

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Um estudo de escala da dinâmica de estados homogêneos
do sistema gravitacional unidimensional**

Lydiane Ferreira de Souza
Orientador: Prof. Dr. Marco A. Amato

Brasília
30 de Março de 2015

A memória de Rita Ferreira de Souza (mãe) e Vitorbo Bráulio de Souza (vovô)

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por iluminar meus passos e me dar força para superar os momentos de dificuldades que vivi nestes dois anos.

Ao professor Amato, pela confiança e pelo apoio que o senhor me deu, sempre me motivando, dando bons conselhos e me ajudando com minhas dúvidas infinitas.

Ao meu pai Nélio, pelo carinho e amor incondicional. Eu só consegui chegar até aqui porque você estava ao meu lado o tempo todo. A minha mãe Rita, que sempre foi um exemplo de mulher e mãe. E mesmo não estando mais presente em vida, foi uma fonte de inspiração para mim.

As minhas irmãs Luryane e Yanara, que são minhas melhores amigas e companheiras de viagens, pelo apoio e amizade.

Ao Rodrigo, o meu amigo e namorado, por estar ao meu lado me motivando, incentivando e torcendo por mim. Obrigada por tudo, você foi o melhor presente que ganhei neste mestrado.

Aos amigos da UnB (Arthur, Akira, Igor, José, Neymar, Moisés, Jucélia,...) e aos amigos da vida (Amparo, Avani, André, Bruna, Júlia, Tatiane, Letícia,...) por fazerem parte da minha vida.

Aos familiares, tio Clézio e Cleonice e primos (Railma, Rubs, Jucélia, Jocira, Josilânia e Josiene) , em especial ao Ranivar e a Dayane, por estarem sempre presente, vocês fazem a diferença na minha vida.

A todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Estados quase estacionários de sistemas com interações de longo alcance têm sido estudados nos últimos quinze anos. Um potencial de interações em pares é dito ser de longo alcance se decai em longas distâncias como $r^{-\alpha}$ com $\alpha \leq d$ e d é a dimensão espacial. Equações cinéticas para sistemas interagentes de longo alcance usualmente podem ser obtidas da hierarquia BBKGY [17] levando em consideração a contribuição da função de correlação de dois corpos, a qual é da ordem $1/N$ [3] e resulta em uma escala de tempo de relaxação colisional proporcional a N . A equação de Balescu-Lenard para um sistema homogêneo unidimensional anula-se devido à função delta de Dirac, portanto termos de alta ordem devem ser mantidos quando a hierarquia for truncada, assim, levando a um escalonamento diferente da evolução temporal do estado homogêneo. Deve ser natural esperar que no presente caso as correções colisionais predominantes para a equação cinética vêm de termos de alta ordem proporcionais a $1/N^2$, sugerindo uma escala de relaxação proporcional a N^2 . Em um trabalho prévio [9] mostra-se que para os modelos HMF e Ring Model a relaxação é ao quadrado do número de partículas e confirmado por cálculos computacionais. Neste trabalho propomos a extensão dos cálculos teóricos de [9] para sistemas gravitacionais 1D para encontrar a equação cinética destes sistemas.

Abstract

Quasi-Stationary States of long-range interacting systems have been studied at length over the last fifteen years. A pair interaction potential is said to be long ranged if it decays at long distances as $r^{-\alpha}$ with $\alpha \leq d$ where d is the spatial dimension. Kinetic equations for long-range interacting systems usually can be obtained from the BBGKY hierarchy [17] by taking into account contributions from the two-body correlation functions, which are of order $1/N$ [3] that result in a time scale of collisional relaxation proportional to N . The Balescu-Lenard equation for a one-dimensional homogeneous system vanishes identically due to the Dirac delta function. Therefore higher order terms must be kept when truncating the hierarchy, leading to a different scaling of the time evolution of a homogeneous state. It would be natural to expect that in the present case the predominant collisional corrections to the kinetic equation come from higher order terms proportional to $1/N^2$, this implies a relaxation scaling proportional to N^2 . In a previous report [9] it is shown that the scaling from theoretical considerations for the HMF and Ring Model is proportional to the square of the number of particles and have also, in the former case, confirmed by computational calculations. In this report we propose an extension of the theoretical calculations given in [9] for a 1D gravitational system in order to provide a kinetic equation for such systems.

Sumário

Introdução	2
I Hierarquia BBKGY	4
1.1 Equação de Lagrange	4
1.2 Equação de Hamilton	7
1.3 Transformações Canônicas	8
1.4 Equação de Liouville	10
1.5 Hierarquia BBKGY	12
1.6 Análise de Prigogine	16
II Equações cinéticas	36
2.1 Função Correlação	36
2.2 Equação de Vlasov	39
2.3 Equação de Landau	43
2.4 Equação de Boltzmann	51
2.5 Equação de Lenard-Balescu	56
III Resultados	70
3.1 HMF	70
3.2 Equações cinéticas para o HMF	72
3.3 Sistema gravitacional 1D	84
3.4 Equações cinéticas para o sistema gravitacional 1D	88
3.5 Conclusão e perspectiva	92
Bibliografia	93

Lista de Figuras

0.0.1	Evolução temporal da magnetização para o HMF.	3
1.4.1	Movimento do volume no espaço bidimensional.	10
1.5.2	Termos do somatório 1.5.21.	14
1.5.3	Vértices X e Y.	15
1.5.4	Diagrama de evolução de $f_1(x_1)$	15
1.5.5	Diagrama de evolução de $f_2(x_1, x_2)$	16
1.5.6	Diagrama de evolução de $f_3(x_1, x_2, x_3)$	16
1.6.7	Função distribuição reduzida $f_s(N)$ no limite termodinâmico.	18
1.6.8	Vetores \mathbf{i}_x , \mathbf{i}_y e \mathbf{i}_z	18
1.6.9	Diagrama de $\rho_{\mathbf{k}'_a \mathbf{k}'_m \mathbf{k}'_a \mathbf{k}'_b}^3(\alpha, m, a, b \dots, t)$	34
1.6.10	Possíveis tipos de diagramas de uma interação.	34
1.6.11	Possíveis tipos de diagramas para 1° interação.	34
1.6.12	Possíveis diagramas para a 2° interação.	35
1.6.13	Diagramas para $\rho_{\mathbf{k}}^2(t)$	35
1.6.14	Diagramas para $\rho_{\mathbf{k}}^2(t)$	35
2.1.1	Diagrama da $f(x_1)$ com a correlação.	37
2.1.2	Diagrama da $f_2(x_1, x_2)$ com a correlação.	38
2.1.3	Diagramas cancelados.	39
2.1.4	Diagramas da evolução de $g_2(x_1, x_2)$	39
2.2.5	Diagramas da evolução de $f(x_1)$ de ordem λ	42
2.2.6	Potencial para diferentes p.	43
2.3.7	Diagrama de evolução de $g_2(x_1, x_2, t)$ para ordem λ	44
2.3.8	Trajetória de uma partícula com velocidade \mathbf{V}	46
2.3.9	Figura extraída de [3]. Sistema de referência para o cálculo de $G(g)$	50
2.4.10	Trajetória de uma partícula colidindo com o centro de massa O.	52
2.4.11	Figura retirada de [3]. Esquema para contagem de partículas.	54
2.5.12	Esquema do plasma.	57
2.5.13	Diagrama da $f^\alpha(x_1, t)$ para plasma.	60
2.5.14	Diagrama da $g_2^{\alpha\beta}(x_1, x_2, t)$ para plasma.	60
3.1.1	Partículas no HMF.	70
3.2.2	Figura retirada de [10]. Tempo de relaxação em função do número de partículas N, para N grande.	83
3.3.3	Folhas no modelo gravitacional unidimensional.	84

Lista de Tabelas

I.1	Notação das componentes de Fourier.	20
-----	---	----

Lista de Símbolos

$f_s(x_1, \dots, x_s)$ função distribuição reduzida de s partículas

$\rho_{\mathbf{k}_j, \mathbf{k}_n, \dots}(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_n, \dots | \dots; 0)$ componente de Fourier cujos termos a esquerda da barra têm vetor de onda não-nulo, as demais velocidades são escritas a direita da barra pois não são relevantes

$\rho_{\{\mathbf{k}\}}^0(\dots | \dots; t)$ o primeiro termo da equação 1.6.54, para $n=0$, que representa a componente de Fourier da função distribuição para N partículas no instante t , tal que a velocidade das partículas com vetor de onda não-nulo estão a esquerda da barra e a velocidade das demais partículas estão a direita

$n_i(\mathbf{r})$ densidade de íons na posição \mathbf{r}

$n_e(\mathbf{r})$ densidade de elétrons na posição \mathbf{r}

$\tilde{g}_2^{\alpha\beta}$ componente de Fourier da correlação entre duas partículas, tal que, α e β são as espécies das partículas (elétrons ou íons)

g_i^j termo j da expansão da correlação g para i partículas

\tilde{g}_i^j componente de Fourier de g_i^j

$e^{-\varkappa|x-x'|}$ é uma função de triagem, tal que $\varkappa \rightarrow 0$

Capítulo

Introdução

Neste trabalho iremos estudar as equações cinéticas com interações de longo alcance.

Tais sistemas são caracterizados por potenciais decaindo com $r^{-\alpha}$, para $\alpha < d$ com d sendo a dimensão do espaço.

Para definir sistemas com interação de longo alcance, vamos considerar o potencial para uma dada partícula q situada no centro da esfera de raio R e volume V . Vamos omitir a interação da matéria situada a uma distância $\varepsilon \ll R$.

Se as partículas interagem via um potencial proporcional a $\frac{1}{r^\alpha}$, com r sendo a distância da origem onde está a partícula até um ponto qualquer no espaço, então

$$U = \int_{\varepsilon}^R 4\pi r^2 dr \frac{q}{V} \frac{1}{r^\alpha} = 4\pi\rho \int_{\varepsilon}^R r^{2-\alpha} dr \propto r^{3-\alpha} \Big|_{\varepsilon}^R,$$

com ρ a densidade da partícula.

Quando incrementamos o raio R , a contribuição devido a superfície da esfera $R^{3-\alpha}$, pode ser negligenciada quando $\alpha > 3$, mas diverge se $\alpha < 3$. Efeitos de superfície são importantes e portanto a aditividade não é cumprida. Um sistema é não aditivo se $E \neq E_1 + E_2 + \dots + E_n$, a soma das energias das partes é diferente da energia total. Se a energia da interface (superficial) não pode ser negligenciada então o sistema é não aditivo.

Se generalizamos para sistemas em d dimensões, facilmente mostramos que a energia vai ser não aditiva se a energia potencial $V(r)$ comporta-se como

$$V(r) \sim \frac{1}{r^\alpha},$$

com $\alpha < d$ a longas distâncias.

Além da não aditividade estes sistemas apresentam as seguintes características:

- Inequivalência de ensemble: em sistemas auto-gravitantes pontos tricríticos no ensemble canônico e microcanônico não coincidem;
- calor específico negativo: No ensemble canônico o valor médio da energia é

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{\sum_i E_i e^{-\beta E_i}}{Z},$$

com Z a função de partição e o calor específico é

$$c_v = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} \propto \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle > 0,$$

ou seja, o calor específico canônico é sempre positivo. Este não é o caso para sistemas com interações auto gravitantes. Usando o teorema do virial para tais partículas

$$2 \langle E_c \rangle + \langle E_{pot} \rangle = 0$$

$$E = \langle E_c \rangle + \langle E_{pot} \rangle = - \langle E_c \rangle$$

Como a energia cinética E_c é por definição proporcional à temperatura, temos que

$$c_v = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} \propto \frac{\partial E}{\partial \langle E_c \rangle} < 0.$$

Sistemas com potencial gravitacional ou coulombiano são exemplos de sistemas de longo alcance [8].

A dinâmica desses sistemas é descrita por três estágios, a partir de condições iniciais específicas:

1. Relaxação violenta: estágio inicial, neste estágio as partículas mudam sua energia significativamente em um curto espaço de tempo [11].
2. Estados quase estacionários (QSS): estes estados estão fora do equilíbrio e possuem um tempo de vida que aumenta com o número de partículas. Estes estados não são descritos pela estatística de Boltzmann[6].
3. Estado de equilíbrio.

A Fig 0.0.1 descreve esses três estágios para a magnetização em função do tempo para o HMF(Hamiltonian Mean Field) para diferentes números de partículas, o número de partículas aumenta da esquerda para a direita.

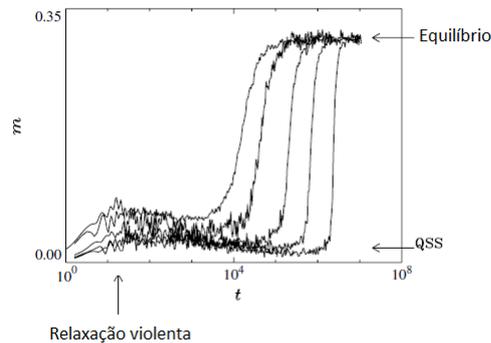


Figura 0.0.1: Evolução temporal da magnetização para o HMF.

No primeiro capítulo deste trabalho vamos fazer uma breve revisão da mecânica clássica, chegar na equação de Liouville, estudar um método desenvolvido por Prigogine para resolver esta equação usando série de Fourier e encontrar a hierarquia BBKGY.

No segundo capítulo introduzimos a idéia de correlação e obtemos as equações de Vlasov, Landau, Boltzmann e Lenard-Balescu. Veremos que para sistemas homogêneos unidimensionais a equação de Lenard-Balescu se anula [20]. No capítulo seguinte iremos encontrar equações que descrevem a dinâmica destes sistemas.

Capítulo I

Hierarquia BBKGY

Neste capítulo revisaremos alguns conceitos da mecânica clássica e usaremos os conceitos adquiridos para obter a equação de Liouville, que é a equação base para obtermos a hierarquia BBKGY.

1.1 Equação de Lagrange

Sabemos da 2ª lei de Newton que:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \dot{\mathbf{p}}.$$

Para um sistema de partículas, temos que:

$$\mathbf{F}_j = \sum_i \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_j^{(e)} = \dot{\mathbf{p}}_j = m_j \ddot{\mathbf{r}}_j,$$

ou seja, a força resultante na partícula j é devido à força externa $\mathbf{F}_j^{(e)}$ e as forças internas \mathbf{F}_{ij} que outras partículas exercem na partícula j . Mas nestas equações não podemos contabilizar os vínculos, que são restrições geométricas ou cinemática ao movimento. Quando este vínculo é holônomo podemos escrevê-lo em função das coordenadas, tal que:

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0.$$

Para um sistema de N partículas, temos $3N$ coordenadas independentes. Se existem k equações para os vínculos, então existem $(3N-k)$ coordenadas independentes $(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k})$, que são as coordenadas generalizadas deste sistema.

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \mathbf{r}_N &= \mathbf{r}_N(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t), \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

onde os vínculos estão inclusos implicitamente.

Vamos definir um deslocamento virtual $\delta\mathbf{r}_i$ como um deslocamento infinitesimal, que não viola os vínculos e ocorre em um instante t fixo. Já o deslocamento real $d\mathbf{r}$ ocorre no instante dt . Considerando a superfície, que restringe o movimento da partícula, lisa, temos que a força de contato entre a superfície e a partícula não tem componente tangencial. Logo,

$$\sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \quad (\text{trabalho virtual total das forças de vínculo})$$

onde \mathbf{f}_i é a força de vínculo. A força de vínculo preserva as restrições geométricas ou cinéticas.

Como vimos

$$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i \quad \longrightarrow \quad \mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = 0$$

Logo:

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i &= 0 \\ \sum_i (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i &= 0 \end{aligned}$$

sabendo que podemos escrever $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{f}_i$, onde $\mathbf{F}_i^{(a)}$ é a força aplicada na partícula i , temos que:

$$\begin{aligned} \sum_i \left(\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i \right) \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= 0 \\ \sum_i \left(\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i \right) \cdot \delta \mathbf{r}_i &= 0 \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

que é o **Princípio de D'Alembert**.

Na equação 1.1.1, temos $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$, onde n é o número de coordenadas independentes. Então:

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}. \quad (1.1.3)$$

Como o deslocamento virtual ocorre no mesmo instante de tempo, então:

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Então o trabalho virtual de \mathbf{F}_i é:

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{i,j} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_j Q_j \delta q_j, \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

com

$$Q_j \equiv \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

a força generalizada.

Temos que :

$$\begin{aligned} \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \\ &= \sum_{i,j} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} &= \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) &= \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t} \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \end{aligned}$$

Da equação 1.1.3, temos que:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}.$$

Logo:

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right].$$

Portanto:

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} \right) \right\} \delta q_j \quad (1.1.5)$$

Substituindo 1.1.4 e 1.1.5 em 1.1.2 e considerando $\sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}$ como a energia cinética do sistema (T), temos:

$$\sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_j \right\} \delta q_j = 0.$$

Os deslocamentos virtuais δq_j são independentes, logo os termos que multiplicam δq_j são nulos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_j = 0, \quad (1.1.6)$$

tendo n equações desta forma.

Para forças que derivam do potencial $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t)$:

$$\mathbf{F}_i = -\nabla V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t),$$

ou seja, não restringimos a sistemas conservativos, pois V depende explicitamente do tempo. Então:

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_i \nabla V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}.$$

Substituindo esta equação em 1.1.6, temos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_i} = 0.$$

Como V não depende das velocidades generalizadas,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (1.1.7)$$

onde $L = T - V$, é a lagrangiana. Esta é a **equação de Lagrange**.

A lagrangiana é uma função de q, \dot{q} e t. Podemos definir o momento conjugado a partir da lagrangiana, para tanto seja $L(q, \dot{q}, t)$, então:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\sum_j \frac{m_j \dot{q}_j^2}{2} \right) = m_i \dot{q}_i = p_i$$

Portanto o momento conjugado à coordenada q_i é [14]:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (1.1.8)$$

1.2 Equação de Hamilton

A equação de Lagrange gera n equações de segunda ordem que requer $2n$ condições iniciais para resolvê-la.

Já no formalismo hamiltoniano temos $2n$ equações de primeira ordem, tal que a dinâmica é descrita por $q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n$, onde p_i é o momento conjugado dado por 1.1.8. As variáveis (q, p) são conhecidas como variáveis canônicas. A mudança das variáveis (q, \dot{q}) para (q, p) é realizada através da transformada de Legendre, conforme descrito a seguir.

A diferencial de $L(q, \dot{q}, t)$ é escrita como:

$$dL = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Da equação de Lagrange 1.1.7, temos que:

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

Daí,

$$dL = \sum_{i=1}^n (\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i) + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (1.2.9)$$

A hamiltoniana $H(q, p, t)$ é a transformada de Legendre da lagrangiana, definida por,

$$H(q, p, t) = \sum_i^n \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t).$$

Diferenciando esta equação e usando 1.2.9, temos

$$\begin{aligned} dH(q, p, t) &= \sum_i^n (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - dL(q, \dot{q}, t) \\ &= \sum_i^n (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - \sum_{i=1}^n (\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_i^n (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$dH(q, p, t) = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt.$$

Comparando as duas equações acima, temos que:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

para $i=1, \dots, n$. Estas são as **equações de Hamilton**.

As variáveis (q, p) são chamadas de variáveis canônicas e o espaço de $2n$ dimensões é

chamado espaço de fase.

Podemos aplicar as equações de Hamilton para obter a equação de movimento para variáveis dinâmicas. Seja $u(q, p, t)$, então:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial u}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial u}{\partial t},\end{aligned}$$

definindo o parênteses de Poisson sendo $[A, B] = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right)$. Temos:

$$\frac{du}{dt} = [u, H] + \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (1.2.11)$$

1.3 Transformações Canônicas

Um sistema pode ser descrito por uma gama de coordenadas generalizadas. Ou seja, podemos escolher as variáveis que simplifiquem as equações de Hamilton.

Uma transformação canônica é uma mudança de variável que preserva as equações de Hamilton.

Inicialmente vamos introduzir o conceito do princípio de Hamilton para encontrar as transformações canônicas. O princípio de Hamilton diz que, dado um sistema descrito pela lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$ podemos definir a ação,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$$

tal que esta é mínima mantendo fixo os pontos inicial e final da trajetória.

Sabendo isto, estamos interessados em uma transformação inversível tal que:

$$\begin{aligned}Q_i &= Q_i(q, p, t) \\ P_i &= P_i(q, p, t)\end{aligned}$$

e a nova hamiltoniana $K(Q, P, t)$ que preserva a forma hamiltoniana,

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}.$$

Do princípio de Hamilton temos que:

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \\ &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right\} dt = 0\end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Podemos reescrever esta equação para as novas coordenadas,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t) \right\} dt = 0. \quad (1.3.13)$$

Para que 1.3.12 e 1.3.13 sejam satisfeitas simultaneamente:

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t) + \frac{d\phi(q, p, t)}{dt} \quad (1.3.14)$$

onde,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\phi}{dt} dt = \delta \phi(q(t_2), p(t_2), t_2) - \delta \phi(q(t_1), p(t_1), t_1) = 0$$

pois $\delta(q(t_2)) = \delta(q(t_1)) = 0 = \delta(p(t_2)) = \delta(p(t_1))$.

A existência de $K(Q, P, t)$ e $\phi(q, p, t)$ que satisfaz 1.3.14 garante que a transformação é canônica. De 1.3.14, têm se que:

$$\sum_i p_i dq_i - \sum_i P_i dQ_i - (H - K) dt = d\phi.$$

Ou seja ϕ é uma função de q , Q e t , logo:

$$F_1(q, Q, t) = \phi(q, p(q, Q, t), t),$$

tal que

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ P_i &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \\ K(Q, P, t) &= H(q, p, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \end{aligned}$$

A função $F_1(q, Q, t)$ é conhecida como função geradora da transformação. A transformação $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ é canônica por construção.

Podemos também construir uma função geradora que dependa de (q, P) ao invés de (q, Q) , vamos defini-la sendo:

$$\begin{aligned} F_2(q, P, t) &= \sum_i P_i Q_i + F_1 \\ &= \sum_i P_i Q_i(q, P, t) + \phi(q, p(q, P, t), t). \end{aligned}$$

Diferenciando esta equação, temos:

$$\begin{aligned} dF_2 &= \sum_i (P_i dQ_i + Q_i dP_i) + d\phi \\ &= \sum_i (p_i dq_i + Q_i dP_i) - (H - K) dt. \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \\ Q_i &= \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \\ K &= H(q, p, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \end{aligned}$$

É possível obter quatro tipos básicos de função geradora [12].

1.4 Equação de Liouville

Considere uma região R_0 no espaço de fase, como na figura 1.4.1. As coordenadas $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ representam as variáveis (\mathbf{q}, \mathbf{p}) , consideramos um vetor $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_{2n})$ tal que F_i representa o lado direito de 1.2.10, ou seja, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$. A região R_0 representa a configuração inicial do sistema, ou seja, vamos considerar $t=0$. Num instante t posterior um ponto \mathbf{x} se move para $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ em R_t . No espaço bidimensional (\mathbf{q}, \mathbf{p}) (podemos generalizar para qualquer dimensão) o volume é

$$V(t) = \int_{R_t} dX_1 dX_2 = \int_{R_0} J dx_1 dx_2,$$

tal que J é o jacobiano da transformação $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}.$$

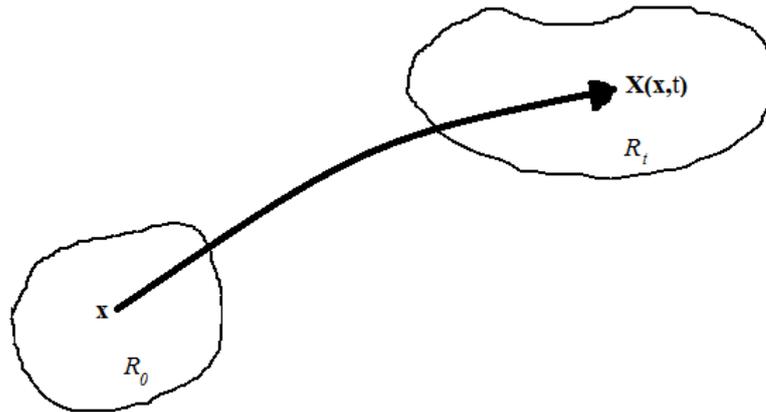


Figura 1.4.1: Movimento do volume no espaço bidimensional.

Para t pequeno, podemos aproximar \mathbf{X} por,

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{X}(\mathbf{x}, 0) + t \frac{d\mathbf{X}}{dt}(\mathbf{x}, 0) + O(t^2) \\ &= \mathbf{x} + t\mathbf{F}(\mathbf{x}, 0) + O(t^2) \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

considerando que $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$.

De 1.4.15, temos que:

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 + tF_1(\mathbf{x}, 0) + O(t^2) \\ X_2 &= x_2 + tF_2(\mathbf{x}, 0) + O(t^2). \end{aligned}$$

Substituindo a relação acima no jacobiano obtemos:

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \frac{\partial X_2}{\partial x_2} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \\ &= \left(1 + t \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right) \left(1 + t \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right) - t^2 \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \\ &= 1 + t \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right)_{t=0} + O(t^2) \\ &= 1 + t \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, 0) + O(t^2) \end{aligned}$$

Então o volume de R_t é

$$V(t) = \int_{R_0} (1 + t \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, 0)) dx_1 dx_2 + O(t^2).$$

Logo,

$$\left(\frac{dV(t)}{dt} \right)_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{V(t) - V(0)}{t} \right) = \int_{R_0} \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, 0) dx_1 dx_2.$$

Podemos aplicar esta equação para qualquer t , tal que:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int_{R_t} \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) dx_1 dx_2.$$

Para um sistema que obedece as equações de Hamilton,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \\ &= \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) + \frac{\partial}{\partial p} \left(-\frac{\partial H}{\partial q} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{dV(t)}{dt} = 0.$$

Então o movimento de sistemas hamiltonianos preserva o volume no espaço (q, p) , conhecido como **teorema de Liouville**[13].

A partir do teorema de Liouville podemos encontrar a equação de Liouville. Para tanto, seja um sistema representado por um ponto no espaço de fase. Vamos definir o ensemble como sendo um conjunto de sistemas no espaço de fase. A densidade de pontos no espaço de fase $D(q, p, t)$ é definida como

$$D(q, p, t) = \frac{dN}{dV}.$$

onde dN é o número de pontos (sistemas) no volume dV .

Como podemos observar na figura 1.4.1 a evolução de R_0 no tempo faz com que a forma deste volume mude no tempo, mas o volume permanece constante. O número de sistemas dentro de R_0 também permanece constante, pois se algum ponto atravessar a borda, em algum instante, sua trajetória cruza a trajetória de um ponto que está na superfície. Neste caso eles teriam as mesmas coordenadas no espaço de fase desde que a dinâmica do sistema é determinada unicamente pela localização no espaço de fase. Esses dois pontos viajariam juntos, então um sistema nunca pode sair do volume, fazendo com que o número de sistemas também permaneça fixo. Logo $D(q, p, t)$ é constante no tempo, ou seja,

$$\frac{dD(q, p, t)}{dt} = 0,$$

ou como vimos em 1.2.11:

$$\frac{\partial D}{\partial t} + [D, H] = 0 \quad (1.4.16)$$

esta é a **equação de Liouville**.

1.5 Hierarquia BBKGY

Para um sistema de N partículas vamos considerar $x_i = (\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i)$, onde \mathbf{q}_i é a coordenada generalizada e \mathbf{p}_i o momento conjugado canônico. Se o estado x_1, x_2, \dots, x_N está ocupado, então a partícula 1 está no estado x_1 , a partícula 2 está em x_2 e assim por diante. Vamos definir $F(x_1, x_2, \dots, x_N)$ (a dependência no tempo será ocultada) como sendo a função densidade de probabilidade de N partículas. A função $F(x_1, x_2, \dots, x_N)$ é simétrica sob mudança de argumentos,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_k, \dots, x_N) = F(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_j, \dots, x_N).$$

Vamos definir $f_1(x_1)$, a função distribuição reduzida de uma partícula, tal que:

$$f_1(x_1) = N \int dx_2 \dots dx_N F(x_1, x_2, \dots, x_N).$$

E a função distribuição reduzida de s partículas $f_s(x_1, x_2, \dots, x_s)$, para $s \leq N$

$$f_s(x_1, \dots, x_s) = \frac{N!}{(N-s)!} \int dx_{s+1} \dots dx_N F(x_1, x_2, \dots, x_N),$$

$f_s(x_1, \dots, x_s)$ representa a densidade de probabilidade de encontrar s partículas em x_1, \dots, x_s . A condição de normalização de $f_s(x_1, \dots, x_s)$ é

$$\int dx_1 \dots dx_s f_s(x_1, x_2, \dots, x_s) = \frac{N!}{(N-s)!}. \quad (1.5.17)$$

Considere um sistema de N partículas idênticas, tal que a hamiltoniana é

$$H(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i \leq k}^N \sum_k V(q_i - q_k).$$

Podemos reescrever a equação 1.4.16 em termos de operadores liouvillianos, definidos a seguir, tal que

$$\begin{aligned} \partial_t F(q, p, t) &= [H, F(q, p, t)] \\ &= LF(q, p, t) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} LF &\equiv \sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial F}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial F}{\partial q_j} \right) \\ &= \sum_j \left\{ \sum_{i \leq k}^N \sum_k \frac{\partial V(q_i - q_k)}{\partial q_j} \frac{\partial F}{\partial p_j} - \frac{p_j}{m} \frac{\partial F}{\partial q_j} \right\} \\ &= \sum_{i \leq k}^N \sum_k \left(\frac{\partial V(q_i - q_k)}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} + \frac{\partial V(q_i - q_k)}{\partial q_k} \frac{\partial F}{\partial p_k} \right) - \sum_j \frac{p_j}{m} \frac{\partial F}{\partial q_j} \\ &= \sum_{i \leq k}^N \sum_k \left(\frac{\partial V(q_i - q_k)}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{\partial V(q_i - q_k)}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_k} \right) - \sum_j \frac{p_j}{m} \frac{\partial F}{\partial q_j} \\ &= - \sum_j v_j \frac{\partial F}{\partial q_j} + \sum_{i \leq k}^N \sum_k \frac{\partial V(q_i - q_k)}{\partial q_i} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \right), \end{aligned}$$

fazendo

$$v_j = \frac{p_j}{m}, \quad \nabla_j \equiv \frac{\partial}{\partial q_j}, \quad \partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad \partial_{jn} \equiv \frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{\partial}{\partial p_n},$$

podemos reescrever L , como:

$$L = L^0 + L' = \sum_j L_j^0 + \sum_{j \leq k} \sum_k L'_{jk}$$

onde

$$\begin{aligned} L_j^0 &= -v_j \nabla_j, \\ L'_{jk} &= (\nabla_j V_{jk}) \partial_{jk}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\partial_t F = \sum_{j=1}^N L_j^0 F + \sum_{j \leq n=1}^N L'_{jn} F. \quad (1.5.18)$$

$$\int dx_1 \dots dx_N F(x_1, x_2, \dots, x_N) = 1.$$

Para os próximos cálculos vamos considerar

$$\int \partial q_i \frac{\partial F}{\partial q_i} = 0 \quad e \quad \int \partial p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0, \quad (1.5.19)$$

pois estas são integrais de superfície.

Integrando a equação 1.5.18 sob as partículas $s+1, \dots, N$ e multiplicando por $\frac{N!}{(N-s)!}$, temos:

$$\partial_t f_s = \frac{N!}{(N-s)!} \int dx_{s+1} \dots dx_N \left\{ \sum_{j=1}^N L_j^0 F + \sum_{j \leq n=1}^N L'_{jn} F \right\}. \quad (1.5.20)$$

Considerando o primeiro termo do lado direito da equação acima,

$$\begin{aligned} \frac{N!}{(N-s)!} \sum_{j=1}^N \int dx_{s+1} \dots dx_N v_j \frac{\partial F}{\partial q_j} &= \frac{N!}{(N-s)!} \sum_{j=1}^s \int dx_{s+1} \dots dx_N v_j \frac{\partial F}{\partial q_j} \\ &\quad + \frac{N!}{(N-s)!} \sum_{j=s+1}^N \int dx_{s+1} \dots dx_N v_j \frac{\partial F}{\partial q_j} \\ &= \frac{N!}{(N-s)!} \sum_{j=1}^s \int dx_{s+1} \dots dx_N v_j \frac{\partial F}{\partial q_j} \\ &= \sum_{j=1}^s L_j^0 f_s(x_1, x_2, \dots, x_s) \end{aligned}$$

O segundo termo é dividido em três casos:

$$\begin{aligned} \frac{N!}{(N-s)!} \int dx_{s+1} \dots dx_N \sum_{j=1 \leq n=1}^N \sum_k L'_{jn} F &= \frac{N!}{(N-s)!} \int dx_{s+1} \dots dx_N \sum_{j=1 \leq n=1}^s \sum_k L'_{jn} F \\ &\quad + \frac{N!}{(N-s)!} \int dx_{s+1} \dots dx_N \sum_{j=1}^s \sum_{n=s+1}^N L'_{jn} F \\ &\quad + \frac{N!}{(N-s)!} \int dx_{s+1} \dots dx_N \sum_{j=s+1 \leq n=s+1}^N \sum_k L'_{jn} F \end{aligned} \quad (1.5.21)$$

Estes três casos estão representados na figura 1.5.2:

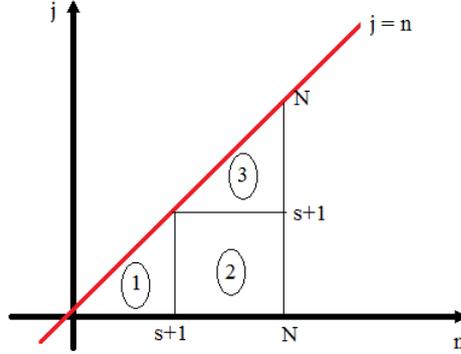


Figura 1.5.2: Termos do somatório 1.5.21.

1. j e n estão dentro do grupo $(1, \dots, s)$:

$$\begin{aligned} \frac{N!}{(N-s)!} \int dx_{s+1} \dots dx_N \sum_{j=1}^s \sum_{n=1}^s L'_{jn} F &= \sum_{j=1}^s \sum_{n=1}^s L'_{jn} \frac{N!}{(N-s)!} \int dx_{s+1} \dots dx_N F \\ &= \sum_{j=1}^s \sum_{n=1}^s L'_{jn} f_s(x_1, x_2, \dots, x_s). \end{aligned}$$

2. j pertence ao grupo $(1, \dots, s)$ e n ao grupo $(s+1, \dots, N)$. Usando o fato de F ser uma função simétrica sob mudança de partículas:

$$\begin{aligned} &\frac{N!}{(N-s)!} \int dx_{s+1} \dots dx_N \sum_{j=1}^s \sum_{n=s+1}^N L'_{jn} F \\ &= \frac{N!}{(N-s)!} \int dx_{s+1} \dots dx_N \sum_{j=1}^s \sum_{n=s+1}^N \nabla_j V_{jn} \left(\frac{\partial F}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_n} \right) \\ &= \frac{N!}{(N-s)!} \int dx_{s+1} \dots dx_N \sum_{j=1}^s (N-s) \nabla_j V_{j(s+1)} \left(\frac{\partial F}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_{(s+1)}} \right) \\ &= \sum_{j=1}^s \int dx_{s+1} \nabla_j V_{j(s+1)} \partial_{j(s+1)} \frac{N!}{(N-s-1)!} \int dx_{s+2} \dots dx_N F \\ &= \sum_{j=1}^s \int dx_{s+1} L'_{j(s+1)} f_{s+1}(x_1, x_2, \dots, x_{s+1}). \end{aligned}$$

3. j e n estão dentro do grupo $(s+1, \dots, N)$:

$$\frac{N!}{(N-s)!} \int dx_{s+1} \dots dx_N \sum_{j=s+1}^N \sum_{n=s+1}^N L'_{jn} F = 0$$

devido a equação 1.5.19 este termo é nulo.

Portanto substituindo estes resultados em 1.5.20, temos:

$$\begin{aligned} \partial_t f_s(x_1, x_2, \dots, x_s) &= \sum_{j=1}^s L_j^0 f_s(x_1, x_2, \dots, x_s) + \sum_{j \leq n}^s \sum_{n=1}^s L'_{jn} f_s(x_1, x_2, \dots, x_s) \\ &+ \sum_{j=1}^s \int dx_{s+1} L'_{j(s+1)} f_{s+1}(x_1, x_2, \dots, x_{s+1}) \end{aligned} \quad (1.5.22)$$

para $1 \leq s \leq N$.

A equação acoplada acima é conhecida como **equação BBKGY**, esta equação tem estrutura hierarquica, ou seja, para determinar a função distribuição de s partículas é necessário conhecer a função distribuição de $s+1$ partículas.

A equação 1.5.22 pode ser representada através de diagramas. Vamos considerar $f_s(x_1, x_2, \dots, x_s)$ uma linha horizontal, o operador L_j^0 não é representado graficamente, pois este não representa nenhuma interação, não muda o estado das partícula. Já o operador L'_{jn} , como representa as interações entre partículas e estas interações afetam o estado do sistema, vamos representá-lo como um vértice que une as linhas de j e n do lado direito.

Na equação 1.5.22 há dois termos que envolve o operador L'_{jn} . Um termo representa apenas a interação entre um grupo de partículas, neste caso vamos representar como duas linhas indo para a esquerda, este tipo de diagrama vai ser chamado de *vértice X* (ver 1.5.3).

