
P : A professora de Português foi a reunião.
T : Todos os problemas foram resolvidos.

As premissas são traduzidas da seguinte forma:

1. $\mathbf{M \longrightarrow (\neg\, I \wedge \neg\, F)}$

2. $\mathbf{\neg\, F \longrightarrow P}$

3. $\mathbf{P \longrightarrow T}$

4. $\neg$ T

Considerando as premissas verdadeiras, de $\neg$ T e P $\longrightarrow$ T a regra *Moduns tollens* implica que $\neg$ P é verdadeira. Aplicando novamente a mesma inferência a $\neg$ P e $\neg$ F $\longrightarrow$ P conclui-se que F é verdadeira. Assim $\neg$ F é falsa, de modo que $\neg$ I $\wedge$ $\neg$ F é falsa independente do valor lógico de I. Para que M $\longrightarrow$ ($\neg$ I $\wedge$ $\neg$ F seja verdadeira, M deve ser falsa. Assim:

A professora de Matemática não foi à reunião.
A professora de Francês deu aula.
A professora de Português não foi à reunião.
Algum problema não foi resolvidos.

Alternativa correta: B.

15. Considere as premissas:

(P1) Os bebês são ilógicos;

(P2) Pessoas ilógicas são desprezadas;

(P3) Quem sabe amestrar um crocodilo não é desprezado.

Assinale a única alternativa que não é uma consequência lógica das três premissas apresentadas:

(a) Bebês não sabem amestrar crocodilos.

(b) Pessoas desprezadas são ilógicas.

(c) Pessoas desprezadas não sabem amestrar crocodilos.

(d) Pessoas ilógicas não sabem amestrar crocodilos.

(e) Bebês são desprezados.

Definindo os conjuntos:

B : Conjunto de todos os bebês;
I : Conjunto de todos os ilógicos;
D : Conjunto dos desprezados;

A : Conjunto de todos os amestradores de crocodilos;

As premissas P1 e P2 asseguram que $\mathbf{B \subset I \subset D}$. A premissa 3 garante que $\mathbf{A \cap D = \emptyset}$.

Traçando-se os diagramas de Venn dos conjuntos conclui-se que nem todas as pessoas desprezadas são ilógica, sendo a alternativa B a única que não decorre das premissas apresentadas.

16. (FCC/2004) Observe a construção de um argumento:

Premissa 1: Todos os cachorros têm asas.

Premissa 2: Todos os animais de asas são aquáticos.

Premissa 3: Existem gatos que são cachorros.

Conclusão: Existem gatos que são aquáticos.

Sobre o argumento A, as premissas P e a conclusão C, é correto dizer que:

(a) A não é válido, P é falso e C é verdadeiro.

(b) A não é válido, P e C são falsos.

(c) A é válido, P e C são falsos.

(d) A não é válido, P ou C são verdadeiros.

(e) A não é válido, P é verdadeiro e C é falso.

Sejam os conjuntos:

C : Conjunto dos cachorros;
A : Conjunto dos animais que têm asas;
Q : Conjunto dos animais aquáticos;

As premissas 1 e 2 garantem que $\mathbf{C \subset A \subset Q}$. A premissa 3 garante que algum gato é cachorro. As inclusões asseguram que tal gato tem asas e, por isso, é aquático. Assim, existe algum gato que é aquático. O

argumento é válido, embora formado por premissas e conclusão falsas. Logo a alternativa correta é a C.

17. Avalie as situações do ponto de vista lógico.

(a) Se Zeus, o deus mais poderoso de toda a Mitologia Grega é capaz de qualquer coisa, ele pode criar uma pedra tão pesada que não possa levantar?

Se assumirmos que Zeus não pode criar tal pedra, então ele não é capaz tudo como suposto. Por outro lado, admitindo que Zeus pode criar tal pedra, ele não poderia levantar tal pedra. Qualquer que seja a condição assumida, contradiz a afirmação de que Zeus é capaz de qualquer coisa.

(b) Um jacaré mantém uma criança em sua boca e diz ao pai da criança que irá soltá-la caso ele adivinhe se irá comê-la ou não. Se o pai não adivinhar o que vai ocorrer, o jacaré irá devorá-la. Que afirmação o pai poderá fazer para obter a criança de volta?

Ele deve afirmar qe o Jacaré irá devorar sua filha. Essa sentença será indecidível para o jacaré obedecendo as condições impostas.

18. O Hotel de Georg Cantor possui infinitos quartos, numerados consecutivamente, pelos números naturais 1, 2 3, ... Num final de semana o hotel estava completamento lotado.

(a) O que poderia ser feito para abrigar um recém chegado viajante?

Bastaria realocar cada hóspede no quarto de numeração sucessiva à numeração do quarto atual, de forma a deixar vago o quarto número 1. Isso equivale a definir uma função f: $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ - $\{1\}$ com $n \mapsto n + 1$.

(b) Seria possível abrigar um número infinito (enumerável) de hospedes? De que forma?

Sim. Definindo a função que leva o cada hóspede para o quarto de numeração igual ao dobro da numeração atual, ficariam vagos os quartos de numeração ímpar. Esses quartos seriam suficientes para abrigar uma quantidade infinita enumerável de hóspedes.

