



**Pós-Graduação em Ciências Mecânicas**

**OTIMIZAÇÃO DE MODELO DE FADIGA  
MULTIAXIAL POR MEIO DE ALGORITMO  
GENÉTICO**

**Tarsilo Bezerra Inácio**

**Brasília, dezembro de 2008.**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**OTIMIZAÇÃO DE MODELO DE FADIGA MULTIAXIAL  
POR MEIO DE ALGORITMO GENÉTICO**

**TARSILO BEZERRA INÁCIO**

**ORIENTADOR: JOSÉ ALEXANDER ARAÚJO**

**CO-ORIENTADOR: TITO DIAS JUNIOR**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS**

**PUBLICAÇÃO: MCM.DM - 126 A/08**

**BRASÍLIA/DF: DEZEMBRO – 2008**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

## **OTIMIZAÇÃO DE MODELO DE FADIGA MULTIAXIAL POR MEIO DE ALGORITMO GENÉTICO**

**Tarsilo Bezerra Inácio**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE.

APROVADA POR:

---

Prof. José Alexander Araújo, Ph.D, UnB/ ENM  
(Orientador)

---

Prof. Edgar Nobuo Mamiya, D.Sc. UnB/ ENM  
(Membro Interno)

---

Prof. Domingos Alves Rade, Dr., UFU  
(Membro externo)

Brasília/DF, 01 de Dezembro de 2008.

## FICHA CATALOGRÁFICA

INÁCIO, TARSILO BEZERRA

Otimização de Modelo de Fadiga Multiaxial por meio de Algoritmo Genético

[Distrito Federal] 2008.

XIII, 75p., 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Ciências Mecânicas, 2008).

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Fadiga Multiaxial

2.Algoritmos Genéticos

3.Amplitude de Tensão Cisalhante

4.Plano Crítico

I. ENM/FT/UnB

II. ENM.DM-126A/08

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

INÁCIO., T. B. (2008). Otimização de Modelo de Fadiga Multiaxial por meio de Algoritmo Genético. Dissertação de Mestrado em Ciências Mecânicas, Publicação MCM.DM-126A/08, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 75p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Tarsilo Bezerra Inácio.

TÍTULO: Otimização de Modelo de Fadiga Multiaxial por meio de Algoritmo Genético.

GRAU: Mestre

ANO: 2008

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Tarsilo Bezerra Inácio  
SQS 215 bl B apt 203, Asa Sul.  
70294-020 – Brasília – DF – Brasil.  
Correio eletrônico: tarsilo\_bezerra@yahoo.com.br

## **AGRADECIMENTOS**

Aos Professores José Alexander e Tito Dias da Universidade de Brasília pelo apoio técnico e enorme empenho em transmitir os conhecimentos necessários para a realização deste trabalho, colaborando, dessa forma, para o meu crescimento profissional.

Aos Professores Edgar Nobuo Mamiya da Universidade de Brasília e Domingos Alves Rade da Universidade Federal de Uberlândia pelas valiosas contribuições na melhoria desse projeto.

Aos meus pais, Antônio e Aurizete, irmãs, Jamila e Jarina, e namorada, Mariana, pela compreensão, paciência e total incentivo durante a realização desse sonho.

---

## RESUMO

Crêterios para avalia o da resistência em fadiga baseados em modelos de plano crítico são eficientes quando utilizados em componentes metálicos submetidos a altos ciclos de carregamento. Contudo, existe um elevado custo associado ao processo de busca pelo plano crítico, que é o plano que cont m a máxima amplitude de tensão cisalhante. Neste sentido, a proposta deste trabalho é desenvolver uma ferramenta numérica capaz de reduzir significativamente o tempo computacional associado ao processo de busca pelo plano crítico.

Inicialmente implementou-se a rotina para avaliar a tensão cisalhante e normal em “todos” os planos de corte de um ponto material em corpos submetidos a condi es de flexão e torço. Na etapa seguinte, o processo foi otimizado com a utiliza o de um Algoritmo Genético. O código resultante fornece a orienta o do plano crítico, a máxima amplitude de tensão cisalhante equivalente, a máxima tensão normal e o tempo total no processo de busca.

Os resultados revelaram que o método do Algoritmo Genético foi capaz de provocar uma forte redu o no custo computacional para determinar o plano crítico material. Além disso, é um método simples de ser implementado e sempre converge para o máximo global com bons níveis de precisão. Neste sentido, a rotina proposta constitui uma ferramenta poderosa e importante que pode ser combinada com um método de elementos finitos para desenvolver componentes reais submetidos a carregamentos complexos de fadiga.

---

## **ABSTRACT**

Critical plane approaches are efficient methods to estimate the resistance of metallic components submitted to high-cycle fatigue. However, there is a high cost associated to the searching for the critical plane, which is the plane that contains the largest shear stress amplitude. In this setting, the aim of this work is to develop a numerical tool capable to significantly reduce the computational cost associated to process the critical plane search.

Initially, a routine was implemented to evaluate shear and normal stresses in all material planes of a material point of bodies submitted to bending and torsion conditions. In the next step, the process was optimized using a Genetic Algorithm. The final code finds the critical plane orientation, the maximum equivalent shear stress amplitude, maximum normal stress and total time of search process.

The results revealed that the Genetic Algorithm method was capable to provoke a strong reduction in the computational cost to find the material critical plane. Further, it is simple to implement and always find the global maximum with very good levels of accuracy. In this setting, the proposed routine constitutes an important and powerful tool that can be combined with the finite element method to design real components under complex fatigue loadings.

# SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>2. CONCEITOS FUNDAMENTAIS .....</b>	<b>4</b>
<b>2.1. Vetor Tensão .....</b>	<b>4</b>
<b>2.2. Estado multiaxial de tensões.....</b>	<b>6</b>
<b>2.3. Estado plano de tensões.....</b>	<b>11</b>
<b>2.4. Amplitude de tensão alternada e tensão média .....</b>	<b>12</b>
<b>3. FADIGA .....</b>	<b>14</b>
<b>3.1. Fadiga de alto ciclo .....</b>	<b>15</b>
3.1.1. Efeito da Tensão Média na Vida à Fadiga.....	16
<b>3.2. Fadiga de baixo ciclo .....</b>	<b>17</b>
<b>3.3. Mecanismo de nucleação de trincas .....</b>	<b>19</b>
<b>4. MODELO DE FADIGA MULTIAXIAL .....</b>	<b>21</b>
<b>4.1. Carregamentos cíclicos multiaxiais.....</b>	<b>21</b>
<b>4.2. Critério de plano crítico .....</b>	<b>22</b>
4.2.1. Critério da maior projeção.....	24
4.2.2. Critério da máxima corda.....	26
4.2.3. Critério da menor circunferência circunscrita.....	27
<b>4.3. Critério da investigação incremental de planos (IP) .....</b>	<b>31</b>
<b>4.4. Método das curvas modificadas de Wöhler .....</b>	<b>33</b>
<b>5. ALGORITMO GENÉTICO.....</b>	<b>39</b>
<b>5.1. Seleção.....</b>	<b>40</b>
<b>5.2. Cruzamento.....</b>	<b>42</b>
<b>5.3. Mutação.....</b>	<b>43</b>
<b>5.4. Elitismo.....</b>	<b>44</b>
<b>5.4. Método Híbrido.....</b>	<b>46</b>



<b>6. RESULTADOS .....</b>	<b>48</b>
<b>6.1 Método de investigação incremental de planos (IP) .....</b>	<b>49</b>
<b>6.2 Método de algoritmos genéticos (AG).....</b>	<b>60</b>
<b>6.3 Método híbrido .....</b>	<b>65</b>
<b>7. CONCLUSÕES.....</b>	<b>71</b>
<b>8. PROPOSTA PARA TRABALHOS FUTUROS .....</b>	<b>72</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>73</b>

## LISTA DE FIGURAS

1.1 – FALHA POR FADIGA EM COMPONENTE MECÂNICO.....	1
2.1 – ESFORÇOS EXTERNOS ATUANTES EM UM CORPO E PLANO DE CORTE PASSANDO PELO PONTO O.....	4
2.2 – AÇÃO DAS FORÇAS INTERNAS QUE MANTÊM A PARTE DO CORPO EM EQUILÍBRIO .....	5
2.3 – (A) FORÇA RESULTANTE $\Delta R$ AGINDO SOBRE UM ELEMENTO DE ÁREA $\Delta A$ , CARACTERIZADO POR N (B) VETOR TENSÃO DECOMPOSTO EM TENSÃO NORMAL E CISALHANTE.....	6
2.4 – (A) ESTADO DE TENSÃO NO PLANO X (B) ESTADO GERAL DE TENSÕES .....	7
2.5 – TETRAEDRO EM EQUILÍBRIO PELA AÇÃO DO VETOR TENSÃO .....	7
2.6 – REPRESENTAÇÃO CARTESIANA DO VETOR NORMAL UNITÁRIO .....	8
2.7 – EQUILÍBRIO DE MOMENTOS DAS COMPONENTES DE TENSÃO EM RELAÇÃO A X. ....	10
2.8 – (A) VOLUME ELEMENTAR PARA ESTADO PLANO DE TENSÃO (B) CÍRCULO DE MOHR RESULTANTE.....	11
2.9 – CARREGAMENTO À AMPLITUDE CONSTANTE (A) CARREGAMENTO ALTERNADO (B) CARREGAMENTO FLUTUANTE (C) CARREGAMENTO REPETIDO.....	13
3.1 – CURVA TENSÃO-VIDA .....	15
3.2 – DIFERENTES TENSÕES MÉDIAS PARA UMA MESMA AMPLITUDE DE TENSÃO.....	17
3.3 – CURVA DEFORMAÇÃO-VIDA.....	19
3.4 – (A) VOLUME CRISTALINO (B) PLANO PREFERENCIAL DE DESLIZAMENTO NO VOLUME CRISTALINO (C) FORMAÇÃO DE CONCENTRADORES DE TENSÕES .....	20
3.5 – INTRUSÕES E EXTRUSÕES EM UMA SUPERFÍCIE DE COBRE.....	20
4.1 – VETOR TENSÃO DESCREVENDO UMA TRILHA DE CARREGAMENTO $\Psi$ PARA UM CARREGAMENTO PERIÓDICO.....	23
4.2 – MAIOR PROJEÇÃO REERESSENTADA PELO SEGMENTO $\overline{AB}$ .....	24
4.3 – (A) HISTÓRIA DE CARREGAMENTO CISALHANTE E TENSÃO MÉDIA IGUAL A ZERO (B) MESMA HISTÓRIA DE TENSÃO EM UMA POSIÇÃO DIFERENTE SOBRE O PLANO $\Delta$ .....	25
4.4 – MÁXIMA CORDA REPRESENTADA PELO SEGMENTO $\overline{AB}$ .....	26
4.5 – INCONSISTÊNCIA NA REPRESENTAÇÃO DA TENSÃO CISALHANTE MÉDIA PARA O MÉTODO DA MÁXIMA CORDA.....	27
4.6 – TENSÃO CISALHANTE EQUIVALENTE E A MENOR CIRCUNFERÊNCIA CIRCUNSCRITA.....	28
4.7 – DIAGRAMA PARA ENCONTRAR O RAIOS R DA MENOR CIRCUNFERÊNCIA CIRCUNSCRITA.....	29
4.8 – PROCEDIMENTO ESQUEMÁTICO ILUSTRANDO O MÉTODO DE BUSCA DA MÍNIMA CIRCUNFERÊNCIA CIRCUNSCRITA COMO PROPOSTO POR DANG VAN (1989).....	30
4.9 – PASSAGEM DE UM PLANO $\Delta_1$ PARA $\Delta_n$ DE ACORDO COM O INCREMENTO $\Delta\phi, \Delta\theta$ .....	31
4.10 – REPRESENTAÇÃO DE UM NÚMERO FINITO DE VETORES NORMAIS UNITÁRIOS .....	32
4.11 – CURVAS MODIFICADAS DE WÖHLER PARA FLEXÃO E TORÇÃO PURA.....	33
4.12 – (A) CÍRCULO DE MOHR PARA O CASO DE FLEXÃO TOTALMENTE REVERSO (B) CÍRCULO DE MOHR PARA O CASO DE TORÇÃO TOTALMENTE REVERSO.....	34
4.13 – CURVAS MODIFICADAS DE WÖHLER. ....	36
4.14 – CURVA LIMITE DE CARREGAMENTO DE ACORDO COM O MODELO DE SUSMEL-LAZZARIN.....	37
5.1 – REPRESENTAÇÃO DA SELEÇÃO PELO MÉTODO DA ROLETA.....	41
5.2 – EXEMPLO DE INDIVÍDUOS SELECIONADOS PELO MÉTODO DA ROLETA .....	41
5.3 – TRANSFORMAÇÃO DA ESCALA REAL PARA A ESCALA TRANSFORMADA E EM SEGUIDA PARA A ESCALA BINÁRIA .....	43
5.4 – OPERAÇÃO DE CRUZAMENTO (REPRODUÇÃO) ENTRE DOIS INDIVÍDUOS.....	43
5.5 – DIAGRAMA DESCRITIVO DOS PASSOS BÁSICOS DE UM ALGORITMO GENÉTICO .....	45
5.6 – MECANISMO DE REFLEXÃO PELO MÉTODO SIMPLEX .....	47
6.1 – AMPLITUDE DE TENSÃO CISALHANTE NOS PLANOS DE CORTE PESQUISADOS PELO MÉTODO IP PARA O TESTE Nº I DA TABELA 6.1 (A) SUPERFÍCIE EM RELEVO (B) CURVAS DE NÍVEL.....	50
6.2 – AMPLITUDE DE TENSÃO CISALHANTE NOS PLANOS DE CORTE PESQUISADOS PELO MÉTODO IP PARA O TESTE Nº II DA TABELA 6.2 (A) SUPERFÍCIE EM RELEVO (B) CURVAS DE NÍVEL.....	51
6.3 – AMPLITUDE DE TENSÃO CISALHANTE X MÁXIMA TENSÃO NORMAL PELO MÉTODO IP (A) CASO Nº I DA TABELA 6.1 (B) CASO Nº II DA TABELA 6.2 .....	53
6.4 – ÍNDICE PARA AVALIAR A PRECISÃO PELO MÉTODO IP COM INCREMENTO DE $10^\circ$ (A) MÁXIMA AMPLITUDE DE TENSÃO CISALHANTE (B) MÁXIMA TENSÃO NORMAL NO PLANO CRÍTICO .....	57
6.5 – ÍNDICE PARA AVALIAR A PRECISÃO PELO MÉTODO IP COM INCREMENTO DE $5^\circ$ (A) MÁXIMA AMPLITUDE DE TENSÃO CISALHANTE (B) MÁXIMA TENSÃO NORMAL NO PLANO CRÍTICO .....	58

6.6 –ÍNDICE PARA AVALIAR A PRECISÃO PELO MÉTODO IP COM INCREMENTO DE 2°	
(A) MÁXIMA AMPLITUDE DE TENSÃO CISALHANTE (B) MÁXIMA TENSÃO NORMAL NO PLANO CRÍTICO .....	59
6.7 –INFLUÊNCIA DO FATOR $\alpha$ NA DETERMINAÇÃO DA MÁXIMA AMPLITUDE DE TENSÃO CISALHANTE .....	61
6.8 –ÍNDICE PARA AVALIAR A PRECISÃO PELO MÉTODO AG COM CEM INDIVÍDUOS	
(A) MÁXIMA AMPLITUDE DE TENSÃO CISALHANTE (B) MÁXIMA TENSÃO NORMAL NO PLANO CRÍTICO .....	64
6.9 –TEMPO COMPUTACIONAL PARA O IP COM UM INCREMENTO DE 5°, AG E HÍBRIDO	
COM CEM INDIVÍDUOS PARA AÇO DURO 0,51%C .....	68

## LISTA DE TABELAS

6.1 – AÇO DURO 0,51%C ( $\tau_0 = 196,2\text{MPa}$ E $\sigma_0 = 313,9\text{MPa}$ ).....	48
6.2 – LIGA 34Cr4 ( $\tau_0 = 256\text{MPa}$ E $\sigma_0 = 410\text{MPa}$ ).....	49
6.3 – RESULTADOS PARA AÇO DURO 0,51%C PELO MÉTODO IP.....	54
6.4 – RESULTADOS PARA A LIGA 34Cr4 PELO MÉTODO IP .....	55
6.5 – RESULTADOS PARA AÇO DURO 0,51%C PELO MÉTODO AG .....	62
6.6 – RESULTADOS PARA A LIGA 34Cr4 PELO MÉTODO AG.....	63
6.7 – RESULTADOS PARA AÇO DURO 0,51%C PELO MÉTODO HÍBRIDO .....	66
6.8 – RESULTADOS PARA A LIGA 34Cr4 PELO MÉTODO HÍBRIDO .....	67
6.9 – ÍNDICE DE ERRO DE SUSMEL .....	70

## LISTA DE SÍMBOLOS

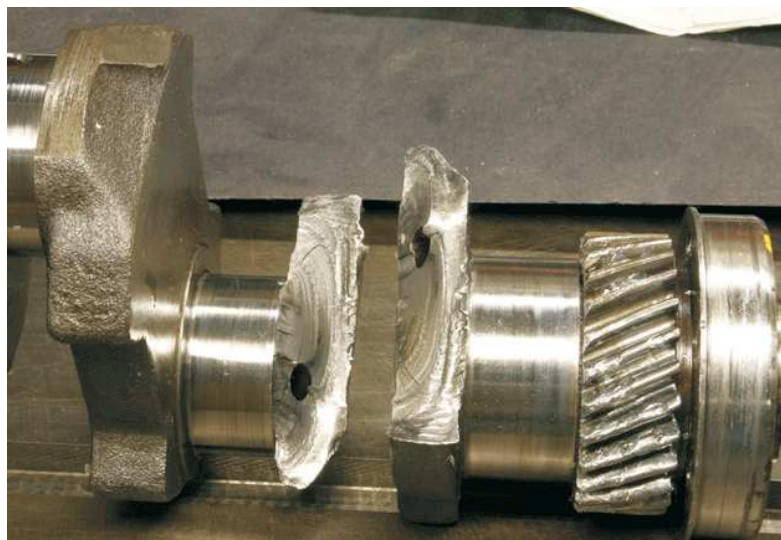
$b$	Expoente de resistência à fadiga
$c$	Expoente de ductilidade para fadiga
$I$	Índice de avaliação das tensões normais e cisalhantes no plano crítico
$K_{\tau}$	Inclinação inversa
$\mathbf{n}$	Vetor Normal ao plano de Corte
$N_f$	Quantidade de ciclos até a ruptura
$N_i$	Quantidade de ciclos até a iniciação da trinca
$N_p$	Quantidade de ciclos para a propagação da trinca
$R$	Razão de tensão
$R(\phi, \theta)$	Raio da menor circunferência que circunscribe a trilha de carregamento
$P$	Período de carregamento
$\mathbf{t}$	Vetor Tensão
$t$	Instante de tempo do Período $P$
$t_x, t_y, t_z$	Componentes $x$ , $y$ e $z$ do vetor Tensão
$\mathbf{T}$	Tensor Tensão de Cauchy
$\mathbf{X}$	Vetor posição
$\alpha$	Fator peso da tensão normal no cálculo da aptidão
$\delta_{xy,xx}$	Ângulo de fase entre $\sigma_{xx}$ e $\tau_{xy}$
$\Delta$	Plano Material
$\Delta_C$	Plano crítico
$\Delta\varepsilon$	Faixa de deformação
$\Delta\varepsilon_e$	Faixa de deformação Elástica
$\Delta\varepsilon_p$	Faixa de deformação Plástica
$\varepsilon$	Deformação local
$\varepsilon_f'$	Coefficiente de ductilidade para fadiga
$\mu$	Fator de avanço na reflexão do método simplex
$\rho$	Razão de tensão
$\phi$	Ângulo entre o vetor $\mathbf{n}$ e o eixo $y$
$\theta$	Ângulo entre a projeção de $\mathbf{n}$ no plano $xy$ e o eixo $x$
$\sigma$	Vetor tensão normal

$\sigma_f'$	Coeficiente de resistência à fadiga
$\sigma_m$	Tensão normal média
$\sigma_{\Delta_c, \text{máx}}$	Máxima tensão normal no plano crítico
$\sigma_a$	Amplitude de tensão normal
$\sigma_{xx,a}, \sigma_{yy,a}$	Tensões normais alternadas nas direções $x$ e $y$
$\sigma_{xx,m}, \sigma_{yy,m}$	Tensões normais média nas direções $x$ e $y$
$\sigma_0$	Limite de fadiga para flexão alternada
$\sigma_1, \sigma_2$	Tensões principais
$\bar{\omega}$	Comprimento de onda
$\tau$	Vetor tensão cisalhante
$\tau_a$	Amplitude de tensão cisalhante equivalente em um plano qualquer
$\tau_m$	Tensão cisalhante média
$\tau_{a, \text{máx}}$	Amplitude de tensão cisalhante equivalente sobre o plano crítico
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Componentes das tensões cisalhantes
$\tau_{xy,a}$	Tensão cisalhante alternada no plano $x$
$\tau_{xy,m}$	Tensão cisalhante média no plano $x$
$\tau_0$	Limite de fadiga para torção alternada
$\chi$	Fator incremental no método da menor circunferência
$\Psi$	História de carregamento no espaço
$\Psi_{\Delta}$	História de carregamento cisalhante no plano $\Delta$

# 1. INTRODUÇÃO

Muitos componentes estruturais são submetidos a cargas variáveis que freqüentemente levam ao aparecimento de trincas. Essas fissuras podem se propagar e provocar a falha do componente por fadiga, como ilustrado na Fig.1.1. Acidentes por fadiga acontecem repentinamente e, quando em regime de alto número de ciclos de carregamento, não indicam nenhum sinal visível de deformação plástica. Por esse motivo, projetos de engenharia necessitam de atenção especial à previsão do surgimento de trincas e à resistência à fadiga do material.

Com a Revolução Industrial as locomotivas a vapor foram muito utilizadas para transporte de mercadorias. Com isso apareceram os primeiros acidentes ferroviários decorrentes do fenômeno de fadiga. O alemão August Wöhler (1860) conduziu os primeiros estudos para solucionar esse problema. Ele relacionou o efeito dos esforços mecânicos representado pelas tensões com a vida à fadiga. O Diagrama de Wöhler ou Diagrama S-N, como também é conhecido, serve como base para muitos modelos de previsão da resistência à fadiga.



*Figura 1.1 – Falha por fadiga em um componente mecânico*

Os equipamentos utilizados em engenharia constantemente estão sujeitos a histórias de tensões multiaxiais durante a sua vida útil, como por exemplo, guindastes e fuselagens de aviões. Diversos estudos sobre fadiga multiaxial foram desenvolvidos segundo diferentes abordagens com o objetivo de estimar a durabilidade desses equipamentos em condições reais

de operação. Dentre as abordagens mais conhecidas destacam-se o Critério de Plano Crítico, o Método de Energia e o Método dos Invariantes do Tensor Tensão.

O Método dos Invariantes do Tensor Tensão utiliza uma amplitude de tensão cisalhante equivalente e a tensão hidrostática para determinar a resistência à fadiga multiaxial. Sines (1955) e Crossland (1956) criaram modelos baseados nesse método com a diferença que o segundo autor considera o valor máximo da pressão hidrostática como um dos parâmetros importantes para a iniciação da trinca e não o seu valor médio, como relatado por Sines. Estudos recentes que consideram o efeito dos carregamentos fora de fase na resistência a fadiga multiaxial e que propõem formas mais consistentes para o cálculo da amplitude de tensão cisalhante equivalente foram conduzidos por Deperrois (1991), Duprat *et al.* (1997), Li *et al.* (2000) e Mamiya e Araújo (2002).

Outra abordagem consiste em quantificar a energia dissipada por um material quando submetido a cargas dinâmicas e associa essa grandeza na previsão de vida à fadiga. Modelos propostos por Garud (1979), Ellyin *et al.* (1991) e Varvani-Farahani (2000) relacionam o trabalho plástico em cada ciclo de tensão com a vida à fadiga de um material.

Atualmente, modelos baseados em aproximações de plano crítico ganharam importância devido aos bons resultados obtidos na previsão de vida à fadiga. Os critérios de plano crítico estabelecem que o mecanismo de iniciação de trincas acontece em planos preferenciais. As componentes de tensões avaliadas nesses planos são utilizadas para análise de fadiga. Diversos modelos foram propostos dentro dessa abordagem, como Findley (1959), Brown e Miller (1973), McDiarmid (1991). Outros modelos mais recentes como os de Susmel e Lazzarin (2002) e Kueppers e Sonsino (2003) apresentam bons resultados para o limite de fadiga em carregamentos multiaxiais.

O estudo de fadiga está ligado diretamente ao projeto de componentes cada vez mais leves, porém mais confiáveis destinados a executar o trabalho de uma forma eficiente e segura. Com o avanço da tecnologia, principalmente a computacional, os engenheiros utilizam técnicas baseadas em simulações numéricas para o cálculo de resistência em fadiga. A indústria automotiva, por exemplo, pode simular o comportamento de uma suspensão de um veículo submetido as mais diversas condições de uso. Para que esses testes computacionais possam ser utilizados eles têm que ser capazes de prever com boa exatidão o dano causado por uma situação real.

O objetivo deste trabalho é desenvolver uma ferramenta numérica que seja capaz de determinar os parâmetros necessários para a avaliação da resistência à fadiga de componentes mecânicos submetidos a cargas multiaxiais. Para a otimização da rotina um Algoritmo



Genético foi implementado. Os AGs são técnicas robustas e eficientes em um espaço de busca irregular e pré-definido. Podem ser utilizados em problemas de diversas variáveis e trabalham baseados apenas no valor de uma única função. Existem poucos trabalhos na literatura que utilizam AGs em critérios de fadiga multiaxial, dentre esses destaca-se Kang *et al.* (2003) que faz uso desse algoritmo em critérios de plano crítico.

## 2. CONCEITOS FUNDAMENTAIS

### 2.1 VETOR TENSÃO

Sempre que esforços externos são aplicados em um corpo deformável, todos os pontos no interior desse corpo podem sentir os efeitos da ação dessas forças. Considere um corpo em equilíbrio submetido a esforços externos quaisquer, conforme demonstrado na Fig. 2.1.

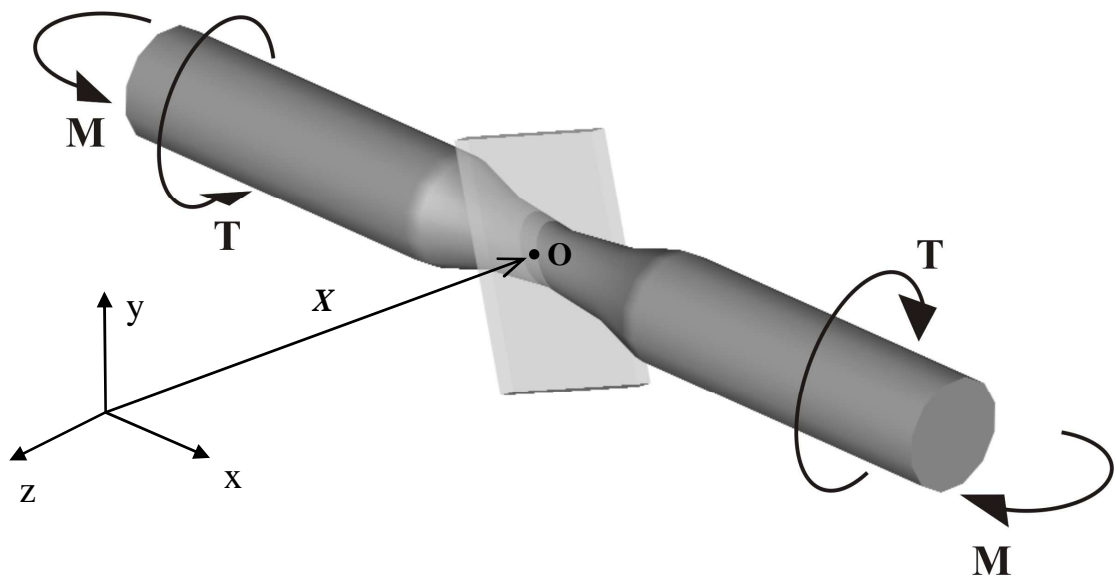


Figura 2.1 – Esforços externos atuantes em um corpo e plano de corte passando pelo ponto O

As forças internas em uma região específica do corpo, que equilibram a ação das forças externas, podem ser determinadas pelo método das seções. O método separa um corpo sólido utilizando um corte imaginário, como o que secciona o corpo em duas partes a partir do ponto O na Fig. 2.1. Abstraindo-se uma das partes, forças internas atuarão no plano de corte da outra seção para que ela se mantenha em equilíbrio, conforme Fig.2.2. Pode-se representar esses esforços internos atuantes em uma determinada área  $\Delta A$  sobre a seção de corte por uma única força resultante  $\Delta \mathbf{R}$  (Fig.2.3(a)) e essa irá produzir os mesmos efeitos das forças internas de ligação.

