Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado em Matemática

Hipersuperfícies de Rotação Auto-redutoras no Espaço Euclidiano

por

Javier Rubén Sabino Norabuena

Orientadora: Prof$^{\text{a}}$. Dr$^{\text{a}}$. Keti Tenenblat

Brasília-DF
2014

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Hipersuperfícies de Rotação Auto-redutoras no Espaço Euclidiano

por

Javier Rubén Sabino Norabuena*

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 15 de maio de 2014

Comissão examinadora:

____

Prof^{a}.Dr^{a}. Keti Tenenblat - MAT/UNB (Orientadora)

____

Prof. Dr. Carlos Maber Carrión Riveros - MAT/UNB

____

Prof. Dr. Romildo da Silva Pina - MAT/UFG

* o autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

Agradecimentos

- De uma forma muito especial, a Deus, que tem sido um ótimo pai e tem me concedido grandes oportunidades. Se cheguei até aqui, isso devo a Ele.

- À minha mãe, Carmela Norabuena Toledo, e a meu pai, Amancio Sabino Escolástico, pela educação, pelo forte incentivo e por todos os preciosos conselhos.

-As minhas irmãs: Justina Sabino, María Sabino e Yuli Sabino, e aos meus irmãos: Edgar Sabino e Oliver Sabino, pelo incentivo, palavras de ânimo durante a graduação e o mestrado e por se preocuparem tanto comigo nesse período. Também agradeço aos meus cunhados-amigos Feliciano Cacha e Máximo Villareal pelas palavras de encorajamento.

- À minha orientadora Keti Tenenblat, por sua enorme paciência em responder minhas inúmeras perguntas, por sua dedicação a este trabalho e pela experiência que pude adquirir com seus ensinamentos.

- Aos professores Romildo da Silva Pina e Carlos Maber Carrión Riveros, por terem aceito participar da banca examinadora deste trabalho.

- Aos meus professores de graduação: Jesús Ezpinola, Miguel Yglesias e Vladimir Rodriguez pelo encorajamento no estudo da matemática.

- Aos meus amigos de matemática: Mayer Solorzano, Roberto Vila e Josimar Ramirez pelas discussões e sugestões no desenvolvimento deste trabalho. Aos meus amigos, de estudo e lazer, Jaime Rojas, Jamer Insupe, Jhoel Sandoval, Pedro Sanchez e Sonia Torre.

- Aos amigos e cristãos: Julian Lázaro, Mac Jamanca, Karina Huerta, Rosa Leon, Samuel Miranda, Dorcas Silverio, José Oliveira, Otto Augusto, Flávio Junker, Natália Junker, Magno Silva, Sérgio Gonzaga e Sabryna Dos Santos, por suas orações, pelo carinho e apoio moral.

- Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Baseado em um artigo de Stephen J. Kleene e Niels M. M$\emptyset$ller, apresentamos um estudo sobre a existência de uma família a um parâmetro de hipersuperfícies $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ auto-redutoras, geradas pela rotação de curvas planas. Σ^n é assintótica a um cone, suave, não-compacta e de curvatura média positiva. A prova envolve análise de uma equação diferencial ordinária elíptica de segunda ordem quase-linear com derivada cúbica.

Abstract

Based on a paper of Stephen J. Kleene and Niels M. M∅ller, we study the existence of a 1-parameter family of non-compact smooth self-shrinker hypersurfaces $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, generated by the rotation of plane curves. Σ^n has positive mean curvature and it is asymptotic to a cone. The proof involves the analysis of a cubic-derivative quasi-linear elliptic second-order ordinary differential equation.

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares **4**

1.1 Hipersuperfície parametrizada regular 4

1.2 A aplicação de Gauss 5

1.3 Curvaturas 6

1.4 Hipersuperfícies de rotação 6

1.5 Teorema do ponto fixo de Banach 10

1.6 Um lema sobre equações diferenciais ordinárias 13

2 Fluxo de Curvatura Média e Hipersuperfície Auto-redutora **17**

2.1 Fluxo de curvatura média 17

2.2 Exemplos do fluxo de curvatura média 19

2.3 Hipersuperfície auto-redutora 26

3 Hipersuperfícies de Rotação Auto-redutoras **28**

3.1 A equação auto-redutora para hipersuperfícies de rotação 29

3.2 Uma identidade integral para curvas 30

3.3 Aplicação do teorema do ponto fixo de Banach 40

3.4 Prova do teorema principal 53

Referências bibliográficas **55**

Introdução

O estudo de hipersuperfícies auto-redutoras ou auto-encolhidas ("self-shrinkers") nasceu a partir do estudo do fluxo de curvatura média, que foi estudado pela primeira vez por Brakke em [7], no contexto de teoria de medida geométrica sobre o movimento de uma superfície pelo fluxo de curvatura média. O estudo do fluxo de curvatura média, a partir da perspectiva de equações diferenciais parciais, começou com o artigo de Huisken [3] sobre o fluxo de hipersuperfícies convexas.

Um dos problemas mais importantes no fluxo de curvatura média é entender as possíveis singularidades que o fluxo atravessa. Singularidades são inevitáveis, quando o fluxo contrai qualquer hipersuperfície mergulhada fechada no espaço Euclidiano, levando eventualmente a extinção da hipersuperfície que está evoluindo.

Um ponto de partida fundamental para a análise de singularidades é a fórmula de monotonicidade de Huisken [4], porque a monotonicidade implica que o fluxo é assintoticamente auto-similar perto de uma singularidade dada e assim, é modelado por equações auto-redutoras do fluxo. Mais adiante, Huisken em [5] fez uma análise do comportamento local e global de hipersuperfícies em movimento pelo fluxo de curvatura média.

No artigo [4], Huisken mostrou que a única hipersuperfície rotacionalmente simétrica com curvatura média positiva, obtida pela rotação do gráfico de uma função sobre um eixo de rotação é o cilindro. Enquanto, Ilmanem, em [14], afirmou a existência de uma família de hipersuperfícies de rotação auto-redutoras que são assintóticas a um cone. É assim que Kleene e M∅ller, em [13], mostraram a existência de uma família de hipersuperfícies de rotação auto-redutoras assintóticas a um cone, com curvatura média positiva, interpolando entre o plano e o cilindro redondo ortogonal ao plano. Uma parte do trabalho desenvolvido por Kleene e M∅ller em [13], mostra o seguinte:

Em $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 2$, *existe uma família a um parâmetro de hipersuperfícies de rotação* Σ^n *auto-redutoras, suaves, não-compactas, assintóticas a um cone e de curvatura média positiva.*

Nosso objetivo principal neste trabalho é a demonstração deste resultado, para o qual, vamos dividir nosso trabalho em três capítulos:

No primeiro capítulo, apresentaremos alguns fatos relevantes que logo usaremos nos capítulos seguintes. Nas Seções 1.1, 1.2, 1.3 e 1.4 introduzimos o conceito de hipersuperfície parametrizada regular, a aplicação de Gauss, curvaturas (de Gauss-Kronecker e média) e hipersuperfícies de rotação no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ respectivamente. Na Seção 1.5, definimos o conceito de aplicação de contração e incluímos o Teorema do ponto fixo de Banach. Finalmente na Seção 1.6, enunciamos e provamos um lema sobre equações diferenciais ordinárias que logo será aplicado na Seção 3.2.

No Capítulo 2, apresentamos o estudo do fluxo de curvatura média e de hipersuperfícies auto-redutoras. Na Seção 2.1, definimos o conceito do fluxo de curvatura média além de enunciar uma equação chamada de equação do fluxo de curvatura média. Na Seção 2.2, vamos indicar alguns exemplos de soluções da equação do fluxo de curvatura média, e na Seção 2.3, definimos o conceito de hipersuperfície auto-redutora, a partir da qual obteremos uma equação denominada, a equação auto-redutora para hipersuperfícies, a qual é uma ferramenta importante no desenvolvimento deste trabalho.

Finalmente no Capítulo 3, na Seção 3.1, restringindo o estudo a hipersuperfícies de rotação encontramos uma equação denominada equação auto-redutora para hipersuperfícies de rotação gerada por uma curva plana. A partir desta equação obtemos uma equação diferencial ordinária de segunda ordem quasi-linear com derivada cúbica, de modo que o trabalho restante do Capítulo 3 está baseado na análise desta equação diferencial ordinária. Na Seção 3.2, obtemos uma identidade integral para soluções desta equação diferencial ordinária. Na Seção 3.3 aplicamos o teorema do ponto fixo de Banach para determinar a existência e unicidade de soluções da equação diferencial ordinária. Além disso, provamos que tais soluções são assintóticas a um raio fixo a partir da origem. Finalmente na Seção 3.4 mostramos o resultado principal sobre a existência da família a um parâmetro de hipersuperfícies de rotação auto-redutoras Σ^n no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$, cumprindo assim o objetivo deste trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

Vamos dividir este capítulo de preliminares em cinco seções. Nas primeiras quatro seções introduziremos o conceito de hipersuperfície parametrizada regular no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 2$, a aplicação de Gauss, curvaturas (de Gauss-Kronecker e média) e hipersuperfície de rotação. Na Seção 1.5 incluímos o Teorema do ponto fixo de Banach e na Seção 1.6 provamos um lema sobre equações diferenciais ordinárias que será útil no Capítulo 3. Assumimos que o leitor esteja familiarizado com os cursos de Geometria Diferencial, Equações Diferenciais Ordinárias, Análise no $\mathbb{R}^n$ e Análise funcional. Para este capítulo as principais referências são [10], [1], [16], [6] e [9].

