

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

**Aplicações do Estudo do Cálculo Integral no Nível  
Básico de Ensino Associado à Resolução do Cálculo de  
Áreas de Figuras Planas**

por

**Marco Antônio Alves Dias**

Brasília

2015

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de matemática

# Aplicações do Estudo do Cálculo Integral no Nível Básico de Ensino Associado à Resolução do Cálculo de Áreas de Figuras Planas

por

Marco Antônio Alves Dias \*

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de*

**MESTRE**

Brasília, 13 de Março de 2015

Comissão Examinadora:

---

Dr. Ricardo Ruviano - UnB - Orientador

---

Dr. Jhone Caldeira Silva - UFG - Examinador

---

Dr. Rui Seimetz - UnB - Examinador

---

\*O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração deste trabalho.

Este trabalho é dedicado à minha esposa Thalita Bárbara Souza Dias que sempre esteve ao meu lado, auxiliando-me nos momentos necessários e compartilhando comigo minhas vitórias. Sem esta mulher maravilhosa, este não seria possível, tampouco apresentável.

# Agradecimentos

---

Agradeço, primeiramente, a Deus que sempre foi o pilar de todo meu esforço e dedicação e a Nossa Senhora por ter me mantido firme no propósito de conclusão desta etapa tão importante na carreira de qualquer profissional.

Aos meus pais que me servem de suporte emocional, humanitário e psicológico, concomitantemente com minha irmã e cunhado. Dou graças pela minha esposa que esteve ao meu lado em todas as horas, mesmo nos momentos mais difíceis e cansativos.

Ao meu orientador pela total dedicação e empenho para que estas páginas tivessem conteúdo de qualidade e pela paciência nas horas de complicação.

A todos os professores do Departamento de Matemática, em especial àqueles que estiveram mais próximos através das aulas ministradas por contribuir não só com conhecimento, mas também com a amizade construída.

Aos verdadeiros amigos que entenderam e souberam aceitar a abdicação dos momentos de curtidão e lazer, mantendo o apoio e as orações.

Enfim, agradeço a todos que de alguma forma, direta ou indiretamente, fizeram parte da construção desse que agora vos escrevo.

Agradeço à *CAPES* pelo apoio financeiro à este trabalho.

*"Eu, de boa vontade, morreria queimado como Faetonte, se esse fosse o preço a pagar para alcançar o Sol e saber qual a sua forma, tamanho e substância." - Eudoxo.*

# Resumo

---

Apresentamos neste trabalho uma pequena reflexão do que é o Cálculo Diferencial e Integral. Partimos da ideia inicial de áreas de figuras planas elementares e incrementamos nossa discussão com o cálculo aproximado da área do círculo. Através da construção de várias ferramentas matemáticas, demonstramos resultados já esperados e apresentamos o cálculo de áreas de figuras básicas com outro enfoque, além de discutirmos a obtenção de áreas para regiões que não são triviais para um aluno do Ensino Médio. O uso dessas ferramentas se faz contínuo para aqueles que trabalham com a tecnologia atual e se mostra cada vez mais necessária sua inserção na sociedade, de modo menos temeroso e desmitificado.

Palavras-Chaves: Área; Integral; Cálculo; Exaustão; Limites; Derivadas.

# Abstract

---

We present a short reflection of what are the Differential and Integral Calculus. We start from the initial idea of elementary plane figure's area and amplified the scope of our discussion for the approximate calculation of the disk. By building various mathematical tools, we were able to demonstrate results already expected and presented the calculation of basic figure's areas with an alterantive approach, and also discussed ways to obtain areas for regions wich are not trivial for a high scoll student. The use of these tools is made itself necessary continuously for those working with current technology and is each day more required in their insertion into society, in a less fearful and desmystified way.

Key-Words: Area; Integral; Calculus; Exhaustion; Limits; Derivative.

# Sumário

---

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Áreas Conhecidas</b>	<b>4</b>
1.1 Área de Polígonos . . . . .	4
1.1.1 Quadrados . . . . .	8
1.1.2 Retângulo e Triângulo Retângulo . . . . .	10
1.1.3 Paralelogramo e Triângulo Qualquer . . . . .	11
1.1.4 Trapézios . . . . .	13
1.1.5 Hexágono Regular . . . . .	14
1.1.6 Polígono Regular . . . . .	15
<b>2 Motivação</b>	<b>17</b>
2.1 Aproximações via Polígonos Regulares . . . . .	17
<b>3 Noções de Limite</b>	<b>21</b>
3.1 Limite de Sequências . . . . .	21
3.2 Funções Reais . . . . .	26
3.3 Limites de Funções . . . . .	27
<b>4 Derivadas</b>	<b>37</b>
4.1 Funções Trigonométricas . . . . .	46
<b>5 Integração</b>	<b>50</b>
5.1 Integral de Riemann . . . . .	51
5.2 Propriedades da Integral . . . . .	58
5.3 Condições de Integrabilidade . . . . .	61
5.4 Calculando Integrais . . . . .	62
5.5 Integração por Substituição Trigonométrica . . . . .	69

5.6	Integração das Funções Racionais Usando Frações Parciais . . . . .	74
5.7	Integração por Partes . . . . .	77
<b>6</b>	<b>Aplicações</b>	<b>81</b>
6.1	Casos Interessantes . . . . .	95
	<b>Bibliografia</b>	<b>106</b>

# Introdução

---

O cálculo de área de figuras planas é um elemento importante na Educação Matemática, pois possibilita ao aluno um maior desenvolvimento intelectual, além de propiciar um planejamento mais detalhado, quando tratamos em resolver problemas, não só acadêmicos, mas também práticos. Este trabalho tem por objetivo apresentar aos alunos da Educação Básica, em especial do Ensino Médio, uma nova ferramenta para o cálculo de áreas e discutir sua utilização em outras áreas do conhecimento, chamada de *Integral*. Desta maneira, não gostaríamos de discutir qual seria a melhor forma de resolver problemas, mas aumentar o leque de possibilidades e discutir as várias aplicações possíveis com essa nova técnica.

A apresentação desta nova ferramenta será antecedida pelas discussões acerca das técnicas já conhecidas pelo aluno regular do Ensino Fundamental e Médio, com enfoque na construção das fórmulas para o cálculo de áreas e exposição da dificuldade em relatar tais fórmulas para regiões circulares. Em seguida, será montada uma base teórica contundente e sólida, a fim de que o novo instrumento tenha seus alicerces bem definidos e consolidados. Antes disso, faremos um breve histórico para entendermos as necessidades e dificuldades encontradas ao longo da evolução da Matemática.

O desenvolvimento da sociedade se fez ao longo de muitos anos, logo a ciência acompanhou esse período duradouro. Dessa maneira, também foi o desenvolvimento da Geometria e, conseqüentemente, o cálculo de áreas. À medida que as pessoas encontraram dificuldades em resolver problemas, a ciência se fez presente e esforçou-se para que a solução fosse prática e direta. Uma maneira eficaz de se resolver problemas sobre áreas de regiões, é decompô-la em formas geométricas já conhecidas, dentre elas o triângulo.

Relatos mostram que o triângulo era objeto de estudo aprofundado desde muitos anos atrás, como o papiro de Ahmes (ou Papiro de Rhind - seu descobridor) que data por volta de 1650 a.C. e já tratava de métodos para o cálculo da área dos triângulos isósceles, dividindo-os em dois triângulos retângulos e chegando assim ao produto de metade do que chamamos hoje de base pela altura (BOYER, 1996).

Ainda segundo Boyer (1996), esta ideia de dividir figuras em triângulos foi bastante utilizada durante anos, no entanto chegou-se a um problema interessante, como encontrar a área de uma curva diferente daquela formada por uma poligonal, por exemplo o círculo? Várias foram as aproximações utilizadas pelos estudiosos de diferentes partes do mundo para a área desta região, como podemos verificar entre os babilônicos que tinham por costume aproximar a área de um círculo tomando três vezes o quadrado do raio.

Seguindo os acontecimento históricos, nos deparamos com a Geometria grega, considerada um divisor de águas no estudo das formas, principalmente com a produção de *Os Elementos de Euclides*, considerado

por muitos o alicerce de todo o conhecimento geométrico moderno. No entanto, esta produção não foi apenas de Euclides, pois teve a participação de outras pessoas, como Eudoxo de Cnido (morreu por volta de 355 a.C.). Personagem tão importante quanto o autor, Eudoxo contribuiu para a obra com o *Método de Exaustão* (equivalente grego do cálculo integral), dentre outros grandes feitos, como podemos verificar em Boyer (1996).

Esse método foi uma tentativa bem revolucionária para a época. Trabalhar com segmentos de reta indivisíveis, ou infinitésimos fixos, constantemente encontrados nas discussões era um pensamento bastante avançado. Mesmo sem falar sobre limites, Eudoxo foi o responsável por dar forma científica a esta ferramenta, cuja fama foi difundida por Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) por meio de seus trabalhos (BOYER, 1996).

O método foi indispensável na demonstração encontrada em *Os Elementos* da área do círculo, fato que veremos mais a frente na discussão sobre o tema em questão. No entanto, a fama desta incrível façanha, ficou com Hipócrates (viveu por volta de 430 a.C.).

A partir daí, os matemáticos desenvolveram e lapidaram os conceitos adquiridos, além de formular novas teorias e concepções. Mas, o chamado infinitesimal não deixou de incomodar nos trabalhos realizados por cada um deles.

Diante desse cenário, Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716) fizeram uma das maiores contribuições para a Matemática moderna, a estruturação do que conhecemos hoje como o *Cálculo Diferencial e Integral*. Material, este, utilizado atualmente em todos os campos da Matemática, seja por meio de ferramentas ou simplesmente como referência, através de analogias aos raciocínios envolvidos em sua construção (BOYER, 1996).

O ensino da Geometria nas escolas brasileiras tem sido tratado com certo descaso por parte de alguns profissionais da Educação Matemática, principalmente naquelas instituições que são sustentadas pelo Estado. Em Pavanello (1993), podemos verificar que este ramo da Matemática vem sendo deixado de lado ou até mesmo *abandonado*. Seja por dificuldade do professor em discutir sobre o assunto, por falta de tempo ou formação adequada, ou seja por interesse de alguns em desestimular o desenvolvimento lógico e crítico daqueles que aprendem, o fato é que a Geometria perdeu grande parte do seu prestígio não só no Brasil, mas em nível mundial, segundo a autora.

No Brasil, a Lei 9394/96 (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB) possibilita aos professores definir os programas de ensino de acordo com os estudantes atendidos. Isto faz com que grande parte dos docentes descartem o ensino da Geometria ou o façam somente no final do ano, período com menor tempo para práticas pedagógicas. Este comportamento é discutido e criticado desde as legislações anterior que discorriam sobre o mesmo assunto, como podemos verificar em Pavanello (1993) e Neves (2012).

Essa discriminação da Geometria, como um todo, faz com que uma parte importante deste componente também tenha seu desenvolvido na Educação Básica prejudicado: o estudo de áreas de regiões planas. Já nas séries iniciais do Ensino Fundamental, escutamos falar sobre quadrado, triângulo e círculo, porém o cálculo da área dessas formas geométricas se faz de maneira gradual, principalmente no Ensino Fundamental. O estudo da área do círculo, em especial, se faz apenas em idade escolar mais avançada, devida sua complexidade. Entretanto, não se discute a origem desse cálculo, tampouco se propõe a análise de outras curvas que também são importantes e que aparecem em várias áreas do conhecimento.

Não foi apenas a Geometria que passou por essa turbulência, o ensino de Cálculo Integral e Diferencial foi retirado do currículo brasileiro desde a década de 60, em consequência com se passava no restante

do mundo. “O nome do movimento era *Matemática Moderna*, pois, como propalavam seus defensores, era preciso modernizar esse ensino. A tônica dessa modernização foi uma ênfase excessiva no rigor e no formalismo das apresentações, à custa, inclusive, de retirar dos antigos programas tópicos importantes no ensino, como a Geometria e o Cálculo” (ÁVILA, 1991).

De acordo com Ávila, em outros países, o cálculo faz parte dos componentes curriculares regulares. Nos Estados Unidos, por exemplo, o aluno do *senior high school*, equivalente ao nosso Ensino Médio, tem flexibilidade para escolher estudar mais Matemática, Ciências ou mais Humanidades. Caso ele escolha a primeira opção, então deverá se aprofundar em conteúdos específicos, como Álgebra, Geometria e, inclusive, Cálculo Integral e Diferencial. Dependendo do seu resultado e do curso pretendido por este aluno, ele pode vir a ser dispensado da disciplina de Cálculo quando entra na universidade. Isso faz com que haja verdadeira interação entre o que se estuda nos anos finais da Educação Básica, isto é, no Ensino Médio, com o conteúdo exigido na universidade.

Sendo o nosso norte a apresentação de uma nova ferramenta para auxílio no cálculo de áreas de figuras planas, iremos nos concentrar no Cálculo Integral. Alguns livro didáticos do Ensino Médio já trazem ideias do Cálculo Integral, como área abaixo de gráficos de funções. “Entretanto, esses temas, na maioria das vezes, não são ensinados sob o pretexto de serem difíceis e impróprios a esse segmento da educação, devendo ficar restritos ao ensino superior (BUSSE, 2006)”.

Mesmo com possíveis contraindicações, existem livros didáticos de Matemática do Ensino Médio que trazem conceitos intuitivos de Limites e Derivadas em seus programas. Podemos constatar esta inserção em Dante (2011) e Smole (2010), onde os conceitos são tratados de maneira bem intuitivas e claras.

Por outro lado, é possível verificarmos comentários sobre áreas formadas entre curvas e eixos coordenados, tratamento similar ao dado pela concepção de *Integral*, como interpretação geométrica. “No gráfico da velocidade escalar ( $v$ ) em função do tempo ( $t$ ), a ‘área’ entre o gráfico e o eixo dos tempos, calculada entre dois instantes  $t_1$  e  $t_2$ , expressa a variação de espaço entre  $t_1$  e  $t_2$  (HELOU, 2013)”. Neste mesmo texto comenta-se que a área desta região é numericamente igual ao deslocamento, isto é, se soubéssemos calcular esta área, poderíamos fazer inferências sobre as posições inicial e final do objeto após o movimento. Neste caso, o Cálculo Integral nos oferece uma nova possibilidade de trabalho, pois poderíamos com este instrumento calcular deslocamento de objetos em que seu movimento seja regido por uma função que represente uma velocidade escalar não uniformemente variada e, ainda, discutir as fórmulas apresentadas.

O mais importante é que esse desenvolvimento histórico seja entendido por aqueles que estão aprendendo sobre áreas, pois é de se esperar que o aprendizado seja acompanhado pela ordem cronológica dos fatos e constatações. Desta maneira, o professor assume um papel de facilitador do conhecimento e transporta para o aluno a produção propriamente dita. Esta transposição será efetiva se o interesse do aprendiz em conhecer as novas técnica e maneiras se manifestar, isto é, cabe ao professor incentivar o despertar desta curiosidade.

# Áreas Conhecidas

Antes de entrarmos propriamente dito no assunto pretendido, é necessário o entendimento do conceito de área de uma figura.

**Definição 1.1.** *Para este trabalho, área nada mais é do que um número real associado a uma figura, região ou objeto que visa sua comparação com outras formas e vinculação às suas propriedades. Definimos uma unidade de área (u.a.) e denotaremos sua área por 1, de acordo com a Figura 1.1.*

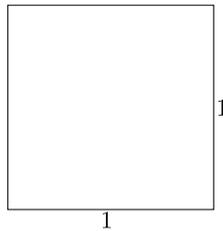


Figura 1.1: Unidade de Área = 1 u.a.

O cálculo da área de cada figura se faz por meio de comparações com a unidade de área acima descrita, verificando quantas destas seriam necessárias para preencher o espaço ocupado pela figura em questão. Vejamos como esta comparação é feita nas formas mais simples.

## 1.1 Área de Polígonos

**Definição 1.2.** *A união de segmentos de reta é chamada de poligonal quando esta se faz obedecendo três requisitos:*

- Cada segmento deve unir-se apenas por suas extremidades;
- Cada extremidade só pode ser ligada a exatamente mais uma, não havendo três concorrentes num mesmo ponto;
- Segmentos consecutivos não devem pertencer a uma mesma reta, já que se isso ocorrer, basta tomar um terceiro cujo comprimento seja equivalente aos outros dois juntos.



Figura 1.2: Poligonais

Dizemos que uma poligonal é *simples* se não há intercessão dos segmentos diferente das extremidades, como na figura 1.2 - caso (1) e *não simples* no caso contrário, visualizado no caso (2) da mesma imagem. Chamamos de poligonal *fechada* se todas as extremidades estão ligadas, caso (2) da figura 1.2, e aberta se tiver alguma extremidade que não esteja ligada, caso (1) também da mesma imagem.

Com essas ferramentas podemos fazer uma definição formal de polígonos.

**Definição 1.3.** *Seja  $\rho$  uma poligonal. Dizemos  $\rho$  é um polígono se for simples e fechada simultaneamente. Sendo cada segmento de reta chamado de lado do polígono.*



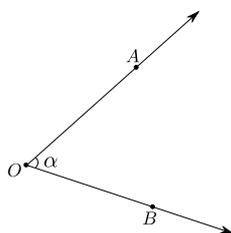
Figura 1.3: Polígonos

Para facilitar o entendimento, classificamos os polígonos quanto ao número de lados (ou ângulos): triângulos (3 lados), quadriláteros (4 lados), pentágonos (5 lados), hexágonos (6 lados), etc.

Observe que por ser uma poligonal fechada, o polígono divide o plano em duas regiões. Chamamos de interior do polígono aquela delimitada por seus lados e de exterior o restante do plano.

Além disso, os lados do polígono se unem de forma livre, havendo diferenças entre elas que precisam ser comparadas. Para isso vamos utilizar o conceito de ângulo.

**Definição 1.4.** *Sejam duas semirretas de mesma origem  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ . Chamamos de ângulo a menor região formada por  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ , medida em graus, onde  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$  são chamadas de lados e a origem comum a cada uma delas é chamada de vértice do ângulo. Note que, em alguns casos, é interessante tomar a maior região.*

Figura 1.4: Ângulo  $\hat{AOB} = \alpha$ 

É possível acrescentarmos uma nova semirreta, de origem também no vértice, de tal forma que esta seja interna ao ângulo original e que forme dois outros ângulos de mesma medida. Essa semirreta que foi inserida é chamada de *bissetriz*.

Se consideramos dois segmentos de reta, unidos por suas extremidades, então podemos afirmar que existem duas semirretas de mesma origem, ponto de intercessão dos segmentos, tais que estes estão cada

um contido numa dessas semirretas. Vamos denotar que o ângulo entre os segmentos será o mesmo formado pelas semirretas que os contêm.

Desta maneira, lados consecutivos de um polígono formam ângulos. Denotaremos por *ângulos internos* aqueles formados pelos lados e que contêm a região interna do polígono, ou parte da mesma.

**Definição 1.5.** *De modo geral, polígonos que possuem todos os lados e ângulos internos congruentes (mesma medida) são chamados de polígonos regulares.*

Depois de várias definições e notações, vamos estudar um pouco mais sobre os triângulos, com uma atenção especial aos regulares, também chamados de triângulos equiláteros. Observe que para o triângulo, os lados são congruentes se, e somente se, os ângulos internos também o são, cada um medindo  $60^\circ$ .

## Classificações dos Triângulos

Uma forma de classificar os triângulos é quanto às dimensões de seus lados. Se tiver todos os lados iguais, dizemos ser um *triângulo equilátero*. Caso dois dos lados tiverem a mesma medida, então teremos um *triângulo isósceles*. Para aqueles que possuem todos os lados com medidas diferentes entre si denotamos a classificação de *triângulo escaleno*.

Outra maneira de classificarmos um triângulo é quanto à medida de seus ângulos. Se o triângulo possui um ângulo interno que seja reto ( $90^\circ$ ), então este é um *triângulo retângulo*. Chamamos de *acutângulo* aqueles em que todos os seus ângulos são menores que o ângulo reto, ou seja, menores do que  $90^\circ$  e de *obtusângulo* aqueles em que um de seus ângulos mede mais do que  $90^\circ$ . Lembrando que a soma dos ângulos internos de um triângulo deve ser igual a  $180^\circ$ .

Essas classificações são feitas para facilitar a comparação de figuras e definir propriedades para cada tipo, fixando particularidades.

Para auxiliar essas comparações precisamos definir alguns elementos importantes para um estudo um pouco mais detalhado dos triângulos.

**Definição 1.6.** *Dado um dos vértices, podemos traçar um segmento de reta que une este vértice até a reta que contém os outros dois, de tal maneira que essa união forme um ângulo reto ( $90^\circ$ ). Chamamos esse segmento de *Altura*.*

**Definição 1.7.** *Escolhido um vértice, podemos traçar um segmento de reta que une este vértice até o ponto médio do lado oposto, ou seja, o lado que não contém este vértice. O segmento traçado recebe o nome de *Mediana*.*

**Observação 1.1.** *Notamos que a semirreta com origem em algum dos vértices do triângulos de tal forma que esta divide o ângulo interno formado neste vértice em outros dois de mesma medida receberá também o nome de *Bissetriz*, como apresentado anteriormente para o ângulo, de modo geral.*

É fácil ver que para cada triângulo podemos encontrar cada um dos elementos acima. Sendo assim, vamos utilizar aquele que for mais conveniente para cada caso, levando em consideração o interesse de estudo e a nomenclatura utilizada.

Ainda antes de entrarmos no estudo de áreas vamos discutir um pouco sobre cada um dos tipos de triângulos, começando pelo triângulo isósceles, composto por um par de lados com mesma medida e um outro qualquer, chamado de base.

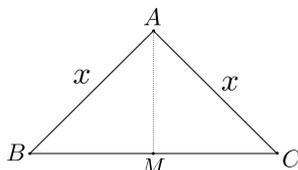


Figura 1.5: Triângulo Isósceles de Base  $\overline{BC}$

Seja  $M$  o ponto médio da base  $BC$  do triângulo isósceles  $ABC$  acima. Ao traçarmos a mediana  $AM$  relativa ao vértice  $A$  teremos dois triângulos congruentes,  $AMB$  e  $AMC$ , pois  $\overline{AB} = \overline{AC} = x$ ,  $\overline{BM} = \overline{CM}$  e  $AM$  é um lado comum aos dois. Daí, podemos garantir duas coisas:

Primeiramente, a constatação acima nos traz também a congruência entre os ângulos  $\angle AMB$  e  $\angle AMC$ . Ora, a união desses dois ângulos forma um ângulo raso ( $180^\circ$ ), logo cada um deles deve medir a metade disso, ou seja, eles são ângulos retos ( $90^\circ$ ). Sendo assim, o segmento  $AM$  é também a altura relativa ao vértice  $A$ .

Por outro lado, os ângulos  $\angle BAM$  e  $\angle CAM$  também são congruentes e a união dos dois forma o ângulo  $\angle BAC$ , logo o segmento  $AM$  está contido na bissetriz do triângulo em relação ao ângulo formado em  $A$ .

Para o triângulo equilátero, podemos fazer essa mesma análise para cada par de lados e concluir que, para este tipo de triângulo as bissetrizes, alturas e medianas referentes a cada um dos vértices são coincidentes.

Para o triângulo retângulo existem algumas definições que serão necessárias mais adiante. Os lados que formam o ângulo reto são chamados de catetos e o terceiro lado de hipotenusa. Assim, definiremos as relações trigonométricas.

Considere o triângulo  $\triangle ABC$ , retângulo em  $B$  e com um ângulo  $\alpha$ , conforme a figura.

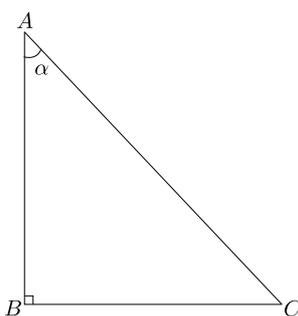


Figura 1.6: Triângulo Retângulo

Definiremos:

$$\bullet \cos(\alpha) := \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad \bullet \sin(\alpha) := \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \quad \bullet \tan(\alpha) := \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}.$$

Agora, com todas essas ferramentas, podemos começar o estudo de áreas de figuras planas.

### 1.1.1 Quadrados

O quadrilátero que possui todos os lados de mesma medida e todos os ângulos retos é dito um quadrado (quadrilátero regular). Veremos como se dá a análise de área dessa figura.

Seja um quadrado de lados 3. Podemos dividir cada um dos seus lados em segmentos de lado 1, em seguida traçamos segmentos de reta de modo que a figura fique repartida em quadrados menores de lado 1. Ora, esses quadrados menores são equivalente à unidade de área, logo área de cada um deles é igual a 1 u.a. Sabendo que a área do quadrado original é formada por 9 destes, concluímos que a área do quadrado de lado 3 é igual a 9 u.a. Observe que podemos contar a quantidade de unidades de área apenas pela quantidade utilizada para cobrir cada um dos lados do quadrado original. Neste caso, foram necessárias três unidades em cada lado, assim, precisamos de um total de  $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$  u.a. para preencher a figura original.

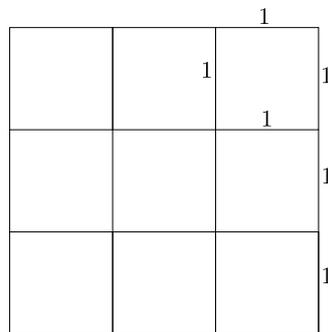


Figura 1.7: Quadrado de Lado 3

Essa distribuição pode ser feita para qualquer quadrado com lados inteiros, bastando colocarmos a unidade de área em linhas e contar quantas linhas serão organizadas. Note que, por se tratar de um quadrado, a quantidade de linhas será igual à quantidade de elementos de cada linha, pois seus lados têm mesmo comprimento. Sendo assim, podemos generalizar o cálculo para um quadrado qualquer.

Seja um quadrado de lado  $a$ . Temos que caberão  $a$  quadrados em cada linha e serão formadas  $a$  linhas. Sendo assim, a área( $A_Q$ ) deste quadrado será

$$A_Q = a \cdot a = a^2 \text{ u.a.}$$

No caso anterior, tínhamos um quadrado cujo lado media 3 unidades, assim, sua área pode ser determinada por  $A = 3 \cdot 3 = 9$  u.a. como já visto. No entanto, se um quadrado tem lado medindo  $1/n$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ , então podemos dividir a unidade em  $n^2$  quadrados menores justapostos, todos congruentes entre si. Temos que a unidade de área foi dividida em  $n^2$  quadrados menores, onde todos têm área igual a  $A_Q$ . Desta maneira,  $n^2 \cdot A_Q = 1$ , pois a união de todos os quadrados é igual a unidade de área. Portanto,

$$A_Q = \frac{1}{n^2} = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \text{ u.a.}$$

Se o quadrado possui lados iguais a  $\frac{m}{n}$ , então basta dividi-lo em quadrados de tamanho  $\frac{1}{n}$ .

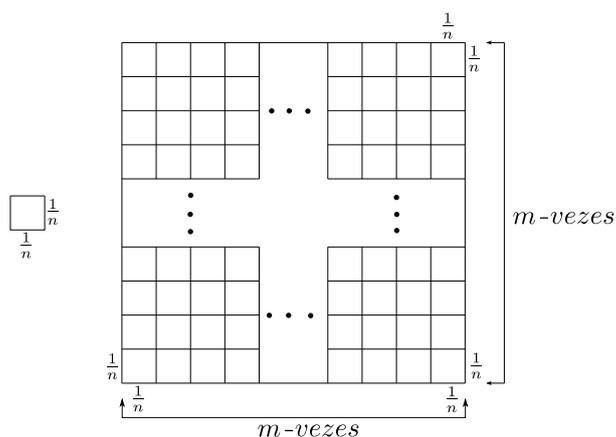


Figura 1.8: Quadrado de lado  $\frac{m}{n}$

Sendo assim, teremos um total de  $m^2$  quadrados onde cada um terá lados medindo  $\frac{1}{n}$  e, consequentemente, área igual a  $\frac{1}{n^2}$ . Logo, a área  $A_Q$  do quadrado original será

$$A_Q = m^2 \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \text{ u.a.}$$

Desta maneira se um quadrado tem lado medindo  $a$  onde  $a \in \mathbb{Q}$ , então a área do quadrado será  $a^2$ . No entanto esta lei se estende também para os quadrados com lados irracionais, ou seja, incomensuráveis com o segmento unitário?

Para responder essa pergunta, vamos considerar  $Q$  um quadrado com lados medindo  $a$ , onde  $a$  é um número irracional. Queremos mostrar que a área de  $Q$  é igual a  $a^2$ . Para isso vamos utilizar o método de exaustão de Eudoxo.

Inicialmente, vamos considerar um número  $b$  tal que  $b < a^2$ . Queremos mostrar que a área ( $A_Q$ ) buscada também deve ser maior que  $b$ . Tomamos um número racional  $r$ , inferior a  $a$ , tal que  $b < r^2 < a^2$ . Observe que basta tomarmos  $r$  próximo e menor que  $a$ , com erro menor que  $a - \sqrt{b}$ . Assim,  $\sqrt{b} < r < a$  e, portanto,  $b < r^2 < a^2$ .

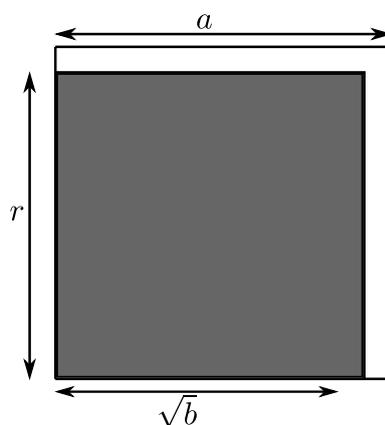


Figura 1.9: Quadrado de Lado Irracional  $a$

No interior de  $Q$  tomamos um quadrado  $Q'$  com lado igual a  $r$  e área igual a  $r^2$ . Desta maneira,

$A_{Q'} < A_Q$ , ou seja,  $b < r^2 < A_Q$ .

Analogamente, sejam  $c \in \mathbb{R}$ , tal que  $a^2 < c$  e  $q \in \mathbb{Q}$  tal que  $q > a$  uma aproximação de  $a$ , com erro menor que  $\sqrt{c} - a$ , ou seja,  $a < q < \sqrt{c}$ . Daí,  $a^2 < q^2 < c$ . Se considerarmos o quadrado  $R$ , com lado medindo  $q$  e com  $Q$  em seu interior, temos a relação  $A_Q < A_R < c$ .

Este raciocínio pode ser feito para qualquer números  $b$  e  $c$  pertencentes ao reais, ou seja,  $A_Q$  não pode ser maior nem menor que  $a^2$ . Portanto,  $A_Q = a^2$  u.a.

De modo geral, temos que área  $A_Q$  de um quadrado de lado  $a \in \mathbb{R}$  é determinada pela expressão  $A_Q = a^2$  u.a.

### 1.1.2 Retângulo e Triângulo Retângulo

O procedimento anterior não se restringe ao quadrado. Podemos fazer uma disposição semelhante para o caso de termos um retângulo como forma estudada, ou seja, um quadrilátero que possui quatro ângulos retos. A diferença entre a nova figura e a anterior será apenas na quantidade de elementos unitários que iremos colocar em cada linha e a quantidade de linhas, pois esses valores serão diferentes.

Suponha um retângulo de lados 4 e 5. Sendo assim precisaremos de 20 u.a. para preenchê-lo, conforme a figura.

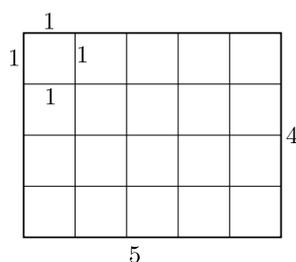


Figura 1.10: Retângulo

De maneira semelhante, podemos generalizar esse raciocínio para um retângulo qualquer, de lado  $a$  e  $b$ , por exemplo. Por meio do processo de Exaustão podemos encontrar racionais tão perto quanto queremos de  $a$  e  $b$  que formam retângulos interiores e exteriores ao desejado para que a área pretendida não seja menor nem maior do que  $a \cdot b$ . Logo a área ( $A_R$ ) procurada pode ser escrita por

$$A_R = ab \text{ u.a.}$$

Por outro lado, ao dividirmos um retângulo através de uma de suas diagonais, teremos dois triângulos congruentes, ou seja, de mesma medida. Temos que a área de um será igual a do outro e, além disso, a união dos dois é equivalente ao retângulo original.

Sendo assim, a área de cada triângulo retângulo será a metade da área do retângulo que o originou.