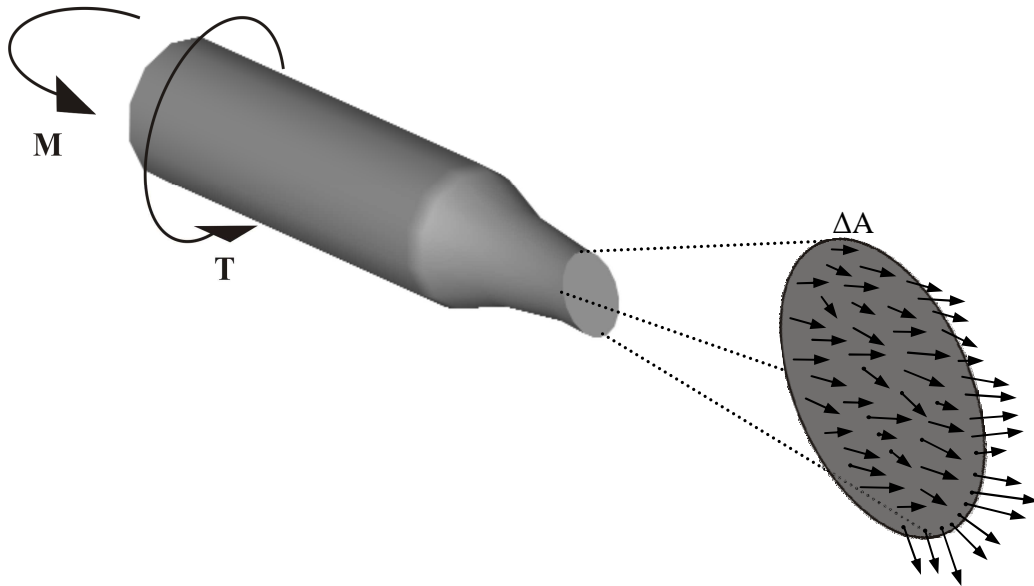


Figura 2.2 – Ação das forças internas que mantêm a parte do corpo em equilíbrio

Considerando o material como contínuo, ou seja, apresentando uma distribuição uniforme da matéria e, além disso, coeso, com suas partes perfeitamente conectadas, podemos reduzir a área  $\Delta A$  tanto quanto se queira. Dessa forma, o vetor tensão pode ser definido em um ponto por onde passa um plano de corte como:

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta A} \quad (1)$$

Podemos decompor o vetor tensão em duas componentes: uma na direção do vetor normal unitário  $\mathbf{n}$ , denominado componente normal ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) e outra na direção tangente a face de corte, denominada componente cisalhante ( $\boldsymbol{\tau}$ ), como mostra a Fig. 2.3(b).

As componentes  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\boldsymbol{\tau}$  tornam-se, portanto:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{t} - \boldsymbol{\sigma} \quad (3)$$

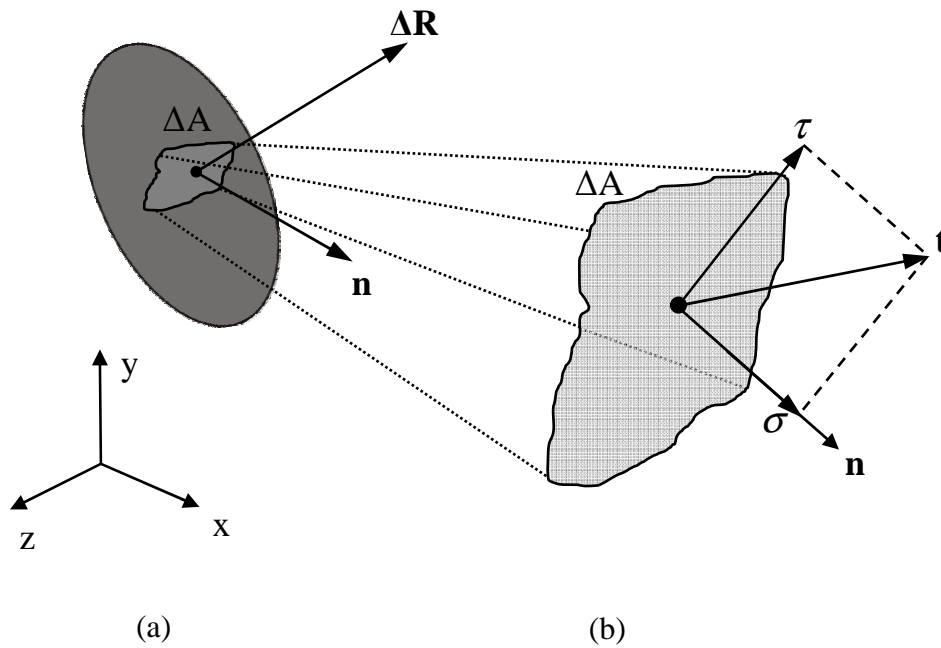


Figura 2.3 – (a) Força resultante  $\Delta \mathbf{R}$  agindo sobre um elemento de área  $\Delta A$ , caracterizado por  $\mathbf{n}$   
 (b) vetor tensão decomposto em tensão normal e cisalhante

## 2.2 ESTADO MULTIAXIAL DE TENSÕES

Suponha o caso da Fig.2.1 onde o corpo de prova está submetido a forças externas quaisquer. Suponha também que plano imaginário que atravessa o ponto O esteja posicionado perpendicularmente ao eixo  $x$ . E ainda que o eixo cartesiano tenha sua origem exatamente sobre o ponto O. Se o vetor tensão  $\mathbf{t}$  for decomposto considerando os eixos coordenados  $x$ ,  $y$  e  $z$ , obtêm-se duas componentes cisalhantes e uma componente normal, conforme Fig.2.4(a). O mesmo pode ser feito para os planos  $y$  e  $z$ . Para simplificar, o estado geral de tensões em um ponto segundo os eixos coordenados  $x$ ,  $y$  e  $z$  pode ser representado por um volume elementar cúbico, como mostra Fig.2.4(b).

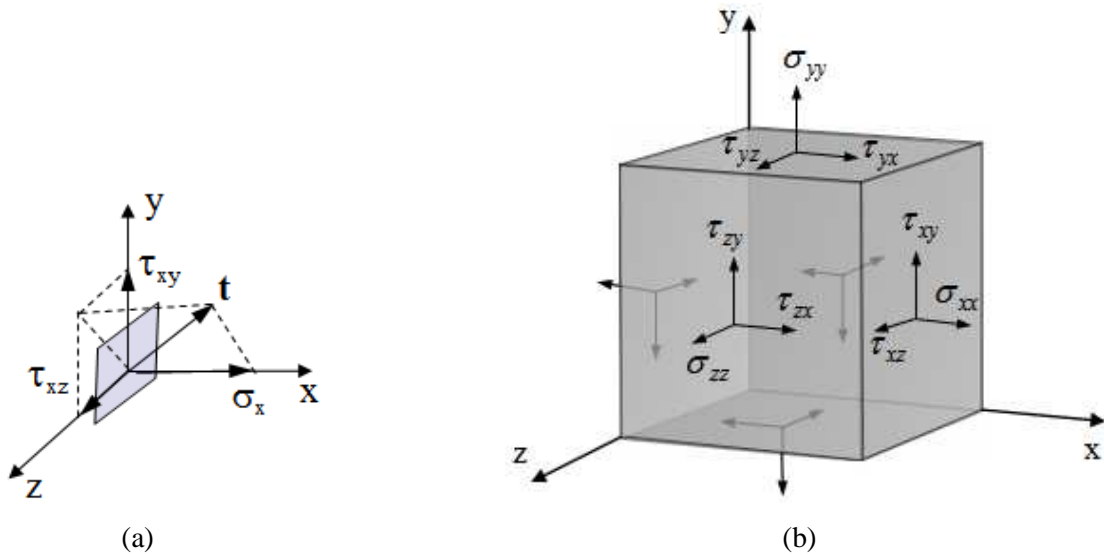


Figura 2.4 – (a) estado de tensão no plano  $x$ . (b) estado geral de tensões

Como o volume elementar cúbico da Fig.2.4(b) pode ser utilizado para descrever o estado de tensão no ponto O da Fig.2.1, vamos utilizar o método das seções nesse elemento. A Fig.2.5 descreve o que aconteceria após o corte imaginário e se uma das seções fosse desprezada. O tetraedro encontra-se em equilíbrio devido a ação do vetor tensão  $\mathbf{t}$  atuando na seção de corte A.

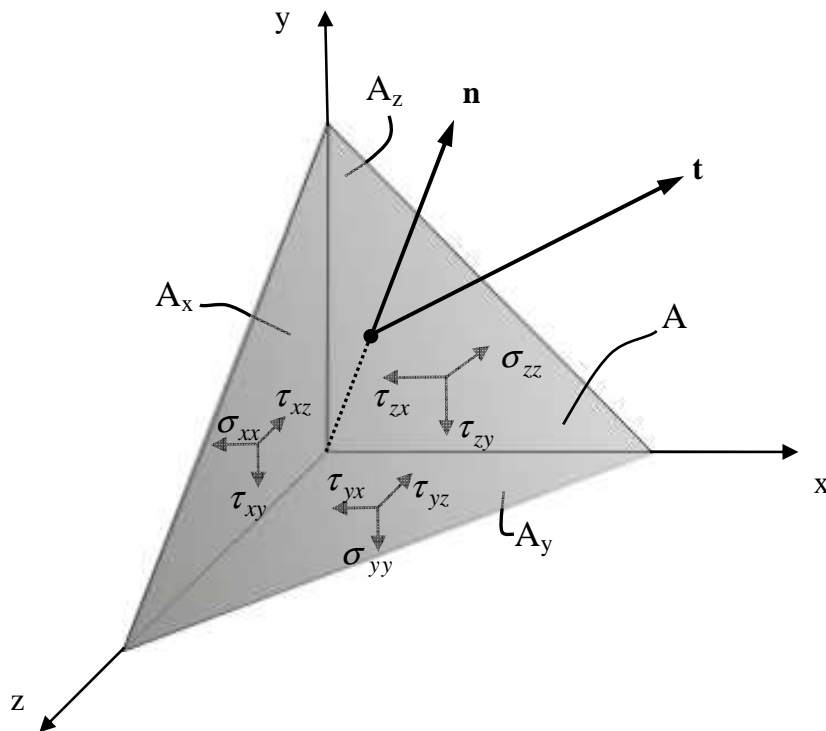


Figura 2.5 – Tetraedro em equilíbrio pela ação do vetor tensão

Para um ponto de interesse em um corpo qualquer, a magnitude e a direção do vetor tensão depende da orientação do plano que passa através desse ponto. Para definir um dos planos que passam por esse ponto em análise basta conhecer o vetor normal unitário  $\mathbf{n}$ . A forma mais simples de representá-lo é pelas suas componentes cartesianas  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$ , como ilustrado na Fig. 2.6.

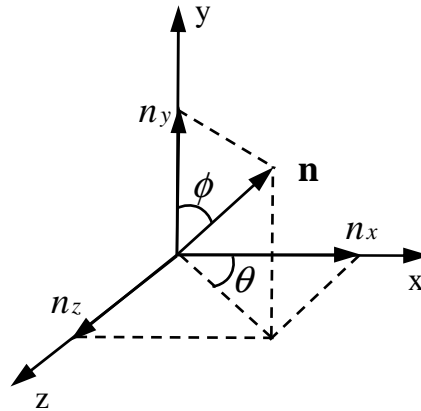


Figura 2.6 – Representação cartesiana do vetor normal unitário  $\mathbf{n}$

O equilíbrio do tetraedro regular da Fig.2.5 requer:

$$\mathbf{t} A + t_x A_x + t_y A_y + t_z A_z = 0 \quad (4)$$

onde  $A_x$ ,  $A_y$  e  $A_z$  são respectivamente as áreas perpendiculares aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  e

ainda:

$$\begin{aligned} t_x &= -\sigma_{xx}\mathbf{i} - \tau_{xy}\mathbf{j} - \tau_{xz}\mathbf{k} \\ t_y &= -\tau_{yx}\mathbf{i} - \sigma_{yy}\mathbf{j} - \tau_{yz}\mathbf{k} \\ t_z &= -\tau_{zx}\mathbf{i} - \tau_{zy}\mathbf{j} - \sigma_{zz}\mathbf{k} \end{aligned} \quad (5)$$

Se representarmos o vetor normal unitário  $\mathbf{n}$  de acordo com os ângulos  $\phi$  e  $\theta$ :

$$\begin{aligned} n_x &= \text{sen } \phi \cos \theta, \quad n_y = \cos \phi, \quad n_z = \text{sen } \phi \text{ sen } \theta \\ A_x &= A n_x, \quad A_y = A n_y, \quad A_z = A n_z \end{aligned} \quad (6)$$

Substituindo as expressões (5) e (6) na equação de equilíbrio (4) resta:

$$\begin{aligned}
 t_x &= \sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z \\
 t_y &= \tau_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{yz}n_z \\
 t_z &= \tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y + \sigma_{zz}n_z
 \end{aligned} \tag{7}$$

Na forma matricial torna-se:

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{t} = \mathbf{T} \mathbf{n} \tag{8}$$

Da equação (8) conclui-se que o volume elementar cúbico (Fig.2.4(b)), que representa o estado de tensão em um ponto, é descrito matematicamente por uma matriz 3X3 chamada de tensor de tensões  $\mathbf{T}$ . Cada linha dessa matriz representa um plano em análise do elemento cúbico, ou seja, planos perpendiculares aos eixos cartesianos e que passam pelo ponto considerado.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{9}$$

O elemento infinitesimal de tensão da Fig. 2.4 (b) pode ser simplificado realizando o equilíbrio de momentos. Se o sistema de coordenadas for escolhido de tal forma que a origem se localize exatamente no centróide do elemento, descarta-se a possibilidade de alguma tensão normal gerar momentos em relação à origem O. Considere o elemento visto na Fig. 2.7 onde somente as componentes de tensões que geram algum momento em relação ao eixo x são mostradas. Então o somatório de momentos em relação à x será:

$$\begin{aligned} \Sigma_{M_x} = 0 \\ \left( \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz \frac{dy}{2} + \left( \tau_{yz} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz \frac{dy}{2} \\ - \left( \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy \frac{dz}{2} - \left( \tau_{zy} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy \frac{dz}{2} = 0 \end{aligned}$$

que reduz-se a:

$$\begin{aligned} \tau_{yz} dx dy dz - \tau_{zy} dx dy dz = 0 \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} \end{aligned} \quad (10)$$

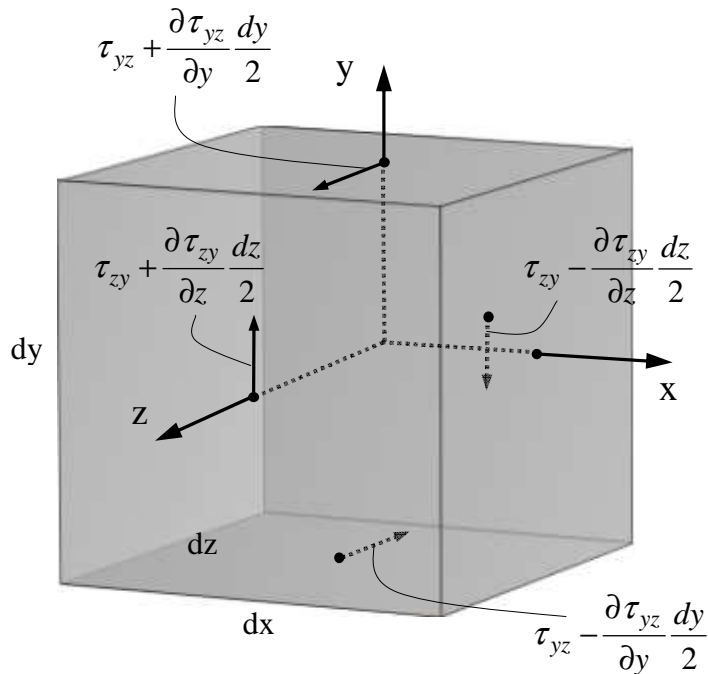


Figura 2.7 – Equilíbrio de momentos das componentes de tensão em relação a x

O mesmo pode ser feito para os eixos y e z e, dessa forma, por equilíbrio de momentos no elemento de tensão, demonstra-se que  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$  e  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ . Assim, a matriz de tensão T torna-se simétrica com apenas seis escalares independentes para definir o estado de tensão de um ponto.



## 2.3 ESTADO PLANO DE TENSÕES

Para exemplificar o estado plano de tensão adotou-se o caso da Fig.2.1 onde um corpo está submetido a esforços de torção e flexão. Adota-se o elemento infinitesimal cúbico descrito na seção 2.2 para representar o estado de tensão no ponto O. Como resultado dos esforços nesse ponto obtém-se o elemento ilustrado na Fig.2.8(a). Pode-se utilizar o círculo de Mohr, ilustrado na Fig.2.8(b), para descrever o estado de tensão de qualquer plano paralelo ao eixo z e que atravessa o ponto O. As coordenadas dos principais pontos que descrevem o círculo de Mohr são dadas por:

$$X = (\sigma_{xx}, \tau_{xy}), Y = (0, -\tau_{xy}), C = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}, R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (11)$$

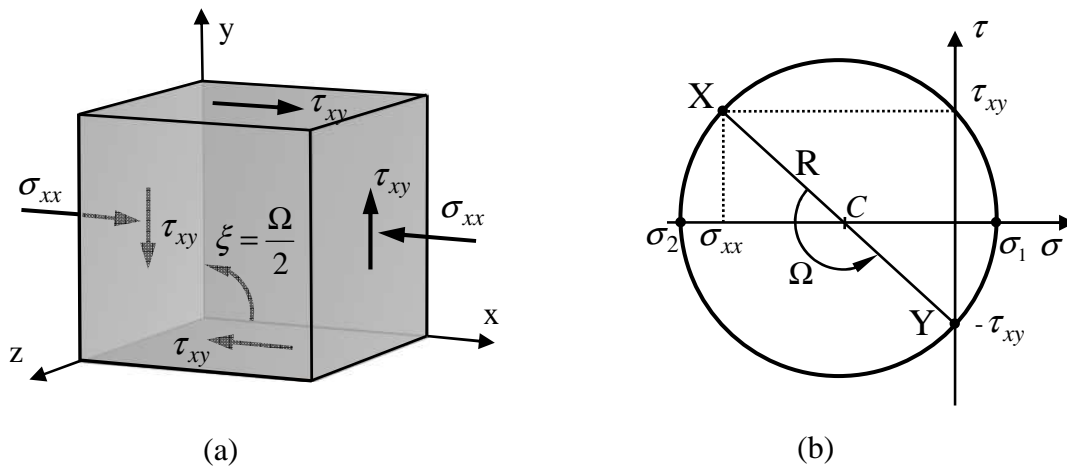


Figura 2.8 – (a) Volume elementar para estado plano de tensão (b) Círculo de Mohr resultante

Da Fig.2.8(b) nota-se que, de acordo com o círculo de Mohr, o ângulo  $\Omega$  entre os pontos X e Y é igual a  $\pi$ , enquanto na representação cúbica elementar o ângulo correspondente  $\xi$  é igual a  $\pi/2$ . Constata-se então que a relação entre as duas representações seguirá  $\xi = \Omega/2$ .

Pode-se retirar ainda do círculo de Mohr informações como a tensão cisalhante máxima e as tensões principais. São elas respectivamente  $\tau_{máx} = R$ ,  $\sigma_1 = C + R$ ,  $\sigma_2 = C - R$ . A tensão cisalhante máxima sempre se encontrará verticalmente ao ponto C no círculo de Mohr e as tensões principais serão ordenadas da seguinte forma  $\sigma_1 > \sigma_2$ .

## 2.4 AMPLITUDE DE TENSÃO ALTERNADA E TENSÃO MÉDIA

Na prática, componentes mecânicos estão sob a ação de cargas cíclicas, entre níveis de tensões máximos e mínimos. Esse carregamento dinâmico conduz ao fenômeno de fadiga e admite-se que os limites nos níveis de tensões permaneçam constantes. A tensão média ( $\sigma_m$ ) é a média entre os níveis de tensões máximo e mínimo:

$$\sigma_m = \left( \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \right) \quad (12)$$

onde a tensão máxima ( $\sigma_{\max}$ ) é o pico e tensão mínima ( $\sigma_{\min}$ ) é o vale, como mostra a Fig. 2.9. A tensão média  $\sigma_m$  pode ser zero, e neste caso o carregamento é dito alternado. Para esse tipo de carregamento, a tensão alternada,  $\sigma_a$ , será igual às tensões máxima ( $\sigma_{\max}$ ) e mínima ( $\sigma_{\min}$ ), Fig. 2.9(a). Carregamentos onde a tensão média,  $\sigma_m$ , não é zero são denominados carregamentos flutuantes (Fig. 2.9(b)). Esse tipo de carregamento, para a mesma tensão alternada do caso 2.9(a) terá uma tensão máxima ( $\sigma_{\max}$ ) maior devido à tensão inicial  $\sigma_m$ . Há um tipo de carregamento flutuante que é caracterizado por apresentar tensão média igual à amplitude de tensão,  $\sigma_m = \sigma_a$  e tensão mínima igual a zero,  $\sigma_{\min} = 0$ , Fig. 2.9(c).

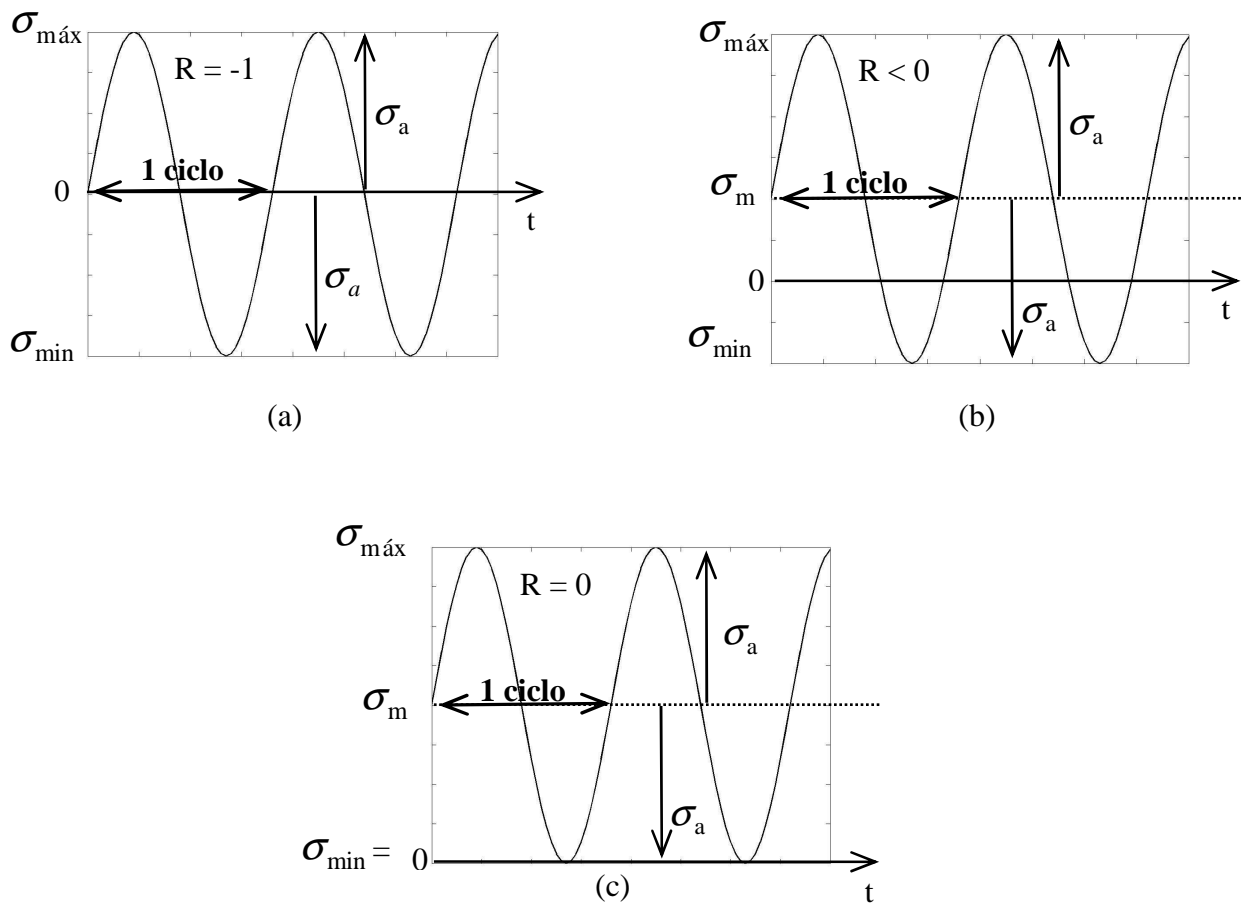


Figura 2.9- Carregamento à amplitude constante. (a) Carregamento alternado, (b) carregamento flutuante e (c) Carregamento repetido.

Para melhor compreender o comportamento das tensões alternadas utiliza-se a razão de carregamento  $R$ , definida na equação (13). A Fig.2.9 ilustra três diferentes situações de tensões alternadas com diferentes valores para a razão de carregamento. Carregamentos totalmente reversos possuem valores de  $R = -1$ , quando  $\sigma_{\min}$  for igual a zero  $R$  também assumirá esse valor. Nas demais situações a razão de carregamento acompanha o sinal de  $\sigma_{\min}$ .

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \quad (13)$$

### 3. FADIGA

Fadiga é um processo de alteração estrutural de um componente que ocorre de forma localizada, progressiva e permanente. O fenômeno de fadiga ocorre devido as tensões cíclicas a que o elemento estará submetido. Essas tensões tornam as mudanças progressivas nas propriedades do material quase imperceptíveis. Uma outra particularidade considerada em fadiga é que se houver o desaparecimento das tensões ou um alívio momentâneo das mesmas, os efeitos produzidos pelo carregamento cíclico não serão anulados. Significa dizer que os danos produzidos por fadiga são cumulativos e irreversíveis. Repetidos ciclos de carga e descarga sobre componentes estruturais geram microfissuras, invisíveis a olho nu que, dependendo do tempo de carregamento, podem causar a fratura no material. Rupturas causadas por danos de fadiga quase sempre ocorrem de forma repentina e por isso devem ser prevenidas. Ocorrem em elementos como molas, barras de torção, eixos e outras diversas estruturas.

O processo de fratura por fadiga inicia-se com o surgimento de uma minúscula trinca que se forma em algum ponto de concentração de tensão sobre a superfície de um elemento. A cada ciclo de tensão essa fissura se propaga. Quando atinge um tamanho crítico ocorre a fratura que acontece de uma forma muito rápida. O número de ciclos considerados após a trinca atingir dimensões críticas é insignificante para o cálculo da vida em fadiga. Assim, a vida em fadiga  $N_f$  (quantidade total de ciclos até a ruptura) é estimada pela soma do número de ciclos para a iniciação da trinca  $N_i$  e sua propagação  $N_p$ .

$$N_f = N_i + N_p \quad (14)$$

A resistência de um elemento à fadiga depende de uma série de fatores, mas principalmente da natureza do material constituinte, do tipo de solitação que ocorre e da existência ou não de fatores construtivos que potencializem o surgimento de trincas. As propriedades mecânicas necessárias ao projeto são determinadas em ensaios uniaxiais, em laboratório.

As leis ou equações que definem o comportamento do material à fadiga são geralmente relações obtidas experimentalmente ensaiando corpos de prova do material desejado. Nestas leis relaciona-se a amplitude de tensões ou deformações com o número de ciclos gasto até se atingir a falha completa do corpo.

Existem dois domínios para descrever o processo de fratura por fadiga e cada um deles possui características físicas distintas que levam à ruptura. Carregamentos cíclicos que induzem a deformações plásticas são caracterizados por elevados níveis de tensão e vidas curtas de fadiga. As elevadas tensões causam deformações a curto prazo que são relacionadas ao número de ciclos para atingir a ruptura por fadiga. Fadiga de alto número de ciclos constitui o segundo domínio do processo de fadiga. Nesse caso, o material é submetido a baixos níveis de carga e isso resulta em um tempo maior para a fratura. Além disso, as deformações cíclicas permanecem na região elástica do material. O objetivo dessa abordagem é definir uma vida para determinado componente ou ainda determinar as tensões para uma vida infinita.

### 3.1 FADIGA DE ALTO CICLO

Uma forma de estudar o comportamento de um material submetido a condições cíclicas de carregamento é por meio das curvas S-N. Nesse tipo de curva, para cada valor de tensão aplicada existe um número de ciclos até a ruptura. À medida que a tensão aplicada decresce, maior será o número de ciclos até que ocorra a falha. Isso ocorrerá até que se chegue em um ponto de tensão, chamado limite de fadiga (Fig.3.1). Tensões abaixo desse limite determinam vida infinita para determinado material e, portanto, a falha por fadiga não ocorrerá. Para alguns aços de alta resistência e ligas de alumínio o limite de fadiga não é bem definido e a curva S-N continua a cair à medida que se aumenta o número de ciclos. Esse tipo de material deve ser trabalhado de acordo com a resistência à fadiga, que corresponde ao nível de tensão máxima ao qual o material suporta em um determinado número de ciclos sem que ocorra a falha.

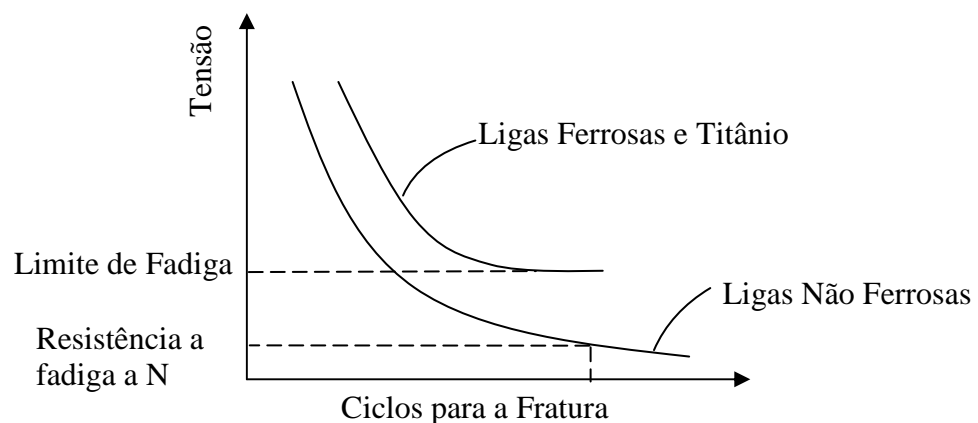


Figura 3.1 – Curva Tensão-Vida

Componentes estruturais são projetados com base na resistência à fadiga do material, juntamente com um fator de segurança, mantendo-se assim, tensões sempre abaixo das quais o material falha por fadiga.