Nas Seções 1.1 e 1.2, os conceitos iniciais como aplicações diferenciáveis entre conjuntos, espaço tangente e vetor unitário normal são utilizados sem maiores explicações (ver do Carmo [10] e Kühnel [16]).

1.1 - Hipersuperfície parametrizada regular

O estudo de curvas e superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$, assim como a geometria da aplicação de Gauss (ver do Carmo [10]) pode ser estendido para dimensões superiores. O objeto geométrico que generaliza a noção de uma superfície bidimensional para dimensões maiores é chamado de hipersuperfície. Nós substituímos o domínio do parâmetro bidimensional por um $n-$dimensional e o espaço Euclidiano ambiente tridimensional por um $(n+1)-$dimensional. Com esta noção de hipersuperfície, em seguida definimos o que é uma hipersuperfície parametrizada regular.

Definição 1.1. (Imersão) *Seja* $U \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto no espaço Euclidiano* $\mathbb{R}^n$. *Uma aplicação diferenciável* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ *chama-se uma* imersão *quando, para cada ponto* $u \in U$, *a derivada* $df_u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ *é uma transformação linear injetiva.*

Definição 1.2. (Hipersuperfície parametrizada regular) *Uma aplicação* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ *é chamada uma* hipersuperfície parametrizada regular, *se* $U \subset R^n$ *é aberto e* f *é uma imersão. Para* $u = (u_1, \ldots, u_n) \in U$ *é associado o ponto* $f(u)$ *de* $n+1$ *coordenadas* $f(u) = (f_1(u), \ldots, f_{n+1}(u))$.

Definição 1.3. (Hiperplano tangente) *Sejam* $U \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ *uma hipersuperfície parametrizada regular, então o* hiperplano tangente *de* f *em* $u \in U$ *denotado por* $T_u f$, *é definido como a imagem do espaço tangente* $T_u U$ *de* U *no ponto* u *pela aplicação* df_u, *i.e.* $T_u f = df_u(T_u U)$.

1.2 - A aplicação de Gauss

A partir desta seção denotaremos por Σ à hipersuperfície parametrizaada regular $n-$dimensional $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, onde U é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$, i.e. $\Sigma = f(U)$.

Definição 1.4. *Sejam* $V \subset U$ *um conjunto aberto em* U *e* $N : V \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ *uma aplicação diferenciável que associa a cada* $q \in V$ *um vetor unitário* $N(q)$ *normal a* $T_q\Sigma$, *então, dizemos que* N *é um* campo diferenciável de vetores normais unitários em V.

Definição 1.5. (Orientação) *Uma hipersuperfície regular* Σ *é* orientável *se ela admite um campo diferenciável de vetores normais unitários* $N : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ *definido em toda a hipersuperfície; a escolha de um tal campo* N *é chamada uma* orientação *de* Σ.

Definição 1.6. (A aplicação de Gauss) *Seja* $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *uma hipersuperfície regular com uma orientação* N *e seja* S^n *a esfera unitária em* $\mathbb{R}^{n+1}$ *centrado na origem. A aplicação diferenciável* $N : \Sigma \longrightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, *que para cada ponto* $p \in \Sigma$ *associa o vetor unitário normal* $N(p)$ *a* Σ *em* p, *é chamada a* aplicação de Gauss *da hipersuperfície* Σ.

A diferencial da aplicação de Gauss dN_p de N em $p \in \Sigma$ é uma aplicação linear de $T_p\Sigma$ em $T_{N(p)}S^2$. Como $T_p\Sigma$ e $T_{N(p)}S^2$ são os mesmos espaços vetoriais, dN_p pode ser olhada como uma aplicação linear em $T_p\Sigma$, isto é, $dN_p : T_p\Sigma \longrightarrow T_p\Sigma$.

1.3 - Curvaturas

Definimos a curvatura de Gauss-Kronecker e a curvatura média da hipersuperfície $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ da seguinte maneira:

Definição 1.7. (Curvatura de Gauss-Kronecker e média) *Seja p um ponto de Σ e seja $dN_p : T_p\Sigma \longrightarrow T_p\Sigma$ a diferencial da aplicação de Gauss. Então, o determinante de dN_p é chamada a* curvatura de Gauss-Kronecker **K** *de Σ em p e o negativo do traço da dN_p é chamada a* curvatura média **H** *de Σ em p.*

1.4 - Hipersuperfícies de rotação

Nesta seção, vamos determinar a diferencial da aplicação de Gauss e a curvatura média de uma hipersuperfície de rotação gerada por uma curva no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$.

Sejam $\mathcal{C}$ uma curva do plano x_1, x_{n+1}, onde $n \geq 2$, contida no semi-espaço $x_1 > 0$ e Ox_1 o eixo de rotação de $\mathcal{C}$. Seja

$$x_{n+1} = \varphi(v), \quad x_1 = \psi(v), \quad a < v < b, \quad \varphi(v) > 0,$$

uma parametrização para $\mathcal{C}$. Girando esta curva em torno do eixo Ox_1 obtemos uma hipersuperfície $n-$dimensional Σ, chamada *hipersuperfície de rotação* em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Agora, consideremos $u_1, \ldots, u_{n-1}$ como os ângulos de rotação da curva $\mathcal{C}$ em torno do eixo Ox_1. Sejam $\{\eta_1, \ldots, \eta_{n+1}\}$ a base ortonormal canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$ e S^{n-1} a esfera unitária no espaço $\mathbb{R}^n$ gerado por $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$.

Podemos ter uma parametrização de $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ dada por

$$\begin{cases} Y_1 = \text{cos}u_1, \\ Y_2 = \text{sen}u_1\text{cos}u_2, \\ \vdots \\ Y_{n-1} = \text{sen}u_1 \dots \text{sen}u_{n-2}\text{cos}u_{n-1}, \\ Y_n = \text{sen}u_1 \dots \text{sen}u_{n-2}\text{sen}u_{n-1}. \end{cases} \tag{1.1}$$

Daqui resulta que

$$\mathbf{x}(u_1, \dots, u_{n-1}, v) = (\varphi(v)Y_1, \varphi(v)Y_2, \dots, \varphi(v)Y_n, \psi(v)),$$

é a parametrização da hipersuperfície rotacional Σ, onde $Y_i = Y_i(u_1, \dots, u_{n-1})$ são dadas por (1.1). Consideremos

$$Y(u_1, \dots, u_{n-1}) = (Y_1(u_1, \dots, u_{n-1}), \dots, Y_n(u_1, \dots, u_{n-1}), 0), \tag{1.2}$$

o vetor posição da esfera $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Então, podemos escrever a parametrização de Σ como

$$\mathbf{x}(u_1, \dots, u_{n-1}, v) = \varphi(v)Y(u_1, \dots, u_{n-1}) + \psi(v)\eta_{n+1}, \tag{1.3}$$

onde $\eta_{n+1} = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$ é o eixo de rotação. Derivando temos os campos de vetores de coordenadas ortogonais em Σ

$$\begin{cases} \mathrm{x}_{u_i} = \varphi(v)Y_{u_i}, i = 1, 2, \dots, (n-1), \\ \mathrm{x}_v = \varphi'(v)Y + \psi'(v)\eta_{n+1}. \end{cases} \tag{1.4}$$

A aplicação de Gauss da hipersuperfície de rotação tem a forma

$$N = aY + b\eta_{n+1}, a, b \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Agora vamos determinar os valores de a e b que satisfazem

$$\begin{cases} \langle N, \mathbf{x}_{u_i} \rangle = 0, i = 1, \dots, (n-1), \\ \langle N, \mathbf{x}_v \rangle = 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Como $\langle Y, Y \rangle = 1$, derivando em relação a u_i, obtemos $\langle Y, Y_{u_i} \rangle = 0$. Daí, segue de (1.2) e (1.4) que a primeira equação em (1.6) é trivialmente satisfeita, e da segunda equação temos $a\varphi'(v) + b\psi'(v) = 0$. Além disso, note que $a^2 + b^2 = 1$. Logo temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} a\varphi'(v) + b\psi'(v) = 0, \\ a^2 + b^2 = 1. \end{cases} \tag{1.7}$$

Desenvolvendo o sistema (1.7) obtemos

$$a = \mp\frac{\psi'(v)}{\sqrt{\xi}},$$
$$b = \pm\frac{\varphi'(v)}{\sqrt{\xi}},$$

onde

$$\xi = (\psi')^2 + (\varphi')^2,$$

para os quais o sistema (1.6) é satisfeito. Logo, substituindo a e b na equação (1.5), temos

$$N = \mp\frac{\psi'(v)}{\sqrt{\xi}}Y \pm \frac{\varphi'(v)}{\sqrt{\xi}}\eta_{n+1}.$$

Portanto, a aplicação de Gauss apontando para o exterior da hipersuperfície de rotação, é dada por

$$N = \frac{1}{\sqrt{\xi}}\left(\varphi'\eta_{n+1} - \psi'Y\right). \tag{1.8}$$

Agora vamos determinar a diferencial da aplicação de Gauss. Usando os valores de $\mathbf{x}_{u_i}$ e $\mathbf{x}_v$ obtidos em (1.4), para $i = 1, \ldots, (n-1)$, obtemos