O segundo termo com $L'_{j(s+1)}$ envolve a interação entre as partículas, j e $s+1$, e a integração em $s+1$, que representa a mudança de estado desta partícula para o estado da partícula j . Uma simples linha do lado esquerdo representa esta integração, a este tipo de diagrama vamos chamar de *vértice Y* (ver 1.5.3).

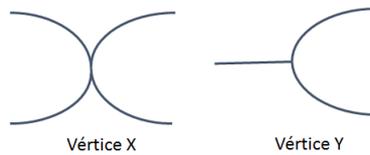


Figura 1.5.3: Vértices X e Y.

Para $s=1$

$$\partial_t f_1(x_1) = L_1^0 f_1(x_1) + \int dx_2 L'_{12} f_2(x_1, x_2).$$

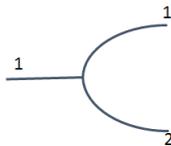


Figura 1.5.4: Diagrama de evolução de $f_1(x_1)$.

Para $s=2$

$$\begin{aligned} \partial_t f_2(x_1, x_2) &= L_1^0 f_2(x_1, x_2) + L_2^0 f_2(x_1, x_2) + L'_{12} f_2(x_1, x_2) \\ &+ \int dx_3 L'_{13} f_3(x_1, x_2, x_3) + \int dx_3 L'_{23} f_3(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

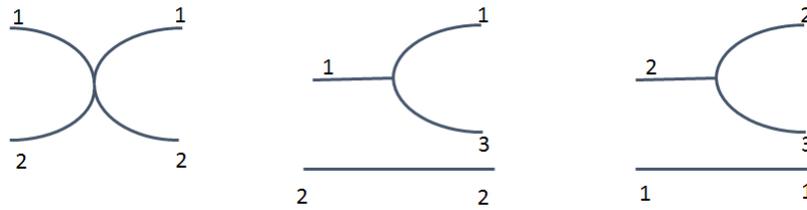


Figura 1.5.5: Diagrama de evolução de $f_2(x_1, x_2)$.

Para $s=3$,

$$\begin{aligned} \partial_t f_3(x_1, x_2, x_3) = & L_1^0 f_3(x_1, x_2, x_3) + L_2^0 f_3(x_1, x_2, x_3) + L_3^0 f_3(x_1, x_2, x_3) \\ & + L'_{12} f_3(x_1, x_2, x_3) + L'_{13} f_3(x_1, x_2, x_3) + L'_{23} f_3(x_1, x_2, x_3) \\ & + \int dx_4 (L'_{14} + L'_{24} + L'_{34}) f_4(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

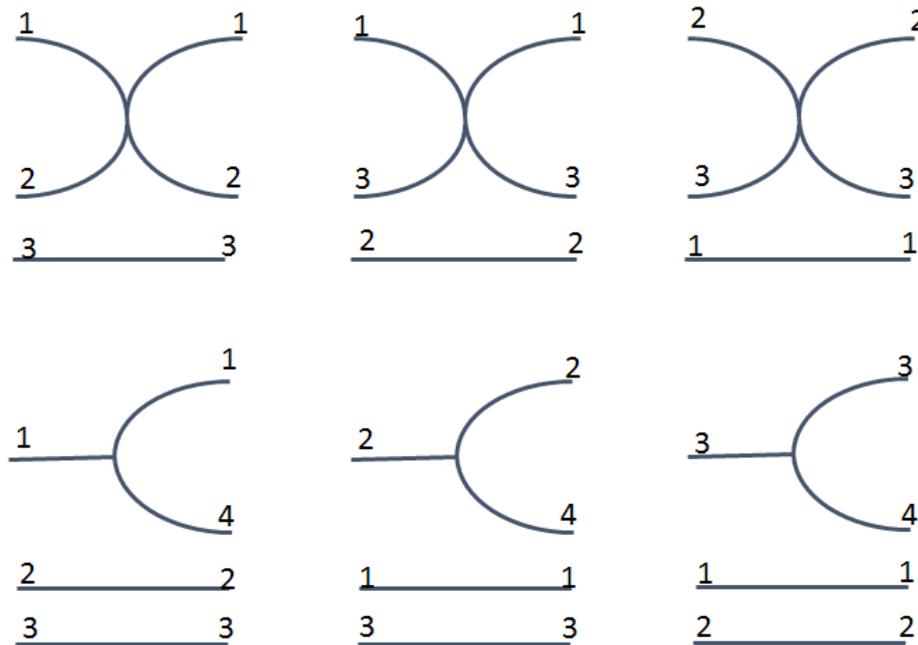


Figura 1.5.6: Diagrama de evolução de $f_3(x_1, x_2, x_3)$.

E assim por diante [3].

1.6 Análise de Prigogine

A equação de Liouville é uma equação base para obtermos várias interpretações interessantes. Iremos apresentar a análise feita por Prigogine, que é uma técnica perturbativa para resolver a equação de Liouville. Esta análise prevê a utilização de diagramas para descrever a interação entre partículas. Para iniciarmos o estudo desta análise vamos apresentar algumas propriedades das funções distribuição reduzida que descrevem um sistema.

Sistemas macroscópios são caracterizados em homogêneos e inhomogêneos. Se os sistemas são homogêneos então a função distribuição de N partículas $F(x_1, x_2, \dots, x_N)$ é invariante sob translação de coordenadas $(\mathbf{q}_l) \rightarrow (\mathbf{q}_l + \mathbf{b})$, ou seja,

$$F(\mathbf{q}_1 + \mathbf{a}, \mathbf{q}_2 + \mathbf{a}, \dots, \mathbf{q}_N + \mathbf{a}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N, t) = F(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N, t). \quad (1.6.23)$$

Esta igualdade implica que a função distribuição reduzida de uma partícula é:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{v}_1, t) &= N \int dq_2 \dots dq_N dv_2 \dots dv_N F(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N, t) \\ &= N \int dq_2 \dots dq_N dv_2 \dots dv_N F(\mathbf{q}_1 + \mathbf{a}, \mathbf{q}_2 + \mathbf{a}, \dots, \mathbf{q}_N + \mathbf{a}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N, t) \\ &= f_1(\mathbf{q}_1 + \mathbf{a}, \mathbf{v}_1, t). \end{aligned}$$

Portanto

$$f_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{v}_1, t) = c\varphi_1(\mathbf{v}_1, t). \quad (1.6.24)$$

E a função distribuição reduzida de duas partículas depende da distância relativa das duas partículas:

$$\begin{aligned} f_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) &= N(N-1) \int dq_3 \dots dq_N dv_3 \dots dv_N F(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N, t) \\ &= N(N-1) \int dq_3 \dots dq_N dv_3 \dots dv_N F(\mathbf{q}_1 + \mathbf{a}, \dots, \mathbf{q}_N + \mathbf{a}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) \\ &= f_2(\mathbf{q}_1 + \mathbf{a}, \mathbf{q}_2 + \mathbf{a}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) \\ &\Rightarrow f_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) = f_2(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t). \end{aligned}$$

Considere um gás contendo um número muito grande de partículas dentro de um volume muito grande Ω , portanto no ponto de vista matemático podemos fazer o limite $N \rightarrow \infty$ e $\Omega \rightarrow \infty$. Devemos tomar cuidado neste limite, porque a razão N/Ω deve ser constante e finita, ou seja,

$$\begin{cases} N \rightarrow \infty \\ \Omega \rightarrow \infty \\ N/\Omega = c \end{cases} \quad (1.6.25)$$

este limite é o limite termodinâmico.

Prigogine assume que a função distribuição reduzida f_s deve ser finita no limite acima, ou seja, $F(x_1, \dots, x_N, t)$ deve garantir este requerimento e f_s deve permanecer assim para qualquer tempo (ver Figura 1.6.7).

Iremos usar este requerimento nas componentes de Fourier da função distribuição. Para tanto teremos que encontrar as condições de contorno para nosso sistema. Vamos assumir que o gás está em uma caixa de volume Ω (ver figura 1.6.8) e que este sistema é repetido periodicamente em um espaço na direção \mathbf{i}_x , \mathbf{i}_y e \mathbf{i}_z , tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_x &= (1, 0, 0) \\ \mathbf{i}_y &= (0, 1, 0) \\ \mathbf{i}_z &= (0, 0, 1) \end{aligned} \quad (1.6.26)$$

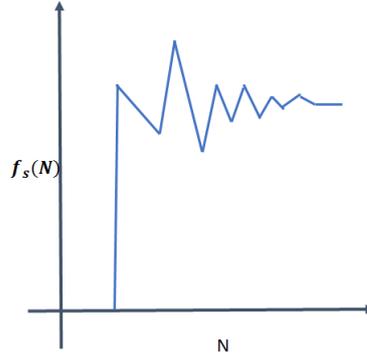


Figura 1.6.7: Função distribuição reduzida $f_s(N)$ no limite termodinâmico.

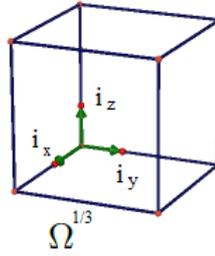


Figura 1.6.8: Vetores \mathbf{i}_x , \mathbf{i}_y e \mathbf{i}_z .

Temos que:

$$\begin{aligned}
 F(\{\mathbf{q}_j + \Omega^{1/3}\mathbf{i}_x\}, v) &= F(\{\mathbf{q}_j + \Omega^{1/3}\mathbf{i}_y\}, v) \\
 &= F(\{\mathbf{q}_j + \Omega^{1/3}\mathbf{i}_z\}, v) \\
 &= F(\{\mathbf{q}_j\}, v).
 \end{aligned} \tag{1.6.27}$$

Expandindo a função distribuição inicial em série de Fourier:

$$F(q, v, 0) = \sum_{\mathbf{k}_1} \dots \sum_{\mathbf{k}_N} \tilde{\rho}_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) \exp\left(i \sum_j^N \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{q}_j\right), \tag{1.6.28}$$

com $\tilde{\rho}_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N)$ a componente de Fourier, que depende das velocidades, pois a função distribuição é espacialmente periódica.

A condição de contorno Eq. 1.6.27 requer que:

$$\begin{aligned}
 F(\{\mathbf{q}_j + \Omega^{1/3}\mathbf{i}_x\}, v) &= F(\{\mathbf{q}_j\}, v) \\
 \sum_{\mathbf{k}_1} \dots \sum_{\mathbf{k}_N} \tilde{\rho}_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) e^{i \sum_{j=1}^N \mathbf{k}_j \cdot (\mathbf{q}_j + \Omega^{1/3}\mathbf{i}_x)} &= \sum_{\mathbf{k}_1} \dots \sum_{\mathbf{k}_N} \tilde{\rho}_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) e^{i \sum_{j=1}^N \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{q}_j} \\
 \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{q}_j &= \mathbf{k}_j \cdot (\mathbf{q}_j + \Omega^{1/3}\mathbf{i}_x) - 2\pi n \\
 \mathbf{k}_j \cdot \Omega^{1/3}\mathbf{i}_x &= 2\pi n \\
 k_{jx} &= \frac{2\pi n_x}{\Omega^{1/3}},
 \end{aligned}$$

vamos chamar $n = n_x$ só por notação.

Para as outras condições da equação Eq. 1.6.27, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{q}_j &= \mathbf{k}_j \cdot (\mathbf{q}_j + \Omega^{1/3} \mathbf{i}_y) - 2\pi n \\ k_{jy} &= \frac{2\pi n_y}{\Omega^{1/3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{q}_j &= \mathbf{k}_j \cdot (\mathbf{q}_j + \Omega^{1/3} \mathbf{i}_z) - 2\pi n \\ k_{jz} &= \frac{2\pi n_z}{\Omega^{1/3}} \end{aligned}$$

Logo:

$$\mathbf{k}_j = \frac{2\pi \mathbf{n}_j}{\Omega^{1/3}} \quad (1.6.29)$$

tal que as componentes de \mathbf{n}_j são números inteiros.

Podemos reescrever 1.6.28, tal que:

$$\begin{aligned} F(q, v, 0) &= \tilde{\rho}_{\mathbf{0} \dots \mathbf{0}} + \sum_j \sum_{\mathbf{k}_j} \tilde{\rho}_{\mathbf{0} \dots \mathbf{k}_j \dots \mathbf{0}}(\mathbf{v}_j; 0) e^{i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{q}_j} \\ &+ \sum_j \sum_n \sum_{\mathbf{k}_j} \sum_{\mathbf{k}_n} \tilde{\rho}_{\mathbf{0} \dots \mathbf{k}_j \dots \mathbf{k}_n \dots \mathbf{0}}(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_n; 0) e^{i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{q}_j + i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{q}_n} \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (1.6.30)$$

$\tilde{\rho}_{\mathbf{0} \dots \mathbf{0}}$ é o termo com todos os \mathbf{k}_p nulos, $\tilde{\rho}_{\mathbf{0} \dots \mathbf{k}_j \dots \mathbf{0}}$ é o termo com apenas um vetor de onda diferente de zero e assim sucessivamente.

Para o caso específico de um sistema homogêneo, que obedece as condições da Eq. 1.6.23, temos:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) &= F(\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}, \dots, \mathbf{x}_N + \mathbf{b}) \\ \sum_{\mathbf{k}_1} \dots \sum_{\mathbf{k}_N} \tilde{\rho}_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) e^{(i \sum_j \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{q}_j)} &= \sum_{\mathbf{k}_1} \dots \sum_{\mathbf{k}_N} \tilde{\rho}_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) e^{(i \sum_j \mathbf{k}_j \cdot (\mathbf{q}_j + \mathbf{b}))} \\ \sum_j \mathbf{k}_j &= 0. \end{aligned} \quad (1.6.31)$$

Como vimos anteriormente a função distribuição reduzida tem que ser finita no limite termodinâmico (Eq. 1.6.25), logo as componentes de Fourier devem depender do volume. Sabendo disto podemos reescrever a Eq. 1.6.30 na forma:

$$\begin{aligned} F(q, v, 0) &= \Omega^{-N} \{ \rho_{\mathbf{0}}(|\mathbf{v}; 0) + \frac{8\pi^3}{\Omega} \sum_j \sum_{\mathbf{k}_j} \rho_{\mathbf{k}_j}(\mathbf{v}_j | \dots; 0) e^{i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{q}_j} \\ &+ \left(\frac{8\pi^3}{\Omega} \right)^2 \sum_j \sum_n \sum_{\mathbf{k}_j} \sum_{\mathbf{k}_n} \rho_{\mathbf{k}_j, \mathbf{k}_n}(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_n | \dots; 0) e^{i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{q}_j + i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{q}_n} \\ &\quad (\mathbf{k}_j + \mathbf{k}_n \neq 0) \\ &+ \left(\frac{8\pi^3}{\Omega} \right) \sum_j \sum_n \sum_{\mathbf{k}_j} \rho_{\mathbf{k}_j, \mathbf{k}_{-j}}(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_n | \dots; 0) e^{i\mathbf{k}_j \cdot (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_n)} \\ &+ \left(\frac{8\pi^3}{\Omega} \right)^{r-s} \sum_j \dots \sum_n \sum_{\mathbf{k}_j} \dots \sum_{\mathbf{k}_n} \\ &\delta_{\mathbf{k}_a + \dots + \mathbf{k}_b} \dots \delta_{\mathbf{k}_c + \dots + \mathbf{k}_d} \rho_{\mathbf{k}_j, \mathbf{k}_n}(\mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_n | \dots; 0) e^{i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{q}_j + \dots + i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{q}_n} \\ &+ \dots \}, \end{aligned} \quad (1.6.32)$$

tal que:

$$\delta_{\mathbf{k}_j+\dots+\mathbf{k}_n} = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \mathbf{k}_j + \dots + \mathbf{k}_n = 0 \\ 0 & , \text{ se } \mathbf{k}_j + \dots + \mathbf{k}_n \neq 0. \end{cases} \quad (1.6.33)$$

Com esta notação os termos que estão do lado esquerdo da barra, na componente de Fourier, tem vetor de onda não-nulo, do lado direito da barra são escritas as outras velocidades, como estas não são relevantes trocamos por uma série de pontos. A série Eq. 1.6.32 é idêntica a Eq. 1.6.30, a mudança de uma série para a outra é dada pela Tabela I.1. Ao invés de escrever $\mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_n$ do lado esquerdo da barra em $\tilde{\rho}$ podemos escrever apenas os índices das partículas j, \dots, n . Esta notação é dada na segunda coluna da Tabela I.1.

Notação Compacta		Notação Explicita
$\tilde{\rho}_{\mathbf{0}\dots\mathbf{0}}(v; 0)$		$\Omega^{-N} \rho_0(v; 0)$
		$\Omega^{-N} \rho_0(\dots; 0)$
$\tilde{\rho}_{\mathbf{0}\dots\mathbf{k}_n\dots\mathbf{0}}(v; 0)$		$\Omega^{-N} (8\pi^3/\Omega) \rho_{\mathbf{k}_n}(\mathbf{v}_n \dots; 0)$
		$\Omega^{-N} (8\pi^3/\Omega) \rho_{\mathbf{k}_n}(n \dots; 0)$
$\tilde{\rho}_{\mathbf{0}\dots\mathbf{k}_j\dots\mathbf{k}_n\dots\mathbf{0}}(v; 0)$	$\mathbf{k}_j + \mathbf{k}_n \neq 0$	$\Omega^{-N} (8\pi^3/\Omega)^2 \rho_{\mathbf{k}_j, \mathbf{k}_n}(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_n \dots; 0)$
		$\Omega^{-N} (8\pi^3/\Omega)^2 \rho_{\mathbf{k}_j, \mathbf{k}_n}(j, n \dots; 0)$
$\tilde{\rho}_{\mathbf{0}\dots\mathbf{k}_j\dots\mathbf{k}_n\dots\mathbf{0}}(v; 0)$	$\mathbf{k}_j + \mathbf{k}_n = 0$	$\Omega^{-N} (8\pi^3/\Omega) \rho_{\mathbf{k}_j, -\mathbf{k}_j}(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_n \dots; 0)$
		$\Omega^{-N} (8\pi^3/\Omega) \rho_{\mathbf{k}_j, -\mathbf{k}_j}(j, n \dots; 0)$
$\tilde{\rho}_{\mathbf{0}\dots\mathbf{k}_j\dots\mathbf{k}_n\dots\mathbf{k}_m\dots\mathbf{0}}(v; 0)$	$\mathbf{k}_j + \mathbf{k}_n + \mathbf{k}_m \neq 0$	$\Omega^{-N} (8\pi^3/\Omega)^3 \rho_{\mathbf{k}_j, \mathbf{k}_n, \mathbf{k}_m}(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_m \dots; 0)$

$\tilde{\rho}_{\mathbf{0}\dots\mathbf{k}_j\dots\mathbf{k}_n\dots\mathbf{k}_m\dots\mathbf{0}}(v; 0)$	$\mathbf{k}_j + \mathbf{k}_n = 0$	$\Omega^{-N} (8\pi^3/\Omega)^2 \rho_{\mathbf{k}_j, -\mathbf{k}_j, \mathbf{k}_m}(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_m \dots; 0)$

$\tilde{\rho}_{\mathbf{0}\dots\mathbf{k}_j\dots\mathbf{k}_n\dots\mathbf{k}_m\dots\mathbf{0}}(v; 0)$	$\mathbf{k}_j + \mathbf{k}_n + \mathbf{k}_m = 0$	$\Omega^{-N} (8\pi^3/\Omega)^2 \rho_{\mathbf{k}_j, \mathbf{k}_n, -\mathbf{k}_j - \mathbf{k}_n}(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_m \dots; 0)$

Tabela I.1: Notação das componentes de Fourier.

Vamos introduzir a seguinte condição: A componente de Fourier ρ não depende de N ou Ω , mas da razão N/Ω . Da normalização de $F(\mathbf{q}, \mathbf{v}, 0)$, temos:

$$\Omega^{-N} \int dx_1 \dots dx_N \rho_0(|\mathbf{v}, 0) = \int d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{v}_N \rho(|\mathbf{v}, \mathbf{0}) = 1 \quad (1.6.34)$$

Para encontrar a função distribuição reduzida de uma partícula $f_1(\mathbf{q}_s, \mathbf{v}_s)$ integramos a Eq. 1.6.32 em relação as $N - 1$ posições e velocidades. Logo:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{q}_s, \mathbf{v}_s, 0) &= N \int dx_1 \dots dx_{s-1} dx_{s+1} \dots dx_N F(q, v, 0) \\ &= N \Omega^{-1} \left\{ \rho_0(|\mathbf{v}_s; 0) + \frac{8\pi^3}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}_s} \rho_{\mathbf{k}_s}(\mathbf{v}_s|; 0) e^{i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{q}_s} \right\}, \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} \rho_0(|\mathbf{v}_s; 0) &= \int dv_1 \dots dv_{s-1} dv_{s+1} \dots dv_N \rho_0(|\mathbf{v}, 0), \\ \rho_{\mathbf{k}_s}(\mathbf{v}_s|; 0) &= \int dv_1 \dots dv_{s-1} dv_{s+1} \dots dv_N \rho_{\mathbf{k}_s}(\mathbf{v}_s|\dots; 0). \end{aligned}$$

No limite $\Omega \rightarrow \infty$,

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\Omega^{1/3}} \mathbf{n} \longrightarrow \Delta k_x = \Delta k_y = \Delta k_z = \frac{2\pi}{\Omega^{1/3}}$$

$$\begin{aligned} \Delta k_x &\rightarrow dk_x \\ \Delta k_y &\rightarrow dk_y \\ \Delta k_z &\rightarrow dk_z \end{aligned} \quad \text{e} \quad \frac{8\pi^3}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int d\mathbf{k} = \int dk_x dk_y dk_z$$

Então no limite $N \rightarrow \infty$ e $\Omega \rightarrow \infty$:

$$f_1(\mathbf{q}_s, \mathbf{v}_s, 0) = c \left\{ \rho_0(|\mathbf{v}_s; 0) + \int d\mathbf{k}_s \rho_{\mathbf{k}_s}(\mathbf{v}_s; 0) e^{i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{q}_s} \right\} \quad (1.6.35)$$

Das Eq. 1.6.24 e Eq. 1.6.35 e integrando 1.6.35 em relação a \mathbf{q}_s , temos:

$$\varphi_1(\mathbf{v}_s) = \rho_0(|\mathbf{v}_s; 0). \quad (1.6.36)$$

Portanto da Eq. 1.6.34,

$$\int d\mathbf{v}_s \varphi_1(\mathbf{v}_s) = 1.$$

Logo:

$$f_1(\mathbf{q}_s, \mathbf{v}_s, 0) = c \{ \varphi_1(\mathbf{v}_s) + H(\mathbf{q}_s) \}, \quad (1.6.37)$$

com

$$H(\mathbf{q}_s) = \int d\mathbf{k} \rho_{\mathbf{k}_s}(\mathbf{v}_s; 0) e^{i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{q}_s}$$

o fator inhomogêneo.

Integrando $f_1(\mathbf{q}_s, \mathbf{v}_s, 0)$ em relação a \mathbf{v}_s , temos:

$$h(\mathbf{q}_s) = c^{-1} [n(\mathbf{q}_s) - c]$$

com

$$h(\mathbf{q}_s) = \int d\mathbf{v}_s \int d\mathbf{k} \rho_{\mathbf{k}_s}(\mathbf{v}_s; 0) e^{i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{q}_s},$$

$$n(\mathbf{q}_s) = \int d\mathbf{v}_s f_1(\mathbf{q}_s, \mathbf{v}_s).$$

A Eq.1.6.37 indica que podemos escrever a função distribuição reduzida de uma partícula como a soma de duas funções, uma função que depende apenas da velocidade e outra que depende apenas da posição. Se o espaço é homogêneo a Eq. 1.6.37 torna-se a Eq. 1.6.24.

Agora vamos introduzir a idéia de correlação entre partículas. Para simplificar os cálculos vamos considerar o sistema homogêneo. A função distribuição reduzida de duas partículas é:

$$\begin{aligned} f_2(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{q}_\beta, \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta, 0) &= N(N-1) \int dx_1 \dots dx_{\alpha-1} dx_{\alpha+1} \dots dx_{\beta-1} dx_{\beta+1} \dots dx_N F(x_1, \dots, x_N, 0) \\ &= N(N-1) \Omega^{-N} \left\{ \Omega^{N-2} \rho_0(|\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta; 0) + \frac{8\pi^3}{\Omega} \Omega^{N-2} \sum_{\mathbf{k}_\alpha} \rho_{\mathbf{k}_\alpha}(\mathbf{v}_\alpha; 0) e^{i\mathbf{k}_\alpha \cdot \mathbf{q}_\alpha} \right. \\ &\quad + \frac{8\pi^3}{\Omega} \Omega^{N-2} \sum_{\mathbf{k}_\beta} \rho_{\mathbf{k}_\beta}(\mathbf{v}_\beta; 0) e^{i\mathbf{k}_\beta \cdot \mathbf{q}_\beta} \\ &\quad + \left(\frac{8\pi^3}{\Omega} \right)^2 \Omega^{N-2} \sum_{\mathbf{k}_\alpha} \sum_{\mathbf{k}_\beta} \rho_{\mathbf{k}_\alpha \mathbf{k}_\beta}(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta; 0) e^{i(\mathbf{k}_\beta \cdot \mathbf{q}_\beta + \mathbf{k}_\alpha \cdot \mathbf{q}_\alpha)} \\ &\quad \left. + \frac{8\pi^3}{\Omega} \Omega^{N-2} \sum_{\mathbf{k}_\alpha} \rho_{\mathbf{k}_\alpha, -\mathbf{k}_\alpha}(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta; 0) e^{i\mathbf{k}_\alpha \cdot (\mathbf{q}_\alpha - \mathbf{q}_\beta)} \right\} \end{aligned}$$

No limite $\Omega \rightarrow \infty$ e $N \rightarrow \infty$, conforme visto anteriormente, para sistemas homogêneos

$$\begin{aligned}
f_2(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{q}_\beta, \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta, 0) &= \frac{N^2}{\Omega^2} \left\{ \rho_0(|\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta; 0\rangle) + \int d\mathbf{k}_\alpha \rho_{\mathbf{k}_\alpha}(\mathbf{v}_\alpha; 0) e^{i\mathbf{k}_\alpha \cdot \mathbf{q}_\alpha} \right. \\
&\quad + \int d\mathbf{k}_\beta \rho_{\mathbf{k}_\beta}(\mathbf{v}_\beta; 0) e^{i\mathbf{k}_\beta \cdot \mathbf{q}_\beta} \\
&\quad + \int d\mathbf{k}_\alpha \int d\mathbf{k}_\beta \rho_{\mathbf{k}_\alpha \mathbf{k}_\beta}(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta; 0) e^{i(\mathbf{k}_\beta \cdot \mathbf{q}_\beta + \mathbf{k}_\alpha \cdot \mathbf{q}_\alpha)} \\
&\quad \left. + \int d\mathbf{k}_\alpha \rho_{\mathbf{k}_\alpha, -\mathbf{k}_\alpha}(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta; 0) e^{i\mathbf{k}_\alpha \cdot (\mathbf{q}_\alpha - \mathbf{q}_\beta)} \right\} \\
&= f_2(\mathbf{q}_\alpha - \mathbf{q}_\beta, \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta, 0).
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
&\int d\mathbf{k}_\alpha \rho_{\mathbf{k}_\alpha}(\mathbf{v}_\alpha; 0) e^{i\mathbf{k}_\alpha \cdot \mathbf{q}_\alpha} + \int d\mathbf{k}_\beta \rho_{\mathbf{k}_\beta}(\mathbf{v}_\beta; 0) e^{i\mathbf{k}_\beta \cdot \mathbf{q}_\beta} \\
&+ \int d\mathbf{k}_\alpha \int d\mathbf{k}_\beta \rho_{\mathbf{k}_\alpha \mathbf{k}_\beta}(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta; 0) e^{i(\mathbf{k}_\beta \cdot \mathbf{q}_\beta + \mathbf{k}_\alpha \cdot \mathbf{q}_\alpha)} = 0
\end{aligned}$$

Logo,

$$f_2(\mathbf{q}_\alpha - \mathbf{q}_\beta, \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta, 0) = \frac{N^2}{\Omega^2} \left\{ \rho_0(|\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta; 0\rangle) + \int d\mathbf{k}_\alpha \rho_{\mathbf{k}_\alpha, -\mathbf{k}_\alpha}(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta; 0) e^{i\mathbf{k}_\alpha \cdot (\mathbf{q}_\alpha - \mathbf{q}_\beta)} \right\}. \quad (1.6.38)$$

Vamos definir a correlação de duas partículas, tal que:

$$c^2 G(\mathbf{q}_\alpha - \mathbf{q}_\beta, \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta; 0) \equiv f_2(\mathbf{q}_\alpha - \mathbf{q}_\beta, \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta, 0) - f_1(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha) f_1(\mathbf{q}_\beta, \mathbf{v}_\beta), \quad (1.6.39)$$

quando as partículas estão muito distante uma da outra a correlação entre elas é nula, ou seja,

$$G(\mathbf{q}_\alpha - \mathbf{q}_\beta, \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta; 0) \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \mathbf{q}_\alpha - \mathbf{q}_\beta \longrightarrow \infty.$$

Substituindo a Eq. 1.6.38 na correlação e usando 1.6.24, temos:

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{q}_\alpha - \mathbf{q}_\beta, \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta; 0) &= \{ \rho_0(|\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta; 0\rangle) - \varphi_1(\mathbf{v}_\alpha) \varphi_2(\mathbf{v}_\beta) \} + \\
&\quad \int d\mathbf{k}_\alpha \rho_{\mathbf{k}_\alpha, -\mathbf{k}_\alpha}(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta; 0) e^{i\mathbf{k}_\alpha \cdot (\mathbf{q}_\alpha - \mathbf{q}_\beta)} \quad (1.6.40)
\end{aligned}$$

Quando fazemos $\mathbf{q}_\alpha - \mathbf{q}_\beta \rightarrow \infty$ temos que usar o Teorema de Riemann-Lebesgue:

Teorema 1 (Teorema de Riemann-Lebesgue) *Seja $f(x)$ pertencente ao espaço $L(-\infty, \infty)$ ($f(x)$ é uma função essencialmente limitada). Então:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\lambda x) dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\lambda x) dx$$

tende a zero quando $\lambda \rightarrow \infty$ [21].

Então a integral na Eq. 1.6.40 no limite $\mathbf{q}_\alpha - \mathbf{q}_\beta \rightarrow \infty$ é nula e teremos:

$$\begin{aligned}
0 &= \rho_0(|\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta; 0\rangle) - \varphi_1(\mathbf{v}_\alpha) \varphi_2(\mathbf{v}_\beta) \\
\varphi_2(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta) &\equiv \rho_0(|\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta; 0\rangle) = \int d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{v}_{\alpha-1} d\mathbf{v}_{\alpha+1} \dots d\mathbf{v}_{\beta-1} d\mathbf{v}_{\beta+1} \dots d\mathbf{v}_N \rho_0(|\mathbf{v}; 0\rangle) \\
&= \varphi_1(\mathbf{v}_\alpha) \varphi_2(\mathbf{v}_\beta)
\end{aligned}$$

Generalizando esta equação, temos:

$$\varphi_s(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s) = \prod_{i=1}^s \varphi_1(\mathbf{v}_i)$$

Da equação 1.6.39 podemos concluir que a função distribuição reduzida de duas partículas pode ser escrita como o produto das funções reduzidas de uma partícula somada a um termo de correlação. Esta representação é conhecida como representação de grupo e trabalharemos com esta representação nos próximos capítulos.

Agora que encontramos a função distribuição para N partículas no instante $t=0$, vamos encontrar $F(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N; t)$ para $t \neq 0$. Para estes cálculos iremos introduzir a idéia de função de Green e resolvente.

Considere a equação de Liouville inhomogênea:

$$\mathcal{L}f_N(x, v, t) = s(x, v, t) \quad (1.6.41)$$

com:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}^0 + e^2 \mathcal{L}', \\ \mathcal{L}^0 &= \partial_t + \sum_j \mathbf{v}_j \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_j}, \\ \mathcal{L}' &= \sum_{j < n} \sum \mathcal{L}'_{jn} = -m^{-1} \sum_{j < n} \sum \frac{\partial V_{jn}}{\partial \mathbf{q}_j} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_j} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_n} \right). \end{aligned}$$

Vamos definir a função de Green como sendo solução da equação:

$$\mathcal{L}G(qvt|q'v't') = -\delta(q - q') \delta(v - v') \delta(t - t') \quad (1.6.42)$$

tal que a função de Green satisfaz a condição de causalidade:

$$G(qvt|q'v't') = 0 \quad \text{para } t < t'. \quad (1.6.43)$$

Vamos considerar duas funções arbitrárias $\psi_1(q, v, t)$ e $\psi_2(q, v, t)$ que satisfazem as seguintes condições de contorno:

1. Condições de contorno periódicos no espaço de configuração:

$$\begin{aligned} \psi_i(\mathbf{q}_1 + \Omega^{1/3} \mathbf{i}_x, \dots, \mathbf{q}_N + \Omega^{1/3} \mathbf{i}_x, \{\mathbf{v}\}, t) &= \psi_i(\mathbf{q}_1 + \Omega^{1/3} \mathbf{i}_y, \dots, \mathbf{q}_N + \Omega^{1/3} \mathbf{i}_y, \{\mathbf{v}\}, t) \\ &= \psi_i(\mathbf{q}_1 + \Omega^{1/3} \mathbf{i}_z, \dots, \mathbf{q}_N + \Omega^{1/3} \mathbf{i}_z, \{\mathbf{v}\}, t) \\ &= \psi_i(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \{\mathbf{v}\}, t) \end{aligned}$$

2. Condições de contorno homogênea no infinito no espaço das velocidades:

$$\psi_i \rightarrow 0 \quad \text{para } \mathbf{v}_j \rightarrow \infty, \text{ para qualquer } j.$$

Para encontrar a solução da equação 1.6.41 vamos considerar:

$$f(q, v; 0) = q_N(q, v)$$

Seja:

$$\begin{aligned}
& \int d\mathbf{q}_1 \dots d\mathbf{q}_N \int d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{v}_N \int_{t_0}^{t_1} dt \{ \psi_1 \mathcal{L} \psi_2 + \psi_2 \mathcal{L} \psi_1 \} \\
= & \int d\mathbf{q}_1 \dots d\mathbf{q}_N \int d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{v}_N \int_{t_0}^{t_1} dt \{ \psi_1 \partial_t \psi_2 + \psi_1 \sum_j \mathbf{v}_j \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_j} \psi_2 + \psi_1 e^2 \mathcal{L}' \psi_2 \\
& + \psi_2 \partial_t \psi_1 + \psi_2 \sum_j \mathbf{v}_j \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_j} \psi_1 + \psi_2 e^2 \mathcal{L}' \psi_1 \} \\
= & \int d\mathbf{q}_1 \dots d\mathbf{q}_N \int d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{v}_N \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \partial_t (\psi_1 \psi_2) + \sum_j \mathbf{v}_j \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_j} (\psi_1 \psi_2) + e^2 \mathcal{L}' (\psi_1 \psi_2) \right\} \\
= & \int d\mathbf{q}_1 \dots d\mathbf{q}_N \int d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{v}_N \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \frac{d(\psi_1 \psi_2)}{dt} \right\} \\
= & \int d\mathbf{q}_1 \dots d\mathbf{q}_N \int d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{v}_N \{ \psi_1(t_1) \psi_2(t_1) - \psi_1(t_0) \psi_2(t_0) \}
\end{aligned}$$

Considerando:

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= f_N(q, v; t) \\
\psi_2 &= G(q'v't' | qvt) \\
t_0 &= 0 \quad \text{e} \quad t_1 = \infty.
\end{aligned}$$

Usando Eq. 1.6.43:

$$\begin{aligned}
& \int d\mathbf{q}_1 \dots d\mathbf{q}_N \int d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{v}_N \int_0^\infty dt \{ f_N(q, v, t) \mathcal{L} G(q'v't' | qvt) \\
& + G(q'v't' | qvt) \mathcal{L} f_N(q, v, t) \} \\
= & \int d\mathbf{q}_1 \dots d\mathbf{q}_N \int d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{v}_N \{ f_N(q, v, \infty) G(q'v't' | qv, t = \infty) - q_N(q, v) G(q'v't' | qv0) \} \\
= & \int d\mathbf{q}_1 \dots d\mathbf{q}_N \int d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{v}_N \{ -q_N(q, v) G(q'v't' | qv0) \}.
\end{aligned}$$

Usando as Eqs. 1.6.41 e 1.6.42, temos:

$$\begin{aligned}
& \int d\mathbf{q}_1 \dots d\mathbf{q}_N \int d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{v}_N \int_0^\infty dt \{ -f_N(q, v, t) \delta(q - q') \delta(v - v') \delta(t - t') \\
& + G(q'v't' | qvt) s(x, v, t) \} \\
= & - \int d\mathbf{q}_1 \dots d\mathbf{q}_N \int d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{v}_N \{ q_N(q, v) G(q'v't' | qv0) \}.
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
f_N(q', v', t') &= \int d\mathbf{q}_1 \dots d\mathbf{q}_N \int d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{v}_N \int_{t_0}^{t_1} dt G(q'v't' | qvt) s(x, v, t) \\
&+ \int d\mathbf{q}_1 \dots d\mathbf{q}_N \int d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{v}_N \{ q_N(q, v) G(q'v't' | qv0) \}. \quad (1.6.44)
\end{aligned}$$

Considerando $G(q'v't' | qvt)$ uma função homogênea no tempo, obtemos:

$$G(q'v't' | qvt) = \Theta(t - t') G(q'v' | qv; t' - t),$$

com a função de Heaviside $\Theta(x)$:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Agora vamos definir o resolvente que é a transformada de Fourier da função de Green em relação a $t'' - t$:

$$R(q''v'' | qv; z) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d(t'' - t) e^{iz(t''-t)} G(q''v''t'' | qvt),$$

ou seja,

$$R(q''v'' | qv; z) \equiv \int_0^{\infty} d\tau e^{iz\tau} G(q''v'' | qv; \tau) \quad (1.6.45)$$

tal que $R(q''v'' | qv; z)$ é a transformada de Laplace de G .