As tensões nominais obtidas nas curvas de Tensão-Vida ou curvas S-N provêm de testes de carregamento cíclicos em vários corpos de prova. Os testes são realizados com um valor de tensão constante até que ocorra a falha. O número de ciclos observado até a ruptura para essa tensão é então inserida no eixo das abscissas e o valor da tensão no eixo das ordenadas. Assim, após diversos valores de tensões obtêm-se diversos pontos no diagrama que irão formar a curva S-N, também chamadas de curvas de Wöhler.

Uma equação matemática desenvolvida por Basquin (1910) relaciona o número de ciclos para a falha ( $N_f$ ) com a amplitude de tensão ( $\sigma_a$ ).

$$\sigma_a = \sigma'_f (2N_f)^b \quad (15)$$

Os parâmetros  $\sigma'_f$  e  $b$  são respectivamente o coeficiente de resistência à fadiga e o expoente de resistência a fadiga e são característicos de cada material. A equação (15) é conhecida como relação de Basquin e somente será válida para tensões médias nulas ( $\sigma_m = 0$ ).

O método Tensão-Vida ignora o verdadeiro comportamento do material e considera que as deformações são totalmente elásticas. Por esse motivo, esse método torna-se apropriado para estudos de fadiga quando as deformações plásticas são muito pequenas. Isso ocorre em baixos níveis de tensão que estão associados à vida em fadiga acima de  $10^4$  ciclos.

### **3.1.1 Efeito da tensão média na vida à fadiga**

Grande parte dos ensaios realizados em laboratório para obtenção de dados de vida em fadiga é realizada com tensões completamente reversas, ou seja, tensões cíclicas com média nula. Na prática, estruturas reais são submetidas a carregamentos com tensões médias diferente de zero. Portanto, devem-se considerar os efeitos que as tensões médias produzem na vida à fadiga do material.

Para uma dada amplitude de tensão  $\sigma_a$  e diversos valores de tensões médias obtêm-se curvas S-N diferentes, conforme Fig.3.2. Percebe-se que o aumento da tensão média, ocorre a diminuição da vida em fadiga. Como tensões compressivas possuem sinal negativo conclui-se que tensões médias desse tipo são benéficas elevando a vida em fadiga do material.

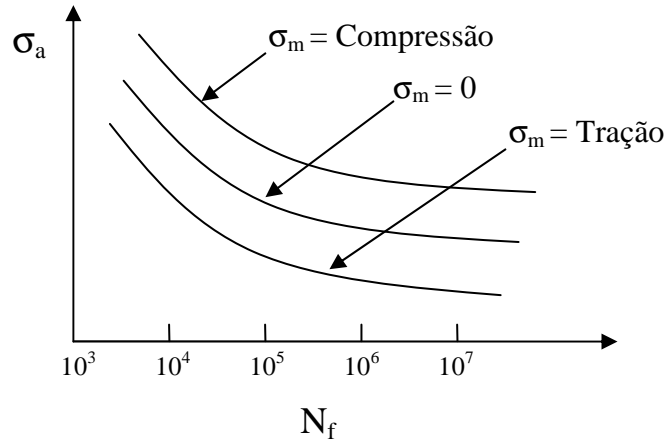


Figura 3.2 – Diferentes Tensões médias para uma mesma amplitude de tensão  $\sigma_a$

Uma modificação da relação de Basquin, equação (15), foi proposta por Morrow (1968) considerando os efeitos da tensão média na vida à fadiga.

$$\sigma_a = (\sigma'_f - \sigma_m)(2N_f)^b \quad (16)$$

### 3.2 FADIGA DE BAIXO CICLO

No final da década de 50 ciclos térmicos gerados em reatores nucleares e turbinas envolviam vidas relativamente curtas. Em resposta a esses problemas, surgiu a abordagem baseada na deformação. Carregamentos que envolvem altos níveis de tensões cíclicas e, portanto baixa vida em fadiga devem ser analisados pelo enfoque deformação-vida ( $\epsilon - N$ ).

A equação (15) descreve a parcela elástica do processo de fadiga. Tendo E como o módulo de elasticidade do material, essa equação pode ser reescrita para a deformação elástica como:

$$\frac{\Delta \epsilon_e}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b \quad (17)$$

A parcela plástica da deformação  $\frac{\Delta \varepsilon_p}{2}$  no processo de fadiga, equação (18), foi proposta inicialmente por Coffin e Manson (1954), enquanto trabalhavam em problemas relacionados à fadiga térmica.

$$\frac{\Delta \varepsilon_p}{2} = \varepsilon'_f (2N_f)^c \quad (18)$$

Os fatores  $c$  e  $\varepsilon'_f$  representam o expoente de ductilidade à fadiga e o coeficiente de ductilidade à fadiga respectivamente.

A deformação total baseada no diagrama de Wöhler pode ser descrita matematicamente pela superposição das equações que relacionam as parcelas elástica e plástica. Levando em consideração os efeitos da tensão média apresentado por Morrow, a amplitude total de deformação relaciona-se com o número de ciclos  $N_f$  para iniciação da trinca por:

$$\frac{\Delta \varepsilon}{2} = \frac{\sigma'_f - \sigma_m}{E} (2N_f)^b + \varepsilon'_f (2N_f)^c \quad (19)$$

Segundo Dowling (1993) para boa parte dos carregamentos cíclicos o expoente  $b$  assume valores aproximados de -0.1 e o expoente  $c$  fica em torno de -0.6. Por esse motivo a componente plástica possui uma inclinação maior do que a componente elástica, conforme Fig.3.3.



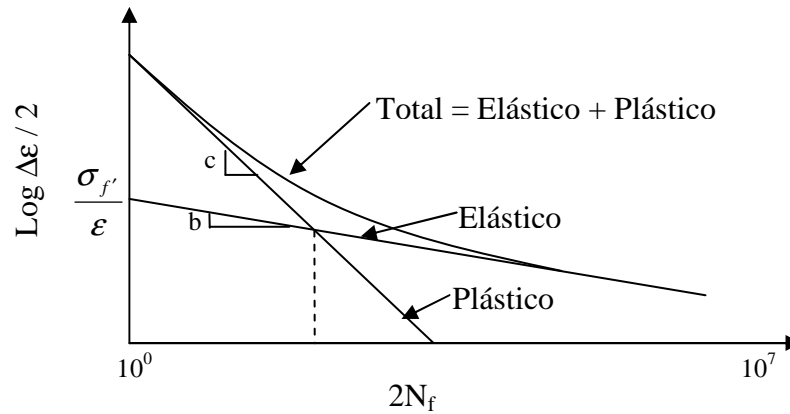


Figura 3.3 – Curva Deformação-Vida

O ponto de interseção entre as parcelas plástica e elástica torna-se uma fronteira para a qual a deformação total adotará predominantemente uma das duas formas de deformação. A esquerda desse ponto tem-se a vida em fadiga determinada preponderantemente pela parcela plástica da deformação apresentando assim baixos ciclos, enquanto pontos à direita indicam a vida em fadiga subordinada as deformações elásticas com pequenas amplitudes e alto número de ciclos.

A metodologia  $\epsilon - N$  considera o comportamento real do material estabelecendo mais precisamente a relação tensão-deformação. Essa abordagem permite analisar situações que envolvem geometrias complicadas, além disso, a presença de deformações plásticas pode envolver situações com níveis elevados de solicitações locais, como a raiz de uma descontinuidade geométrica. Assim, deve-se associar a abordagem  $\epsilon - N$  com métodos para se determinar as tensões e deformações locais, tais como análise por elementos finitos e medições feitas experimentalmente.

### 3.3 MECANISMO DE NUCLEAÇÃO DE TRINCAS

Considere a Fig. 3.4 (a) como um volume cristalino V contido no ponto O da Fig. 2.1 de modo que ele é definido para que o estado de tensão seja constante e exatamente o mesmo descrito no ponto O. Em uma escala microscópica, o estado de tensão cria bandas persistentes de escorregamento no volume cristalino (Ellyin,1997). Como consequência da concentração dessa micro tensão ocorre o aparecimento de intrusões e extrusões, como ilustrado na Fig. 3.4 (c) que, por sua vez, serão os concentradores de tensão responsáveis pelo aparecimento de micro trincas.

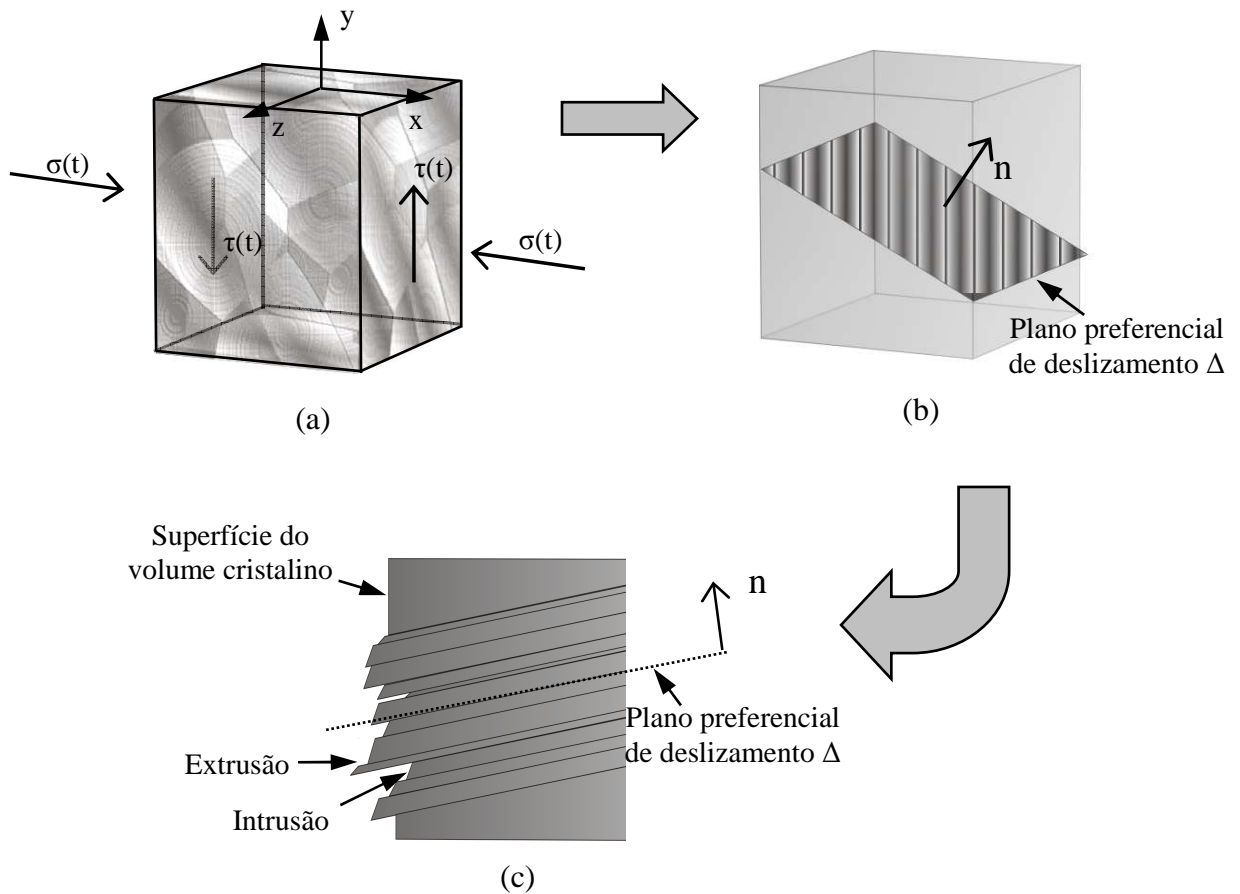


Figura 3.4 – (a) Volume cristalino, (b) Plano preferencial de deslizamento no volume cristalino, (c) Formação de concentradores de tensões

Após certo número de ciclos o escorregamento acontece em diversos planos de deslizamento. Como o processo de fadiga é irreversível, os deslocamentos causados pelos planos paralelos de escorregamento resultam em uma rugosidade superficial na peça e por isso as trincas são formadas nessa região (Suresh, 1991). A Fig. 3.5 ilustra a deformação microscópica na superfície de uma peça de cobre e a formação de extrusões e intrusões.



Fonte: Meyers, 1999

Figura 3.5- Intrusões e Extrusões em uma superfície de cobre.

## 4. MODELO DE FADIGA MULTIAXIAL

O limite de resistência à fadiga separa duas regiões bem distintas, uma região segura e uma que apresentará falha por fadiga. O limite de resistência à fadiga encontrado na literatura é definido com base em experimentos uniaxiais. Porém esse conceito pode ser utilizado para prever a vida em fadiga de carregamentos multiaxiais. Os critérios de fadiga multiaxial surgiram com a necessidade de se verificar o tempo de vida de um elemento mecânico submetido a carregamento combinado a partir dos dados de carregamento uniaxial.

Problemas de fadiga multiaxial são divididos em três enfoques principais: Métodos baseados nas tensões ou deformações equivalentes; métodos de plano crítico; e métodos de energia ou do trabalho de deformação.

A abordagem de tensões ou deformações equivalentes consiste na transformação das tensões multiaxiais em uma amplitude de tensão uniaxial equivalente, a qual estima-se gerar o mesmo dano que o carregamento combinado. Métodos de plano crítico são baseados na combinação das tensões cisalhante e normal associadas a um plano crítico. As tensões cisalhantes estão ligadas ao surgimento das bandas de escorregamento persistente que irão desencadear o processo de iniciação de trincas por fadiga. Já a tensão normal de tração favorece o crescimento dessa fissura enquanto a de compressão retarda o seu crescimento. A tensão perpendicular ao plano de surgimento da trinca influencia na formação das bandas persistentes de escorregamento. De fato, tensões compressivas inibem o escoamento das bandas persistentes de escorregamento, enquanto as tensões de tração favorecem esse escoamento (Susmel e Lazzarin, 2002).

### 4.1 CARREGAMENTOS CÍCLICOS MULTIAXIAIS

Os conceitos apresentados no Capítulo 2 serão de fundamental importância para a compreensão do modelo de fadiga multiaxial. Um ponto qualquer em um corpo submetido a um carregamento tem seu estado de tensão descrito pelo tensor de tensões  $\mathbf{T}$  (equação (9)). Sabe-se também que boa parte dos componentes em engenharia está sob a ação de cargas dinâmicas que variam a cada instante de tempo  $t$ . Portanto, para esse tipo de carga, em um caso geral o tensor  $\mathbf{T}$  será:

$$\mathbf{T}(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(t) & \tau_{xy}(t) & \tau_{xz}(t) \\ \tau_{xy}(t) & \sigma_{yy}(t) & \tau_{yz}(t) \\ \tau_{xz}(t) & \tau_{yz}(t) & \sigma_{zz}(t) \end{bmatrix} \text{ para } t \in P \quad (20)$$

sendo  $P$  o período de carregamento.

Considere um corpo qualquer submetido a estado plano de tensões conforme Fig.2.8. Se o carregamento envolver esforços combinados de flexão e torção, for cíclico e obedecer a uma função senoidal, tem-se:

$$\mathbf{T}(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(t) & \tau_{xy}(t) & 0 \\ \tau_{xy}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ para } t \in P \quad (21)$$

Onde

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(t) &= \sigma_{xx,m} + \sigma_{xx,a} \text{sen}(\varpi \cdot t) \\ \tau_{xy}(t) &= \tau_{xy,m} + \tau_{xy,a} \text{sen}(\varpi \cdot t - \delta_{xy}) \end{aligned} \quad (22)$$

As componentes de tensão  $\sigma_{xx,m}$  e  $\tau_{xy,m}$  representam as tensões médias normal e cisalhante respectivamente e  $\sigma_{xx,a}$  e  $\tau_{xy,a}$  as tensões alternadas. Ambas as tensões são senoidais,  $\varpi$  é o comprimento de onda e  $\delta_{xy}$  é o ângulo que diferencia a fase entre as componentes normal e cisalhante de tensão.

## 4.2 CRITÉRIO DE PLANO CRÍTICO

Sabe-se que as trincas ocorrem em bandas de escorregamento, contudo materiais apresentam inclusões de materiais não metálicos, precipitados e pequenos defeitos. Por esse motivo torna-se impossível conhecer o plano preferencial de escorregamento (Susmel e Lazzarin, 2002).

Conceitos relacionados a planos preferenciais de escorregamento são aplicados levando-se em conta duas importantes considerações. Primeiro, as trincas ocorrem de modo transcrystalino nas bandas de escorregamento e, além disso, o material é considerado homogêneo e isotrópico. Assim, pode-se afirmar estatisticamente, que cada plano material  $\Delta$

possui a mesma quantidade de grãos e dentre esses, um irá coincidir com o plano crítico  $\Delta_C$ . Em um regime macroscópico puramente elástico, para um determinado estado de tensões, sugere-se então que o processo de iniciação das trincas por fadiga seja governado pela maior amplitude de tensão cisalhante  $\tau_{a,máx}$  que irá ocorrer em um determinado plano material. Esse plano será definido então como o plano crítico  $\Delta_C$ .

Com as duas considerações feitas anteriormente, cada direção sobre o plano material irá conter um mesmo número de grãos e apenas uma dentre essas direções irá coincidir com a direção preferencial de cisalhamento. Portanto, pode-se concluir que a trinca ocorre no plano que contém a máxima amplitude de tensão cisalhante e sua propagação acontecerá na direção dessa mesma tensão.

Em processos de fadiga os carregamentos variam com o tempo. Por esse motivo, ao longo do carregamento o vetor  $\mathbf{t}(t)$  irá descrever um caminho  $\psi$  em  $R^3$ . A cada instante de tempo o vetor tensão pode ser decomposto em um vetor tensão de cisalhamento  $\boldsymbol{\tau}(t)$ , o que formará a projeção de  $\psi$  sobre o plano analisado  $\Delta$ , e um vetor tensão normal  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  será formado, perpendicular ao plano (Fig.4.1).

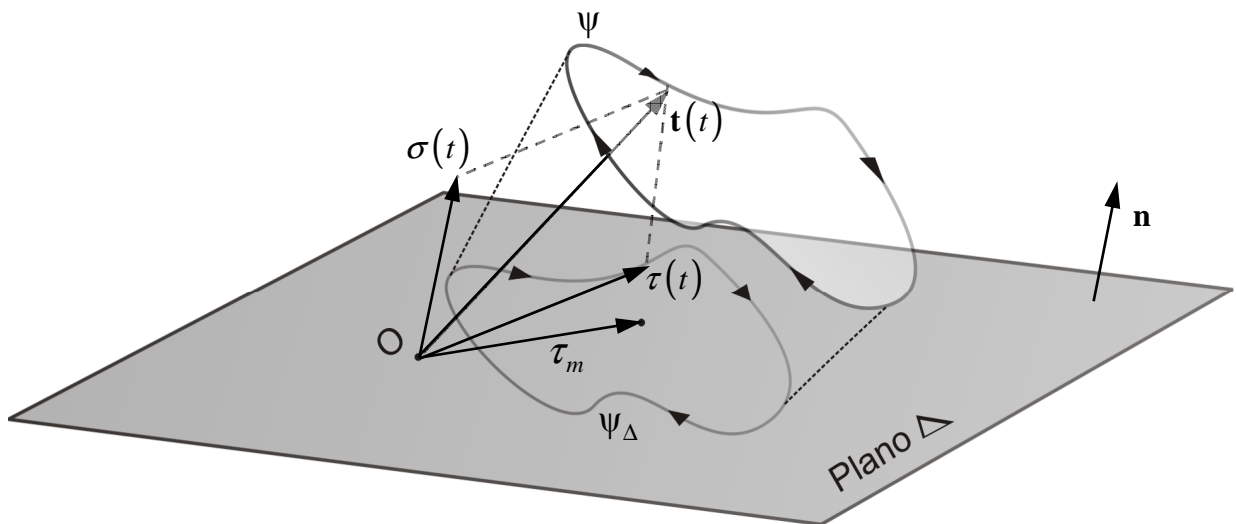


Figura 4.1- Vetor tensão descrevendo uma trilha de carregamento  $\psi$  para um carregamento periódico

O vetor normal  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  permanece na mesma direção durante todo o ciclo de carregamento, porém sua magnitude muda a cada instante de tempo. Já o vetor cisalhante  $\boldsymbol{\tau}(t)$  varia em magnitude e direção sobre o plano durante todo o carregamento periódico. A

tensão cisalhante média  $\tau_m$  é representada pelo vetor que liga o ponto O ao centro da curva de carregamento cisalhante  $\psi_\Delta$ . Critérios de plano crítico requerem um procedimento para associar a noção de amplitude à história  $\psi_\Delta$ , além do cálculo da maior tensão normal ao plano de corte  $\Delta$ .

Enquanto o cálculo da máxima tensão normal ao plano de corte é uma tarefa trivial, não pode-se dizer o mesmo sobre o cálculo da amplitude da tensão cisalhante  $\tau_a$ . A seguir, apresentar-se-á alguns métodos existentes na literatura para esse fim.

#### 4.2.1 Critério da maior projeção

Analisando a mesma curva de carregamento  $\psi_\Delta$  da Fig. 4.1, imagine todas as possíveis retas que passam pelo ponto O e que se encontram sobre o plano  $\Delta$ . Projeta-se  $\psi_\Delta$  em todas essas retas e seleciona-se a reta que obtiver a maior de todas as projeções. Suponhamos que a reta que possui a maior projeção esteja ilustrada na Fig.4.2 e essa projeção seja o segmento  $\overline{AB}$ . A amplitude de tensão equivalente será representada pela metade dessa projeção, ou seja,  $\tau_a = \overline{AB}/2$ . A tensão cisalhante média será dada pelo segmento  $\overline{OM}$  onde M representa o ponto médio de  $\overline{AB}$ .

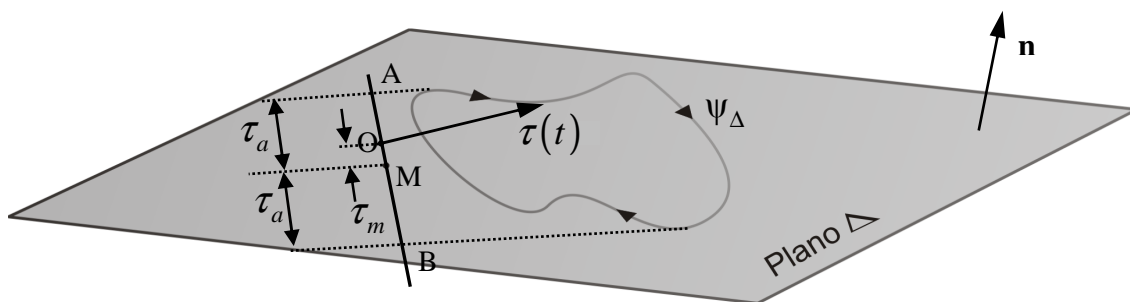


Figura 4.2- Maior projeção representada pelo segmento  $\overline{AB}$

Existem carregamentos para os quais o critério da maior projeção conduz a resultados não confiáveis. Suponha que o vetor cisalhante  $\tau(t)$  descreva um caminho  $\psi_\Delta$  conforme ilustrado na Fig.4.3(a) e que a maior projeção seja formada pelo segmento  $\overline{CD}$ . Conforme visto, a amplitude de tensão equivalente será  $\tau_a = \overline{CD}/2$  e a tensão cisalhante média segundo

o método da projeção será igual a zero ( $\tau_m = 0$ ). Suponha agora que a história da tensão cisalhante esteja sobre o plano  $\Delta$  de tal forma que o ponto O se encontra no centro da elipse conforme Fig.4.3(b). Nota-se que a maior projeção, coincide com o eixo principal da elipse. A amplitude de tensão equivalente e a tensão cisalhante média não terão os seus valores afetados. Faz sentido o valor de  $\tau_a$  permanecer inalterado quando ocorre a mudança do caso (a) para o caso (b) já que a projeção permanece a mesma, porém o mesmo não acontece com o valor de  $\tau_m$ . A curva  $\psi_\Delta$  se encontra em duas posições diferentes e por isso o valor da tensão cisalhante média não poderia ser o mesmo. Para o caso (a) o valor de  $\tau_m$  deveria ser diferente de zero já que a curva está deslocada do ponto O, conforme visto na seção 4.2. Portanto para carregamentos que provocam curvas desse tipo em  $\Delta$  o critério da maior projeção apresenta uma falha.

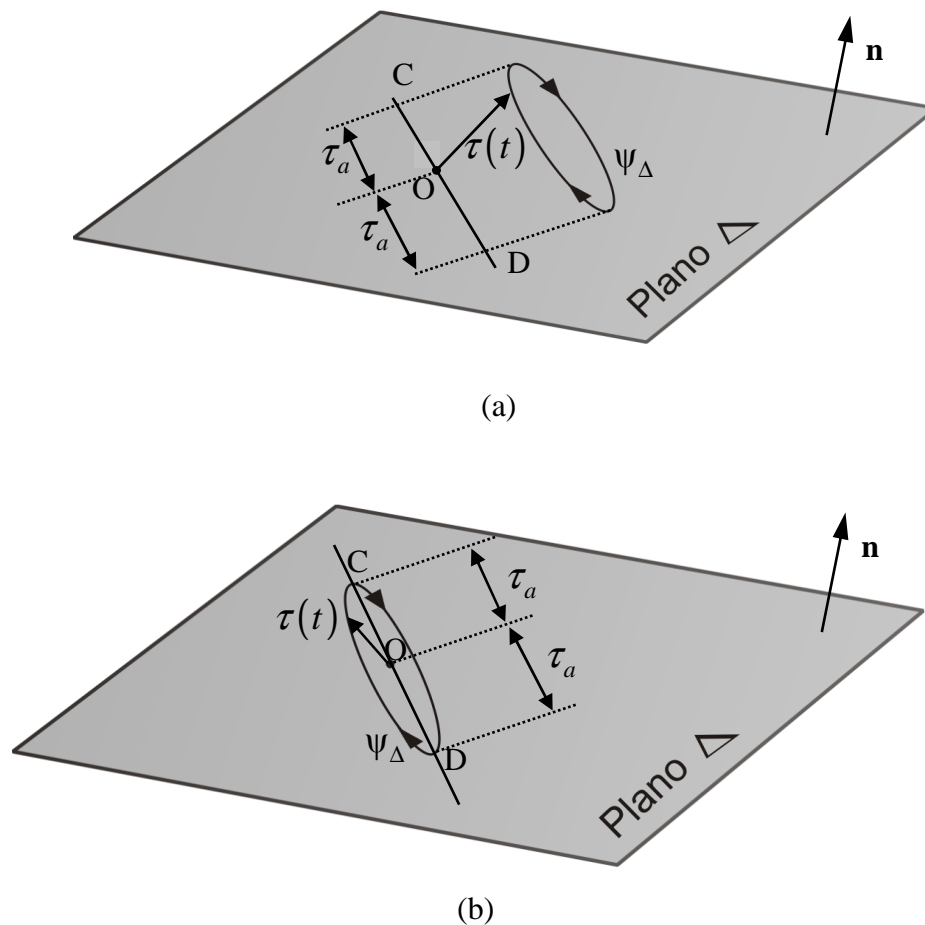


Figura 4.3- (a) História de carregamento cisalhante e tensão média igual a zero, (b) Mesma história do caso (a) em uma posição diferente sobre  $\Delta$

#### 4.2.2 Critério da máxima corda

Novamente, considere a história do vetor  $\tau(t)$  sobre o plano de corte  $\Delta$ . Por meio desse critério analisam-se todas as cordas que ligam dois pontos de  $\psi_\Delta$  e, ao final do processo, apenas a corda de maior comprimento dentre todas será escolhida. Na Fig.4.4 o segmento  $\overline{AB}$  representa essa maior corda e a metade de seu comprimento será igual a amplitude de tensão cisalhante equivalente atuando no plano  $\Delta$ . O valor da tensão cisalhante média será determinado pelo vetor que liga o ponto O ao ponto médio M da corda  $\overline{AB}$ .

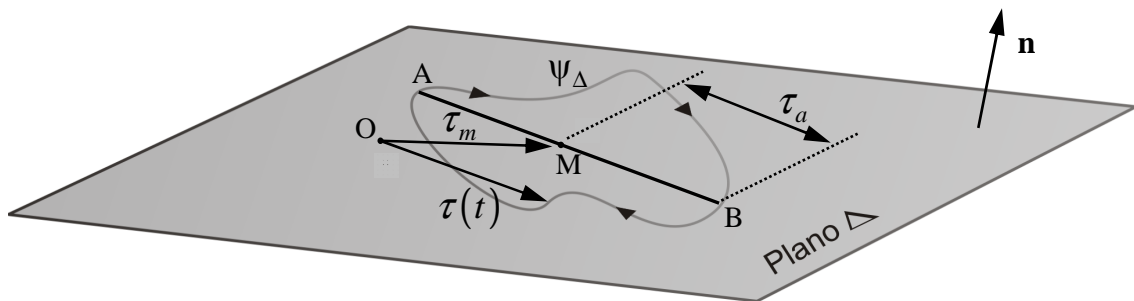


Figura 4.4 - Máxima corda representada pelo segmento  $\overline{AB}$

Suponha agora o caso do carregamento ilustrado nas Fig.4.3(a) e (b) onde o caminho  $\psi_\Delta$  é formado por uma elipse e analisemos para o critério da máxima corda. No caso (a) a corda escolhida teria exatamente o mesmo comprimento da projeção  $\overline{CD}$ , com o diferencial que a máxima corda estaria sobre o eixo principal da elipse e não passando pelo ponto O. A mudança para o critério da máxima corda não afetaria o valor da tensão cisalhante equivalente  $\tau_a$ , porém para a tensão cisalhante média ocorreriam alterações. O critério da projeção afirma que a tensão cisalhante média é a medida que liga o ponto O ao ponto médio da maior projeção, que para o caso em análise é igual a zero. Já no critério da corda a tensão cisalhante média será descrita pelo vetor que liga o ponto O ao ponto médio da máxima corda e, portanto seria diferente de zero.