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \langle \mathbf{x}_{u_i}, \mathbf{x}_{u_j} \rangle = 0, \forall i \neq j, \\ E_{ii} &= \langle \mathbf{x}_{u_i}, \mathbf{x}_{u_i} \rangle = \varphi^2 \langle Y_{u_i}, Y_{u_i} \rangle = -\varphi^2 \langle Y, Y_{u_i u_i} \rangle, \\ F_{iv} &= \langle \mathbf{x}_{u_i}, \mathbf{x}_v \rangle = 0, \\ F_{vi} &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{u_i} \rangle = 0, \\ G_{vv} &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = (\varphi')^2 + (\psi')^2 = \xi. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Usando o sistema (1.6) e a equação (1.8) tem-se que

$$\begin{aligned} e_{ij} &= -\langle N_{u_i}, \mathbf{x}_{u_j} \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{u_j u_i} \rangle = 0, \forall i \neq j, \\ e_{ii} &= -\langle N_{u_i}, \mathbf{x}_{u_i} \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{u_i u_i} \rangle = -\frac{\psi'\varphi}{\sqrt{\xi}} \langle Y, Y_{u_i u_i} \rangle, \\ f_{iv} &= -\langle \mathbf{x}_{u_i}, N_v \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{u_i v} \rangle = 0, \\ f_{vi} &= -\langle N_v, \mathbf{x}_{u_i} \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{v u_i} \rangle = 0, \\ g_{vv} &= -\langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\xi}}\left(\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''\right). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Note que N_{u_i} e N_v pertencem a $T_p\Sigma$, logo podemos escrever

$$\begin{aligned}
N_{u_1} &= a_{11}\mathbf{x}_{u_1} + a_{21}\mathbf{x}_{u_2} + \cdots + a_{(n-1)1}\mathbf{x}_{u_{n-1}} + a_{v1}\mathbf{x}_v,\\
N_{u_2} &= a_{12}\mathbf{x}_{u_1} + a_{22}\mathbf{x}_{u_2} + \cdots + a_{(n-1)2}\mathbf{x}_{u_{n-1}} + a_{v2}\mathbf{x}_v,\\
&\vdots\\
N_{u_{n-1}} &= a_{1(n-1)}\mathbf{x}_{u_1} + a_{2(n-1)}\mathbf{x}_{u_2} + \cdots + a_{(n-1)(n-1)}\mathbf{x}_{u_{n-1}} + a_{v(n-1)}\mathbf{x}_v,\\
N_v &= a_{1v}\mathbf{x}_{u_1} + a_{2v}\mathbf{x}_{u_2} + \cdots + a_{(n-1)v}\mathbf{x}_{u_{n-1}} + a_{vv}\mathbf{x}_v,
\end{aligned}$$

isto é,

$$dN\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_{n-1}' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1v} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2v} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)v} \\ a_{v1} & a_{v2} & \dots & a_{v(n-1)} & a_{vv} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_{n-1}' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Isto mostra que, na base $\{\mathbf{x}_{u_1}, \dots, \mathbf{x}_{u_{n-1}}, \mathbf{x}_v\}$, dN é dada pela matriz (a_{ij}), $i, j = 1, 2, \dots, n-1, v$. Logo, as relações (1.10) podem ser expressas em forma matricial por

$$-\begin{pmatrix} e_{ii}I_{n-1} & f_{iv} \\ f_{vi} & g_{vv} \end{pmatrix} = (a_{ij})\begin{pmatrix} E_{ii}I_{n-1} & F_{iv} \\ F_{vi} & G_{vv} \end{pmatrix}$$

onde I_{n-1} é a aplicação identidade, e

$$\begin{aligned}
(a_{ij}) &= -\begin{pmatrix} e_{ii}I_{n-1} & 0 \\ 0 & g_{vv} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{ii}I_{n-1} & 0 \\ 0 & G_{vv} \end{pmatrix}^{-1}\\
&= -\begin{pmatrix} e_{ii}I_{n-1} & 0 \\ 0 & g_{vv} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{ii}^{-1}I_{n-1} & 0 \\ 0 & G_{vv}^{-1} \end{pmatrix}\\
&= -\begin{pmatrix} \dfrac{e_{ii}}{E_{ii}}I_{n-1} & 0 \\ 0 & \dfrac{g_{vv}}{G_{vv}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Assim, a diferencial da aplicação de Gauss é dada por

$$dN = \begin{pmatrix} -\dfrac{\psi'}{\varphi\sqrt{\xi}}I_{n-1} & 0 \\ 0 & \dfrac{\psi'\varphi'' - \varphi'\psi''}{\xi\sqrt{\xi}} \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

onde $\xi = (\psi')^2 + (\varphi')^2$. A diferencial dN de N é denominada *aplicação de Weingarten*.

Pela Definição 1.7 sabemos que a curvatura média de uma hipersuperfície é igual a menos o traço da diferencial da aplicação de Gauss. Então usando o resultado (1.11), temos que

$$\mathbf{H} = -\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\left(-\frac{\psi}{\varphi\sqrt{\xi}}\right) + \frac{\psi'\varphi'' - \varphi'\psi'}{\xi\sqrt{\xi}}\right\},$$

onde $\xi = (\psi)^2 + (\varphi)^2$, ou equivalentemente,

$$\mathbf{H} = (n-1)\frac{\psi'}{\varphi\sqrt{\xi}} + \frac{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}{\xi\sqrt{\xi}}, \tag{1.12}$$

é a curvatura média da hipersuperfície de rotação Σ em $\mathbb{R}^{n+1}$.

1.5 - Teorema do ponto fixo de Banach

Em Análise, o Teorema do ponto fixo de Banach foi enunciado e provado por Stefan Banach em 1922 e é também conhecido como o *princípio de contração*. Esse teorema pode ser utilizado para provar a existência e unicidade para soluções de equações de diversos tipos. Um exemplo típico do seu uso é no cálculo por aproximações sucessivas de raízes de funções.

Definição 1.8. (Aplicação de contração) *Uma aplicação $T : Y \longrightarrow Y$ de um espaço métrico Y sobre Y é denominada uma* aplicação de contração *se, e somente se, existe um $0 < \tau < 1$ tal que para quaisquer $u, v \in Y$, vale $|T(u) - T(v)| \leq \tau|u - v|$.*

Definição 1.9. (Ponto fixo) *Um ponto fixo de uma aplicação $T : Y \longrightarrow Y$ é um ponto $u \in Y$ tal que $T(u) = u$.*

Definição 1.10. (Espaços métricos completos) *Um espaço métrico Y é denominado completo se, e somente se, cada sequência convergente u_n, converge a um ponto em Y. Caso contrário, Y é dito incompleto.*

Exemplos de espaços métricos completos são o conjunto de números reais $\mathbb{R}$ e o conjunto de números complexos $\mathbb{C}$. O conjunto de números racionais $\mathbb{Q}$ é um espaço métrico incompleto.

O próximo teorema afirma que as aplicações de contração são contínuas.

Teorema 1.11. *Se T é uma aplicação de contração sobre Y, então T é contínua.*

Prova. Suponha que u_n é uma sequência tal que $\lim_{n\to\infty} u_n = u$, então $\lim_{n\to\infty} T(u_n) = T(u)$, pois $|T(u_n) - T(u)| \leq |u_n - u|$.

■

Teorema 1.12. (Teorema do ponto fixo de Banach) *Seja Y um espaço métrico completo e seja $T : Y \longrightarrow Y$ uma aplicação de contração com constante de contração $\tau \in (0,1)$. Então T tem um único ponto fixo $u \in Y$. Ou seja, existe um, e somente um, ponto $u \in Y$, tal que $T(u) = u$. Além disso, se $v \in Y$ é escolhido arbitrariamente, então a iteração $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, dada por*

$$\begin{aligned} u_0 &= v, \\ u_n &= T(u_{n-1}), n \geq 1, \end{aligned}$$

tem a propriedade de que $\lim_{n\to\infty} u_n = u$.

Prova. Seja $v \in Y$ um ponto arbitrário de Y e considere a sequência $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, dada por

$$\begin{aligned} u_0 &= v, \\ u_n &= T(u_{n-1}), n \geq 1. \end{aligned}$$

Vamos provar que $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em Y. Para $m < n$ vamos usar a desigualdade triangular e notar que

$$|u_m - u_n| \leq |u_m - u_{m+1}| + |u_{m+1} - u_{m+2}| + \cdots + |u_{n-1} - u_n|.$$

Como T é uma aplicação de contração, temos que

$$|u_p - u_{p+1}| = |T(u_{p-1}) - T(u_p)| \leq \tau |u_{p-1} - u_p|,$$

para todo inteiro $p \geq 1$. Usando esta desigualdade repetidamente, obtemos

$$|u_p - u_{p+1}| \leq \tau^p |u_0 - u_1|;$$

portanto,

$$|u_m - u_n| \leq \left(\tau^m + \tau^{m+1} + \cdots + \tau^{n-1}\right) |u_0 - u_1|,$$

i.e.,

$$|u_m - u_n| \leq \frac{\tau^m}{1-\tau}|u_0 - u_1|,$$

sempre que $m \leq n$. A partir disso, deduzimos que $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em Y. Como Y é completo, esta sequência tem um limite, isto é, $u \in Y$. Por outro lado, como T é contínua, segue-se que

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} T(u_{n-1}) = T(\lim_{n\to\infty} u_{n-1}) = T(u),$$

e, assim, u é um ponto fixo de T.