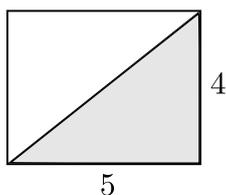


Figura 1.11: Triângulo Retângulo 4x5

De forma geral, a área ( $A_{TR}$ ) do triângulo retângulo será dada por  $\frac{1}{2} \cdot A_R$  u.a.

No exemplo acima, o retângulo pode ser dividido em dois triângulos retângulos com áreas iguais a 10 u.a. cada um.

Para o caso geral, ou seja, um triângulo retângulo com catetos medindo  $a$  e  $b$ , basta construirmos o retângulo correspondente e calcularmos metade de sua área. Dessa maneira, a área ( $A_{Tr}$ ) do triângulo retângulo com catetos medindo  $a$  e  $b$  pode ser descrita por

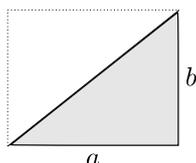


Figura 1.12: Triângulo Retângulo de Lados  $a$  e  $b$

$$A_{Tr} = \frac{a \cdot b}{2} \text{ u.a., onde } a \text{ e } b \text{ são os lados do triângulo que forma o ângulo reto.}$$

### 1.1.3 Paralelogramo e Triângulo Qualquer

Definimos como paralelogramo um quadrilátero que possui dois pares de lados paralelos e, por consequência, lados opostos congruentes.

Seguindo a ideia de dividirmos a figura em pedaço que já conhecemos a área, podemos fazer alguns recortes no paralelogramo. Veja o caso em que temos um paralelogramo com uma par de lados iguais a 10 unidades, outro par igual a 5 unidades e distância entre o primeiro para de lados igual a 4 unidades, conforme a figura

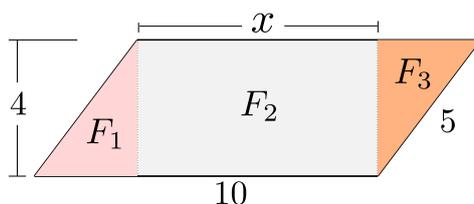


Figura 1.13: Paralelogramo

Chamaremos um dos lados que medem 10 unidades de base e a distância entre este lado e seu oposto de altura. Daí, o paralelogramo foi dividido nas figuras  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$ , onde  $F_1$  e  $F_3$  são triângulos retângulos congruentes e  $F_2$  é um retângulo.

Sendo  $x$  o lado desconhecido do retângulo da  $F_2$ , temos que sua área ( $A_2$ ) pode ser escrita como  $A_2 = x \cdot 4 = 4x$ .

Para os triângulos descritos pelas figuras  $F_1$  e  $F_3$ , temos que os lados que formam o ângulo reto medem 4 e  $10 - x$ . Sendo assim, suas áreas  $A_1$  e  $A_3$ , respectivamente, iguais a  $\frac{4 \cdot (10 - x)}{2}$ .

Agora podemos determinar a área ( $A_P$ ) do paralelogramo já que basta somarmos a áreas das figuras  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$ , ou seja,  $A_P = A_1 + A_2 + A_3$ . Daí,

$$\begin{aligned}
 A_P &= 2 \cdot \frac{4 \cdot (10 - x)}{2} + 4x \\
 &= 4 \cdot 10 - 4x + 4x \\
 &= 40 \text{ u.a.}
 \end{aligned}$$

De uma forma geral, para um paralelogramo de base  $b$  e altura  $h$ , temos que a área dessa figura também pode ser dividida em outra três, sendo duas delas congruentes, de forma semelhante ao exemplo.

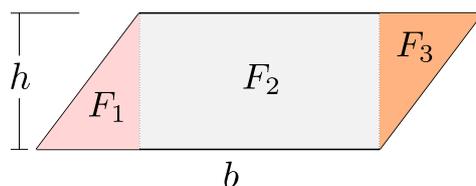


Figura 1.14: Paralelogramo Qualquer

Assim como no caso anterior, teremos que  $F_1$  e  $F_3$  são triângulos retângulos congruentes e  $F_2$  é um retângulo, com lados medindo  $x$  e  $h$ . Sendo  $A_i$  a área da figura  $F_i$ , temos que a área do paralelogramo ( $A_P$ ) pode ser escrita como  $A_P = A_1 + A_2 + A_3$ , onde  $A_1 = A_3 = \frac{h \cdot (b - x)}{2}$  e  $A_2 = h \cdot x$ . Daí,

$$\begin{aligned}
 A_P &= 2 \cdot \frac{h \cdot (b - x)}{2} + hx \\
 &= hb - hx + hx \\
 &= bh \text{ u.a.}
 \end{aligned}$$

Observe que podemos traçar uma diagonal no paralelogramo, obtendo dois triângulos congruentes, donde suas áreas são iguais e somadas correspondem à área do paralelogramo. Logo a área de cada triângulo será igual a metade da área do paralelogramo correspondente a este.

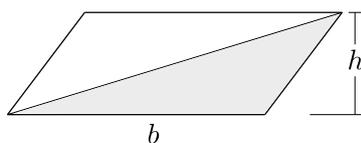


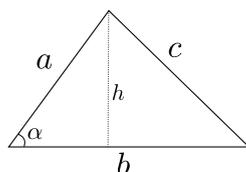
Figura 1.15: Triângulo Qualquer

Para o caso exemplificado a área de cada triângulo será igual a  $\frac{1}{2} \cdot A = \frac{40}{2} = 20$  u.a.

No caso geral, vamos considerar um dos lados do triângulo como sendo a base ( $b$ ), a reta  $r$  que contém a este lado e a distância do vértice oposto à base até a reta  $r$  como sendo a altura ( $h$ ). Logo este triângulo pode ser considerado parte de um paralelogramo e, portanto, sua área ( $A_T$ ) será determinada por

$$A_T = \frac{b \cdot h}{2} \text{ u.a.}$$

Temos como pensar na área de triângulos de outra forma, veja a figura:

Figura 1.16: Triângulo com ângulo  $\alpha$ 

Temos que a área do triângulo acima pode ser encontrada por  $A_T = \frac{b \cdot h}{2}$  u.a. Mas, considerando as definições trigonométricas, observe que  $\text{sen}(\alpha) = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \text{sen}(\alpha)$ .

Portanto,

$$A_T = \frac{ab}{2} \cdot \text{sen}(\alpha) \text{ u.a.}$$

Para o triângulo equilátero a área pode ser descrita de uma forma mais reduzida, já que todos os lados têm a mesma medida ( $l$ ) e todos os ângulos internos são congruentes, medindo  $60^\circ$  cada um. Sabendo que  $\text{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , temos que a área do triângulo ( $A_{T_{eq}}$ ) em questão pode ser determinada pela equação anterior. Neste caso teremos  $a = b = l$  e  $\alpha = 60^\circ$ .

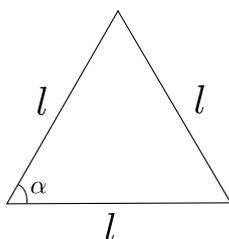


Figura 1.17: Triângulo Equilátero

Daí,

$$\begin{aligned} A_{T_{eq}} &= \frac{ab}{2} \cdot \text{sen}(\alpha) \\ &= \frac{l \cdot l}{2} \cdot \text{sen}(60^\circ) \\ &= \frac{l^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Observe que a área de um triângulo equilátero pode ser determinada apenas pelo comprimento  $l$  de seu lado, ou seja, não precisamos encontrar a medida da altura desse triângulo, caso precisemos apenas saber sobre a área.

#### 1.1.4 Trapézios

Definiremos *trapézio* como um quadrilátero que possui um par de lados paralelos. Estes serão chamados de bases do trapézio e o segmento que os une perpendicularmente, ou seja, formando ângulos retos, chamaremos de altura.

Para encontrarmos a expressão da área do trapézio, utilizaremos a ideia de construirmos um paralelogramo a partir da figura que temos. Esse raciocínio é sempre possível e nos possibilita calcular a área de qualquer trapézio.

Seja o trapézio  $T$  de bases medindo  $B$  e  $b$  e altura  $h$ . Ao colocarmos, outro trapézio  $T'$ , congruente ao primeiro, conforme a figura a seguir, teremos um paralelogramo de base  $B + b$  e altura  $h$ . Observe que esta construção só resulta num paralelogramo pois os trapézios são congruentes.

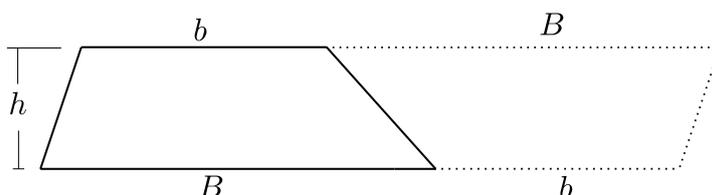


Figura 1.18: Trapézio

Sabemos que as áreas dos dois trapézios são iguais e que juntas são equivalentes à área do paralelogramo. Assim podemos concluir que a área ( $A_{TR}$ ) do trapézio  $T$  pode ser calculada por

$$A_{TR} = \frac{A_P}{2} = \frac{(B + b) \cdot h}{2} \text{ u.a.}$$

### 1.1.5 Hexágono Regular

Seja agora um hexágono regular de lado  $t$ . Podemos dividir o hexágono em seis triângulos congruentes como na figura. Para calcularmos a área total do hexágono, basta calcular a área de um dos triângulos e multiplicar o resultado por 6, como pode ser visualizado na figura 1.19.

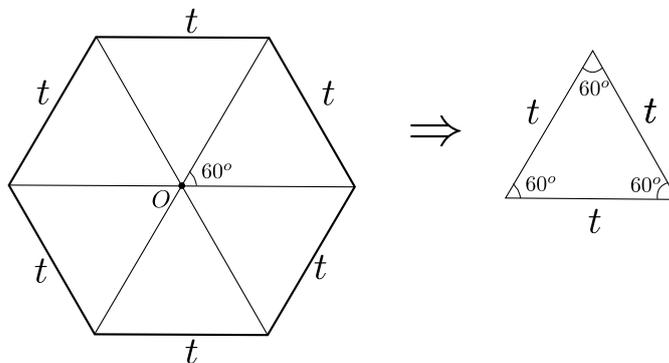


Figura 1.19: Hexágono Regular

Observe que o ângulo interno no vértice  $O$  para cada um triângulos mede  $60^\circ$  ( $\pi/3$  radianos), pois são seis e totalizam um volta, ou seja,  $360^\circ$  ( $2\pi$  radianos).

Por outro lado, os triângulos são todos isósceles, logo os ângulos da base são congruentes, medindo  $60^\circ$  cada um deles. Assim, são triângulos com ângulos congruentes e, portanto, equiláteros também, com lados medindo  $t$ . Note que essa implicação só é válida para o caso de triângulos, pois para observar o contrário é só lembrar do retângulo que é equiângulo e não é, necessariamente, equilátero.

Como visto anteriormente, a área de cada um é determinada por  $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot t^2$ . Ao multiplicarmos e simplificarmos o resultado, a área  $A_H$  do hexágono regular de lado  $t$  é dada por

$$\begin{aligned}
 A_H &= 6 \cdot A_{Teq} \\
 &= 6 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot t^2 \right) \\
 &= \frac{3\sqrt{3}}{2} t^2 \text{ u.a.}
 \end{aligned}$$

### 1.1.6 Polígono Regular

Dado um polígono regular de  $n$  lados de tamanho  $l$ , podemos dividir este polígono em triângulos isósceles congruentes e para calcular a área ( $A_{PR}$ ) basta multiplicar a área de um dos triângulos por  $n$ .

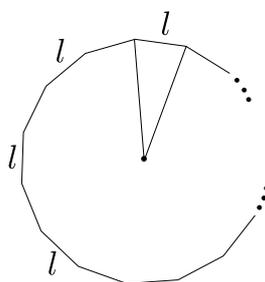


Figura 1.20: Polígono Regular

Primeiramente, vamos verificar o que acontece em um desses triângulos.

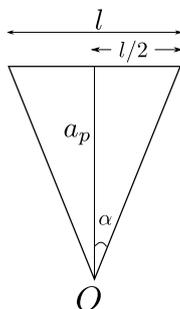


Figura 1.21: Triângulo Extraído do Polígono Regular

Chamaremos a altura do triângulo relativa ao lado que mede  $l$  de apótema ( $a_p$ ), assim a área ( $A_T$ ) de cada triângulo será dada por  $\frac{l \cdot a_p}{2}$ , onde podemos calcular  $a_p$  por meio da tangente do ângulo formado por um dos lados congruentes e pelo apótema, no vértice  $O$ .

Temos que o ângulo interno do triângulo relativo ao vértice  $O$  é determinado por  $\frac{360^\circ}{n}$ . Como o apótema está sobre a bissetriz, temos que o ângulo interno ( $\alpha$ ) do triângulo retângulo menor relativo ao vértice  $O$  mede  $\frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{n}$ .

Sabemos pelas relações trigonométricas no triângulo retângulo que  $\tan(\alpha) = \frac{l/2}{a_p}$ . Logo, podemos escrever  $a_p = \frac{l}{2 \cdot \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$ .

Portanto, a área do polígono regular de  $n$  lados medindo  $l$  cada um é

$$\begin{aligned} A_{PR} &= n \cdot \left[ \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2 \cdot \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)} \right] \\ &= n \cdot \frac{l^2}{4 \cdot \tan(180^\circ/n)} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Observe que se consideramos o semiperímetro ( $p$ ) como sendo a metade do perímetro, ou seja,  $p = \frac{n \cdot l}{2}$ , poderemos escrever a área do polígono por

$$A_{PR} = \frac{n \cdot l}{2} \cdot a_p = p \cdot a_p \text{ u.a.}$$

Veja na tabela abaixo algumas áreas calculadas para polígonos regulares com lados medindo  $l$ .

Nº de Lados (n)	$a_p$	Área ( $A_n$ ) do Polígono	Valor Aproximado de $A_n$
5	$\frac{l}{2 \cdot \tan(36^\circ)}$	$A_5 = \frac{5 \cdot l^2}{4 \cdot \tan(36^\circ)}$	$A_5 \approx 1,72 \cdot l^2$
7	$\frac{l}{2 \cdot \tan(25,71^\circ)}$	$A_7 = \frac{7 \cdot l^2}{4 \cdot \tan(25,71^\circ)}$	$A_7 \approx 3,63 \cdot l^2$
8	$\frac{l}{2 \cdot \tan(22,5^\circ)}$	$A_8 = \frac{8 \cdot l^2}{4 \cdot \tan(22,5^\circ)}$	$A_8 \approx 4,83 \cdot l^2$
9	$\frac{l}{2 \cdot \tan(20^\circ)}$	$A_9 = \frac{9 \cdot l^2}{4 \cdot \tan(20^\circ)}$	$A_9 \approx 6,18 \cdot l^2$
10	$\frac{l}{2 \cdot \tan(18^\circ)}$	$A_{10} = \frac{10 \cdot l^2}{4 \cdot \tan(18^\circ)}$	$A_{10} \approx 7,69 \cdot l^2$
12	$\frac{l}{2 \cdot \tan(15^\circ)}$	$A_{12} = \frac{12 \cdot l^2}{4 \cdot \tan(15^\circ)}$	$A_{12} \approx 11,20 \cdot l^2$

Observe que a relação também é válida para o caso de  $n = 6$ , ou seja, o exemplo anterior do Hexágono Regular, como pode ser observado a seguir.

$$\begin{aligned} A_6 &= \frac{6 \cdot l^2}{4 \cdot \tan(180^\circ/6)} \\ &= \frac{3 \cdot l^2}{2 \cdot \tan(30^\circ)} \\ &= \frac{3 \cdot l^2}{2 \cdot (\sqrt{3}/3)} \\ &= \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot l^2 \\ &= A_H. \end{aligned}$$

# Motivação

Com as ferramentas anteriores é possível calcularmos áreas de diversas regiões, basta dividirmos estas em formas conhecidas e somar as áreas individuais. No entanto, existem algumas figuras e formatos que dificultam o nosso cálculo.

Vamos denotar a distância de dois pontos  $P$  e  $Q$  quaisquer no plano por  $d(P, Q)$ . Agora, sejam  $C$  um ponto qualquer do plano e  $\Gamma$  o conjunto de pontos  $P$  tais que  $d(P, C) \leq r$ , onde  $r \in \mathbb{R}_+$ . A figura formada por todos os pontos  $P$  que satisfazem estas condições é definida como *círculo*  $\Gamma$  e a constante  $r$  de *raio do círculo*. Definimos por *circunferência*  $\Lambda$  de centro  $C$  o conjunto de pontos  $Q$ , tais que  $d(Q, C) = r$ , onde  $r$  é chamado de *raio* da circunferência. Observe que, neste caso,  $\Lambda \subset \Gamma$ .

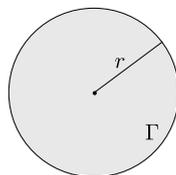


Figura 2.1: Círculo de Raio  $r$

## 2.1 Aproximações via Polígonos Regulares

Note que não podemos calcular a área ( $A_C$ ) desse tipo de figura utilizando os conhecimentos prévios. No entanto, podemos fazer aproximações a fim de enxergarmos algum padrão ou simplesmente uma estimativa. Uma alternativa é aproximarmos a área de  $\Gamma$  por meio de polígonos regulares, onde o centro de cada polígono coincide com o centro  $C$  do círculo.

Vamos começar pelo quadrado inscrito no círculo. Para calcularmos a área de qualquer quadrado, basta sabermos o tamanho  $l$  do seu lado. No entanto, observe que ao traçarmos a diagonal do quadrado, teremos o diâmetro do círculo, isto é, duas vezes o raio. De acordo com a figura, formamos dois triângulos retângulos congruentes de hipotenusa igual a  $2r$  e cateto medindo  $l$  cada um. Isto quer dizer que o ângulo formado entre o lado do quadrado e a sua diagonal deve medir a metade de um ângulo reto, ou seja,  $45^\circ$ . De acordo com a figura a seguir.

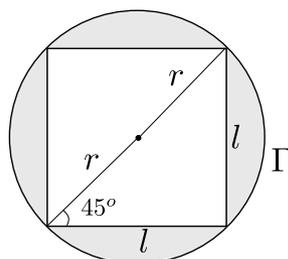


Figura 2.2: Aproximação por um Quadrado

Sabemos que a área do quadrado ( $A_Q$ ) é equivalente à soma das áreas dos triângulos congruentes ( $A_T$ ), isto é,  $A_Q = 2 \cdot A_T$ . Podemos determinar  $A_T$  através dos lados ( $2r$  e  $l$ ) e do ângulo entre eles ( $45^\circ$ ). Sendo assim,  $A_T = \frac{1}{2} \cdot l(2r)\text{sen}(45^\circ)$ . Logo  $A_T = \frac{lr\sqrt{2}}{2}$  e, daí,  $A_Q = 2 \cdot A_T = lr\sqrt{2}$ .

Por outro lado,  $A_Q = l^2 \Rightarrow l^2 = lr\sqrt{2}$ . Como  $l > 0$ , então  $l = r\sqrt{2}$ . Sendo assim,  $A_Q = l^2 = (r\sqrt{2})^2 = 2r^2$  u.a.

Assim, a área do círculo, aproximada pelo quadrado, fica determinada por  $A_C = A_Q = 2r^2$  u.a. Mas esta não é uma aproximação tão boa, pois é possível verificar que temos quatro regiões razoáveis que estão sendo desprezadas neste cálculo.

Vamos agora tentar aproximar a área do círculo através de um hexágono regular inscrito. Observe que o ângulo central demarcado mede  $\pi/3$  radianos, pois é o equivalente a  $1/6$  da volta ( $2\pi$  radianos). Como o triângulo realçado é isósceles, os ângulos restantes têm a mesma medida, ou seja,  $\pi/3$  cada um, já que a soma dos três ângulos internos deve ser igual a  $\pi$  radianos ( $180^\circ$ ). Desta maneira, temos que, neste caso,  $l = r$ , como já tínhamos visto quando calculamos a área ( $H_R$ ) do Hexágono Regular.

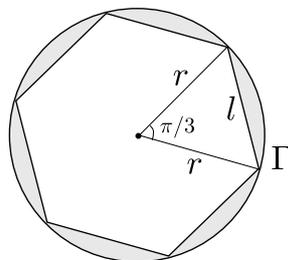


Figura 2.3: Aproximação por um Hexágono

Utilizando a fórmula obtida anteriormente para área de hexágonos regulares, temos:

$$A_C = A_H = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot r^2 \approx 2,598076 \cdot r^2 \text{ u.a.}$$

Portanto, a área do círculo por meio dessa aproximação é de  $2,598076 \cdot r^2$ .

Apesar da área ter aumentado, ou seja, ser mais fiel do que a anterior, ainda é imprecisa se levarmos em consideração a região que está sendo desprezada. Vejamos o que acontece quando fazemos a análise através de um dodecágono inscrito.

Temos um caso semelhante ao anterior, no entanto vamos utilizar um raciocínio mais geral. Observe que podemos repartir a figura em doze triângulos congruentes, todos isósceles, com dois lados de medida  $r$  e ângulo  $\pi/6$  entre estes lados.

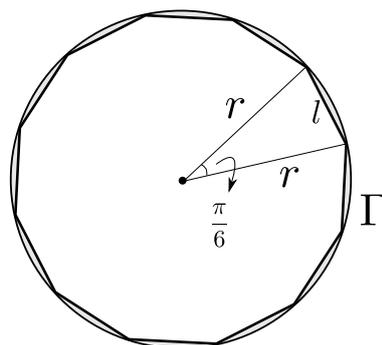


Figura 2.4: Aproximação por um Dodecágono

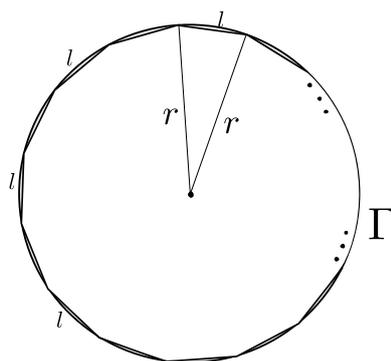
Sabemos que a área de um triângulo pode ser calculada pelo semiproduto de dois de seus lados com o seno do ângulo formado por estes. Sendo assim, temos que a área de cada triângulo será:

$$A_T = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{6} \right) = \frac{r^2}{4} \text{ u.a.}$$

Como a área do dodecágono é equivalente a 12 vezes a área deste triângulo destacado, temos que a aproximação desejada pode ser escrita por

$$A_C = 12 \cdot \frac{r^2}{4} = 3 \cdot r^2 \text{ u.a.}$$

Este último raciocínio para realizar o cálculo da aproximação pode ser feito com qualquer polígono regular. A quantidade de triângulo será determinada pelo número de lados do polígono, dois dos lados de cada triângulo serão sempre congruentes, medindo  $r$  e o ângulo entre estes lados vai medir  $\frac{2\pi}{n}$ . Sendo que o polígono inscrito se aproxima cada vez mais do círculo quanto maior o número de lados que este possui, ou seja, quanto maior tomamos o valor de  $n$ .

Figura 2.5: Aproximação por um Polígono Regular de  $n$  Lados

Sabemos que a área de cada triângulo menor será  $\frac{1}{2}r^2\text{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right)$  e que temos  $n$  triângulos. Sendo assim, a área da aproximação desejada, em função do número de lados é

$$A_C = \frac{n \cdot \text{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right)}{2} \cdot r^2 \text{ u.a.}$$

Podemos observar que quanto maior o número de lados, maior fica a área da aproximação. Mas será que este número cresce de forma desordenada? Existe algum valor para o qual esta sequência de áreas esteja se encaminhando? Vejamos abaixo alguns valores quando  $n$  cresce, ou seja, assume valores cada vez maiores.

<b>n</b>	$\left[ \frac{n \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right)}{2} \right] \cdot r^2$
10	$2.938926261462365645843529773195363842988 \cdot r^2$
100	$3.139525976465668803808911228281556656124 \cdot r^2$
1000	$3.141571982779475624867655078979889199906 \cdot r^2$
10000	$3.141592446881286116726267664260446369514 \cdot r^2$
100000	$3.141592651522708126850681617923104220866 \cdot r^2$
1000000	$3.141592653569122387342484305787156673326 \cdot r^2$
10000000	$3.141592653589586529951441388558595505900 \cdot r^2$
100000000	$3.141592653589791171377531363291899212022 \cdot r^2$
1000000000	$3.141592653589793217791792263079622808016 \cdot r^2$
10000000000	$3.141592653589793238255934872077504083031 \cdot r^2$
100000000000	$3.141592653589793238460576298167482896186 \cdot r^2$

É notório que a sequência de áreas acima se aproxima de um valor específico. Para determinarmos com exatidão, precisaremos de ferramentas mais avançadas. Entre elas está o conceito de Limite de Sequências que será apresentado no próximo capítulo.

# Noções de Limite

Com o intuito de simplificar e facilitar o entendimento sobre limites, iremos tratar deste assunto de forma detalhada. Começando pelo estudo de sequências e generalizando as concepções para o caso das funções reais.

## 3.1 Limite de Sequências

Apresentaremos algumas definições úteis para nosso estudo.

**Definição 3.1.** *Uma sequência de números reais é uma função  $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa a cada número natural  $n$  um número real  $x_n$ , chamado de  $n$ -ésimo termo da sequência. Denotaremos uma sequência por  $(x_n)$ .*

**Definição 3.2.** *Dizemos que uma sequência é limitada quando existe  $k > 0$  real, tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|x_n| \leq k$ .*

Podemos também dizer que uma sequência é convergente, ou converge para um número real  $L$ , quando para todo número real  $\varepsilon$  (epsilon),  $\varepsilon > 0$ , existe um certo  $n_0$  tal que  $|x_n - L| < \varepsilon$  para todo  $n \geq n_0$ . Em outras palavras, a sequência  $x_n$  está tão próxima de  $L$  quanto quisermos para todo  $n \geq n_0$ , isto é,  $x_n$  “tende” para  $L$ . Denotaremos esta convergência por  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$  (lê-se: limite de  $x_n$  quando  $n$  tende a mais infinito é igual a  $L$ ).

**Exemplo 3.1.** *Verifique se a sequência  $(x_n)$ , tal que  $x_n = \frac{1}{n}$ , é convergente e, em caso afirmativo, para qual valor esta se aproxima na medida que tomamos  $n$  cada vez maiores. Em outras palavras, qual é o limite de  $(x_n)$  quando  $n$  tende a mais infinito.*

**Solução.** Antes de solucionarmos o problema veremos o que acontece com esta sequência quando adotamos alguns valores para  $n$  de forma gradual.

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_n$	1	0,5	0,3	0,25	0,2	0,16	$\approx 0,143$	0,125	0,1	0,1

Vejam agora a disposição desses valores em formato de gráfico.

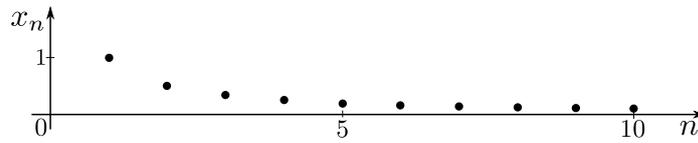


Figura 3.1: Gráfico da Sequência  $(x_n)$ , com  $x_n = \frac{1}{n}$

Dizer que a sequência  $(x_n)$  é convergente para um certo  $L$  equivale a dizer que para todo número real  $\varepsilon > 0$ , existe um  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que  $|x_n - L| < \varepsilon$  sempre que  $n \geq n_0$ . É notório que à medida que  $n$  “cresce” os valores de  $x_n$  ficam cada vez menores, porém permanecem maiores que zero. Isso nos leva a crer que a sequência  $(x_n)$  se aproxima de zero cada vez que tomamos um  $n$  suficientemente grande.

Sabemos que dado  $\varepsilon > 0$ , existe um  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_0 \geq \frac{2}{\varepsilon}$ . Daí,  $\frac{1}{n_0} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ .

Assim, sempre que tomamos  $n \geq n_0$  temos

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Note que por meio desta relação encontrada podemos afirmar que o limite da sequência  $(x_n)$  é igual a zero, isto é  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \right) = 0$ . ■

### Propriedades do Limite de Sequências

É natural pensar que o limite de uma sequência, caso exista, seja único. De fato, se  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$  e tomando  $a \neq L$ , então basta tomarmos  $\varepsilon$  tal que os intervalos  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  e  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  sejam disjuntos. Assim,  $|x_n - L| < \varepsilon \Rightarrow |x_n - a| > \varepsilon$  para todo  $a \neq L$ . Portanto, o limite é único.

Além da unicidade existem algumas análises sobre limite que são de extrema importância para o estudo que se desenvolve nestas páginas.

Sejam  $(x_n)$  e  $(y_n)$  sequências, tais que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$  e seja  $c \in \mathbb{R}$ . Então:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (c) = c$ .

*Demonstração.* De fato, seja  $(x_n)$  tal que  $x_n = c$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Logo, para qualquer  $\varepsilon > 0$  temos que  $|x_n - c| < \varepsilon$ , para todo valor de  $n \in \mathbb{N}$ . Portanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = c$ . □

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot x_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c \cdot a$ .

*Demonstração.* Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow a - \varepsilon/c < x_n < a + \varepsilon/c$  para todo  $n$  maior ou igual um certo  $n_0$ . Daí,  $c(a - \varepsilon/c) < c \cdot x_n < c(a + \varepsilon/c) \Rightarrow ca - \varepsilon < c \cdot x_n < ca + \varepsilon$ , ou seja,  $|cx_n - ca| < \varepsilon$  para todo  $n > n_0$ . Portanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot x_n) = c \cdot a$ . □

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$ .

*Demonstração.* Dado qualquer  $\varepsilon > 0$  existem  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tais que  $n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon/2$  e  $n > n_2 \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon/2$ . Seja  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ . Então,  $n > n_0 \Rightarrow |(x_n + y_n) - (a + b)| < \varepsilon$ . Portanto,  $\lim(x_n + y_n) = a + b$ . Raciocínio análogo para o caso  $x_n - y_n$ . □

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b.$$

*Demonstração.* Temos  $x_n y_n - ab = x_n(y_n - b) + (x_n - a)b$ . Sabemos que  $(x_n)$  é limitada e que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a) = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - b) = 0$ . Assim,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n - ab) = \lim_{n \rightarrow \infty} [x_n(y_n - b)] + \lim_{n \rightarrow \infty} [(x_n - a)b] = 0$ , ou seja,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = ab$ .  $\square$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{a}{b}, \text{ se } b \neq 0.$$

*Demonstração.* Veja que  $x_n/y_n - a/b = (x_n b - y_n a)/y_n b$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n b - y_n a) = ab - ba = 0$ , basta provar que  $1/y_n$  é limitada para concluir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n/y_n - a/b) = 0$ , ou seja,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n/y_n) = a/b$ . Ora, pondo  $c = b^2/2$ , temos  $0 < c < b^2$ , com  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n b = b^2$ . Segue que a partir de um  $n_0$  suficientemente grande  $c < y_n b$  para todo  $n \geq n_0$ , ou seja,  $1/y_n b < 1/c$ , provando que a sequência é limitada.  $\square$

Outro resultado de fundamental importância é o chamado *Teorema do Confronto*, conhecido também como *Teorema do Sanduíche*.

**Teorema 3.1.** *Sejam  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  e  $(z_n)$  tais que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$  e  $x_n \leq z_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . Então,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ .*

*Demonstração.* Dado arbitrariamente  $\varepsilon > 0$ , existem  $n_1$  e  $n_2$  tais que  $n > n_1 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$  e  $n > n_2 \Rightarrow a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$ . Sendo  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ , então  $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon$ , ou seja,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ .  $\square$

**Exemplo 3.2.** *Antes de prosseguirmos vamos fazer um exemplo do uso do teorema 3.1. Queremos saber qual o limite da sequência  $(z_n)$  onde  $z_n = \text{sen}(n)/n$ , quando  $n$  for suficientemente grande, isto é, tende para o infinito.*

**Solução.** Sabemos que

$$-1 \leq \text{sen}(n) \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{n} \leq \frac{\text{sen}(n)}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{-1}{n} \right] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\text{sen}(n)}{n} \right] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} \right].$$

Considerando  $(x_n)$  e  $(y_n)$  tais que  $x_n = -1/n$  e  $y_n = 1/n$ , temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ . Desta maneira,  $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \leq 0$ . Pelo Teorema do Confronto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}(n)}{n} = 0$ .  $\blacksquare$

**Exemplo 3.3.** *Outro caso interessante é o da sequência  $(z_n)$  onde  $z_n = n \cdot \text{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right)$ .*

**Solução.** Observe que para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos que  $\frac{2\pi}{n} - \left( \frac{2\pi}{n} \right)^2 \leq \text{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right) \leq \frac{2\pi}{n}$ . De fato, considere  $(c_n) = \frac{2\pi}{n} - \left( \frac{2\pi}{n} \right)^2$ ,  $(b_n) = \text{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right)$  e  $(a_n) = \frac{2\pi}{n}$ . Observe alguns desses valores nas tabelas seguintes para termos uma pequena noção do que está acontecendo quando  $n$  cresce. Para facilitar a escrita e simplificar a representação dos resultados, vamos considerar  $x = \frac{2\pi}{n}$ .