A função $G(\tau)$ pode ser expressa em termos de $R(z)$ pela fórmula inversa de Laplace:

$$G(z) = \frac{1}{2\pi} \int_C dz e^{-iz\tau} R(z)$$

Substituindo $G(\tau)$ na Eq. 1.6.44 e fazendo $s \equiv 0$, pois iremos trabalhar com a equação homogênea de Liouville, temos:

$$f_N(q'', v'', t'') = \frac{1}{2\pi} \int dz e^{-izt''} \int d\mathbf{q}_1 \dots d\mathbf{q}_N \int d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{v}_N R(q''v''t'' | qv0) f_N(q, v, 0). \quad (1.6.46)$$

Agora vamos separar o operador de Liouville em duas partes. O operador partícula livre \mathcal{L}^0 e $e^2\mathcal{L}'$. Primeiro vamos encontrar a equação integral para a função de Green. A equação para a função de Green é:

$$\mathcal{L}_{y''}^0 G(y'' | y') + e^2 \mathcal{L}'_{y''} G(y'' | y') = \delta(y'' - y'), \quad (1.6.47)$$

com:

$$\begin{aligned} y &= \{q, v, t\} \\ \mathcal{L}_{y''}^0 &= \partial_{t''} + \sum_j \mathbf{v}_j'' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_j''}. \end{aligned}$$

Considerando $G^0(y'' | y')$ a função de Green de $\mathcal{L}_{y''}^0$, logo:

$$\mathcal{L}_{y''}^0 G^0(y'' | y') = \delta(y'' - y'). \quad (1.6.48)$$

Multiplicando 1.6.47 por $G^0(y | y'')$ e integrando por y'' , temos:

$$\begin{aligned} \int dy'' G^0(y | y'') \mathcal{L}_{y''}^0 G(y'' | y') + e^2 \int dy'' G^0(y | y'') \mathcal{L}'_{y''} G(y'' | y') &= \int dy'' G^0(y | y'') \delta(y'' - y') \\ &= G^0(y | y'). \end{aligned}$$

Integrando por partes o primeiro termo da equação acima, usando a condição de causalidade e lembrando que $\mathcal{L}_{y''}^0 G^0(y'|y'') = -\delta(y' - y'')$:

$$\begin{aligned} \int dy'' G^0(y|y'') \mathcal{L}_{y''}^0 G(y''|y') &= - \int dy'' G(y''|y') \mathcal{L}_{y''}^0 G^0(y|y'') \\ &= \int dy'' G(y''|y') \delta(y - y'') \\ &= G(y|y'). \end{aligned}$$

Então:

$$G(y|y') = G^0(y|y') - e^2 \int dy'' G^0(y|y'') \mathcal{L}_{y''}^0 G(y''|y')$$

ou,

$$G(qvt|q'v't') = G^0(qvt|q'v't') - e^2 \int dq'' \int dv'' \int_0^t dt'' G^0(qvt|q''v''t'') \mathcal{L}_{y''}^0 G(q''v''t''|q'v't').$$

Se fizermos a transformada de Laplace da função de Green obtemos o resolvente:

$$R(qv|q'v'; z) = R^0(qv|q'v'; z) - e^2 \int dq'' dv'' R^0(qv|q''v''; z) \mathcal{L}_{y''}^0 R(q''v''|q'v'; z).$$

Esta equação é resolvida por interações sucessivas:

$$\begin{aligned} R(qv|q'v'; z) &= R^0(qv|q'v'; z) - e^2 \int dq'' dv'' R^0(qv|q''v''; z) \mathcal{L}_{y''}^0 R^0(q''v''|q'v'; z) \\ &\quad + e^4 \int dq'' dv'' R^0(qv|q''v''; z) \int dq_3 dv_3 \mathcal{L}_{y''}^0 R^0(q''v''|q_3v_3; z) \mathcal{L}_{y_3}^0 R^0(q_3v_3|q'v'; z) \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

O resolvente $R(qv|q'v'; z)$ pode ser visto como o elemento de matriz $\langle qv|R(z)|q'v' \rangle$ do operador $R(z)$. Portanto:

$$\begin{aligned} R(z) &= R^0(z) - e^2 R^0(z) \mathcal{L}' R(z) \\ &= R^0(z) - e^2 R^0(z) \mathcal{L}' R^0(z) + e^4 R^0(z) \mathcal{L}' R^0(z) \mathcal{L}' R^0(z) + \dots \\ &= \sum_n e^{2n} R^0(z) [\mathcal{L}' R^0(z)]^n. \end{aligned}$$

E a ação de $R(z)$ na função $F(q,v)$ é

$$R(z) F \equiv \int dq' dv' \langle qv|R(z)|q'v' \rangle F(q', v').$$

Então podemos reescrever a Eq. 1.6.46 tal que:

$$\begin{aligned} f_N(t) &= \frac{1}{2\pi} \int dz e^{-izt} R(z) f_N(0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dz e^{-izt} \sum_n e^{2n} R^0(z) [\mathcal{L}' R^0(z)]^n f_N(0). \end{aligned} \quad (1.6.49)$$

Devido a $f_N(t)$ depender de $R^0(z)$ e este depende da função de Green não perturbada, então vamos encontrar $G^0(qvt|q'v't')$. Vimos que:

$$\mathcal{L}_{y''}^0 G^0(y''|y') = \delta(y'' - y')$$

$$\left(\partial_t + v \frac{\partial}{\partial q} \right) G^0(qvt|q'v't') = \delta(q - q') \delta(v - v') \delta(t - t') \quad (1.6.50)$$

Uma solução compatível com a equação acima é:

$$G^0(qvt|q'v't') = \delta(v - v') \Gamma^0(qt|q't')$$

tal que $\Gamma^0(qt|q't')$ é uma função de q , t , q' e t' . Esta função não tem dependência em v , pois v aparece em 1.6.50 apenas como um fator multiplicativo.

Então podemos reescrever 1.6.50, como:

$$\left(\partial_t + v' \frac{\partial}{\partial q} \right) \Gamma^0(qt|q't') = \delta(q - q') \delta(t - t').$$

Aplicando \mathcal{L}^{0-1} em ambos os lados da equação acima, temos:

$$\mathcal{L}^{0-1} \mathcal{L}^0 \Gamma^0(qt|q't') = \mathcal{L}^{0-1} \delta(q - q') \delta(t - t')$$

$$\Gamma^0(qt|q't') = \frac{1}{(2\pi)^2} \mathcal{L}^{0-1} \int d\omega dk e^{ik(q-q') + i\omega(t-t')}$$

Para encontrar $\Gamma^0(qt|q't')$ precisamos encontrar \mathcal{L}^{0-1} . Para encontrar \mathcal{L}^{0-1} vamos usar a seguinte relação:

$$\mathcal{L}^{0-1} \mathcal{L}^0 \delta(q - q') \delta(t - t') = \delta(q - q') \delta(t - t') \quad (1.6.51)$$

Mas:

$$\mathcal{L}^0 \delta(q - q') \delta(t - t') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\omega dk i(\omega + v'k) e^{i[k(x-x') + \omega(t-t)]},$$

ou seja,

$$\mathcal{L}^0 = i(\omega + v'k).$$

Logo:

$$\mathcal{L}^{0-1} = \frac{1}{i(\omega + v'k)},$$

pois temos que $\mathcal{L}^{0-1} \mathcal{L}^0 = 1$.

Agora que conhecemos \mathcal{L}^{0-1} podemos substituir na equação para $\Gamma^0(qt|q't')$:

$$\Gamma^0(qt|q't') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\omega dk \frac{e^{ik(q-q') + i\omega(t-t')}}{i(\omega + v'k)},$$

para resolver integrais deste tipo usamos o valor principal de Cauchy:

$$\phi(y) = \frac{1}{2\pi i} \int dx \frac{f(x)}{x - y} = \frac{1}{2} f(y) + \frac{1}{2\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x - y}.$$

Ou seja:

$$\int d\omega dk \frac{e^{ik(q-q')+i\omega(t-t')}}{i(\omega+v'k)} = 2\pi \left(\frac{1}{2} \int dk e^{ik(q-q')-iv'k(t-t')} + \frac{1}{2\pi i} \int dk \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{ik(q-q')+i\omega(t-t')}}{(\omega+v'k)} \right).$$

Podemos escrever a função delta de Dirac, tal que:

$$2\pi\delta(q-q'-v'(t-t')) = \int d\omega e^{ik(q-q')-iv'k(t-t')}$$

Logo:

$$\Gamma^0(qt|q't') = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{2} \delta(q-q'-v'(t-t')) + \frac{1}{2\pi i} \int dk \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{ik(q-q')+i\omega(t-t')}}{(\omega+v'k)} \right).$$

A parte principal satisfaz a seguinte relação:

$$\mathcal{P} \frac{1}{x} = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} dp \varepsilon(p) e^{ipx}$$

com:

$$\varepsilon(p) = \begin{cases} 1, & p > 0 \\ -1, & p < 0 \end{cases}$$

Usando estas relações em Γ^0 temos:

$$\begin{aligned} \Gamma^0(qt|q't') &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{2} \delta(q-q'-v'(t-t')) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi i} \int dk \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} dp \varepsilon(p) e^{ip(\omega+v'k)} e^{ik(q-q')+i\omega(t-t')} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{2} \delta(q-q'-v'(t-t')) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi i} \int dp \varepsilon(p) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i[\omega(t-t')+p\omega]} \frac{1}{2i} \int dk e^{i[k(q-q')+pv'k]} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{2} \delta(q-q'-v'(t-t')) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi i} \int dp \varepsilon(p) 2\pi \delta(t-t'+p) \frac{1}{2i} 2\pi \delta(q-q'+v'p) \right) \\ &= \frac{1}{2} \delta(q-q'-v'(t-t')) (1 - \varepsilon(t'-t)) \end{aligned}$$

Mas,

$$\varepsilon(t'-t) = -\varepsilon(t-t').$$

Portanto,

$$\Gamma^0(qt|q't') = \frac{1}{2} \delta(q-q'-v'(t-t')) (1 + \varepsilon(t-t')).$$

Vamos fazer a seguinte mudança:

$$\theta(t-t') = 1 + \varepsilon(t-t')$$

com $\theta(t - t')$ sendo a função de Heaviside. Assim:

$$\Gamma^0(qt|q't') = \frac{1}{2} \delta(q - q' - v'(t - t')) \theta(t - t'),$$

tal que a condição de causalidade da função de Green $\Gamma^0 = 0$ para $t < t'$ é satisfeita.

Voltando para a notação explícita, temos:

$$\begin{aligned} G^0(\{\mathbf{q}\}, \{\mathbf{v}\}, t | \{\mathbf{q}'\}, \{\mathbf{v}'\}, t') &= \delta(v - v') \delta(q - q' - v'(t - t')) \theta(t - t') \\ &= \theta(t - t') \prod_{j=1}^N \delta(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}'_j) \delta(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}'_j - \mathbf{v}'_j(t - t')). \end{aligned}$$

Na representação matricial G^0 é uma matriz diagonal nas velocidades, mas não na posição. Mas podemos encontrar uma base na qual G^0 é diagonal. Vamos escolher a base como sendo o conjunto de ondas planas,

$$\psi_{\{\mathbf{k}\}}(\mathbf{q}) = \Omega^{-N/2} e^{i \sum \mathbf{k}_j \mathbf{q}_j}.$$

A mudança de representação é feita como segue:

$$\begin{aligned} \langle k, v | G^0(t - t') | k', v' \rangle &= \Omega^{-N} \int (d\mathbf{q})^N (d\mathbf{q}')^N e^{-i \sum_j \mathbf{k}_j \mathbf{q}_j} \langle qv | G^0(t - t') | q'v' \rangle e^{i \sum_j \mathbf{k}'_j \mathbf{q}'_j} \\ &= \Omega^{-N} \int (d\mathbf{q})^N (d\mathbf{q}')^N e^{-i(\sum_j \mathbf{k}_j \mathbf{q}_j - \sum_j \mathbf{k}'_j \mathbf{q}'_j)} \theta(t - t') \\ &\quad \prod_{j=1}^N \delta(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}'_j) \delta(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}'_j - \mathbf{v}'_j(t - t')) \\ &= \theta(t - t') \prod_{j=1}^N \delta(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}'_j) \Omega^{-N} \int (d\mathbf{q})^N e^{-i(\sum_j \mathbf{k}_j \mathbf{q}_j - \sum_j \mathbf{k}'_j (\mathbf{q}_j - \mathbf{v}'_j(t - t')))} \\ &= \theta(t - t') \prod_{j=1}^N \delta(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}'_j) e^{-i \sum_j \mathbf{k}'_j \mathbf{v}'_j(t - t')} \delta_{\mathbf{k}_j - \mathbf{k}'_j} \end{aligned}$$

Ou seja, nesta representação o operador é diagonal. Agora vamos encontrar o operador resolvente não perturbado usando 1.6.45:

$$\begin{aligned} \langle k, v | R^0(z) | k', v' \rangle &= \int_0^\infty d\tau e^{iz\tau} e^{-i \sum \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{v}'_j \tau} \prod_{j=1}^N \delta_{\mathbf{k}_s - \mathbf{k}'_s} \delta(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}'_s) \\ &= \prod_{j=1}^N \delta_{\mathbf{k}_s - \mathbf{k}'_s} \delta(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}'_s) \int_0^\infty d\tau e^{i\tau(z - \sum \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{v}'_j)} \\ &= \prod_{j=1}^N \delta_{\mathbf{k}_s - \mathbf{k}'_s} \delta(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}'_s) \frac{1}{i \left(\sum_j \mathbf{k}_j \mathbf{v}'_j - z \right)} \end{aligned}$$

onde usamos a seguinte propriedade [3]

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x + i\epsilon} = -i\pi \delta_+(x) = -i \int_0^\infty dk e^{ikx}$$

Vamos definir um operador no espaço das velocidades sendo:

$$\langle k | R^0(z) | k' \rangle = \frac{1}{i \left(\sum_j \mathbf{k}_j \mathbf{v}_j - z \right)} \prod_{j=1}^N \delta_{\mathbf{k}_j - \mathbf{k}'_j}.$$

Como vimos em 1.6.49, para calcular $f_N(t)$, precisamos calcular os elementos de matriz da perturbação \mathcal{L}' . Para encontrar a matriz para \mathcal{L}' expandimos o potencial de interação em série de Fourier, ou seja,

$$V_{jn}(|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_n|) = \frac{8\pi^3}{\Omega} \sum_{\mathbf{l}} V_l e^{i\mathbf{l}(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_n)}.$$

Se as forças de interação são centrais, assumiremos aqui, então V_l deve satisfazer a condição:

$$V_{-l} = V_l$$

Como vimos:

$$\mathcal{L}' = -m^{-1} \sum_{j < n} \sum (\nabla_j V_{jn}) \partial_{jn}$$

ou

$$\mathcal{L}'_{jn} = -m^{-1} (\nabla_j V_{jn}) \partial_{jn}.$$

Logo:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_N | \mathcal{L}'_{jn} | \mathbf{k}'_1 \dots \mathbf{k}'_N \rangle &= \Omega^{-N} \left(\frac{8\pi^3}{\Omega} \right) \sum_{\mathbf{l}} \int (d\mathbf{q}_1 \dots d\mathbf{q}_N) e^{-i \sum_r \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{q}_r} \\ &\quad m^{-1} V_l (-i\mathbf{l} \cdot \partial_{jn}) e^{i\mathbf{l}(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_n)} e^{i \sum_r \mathbf{k}'_r \cdot \mathbf{q}_r} \\ &= \Omega^{-N} \left(\frac{8\pi^3}{\Omega} \right) m^{-1} \sum_{\mathbf{l}} V_l (-i\mathbf{l} \cdot \partial_{jn}) \int (d\mathbf{q}_1 \dots d\mathbf{q}_N) \\ &\quad e^{-i \sum_{r \neq j, n} \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{q}_r + i(-\mathbf{k}_j + \mathbf{l}) \cdot \mathbf{q}_j + i(-\mathbf{k}_n - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{q}_n + i \sum_{r \neq j, n} \mathbf{k}'_r \cdot \mathbf{q}_r} \\ &= \Omega^{-N} \left(\frac{8\pi^3}{\Omega} \right) m^{-1} \sum_{\mathbf{l}} V_l (-i\mathbf{l} \cdot \partial_{jn}) \delta_{\mathbf{k}'_j + \mathbf{l} - \mathbf{k}_j} \delta_{\mathbf{k}'_n - \mathbf{l} - \mathbf{k}_n} \prod_{r \neq j, n} \delta_{\mathbf{k}'_r - \mathbf{k}_r} \Omega^N \\ &= \left(\frac{8\pi^3}{\Omega} \right) m^{-1} \sum_{\mathbf{l}} V_l (-i\mathbf{l} \cdot \partial_{jn}) \delta_{\mathbf{k}'_j + \mathbf{l} - \mathbf{k}_j} \delta_{\mathbf{k}'_n - \mathbf{l} - \mathbf{k}_n} \prod_{r \neq j, n} \delta_{\mathbf{k}'_r - \mathbf{k}_r} \end{aligned}$$

Os elementos de \mathcal{L}'_{jn} diferentes de zero obedecem a seguintes regra de seleção:

$$\begin{cases} \mathbf{k}_r = \mathbf{k}'_r & \text{para } r \neq j, n \\ \mathbf{k}'_j = \mathbf{k}_j - \mathbf{l} \\ \mathbf{k}'_n = \mathbf{k}_n + \mathbf{l} \end{cases}$$

Como vimos:

$$\begin{aligned} f_N(x, v, 0) &= \sum_{\{\mathbf{k}''\}} \tilde{\rho}_{\{\mathbf{k}''\}}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, 0) e^{i \sum \mathbf{k}''_j \cdot \mathbf{x}_j} \\ &= \sum_{\{\mathbf{k}''\}} \tilde{\rho}_{\{\mathbf{k}''\}}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, 0) | \{\mathbf{k}''\} \rangle \end{aligned} \quad (1.6.52)$$

E de forma análoga:

$$f_N(x, v, t) = \sum_{\{\mathbf{k}''\}} \tilde{\rho}_{\{\mathbf{k}''\}}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) | \{\mathbf{k}''\} \rangle. \quad (1.6.53)$$

Usando as Eqs. 1.6.52, 1.6.53 e

$$\mathbb{1} = \sum_{\{\mathbf{k}'\}} | \{\mathbf{k}'\} \rangle \langle \{\mathbf{k}'\} |$$

na Eq. 1.6.49, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{\{\mathbf{k}''\}} \tilde{\rho}_{\{\mathbf{k}''\}}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) | \{\mathbf{k}''\} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int dz e^{-izt} \sum_{n=0}^{\infty} (-e^2)^n \sum_{\{\mathbf{k}'\}} R^0(z) [\mathcal{L}' R^0(z)]^n | \{\mathbf{k}'\} \rangle \\ &\quad \sum_{\{\mathbf{k}''\}} \tilde{\rho}_{\{\mathbf{k}''\}}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, 0) \langle \{\mathbf{k}'\} | \{\mathbf{k}''\} \rangle. \end{aligned}$$

Multiplicando por $\langle \mathbf{k} |$, temos:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{\{\mathbf{k}\}}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) &= \frac{1}{2\pi} \int dz e^{-izt} \sum_{n=0}^{\infty} (-e^2)^n \sum_{\{\mathbf{k}'\}} \langle \{\mathbf{k}\} | R^0(z) [\mathcal{L}' R^0(z)]^n | \{\mathbf{k}'\} \rangle \\ &\quad \tilde{\rho}_{\{\mathbf{k}'\}}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, 0) \end{aligned}$$

Conforme a Tabela I.1, temos que:

$$\begin{aligned} \Omega^{-N} \left(\frac{8\pi^3}{\Omega} \right)^\nu \rho_{\{\mathbf{k}\}}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) &= (2\pi)^{-1} \int dz e^{-izt} \sum_{n=0}^{\infty} (-e^2)^n \left(\frac{8\pi^3}{\Omega} \right)^{\nu'} \Omega^{-N} \\ &\quad \sum_{\{\mathbf{k}'\}} \langle \{\mathbf{k}\} | R^0(z) [\mathcal{L}' R^0(z)]^n | \{\mathbf{k}'\} \rangle \rho_{\{\mathbf{k}'\}}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, 0) \end{aligned}$$

ou:

$$\begin{aligned} \rho_{\{\mathbf{k}\}}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) &= (2\pi)^{-1} \int dz e^{-izt} \sum_{n=0}^{\infty} (-e^2)^n \left(\frac{8\pi^3}{\Omega} \right)^{\nu'-\nu} \\ &\quad \sum_{\{\mathbf{k}'\}} \langle \{\mathbf{k}\} | R^0(z) [\mathcal{L}' R^0(z)]^n | \{\mathbf{k}'\} \rangle \rho_{\{\mathbf{k}'\}}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, 0). \end{aligned} \quad (1.6.54)$$

Vamos chamar $\rho_{\mathbf{k}}^0(|t)$ o primeiro termo da equação acima para $n=0$, logo:

$$\begin{aligned} \rho_{\{\mathbf{k}\}}^0(|t) &= (2\pi)^{-1} \int dz e^{-izt} \left(\frac{8\pi^3}{\Omega} \right)^{\nu'-\nu} \\ &\quad \sum_{\{\mathbf{k}'\}} \langle \{\mathbf{k}\} | R^0(z) | \{\mathbf{k}'\} \rangle \rho_{\{\mathbf{k}'\}}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, 0) \\ &= (2\pi)^{-1} \int dz e^{-izt} \left(\frac{8\pi^3}{\Omega} \right)^{\nu'-\nu} \sum_{\{\mathbf{k}'\}} \frac{1}{i(\sum \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{v}_j - z)} \prod_{s=1}^N \delta_{\mathbf{k}_s - \mathbf{k}'_s} \rho_{\{\mathbf{k}'\}}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, 0) \\ &= (2\pi)^{-1} \int dz e^{-izt} \left(\frac{8\pi^3}{\Omega} \right)^{\nu'-\nu} \frac{1}{i(\sum \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{v}_j - z)} \rho_{\{\mathbf{k}\}}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, 0) \end{aligned}$$

O segundo termo para n=1:

$$\begin{aligned}
\rho_{\{\mathbf{k}\}}^1(\cdot | \cdot; t) &= (2\pi)^{-1} \int dze^{-izt} (-e^2) \left(\frac{8\pi^3}{\Omega} \right)^{\nu'-\nu} \\
&\quad \sum_{\{\mathbf{k}'\}} \langle \{\mathbf{k}\} | R^0(z) [\mathcal{L}' R^0(z)] | \{\mathbf{k}'\} \rangle \rho_{\{\mathbf{k}'\}}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, 0) \\
&= (2\pi)^{-1} \int dze^{-izt} (-e^2) \left(\frac{8\pi^3}{\Omega} \right)^{\nu'-\nu} \sum_{\{\mathbf{k}'\}} \sum_{j < n} \frac{1}{i(\sum \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{v}_j - z)} \langle \{\mathbf{k}\} | \mathcal{L}'_{jn} | \{\mathbf{k}'\} \rangle \\
&\quad \frac{1}{i(\sum \mathbf{k}'_j \cdot \mathbf{v}_j - z)} \rho_{\{\mathbf{k}'\}}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, 0)
\end{aligned}$$

O terceiro termo para n=2:

$$\begin{aligned}
\rho_{\{\mathbf{k}\}}^2(\cdot | \cdot; t) &= (2\pi)^{-1} \int dze^{-izt} (-e^2)^2 \left(\frac{8\pi^3}{\Omega} \right)^{\nu'-\nu} \\
&\quad \sum_{\{\mathbf{k}'\}} \langle \{\mathbf{k}\} | R^0(z) [\mathcal{L}' R^0(z) \mathcal{L}' R^0(z)] | \{\mathbf{k}'\} \rangle \rho_{\{\mathbf{k}'\}}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, 0) \\
&= (2\pi)^{-1} \int dze^{-izt} (-e^2)^2 \left(\frac{8\pi^3}{\Omega} \right)^{\nu'-\nu} \sum_{\{\mathbf{k}'\}} \sum_{\{\mathbf{k}''\}} \sum_{j < n} \sum_{k < m} \frac{1}{i(\sum \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{v}_j - z)} \\
&\quad \langle \{\mathbf{k}\} | \mathcal{L}'_{jn} | \{\mathbf{k}''\} \rangle \frac{1}{i(\sum \mathbf{k}''_j \cdot \mathbf{v}_j - z)} \langle \{\mathbf{k}''\} | \mathcal{L}'_{km} | \{\mathbf{k}'\} \rangle \\
&\quad \frac{1}{i(\sum \mathbf{k}'_j \cdot \mathbf{v}_j - z)} \rho_{\{\mathbf{k}'\}}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, 0)
\end{aligned}$$

O quarto termo para n=3:

$$\begin{aligned}
\rho_{\{\mathbf{k}\}}^3(\cdot | \cdot; t) &= (2\pi)^{-1} \int dze^{-izt} (-e^2)^3 \left(\frac{8\pi^3}{\Omega} \right)^{\nu'-\nu} \\
&\quad \sum_{\{\mathbf{k}'\}} \langle \{\mathbf{k}\} | R^0(z) [\mathcal{L}' R^0(z) \mathcal{L}' R^0(z) \mathcal{L}' R^0(z)] | \{\mathbf{k}'\} \rangle \rho_{\{\mathbf{k}'\}}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, 0) \\
&= (2\pi)^{-1} \int dze^{-izt} (-e^2)^3 \left(\frac{8\pi^3}{\Omega} \right)^{\nu'-\nu} \sum_{\{\mathbf{k}'\}} \sum_{\{\mathbf{k}''\}} \sum_{\{\mathbf{k}^v\}} \sum_{j < n} \sum_{p < m} \sum_{a < b} \frac{1}{i(\sum \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{v}_j - z)} \\
&\quad \langle \{\mathbf{k}\} | \mathcal{L}'_{jn} | \{\mathbf{k}''\} \rangle \frac{1}{i(\sum \mathbf{k}''_j \cdot \mathbf{v}_j - z)} \langle \{\mathbf{k}''\} | \mathcal{L}'_{pm} | \{\mathbf{k}^v\} \rangle \frac{1}{i(\sum \mathbf{k}^v_j \cdot \mathbf{v}_j - z)} \\
&\quad \langle \{\mathbf{k}^v\} | \mathcal{L}'_{ab} | \{\mathbf{k}'\} \rangle \frac{1}{i(\sum \mathbf{k}'_j \cdot \mathbf{v}_j - z)} \rho_{\{\mathbf{k}'\}}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, 0)
\end{aligned}$$

E assim por diante.

Então o quarto termo da Eq. 1.6.54 para $\{\mathbf{k}\}=(0, \dots, k_\alpha, \dots)$:

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathbf{k}_\alpha}^3(\alpha|\dots;t) &= (2\pi)^{-1} \int dz e^{-izt} (-e^2)^3 \left(\frac{8\pi^3}{\Omega}\right)^{\nu'-\nu} \frac{1}{i(\mathbf{k}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha - z)} \sum_{\mathbf{k}'_\alpha} \sum_{\mathbf{k}''_n} \sum_n \langle \mathbf{k}_\alpha | \mathcal{L}'_{\alpha n} | \mathbf{k}'''_\alpha \mathbf{k}'''_n \rangle \\
&\quad \sum_m \sum_{\mathbf{k}^v_m} \sum_{\mathbf{k}^v_\alpha} \frac{1}{i(\mathbf{k}'''_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha + \mathbf{k}'''_n \cdot \mathbf{v}_n - z)} \langle \mathbf{k}'''_\alpha \mathbf{k}'''_n | \mathcal{L}'_{nm} | \mathbf{k}^v_\alpha \mathbf{k}^v_m \rangle \\
&\quad \frac{1}{i(\mathbf{k}^v_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha + \mathbf{k}^v_m \cdot \mathbf{v}_m - z)} \sum_{a < b} \sum_{\mathbf{k}'_m} \sum_{\mathbf{k}'_\alpha} \sum_{\mathbf{k}'_a} \sum_{\mathbf{k}'_b} \langle \mathbf{k}^v_m \mathbf{k}^v_\alpha | \mathcal{L}'_{ab} | \mathbf{k}'_m \mathbf{k}'_\alpha \mathbf{k}'_a \mathbf{k}'_b \rangle \\
&\quad \frac{1}{i(\mathbf{k}'_m \cdot \mathbf{v}_m + \mathbf{k}'_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha + \mathbf{k}'_a \cdot \mathbf{v}_a + \mathbf{k}'_b \cdot \mathbf{v}_b - z)} \rho_{\mathbf{k}'_m \mathbf{k}'_\alpha \mathbf{k}'_a \mathbf{k}'_b}(\alpha, m, a, b | \dots, 0), \tag{1.6.55}
\end{aligned}$$

com os \mathbf{k} obedecendo a regra de seleção \mathcal{L}'_{jn} , logo:

$$\begin{cases} \mathbf{k}'''_\alpha = \mathbf{k}_\alpha - \mathbf{1} \\ \mathbf{k}'''_n = \mathbf{1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{k}^v_\alpha = \mathbf{k}'''_\alpha \\ \mathbf{k}^v_n = \mathbf{k}'''_n - \mathbf{1} = \mathbf{0} \\ \mathbf{k}^v_m = \mathbf{k}'''_m + \mathbf{1} = \mathbf{1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{k}'_m = \mathbf{k}^v_m = \mathbf{1} \\ \mathbf{k}'_\alpha = \mathbf{k}^v_\alpha = \mathbf{k}'''_\alpha = \mathbf{k}_\alpha - \mathbf{1} \\ \mathbf{k}'_a = \mathbf{k}^v_a - \mathbf{1} = -\mathbf{1} \\ \mathbf{k}'_b = \mathbf{k}^v_b + \mathbf{1} = \mathbf{1}. \end{cases}$$

A Eq. 1.6.55 é lida da direita para a esquerda.

Agora podemos representar este termo de $\rho_{\{\mathbf{k}\}}(v, t)$ como um diagrama, vamos introduzir as seguintes regras:

1. Ao elemento de matriz de $R_0(z)$ associamos a linhas indo da direita para a esquerda, o número de linhas é igual ao número de vetores de onda não-nulos no conjunto \mathbf{k} ;
2. Cada linha tem um índice que representa a partícula associada a um correspondente vetor de onda;
3. A cada elemento de matriz de \mathcal{L}' nós associamos um vértice a qual representa uma interação;
4. Linhas pontilhadas estão associadas a partículas com $\mathbf{k}=\mathbf{0}$.

Para o termo $\rho_{\mathbf{k}'_a \mathbf{k}'_m \mathbf{k}'_\alpha \mathbf{k}'_b}^3(\alpha, m, a, b | \dots, t)$ o diagrama é apresentado na Fig. 1.6.9.

Os diagramas mais simples são os com um vértice, eles dão origem a todos os outros diagramas. Tal diagramas são apresentados na Fig. 1.6.10.

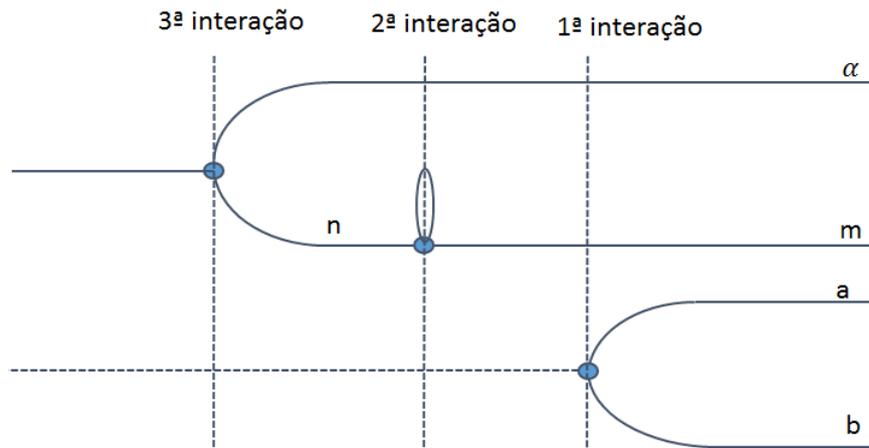


Figura 1.6.9: Diagrama de $\rho_{\mathbf{k}'_a \mathbf{k}'_m \mathbf{k}'_a \mathbf{k}'_b}^3(\alpha, m, a, b | \dots, t)$.

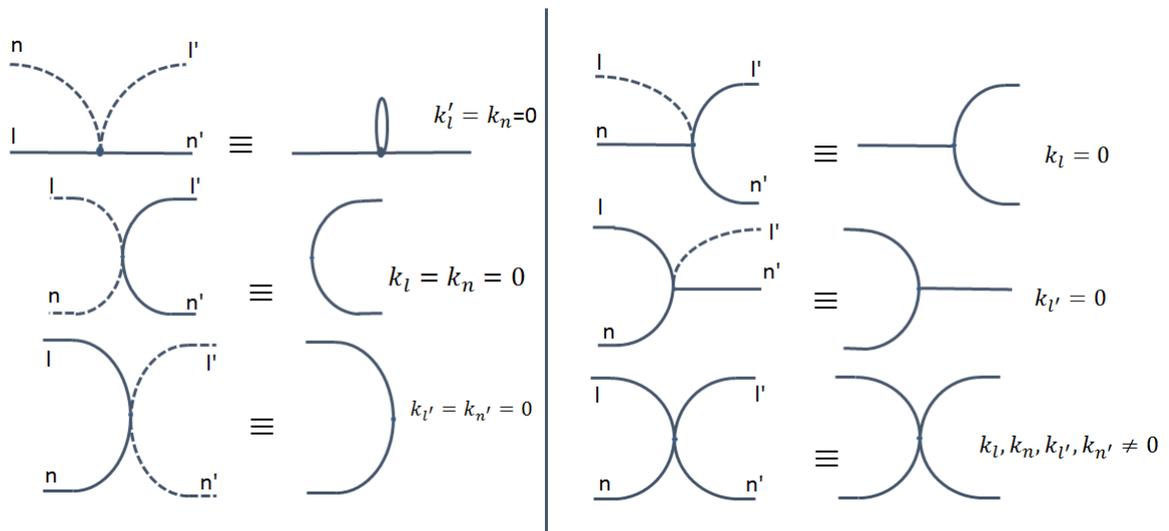


Figura 1.6.10: Possíveis tipos de diagramas de uma interação.

Para exemplificar, consideramos que em $t=0$ o único coeficiente $\rho_{\{\mathbf{k}'\}}(v, 0)$, que é diferente de zero, é $\rho_1(v, 0)$. Então os dois diagramas possíveis para 1ª interação são apresentados na Fig. 1.6.11[4].

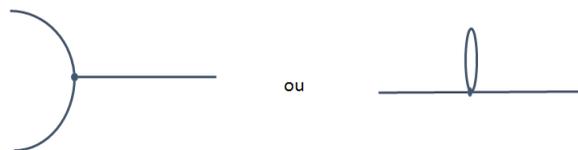


Figura 1.6.11: Possíveis tipos de diagramas para 1ª interação.

Para a segunda interação temos:

Se queremos encontrar $\rho_1^2(t)$, então apenas dois termos contribuem:

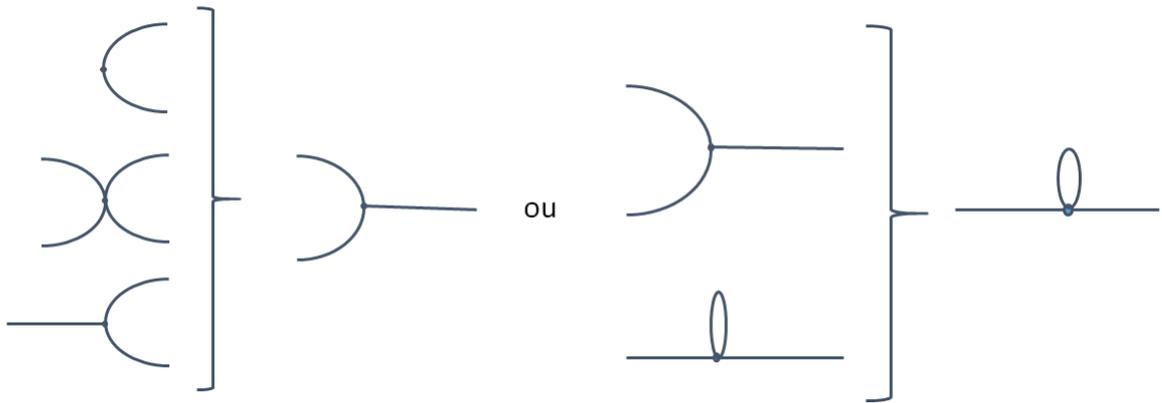


Figura 1.6.12: Possíveis diagramas para a 2° interação.

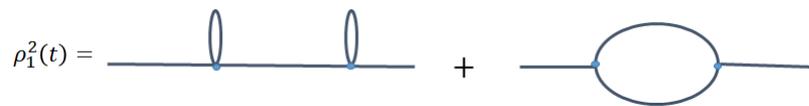


Figura 1.6.13: Diagramas para $\rho_1^2(t)$.