Se u e v são ambos pontos fixos de T, obtemos

$$|u - v| = |T(u) - T(v)| \leq \tau|u - v|.$$

Como $\tau < 1$, devemos ter que $u = v$.

■

Lema 1.13. *Seja $\Phi_\sigma : Y \longrightarrow Y$ uma família suave a um parâmetro $\sigma > 0$ de aplicações de contração num subconjunto aberto fixo Y de um espaço de Banach X. Então os pontos fixos x_σ de Φ_σ são funções suaves do parâmetro σ.*

Prova. Seja σ fixo, e sejam x_σ e $x_{\sigma+h}$ pontos fixos para Φ_σ e $\Phi_{\sigma+h}$ respectivamente. Então, como Φ_σ e $\Phi_{\sigma+h}$ são aplicações de contração, temos que

$$\begin{aligned}
|x_{\sigma+h} - x_\sigma| &= |\Phi_{\sigma+h}(x_{\sigma+h}) - \Phi_\sigma(x_\sigma)| \\
&\leq |\Phi_{\sigma+h}(x_{\sigma+h}) - \Phi_\sigma(x_{\sigma+h})| + |\Phi_\sigma(x_{\sigma+h}) - \Phi_\sigma(x_\sigma)| \\
&= \frac{|\Phi_{\sigma+h}(x_{\sigma+h}) - \Phi_\sigma(x_{\sigma+h})|}{|h|}|h| + |\Phi_\sigma(x_{\sigma+h}) - \Phi_\sigma(x_\sigma)| \\
&\leq \left|\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \sigma}(\sigma, x_{\sigma+h})\right| |h| + \tau|x_{\sigma+h} - x_\sigma| + O(h),
\end{aligned}$$

onde $\tau \in (0,1)$ e $O(h)$ é tal que $\lim_{h\to 0} \dfrac{O(h)}{|h|} = 0$.

Portanto, os pontos fixos x_σ são pelo menos funções contínuas de Lipschitz de σ. Para mostrar a diferenciabilidade, voltamos a escrever

$$\begin{aligned} x_{\sigma+h} - x_\sigma &= \Phi_{\sigma+h}(x_{\sigma+h}) - \Phi_\sigma(x_\sigma) \\ &= (\Phi_{\sigma+h}(x_{\sigma+h}) - \Phi_\sigma(x_{\sigma+h})) + (\Phi_\sigma(x_{\sigma+h}) - \Phi_\sigma(x_\sigma)). \end{aligned}$$

Pelo desenvolvimento em serie de Taylor temos que

$$\Phi_\sigma(x_{\sigma+h}) - \Phi_\sigma(x_\sigma) = \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial x_\sigma}(x_{\sigma+h} - x_\sigma) + O(|x_{\sigma+h} - x_\sigma|^2).$$

Daí,

$$\begin{aligned} x_{\sigma+h} - x_\sigma = \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial x_\sigma}&(x_{\sigma+h} - x_\sigma) + O(|x_{\sigma+h} - x_\sigma|^2) + \\ &+ \Phi_{\sigma+h}(x_{\sigma+h}) - \Phi_\sigma(x_{\sigma+h}). \end{aligned}$$

Reorganizando os termos, vemos que

$$\left(I - \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial x_\sigma} - O(|x_{\sigma+h} - x_\sigma|)\right)(x_{\sigma+h} - x_\sigma) = \Phi_{\sigma+h}(x_{\sigma+h}) - \Phi_\sigma(x_{\sigma+h}).$$

Dividindo por h e considerando o limite quando $h \longrightarrow 0$, obtemos

$$\frac{dx_\sigma}{d\sigma} = \left(I - \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial x_\sigma}\right)^{-1} \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \sigma}(\sigma, x_{\sigma+h}). \tag{1.13}$$

Note que o operador $A = I - \dfrac{\partial \Phi_\sigma}{\partial x_\sigma}$ é inversível. De fato, como Φ_σ é uma contração temos $\|D_x\Phi\| < 1$.

Note-se que a fórmula para a derivada (1.13) implica que os pontos fixos x_σ dependem suavemente no parâmetro σ, uma vez que o lado direito da expressão pode ser diferenciada em σ, já que as aplicações Φ_σ são diferenciáveis. ■

1.6 - Um lema sobre equações diferenciais ordinárias

O seguinte resultado é um lema sobre equações diferenciais ordinárias lineares não homogêneas de segunda ordem.

Lema 1.14. *Seja* $g : (d, a) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *uma função definida no intervalo aberto* (d, a)*, onde* $a > d \geq 0$*. Para* $r \in (d, a)$ *consideremos a seguinte equação diferencial ordinária linear não homogênea de segunda ordem*

$$g''(r) - A(r)\frac{r}{2}g'(r) + A(r)\frac{1}{2}g(r) = L(r)A(r), \tag{1.14}$$

onde $A(r)$ *e* $L(r)$ *são funções diferenciáveis, então para constantes arbitrarias* c_1 *e* c_2 *a solução geral da equação (1.14) é*

$$g(r) = c_1 r + c_2 r \int_r^a \frac{e^{-\int_s^a \frac{z}{2}A(z)dz}}{s^2} ds + r \int_r^a \frac{1}{t^2} \left\{ \int_t^a sL(s)A(s)e^{-\int_t^s \frac{z}{2}A(z)dz} ds \right\} dt. \tag{1.15}$$

Prova. Para resolver a equação linear não homogênea (1.14), vamos primeiro determinar uma solução homogênea $g_H(r)$ e outra particular $g_P(r)$ para finalmente obter a solução geral (1.15) dada por

$$g(r) = g_H(r) + g_P(r). \tag{1.16}$$

Consideremos a equação diferencial ordinária linear homogênea de segunda ordem

$$g''(r) - A(r)\frac{r}{2}g'(r) + A(r)\frac{1}{2}g(r) = 0, \tag{1.17}$$

observamos que uma solução não trivial é $g_1(r) = r$. Pelo método de d'Alambert podemos encontrar uma segunda solução $g_2 = g_2(r)$ através da multiplicação da solução conhecida $g_1 = g_1(r)$ por uma função incógnita $v = v(r)$ que será a solução de uma equação que aparecerá quando substituirmos $g_2 = g_2(r)$ na equação diferencial ordinária linear dada, i.e.

$$g_2(r) = g_1(r)v(r) = rv(r).$$

Substituindo g_2 em (1.17), obtêm-se

$$v(r) = \int_r^a \frac{e^{-\int_s^a \frac{z}{2}A(z)dz}}{s^2} ds.$$

Daí, temos que um par de soluções da equação linear homogênea (1.17) são

$$g_1(r) = r \quad \text{e} \quad g_2(r) = r \int_r^a \frac{e^{-\int_s^a \frac{z}{2}A(z)dz}}{s^2} ds. \tag{1.18}$$

Observamos que as soluções em (1.18) são linearmente independentes, pois, o seu Wronskiano

$$W(r) = W(g_1(r), g_2(r)) = \begin{vmatrix} g_1(x) & g_2(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) \end{vmatrix} = -e^{-\int_r^a \frac{z}{2}A(z)dz},$$

é diferente de 0 para algum $r \in (d, a)$.

Assim, como $g_1(r)$ e $g_2(r)$ são linearmente independentes, para constantes arbitrarias c_1 e c_2, a solução geral da equação homogênea (1.17) é:

$$g_H(r) = c_1 r + c_2 r \int_r^a \frac{e^{-\int_s^a \frac{z}{2} A(z)dz}}{s^2} ds. \tag{1.19}$$

O método de variação de parâmetros diz-nos que uma solução particular $g_P(r)$ da equação não homogênea (1.14) pode ser obtida a partir de $g_H(r)$, substituindo as constantes c_1 e c_2 como funções da variável independente r, ou seja,

$$g_P(r) = c_1(r)g_1(r) + c_2(r)g_2(r). \tag{1.20}$$

Para determinar as duas funções incógnitas $c_1(r)$ e $c_2(r)$ necessita-se de duas condições: a primeira condição a exigir será

$$c_1' g_1 + c_2' g_2 = 0. \tag{1.21}$$

Diferenciando

$$g_P' = c_1 g_1' + c_2 g_2'$$

tem-se

$$g_P'' = c_1 g_1'' + c_2 g_2'' + c_1' g_1' + c_2' g_2'.$$

Substituindo em (1.14) e usando a notação $l(r) = L(r)A(r)$, a qual é uma função contínua em (d, a), obtêm-se que

$$c_1' g_1' + c_2' g_2' = l(r). \tag{1.22}$$

Resolvendo o sistema (1.21) e (1.22), ter-se-á

$$c_1(r) = -\int_r^a \frac{g_2(t)l(t)}{W(t)} dt \quad \text{e} \quad c_2(r) = \int_r^a \frac{g_1(t)l(t)}{W(t)} dt.$$

Logo, substituindo $c_1(r), c_2(r), g_1(r)$ e $g_2(r)$ em (1.13), temos

$$\begin{aligned} g_P(r) &= -r \int_r^a \frac{tv(t)l(t)}{W(t)} dt + rv(r) \int_r^a \frac{tl(t)}{W(t)} dt \\ &= -r \left\{ -\int_r^a \left[v(t) \left(-\frac{tl(t)}{W(t)} \right) \right] dt + \left[v(t) \int_t^a \frac{sl(s)}{W(s)} ds \right] \Bigg|_r^a \right\}. \end{aligned}$$

Aplicando integração por partes nesta última igualdade, obtemos

$$g_P(r) = -r \int_r^a \left\{ \left[\int_t^a \frac{sl(s)}{W(s)ds} \right] v'(t) \right\} dt. \tag{1.23}$$

Portanto, substituindo

$$\begin{aligned} l(s) &= L(s)A(s), \\ W(s) &= -e^{-\int_s^a \frac{z}{2}A(z)ds}, \\ v'(t) &= -\frac{e^{-\int_t^a \frac{z}{2}A(z)dz}}{t^2}, \end{aligned}$$

na equação (1.23), a solução particular da equação não homogênea (1.14) é:

$$g_P(r) = r\int_r^a \frac{1}{t^2}\left\{\int_t^a sL(s)A(s)e^{-\int_t^s \frac{z}{2}A(z)dz}ds\right\}dt. \tag{1.24}$$

Finalmente, substituindo os resultados obtidos em (1.19) e (1.24) na equação (1.16), obtemos a solução geral (1.15) da equação linear não homogênea (1.14).