$n$	$x - x^2$
1	-33.19523229717784799841267723294559877286
2	-6.728011747499565380371847616596648251116
10	0.2335343546743843029391490366608545314269
100	0.05888401131136012132171907126563959722982
1000	0.006243706889575229042449948802559501163853
10000	0.006243706889575229042449948802559501163853
100000	0.00006282790523003542902580533386919010722349
1000000	0.000006283145828761982119490811428595006263789
10000000	$6.283181359337826041181839232762605817934 \cdot 10^{-7}$
100000000	$6.283184912395410433350942013179365773348 \cdot 10^{-8}$
1000000000	$6.283185267701168872567852291221041768889 \cdot 10^{-9}$
10000000000	$6.283185303231744716489543319025209368444 \cdot 10^{-10}$

$n$	$\text{sen}(x)$
1	0
2	0
10	0.5877852522924731291687059546390727685976
100	0.06279051952931337607617822456563113312248
1000	0.006283143965558951249735310157959778399811
10000	0.006283143965558951249735310157959778399811
100000	0.00006283185303045416253701363235846208441732
1000000	0.000006283185307138244774684968611574313346653
10000000	$6.283185307179173059902882777117191011801 \cdot 10^{-7}$
100000000	$6.283185307179582342755062726583798424045 \cdot 10^{-8}$
1000000000	$6.283185307179586435583584526159245616031 \cdot 10^{-9}$
10000000000	$6.283185307179586476511869744155008166062 \cdot 10^{-10}$

$n$	$x$
1	6.283185307179586476925286766559005768394
2	3.141592653589793238462643383279502884197
10	0.6283185307179586476925286766559005768394
100	0.06283185307179586476925286766559005768394
1000	0.006283185307179586476925286766559005768394
10000	0.006283185307179586476925286766559005768394
100000	0.00006283185307179586476925286766559005768394
1000000	0.000006283185307179586476925286766559005768394
10000000	$6.283185307179586476925286766559005768394 \cdot 10^{-7}$
100000000	$6.283185307179586476925286766559005768394 \cdot 10^{-8}$
1000000000	$6.283185307179586476925286766559005768394 \cdot 10^{-9}$
10000000000	$6.283185307179586476925286766559005768394 \cdot 10^{-10}$

Vejamos outra comparação dessas sequências, desta vez na forma de gráficos, representados na Figura 3.2. Vale ressaltar que para  $n$  suficientemente grande todas convergem para um mesmo valor, mantendo as desigualdades.

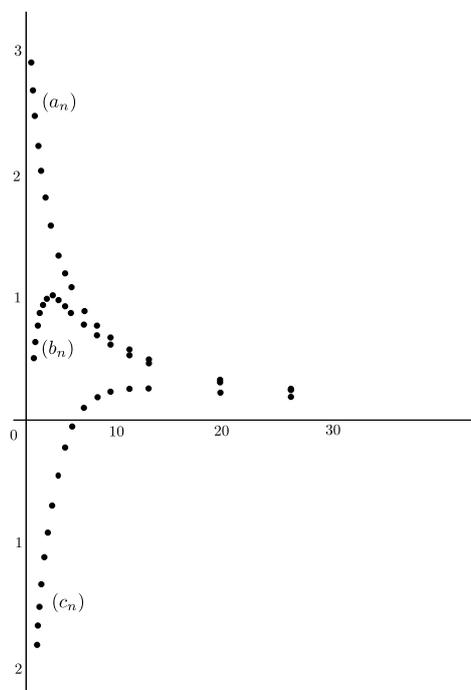


Figura 3.2: Gráfico das Sequências  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  e  $(c_n)$

Seguindo com o raciocínio,

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{n} - \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) \leq \frac{2\pi}{n} &\Rightarrow n \cdot \left[\frac{2\pi}{n} - \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2\right] \leq n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) \leq n \cdot \frac{2\pi}{n} \\ &\Rightarrow 2\pi - \frac{4\pi^2}{n} \leq n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Sejam agora as sequências  $(x_n)$  e  $(y_n)$  tais que  $x_n = 2\pi - \frac{4\pi^2}{n}$  e  $y_n = 2\pi$ . É simples verificar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 2\pi$ . Podemos então, utilizar o Teorema do Confronto e concluir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 2\pi$ . ■

**Exemplo 3.4.** Determine a área  $(A_C)$  do círculo  $\Gamma$  de raio  $r$ .

**Solução.** Finalmente podemos fazer algumas análises sobre as aproximações da área do círculo  $\Gamma$  de raio  $r$ , pois basta considerar a sequência  $(x_n)$ , onde  $x_n = A_C(n)$ . Lembremos que  $A_C(n)$  representa a área do círculo aproximada pelo polígono de  $n$  lados inscrito no mesmo.

Sabemos que estas áreas podem ser determinadas por

$$A_C(n) = \frac{n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2} \cdot r^2.$$

Desta maneira,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right)}{2} \cdot r^2 \right] \\ &= \frac{r^2}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right) \right] \\ &= \frac{r^2}{2} \cdot 2\pi \\ &= \pi r^2 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Observe que pelo exemplo anterior,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right) \right] = 2\pi$ . Portanto, podemos dizer que a área do círculo pode ser calculada apenas em função do comprimento de seu raio. No caso do círculo  $\Gamma$  com raio  $r$ , temos

$$A_C = \pi r^2 \text{ u.a.}$$

■

## 3.2 Funções Reais

O conceito de função é fundamental, talvez o mais importante na Matemática. Estudaremos as propriedades das funções utilizando a álgebra e métodos gráficos que incluem a marcação de pontos, translações, dentre outros. Esse estudo é fundamental para termos uma rápida ideia do gráfico. Contudo, com o Cálculo saberemos determinar precisamente onde os gráficos das funções crescem ou decrescem, as coordenadas exatas dos pontos de máximos e mínimos, coeficientes angulares de retas tangentes, dentre outros dados.

**Definição 3.3.** *Uma função de um conjunto  $A$  para um conjunto  $B$  é uma regra que associa um único elemento  $f(x) \in B$  a cada elemento  $x \in A$ .*

O conjunto  $A$  é chamado de *domínio* e indicamos por  $A = \operatorname{Dom}(f)$  e o conjunto  $B$ , de *contradomínio*. O conjunto imagem, indicado como  $\operatorname{Im}(f)$  é o conjunto dos elementos de  $B$  aos quais foram associados elementos de  $A$ , isto é:

$$\operatorname{Im}(f) = \{y \in B \mid y = f(x) \text{ para algum } x \in A\},$$

e o número  $y \in B$ ,  $y = f(x)$ , recebe o nome de valor da função  $f$  no ponto  $x$ .

**Observação 3.1.** *Dois funções são iguais, somente quando têm os mesmos domínios, contradomínios e regras de associações.*

**Definição 3.4.** *Sejam  $f$  e  $g$  duas funções, a função composta, indicada por  $f \circ g$ , é definida por:*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

no qual o domínio de  $f \circ g$  é o conjunto de todos os números  $x$  no domínio de  $g$ , tais que  $g(x)$  está no domínio de  $f$ .

**Definição 3.5.** Sendo  $f$  uma função, tem-se que o gráfico de  $f$  é constituído por todos os pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  para os quais  $(x, y)$  é um par ordenado em  $f$ . Logo, o gráfico de uma função é uma curva que constitui o conjunto de todos os pontos de  $\mathbb{R}^2$ , cujas coordenadas cartesianas são dadas pelos pares ordenados de números  $(x, y)$ . Já que a cada valor de  $x$  no domínio da função corresponde a um único valor  $y$ , isto é, nenhuma reta vertical pode interceptar o gráfico da função em mais de um ponto.

### 3.3 Limites de Funções

O objetivo agora é discutirmos a definição de limite. Inicialmente, apresenta-se a noção intuitiva de limite. A definição formal é apresentada propiciando a demonstração de propriedades que serão usadas no cálculo de limites.

#### Noção Intuitiva

Em termos gerais, a noção intuitiva de limite é observar o que ocorre com a função  $f(x)$ , quando  $x$  tende para um número real  $a$  ou quando  $x$  tende para mais ou menos infinito. Usaremos limites, por exemplo, para definir retas tangentes e gráficos de funções. Essa aplicação geométrica nos leva ao importante conceito de *derivada de uma função*, que investigaremos, com detalhes, no próximo capítulo.

Consideramos a função  $f$  definida pela equação:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 14x + 6}{x - 3} = \frac{(4x - 2)(x - 3)}{x - 3},$$

note que  $f$  está bem definida para todos os valores de  $x$ , menos para  $x = 3$ , isto é, 3 não pertence ao domínio de  $f$  e, conseqüentemente, não é possível determinarmos  $f(3)$  em seu contradomínio. Desse modo, se  $x \neq 3$ , o numerador e o denominador podem ser divididos por  $(x - 3)$  para obtermos:

$$f(x) = 4x - 2.$$

Agora, vamos determinar os valores da função  $f(x)$ , quando  $x$  estiver próximo de 3, mas não é igual a 3. Primeiro, vamos considerar valores de  $x$  cada vez mais próximos de 3, com  $x < 3$  e observaremos o comportamento da função  $f(x)$ , conforme o quadro abaixo:

$x$	2,6	2,7	2,8	2,9	2,99	2,999	2,9999	2,99999
$f(x) = 4x - 2$	8,4	8,8	9,2	9,6	9,96	9,996	9,9996	9,99996

Agora, vamos considerar que  $x$  aproxima-se cada vez mais de 3, com  $x > 3$  e observar o comportamento de  $f(x)$ :

$x$	3,4	3,3	3,2	3,1	3,01	3,001	3,0001	3,00001
$f(x) = 4x - 2$	11,6	11,2	10,8	10,4	10,04	10,004	10,0004	10,00004

Note que em ambos os quadros, enquanto  $x$  se aproxima cada vez mais de 3, a função  $f$  se aproxima cada vez mais de 10. Em outras palavras, é possível obter o valor de  $f$  tão próximo de 10 quando desejarmos, desde que tomemos  $x$  suficientemente próximo de 3. Como podemos identificar no gráfico de  $f$ , a seguir:

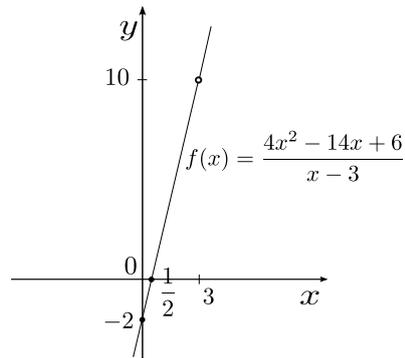


Figura 3.3: Gráfico de  $f(x) = \frac{4x^2 - 14x + 6}{x - 3}$

Nesse caso, para  $x$  cada vez mais próximo de 3, temos que  $f$  aproxima-se de 10, assim, escreve-se a seguinte expressão:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 14x + 6}{x - 3} = 10.$$

**Observação 3.2.** *Leia-se: O limite da função  $f(x)$ , quando  $x$  aproxima-se de 3, é igual a 10, ou ainda, o limite de  $f(x)$ , quando  $x$  tende a 3, é 10. Isso significa dizer que o valor da expressão  $\frac{4x^2 - 14x + 6}{x - 3}$  fica cada vez mais próximo de 10, a medida que os valores de  $x$  estão se aproximando de 3. Isto é, se  $x \rightarrow 3$ , então  $f(x) \rightarrow 10$ .*

Intuitivamente, dizemos que uma função  $f(x)$  tem limite  $L$ , quando  $x$  tende para  $a$ , se é possível tomar  $f(x)$  arbitrariamente próximo de  $L$ , desde que tomemos valores de  $x$ ,  $x \neq a$ , suficientemente próximos de  $a$ . Contudo, de uma maneira formal, temos a seguinte definição:

**Definição 3.6.** *Seja  $f(x)$  definida em um intervalo aberto  $I$ , contendo  $a$ , exceto, possivelmente, no próprio  $a$ . Dizemos que o **limite** de  $f(x)$ , quando  $x$  aproxima-se de  $a$ , é  $L$  e escrevemos:*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

se, para todo  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta$  (delta),  $\delta > 0$ , tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  sempre que  $0 < |x - a| < \delta$ .

Podemos visualizar essa definição geometricamente, como na figura a seguir:

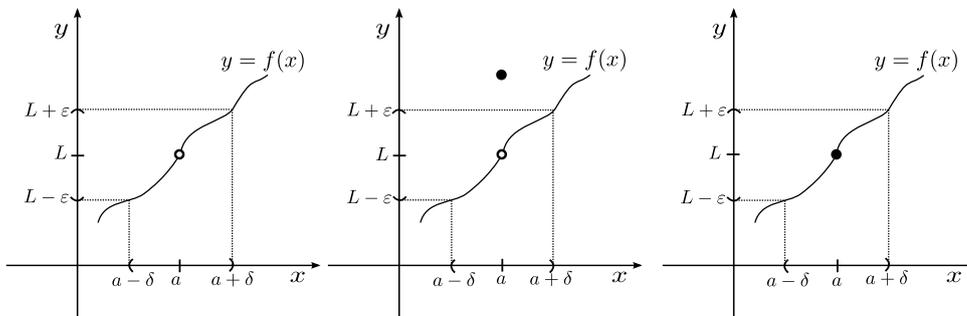


Figura 3.4: Limite no Ponto  $x = a$

**Exemplo 3.5.** Usando a definição de limite, mostre que  $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 2) = 10$ .

**Solução.** Pela definição, devemos mostrar que, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$ , tal que  $|(4x - 2) - 10| < \varepsilon$  sempre que  $0 < |x - 3| < \delta$ .

Note que as seguintes desigualdades são equivalentes:

$$|4x - 2 - 10| < \varepsilon \Leftrightarrow |4x - 12| < \varepsilon \Leftrightarrow 4|x - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

A última desigualdade nos sugere a escolha correta do  $\delta$ . Isto é, considerando  $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ , temos:

$$|(4x - 2) - 10| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - 3| < \delta.$$

Logo,  $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 2) = 10$ . ■

**Exemplo 3.6.** Usando a definição de limite, mostre que  $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$ .

**Solução.** Pela definição, devemos mostrar que, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$ , tal que  $|x^2 - 9| < \varepsilon$  sempre que  $0 < |x - 3| < \delta$ .

Note que as seguintes desigualdades são equivalentes:

$$|x^2 - 9| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 3||x + 3| < \varepsilon.$$

Agora, precisamos substituir  $|x + 3|$  por uma constante. Assim, vamos supor que  $0 < \delta \leq 1$ , desse modo, de  $0 < |x - 3| < \delta$ , seguem as seguintes desigualdades, que são todas equivalentes:

$$|x - 3| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 3 < 1 \Leftrightarrow 2 < x < 4 \Leftrightarrow 5 < x + 3 < 7.$$

Assim,  $|x + 3| < 7$ . Agora, escolhendo  $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{7}, 1\right)$ , temos que, se  $|x - 3| < \delta$ , então:

$$|x^2 - 9| = |x - 3||x + 3| < \delta \cdot 7 \leq \frac{\varepsilon}{7} \cdot 7 = \varepsilon.$$

Portanto,  $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$ . ■

Quando o limite existe, ele será único, como é apresentado e provado no resultado a seguir:

**Teorema 3.2.** Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$ , então  $L = M$ .

*Demonstração.* Considere  $\varepsilon > 0$  arbitrário e suficientemente pequeno. Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , existe  $\delta > 0$ , tal que:

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$

Por outro lado, como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$ , existe  $\bar{\delta} > 0$ , tal que:

$$|f(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \bar{\delta}.$$

Agora, considere  $\tilde{\delta} = \min\{\delta, \bar{\delta}\}$ . Então temos que,  $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$  e  $|f(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$  sempre que  $0 < |x - a| < \tilde{\delta}$ . Assim, consideremos  $x$  tal que  $0 < |x - a| < \tilde{\delta}$ . Então, podemos escrever:

$$|L - M| = |L - f(x) + f(x) - M| \leq |f(x) - L| + |f(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como  $\varepsilon$  é arbitrário, temos que  $|L - M| = 0$  e, portanto, temos a unicidade do limite, isto é,  $L = M$ .  $\square$

O próximo resultado traz as propriedades de limites que poderão ser usadas para determinar muitos limites sem usarmos  $\delta$  e  $\varepsilon$ .

**Teorema 3.3.** *Sejam as funções  $f$  e  $g$ , tais que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  existem, e seja  $k \in \mathbb{R}$ . Então:*

a)  $\lim_{x \rightarrow a} k = k;$

b)  $\lim_{x \rightarrow a} x = a;$

c)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x);$

d)  $\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x);$

e)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x);$

f)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)},$  deste que  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0;$

g)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^n;$  para qualquer inteiro positivo  $n;$

h)  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)},$  se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$  e  $n$  inteiro ou se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq 0$  e  $n$  é um inteiro positivo ímpar.

Para mostrar estes resultados basta utilizar a definição de limite para funções e técnicas semelhantes àquelas utilizadas na demonstração das propriedades equivalentes para seqüências, como podemos verificar em Lima-[7], 2013.

**Exemplo 3.7.** *Determine  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x}{x - 7}$ .*

**Solução.** Usando as propriedades de limites, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x}{x - 7} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x - 7)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} x}{\lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} -7} \\ &= \frac{2^2 + 2}{2 - 7} \\ &= -\frac{6}{5}. \end{aligned}$$

**Exemplo 3.8.** Determine  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ .

**Solução.** Note que neste caso, não podemos aplicar a propriedade do quociente, pois  $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0$ . Porém, se fatorarmos o numerador, temos

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} = x + 2 \text{ para } x \neq 2.$$

Como no processo de limite, os valores de  $x$  considerados são próximos de 2, mas diferentes de 2, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4. \end{aligned}$$

**Exemplo 3.9.** Determine  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$ .

**Solução.** Note que neste caso, não podemos aplicar a propriedade do quociente, pois  $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} - 1) = 0$ . Porém, para contornarmos este problema, faremos uma mudança de variáveis, isto é,  $x = t^6$  para  $t \geq 0$ . Note que quando  $x \rightarrow 1$ , temos que  $t^6 \rightarrow 1$  em especial também teremos que  $t \rightarrow 1$ . Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{t^6} - 1}{\sqrt{t^6} - 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - 1}{t^3 - 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t - 1)(t + 1)}{(t - 1)(t^2 + t + 1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t + 1}{t^2 + t + 1} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Neste momento, estudaremos o conceito de *limites laterais*, isto é, os limites que existem quando  $x$  se aproxima de um número  $a$  pela esquerda (por valores menores que  $a$ ) ou pela direita (por valores maiores que  $a$ ).

**Definição 3.7.** Seja  $f$  uma função definida em um intervalo aberto  $(a, c)$ . Dizemos que um número  $L$  é o limite à direita da função  $f$  quando  $x$  tende para  $a$  e escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L,$$

se para todo  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$ , tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  sempre que  $a < x < a + \delta$ .

Se  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ , dizemos que  $f(x)$  tende para  $L$  quando  $x$  tende para  $a$  pela direita e usaremos o símbolo  $x \rightarrow a^+$  para indicar que os valores são sempre maiores do que  $a$ .

De modo inteiramente análogo, definimos o limite à esquerda.

**Definição 3.8.** *Seja  $f$  uma função definida em um intervalo aberto  $(d, a)$ . Dizemos que um número  $M$  é o limite à esquerda da função  $f$  quando  $x$  tende para  $a$  e escrevemos:*

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = M,$$

se para todo  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$ , tal que  $|f(x) - M| < \varepsilon$  sempre que  $a - \delta < x < a$ .

Se  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = M$ , dizemos que  $f(x)$  tende para  $M$  quando  $x$  tende para  $a$  pela esquerda e usaremos o símbolo  $x \rightarrow a^-$  para indicar que os valores são sempre menores do que  $a$ .

**Exemplo 3.10.** *Dada a função  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ . Determine, se possível os limites  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ .*

**Solução.** Primeiramente, note que para  $x > 0$ , temos que  $f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$  e, por outro lado, se  $x < 0$ , temos  $f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{-(x)}{x} = -1$ . Assim, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1.$$

Logo, concluímos que os limites laterais existem, contudo,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ . ■

**Teorema 3.4.** *Se  $f$  é definida em um intervalo aberto contendo  $a$ , exceto, possivelmente, no ponto  $a$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  se, e somente se,  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ .*

*Demonstração.* Supomos, primeiramente, que  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ . Então, dado  $\varepsilon > 0$  arbitrário, existe  $\delta_0 > 0$ , tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  sempre que  $a - \delta_0 < x < a$  e existe  $\delta_1 > 0$ , tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  sempre que  $a < x < a + \delta_1$ .

Agora, considere  $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$ . Então,  $a - \delta_0 \leq a - \delta$  e  $a + \delta \leq a + \delta_1$ , e, portanto, se  $x \neq a$  e  $a - \delta < x < a + \delta$ , temos que  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . De modo equivalente,  $|f(x) - L| < \varepsilon$  sempre que  $0 < |x - a| < \delta$  e, desta forma,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .

Por outro lado, se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , então temos como uma consequência imediata que  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$  e, assim, concluindo a prova do teorema. □

**Exemplo 3.11.** *Dada a função  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ . Verifique se  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$  existe.*

**Solução.** Fazendo os limites laterais pela direita e pela esquerda, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1.$$

Logo, concluímos que os limites laterais existem, contudo,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ . Portanto, pelo teorema anterior concluímos que o  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$  não existe.

■

O próximo teorema trata de uma função  $f$  cujos valores estão limitados entre valores de duas funções  $g$  e  $h$ , respectivamente, que possuem o mesmo limite  $L$  no ponto  $a$ .

**Teorema 3.5. (Teorema do Confronto.)** *Suponha que  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  para qualquer  $x$  em um intervalo contendo  $a$ , exceto, possivelmente, em  $x = a$ . Suponha, também, que:*

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L.$$

Então,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon > 0$  arbitrário. Como  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ , existe  $\delta_1 > 0$ , tal que  $|g(x) - L| < \varepsilon$  sempre que  $0 < |x - a| < \delta_1$ . Por outro, como  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ , existe  $\delta_2 > 0$ , tal que  $|h(x) - L| < \varepsilon$  sempre que  $0 < |x - a| < \delta_2$ . Agora, considere  $\delta = \min[\delta_1, \delta_2]$ . Então, se  $0 < |x - a| < \delta$  temos que:

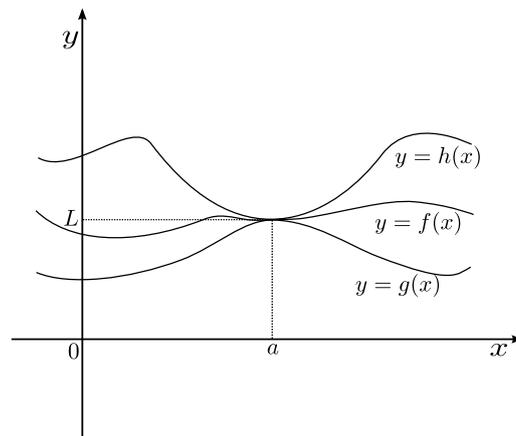


Figura 3.5: Gráfico do Teorema do Confronto

$$|g(x) - L| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |h(x) - L| < \varepsilon,$$

ou, de modo equivalente,

$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon \quad \text{e} \quad L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon.$$

Logo, pela hipótese, temos que, se  $0 < |x - a| < \delta$ , então:

$$L - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < L + \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon.$$

Portanto, se  $0 < |x - a| < \delta$ , temos que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  e, desse modo,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .

□

**Exemplo 3.12.** *Sabendo que:*

$$-x^{272} - x^2 + 3 \leq f(x) \leq x^{272} + x^2 + 3, \text{ para qualquer } x \neq 0,$$

determine o  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , por mais estranha ou desconhecida que seja  $f(x)$ .

**Solução.** Como temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-x^{272} - x^2 + 3) = 3 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x^{272} + x^2 + 3) = 3,$$

logo, pelo Teorema do Confronto temos que:

$$3 = \lim_{x \rightarrow 0} (-x^{272} - x^2 + 3) \leq \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} (x^{272} + x^2 + 3) = 3.$$

Portanto,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$ .

■

Vamos agora estudar o limite de  $\frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha}$  quando  $\alpha \rightarrow 0$ , em que  $\alpha$  é medido em radianos.

**Teorema 3.6.** *Seja  $\alpha$  em radianos. Então:*

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha} = 1. \quad (3.1)$$

*Demonstração.* Consideramos a circunferência no primeiro quadrante de raio 1, como apresentada na figura a seguir:

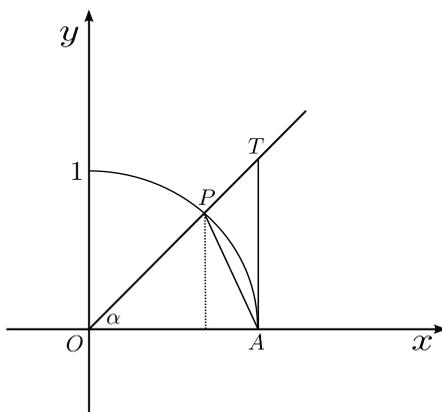


Figura 3.6: Limite Fundamental

Seja  $\alpha$  a medida em radianos do arco  $\widehat{OPA}$ . Vamos, primeiramente, abordar o caso em que a variação de  $\alpha$  está no intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$ . Observando a figura, temos as seguintes desigualdades:

$$\text{área } \triangle OAP < \text{área do setor } OAP < \text{área } \triangle OTA.$$

Agora, podemos expressar essas áreas em termos de  $\alpha$  do seguinte modo:

$$\text{área } \triangle OAP = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{2}(1)\text{sen}(\alpha);$$

(Assumindo que a área do círculo é  $\pi r^2$ .)

$$\text{área do setor } OAP = \frac{1}{2}r^2\alpha = \frac{1}{2}(1)^2\alpha = \frac{\alpha}{2};$$

$$\text{área } \triangle OTA = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{2}(1)\tan(\alpha) = \frac{1}{2}\tan(\alpha).$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\text{sen}(\alpha) < \frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}\tan(\alpha).$$

Multiplicando a última desigualdade por  $\frac{2}{\text{sen}(\alpha)}$ , já que  $\text{sen}(\alpha) > 0$  para  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , temos:

$$1 < \frac{\alpha}{\text{sen}(\alpha)} < \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

ou

$$1 > \frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha} > \cos(\alpha). \quad (3.2)$$

Contudo,  $\frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha}$  e  $\cos(\alpha)$  são funções pares. Logo,

$$\frac{\text{sen}(-\alpha)}{(-\alpha)} = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha}$$

e

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha).$$

Portanto, a desigualdade (3.2) vale para qualquer  $\alpha$ , tal que  $\alpha \neq 0$ . Agora, como  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \cos(\alpha) = 1$  e  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} 1 = 1$ , usando o teorema do confronto, segue que:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha} = 1.$$

□

**Exemplo 3.13.** Determine  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(4x)}{7x}$ .

**Solução.** Note que a equação dada em (3.1) não se aplica diretamente à este exemplo em particular, pois precisamos ter  $4x$  no denominador e não  $7x$ . Produzimos o  $4x$  multiplicando o numerador e denominador por  $\frac{4}{7}$ , assim, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(4x)}{7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{4}{7}\right)\text{sen}(4x)}{\left(\frac{4}{7}\right)7x} = \frac{4}{7} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(4x)}{4x}.$$

Agora, considerando  $\alpha = 4x$  e observando que quando  $x \rightarrow 0$  temos que  $\alpha \rightarrow 0$ , assim:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(4x)}{7x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{4}{7}\right) \text{sen}(4x)}{\left(\frac{4}{7}\right) 7x} \\ &= \frac{4}{7} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(4x)}{4x} \\ &= \frac{4}{7} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha} \\ &= \frac{4}{7}(1) = \frac{4}{7}.\end{aligned}$$

■

**Exemplo 3.14.** Determine  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}$ .

**Solução.** Usando a fórmula  $\cos(x) = 1 - 2\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$ , temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{2\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}.$$

Agora, considerando  $\alpha = \frac{x}{2}$  e observando que quando  $x \rightarrow 0$  temos que  $\alpha \rightarrow 0$ , tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{2\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = -\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha} \text{sen}(\alpha) = -(1) \cdot 0 = 0.$$

■

# Derivadas

Nesta seção, estudaremos a derivada e suas aplicações. Faremos uma abordagem sobre retas secantes e tangentes, além de calcularmos os limites dos coeficientes angulares das retas secantes para determinarmos as retas tangentes às curvas.

## Retas tangentes

Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , cujo o gráfico é dado a seguir:

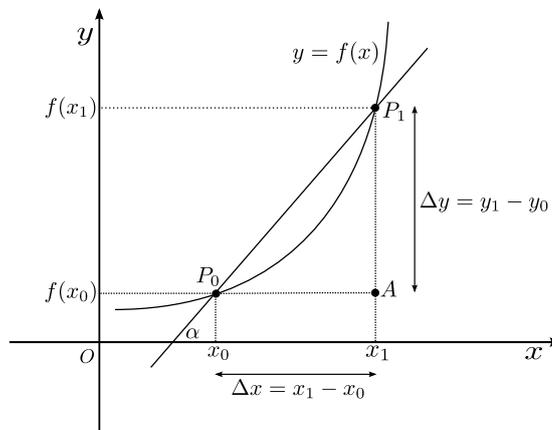


Figura 4.1: Reta Secante

Sejam  $P_0 = (x_0, y_0)$  e  $P_1 = (x_1, y_1)$  dois pontos distintos da curva  $y = f(x)$  e seja  $r$  a reta secante que passa pelos pontos  $P_0$  e  $P_1$ . Considerando o triângulo retângulo  $\Delta P_0P_1A$ , como na Figura 4.1, temos que a inclinação da reta secante  $r$ , também conhecido como coeficiente angular da reta  $r$ , é dado por:

$$\tan(\alpha) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

em que o símbolo matemático para a variação em  $x$ , chamado de incremento em  $x$ , que é denotado por  $\Delta x$  (leia-se delta  $x$ ), e  $\Delta x =$  valor final de  $x -$  valor inicial de  $x$  e de modo inteiramente análogo para  $\Delta y$  com a variação em  $y$ .

Agora, mantendo fixado o ponto  $P_0$  e movendo o ponto  $P_1$  sobre a curva em direção ao ponto  $P_0$ , desse modo, a inclinação da reta secante irá variar, assim, a medida que  $P_1$  vai se aproximando de  $P_0$ , a inclinação (ou coeficiente angular da reta secante) varia cada vez menos, tendendo para um valor limite constante, como podemos observar na figura a seguir.

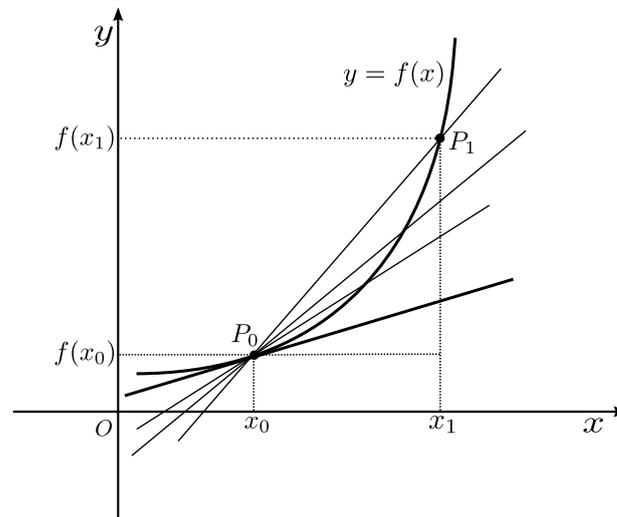


Figura 4.2: Interpretação Geométrica da Derivada

Esse valor limite é conhecido como *inclinação da reta tangente* ou *coeficiente angular da curva* no ponto  $P_0$ .

**Definição 4.1.** O coeficiente angular da curva  $y = f(x)$  em um ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$  é o número:

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

desde que o limite exista. E a *reta tangente* à curva  $y = f(x)$  em  $P_0$  é a reta que passa por  $P_0$  e tem esse coeficiente angular.