Por uma simples mudança de posição no segmento  $\overline{CD}$  o método da máxima corda resolve o problema para o qual o método da maior projeção apresentou uma falha. Para a Fig.4.3(b) ambos os métodos apresentariam resultados semelhantes para todas as tensões, já



que a projeção e a corda possuem o mesmo comprimento, encontram-se posicionados sobre o eixo principal da elipse e o ponto O coincide com o ponto médio de  $\overline{CD}$ .

Apesar do critério da máxima corda apresentar uma aparente melhoria quanto ao critério da maior projeção, o primeiro também apresenta falhas no cálculo da tensão cisalhante média. Considere uma carga de fadiga cujo resultado no plano  $\Delta$  forme um caminho triangular, conforme Fig.4.5. O triângulo ABC possui dois de seus lados iguais  $AB=AC$  e, portanto haverá duas cordas de mesmo comprimento. Para o cálculo da tensão cisalhante equivalente teremos então dois valores  $\tau_a = \overline{AB}/2 = \overline{AC}/2$ . Isso não implica maiores problemas já que os valores serão idênticos, porém qual das duas cordas será usada para calcular a tensão cisalhante média, já que as duas se encontram em diferentes posições sobre o plano? Observando a Fig.4.5 nota-se que a distância do ponto O aos pontos médios M e M' são diferentes e dessa maneira o problema encontra dois valores distintos para  $\tau_m$ .

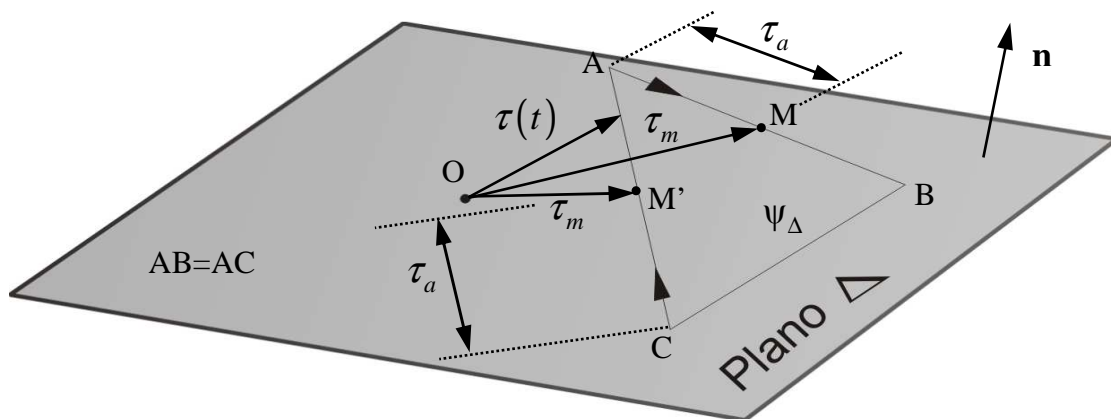


Figura 4.5 – Inconsistência na representação da tensão cisalhante média para o método da máxima corda

### 4.2.3 Critério da menor circunferência circunscrita (MCC)

O critério da menor circunferência, proposto por Dang Van (1989), estabelece que o raio  $R$  da menor circunferência que contiver a história de carregamento cisalhante  $\psi_\Delta$  representa a amplitude de tensão cisalhante no plano  $\Delta$  e que a tensão cisalhante média  $\tau_m$  é igual a magnitude do vetor que liga o ponto O com o centro da circunferência (Fig.4.6).

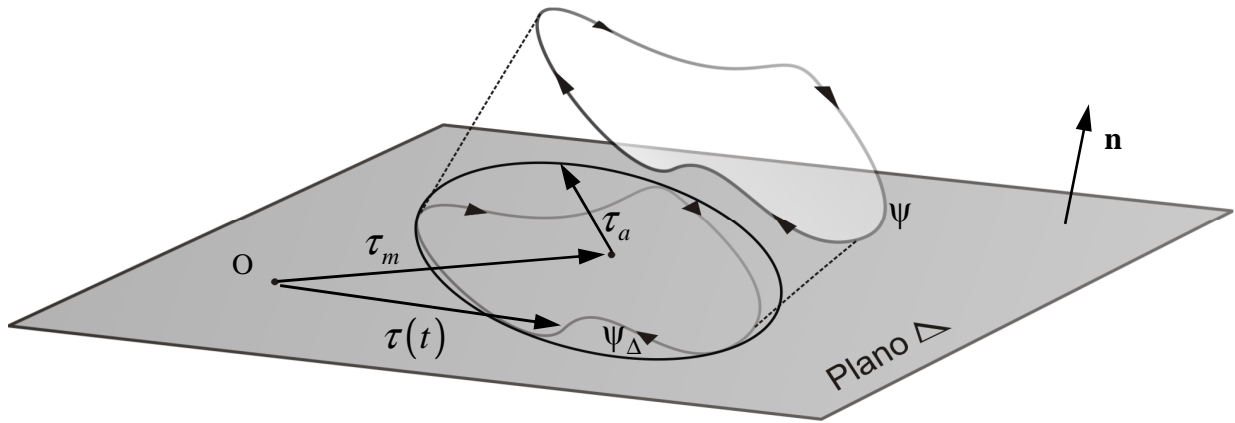


Figura 4.6 – Tensão cisalhante equivalente e a menor circunferência circunscrita

Diferentes autores (Papadopoulos, 1998), (Reis *et al.*, 2006), (Bernascoli e Papadopoulos, 2005) criaram procedimentos numéricos para o cálculo da menor circunferência que contém  $\psi_{\Delta}$ . Adotou-se nesse trabalho o método proposto por Dang Van *et al.* (1989). Inicialmente, uma pequena circunferência é posicionada no centro geométrico da história de carregamento. Posteriormente, o seu raio é ampliado por um fator  $\chi$  e, feito isso, muda-se o centro da circunferência para que ela tangencie  $\psi_{\Delta}$ . A convergência será atingida quando todos os pontos pertencentes a  $\psi_{\Delta}$  forem completamente contidos pela circunferência. O processo está descrito no diagrama da Fig.4.7 e ilustrado na Fig.4.8. O parâmetro  $\chi$  é um pequeno percentual que, multiplicado pela distância  $P_k$ , será responsável pelo incremento no raio da circunferência. Para cada estado de tensão  $\tau_k$  devem-se repetir os passos 4 e 5 para toda história cíclica de carregamento até que a convergência seja atingida.

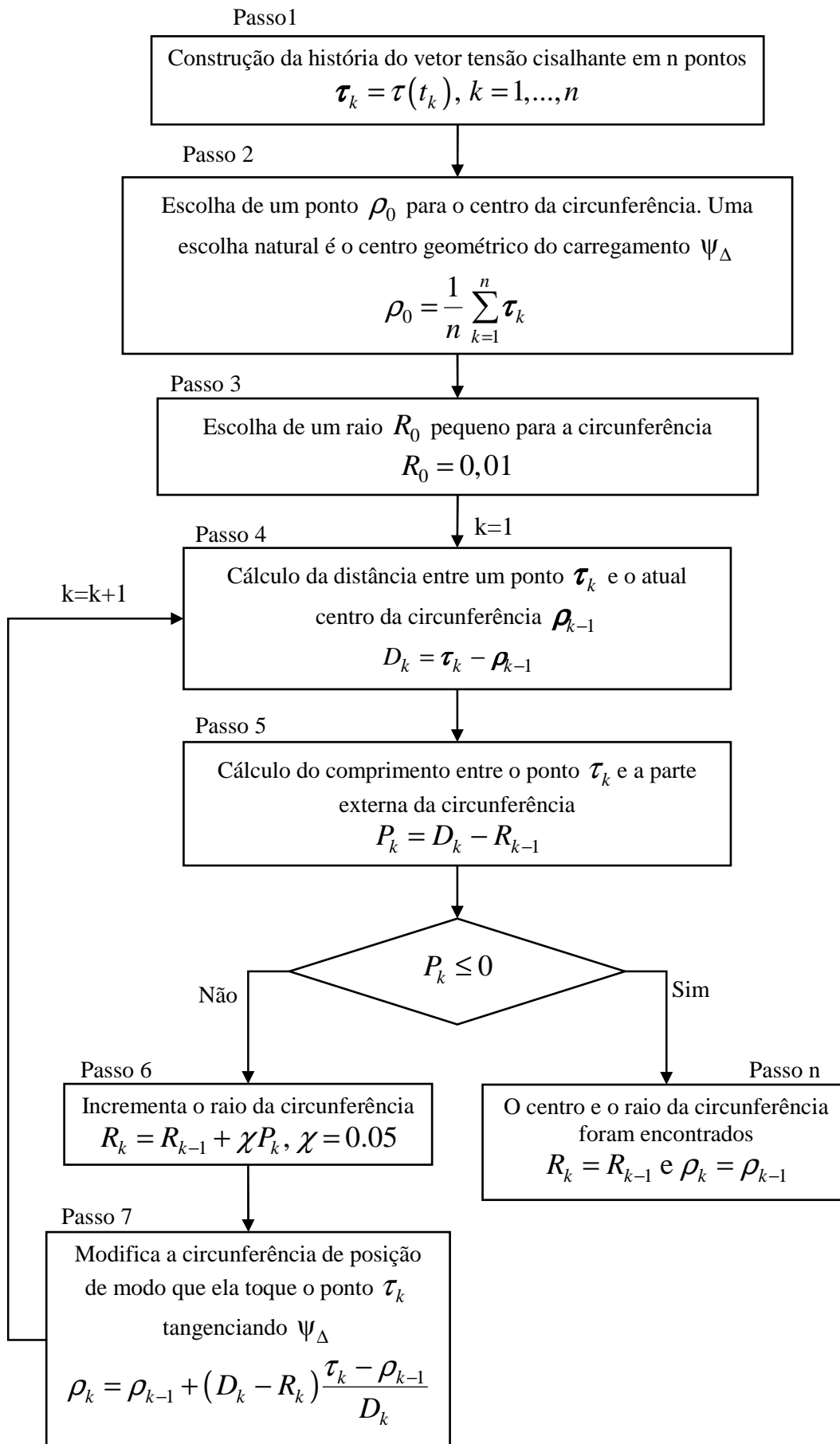


Figura 4.7 – Diagrama para encontrar o raio  $R$  da mínima circunferência circunscrita a  $\Psi_\Delta$

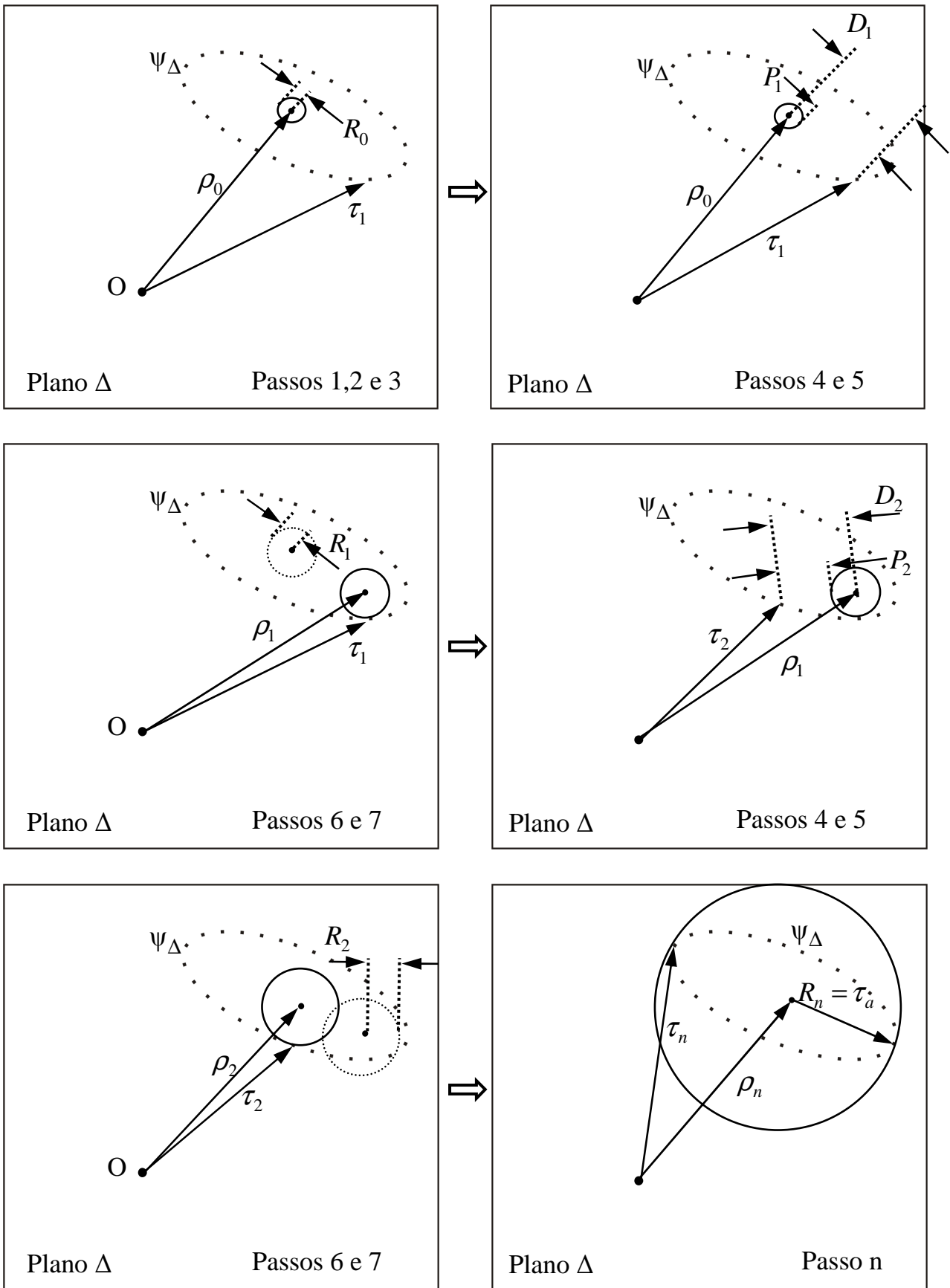


Figura 4.8 – Procedimento esquemático ilustrando o método de busca da mínima circunferência como proposto por Dang Van (1989).

### 4.3 CRITÉRIO DA INVESTIGAÇÃO INCREMENTAL ENTRE PLANOS (IP)

Alguns critérios foram apresentados na seção 4.2 para o cálculo da tensão cisalhante equivalente  $\tau_a$  e dentre esses optou-se pelo uso neste trabalho do critério da menor circunferência circunscrita proposto por Dang Van (1989). Sabe-se que pelo ponto O passam infinitos planos e todos devem ser analisados. Por esse motivo um dos métodos utilizados nesse trabalho foi o critério da investigação incremental entre planos (IP).

O IP é uma metodologia que tem como objetivo limitar os planos que serão investigados para um número finito. Para estipular um número finito de planos, os ângulos  $\phi$  e  $\theta$ , descritos na Fig.2.6, deverão percorrer intervalos de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  de acordo com incrementos  $\Delta\phi$  e  $\Delta\theta$ . O processo começa mantendo um dos ângulos fixo enquanto o outro varia de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  por meio do incremento estipulado. Feito isso, adiciona-se o incremento  $\Delta$  ao ângulo previamente fixado e novamente o outro será percorrido de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ . Esse processo será repetido até que o ângulo que começou o processo inalterado percorra todo o intervalo de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  e dessa forma um número finito de planos será investigado. A Fig.4.9 ilustra uma passagem de um plano  $\Delta_1$  para um plano  $\Delta_n$  com um incremento em ambos os ângulos.

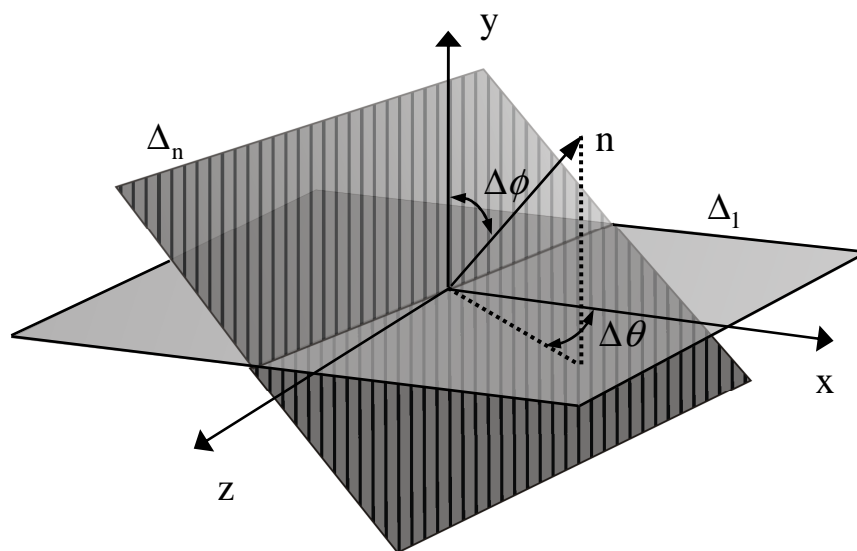


Figura 4.9 - Passagem de um plano  $\Delta_1$  para  $\Delta_n$  de acordo com o incremento  $\Delta\phi, \Delta\theta$

O intervalo que cada ângulo deverá percorrer para atingir um número finito de planos não vai até  $360^\circ$ , pois existem dois vetores normais unitários de mesma direção e sentidos opostos que determinam um único plano material. Dessa forma, no fim da investigação de

todos os finitos planos determinados pelo intervalo de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ , a ponta do vetor normal unitário  $\mathbf{n}$  irá descrever uma semicircunferência no espaço, conforme Fig.4.10.

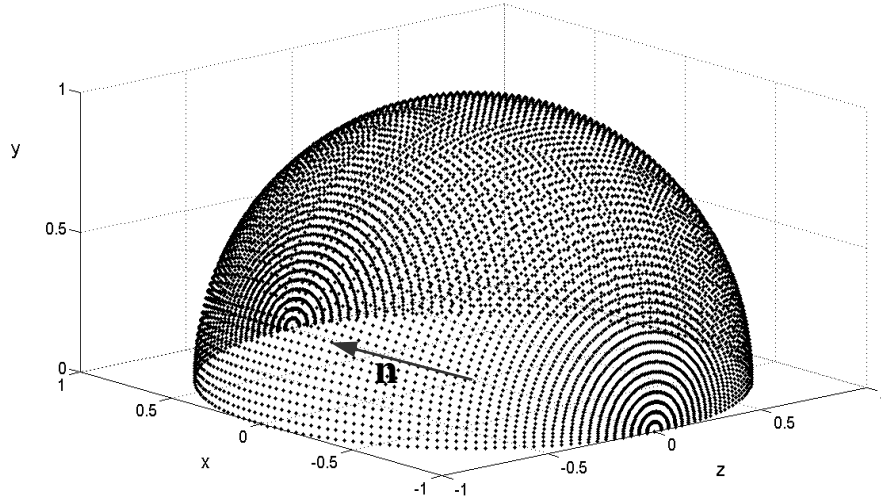


Figura 4.10 – Representação de um número finito de vetores normais unitários  $\mathbf{n}$

Analisando todos os planos materiais definidos pelos incrementos  $\Delta\phi$  e  $\Delta\theta$ , obtém-se, para cada um deles, um valor para a amplitude de tensão cisalhante equivalente no plano em análise,  $R(\theta, \phi) = \tau_a$ . No fim da investigação, o maior raio dentre todos os planos irá determinar a máxima amplitude de tensão cisalhante equivalente  $\tau_{\max}$ .

$$\tau_{a,\max} = \max_{\phi, \theta} \{R(\phi, \theta)\} \quad (23)$$

Em cada plano uma amplitude de tensão normal  $\sigma_a$  também será encontrada pelo método de investigação de planos. A amplitude de tensão normal no plano que contiver  $\tau_{a,\max}$  será definida como  $\sigma_{\Delta_c, \max}$ .

Sabe-se, da Seção 4.2 que o plano que contiver  $\tau_{a,\max}$  será considerado o plano crítico. Independentemente da complexidade do estado de tensão ao qual o ponto material estiver submetido, sempre existirão dois ou mais planos materiais que possuirão  $\tau_{a,\max}$ . Dentre todos esses planos aquele que será utilizado no modelo de fadiga multiaxial será o plano caracterizado pela máxima tensão normal: de acordo com as aproximações de plano crítico, esse plano será aquele onde o dano de fadiga atingirá seu maior valor (Susmel e Lazzarin, 2002).

#### 4.4 MÉTODO DAS CURVAS MODIFICADAS DE WÖHLER

O método das Curvas Modificadas de Wöhler utiliza os resultados obtidos para a máxima amplitude de tensão cisalhante equivalente  $\tau_{a,máx}$  e da maior tensão normal  $\sigma_{\Delta_c,máx}$  no plano crítico para prever a resistência em fadiga do material em análise.

O dano de fadiga de um determinado material submetido a um carregamento de flexão pode ser representado pelo diagrama modificado de Wöhler. O diagrama mostra o número de ciclos de um determinado material quando submetido a uma determinada tensão cisalhante para a flexão pura. Se o mesmo procedimento for realizado para torção pura uma curva similar à obtida para a flexão alternada, porém posicionada acima dessa, será obtida. As curvas obtidas para flexão pura e também para a torção pura podem ser observadas na Fig. 4.11.

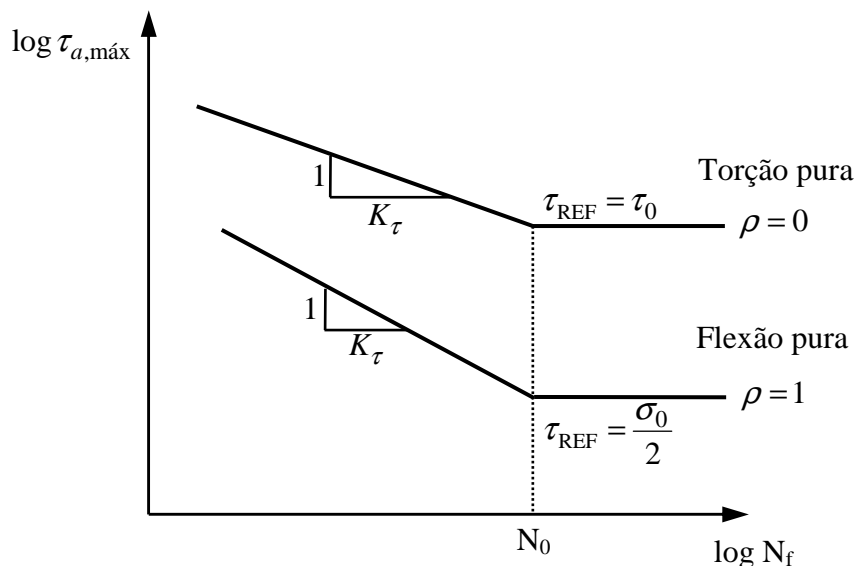


Figura 4.11 – Curvas Modificadas de Wöhler para flexão e torção pura

A razão de tensão  $\rho$  estabelece uma relação entre as tensões normal e cisalhante máximas no plano crítico, conforme equação (24). A inclinação inversa é representada pelo símbolo  $K_\tau$ .

$$\rho = \frac{\sigma_{máx}}{\tau_{a,máx}} \quad (24)$$

O círculo de Mohr para o caso de flexão alternada totalmente reversa ( $R = -1$ ) está ilustrado na Fig.4.12(a). A circunferência A representa a parte do movimento em que o ponto em análise sofre tração. Já a circunferência B a parte em que esse mesmo ponto sofre a compressão. A figura mostra que as tensões cisalhante e normal máxima estão de acordo com a equação (25), onde  $\sigma_a$  é a amplitude de tensão normal alternada.

$$\tau_{a,m\acute{a}x} = \frac{\sigma_a}{2}; \sigma_{\Delta_c,m\acute{a}x} = \frac{\sigma_a}{2} \quad (25)$$

Por esse motivo o limite  $\tau_{REF}$  para a curva de flexão pura ( $\rho = 1$ ) na Fig.4.11 é  $\sigma_0/2$ . Se for observada agora a Fig.4.12(b) que representa um caso de cisalhamento puro, as tensões cisalhante e normal máxima seguem a equação (26), onde  $\tau_a$  é a amplitude de tensão cisalhante. Fica assim provado o limite  $\tau_{REF} = \tau_0$  para a torção pura na Fig.4.11. Os limites  $\sigma_0$  e  $\tau_0$  são o limite de resistência a fadiga para flexão e limite de resistência a fadiga para torção respectivamente.

$$\tau_{a,m\acute{a}x} = \tau_a; \sigma_{\Delta_c,m\acute{a}x} = 0 \quad (26)$$

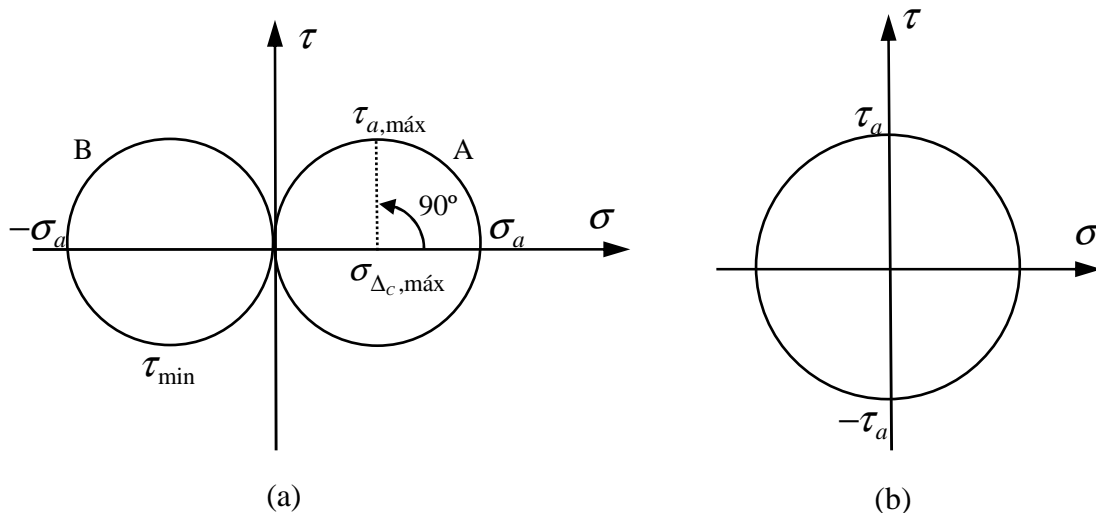


Figura 4.12 – (a) Círculo de Mohr para caso de flexão totalmente reverso, (b) Círculo de Mohr para caso de torção totalmente reverso



A precisão da estimativa de vida proposta pelo método de fadiga multiaxial está diretamente ligada ao número de dados experimentais utilizados para determinar os parâmetros  $\tau_{\text{REF}}$  e  $K_{\tau}$  (Susmel e Lazzarin, 2002). Considere um caso multiaxial de tensão onde a curva modificada de Wöhler encontra-se entre as curvas de flexão ( $\rho = 1$ ) e torção ( $\rho = 0$ ), conforme Fig. 4.13. Assumindo a linearidade dessa curva pode-se calibrar o modelo por meio da equação (27).

$$\tau_{\text{REF}}(\rho) = \tau_{\text{REF}}(\rho = 0) + \rho \cdot [\tau_{\text{REF}}(\rho = 1) - \tau_{\text{REF}}(\rho = 0)] \quad (27)$$

Observando o diagrama das curvas modificadas de Wöhler na Fig.4.13 percebe-se que a condição para que não haja falha por fadiga em regime de alto ciclo é:

$$\tau_{a,\text{máx}} \leq \tau_{\text{REF}}(\rho) \quad (28)$$

Substituindo a equação (27) na equação (28) e assumindo  $\tau_{\text{REF}}(\rho = 0) = \tau_0$  e  $\tau_{\text{REF}}(\rho = 1) = \sigma_0/2$ , conforme explicado anteriormente nesta seção chega-se à:

$$\tau_{a,\text{máx}} + \rho \cdot \left( \tau_0 - \frac{\sigma_0}{2} \right) \leq \tau_0 \quad (29)$$

Para avaliar o Modelo das Curvas Modificadas de Wöhler, foi convencionado um índice de erro para resistência a fadiga que mede o quanto a situação de carregamento imposta nos testes está distante da condição de falha (limite de fadiga). Dessa maneira o índice de Susmel e Lazzarin foi definido como:

$$E_{SU}(\%) = \left( \frac{\tau_{a,\text{máx}} + \left( \tau_0 - \frac{\sigma_0}{2} \right) \cdot \left( \frac{\sigma_{\Delta_c,\text{máx}}}{\tau_{a,\text{máx}}} \right) - \tau_0}{\tau_0} \right) \cdot 100 \quad (30)$$

Como todos os testes são realizados na condição limite de fadiga, se o índice  $E_{SU} = 0$  a estimativa de vida em fadiga será exata. Se  $E_{SU} < 0$  a previsão é não conservativa, pois o modelo indica que ainda é possível aumentar a carga. E ainda, se  $E_{SU} > 0$  o modelo indica que o componente já falhou por fadiga, fazendo, portanto, uma previsão conservativa.