O diagrama



Figura 1.6.14: Diagramas para $\rho_{\mathbf{k}_l}^2(t)$.

é representado pelo termo

$$\rho_{\mathbf{k}_l}^2(v_l, t) = \langle \mathbf{k}_l, 0 | \mathcal{L}' | \mathbf{k}_l - \mathbf{1}, 1 \rangle \langle \mathbf{k}_l - \mathbf{1}, 1 | \mathcal{L}' | \mathbf{k}_l, 0 \rangle \rho_{\mathbf{k}_l}(\mathbf{v}_l, 0).$$

Capítulo II

Equações cinéticas

Neste capítulo iremos apresentar as principais equações cinéticas existentes para sistemas de partículas neutras e carregadas(plasma). Inicialmente apresentaremos a representação de cluster e aplicaremos esta representação nas equações BBKGY para obter as equações básicas.

2.1 Função Correlação

Inicialmente considere um sistema de s partículas, este sistema é descorrelacionado quando a probabilidade de encontrar uma partícula no estado x_i independe da presença de outras partículas. A função distribuição para este sistema é:

$$f_s(x_1, \dots, x_s) = \prod_j f_1(x_j).$$

Este é um caso particular, pois na maioria dos sistemas as interações gera uma dependência entre as partículas, ou seja, uma correlação entre as partículas. A correlação depende da distância entre as partículas e quando a distância tende a infinito a correlação é nula. Descrevemos a correlação tal que:

$$f_s(x_1, \dots, x_s) = \prod_j f_1(x_j) + g'_s(x_1, \dots, x_s),$$

esta representação é conhecida como representação de cluster.

A função $g'_s(x_1, \dots, x_s)$ representa todas as possíveis partições entre um conjunto de s partículas. Por exemplo,

$$f_2(x_1, x_2) = f(x_1) f(x_2) + g_2(x_1, x_2), \quad (2.1.1)$$

$$\begin{aligned} f_3(x_1, x_2, x_3) &= f(x_1) f(x_2) f(x_3) + f(x_1) g_2(x_2, x_3) + f(x_2) g_2(x_1, x_3) \\ &\quad + f(x_3) g_2(x_1, x_2) + g_3(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

As funções de correlação $g_s(x_1, \dots, x_s)$ são simétricas sob permutação de partículas,

$$g_s(\dots, x_j, \dots, x_n, \dots) = g_s(\dots, x_n, \dots, x_j, \dots).$$

Vamos considerar a normalização destas funções correlações. Integrando 2.1.1 pelas variáveis x_1 e x_2 e multiplicando ambos os lados por N^{-2} , temos:

$$N^{-2} \int dx_1 dx_2 f_2(x_1, x_2) = N^{-1} \int dx_1 f(x_1) \int dx_2 f(x_2) N^{-1} + N^{-2} \int dx_1 dx_2 g_2(x_1, x_2). \quad (2.1.3)$$

No limite termodinâmico, ou seja, quando $N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$ e $\frac{N}{V} = n$, temos da Eq. 1.5.17:

$$\int dx_1 \dots dx_s f_s(x_1, \dots, x_s) = N \dots (N - s - 1) \rightarrow N^s$$

$$N^{-s} \int dx_1 \dots dx_s f_s(x_1, \dots, x_s) = 1.$$

Portanto usando esta relação, obtemos

$$N^{-2} \int dx_1 dx_2 g_2(x_1, x_2) = 0.$$

E generalizando para s , segue que

$$N^{-s} \int dx_1 dx_2 \dots dx_s g_s(x_1, \dots, x_s) = 0 \quad s \geq 2 \quad (\text{no limite termodinâmico}).$$

No limite termodinâmico toda normalização de f_s depende apenas dos termos descorrelacionados e todos os termos da correlação não contribuem para a normalização.

Agora vamos substituir a representação de cluster nas equações BBKGY. Como vimos, os termos do lado direito da BBKGY são representados usando diagramas. Vamos acrescentar a idéia da correlação nos diagramas, a correlação será representada por linhas conectando os diagramas.

Os diagramas com os termos de correlação são:

- Para $s=1$:

$$\partial_t f(x_1) - L_1^0 f(x_1) = \int dx_2 [L'_{12} f(x_1) f(x_2) + L'_{12} g_2(x_1, x_2)] \quad (2.1.4)$$

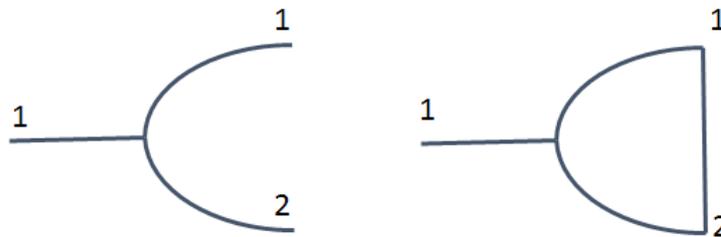


Figura 2.1.1: Diagrama da $f(x_1)$ com a correlação.

- Para $s=2$:

Usando 2.1.1 e 2.1.2 na segunda equação BBKGY, temos:

$$\begin{aligned}
 \partial_t f_2(x_1, x_2) - [L_1^0 + L_2^0] f_2(x_1, x_2) &= L'_{12} [f(x_1) f(x_2) + g_2(x_1, x_2)] \\
 &+ \int dx_3 \{ L'_{13} [f(x_1) f(x_2) f(x_3) + f(x_1) g_2(x_2, x_3) \\
 &+ f(x_2) g_2(x_1, x_3) + f(x_3) g_2(x_1, x_2) + g_3(x_1, x_2, x_3)] \} \\
 &+ \int dx_3 \{ L'_{23} [f(x_1) f(x_2) f(x_3) + f(x_1) g_2(x_2, x_3) \\
 &+ f(x_2) g_2(x_1, x_3) + f(x_3) g_2(x_1, x_2) + g_3(x_1, x_2, x_3)] \}.
 \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

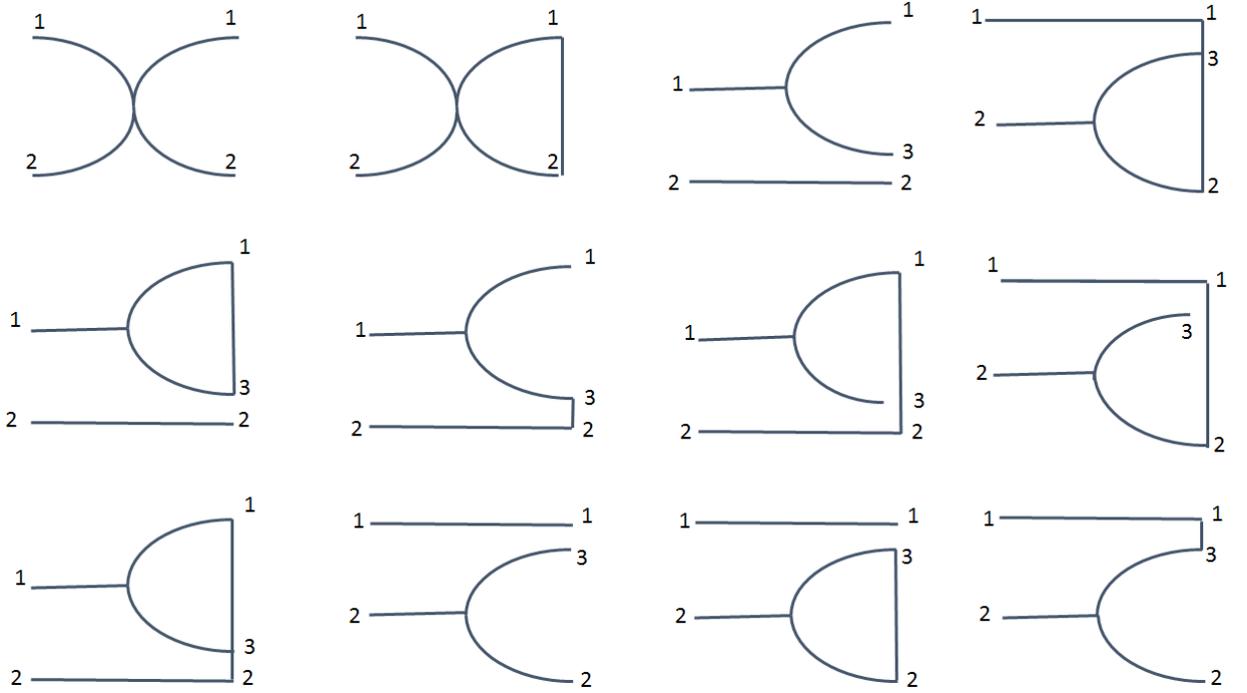


Figura 2.1.2: Diagrama da $f_2(x_1, x_2)$ com a correlação.

No lado esquerdo da Eq. 2.1.5, temos:

$$\begin{aligned}
 \partial_t f_2(x_1, x_2) - [L_1^0 + L_2^0] f_2(x_1, x_2) &= f(x_1) \partial_t f(x_2) + f(x_2) \partial_t f(x_1) + \partial_t g_2(x_1, x_2) \\
 &- L_1^0 f(x_1) f(x_2) - L_1^0 g_2(x_1, x_2) \\
 &- L_2^0 f(x_1) f(x_2) - L_2^0 g_2(x_1, x_2)
 \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Da Eq.2.1.4:

$$\begin{aligned}
 \partial_t f(x_1) &= L_1^0 f(x_1) + \int dx_3 [L'_{13} f(x_1) f(x_3) + L'_{13} g_3(x_1, x_3)] \\
 \partial_t f(x_2) &= L_2^0 f(x_2) + \int dx_3 [L'_{23} f(x_2) f(x_3) + L'_{23} g_3(x_2, x_3)].
 \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Substituindo as Eqs. 2.1.7 na Eq. 2.1.6 e substituindo a Eq. 2.1.6 na Eq. 2.1.5, temos:

$$\begin{aligned} \partial_t g_2(x_1, x_2) - [L_1^0 + L_2^0] g_2(x_1, x_2) = & L'_{12} [f(x_1) f(x_2) + g_2(x_1, x_2)] \\ & + \int dx_3 \{ L'_{13} f(x_1) g_2(x_2, x_3) + L'_{23} f(x_2) g_2(x_1, x_3) \\ & + (L'_{13} + L'_{23}) [f(x_3) g_2(x_1, x_2) + g_3(x_1, x_2, x_3)] \} \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Ao substituir a Eq. 2.1.7 na Eq. 2.1.6 cancelamos os seguintes diagramas:

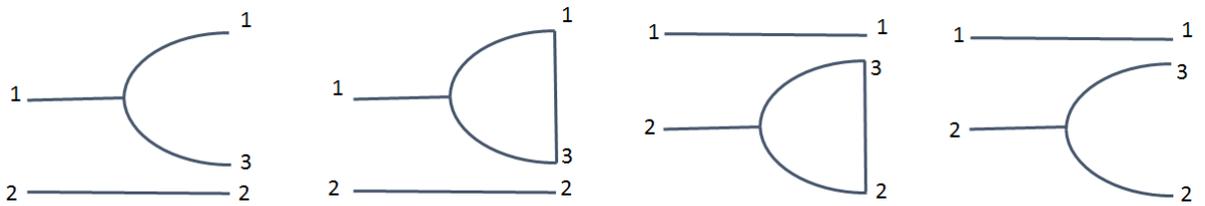


Figura 2.1.3: Diagramas cancelados.

Ou seja foram descartados os termos descorrelacionados.

A Eq. 2.1.8 descreve a evolução da correlação entre duas partículas e é uma equação não linear. Veremos nas seções seguintes um método para resolver estas equações para sistemas homogêneos.

Então os diagramas para a evolução de $g_2(x_1, x_2)$ são:

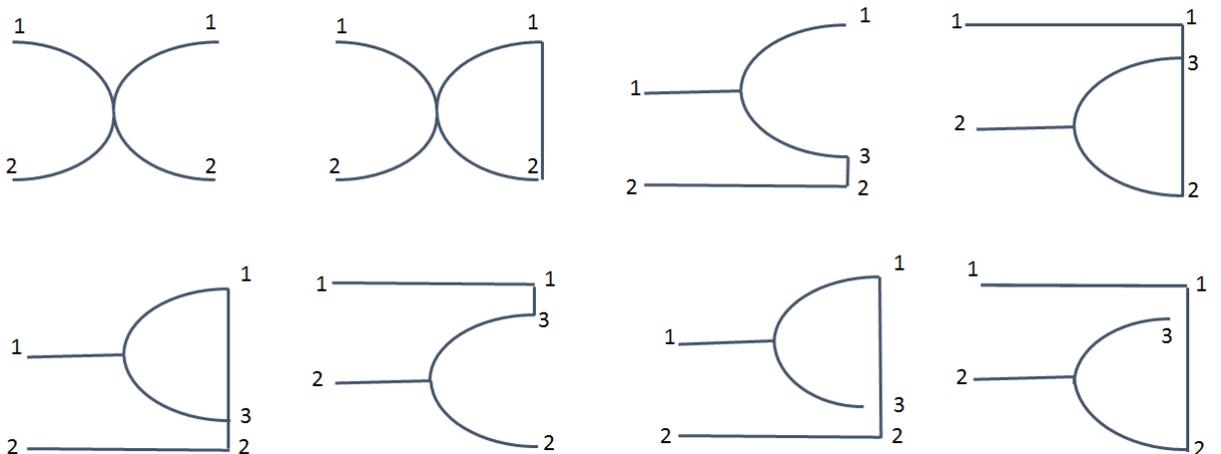


Figura 2.1.4: Diagramas da evolução de $g_2(x_1, x_2)$.

2.2 Equação de Vlasov

Para obter a equação de Vlasov vamos usar a teoria da perturbação. Para tanto vamos começar de uma solução exata conhecida e considerar um estado próximo ao estado

de referência.

Como vimos a Eq. 2.1.4 descreve a evolução da função distribuição de uma partícula e a Eq. 2.1.8 descreve a evolução da correlação, usaremos estas equações como base. O estado de referência é quando todas as interações são desligadas. Depois consideramos que $V(r)$ é pequeno,

$$V(r) = \lambda v(r) \quad (2.2.9)$$

com $\lambda \ll 1$, ou seja, o sistema é fracamente acoplado.

Os operadores

$$L_j^0 = -\mathbf{v} \cdot \nabla_j$$

e

$$L'_{jn} = (\nabla_j V_{jn}) \cdot \partial_{jn},$$

têm os seguintes ordenamentos em λ :

$$L_j^0 = O(\lambda^0) \quad \text{e} \quad L'_{jn} = O(\lambda^1). \quad (2.2.10)$$

A função distribuição reduzida f_s não está associada a nenhuma interação, já que esta descreve apenas uma probabilidade estatística, podemos afirmar que

$$f(x_i) = O(\lambda^0). \quad (2.2.11)$$

A interação entre partículas produz correlação, portanto uma interação entre duas partículas gera a correlação g_2 entre duas partículas. Para que três partículas estejam correlacionadas é necessário pelo menos duas interações. Então:

$$g_2(x_1, x_2) = O(\lambda),$$

$$g_3(x_1, x_2, x_3) = O(\lambda^2) \quad (2.2.12)$$

Agora que sabemos a dependência das funções e operadores com o potencial vamos resolver as Eq. 2.1.4 e Eq. 2.1.8 sem interação, ou seja, para $\lambda = 0$. Neste caso temos:

$$\partial_t f(x_1, t) = L_1^0 f(x_1, t) \quad (2.2.13)$$

$$\partial_t g_2(x_1, x_2, t) = (L_1^0 + L_2^0) g_2(x_1, x_2, t), \quad (2.2.14)$$

estas equações são desacopladas e são muito simples de resolver. Vamos introduzir $U_1^0(t)$ sendo o propagador não perturbado, este operador atua em $f(x_1)$, ou seja,

$$f(x_1, t) = U_1^0(t) f(x_1, 0) \quad (2.2.15)$$

tal que,

$$U_1^0(t) = e^{L_1^0 t} = e^{-\mathbf{v}_1 \cdot \nabla_1 t}.$$

Então

$$f(x_1, t) = e^{-\mathbf{v}_1 \cdot \nabla_1 t} f(x_1, 0).$$

Vamos usar a seguinte propriedade:

$$e^{a \frac{d}{dx}} f(x) = f(x + a)$$

□ *Prova:*

Expandindo o termo da esquerda:

$$\begin{aligned} e^{a\frac{d}{dx}} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(a \frac{d}{dx} \right)^n f(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} f^n(x). \end{aligned}$$

Expandindo a função $f(x)$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

E fazendo a mudança:

$$a = x - x_0 \quad \longrightarrow \quad x = x_0 + a.$$

Temos:

$$f(x_0 + a) = f(x_0) + f'(x_0)a + \frac{f''(x_0)}{2!}a^2 + \dots$$

Fazendo a mudança $x_0 \longrightarrow x$,

$$\begin{aligned} f(x + a) &= f(x) + f'(x)a + \frac{f''(x)}{2!}a^2 + \dots \\ &= \sum_n \frac{a^n}{n!} f^n(x) \end{aligned}$$

Portanto:

$$e^{a\frac{d}{dx}} f(x) = f(x + a) \quad \blacksquare$$

Então usando esta propriedade, temos que:

$$f(\mathbf{q}_1, \mathbf{v}_1, t) = f(\mathbf{q}_1 - \mathbf{v}_1 t, \mathbf{v}_1, 0). \quad (2.2.16)$$

Podemos resolver a Eq. 2.2.14 de forma análoga usando o propagador

$$U_{12}^0(t) = e^{(L_1^0 + L_2^0)t},$$

como L_1^0 e L_2^0 comutam

$$U_{12}^0(t) = e^{L_1^0 t} e^{L_2^0 t} = U_1^0(t) U_2^0(t)$$

e

$$g_2(x_1, x_2, t) = U_{12}^0(t) g_2(x_1, x_2, 0).$$

Estas são as soluções das Eq. 2.1.4 e Eq. 2.1.8 para a partícula livre.

Considerando agora $V(r) = O(\lambda)$ com $\lambda \ll 1$ na Eq. 2.1.4, o primeiro termo do lado direito é de ordem λ e o segundo termo de ordem λ^2 . Considerando apenas os termos de ordem λ na Eq. 2.1.4, temos:

$$\partial_t f(x_1, t) = L_1^0 f(x_1, t) + \int dx_2 L'_{12} f(x_1, t) f(x_2, t).$$

Ou seja, estamos considerando apenas o diagrama:

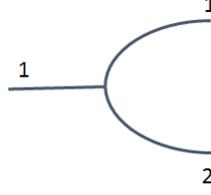


Figura 2.2.5: Diagramas da evolução de $f(x_1)$ de ordem λ .

Reescrevendo a equação acima:

$$\begin{aligned}\partial_t f(x_1, t) &= L_1^0 f(x_1, t) + \int dx_2 \nabla_1 V_{12} \cdot \partial_{12} f(x_1, t) f(x_2, t) \\ &= L_1^0 f(x_1, t) + \left(\int dx_2 \nabla_1 V_{12} f(x_2, t) \right) \partial_1 f(x_1, t) \\ &= L_1^0 f(x_1, t) + \mathcal{V}\{ff\},\end{aligned}$$

com:

$$\mathcal{V}\{ff\} = m^{-1} \nabla_1 \int dx_2 V_{12}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) f(\mathbf{q}_2, \mathbf{v}_2, t) \partial_1 f(\mathbf{q}_1, \mathbf{v}_1, t)$$

e $\partial_1 = \frac{d}{d\mathbf{v}_1}$.

Este termo é o gradiente do potencial médio

$$\bar{V}(\mathbf{q}_1, t) = \int d\mathbf{q}_2 d\mathbf{v}_2 V_{12}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) f(\mathbf{q}_2, \mathbf{v}_2, t).$$

Cada partícula move sob a ação deste potencial médio. Então:

$$(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) f(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) = m^{-1} \nabla \bar{V}(q, t) \cdot \partial f(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t).$$

Esta é a *equação de Vlasov*.

A equação de Vlasov determina a evolução de um sistema inhomogêneo. Se o sistema é homogêneo $f(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) = n\varphi(\mathbf{v}, t)$, ou seja, a função distribuição depende apenas da velocidade e

$$\bar{V} = n \int dr V(r) \quad \longrightarrow \quad \nabla \bar{V} = 0.$$

E então:

$$\partial_t \varphi(\mathbf{v}, t) = 0 + O(\lambda^2).$$

A equação de Vlasov é a primeira ordem de aproximação em λ para a equação de evolução de $f(x, t)$. Ela é usada apenas quando as interações são de longo alcance. Vejamos um exemplo.

Considere $n(q)$ a densidade, tal que $n(q) = \int d\mathbf{v} f(\mathbf{q}, \mathbf{v})$ e o potencial $V(q)$ sendo

$$n(q) = e^{\frac{-q}{H}}, \quad V(q') = e^{\frac{-|q-q'|}{t_c}},$$

tal que l_c é o alcance do potencial e l_H é o comprimento característico da densidade. Então o potencial médio $U(q)$ é:

$$\begin{aligned} U(q) &= \int_0^\infty dq' V(q-q') n(q') \\ &= \frac{e^{-\frac{q}{l_H}} - e^{-\frac{q}{l_c}}}{l_c^{-1} - l_H^{-1}} + \frac{e^{-\frac{q}{l_H}}}{l_c^{-1} + l_H^{-1}}, \end{aligned}$$

com $U(q)$ traçado em função de q para diferentes $p = \frac{l_c}{l_H}$ como na figura abaixo:

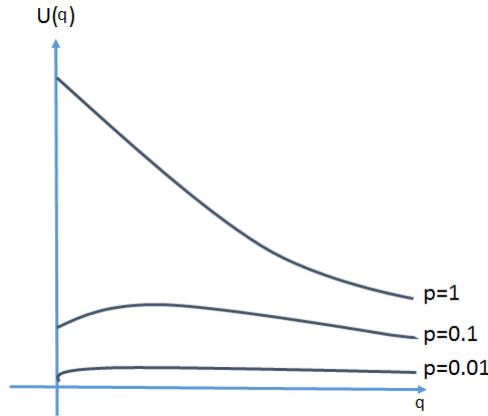


Figura 2.2.6: Potencial para diferentes p .

Podemos observar que para curto alcance, ou seja, l_c pequeno, ou para $p \ll 1$, o potencial médio é muito pequeno, ou seja, a aproximação de Vlasov é irrelevante. Mas quando l_c é grande o potencial de Vlasov é significativo. Por este motivo a equação de Vlasov é tão utilizada em estudos com plasma, pois nestes sistemas o potencial é Coulombiano, ou seja, de longo alcance.

2.3 Equação de Landau

Agora vamos encontrar a equação de acoplamento fraco de segunda ordem em λ . Considerando termos de segunda ordem na Eq. 2.1.4,

$$\partial_t f(x_1) - L_1^0 f(x_1) = \int dx_2 [L'_{12} f(x_1) f(x_2) + L'_{12} g_2(x_1, x_2)]. \quad (2.3.17)$$

Esta equação está acoplada a função correlação, logo iremos usar a Eq. 2.1.8, que descreve a evolução da correlação. Na Eq. 2.3.17 consideramos que g_2 é de ordem λ , logo vamos considerar na Eq. 2.1.8 apenas termos de ordem λ . Na Eq. 2.1.8 o primeiro termo do lado direito $L' f f$ é de ordem λ e os outros termos são de ordem λ^2 e λ^3 , então

$$(\partial_t - L_1^0 - L_2^0) g_2(x_1, x_2) = L'_{12} f(x_1) f(x_2). \quad (2.3.18)$$

E o único diagrama que representa a Eq. 2.3.18 é:

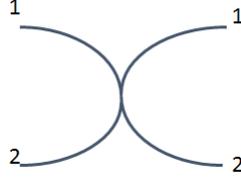


Figura 2.3.7: Diagrama de evolução de $g_2(x_1, x_2, t)$ para ordem λ .

Teremos que resolver a Eq. 2.3.18 para g_2 e substituir na Eq. 2.3.17.

O lado esquerdo da Eq. 2.3.18 é igual a Eq. 2.2.14 para a partícula livre e no lado direito da Eq. 2.3.18 temos um termo fonte. A solução da Eq. 2.3.18 é a solução da Eq. 2.2.14 para a partícula livre com a convolução do propagador com o termo fonte, ou seja,

$$g_2(x_1, x_2, t) = U_{12}^0(t) g_2(x_1, x_2, 0) + \int_0^t d\tau U_{12}^0(\tau) L'_{12} f(x_1; t - \tau) f(x_2; t - \tau). \quad (2.3.19)$$

□ *Prova:*

$$(\partial_t - L_1^0 - L_2^0) g_2(x_1, x_2, t) = L'_{12} f(x_1, t) f(x_2, t)$$

Usando a transformada de Laplace na equação diferencial, temos:

$$\int_0^\infty dt e^{-st} (\partial_t - L_1^0 - L_2^0) g_2(x_1, x_2, t) = \int_0^\infty e^{-st} L'_{12} f(x_1, t) f(x_2, t) dt.$$

Usando a seguinte propriedade da transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

Temos:

$$sG(s) - g_2(x_1, x_2, 0) - (L_1^0 + L_2^0)G(s) = H(s)$$

onde,

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-st} g_2(x_1, x_2, t) dt,$$

$$H(s) = \int_0^\infty e^{-st} h(t) dt,$$

$$h(t) = L'_{12} f(x_1, t) f(x_2, t).$$

Logo:

$$G(s) = \frac{H(s)}{s - (L_1^0 + L_2^0)} + \frac{g_2(x_1, x_2, 0)}{s - (L_1^0 + L_2^0)}.$$

Fazendo a transformada inversa de Laplace, temos:

$$g_2(x_1, x_2, t) = \int_0^t e^{(L_1^0 + L_2^0)\tau} L'_{12} f(x_1, t - \tau) f(x_2, t - \tau) + e^{(L_1^0 + L_2^0)t} g_2(x_1, x_2, 0).$$

Para obter este resultado usamos o teorema da convolução:

Teorema da convolução: Se $F(s) = \mathcal{L}f(t)$ e $G(s) = \mathcal{L}g(t)$ ambas existem, então:

$$H(s) = F(s)G(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}, \quad (2.3.20)$$

onde

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \quad (2.3.21)$$

A função h é conhecida como a convolução de f e g , as integrais na Eq. 2.3.21 são conhecidas como integrais de convolução.[5]

Então:

$$g_2(x_1, x_2, t) = U_{12}^0(t)g_2(x_1, x_2, 0) + \int_0^t d\tau U_{12}^0(\tau)L'_{12}f(x_1, t-\tau)f(x_2, t-\tau) \quad \blacksquare$$

Portanto podemos reescrever a Eq. 2.3.17 usando a Eq. 2.3.19, tal que:

$$\begin{aligned} \partial_t f(x_1) - L_1^0 f(x_1) &= \int dx_2 L'_{12} f(x_1) f(x_2) + \int dx_2 L'_{12} U_{12}^0(t) g_2(x_1, x_2, 0) \\ &+ \int dx_2 L'_{12} \int_0^t d\tau U_{12}^0(\tau) L'_{12} f(x_1, t-\tau) f(x_2, t-\tau). \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

Nesta equação o primeiro termo do lado direito é o termo de Vlasov, o segundo termo é um funcional da correlação inicial e o terceiro termo é um termo que depende dos estados anteriores no intervalo de $\tau = 0$ a t , portanto esta equação é não-markoviana. Pois um processo é dito markoviano quando os estados anteriores são irrelevantes para a predição dos estados seguintes.

Devido a Eq. 2.3.22 ser uma equação não-markoviana vamos definir os seguintes tempos característicos para um gás real:

1. τ_c é o tempo de colisão, tempo que uma partícula está em uma esfera de influência de outra partícula (é independente de λ),
2. τ_R é o tempo médio de colisão ou tempo de relaxação, é o tempo médio entre duas colisões e é independente de λ ,
3. τ_H é o tempo hidrodinâmico, este tempo é muito maior do que τ_c e τ_R . É o tempo para que uma partícula atravesse o recipiente na qual o gás está contido e é de ordem λ^{-2} .

Tal que,

$$\tau_c \ll \tau_R \ll \tau_H.$$

Relacionados a estes tempos, temos as seguintes distâncias:

1. l_c é o comprimento de correlação e é independente de λ ,

$$l_c = \text{Max}(l_0, l_{c_2}, l_{c_3}, \dots), \quad \text{para } l_{c_2}, l_{c_3}, \dots \text{ o alcance das correlações}$$

$$V(r) \approx 0 \quad \text{para } r \gg l_0 \quad (l_0 \text{ é o alcance de } V(r))$$

$$g_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{r}_{21}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) \approx 0 \quad \text{para } r_{21} \gg l_c$$

2. l_{mfp} é o livre caminho médio, é o comprimento em linha reta entre duas colisões e é de ordem λ^{-2} ,
3. l_H é o comprimento hidrodinâmico, é o comprimento do recipiente que contém o gás.

Tal que:

$$l_c \ll l_{mfp} \ll l_H$$

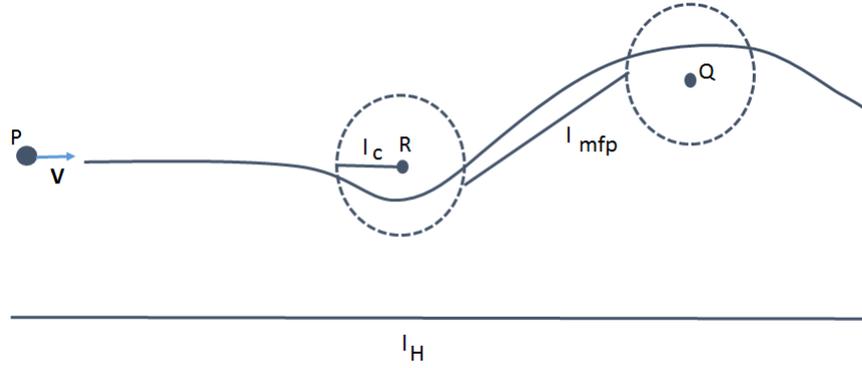


Figura 2.3.8: Trajetória de uma partícula com velocidade \mathbf{V} .

Para uma partícula com velocidade média de 300 m/s a ordem de magnitude destes comprimentos e tempos característicos é [16]

l_c (cm)	l_{mfp} (cm)	l_H (cm)
3×10^{-8}	3×10^{-5}	3
τ_c (s)	τ_R (s)	τ_H (s)
10^{-12}	10^{-9}	10^{-4}

Portanto podemos fazer as seguintes suposições:

$$\frac{l_c}{l_{mfp}} = O(\lambda^2), \quad \frac{\tau_c}{\tau_R} = O(\lambda^2), \quad \frac{l_{mfp}}{l_H} \equiv \lambda_H \ll 1, \quad \frac{\tau_R}{\tau_H} \equiv \lambda_H \ll 1. \quad (2.3.23)$$

O tempo para a teoria cinética é

$$t \gg \tau_c. \quad (2.3.24)$$

Agora vamos usar as Eqs. 2.3.23 e 2.3.24 na Eq. 2.3.22. Inicialmente analisaremos o segundo termo da Eq. 2.3.22, já que o primeiro termo é o termo de Vlasov. Vamos fazer uma mudança de variáveis de q_2 para $r_{21} = q_2 - q_1$ e usaremos as Eqs. 2.2.15 e 2.2.16, logo:

$$\begin{aligned} \int dx_2 L'_{12} U_{12}^0(t) g_2(x_1, x_2, 0) &= \int d\mathbf{r}_{21} \int d\mathbf{v}_2 L'_{12} U_{12}^0(t) g_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{r}_{21}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, 0) \\ &= \int d\mathbf{r}_{21} \int d\mathbf{v}_2 L'_{12} g_2(\mathbf{q}_1 - \mathbf{v}_1 t, \mathbf{r}_{21} - \mathbf{g}_{21} t, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, 0), \end{aligned}$$

com $g_{21}=v_2-v_1$.

Para $t \gg \tau_c$, $|r_{21}-g_{21}t| \gg l_c$ e a função correlação, conforme visto anteriormente, tende a zero.

Logo

$$\int dx_2 L'_{12} U_{12}^0(t) g_2(x_1, x_2, 0) \approx 0 \quad \text{para} \quad t \gg \tau_c.$$

Agora analisaremos o último termo da Eq. 2.3.22.

Usando as propriedades do propagador vista anteriormente, podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} f(x_1; t - \tau) f(x_2; t - \tau) &= U_1(-\tau) f(x_1; t) U_2(-\tau) f(x_2; t) \\ &= U_{12}(-\tau) f(x_1; t) f(x_2; t) \end{aligned}$$

Vimos que o último termo da Eq. 2.3.22 tem ordem λ^{-2} devido aos dois operadores L' , logo $f(x_1; t - \tau) f(x_2; t - \tau)$ não depende de L' e podemos aproximar $U_{12}(-\tau)$ a $U_{12}(-\tau)^0$. Então,

$$f(x_1; t - \tau) f(x_2; t - \tau) \approx U_{12}^0(-\tau) f(x_1; t) f(x_2; t).$$

Substituindo este resultado no último termo da Eq. 2.3.22 e explicitando o operador L' , temos

$$\begin{aligned} &\int dx_2 \int_0^t d\tau L'_{12} U_{12}^0(\tau) L'_{12} f(x_1; t - \tau) f(x_2, t - \tau) \\ &= m^{-2} \int d\mathbf{v}_2 d\mathbf{r} \int_0^t d\tau \partial_{12} \cdot [\nabla_1 V(\mathbf{r})] [\nabla_1 V(\mathbf{r} - \mathbf{g}\tau)] \cdot \\ &\quad U_{12}^0(\tau) \partial_{12} U_{12}^0(-\tau) f(\mathbf{q}_1, \mathbf{v}_1; t) f(\mathbf{q}_1 - \mathbf{r}, \mathbf{v}_2; t). \end{aligned}$$

Com $V(r) \neq 0$ para $0 < r < l_c$ e $V(r - g\tau) \neq 0$ para $0 < \tau < \tau_c$, apenas nestes intervalos, o termo acima é diferente de zero. Como estamos interessados em $t \gg \tau_c$, podemos considerar $t \rightarrow \infty$. Agora vamos calcular a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} U_{12}^0(\tau) \partial_{12} U_{12}^0(-\tau) f(x_1; t) f(x_2; t) &= e^{-(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla_1 + \mathbf{v}_2 \cdot \nabla_2)\tau} \partial_{12} e^{(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla_1 + \mathbf{v}_2 \cdot \nabla_2)\tau} f(x_1; t) f(x_2; t) \\ &= U_{12}^0(\tau) [\nabla_1 \tau U_{12}^0(-\tau) - \nabla_2 \tau U_{12}^0(-\tau)] f(x_1; t) f(x_2; t) \\ &\quad + U_{12}^0(\tau) U_{12}^0(-\tau) \partial_{12} f(x_1; t) f(x_2; t) \\ &= (\partial_{12} + \tau \nabla_{12}) f(x_1; t) f(x_2; t), \end{aligned}$$

com $\nabla_{12} = \nabla_1 - \nabla_2$.

Fazendo a seguinte aproximação

$$\tau \nabla f f \sim \tau \frac{1}{l_H} f f \sim V^{-1} f f,$$

sendo que a velocidade térmica V depende da razão entre τ_c e τ_H , pois quanto maior τ_c menor será a velocidade térmica, logo:

$$\begin{aligned}
\tau \nabla f f &\sim V^{-1} \left(\frac{\tau_c}{\tau_H} \right) f f \\
&\sim V^{-1} \left(\frac{\tau_c \tau_R}{\tau_R \tau_H} \right) f f \\
&\sim V^{-1} (\lambda^2 \lambda_H) f f \\
&\ll \partial f f
\end{aligned}$$

Também podemos expandir $f(\mathbf{q}_1 - \mathbf{r})$ em série de Taylor,

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{q}_1 - \mathbf{r}) &\approx f(\mathbf{q}_1) + f'(\mathbf{q}_1)(-\mathbf{r}) + O(\mathbf{r}^2) \\
&\approx (1 - \mathbf{r} \cdot \nabla_1) f(\mathbf{q}_1) \\
&\approx f(\mathbf{q}_1).
\end{aligned}$$

Portanto o último termo da Eq. 2.3.22 é:

$$\begin{aligned}
&\int dx_2 \int_0^t d\tau L'_{12} U_{12}^0(\tau) L'_{12} f(x_1; t - \tau) f(x_2; t - \tau) \\
&= \int d\mathbf{v}_2 d\mathbf{r} \int_0^\infty d\tau \partial_{12} \cdot [\nabla V_1(r)] \nabla_1 V(\mathbf{r} - \mathbf{g}\tau) \partial_{12} f(\mathbf{q}_1, \mathbf{v}_1; t) f(\mathbf{q}_1, \mathbf{v}_2; t) \\
&= \mathcal{K}\{ff\} \tag{2.3.25}
\end{aligned}$$

Com este processo, transformamos a Eq. 2.3.22, que é uma equação não-markoviana em uma equação markoviana, a este processo denominamos markovianização.

Podemos reescrever a Eq. 2.3.22 tal que,

$$(\partial_t + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_1) f(\mathbf{q}_1, \mathbf{v}_1, t) = \mathcal{V}\{ff\} + \mathcal{K}\{ff\}$$

Esta equação é a *equação de Landau*. Ela é a equação para o acoplamento fraco com ordem λ^2 .