**Exemplo 4.1.** Verifique que a reta  $y = f(x) = mx + b$  é a própria reta tangente em qualquer ponto  $P_0 = (x_0, f(x_0)) = (x_0, mx_0 + b)$ .

**Solução.** Primeiramente, note que:

$$f(x_0) = mx_0 + b \quad \text{e} \quad f(x_0 + \Delta x) = m(x_0 + \Delta x) + b = mx_0 + m\Delta x + b,$$

com isso, calculamos o seguinte limite:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(mx_0 + m\Delta x + b) - (mx_0 + b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m\Delta x}{\Delta x} = m.$$

Agora, lembrando que a equação de uma reta que passa pelo ponto  $P_0$  e tem coeficiente angular dado por  $m$  tem a seguinte equação  $y - y_0 = m(x - x_0)$ . No nosso caso, temos que o ponto  $P_0 = (x_0, mx_0 + b)$  e o coeficiente angular é o próprio  $m$ , desse modo, temos que a equação da reta tangente ao gráfico de

$y = f(x) = mx + b$  no ponto  $P_0$  é a própria reta, como segue:

$$y = y_0 + m(x - x_0) = (mx_0 + b) + m(x - x_0) = mx + b.$$

■

**Exemplo 4.2.** Determine a equação da reta tangente à curva  $y = f(x) = x^2 + 1$  no ponto  $P_0 = (x_0, y_0) = (2, 5)$ .

**Solução.** Inicialmente, note que:

$$f(x_0) = x_0^2 + 1 \quad \text{e} \quad f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 + 1 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta^2 x + 1,$$

além disso, temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta^2 x + 1) - (x_0^2 + 1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta^2 x + 1 - x_0^2 - 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0; \end{aligned}$$

agora, pela definição de coeficiente angular e como temos que  $x_0 = 2$ , tem-se que:

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 2x_0 = 2(2) = 4.$$

Portanto, a equação da reta tangente no ponto  $P_0 = (2, 5)$  do gráfico de  $y = f(x) = x^2 + 1$  é dada por:

$$y = y_0 + m(x - x_0) = 5 + 4(x - 2) = 4x - 3.$$

■

Sabemos que o coeficiente angular de uma curva  $y = f(x)$  no ponto  $x = x_0$  é dado por:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Chamaremos esse limite, quando existir, de *derivada* de  $f$  no ponto e denotaremos por  $f'(x_0)$  (leia-se  $f$  linha de  $x$ , no ponto  $x_0$ ), a seguir, estudaremos a derivada como uma função derivada de  $f$ , considerando o limite em cada ponto do domínio de  $f$  como apresentada na definição a seguir.

**Definição 4.2.** A *derivada* de uma função  $f(x)$  em relação à variável  $x$  é a função  $f'(x)$  cujo valor em  $x$  é:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

desde que o limite exista.

**Observação 4.1.** Dizemos que uma função  $f$  é derivável quando existe a derivada em todos os pontos de seu domínio. Além disso, outras notações de derivadas podem ser usadas no lugar de  $y' = f'(x)$ , como

por exemplo:  $D_x f(x)$  (leia-se derivada de  $f(x)$  em relação a  $x$ ),  $\frac{dy}{dx}$  (leia-se derivada de  $y$  em relação a  $x$ ).

**Observação 4.2.** Como podemos ter que  $\Delta x = x_1 - x_0$ , então uma definição equivalente de derivada em relação à variável  $x$  no ponto  $x_0$  é dada por:

$$f'(x_0) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Além disso, se agora escrevermos  $h = x_1 - x_0$ , então

$$x_1 \rightarrow x_0 \text{ é equivalente a } h \rightarrow 0,$$

logo, uma definição equivalente de derivada em relação à variável  $x$  no ponto  $x_0$  é a seguinte:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

**Exemplo 4.3.** Dada a função  $f(x) = 2x^2 + 7x - 3$ , determine  $f'(5)$  usando a definição de derivada.

**Solução.** Usando a definição de derivada no ponto  $x = 5$ , temos que:

$$\begin{aligned} f'(5) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(5 + \Delta x) - f(5)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(5 + \Delta x)^2 + 7(5 + \Delta x) - 3 - (2 \cdot 5^2 + 7 \cdot 5 - 3)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(25 + 10\Delta x + \Delta^2 x) + 35 + 7\Delta x - 3 - 50 - 35 + 3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{20\Delta x + 2\Delta^2 x + 7\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(20 + 2\Delta x + 7)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (20 + 2\Delta x + 7) \\ &= 27. \end{aligned}$$

■

**Exemplo 4.4.** Dada a função  $\frac{2x}{3x + 7}$ , determine  $f'(x)$  usando a definição de derivada.

**Solução.** Pela definição de derivada, temos que:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{2(x + \Delta x)}{3(x + \Delta x) + 7} - \frac{2x}{3x + 7}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x)(3x + 7) - 2x[3(x + \Delta x) + 7]}{[3(x + \Delta x) + 7](3x + 7) \cdot \Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6x^2 + 14x + 6x\Delta x + 14\Delta x - 6x^2 - 6x\Delta x - 14x}{(3x + 3\Delta x + 7)(3x + 7) \cdot \Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{14\Delta x}{(3x + 3\Delta x + 7)(3x + 7) \cdot \Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{14}{(3x + 3\Delta x + 7)(3x + 7)} \\
&= \frac{14}{(3x + 3 \cdot 0 + 7)(3x + 7)} \\
&= \frac{14}{(3x + 7)^2}.
\end{aligned}$$

■

Veremos agora a definição de derivadas laterais:

**Definição 4.3.** Seja  $y = f(x)$  uma função definida em  $a$ , então a **derivada à direita** de  $f$  no ponto  $a$ , denotada por  $f'_+(a)$  é definida por:

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

desde que o limite exista.

**Definição 4.4.** Seja  $y = f(x)$  uma função definida em  $b$ , então a **derivada à esquerda** de  $f$  no ponto  $b$ , denotada por  $f'_-(b)$  é definida por:

$$f'_-(b) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(b + h) - f(b)}{h} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b},$$

desde que o limite exista.

**Observação 4.3.** Uma função  $y = f(x)$  será derivável em um intervalo aberto  $(a, b)$  se tiver derivada em cada ponto do intervalo e  $y = f(x)$  será derivável no intervalo fechado  $[a, b]$  se for derivável no interior  $(a, b)$  e se a derivada à direita em  $a$  e a derivada à esquerda em  $b$  existir.

**Observação 4.4.** Uma função  $y = f(x)$  é derivável em um ponto, quando as derivadas à direita e à esquerda nesse ponto existirem e forem iguais, além disso, quando as derivadas laterais existirem e forem diferentes em um ponto  $c$ , dizemos que neste ponto a função não é derivável.

**Teorema 4.1.** Se  $f$  é uma função derivável num certo ponto  $x_0$ , pertencente ao seu domínio, então  $f$  é contínua em  $x_0$ .

*Demonstração.* Mostrar que  $f$  é contínua no ponto  $x_0$  é o equivalente a provar que  $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ .

De fato, se  $f$  é derivável no ponto  $x_0$ , então existe  $f'(x_0)$ , correspondente ao limite a seguir:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Desse modo, denotando  $f'(x_0) = k$ , tal que  $k \in \mathbb{R}$ , temos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x_0 + h) - f(x_0)]}{h} \cdot h \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x_0 + h) - f(x_0)]}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h \\ &= f'(x_0) \cdot 0 \\ &= k \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0).$$

□

**Exemplo 4.5.** Mostre que a função  $y = f(x) = |x|$  não é derivável em  $x = 0$ .

**Solução.** Vamos calcular as derivadas à esquerda e à direita de  $x = 0$ . Note que:

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} \quad |h| = -h \text{ quando } h < 0 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} -1 = -1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} \quad |h| = h \text{ quando } h > 0 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = 1. \end{aligned}$$

Logo, a função  $y = f(x) = |x|$  não é derivável em  $x = 0$ , pois neste ponto as derivadas laterais são diferentes. ■

Nesta seção, apresentaremos algumas regras de derivação que serão úteis para determinar as derivadas das funções sem usarmos a definição.

**Proposição 4.1.** Seja  $k$  uma constante e  $f(x) = k$  para todo  $x$ , então  $f'(x) = 0$ .

*Demonstração.* Pela definição de derivada, temos que:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

**Proposição 4.2.** *Seja  $n$  um número inteiro positivo e  $f(x) = x^n$ , então  $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ .*

*Demonstração.* Pela definição de derivada, temos que:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.
\end{aligned}$$

Agora, usando o Binômio de Newton para expandirmos  $(x+h)^n$ , temos que:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n\right) - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right) \\
&= n \cdot x^{n-1}.
\end{aligned}$$

□

**Proposição 4.3.** *Seja  $f$  uma função derivável em  $x$  e  $c$  uma constante, então:*

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = c \frac{df(x)}{dx} = cf'(x).$$

*Demonstração.* Por hipótese, temos que:

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

assim,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(cf(x)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} c \left( \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \\ &= c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= c \frac{df(x)}{dx} = cf'(x).\end{aligned}$$

□

**Proposição 4.4.** *Sejam  $f$  e  $g$  duas funções deriváveis em  $x$ , então:*

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx} = f'(x) + g'(x).$$

*Demonstração.* Por hipótese, temos que:

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{e} \quad \frac{dg(x)}{dx} = g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h},$$

assim, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x).\end{aligned}$$

□

**Proposição 4.5.** *Sejam  $f$  e  $g$  duas funções deriváveis em  $x$ , então:*

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = \frac{df(x)}{dx} \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{dg(x)}{dx} = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

*Demonstração.* Por hipótese, temos que:

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

e

$$\frac{dg(x)}{dx} = g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Com essa hipótese e observando que como a função  $f$  é derivável em  $x$ , então, pelo teorema 4.1, temos que  $f$  é contínua, isto é,  $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$ , além disso, somaremos e subtrairemos no numerador a expressão  $f(x+h) \cdot g(x)$ , logo:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)[g(x+h) - g(x)] + g(x)[f(x+h) - f(x)]}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ f(x+h) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] + \lim_{h \rightarrow 0} \left[ g(x) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x) \\
&= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).
\end{aligned}$$

□

**Proposição 4.6.** *Sejam  $f$  e  $g$  duas funções deriváveis em  $x$ , em que  $g(x) \neq 0$ , então:*

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\frac{df(x)}{dx} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{dg(x)}{dx}}{[g(x)]^2} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

*Demonstração.* Por hipótese, temos que:

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

e

$$\frac{dg(x)}{dx} = g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h},$$

com essa hipótese e observando que como  $g$  é derivável em  $x$ , então, pelo teorema 4.1, temos que  $g$  é contínua, isto é,  $\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$ , além disso, somaremos e subtrairemos no numerador a expressão  $f(x) \cdot g(x)$ , logo:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)} \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)} \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x+h) \cdot g(x)} \right] \\
&= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x) - \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x)} \\
&= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.
\end{aligned}$$

□

## 4.1 Funções Trigonômétricas

Na sequência mostraremos como calcular as derivadas das seis funções trigonométricas.

### Derivada da Função Seno

Consideramos a função  $f(x) = \text{sen}(x)$ , com  $x$  medido em radianos, além da identidade da soma para a função seno, dada por:  $\text{sen}(x+h) = \text{sen}(x)\cos(h) + \cos(x)\text{sen}(h)$ , logo, temos que a derivada da função seno é:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\text{sen}(x)\cos(h) + \cos(x)\text{sen}(h)) - \text{sen}(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)(\cos(h) - 1) + \cos(x)\text{sen}(h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \text{sen}(x) \cdot \frac{\cos(h) - 1}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \left( \cos(x) \cdot \frac{\text{sen}(h)}{h} \right) \\
 &= \text{sen}(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} \\
 &= \text{sen}(x) \cdot 0 + \cos(x) \cdot 1 \\
 &= \cos(x).
 \end{aligned}$$

### Derivada da Função Cosseno

Consideramos a função  $f(x) = \cos(x)$ , com  $x$  medido em radianos, além da identidade da soma para a função cosseno, dada por:

$$\cos(x+h) = \cos(x)\cos(h) - \text{sen}(x)\text{sen}(h),$$

logo, temos que a derivada da função cosseno é:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos(x)\cos(h) - \text{sen}(x)\text{sen}(h)) - \cos(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)(\cos(h) - 1) - \text{sen}(x)\text{sen}(h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x) \cdot \frac{\cos(h) - 1}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \text{sen}(x) \cdot \frac{\text{sen}(h)}{h} \\
 &= \cos(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} - \text{sen}(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} \\
 &= \cos(x) \cdot 0 - \text{sen}(x) \cdot 1 \\
 &= -\text{sen}(x).
 \end{aligned}$$

Agora, note que como as funções  $\text{sen}(x)$  e  $\text{cos}(x)$  são funções deriváveis em  $x$ , logo, as funções:

$$\tan(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)} \quad \text{cotg}(x) = \frac{\text{cos}(x)}{\text{sen}(x)}$$

e

$$\sec(x) = \frac{1}{\text{cos}(x)} \quad \text{cosec}(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)},$$

serão deriváveis para qualquer valor de  $x$ , para os quais elas são definidas e suas derivadas são calculadas pela regra do quociente.

Consideramos duas funções deriváveis  $f$  e  $g$ , nas quais denotaremos  $y = f(u)$  e  $u = g(x)$ , tal que para todo  $x$ ,  $g(x)$  está no domínio de  $f$ , poderemos escrever  $y = f(u) = f(g(x))$ , isto é, a função composta  $(f \circ g)(x)$ .

**Exemplo 4.6.** *Determine a derivada de  $y = 16x^4 - 8x^2 + 1$ .*

**Solução.** Note que a derivada da função dada é igual a  $64x^3 - 16x$ , pois trata-se de uma função polinomial (caso já visto anteriormente). Agora resolveremos tal problema, utilizando outra ferramenta: a derivada de funções compostas.

Podemos dizer que  $y = 16x^4 - 8x^2 + 1 = (4x^2 - 1)^2$ , isto é, uma função composta de  $y = u^2$  sendo  $u = 4x^2 - 1$ . Calculando as derivadas, observamos que:

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot (8x) = 2(4x^2 - 1) \cdot 8x = 64x^3 - 16x.$$

Por outro lado, calculando a derivada a partir da fórmula expandida, tem-se:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(16x^4 - 8x^2 + 1) = 64x^3 - 16x.$$

Verificando que:

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

■

A seguir, apresentamos a regra da cadeia que é uma das mais importantes relações e amplamente utilizada na resolução de problemas.

**Teorema 4.2. (Regra da Cadeia)** *Seja  $h(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$ , tais que  $f$  é derivável no ponto  $g(x_0)$  e  $g$  derivável em  $x_0$ , então a função composta  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  é derivável em  $x_0$  e*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

*Em outra notação, se  $y = f(u)$  e  $u = g(x)$ , então:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

*em que  $\frac{dy}{du}$  é calculada em  $u = g(x)$ .*

*Demonstração.* Vamos mostrar que a derivada existe e que a igualdade é verdadeira simultaneamente. Para isso, utilizaremos a definição de derivada a partir do limite.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}.$$

Sendo assim, temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0}.$$

Podemos tomar esta última expressão, multiplicá-la e dividi-la por  $g(x) - g(x_0)$ , se  $g(x) \neq g(x_0)$ , com  $x \rightarrow x_0$ .

Daí,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0). \end{aligned}$$

Observe que só podemos transformar o limite do produto em produto dos limites pois cada um deles existe, por hipótese, e seus valores são determinados. Além disso, a diferenciabilidade das funções nos garantem as suas continuidades pelo teorema 4.1, ou seja,  $g(x)$  é contínua em torno de  $x_0$  e  $f(x)$  também o é, na vizinhança de  $f(g(x_0))$ .

A princípio essa relação só seria válida se  $g(x) \neq g(x_0)$ , toda vez que  $x \rightarrow x_0$ , mas veremos agora que vale também nas demais situações.

Seja  $g(x) = g(x_0)$  para algum  $x$  ou mesmo para todo  $x$  arbitrariamente próximo de  $x_0$ . Neste caso temos que  $g'(x_0) = 0$ , pois

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0.$$

Alem disso, se  $g(x) = g(x_0)$  para valores de  $x$  arbitrariamente próximos de  $x_0$ , então  $f(g(x)) = f(g(x_0))$ , ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = 0$$

Logo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = 0 = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Portanto, a igualdade é válida sempre que  $x \rightarrow x_0$ . □

**Exemplo 4.7.** Determine a derivada de  $y = \text{sen}(3x^2 + 1)$ .

**Solução.** Note que  $y = \text{sen}(3x^2 + 1)$  pode ser escrita como uma função composta, onde  $y = \text{sen}(u)$  e  $u = 3x^2 + 1$ . Calculando as derivadas temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos(u) \cdot (6x) = \cos(3x^2 + 1) \cdot (6x).$$

■

**Exemplo 4.8.** Determine a derivada de  $y = (x^{32} + 2x^{11} + 3x^7)^{2015}$ .

**Solução.** Note que  $y = (x^{32} + 2x^{11} + 3x^7)^{2015}$  pode ser escrita como uma função composta, onde  $y = u^{2015}$  e  $u = x^{32} + 2x^{11} + 3x^7$ . Calculando as derivadas temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2015(u)^{2014} \cdot (32x^{31} + 22x^{10} + 21x^6) = 2015(x^{32} + 2x^{11} + 3x^7)^{2014} \cdot (32x^{31} + 22x^{10} + 21x^6).$$

■

# Integração

Com o uso da geometria possuímos recursos para determinarmos fórmulas para o cálculo de áreas de triângulos, quadrados, dentre outros, além de fórmulas para volumes de esferas, cones, dentre outras figuras geométricas. Contudo, como determinarmos a área ou volume de outras formas mais gerais? Esta pergunta será respondida com o uso da integral. Além dessa aplicação, o conceito de integração aparece em muitas outras aplicações, como na economia, engenharias, probabilidade e estatística. A seguir apresentaremos tal conceito com certo rigor, no entanto suas aplicações e consequências podem ser entendidas apenas com uma leitura breve dos resultados a seguir com um destaque especial para o *Teorema Fundamento do Cálculo*.

Demonstraremos alguns resultados aplicados no conjunto dos números reais, afim de formalizarmos os conceitos e propriedades subsequentes.

Dada uma função limitada  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , lembremos que  $\sup f = \sup f(X) = \sup\{f(x); x \in X\}$  e  $\inf f = \inf f(X) = \inf\{f(x); x \in X\}$ , onde  $\sup$  e  $\inf$  representam os valores supremo e ínfimo do conjunto acima determinado.

Vamos considerar, deste ponto em diante, apenas conjunto não vazios, com o intuito de fazermos algumas considerações importantes.

**Lema 5.1.** *Sejam  $A, B \subset \mathbb{R}$  tais que para todo  $x \in A$  e todo  $y \in B$  se tenha  $x \leq y$ . Então  $\sup A \leq \inf B$ . A fim de ser  $\sup A = \inf B$  é necessário e suficiente que, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existam  $x \in A$  e  $y \in B$  com  $y - x < \varepsilon$ .*

*Demonstração.* Como  $x \leq y$  para todo  $x \in A$  e todo  $y \in B$ , então  $\sup A \leq y$  para todo  $y \in B$ , pois  $\sup A \in A$ . Analogamente,  $x \leq \inf B$  para todo  $x \in A$ , pois  $\inf B \in B$ . Logo  $\sup A \leq \inf B$ . Se valer a desigualdade estrita  $\sup A < \inf B$  então  $\varepsilon = \inf B - \sup A > 0$  e  $y - x \geq \varepsilon$  para quaisquer  $x \in A$  e  $y \in B$ . Reciprocamente, se  $\sup A = \inf B$  então, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existem  $x \in A$  e  $y \in B$  tais que  $\sup A - \varepsilon/2 < x \leq \sup A = \inf B \leq y < \inf B + \varepsilon/2$ . Segue que  $y - x < \varepsilon$ .  $\square$

**Lema 5.2.** *Sejam  $A, B \subset \mathbb{R}$  conjuntos limitados e  $c \in \mathbb{R}$ . São também limitados os conjuntos  $A + B = \{x + y; x \in A, y \in B\}$  e  $c \cdot A = \{cx; x \in A\}$ . Além disso, tem-se  $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ ,  $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$  e  $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$ , caso  $c \geq 0$ . Se  $c < 0$ , então  $\sup(c \cdot A) = c \cdot \inf A$  e  $\inf(c \cdot A) = c \cdot \sup A$ .*

*Demonstração.* Pondo  $a = \sup A$  e  $b = \sup B$ , para todo  $x \in A$  e  $y \in B$  tem-se que  $x \leq a$  e  $y \leq b$ , logo  $x + y \leq a + b$ . Além disso, dado  $\varepsilon > 0$ , existem  $x \in A$  e  $y \in B$  tais que  $a - \varepsilon/2 < x$  e  $b - \varepsilon/2 < y$ , donde  $a + b - \varepsilon < x + y$ . Isso mostra que  $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ . A igualdade  $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$  é óbvia se  $c = 0$ . Se  $c > 0$ , dado qualquer  $x \in A$  tem-se  $x \leq a$ , logo  $cx \leq ca$ . Além disso, dado qualquer número  $d$  menor do que  $ca$ , temos  $d/c < a$ , logo existe  $x \in A$  tal que  $d/c < x$ . Segue que  $d < cx$ . Assim,  $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$ . Os casos restantes enunciados são provados de modo análogo.  $\square$

**Corolário 5.1.** *Sejam  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  funções limitadas. Para todo  $c \in \mathbb{R}$  são limitadas as funções  $f + g$  e  $cf : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Tem-se além disso,  $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$ ,  $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$ ,  $\sup(cf) = c \cdot \sup f$  e  $\inf(cf) = c \cdot \inf f$ , quando  $c \geq 0$ . Caso  $c < 0$ , tem-se  $\sup(cf) = c \cdot \inf f$  e  $\inf(cf) = c \cdot \sup f$ .*

*Demonstração.* Com efeito, sejam  $A = f(X)$ ,  $B = g(X)$ ,  $C = (f + g)(X) = \{f(x) + g(x); x \in X\}$ . Evidentemente  $C \subset A + B$ , logo  $\sup(f + g) \leq \sup(A + B) = \sup A + \sup B = \sup f + \sup g$ . Além disso,  $\sup(cf) = \sup\{c \cdot f(x); x \in X\} = \sup(cA) = c \cdot \sup A = c \cdot \sup f$ . Os demais casos enunciados no corolário se provam de modo análogo.  $\square$

**Lema 5.3.** *Dada  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  limitada, sejam  $m = \inf f$ ,  $M = \sup f$  e  $\omega = M - m$ . Então  $\omega = \sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in X\}$ .*

*Demonstração.* Dados  $x, y \in X$  arbitrários, para fixar ideias seja,  $f(x) \geq f(y)$ . Então  $m \leq f(y) \leq f(x) \leq M$ , donde  $|f(x) - f(y)| \leq M - m = \omega$ . Por outro lado, para todo  $\varepsilon > 0$  dado podemos achar  $x, y \in X$  tais que  $f(x) > M - \varepsilon/2$  e  $f(y) < m + \varepsilon/2$ . Então

$$|f(x) - f(y)| \geq f(x) - f(y) > M - m - \varepsilon = \omega - \varepsilon$$

Portanto,  $\omega = \sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in X\}$ .  $\square$

**Lema 5.4.** *Sejam  $A' \subset A$  e  $B' \subset B$  conjuntos limitados de números reais. Se para cada  $a \in A$  e cada  $b \in B$ , existem  $a' \in A'$  e  $b' \in B'$  tais que  $a \leq a'$  e  $b' \leq b$ , então  $\sup A' = \sup A$  e  $\inf B' = \inf B$ .*

*Demonstração.* É notório que  $a' \leq \sup A$  para todo  $a' \in A'$ , ou seja,  $\sup A' \leq \sup A$ . Além disso, para todo  $c < \sup A$ , com  $c \in A$ , existem  $a \in A$  e  $a' \in A'$  tais que  $c < a \leq a'$ . Logo, se  $c \in A'$ , então  $c \neq \sup A'$ , já que existe pelo menos um elemento  $a' \in A'$ , com  $a' \geq c$ . Portanto temos apenas uma possibilidade,  $\sup A' = \sup A$ . Analogamente, temos o resultado para  $\inf B' = \inf B$ .  $\square$

## 5.1 Integral de Riemann

**Definição 5.1.** *Um partição do intervalo  $[a, b]$  é um subconjunto finito de pontos  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \subset [a, b]$  tal que  $a \in P$  e  $b \in P$ . A notação será usada de modo que  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ . O intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$  será chamado de  $i$ -ésimo intervalo da partição  $P$ . Evidentemente  $\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = b - a$ .*

Sejam  $P$  e  $Q$  partições do intervalo  $[a, b]$ . Diz-se que  $Q$  refina  $P$  quando  $P \subset Q$ . a maneira mais simples de refinar uma partição é acrescentar-lhe um único ponto.

Dada uma função limitada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , usaremos as notações

$$m = \inf\{f(x); x \in [a, b]\} \text{ e } M = \sup\{f(x); x \in [a, b]\}.$$

Em particular, temos  $m \leq f(x) \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$ . Se  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  é uma partição de  $[a, b]$ , as notações  $m_i = \inf\{f(x); t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$ ,  $M_i = \sup\{f(x); t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$  e  $\omega_i = M_i - m_i$  indicarão o ínfimo, o supremo e a *oscilação* de  $f$  no  $i$ -ésimo intervalo de  $P$ . Quando  $f$  é contínua,  $m_i$  e  $M_i$  são valores efetivamente assumidos por  $f$  em  $[t_{i-1}, t_i]$ . Em particular, neste caso existem  $x_i, y_i \in [t_{i-1}, t_i]$  tais que  $\omega_i = |f(y_i) - f(x_i)|$ .

A *soma inferior* de  $f$  relativamente à partição  $P$  é o número

$$s(f; P) = m_1(t_1 - t_0) + \dots + m_n(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}).$$

A *soma superior* de  $f$  relativamente à partição  $P$  é o número

$$S(f; P) = M_1(t_1 - t_0) + \dots + M_n(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Evidentemente,  $m(b-a) \leq s(f; P) \leq S(f; P) \leq M(b-a)$  seja qual for a partição  $P$ . Além disso,  $S(f; P) - s(f; P) = \sum_{i=1}^n \omega_i(t_i - t_{i-1})$ .

Quando  $f$  estiver clara no contexto, pode-se escrever simplesmente  $s(P)$  e  $S(P)$  em vez de  $s(f; P)$  e  $S(f; P)$ , respectivamente.

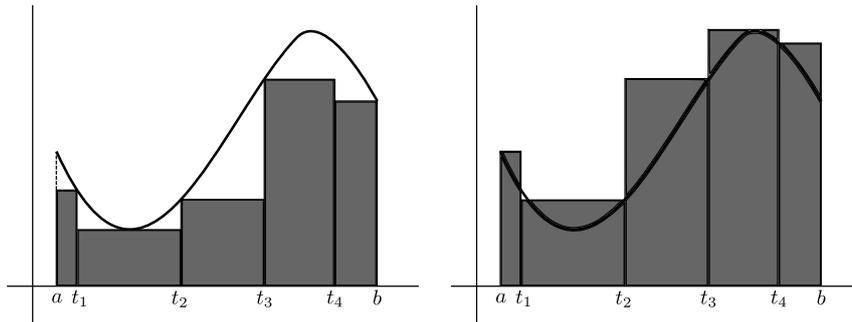


Figura 5.1: Soma Inferior e Soma Superior

No caso em que  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in [a, b]$ , os números  $s(f; P)$  e  $S(f; P)$  são valores aproximados, respectivamente por falta e por excesso, da área da região limitada pelo gráfico de  $f$ , pelo intervalo  $[a, b]$  do eixo das abscissas e pelas verticais levantadas nos pontos  $a$  e  $b$  desse eixo. Quando  $f(x) \leq 0$  para todo  $x \in [a, b]$ , essas somas são valores aproximados de tal área, com sinal trocado.

A *integral inferior* e a *integral superior* da função limitada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são definidas, respectivamente, por

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_P s(f; P), \quad \int_a^b f(x) dx = \inf_P S(f; P),$$

o *sup* e *inf* sendo tomados relativamente a todas as partições  $P$  do intervalo  $[a, b]$ .

**Teorema 5.1.** *Quando se refina uma partição, a soma inferior não diminui e a soma superior não aumenta. Ou seja:  $P \subset Q \Rightarrow s(f; P) \leq s(f; Q)$  e  $S(f; Q) \leq S(f; P)$ .*

*Demonstração.* Suponhamos inicialmente que a partição  $Q = P \cup \{r\}$  resulte de  $P$  pelo acréscimo de um ponto  $r$ , digamos com  $t_{j-1} < r < t_j$ . Sejam  $m'$  e  $m''$  respectivamente os ínfimos de  $f$  nos intervalos  $[t_{j-1}, r]$  e  $[r, t_j]$ . Evidentemente,  $m_j \leq m'$ ,  $m_j \leq m''$  e  $t_j - t_{j-1} = (t_j - r) + (r - t_{j-1})$ . Portanto

$$\begin{aligned} s(f; Q) - s(f; P) &= m''(t_j - r) + m'(r - t_{j-1}) - m_j(t_j - t_{j-1}) \\ &= (m'' - m_j)(t_j - r) + (m' - m_j)(r - t_{j-1}) \geq 0. \end{aligned}$$

Para obter o resultado geral, onde  $Q$  resulta de  $P$  pelo acréscimo de  $k$  pontos, usa-se  $k$  vezes o que acabamos de provar. Analogamente,  $P \subset Q \Rightarrow S(f; Q) \leq S(f; P)$ .  $\square$

**Corolário 5.2.** Para quaisquer partições  $P, Q$  do intervalo  $[a, b]$  e qualquer função limitada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tem-se  $s(f; P) \leq S(f; Q)$ .

*Demonstração.* Com efeito, a partição  $P \cup Q$  refina simultaneamente  $P$  e  $Q$ , logo  $s(f; P) \leq s(f, P \cup Q) \leq S(f, P \cup Q) \leq S(f; Q)$ .  $\square$

**Corolário 5.3.** Dada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , se  $m \leq f(x) \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$  então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Com efeito, as desigualdades externas são óbvias e a do meio resulta do Corolário 5.2 e do Lema 5.1.

**Definição 5.2.** Se  $f$  for integrável em  $[a, b]$ , então seu valor médio em  $[a, b]$ , também chamado de média, será:  $M(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$ .

O resultado a seguir é conhecido como o teorema do valor intermediário para integrais, esse resultado afirma que esse valor médio é sempre assumido pelo menos uma vez pela função  $f$  dada no intervalo  $[a, b]$  e é dado como segue.

**Teorema 5.2.** Seja  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$ , então, em algum ponto  $x_i$  entre  $a$  e  $b$  temos que:  $f(x_i) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$ .

*Demonstração.* Sabemos que  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ , onde  $m = \inf f(x); x \in [a, b]$  e  $M = \sup f(x); x \in [a, b]$ . Daí,

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

Agora, como  $f$  é contínua, temos que  $f$  deve assumir todos os valores entre o  $m$  e  $M$ . Portanto, deve assumir o valor  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$  em algum ponto  $x_i$  em  $[a, b]$ .  $\square$

**Corolário 5.4.** Seja  $P_0$  uma partição de  $[a, b]$ . Se considerarmos as somas  $s(f, P)$  e  $S(f, P)$  apenas relativas às partições  $P$  que refinam  $P_0$ , obteremos os mesmos valores para  $\int_a^b f(x)dx$  e  $\int_a^b f(x)dx$ .

*Demonstração.* Com efeito, basta combinar o Teorema 5.1 e o Lema 5.4.  $\square$

Um função limitada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se *integrável* quando sua integral inferior e sua integral superior são iguais. esse valor comum chama-se a *integral* (de Riemann) de  $f$  e é indicado por  $\int_a^b f(x)dx$ .

No símbolo  $\int_a^b f(x)dx$ ,  $x$  é o que se chama uma "variável muda", isto é,  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt$ , etc.

Às vezes prefere-se a notação mais simples  $\int_a^b f$ . A justificativa para a notação mais complicada será vista no Teorema 5.3 da próxima seção.