∎

Capítulo 2

Fluxo de Curvatura Média e Hipersuperfície Auto-redutora

Na primeira seção deste capítulo definiremos o conceito de fluxo de curvatura média, e introduziremos uma equação chamada de equação do fluxo de curvatura média. Na Seção 2.2 vamos indicar alguns exemplos de soluções da equação de fluxo de curvatura média, dentre as quais obteremos soluções auto-redutoras as quais representam uma classe especial de soluções que não mudam de forma sobre o fluxo de curvatura média. Finalmente na Seção 2.3, vamos definir o conceito de hipersuperfícies auto-redutoras e como consequência vamos obter uma equação denominada equação auto-redutora para hipersuperfícies, que é uma equação muito importante no desenvolvimento deste trabalho. Neste capítulo as principais referências são [15], [8] e [4].

2.1 - Fluxo de curvatura média

A seguir, baseado no livro de Ecker [8], vamos explicar de forma detalhada o que é o fluxo de curvatura média, que representa o processo de evolução sob o qual uma hipersuperfície deforma-se na direção de seu vetor curvatura média.

Definição 2.1. *Sejam* $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 2$, *uma hipersuperfície* $n-$*dimensional, e* $F : \Sigma^n \times I \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ *uma família de mergulhos suaves. Dizemos que*

F é uma solução do fluxo de curvatura média se

$$\frac{\partial F}{\partial t}(p,t) = H(F(p,t)), \tag{2.1}$$

para $p \in \Sigma^n$ e $t \in I$, $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, onde $H(F(p,t)) = \mathbf{H}N$ é o vetor curvatura média de $\Sigma_t = F(\Sigma^n, t)$ no ponto $F(p,t)$, $\mathbf{H}$ é a curvatura média e N é um campo normal unitário.

A equação (2.1) é chamada a *equação do fluxo de curvatura média.*

Observação 2.2. Considere uma família de mergulhos suaves

$$F_t = F(\cdot, t) : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1},$$

com $\Sigma_t = F_t(\Sigma^n)$.

Definindo $\mathbf{x} = F(p,t)$, a equação do fluxo de curvatura média (2.1) é interpretada como

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = H(\mathbf{x}), \tag{2.2}$$

para $p \in \Sigma^n$ e $t \in I$. Em vista da identidade

$$\triangle_{\Sigma_t}\mathbf{x} = H,$$

onde $\triangle_{\Sigma_t}$ o operador de Laplace-Beltrami em Σ_t, a equação (2.1) pode também ser escrita na forma

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \triangle_{\Sigma_t}\mathbf{x}, \tag{2.3}$$

que se assemelha formalmente à equação do calor.

Consideremos hipersuperfícies mergulhadas Σ_t em $\mathbb{R}^{n+1}$ satisfazendo

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right)^{\perp} = H(\mathbf{x}),$$

onde $\perp$ denota uma projeção sobre o espaço normal de Σ_t, então esta equação é equivalente a (2.1) por difeomorfismos tangenciais a Σ_t. De fato, seja $\widetilde{F}_t = \widetilde{F}(\cdot, t) : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ com $\Sigma_t = \widetilde{F}_t(\Sigma^n)$ uma família de mergulhos satisfazendo a equação

$$\left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial t}\right)^{\perp}(q,t) = H(\widetilde{F}(q,t)),$$

para $q \in \Sigma^n$ (Aqui $\perp$ denota a projeção sobre o espaço normal de $\widetilde{F}_t(\Sigma^n)$).

Seja $\phi_t = \phi(\cdot, t)$ uma família de difeomorfismos de Σ^n satisfazendo

$$D_q\widetilde{F}(\phi(p,t),t)\Big(\frac{\partial \phi}{\partial t}(p,t)\Big) = -\Big(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial t}(\phi(p,t),t))\Big)^{\top}, \tag{2.4}$$

onde o expoente $\top$ denota a projeção sobre o espaço tangente de $\widetilde{F}_t(\Sigma^n)$. A existência local de uma tal família é garantida pelas suposições sobre $\widetilde{F}$. Se definimos

$$F_t(p) = F(p,t) = \widetilde{F}\,(\phi(p,t),t) = \widetilde{F}\,(\phi_t(p),t) \tag{2.5}$$

então $\Sigma_t = F_t(\Sigma^n) = \widetilde{F}_t(\Sigma^n)$.

Derivando a equação (2.5) em relação a t, obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial t}(p,t) = D_q\widetilde{F}(\phi(p,t),t)\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(p,t)\right) + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial t}(\phi(p,t),t),$$

onde $q = \phi(p,t)$. Logo, usando o resultado obtido em (2.4) temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t}(p,t) &= -\left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial t}(\phi(p,t),t)\right)^{\top} + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial t}(\phi(p,t),t)\\ &= \left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial t}(\phi(p,t),t)\right)^{\perp}\\ &= H(\widetilde{F}(\phi(p,t),t)).\end{aligned}$$

Assim, pela equação (2.5) concluímos que

$$\frac{\partial F}{\partial t}(p,t) = H(F(p,t)).$$

Na seguinte seção apresentamos alguns exemplos do fluxo de curvatura média.

2.2 - Exemplos do fluxo de curvatura média

A seguir, vamos exemplificar soluções da equação do fluxo de curvatura média (2.1).

Exemplo 2.3. (Hipersuperfícies mínimas)

Seja $F_0 : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ um mergulho tal que $F_0(\Sigma^n)$ é uma hipersuperfície mínima. Seja $\Sigma_t = F_t = F_0 : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, uma deformação trivial de F_0. Então, Σ_t é uma solução da equação (2.1), pois, como a sua curvatura média $\mathbf{H} = 0$, temos que Σ_t satisfaz a equação do fluxo de curvatura média.

Exemplo 2.4. (Esferas)

Seja $(\Sigma_t)_{t\in I}$ uma família de $n-$esferas concêntricas em $\mathbb{R}^{n+1}$, i.e.,

$$\Sigma_t = \partial B^{n+1}_{r(t)},$$

onde $r(t)$ é o raio de Σ_t. Como os movimentos rígidos de $\mathbb{R}^{n+1}$ mantém invariante a curvatura média de hipersuperfícies, sem perda de generalidade podemos considerar as esferas centradas na origem. Seja

$$\mathbf{x}(t) = r(t)N,$$

o vetor posição de Σ_t, onde N é um campo normal unitário. Como a curvatura média de Σ_t é dada por

$$\mathbf{H}(t) = -\frac{n}{r(t)},$$

segue que a equação (2.1) se reduz a uma equação diferencial ordinária para a função de raio $r(t)$ dada por

$$\dot{r}\ (t) = -\frac{n}{r(t)},$$

ou, equivalentemente

$$r(t)dr = -ndt.$$

Integrando ambos os membros desta igualdade de 0 a t, obtemos

$$r(t)^2 - r(0)^2 = -2nt.$$

Se exigimos $r(0) = \rho$, isto é, $\Sigma_0 = \partial B_\rho$ então

$$r(t) = \sqrt{\rho^2 - 2nt},$$

de modo que esta solução de (2.1) existe para $t \in (-\infty, \rho^2/2n)$. Note que quando $t = 0$ temos à superfície inicial Σ_0 de raio ρ, e quando t tende para $\rho^2/2n$ temos o limite da superfície final que é simplesmente um ponto. Este processo de evolução para a esfera, quando t varia, é chamado *esfera redutora*.

Exemplo 2.5. (Cilindros)

Se Σ_t é um cilindro esférico, i.e.,

$$\Sigma_t = \partial B^{n+1-k}_{r(t)} \times \mathbb{R}^k,$$

para $0 \leq k \leq n$ (isto inclui o exemplo anterior, quando $k = 0$), então a equação (2.1) reduz-se a

$$\dot{r}\,(t) = -\frac{(n-k)}{r(t)},$$

ou seja

$$r(t)dr = -(n-k)dt.$$

Logo integrando ambos os membros da igualdade de 0 a t, temos

$$r(t)^2 - r(0)^2 = -2(n-k)t,$$

de modo que, com $r(0) = \rho$ obtém-se

$$r(t) = \sqrt{\rho^2 - 2(n-k)t},$$

e a solução existe para $t \in (-\infty, \rho^2/2(n-k))$. Com a variação de t, temos que quando $t = 0$, Σ_0 é o cilindro sobre uma esfera de raio ρ, e quando t tende para $\rho^2/2(n-k)$ a hipersuperfície Σ_t tende para $\mathbb{R}^k$. Este processo de evolução é chamado *cilindro redutor*.