Para sistemas homogêneos, $f(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) = n\varphi(\mathbf{v}, t)$ e

$$\partial_t \varphi(\mathbf{v}, t) = \mathcal{K}\{ff\}.$$

Reescrevendo a Eq. 2.3.25,

$$\mathcal{K}\{ff\} = \int d\mathbf{v}_2 \partial_{12} \mathbf{G}(\mathbf{g}) \partial_{12} f(\mathbf{q}_1, \mathbf{v}_1; t) f(\mathbf{q}_1, \mathbf{v}_2; t)$$

com $\mathbf{G}(\mathbf{g})$ sendo o tensor de Landau,

$$\mathbf{G}(\mathbf{g}) = \int d\mathbf{r} \int_0^\infty d\tau [\nabla V_1(r)] \nabla_1 V(\mathbf{r} - \mathbf{g}\tau).$$

Consideramos,

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{r}) &= \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \tilde{V}(\mathbf{k}) \\
V(\mathbf{r} - \mathbf{g}\tau) &= \int d\mathbf{k}' e^{i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{g}\tau)} \tilde{V}(\mathbf{k}'),
\end{aligned}$$

ou seja, o potencial pode ser escrito com a transformada de Fourier de um potencial $\tilde{V}(k)$. Logo:

$$\mathbf{G}(\mathbf{g}) = \int d\mathbf{r} \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k} (i\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tilde{V}(\mathbf{k}) \int d\mathbf{k}' (i\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{g}\tau)} \tilde{V}(\mathbf{k}').$$

Usando a representação integral da função delta de Dirac,

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega.$$

Temos,

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{g}) &= \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k} (i\mathbf{k}) \tilde{V}(\mathbf{k}) \int d\mathbf{k}' (i\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{g}\tau} \tilde{V}(\mathbf{k}') \int d\mathbf{r} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} \\ &= (2\pi)^3 \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k} (i\mathbf{k}) \tilde{V}(\mathbf{k}) \int d\mathbf{k}' (i\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{g}\tau} \tilde{V}(\mathbf{k}') \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'). \end{aligned}$$

Devido a seguinte propriedade da função delta de Dirac,

$$f(a) = \int f(x) \delta(x-a) dx.$$

Então:

$$\mathbf{G}(\mathbf{g}) = (2\pi)^3 \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k} (i\mathbf{k}) \tilde{V}(\mathbf{k}) (-i\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{g}\tau} \tilde{V}(\mathbf{k}).$$

Vamos usar a seguinte relação:

$$\delta_+(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk e^{ikx} = \delta(x) + \frac{i}{\pi} \mathcal{P} \left(\frac{1}{x} \right), \quad (2.3.26)$$

com $\mathcal{P} \left(\frac{1}{x} \right)$ a parte principal de Cauchy [3].

Logo,

$$\mathbf{G}(\mathbf{g}) = 8\pi^4 \int d\mathbf{k} \delta_+(\mathbf{k}\cdot\mathbf{g}) \left(i\mathbf{k} \tilde{V}(\mathbf{k}) \right) \left(-i\mathbf{k} \tilde{V}(\mathbf{k}) \right)$$

Devido a parte principal na Eq. 2.3.26 ser uma função ímpar quando substituimos $\delta_+(\mathbf{k}\cdot\mathbf{g})$ a integral do termo com a parte principal é nula, pois estamos integrando uma função ímpar em um intervalo simétrico. E obtemos

$$\mathbf{G}(\mathbf{g}) = 8\pi^4 \int d\mathbf{k} \delta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{g}) \tilde{V}(k)^2 \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}.$$

Substituindo este resultado no termo colisional, temos o tensor de Landau,

$$\mathcal{K}\{ff\} = \frac{8\pi^4}{m^2} \int d\mathbf{v}_2 \int d\mathbf{k} \tilde{V}(k)^2 (\mathbf{k}\cdot\partial_{12}) \delta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{g}) (\mathbf{k}\cdot\partial_{12}) f(\mathbf{q}_1, \mathbf{v}_1; t) f(\mathbf{q}_1, \mathbf{v}_2; t)$$

Vamos calcular a integral em \mathbf{k} , para tanto vamos considerar o vetor \mathbf{g} paralelo ao eixo z e usar as coordenadas esféricas (k, θ, ϕ) . Decompondo \mathbf{k} ,

$$\mathbf{G}(\mathbf{g}) = 8\pi^4 \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi k^2 \sin\theta \tilde{V}(k)^2 \delta(kg \cos\theta) \times k^2 \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad (2.3.27)$$

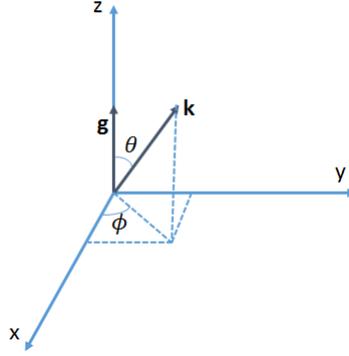


Figura 2.3.9: Figura extraída de [3]. Sistema de referência para o cálculo de $G(\mathbf{g})$.

$$\dim \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} = \dim \mathbf{k} \cdot \dim \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} &= \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin^2 \theta \cos^2 \phi & \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi & \sin \theta \cos \theta \cos \phi \\ \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi & \sin^2 \theta \sin^2 \phi & \sin \theta \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \theta \cos \phi & \sin \theta \cos \theta \sin \phi & \cos^2 \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Os termos não diagonais de $\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}$ dependem de $\sin \phi \cos \phi$, $\cos \phi$ e $\sin \phi$, quando integramos em ϕ , temos:

$$\int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin \phi \cos \phi d\phi = 0$$

Já os termos da diagonal, quando integrados em ϕ geram:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi = \pi \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi = \pi$$

Logo:

$$\mathbf{G}(\mathbf{g}) = 8\pi^4 \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta k^4 \sin \theta \tilde{V}(k)^2 \delta(kg \cos \theta) \begin{pmatrix} \pi \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & \pi \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Integrando a componente zz em relação a θ ,

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta \delta(kg \cos \theta) \cos \theta = 0.$$

Conforme podemos observar as componentes xx e yy são iguais, logo:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{G} = (\mathbf{I} - \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z) G.$$

com

$$G = 8\pi^5 \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta k^4 \sin \theta \tilde{V}(k)^2 \delta(kg \cos \theta) \sin^2 \theta. \quad (2.3.28)$$

Usando a seguinte propriedade da função delta de Dirac,

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x),$$

temos:

$$\begin{aligned}
G &= 8\pi^5 \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta k^4 \sin\theta \tilde{V}(k)^2 \frac{\delta(\cos\theta)}{kg} \sin^2\theta \\
&= 8\pi^5 \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta k^3 \sin\theta \tilde{V}(k)^2 \frac{\delta(\cos\theta)}{g} \sin^2\theta \\
&= \frac{8\pi^5}{g} \int_0^\infty dk k^3 \tilde{V}(k)^2 \left(\int_0^\pi d\theta \sin\theta \delta(\cos\theta) - \int_0^\pi d\theta \sin\theta \delta(\cos\theta) \cos^2\theta \right) \\
&= \frac{8\pi^5}{g} \int_0^\infty dk k^3 \tilde{V}(k)^2 \\
&= \frac{B}{g},
\end{aligned}$$

com

$$B = 8\pi^5 \int_0^\infty dk k^3 \tilde{V}(k)^2.$$

Vamos agora encontrar o tensor G geral para qualquer sistema de referência, para tanto utilizaremos $\mathbf{e}_z = \frac{\mathbf{g}}{g}$, então os elementos do tensor é

$$G_{rs} = \left(\delta_{rs} - \frac{g_r g_s}{g^2} \right) \frac{B}{g}.$$

E o termo colisional de Landau sem os termos de superfície é [3]

$$\mathcal{K}\{ff\} = B \int d\mathbf{v}_2 \partial_1^r \frac{g^2 \delta_{rs} - g_r g_s}{g^3} \partial_{12}^s f(\mathbf{q}_1, \mathbf{v}_1; t) f(\mathbf{q}_1, \mathbf{v}_2; t)$$

A Eq. 2.3.27 foi derivada por Landau em 1936, cujo objetivo era encontrar uma equação válida para plasma. Como vimos a equação de Landau é usada para sistemas interação de longo alcance, que podem ser aproximados com $V(r) \approx 0$ para $r \gg l_0$.

2.4 Equação de Boltzmann

Agora vamos considerar um sistema de partículas clássicas, um gás diluído de massa m , cujas partículas interagem através de um potencial $V(r)$. Queremos encontrar a evolução da função distribuição de uma partícula $f(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t)$, para tanto vamos considerar, separadamente, o movimento da partícula livre e interações intermoleculares.

A equação de Vlasov descreve esta evolução de $f(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t)$ para um potencial de longo alcance, nesta seção vamos estender nossos estudos para o potencial de curto alcance.

Usando a equação BBKGY para $s=1$ e considerando inicialmente a partícula livre,

$$\partial_t f(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{v} \cdot \nabla f(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) = 0 \quad (2.4.29)$$

Incluindo os efeitos das forças intermoleculares, considerando estas forças de curto alcance, com alcance r_c , iremos considerar o gás diluído, então a distância entre as partículas é muito maior que r_c . As partículas neste gás descrevem uma trajetória retilínea e quando a distância entre as partículas é menor que r_c estas partículas interagem e são defletidas, voltando a descrever uma trajetória retilínea. O processo de interação é a colisão.

Seja um conjunto de partículas com velocidade \mathbf{v} em um instante t , vamos observar este sistema durante um intervalo de tempo Δt . Durante este intervalo Δt muitas destas

partículas sofrem colisão com outras partículas com velocidade diferente de \mathbf{v} , estas colisões produzem perda de partículas, mas neste mesmo instante de tempo Δt partículas fora deste conjunto colidem e podem ter velocidade \mathbf{v} após a colisão gerando um aumento no número de partículas deste conjunto.

A diferença entre o ganho e a perda de partículas descreve a evolução de $f(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t)$, já que esta é a função densidade de probabilidade de encontrar uma partícula na posição \mathbf{q} com velocidade \mathbf{v} . Portanto vamos acrescentar $G - L$ na Eq. 2.4.29

$$\partial_t f(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{v} \cdot \nabla f(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) = G - L \quad (2.4.30)$$

onde G é o ganho e L é a perda de partículas.

Precisamos então encontrar a perda e o ganho, contudo devemos conhecer alguns resultados de espalhamento. Considere uma partícula colidindo com o centro de massa, em um campo central, o momento angular desta partícula é $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, para um ponto P qualquer, então

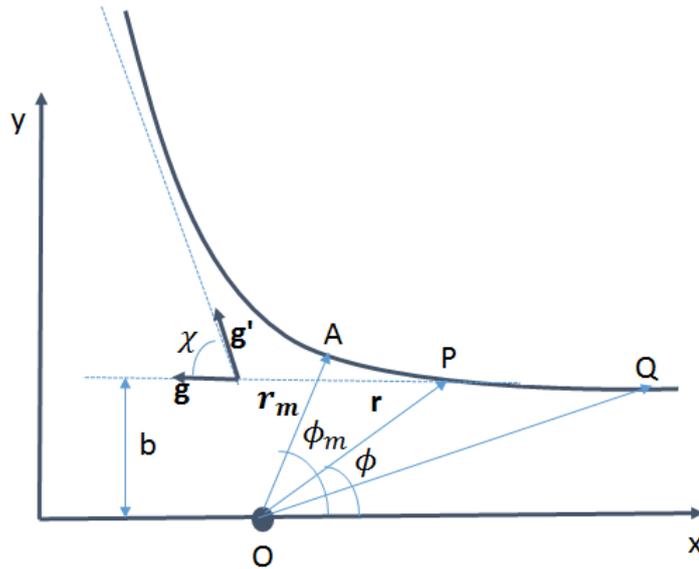


Figura 2.4.10: Trajetória de uma partícula colidindo com o centro de massa O .

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r \hat{\mathbf{r}} \\ \mathbf{p} &= m (\dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\phi} \hat{\phi}) \\ \mathbf{M} &= m r^2 \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (2.4.31)$$

Com \mathbf{M} perpendicular a \mathbf{r} , logo a trajetória da partícula está em um plano. A lagrangiana do sistema é

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - U(r)$$

Sabemos que a energia é

$$\begin{aligned} E &= K + U(r) \\ &= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + U(r) \\ &= \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2r^2m} + U(r). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}, \\ dt &= dr \left(\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Da Eq. 2.4.31

$$d\phi = \frac{M dt}{mr^2}.$$

Ou seja, segundo a Fig 2.4.10

$$\phi = \int_{\infty}^r \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m [E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} \quad (2.4.32)$$

$$\phi_m = \int_{\infty}^{r_m} \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m [E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}}. \quad (2.4.33)$$

E o ângulo χ é

$$\chi = \pi - 2\phi_m.$$

Em um ponto Q distante, a energia e o momento são

$$E = \frac{mg^2}{2}, \quad M = mbg. \quad (2.4.34)$$

com \mathbf{g} sendo a velocidade da partícula em relação ao centro de massa, tal que $\mathbf{g} = v_1 - v_2$. A energia e o momento angular são conservados, pois

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{M}}{dt} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \\ &= \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \\ &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \end{aligned}$$

devido ao potencial central \mathbf{F} está na mesma direção de \mathbf{r} e

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = 0 \quad (2.4.35)$$

Então substituindo a Eq. 2.4.34 nas Eqs. 2.4.32 e 2.4.33,

$$\begin{aligned}
 \phi &= \int_{\infty}^r \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m [E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} \\
 &= \int_{\infty}^r \frac{\frac{mbg}{r^2} dr}{\sqrt{2m \left[\frac{mg^2}{2} - U(r) \right] - \frac{(mbg)^2}{r^2}}} \\
 &= \int_{\infty}^r \frac{\frac{mbg}{r^2} dr}{\sqrt{m^2 g^2 - 2mU(r) - \frac{(mbg)^2}{r^2}}} \\
 &= \int_{\infty}^r \frac{\frac{b}{r^2} dr}{\sqrt{1 - \frac{2U(r)}{mg^2} - \frac{b^2}{r^2}}}, \\
 \phi_m &= \int_{\infty}^{r_m} \frac{\frac{b}{r^2} dr}{\sqrt{1 - \frac{2U(r)}{mg^2} - \frac{b^2}{r^2}}}.
 \end{aligned}$$

Agora vamos calcular o ganho G e a perda L . Considere uma partícula P na posição \mathbf{q} , com velocidade \mathbf{v} , no instante t . Fixando a origem nesta partícula, há uma esfera de interação centrada nela, conforme a figura 2.4.11.

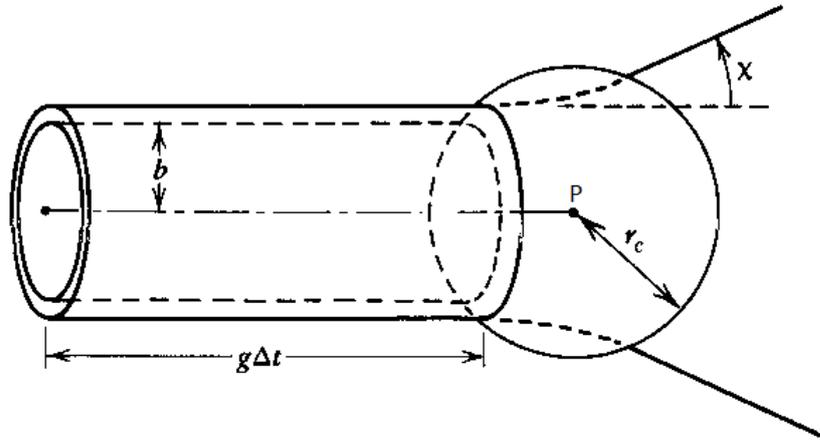


Figura 2.4.11: Figura retirada de [3]. Esquema para contagem de partículas.

O número de partículas com velocidade inicial $\mathbf{g} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}$, relativa ao centro de massa, em um intervalo de tempo Δt com parâmetro de impacto entre b e $b + db$, em um cilindro $g\Delta t$ é

$$f(\mathbf{q} + \mathbf{g}\Delta t, \mathbf{v}_1, t) d\mathbf{v}_1 2\pi b db g\Delta t \simeq f(\mathbf{q}, \mathbf{v}_1, t) d\mathbf{v}_1 2\pi b db g\Delta t,$$

fizemos esta aproximação pois consideramos o sistema não muito inhomogêneo no espaço.

O número total de colisões com a partícula P durante o intervalo Δt é

$$\int d\mathbf{v}_1 db f(\mathbf{q}, \mathbf{v}_1, t) 2\pi g b \Delta t.$$

Já o número de colisões para partículas com velocidade entre \mathbf{v} e $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$, na posição \mathbf{q} e no intervalo Δt é

$$\int d\mathbf{v}_1 \int db f(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} f(\mathbf{q}, \mathbf{v}_1, t) 2\pi gb \Delta t = L d\mathbf{v} \Delta t. \quad (2.4.36)$$

este termo dividido por $d\mathbf{v}dt$ representa a perda de partículas.

Devido a simetria da Fig. 2.4.10 com relação ao eixo OA, uma colisão de partículas com velocidade \mathbf{v}' e \mathbf{v}_1' com parâmetro de impacto b resulta em partículas com velocidade \mathbf{v} e \mathbf{v}_1 , isto representa o ganho, portanto

$$\int d\mathbf{v}'_1 \int db f(\mathbf{q}, \mathbf{v}', t) d\mathbf{v}' f(\mathbf{q}, \mathbf{v}'_1, t) 2\pi gb \Delta t = G d\mathbf{v}' \Delta t. \quad (2.4.37)$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \mathbf{v} + \mathbf{a}t \\ &= \mathbf{v} + \frac{\mathbf{F}}{m}t \\ &= \mathbf{v} - \frac{\nabla V(r)}{m}t \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_1 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{a}t \\ &= \mathbf{v}_1 - \frac{\nabla V(r)}{m}t, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}'}{d\mathbf{v}} &= 1 & \frac{d\mathbf{v}'_1}{d\mathbf{v}_1} &= 0 \\ \frac{d\mathbf{v}'_1}{d\mathbf{v}} &= 0 & \frac{d\mathbf{v}'_1}{d\mathbf{v}_1} &= 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$J = \left| \begin{array}{cc} \frac{d\mathbf{v}'}{d\mathbf{v}} & \frac{d\mathbf{v}'_1}{d\mathbf{v}_1} \\ \frac{d\mathbf{v}'_1}{d\mathbf{v}} & \frac{d\mathbf{v}'_1}{d\mathbf{v}_1} \end{array} \right| = 1.$$

Podemos concluir que a evolução temporal é uma transformação canônica. E segundo o teorema de Liouville,

$$d\mathbf{v}d\mathbf{v}_1 = d\mathbf{v}'d\mathbf{v}'_1.$$

E podemos reescrever a Eq. 2.4.37, tal que

$$\int d\mathbf{v}_1 \int db f(\mathbf{q}, \mathbf{v}', t) d\mathbf{v} f(\mathbf{q}, \mathbf{v}'_1, t) 2\pi gb \Delta t = G d\mathbf{v} \Delta t. \quad (2.4.38)$$

Substituindo as Eqs. 2.4.36 e 2.4.38 na Eq. 2.4.30 obtemos

$$\partial_t f(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{v} \cdot \nabla f(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) = \int d\mathbf{v}_1 \int db 2\pi gb \{ f(\mathbf{q}, \mathbf{v}', t) f(\mathbf{q}, \mathbf{v}'_1, t) - f(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) f(\mathbf{q}, \mathbf{v}_1, t) \}. \quad (2.4.39)$$

Esta é a *equação de Boltzmann*.

Seja ϕ o fluxo de partículas incidentes que é o número de partículas que atravessa um elemento de área perpendicular a \mathbf{g}

$$\phi = \frac{dN}{2\pi b db}.$$

A razão dN/ϕ é a seção de choque diferencial $d\sigma$, logo

$$d\sigma = 2\pi b db. \quad (2.4.40)$$

Quanto menor o parâmetro de impacto b maior é o ângulo de deflexão χ , logo reescrevendo a Eq. 2.4.40 em função de χ , já que b é uma função de χ , temos

$$d\sigma = b(\chi) \left| \frac{db(\chi)}{d\chi} \right| 2\pi d\chi.$$

Vamos definir o elemento de ângulo sólido como $d\Omega = 2\pi \sin \chi d\chi$, podemos reescrever $d\sigma$ tal que,

$$d\sigma = \sigma_d d\Omega$$

com

$$\sigma_d = \frac{b(\chi)}{\sin \chi} \left| \frac{db(\chi)}{d\chi} \right|.$$

E a equação de Boltzmann reescrita em termo destes parâmetros é

$$\partial_t f(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{v} \cdot \nabla f(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) = \int d\mathbf{v}_1 \int d\Omega g \sigma_d \{ f(\mathbf{q}, \mathbf{v}', t) f(\mathbf{q}, \mathbf{v}_1', t) - f(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) f(\mathbf{q}, \mathbf{v}_1, t) \}.$$

Podemos observar que a equação de Boltzmann é uma equação fechada para a função distribuição de uma partícula. Ela é uma equação não linear e a colisão aparece como um processo localizado, pois as funções distribuições são calculadas no mesmo ponto \mathbf{q} [2].

2.5 Equação de Lenard-Balescu

Nesta seção iremos trabalhar com sistemas conhecidos como plasma. O plasma é um sistema com partículas carregadas, cujas interações são coulombianas de longo alcance e estas interações são muito menores que a energia cinética.

Devido ao longo alcance das interações coulombianas, os plasmas são descritos pela equação de Vlasov, mas a equação de Landau não vale para estes sistemas. Então vamos encontrar a equação que descreve processos colisionais em sistemas eletricamente carregados.

Considere um plasma com igual número de íons (+) e elétrons (-), cada qual com densidade média n_0 . Vamos posicionar uma partícula teste de carga $q_\tau > 0$ na origem de um sistema de coordenadas tridimensional. Esta carga q_τ repele todos os íons e atrai os elétrons, formando uma nuvem de blindagem ao redor da partícula teste (ver Fig. 2.5.12).

Para encontrar o potencial ϕ no plasma vamos considerar a equação de Poisson,

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -4\pi e (n_i(\mathbf{r}) - n_e(\mathbf{r})) - 4\pi q_\tau \delta(\mathbf{r})$$

Precisamos encontrar $n_i(\mathbf{r})$ e $n_e(\mathbf{r})$. Para este sistema no equilíbrio a longas distâncias da carga teste a forma pela qual as partículas do gás estão distribuída é dada pela função distribuição de velocidades Maxwelliana (vamos considerar o caso unidimensional),

$$f(v) = A e^{-\left(\frac{mv^2}{2}\right) \frac{1}{kT}}$$

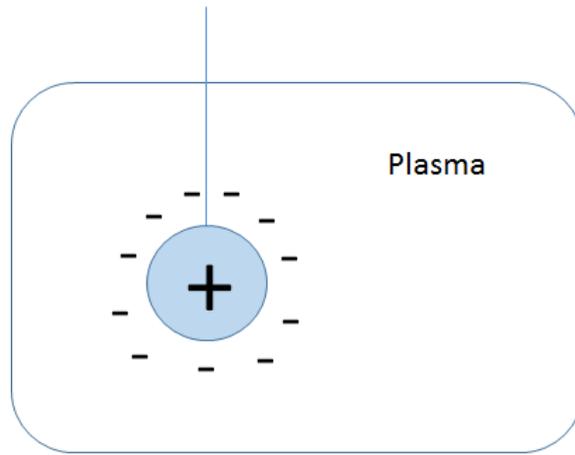


Figura 2.5.12: Esquema do plasma.

e

$$n_0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) dv,$$

com n_0 a densidade média dos íons e elétrons.

A função distribuição de velocidades dos elétrons no equilíbrio é

$$f_e(v_x) = A e^{-\left(\frac{mv_x^2}{2} - e\phi\right) \frac{1}{kT_e}},$$

tal que T_e é a temperatura de equilíbrio dos elétrons. Vamos considerar apenas a distribuição de velocidades do elétron, pois os elétrons têm maior mobilidade. Ou seja,

$$f_e(v_x) = f(v) e^{\frac{e\phi}{kT_e}}$$

e

$$n_e(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_e(v_x) dv_x = n_0 e^{\frac{e\phi}{kT_e}}.$$

E a densidade iônica é

$$n_i = n_0,$$

ou seja, uniforme em todo espaço.

Para um ponto fora da origem ($x \neq 0$), temos

$$\nabla^2 \phi = -4\pi e n_0 \left(1 - e^{\frac{e\phi}{kT_e}}\right). \quad (2.5.41)$$

Conforme vimos no início da seção, plasma são sistemas cujo potencial é pequeno, comparando a energia potencial com a energia cinética, temos

$$\frac{\phi e}{kT_e} \ll 1 \quad \text{ou} \quad \phi \ll \frac{kT_e}{e}.$$

Expandindo a exponencial na Eq. 2.5.41,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \frac{d^2 \phi}{dx^2} \simeq 4\pi e n_0 \left[\left(1 + \frac{\phi e}{kT_e} + \left(\frac{\phi e}{kT_e}\right)^2 + \dots\right) - 1 \right] \\ &\simeq \frac{4\pi e^2 n_0 \phi}{kT_e} = \chi_D^{-2} \phi, \end{aligned} \quad (2.5.42)$$

tal que

$$\chi_D \equiv \left(\frac{kT_e}{4\pi e^2 n_0} \right)^{1/2}$$

é o comprimento de Debye.

A solução da Eq. 2.5.42 que decai a longas distâncias é

$$\phi(x) \propto e^{-x/\chi_D}$$

Para um ponto próximo da origem o potencial é do tipo $\phi(x) = q_\tau/x$ (potencial coulombiano), então para um ponto qualquer

$$\phi(x) = \frac{q_\tau}{x} e^{-x/\chi_D}.$$

Para o caso tridimensional

$$\phi(r) = \frac{q_\tau}{r} e^{-r/r_D},$$

com

$$r_D = \left(\frac{kT}{4\pi e^2 n_0} \right)^{1/2}. \quad (2.5.43)$$

E a energia potencial é

$$V(r) = \frac{e^2}{r} e^{-r/r_D}. \quad (2.5.44)$$

Em um plasma a distância média entre as partículas é $n_0^{-1/3}$. A energia média de uma partícula é

$$V(r) \sim \frac{e^2}{r} \sim n_0^{1/3} e^2.$$

A energia potencial em um plasma é muito menor do que a energia cinética de uma partícula [19]. A energia cinética de uma partícula no plasma é

$$K = \frac{m}{2} \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT_e.$$

Logo

$$\begin{aligned} V &\ll K \\ n_0^{1/3} e^2 &\ll kT_e \\ \rho &\equiv \frac{n_0^{1/3} e^2}{kT_e} \ll 1 \end{aligned}$$

sendo ρ o parâmetro do plasma, tal que

$$\rho^3 \equiv (kT_e)^{-3} e^4 (n_0 e^2) \ll 1. \quad (2.5.45)$$

Assim sendo, descartando fatores numéricos, temos:

$$\begin{aligned} r_D^{-2} n_0^{-2/3} &\ll 1 \\ r_D^2 n_0^{2/3} &\gg 1 \\ r_D n_0^{1/3} &\gg 1 \\ r_D^3 n_0 &\gg 1 \end{aligned}$$

O potencial da Eq. 2.5.44 descreve o plasma, então vamos usá-lo para encontrar a equação que descreve o processo colisional nestes sistemas.

O potencial na Eq. 2.5.44 depende de e^2 , que caracteriza o fraco acoplamento, mas esta constante também aparece na exponencial em r_D em uma dependência não analítica que envolve $(e^2 n_0)^{1/2}$. Vamos considerar e^2 o parâmetro pequeno e $(e^2 n_0)$ uma quantidade finita.

A idéia é usar expansão perturbativa para o parâmetro da Eq. 2.5.45, da mesma forma como λ para obter a equação de Landau. Vamos analisar o ordenamento dos termos das Eq. 2.1.4 e Eq. 2.1.8 com a densidade n_0 . O hamiltoniano não depende da densidade, logo

$$L_j^0 = O(n_0^0) \quad L'_{ij} = O(n_0^0).$$

A função distribuição reduzida de uma partícula depende da densidade, como vimos em um sistema homogêneo podemos escrever

$$f(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) = n\varphi(\mathbf{v}, t) = O(n_0^1).$$

E a correlação de duas partículas é proporcional ao quadrado da densidade, ou seja, generalizando

$$g_i(x_1, \dots, x_i) = O(n^i).$$

Os operadores liouvillianos atuam na evolução da correlação em duas formas. No vértice tipo X, L'_{jn} conecta estados final e inicial com mesmo número de partículas, neste caso estes termos não tem dependência com a densidade, são de ordem e^2 . Já nos vértices tipo Y o operador L'_{jn} conecta o estado da partícula p ao estado da partícula (p+1), neste termo é introduzido uma dependência na densidade, estes são da ordem de $e^2 n$.

Considerando estes ordenamentos e reescrevendo as Eqs. 2.1.4 e 2.1.8 para um plasma ionizado, vamos denotar as espécies (elétrons e íons) por índices gregos, temos:

$$(\partial_t - L_1^0) f^\alpha(x_1, t) = \sum_{\beta=e,i} \int dx_2 \left[L_{12}^{\prime\alpha\beta} f^\alpha(x_1, t) f^\beta(x_2, t) + L_{12}^{\prime\alpha\beta} g_2^{\alpha\beta}(x_1, x_2, t) \right] \quad (2.5.46)$$

e

$$\begin{aligned} (\partial_t - L_1^0 - L_2^0) g_2^{\alpha\beta}(x_1, x_2, t) &= L_{12}^{\prime\alpha\beta} f^\alpha(x_1, t) f^\beta(x_2, t) + L_{12}^{\prime\alpha\beta} g_2^{\alpha\beta}(x_1, x_2, t) \\ &+ \sum_{\gamma=e,i} \int dx_3 \{ L_{13}^{\prime\alpha\gamma} [f^\alpha(x_1, t) g_2^{\beta\gamma}(x_2, x_3, t) \\ &+ f^\gamma(x_3, t) g_2^{\alpha\beta}(x_1, x_2, t)] \\ &+ L_{23}^{\prime\beta\gamma} [f^\beta(x_2, t) g_2^{\alpha\gamma}(x_1, x_3, t) + f^\gamma(x_3, t) g_2^{\alpha\beta}(x_1, x_2, t)] \\ &+ (L_{13}^{\prime\alpha\gamma} + L_{23}^{\prime\beta\gamma}) g_3^{\alpha\beta\gamma}(x_1, x_2, x_3, t) \}. \end{aligned} \quad (2.5.47)$$

com $\alpha = e, i$, $\beta = e, i$ e $\gamma = e, i$.

Para a Eq. 2.5.46 os diagramas são

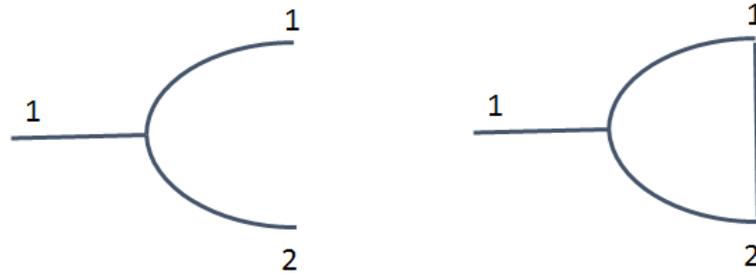


Figura 2.5.13: Diagrama da $f^\alpha(x_1, t)$ para plasma.

Vamos considerar que a função distribuição reduzida é tomada de ordem zero, então o primeiro termo do lado direito na Eq. 2.5.46, o termo de Vlasov, é da ordem de (e^2n) e o segundo termo tem ordem $(e^2n)(e^4)^2(e^2n)^2$.

Para a Eq. 2.5.47 os diagramas, com seus respectivos ordenamentos, são:

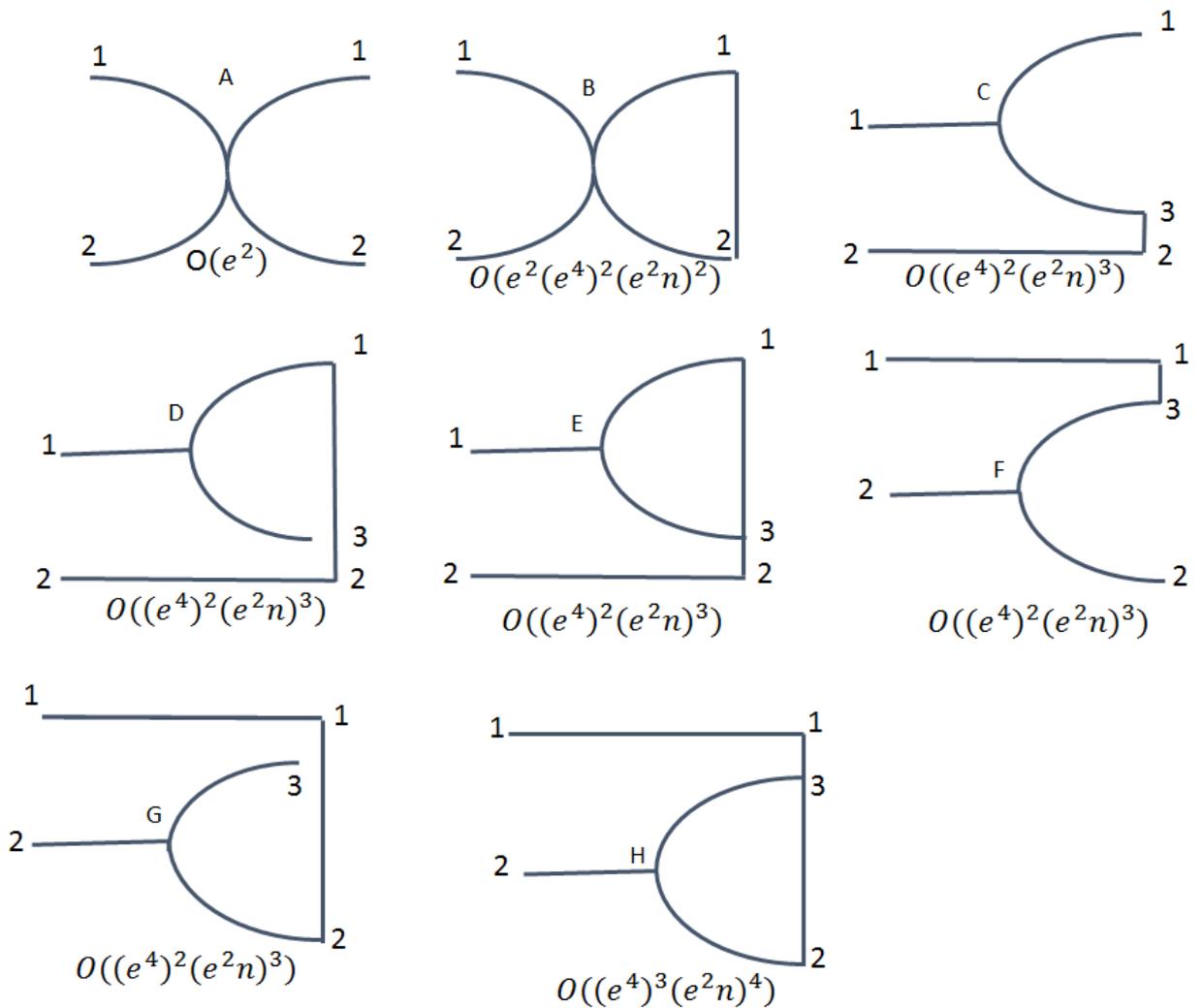


Figura 2.5.14: Diagrama da $g_2^{\alpha\beta}(x_1, x_2, t)$ para plasma.

Os diagramas B, E e H não são termos dominantes, pois eles dependem de $(e^4)^n$ para $n > 2$. Considerando apenas os termos dominantes na Eq. 2.5.47, temos

$$\begin{aligned}
(\partial_t - L_1^0 - L_2^0) g_2^{\alpha\beta}(x_1, x_2, t) &= L_{12}^{\prime\alpha\beta} f^\alpha(x_1, t) f^\beta(x_2, t) \\
&+ \sum_\gamma \int dx_3 \{ L_{13}^{\prime\alpha\gamma} [f^\alpha(x_1, t) g_2^{\beta\gamma}(x_2, x_3, t) \\
&+ f^\gamma(x_3, t) g_2^{\alpha\beta}(x_1, x_2, t)] \\
&+ L_{23}^{\prime\beta\gamma} [f^\beta(x_2, t) g_2^{\alpha\gamma}(x_1, x_3, t) + f^\gamma(x_3, t) g_2^{\alpha\beta}(x_1, x_2, t)] \}.
\end{aligned} \tag{2.5.48}$$

Resolvendo a Eq. 2.5.48 por convolução e usando o processo de markovianização usado para obter a equação de Landau, lembrando que neste processo o termo envolvendo as condições iniciais é negligenciado, desde que vamos usar o potencial efetivo com alcance finito r_c , temos

$$\begin{aligned}
g_2^{\alpha\beta}(x_1, x_2, t) &= \int_0^\infty d\tau U_{12}^{\alpha\beta}(\tau) \{ L_{12}^{\prime\alpha\beta} f^\alpha(x_1, t) f^\beta(x_2, t) \\
&+ \sum_\gamma \int dx_3 \{ L_{13}^{\prime\alpha\gamma} [f^\alpha(x_1, t) g_2^{\beta\gamma}(x_2, x_3, t) \\
&+ f^\gamma(x_3, t) g_2^{\alpha\beta}(x_1, x_2, t)] + L_{23}^{\prime\beta\gamma} [f^\beta(x_2, t) g_2^{\alpha\gamma}(x_1, x_3, t) \\
&+ f^\gamma(x_3, t) g_2^{\alpha\beta}(x_1, x_2, t)] \} \}.
\end{aligned} \tag{2.5.49}$$

A partir de agora iremos considerar o plasma espacialmente homogêneo, então

$$\begin{aligned}
f^\alpha(x_1, t) &= n\varphi^\alpha(\mathbf{v}_1, t) \\
g_2^{\alpha\beta}(x_1, x_2, t) &= g_2^{\alpha\beta}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t)
\end{aligned}$$

Vamos usar a representação de Fourier para resolver a Eq. 2.5.49, ou seja,

$$g_2^{\alpha\beta}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) = \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)} \tilde{g}_2^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) \tag{2.5.50}$$

A função correlação tem a seguinte propriedade:

$$\tilde{g}_2^{\alpha\beta}(-\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) = \tilde{g}_2^{*\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) \tag{2.5.51}$$

□ *Prova:*
Como vimos

$$\begin{aligned}
g_2^{\alpha\beta}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) &= \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)} \tilde{g}_2^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) \\
&= \int d\mathbf{k} \tilde{g}_2^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) \cos(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)) \\
&+ i \int d\mathbf{k} \tilde{g}_2^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) \sin(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2))
\end{aligned}$$

Vamos definir

$$\begin{aligned}
A(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) &\equiv \int d\mathbf{k} \tilde{g}_2^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) \cos(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)) \\
B(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) &\equiv \int d\mathbf{k} \tilde{g}_2^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) \sin(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)).
\end{aligned}$$

Logo

$$g_2^{\alpha\beta}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) = A(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) + iB(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t).$$

Podemos observar que:

- A é uma função par: $A(-(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2), \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) = A(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t)$,
- B é uma função ímpar: $B(-(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2), \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) = -B(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t)$.