Quando  $f$  é integrável, sua integral  $\int_a^b f(x)dx$  é o número real cujas aproximações por falta são as somas inferiores  $s(f; P)$  e cujas aproximações por excesso são as somas superiores  $S(f; P)$ . o Teorema 5.1 diz que essas aproximações melhoram quando se refina a partição  $P$ . Geometricamente, quando  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in [a, b]$ , a existência de  $\int_a^b f(x)dx$  significa que a região limitada pelo gráfico de  $f$ , pelo segmento  $[a, b]$  do eixo das abscissas e pelas verticais levantadas pelos pontos  $a$  e  $b$  é mensurável (isto é, possui área) e o valor da integral é, por definição, a área dessa região. No caso geral, tem-se a área externa  $\int_a^b f(x)dx$  e a área interna  $\bar{\int}_a^b f(x)dx$ , que podem ser diferentes, como veremos agora.

**Exemplo 5.1.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 0$  se  $x$  é racional e  $f(x) = 1$  quando  $x$  é irracional. Dada uma partição arbitrária  $P$ , como cada intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$  contém números racionais e irracionais, temos  $m_i = 0$  e  $M_i = 1$ , logo  $s(f; P) = 0$  e  $S(f; P) = b - a$ . Assim  $f$  não é integrável, pois  $\int_a^b f(x)dx = 0$  e  $\bar{\int}_a^b f(x)dx = b - a$ .

**Exemplo 5.2.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  constante,  $f(x) = c$  para todo  $x \in [a, b]$ . Então seja qual for a partição, temos  $m_i = M_i = c$  em todos os intervalos, logo  $s(f; P) = S(f; P) = c(b - a)$ . Assim  $f$  é integrável, com  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \bar{\int}_a^b f(x)dx = c(b - a)$ .

Desse modo, para calcularmos a área de uma figura plana, faremos, primeiramente, aproximações por polígonos cujas áreas já são conhecidas. Vamos definir a área de uma região plana  $R$ , delimitada pelo gráfico de uma dada função  $f$ , contínua e não negativa, pelo eixo dos  $x$  e pelas retas verticais  $x = a$  e  $x = b$ , como na figura a seguir:

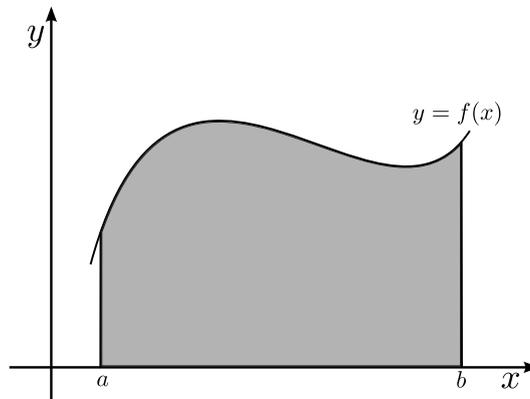


Figura 5.2: Área Delimitada pelo Gráfico de  $y = f(x)$  e Pelas Retas  $x = a$  e  $x = b$

Assim, vamos considerar uma partição do intervalo  $[a, b]$ , em que cada subintervalo seja do tamanho  $|P_i|$ , isto é,  $t_i - t_{i-1} = |P_i|$ , para todo  $0 \leq i \leq n$ . Além disso, em cada um desses intervalos vamos considerar um ponto  $c_i$ , tal que  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$  e, dessa forma, para cada  $i$  dado, em que  $i = 1, 2, \dots, n$  vamos construir um retângulo de base  $|P_i|$  e altura  $f(c_i)$ , como na figura a seguir:

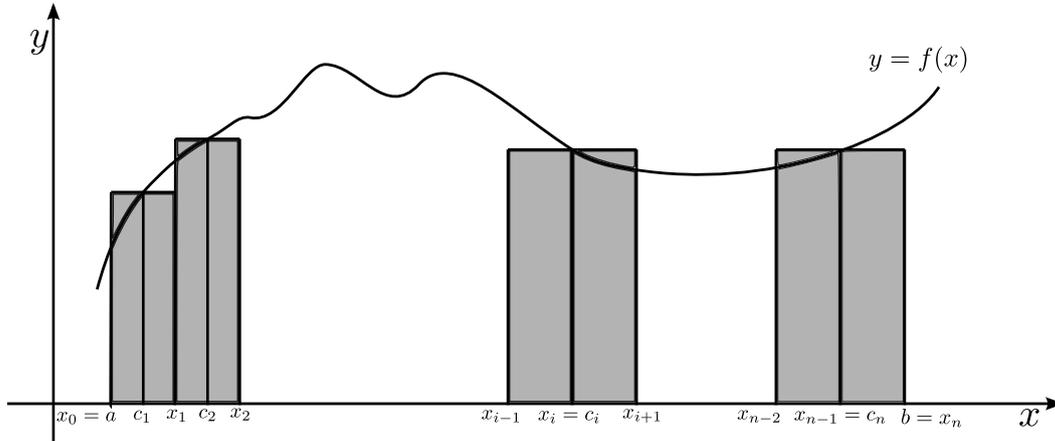


Figura 5.3: Aproximação para a Área

Notamos que a soma de todas as áreas desses retângulos, que representaremos por  $S_n$ , é dada por:

$$S_n = f(c_1)|P_1| + f(c_2)|P_2| + \dots + f(c_i)|P_i| + \dots + f(c_n)|P_n| = \sum_{i=1}^n f(c_i)|P_i|.$$

A soma  $\sum_{i=1}^n f(c_i)|P_i|$  é conhecida como *soma de Riemann* da função  $y = f(x)$  dada.

**Definição 5.3.** *Seja  $f$  uma função contínua e não negativa em  $[a, b]$ , então a área sob a curva  $f$  do ponto  $a$  até  $b$  e delimitada pelo eixo  $x$  é definida como:*

$$A = \lim_{\max |P_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)|P_i|,$$

em que para cada  $i = 1, 2, \dots, n$  o ponto  $c_i$  é um ponto arbitrário do intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ .

**Exemplo 5.3.** *Calcule a área  $A$  sob o gráfico de  $f(x) = x$  no intervalo  $[0, a]$ , sendo  $a > 0$ .*

**Solução.** Temos que a figura determinada é um triângulo de base  $a$  e altura  $a$ , logo, conforme visto anteriormente, temos que a área deste triângulo é

$$A = \frac{\text{área da base} \times \text{altura}}{2} = \frac{a \times a}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

Agora, vamos calcular esta mesma área usando soma de Riemann e depois tomamos o limite como na definição de integral definida. Para isso, seja  $P$  uma partição que divide o intervalo  $[0, a]$  em  $n$  subintervalos de mesmo tamanho, isto é,  $|P_i| = |P| = \frac{a-0}{n} = \frac{a}{n}$ , para todo  $0 \leq i \leq n$ , e consideramos  $c_i$  na extremidade direita de cada subintervalo, assim temos:

$$P = \left\{ 0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \dots, \frac{na}{n} = a \right\} \quad \text{e} \quad c_i = \frac{ia}{n}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(c_i)|P_i| &= \sum_{i=1}^n c_i|P| \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{ia}{n} \cdot \frac{a}{n} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{ia^2}{n^2} \\ &= \frac{a^2}{n^2} \sum_{i=1}^n i \\ &= \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{expressão da soma dos } n \text{ inteiros}) \\ &= \frac{a^2}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Agora, tomando o limite temos:

$$A = \lim_{\max |P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)|P| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^2}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{a^2}{2}.$$

■

Logo, encontramos a mesma área que calculamos no Capítulo 1.

Vamos agora determinar a área de uma região não usual, ou seja, que não são figuras conhecidas como triângulos, retângulo etc.

**Exemplo 5.4.** Calcule a área  $A$  sob o gráfico de  $f(x) = x^2$  no intervalo  $[0, 4]$  delimitada pelo eixo- $x$ .

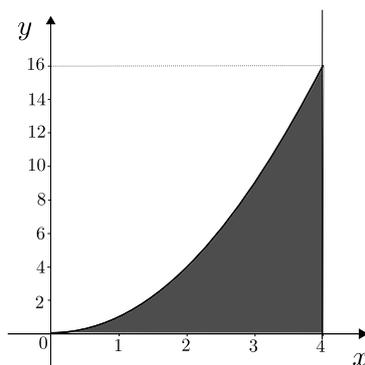


Figura 5.4: Gráfico de  $f(x) = x^2$

**Solução.** Note que a figura em questão não é algo conhecido, por isso vamos calcular esta área usando a Soma de Riemann e depois tomamos o limite como na definição de integral definida. Para

isso, seja  $P$  uma partição que divide o intervalo  $[0, 4]$  em  $n$  subintervalos de mesmo tamanho, isto é,  $|P_i| = |P| = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$  e consideramos  $c_i$  na extremidade direita de cada subintervalo, assim temos:

$$P = \left\{ 0, \frac{4}{n}, \frac{2 \cdot 4}{n}, \dots, \frac{n \cdot 4}{n} = 4 \right\} \quad \text{e} \quad c_i = \frac{i \cdot 4}{n}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(c_i)|P_i| &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{i \cdot 4}{n} \right)^2 \cdot \frac{4}{n} \\ &= \frac{16 \cdot 4}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \frac{16 \cdot 4}{n^3} \cdot \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \quad \text{soma dos primeiros } n \text{ quadrados} \\ &= \frac{16 \cdot 4}{n^3} \cdot \frac{(2n^3 + 3n^2 + n)}{6}. \end{aligned}$$

Agora, tomando o limite temos:

$$A = \lim_{\max |P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)|P_i| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{16 \cdot 4}{n^3} \cdot \frac{(2n^3 + 3n^2 + n)}{6} = \frac{64}{3}.$$

Logo, a área sob o gráfico de  $f(x) = x^2$  no intervalo  $[0, 4]$  delimitada pelo eixo- $x$  é de  $64/3$ . ■

**Teorema 5.3. (Condição Imediata de Integrabilidade.)** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitada. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1)  $f$  é integrável.

(2) Para todo  $\varepsilon > 0$ , existem partições  $P, Q$  de  $[a, b]$  tais que  $S(f; Q) - s(f; P) < \varepsilon$ .

(3) Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe uma partição  $P = \{t_0, \dots, t_n\}$  de  $[a, b]$  tal que  $S(f; P) - s(f; P) = \sum_{i=1}^n \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$ .

*Demonstração.* Sejam  $A$  o conjunto das soma inferiores e  $B$  o conjunto das somas superiores de  $f$ . Pelo Corolário 5.2 do Teorema 5.1, tem-se  $s \leq S$  para toda  $s \in A$  e toda  $S \in B$ . Supondo (1), vale  $\sup A = \inf B$ . Logo pelo Lema 5.1, podemos concluir que (1)  $\Rightarrow$  (2). Para provar que (2)  $\Rightarrow$  (3) basta observar que se  $S(f; Q) - s(f; P) < \varepsilon$ , então, como a partição  $P_0 = P \cup Q$  refina ambas  $P$  e  $Q$ , segue do Teorema 5.1 que  $s(f; P) \leq s(f; P_0) \leq S(f; P_0) \leq S(f; Q)$ , donde se conclui que  $S(f; P_0) - s(f; P_0) < \varepsilon$ . Finalmente, (3)  $\Rightarrow$  (1) pelo Lema 5.1. □

**Exemplo 5.5.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = c$  quando  $a < x \leq b$  e  $f(a) = A$ . Afirmamos que  $f$  é integrável, com  $\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$ . Para fixar ideias, suponhamos  $c < A$ . Então dada uma partição qualquer  $P = \{t_0, \dots, t_n\}$  temos  $m_1 = c$ ,  $M_1 = A$  e  $m_i = M_i = c$  para  $1 < i \leq n$ . Portanto  $S(f; P) - s(f; P) = (A - c)(t_1 - t_0)$ . Dado arbitrariamente  $\varepsilon > 0$ , tomamos uma partição*

$P$  com  $t_1 - t_0 < \varepsilon/(A - c)$  e obtemos  $S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon$ . Logo  $f$  é integrável. Além disso, como  $s(f; P) = c(b - a)$  para toda partição  $P$ , temos

$$\int_a^b f(x)dx = c(b - a).$$

Mas, sendo  $f$  integrável, resulta que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = c(b - a).$$

Evidentemente, um resultado análogo vale quando  $f(x) = c$  para  $x \in [a, b)$ , ou quando  $f(x) = c$  para todo  $x \in (a, b)$ .

## 5.2 Propriedades da Integral

Veremos agora, alguns aspectos interessantes que sobre a integral por meios de suas propriedades. Derivadas estas, em sua maioria, pela própria definição de integral.

**Teorema 5.4.** *Seja  $a < c < b$ . A função limitada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável se, e somente se, suas restrições  $f|_{[a, c]}$  e  $f|_{[c, b]}$  são integráveis. No caso afirmativo, tem-se  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ .*

*Demonstração.* Sejam,  $A$  e  $B$  respectivamente os conjuntos das somas inferiores de  $f|_{[a, c]}$  e  $f|_{[c, b]}$ . Vê-se facilmente que  $A + B$  é o conjunto das somas inferiores de  $f$  relativamente às partições de  $[a, b]$  que contêm o ponto  $c$ . Pelo Corolário 5.4 do Teorema 5.1, ao calcular a integral inferior de  $f$ , basta considerar as partições desse tipo, pois elas são as que refinam  $P_0 = \{a, c, b\}$ . Pelo Lema 5.2,

$$\int_a^b f(x)dx = \sup(A + B) = \sup A + \sup B = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Analogamente se prova que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Logo

$$\int_a^b f - \int_a^b f = \left( \int_a^c f - \int_a^c f \right) + \left( \int_c^b f - \int_c^b f \right).$$

Como as duas parcelas dentro dos parênteses são  $\geq 0$ , sua soma é zero se, e somente se, elas são ambas nulas. Assim,  $f$  é integrável se, e somente se, suas restrições  $f|_{[a, c]}$  e  $f|_{[c, b]}$  o são. No caso afirmativo, vale a igualdade  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ .  $\square$

**Exemplo 5.6.** *Diz-se que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função-escada quando existem uma partição  $P = \{t_0, \dots, t_n\}$  de  $[a, b]$  e números reais  $c_1, \dots, c_n$  tais que  $f(x) = c_i$ , quando  $t_{i-1} < x < t_i$ . (Note-se que nada se diz sobre os valores  $f(t_i)$ .) Segue do Teorema 5.4 e do Exemplo 5.5 que toda função escada é integrável e  $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n c_i(t_i - t_{i-1})$ .*

**Convenção.** A igualdade  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$  faz sentido apenas quando  $a < c < b$ . a fim de torná-la verdadeira sejam quais forem  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , faremos duas convenções, que serão adotadas doravante. Primeira:  $\int_a^a f(x)dx = 0$ . Segunda:  $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ . Aceitas essas convenções, vale para toda função integrável  $f$  a igualdade acima. Para verificá-la, há seis possibilidades a considerar:  $a \leq b \leq c$ ,  $a \leq c \leq b$ ,  $b \leq a \leq c$ ,  $b \leq c \leq a$ ,  $c \leq a \leq b$  e  $c \leq b \leq a$ . Em cada caso, basta admitir a integrabilidade de  $f$  no intervalo maior.

**Teorema 5.5.** *Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integráveis. Então*

(1) *A soma  $f + g$  é integrável e*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

(2) *O produto  $f \cdot g$  é integrável. Se  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$ .*

(3) *Se  $0 < k \leq |g(x)|$  para todo  $x \in [a, b]$  então o quociente  $f/g$  é integrável.*

(4) *Se  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , então  $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ .*

(5)  *$|f|$  é integrável e  $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ .*

*Demonstração.* Dada uma partição arbitrária  $P$  de  $[a, b]$ , se indicarmos com  $m'_i, m''_i$  e  $m_i$ , respectivamente os ínfimos de  $f, g$  e  $f + g$  no  $i$ -ésimo intervalo de  $P$ , termos  $m'_i + m''_i \leq m_i$ , pelo Corolário do Lema 5.2, logo  $s(f; P) + s(g; P) \leq s(f + g; P) \leq \int_a^b (f + g)$  para toda partição  $P$ . Se tomarmos duas partições  $P$  e  $Q$  teremos ainda

$$s(f; P) + s(g; Q) \leq s(f; P \cup Q) + s(g; P \cup Q) \leq \int_a^b (f + g).$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \int_a^b f + \int_a^b g &= \sup_P s(f; P) + \sup_Q s(g; Q) \\ &= \sup_{P, Q} [s(f; P) + s(g; Q)] \leq \int_a^b (f + g). \end{aligned}$$

Isto prova a primeira parte das desigualdades abaixo. A terceira se demonstra de modo análogo e a segunda é óbvia:

$$\int_a^b f + \int_a^b g \leq \int_a^b (f + g) \leq \bar{\int}_a^b (f + g) \leq \bar{\int}_a^b f + \bar{\int}_a^b g.$$

Quando  $f$  e  $g$  são integráveis, as três desigualdades se reduzem a igualdades, o que prova (1).

(2) Seja  $K$  tal que  $|f(x)| \leq K$  e  $|g(x)| \leq K$  para todo  $x \in [a, b]$ . Dada uma partição  $P$ , sejam  $\omega'_i, \omega''_i$  e  $\omega_i$  respectivamente as oscilações de  $f$ ,  $g$  e  $f \cdot g$  no  $i$ -ésimo intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$ . Para quaisquer  $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$  temos:

$$\begin{aligned} |f(y) \cdot g(y) - f(x) \cdot g(x)| &= |(f(y) - f(x))g(y) + f(x)(g(y) - g(x))| \\ &\leq |f(y) - f(x)||g(y)| + |f(x)||g(y) - g(x)| \\ &\leq K(\omega'_i + \omega''_i). \end{aligned}$$

Daí,  $\sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) \leq K \cdot [\sum \omega'_i(t_i - t_{i-1}) + \sum \omega''_i(t_i - t_{i-1})]$ . A integrabilidade de  $f \cdot g$  segue então da integrabilidade de  $f$  e  $g$ , pelo Teorema 2. Quanto a  $cf$ , sua integrabilidade resulta do que acabamos de provar. Além disso, se  $c \geq 0$ , temos  $s(cf; P) = c \cdot s(f; P)$  para toda partição  $P$ , donde, pelo Lema 5.2,

$$\int_a^b cf = \int_a^b cf = c \cdot \int_a^b f = c \cdot \int_a^b f.$$

Caso  $c < 0$ , temos  $s(cf; P) = c \cdot S(f; P)$ , logo  $\int_a^b cf = \int_a^b cf = c \cdot \int_a^b f = c \cdot \int_a^b f$ .

(3) Como  $f/g = f \cdot (1/g)$ , basta provar que  $1/g$  é integrável se  $g$  é integrável e  $0 < k \leq |g(x)|$  para todo  $x \in [a, b]$ . Indiquemos com  $\omega_i$  e  $\omega'_i$  respectivamente as oscilações de  $g$  e  $1/g$  no  $i$ -ésimo intervalo de  $P$  tem-se

$$\left| \frac{1}{g(y)} - \frac{1}{g(x)} \right| = \frac{|g(x) - g(y)|}{|g(y)g(x)|} \leq \frac{\omega_i}{k^2},$$

portanto  $\omega'_i \leq \omega_i/k^2$ . Segue-se que  $\sum \omega'_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$ , logo  $1/g$  é integrável.

(4) Se  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in [a, b]$  então  $s(f; P) \leq s(g; P)$  e  $S(f; P) \leq S(g; P)$  para toda partição  $P$ , donde  $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ .

(5) A desigualdade evidente  $||f(y)| - |f(x)|| \leq |f(y) - f(x)|$  mostra que a oscilação de  $|f|$  em qualquer conjunto não supera a de  $f$ . Logo  $f$  integrável  $\Rightarrow |f|$  integrável. Além disso, como  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$  para todo  $x \in [a, b]$ , resulta de (4) que

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

ou seja,  $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ . □

**Corolário 5.5.** Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável e  $|f(x)| \leq K$  para todo  $x \in [a, b]$ , então  $|\int_a^b f(x)dx| \leq K(b - a)$ .

**Observação 5.1.** Se uma função integrável  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é tal que  $f(x) > 0$  para todo  $x \in [a, b]$  então  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ . Isto resulta de (4) acima. Mas é possível ter  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in [a, b]$ , com  $\int_a^b f(x)dx = 0$  sem que  $f$  seja identicamente nula. Basta tomar  $f(x) = 1$  num conjunto finito de pontos em  $[a, b]$  e  $f(x) = 0$  nos pontos de  $[a, b]$  fora deste conjunto finito. Pelo Exemplo 4,  $f$  é integrável e sua integral é zero. Entretanto, se  $f$  é contínua e  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in [a, b]$  então  $\int_a^b f(x)dx = 0$  implica

$f$  identicamente nula. com efeito, se existisse algum ponto  $x_0 \in [a, b]$  onde  $f(x_0) = c > 0$ , existiria um intervalo não degenerado  $[\alpha, \beta]$ , com  $x_0 \in [\alpha, \beta] \subset [a, b]$  tal que  $f(x) > c/2$  para todo  $x \in [\alpha, \beta]$ . Então, como  $f(x) \geq 0$ , teríamos  $\int_a^b f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta f(x)dx > \frac{c}{2}(\beta - \alpha) > 0$ , uma contradição.

### 5.3 Condições de Integrabilidade

**Teorema 5.6.** *Toda função contínua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável.*

*Demonstração.* Dado  $\varepsilon > 0$ , pela continuidade uniforme de  $f$  no compacto  $[a, b]$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $x, y \in [a, b]$ ,  $|y - x| < \delta$  implicam  $|f(y) - f(x)| < \varepsilon/(b - a)$ . Seja  $P$  uma partição de  $[a, b]$  cujos intervalos têm todos comprimento  $< \delta$ . Em todo intervalo  $[t_i - t_{i-1}]$  de  $P$  existem  $x_i, y_i$  tais que  $m_i = f(x_i)$  e  $M_i = f(y_i)$ , donde  $\omega_i = f(y_i) - f(x_i) < \varepsilon/(b - a)$ . Consequentemente  $\sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$ . Pelo Teorema 5.3,  $f$  é integrável.  $\square$

**Teorema 5.7.** *Toda função monótona  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável.*

*Demonstração.* Para fixar ideias, seja  $f$  não-decrescente e não-constante. Dado  $\varepsilon > 0$ , seja  $P = \{t_0, \dots, t_n\}$  uma partição de  $[a, b]$  cujos intervalos têm todos comprimento  $< \varepsilon/[f(b) - f(a)]$ . Para cada  $i = 1, \dots, n$  temos  $\omega_i = f(t_i) - f(t_{i-1})$ , portanto  $\sum \omega_i = f(b) - f(a)$  e

$$\sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot \sum \omega_i = \varepsilon.$$

Logo  $f$  é integrável.

As considerações a seguir são um preparativo para o Teorema 5.8, que engloba os Teoremas 5.6 e 5.7 como casos particulares.

Se  $a < b$ , indicaremos como  $|I| = b - a$  o *comprimento* do intervalo (fechado, aberto ou semiaberto)  $I$  cujos extremos são  $a$  e  $b$ . Diz-se que o conjunto  $X \subset \mathbb{R}$  tem *medida nula* quando, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existe uma cobertura finita ou infinita enumerável  $X \subset \bigcup I_k$  de  $X$  por intervalos abertos  $I_k$  cuja soma dos comprimentos é  $\sum |I_k| < \varepsilon$ .

Na definição de conjunto de medida nula, os intervalos  $I_k$  da cobertura  $X \subset \bigcup I_k$  são tomados abertos a fim de permitir o uso do Teorema de Borel-Lebesgue, quando necessário. Deve-se observar, porém que se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existir uma cobertura enumerável  $X \subset \bigcup I_k$  por meio de intervalos limitados  $I_k$  (abertos ou não), com  $\sum |I_k| < \varepsilon$ , então  $X$  tem medida nula. Com efeito, sendo assim, para todo  $k \in \mathbb{N}$  tomamos um intervalo aberto  $J_k \supset I_k$  com  $|J_k| = |I_k| + \varepsilon/2k$ , o que nos dá uma cobertura aberta  $X \subset \bigcup J_k$ , com  $\sum |J_k| = \sum |I_k| + \sum (\varepsilon/2k) = \sum |I_k| + \varepsilon < 2\varepsilon$ , logo  $X$  tem medida nula.  $\square$

**Exemplo 5.7.** *Todo conjunto enumerável  $X = \{x_1, \dots, x_k, \dots\}$  tem medida nula. com efeito, dado arbitrariamente  $\varepsilon > 0$ , seja  $I_k$  o intervalo aberto de centro  $x_k$  e comprimento  $\varepsilon/2^{k+1}$ . Então  $X \subset \bigcup I_k$  e  $\sum |I_k| = \varepsilon/2 < \varepsilon$ . Em particular, o conjunto  $\mathbb{Q}$  do número racionais tem medida nula.*

**Teorema 5.8.** *Se o conjunto  $D$  dos pontos de descontinuidade de uma função limitada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tem medida nula, então  $f$  é integrável.*

*Demonstração.* Dado  $\varepsilon > 0$ , existem intervalos abertos  $I_1, \dots, I_k, \dots$  tais que  $D \subset \bigcup I_k$  e  $\sum |I_k| \leq \varepsilon/2K$ , onde  $K = M - m$  é a oscilação de  $f$  em  $[a, b]$ . Para cada  $x \in [a, b] - D$ , seja  $J_k$  um intervalo aberto de centro em  $x$  tal que a oscilação de  $f|(J_k \cap [a, b])$  é menor do que  $\varepsilon/2(b - a)$ . Pelo Teorema de Borel-Lebesgue, a cobertura aberta  $[a, b] \subset (\bigcup_k I_k) \cup (\bigcup_x J_x)$  possui uma subcobertura finita  $[a, b] \subset$

$I_1 \cup \dots \cup I_m \cup J_{x_1} \cup \dots \cup J_{x_n}$ . Seja  $P$  a partição de  $[a, b]$  formada pelos pontos  $a$  e  $b$  e os extremos desses  $m + n$  intervalos que pertençam a  $[a, b]$ . Indiquemos com  $[t_{\alpha-1}, t_\alpha]$  os intervalos de  $P$  que estão contidos em algum  $\bar{I}_k$  e com  $[t_{\beta-1}, t_\beta]$  os demais intervalos de  $P$ , cada um dos quais está contido em algum  $J_x$ . Então  $\sum(t_\alpha - t_{\alpha-1}) < \varepsilon/2K$  e a oscilação de  $f$  em cada intervalo  $[t_{\beta-1}, t_\beta]$  é  $\omega_\beta < \varepsilon/2(b-a)$ . Logo

$$\begin{aligned} S(f; P) - s(f; P) &= \sum \omega_\alpha(t_\alpha - t_{\alpha-1}) + \sum \omega_\beta(t_\beta - t_{\beta-1}) \\ &< \sum K(t_\alpha - t_{\alpha-1}) + \sum \frac{\varepsilon(t_\beta - t_{\beta-1})}{2(b-a)} \\ &< \frac{K\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon \cdot (b-a)}{2(b-a)} = \varepsilon \end{aligned}$$

Logo  $f$  é integrável.

A recíproca do Teorema 5.8 é verdadeira. A fim de demonstrá-la, faremos uso da oscilação  $\omega(f; x)$  da função limitada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  no ponto  $x \in [a, b]$ , assim definida: para cada  $\delta > 0$ , seja  $\omega(\delta) = M_\delta - m_\delta$ , onde  $M_\delta$  e  $m_\delta$  são respectivamente o sup e o inf de  $f$  em  $[a, b] \cap [x - \delta, x + \delta]$ . A função  $\omega(\delta)$  é  $\geq 0$ , limitada e não decrescente, logo existe o limite  $\omega(f; x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta)$ , que chamaremos a *oscilação* de  $f$  no ponto  $x$ . Segue-se imediatamente da definição de função contínua que  $\omega(f; x) > 0$  se, e somente se, a função  $f$  é descontínua no ponto  $x$ . Se  $x$  é um ponto interior do intervalo  $I \subset [a, b]$  então  $\omega(f; x) \leq \omega(f; I)$ , onde  $\omega(f; I) = \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x)$ . Mas se  $x$  é um dos extremos de  $I$ , pode ocorrer que seja  $\omega(f; x) > \omega(f; I)$ . Este é, por exemplo, o caso quando  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $f(x) = 1$  para  $-1 \leq x < 0$  e  $f(x) = 0$  quando  $x \geq 0$ . Tomando  $I = [0, 1]$  e  $x = 0$ , temos  $\omega(f; I) = 0$  e  $\omega(f; x) = 1$ .  $\square$

Com esses preliminares esclarecidos, passemos à:

**Recíproca do Teorema 5.8.** O conjunto  $D$  dos pontos de descontinuidade da função integrável  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tem medida nula.

*Demonstração.* para cada  $k \in \mathbb{N}$ , seja  $D_k = \{x \in [a, b]; \omega(f; x) \geq 1/k\}$ . Então  $D = \cup D_k$ , logo basta mostrar que cada  $D_k$  tem medida nula. Fixemos  $k$  e tomemos  $\varepsilon > 0$ . Sendo  $f$  integrável, existe uma partição  $P = \{t_0 < t_1 < \dots < t_k\}$  de  $[a, b]$  tal que  $\sum \omega_i \cdot (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon/k$ , onde  $\omega_i$  é a oscilação de  $f$  em  $[t_{i-1}, t_i]$ . Indicando com  $[t_{\alpha-1}, t_\alpha]$  os intervalos de  $P$  que contêm os pontos de  $D_k$  em seu interior, temos  $\omega_\alpha \geq 1/k$  para cada  $\alpha$  e  $D_k = [\cup(t_{\alpha-1}, t_\alpha)] \cup F$ , onde  $F$  é o conjunto (finito) das extremidades dos  $(t_{\alpha-1}, t_\alpha)$  que pertençam a  $D_k$ . Então

$$\frac{1}{k} \sum (t_\alpha - t_{\alpha-1}) \leq \sum \omega_\alpha \cdot (t_\alpha - t_{\alpha-1}) \leq \sum \omega_i (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon/k,$$

logo  $\sum (t_\alpha - t_{\alpha-1}) < \varepsilon$ . Assim, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, é possível cobrir  $D_k$  com um conjunto finito  $F$  mas uma região finita de intervalos cuja soma dos comprimentos é  $< \varepsilon$ . Segue-se que  $D_k$  tem medida nula.  $\square$

## 5.4 Calculando Integrais

Para começarmos, estabeleceremos a conexão entre derivada e integral.

**Teorema 5.9. (Teorema Fundamental do Cálculo - TFC)** Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  contínua no intervalo  $I$ . As seguintes afirmações são equivalentes:

(1)  $F$  é uma integral indefinida de  $f$ , isto é, existe  $a \in I$  tal que  $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$ , para todo  $x \in I$ .

(2)  $F$  é uma primitiva de  $f$ , isto é,  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x \in I$ .

*Demonstração.* (1)  $\Rightarrow$  (2). Se  $x_0, x_0 + h \in I$  então  $F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$  e  $h \cdot f(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt$ , portanto

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt.$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , pela continuidade de  $f$  no ponto  $x_0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $t \in I$ ,  $|t - x_0| < \delta$  implicam  $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ . Então  $0 < |h| < \delta$ ,  $x_0 + h \in I$  implicam

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| &\leq \frac{1}{|h|} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt \\ &< \frac{1}{|h|} \cdot |h| \cdot \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Isso mostra que  $F'(x_0) = f(x_0)$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1). Seja  $F' = f$ . Como acabamos de ver, se fixarmos  $a \in I$  e definirmos  $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$ , teremos  $\varphi' = f$ . As duas funções  $f, \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  tendo a mesma derivada, diferem por uma constante. Como  $\varphi(a) = 0$ , essa constante é  $F(a)$ . Portanto  $F(x) = F(a) + \varphi(x)$ , isto é,  $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$  para todo  $x \in I$ .  $\square$

**Comentários.** (1). Foi provado acima que toda função contínua possui uma primitiva. Mais precisamente: se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável, então  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , é derivável em todo ponto  $x_0 \in [a, b]$  no qual  $f$  seja contínua, e tem-se  $F'(x_0) = f(x_0)$ . Nesse ponto também é derivável a função  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $G(x) = \int_x^b f(t)dt$ . Tem-se  $G'(x_0) = -f(x_0)$ . Com efeito,  $F(x) + G(x) = \int_a^b f(t)dt = \text{constante}$ , logo  $F'(x_0) + G'(x_0) = 0$ .

(2) Ficou também provado que se  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^1$  (isto é, tem derivada contínua) então  $F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt$ . Em particular,  $F(b) = F(a) + \int_a^b F'(t)dt$ . Isto reduz o cálculo da integral  $\int_a^b f(x)dx$  à procura de uma primitiva de  $f$ . Se  $F' = f$  então  $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$ .

(3) O mesmo argumento da demonstração de que (2)  $\Rightarrow$  (1) no Teorema 5.9 serve para provar que se a função integrável  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua no ponto  $c \in [a, b]$  então a função  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  é derivável no ponto  $c$ , com  $F'(c) = f(c)$ .