Exemplo 2.6. (Soluções homotéticas)

O exemplo mais simples de uma solução homotética de (2.1) é dada pelas esferas redutoras discutidas no Exemplo 2.4. Para $\rho = 1$, estas satisfazem

$$\Sigma_t = \sqrt{1-2nt}\Sigma_0,$$

para todo $t \in (-\infty, 1/2n)$. Mais geralmente podemos considerar soluções de (2.1) da forma

$$\Sigma_t = \lambda(t)\Sigma_{t_1}, \tag{2.6}$$

onde t_1 é fixo e $\lambda(t)$ é positivo para t variando em um intervalo determinado. Σ_t descreve soluções de (2.1) que evoluem por homotetia sobre a origem em $\mathbb{R}^{n+1}$. Podemos considerar

$$\widetilde{F}(q,t) = \lambda(t)\widetilde{F}(q,t_1), \tag{2.7}$$

i.e. uma família de mergulhos $\widetilde{F}_t = \widetilde{F}(\cdot, t) : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ com $\Sigma_t = \widetilde{F}_t(\Sigma^n)$ satisfazendo a equação de evolução

$$\left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial t}(q,t)\right)^{\perp} = H(\widetilde{F}(q,t)), \tag{2.8}$$

para $q \in \Sigma^n$, onde $\perp$ é a projeção sobre o espaço normal de Σ_t.

Na Observação 2.2, vimos que existem difeomorfismos tangenciais ϕ_t de Σ^n com

$$\widetilde{F}(q,t) = F(\phi_t^{-1}(q), t),$$

para $q \in \Sigma^n$ (ver (2.5)), onde os mergulhos $F_t = F(\cdot, t) : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ satisfazem a equação do fluxo de curvatura média

$$\frac{\partial F}{\partial t}(p,t) = H(F(p,t)),$$

para $p \in \Sigma^n$.

Portanto, a menos de difeomorfismos tangenciais, a evolução radial ou homotética da hipersuperfície Σ_t (descrito por $\widetilde{F}$) é equivalente a sua evolução normal ao longo do vetor curvatura média (descrito por F). No caso das esferas redutoras (Exemplo 2.4) as duas evoluções coincidem mas no caso da evolução dos cilindros redutores essa evolução é distinta da evolução radial ou homotética.

Derivando a equação (2.7) em relação a t, obtemos

$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial t}(q,t) = \lambda'(t)\widetilde{F}(q,t_1),$$

logo substituindo esta equação em (2.8) e usando a equação (2.7), temos

$$\lambda'(t)\widetilde{F}(q,t_1)^{\perp} = H(\widetilde{F}(q,t)) = H(\lambda(t)\widetilde{F}(q,t_1)).$$

Observamos que se uma imersão $\widetilde{F}$ tem curvatura média $\mathbf{H}$, então a imersão homotética $\lambda\widetilde{F}$ tem curvatura média $\frac{1}{\lambda}\mathbf{H}$. Portanto, da última equação, deduzimos

$$\lambda'(t)\widetilde{F}(q,t_1)^{\perp} = \frac{1}{\lambda(t)} H(\widetilde{F}(q,t_1)), \tag{2.9}$$

para $q \in \Sigma^n$. Daí, conclui-se que $\lambda(t)\lambda'(t)\widetilde{F}(q,t_1)^\perp$ é independente de t e introduzimos a notação

$$\alpha \equiv \frac{d}{dt}\lambda^2(t) = 2\lambda(t)\lambda'(t),$$

independente de t. Integrando de t_1 até t, vamos portanto obter, supondo $\lambda(t_1) = 1$, que

$$\lambda(t) = \sqrt{1 + \alpha(t - t_1)}, \tag{2.10}$$

para todo t satisfazendo $1 + \alpha(t - t_1) > 0$. Combinando (2.7) e (2.9) e definindo $\mathbf{x} = \widetilde{F}(q,t)$, temos que

$$H(\mathbf{x}) = \frac{\alpha \mathbf{x}^\perp}{2\lambda^2(t)}, \tag{2.11}$$

para $\mathbf{x} \in \Sigma_t$ e para t satisfazendo $1 + \alpha(t - t_1) > 0$. Isto descreve soluções homotéticas expandindo a partir da origem 0 para $\alpha > 0$ e soluções homotéticas que contraem para $\alpha < 0$.

Vamos nos concentrar em $\alpha < 0$. Se considerarmos $\lambda(t_0) = 0$ para algum $t_0 > t_1$, i.e., exigindo que a hipersuperfície desapareça no tempo t_0, então $\alpha = -1/(t_0 - t_1)$ e assim

$$\lambda(t) = \sqrt{(t_0 - t)/(t_0 - t_1)}, \tag{2.12}$$

por (2.11), isto implica que

$$H(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^\perp}{2(t - t_0)}, \tag{2.13}$$

para $\mathbf{x} \in \Sigma_t$.

No estudo dos limites das soluções homotéticas do fluxo de curvatura média (chamados "explosões") considera-se principalmente $t_0 = 0$ e $t_1 = -1$. Neste caso, segue-se de (2.6), (2.12) e (2.13) que

$$\Sigma_t = \sqrt{-t}\,\Sigma_{-1}, \tag{2.14}$$

e

$$H(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^\perp}{2t}, \tag{2.15}$$

para $\mathbf{x} \in \Sigma_t$ e $t < 0$.

Tomando $t_1 = t_0 - 1$, da equação (2.6) e (2.12), temos que

$$\Sigma_t = \sqrt{t_0 - t}\Sigma_{t_0-1}.$$

Logo, a contração de soluções homotéticas para $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ no tempo t_0 são descritas por

$$\Sigma_t - \mathbf{x}_0 = \sqrt{t_0 - t}(\Sigma_{t_0-1} - \mathbf{x}_0),$$

e satisfaz

$$H(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\perp}}{2(t - t_0)}, \tag{2.16}$$

para $\mathbf{x} \in \Sigma_t$ e $t < t_0$.

Exemplo 2.7. (Soluções que são gráficos de funções)

Vamos considerar uma solução do fluxo de curvatura média onde a superfície Σ_t é dada pelo gráfico de $u(\cdot, t) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \in I$. Em particular, vamos assumir que a última coordenada dos mergulhos $F_t = F(\cdot, t)$, para Σ_t, pode ser expressa como uma função das primeiras n coordenadas, isto é,

$$F_{n+1}(p, t) = u(\widehat{F}(p, t), t),$$

ou, equivalentemente,

$$F(p, t) = (\widehat{F}(p, t), u(\widehat{F}(p, t), t)).$$

Definindo $x = (x_1, \ldots, x_n) = \widehat{F}(p, t) \in \mathbb{R}^n$ e abreviando o gradiente $D_x u$ por Du, temos que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \left(\frac{\partial \widehat{F}}{\partial t}, Du \frac{\partial \widehat{F}}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} \right). \tag{2.17}$$

O campo vetorial normal unitário exterior à superfície Σ_t, obtida pelo gráfico de u, é dado por

$$N = \frac{(-Du, 1)}{\sqrt{1 + |Du|^2}},$$

e a curvatura média por

$$\mathbf{H} = \operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right).$$

Como (2.1) implica

$$\mathbf{H}(F(p,t)) = \frac{\partial F}{\partial t}(p,t).N(F(p,t)),$$

usando (2.17) em $(\widehat{F}(p,t),t)$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}}\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right).$$

Portanto a função u satisfaz a equação diferencial parcial parabólica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sqrt{1+|Du|^2}\mathrm{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right). \tag{2.18}$$

Note-se que na obtenção de (2.18) usamos somente que a componente normal da velocidade é igual ao vetor curvatura média. Na verdade, acabamos de mostrar que a família de mergulhos dadas por

$$\widetilde{F}(q,t) = (q, u(q,t)),$$

para uma solução u de (2.18), satisfaz

$$\left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial t}(q,t)\right)^{\perp} = H(\widetilde{F}(q,t)). \tag{2.19}$$

Na Observação 2.2, vimos que (2.19) é equivalente a (2.1) por difeomorfismos tangenciais ϕ_t satisfazendo

$$D_q\widetilde{F}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = -\left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial t}\right)^{\top}.$$

Observamos que estes difeomorfismos são dados por

$$\phi(\cdot,t) = \widehat{F}(\cdot,t) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

De fato, como

$$F(p,t) = (\widehat{F}(p,t), u(\widehat{F}(p,t),t))$$

e observando a equação (2.5) notamos que tanto $\widehat{F}(p,t)$ como $\phi(p,t)$ são as mesmas projeções de F sobre o espaço euclideano $\mathbb{R}^n$, em cada ponto $p \in \mathbb{R}^n$.

Para $n = 1$, a equação (2.18) se reduz para

$$u_t = \frac{u_{yy}}{1+(u_y)^2} = (\mathrm{arctg} u_y)_y,$$

onde $u = u(y,t)$, $y \in \mathbb{R}$ e o índice y denota as derivadas parciais. Uma solução explícita de (2.18) é dada por

$$u(y,t) = -\log\cos y + t, \quad y \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Para n qualquer, soluções particulares de (2.18) da forma

$$u(x,t) = u_0(x) + t,$$

$x \in \mathbb{R}^n$ são chamadas *soluções de translação* de (2.1). Como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 1,$$

neste caso, a função u_0 deve satisfazer a equação diferencial parcial elíptica, que segue de (2.18)

$$\sqrt{1+|Du_0|^2}\,\mathrm{div}\left(\frac{Du_0}{\sqrt{1+|Du_0|^2}}\right) = 1. \tag{2.20}$$

A seguir definimos o que é uma hipersuperfície auto-redutora.