Então

$$\begin{aligned} g_2^{\alpha\beta}(-(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2), \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) &= A(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) - iB(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) \\ &= g_2^{*\alpha\beta}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t). \end{aligned}$$

E por consequência

$$\int d\mathbf{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)} \tilde{g}_2^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) = \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)} \tilde{g}_2^{*\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t)$$

Fazendo a mudança $-\mathbf{k}$ para \mathbf{k} no lado esquerdo da equação acima, encontramos

$$\int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)} \tilde{g}_2^{\alpha\beta}(-\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) = \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)} \tilde{g}_2^{*\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t)$$

Portanto

$$\implies \tilde{g}_2^{\alpha\beta}(-\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) = \tilde{g}_2^{*\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) \quad \blacksquare$$

Reescrevendo o operador Liouvilliano na representação de Fourier:

$$\begin{aligned} L_{12}^{\prime\alpha\beta} &= \nabla_1 V_{12}^{\alpha\beta}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \partial_{12} \\ &= e_\alpha e_\beta \nabla_1 \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)} \tilde{V}(k) \partial_{12}^{\alpha\beta} \\ &= e_\alpha e_\beta \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)} \tilde{V}(k) i\mathbf{k} \cdot \partial_{12}^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

tal que $V_{12}^{\alpha\beta}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) = e_\alpha e_\beta V(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)$.

Logo o primeiro termo do lado direito da Eq. 2.5.49 é

$$\begin{aligned} A &\equiv \int_0^\infty d\tau U_{12}^{\alpha\beta}(\tau) L_{12}^{\prime\alpha\beta} f^\alpha(x_1, t) f^\beta(x_2, t) \\ &= e_\alpha e_\beta \int_0^\infty d\tau U_{12}^{\alpha\beta}(\tau) \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)} \tilde{V}(k) i\mathbf{k} \cdot \partial_{12}^{\alpha\beta} f^\alpha(x_1, t) f^\beta(x_2, t) \\ &= e_\alpha e_\beta n^2 \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k} e^{-\left(\mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_1} + \mathbf{v}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_2}\right)\tau} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)} \tilde{V}(k) i\mathbf{k} \cdot \partial_{12}^{\alpha\beta} \varphi(\mathbf{v}_1, t) \varphi(\mathbf{v}_2, t) \\ &= e_\alpha e_\beta n^2 \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{v}_1\tau + \mathbf{v}_2\tau)} \tilde{V}(k) i\mathbf{k} \cdot \partial_{12}^{\alpha\beta} \varphi(\mathbf{v}_1, t) \varphi(\mathbf{v}_2, t) \\ &= e_\alpha e_\beta n^2 \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)} \int_0^\infty d\tau e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{v}_1\tau - \mathbf{v}_2\tau)} \tilde{V}(k) i\mathbf{k} \cdot \partial_{12}^{\alpha\beta} \varphi(\mathbf{v}_1, t) \varphi(\mathbf{v}_2, t). \end{aligned}$$

O segundo termo da Eq. 2.5.49 é

$$\begin{aligned}
B &\equiv \int_0^\infty d\tau U_{12}^{\alpha\beta}(\tau) \sum_\gamma \int dx_3 L_{13}^{\alpha\gamma} f^\alpha(x_1, t) g_2^{\beta\gamma}(x_2, x_3, t) \\
&= \sum_\gamma \int_0^\infty d\tau \int dx_3 U_{12}^{\alpha\beta}(\tau) L_{13}^{\alpha\gamma} f^\alpha(x_1, t) g_2^{\beta\gamma}(x_2, x_3, t) \\
&= \sum_\gamma e_\alpha e_\gamma n \int_0^\infty d\tau \int dx_3 \int d\mathbf{k} e^{-\left(\mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_1} + \mathbf{v}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_2}\right)\tau} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3)} \\
&\quad \tilde{V}(k) i\mathbf{k} \cdot \partial_1^\alpha \varphi(\mathbf{v}_1, t) g_2^{\beta\gamma}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, t) \\
&= \sum_\gamma e_\alpha e_\gamma n \int_0^\infty d\tau \int dx_3 \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{v}_1\tau + \mathbf{v}_2\tau)} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_2 + \mathbf{v}_2\tau)} \\
&\quad \tilde{V}(k) i\mathbf{k} \cdot \partial_1^\alpha \varphi(\mathbf{v}_1, t) g_2^{\beta\gamma}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{v}_2\tau - \mathbf{q}_3, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, t) \\
&= e_\alpha \sum_\gamma e_\gamma n \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{v}_3 \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{v}_1\tau + \mathbf{v}_2\tau)} \tilde{V}(k) i\mathbf{k} \cdot \partial_1^\alpha \varphi(\mathbf{v}_1, t) \\
&\quad \int d\mathbf{q}_3 e^{-i(-\mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{v}_2\tau)} g_2^{\beta\gamma}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{v}_2\tau - \mathbf{q}_3, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, t) \\
&= 8\pi^3 e_\alpha \sum_\gamma e_\gamma n \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{v}_3 \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{v}_1\tau + \mathbf{v}_2\tau)} \tilde{V}(k) i\mathbf{k} \cdot \partial_1^\alpha \varphi(\mathbf{v}_1, t) \tilde{g}_2^{\beta\gamma}(-\mathbf{k}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, t) \\
&= 8\pi^3 e_\alpha \sum_\gamma e_\gamma n \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)} \\
&\quad \int d\mathbf{v}_3 e^{i\mathbf{k} \cdot (-\mathbf{v}_1\tau + \mathbf{v}_2\tau)} \tilde{V}(k) i\mathbf{k} \cdot \partial_1^\alpha \varphi(\mathbf{v}_1, t) \tilde{g}_2^{\beta\gamma}(-\mathbf{k}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, t).
\end{aligned}$$

O terceiro termo da Eq. 2.5.49 é

$$\begin{aligned}
C &\equiv \int_0^\infty d\tau U_{12}^{\alpha\beta}(\tau) \sum_\gamma \int dx_3 L_{13}^{\alpha\gamma} f^\gamma(x_3, t) g_2^{\alpha\beta}(x_1, x_2, t) \\
&= n e_\alpha \int_0^\infty d\tau \sum_\gamma e_\gamma \int dx_3 e^{-\left(\mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_1} + \mathbf{v}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_2}\right)\tau} \\
&\quad \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3)} \tilde{V}(k) i\mathbf{k} \cdot \partial_1^\alpha \varphi(\mathbf{v}_3, t) g_2^{\alpha\beta}(x_1, x_2, t) \\
&= n e_\alpha \int_0^\infty d\tau \sum_\gamma e_\gamma \int d\mathbf{v}_3 \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{q}_3 e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}_3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{v}_1\tau)} \tilde{V}(k) i\mathbf{k} \cdot \\
&\quad \partial_1^\alpha \varphi(\mathbf{v}_3, t) g_2^{\alpha\beta}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{v}_1\tau - \mathbf{v}_2\tau, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) \\
&= n e_\alpha \int_0^\infty d\tau \sum_\gamma e_\gamma \int d\mathbf{v}_3 \int d\mathbf{k} \delta(-\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{v}_1\tau)} \tilde{V}(k) i\mathbf{k} \cdot \\
&\quad \partial_1^\alpha \varphi(\mathbf{v}_3, t) \int d\mathbf{l} e^{i\mathbf{l} \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{v}_1\tau + \mathbf{v}_2\tau)} \tilde{g}_2^{\alpha\beta}(\mathbf{l}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t).
\end{aligned}$$

Definindo

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{q}_1, \mathbf{v}_1) \equiv e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{v}_1\tau)} \tilde{V}(k) i\mathbf{k}.$$

Temos

$$\int d\mathbf{k} \delta(-\mathbf{k}) f(\mathbf{k}, \mathbf{q}_1, \mathbf{v}_1) = - \int d\mathbf{k} \delta(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}, \mathbf{q}_1, \mathbf{v}_1) = f(0, \mathbf{q}_1, \mathbf{v}_1) = 0.$$

Logo

$$C = 0.$$

O quarto termo é

$$\begin{aligned} D &\equiv \int_0^\infty d\tau U_{12}^{\alpha\beta}(\tau) \sum_\gamma \int dx_3 L_{23}^{\beta\gamma} f^\beta(x_2, t) g_2^{\alpha\gamma}(x_1, x_3, t) \\ &= ne_\beta \sum_\gamma e_\gamma \int_0^\infty d\tau \int dx_3 \\ &\quad \int d\mathbf{k} e^{-(\mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_1} + \mathbf{v}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_2})\tau} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3)} \tilde{V}(k) i\mathbf{k} \cdot \partial_2^\beta \varphi(\mathbf{v}_2, t) g_2^{\alpha\gamma}(x_1, x_3, t) \\ &= ne_\beta \sum_\gamma e_\gamma \int_0^\infty d\tau \int dx_3 \\ &\quad \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q}_2 - \mathbf{v}_2 \tau - \mathbf{q}_3)} \tilde{V}(k) i\mathbf{k} \cdot \partial_2^\beta \varphi(\mathbf{v}_2, t) g_2^{\alpha\gamma}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{v}_1 \tau - \mathbf{q}_3, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, t) \\ &= ne_\beta \sum_\gamma e_\gamma \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{v}_3 \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 - \mathbf{v}_2 \tau + \mathbf{v}_1 \tau)} \tilde{V}(k) i\mathbf{k} \cdot \partial_2^\beta \varphi(\mathbf{v}_2, t) \\ &\quad \int d\mathbf{q}_3 e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{v}_1 \tau - \mathbf{q}_3)} g_2^{\alpha\gamma}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{v}_1 \tau - \mathbf{q}_3, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, t) \\ &= 8\pi^3 ne_\beta \sum_\gamma e_\gamma \int_0^\infty d\tau \\ &\quad \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1)} \int d\mathbf{v}_3 e^{i\mathbf{k} \cdot (-\mathbf{v}_2 \tau + \mathbf{v}_1 \tau)} \tilde{V}(k) i\mathbf{k} \cdot \partial_2^\beta \varphi(\mathbf{v}_2, t) \tilde{g}_2^{\alpha\gamma}(-\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, t) \\ &= 8\pi^3 ne_\beta \sum_\gamma e_\gamma \int d\mathbf{k} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)} \int d\mathbf{v}_3 \\ &\quad \int_0^\infty d\tau e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{v}_1 \tau - \mathbf{v}_2 \tau)} \tilde{V}(k) i\mathbf{k} \cdot \partial_2^\beta \varphi(\mathbf{v}_2, t) \tilde{g}_2^{\alpha\gamma}(-\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, t). \end{aligned}$$

Rearranjamos a seguinte integral

$$\begin{aligned} &\int d\mathbf{k} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{v}_1 \tau - \mathbf{v}_2 \tau)} \tilde{V}(k) i\mathbf{k} \cdot \partial_2^\beta \varphi(\mathbf{v}_2, t) \tilde{g}_2^{\alpha\gamma}(-\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, t) \\ &= \int d(-\mathbf{k}) e^{i(-\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)} e^{i(-\mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{v}_1 \tau + \mathbf{v}_2 \tau)} \tilde{V}(-k) i(-\mathbf{k}) \cdot \partial_2^\beta \varphi(\mathbf{v}_2, t) \tilde{g}_2^{\alpha\gamma}(-\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, t), \end{aligned}$$

fazendo a mudança de variável $-\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}$

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)} e^{i\mathbf{k} \cdot (-\mathbf{v}_1 \tau + \mathbf{v}_2 \tau)} \tilde{V}(k) i\mathbf{k} \cdot \partial_2^\beta \varphi(\mathbf{v}_2, t) \tilde{g}_2^{\alpha\gamma}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)} e^{i\mathbf{k} \cdot (-\mathbf{v}_1 \tau + \mathbf{v}_2 \tau)} \tilde{V}(k) i(-\mathbf{k}) \cdot \partial_2^\beta \varphi(\mathbf{v}_2, t) \tilde{g}_2^{\alpha\gamma}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, t) \end{aligned}$$

Logo

$$D = 8\pi^3 n e_\beta \sum_\gamma e_\gamma \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{v}_3 \int_0^\infty d\tau e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)} e^{i\mathbf{k}\cdot(-\mathbf{v}_1\tau+\mathbf{v}_2\tau)} \tilde{V}(k) i(-\mathbf{k}) \cdot \partial_2^\beta \varphi(\mathbf{v}_2, t) \tilde{g}_2^{\alpha\gamma}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, t)$$

E o último termo da Eq. 2.5.49 é nulo como o termo C. Substituindo os termos na Eq. 2.5.49, usando as Eqs. 2.5.50, 2.5.51 e lembrando que

$$\delta_-(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk e^{-ikx} = \delta(x) - i\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right) = \delta_+^*(x)$$

e

$$\delta_+(x) = \delta(x) + i\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk e^{ikx}$$

temos

$$\begin{aligned} \tilde{g}_2^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) &= -e_\alpha e_\beta n^2 \pi \delta_-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{g}_{12}) \tilde{V}(k) i\mathbf{k}\cdot\partial_{12}^{\alpha\beta} \varphi(\mathbf{v}_1, t) \varphi(\mathbf{v}_2, t) \\ &\quad - 8\pi^4 e_\alpha \sum_\gamma e_\gamma n \int d\mathbf{v}_3 \delta_+^*(\mathbf{k}\cdot\mathbf{g}_{12}) \tilde{V}(k) i\mathbf{k}\cdot\partial_1^\alpha \varphi(\mathbf{v}_1, t) \tilde{g}_2^{\beta\gamma}(-\mathbf{k}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, t) \\ &\quad - 8\pi^4 n e_\beta \sum_\gamma e_\gamma \int d\mathbf{v}_3 \delta_-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{g}_{12}) \tilde{V}(k) i(-\mathbf{k}) \cdot \partial_2^\beta \varphi(\mathbf{v}_2, t) \tilde{g}_2^{\alpha\gamma}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, t). \end{aligned} \quad (2.5.52)$$

Agora substituindo a Eq. 2.5.52 na Eq. 2.5.46 para obtermos a equação cinética para o plasma homogêneo

$$\begin{aligned} n\partial_t \varphi(\mathbf{v}_1, t) &= \sum_\beta \int d\mathbf{x}_2 \nabla_1 V_{12}^{\alpha\beta}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \partial_1 n \varphi(\mathbf{v}_1, t) n \varphi(\mathbf{v}_2, t) \\ &\quad + \sum_\beta \int d\mathbf{x}_2 \nabla_1 V_{12}^{\alpha\beta}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \partial_1 g_2^{\alpha\beta}(x_1, x_2, t). \end{aligned}$$

O primeiro termo é o termo de Vlasov, que anula para o caso do plasma homogêneo, logo

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi(\mathbf{v}_1, t) &= n^{-1} \sum_\beta \int d\mathbf{v}_2 \int d\mathbf{q}_2 \nabla_1 V_{12}^{\alpha\beta}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \partial_1 g_2^{\alpha\beta}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) \\ &= n^{-1} e_\alpha \sum_\beta e_\beta \int d\mathbf{v}_2 \int d\mathbf{q}_2 \int d\mathbf{k} \tilde{V}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)} i\mathbf{k}\cdot\partial_1^\alpha g_2^{\alpha\beta}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) \\ &= 8\pi^3 n^{-1} e_\alpha \sum_\beta e_\beta \int d\mathbf{v}_2 \int d\mathbf{k} \tilde{V}(\mathbf{k}) i(-\mathbf{k}) \cdot \partial_1^\alpha \tilde{g}_2^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t). \end{aligned} \quad (2.5.53)$$

A função reduzida de uma partícula $\varphi(\mathbf{v}_1, t)$ é uma função real, logo para que a igualdade acima seja satisfeita o lado direito tem que conter uma função real. Devido ao fato que $\tilde{g}_2^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t)$ ser uma função complexa,

$$\tilde{g}_2^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) = \tilde{g}_{2R}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) + i\tilde{g}_{2I}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t)$$

Apenas a parte imaginária contribue para a Eq. 2.5.53, pois $\varphi(\mathbf{v}_1, t)$ é uma função real, então

$$\partial_t \varphi(\mathbf{v}_1, t) = 8\pi^3 n^{-1} e_\alpha \sum_\beta e_\beta \int d\mathbf{v}_2 \int d\mathbf{k} \tilde{V}(\mathbf{k}) \mathbf{k} \cdot \partial_1^\alpha \tilde{g}_{2I}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t). \quad (2.5.54)$$

Podemos observar através da Eq. 2.5.52, que $\tilde{g}_2^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t)$ depende de três variáveis \mathbf{k} , \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 e dois índices α e β . A Eq. 2.5.54 depende de uma função simples

$$\tilde{G}^\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1) = \sum_\beta e_\beta \int d\mathbf{v}_2 \tilde{g}_{2I}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t).$$

Vamos expressar a Eq. 2.5.52 através desta função G , multiplicando a Eq. 2.5.52 por e_β , integrando por \mathbf{v}_2 e somando para todo β , obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{G}^\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1) &= -8\pi^4 e_\alpha \sum_\beta e_\beta n \int d\mathbf{v}_2 \delta_-(\mathbf{k}, \mathbf{g}_{12}) \tilde{V}(k) i\mathbf{k} \cdot \partial_1^\alpha \varphi(\mathbf{v}_1, t) \tilde{G}^{*\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_2) \\ &+ 8\pi^4 n \sum_\beta e_\beta^2 \int d\mathbf{v}_2 \delta_-(\mathbf{k}, \mathbf{g}_{12}) \tilde{V}(k) i(\mathbf{k}) \cdot \partial_2^\beta \varphi(\mathbf{v}_2, t) \tilde{G}^\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1) \\ &- e_\alpha \sum_\beta e_\beta^2 \int d\mathbf{v}_2 n^2 \pi \delta_-(\mathbf{k}, \mathbf{g}_{12}) \tilde{V}(k) i\mathbf{k} \cdot \partial_{12}^{\alpha\beta} \varphi(\mathbf{v}_1, t) \varphi(\mathbf{v}_2, t). \end{aligned} \quad (2.5.55)$$

Vamos introduzir as seguintes abreviações:

$$d^\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t) = 8\pi^3 n e_\alpha \tilde{V}(k) [\mathbf{k} \cdot \partial_1^\alpha \varphi^\alpha(\mathbf{v}_1, t)], \quad (2.5.56)$$

$$q^\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t) = \pi n^2 e_\alpha \sum_\beta e_\beta^2 \int d\mathbf{v}_2 \delta_-(\mathbf{k}, \mathbf{g}_{12}) \tilde{V}(k) i\mathbf{k} \cdot \partial_{12}^{\alpha\beta} \varphi(\mathbf{v}_1, t) \varphi(\mathbf{v}_2, t), \quad (2.5.57)$$

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t) = 1 - 8\pi^4 n \sum_\beta e_\beta^2 \int d\mathbf{v}_2 \delta_-(\mathbf{k}, \mathbf{g}_{12}) \tilde{V}(k) i(\mathbf{k}) \cdot \partial_2^\beta \varphi(\mathbf{v}_2, t). \quad (2.5.58)$$

Vamos substituir $d^\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t)$, $q^\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t)$ e $\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t)$ em 2.5.55

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t) \tilde{G}^\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1) = -i\pi d^\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t) \sum_\beta e_\beta \int d\mathbf{v}_2 \delta_-(\mathbf{k}, \mathbf{g}_{12}) \tilde{G}^{*\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_2) - q^\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t). \quad (2.5.59)$$

Ou seja, temos uma equação que depende apenas de um vetor \mathbf{v}_1 e um índice. E podemos reescrever a Eq. 2.5.54 em função de $G^\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1)$, tal que

$$\partial_t \varphi(\mathbf{v}_1, t) = 8\pi^3 n^{-1} e_\alpha \int d\mathbf{k} \tilde{V}(\mathbf{k}) \mathbf{k} \cdot \partial_1^\alpha \tilde{G}_I^\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t), \quad (2.5.60)$$

onde $\tilde{G}_I^\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t)$ é a parte imaginária de $\tilde{G}^\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t)$.

Devido ao fato de $\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t)$, $q^\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t)$ e $d^\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t)$ depender de $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1$ vamos denominar a componente paralela a \mathbf{k} da velocidade por ν ,

$$\nu = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{k}$$

E vamos representar uma função qualquer $f^\alpha(\mathbf{v})$ em função de ν através da seguinte relação

$$\overline{f(\nu)} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int d\mathbf{v} \delta\left(\nu - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{k}\right) f^{\alpha}(\mathbf{v}). \quad (2.5.61)$$

Logo

$$\overline{d(\mathbf{k}, \nu_1)} = 8\pi^3 n \sum_{\alpha} e_{\alpha}^2 \tilde{V}(k) \int d\mathbf{v}_2 \delta\left(\nu_1 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_2}{k}\right) [\mathbf{k} \cdot \partial_2^{\alpha} \varphi^{\alpha}(\mathbf{v}_2)], \quad (2.5.62)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{k}, \nu_1) &= 1 - 8\pi^4 n \tilde{V}(k) \sum_{\alpha} e_{\alpha}^2 \int d\mathbf{v}_2 \delta_-(k\nu_1 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_2) i(\mathbf{k}) \cdot \partial_2^{\alpha} \varphi(\mathbf{v}_2, t) \\ &= 1 - 8\pi^4 n \tilde{V}(k) \sum_{\alpha} e_{\alpha}^2 \int d\mathbf{v}_2 \left(\delta(k\nu_1 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_2) - \frac{i}{\pi} \mathcal{P}\left(\frac{1}{k\nu_1 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_2}\right) \right) i(\mathbf{k}) \cdot \partial_2^{\alpha} \varphi(\mathbf{v}_2, t) \\ &= 1 + 8\pi^3 n \tilde{V}(k) \sum_{\alpha} e_{\alpha}^2 \int d\mathbf{v}_2 \mathcal{P}\left(\frac{1}{k\nu_1 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_2}\right) (\mathbf{k}) \cdot \partial_2^{\alpha} \varphi(\mathbf{v}_2, t) \\ &\quad - 8\pi^4 n \tilde{V}(k) \sum_{\alpha} e_{\alpha}^2 \int d\mathbf{v}_2 \delta(k\nu_1 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_2) i(\mathbf{k}) \cdot \partial_2^{\alpha} \varphi(\mathbf{v}_2, t), \end{aligned} \quad (2.5.63)$$

com

$$\delta_-(x) = \delta(x) - \frac{i}{\pi} \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Comparando as Eqs. 2.5.62 e 2.5.63, temos que

$$\frac{\overline{\pi d(\mathbf{k}, \nu_1)}}{k} = -\varepsilon_I(\mathbf{k}, \nu_1), \quad (2.5.64)$$

com $\varepsilon_I(\nu_1)$ a parte imaginária de $\varepsilon(\nu_1)$.

E temos a seguinte relação

$$\begin{aligned} \overline{q(\mathbf{k}, \nu)} &= \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int d\mathbf{v}_1 \delta\left(\nu - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1}{k}\right) \pi n^2 e_{\alpha} \\ &\quad \sum_{\beta} e_{\beta}^2 \int d\mathbf{v}_2 \delta_-(k\nu - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_2) \tilde{V}(k) i\mathbf{k} \cdot \partial_{12}^{\alpha\beta} \varphi(\mathbf{v}_1, t) \varphi(\mathbf{v}_2, t) \\ &= \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int d\mathbf{v}_1 \delta\left(\nu - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1}{k}\right) \pi n^2 e_{\alpha} \\ &\quad \sum_{\beta} e_{\beta}^2 \int d\mathbf{v}_2 \left(\delta(k\nu - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_2) - \frac{i}{\pi} \mathcal{P}\left(\frac{1}{k\nu - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_2}\right) \right) \tilde{V}(k) i\mathbf{k} \cdot \partial_{12}^{\alpha\beta} \varphi(\mathbf{v}_1, t) \varphi(\mathbf{v}_2, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{q_I(\mathbf{k}, \nu)} &= \sum_{\alpha} e_{\alpha}^2 \sum_{\beta} e_{\beta}^2 \tilde{V}(k) \int d\mathbf{v}_1 \delta\left(\nu - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1}{k}\right) \pi n^2 \int d\mathbf{v}_2 \delta(k\nu - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_2) \\ &\quad \left[\varphi(\mathbf{v}_2, t) \mathbf{k} \cdot \partial_1^{\alpha} \varphi(\mathbf{v}_1, t) - \varphi(\mathbf{v}_1, t) \mathbf{k} \cdot \partial_2^{\beta} \varphi(\mathbf{v}_2, t) \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando a Eq. 2.5.59 por $e_\alpha \delta(\nu_1 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1}{k})$, somando para toda partícula α e integrando em \mathbf{v}_1 , temos

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t) \overline{\tilde{G}(\mathbf{k}, \nu_1)} &= -i\pi d(\mathbf{k}, \nu_1) \sum_{\beta} e_{\beta} \int d\mathbf{v}_2 \delta_{-}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{g}_{12}) \tilde{G}^{*\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_2) - \overline{q(\mathbf{k}, \nu_1)} \\ &= -i\pi d(\mathbf{k}, \nu_1) \sum_{\beta} e_{\beta} \int d\mathbf{v}_2 \delta_{-}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{g}_{12}) \tilde{G}^{*\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_2) - \overline{q(\mathbf{k}, \nu_1)}. \end{aligned}$$

Vamos considerar que

$$\sum_{\beta} e_{\beta} \int d\mathbf{v}_2 \delta_{-}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{g}_{12}) \tilde{G}^{*\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_2) = k^{-1} \int d\nu_2 \delta_{-}(\nu_1 - \nu_2) \overline{\tilde{G}^*(\mathbf{k}, \nu_2)}. \quad (2.5.65)$$

Podemos concluir que

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t) \overline{\tilde{G}(\mathbf{k}, \nu_1)} = i\varepsilon_I(\mathbf{k}, \nu_1) \int d\nu_2 \delta_{-}(\nu_1 - \nu_2) \overline{\tilde{G}^*(\mathbf{k}, \nu_2)} - \overline{q(\mathbf{k}, \nu_1)}. \quad (2.5.66)$$

Ou seja,

$$\int d\nu_2 \delta_{-}(\nu_1 - \nu_2) \overline{\tilde{G}^*(\mathbf{k}, \nu_2)} = \frac{\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t) \overline{\tilde{G}(\mathbf{k}, \nu_1)} + \overline{q(\mathbf{k}, \nu_1)}}{i\varepsilon_I(\mathbf{k}, \nu_1)}. \quad (2.5.67)$$

Substituindo a Eq. 2.5.67 na Eq. 2.5.65 e substituindo a Eq. 2.5.65 na Eq. 2.5.59, temos

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t) \tilde{G}^{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1) &= -\frac{i\pi d^{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t)}{k} \left(\frac{\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t) \overline{\tilde{G}(\mathbf{k}, \nu_1)} + \overline{q(\mathbf{k}, \nu_1)}}{i\varepsilon_I(\mathbf{k}, \nu_1)} \right) - q^{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t) \\ \tilde{G}^{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1) &= -\frac{\pi d^{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t)}{k} \frac{\overline{\tilde{G}(\mathbf{k}, \nu_1)}}{\varepsilon_I(\mathbf{k}, \nu_1)} - \frac{q^{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t)}{\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t)} - \frac{\pi d^{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t) \overline{q(\mathbf{k}, \nu_1)}}{\varepsilon_I(\mathbf{k}, \nu_1) \varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t)}. \end{aligned} \quad (2.5.68)$$

A parte imaginária da Eq. 2.5.68 é

$$\begin{aligned} \tilde{G}_I^{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1) &= -\frac{\pi d^{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t)}{k} \frac{\overline{\tilde{G}_I(\mathbf{k}, \nu_1)}}{\varepsilon_I(\mathbf{k}, \nu_1)} + Im \left[\frac{\varepsilon^*(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t)}{|\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t)|^2} [-q^{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi d^{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t) \overline{q(\mathbf{k}, \nu_1)}}{\varepsilon_I(\mathbf{k}, \nu_1)}] \right] \\ &= -\frac{\pi d^{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t)}{k} \frac{\overline{\tilde{G}_I(\mathbf{k}, \nu_1)}}{\varepsilon_I(\mathbf{k}, \nu_1)} \\ &\quad + \frac{1}{|\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t)|^2} [-\varepsilon_R(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t) q_I^{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t) + \varepsilon_I(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t) q_R^{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t) \\ &\quad + \frac{\pi d^{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t) \overline{q_R(\mathbf{k}, \nu_1)}}{k}]. \end{aligned}$$

Logo

$$\tilde{G}_I^{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1) = -\frac{\pi d^{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t)}{k} \frac{\overline{\tilde{G}_I(\mathbf{k}, \nu_1)}}{\varepsilon_I(\mathbf{k}, \nu_1)} + \frac{1}{|\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t)|^2} q_I^{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t). \quad (2.5.69)$$

Da Eq. 2.5.66, temos

$$\begin{aligned}\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t) \overline{\tilde{G}(\mathbf{k}, \nu_1)} &= i\varepsilon_I(\mathbf{k}, \nu_1) \int d\nu_2 \delta_-(\nu_1 - \nu_2) \overline{\tilde{G}^*(\mathbf{k}, \nu_2)} - \overline{q_R(\mathbf{k}, \nu_1)} \\ \varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t) \overline{\tilde{G}(\mathbf{k}, \nu_1)} &= i\varepsilon_I(\mathbf{k}, \nu_1) \overline{\tilde{G}^*(\mathbf{k}, \nu_1)} + \overline{\varepsilon_I(\mathbf{k}, \nu_1) \mathcal{P} \tilde{G}^*(\mathbf{k}, \nu_1)} - \overline{q_R(\mathbf{k}, \nu_1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\varepsilon_R(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t) + i\varepsilon_I(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t)] \left[\overline{\tilde{G}_R(\mathbf{k}, \nu_1)} + i\overline{\tilde{G}_I(\mathbf{k}, \nu_1)} \right] &= i\overline{\varepsilon_I(\mathbf{k}, \nu_1)} \left[\overline{\tilde{G}_R(\mathbf{k}, \nu_1)} - i\overline{\tilde{G}_I(\mathbf{k}, \nu_1)} \right] \\ &+ \overline{\varepsilon_I(\mathbf{k}, \nu_1) \mathcal{P}} \left[\overline{\tilde{G}_R(\mathbf{k}, \nu_1)} - i\overline{\tilde{G}_I(\mathbf{k}, \nu_1)} \right] \\ &- \overline{q_R(\mathbf{k}, \nu_1)}\end{aligned}$$

Separando em parte real e parte imaginária,

$$\begin{aligned}\varepsilon_R(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t) \overline{\tilde{G}_R(\mathbf{k}, \nu_1)} - \varepsilon_I(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t) \overline{\tilde{G}_I(\mathbf{k}, \nu_1)} &= \overline{\varepsilon_I(\mathbf{k}, \nu_1) \tilde{G}_I(\mathbf{k}, \nu_1)} \\ &+ \overline{\varepsilon_I(\mathbf{k}, \nu_1) \mathcal{P} \tilde{G}_R(\mathbf{k}, \nu_1)} - \overline{q_R(\mathbf{k}, \nu_1)} \\ \varepsilon_R(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t) \overline{\tilde{G}_I(\mathbf{k}, \nu_1)} + \varepsilon_I(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t) \overline{\tilde{G}_R(\mathbf{k}, \nu_1)} &= \overline{\varepsilon_I(\mathbf{k}, \nu_1) \tilde{G}_R(\mathbf{k}, \nu_1)} - \overline{\varepsilon_I(\mathbf{k}, \nu_1) \mathcal{P} \tilde{G}_I(\mathbf{k}, \nu_1)}.\end{aligned}$$

Ou seja

$$\varepsilon_R(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t) \overline{\tilde{G}_R(\mathbf{k}, \nu_1)} - \overline{\varepsilon_I(\mathbf{k}, \nu_1) \mathcal{P} \tilde{G}_R(\mathbf{k}, \nu_1)} = \overline{2\varepsilon_I(\mathbf{k}, \nu_1) \tilde{G}_I(\mathbf{k}, \nu_1)} - \overline{q_R(\mathbf{k}, \nu_1)}, \quad (2.5.70)$$

$$\varepsilon_R(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t) \overline{\tilde{G}_I(\mathbf{k}, \nu_1)} + \overline{\varepsilon_I(\mathbf{k}, \nu_1) \mathcal{P} \tilde{G}_I(\mathbf{k}, \nu_1)} = 0. \quad (2.5.71)$$

Da Eq. 2.5.71

$$\overline{\tilde{G}_I(\mathbf{k}, \nu_1)} = 0.$$

Substituindo este resultado na Eq. 2.5.69, temos

$$\tilde{G}_I^\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1) = \frac{1}{|\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t)|^2} q_I^\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t).$$

Substituindo este resultado na Eq. 2.5.60, obtemos

$$\begin{aligned}\partial_t \varphi(\mathbf{v}_1, t) &= 8\pi^3 n^{-1} e_\alpha \int d\mathbf{k} \tilde{V}(\mathbf{k}) \mathbf{k} \cdot \partial_1^\alpha \frac{1}{|\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t)|^2} q_I^\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t) \\ &= 8\pi^4 n e_\alpha^2 \sum_\beta e_\beta^2 \int d\mathbf{v}_2 \int d\mathbf{k} \tilde{V}^2(k) \mathbf{k} \cdot \partial_1^\alpha \frac{\delta(\mathbf{k}, \mathbf{g}_{12}) \mathbf{k} \cdot \partial_{12}^{\alpha\beta} \varphi(\mathbf{v}_1, t) \varphi(\mathbf{v}_2, t)}{|\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, t)|^2}.\end{aligned} \quad (2.5.72)$$

Esta é a equação de Lenard-Balescu para plasmas [3].

Capítulo III

Resultados

Neste capítulo iremos encontrar as equações que descrevem a evolução temporal do modelo HMF (Hamiltonian Mean Field) e de sistemas gravitacionais 1D, vamos trabalhar com sistemas homogêneos unidimensionais.

3.1 HMF

O modelo do HMF (Hamiltonian Mean Field) consiste em N partículas interagentes movendo em um círculo de raio unitário. As partículas estão distribuídas na coordenada θ_i , tal que, $-\pi \leq \theta_i \leq \pi$ e p_i o momento conjugado da partícula i [1].

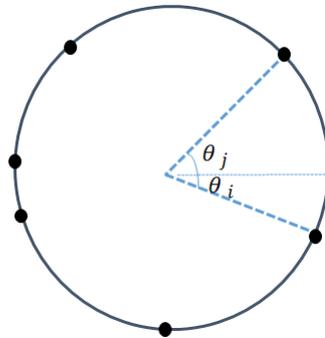


Figura 3.1.1: Partículas no HMF.

Para este sistema o potencial é descrito pela equação de Poisson

$$\nabla^2 \psi(\theta) = c \sum_{i=1}^N \delta(\theta - \theta_i),$$

em que c é uma constante que depende do tipo do sistema e que é proporcional a $\frac{1}{N}$, pois o termo a direita da equação representa a densidade do sistema.