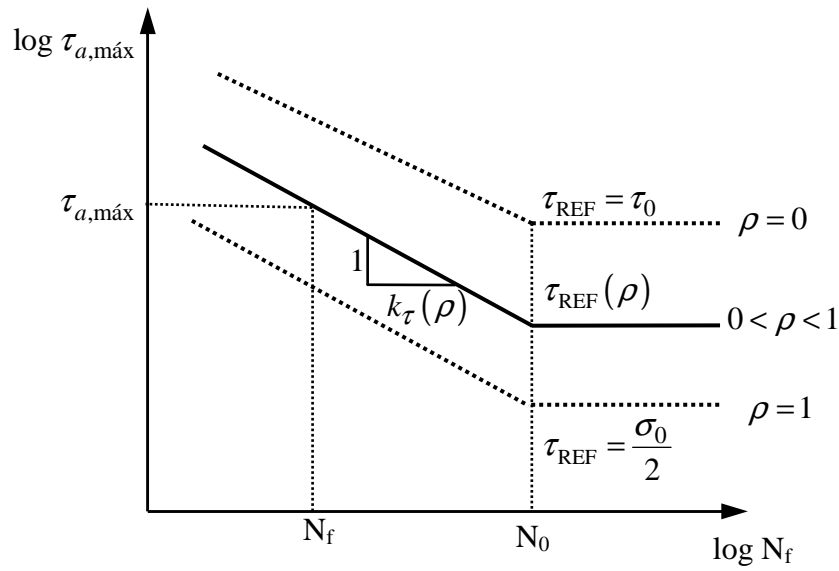


Figura 4.13 – Curvas Modificadas de Wöhler

Se utilizarmos a mesma hipótese simplificada na equação (27) para a inclinação inversa  $K_\tau$ , obtem-se:

$$k_\tau(\rho) = k_\tau(\rho=0) + \rho \cdot [k_\tau(\rho=1) - k_\tau(\rho=0)] \quad (31)$$

Finalmente, se o modelo for calibrado precisamente em termos de  $\tau_{a,máx}$  e  $K_\tau$ , pode-se estimar a vida em fadiga para corpos submetidos a carregamentos multiaxiais de alto ciclo por meio da expressão:

$$N_f = N_0 \cdot \left[ \frac{\tau_{REF}(\rho)}{\tau_{a,máx}} \right]^{k_\tau(\rho)} \quad (32)$$

onde  $N_f$  representa o número de ciclos para falha por fadiga e  $N_0$  o ponto a partir do qual o material possui vida infinita.

Substituindo as equações (27) e (31) na equação (32) pode-se estimar a vida em fadiga para qualquer curva apenas com base em informações nas curvas de flexão e torção pura e da amplitude de tensão equivalente  $\tau_{a,máx}$ .

Considerando a equação (29) observa-se que a condição limite para que o carregamento não produza falha por fadiga será quando os dois lados da equação se igualarem. Organizando então essa igualdade chega-se a:

$$\tau_{a,máx} = \tau_0 - \rho \cdot \left( \tau_0 - \frac{\sigma_0}{2} \right) \quad (33)$$

À medida que a razão de tensão  $\rho$  muda de valor dentro de um intervalo têm-se então diferentes valores para  $\tau_{a,máx}$ . A partir da equação (24) pode-se agora determinar  $\sigma_{\Delta_c,máx}$ . Com diversos valores para a amplitude de tensão cisalhante e para a tensão normal máxima determina-se uma curva limite para que não ocorra falha em um determinado carregamento, conforme ilustrado na Fig.4.14. A esquerda da curva encontra-se a região segura e a direita da mesma a região que irá apresentar falha por fadiga.

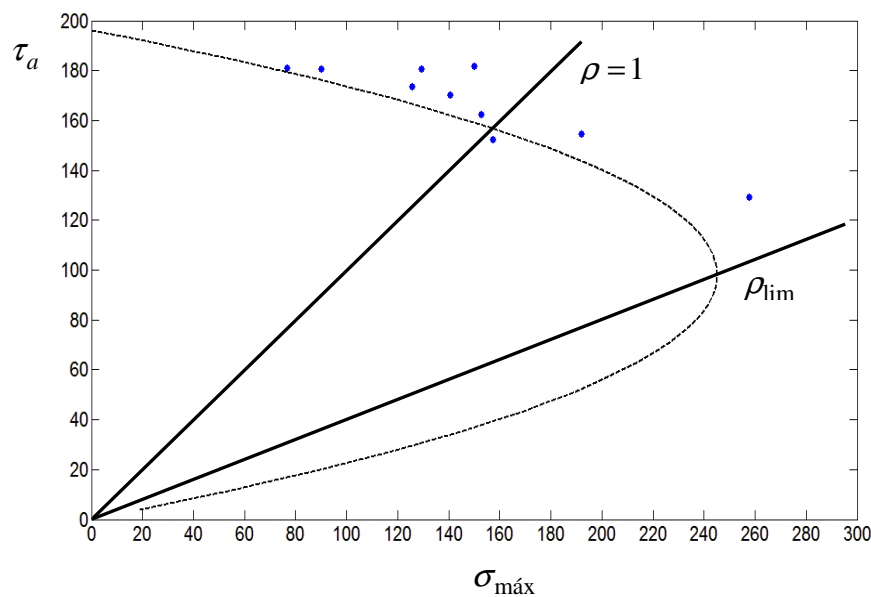


Figura 4.14 – Curva limite de carregamento de acordo com o modelo de Susmel-Lazzarin

A curva limite na Fig.4.14 representa os pontos  $\tau_{REF}$  da Fig.4.13 para os diferentes valores de  $\rho$ . Note-se que, pela equação (33), quando  $\rho=0$ ,  $\tau_{a,m\acute{a}x} = \tau_0$ . Quando  $\rho=1$ ,  $\tau_{a,m\acute{a}x} = \sigma_0/2$  o que está de acordo com a Fig.4.13. A construção da curva acontece até que chega-se a um limite da razão de tensão representado por  $\rho_{lim}$ . Como critérios de plano crítico são governados pela amplitude de tensão cisalhante pode não ser seguro estender o modelo para situações onde as falhas por fadiga são geradas por pequenas amplitudes de tensão cisalhante no plano crítico (Susmel, 2005). Isso significa dizer que abaixo da reta gerada por  $\rho_{lim}$  o modelo deixa de ser confiável. O limite da razão de tensão depende das propriedades de resistência  fadiga do material e calcula-se por meio da equação (34).

$$\rho_{lim} = \frac{\tau_0}{2\tau_0 - \sigma_0} \quad (34)$$

## 5. ALGORITMO GENÉTICO (AG)

Algoritmos genéticos são métodos de busca aleatória baseados em conceitos biológicos da evolução das espécies e foram propostos inicialmente por John Holland (1975). O princípio básico desses algoritmos é evoluir um determinado conjunto de indivíduos a partir da avaliação da aptidão de cada um deles, selecionando os mais aptos e destinando-os para reprodução para gerar a próxima geração de indivíduos.

A implementação de um AG começa com a criação de uma população aleatória de indivíduos. Esta população será avaliada para criar melhores oportunidades reprodutivas para aqueles indivíduos que carregam a melhor informação do resultado que se deseja atingir.

A cada geração aplica-se um conjunto de operações genéticas básicas que são a seleção, o cruzamento e a mutação. Ao final das três operações uma nova geração será criada e representará estatisticamente uma melhor aproximação da solução do problema do que a população anterior. Aqui neste trabalho utilizou-se também o operador elitismo que torna-se o responsável por garantir que o melhor indivíduo permaneça na geração seguinte.

O AG será aplicado no problema de plano crítico com o mesmo objetivo do método da investigação de planos (IP), ou seja, selecionar um número finito de planos para o cálculo de  $\tau_a$  em cada um deles. No final do processo deve-se selecionar o plano que contiver o valor máximo de  $\tau_a$  ou, em outras palavras, a amplitude de tensão equivalente  $\tau_{a,máx}$ .

Todos os operadores são aplicados nos indivíduos de cada geração que neste trabalho são representados pelos pares de ângulos  $\phi$  e  $\theta$  que definem um plano material. Uma equação, conhecida como função objetivo, é utilizada para selecionar os indivíduos e evoluí-los por meio do cruzamento até que se atinja a convergência. Esses algoritmos são capazes de fazer uma busca paralela, em diferentes pontos, em grandes espaços de busca e são aplicados em funções de diversas variáveis.

Nem sempre a função objetivo possui um único ponto de máximo e as regiões de pico muitas vezes são irregulares. Se o campo de busca não é bem definido, o Algoritmo Genético fornece uma busca poderosa em espaços grandes e complexos (De Jong, 1990). A mutação modifica um determinado indivíduo dentro de uma população com o objetivo de evitar que a convergência siga para um ponto ótimo local, por isso ela torna-se essencial em problemas com espaços irregulares.

## 5.1 SELEÇÃO

A operação de seleção é a responsável pela escolha dos melhores indivíduos para efetuarem o cruzamento. Por meio da função objetivo cada indivíduo será avaliado e com um método de seleção procuram-se os mais evoluídos. Assim, garante-se que os mais aptos irão reproduzir e transmitir seus genes para a próxima população.

Como os ângulos  $\phi$  e  $\theta$  determinam o plano que passa pelo ponto O (Fig.2.1) aqui o par ( $\phi$  e  $\theta$ ) será tratado como o indivíduo. Assim, um conjunto inicial de seis indivíduos gerados aleatoriamente poderia ser:

Indivíduo 1	$\theta = 40^\circ$	$\phi = 60^\circ$
Indivíduo 2	$\theta = 55^\circ$	$\phi = 113^\circ$
Indivíduo 3	$\theta = 3^\circ$	$\phi = 150^\circ$
Indivíduo 4	$\theta = 110^\circ$	$\phi = 34^\circ$
Indivíduo 5	$\theta = 11^\circ$	$\phi = 15^\circ$
Indivíduo 6	$\theta = 17^\circ$	$\phi = 29^\circ$

Para aplicar as operações genéticas em cada um dos indivíduos devem-se escolher os mais aptos. Calcula-se então a aptidão de cada um desses indivíduos. Isso será feito baseando-se nos valores da amplitude de tensão equivalente  $\tau_a = R(\theta, \phi)$  e na respectiva tensão normal  $\sigma_a$  em cada um dos planos, conforme equação (35). Os indivíduos que apresentarem os maiores valores para a função aptidão serão considerados os mais evoluídos. O índice  $\alpha$  pode assumir valores entre 0 e 1 e corresponde à contribuição da tensão normal para o cálculo da aptidão.

$$\text{Aptidão} = \tau_a + \alpha \cdot \sigma_a \quad (35)$$

Existem muitas formas de implementar a seleção, a mais freqüente na literatura (Mitchell,1992) é o método da roleta, onde a probabilidade de seleção é proporcional a aptidão do indivíduo em relação a população atual, conforme equação (36).

$$\text{Aptidão relativa } i = \frac{\text{Aptidão } (i)}{\Sigma \text{aptidão}} \quad (36)$$

A representação da aptidão relativa de cada um dos seis indivíduos pelo método da roleta está demonstrada na Fig.5.1. Nota-se que pelo método da roleta, se essa fosse girada o indivíduo 3 teria maiores chances de parar na direção da seta, mas esse resultado é baseado em valores probabilísticos e por isso nem sempre isso acontecerá.

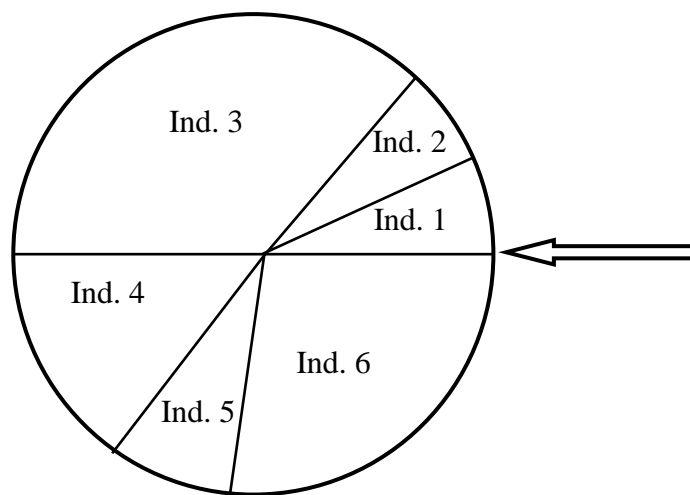


Figura 5.1 – Representação da seleção pelo método da roleta

Suponha que a roleta fosse girada seis vezes e o resultado fosse o encontrado na Fig.5.2. Evidentemente, como o método é baseado na probabilidade de escolha de cada indivíduo, esse resultado pode ser diferente cada vez que o algoritmo fosse acionado para o mesmo teste mas, estatisticamente, os indivíduos 3, 4 e 6 seriam selecionados com maior frequência. Com os indivíduos mais aptos selecionados, o próximo passo é efetuar o cruzamento entre eles.

Indivíduo 1		Indivíduo 3
Indivíduo 2		Indivíduo 3
Indivíduo 3	<u>Indivíduos selecionados para o cruzamento</u> Método da Roleta →	Indivíduo 3
Indivíduo 4		Indivíduo 4
Indivíduo 5		Indivíduo 6
Indivíduo 6		Indivíduo 6

Figura 5.2 – Exemplo de indivíduos selecionados pelo método da roleta

## 5.2 CRUZAMENTO

É por meio do cruzamento que os melhores indivíduos se reproduzem e transmitem seus genes para a próxima geração. Os filhos gerados por meio da reprodução tendem estatisticamente a ser mais evoluídos do que seus pais.

Para as demais operações genéticas, neste trabalho, foi necessário codificar os valores dos ângulos  $\phi$  e  $\theta$  de cada indivíduo em uma representação binária para que possa haver manipulação do material genético. Inicialmente, os ângulos mudam de escala conforme equação (37) e em seguida cada um deles é codificado em uma cadeia binária de comprimento  $l$ . Eles serão então concatenados e cada indivíduo será representado por um único número binário, como visto na Fig.5.3, onde cada segmento de comprimento  $l$  representa um valor de ângulo.

$$x_{\text{transformado}} = \text{arredondar} \left[ \frac{x_{\text{real}} - x_{\text{min}}}{x_{\text{máx}} - x_{\text{min}}} (2^l - 1) \right] \quad (37)$$

$x_{\text{real}}$  = número real a ser transformado

$x_{\text{transformado}}$  = número na escala transformada

$x_{\text{min}}$  = valor mínimo na escala real

$x_{\text{máx}}$  = valor máximo na escala real

$l$  = número de bits dos indivíduos

Existem diversas razões para a transformação da escala. Primeiro, ela ocorre para que se possam representar todos os valores do intervalo em uma escala com números naturais. Isso se torna importante em intervalos que possuem números reais. Segundo, aumenta-se a precisão da representação à medida que  $l$  for maior, já que o número de valores possíveis na escala binária segue a relação  $2^l$ . Neste trabalho adotou-se  $l = 8$  para que o intervalo de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  fosse representado agora em uma escala de 0 a 255. Para  $l = 8$  a precisão será:

$$\delta = \frac{x_{\text{máx}} - x_{\text{min}}}{2^8 - 1} \rightarrow \delta = \frac{180^\circ - 0^\circ}{2^8 - 1} = 0,705^\circ \quad (38)$$



Após a codificação, a representação binária dos ângulos  $\phi$  e  $\theta$  é concatenada para facilitar as operações de cruzamento e mutação. Realizada a concatenação dos valores de cada ângulo, a cadeia de cromossomos de cada indivíduo possuirá 16 bits. A primeira metade representa o ângulo  $\theta$  e a segunda o ângulo  $\phi$ .

	Escala real		Escala transformada		Escala binária
Indivíduo 3	$\theta = 3^\circ$	$\phi = 150^\circ$	$\theta = 4$	$\phi = 212$	0000010011010100
Indivíduo 3	$\theta = 3^\circ$	$\phi = 150^\circ$	$\theta = 4$	$\phi = 212$	0000010011010100
Indivíduo 3	$\theta = 3^\circ$	$\phi = 150^\circ$	$\theta = 4$	$\phi = 212$	0000010011010100
Indivíduo 4	$\theta = 110^\circ$	$\phi = 34^\circ$	$\theta = 156$	$\phi = 48$	1001110000110000
Indivíduo 6	$\theta = 17^\circ$	$\phi = 29^\circ$	$\theta = 24$	$\phi = 41$	0001100000101001
Indivíduo 6	$\theta = 17^\circ$	$\phi = 29^\circ$	$\theta = 24$	$\phi = 41$	0001100000101001

Figura 5.3 – Transformação da escala real para escala transformada e em seguida para a escala binária

A operação de cruzamento corresponde à troca de informação genética entre os indivíduos selecionados pela roleta para a obtenção da próxima geração. Na prática, um mesmo ponto é escolhido aleatoriamente na cadeia binária de dois indivíduos. Os cromossomos serão divididos nesse ponto e a primeira parte de um dos indivíduos junta-se com a segunda parte do outro, formando um novo indivíduo, assim como mostra Fig.5.4. Repete-se o processo até que uma nova geração seja obtida.

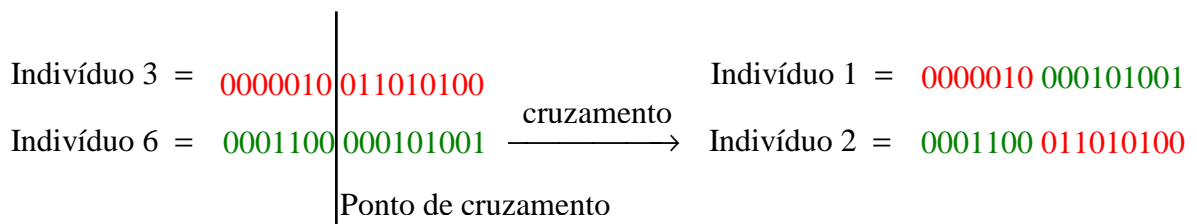


Figura 5.4 – Operação de cruzamento (reprodução) entre dois indivíduos

### 5.3 MUTAÇÃO

Embora o cruzamento promova a troca de informação genética entre os indivíduos da população atual, a sua utilização não altera a informação contida na população no decorrer das gerações. Isso significa que se a primeira geração que foi criada aleatoriamente não contiver a informação subjacente ao máximo global, o algoritmo poderá convergir para um máximo local. Para se evitar a convergência local realiza-se a operação de mutação que aleatoriamente introduz nova informação no decorrer das gerações. Na prática, a informação é inserida simplesmente trocando um número na cadeia de bits pelo outro e isso é feito de acordo com uma probabilidade de mutação pré-estabelecida pelo usuário.

Neste trabalho, a escolha da probabilidade de mutação foi igual a 0,08. Significa que a cada 100 indivíduos, oito sofrerão a operação de mutação. Uma taxa de mutação muito elevada pode modificar a evolução dos indivíduos e assim a busca pelo ponto ótimo global torna-se meramente aleatória.

### 5.4 ELITISMO

Além das operações básicas descritas neste capítulo adotou-se nesse trabalho a estratégia do elitismo, onde uma parte dos melhores indivíduos de uma geração é automaticamente clonada para a geração seguinte, preservando assim, sempre os melhores indivíduos. A operação de elitismo é realizada antes da seleção, logo após todos os indivíduos serem avaliados em relação a suas aptidões. Embora os melhores indivíduos sejam clonados, eles ainda irão participar da seleção pelo método da roleta.

Após todas as operações genéticas terem sido executadas transforma-se a representação binária de cada novo indivíduo em ângulos para que possam ser avaliados novamente pela função objetivo. A avaliação da aptidão e a criação de novas gerações são repetidas até que uma solução adequada seja encontrada ou até que o número máximo das gerações seja alcançado (Goldberg, 1989). Para a otimização do método de busca do plano crítico o AG deverá encontrar a máxima amplitude de tensão cisalhante e sua respectiva tensão normal com um custo computacional reduzido. O diagrama que descreve as operações do algoritmo genético utilizado nesse trabalho está representado na Fig.5.5.

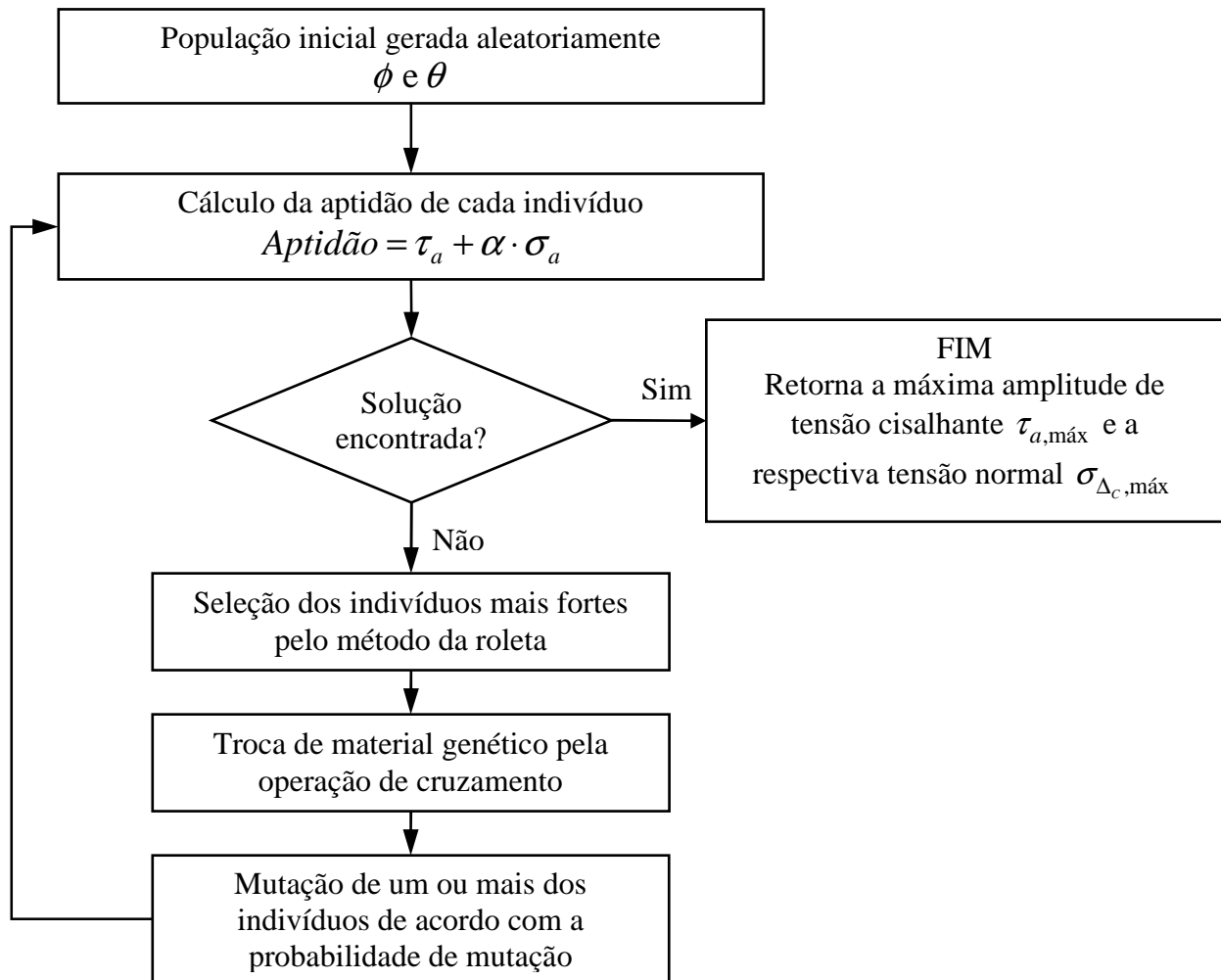


Figura 5.5 – Diagrama que descreve os passos básicos de um Algoritmo Genético

Como critério de parada o AG implementado neste trabalho avalia a aptidão do melhor indivíduo de uma determinada geração. Se esse indivíduo não evoluir por cinco gerações seguidas a rotina interpreta que não haverá mais evolução, em outras palavras, a solução foi atingida. Caso esse critério não seja satisfeito, ou seja, o melhor indivíduo não se repita por cinco gerações, o critério de parada torna-se o número máximo de gerações estabelecido pelo usuário.

Os Algoritmos Genéticos possuem diversas aplicações principalmente pelas suas vantagens comparadas a outros métodos de otimização. Dentre essas, podemos destacar que esse método não requer nenhuma informação adicional, como derivadas, sobre a função a ser otimizada. Além disso, os AGs trabalham com um conjunto de indivíduos e não com um único ponto, podendo assim, fazer buscas em diferentes áreas do espaço de solução paralelamente.

## 5.5 MÉTODO HÍBRIDO

A técnica híbrida utilizada neste trabalho é baseada na teoria evolutiva Lamarckiana. Ao contrário da idéia de seleção natural proposta por Darwin, a abordagem de Lamarck é que um indivíduo pode evoluir dentro de uma geração, ou seja, o indivíduo não mais irá passar somente o seu material genético para as gerações futuras, mas também o seu conhecimento adquirido.

Aliado ao algoritmo genético foi utilizado, na técnica híbrida, o método simplex descrito por Spendley *et al.* (1962). Essa metodologia tem como objetivo deslocar uma figura, posicionada por meio de duas variáveis, sobre uma superfície. O método simplex se encarrega de fazer uma busca local na região determinada pelo AG. Dessa forma, significa dizer que a busca por meio do simplex do ponto de vista evolutivo corresponde a um treinamento que determinado indivíduo teve e irá repassar para seus descendentes por meio de seu material genético.

A abordagem de Lamarck, não pode ser vista diretamente na natureza, já que um conhecimento adquirido por determinado indivíduo não pode ser repassado para gerações futuras por meios de seu DNA. Mas para trabalhos numéricos ela torna-se perfeitamente executável.

Para o melhor entendimento do funcionamento do simplex, considere a Fig. 5.6 como uma representação das curvas de nível de uma superfície. Os valores mais escuros localizados no centro representam o ponto ótimo global, em outras palavras, onde se localiza o  $\tau_{a,máx}$ . Cada indivíduo tem o objetivo de atingir esse ponto por meio de suas coordenadas  $\phi$  e  $\theta$  que nada mais são do que seu material genético.

Suponha uma determinada geração G e seu melhor elemento ilustrado na Fig.5.6 e representado pela circunferência aberta (ponto  $P^0$ ). Esse indivíduo será comparado com outros dois próximos a ele e o pior dentre os três adotará um novo posicionamento. Admitindo, com base no valor da aptidão, M para o melhor indivíduo, P e I para o pior e o intermediário respectivamente a cada comparação de três elementos, um triângulo forma-se pela ligação dos três indivíduos. Dessa forma os índices 0 e 3 associados a essas letras na Fig.5.6 representam os indivíduos da iteração inicial e da terceira iteração respectivamente. O indivíduo P mudará sua posição passando através da mediatriz dos outros dois elementos, sofrendo assim o mecanismo de reflexão. Feito isso, os indivíduos M e I serão comparados com a reflexão de P e reclassificados de acordo com suas aptidões. As setas na Fig. 5.6 representam o

posicionamento final, após a reflexão, do indivíduo P a cada iteração. O método se repete por um número determinado de iterações e no fim a geração G obterá um novo melhor elemento.