Para o cálculo de áreas é importante sabermos o comportamento do gráfico de uma função. Para isso, vamos estudar alguns casos.

**Primeiro caso.** A área de um figura plana limitada pelo gráfico de  $f$ , pelas retas verticais  $x = a$ ,  $x = b$  e o eixo- $x$ , em que  $f$  é contínua e  $f(x) \geq 0$  para todo  $x$  em  $[a, b]$  é dada por:

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

**Exemplo 5.8.** Determine a área delimitada pela curva  $f(x) = x^3$ , pelas retas verticais  $x = 1$ ,  $x = 3$  e o eixo- $x$ .

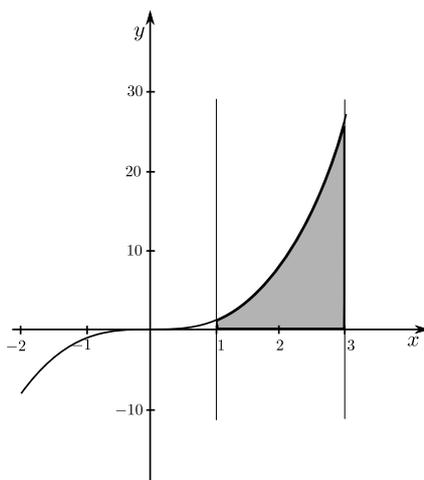


Figura 5.5: Gráfico de  $f(x) = x^3$

**Solução.** Note, primeiramente, que a função  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in [1, 3]$ , logo, a área é dada por:

$$A = \int_1^3 x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \Big|_1^3 = \frac{1}{4} (3^4 - 1^4) = \frac{1}{4} \cdot 80 = 20.$$

■

**Exemplo 5.9.** Determine a área delimitada pela curva  $f(x) = e^x$ , pelas retas verticais  $x = -4$ ,  $x = 2$  e o eixo- $x$ .

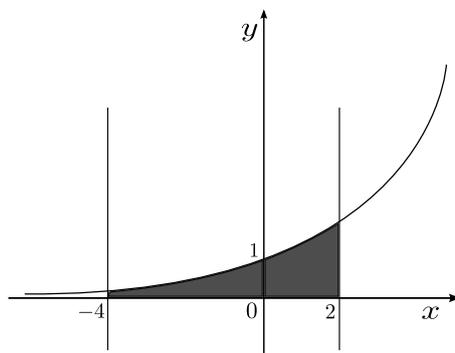


Figura 5.6: Gráfico de  $f(x) = e^x$

**Solução.** Note, primeiramente, que a função  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in [-4, 2]$ , logo, a área é dada por:

$$A = \int_{-4}^2 e^x dx = e^x \Big|_{-4}^2 = e^2 - e^{-4} = e^2 - \frac{1}{e^4} = \frac{e^6 - 1}{e^4}.$$

■

**Segundo caso.** A área de um figura plana limitada pelo gráfico de  $f$ , pelas retas verticais  $x = a$ ,  $x = b$  e o eixo- $x$ , em que  $f$  é contínua e  $f(x) \leq 0$  para todo  $x$  em  $[a, b]$  é dada por:

$$A = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

**Exemplo 5.10.** Determine a área delimitada pela curva  $f(x) = \text{sen}(x)$ , pelas retas verticais  $x = -\pi$ ,  $x = 0$  e o eixo- $x$ .

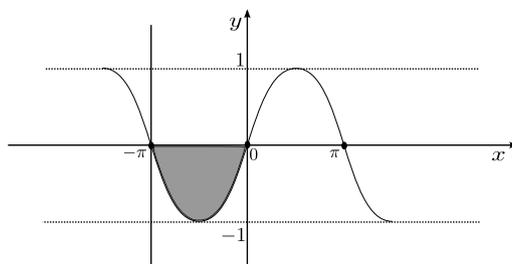


Figura 5.7: Gráfico de  $f(x) = \text{sen}(x)$

**Solução.** Note, primeiramente, que a função  $f(x) \leq 0$  para todo  $x \in [-\pi, 0]$ , logo, a área é dada por:

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-\pi}^0 \text{sen}(x) dx \right| \\ &= \left| -\cos(x) \Big|_{-\pi}^0 \right| \\ &= |-1 - 1| = 2. \end{aligned}$$

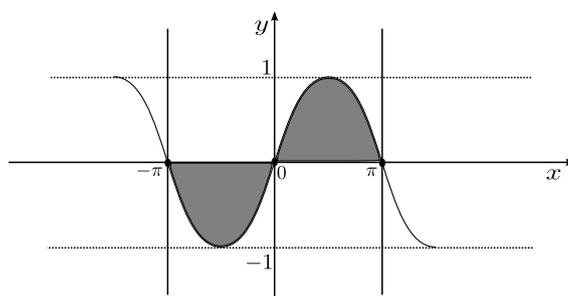
■

**Exemplo 5.11.** Determine a área delimitada pela curva  $f(x) = \text{sen}(x)$ , pelas retas verticais  $x = -\pi$ ,  $x = \pi$  e o eixo- $x$ .

**Solução.** Para este exemplo, note que  $f(x) \leq 0$  para  $x \in [-\pi, 0]$  e  $f(x) \geq 0$  para  $x \in [0, \pi]$ , logo, dividindo a área nestas duas regiões, obtemos:

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-\pi}^0 \text{sen}(x) dx \right| + \int_0^{\pi} \text{sen}(x) dx \\ &= \left| -\cos(x) \Big|_{-\pi}^0 \right| - \cos(x) \Big|_0^{\pi} \\ &= |-1 - 1| + (-\cos(\pi) + \cos(0)) = 4. \end{aligned}$$

■

Figura 5.8: Gráfico de  $f(x) = \sin(x)$ 

**Terceiro caso.** A área da figura plana limitada pelos gráficos de  $f$  e  $g$ , pelas retas  $x = a$  e  $x = b$ , com  $f$  e  $g$  funções contínuas em  $[a, b]$  e  $f(x) \geq g(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ . Então, a área é dada por:

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

**Exemplo 5.12.** Determine a área delimitada pelas curvas  $y = 5 - x^2$  e  $y = x + 3$ .

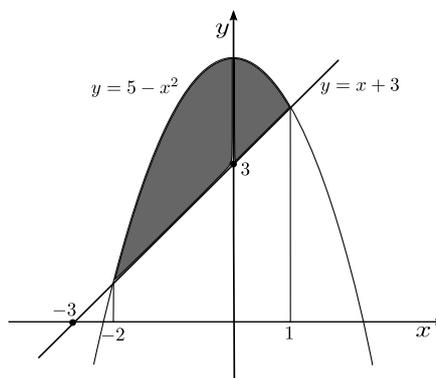


Figura 5.9: Área entre Gráficos

**Solução.** Notamos, que as curvas tem o mesmo valor, isto é, se interceptam nos pontos de abscissa  $-2$  e  $1$ , além, no intervalo  $[-2, 1]$  temos que  $5 - x^2 \geq x + 3$ , logo:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 [5 - x^2 - (x + 3)]dx \\ &= \int_{-2}^1 [-x^2 - x + 2]dx \\ &= \left( -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-2}^1 \\ &= \left( -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left( \frac{8}{3} - 2 - 4 \right) = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

■

**Exemplo 5.13.** Calcule a integral  $\int_0^4 x^2 dx$ .

**Solução.** Sabemos que a primitiva de  $f(x) = x^2$  é a função  $F(x) = \frac{x^3}{3}$ , assim,

$$\int_0^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 = \frac{1}{3} \cdot 4^3 - \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{64}{3}.$$

■

**Exemplo 5.14.** Calcule a integral  $\int_0^2 e^x dx$ .

**Solução.** Sabemos que a primitiva de  $f(x) = e^x$  é a função  $F(x) = e^x$ , assim,

$$\int_0^2 e^x dx = e^x \Big|_0^2 = e^2 - e^0 = e^2 - 1.$$

■

**Exemplo 5.15.** Determine a primitiva  $F(x)$  da função:

$$f(x) = x^3 + e^{2x} + 2$$

que satisfaça a condição de  $F(0) = 2$ .

**Solução.** Sabemos que  $F(x)$  será uma função cuja derivada é a própria  $f(x)$ . Logo:

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{e^{2x}}{2} + 2x + c.$$

De fato, note que:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left( \frac{x^4}{4} + \frac{e^{2x}}{2} + 2x + c \right)' \\ &= \left( \frac{x^4}{4} \right)' + \left( \frac{e^{2x}}{2} \right)' + (2x)' + (c)' \\ &= x^3 + e^{2x} + 2 + 0 \\ &= x^3 + e^{2x} + 2 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Agora, como  $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{e^{2x}}{2} + 2x + c$  deve ser tal que  $F(0) = 2$ , temos que:

$$2 = F(0) = \frac{0^4}{4} + \frac{e^{2 \cdot 0}}{2} + 2 \cdot 0 + c = \frac{1}{2} + c,$$

assim,  $c = \frac{3}{2}$ . Portanto,  $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{e^{2x}}{2} + 2x + \frac{3}{2}$  é a função primitiva de  $f(x) = x^3 + e^{2x} + 2$  que satisfaz a condição  $F(0) = 2$ .

■

**Teorema 5.10. (Mudança de Variável)** Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua,  $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  com derivada contínua e  $g([c, d]) \subset [a, b]$ . Então

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)dt.$$

*Demonstração.* Pelo Teorema 5.9,  $f$  possui uma primitiva  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e vale  $\int_a^{g(d)} f(x)dx = F(g(d)) - F(g(c))$ . Por outro lado, a Regra da Cadeia nos dá  $(F \circ G)'(t) = F'(g(t)) \cdot g'(t)$  para todo  $t \in [c, d]$ . Logo  $F \circ G : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma primitiva da função contínua  $t \mapsto f(g(t)) \cdot g'(t)$ . Portanto  $\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)dt = F(g(t)) - F(g(c))$ . Isto prova o teorema.  $\square$

**Observação 5.2.** O Teorema 5.10 é uma boa justificativa para a notação  $\int_a^b f(x)dx$ , em vez de  $\int_a^b f$ . Para mudar a variável em  $\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx$ , faz-se  $x = g(t)$ . A diferencial de  $x$  será  $dx = g'(t)dt$ . Estas substituições dão

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)dt.$$

A troca nos limites de integração é natural: quando  $t$  varia de  $c$  a  $d$ ,  $x = g(t)$  varia de  $g(c)$  a  $g(d)$ .

**Exemplo 5.16.** Calcule a integral  $\int_1^3 2x\sqrt{x^2 - 1} dx$ .

**Solução.** Para resolver esse exemplo, primeiramente, faremos uma mudança de variáveis dada por  $u = x^2 - 1$ , logo,  $du = 2xdx$ , além disso, observamos que se

$$x = 1 \Rightarrow u = 0 \quad \text{e} \quad x = 3 \Rightarrow u = 3^2 - 1 = 8,$$

desse modo, temos que:

$$\int_1^3 2x\sqrt{x^2 - 1} dx = \int_0^8 \sqrt{u} du = \int_0^8 u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^8 = \frac{2}{3}(\sqrt{8^3} - 0) = \frac{2}{3}\sqrt{512}.$$

■

**Exemplo 5.17.** Encontre uma primitiva para a seguinte integral  $\int 3x^2\sqrt{x^3 - 71} dx$ .

**Solução.** Se fizermos a mudança  $u = x^3 - 71$ , então  $du = 3x^2dx$ . Assim:

$$\int 3x^2\sqrt{x^3 - 71} dx = \int \sqrt{u} du = \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c.$$

Logo, substituindo  $u$  por  $x^3 - 71$ , temos:

$$\int 3x^2\sqrt{x^3 - 71} dx = \int \sqrt{u} du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(x^3 - 71)^{\frac{3}{2}} + c.$$

Portanto,

$$\int 3x^2\sqrt{x^3 - 71} dx = \frac{2}{3}(x^3 - 71)^{\frac{3}{2}} + c.$$

■

**Exemplo 5.18.** Calcule a integral  $\int \operatorname{sen}(2x + 6)dx$ .

**Solução.** Fazendo  $u = 2x + 6$ , então temos  $du = 2dx$ , isto é,  $\frac{du}{2} = dx$ . Logo,

$$\int \operatorname{sen}(2x + 6)dx = \int \operatorname{sen}(u) \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \operatorname{sen}(u) = -\frac{1}{2} \cos(u) + c = -\frac{1}{2} \cos(2x + 6) + c.$$

■

**Exemplo 5.19.** Calcule a integral  $\int x(x^2 - 3)^{729}dx$ .

**Solução.** Fazendo  $u = x^2 - 3$ , então temos  $du = 2xdx$ , isto é,  $\frac{du}{2} = xdx$ . Logo,

$$\int x(x^2 - 3)^{729}dx = \int u^{729} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^{729} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{730}}{730} + c = \frac{(x^2 - 3)^{730}}{1460} + c.$$

■

**Exemplo 5.20.** Calcule a integral  $\int \sec(x)dx$ .

**Solução.** Primeiramente, multiplicamos o numerador e o denominador, respectivamente, por  $\sec(x) + \tan(x) + \tan(x)$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \int \sec(x)dx &= \int \sec(x) \cdot \frac{\sec(x) + \tan(x)}{\sec(x) + \tan(x)} dx \\ &= \int \frac{\sec^2(x) + \sec(x) \tan(x)}{\sec(x) + \tan(x)} dx. \end{aligned}$$

Fazendo  $u = \sec(x) + \tan(x)$ , temos  $du = (\sec(x) \tan(x) + \sec^2(x))dx$ . Logo,

$$\begin{aligned} \int \sec(x)dx &= \int \frac{\sec^2(x) + \sec(x) \tan(x)}{\sec(x) + \tan(x)} dx \\ &= \int \frac{1}{u} du \\ &= \ln |u| + c. \end{aligned}$$

Portanto,

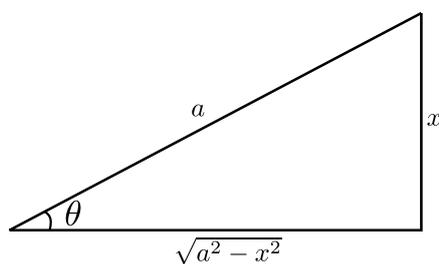
$$\begin{aligned} \int \sec(x)dx &= \ln |u| + c \\ &= \ln |\sec(x) + \tan(x)| + c. \end{aligned}$$

■

## 5.5 Integração por Substituição Trigonométrica

Essa nova técnica de integração será útil para transformarmos integrais que envolvam integrandos como  $\sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $\sqrt{a^2 + x^2}$  e  $\sqrt{x^2 - a^2}$  em integrais que podemos calcular diretamente. Para entendermos melhor, vamos dividir em três casos:

**Caso 1)** Quando o integrando envolve  $\sqrt{a^2 - x^2}$ .

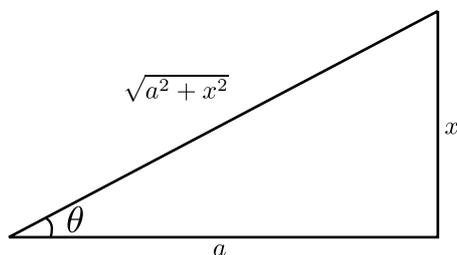


$$\begin{aligned}x &= a \operatorname{sen}(\theta) \\ \sqrt{a^2 - x^2} &= a |\cos(\theta)|\end{aligned}$$

Para esse formato, usamos  $x = a \operatorname{sen}(\theta)$ . Logo,  $dx = a \cos(\theta) d\theta$ . Consideramos  $\theta$ , tal que  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , assim,

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2(\theta)} \\ &= \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2(\theta))} \\ &= \sqrt{a^2 \cos^2(\theta)} \\ &= a \cos(\theta).\end{aligned}$$

**Caso 2)** Quando o integrando envolve  $\sqrt{a^2 + x^2}$ .

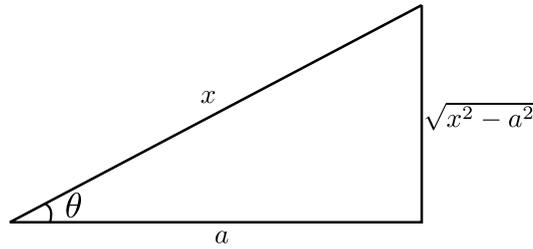


$$\begin{aligned}x &= a \tan(\theta) \\ \sqrt{a^2 + x^2} &= a |\sec(\theta)|\end{aligned}$$

Para esse formato, usamos  $x = a \tan(\theta)$ . Logo,  $dx = a \sec^2(\theta) d\theta$ . Consideramos  $\theta$ , tal que  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ , assim,

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + a^2} &= \sqrt{a^2 \tan^2(\theta) + a^2} \\ &= \sqrt{a^2(\tan^2(\theta) + 1)} \\ &= \sqrt{a^2 \sec^2(\theta)} \\ &= a \sec(\theta).\end{aligned}$$

**Caso 3)** Quando o integrando envolve  $\sqrt{x^2 - a^2}$ .



$$\begin{aligned}x &= a \sec(\theta) \\ \sqrt{x^2 - a^2} &= a |\tan(\theta)|\end{aligned}$$

Para esse formato, usamos  $x = a \sec(\theta)$ . Logo,  $dx = a \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta$ . Consideramos  $\theta$ , tal que  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$  ou  $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$ , assim,

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - a^2} &= \sqrt{a^2 \sec^2(\theta) - a^2} \\ &= \sqrt{a^2 (\sec^2(\theta) - 1)} \\ &= \sqrt{a^2 \tan^2(\theta)} \\ &= a \tan(\theta).\end{aligned}$$

**Exemplo 5.21.** Calcule a integral  $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{25 - x^2}} dx$ .

**Solução.** Para esse formato, usamos  $x = 5 \sin(\theta)$ . Logo,  $dx = 5 \cos(\theta) d\theta$ , em que  $\theta$  é tal que  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ , assim, temos que:

$$\begin{aligned}\sqrt{25 - x^2} &= \sqrt{25 - 25 \sin^2(\theta)} \\ &= 5 \sqrt{1 - \sin^2(\theta)} \\ &= 5 \sqrt{\cos^2(\theta)} \\ &= 5 \cos(\theta).\end{aligned}$$

Substituindo na integral dada, temos:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2 \sqrt{25 - x^2}} dx &= \int \frac{1}{(25 \sin^2(\theta)) \cdot 5 \cos(\theta)} \cdot 5 \cos(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{25} \int \frac{1}{\sin^2(\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{25} \int \operatorname{cosec}^2(\theta) d\theta \\ &= -\frac{1}{25} \cotg(\theta) + c.\end{aligned}$$

Notamos que ainda precisamos voltar para a variável original  $x$ , como temos que  $\theta = \arcsen\left(\frac{x}{5}\right)$ , podemos escrever  $-\frac{1}{25} \cotg(\theta)$  como  $-\frac{1}{25} \cotg \arcsen\left(\frac{x}{5}\right)$ , contudo, essa expressão ainda pode ser melhorada. De fato, temos que  $\cotg(\theta) = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x}$ , logo:

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{25 - x^2}} dx = -\frac{1}{25} \operatorname{cotg}(\theta) + c = -\frac{1}{25} \cdot \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x} + c = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{25x} + c.$$

■

**Exemplo 5.22.** Calcule a integral  $\int \frac{1}{\sqrt{25 + x^2}} dx$ .

**Solução.** Para esse formato, usamos  $x = 5 \tan(\theta)$ . Logo,  $dx = 5 \sec^2(\theta) d\theta$ , em que  $\theta$  é tal que  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ , assim, temos que:

$$25 + x^2 = 25 + 25 \tan^2(\theta) = 25(1 + \tan^2(\theta)) = 25 \sec^2(\theta).$$

Substituindo na integral dada, temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{25 + x^2}} dx &= \int \frac{5 \sec^2(\theta) d\theta}{\sqrt{25 \sec^2(\theta)}} \\ &= \int \frac{\sec^2(\theta) d\theta}{|\sec(\theta)|} \\ &= \int \sec(\theta) d\theta, \quad \sec(\theta) > 0 \text{ para } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ &= \ln |\sec(\theta) + \tan(\theta)| + c \\ &= \ln \left| \frac{\sqrt{25 + x^2}}{5} + \frac{x}{5} \right| + c, \quad \tan(\theta) = \frac{x}{5} \text{ e } \sec(\theta) = \frac{\sqrt{25 + x^2}}{5} \\ &= \ln \left| \sqrt{25 + x^2} + x \right| + K, \quad \text{na qual } K = c - \ln(5). \end{aligned}$$

■

**Exemplo 5.23.** Calcule a integral  $\int \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x} dx$ .

**Solução.** Para esse formato, usamos  $x = 4 \sec(\theta)$ . Logo,  $dx = 4 \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta$ , em que  $\theta$  é tal que  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ , assim, temos que:

$$\sqrt{x^2 - 16} = \sqrt{16 \sec^2(\theta) - 16} = 4 \sqrt{\sec^2(\theta) - 1} = 4 \sqrt{\tan^2(\theta)} = 4 \tan(\theta).$$

Substituindo na integral dada, temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x} dx &= \int \frac{4 \tan(\theta)}{4 \sec(\theta)} 4 \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta \\ &= 4 \int \tan^2(\theta) d\theta \\ &= 4 \int (\sec^2(\theta) - 1) d\theta \\ &= 4 \int \sec^2(\theta) d\theta - 4 \int 1 d\theta \\ &= 4 \tan(\theta) - 4\theta + c. \end{aligned}$$

Agora, como  $\sec(\theta) = \frac{x}{4}$ , pelo triângulo retângulo, temos que  $\tan(\theta) = \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{4}$  e  $\theta = \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{4}\right)$ ,

assim,

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x} dx = 4 \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{4} - 4 \operatorname{arcsec} \left( \frac{x}{4} \right) + c = \sqrt{x^2 - 16} - 4 \operatorname{arcsec} \left( \frac{x}{4} \right) + c.$$

■

**Exemplo 5.24.** Determine a área delimitada pela elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

**Solução.** Temos que a elipse é simétrica em relação aos dois eixos, desse modo a área total é quatro vezes a área do primeiro quadrante. Determinando  $y \geq 0$ , onde da equação da elipse, temos:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} \quad \text{ou} \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq a.$$

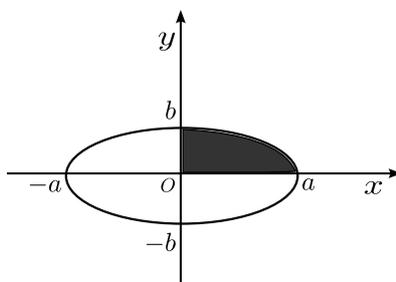


Figura 5.10: Gráfico da Elipse

Para esse formato, usamos  $x = a \operatorname{sen}(\theta)$ . Logo,  $dx = a \cos(\theta) d\theta$ , em que  $\theta$  é tal que  $\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ , assim, temos que:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2(\theta)} = a \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\theta)} = a \sqrt{\operatorname{cos}^2(\theta)} = a \operatorname{cos}(\theta).$$

Portanto, a área da elipse é:

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= 4 \frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \operatorname{cos}(\theta) \cdot a \operatorname{cos}(\theta) d\theta \\ &= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cos}^2(\theta) d\theta \\ &= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \operatorname{cos}(2\theta)}{2} d\theta \\ &= 2ab \left( \theta + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2ab \left( \frac{\pi}{2} + 0 - 0 \right) \\ &= \pi ab. \end{aligned}$$

■

## 5.6 Integração das Funções Racionais Usando Frações Parciais

Uma função racional  $q$  é da forma  $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , em que  $f$  e  $g$  são funções polinomiais, nesse momento, iremos estudar e estabelecer regras para o cálculo de  $\int q(x)dx$ . A ideia básica é escrevermos a função racional apresentada como uma soma de frações mais simples, possibilitando, dessa forma, o cálculo da integral com mais facilidade.

**Observação 5.3.** *Dado  $p$  um polinômio com coeficientes reais, então,  $p$  pode ser expresso como produto de fatores lineares ou quadráticos, todos com coeficientes reais.*

Vamos considerar que o coeficiente do termo de maior grau do polinômio do denominador  $g$  é 1, caso isso não ocorrer, dividimos o numerador e denominador da função racional  $q$  por esse coeficiente. Além disso, vamos supor que o grau de  $f$  é menor que o grau de  $g$ , caso isso não aconteça, devemos, primeiramente, fazer a divisão de  $f$  por  $g$ . A seguir, apresentaremos três resultados.

**Resultado 1.** Se tivermos que os fatores de  $g$  são lineares e distintos, então podemos escrever  $g$  na forma:

$$g(x) = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n),$$

em que os  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , são distintos dois a dois. Desse modo, a decomposição da função racional  $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  em frações é dada por:

$$q(x) = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \frac{A_3}{x - a_3} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n},$$

em que  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , são constantes a serem determinadas.

**Exemplo 5.25.** *Calcule a integral  $\int \frac{x - 1}{x^3 - x^2 - 2x} dx$ .*

**Solução.** Notamos, primeiramente, que:

$$\frac{x - 1}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{x - 1}{x(x - 2)(x + 1)},$$

assim, pelo resultado 1 apresentado acima, escrevemos:

$$\frac{x - 1}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{x - 1}{x(x - 2)(x + 1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x - 2} + \frac{A_3}{x + 1} \quad (5.1)$$

Dessa forma, temos que:

$$\frac{x - 1}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{x - 1}{x(x - 2)(x + 1)} = \frac{A_1(x - 2)(x + 1) + A_2x(x + 1) + A_3x(x - 2)}{x(x - 2)(x + 1)},$$

dessa identidade, temos que:

$$x - 1 = A_1(x - 2)(x + 1) + A_2x(x + 1) + A_3x(x - 2), \quad (5.2)$$

assim,

$$\begin{aligned} x - 1 &= A_1x^2 - A_1x - 2A_1 + A_2x^2 + A_2x + A_3x^2 - 2A_3x \\ &= (A_1 + A_2 + A_3)x^2 + (-A_1 + A_2 - 2A_3)x - 2A_1. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Da identidade apresentada em (5.3), os coeficientes da esquerda devem ser iguais aos coeficientes correspondentes da direita, desse modo, temos que:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 0 \\ -A_1 + A_2 - 2A_3 = 1 \\ -2A_1 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo essas equações concluímos que:

$$A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = \frac{1}{6} \text{ e } A_3 = -\frac{2}{3}.$$

Logo, substituindo esses valores em (5.1), temos que:

$$\frac{x - 1}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{1}{2} \frac{1}{x} + \frac{1}{6} \frac{1}{x - 2} + \frac{-2}{3} \frac{1}{x + 1}.$$

Desse modo, nossa integral original fica:

$$\begin{aligned} \int \frac{x - 1}{x^3 - x^2 - 2x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{6} \int \frac{1}{x - 2} dx - \frac{2}{3} \int \frac{1}{x + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln |x| + \frac{1}{6} \ln |x - 2| - \frac{2}{3} \ln |x + 1| + c. \end{aligned}$$

■

**Resultado 2.** Caso os fatores de  $g$  sejam todos lineares e alguns se repetem, isto é, admitimos que  $(x - a_i)$  seja um fator que se repete  $n$  vezes, a esse fator corresponderá uma soma de frações parciais da seguinte forma:

$$\frac{A_1}{(x - a_i)^n} + \frac{A_2}{(x - a_i)^{n-1}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{(x - a_i)^2} + \frac{A_n}{(x - a_i)},$$

em que  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , são constantes a serem determinadas.

**Exemplo 5.26.** Calcule a integral  $\int \frac{3x^3 - 18x^2 + 29x - 4}{(x + 1)(x - 2)^3} dx$ .

**Solução.** Usando o resultado 2, temos que a decomposição em frações parciais tem a forma:

$$\begin{aligned} \frac{3x^3 - 18x^2 + 29x - 4}{(x + 1)(x - 2)^3} &= \frac{A_1}{x + 1} + \frac{A_2}{x - 2} + \frac{A_3}{(x - 2)^2} + \frac{A_4}{(x - 2)^3} \\ &= \frac{A_1(x - 2)^3 + A_2(x + 1)(x - 2)^2 + A_3(x + 1)(x - 2) + A_4(x + 1)}{(x + 1)(x - 2)^3}, \end{aligned}$$

assim, temos que:

$$3x^3 - 18x^2 + 29x - 4 = A_1(x - 2)^3 + A_2(x + 1)(x - 2)^2 + A_3(x + 1)(x - 2) + A_4(x + 1). \quad (5.4)$$

Fazendo  $x = 2$  em (5.4), temos que:

$$6 = 3A_4, \quad \text{ou seja, } A_4 = 2,$$

de modo análogo, considerando  $x = -1$  em (5.4), temos que:

$$-54 = -27A_1, \quad \text{ou seja, } A_1 = 2.$$

Agora, de (5.4), temos que:

$$\begin{aligned} 3x^3 - 18x^2 + 29x - 4 &= A_1(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + A_2(x^3 - 3x^2 + 4) \\ &+ A_3(x^2 - x - 2) + A_4(x + 1) \\ &= (A_1 + A_2)x^3 + (-6A_1 - 3A_2 + A_3)x^2 \\ &+ (12A_1 - A_3 + A_4)x + (-8A_1 + 4A_2 - 2A_3 + A_4). \end{aligned}$$

Logo, como os coeficientes da esquerda devem ser iguais aos coeficientes correspondentes da direita, desse modo, temos que:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 3 \\ -6A_1 - 3A_2 + A_3 = -18 \\ 12A_1 - A_3 + A_4 = 29 \\ -8A_1 + 4A_2 - 2A_3 + A_4 = -4. \end{cases}$$

Como temos que  $A_1 = 2$ , segue da expressão  $A_1 + A_2 = 3$  que  $A_2 = 1$ .

Por fim da expressão  $-8A_1 + 4A_2 - 2A_3 + A_4 = -4$ , e sabendo que  $A_1 = 2$ ,  $A_2 = 1$  e  $A_4 = 2$ , temos que  $-8 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 2A_3 + 2 = -4$ , assim,  $A_3 = -4$ .

Desse modo, temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^3 - 18x^2 + 29x - 4}{(x+1)(x-2)^3} dx &= \int \left( \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{(x-2)^2} + \frac{A_4}{(x-2)^3} \right) dx \\ &= \int \left( \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-2} + \frac{-3}{(x-2)^2} + \frac{2}{(x-2)^3} \right) dx \\ &= 2 \ln|x+1| + \ln|x-2| + \frac{3}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} + c. \end{aligned}$$

■

**Resultado 3.** Caso os fatores de  $g$  são lineares e quadráticos irredutíveis, e os fatores quadráticos não se repetem, então, a fração parcial correspondente ao fator quadrático  $x^2 + bx + c$  no denominador é da forma:

$$\frac{A_1x + A_2}{x^2 + bx + c}.$$

**Exemplo 5.27.** Calcule a integral  $\int \frac{-2x + 4}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} dx$ .

**Solução.** Usando o resultado 2 e 3, temos que a decomposição em frações parciais tem a forma:

$$\begin{aligned} \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} &= \frac{A_1x+A_2}{x^2+1} + \frac{A_3}{x-1} + \frac{A_4}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(A_1x+A_2)(x-1)^2 + A_3(x-1)(x^2+1) + A_4(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)^2} \\ &= \frac{(A_1+A_3)x^3 + (-2A_1+A_2-A_3+A_4)x^2}{(x^2+1)(x-1)^2} \\ &+ \frac{(A_1-2A_2+A_3)x + (A_2-A_3+A_4)}{(x^2+1)(x-1)^2}, \end{aligned}$$

desse modo, temos que:

$$-2x+4 = (A_1+A_3)x^3 + (-2A_1+A_2-A_3+A_4)x^2 \quad (5.5)$$

$$+ (A_1-2A_2+A_3)x + (A_2-A_3+A_4). \quad (5.6)$$

Logo, de (5.5), como os coeficientes da esquerda devem ser iguais aos coeficientes correspondentes da direita, desse modo, temos que:

$$\begin{cases} A_1 + A_3 = 0 \\ -2A_1 + A_2 - A_3 + A_4 = 0 \\ A_1 - 2A_2 + A_3 = -2 \\ A_2 - A_3 + A_4 = 4. \end{cases}$$

Subtraindo a quarta equação da segunda equação, temos que  $-4 = -2A_1$ , logo,  $A_1 = 2$ . Agora, da primeira equação, temos que  $A_3 = -A_1$  e com  $A_1 = 2$ , tem-se que  $A_3 = -2$ . Na terceira equação, usando que  $A_1 = 2$  e  $A_3 = -2$ , temos que  $A_2 = 1$  e por fim da quarta equação, concluímos que  $A_4 = 1$ . Desse modo, temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx &= \int \left( \frac{A_1x+A_2}{x^2+1} + \frac{A_3}{x-1} + \frac{A_4}{(x-1)^2} \right) dx \\ &= \int \left( \frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx \\ &= \int \left( \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx \\ &= \ln(x^2+1) + \arctan(x) - 2 \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c. \end{aligned}$$

■

## 5.7 Integração por Partes

Existem algumas integrais que são bem complicadas de serem calculadas diretamente, porém se é mais simples calcularmos a primitiva de alguma *parte* da função integrando, fatoramos esta como o produto de duas outras funções com derivadas contínuas. Caso isso seja possível, existe um método muito utilizado para solucionar esse tipo de problema.