Expressando a função delta de Dirac em série, temos:

$$\begin{aligned}\nabla^2\psi(\theta) &= c \sum_{i=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in(\theta-\theta_i)}}{2\pi}, \\ \frac{d^2\psi(\theta)}{d\theta^2} &= c \sum_{i=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos n(\theta-\theta_i) + i \sin n(\theta-\theta_i)}{2\pi} \\ &= c' \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(\theta-\theta_i)}{2\pi}.\end{aligned}$$

Integrando em θ , considerando que $\psi(\theta_i) = 0$ e $\left. \frac{d\psi(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_i} = 0$, temos que

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{d\psi(\theta)}{d\theta}} d\left(\frac{d\psi(\theta)}{d\theta}\right) &= c \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\theta_i}^{\theta} d\theta \frac{\cos n(\theta-\theta_i)}{2\pi}, \\ \frac{d\psi(\theta)}{d\theta} &= c \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(\theta-\theta_i)}{2\pi n}, \\ \psi(\theta) &= c \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n(\theta-\theta_i)}{2\pi n^2}.\end{aligned}$$

O primeiro termo desta série é o potencial do HMF

$$\psi(\theta) = c \sum_{i=1}^N \frac{1 - \cos(\theta - \theta_i)}{2\pi},$$

logo o potencial na partícula j é

$$\psi(\theta_j) = c \sum_{i \neq j}^N \frac{1 - \cos(\theta_j - \theta_i)}{2\pi},$$

e o potencial total é

$$V = \frac{c''}{N} \sum_{i < j=1}^N \frac{1 - \cos(\theta_j - \theta_i)}{2\pi}.$$

Neste capítulo estamos interessados no acoplamento fraco, ou seja, vamos considerar $c'' = \alpha \ll 1$, então a hamiltoniana do HMF é

$$H(p, \theta_{ji}) = \sum_{j=1}^N \frac{p_j^2}{2} + \frac{\alpha}{N} \sum_{i < j=1}^N \frac{1 - \cos(\theta_j - \theta_i)}{2\pi}.$$

Para nossos cálculos vamos considerar a massa das partículas $m_j = 1$.

3.2 Equações cinéticas para o HMF

Iremos estudar o comportamento do HMF homogêneo, unidimensional e com interações de longo-alcance. Vimos no capítulo 2 que a equação que descreve o comportamento de sistemas de longo alcance é a equação de Vlasov. Mas como o sistema é homogêneo a equação de Vlasov se anula, então temos que usar a equação de Lenard-Balescu. Iremos considerar $\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) = 1$, pois nosso sistema não tem partículas carregadas. Entretanto a equação de Lenard-Balescu também se anula para sistemas unidimensionais. Devido a ausência de equações que descrevam a evolução deste sistema, temos como objetivo obter estas equações [7].

A hamiltoniana para o HMF é

$$H(p, x) = \sum_{j=1}^N \frac{p_j^2}{2} + \frac{\alpha}{N} \sum_{i < j=1}^N V(\theta_i - \theta_j), \quad (3.2.1)$$

com

$$V(\theta_i - \theta_j) = 1 - \cos(\theta_i - \theta_j).$$

Para encontrar a equação cinética para estados homogêneos vamos começar da equação de Liouville:

$$\frac{\partial f_N(x_1, \dots, x_N, t)}{\partial t} = [H, f_N(x_1, \dots, x_N, t)],$$

com

$$\begin{aligned} \int dx_1 \dots dx_N f_N(x_1, \dots, x_N, t) &= 1, \\ x_i &= (\boldsymbol{\theta}_i, \mathbf{v}_i), \\ f_s(x_1, \dots, x_s, t) &= \int dx_1 \dots dx_s f_N(x_1, \dots, x_N, t). \end{aligned}$$

A hierarquia BBKGY é

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_s(x_1, \dots, x_s, t)}{\partial t} &= \sum_{j=1}^s L_j^0 f_s(x_1, \dots, x_s, t) + \frac{\alpha}{N} \sum_{j < n} L'_{jn} f_s(x_1, \dots, x_s, t) \\ &+ \frac{(N-s)}{N} \alpha \sum_{j=1}^s \int dx_{s+1} L'_{j(s+1)} f_{s+1}(x_1, \dots, x_{s+1}, t), \quad (3.2.2) \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} L_j^0 &= -\mathbf{v}_j \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_j} = -\mathbf{v}_j \cdot \nabla_j, \\ L'_{jn} &= \nabla_j V(\theta_j - \theta_n) \cdot \partial_{j_n} = \frac{\partial V(\theta_j - \theta_n)}{\partial \theta_j} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_j} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_n} \right). \end{aligned}$$

As funções distribuição reduzida são escritas com a representação de cluster, ou seja,

$$f_2(x_1, x_2) = f(x_1) f(x_2) + g_2(x_1, x_2), \quad (3.2.3)$$

$$\begin{aligned}
f_3(x_1, x_2, x_3) &= f(x_1) f(x_2) f(x_3) + f(x_1) g_2(x_2, x_3) \\
&\quad + f(x_2) g_2(x_1, x_3) + f(x_3) g_2(x_1, x_2) \\
&\quad + g_3(x_1, x_2, x_3).
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

A correlação depende da razão $\frac{1}{N}$, quanto maior o número de partículas mais descorrelacionado é o sistema. E a correlação também depende da constante de acoplamento fraco α , pois quanto maior α mais interagente é o sistema e mais acoplado. Então vamos expandir as correlações g_2 e g_3 em termos de $\frac{\alpha}{N}$.

A correlação g_2 está associada a uma interação de duas partículas, então ela é expandida a partir de termos de ordem $\frac{\alpha}{N}$. Já a correlação g_3 é associada a duas interações, a interação da partícula 1 com a 2 e a interação da partícula 2 com a 3, portanto vamos expandir g_3 a partir de $\frac{\alpha^2}{N^2}$. Então

$$g_2 = \frac{\alpha}{N} g_2^1 + \frac{\alpha^2}{N^2} g_2^2 + O\left(\frac{\alpha^3}{N^3}\right), \tag{3.2.5}$$

$$g_3 = \frac{\alpha^2}{N^2} g_3^2 + O\left(\frac{\alpha^3}{N^3}\right). \tag{3.2.6}$$

Para $s=1$ na Eq. 3.2.2, temos

$$\frac{\partial f_s(x_1, t)}{\partial t} = L_1^0 f_1(x_1, t) + \frac{(N-1)}{N} \alpha \int dx_2 L'_{12} f_2(x_1, x_2, t).$$

Para o sistema homogêneo unidimensional, substituindo a Eq. 3.2.3, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x_1, t)}{\partial t} &= \frac{(N-1)}{N} \alpha \int dx_2 \nabla_1 V(\theta_1 - \theta_2) \partial_{12} [f(x_1) f(x_2) + g_2(x_1, x_2)] \\
&= \frac{(N-1)}{N} \alpha \int dx_2 \nabla_1 V(\theta_1 - \theta_2) \partial_{12} f(v_1) f(v_2) \\
&\quad + \frac{(N-1)}{N} \alpha \int dx_2 \nabla_1 V(\theta_1 - \theta_2) \partial_{12} g_2(x_1, x_2) \\
&= \frac{(N-1)}{N} \alpha \nabla_1 \int d\theta_2 V(\theta_1 - \theta_2) \int d\mathbf{v}_2 \partial_{12} f(v_1) f(v_2) \\
&\quad + \frac{(N-1)}{N} \alpha \nabla_1 \int d\theta_2 V(\theta_1 - \theta_2) \int d\mathbf{v}_2 \partial_{12} g_2(x_1, x_2) \\
&= \frac{(N-1)}{N} \alpha \nabla_1 \int d\theta_2 V(\theta_1 - \theta_2) \int d\mathbf{v}_2 \partial_{12} g_2(x_1, x_2)
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Esta é a equação que descreve a evolução de um sistema unidimensional homogêneo. Observe na Eq. 3.2.7 que precisamos encontrar g_2 para obter a evolução de $f(v_1, t)$, então vamos considerar $s=2$ na hierarquia BBKGY, logo

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial f_2(x_1, x_2, t)}{\partial t} + v_1 \frac{\partial f_2(x_1, x_2, t)}{\partial \theta_1} + v_2 \frac{\partial f_2(x_1, x_2, t)}{\partial \theta_2} \\
= & \frac{\alpha}{N} \frac{\partial V(\theta_1 - \theta_2)}{\partial \theta_1} \cdot \left(\frac{\partial f_2(x_1, x_2, t)}{\partial \mathbf{v}_1} - \frac{\partial f_2(x_1, x_2, t)}{\partial \mathbf{v}_2} \right) \\
& + \frac{\alpha(N-2)}{N} \int \int d\theta_3 dv_3 \frac{\partial V(\theta_1 - \theta_3)}{\partial \theta_1} \cdot \left(\frac{\partial f_3(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial \mathbf{v}_1} - \frac{\partial f_3(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial \mathbf{v}_3} \right) \\
& + \frac{\alpha(N-2)}{N} \int \int d\theta_3 dv_3 \frac{\partial V(\theta_2 - \theta_3)}{\partial \theta_2} \cdot \left(\frac{\partial f_3(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial \mathbf{v}_2} - \frac{\partial f_3(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial \mathbf{v}_3} \right)
\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Vamos substituir as Eqs. 3.2.3, 3.2.4, 3.2.5, 3.2.6 e 3.2.7 na Eq. 3.2.8. Os termos de ordem $\frac{1}{N}$ obedecem a equação

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) g_2^1(x_1, x_2) &= \frac{\partial V(\theta_1 - \theta_2)}{\partial \theta_1} \partial_{12} f(x_1) f(x_2) \\
&+ \alpha \int \int d\theta_3 dv_3 \frac{\partial V(\theta_1 - \theta_3)}{\partial \theta_1} \frac{\partial f(v_1, t)}{\partial \mathbf{v}_1} g_2^1(x_2, x_3) \\
&+ \alpha \int \int d\theta_3 dv_3 \frac{\partial V(\theta_2 - \theta_3)}{\partial \theta_2} \frac{\partial f(v_2, t)}{\partial \mathbf{v}_2} g_2^1(x_1, x_3).
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

E os termos de ordem $\frac{1}{N^2}$ obedecem a equação

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) g_2^2(x_1, x_2) &= \frac{\partial V(\theta_1 - \theta_2)}{\partial \theta_1} \partial_{12} g_2^1(x_1, x_2) \\
&+ \alpha \int \int d\theta_3 dv_3 \frac{\partial V(\theta_1 - \theta_3)}{\partial \theta_1} \frac{\partial f(v_1, t)}{\partial v_1} g_2^2(x_2, x_3) \\
&+ \alpha \int \int d\theta_3 dv_3 \frac{\partial V(\theta_1 - \theta_3)}{\partial \theta_1} \frac{\partial g_3^2(x_1, x_2, x_3)}{\partial v_1} \\
&- 2 \int \int d\theta_3 dv_3 \frac{\partial V(\theta_1 - \theta_3)}{\partial \theta_1} \frac{\partial f(v_1, t)}{\partial \mathbf{v}_1} g_2^1(x_2, x_3) \\
&+ \alpha \int \int d\theta_3 dv_3 \frac{\partial V(\theta_2 - \theta_3)}{\partial \theta_2} \frac{\partial f(v_2, t)}{\partial \mathbf{v}_2} g_2^2(x_1, x_3) \\
&+ \alpha \int \int d\theta_3 dv_3 \frac{\partial V(\theta_2 - \theta_3)}{\partial \theta_2} \frac{\partial g_3^2(x_1, x_2, x_3)}{\partial \mathbf{v}_2} \\
&- 2 \int \int d\theta_3 dv_3 \frac{\partial V(\theta_2 - \theta_3)}{\partial \theta_2} \frac{\partial f(v_2, t)}{\partial \mathbf{v}_2} g_2^1(x_1, x_3) \\
&- \int \int d\theta_3 dv_3 \frac{\partial V(\theta_1 - \theta_3)}{\partial \theta_1} f(v_2, t) \frac{\partial g_2^1(x_1, x_3)}{\partial v_1} \\
&- \int \int d\theta_3 dv_3 \frac{\partial V(\theta_2 - \theta_3)}{\partial \theta_2} f(v_1, t) \frac{\partial g_2^1(x_2, x_3)}{\partial v_2}.
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Na equação 3.2.10 precisaremos de g_3^2 . Então para $s = 3$ na hierarquia BBKGY os termos de ordem $\frac{1}{N^2}$ obedecem a equação

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial \theta_3} \right) g_3^2(x_1, x_2, x_3) \\
= & \frac{\partial V(\theta_1 - \theta_2)}{\partial \theta_1} \partial_{12} [f(v_2, t) g_2^1(x_1, x_3) + f(v_1, t) g_2^1(x_2, x_3)] \\
& + \frac{\partial V(\theta_2 - \theta_3)}{\partial \theta_2} \partial_{23} [f(v_2, t) g_2^1(x_1, x_3) + f(v_3, t) g_2^1(x_1, x_2)] \\
& + \frac{\partial V(\theta_1 - \theta_3)}{\partial \theta_1} \partial_{13} [f(v_3, t) g_2^1(x_1, x_2) + f(v_1, t) g_2^1(x_2, x_3)] \\
& - \int \int \left\{ \frac{\partial V(\theta_3 - \theta_4)}{\partial \theta_3} f(v_1, t) \frac{\partial f(v_3, t)}{\partial v_3} g_2^1(x_2, x_4) \right. \\
& + \frac{\partial V(\theta_2 - \theta_4)}{\partial \theta_2} f(v_1, t) \frac{\partial f(v_2, t)}{\partial v_2} g_2^1(x_3, x_4) \\
& + \frac{\partial V(\theta_2 - \theta_4)}{\partial \theta_2} \frac{\partial f(v_2, t)}{\partial v_2} f(v_3, t) g_2^1(x_1, x_4) \\
& + \frac{\partial V(\theta_1 - \theta_4)}{\partial \theta_1} \frac{\partial f(v_1, t)}{\partial v_1} f(v_2, t) g_2^1(x_3, x_4) \\
& + \frac{\partial V(\theta_1 - \theta_4)}{\partial \theta_1} \frac{\partial f(v_1, t)}{\partial v_1} f(v_3, t) g_2^1(x_2, x_4) \\
& \left. + \frac{\partial V(\theta_3 - \theta_4)}{\partial \theta_3} \frac{\partial f(v_3, t)}{\partial v_3} f(v_2, t) g_2^1(x_1, x_4) \right\} d\theta_4 dv_4 \\
& + \alpha \int \int \left\{ \frac{\partial V(\theta_3 - \theta_4)}{\partial \theta_3} \frac{\partial g_2^1(x_1, x_3)}{\partial v_3} g_2^1(x_2, x_4) \right. \\
& + \frac{\partial V(\theta_1 - \theta_4)}{\partial \theta_1} \frac{\partial g_2^1(x_1, x_2)}{\partial v_1} g_2^1(x_2, x_4) \\
& + \frac{\partial V(\theta_1 - \theta_4)}{\partial \theta_1} \frac{\partial g_2^1(x_1, x_2)}{\partial v_1} g_2^1(x_3, x_4) \\
& + \frac{\partial V(\theta_2 - \theta_4)}{\partial \theta_2} \frac{\partial f(v_2, t)}{\partial v_2} g_3^2(x_1, x_3, x_4) \\
& + \frac{\partial V(\theta_2 - \theta_4)}{\partial \theta_2} \frac{\partial g_2^1(x_2, x_3)}{\partial v_2} g_2^1(x_1, x_4) + \\
& \frac{\partial V(\theta_2 - \theta_4)}{\partial \theta_2} \frac{\partial g_2^1(x_1, x_2)}{\partial v_2} g_2^1(x_3, x_4) \\
& + \frac{\partial V(\theta_1 - \theta_4)}{\partial \theta_1} \frac{\partial f(v_1, t)}{\partial v_1} g_3^2(x_2, x_3, x_4) + \\
& \frac{\partial V(\theta_1 - \theta_4)}{\partial \theta_1} \frac{\partial f(v_3, t)}{\partial v_3} g_3^2(x_1, x_2, x_4) \\
& \left. + \frac{\partial V(\theta_3 - \theta_4)}{\partial \theta_3} g_2^1(x_1, x_4) \frac{\partial g_2^1(x_2, x_3)}{\partial v_3} \right\} d\theta_4 dv_4. \tag{3.2.11}
\end{aligned}$$

Observa-se que nas Eqs. 3.2.9, 3.2.10 e 3.2.11, há termos que dependem de α , entretanto se considerarmos que α representa a constante de acoplamento fraco, pode-se negligenciar em uma análise inicial os termos que dependem de α para conseguirmos resolver as Eqs. 3.2.9, 3.2.10 e 3.2.11.

Para resolver estas equações e a equação 3.2.7, vamos introduzir as séries de Fourier, já que o potencial do modelo HMF é periódico, ou seja,

$$V(\theta_{12}) = \sum_n \tilde{V}(n) e^{in\theta_{12}}, \quad (3.2.12)$$

$$g_2(x_1, x_2) = g_2(\theta_{12}, v_1, v_2) = \sum_n \tilde{g}_2(n, v_1, v_2) e^{in\theta_{12}}, \quad (3.2.13)$$

$$g_3(x_1, x_2, x_3) = \sum_{n,m} \tilde{g}_3(n, m, v_1, v_2, v_3) e^{in\theta_{12}} e^{im\theta_{23}}. \quad (3.2.14)$$

Tal que

$$\begin{aligned} \tilde{V}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int d\theta_{12} V(\theta_{12}) e^{-in\theta_{12}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d\theta_{12} [1 - \cos \theta_{12}] e^{-in\theta_{12}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d\theta_{12} \left[1 - \frac{(e^{i\theta_{12}} + e^{-i\theta_{12}})}{2} \right] e^{-in\theta_{12}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d\theta_{12} \left[e^{-in\theta_{12}} - \frac{(e^{i\theta_{12}(1-n)} + e^{-i\theta_{12}(1+n)})}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} [2\pi\delta_{n,0} - \pi\delta_{n,1} - \pi\delta_{n,-1}] \\ &= \delta_{n,0} - \frac{(\delta_{n,1} + \delta_{n,-1})}{2}, \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

$$\tilde{g}_2(n, v_1, v_2) = \frac{1}{2\pi} \int d\theta_{12} g_2(\theta_{12}, v_1, v_2) e^{-in\theta_{12}}, \quad (3.2.16)$$

$$\tilde{g}_3(n, m, v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\theta_{12} d\theta_{23} g_3(\theta_{12}, \theta_{23}, v_1, v_2, v_3) e^{-in\theta_{12}} e^{-im\theta_{23}} \quad (3.2.17)$$

Substituindo as Eqs. 3.2.12 e 3.2.13 na Eq.3.2.7, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(v_1, t)}{\partial t} &= \frac{\alpha(N-1)}{N} \int d\theta_2 dv_2 \frac{\partial V(\theta_{12})}{\partial \theta_1} \partial_{12} g_2(\theta_{12}, v_1, v_2) \\ &= \frac{\alpha(N-1)}{N} \int d\theta_2 dv_2 \sum_n \tilde{V}(n) e^{in\theta_{12}} in \sum_{n'} \partial_{12} \tilde{g}_2(n', v_1, v_2) e^{in'\theta_{12}} \\ &= \frac{\alpha(N-1)}{N} \sum_n \sum_{n'} \int d\theta_2 e^{in\theta_{12}} e^{in'\theta_{12}} in \int dv_2 \tilde{V}(n) \partial_{12} \tilde{g}_2(n', v_1, v_2) \\ &= \frac{\alpha(N-1)}{N} \sum_n \sum_{n'} e^{i(n+n')\theta_1} 2\pi\delta(n+n') in \int dv_2 \tilde{V}(n) \partial_{12} \tilde{g}_2(n', v_1, v_2) \\ &= \frac{2\pi\alpha(N-1)}{N} \sum_{n'} (-in') \int dv_2 \tilde{V}(-n') \partial_{12} \tilde{g}_2(n', v_1, v_2) \\ &= -\frac{2\pi\alpha(N-1)}{N} \sum_{n'} in' \int dv_2 \tilde{V}(n') \partial_{12} \tilde{g}_2(n', v_1, v_2), \end{aligned}$$

usamos o fato do potencial ser simétrico $V(n') = V(-n')$. Substituindo a Eq. 3.2.15, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(v_1, t)}{\partial t} &= -\frac{2\pi\alpha(N-1)}{N} \sum_n in \left[\delta_n - \frac{(\delta_{n,1} + \delta_{n,-1})}{2} \right] \frac{\partial}{\partial v_1} \int dv_2 \tilde{g}_2(n, v_1, v_2) \\
&= \frac{\pi\alpha(N-1)}{N} \sum_n in (\delta_{n,1} + \delta_{n,-1}) \frac{\partial}{\partial v_1} \int dv_2 \tilde{g}_2(n, v_1, v_2) \\
&= \frac{\pi\alpha(N-1)}{N} i \left(\frac{\partial}{\partial v_1} \int dv_2 \tilde{g}_2(1, v_1, v_2) - \frac{\partial}{\partial v_1} \int dv_2 \tilde{g}_2(-1, v_1, v_2) \right).
\end{aligned}$$

Como vimos no capítulo 2 $\tilde{g}_2(-1, v_1, v_2) = \tilde{g}_2(1, v_1, v_2)^*$ e

$$\frac{\partial f(v_1, t)}{\partial t} = -\frac{2\pi\alpha(N-1)}{N} \frac{\partial}{\partial v_1} \int dv_2 \text{Im} \tilde{g}_2(1, v_1, v_2),$$

então apenas a parte imaginária de \tilde{g}_2 contribue para a equação cinética. No limite para N muito grande,

$$\frac{N-1}{N} \approx 1,$$

logo

$$\frac{\partial f(v_1, t)}{\partial t} = -2\pi\alpha \frac{\partial}{\partial v_1} \int dv_2 \text{Im} \tilde{g}_2(1, v_1, v_2). \quad (3.2.18)$$

Vamos usar a Eq. 3.2.9 para encontrar o primeiro termo da expansão (\tilde{g}_2^1), considerando apenas os termos que não dependem de α , temos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) g_2^1(\theta_{12}, v_1, v_2) = \frac{\partial V(\theta_{12})}{\partial \theta_1} \partial_{12} f(v_1, t) f(v_2, t).$$

Usando as séries de Fourier da Eq. 3.2.12 e 3.2.13, temos

$$\begin{aligned}
&\sum_n \frac{\partial \tilde{g}_2^1(n, v_1, v_2)}{\partial t} e^{in\theta_{12}} + v_1 i \sum_n \tilde{g}_2^1(n, v_1, v_2) n e^{in\theta_{12}} - v_2 i \sum_n \tilde{g}_2^1(n, v_1, v_2) n e^{in\theta_{12}} \\
&= i \sum_n \tilde{V}(n) n e^{in\theta_{12}} \partial_{12} f(v_1, t) f(v_2, t) \\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + (v_1 - v_2) in \right) \tilde{g}_2^1(n, v_1, v_2) = i \tilde{V}(n) n \partial_{12} f(v_1, t) f(v_2, t) \\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_1 in \right) \tilde{g}_2^1(n, v_1, v_2) = -i \frac{(\delta_{n,1} + \delta_{n,-1})}{2} n \partial_{12} f(v_1, t) f(v_2, t) \quad (3.2.19)
\end{aligned}$$

Resolvendo a Eq. 3.2.19 por convolução, temos

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_2^1(n, v_1, v_2, t) &= \tilde{g}_2^1(n, v_1, v_2, 0) e^{-inv_1 t} \\
&\quad - \frac{i}{2} \int d\tau e^{-iv_1 \tau} (\delta_{n,1} + \delta_{n,-1}) n \partial_{12} f(v_1, t - \tau) f(v_2, t - \tau).
\end{aligned}$$

Usando o processo de markovianização, visto na equação de Landau, na equação acima. O primeiro termo a direita é negligenciado, pois é um termo transiente e pode-se fazer a seguinte aproximação $t \rightarrow \infty$, logo

$$f(v_1, t - \tau) f(v_2, t - \tau) \simeq f(v_1, t) f(v_2, t)$$

e

$$\tilde{g}_2^1(n, v_1, v_2, t) = -\frac{i}{2} \int_0^\infty d\tau e^{-iv_{12}\tau n} (\delta_{n,1} + \delta_{n,-1}) n \partial_{12} f(v_1, t) f(v_2, t).$$

Sabe-se que:

$$-\int_0^\infty d\tau e^{-iv_{12}\tau n} = \delta(v_{12}n) \pi - \mathcal{P} \left(\frac{1}{nv_{12}} \right) = \pi \delta_-(v_{12}n) = \pi \frac{1}{i\pi v_{12}n} = -\frac{i}{nv_{12}}.$$

Então

$$\begin{aligned} \tilde{g}_2^1(n, v_1, v_2, t) &= \frac{1}{2v_{12}} (\delta_{n,1} + \delta_{n,-1}) \partial_{12} f(v_1, t) f(v_2, t), \\ \tilde{g}_2^1(1, v_1, v_2, t) &= \frac{1}{2v_{12}} \partial_{12} f(v_1, t) f(v_2, t). \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

Portanto $Im\tilde{g}_2^1(1, v_1, v_2, t) = 0$ e devemos encontrar \tilde{g}_2^2 , que é o segundo termo da aproximação para \tilde{g}_2 . Então vamos usar a Eq. 3.2.10, desconsiderando, inicialmente, termos de ordem α nesta equação, fazendo isto obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) g_2^2(\theta_{12}, v_1, v_2) &= \frac{\partial V(\theta_{12})}{\partial \theta_1} \partial_{12} g_2^1(\theta_{12}, v_1, v_2) \\ &- f(v_1, t) \int d\theta_3 dv_3 \frac{\partial V(\theta_{23})}{\partial \theta_2} \frac{\partial g_2^1(\theta_{23}, v_2, v_3)}{\partial v_2} \\ &- 2 \frac{\partial f(v_1, t)}{\partial v_1} \int d\theta_3 dv_3 \frac{\partial V(\theta_{13})}{\partial \theta_1} g_2^1(\theta_{23}, v_2, v_3) \\ &- 2 \frac{\partial f(v_2, t)}{\partial v_2} \int d\theta_3 dv_3 \frac{\partial V(\theta_{23})}{\partial \theta_2} g_2^1(\theta_{13}, v_1, v_3) \\ &- f(v_2, t) \int d\theta_3 dv_3 \frac{\partial V(\theta_{13})}{\partial \theta_1} \frac{\partial g_2^1(\theta_{13}, v_1, v_3)}{\partial v_1}. \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Da Eq. 3.2.20 temos

$$\tilde{g}_2^1(n, v_1, v_2, t) = \frac{1}{2v_{12}} (\delta_{n,1} + \delta_{n,-1}) \partial_{12} f(v_1, t) f(v_2, t),$$

isto implica que

$$\begin{aligned} g_2^1(\theta_{12}, v_1, v_2, t) &= \sum_n \frac{1}{2v_{12}} (\delta_{n,1} + \delta_{n,-1}) \partial_{12} f(v_1, t) f(v_2, t) e^{in\theta_{12}} \\ &= \frac{1}{2v_{12}} \partial_{12} f(v_1, t) f(v_2, t) (e^{i\theta_{12}} + e^{-i\theta_{12}}) \\ &= \frac{\cos \theta_{12}}{v_{12}} \partial_{12} f(v_1, t) f(v_2, t), \end{aligned}$$

ou seja,

$$g_2^1(\theta_{ij}, v_i, v_j, t) = \frac{\cos \theta_{ij}}{v_{ij}} \partial_{ij} f(v_i, t) f(v_j, t). \quad (3.2.22)$$

Sendo

$$\begin{aligned} V(\theta_{ij}) &= 1 - \cos \theta_{ij}, \\ \frac{\partial V(\theta_{ij})}{\partial \theta_i} &= \sin \theta_{ij}. \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

Vamos substituir as Eqs. 3.2.22 e 3.2.23 na Eq. 3.2.21,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) g_2^2(\theta_{12}, v_1, v_2) \\ &= \sin \theta_{12} \frac{\cos \theta_{12}}{v_{12}} \partial_{12}^2 f(v_1, t) f(v_2, t) \\ &\quad - f(v_1, t) \int d\theta_3 dv_3 \sin \theta_{23} \frac{\partial}{\partial v_2} \left(\frac{\cos \theta_{23}}{v_{23}} \partial_{23} f(v_2, t) f(v_3, t) \right) \\ &\quad - 2 \frac{\partial f(v_1, t)}{\partial v_1} \int d\theta_3 dv_3 \sin \theta_{13} \frac{\cos \theta_{23}}{v_{23}} \partial_{23} f(v_2, t) f(v_3, t) \\ &\quad - 2 \frac{\partial f(v_2, t)}{\partial v_2} \int d\theta_3 dv_3 \sin \theta_{23} \frac{\cos \theta_{13}}{v_{13}} \partial_{13} f(v_1, t) f(v_3, t) \\ &\quad - f(v_2, t) \int d\theta_3 dv_3 \sin \theta_{13} \frac{\partial}{\partial v_1} \left(\frac{\cos \theta_{13}}{v_{13}} \partial_{13} f(v_1, t) f(v_3, t) \right) \end{aligned}$$

integrando em θ_3 , temos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) g_2^2(\theta_{12}, v_1, v_2) = \sin \theta_{12} \frac{\cos \theta_{12}}{v_{12}} \partial_{12}^2 f(v_1, t) f(v_2, t).$$

Podemos escrever

$$\sin \theta_{12} = \frac{e^{i\theta_{12}} - e^{-i\theta_{12}}}{2i}, \quad (3.2.24)$$

$$\cos \theta_{12} = \frac{e^{i\theta_{12}} + e^{-i\theta_{12}}}{2}. \quad (3.2.25)$$

Expressando g_2^2 em série de Fourier e usando as Eq. 3.2.24 e 3.2.25

$$\sum_n \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{12} i n \right) \tilde{g}_2^2(n, v_1, v_2) e^{in\theta_{12}} = \left(\frac{e^{i\theta_{12}} - e^{-i\theta_{12}}}{2i} \right) \left(\frac{e^{i\theta_{12}} + e^{-i\theta_{12}}}{2} \right) \frac{1}{v_{12}} \partial_{12}^2 f(v_1, t) f(v_2, t).$$

Segundo a Eq. 3.2.18 precisamos do $\tilde{g}_2^2(1, v_1, v_2)$, então considerando apenas o termo que multiplica $e^{i\theta_{12}}$ dos dois lados da equação acima temos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{12} i \right) \tilde{g}_2^2(1, v_1, v_2) = 0$$

ou

$$\tilde{g}_2^2(1, v_1, v_2, t) = e^{-v_{12} i t} \tilde{g}_2^2(1, v_1, v_2, 0).$$

Fazendo a markovianização ($t \rightarrow \infty$), obtemos

$$\tilde{g}_2^2(1, v_1, v_2, t) = 0.$$

Agora vamos considerar termos de ordem α na Eq. 3.2.10, ou seja, iremos considerar a contribuição da correlação de três partículas $g_3^2(x_1, x_2, x_3, t)$, logo usaremos a Eq.3.2.11 para encontrar g_3^2 e substituir na Eq. 3.2.10. Na Eq. 3.2.11 iremos desconsiderar termos de ordem α .

Na Eq. 3.2.10 vamos substituir as séries de Fourier Eqs. 3.2.12, 3.2.13 e 3.2.14, como estamos interessados no $\tilde{g}_2^2(1, v_1, v_2, t)$ vamos considerar apenas termos com coeficiente $e^{i\theta_{12}}$,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} + iv_{12}\right) \tilde{g}_2^2(1, v_1, v_2) &= \pi\alpha i \int dv_3 \left(\frac{\partial f(v_1, t)}{\partial v_1} \tilde{g}_2^2(-1, v_2, v_3, t) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial \tilde{g}_3^2(0, -1, v_1, v_2, v_3, t)}{\partial v_1} + \frac{\partial \tilde{g}_3^2(2, 1, v_1, v_2, v_3, t)}{\partial v_1} \right) \\
&\quad + 2\pi i \int dv_3 \frac{\partial f(v_1, t)}{\partial v_1} \tilde{g}_2^1(-1, v_2, v_3, t) \\
&\quad - 2\pi i \int dv_3 \frac{\partial f(v_2, t)}{\partial v_2} \tilde{g}_2^1(1, v_1, v_3, t) \\
&\quad + \pi\alpha i \int dv_3 \left(\frac{\partial f(v_2, t)}{\partial v_2} \tilde{g}_2^2(1, v_1, v_3, t) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial \tilde{g}_3^2(1, -1, v_1, v_2, v_3, t)}{\partial v_2} + \frac{\partial \tilde{g}_3^2(1, 1, v_1, v_2, v_3, t)}{\partial v_2} \right). \tag{3.2.26}
\end{aligned}$$

Desde que apenas a parte imaginária de \tilde{g}_2^2 contribue para a integral da Eq. 3.2.18, descartamos todas as contribuições reais, ou seja, vamos descartar os termos do lado direito da Eq. 3.2.26 que dependem de $\int \tilde{g}_2^2$, devido \tilde{g}_2^2 ser um número imaginário e $i\tilde{g}_2^2$ é real, logo

$$\begin{aligned}
i \left(\frac{\partial}{\partial t} + iv_{12}\right) Im\tilde{g}_2^2(1, v_1, v_2) &= \pi\alpha i \int dv_3 \left(-\frac{\partial \tilde{g}_3^2(0, -1, v_1, v_2, v_3, t)}{\partial v_1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \tilde{g}_3^2(2, 1, v_1, v_2, v_3, t)}{\partial v_1} \right) \\
&\quad + \pi\alpha i \int dv_3 \left(-\frac{\partial \tilde{g}_3^2(1, -1, v_1, v_2, v_3, t)}{\partial v_2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \tilde{g}_3^2(1, 1, v_1, v_2, v_3, t)}{\partial v_2} \right) \\
&\quad + 2\pi i \int dv_3 \frac{\partial f(v_1, t)}{\partial v_1} \tilde{g}_2^1(-1, v_2, v_3, t) \\
&\quad - 2\pi i \int dv_3 \frac{\partial f(v_2, t)}{\partial v_2} \tilde{g}_2^1(1, v_1, v_3, t).
\end{aligned}$$

Resolvendo, temos

$$\begin{aligned}
Im\tilde{g}_2^2(1, v_1, v_2) &= \left(-\delta(v_{12})\pi + iP\left(\frac{1}{v_{12}}\right) \right) \\
&\left\{ \pi\alpha \int dv_3 \left(-\frac{\partial\tilde{g}_3^2(0, -1, v_1, v_2, v_3, t)}{\partial v_1} + \frac{\partial\tilde{g}_3^2(2, 1, v_1, v_2, v_3, t)}{\partial v_1} \right) \right. \\
&+ \pi\alpha \int dv_3 \left(-\frac{\partial\tilde{g}_3^2(1, -1, v_1, v_2, v_3, t)}{\partial v_2} + \frac{\partial\tilde{g}_3^2(1, 1, v_1, v_2, v_3, t)}{\partial v_2} \right) \\
&+ 2\pi \int dv_3 \frac{\partial f(v_1, t)}{\partial v_1} \tilde{g}_2^1(-1, v_2, v_3, t) \\
&\left. - 2\pi \int dv_3 \frac{\partial f(v_2, t)}{\partial v_2} \tilde{g}_2^1(1, v_1, v_3, t) \right\},
\end{aligned}$$

os termos que multiplicam $\delta(v_{12})$ se anulam, logo

$$\begin{aligned}
Im\tilde{g}_2^2(1, v_1, v_2) &= iP\left(\frac{1}{v_{12}}\right) \\
&\left\{ \pi\alpha \int dv_3 \left(-\frac{\partial\tilde{g}_3^2(0, -1, v_1, v_2, v_3, t)}{\partial v_1} + \frac{\partial\tilde{g}_3^2(2, 1, v_1, v_2, v_3, t)}{\partial v_1} \right) \right. \\
&+ \pi\alpha \int dv_3 \left(-\frac{\partial\tilde{g}_3^2(1, -1, v_1, v_2, v_3, t)}{\partial v_2} + \frac{\partial\tilde{g}_3^2(1, 1, v_1, v_2, v_3, t)}{\partial v_2} \right) \\
&+ 2\pi \int dv_3 \frac{\partial f(v_1, t)}{\partial v_1} \tilde{g}_2^1(-1, v_2, v_3, t) \\
&\left. - 2\pi \int dv_3 \frac{\partial f(v_2, t)}{\partial v_2} \tilde{g}_2^1(1, v_1, v_3, t) \right\}. \tag{3.2.27}
\end{aligned}$$