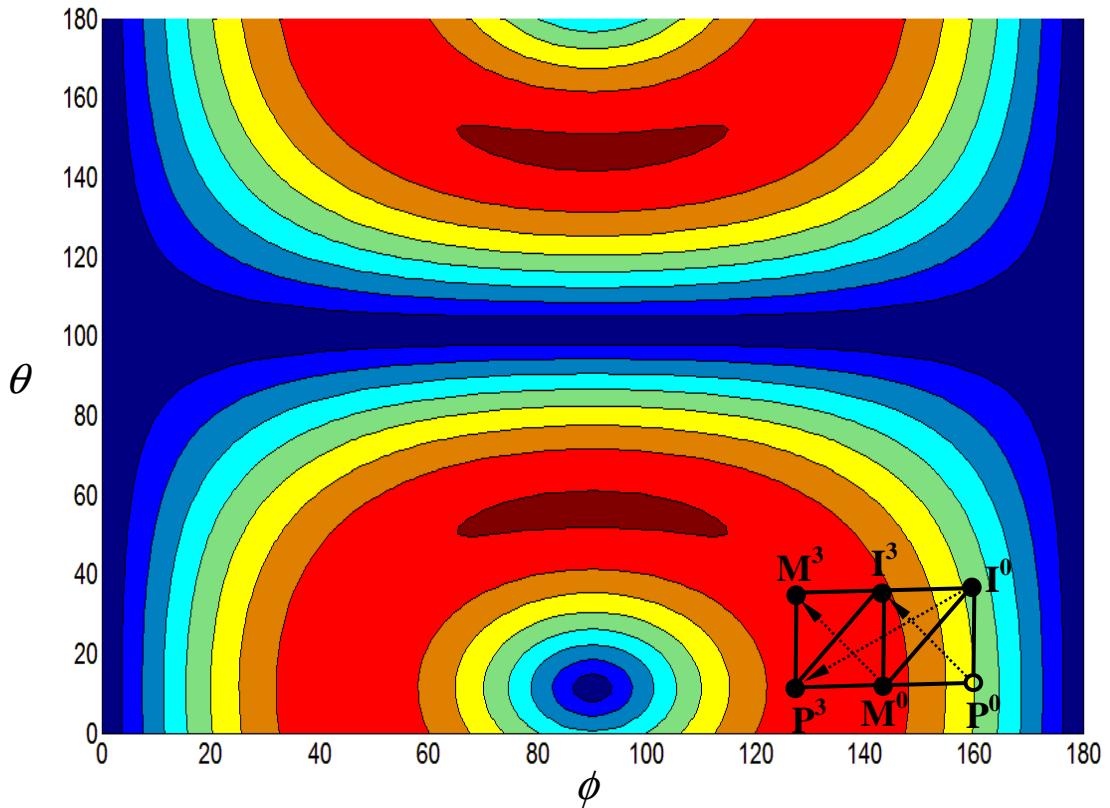


Figura 5.6 – Método Simplex e o mecanismo de reflexão

O método simplex foi aplicado a cada geração em cima do melhor indivíduo e a sua movimentação ocorre de acordo com as equações (39) e (40). A equação (39) representa as coordenadas da mediatriz entre os indivíduos melhor e o intermediário.

$$\bar{C} = \frac{M + I}{2} \quad (39)$$

A equação (40) gera o novo posicionamento do pior indivíduo, ou seja, é ela que irá formar o mecanismo de reflexão. De acordo com Nelder e Mead (1965) um número menor de iterações será preciso se  $\mu$  for igual a 1. Adotou-se esse valor e a equação (40) se resume a  $\bar{R} = 2 \cdot \bar{C} - P = M + I - P$ , onde  $M$ ,  $I$  e  $P$  são representados pelas coordenadas  $\phi$  e  $\theta$  do melhor, do intermediário e do pior indivíduo, respectivamente.

$$\bar{R} = \bar{C} + \mu(\bar{C} - P) \quad (40)$$

## 6. RESULTADOS

Para avaliar os resultados obtidos pelos métodos IP, AG e híbrido consideraram-se no presente trabalho vinte e dois casos de carregamentos multiaxiais em condição limite de fadiga gerados por Zenner *et al.* (1985) com o aço 34Cr4 e por Nishihara e Kawamoto (1941) com aço duro 0,51%C. As tabelas 6.1 e 6.2 fornecem os dados experimentais em função de suas tensões alternadas e médias e ângulo de fase. Todos os casos foram testados sob carregamentos síncronos de flexão e torção e em algumas situações com tensões médias superpostas e ainda com diferença de fase entre tensões normais e cisalhantes. Neste sentido,  $\sigma_{xx,a}$  e  $\sigma_{xx,m}$  denotam as tensões normais alternada e média, enquanto  $\tau_{xy,a}$  e  $\tau_{xy,m}$  são as tensões cisalhantes correspondentes e  $\beta$  é o ângulo de fase entre as tensões normal e de cisalhamento. Os limites de resistência a fadiga para flexão e torção alternada para cada aço estão indicados nas tabelas respectivamente como  $\sigma_0$  e  $\tau_0$ .

Tabela 6.1 – Aço duro 0,51%C ( $\tau_0 = 196,2$  MPa e  $\sigma_0 = 313,9$  MPa)

Nº do teste	$\sigma_{xx,a}$ (MPa)	$\sigma_{xx,m}$ (MPa)	$\tau_{xy,a}$ (MPa)	$\tau_{xy,m}$ (MPa)	$\beta$ (°)
1	138,1	0	167,1	0	0
2	140,1	0	169,9	0	30
3	145,7	0	176,3	0	60
4	150,2	0	181,7	0	90
5	245,3	0	122,6	0	0
6	249,7	0	124,8	0	30
7	252,4	0	126,2	0	60
8	258,0	0	129,0	0	90
9	299,1	0	62,8	0	0
10	304,5	0	63,9	0	90

Tabela 6.2 – Liga 34Cr4 ( $\tau_0 = 256$  MPa e  $\sigma_0 = 410$  MPa)

Nº do teste	$\sigma_{xx,a}$ (MPa)	$\sigma_{xx,m}$ (MPa)	$\tau_{xy,a}$ (MPa)	$\tau_{xy,m}$ (MPa)	$\beta$ (°)
1	314	0	157	0	0
2	315	0	158	0	60
3	316	0	158	0	90
4	315	0	158	0	120
5	224	0	224	0	90
6	380	0	95	0	90
7	316	0	158	158	0
8	314	0	157	157	60
9	315	0	158	158	90
10	279	279	140	0	0
11	284	284	142	0	90
12	212	212	212	0	90

Para os dados experimentais considerados, calcularam-se a máxima amplitude de tensão cisalhante  $\tau_{a,m\acute{a}x}$ , juntamente com a tensão normal  $\sigma_{\Delta_c,m\acute{a}x}$ , ambas no plano crítico, por meio dos métodos IP, AG e Híbrido.

### 6.1. MÉTODO DE INVESTIGAÇÃO INCREMENTAL DE PLANOS (IP)

O método IP foi testado com diferentes passos  $\Delta\theta$  e  $\Delta\phi$  com a finalidade de analisar um número significativo de planos materiais e reduzir ao máximo o tempo de simulação. Neste trabalho utilizaram-se incrementos de 1°, 2°, 5° e 10° para caracterizar o plano de corte (vetor normal unitário  $\mathbf{n}$ ).

Para cada orientação  $\phi$  e  $\theta$  calcula-se a amplitude de tensão cisalhante pelo método da mínima circunferência circunscrita. Dessa forma, no final do processo pode-se traçar uma superfície com esses valores, como ilustrado nas Fig. 6.1(a) e 6.2(a), onde a rotina tem como objetivo descobrir o topo da mesma, ou seja, o  $\tau_{a,m\acute{a}x}$ . Por meio da Fig.6.1(b) e 6.2(b) percebe-se com mais facilidade a orientação  $\phi$  e  $\theta$ , bem como as respectivas amplitudes de tensão cisalhante representadas no plano.

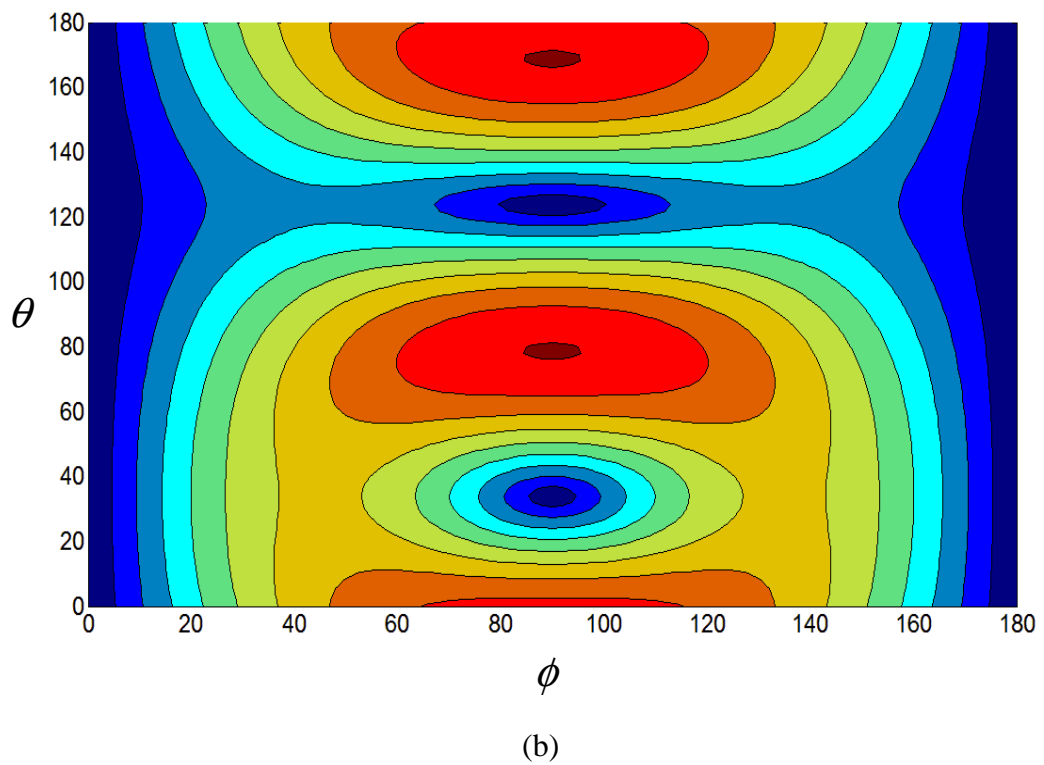
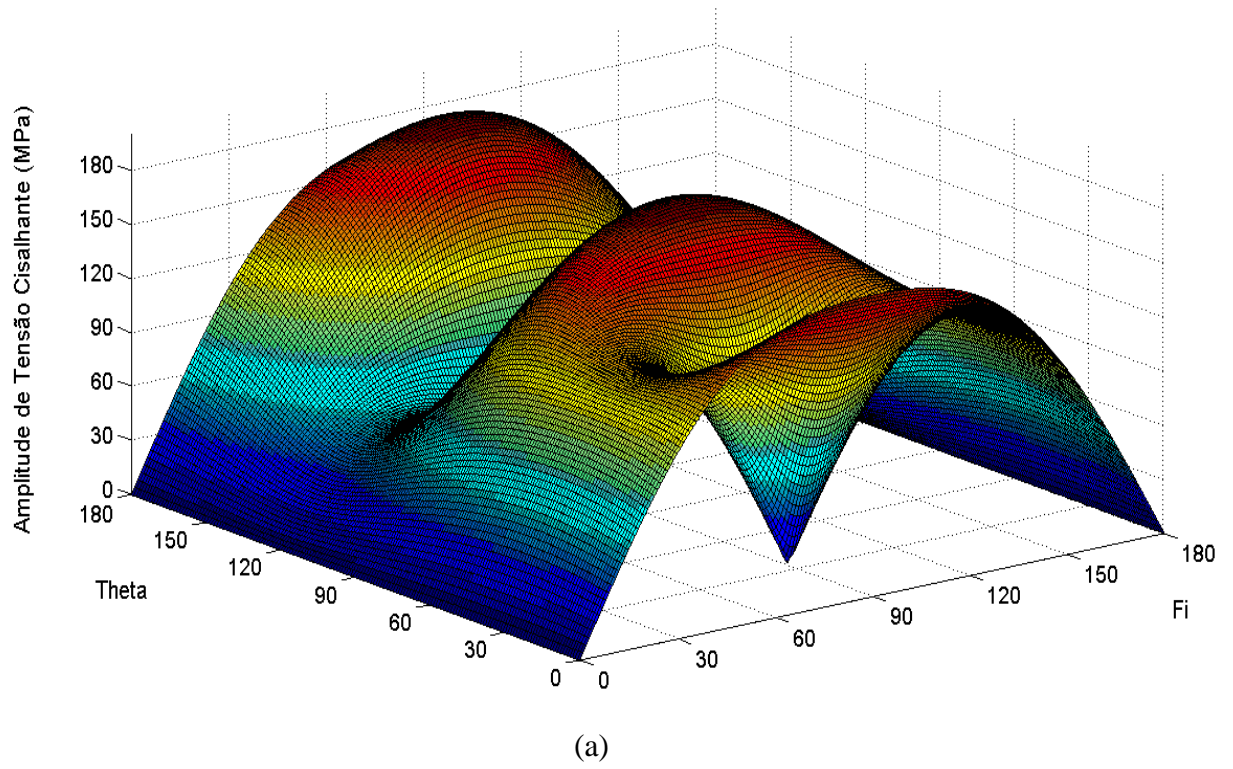


Figura 6.1 - Amplitude de tensão cisalhante nos planos de corte pesquisados com  $\Delta\phi = \Delta\theta = 1^\circ$  pelo método IP para o Teste Nº 1 da Tabela 6.1 (a) Superfície em relevo (b) Curvas de nível



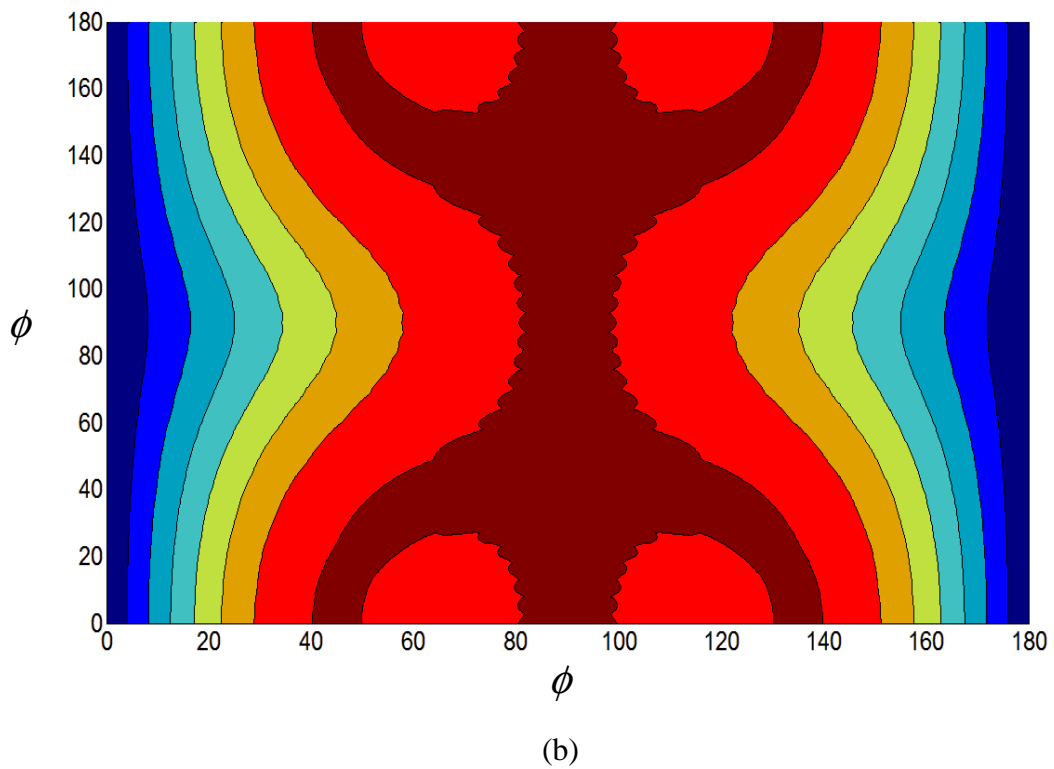
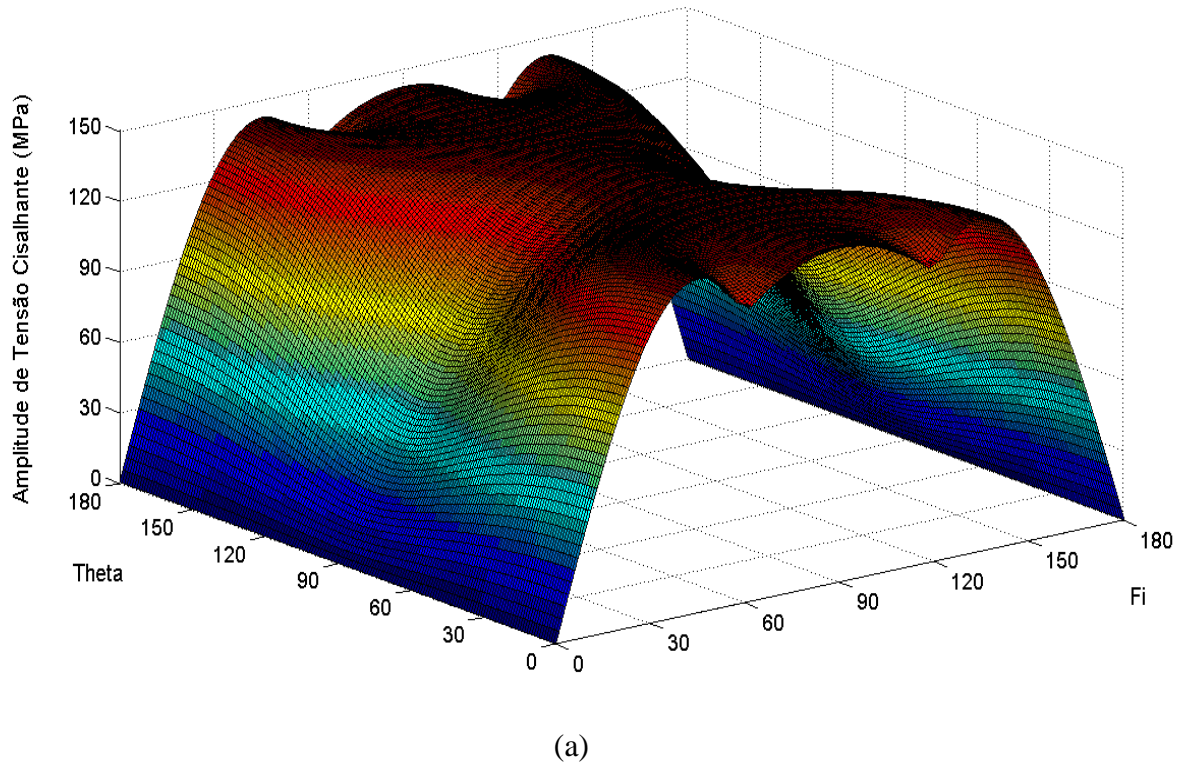
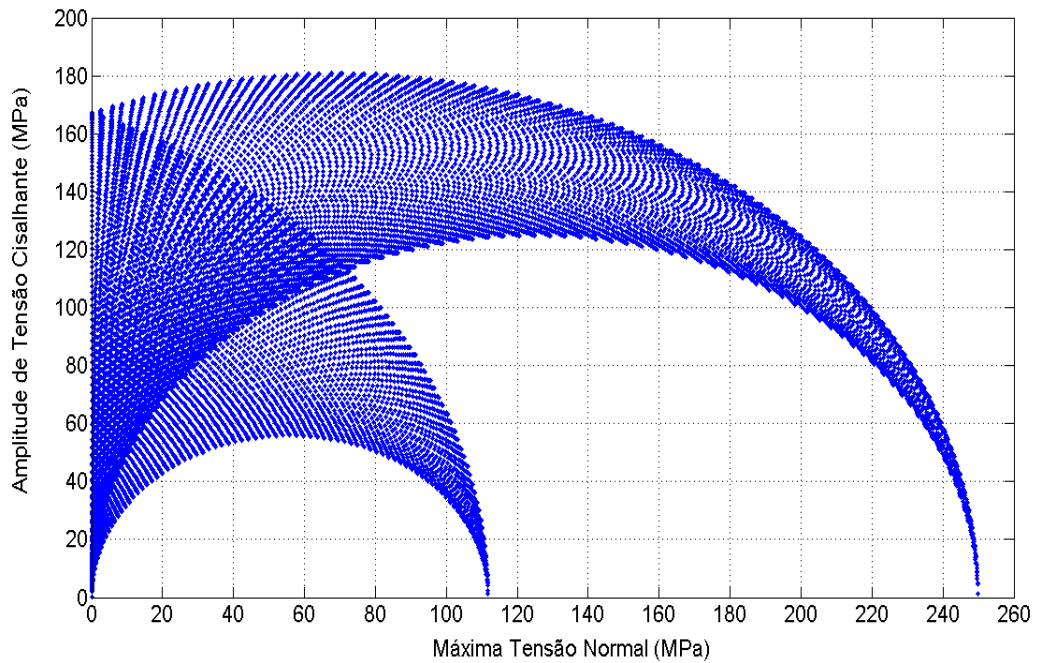


Figura 6.2 - Amplitude de tensão cisalhante nos planos de corte pesquisados com  $\Delta\phi = \Delta\theta = 1^\circ$  pelo método IP para o Teste N° 11 da Tabela 6.2 (a) Superfície em relevo (b) Curvas de nível

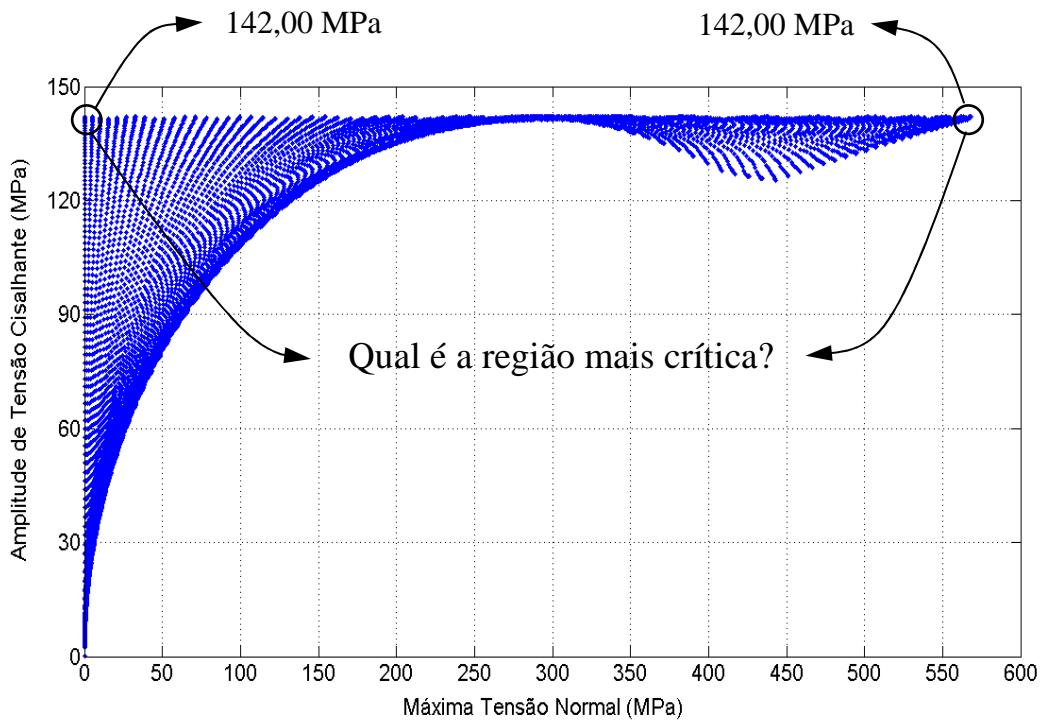
Em todos os vinte e dois carregamentos estudados há mais do que um plano de corte onde  $\tau_a$  alcança seu valor de pico, como pode-se notar na Fig.6.1. Na verdade, como fica claro na Fig.6.2, há testes em que vários planos materiais experimentam valores de pico, ou muito próximos do pico para  $\tau_a$ . Por esse motivo, está claro que a definição clássica de plano crítico (plano de máxima amplitude de tensão cisalhante) torna o problema mal posto. Para se ter solução única o programa primeiro seleciona todos os planos que contenham a máxima amplitude de tensão cisalhante e, dentre esses, ele optará por aquele que possuir o máximo valor da tensão normal. Considerou-se que as amplitudes cisalhantes eram iguais quando a diferença entre dois valores ou planos distintos era menor ou igual a 0,1 MPa, que representa uma diferença de 0,1% com relação aos valores típicos de  $\tau_{a,máx}$  testados.

A Fig.6.3 ilustra o comportamento da máxima tensão normal e da amplitude de tensão cisalhante em todos os planos pesquisados ( $\Delta\phi = \Delta\theta = 1^\circ$ ) para os mesmos testes vistos nas Fig.6.1 e 6.2. Essa representação gráfica mostra que existem planos com valores muito diferentes de  $\sigma_a$ , mas com  $\tau_a$  muito próximos aos valores de pico. Isso nos faz refletir sobre outras possíveis definições do que é plano crítico.

Para assegurar que o método de investigação de planos (IP), associado ao método da mínima circunferência circunscrita (MCC), forneça valores corretos para  $\tau_a$  e  $\sigma_a$  analisou-se uma série de estados de tensão clássicos uniaxiais. Casos esses, onde os valores da máxima amplitude de tensão cisalhante  $\tau_{a,máx}$ , a maior tensão normal  $\sigma_{\Delta_c,máx}$  no plano crítico e a orientação desse plano, segundo a definição usual da literatura, eram previamente conhecidos. Mais ainda, apenas com finalidade ilustrativa relatamos os valores calculados por outro autor (Susmel e Lazzarin, 2002) para os mesmos ensaios testados neste trabalho.



(a)



(b)

Figura 6.3 - Amplitude de tensão cisalhante X Máxima Tensão Normal pelo método IP (a) caso N° 1 da tabela 6.1 (b) caso N° 11 da tabela 6.2

Tabela 6.3 – Resultados para Aço duro 0,51%C pelo método IP

N° do teste	Método	$\Delta\theta, \Delta\phi$ (°)	$\tau_{a,máx}$ (MPa)	$\sigma_{\Delta c,máx}$ (MPa)	$\phi$ (°)	$\theta$ (°)	Tempo (seg.)
1	IP	10	180,64	76,78	90	170	5,13
		5	180,64	76,78	90	170	20,53
		2	180,64	76,78	90	170	127,86
		1	180,64	76,78	90	170	541,59
	SU	————	180,64	76,78	90	170	————
2	IP	10	180,42	90,16	90	170	5,09
		5	180,42	90,16	90	170	20,19
		2	180,42	90,16	90	170	125,19
		1	180,42	90,16	90	170	502,94
	SU	————	180,77	90,34	90	170	————
3	IP	10	179,16	122,68	90	170	5,11
		5	180,28	131,97	90	175	20,31
		2	180,49	129,56	90	174	126,25
		1	180,49	129,56	90	174	507,42
	SU	————	180,41	129,72	90	174	————
4	IP	10	181,70	150,20	90	0	5,08
		5	181,70	150,20	90	0	20,30
		2	181,70	150,20	90	0	125,41
		1	181,70	150,20	90	0	503,45
	SU	————	181,70	150,20	90	0	————
5	IP	10	172,75	137,80	90	160	5,06
		5	172,75	137,80	90	160	20,17
		2	173,39	125,71	90	158	125,27
		1	173,39	125,71	90	158	503,13
	SU	————	173,39	125,71	90	158	————
6	IP	10	169,24	155,94	90	160	5,02
		5	169,77	135,99	90	65	20,05
		2	170,07	145,54	90	158	124,59
		1	170,18	140,82	90	157	500,61
	SU	————	170,49	141,15	90	157	————
7	IP	10	154,15	195,32	90	160	5,13
		5	154,15	195,32	90	160	20,24
		2	154,31	189,02	90	158	124,83
		1	154,33	192,22	90	159	504,13
	SU	————	154,41	192,20	90	159	————
8	IP	10	129,00	258,00	90	0	4,95
		5	129,00	258,00	90	0	20,05
		2	129,00	258,00	90	0	124,50
		1	129,00	258,00	90	0	501,23
	SU	————	129,00	258,00	90	0	————
9	IP	10	161,11	164,81	80	150	5,08
		5	162,01	157,41	90	55	20,14
		2	162,19	151,75	90	56	125,42
		1	162,19	153,01	90	147	501,67
	SU	————	162,16	153,01	90	147	————
10	IP	10	152,00	166,90	110	40	5,09
		5	152,10	164,98	90	45	20,20
		2	152,01	169,87	90	136	125,78
		1	152,10	164,98	90	45	504,19
	SU	————	152,25	165,08	90	135	————

Tabela 6.4 – Resultados para o Aço 34Cr4 pelo método IP

N° do teste	Método	$\Delta\theta, \Delta\phi$ (°)	$\tau_{a,máx}$ (MPa)	$\sigma_{\Delta_c,máx}$ (MPa)	$\phi$ (°)	$\theta$ (°)	Tempo (seg.)
1	IP	10	221,19	176,35	90	160	5,27
		5	221,19	176,35	90	65	20,77
		2	222,00	160,88	90	158	131,66
		1	222,00	160,88	90	67	535,91
	SU	————	222,00	160,87	90	67	————
2	IP	10	192,73	243,72	90	160	5,24
		5	192,73	243,72	90	160	20,56
		2	192,90	235,86	90	158	128,81
		1	192,94	239,85	90	159	503,73
	SU	————	193,04	239,82	90	159	————
3	IP	10	158,00	316,00	90	0	5,13
		5	158,00	316,00	90	0	20,56
		2	158,00	316,00	90	0	130,67
		1	158,00	316,00	90	0	501,36
	SU	————	158,00	316,00	90	0	————
4	IP	10	192,73	243,72	90	20	5,19
		5	192,73	243,72	90	20	20,48
		2	192,90	235,86	90	22	128,59
		1	192,93	239,85	90	21	504,70
	SU	————	193,04	239,82	90	21	————
5	IP	10	224,00	224,00	90	0	5,17
		5	224,00	224,00	90	0	20,14
		2	224,00	224,00	90	0	126,75
		1	224,00	224,00	90	0	497,39
	SU	————	224,00	224,00	90	0	————
6	IP	10	189,87	213,53	110	40	5,25
		5	190,00	211,89	90	45	20,73
		2	189,99	207,89	112	140	129,92
		1	190,00	211,89	90	45	508,59
	SU	————	190,00	212,37	90	45	————
7	IP	10	222,59	240,09	90	70	3,94
		5	222,59	298,51	90	65	15,47
		2	223,41	263,86	90	68	96,78
		1	223,41	275,56	90	67	381,91
	SU	————	223,41	275,56	90	67	————
8	IP	10	191,77	224,37	90	70	3,88
		5	191,77	224,37	90	70	15,30
		2	191,97	245,56	90	68	96,00
		1	191,97	245,56	90	68	378,13
	SU	————	192,17	245,59	90	68	————
9	IP	10	157,99	315,00	90	0	3,78
		5	157,99	315,00	90	0	15,17
		2	157,99	315,00	90	180	95,80
		1	157,99	315,00	90	180	375,95
	SU	————	158,00	315,00	90	180	————
10	IP	10	196,91	402,74	90	160	3,91
		5	196,91	402,74	90	160	15,55
		2	197,61	382,44	90	158	96,91
		1	197,61	382,44	90	158	379,23
	SU	————	197,61	382,44	90	158	————
11	IP	10	142,00	568,00	90	0	3,78
		5	142,00	568,00	90	0	15,20
		2	142,00	568,00	90	0	95,83
		1	142,00	568,00	90	0	375,49
	SU	————	142,00	568,00	90	0	————
12	IP	10	212,00	424,00	90	0	3,91
		5	212,00	424,00	90	0	15,44
		2	212,00	424,00	90	0	97,20
		1	212,00	424,00	90	0	382,11
	SU	————	212,00	424,00	90	0	————

Os valores relatados nas Tabelas 6.3 e 6.4 mostram que à medida que o incremento  $\Delta\theta, \Delta\phi$  diminui maior será o valor de  $\tau_{a,máx}$  e, conseqüentemente, melhor será a precisão dos resultados. Valores obtidos para  $\Delta\theta, \Delta\phi = 1^\circ$  foram utilizados como referência para avaliar a precisão para os demais valores incrementais, utilizando-se a equação (41). O índice I é válido para computar a precisão da amplitude de tensão cisalhante, bem como para a máxima tensão normal no plano crítico. Os valores para esse índice estão demonstrados graficamente para os diversos valores incrementais nas Fig. 6.4, Fig. 6.5 e Fig. 6.6.