19.

(a) Confirme ou refute a seguinte afirmação:

"A quantidade de elementos de uma parte de um conjunto é menor que a quantidade de elementos do todo."

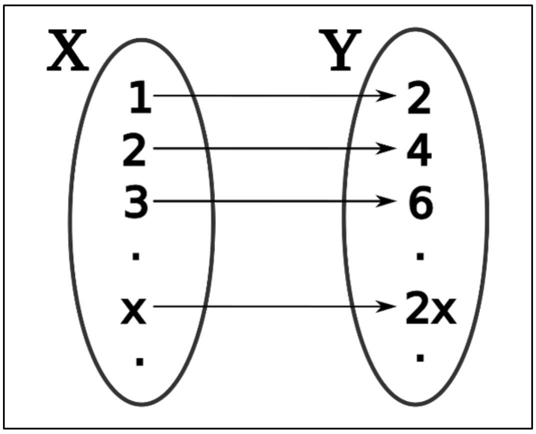

Figura A.1: Bijeção entre $\mathbb{N}$ e um subconjunto próprio.

A afirmação é falsa: O conjunto dos números naturais pares é um subconjunto próprio do conjunto dos naturais e ambos possuem mesma cardinalidade, conforme pode ser ilustrado pelo diagrama da figura 5.1.

(b) Estabeleça duas bijeções entre os intervalos [-1, 1] e [-2, 2]: uma crescente e outra decrescente.

Usando o método do exemplo 4.26 é pode-se obter por exemplo as funções *g(x)* = *2x* e *h(x)* = - *2x*.

(c) Apresente uma enumeração para o produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Uma enumeração é uma sequencia na qual todos s elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ aparecem e tem seu lugar bem definido. A figura 5.2 mostra uma possibilidade para sequenciar os elementos desse conjunto. Os pequenos círculos representam os pares ordenados que queremos enumerar. As flechas indicam o sentido que devemos percorrer para passar pelo primeiro, segundo, terceiro, etc. par ordenado.

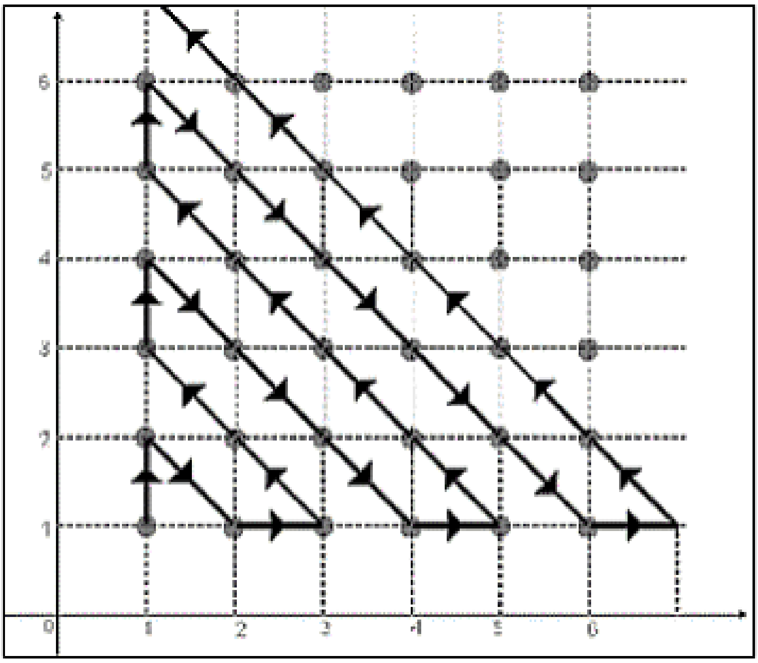

Figura A.2: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

20. Em seu artigo de 1891, Cantor considerou o conjunto T de todas as sequências infinitas de dígitos binários (isto é, consistindo apenas de zeros e uns):

    Se $s_1, s_2, ..., s_n$, ... é qualquer enumeração dos elementos de T, então existe sempre um elemento s de T que não corresponde a nenhum s_n na enumeração.

    Use o método da diagonal de Cantor para provar esse teorema.

    A prova é construtiva porque dada qualquer lista enumerável de zeros e uns, exibiremos com auxílio da figura 5.3 uma sequência que não está nessa lista. Considere que na figura a seguir os círculos pretos representam o número 1 e os brancos o número 0. A primeira sequencia, s_1, é 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, ... Para construir uma sequência que não está na lista apresentada, basta escolher para cada sequência s_n da lista o número (0 ou 1) que difere do seu n-ésimo termo. Assim, para a lista da figura a sequência que obteríamos seguindo esse raciocínio seria 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1,... que difere de s_1 no primeiro elemento, de s_2 no

segundo elemento, de s_3 no terceiro e assim por diante. Tal sequência difere de todas as sequências contidas na lista devida à forma que foi construída. Esse raciocínio pode ser repetido para qualquer lista enumerável fornecida, de modo que nenhuma lista enumerável é suficiente para cobrir todas as sequências.