**Teorema 5.11. (Integração por Partes)** Se  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  têm derivadas contínuas, então

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = f \cdot g \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx.$$

**Prova.** Basta notar que  $f \cdot g$  é primitiva de  $f \cdot g' + f' \cdot g$  é integrar esta soma usando o Teorema Fundamental do Cálculo. ■

**Observação 5.4.** De modo geral, utilizamos a denotação de  $u$  e  $v$  para as funções. Desta maneira, o teorema pode ser reescrito como:

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

ou, utilizando os diferenciais

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

**Exemplo 5.28.** Calcule a integral  $\int x \operatorname{sen}(x) dx$ .

**Solução.** Usando a fórmula  $\int u dv = uv - \int v du$ , com:

$$u = x, \quad du = dx,$$

$$v = -\cos(x), \quad dv = \operatorname{sen}(x) dx.$$

Então,

$$\int x \operatorname{sen}(x) dx = -x \cos(x) + \int \cos(x) dx = -x \cos(x) + \operatorname{sen}(x) + c.$$

Poderíamos pensar, será que não existe outras opções para  $u$  e  $dv$  nesse exemplo? Vamos analisar as possibilidades:

*Escolha - 1.*  $u = 1$  e  $dv = x \operatorname{sen}(x) dx$ .

Note que essa escolha não serve, pois ainda não sabemos como integrar  $dv = x \operatorname{sen}(x) dx$  para determinarmos  $v$ .

*Escolha - 2.*  $u = x$  e  $dv = \operatorname{sen}(x) dx$ .

Essa escolha é boa, foi a que usamos para resolver o exemplo.

*Escolha - 3.*  $u = x \operatorname{sen}(x)$  e  $dv = dx$ .

Com essa escolha temos:

$$u = x \operatorname{sen}(x), \quad du = (\operatorname{sen}(x) + x \cos(x)) dx,$$

$$v = x, \quad dv = dx,$$

assim, temos:

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{sen}(x) dx &= x \cdot x \operatorname{sen}(x) - \int x(\operatorname{sen}(x) + x \cos(x)) dx \\ &= x^2 \operatorname{sen}(x) - \int x \operatorname{sen}(x) dx + \int x^2 \cos(x) dx,\end{aligned}$$

chegamos em uma integral pior que a inicial, logo essa escolha não é interessante.

*Escolha - 4.*  $u = \operatorname{sen}(x)$  e  $dv = x dx$ .

Com essa escolha temos:

$$\begin{aligned}u &= \operatorname{sen}(x), & du &= \cos(x) dx, \\ v &= \frac{x^2}{2}, & dv &= x dx,\end{aligned}$$

assim, tem-se:

$$\int x \operatorname{sen}(x) dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{sen}(x) - \int \frac{x^2}{2} \cos(x) dx,$$

novamente, chegamos em uma integral pior que a inicial, logo, essa também não é uma boa escolha. ■

De modo geral, escolhemos primeiro  $dv$ , sendo a parte do integrando, incluindo  $dx$  que sabemos integrar de maneira imediata e, por fim,  $u$  que é a parte restante. Lembrando que essa nova técnica resolve um número maior de integrais, contudo, ela não irá necessariamente resolver todo tipo de integral.

**Exemplo 5.29.** Calcule a integral  $\int \ln(x) dx$ .

**Solução.** Observe que é imediato calcular a derivada da função  $\ln(x)$ , logo vamos utilizar a fórmula de integração por partes, com:

$$\begin{aligned}u &= \ln(x), & du &= \frac{1}{x} dx, \\ v &= x, & dv &= dx.\end{aligned}$$

Desta maneira,

$$\begin{aligned}\int \ln(x) dx &= x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \cdot \ln(x) - \int 1 dx \\ &= x \cdot \ln(x) - x.\end{aligned}$$

**Exemplo 5.30.** Calcule a integral  $\int e^x \cdot \cos(x) dx$ . ■

**Solução.** Usando a fórmula de integração por partes, com:

$$u = \cos(x), \quad du = -\operatorname{sen}(x) dx,$$

$$v = e^x, \quad dv = e^x dx.$$

Então,

$$\begin{aligned} \int e^x \cdot \cos(x) dx &= e^x \cdot \cos(x) - \int -e^x \cdot \text{sen}(x) dx \\ &= e^x \cdot \cos(x) + \int e^x \cdot \text{sen}(x) dx. \end{aligned}$$

Observe que o Teorema 5.11 pode ser aplicado novamente na última integral da expressão acima, utilizando as seguintes considerações:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \text{sen}(x), & d\bar{u} &= \cos(x) dx, \\ \bar{v} &= e^x, & d\bar{v} &= e^x dx. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int e^x \cdot \cos(x) dx &= e^x \cdot \cos(x) + \int e^x \cdot \text{sen}(x) dx \\ &= e^x \cdot \cos(x) + e^x \cdot \text{sen}(x) - \int e^x \cdot \cos(x) dx. \end{aligned}$$

Sendo assim, podemos afirmar que  $2 \cdot \int e^x \cdot \cos(x) dx = e^x \cdot \cos(x) + e^x \cdot \text{sen}(x)$ .

Portanto,

$$\int e^x \cdot \cos(x) dx = \frac{e^x [\cos(x) + \text{sen}(x)]}{2} + c.$$

■

# Aplicações

A integral é uma importante ferramenta quando nos referimos ao cálculo de áreas, pois existem infinitas formas que podemos aproximar através de uma função contínua, ou seja, integrável. Faremos agora um estudo sobre as áreas calculadas anteriormente, a fim de comprovarmos os resultados obtidos.

**Exemplo 6.1.** *Encontre a expressão da área ( $A_Q$ ) de um quadrado de lado  $a$ .*

**Solução.** Primeiro vamos definir a função  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $y(x) = a$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Observe que para termos um quadrado de lado  $a$ , basta considerarmos a região entre curva definida por  $y$  e o eixo das abscissas no intervalo  $[0, a]$ .

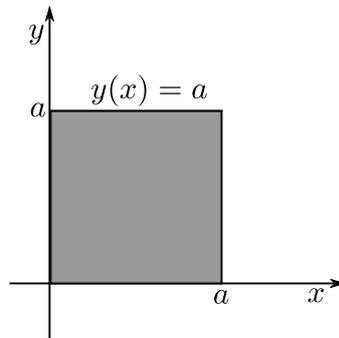


Figura 6.1: Quadrado de Lado  $a$

Observe que  $y$  é contínua, ou seja, integrável em todo o seu domínio. Sendo assim, temos

$$A_Q = \int_0^a y(x)dx = \int_0^a adx = a \cdot \int_0^a 1dx = a \cdot x \Big|_0^a = a \cdot (a - 0) = a^2$$

Portanto, a área  $A_Q$  de um quadrado cujos lados medem  $a$  é determinada pela expressão  $A_Q = a^2$ . ■

**Exemplo 6.2.** *Determine a área ( $A_R$ ) de um retângulo com lados medindo  $a$  e  $b$ .*

**Resolução.** Vamos proceder da mesma forma do exemplo anterior. Definimos a função  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $y(x) = a$ , considerando desta vez  $x \in [0, b]$ . A região formada é exatamente um retângulo de lados  $a$  e  $b$ .

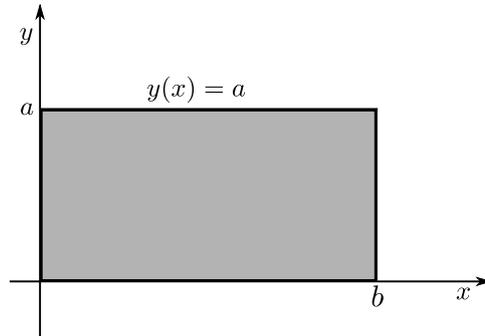


Figura 6.2: Retângulo de Lados  $a$  e  $b$

Dai,

$$A_R = \int_0^b y(x)dx = \int_0^b a dx = a \cdot \int_0^b 1 dx = a \cdot x \Big|_0^b = a \cdot (b - 0) = a \cdot b.$$

Logo,  $A_R = a \cdot b$ . Como já visto no capítulos anteriores.

■

**Exemplo 6.3.** Encontre uma expressão fechada para a área ( $A_P$ ) de um paralelogramo cujo maior lado mede  $b$ , chamado de base, e altura  $h$ .

**Solução.** Para formarmos um paralelogramo, utilizaremos três funções contínuas a fim de uni-las e construir a região desejada. Sejam, então, as funções  $f : [0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y : [x_1, b+x_1] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : [b, b+x_1] \rightarrow \mathbb{R}$  onde

$$f(x) = \frac{h}{x_1} \cdot x, \quad y(x) = h \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{h}{x_1} \cdot (x - b).$$

De acordo com a figura abaixo:

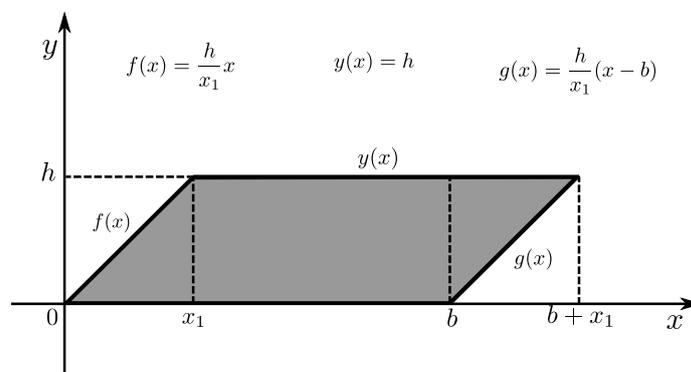


Figura 6.3: Paralelogramo de Base  $b$  e Altura  $h$

temos que a área ( $A_P$ ) procurada é determinada por

$$\int_0^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^b y(x)dx + \int_b^{b+x_1} y(x) - g(x)dx.$$

Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned} A_P &= \int_0^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^b y(x)dx + \int_b^{b+x_1} y(x) - g(x)dx \\ &= \int_0^{x_1} \frac{h}{x_1} x dx + \int_{x_1}^b h dx + \int_b^{b+x_1} h - \frac{h}{x_1}(x-b)dx \\ &= \frac{h}{x_1} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{x_1} + h \cdot x \Big|_{x_1}^b + h \cdot x \Big|_b^{b+x_1} - \frac{h}{x_1} \left( \frac{x^2}{2} - b \cdot x \right) \Big|_b^{b+x_1} \\ &= \frac{h \cdot x_1}{2} + h \cdot b - h \cdot x_1 + h(b+x_1) - h \cdot b - \frac{h}{x_1} \left[ \frac{b^2 + 2bx_1 + x_1^2 - b^2}{2} - b(b+x_1-b) \right] \\ &= \frac{h \cdot x_1}{2} + h \cdot b - \frac{h}{x_1} \left( \frac{2bx_1 + x_1^2}{2} - b \cdot x_1 \right) \\ &= \frac{h \cdot x_1}{2} + h \cdot b - h \cdot \left( b + \frac{x_1}{2} - b \right) \\ &= \frac{h \cdot x_1}{2} + h \cdot b - \frac{h \cdot x_1}{2} \\ &= h \cdot b. \end{aligned}$$

Provando assim, que a área ( $A_P$ ) do paralelogramo de base  $b$  e altura  $h$  é determinada por  $A_P = b \cdot h$ . ■

**Observação 6.1.** Note que para neste raciocínio foi utilizado que  $0 < x_1 \leq b$ . Para os demais casos, basta fazer alguma transformação geométrica e encontrar um paralelogramo equivalente (de mesma área) que se encaixe nesta condição inicial.

**Exemplo 6.4.** Determine a área ( $A_T$ ) do triângulo de base  $b$  e altura  $h$  relativa a este lado.

**Solução.** Vamos considerar que a base deste triângulo esteja sobre o eixo das abscissas e suas extremidades tenham coordenadas  $(0,0)$  e  $(0,b)$ . Agora, seja  $(0,x_1)$  as coordenadas do pé da altura referente a este lado do triângulo que está sobre o eixo- $x$ . Sendo assim, temos dois casos a considerar.

Caso (1). Vamos considerar o caso em que  $x_1 < b$ .

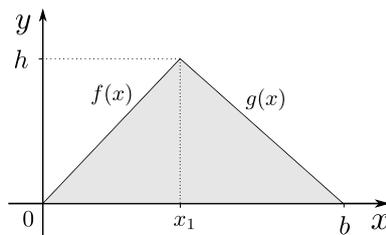


Figura 6.4: Triângulo com  $x_1 < b$

Para determinarmos a área do triângulo basta considerarmos as funções  $f : [0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : [x_1, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , onde

$$f(x) = \frac{h}{x_1} \cdot x \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{h}{b-x_1} \cdot (b-x).$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} A_T &= \int_0^{x_1} \frac{h}{x_1} \cdot x dx + \int_{x_1}^b \frac{h}{b-x_1} \cdot (b-x) dx \\ &= \frac{h}{x_1} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{x_1} + \frac{h}{b-x_1} \cdot \left( bx - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x_1}^b \\ &= \frac{hx_1}{2} + \frac{h}{b-x_1} \left[ b(b-x_1) - \frac{b^2-x_1^2}{2} \right] \\ &= \frac{hb}{2}. \end{aligned}$$

Caso (2). Consideramos agora  $x_1 > b$ .

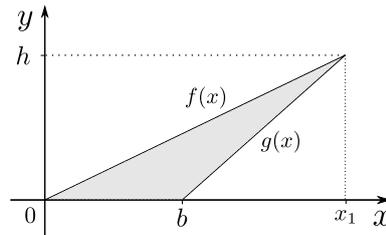


Figura 6.5: Triângulo com  $b < x_1$

Para isso vamos definir as funções  $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : [b, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ , onde

$$f(x) = \frac{h}{x_1} \cdot x \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{h}{x_1-b} \cdot (x-b).$$

Logo a área pretendida do triângulo pode ser escrita por

$$\begin{aligned} A_T &= \int_0^b f(x) dx + \int_b^{x_1} f(x) - g(x) dx \\ &= \int_0^b \frac{h}{x_1} \cdot x dx + \int_b^{x_1} \left[ \frac{h}{x_1} \cdot x - \frac{h(x-b)}{x_1-b} \right] dx \\ &= \int_0^{x_1} \frac{h}{x_1} \cdot x dx - \int_b^{x_1} \frac{h(x-b)}{x_1-b} dx \\ &= \frac{h}{x_1} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{x_1} - \frac{h}{x_1-b} \cdot \left( \frac{x^2}{2} - bx \right) \Big|_b^{x_1} \\ &= \frac{hx_1}{2} - \frac{h}{x_1-b} \left[ \frac{x_1^2-b^2}{2} - b(x_1-b) \right] \\ &= \frac{hb}{2}. \end{aligned}$$

Provando que nos dois casos a área do triângulo pode ser escrita como  $A_T = \frac{b \cdot h}{2}$ , independente da posição do ponto  $x_1$ , ou seja, independe da posição do vértice oposto, desde que seja mantida a distância  $h$  deste vértice em relação à reta suporta que contém a base do triângulo. ■

**Observação 6.2.** Vale ressaltar que se  $x_1 = b$ , então

$$\begin{aligned} A_T &= \int_0^b \frac{h}{b} \cdot x dx \\ &= \frac{h}{b} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^b \\ &= \frac{hb}{2}. \end{aligned}$$

Analogamente, se  $x_1 = 0$ , então

$$\begin{aligned} A_T &= \int_0^b \frac{h}{b} \cdot (b-x) dx \\ &= \frac{h}{b} \cdot \left( bx - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^b \\ &= \frac{h}{b} \cdot \left( b^2 - \frac{b^2}{2} \right) \\ &= \frac{hb}{2}. \end{aligned}$$

Note que não consideramos o caso em que  $x_1 < 0$ , pois este triângulo pode ser refletido em torno do eixo- $y$  e transladado a fim de que tenhamos um triângulo equivalente ao primeiro e que se encaixe no caso (2).

**Exemplo 6.5.** Determine a área ( $A_{TR}$ ) do trapézio cuja base maior mede  $B$ , a menor  $b$  e a altura  $h$ .

**Resolução.** Vamos considerar que a base maior está sobre o eixo das abscissas e suas extremidades têm coordenadas  $(0, 0)$  e  $(0, B)$ . Sejam agora os pontos  $x_1$  e  $x_2$ , com  $x_1 < x_2$ , tais que  $x_2 - x_1 = b$ . Temos vários casos a considerar

Caso (1). Se  $x_1 < x_2 < B$ , então basta definir as funções  $f : [0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : [x_2, B] \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x) = \frac{h}{x_1} \cdot x, \quad y(x) = h \quad \text{e} \quad g(x) = -\frac{h}{B-x_2}(x-B).$$

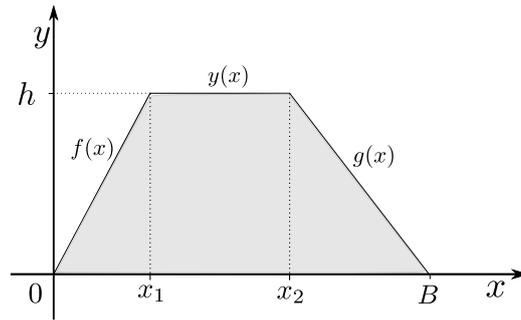


Figura 6.6: Trapézio com  $x_1 < x_2 < B$

Desta maneira conseguimos construir o trapézio desejado e para calcular a sua área basta somar as integrais correspondentes. Logo

$$\begin{aligned}
 A_{TR} &= \int_0^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} y(x)dx + \int_{x_2}^B g(x)dx \\
 &= \int_0^{x_1} \frac{h}{x_1} \cdot x dx + \int_{x_1}^{x_2} h dx + \int_{x_2}^B -\frac{h}{B-x_2}(x-B)dx \\
 &= \frac{h}{x_1} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{x_1} + hx \Big|_{x_1}^{x_2} - \frac{h}{B-x_2} \left( \frac{x^2}{2} - Bx \right) \Big|_{x_2}^B \\
 &= \frac{hx_1}{2} + h(x_2 - x_1) - \frac{h}{B-x_2} \left[ \frac{B^2 - x_2^2}{2} - B(B-x_2) \right] \\
 &= \frac{hx_1}{2} + h(x_2 - x_1) - \frac{h(B+x_2)}{2} + hB \\
 &= h \cdot \left( \frac{B+b}{2} \right) \\
 &= \frac{(B+b) \cdot h}{2}.
 \end{aligned}$$

Lembrando que temos a igualdade  $x_2 - x_1 = b$ .

Caso (2). Se  $x_1 < B < x_2$ , então basta definir as funções  $f : [0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : [B, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x) = \frac{h}{x_1} \cdot x, \quad y(x) = h \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{h}{x_2 - B}(x - B).$$

Agora podemos escrever a área desejada de acordo com essas funções.

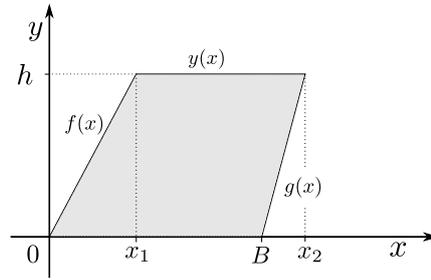


Figura 6.7: Trapézio com  $x_1 < B < x_2$

$$\begin{aligned}
 A_{TR} &= \int_0^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^B y(x)dx + \int_B^{x_2} y(x) - g(x)dx \\
 &= \int_0^{x_1} \frac{h}{x_1} \cdot xdx + \int_{x_1}^B hdx + \int_B^{x_2} \left[ h - \frac{h}{x_2 - B}(x - B) \right] dx \\
 &= \int_0^{x_1} \frac{h}{x_1} \cdot xdx + \int_{x_1}^B hdx + \int_B^{x_2} hdx - \int_B^{x_2} \frac{h}{x_2 - B}(x - B)dx \\
 &= \int_0^{x_1} \frac{h}{x_1} \cdot xdx + \int_{x_1}^{x_2} hdx - \int_B^{x_2} \frac{h}{x_2 - B}(x - B)dx \\
 &= \frac{h}{x_1} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{x_1} + hx \Big|_{x_1}^{x_2} - \frac{h}{x_2 - B} \left( \frac{x^2}{2} - Bx \right) \Big|_B^{x_2} \\
 &= \frac{hx_1}{2} + h(x_2 - x_1) - \frac{h}{x_2 - B} \left[ \frac{x^2 - B^2}{2} - B(x_2 - B) \right] \\
 &= \frac{hx_1}{2} + h(x_2 - x_1) - \frac{h(B + x_2)}{2} + hB \\
 &= h \cdot \left[ B + (x_2 - x_1) - \frac{B + (x_2 - x_1)}{2} \right] \\
 &= h \cdot \left[ \frac{B + (x_2 - x_1)}{2} \right] \\
 &= h \cdot \left( \frac{B + b}{2} \right) \\
 &= \frac{(B + b) \cdot h}{2}.
 \end{aligned}$$

Vamos agora para mais um caso a ser analisado.

Caso (3). Se  $B < x_1 < x_2$ , então basta definir as funções  $f : [0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : [B, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x) = \frac{h}{x_1} \cdot x, \quad y(x) = h \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{h}{x_2 - B}(x - B).$$

Assim, podemos determinar a área do trapézio caracterizado por essas condições.

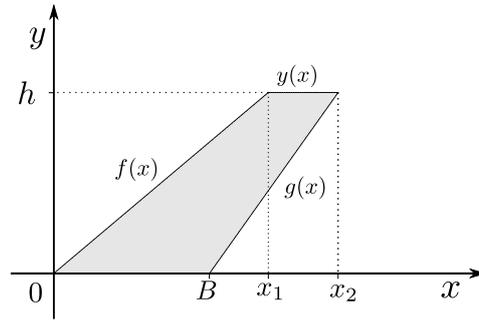


Figura 6.8: Trapézio com  $B < x_1 < x_2$

$$\begin{aligned}
 A_{TR} &= \int_0^B f(x)dx + \int_B^{x_1} f(x) - g(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} y(x) - g(x)dx \\
 &= \int_0^B f(x)dx + \int_B^{x_1} f(x)dx - \int_B^{x_1} g(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} y(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx \\
 &= \int_0^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} y(x)dx - \int_B^{x_2} g(x)dx \\
 &= \int_0^{x_1} \frac{h}{x_1} \cdot x dx + \int_{x_1}^{x_2} h dx - \int_B^{x_2} \frac{h}{x_2 - B} (x - B) dx \\
 &= \frac{h}{x_1} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{x_1} + hx \Big|_{x_1}^{x_2} - \frac{h}{x_2 - B} \left( \frac{x^2}{2} - Bx \right) \Big|_B^{x_2} \\
 &= \frac{hx_1}{2} + h(x_2 - x_1) - \frac{h}{x_2 - B} \left[ \frac{x^2 - B^2}{2} - B(x_2 - B) \right] \\
 &= \frac{hx_1}{2} + h(x_2 - x_1) - \frac{h(B + x_2)}{2} + hB \\
 &= h \cdot \left[ B + (x_2 - x_1) - \frac{B + (x_2 - x_1)}{2} \right] \\
 &= h \cdot \left[ \frac{B + (x_2 - x_1)}{2} \right] \\
 &= h \cdot \left( \frac{B + b}{2} \right) \\
 &= \frac{(B + b) \cdot h}{2}.
 \end{aligned}$$

Caso (4). Vejamos o que acontece quando há uma igualdade entre cada elemento. Se  $x_1 = 0$ , temos que  $x_2 = b < B$ , pois caso contrário não teríamos a configuração inicialmente apresentada. Sejam então  $y : [0, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : [x_2, B] \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$y(x) = h \quad \text{e} \quad g(x) = -\frac{h}{B - x_2}(x - B).$$

Daí,  $A_{TR} = \int_0^{x_2} y(x)dx + \int_{x_2}^B g(x)dx$ . Logo, resolvendo as integrais, obtemos

$$\begin{aligned}
A_{TR} &= \int_0^b h dx + \int_b^B \frac{h}{B-b} (B-x) dx \\
&= hx \Big|_0^b + \frac{h}{B-b} \left( Bx - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_b^B \\
&= hb + hB - h \cdot \frac{B+b}{2} \\
&= h \cdot (B+b) - h \cdot \frac{B+b}{2} \\
&= \frac{(B+b) \cdot h}{2}.
\end{aligned}$$

Caso (5). Se por acaso, a igualdade se faz em  $x_2 = B$ , basta considerarmos as funções  $f : [0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : [x_1, B] \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que

$$f(x) = \frac{h}{x_1} \cdot x \quad \text{e} \quad y(x) = h.$$

Temos que a área pode ser escrita por

$$\begin{aligned}
A_{TR} &= \int_0^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} y(x) dx \\
&= \int_0^{x_1} \frac{h}{x_1} \cdot x dx + \int_{x_1}^{x_2} h dx \\
&= \frac{h}{x_1} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{x_1} + hx \Big|_{x_1}^{x_2} \\
&= \frac{hx_1}{2} + h(x_2 - x_1) \\
&= h \cdot \frac{2(x_2 - x_1) + x_1}{2} \\
&= h \cdot \frac{b + B}{2} \\
&= \frac{(B+b) \cdot h}{2}.
\end{aligned}$$

Caso (6). Finalmente vamos considerar o caso em que  $x_1 = B$ . Teremos uma situação parecida com o caso (3), no entanto não haverá a integral intermediária. Definimos as funções  $f : [0, B] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y : [B, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : [B, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x) = \frac{h}{B} \cdot x, \quad y(x) = h \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{h}{x_2 - B} (x - B).$$

Calculando as integrais correspondentes, temos

$$\begin{aligned}
A_{TR} &= \int_0^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} y(x) - g(x)dx \\
&= \int_0^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} y(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx \\
&= \int_0^{x_1} \frac{h}{x_1} \cdot xdx + \int_{x_1}^{x_2} hdx - \int_B^{x_2} \frac{h}{x_2 - B}(x - B)dx \\
&= \frac{h}{x_1} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{x_1} + hx \Big|_{x_1}^{x_2} - \frac{h}{x_2 - B} \left( \frac{x^2}{2} - Bx \right) \Big|_B^{x_2} \\
&= \frac{hx_1}{2} + h(x_2 - x_1) - \frac{h}{x_2 - B} \left[ \frac{x_2^2 - B^2}{2} - B(x_2 - B) \right] \\
&= h \cdot \left( \frac{B + b}{2} \right) \\
&= \frac{(B + b) \cdot h}{2}.
\end{aligned}$$

Provamos assim, que a área do trapézio depende apenas dos comprimentos de suas bases ( $B$  e  $b$ ) e de sua altura ( $h$ ).

■

**Observação 6.3.** Assim como no caso do triângulo. As demais possibilidades de configuração para o trapézio pode ser representada por algum caso anterior desde que façamos alguma transformação geométrica para encontrarmos um trapézio equivalente ao procurado e que se encaixe em algum caso descrito.

Para finalizar os casos iniciais, falta ainda determinarmos a área de um círculo qualquer. Vejamos como proceder neste caso especificamente.

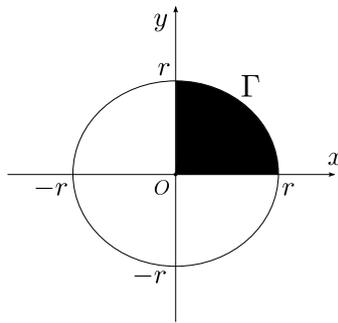
**Exemplo 6.6.** Determine agora a área do círculo  $\Gamma$  de raio  $r$ , determinado pela equação

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

**Solução.** Sem perda de generalidade, supomos, nesse exemplo, que o círculo está centrado na origem. Note, além disso, que o círculo também é simétrico em relação aos dois eixos. Desse modo a área total é quatro vezes a área do primeiro quadrante. Determinando  $y \geq 0$ , onde da equação do círculo, temos:

$$y^2 = r^2 - x^2 \quad \text{ou} \quad y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq r.$$

Novamente, utilizando a substituição trigonométrica  $x = r \cdot \cos(\theta)$ , temos  $dx = -r \cdot \text{sen}(\theta)$ . Em que  $\theta$  é tal que  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ . Assim,  $\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - r^2 \cos^2(\theta)} = r \sqrt{\text{sen}^2(\theta)} = r \cdot \text{sen}(\theta)$ . Portanto, a área

Figura 6.9: Gráfico do Círculo  $\Gamma$ 

da círculo  $\Gamma$  é:

$$\begin{aligned}
 A_C &= 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx \\
 &= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 r \operatorname{sen}(\theta) [-r \operatorname{sen}(\theta)] d\theta \\
 &= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -r^2 \operatorname{sen} 2(\theta) d\theta \\
 &= -4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta \\
 &= -2r^2 \left( \theta - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 \\
 &= -2r^2 \left( -\frac{\pi}{2} - 0 + 0 \right) \\
 &= \pi r^2 \text{ u.a.}
 \end{aligned}$$

Logo, a área da círculo  $\Gamma$  determinado pela equação  $x^2 + y^2 = r^2$  é  $\pi r^2$ . Este resultado comprova que a área do círculo  $\Gamma$  depende apenas do tamanho do seu raio e que a expressão encontrada anteriormente é a mesma para o caso atual. ■

Vamos agora nos empenhar e calcular áreas que seriam complicadas de se ter aproximações de suas curvas por meio de polígonos, fazendo com que sejam utilizadas ferramentas mais avançadas, como a integral.

**Observação 6.4.** *Determine a área ( $A$ ) da região entre o eixo das abscissas (eixo- $x$ ) e o gráfico da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ , tal que  $x \in [-1, 2]$ .*

**Solução.** Primeiramente, vamos analisar o gráfico desta função nesse intervalo para ver seu comportamento e analisarmos como proceder com o cálculo da área.

É notório que neste intervalo específico a função tem dois momentos distintos. O primeiro deles é quando temos  $-1 \leq 0$ , onde a função é sempre maior ou igual a zero e o segundo quando  $0 \leq 2$ , com  $f(x) \leq 0$ . Desta maneira, a área entre a função  $f$  e o eixo- $x$  pode ser determinada por

$$\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 -f(x) dx.$$

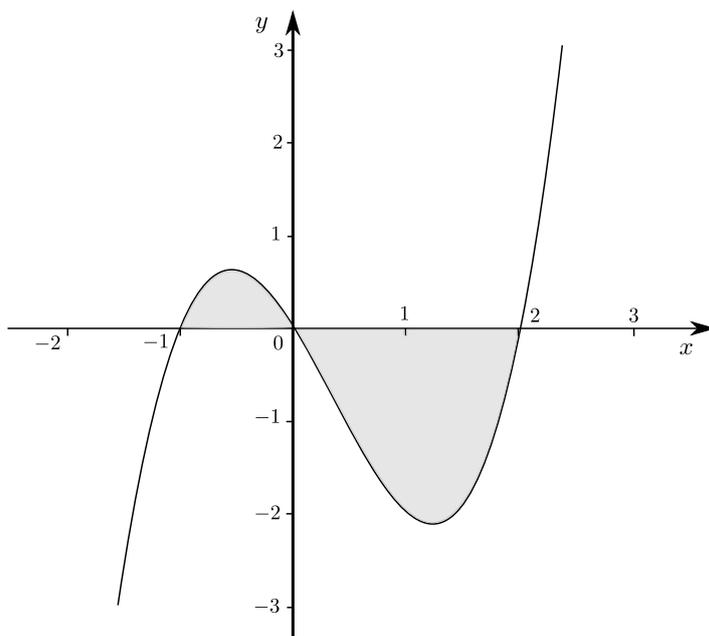


Figura 6.10: Gráfico da Função  $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

Observe que aparece um sinal negativo no cálculo quando a função assume valores negativos. Item já discutido anteriormente.