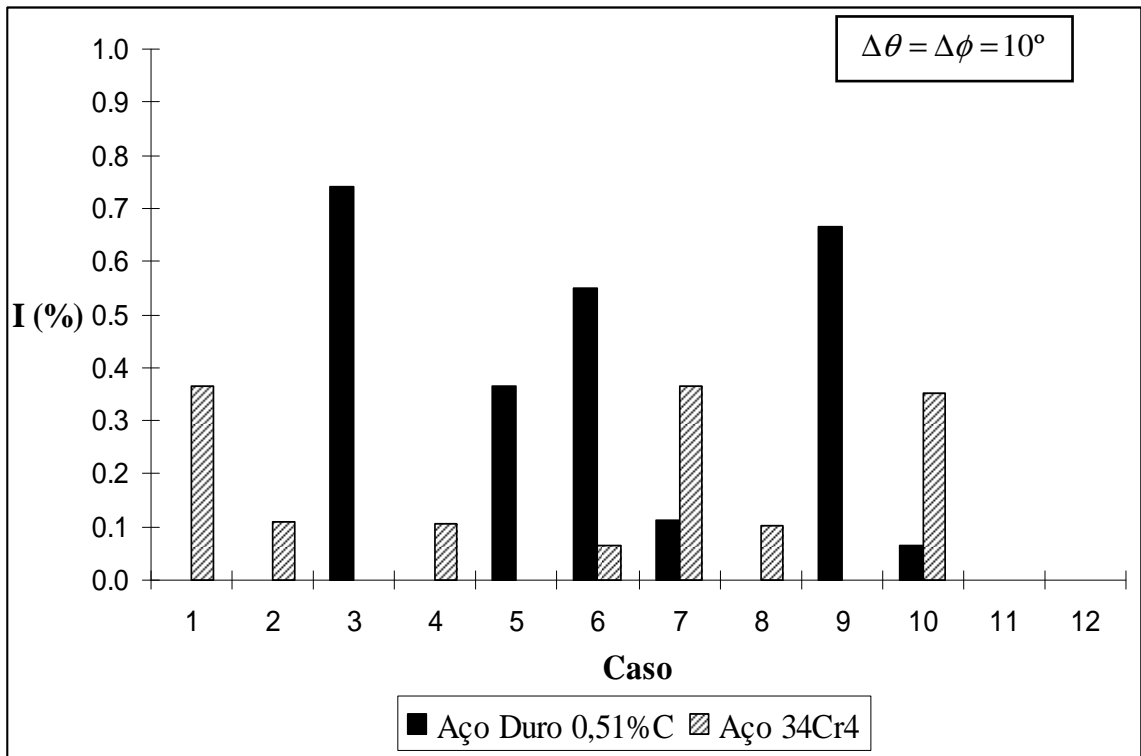
$$I(\%) = \frac{|\text{Tensão}_{\Delta\theta, \Delta\phi=1^\circ} - \text{Tensão}_{\Delta\theta, \Delta\phi=i}|}{\text{Tensão}_{\Delta\theta, \Delta\phi=1^\circ}} \cdot 100 \quad (41)$$

Assumindo  $i$  como os valores dos incrementos  $10^\circ, 5^\circ$  e  $2^\circ$ .

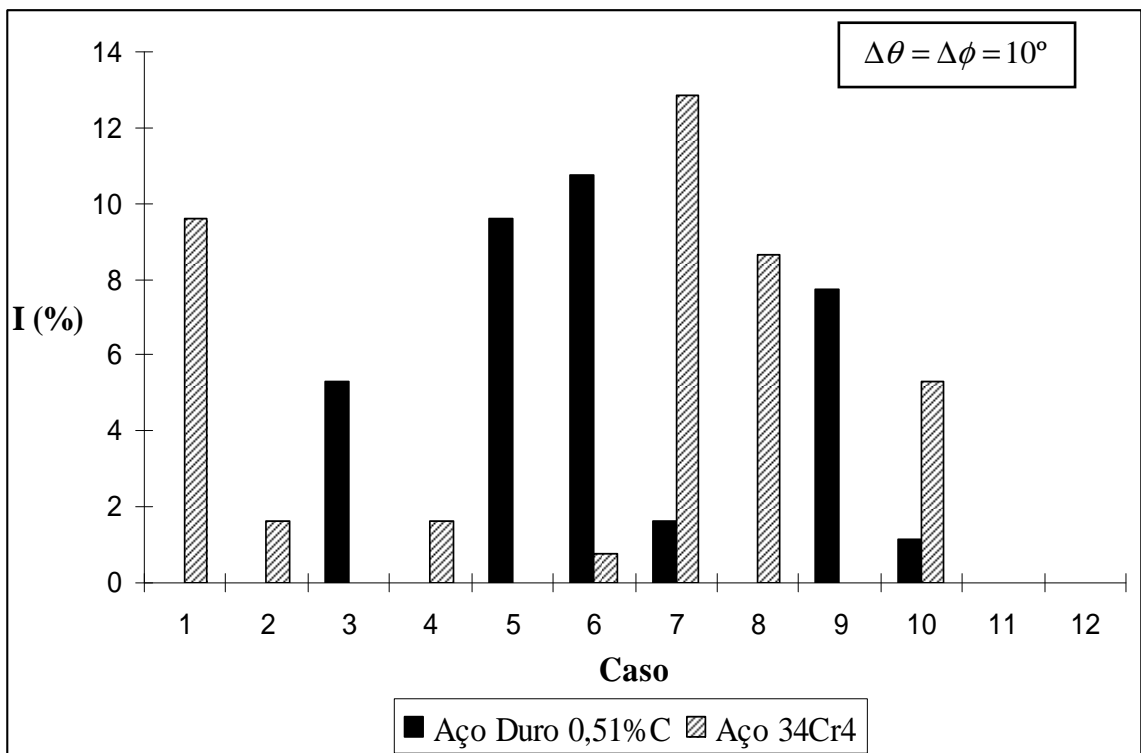
Se o único parâmetro para a o cálculo da resistência do material testado fosse a máxima amplitude de tensão cisalhante o incremento de  $10^\circ$  forneceria excelentes resultados, com os menores tempos computacionais, tendo em vista que o índice I para os vinte e dois casos testados ficou sempre abaixo de 1% para  $\tau_{a,máx}$ . Porém, os modelos de análise em fadiga levam também em consideração os efeitos da tensão normal no plano crítico. E assim, apenas o incremento de  $2^\circ$  consegue resultados para I inferiores a 5% para a máxima tensão normal em todos os casos testados.

Resultados muito precisos são obtidos para  $\Delta\theta, \Delta\phi = 1^\circ$ , já que o número de planos pesquisados é quatro vezes maior do que para um valor de incremento igual a  $2^\circ$ . Contudo, uma maior precisão nos resultados para a amplitude de tensão cisalhante e a máxima tensão normal no plano crítico pode não ser compensada pelo aumento expressivo no tempo de processamento dos cálculos.

Como mencionado anteriormente, o programa considera que dois planos distintos possuem o mesmo valor de  $\tau_{a,máx}$  se a diferença entre eles for menor ou igual a 0,1 MPa. A precisão dos resultados com relação aos valores incrementais depende diretamente dessa diferença. Se o usuário considerar um valor maior para determinar a igualdade para  $\tau_{a,máx}$  entre dois planos, incrementos maiores atingirão exatamente o plano crítico. Por exemplo, se a rotina considerar que dois planos possuem o mesmo valor de  $\tau_{a,máx}$  se a diferença entre eles for menor ou igual a 1 MPa, um  $\Delta\theta, \Delta\phi = 10^\circ$  escolherá o mesmo plano crítico do que um  $\Delta\theta, \Delta\phi = 1^\circ$  em dezoito dos vinte e dois casos testados.

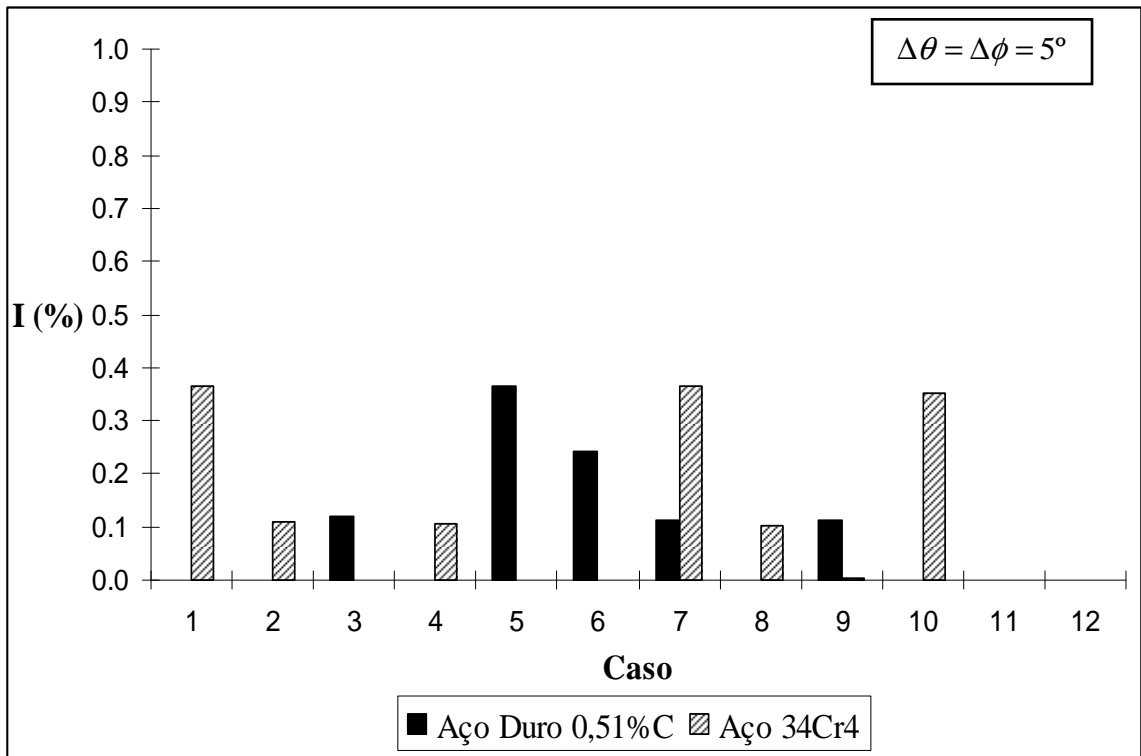


(a)

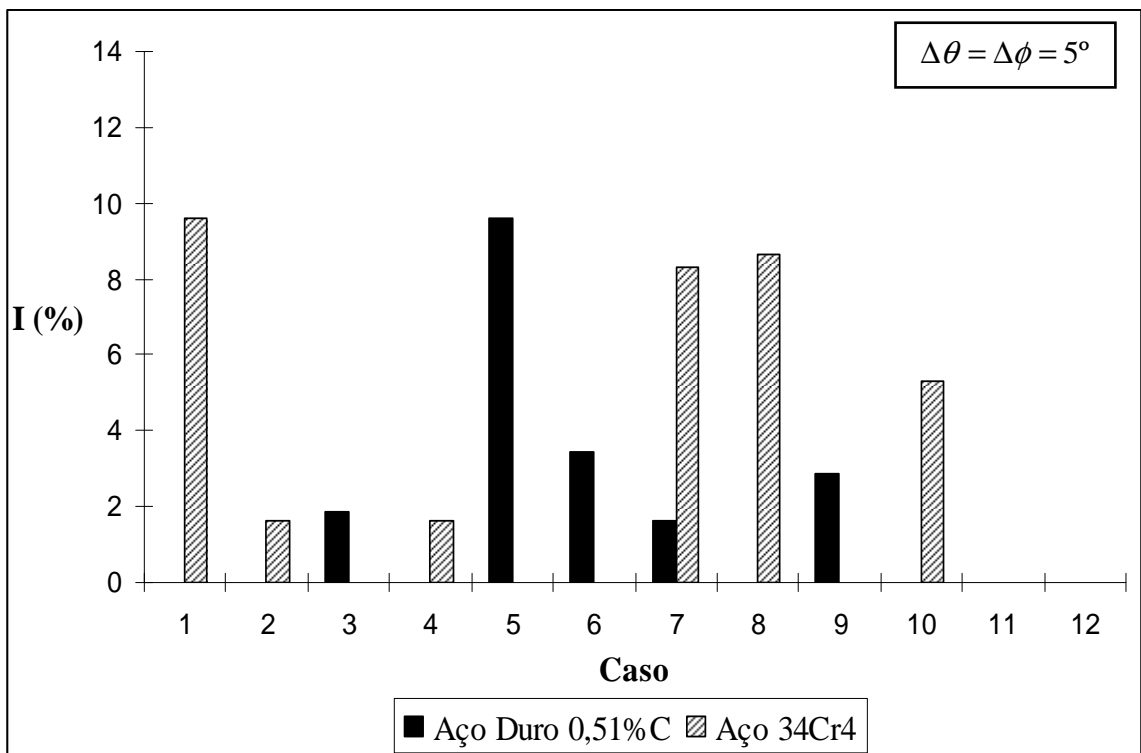


(b)

Figura 6.4 – Índice para avaliar a precisão de  $\tau_{a,máx}$  e  $\sigma_{\Delta_c,máx}$  para Aço duro 0,51%C e Aço 34Cr4 e  $\Delta\theta = \Delta\phi = 10^\circ$  (a) I para amplitude de tensão cisalhante (b) I para máxima tensão normal



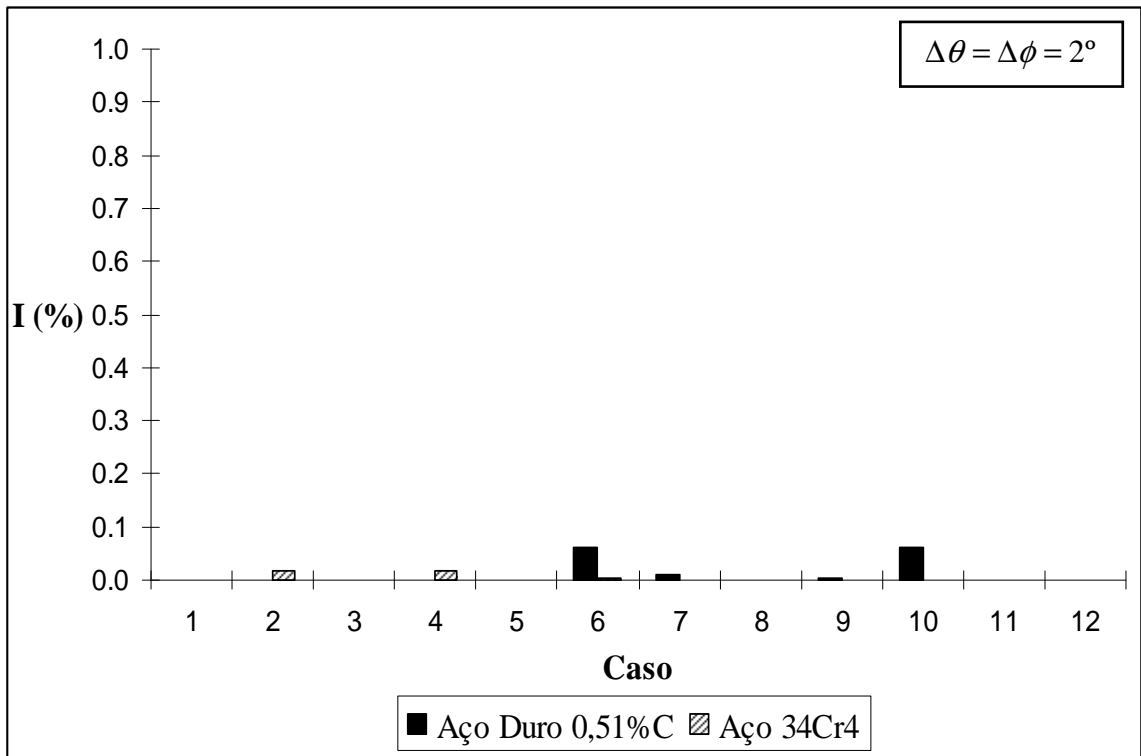
(a)



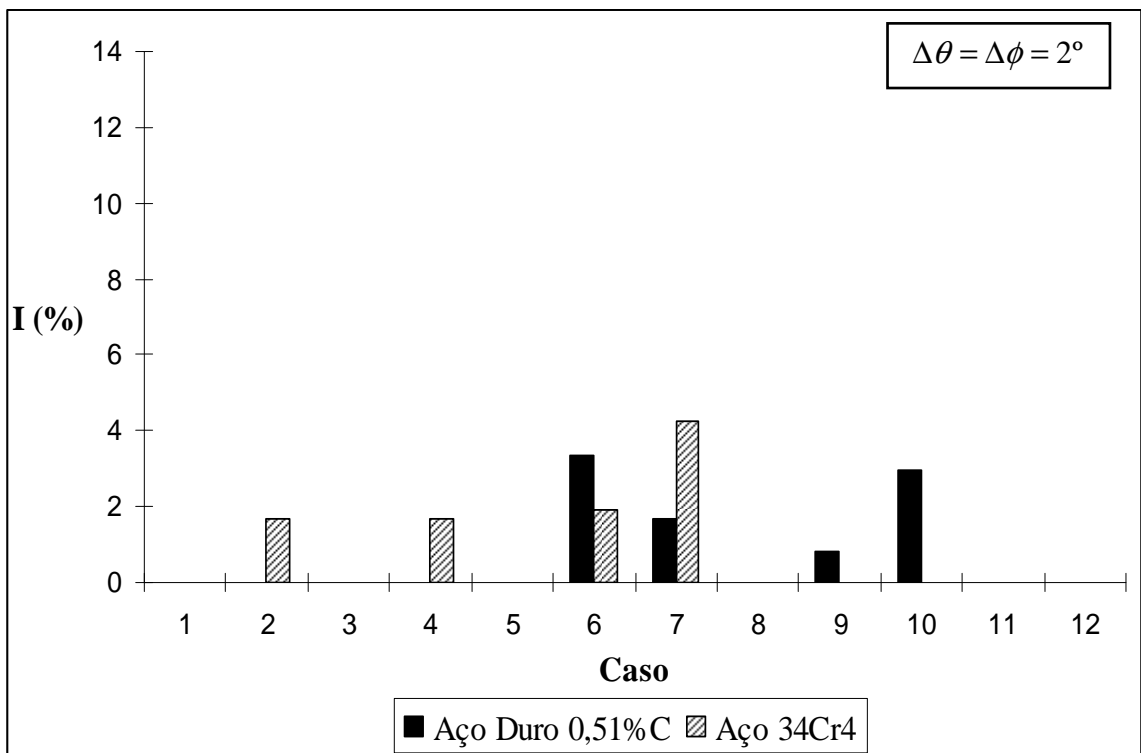
(b)

Figura 6.5 – Índice para avaliar a precisão de  $\tau_{a,máx}$  e  $\sigma_{\Delta_c,máx}$  para Aço duro 0,51%C e Aço 34Cr4 e  $\Delta\theta = \Delta\phi = 5^\circ$  (a) I para amplitude de tensão cisalhante (b) I para máxima tensão normal





(a)



(b)

Figura 6.6 – Índice para avaliar a precisão de  $\tau_{a,máx}$  e  $\sigma_{\Delta_c,máx}$  para Aço duro 0,51%C e Aço 34Cr4 e  $\Delta\theta = \Delta\phi = 2^\circ$  (a) I para amplitude de tensão cisalhante (b) I para máxima tensão normal

## 6.2. MÉTODO DO ALGORITMO GENÉTICO (AG)

Pelo método AG, os ângulos  $\theta$  e  $\phi$  são transformados em cadeias binárias para sofrerem as transformações descritas no capítulo 4, e são tratados aqui como os indivíduos de uma determinada população. Adotaram-se quatro valores distintos (Tabelas 6.5 e 6.6) para o número de indivíduos com o objetivo de reduzir ao máximo o tempo para se atingir a convergência e a população total evoluiu por vinte gerações. O algoritmo percorre planos materiais escolhidos aleatoriamente e a cada nova geração os indivíduos evoluem e tendem a encontrar o plano crítico.

Assim como o método IP o algoritmo genético também se depara com os problemas de mais de uma região para a escolha do  $\tau_{a,máx}$  e a imprecisão dos limites dessas regiões. Para solucionar essas questões o AG reconhece o plano crítico como aquele que contém o maior valor para a função aptidão (equação (35)), que corresponde, para cada indivíduo (cada plano de corte), ao menor raio que irá circunscrever a trilha de tensão cisalhante somado a um percentual  $\alpha$  do valor de sua respectiva tensão normal. Com essa consideração o problema se resume a escolher o melhor fator  $\alpha$  para maximizar a amplitude de tensão cisalhante  $\tau_a$ , já que pela definição da literatura o plano crítico é aquele que possui o maior valor para a amplitude de tensão cisalhante.

Observando a Fig.6.7 encontram-se diferentes valores para o fator  $\alpha$  e as respectivas amplitudes de tensão cisalhante  $\tau_{a,máx}$  para o oitavo caso do aço 34Cr4 listado na tab. 6.2 e escolhido arbitrariamente. Esse caso foi testado mil vezes seguidas com diferentes valores de  $\alpha$  gerados ao acaso com a finalidade de descobrir um valor para esse percentual de forma que o programa sempre retornasse o real plano que possuísse a máxima amplitude de tensão cisalhante. Percebe-se que para um valor de  $\alpha$  acima de 0,05, cada vez que o programa é testado, ele retorna valores diferentes para o  $\tau_{a,máx}$ . Isso ocorre porque o algoritmo genético é um método com passos aleatórios e a cada novo teste nem sempre os mesmos planos são percorridos. Assim, um valor inadequado de  $\alpha$  poderá resultar em planos com amplitudes cisalhantes pouco abaixo da máxima e tensão normal mais elevada do que as esperadas no plano crítico.

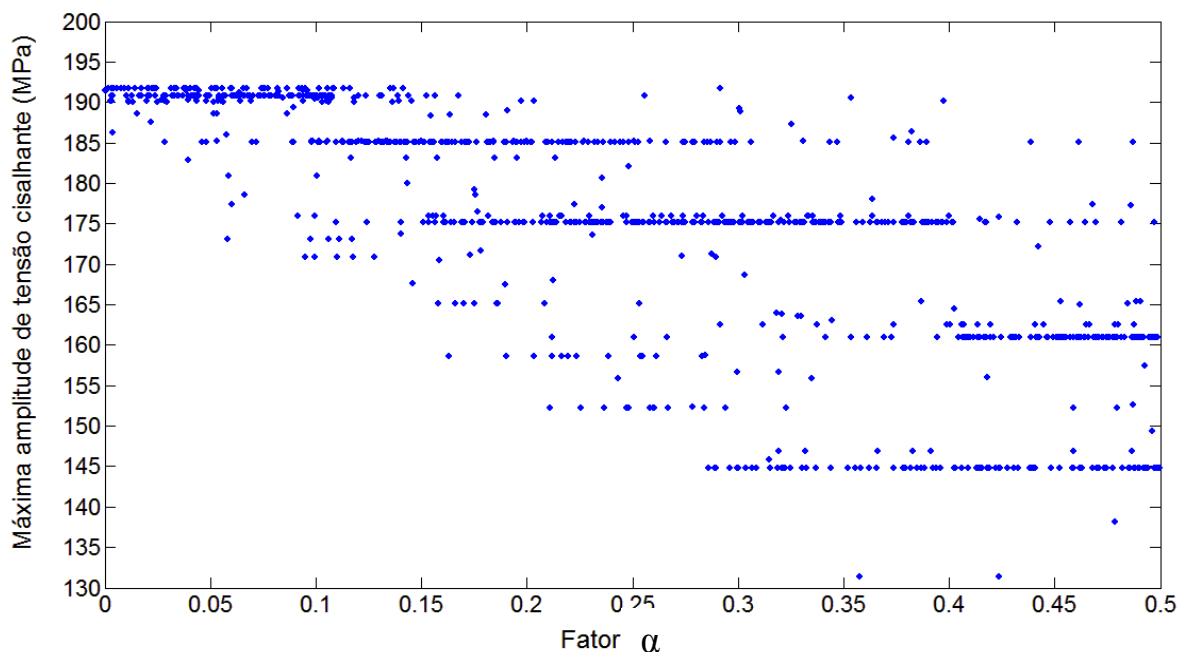


Figura 6.7 – Influência de  $\alpha$  na determinação da máxima amplitude de tensão cisalhante

Conclui-se que valores elevados de  $\alpha$  nem sempre irão determinar o real plano que contém  $\tau_{a,máx}$ . Como o objetivo inicial dos métodos de plano crítico é encontrar o plano que possui a máxima amplitude de tensão cisalhante (pela definição usual da literatura), a escolha do fator  $\alpha$  ficou em 1%. Assim, a tensão normal atuará apenas como um critério de decisão do plano crítico dentre aqueles que possuem valores muito próximos para  $\tau_{a,máx}$ . Os resultados testados para os diferentes materiais e diferentes números de indivíduos com o algoritmo genético encontram-se nas tabelas 6.5 e 6.6.

Apesar da aparente redução no tempo computacional à medida que o número de indivíduos decresce, alguns casos apresentaram resultados pouco satisfatórios comparativamente com o método de investigação de planos. Com oitenta e um elementos na população, por exemplo, o teste 4 para aço duro 0,51%C, os testes 1 e 2 para o aço 34Cr4, os valores obtidos para a amplitude de tensão cisalhante ficaram muito abaixo daqueles adquiridos pelo método IP. Observa-se também que para os mesmos casos citados, e uma população com sessenta e quatro indivíduos, os resultados se aproximam mais daqueles obtidos pelo método IP do que os valores obtidos com oitenta e um elementos. Isso acontece porque o AG é um método de busca que percorre caminhos diferentes para alcançar a convergência a cada vez que o teste é executado. Então, dependendo da escolha do número de indivíduos, se o mesmo caso for testado mais de uma vez o AG pode encontrar o plano crítico em uma e em outras não.