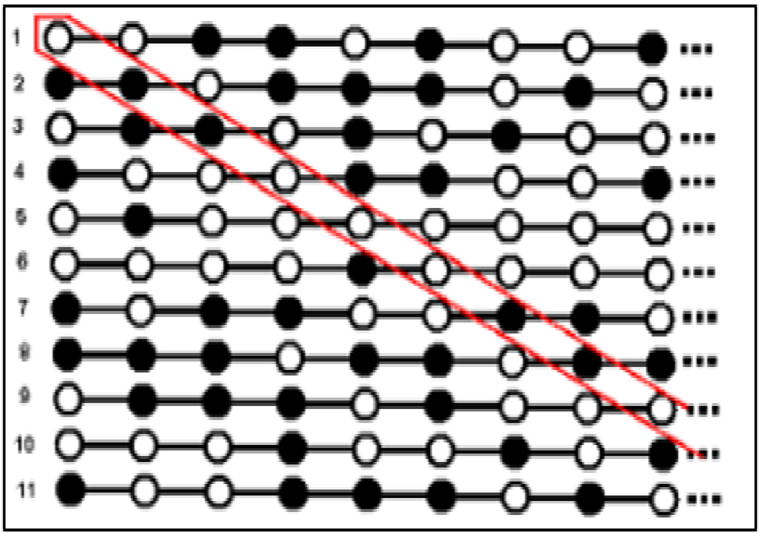

Figura A.3: Argumento da diagonal de Cantor.

Referências Bibliográficas

[1] ALENCAR FILHO, Edgard de, *Iniciação à Lógica Matemática.*, São Paulo, Nobel (2002).

[2] ÁVILA, Geraldo S., *A Várias Faces da Matemática*, São Paulo, Editora Blucher (2007).

[3] BRASIL, *Constituição da República Federativa do Brasil.* Brasília, Senado Federal: Centro Gráfico, 1988. 292 p.

[4] CARVALHO, Sergio., *Raciocínio Lógico Simplificado, v.1.*, Rio de Janeiro, Elsevier (2010).

[5] DESKINS, W. E., *Abstract Algebra, Dover ed.*, New York, Macmillan (1964).

[6] *DICIONÁRIO Michaelis. Disponível em: <www.uol.com.br/michaelis>. Acesso em: 1 maio 2015.*

[7] FERREIRA, Jamil., *A Construção dos Números, 2ª ed.*, Rio de Janeiro, SBM (2011).

[8] FILHO, Daniel C. M., *Convite à Matemática*, Rio de Janeiro, SBM (2012).

[9] GARCIA, Arnaldo e LEQUAIN, Yves., *Elementos de Álgebra*, Rio de Janeiro, IMPA, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (2003), Projeto Euclides.

[10] GREENBERG, Marvin J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Development and History*, New York, W. H. Freeman and Company (2008).

[11] HAASER, Norman B., SULLIVAN, Joseph A., *Mathematical Analysis. Dover ed.*, New York, Van Nostrand Reinhold Co. (1971).

[12] HALMOS, Paul R., *Teoria Ingênua dos Conjuntos*, Rio de Janeiro, Editora Ciência Moderna (2001).

[13] LIMA, Elon Lages, *Análise Real, v.1, 7ª ed.*, Rio de Janeiro, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (2004), Coleção Matemática Universitária.

[14] LIMA, Elon Lages, *Curso de Análise, v.1, 12ª ed.*, Rio de Janeiro, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (2008), Projeto Euclides.

[15] *MINISTÈRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias, 2006. 135 p. (Orientações curriculares para o ensino médio ; v.2)*

[16] *MINISTÈRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. Parâmetros curriculares nacionais: matemática. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental: Brasília (DF), 1997 v.3*

[17] *O'CONNOR, J. J. e ROBERTSON E. F. MacTutor History of Mathematics. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/>. Acesso em: 1 maio 2015.*

[18] *PORTAL DO PROFESSOR, Os Infinitos de Cantor. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=37042>. Acesso em: 1 maio 2015.*

[19] ROQUE, Tatiana, *História da Matemática - Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas, 1ª ed.*, Rio de Janeiro, Editora Jorge Zahar (2012).

[20] SANT'ANNA, Adonai S., *O que é um Axioma*, Barueri- SP, Editora Manole, (2003).

[21] SIMMONS, Keith., *Universality and the Liar: An Essay on Truth and the Diagonal Argument*, Notre Dame Journal of Formal Logic, Cambridge University Press, 30 de julho de 1993.

[22] SPRENCHER, David A., *Elements of Real Analysis. Dover ed.*, New York, Academic Press (1970).

[23] STOLL, Robert R., *Set theory and logic*, New York, Dover Publications (1979).

[24] STUART, Ian, *Concepts of Modern Mathematics.*, England, Penguin Books (1975).

[25] SUPPES, Patrick, *Axiomatic Set Theory*, Canada, General Publishing Company, (1960).

[26] SUPPES, Patrick, *Introduction to a logic*, New York, Litton Educational Publishing, Inc.(1957).

[27] WALLE, John A. V., *Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula*, Porto Alegre, Editora Artmed, (2009).