2.3 - Hipersuperfície auto-redutora

As hipersuperfícies auto-redutoras são uma classe importante de soluções para o fluxo de curvatura média. Eles não só estão encolhendo homoteticamente sobre o fluxo de curvatura média, o objetivo delas também é descrever uma possível explosão de Tipo I (ver [4]) em uma singularidade dada do fluxo de curvatura média, ou seja, eles proporcionam modelos de singularidade do fluxo.

Em seguida, usando os resultados obtidos em (2.14) e (2.15) do exemplo de soluções homotéticas do fluxo de curvatura média, definimos o que é uma hipersuperfície auto-redutora.

Definição 2.8. *Dizemos que uma solução $F : \Sigma^n \times (-\infty, 0) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ da equação do fluxo de curvatura média (2.1) é uma* hipersuperfície auto-redutora *se, $\Sigma_t = F(\Sigma^n, t)$ satisfaz*

$$\Sigma_t = \sqrt{-t}\,\Sigma_{-1}, \tag{2.21}$$

onde $t \in (-\infty, 0)$ e Σ_t é homotética a Σ_{-1}.

Definindo $\mathbf{x} = F(p,t)$, e considerando $t = -1$ na equação (2.15) a solução $\mathbf{x} = F(p) = F(p,-1)$ satisfaz a equação

$$H(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\perp}. \tag{2.22}$$

onde $\mathbf{x}^{\perp}$ é a projeção de $\mathbf{x}$ em $N_p\Sigma_{-1}$. Mas, sabemos que

$$H(\mathbf{x}) = \mathbf{H}N. \tag{2.23}$$

Então, igualando as equações (2.22) e (2.23), temos que

$$\mathbf{H}N = -\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\perp}.$$

Multiplicando pelo vetor normal unitário N ambos os lados desta igualdade, obtemos

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{2}\langle \mathbf{x}^{\perp}, N(\mathbf{x})\rangle - \frac{1}{2}\underbrace{\langle \mathbf{x}^{\top}, N(\mathbf{x})\rangle}_{0},$$

ou equivalentemente,

$$\mathbf{H} = -\frac{\langle \mathbf{x}, N\rangle}{2}, \tag{2.24}$$

a qual é uma equação diferencial parcial elíptica não-linear (quase-linear) denominada, a *equação auto-redutora* para o fluxo de curvatura média.

A equação (2.24) nós diz que quando a hipersuperfície Σ_t, homotética a Σ_{-1}, evolui pelo vetor curvatura média, produz a mesma velocidade normal que a componente normal de $-\mathbf{x}/2$. Ou seja, a hipersuperfície é auto-redutora por homotetia via $\Sigma_t = \sqrt{-t}\Sigma_{-1}$ em direção ao ponto $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ após tempo de duração t.

Proposição 2.9. *Seja $\Sigma^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}, n \geq 2$, uma hipersuperfície de rotação n-dimensional gerada pelo gráfico de uma curva plana $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Se Σ^n tem curvatura média $\mathbf{H}$ não-negativa e satisfaz a equação auto-redutora $\mathbf{H} = -\frac{\langle \mathbf{x}, N\rangle}{2}$, então Σ^n é um cilindro.*

A prova desta Proposição podemos encontrar em [4] (Proposição 5.4).

Capítulo 3

Hipersuperfícies de Rotação Auto-redutoras

Neste capítulo, vamos enunciar e provar um teorema obtido por Kleene e M∅ller em [13] sobre hipersuperfícies de rotação auto-redutoras, cujo enunciado é o seguinte:

Teorema 3.1. *Existe uma família a um parâmetro de hipersuperfícies de rotação Σ^n em $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 2$, auto-redutoras, suaves, não compactas, assintóticas a um cone e de curvatura média positiva.*

Para a demonstração deste teorema, vamos dividir este capítulo em quatro seções. Na Seção 3.1 vamos determinar uma equação auto-redutora para hipersuperfícies de rotação gerado por uma curva suave, a partir da qual obteremos uma equação diferencial ordinária de segunda ordem quasi-linear com derivada cúbica. Na Seção 3.2, obteremos uma identidade integral para soluções desta equação diferencial ordinária, a partir da qual obteremos resultados essenciais que logo serão aplicados na demostração do Teorema 3.1. Na Seção 3.3, aplicaremos o teorema do ponto fixo de Banach para determinar a existência e unicidade de soluções desta equação diferencial ordinária. Além disso, vamos mostrar que tais soluções são assintóticas a um raio fixo a partir da origem, que ao girar, vão gerar uma hipersuperfície de rotação auto-redutora com curvatura média positiva. Finalmente na Seção 3.4, mostramos o Teorema 3.1.

3.1 - A equação auto-redutora para hipersuperfícies de rotação

Nesta seção vamos determinar uma equação, chamada de auto-redutora, para uma hipersuperfície de rotação gerada por uma curva suave plana. Como consequência desta equação encontramos uma equação diferencial ordinária de segunda ordem quasi-linear com derivada cúbica, de modo que todo o trabalho restante neste capítulo é baseado na análise desta equação diferencial ordinária.

Seja $u : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função de classe $C^2(I)$ definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Seja $(x, u(x))$ uma curva gerada pelo gráfico de u contida no plano x_1, x_{n+1}, onde $n \geq 2$ e $x_1 > 0$. Girando esta curva em torno do eixo Ox_1, obtemos uma hipersuperfície de rotação $n-$dimensional $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$, possivelmente com fronteira $\partial\Sigma \neq \emptyset$.

Considerando a teoria de hipersuperfícies de rotação desenvolvida na Seção 1.4, substituímos as funções φ e ψ por $u(x) \in \mathbb{R}^+$ e $x \in I$ respectivamente, nas equações (1.3) e (1.8). Portanto, temos que uma parametrização para a hipersuperfície de rotação Σ é dada por

$$\mathbf{x} = uY + x\eta_{n+1}, \tag{3.1}$$

e o campo normal unitário em Σ é

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + (u')^2}} \left(u'\eta_{n+1} - Y \right), \tag{3.2}$$

onde $\eta_{n+1} = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1)$ é o eixo de rotação, e $Y = (Y_1, \ldots, Y_n, 0)$ é uma parametrização de $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ (ver (1.1)).

Assim, substituindo (3.1) e (3.2) na equação (2.24), temos que

$$\mathbf{H} = -\frac{\langle \mathbf{x}, N \rangle}{2} = \frac{1}{2} \frac{u(x) - xu'(x)}{(1 + (u'(x))^2)^{1/2}}. \tag{3.3}$$

Esta equação é denominada, *equação auto-redutora para uma hipersuperfície de rotação* Σ, gerada pela curva $(x, u(x))$, fora da fronteira $\partial\Sigma$.

Agora, substituindo os valores de $\varphi = u$ e $\psi = x$ na equação (1.12), temos que

$$\mathbf{H}(u(x)) = \frac{n-1}{u(x)(1+(u'(x))^2)^{1/2}} - \frac{u''(x)}{(1+(u'(x))^2)^{3/2}}. \tag{3.4}$$

Portanto, juntando as equações (3.3) e (3.4) obtemos a seguinte equação diferencial ordinária

$$u''(x) = \left[\frac{xu'(x)-u(x)}{2} + \frac{n-1}{u(x)}\right]\left(1+(u'(x))^2\right), \tag{3.5}$$

que é uma equação elíptica de segunda ordem quasi-linear com derivada cúbica do tipo

$$u'' - xp(x,u'(x))u' + p(x,u'(x))u = g(u(x),u'(x)), \tag{3.6}$$

para funções p e g definidas apropriadamente.

3.2 - Uma identidade integral para curvas

Nesta seção, determinamos uma identidade integral para soluções da equação diferencial ordinária (3.5). Para começar nós precisaremos do seguinte Lema, que observa as condições suficientes onde as soluções deixam de existir.

Lema 3.2. *Seja $x_0 \in (0,\infty)$ e $u : (x_0, x_\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ a solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} u'' = \left[\dfrac{x}{2}u' + \dfrac{n-1}{u} - \dfrac{u}{2}\right](1+(u')^2), \\ u(x_0) = \sigma x_0, \\ u'(x_0) \geq \sigma, \end{cases} \tag{3.7}$$

definida no intervalo aberto maximal (x_0, x_∞), onde $\sigma > 0$, então $xu'(x) - u(x) > 0$ e $x_\infty < \infty$. Se $u(x_0) \geq \sqrt{2(n-1)}$, então $x_\infty < \left(\dfrac{\sigma\pi}{n-1} + 1\right)x_0$.