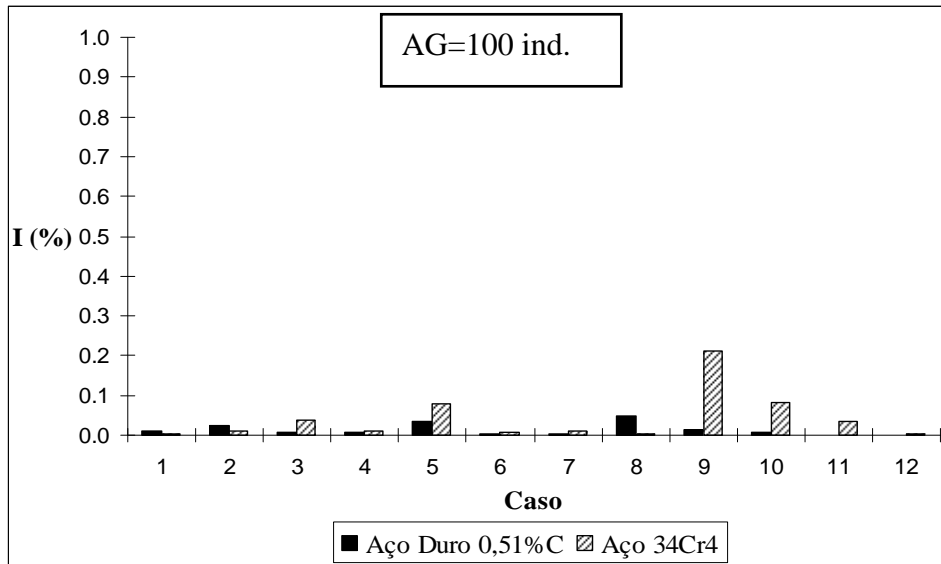
Tabela 6.5 – Resultados para Aço duro 0,51%C pelo método AG

Nº do teste	Método	Nº de indivíduos	$\tau_{a,máx}$ (MPa)	$\sigma_{\Delta_c,máx}$ (MPa)	$\phi$ (°)	$\theta$ (°)	Tempo (seg.)
1	AG	100	180,62	72,94	90	169	19,38
		81	179,56	81,08	84	176	6,45
		64	180,66	76,15	90	86	5,19
		25	174,35	23,06	95	86	2,06
2	AG	100	180,38	88,61	92	81	9,67
		81	180,18	93,60	95	172	6,49
		64	177,37	73,57	101	100	7,16
		25	179,31	80,80	84	168	3,63
3	AG	100	180,48	126,84	88	174	9,55
		81	180,51	122,85	118	175	7,86
		64	180,00	131,70	93	177	5,13
		25	173,45	118,09	84	166	2,06
4	AG	100	181,69	150,19	90	180	15,88
		81	163,69	115,80	130	180	6,23
		64	181,60	147,56	92	90	5,16
		25	175,17	143,99	77	176	2,02
5	AG	100	173,33	126,30	93	164	9,53
		81	173,20	130,57	92	160	7,77
		64	173,21	124,71	86	67	5,16
		25	173,41	121,01	90	68	2,06
6	AG	100	170,18	140,82	90	157	10,99
		81	170,15	146,09	90	157	6,47
		64	167,87	145,16	109	63	5,11
		25	159,59	170,84	111	56	3,27
7	AG	100	154,33	192,22	90	159	9,58
		81	153,52	124,98	94	65	6,38
		64	153,94	110,00	85	71	4,94
		25	153,98	195,44	87	160	2,06
8	AG	100	128,94	257,87	90	179	9,44
		81	128,93	138,93	133	154	6,77
		64	129,35	218,76	164	179	6,09
		25	123,97	103,31	136	147	1,95
9	AG	100	162,17	153,47	92	148	20,55
		81	161,95	145,06	83	146	6,41
		64	162,19	148,00	91	146	8,33
		25	160,17	164,37	71	50	3,16
10	AG	100	152,09	160,83	90	135	9,34
		81	152,09	164,52	106	138	6,42
		64	151,96	145,54	136	180	7,16
		25	146,45	123,32	78	52	2,02

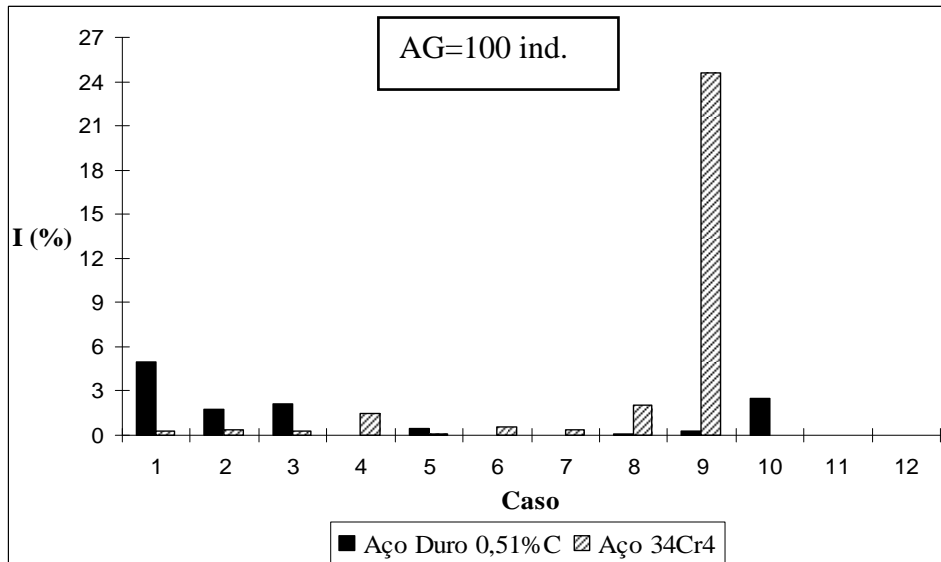
Tabela 6.6 – Resultados para Aço 34Cr4 pelo método AG

Nº do teste	Método	Nº de indivíduos	$\tau_{a,máx}$ (MPa)	$\sigma_{\Delta_c,máx}$ (MPa)	$\phi$ (°)	$\theta$ (°)	Tempo (seg.)
1	AG	100	221,99	160,36	89	87	9,77
		81	195,33	188,80	130	44	6,48
		64	211,28	157,70	64	162	5,41
		25	220,36	175,20	83	160	2,83
2	AG	100	192,92	239,06	91	159	9,47
		81	183,97	182,07	70	56	11,52
		64	192,90	236,25	91	164	5,17
		25	174,49	192,10	133	176	1,89
3	AG	100	157,94	315,19	87	180	14,16
		81	158	315,99	90	0	6,44
		64	157,57	311,65	89	9	5,16
		25	157,79	192,45	80	129	1,97
4	AG	100	192,92	236,32	90	22	16,00
		81	191,59	110,94	97	108	6,45
		64	191,89	146,37	96	114	5,22
		25	173,54	83,57	132	8	2,30
5	AG	100	223,83	223,75	92	1	9,69
		81	223,89	223,89	89	2	6,53
		64	223,72	223,55	88	1	5,11
		25	212,09	27,59	107	86	2,02
6	AG	100	189,99	210,80	90	135	12,72
		81	189,99	211,03	109	137	6,34
		64	189,53	209,48	157	162	5,08
		25	189,93	203,93	107	137	1,97
7	AG	100	223,43	274,61	88	67	18,16
		81	223,22	282,78	131	157	5,78
		64	222,97	36,79	128	157	3,91
		25	195,13	336,75	123	44	1,78
8	AG	100	191,96	240,62	92	68	13,91
		81	191,02	283,08	88	64	7,97
		64	191,27	244,63	98	68	3,83
		25	173,19	282,92	53	41	1,48
9	AG	100	157,66	392,42	89	23	10,95
		81	157,68	407,57	89	72	4,77
		64	156,99	385,95	96	42	4,80
		25	157,50	43,62	93	129	1,55
10	AG	100	197,45	382,47	87	158	12,14
		81	196,11	410,19	86	161	4,91
		64	196,84	353,12	93	155	3,78
		25	194,32	323,03	87	152	1,77
11	AG	100	141,95	567,89	87	180	9,03
		81	141,40	561,29	146	4	8,47
		64	142,06	541,88	90	4	6,81
		25	141,65	561,20	94	175	2,05
12	AG	100	211,99	423,98	90	0	15,25
		81	211,42	423,41	90	2	8,03
		64	207,63	406,72	78	180	3,99
		25	203,91	392,25	74	0	1,47

Como o Algoritmo Genético se comportou melhor com cem indivíduos utilizou-se a equação (41) com  $i$  sendo as tensões encontradas pelo AG. Assim, podem-se comparar os resultados obtidos pelo AG com cem indivíduos, com aqueles obtidos pelo método IP com  $\Delta\theta, \Delta\phi = 1^\circ$ . O resultado para o índice I para os vinte e dois casos de carregamento encontram-se na Fig.6.8



(a)



(b)

Figura 6.8 – Índice para avaliar a precisão de  $\tau_{a,máx}$  e  $\sigma_{\Delta_c,máx}$  para Aço duro 0,51%C e Aço 34Cr4 e AG com cem indivíduos (a) I para amplitude de tensão cisalhante (b) I para máxima tensão normal

Em geral os valores calculados para o índice I demonstram que os resultados para  $\tau_{a,m\acute{a}x}$  e  $\sigma_{\Delta_c,m\acute{a}x}$  obtidos pelo método IP e pelo método AG se aproximam bastante. Há uma grande diferença apenas para  $\sigma_{\Delta_c,m\acute{a}x}$  no teste número nove para o aço 34Cr4. Dos valores nas Tabelas 6.4 e 6.6 percebe-se que neste caso o AG encontra uma amplitude de tensão cisalhante um pouco abaixo daquela obtida pelo IP, porém uma máxima tensão normal no plano crítico bem mais elevada. As duas técnicas seguem padrões diferentes para determinar o plano crítico, o que justifica a diferença para  $\sigma_{\Delta_c,m\acute{a}x}$ . O AG converge segundo a função objetivo (aptidão) o que não ocorre com o método IP. Esse caso ilustra novamente que a definição usual de plano crítico é mal colocada. Pela definição da literatura, apenas o IP seleciona o plano crítico. Mas será que um decréscimo de 0,2% para  $\tau_{a,m\acute{a}x}$  e um acréscimo de quase 25% para  $\sigma_{\Delta_c,m\acute{a}x}$  não favorece mais o aparecimento de trincas?

### 6.3. MÉTODO HÍBRIDO

O método híbrido utiliza o algoritmo genético em conjunto com o método simplex. A técnica híbrida funciona como um AG modificado, com todos os seus operadores genéticos. A única diferença é que a cada nova geração, o melhor indivíduo é aperfeiçoado por meio do método simplex.

Como a busca pelo plano crítico por meio do algoritmo genético ocorre em diferentes regiões simultaneamente o simplex tem como objetivo acelerar essa busca reduzindo o número de gerações necessárias para o cálculo de  $\tau_{a,m\acute{a}x}$  e  $\sigma_{\Delta_c,m\acute{a}x}$ , mas não necessariamente o tempo computacional. Os resultados para a máxima amplitude de tensão cisalhante e a maior tensão normal no plano crítico calculados pelo método híbrido encontram-se nas tabelas 6.7 e 6.8.

Tabela 6.7 – Resultados para Aço duro 0,51%C pelo método híbrido

N° do teste	Método	N° de indivíduos	$\tau_{a,máx}$ (MPa)	$\sigma_{\Delta_c,máx}$ (MPa)	$\phi$ (°)	$\theta$ (°)	Tempo (seg.)
1	Híbrido	100	180,62	72,94	90	169	10,84
		81	180,85	65,40	90	78	7,95
		64	180,62	72,94	90	169	6,09
		25	180,62	72,94	90	169	4,59
2	Híbrido	100	180,41	91,87	90	169	19,92
		81	180,41	91,87	90	169	7,33
		64	180,47	61,12	90	79	6,75
		25	180,36	95,15	90	170	4,53
3	Híbrido	100	180,49	129,56	90	174	18,94
		81	180,49	129,56	90	174	9,58
		64	180,49	129,56	90	174	7,94
		25	180,57	35,61	90	83	3,25
4	Híbrido	100	181,70	150,20	90	0	10,67
		81	181,70	150,20	90	180	7,66
		64	181,70	150,20	90	180	10,97
		25	181,62	8,58	90	90	4,52
5	Híbrido	100	173,34	131,33	90	67	23,36
		81	173,26	119,10	88	67	15,67
		64	173,34	131,33	90	67	6,28
		25	173,34	131,33	92	67	3,38
6	Híbrido	100	170,18	140,82	90	157	12,00
		81	170,18	140,82	90	157	12,64
		64	170,18	140,82	90	157	6,44
		25	169,99	147,09	93	157	6,70
7	Híbrido	100	154,33	192,22	90	159	22,56
		81	154,27	194,60	89	159	7,00
		64	154,33	192,22	90	159	6,41
		25	154,33	192,22	90	159	4,20
8	Híbrido	100	129,00	258,00	90	180	10,06
		81	128,99	256,30	90	174	7,33
		64	129,02	175,92	103	43	5,70
		25	128,89	201,28	98	142	2,83
9	Híbrido	100	162,11	158,74	90	56	12,44
		81	162,06	158,02	86	56	6,94
		64	162,12	157,61	89	147	5,78
		25	162,11	145,81	96	56	7,16
10	Híbrido	100	152,12	159,72	90	140	11,99
		81	152,14	153,42	124	31	6,97
		64	152,05	169,52	80	136	5,69
		25	152,14	151,06	49	20	2,89



Tabela 6.8 – Resultados para o Aço 34Cr4 pelo método híbrido

Nº do teste	Método	Nº de indivíduos	$\tau_{a,máx}$ (MPa)	$\sigma_{\Delta_c,máx}$ (MPa)	$\phi$ (°)	$\theta$ (°)	Tempo (seg.)
1	Híbrido	100	222,00	160,88	90	158	18,86
		81	222,00	160,88	90	158	9,45
		64	222,00	160,88	90	158	6,94
		25	221,91	168,11	89	67	8,67
2	Híbrido	100	193,01	239,76	90	159	12,69
		81	192,87	140,68	90	68	15,66
		64	193,01	239,76	90	159	6,20
		25	192,89	234,70	91	159	6,61
3	Híbrido	100	158,00	312,85	90	157	12,39
		81	158,05	163,13	49	19	7,05
		64	158,01	308,69	90	169	5,98
		25	158,02	197,76	116	37	3,00
4	Híbrido	100	192,91	243,04	90	21	14,61
		81	192,91	243,04	90	21	7,67
		64	192,86	138,80	90	111	11,16
		25	192,88	140,72	90	112	3,70
5	Híbrido	100	224,00	223,92	90	0	12,74
		81	224,00	223,92	90	0	13,53
		64	223,96	223,86	91	180	6,20
		25	224,00	223,92	90	0	4,03
6	Híbrido	100	189,94	219,32	90	44	17,69
		81	189,95	207,66	118	37	7,38
		64	190,02	199,93	61	145	6,11
		25	189,94	199,87	49	159	4,03
7	Híbrido	100	223,43	263,15	90	67	16,05
		81	223,43	262,68	89	67	6,63
		64	223,43	262,68	89	67	4,86
		25	223,43	263,15	90	67	5,52
8	Híbrido	100	192,03	237,52	90	68	9,45
		81	192,03	237,52	90	68	8,59
		64	192,03	237,52	90	68	4,73
		25	191,90	140,61	89	159	2,42
9	Híbrido	100	157,88	373,49	90	11	7,20
		81	157,73	404,64	90	23	5,27
		64	157,86	385,36	90	17	4,39
		25	157,51	139,95	46	175	2,09
10	Híbrido	100	197,59	379,31	90	158	11,13
		81	197,65	372,97	91	158	5,75
		64	197,19	195,34	93	67	6,92
		25	197,71	174,95	90	67	8,06
11	Híbrido	100	142,00	567,81	90	180	8,03
		81	142,01	561,35	90	6	8,05
		64	142,03	336,43	102	43	4,33
		25	142,01	561,35	90	6	2,38
12	Híbrido	100	212,00	423,95	90	0	17,25
		81	212,00	423,95	90	0	6,49
		64	212,00	423,95	90	0	5,36
		25	211,90	10,13	90	90	3,61

Diferentemente do AG tradicional o método híbrido mantém a convergência com o decréscimo do número de indivíduos na maioria dos casos. Apenas para vinte e cinco indivíduos a rotina comportou-se de forma errada convergindo, em alguns testes, para planos orientados a  $90^\circ$  daqueles considerados críticos, conforme observado no caso 4 para aço duro 0,51%C e casos 8, 10 e 12 para o aço 34Cr4.

Testes como o caso 11 para aço 34Cr4 que apresentam diversos planos materiais com amplitudes de tensão cisalhante muito próximas umas das outras (Fig.6.2), representam um obstáculo para o AG e híbrido porque a função aptidão, que é responsável pela convergência, é formada principalmente pelos valores de  $\tau_a$ . Assim pode acontecer do AG selecionar diferentes planos críticos cada vez que o teste for simulado. Principalmente nesses casos, a tensão normal multiplicada ao fator  $\alpha$  e o método simplex de busca direta, tem papel fundamental para garantir a correta escolha do plano crítico. O método simplex associado ao AG, além de proporcionar bons resultados com uma população menor, também garantirá que o programa sempre escolha o mesmo plano crítico caso um mesmo teste seja simulado por mais de uma vez.

Os valores para  $\tau_{a,m\acute{a}x}$  e  $\sigma_{\Delta_c,m\acute{a}x}$  obtidos pelo método IP com um  $\Delta\theta, \Delta\phi = 5^\circ$  e os métodos AG e Híbrido, ambos com cem indivíduos, são muito próximos comparando-se as três técnicas. O tempo computacional nessa situação de calibração está demonstrado na Fig.6.9 para o aço duro 0,51%C.

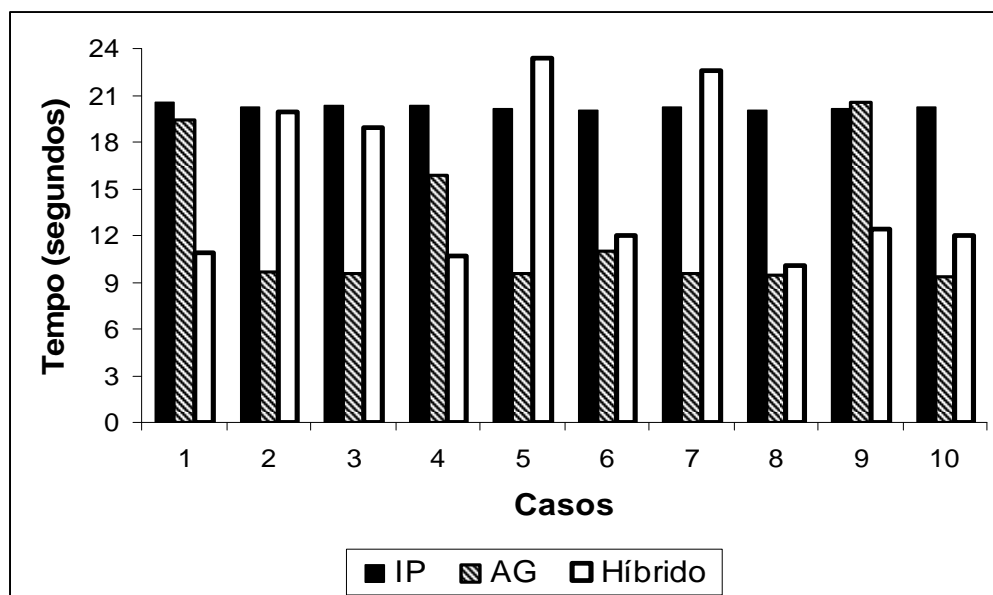


Figura 6.9 – Tempo computacional para IP-  $\Delta\theta, \Delta\phi = 5^\circ$ , AG e Híbrido com cem indivíduos para aço duro 0,51%C

O tempo para o método IP é sempre constante porque não possui um critério de parada como o AG e o Híbrido. Apesar de o método híbrido ser praticamente igual ao AG, se diferenciando apenas na inserção do método simplex, essa técnica pode ter um tempo de processamento dos cálculos inferiores aos obtidos pelo AG. Na verdade, como as duas formas de busca pelo plano crítico são evolutivas e diversos passos aleatórios formam esses dois programas, não se pode dizer qual das duas técnicas será mais rápida. Em média, grande parte dos casos simulados pelo AG são mais rápidos do que aqueles testados com o método Híbrido, porém esse pequeno acréscimo de tempo é recompensado pela maior confiança na técnica do simplex adicionado ao AG.

Na tentativa de avaliar quais das três técnicas de busca pelo plano crítico obtêm a melhor estimativa na previsão de vida à fadiga multiaxial utilizou-se o índice de erro  $E_{SU}$  demonstrado na Seção 4.4 (equação (30)). Os resultados para esse índice encontram-se na Tabela 6.9 calculados para valores de  $\tau_{a,máx}$  e  $\sigma_{\Delta_c,máx}$  determinados pelos métodos IP, AG e Híbrido.

Observa-se da tabela 6.9 que, em geral os valores do índice  $E_{SU}(\%)$  se aproximam quando calculados por meio das três técnicas de busca pelo plano crítico. A exceção ficou com o teste 9 para a Liga 34Cr4 que apresentou valores mais elevados para os métodos AG e Híbrido. Da equação (30), os limites de resistência a fadiga  $\tau_0$  e  $\sigma_0$ , relatados na tabela 6.1 e tabela 6.2, são constantes que dependem apenas do material em análise. Dessa maneira as únicas variáveis no cálculo do índice  $E_{SU}(\%)$  são  $\tau_{a,máx}$  e  $\sigma_{\Delta_c,máx}$ . Sabe-se que o AG e o método Híbrido, por meio da função objetivo, encontram planos críticos com valores muito próximos de  $\tau_{a,máx}$ , porém mais elevados para  $\sigma_{\Delta_c,máx}$ . Com isso a segunda parcela no numerador da equação (30) será mais elevada para essas duas técnicas de busca pelo plano crítico. E dessa forma, conclui-se que, em alguns casos, o modelo torna-se mais conservativo quando as tensões  $\tau_{a,máx}$  e  $\sigma_{\Delta_c,máx}$  forem calculadas por meio da função objetivo.

Tabela 6.9 – Índice de Erro de Susmel

Material	Teste	$E_{SU}$ (%) por IP	$E_{SU}$ (%) por AG	$E_{SU}$ (%) por Híbrido
Aço Duro 0,51%C	1	0,57	0,14	0,14
	2	1,96	1,76	2,14
	3	6,35	6,05	6,35
	4	9,15	9,14	9,15
	5	2,88	2,92	3,50
	6	3,29	3,29	3,29
	7	3,57	3,58	3,58
	8	5,76	5,73	5,76
	9	1,54	1,59	2,21
	10	-0,78	-1,33	-1,46
Liga 34Cr4	1	1,15	1,11	1,15
	2	0,13	0,05	0,14
	3	1,56	1,45	1,17
	4	0,13	-0,24	0,45
	5	7,42	7,35	7,41
	6	-3,56	-3,68	-2,80
	7	11,84	11,76	10,74
	8	0,47	-0,04	-0,35
	9	1,44	11,17	8,80
	10	15,75	15,72	15,43
	11	35,16	35,15	35,13
	12	22,66	22,65	22,65

## 7. CONCLUSÕES

Neste trabalho desenvolveu-se uma ferramenta numérica capaz de avaliar a resistência em fadiga e estimar a vida para componentes mecânicos submetidos a carregamentos multiaxiais. A partir dessa ferramenta pode-se calcular a máxima amplitude de tensão cisalhante e a maior tensão normal no plano crítico, que são as variáveis que governam o processo de fadiga de acordo com o critério das curvas modificadas de Wöhler.

Uma técnica de otimização baseada em algoritmos genéticos foi utilizada para o cálculo das tensões cisalhante e normal máximas em fadiga multiaxial. Comparativamente ao método de investigação de planos que percorre um número elevado de planos, dependendo do incremento utilizado, o AG apresenta uma redução significativa no tempo de simulação associado à busca pelo plano crítico sem que haja perda significativa na qualidade dos resultados. Dessa maneira, esse algoritmo mostrou ser uma ferramenta confiável para a maximização de funções de duas variáveis como os vinte e dois casos testados. Algoritmos genéticos apresentam uma enorme vantagem sobre outros métodos que necessitam de derivadas pois não precisam de nenhuma informação adicional da função que se deseja maximizar.

A desvantagem do AG está na dificuldade de determinação exata do plano crítico. Como essa técnica possui diversos passos aleatórios, o AG pode encontrar valores diferentes a cada vez que o usuário efetuar o mesmo teste, porém esses resultados sempre se encontrarão dentro de uma região aproximada do plano crítico.

O método simplex foi introduzido no AG na tentativa de otimizar ainda mais o processo. Essa técnica tem um papel importante, ele diminui a possibilidade do AG gerar resultados diferentes todas as vezes que o usuário efetuar o teste para um mesmo caso. Isso porque, por meio do mecanismo de reflexão, o simplex faz uma busca local na região determinada pelo AG. Além disso, como ocorre uma busca direta, pode-se diminuir o tamanho da população reduzindo o tempo de processamento.

## 8. PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foi mostrado que a tensão cisalhante descreve no plano um caminho de tensão durante o ciclo de carregamento. O critério da menor circunferência circunscrita deve ser capaz de conter essa curva no plano e o raio dessa circunferência foi definido como a amplitude de tensão cisalhante nesse plano. Os caminhos de tensão cisalhante que são avaliadas nos vinte e dois casos são curvas simples. Ou são formadas por uma elipse ou por uma reta. Isso é resultado do tipo de carregamento que, neste trabalho, são testes de torção e flexão síncronos. A proposta para trabalhos futuros é avaliar tipos de carregamentos que gerem histórias de tensão mais complexas. Portanto, deve-se escolher na literatura um maior número de casos que atendam a todos os tipos de carga a que um elemento mecânico pode sofrer na prática.

Outro estudo que deve ser levado em consideração é encontrar uma melhor maneira para definir os critérios de plano crítico, eliminando ao máximo a dúvida de qual plano irá ocorrer o aparecimento de trincas. Dessa forma métodos evolutivos de convergência irão representar uma ferramenta ainda mais precisa na previsão de vida em fadiga de componentes mecânicos.

Métodos de elementos finitos são importantes ferramentas que possibilitam descobrir as tensões em pontos materiais críticos de componentes mecânicos. Associado a essa técnica o Algoritmo Genético torna-se uma alternativa notável na previsão de falha por fadiga em projetos desses componentes quando utilizados em critérios de plano crítico. Como proposta futura, deve-se utilizar um método de elementos finitos para determinar as tensões nos pontos críticos de componentes reais e em seguida utilizar um modelo baseado em critérios de plano crítico com o uso de Algoritmos Genéticos para conduzir a análise de fadiga.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Basquin, O.H., “The exponential law of endurance tests”, Proc. ASTM, 1910.
- Bernasconi, A., Papadopoulos, I.V., “Efficiency of algorithms for shear stress amplitude calculation in critical plane class fatigue criteria”, Computation Materials Science, 2005.
- Brown, M.W., Miller, K.J., “A theory for fatigue under multiaxial stress-strain conditions”, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1973.
- Coffin, L.F. Jr., “A Study of the Effects of cyclic Thermal Stresses on a Ductile Metal”, 1954.
- Crossland, B., In “Effect of Large Hydrostatic Stress on the Torsional Fatigue Strength of an Alloy Steel”, Proceedings of the International Conference on Fatigue of Metals, London, 1956.
- Dang Van, K., Griveau, B., Message, O., “On a New Multiaxial Fatigue Limit Criterion: Theory and Application, Biaxial and Multiaxial Fatigue”, EGF 3, Mechanical Engineering Publications, London, 1989.
- De Jong, K.A., “Using Genetic Algorithms to solve NP-complete problems”, 1990.
- Deperrois, A., “Sur le calcul de limites d’endurance des aciers”, Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique, Paris, 1991.
- Dowling, N.E., “Mechanical Behavior of Materials”, Engineering Methods for Deformation, Fracture and Fatigue, 1993
- Duprat, D., Boudet, R., Davy, A., “ A Simple Model to Predict Fatigue Strength with Out-of phase Tension-Bending and Torsion Stress Condition”, Laboratoire de Génie Mécanique, France, 1997.
- Ellyin, F., Golos, K. and Xia, Z., “In-Phase and Out-of-Phase Multiaxial Fatigue”, ASME, 1991.
- Ellyin, F., and Wolodko, J.D., “Testing Facilities for multiaxial loading of tubular specimes”, ASTM, 1997
- Findley, W.N., “A theory for the effect of mean stress on fatigue under combined torsion and axial load or bending”, Transactions of the ASME, 1959.
- Garud, Y.S., “A New Approach to the Evaluation of Fatigue under Multiaxial Loading”, Proceedings Symposium on Methods for Predicting Material Life in Fatigue, ASME, New York, 1979.

- Goldberg, D.E., “Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning” Reading, MA: Addison-Wesley, 1989.
- Holland, J., “Adaptation in Natural and Artificial Systems” , The University of Michigan Press, 1975.
- Kang, J.Y., Choi, B.I., Lee, H.J., and, Lee, S.R., “Genetic Algorithm application in multiaxial fatigue criteria computation”, International Journal of Modern Physics B, 2003.
- Kueppers, M., Sonsino, C.M., “Critical Plane Approach for the Assessment of the Fatigue Behaviour of Welded Aluminium Under Multiaxial Loading”, Fatigue & Fracture of Engineering Material & Structures, 2003.
- Li, B., Santos, J.L.T., de Freitas, M., “A unified numerical approach for multiaxial fatigue limit evaluation”, Mechanics Structures Machines, 2000.
- Mamiya, E.N., Araújo, J.A., “Fatigue Limit Under Multiaxial Loadings: On the Definition of the Equivalent Shear Stress”, Mechanics Research Communications, 2002.
- McDiarmid, D.L., “A general criterion for high-cycle multiaxial fatigue failure”, Fatigue & Fracture of Engineering Material & Structures, 1991.
- Mitchell, M., Forrest, S., & Holland, J.H., “The royal road for genetic algorithms: Fitness landscapes and GA performance”. In: Proceedings of the First European Conference on Artificial Life, Cambridge, 1992.
- Morrow, J., “Fatigue Design Handbook”, 1968.
- Nelder, J.A., Mead, R., “A simplex method for function minimization”, Computer Journal, 1965.
- Nishihara, T., and Kawamoto, M., “The strength of metals under combined bending and torsion”, Memoirs of the College of Engineering, 1941.
- Papadopoulos, I.V., “Critical Plane Approaches in High-cycle Fatigue: on the Definition of the Amplitude and Mean Value of the Shear Stress Acting on the Critical Plane”, Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 1998.
- Reis, L., Li, B., and Freitas, M. de, “Analytical and experimental studies on fatigue crack path under complex multi-axial loading”, Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 2006.
- Sines, G., “Failure of Materials under Combined Repeated Stresses with Superimposed Static Stresses”, NACA Tech. Note 3495, November, 1955.



- Spendley, W., Himsworth, F.R., Hext, G.R., “Sequential application of simplex designs in optimization and evolutionary operation”, *Technometrics*, 1962.
- Suresh, S., “Fatigue of Materials”, Cambridge, 1991.
- Susmel, L., Lazzarin, P., “A bi-parametric Wöhler curve for high cycle multiaxial fatigue assessment”, *Fatigue & Fracture of Engineering Material & Structures*, 2002.
- Susmel, L., Tovo, R., Lazzarin, P., “The mean stress effect on the high-cycle fatigue strength from a multiaxial fatigue point of view”, *International Journal of Fatigue*, 2005.
- Varvani-Farahani, A., “A new energy-critical plane parameter for fatigue life assessment of various metallic materials subjected to in-phase and out-of-phase multiaxial fatigue loading conditions”, *International Journal of Fatigue*, 2000.
- Wöhler, A., “Versuche über die Festigkeit der Eisenbahnwagenachsen”, *Zeitschrift für Bauwesen*, 1860.
- Zenner, H., Heidenreich, R., and Richter, I., “Dauerschwingfestigkeit bei nichtsynchrone mehrachsiger Beanspruchung”, *Z. Werkstofftech*, 1985.