Continuando com o cálculo, temos

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^2 -f(x)dx \\
 &= \int_{-1}^0 x^3 - x^2 - 2x dx - \int_0^2 x^3 - x^2 - 2x dx \\
 &= \left. \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \right|_{-1}^0 - \left. \left( \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \right|_0^2 \\
 &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 - \left( \frac{16}{4} - \frac{8}{3} - 4 \right) \\
 &= -\frac{17}{4} + \frac{7}{3} + 5 \\
 &= \frac{37}{12}.
 \end{aligned}$$

Logo a área entre a curva definida por  $x^3 - x^2 - 2x$  e o eixo das abscissas é  $37/12$  u.a.

■

**Exemplo 6.7.** Determine a área ( $A$ ) da região entre o eixo- $x$  e o gráfico da função  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $f(x) = 1/x$ , com  $1 \leq x \leq 20$ .

**Solução.** Novamente iremos dar uma olhada no gráfico para saber seu comportamento.

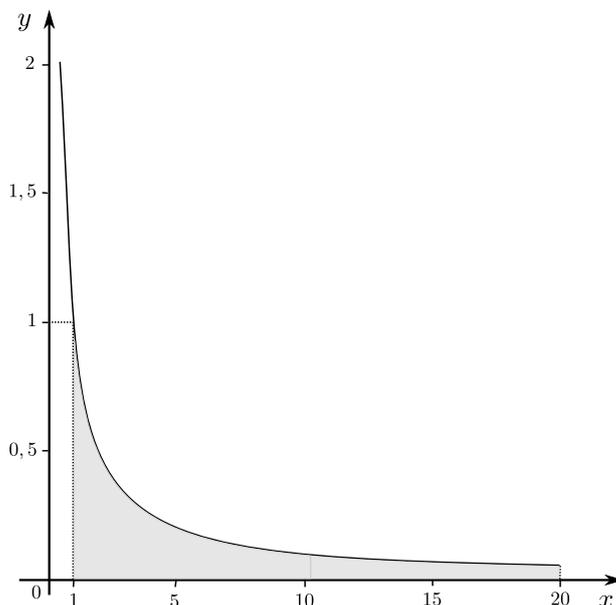


Figura 6.11: Gráfico da Função  $f(x) = \frac{1}{x}$

Observe que  $f(x) \geq 0$  para todo  $x > 0$ . Sendo assim, a área da região destacada pode ser calculada por

$$\begin{aligned}
 A &= \int_1^{20} f(x) dx \\
 &= \int_1^{20} \frac{1}{x} dx \\
 &= \ln|x| \Big|_1^{20} \\
 &= \ln(20) \text{ u. a.}
 \end{aligned}$$

■

Vale salientar que a função  $F(x) = \ln|x|$  é a primitiva de  $f(x) = 1/x$  para todo  $x \neq 0$ , pois  $F'(x) = f(x)$  para todo número real  $x \neq 0$ . Logo se tivéssemos uma variável  $t$ , independente de  $x$ , no lugar da constante 20, teríamos como resposta  $\ln(t)$ . *Utilizando essa informação, a função logaritmo pode ser definida como sendo*

$$\ln(x) = \int_1^x f(t) dt.$$

Note que tanto faz a variável que utilizamos para calcularmos a integral, já que esta não interfere no resultado.

**Exemplo 6.8.** *Determine a área ( $A$ ) da região entre o eixo- $x$  e o gráfico da função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $f(x) = \sin^2(x)$ , com  $0 \leq x \leq 2\pi$ .*

**Solução.** É trivial notar que  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e que  $f$  é contínua, também para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Sendo assim, basta calcularmos a integral no intervalo desejado, mas vejamos o gráfico para termos noção do que está sendo calculado.

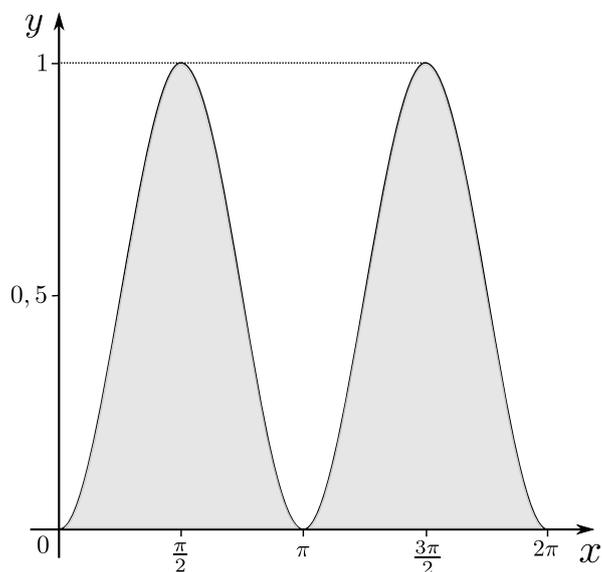


Figura 6.12: Gráfico da Função  $f(x) = \text{sen}^2(x)$

Antes de prosseguirmos com o cálculo da área é importante perceber que vale a igualdade

$$\text{sen}^2(x) = \frac{1}{2} \cdot [1 - \cos(2x)].$$

Sendo assim, podemos seguir com o cálculo da área por meio da integral.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ &= \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(x) dx \\ &= \int_0^{2\pi} [1 - \cos(2x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} [1 - \cos(2x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[ x - \frac{\text{sen}(2x)}{2} \right] \Big|_0^{2\pi} \\ &= \pi \text{ u.a.} \end{aligned}$$

■

**Exemplo 6.9.** Determine agora a área ( $A$ ) da região delimitada pelas curvas  $x = 12y^2 - 12y^3$  e  $x = 2y^2 - 2y$ , tal que  $0 \leq y \leq 1$ .

**Solução.** Definiremos primeiramente um referencial para cada um das curvas. Sejam  $f(y) =$

$12y^2 - 12y^3$  e  $g(y) = 2y^2 - 2y$ . Agora, vejamos o gráfico destas funções, reparando que se considerássemos a variável  $x$  como sendo independente, estas curvas não seriam funções, pois teríamos alguns  $x$  com mais de uma imagem. Porém, se considerarmos a variável  $y$  como sendo independente, as curvas formam funções contínuas e, conseqüentemente, integráveis.

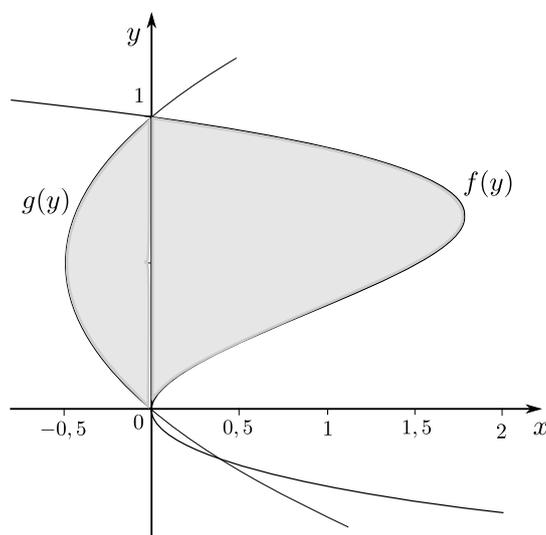


Figura 6.13: Gráfico das Curvas  $x = 12y^2 - 12y^3$  e  $x = 2y^2 - 2y$

Dai, a área ( $A$ ) desejada pode ser escrita por

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^1 [f(y) - g(y)] dy \\
 &= \int_0^1 [12y^2 - 12y^3 - (2y^2 - 2y)] dy \\
 &= \int_0^1 [10y^2 - 12y^3 + 2y] dy \\
 &= \left[ \frac{10y^3}{3} - \frac{12y^4}{4} + \frac{2y^2}{2} \right] \Big|_0^1 \\
 &= \frac{10}{3} - 3 + 1 \\
 &= \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

Portanto, a área pretendida mede  $\frac{4}{3}$  u.a.

■

## 6.1 Casos Interessantes

Nas páginas anteriores listamos muitas informações sobre a integral e suas aplicações nos casos mais simples, a fim de provarmos resultados obtidos previamente e aprendermos uma nova ferramenta para o

cálculo de área de figuras e formas. Focaremos, agora, em exercícios mais elaborados sobre o tema.

**Exemplo 6.10.** A área marcada  $B$  é equivalente a três vezes a área marcada  $A$ . Determine qual deve ser o valor de  $b$ , sabendo que  $a = \ln(4)$ .

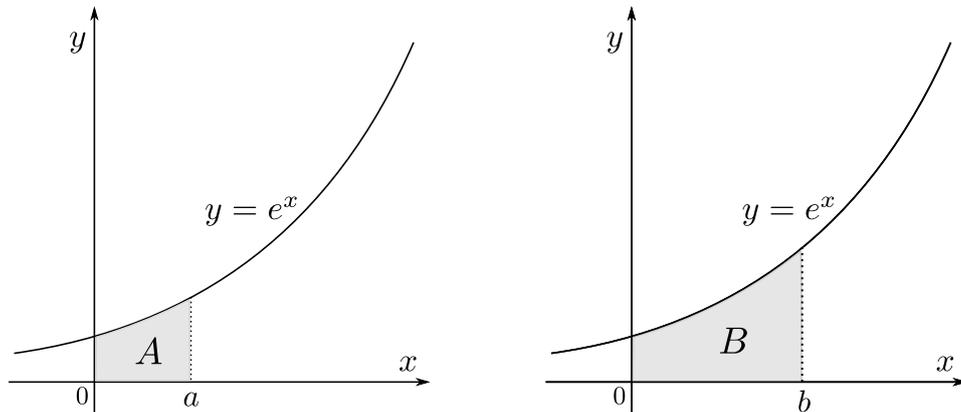


Figura 6.14: Gráfico de  $e^x$  em  $[0, a]$  e  $[0, b]$

**Resolução.** Sabemos que  $3A = B$ , ou seja,  $3 \cdot \int_0^a e^x dx = \int_0^b e^x dx$ . Sendo assim, temos

$$\begin{aligned} 3 \cdot \int_0^a e^x dx = \int_0^b e^x dx &\Rightarrow 3 \cdot e^x \Big|_0^a = e^x \Big|_0^b \\ &\Rightarrow 3 \cdot (e^a - 1) = e^b - 1 \\ &\Rightarrow 3 \cdot e^a - 2 = e^b \\ &\Rightarrow b = \ln(3 \cdot e^a - 2) \\ &\Rightarrow b = \ln(3 \cdot e^{\ln(4)} - 2) \\ &\Rightarrow b = \ln(3 \cdot 4 - 2) \\ &\Rightarrow b = \ln(10). \end{aligned}$$

■

**Exemplo 6.11.** Se um objeto se desloca ao longo de uma reta com função posição  $s(t)$ , então sua velocidade é  $v(t) = s'(t)$ . Logo

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = s(t_2) - s(t_1)$$

é a mudança de posição, ou deslocamento, da partícula durante o período de tempo  $t_1$  a  $t_2$ , pelo Teorema Fundamental do Cálculo, considerando um sentido como sendo positivo, por exemplo, da esquerda para a direita. Por outro lado, se quisermos calcular a distância percorrida durante o intervalo de tempo, teremos de considerar os intervalos onde  $v(t) \geq 0$  (a partícula move-se para a direita) e também os intervalos quando  $v(t) \leq 0$  (a partícula move-se para a esquerda). Em ambos os casos a distância é calculada integrando-se  $|v(t)|$ , a velocidade escalar. Portanto,

$$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)| dt = \text{distância total percorrida no intervalo de tempo } t_1 \text{ a } t_2.$$

Seja então uma partícula que se move ao longo de uma reta de tal forma que sua velocidade no instante  $t$  é determinada por  $v(t) = t^2 - t - 6$  (medida em metros por segundo).

(a) Ache o deslocamento da partícula durante o período de tempo  $1 \leq t \leq 4$ ;

(b) Ache a distância percorrida durante esse período de tempo.

**Solução.** (a) De acordo com o que foi definido, temos que encontrar o resultado da expressão  $s(4) - s(1)$ . Ora, esta foi definida como a integral da função velocidade neste intervalo de tempo. Sendo assim,

$$\begin{aligned} s(4) - s(1) &= \int_1^4 v(t) dt \\ &= \int_1^4 (t^2 - t - 6) dt \\ &= \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t \right) \Big|_1^4 \\ &= -\frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Isso mostra que a partícula moveu-se 4,5 metros para a esquerda.

(b) Observe que  $v(t) = t^2 - t - 6 = (t - 3)(t + 2)$ , logo  $v(t) \leq 0$  no intervalo  $[1, 3]$  e  $v(t) \geq 0$  em  $[3, 4]$ . Assim a função a distância percorrida é

$$\begin{aligned} \int_1^4 |v(t)| dt &= \int_1^3 -v(t) dt + \int_3^4 v(t) dt \\ &= -\int_1^3 (t^2 - t - 6) dt + \int_3^4 (t^2 - t - 6) dt \\ &= \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t \right) \Big|_3^4 - \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t \right) \Big|_1^3 \\ &= \frac{4^3 - 3^3}{3} - \frac{4^2 - 3^2}{2} - 6 \cdot (4 - 3) - \left[ \frac{3^3 - 1^3}{3} - \frac{3^2 - 1^2}{2} - 6 \cdot (3 - 1) \right] \\ &= \frac{11}{3} + \frac{1}{2} + 6 \\ &= \frac{61}{6} \approx 10,7 \text{ metros.} \end{aligned}$$

■

**Exemplo 6.12.** As fronteiras da região sombreada são o eixo- $y$ , a reta  $y = 1$  e a curva  $y = \sqrt[4]{x}$ . Ache a área da região sombreada. Dica: Escreva  $x$  em função de  $y$  e faça a integral em relação a  $y$ .

**Solução.** Este é um exemplo de que se calcularmos a área através da integral do jeito que estamos acostumados, ou seja, em relação ao diferencial de  $x$ , teríamos uma dificuldade maior, já que trabalharíamos com raiz quarta de  $x$  e o resultado da integral também envolveria raízes. No entanto, o próprio

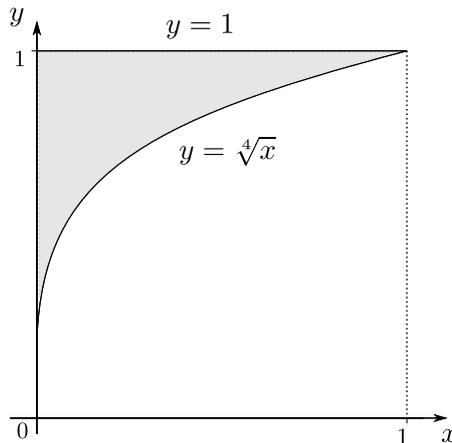


Figura 6.15: Gráfico entre  $y = 1$  e  $y = \sqrt[4]{x}$

exemplo nos dá uma dica muito interessante e eficaz. A "troca" da variável independente nos mantém com a mesma região e, além disso, nos facilita o cálculo da área.

Nosso objetivo é escrever  $x$  em função de  $y$  e analisar as curvas. Se consideramos  $y$  como sendo a variável independente, então a região que queremos nada mais é do que aquela sob a curva  $x = y^4$ , onde  $y$  varia de 0 a 1. Deste modo, a área pretendida é

$$\int_0^1 y^4 dy = \frac{y^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{5}.$$

■

**Exemplo 6.13.** *Os economistas usam uma distribuição acumulada chamada curva de Lorenz para discutir a distribuição de renda entre as famílias em um dado país. Tipicamente, uma curva de Lorenz é definida no intervalo  $[0, 1]$ , tem extremidades  $(0, 0)$  e  $(1, 1)$  e é contínua, crescente e côncava para cima. Os pontos sobre essa curva são determinados classificando-se as famílias pela renda e então calculando o percentual de famílias cuja renda é menor ou igual a um percentual dado da renda total do país. Por exemplo, o ponto  $(a/100, b/100)$  está sobre a curva de Lorenz se  $a\%$  de famílias recebe menos do que ou igual a  $b\%$  da renda total. A igualdade absoluta da distribuição de renda ocorreria se a parte mais baixa  $a\%$  das famílias recebesse  $a\%$  de renda e, nesse caso, a curva de Lorenz seria a reta  $y = x$ . A área entre a curva de Lorenz e a reta  $y = x$  mede quanto a distribuição de renda difere da igualdade absoluta. O coeficiente de desigualdade é a razão da área da curva de Lorenz e a reta  $y = x$  para a área sob  $y = x$ .*

(a) *Mostre que o coeficiente de desigualdade é o dobro da área entre a curva de Lorenz e a reta  $y = x$ , isto é, mostre que o coeficiente de desigualdade é  $\int_0^1 [x - L(x)] dx$ .*

(b) *A distribuição de renda para um certo país está representada pela curva de Lorenz definida pela equação*

$$L(x) = \frac{5}{12}x^2 + \frac{7}{12}x.$$

*Qual é a porcentagem da renda total recebida pelas 50% das famílias que recebem menos? Encontre o coeficiente de desigualdade.*

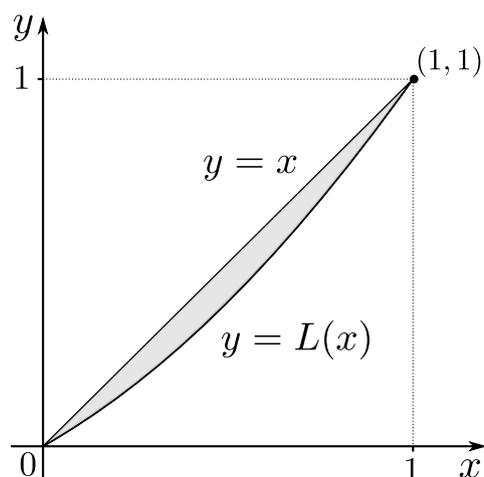


Figura 6.16: Gráfico de  $y = x$  e Curva de Lorenz  $L(x)$

**Resolução.** Sejam  $A$  a área entre a curva de Lorenz e a reta  $y = x$  e  $\rho =$  coeficiente de desigualdade. Sabendo que  $A$  é determinada por  $\int_0^1 [x - L(x)]dx$ , temos a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
 \rho &= \frac{\text{área entre as curvas } y = x \text{ e } L(x)}{\text{área abaixo da curva } y = x} \\
 &= \frac{\int_0^1 [x - L(x)]dx}{\int_0^1 x dx} \\
 &= \frac{\int_0^1 [x - L(x)]dx}{\left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1} \\
 &= \frac{\int_0^1 [x - L(x)]dx}{\frac{1}{2}} \\
 &= 2 \cdot \int_0^1 [x - L(x)]dx.
 \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

(b) Para calcularmos a porcentagem de renda total devemos apenas calcular o valor da curva de Lorenz para 50% da população, lembrando que  $50\% = 1/2$ . Sendo assim, temos que a renda desta parte da população neste país será

$$\begin{aligned}
 L\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{5}{12}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{12}\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{5}{48} + \frac{7}{24} \\
 &= \frac{19}{48} \approx 0,40.
 \end{aligned}$$

Quanto ao coeficiente de desigualdade  $\rho$ , devemos calcular  $2 \cdot \int_0^1 [x - L(x)] dx$ . Logo

$$\begin{aligned}
 \rho &= 2 \cdot \int_0^1 \left[ x - \left( \frac{5}{12}x^2 + \frac{7}{12}x \right) \right] dx \\
 &= 2 \cdot \left[ \left( \frac{x^2}{2} - \frac{5}{12} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{7}{12} \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 \right] \\
 &= 2 \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{3} - \frac{7}{12} \cdot \frac{1}{2} \right) \\
 &= 2 \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{5}{36} - \frac{7}{24} \right) \\
 &= 2 \cdot \left( \frac{5}{72} \right) \\
 &= \frac{5}{36}.
 \end{aligned}$$

Neste país em específico, temos 50% da população recebendo no máximo 40% da renda total do país, no qual o coeficiente de desigualdade é  $5/36 \approx 0,1389$ .

■

**Exemplo 6.14.** A figura abaixo mostra uma região formada por todos os pontos dentro de um quadrado que estão mais próximos do seu centro que de seus lados. Ache a área dessa região.

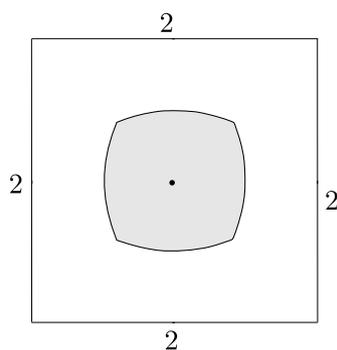


Figura 6.17: Região com Pontos mais Próximos ao Centro

**Resolução.** Antes de realizar qualquer tipo de cálculo devemos identificar como foi formada esta região. Para isso colocaremos o centro do quadrado no ponto  $(0,0)$  do plano. Assim, a região de interesse está representada na Figura 6.18.

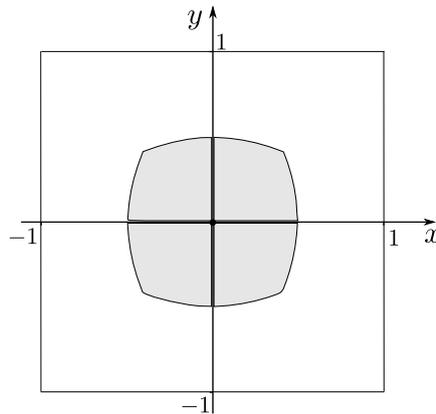


Figura 6.18: Região Centralizada no Plano

Note que a região é simétrica em cada quadrante, logo iremos nos concentrar em calcular a área no primeiro quadrante e posteriormente multiplicaremos este resultado por 4. Agora, devemos entender como essa região foi formada para podermos calcular a sua área.

Sejam a origem do plano o ponto  $O$ , com coordenadas  $(0, 0)$ ,  $d(P, Q)$  a distância entre um ponto qualquer  $P$  e outro  $Q$  e  $d(P, r)$  a distância entre um ponto  $P$  e uma reta  $r$ . Sabe-se que a distância entre a origem do plano e um ponto  $P = (x, y)$  qualquer do plano é dada por  $d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Os lados do quadrado no primeiro quadrante são formados pelas curvas  $y = 1$  e  $x = 1$ . Sendo assim as distâncias entre um ponto  $P$  qualquer e cada um dos lados, pode ser dada pela seguinte expressão:  $d(P, x = 1) = \sqrt{(1 - x)^2 + (y - y)^2} = 1 - x$ . Analogamente,  $d(P, y = 1) = 1 - y$ . Para que a distância do ponto a origem seja a menor das três então teremos duas relações simultâneas:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} < 1 - x &\Rightarrow x^2 + y^2 < 1 - 2x + x^2 \\ &\Rightarrow y^2 < 1 - 2x \\ &\Rightarrow y < \sqrt{1 - 2x}. \end{aligned}$$

Por outro lado, devemos respeitar também a segunda desigualdade. Assim,

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} < 1 - y &\Rightarrow x^2 + y^2 < 1 - 2y + y^2 \\ &\Rightarrow x^2 < 1 - 2y \\ &\Rightarrow y < \frac{1 - x^2}{2}. \end{aligned}$$

Dessa maneira a nossa figura foi construída a partir dessas duas relações, ou seja, calcularmos a área da figura no primeiro quadrante é o mesmo que calcular a área sob a interseção dessas duas regiões formadas pelas curvas.

Para isso vamos precisar encontrar o ponto de interseção, pois assim, basta dividir a região e duas e calcularmos as integrais. Bem, as curvas mostram os pontos equidistantes de cada reta ao centro da figura.

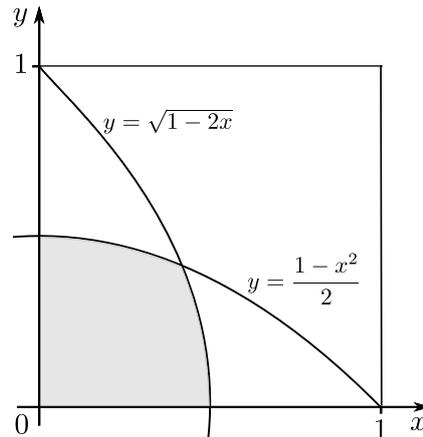


Figura 6.19: Primeiro Quadrante da Região

Logo neste ponto de interseção das curvas temos um ponto  $P$  tal que  $d(P, O) = d(P, x = 1) = d(P, y = 1)$ . Sendo assim, podemos escrever  $1 - x = 1 - y$ , ou seja,  $x = y$ . Logo,  $d(P, O) = \sqrt{2x^2} = x \cdot \sqrt{2}$ , pois  $|x| = x$  no primeiro quadrante. Portanto,  $d(P, x = 1) = x \cdot \sqrt{2} = 1 - x$ , isto é,  $x = \sqrt{2} - 1$ , determinando assim o ponto  $(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - 1)$  como sendo a interseção das duas curvas.

Daí, a área da região destacada no primeiro quadrante pode ser calculada por

$$\int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{1-x^2}{2} dx + \int_{\sqrt{2}-1}^{1/2} \sqrt{1-2x} dx.$$

Vamos calcular separadamente cada uma delas. Começando pela que aparece primeiro na fórmula e chamando o resultado de (1), temos

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{1-x^2}{2} dx &= \frac{1}{2} \cdot \left( x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}-1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[ \sqrt{2} - 1 - \frac{(\sqrt{2}-1)^3}{3} \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}-1}{2} - \frac{(\sqrt{2}-1)^3}{6}. \end{aligned} \tag{1}$$

Seguiremos agora para a segunda integral, mas para isso devemos fazer uma substituição simples,  $u = 1 - 2x$ . Daí,  $dx = (-1/2)du$  e temos como limites de integração de  $3 - 2\sqrt{2}$  até 0. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{2}-1}^{1/2} \sqrt{1-2x} \, dx &= \int_{3-2\sqrt{2}}^0 \sqrt{u}(-1/2)du \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{u^3} \cdot \frac{2}{3} \Big|_{3-2\sqrt{2}}^0 \\
&= \frac{(3-2\sqrt{2})^{3/2}}{3} \\
&= \frac{(2-2\sqrt{2}+1)^{3/2}}{3} \\
&= \frac{(\sqrt{2}-1)^{2 \cdot \frac{3}{2}}}{3} \\
&= \frac{(\sqrt{2}-1)^3}{3}. \tag{2}
\end{aligned}$$

Unindo os dois resultados, o que queremos, a princípio é (1) + (2). Logo

$$\begin{aligned}
(1) + (2) &= \frac{\sqrt{2}-1}{2} - \frac{(\sqrt{2}-1)^3}{6} + \frac{(\sqrt{2}-1)^3}{3} \\
&= \frac{\sqrt{2}-1}{2} - \frac{5 \cdot \sqrt{2}-7}{6} + \frac{5 \cdot \sqrt{2}-7}{3} \\
&= \frac{3 \cdot \sqrt{2}-3}{6} - \frac{5 \cdot \sqrt{2}-7}{6} + \frac{10 \cdot \sqrt{2}-14}{6} \\
&= \frac{4 \cdot \sqrt{2}-5}{3}.
\end{aligned}$$

Como a área da região inicial é igual a 4 vezes a área encontrada, basta multiplicarmos este resultado para determinarmos o valor da área pretendida.

Portanto, a área daquela região é

$$4 \cdot \frac{4 \cdot \sqrt{2}-5}{3} = \frac{16 \cdot \sqrt{2}-20}{3}.$$

■

# Considerações Finais

---

Sabemos que o cálculo de áreas é bem vasto, não só no campo da Matemática, mas também de outras ciências, como Física e Economia. No entanto, os métodos foram apresentados e desenvolvidos à medida que as necessidades foram surgindo.

Nas escolas brasileiras esse conteúdo é passado, de forma geral, de maneira bem superficial, através do cálculo de áreas como de poligonais fechadas, elipses e círculos. Para solucionar esse problema, ou pelo menos uma boa parte, é necessária uma melhor formação de professores e incentivar estudos que tratem dessa temática. De acordo com Neves (2012), as notações utilizadas pelos professores sobre Geometria “provocam reflexões em todo o grupo de formadores de professores que atuam no curso, uma vez que explicitam as fragilidades de se pensar a formação inicial do professor de Matemática”.

Quanto ao estudo do Cálculo, percebemos que noções intuitivas estão inseridas nos livros didáticos de Ensino Médio, porém não há prerrogativa deste conteúdo nos programas atuais. “Assim sendo, o Cálculo faz parte do livro didático, mas não do currículo do Ensino Médio” (BUSSE, 2006). Com isso, percebemos que há uma necessidade de haver, no mínimo, uma discussão sobre a inserção do tema nos currículos nacionais.

Outro ponto defendido por Busse (2006) é que os conceitos básicos do Cálculo Integral poderiam melhorar a preparação dos alunos no cursos de nível superior, pois incentiva a interdisciplinariedade, além de motivar o ingresso desses alunos em cursos que envolvam conceitos matemáticos, como Economia, Física, Biologia, Agronomia e as engenharias, em geral. Por outro lado, os conteúdos do Ensino Médio poderiam ser mais claros e amplos, visto que problemas mais gerais e contextualizados podem ser aplicados com o uso desta ferramenta.

A inserção do Cálculo nos programas não faz com que estes sejam inflados e suturados, pois basta que sua reestruturação seja efetiva. O formalismo exagerado em certos casos pode ser substituído por conceitos intuitivos de Cálculo Diferencial e Integral, sem que as prerrogativas sejam destacadas e com enfoque nas aplicações e propriedades. Essa adequação é defendida por Geraldo Ávila (1991), que diz: “A ideia de que os programas de Matemática são extensos e não comportariam a inclusão do Cálculo é um equívoco. Os atuais programas estão, isto sim, mal estruturados”.

Podemos concluir que o Cálculo é bastante profundo quando tratamos de seu fundamento e seus alicerces, porém sua aplicação pode ser feita de forma direta, quando tratamos de curvas básicas. Para regiões mais gerais, também temos a possibilidade de discutir a realização de tal cálculo através desse instrumento.

Diante desta situação, esperamos motivar o aluno, principalmente do Ensino Médio, a buscar a origem das fórmulas matemáticas, seu desenvolvimento e suas demonstrações. Sendo por métodos intuitivos ou

por ferramentas mais avançadas, como limites e integrais.

Mostramos apenas mais algumas técnicas para que o aluno possa caminhar por si, entendendo o uso da Matemática para resolver problemas envolvendo diversas situações, haja vista que com os elementos apresentados até sua entrada na faculdade ele só pode solucionar uma quantidade razoável de problemas. Agora, com as novas maneiras apresentadas, essa dificuldade é minimizada e o estudo da Matemática se torna mais prático, qualitativo e eficaz.

# Referências Bibliográficas

---

- [1] ÁVILA, G., *O Ensino de Cálculo no 2º Grau*, 2.ed. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher LTDA (1996).
- [2] BOYER, C. B., *História da Matemática*, 2.ed. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher LTDA (1996).
- [3] BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. *Diário Oficial da República Federativa do Brasil*, Brasília, DF, v. 134, n. 248, 23 dez. 1996. Seção 1, p. 27834-27841.
- [4] BUSSE, R. S.; SOARES, F. S., *O Cálculo Diferencial e Integral e o Ensino Médio*. Disponível em: <[http://www.sbembrasil.org.br/files/ix\\_enem/Poster/Trabalhos/PO02944174789T.doc](http://www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Poster/Trabalhos/PO02944174789T.doc)>. Acesso em: 05 mai. 2105.
- [5] DANTE, L. R., *Matemática: Contextos e Aplicações - Volume 3*, 1.ed. São Paulo: Ática (2011).
- [6] DOCA, R. H.; BISCUOLA, G. J.; BÔAS, N. V., *Física 1: Mecânica*, 2.ed. São Paulo: Saraiva (2013).
- [7] LIMA, E. L., *Análise Real - Volume I*. Funções de uma Variável. 12.ed. Rio de Janeiro: IMPA (2013), (Coleção Matemática Universitária).
- [8] NEVES, R. S. P.; SILVA, J. C.; BACCARIN, S. A. O. A Formação Geométrica de Licenciados em Matemática de uma Instituição Pública. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5, 2012, Petrópolis. *Anais...* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Educação Matemática-SBEM, 2012.
- [9] PAVANELLO, M. R., *O Abandono do Ensino da Geometria no Brasil: Causas e Consequências*. Revista Zetetiké, Campinas, Ano 1, n. 1, p. 7-17, 1993.
- [10] STEWART, J., *Cálculo - Volume I*. Tradução da 6ª edição norte-americana. São Paulo: Cengage Learning (2011), 334–427.
- [11] SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I., *Matemática: Ensino Médio - Volume 3*, 6.ed. São Paulo: Saraiva (2010).
- [12] [https://www.youtube.com/watch?v=f\\_PwzFrWp7Q](https://www.youtube.com/watch?v=f_PwzFrWp7Q), acessado em 04/02/2015 às 05:01.