Vamos precisar de $\tilde{g}_3^2(0, -1, v_1, v_2, v_3, t)$, $\tilde{g}_3^2(2, 1, v_1, v_2, v_3, t)$, $\tilde{g}_3^2(1, -1, v_1, v_2, v_3, t)$ e $\tilde{g}_3^2(1, 1, v_1, v_2, v_3, t)$, para tanto usaremos a Eq. 3.2.11 desconsiderando termos de ordem α , usando as séries de Fourier Eq. 3.2.12, 3.2.13 e 3.2.14, resolvendo as equações para \tilde{g}_3^2 , temos:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_3^2(0, -1, v_1, v_2, v_3, t) &= \mathcal{P}\left(\frac{1}{v_{12}}\right) \\
&\left\{ -\frac{f(v_1, t)}{4} \frac{\partial f(v_3, t)}{\partial v_3} 2\pi \int dv_4 \mathcal{P}\left(-\frac{1}{v_{24}}\right) \partial_{24} f(v_2, t) f(v_4, t) \right. \\
&+ \frac{f(v_1, t)}{4} \frac{\partial f(v_2, t)}{\partial v_2} 2\pi \int dv_4 \mathcal{P}\left(-\frac{1}{v_{34}}\right) \partial_{34} f(v_3, t) f(v_4, t) \\
&- \frac{f(v_2, t)}{4} \frac{\partial}{\partial v_1} \left(\mathcal{P}\left(-\frac{1}{v_{13}}\right) \partial_{13} f(v_1, t) f(v_3, t) \right) \\
&+ \frac{1}{4} \frac{\partial f(v_2, t)}{\partial v_2} \mathcal{P}\left(-\frac{1}{v_{13}}\right) \partial_{13} f(v_1, t) f(v_3, t) \\
&- \frac{f(v_3, t)}{4} \frac{\partial}{\partial v_1} \left(\mathcal{P}\left(\frac{1}{v_{12}}\right) \partial_{12} f(v_1, t) f(v_2, t) \right) \\
&\left. + \frac{1}{4} \frac{\partial f(v_3, t)}{\partial v_3} \mathcal{P}\left(\frac{1}{v_{12}}\right) \partial_{12} f(v_1, t) f(v_2, t) \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_3^2(2, 1, v_1, v_2, v_3, t) = & -\frac{i}{4} \left(-\pi\delta(2v_1 - v_2 - v_3) + iP \left(\frac{1}{2v_1 - v_2 - v_3} \right) \right) \\
& \left\{ f(v_2, t) \mathcal{P} \left(\frac{1}{v_{13}} \right) \partial_{13} \left(\frac{\partial f(v_1, t)}{\partial v_1} f(v_3, t) \right) \right. \\
& + f(v_2, t) \frac{\partial \mathcal{P} \left(\frac{1}{v_{13}} \right)}{\partial v_1} \partial_{13} (f(v_1, t) f(v_3, t)) \\
& - \frac{\partial f(v_2, t)}{\partial v_2} \mathcal{P} \left(\frac{1}{v_{13}} \right) \partial_{13} (f(v_1, t) f(v_3, t)) \\
& + f(v_3, t) \mathcal{P} \left(\frac{1}{v_{12}} \right) \partial_{12} \left(\frac{\partial f(v_1, t)}{\partial v_1} f(v_2, t) \right) \\
& + f(v_3, t) \frac{\partial \mathcal{P} \left(\frac{1}{v_{12}} \right)}{\partial v_1} \partial_{12} (f(v_1, t) f(v_2, t)) \\
& \left. - \frac{\partial f(v_3, t)}{\partial v_3} \mathcal{P} \left(\frac{1}{v_{12}} \right) \partial_{12} (f(v_1, t) f(v_2, t)) \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_3^2(1, -1, v_1, v_2, v_3, t) = & -\frac{i}{4} \left(\pi\delta(v_1 - 2v_2 + v_3) + iP \left(\frac{1}{v_1 - 2v_2 + v_3} \right) \right) \\
& \left\{ -\frac{\partial f(v_1, t)}{\partial v_1} \mathcal{P} \left(-\frac{1}{v_{23}} \right) \partial_{23} (f(v_2, t) f(v_3, t)) \right. \\
& + f(v_1, t) \mathcal{P} \left(-\frac{1}{v_{23}} \right) \partial_{23} \left(\frac{\partial f(v_2, t)}{\partial v_2} f(v_3, t) \right) \\
& + f(v_1, t) \frac{\partial \mathcal{P} \left(-\frac{1}{v_{23}} \right)}{\partial v_2} \partial_{23} (f(v_2, t) f(v_3, t)) \\
& - f(v_3, t) \frac{\partial \mathcal{P} \left(\frac{1}{v_{12}} \right)}{\partial v_1} \partial_{12} (f(v_1, t) f(v_2, t)) \\
& - f(v_3, t) \mathcal{P} \left(\frac{1}{v_{12}} \right) \partial_{12} \left(f(v_1, t) \frac{\partial f(v_2, t)}{\partial v_2} \right) \\
& \left. + \frac{\partial f(v_3, t)}{\partial v_3} \mathcal{P} \left(\frac{1}{v_{12}} \right) \partial_{12} (f(v_1, t) f(v_2, t)) \right\}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_3^2(1, 1, v_1, v_2, v_3, t) = & \mathcal{P} \left(\frac{1}{v_{13}} \right) \frac{1}{4} \left\{ \partial_{12} \left(f(v_1, t) \mathcal{P} \left(\frac{1}{v_{23}} \right) \partial_{23} (f(v_2, t) f(v_3, t)) \right) \right. \\
& + \partial_{23} \left(f(v_3, t) \mathcal{P} \left(\frac{1}{v_{12}} \right) \partial_{12} (f(v_1, t) f(v_2, t)) \right) \\
& + f(v_2, t) \frac{\partial f(v_1, t)}{\partial v_1} 2\pi \int dv_4 \mathcal{P} \left(\frac{1}{v_{34}} \right) \partial_{34} f(v_3, t) f(v_4, t) \\
& \left. + f(v_2, t) \frac{\partial f(v_3, t)}{\partial v_3} 2\pi \int dv_4 \mathcal{P} \left(\frac{1}{v_{14}} \right) \partial_{14} f(v_1, t) f(v_4, t) \right\}.
\end{aligned}$$

Na Eq. 3.2.27 o lado esquerdo é real e no lado direito termos que dependem de \tilde{g}_2^1 são imaginários, desde que \tilde{g}_2^1 é real e temos $i\mathcal{P} \left(\frac{1}{v_{12}} \right) f(\dots)\tilde{g}_2^1 dv_3$ que é imaginário, então

não vamos considerar estes termos em nossos cálculos. Outros termos que são desconsiderados são termos que dependem de $\tilde{g}_3^2(0, -1, v_1, v_2, v_3, t)$ e $\tilde{g}_3^2(1, 1, v_1, v_2, v_3, t)$, pois estes são reais. Então vamos considerar apenas termos imaginários de $\tilde{g}_3^2(2, 1, v_1, v_2, v_3, t)$ (os termos $\frac{i\pi}{4}\delta(2v_1 - v_2 - v_3)(\dots)$) e o termo imaginário de $\tilde{g}_3^2(1, -1, v_1, v_2, v_3, t)$ (os termos $\frac{i\pi}{4}\delta(v_1 - 2v_2 + v_3)(\dots)$). Logo

$$\begin{aligned} \text{Im}\tilde{g}_2(1, v_1, v_2, t) &= \frac{1}{N^2} \text{Im}\tilde{g}_2^2(1, v_1, v_2, t) = \frac{1}{N^2} \frac{\pi^2\alpha}{4} \mathcal{P}\left(\frac{1}{v_1 - v_2}\right) \times \left\{ \mathcal{P}'\left(\frac{1}{v_1 - v_2}\right) \hat{\mathcal{K}}_{III} \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{P}''\left(\frac{1}{v_1 - v_2}\right) \hat{\mathcal{K}}_{IV} f(v_1, t) f(v_2, t) f(v_3, t) \Big|_{v_3=2v_1-v_2} \right\} \\ &\quad - \frac{\pi^2\alpha}{4} \mathcal{P}\left(\frac{1}{v_1 - v_2}\right) \times \left\{ \mathcal{P}'\left(\frac{1}{v_1 - v_2}\right) \hat{\mathcal{K}}_I \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{P}''\left(\frac{1}{v_1 - v_2}\right) \hat{\mathcal{K}}_{II} f(v_1, t) f(v_2, t) f(v_3, t) \Big|_{v_3=2v_2-v_1} \right\}, \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{K}}_I &= -3 \frac{\partial}{\partial v_2} \frac{\partial}{\partial v_3} + 2 \frac{\partial^2}{\partial v_3^2} + 2 \frac{\partial}{\partial v_1} \frac{\partial}{\partial v_3} + \frac{\partial}{\partial v_1} \frac{\partial}{\partial v_2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial v_2^2} \\ \hat{\mathcal{K}}_{II} &= 2 \frac{\partial}{\partial v_2} - \frac{\partial}{\partial v_1} - \frac{\partial}{\partial v_3} \\ \hat{\mathcal{K}}_{III} &= -3 \frac{\partial}{\partial v_1} \frac{\partial}{\partial v_3} + 2 \frac{\partial^2}{\partial v_3^2} + 2 \frac{\partial}{\partial v_2} \frac{\partial}{\partial v_3} + \frac{\partial}{\partial v_1} \frac{\partial}{\partial v_2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial v_1^2} \\ \hat{\mathcal{K}}_{IV} &= 2 \frac{\partial}{\partial v_1} - \frac{\partial}{\partial v_2} - \frac{\partial}{\partial v_3}. \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

Substituindo a Eq. 3.2.28 na Eq. 3.2.18, temos a equação cinética para o modelo HMF unidimensional homogêneo.

A evolução da função distribuição de uma partícula é proporcional a $\frac{1}{N^2}$, ou seja, o tempo de relaxação é proporcional a N^2 . A equação cinética é válida para o número de partícula N grande. Resultados de simulação numérica feitos por [10] mostram que para N grande o tempo de relaxação é proporcional a $N^{1,99}$ (ver figura 3.2.2), para o HMF homogêneo, então nosso resultado analítico está de acordo com os resultados de simulação.

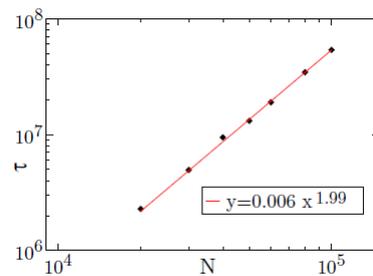


Figura 3.2.2: Figura retirada de [10]. Tempo de relaxação em função do número de partículas N , para N grande.

3.3 Sistema gravitacional 1D

Sistemas gravitacionais unidimensionais são usados para estudar modelos cosmológicos e a dinâmica estelar em galáxias. Ele consiste de N folhas de massa m uniformemente distribuídas no plano y - z , livre para mover no eixo x . As folhas são livres para se cruzar (ver Fig. 3.3.3).

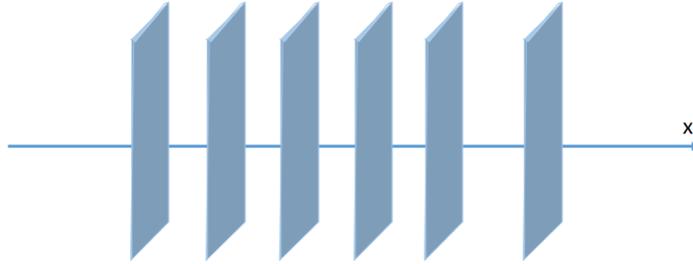


Figura 3.3.3: Folhas no modelo gravitacional unidimensional.

A equação de Poisson para esse sistema é

$$\nabla^2 \psi(x) = 4\pi G \rho(x),$$

com G a constante gravitacional.

Para uma partícula (folha) localizada em x' a densidade é $\rho(x) = \delta(x - x')$. Então resolvendo a equação diferencial acima, considerando $\psi(x = x') = 0$ e $\left. \frac{d\psi(x)}{dx} \right|_{x=x'} = 0$, temos que

$$\psi(x) = 2\pi G |x - x'|$$

é um potencial sem nenhuma singularidade [15].

O potencial em um ponto x devido a uma partícula (folha) é

$$\psi(x) = 2\pi G |x - x'|.$$

Já o potencial em x devido a todas as partículas é

$$\phi(x) = 2\pi G \int_{-\infty}^{\infty} |x - x'| \rho(x') dx',$$

este potencial não é convergente. Para o potencial ser convergente vamos considerar

$$\psi(x) = 2\pi G |x - x'| e^{-\varkappa|x-x'|}$$

tal que, $e^{-\varkappa|x-x'|}$ é uma função de triagem e $\varkappa \rightarrow 0$. Logo o potencial devido a todas as partículas é

$$\phi(x) = 2\pi G \int_{-\infty}^{\infty} |x - x'| e^{-\varkappa|x-x'|} \rho(x') dx'.$$

Vamos considerar a densidade de massa $\rho(x)$ periódica para o sistema unidimensional com período $2L$, ou seja, $\rho(x) = \rho(x + 2L)$. Vamos escrever $\rho(x) = \rho_0 + \sigma(x)$, com ρ_0 a média de $\rho(x)$ ao longo do período e $\sigma(x)$ a flutuação periódica. A contribuição da média

ρ_0 no potencial é

$$\begin{aligned}
 \phi_0 &= 2\pi G \int_{-\infty}^{\infty} |x - x'| e^{-\varkappa|x-x'|} \rho_0 dx' \\
 &= 2\pi G \rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} |x - x'| e^{-\varkappa|x-x'|} dx' \\
 &= 2\pi G \rho_0 \left(\int_{-\infty}^x |x - x'| e^{-\varkappa|x-x'|} dx' + \int_x^{\infty} |x - x'| e^{-\varkappa|x-x'|} dx' \right) \\
 &= \frac{4\pi G \rho_0}{\varkappa^2}.
 \end{aligned}$$

A contribuição da flutuação $\sigma(x)$ no potencial é

$$\psi(x, \varkappa) = 2\pi G \int_{-\infty}^{\infty} |x - x'| e^{-\varkappa|x-x'|} \sigma(x') dx'.$$

Desde que consideramos $\rho(x)$ periódica, então $\sigma(x)$ é periódica e podemos reescrever $\sigma(x)$, usando série de Fourier,

$$\sigma(x) = \sum'_n c_n e^{\frac{i\pi n x}{L}} \quad (3.3.30)$$

e ' indica que a soma é para $n \neq 0$. Logo

$$\begin{aligned}
 \psi(x, \varkappa) &= 2\pi G \sum'_n \int_{-\infty}^{\infty} |x - x'| e^{-\varkappa|x-x'|} c_n e^{\frac{i\pi n x'}{L}} dx' \\
 &= 2\pi G \sum'_n c_n e^{\frac{i\pi n x}{L}} \int_{-\infty}^{\infty} |x - x'| e^{-\varkappa|x-x'|} c_n e^{\frac{i\pi n(x'-x)}{L}} dx' \\
 &= 2\pi G \sum'_n c_n e^{\frac{i\pi n x}{L}} b_n,
 \end{aligned} \quad (3.3.31)$$

com

$$\begin{aligned}
 b_n &= \int_{-\infty}^{\infty} |x - x'| e^{-\varkappa|x-x'|} e^{\frac{i\pi n(x'-x)}{L}} dx' \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} |u| e^{-\varkappa|u|} e^{\frac{i\pi n u}{L}} du \\
 &= \frac{2 - \varkappa^3 L^4 - \pi^2 n^2 L^2}{L^4 \left(-\varkappa^2 + \frac{\pi^2 n^2}{L^2} \right)^2}.
 \end{aligned}$$

No limite $\varkappa \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 b_n &= -\frac{2L^2}{\pi^2 n^2}, \\
 \psi(x, \varkappa) &= -4\pi G \sum'_n c_n e^{\frac{i\pi n x}{L}} \frac{L^2}{\pi^2 n^2}
 \end{aligned} \quad (3.3.32)$$

Vamos dividir o eixo x em células de tamanho $2L$, com $2N$ folhas cada. Em uma célula primitiva vamos considerar que existem $2N$ folhas de massas iguais discretas com posição x_j , distribuídas uniformemente entre $x=-L$ a $x=L$. Então a densidade de flutuação para a

célula primitiva é

$$\begin{aligned}
 \sigma_p(x) &= \rho(x) - \rho_0 \\
 &= \rho(x) - \frac{M}{2L} \\
 &= m \sum_{j=1}^{2N} \delta(x - x_j) - \frac{m2N}{2L} \\
 &= m \sum_{j=1}^{2N} \left(\delta(x - x_j) - \frac{1}{2L} \right)
 \end{aligned} \tag{3.3.33}$$

O coeficiente c_n da Eq. 3.3.30 é

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \sigma(x') e^{-\frac{i\pi n x'}{L}} dx',$$

substituindo a Eq. 3.3.33 em c_n , temos

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{m}{2L} \int_{-L}^L \sum_{j=1}^{2N} \left(\delta(x' - x_j) - \frac{1}{2L} \right) e^{-\frac{i\pi n x'}{L}} dx' \\
 &= \frac{m}{2L} \sum_{j=1}^{2N} \int_{-L}^L \left(\delta(x' - x_j) - \frac{1}{2L} \right) e^{-\frac{i\pi n x'}{L}} dx' \\
 &= \frac{m}{2L} \sum_{j=1}^{2N} (-\Theta(x_j - L) + \Theta(x_j + L)) e^{-\frac{i\pi n x_j}{L}} - \frac{m}{2L} \sum_{j=1}^{2N} \frac{\sin(\pi n)}{n\pi} \\
 &= \frac{m}{2L} \sum_{j=1}^{2N} (-\Theta(x_j - L) + \Theta(x_j + L)) e^{-\frac{i\pi n x_j}{L}},
 \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
 -L &< x_j < L \\
 -2L &< x_j - L < 0 \implies (x_j - L) < 0 \\
 \Theta(x_j - L) &= 0
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 -L &< x_j < L \\
 0 &< x_j + L < 2L \implies (x_j + L) > 0 \\
 \Theta(x_j + L) &= 1.
 \end{aligned}$$

Então

$$c_n = \frac{m}{2L} \sum_{j=1}^{2N} e^{-\frac{i\pi n x_j}{L}}.$$

Substituindo c_n na Eq. 3.3.32

$$\begin{aligned}\psi(x, \boldsymbol{x}) &= -\frac{4\pi Gm}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} ' \sum_{j=1}^{2N} e^{-\frac{i\pi n x_j}{L}} e^{\frac{i\pi n x}{L}} \frac{L^2}{\pi^2 n^2} \\ &= -2\pi Gm \sum_{n=-\infty}^{\infty} ' \sum_{j=1}^{2N} e^{\frac{i\pi n(x-x_j)}{L}} \frac{L}{\pi^2 n^2}\end{aligned}$$

Esse é o potencial no ponto x devido a célula primitiva e de todas as réplicas e devido as $2N$ folhas existentes em cada célula.

Considerando apenas uma folha de massa m localizada em x_1 , o potencial é

$$\phi_1(x) = -2\pi Gm \sum_{n=-\infty}^{\infty} ' e^{\frac{i\pi n(x-x_1)}{L}} \frac{L}{\pi^2 n^2}.$$

A função $|x - x_1| - \frac{(x - x_1)^2}{2L}$ escrita em série de Fourier é

$$|x - x_1| - \frac{(x - x_1)^2}{2L} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} ' e^{\frac{i\pi n(x-x_1)}{L}} \frac{L}{\pi^2 n^2}.$$

□ *Prova:*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i\pi n x}{L}},$$

com

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{i\pi n x}{L}} dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \left(|x| - \frac{x^2}{2L} \right) e^{-\frac{i\pi n x}{L}} dx \\ &= -\frac{L}{(n\pi)^2}.\end{aligned}$$

Logo

$$f(x) = |x| - \frac{x^2}{2L} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} ' \frac{L}{(n\pi)^2} e^{\frac{i\pi n x}{L}}. \quad \blacksquare$$

E o potencial devido a uma partícula é[18]

$$\phi(x) = 2\pi m G \left(|x - x_1| - \frac{(x - x_1)^2}{2L} \right) \quad (3.3.34)$$

e esse potencial é uma função periódica.

Agora vamos usar este potencial para obter as equações cinéticas para o sistema gravitacional unidimensional, pois este potencial é periódico e podemos reescreve-lo em série de Fourier.

3.4 Equações cinéticas para o sistema gravitacional 1D

Nesta seção vamos usar as equações 3.2.7, 3.2.9, 3.2.10 e 3.2.11 em nossos cálculos para o sistema gravitacional homogêneo unidimensional. Como vimos na seção 3.2 vamos expandir o potencial e as correlações em séries de Fourier, ou seja,

$$\begin{aligned} V(q_{12}) &= \sum_n \tilde{V}(n) e^{inq_{12}} \\ g_2(x_1, x_2) &= g_2(q_{12}, v_1, v_2) = \sum_n \tilde{g}_2(n, v_1, v_2) e^{inq_{12}} \\ g_3(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{n,m} \tilde{g}_3(n, m, v_1, v_2, v_3) e^{inq_{12}} e^{imq_{23}} \end{aligned}$$

Tal que

$$\tilde{V}(n) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dq_{12} V(q_{12}) e^{-inq_{12}},$$

com

$$V(q_{12}) = |q_{12}| - \frac{(q_{12})^2}{2L},$$

pois este potencial tem período $2L$.

Então

$$\begin{aligned} \tilde{V}(n) &= \frac{1}{2n^3 L^2} (\sin(Ln) n^2 L^2 + 2 \sin(Ln) - 2Ln) \\ \tilde{V}(0) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dq_{12} V(q_{12}) = \frac{L}{3} \\ V(q_{12}) &= \tilde{V}(0) + \sum_{n \neq 0} \tilde{V}(n) e^{inq_{12}}. \end{aligned}$$

Da Eq. 3.2.7, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(x_1, t)}{\partial t} &= \frac{(N-1)}{N} \alpha \nabla_1 \int dq_2 V(q_1 - q_2) \int dv_2 \partial_{12} g_2(x_1, x_2) \\ &= i \frac{(N-1)}{N} \alpha \sum_n \int dq_2 dv_2 \tilde{V}(n) n e^{inq_{12}} \partial_{12} \sum_m \tilde{g}_2(m, v_1, v_2) e^{imq_{12}} \\ &= i \frac{(N-1)}{N} \alpha \int dv_2 \sum_{n,m} e^{i(n+m)q_1} \tilde{V}(n) n \partial_{12} \tilde{g}_2(m, v_1, v_2) \int dq_2 e^{-i(n+m)q_2} \\ &= 2\pi i \frac{(N-1)}{N} \alpha \int dv_2 \sum_n \tilde{V}(n) n \partial_{12} \tilde{g}_2(-n, v_1, v_2) \\ &= 2\pi i \frac{(N-1)}{N} \alpha \int dv_2 \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} \tilde{V}(n) n \partial_{12} \tilde{g}_2(-n, v_1, v_2) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{V}(n) n \partial_{12} \tilde{g}_2(-n, v_1, v_2) \right) \end{aligned}$$

Usando a propriedade

$$\sum_{i=-n}^{-m} f(-i) = \sum_{i=m}^n f(i),$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(x_1, t)}{\partial t} &= 2\pi i \frac{(N-1)}{N} \alpha \int dv_2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{V}(-n) (-n) \partial_{12} \tilde{g}_2(n, v_1, v_2) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{V}(n) n \partial_{12} \tilde{g}_2(-n, v_1, v_2) \right) \\ &= 2\pi i \frac{(N-1)}{N} \alpha \int dv_2 \\ &\quad \left(- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n (\sin(nL) n^2 L^2 + 2 \sin(nL) - 2Ln)}{2n^3 L^2} \partial_{12} \tilde{g}_2(n, v_1, v_2) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n (\sin(nL) n^2 L^2 + 2 \sin(nL) - 2Ln)}{2n^3 L^2} \partial_{12} \tilde{g}_2(-n, v_1, v_2) \right). \end{aligned}$$

Sabendo que $\tilde{g}_2(-n, v_1, v_2) = \tilde{g}_2^*(n, v_1, v_2)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(x_1, t)}{\partial t} &= 2\pi i \frac{(N-1)}{N} \alpha \int dv_2 \\ &\quad \left(- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n (\sin(nL) n^2 L^2 + 2 \sin(nL) - 2Ln)}{2n^3 L^2} \partial_{12} \tilde{g}_2(n, v_1, v_2) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n (\sin(nL) n^2 L^2 + 2 \sin(nL) - 2Ln)}{2n^3 L^2} \partial_{12} \tilde{g}_2^*(n, v_1, v_2) \right) \end{aligned}$$

Sabendo que

$$\begin{aligned} \tilde{g}_2^* &= \operatorname{Re}(\tilde{g}_2) - i \operatorname{Im}(\tilde{g}_2) \\ \tilde{g}_2 &= \operatorname{Re}(\tilde{g}_2) + i \operatorname{Im}(\tilde{g}_2) \\ -\tilde{g}_2 + \tilde{g}_2^* &= -2i \operatorname{Im}(\tilde{g}_2). \end{aligned}$$

Considerando que estamos trabalhando com sistemas de muitas partículas, ou seja, N é muito grande, temos que

$$\frac{\partial f_1(x_1, t)}{\partial t} = 4\pi \alpha \int dv_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n (\sin(nL) n^2 L^2 + 2 \sin(nL) - 2Ln)}{2n^3 L^2} \partial_{12} \operatorname{Im} \tilde{g}_2(n, v_1, v_2). \quad (3.4.35)$$

Esta é a equação cinética para o sistema gravitacional homogêneo unidimensional, para encontra-la precisamos de \tilde{g}_2 , então vamos usar a Eq. 3.2.9, considerando apenas os termos de ordem α^0 . Fazendo isto obtêm-se

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial q_2} \right) g_2^1(q_{12}, v_1, v_2) &= \sum_n \tilde{V}(n) i n e^{i n q_{12}} \partial_{12} f(x_1) f(x_2) \\ \sum_n \left(\frac{\partial}{\partial t} + i n v_{12} \right) \tilde{g}_2^1(n, v_1, v_2) e^{i n q_{12}} &= \sum_n \tilde{V}(n) i n e^{i n q_{12}} \partial_{12} f(x_1) f(x_2). \end{aligned}$$

Considerando apenas os termos que estão multiplicando $e^{i n q_{12}}$, temos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i n v_{12} \right) \tilde{g}_2^1(n, v_1, v_2) = \frac{i (\sin(nL) n^2 L^2 + 2 \sin(nL) - 2Ln)}{2n^2 L^2} \partial_{12} f(x_1) f(x_2).$$

Resolvendo, temos

$$\begin{aligned} \tilde{g}_2^1(n, v_1, v_2, t) &= e^{-i n v_{12} t} \tilde{g}_2^1(n, v_1, v_2, 0) \\ &\quad + \frac{i (\sin(nL) n^2 L^2 + 2 \sin(nL) - 2Ln)}{2n^2 L^2} \partial_{12} f(v_1, t) f(v_2, t) \int_0^t e^{-i n v_{12} \tau} d\tau. \end{aligned}$$

Após a markovianização

$$\int_0^t e^{-i n v_{12} \tau} d\tau \longrightarrow \int_0^\infty e^{-i n v_{12} \tau} d\tau = -\pi \delta_-(n v_{12}) = -\frac{i}{n v_{12}} = -\pi \delta(n v_{12}) + i \mathcal{P} \left(\frac{1}{n v_{12}} \right).$$

Então

$$\tilde{g}_2^1(n, v_1, v_2, t) = \frac{(\sin(nL) n^2 L^2 + 2 \sin(nL) - 2Ln)}{2v_{12} n^3 L^2} \partial_{12} f(v_1, t) f(v_2, t),$$

ou

$$\begin{aligned} \tilde{g}_2^1(n, v_1, v_2, t) &= -\frac{(\sin(nL) n^2 L^2 + 2 \sin(nL) - 2Ln)}{2n^2 L^2} \mathcal{P} \left(\frac{1}{n v_{12}} \right) \partial_{12} f(v_1, t) f(v_2, t). \\ &\implies \text{Im} \tilde{g}_2^1(n, v_1, v_2, t) = 0 \end{aligned}$$

Então vamos considerar o segundo termo da expansão, \tilde{g}_2^2 . Considerando apenas os termos de ordem α^0 na equação 3.2.10, temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial q_2} \right) g_2^2(x_1, x_2) &= \frac{\partial V(q_1 - q_2)}{\partial q_1} \partial_{12} g_2^1(q_{12}, v_1, v_2) \\ &\quad - 2 \int \int dq_3 dv_3 \frac{\partial V(q_1 - q_3)}{\partial q_1} \frac{\partial f(v_1, t)}{\partial \mathbf{v}_1} g_2^1(q_{23}, v_2, v_3) \\ &\quad - 2 \int \int dq_3 dv_3 \frac{\partial V(q_2 - q_3)}{\partial q_2} \frac{\partial f(v_2, t)}{\partial \mathbf{v}_2} g_2^1(q_{13}, v_1, v_3) \\ &\quad - \int \int dq_3 dv_3 \frac{\partial V(q_1 - q_3)}{\partial q_1} f(v_2, t) \frac{\partial g_2^1(q_{13}, v_1, v_3)}{\partial v_1} \\ &\quad - \int \int dq_3 dv_3 \frac{\partial V(q_2 - q_3)}{\partial q_2} f(v_1, t) \frac{\partial g_2^1(q_{23}, v_2, v_3)}{\partial v_2} \end{aligned} \tag{3.4.36}$$

Como vimos

$$g_2^1(q_{ij}, v_i, v_j, t) = \sum_n \frac{(\sin(nL) n^2 L^2 + 2 \sin(nL) - 2Ln) e^{i n q_{ij}}}{2v_{12} n^3 L^2} \partial_{12} f(v_1, t) f(v_2, t)$$

e

$$V(q_{ij}) = \frac{L}{3} + \sum_n \frac{(\sin(nL) n^2 L^2 + 2 \sin(nL) - 2Ln) e^{inq_{ij}}}{2n^3 L^2}.$$

Substituindo estas séries na Eq.3.4.36 e considerando

$$g_2^2(q_{12}, v_1, v_2, t) = \sum_p e^{ipq_{12}} \tilde{g}_2^2(p, v_1, v_2, t),$$

resolvendo esta equação e usando o processo de markovianização, obtem-se

$$\begin{aligned} \tilde{g}_2^2(p, v_1, v_2, t) = & iP \left(\frac{1}{pv_{12}} \right) \\ & \left\{ \sum_k \left[\frac{i}{4(p-k)^2 L^4 k^3} (\sin((p-k)L) (p-k)^2 L^2 + 2 \sin((p-k)L) \right. \right. \\ & \left. \left. - 2L(p-k)) (\sin(kL) k^2 L^2 + 2 \sin(kL) - 2Lk) \partial_{12} \left(\frac{\partial_{12} f(v_1, t) f(v_2, t)}{v_{12}} \right) \right] \right. \\ & \left. - 2 \frac{\partial f(v_1, t)}{\partial v_1} \int dv_3 \left(2\pi \frac{i}{(2L^2)^2 p^5 v_{23}} (\sin(pL) p^2 L^2 + 2 \sin(pL) - 2Lp)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. \partial_{23} f(v_2, t) f(v_3, t) \right) \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial f(v_2, t)}{\partial v_2} \int dv_3 \left(2\pi \frac{i}{(2L^2)^2 p^5 v_{13}} (\sin(pL) p^2 L^2 + 2 \sin(pL) - 2Lp)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. \partial_{13} f(v_1, t) f(v_3, t) \right) \right\}. \end{aligned}$$

E

$$Im \tilde{g}_2^2(p, v_1, v_2, t) = 0.$$

Então vamos considerar os termos de ordem α da Eq. 3.2.10. Considerando esses termos iremos precisar de \tilde{g}_3^2 , obtido da Eq. 3.2.11 levando em conta apenas termos de ordem α^0 . Substituindo as séries de Fourier na Eq. 3.2.10, considerando apenas a parte imaginária de \tilde{g}_2^2 , resolvendo e fazendo a markovianização, obtemos

$$\begin{aligned} Im \tilde{g}_2(n, v_1, v_2, t) &= \frac{1}{N^2} Im \tilde{g}_2^2(n, v_1, v_2, t) \\ &= \frac{1}{N^2} P \left(\frac{1}{(v_1 - v_2) n} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{V}(-k) (-k) \\ & \quad \left\{ \int dv_3 \left(\frac{\partial Im \tilde{g}_3^2(n+k, k, v_1, v_2, v_3, t)}{\partial v_1} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\partial Im \tilde{g}_3^2(n, k, v_1, v_2, v_3, t)}{\partial v_2} \right) \right\} \\ & \quad - \pi \delta((v_1 - v_2) n) \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{V}(-k) (-k) \\ & \quad \left\{ \int dv_3 \left(\frac{\partial Re \tilde{g}_3^2(n+k, k, v_1, v_2, v_3, t)}{\partial v_1} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\partial Re \tilde{g}_3^2(n, k, v_1, v_2, v_3, t)}{\partial v_2} \right) \right\}. \end{aligned} \tag{3.4.37}$$

Da mesma forma que resolvemos a Eq. 3.2.11 para termos de ordem α^0 , temos que

$$\begin{aligned}
Im\tilde{g}_3^2(n, m, v_1, v_2, v_3, t) &= -\pi\delta(nv_1 + (n+m)v_2 - mv_3) \\
&\quad \{(n-m)\tilde{V}(n-m)\partial_{12}f(v_2, t)\tilde{g}_2^1(m, v_1, v_2, t) \\
&\quad +n\tilde{V}(n)\partial_{12}f(v_1, t)\tilde{g}_2^1(m, v_2, v_3, t) \\
&\quad +m\tilde{V}(m)\partial_{13}f(v_3, t)\tilde{g}_2^1(n-m, v_1, v_2, t) \\
&\quad +(m-n)\tilde{V}(m-n)\partial_{23}f(v_2, t)\tilde{g}_2^1(n, v_1, v_3, t) \\
&\quad +m\tilde{V}(m)\partial_{23}f(v_3, t)\tilde{g}_2^1(n, v_1, v_2, t) \\
&\quad +n\tilde{V}(n)\partial_{13}f(v_1, t)\tilde{g}_2^1(m-n, v_2, v_3, t)\}, \quad (3.4.38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Re\tilde{g}_3^2(n, m, v_1, v_2, v_3, t) &= -\mathcal{P}\left(\frac{1}{nv_1 + (n+m)v_2 - mv_3}\right) \\
&\quad \{(n-m)\tilde{V}(n-m)\partial_{12}f(v_2, t)\tilde{g}_2^1(m, v_1, v_2, t) \\
&\quad +n\tilde{V}(n)\partial_{12}f(v_1, t)\tilde{g}_2^1(m, v_2, v_3, t) \\
&\quad +m\tilde{V}(m)\partial_{13}f(v_3, t)\tilde{g}_2^1(n-m, v_1, v_2, t) \\
&\quad +(m-n)\tilde{V}(m-n)\partial_{23}f(v_2, t)\tilde{g}_2^1(n, v_1, v_3, t) \\
&\quad +m\tilde{V}(m)\partial_{23}f(v_3, t)\tilde{g}_2^1(n, v_1, v_2, t) \\
&\quad +n\tilde{V}(n)\partial_{13}f(v_1, t)\tilde{g}_2^1(m-n, v_2, v_3, t)\}. \quad (3.4.39)
\end{aligned}$$

Pode-se concluir então que

$$\frac{\partial f(v_1, t)}{\partial t} \propto \frac{1}{N^2},$$

ou seja, o tempo de relaxação para o sistema gravitacional homogêneo unidimensional também é proporcional a N^2 .

3.5 Conclusão e perspectiva

Vimos neste trabalho que as equações cinéticas para um sistema homogêneo unidimensional se anulam e é necessário considerar outros termos da hierarquia BBKGY para obter a equação que descreve a evolução dos sistema. Neste trabalho vimos que as equações que descrevem a evolução do HMF e o sistema gravitacional são proporcionais a $\frac{1}{N^2}$, o que equivale ao tempo de relaxação proporcional a N^2 , para sistemas com número de partículas muito grande. Este resultado para o HMF é compatível com os resultados encontrados em [9].

Agora pretendemos, utilizando técnicas de simulação como Monte Carlo, encontrar o tempo de relaxação para sistemas gravitacionais unidimensionais e comparar com o resultado analítico obtido neste trabalho. Pretendemos também abranger nosso trabalho para encontrar uma equação genérica para um sistema unidimensional com potencial periódico qualquer.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Antoni, S. Ruffo, Phys. Rev. E 52, 3, 2361 (1995).
- [2] R. Balescu, Equilibrium and Nonequilibrium statistical mechanics(Wiley Interscience Publication, 1975).
- [3] R. Balescu, Statistical Dynamics: Matter out of Equilibrium(Imperial College Press, London, 1997).
- [4] R. Balescu, Statistical Mechanics of Charged Particles: Monographs in Statistical Physics (Vol. 4, Interscience Publishers, 1963).
- [5] W. E. Boyce, R.C. DiPrima, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems (Seventh Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2001).
- [6] A. Campa, T. Dauxois, and S. Ruffo, Phys. Rep. 480, 57 (2009).
- [7] P.-H. Chavanis, J. Stat. Mech. (2010) P05019.
- [8] T. Dauxois, S. Ruffo, E. Arimondo, and M. Wilkens, in Dynamics and Thermodynamics of Systems with Long-Range Interactions, edited by T. Dauxois, S. Ruffo, E. Arimondo, and M. Wilkens (Springer, Berlin, 2002), pp. 1?19.
- [9] T. M. Rocha Filho, M. A. Amato, A. E. Santana, A. Figueiredo, and J. R. Steiner, Phys. Rev. E 89, 032116 (2014).
- [10] T. M. Rocha Filho, A. E. Santana, M. A. Amato, A. Figueiredo, Phys. Rev. E 90, 032133 (2014).
- [11] Y. Funato, J. Makino, T. Ebisuzaki, Astron. Soc. Jpn. 44, 613 (1992).
- [12] Goldstein, Poole, Safko, Classical Mechanics(Terceira Edição, Addison Wesley, 2002).
- [13] R. D. Gregory, Classical Mechanics: An Undergraduate Text (Cambridge University Press, 2006).
- [14] N. A. Lemos, Mecânica Analítica (Segunda Edição, Editora Livraria da Física, 2007).
- [15] Y. Levin, R. Pakter, F. B. Rizzato, T. N. Teles, F. P.C. Benetti, Phys. Rep. 535, 1 (2014).
- [16] R.L. Liboff, Introduction to the theory of kinetic Equations, (John Wiley & Sons, Inc.,1969).
- [17] R.L.Liboff, Kinetic Theory - Classical, Quantum, and Relativistic Descriptions (3rd ed, Springer-Verlag, New York, 2003).

- [18] B.N. Miller, J.-L. Rouet, *Phys. Rev. E* 82,066203 (2010).
- [19] D. R. Nicholson, *Introduction to plasma theory* (John Willey & Sons, 1983).
- [20] M. M. Sano, *J. Phys. Soc. Jpn.* 81, 024008 (2012).
- [21] E. C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of Fourier Integrals* (Segunda Edição. Clarendon Press, 1948).
- [22] T.-Y. Wu, *Kinetic Equations of Gases and Plasmas* (Addison-Wesley Publishing Company, 1966).