Prova. Definindo

$$\Psi(x) := xu'(x) - u(x), \tag{3.8}$$

notamos que as condições iniciais são equivalentes a

$$\Psi(x_0) := x_0u'(x_0) - u(x_0) \geq 0.$$

Derivando a equação (3.8) em relação a x, obtemos

$$\Psi'(x) = x\left[\frac{\Psi(x)}{2} + \frac{n-1}{u(x)}\right](1+(u'(x))^2) > \frac{x}{2}\Psi(x).$$

Logo, considerando $x = x_0$, temos que

$$\Psi'(x_0) > \frac{x_0}{2}\Psi(x_0) \geq 0.$$

Como $\Psi'(x_0) > 0$ então para algum $\delta > 0$ temos que $\Psi'(x) > 0$ para $x \in J = (x_0, x_0+\delta)$. Portanto $\Psi(x)$ é uma função crescente em J, ou seja $\Psi(x) > \Psi(x_0) \geq 0$, i.e. $\Psi(x) > 0$ em J. Pela definição de $\Psi(x)$, temos que

$$xu'(x) - u(x) > 0, \tag{3.9}$$

para $x \in J$. Portanto

$$u'(x) > \frac{u(x)}{x} > 0,$$

em $x \in J$. Logo $u(x)$ é crescente em J, i.e.

$$u(x) > u(x_0) = \sigma x_0. \tag{3.10}$$

Além disso,

$$u''(x) = \left[\frac{\Psi(x)}{2} + \frac{n-1}{u(x)}\right](1+(u'(x))^2) > 0,$$

em J, e portanto u' é crescente em J, i.e.

$$u'(x) > u(x_0) \geq \sigma.$$

Enquanto $\Psi(x) = xu'(x) - u(x) > 0$, para $x > x_0$, temos que $u(x)$ é crescente e $\Psi(x)$ é crescente já que $\Psi'(x) = xu''(x) > 0$.

Como $u(x)$ é crescente, existe $x_1 \geq x_0$ tal que $u(x_1) \geq \sqrt{2(n-1)}$. Sem perda de generalidade vamos considerar

$$u(x_0) \geq \sqrt{2(n-1)}.$$

Observamos que definindo

$$\Phi(x) = \frac{\Psi(x)}{2} + \frac{n-1}{u(x)},$$

temos que

$$\Phi(x_0) = \frac{x_0u'(x_0)}{2} + \frac{n-1}{u(x_0)} - \frac{u(x_0)}{2} \geq \frac{x_0\sigma}{2} + \frac{n-1}{\sigma x_0} - \frac{\sigma x_0}{2},$$

isto é
$$\Phi(x_0) \geq \frac{n-1}{\sigma x_0}.$$

Afirmação: $\Phi(x) \geq \dfrac{n-1}{\sigma x_0}$, para todo $x \geq x_0$.

De fato, suponhamos que $\Phi(x) \geq \dfrac{n-1}{\sigma x_0}$ até $x \geq x_0$, então

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\Phi(x)) &= \frac{x}{2}u'' - (n-1)\frac{u'}{u^2} = \frac{x}{2}\Phi(x)(1+(u')^2) - (n-1)\frac{u'}{u^2} \\
&\geq \frac{x}{2}\left(\frac{n-1}{\sigma x_0}\right)(1+(u')^2) - (n-1)\frac{u'}{u^2} \\
&\geq \frac{x_0}{2}\left(\frac{n-1}{\sigma x_0}\right) + \frac{x}{2}\left(\frac{n-1}{\sigma x_0}\right)(u')^2 - (n-1)\frac{u'}{u^2} \\
&= \frac{n-1}{2\sigma} + (n-1)u'\left(\frac{xu'}{2\sigma x_0} - \frac{1}{u^2}\right).
\end{aligned}$$

Como $u(x) > u(x_0) \geq \sqrt{2(n-1)}$ e $\Psi(x) > 0$ temos $xu'(x) > u(x)$. Portanto, na última desigualdade temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\Phi(x)) &\geq \frac{n-1}{2\sigma} + (n-1)u'\left(\frac{u}{2\sigma x_0} - \frac{1}{2(n-1)}\right) \\
&> \frac{n-1}{2\sigma} + (n-1)u'\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(n-1)}\right) > 0,
\end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade usamos o resultado obtido em (3.10), i.e. $u(x) > \sigma x_0$. Portanto $\Phi(x)$ é crescente, i.e.

$$\Phi(x) > \Phi(x_0) \geq \frac{n-1}{\sigma x_0},$$

o que prova a Afirmação. Concluímos que enquanto $xu'(x) - u(x) > 0$, para $x > x_0$, então as propriedades

$$\begin{cases} \Phi(x) \geq \dfrac{n-1}{\sigma x_0}, \\ u'(x) \geq \sigma, \\ u(x) \geq \sqrt{2(n-1)}, \end{cases} \tag{3.11}$$

são preservados quando $x \geq x_0$ cresce.

Usando o fato de que $\Phi(x) \geq \dfrac{n-1}{\sigma x_0}$, temos que

$$u''(x) = \Phi(x)(1+(u')^2) \geq \frac{n-1}{\sigma x_0}(1+(u')^2),$$

para $x > x_0$. Integrando esta desigualdade temos:

$$u'(x) \geq \tan\left[(n-1)\frac{x-x_0}{\sigma x_0} + \text{arctan}\sigma\right]. \tag{3.12}$$

De fato, como $\dfrac{u''}{1+(u')^2} \geq \dfrac{n-1}{\sigma x_0}$, integrando ambos os membros da desigualdade de x_0 a x, obtemos

$$\text{arctan}u'(x) - \text{arctan}u'(x_0) \geq \frac{n-1}{\sigma x_0}(x-x_0),$$

daí,

$$\text{arctan}u'(x) \geq \text{arctan}u'(x_0) + \frac{n-1}{\sigma x_0}(x-x_0).$$

Agora, $u'(x_0) \geq \sigma$, implica que $\text{arctan}u'(x_0) \geq \text{arctan}\sigma$. Segue-se que

$$\text{arctan}u'(x) \geq \text{arctan}\sigma + (n-1)\frac{x-x_0}{\sigma x_0},$$

e portanto (3.12) se verifica.

Agora note que

$$\begin{aligned}
-\frac{\pi}{2} &< (n-1)\frac{x-x_0}{\sigma x_0} + \text{arctan}\sigma < \frac{\pi}{2}, \\
-\text{arctan}\sigma - \frac{\pi}{2} &< (n-1)\frac{x-x_0}{\sigma x_0} < \frac{\pi}{2} - \text{arctan}\sigma, \\
-\frac{\sigma x_0}{n-1}\left(\text{arctan}\sigma + \frac{\pi}{2}\right) &< x - x_0 < \frac{\sigma x_0}{n-1}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arctan}\sigma\right), \\
x_0 - \frac{\sigma x_0}{n-1}\left(\text{arctan}\sigma + \frac{\pi}{2}\right) &< x < \frac{\sigma x_0}{n-1}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arctan}\sigma\right) + x_0. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
-\frac{\pi}{2} &< -\text{arctan}\sigma < \frac{\pi}{2}, \\
0 &< \frac{\pi}{2} - \text{arctan}\sigma < \pi, \\
x_0 < \frac{\sigma x_0}{n-1}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\sigma\right) + x_0 &< \frac{\sigma x_0}{n-1}\pi + x_0 = \left(\frac{\sigma\pi}{n-1} + 1\right)x_0. \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Então, de (3.13) e (3.14) obtém-se

$$x_0 \leq x < \frac{\sigma x_0}{n-1}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arctan}\sigma\right) + x_0 < \left(\frac{\sigma\pi}{n-1} + 1\right)x_0.$$

Assim, considerando $x = x_\infty$, temos que $x_\infty < \infty$ e $x_\infty < \left(\frac{\sigma\pi}{n-1} + 1\right) x_0$.

■

O corolário a seguir fornece uma interpretação geométrica das condições iniciais do Lema 3.2.

Corolário 3.3. *Seja $u(x)$ uma solução do problema de valor inicial (3.7) do Lema 3.2. Se $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é a hipersuperfície de rotação, auto-redutora, gerada pela curva $(x, u(x))$, então a curvatura média $\mathbf{H}(u(x_0)) \leq 0$.*

Prova. Para $x = x_0$, da equação auto-redutora (3.3), temos que

$$\mathbf{H}(u(x_0)) = \frac{1}{2}\frac{u(x_0) - x_0 u'(x_0)}{\sqrt{1 + (u'(x_0))^2}} = -\frac{1}{2}\frac{\Psi(x_0)}{\sqrt{1 + (u'(x_0))^2}} \leq 0.$$

■

Lema 3.4. (Identidade Integral). *Para qualquer solução $u : (d, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ de (3.5), i.e. de*

$$u''(x) = \left[\frac{xu'(x) - u(x)}{2} + \frac{n-1}{u(x)}\right](1 + (u'(x))^2),$$

onde $d \geq 0$, existe um $\sigma = \sigma(u) \geq 0$ tal que u satisfaz a identidade

$$u(x) = 2(n-1)x \int_x^\infty \frac{1}{t^2} \left\{ \int_t^\infty s \frac{1 + (u'(s))^2}{2u(s)} e^{-\int_t^s \frac{z}{2}(1+(u'(z))^2)dz} ds \right\} dt + \sigma x, \tag{3.15}$$

para $x \in (d, \infty)$. Além disso,

$$\sigma = \lim_{a \to \infty} \frac{u(a)}{a} \quad e \quad u(x) > \sigma x, \tag{3.16}$$

para $a \in [x, \infty)$.

Prova. Suponha primeiro que $u : (d, a) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ seja uma solução definida em um intervalo (d, a). Podemos considerar que a solução u resolve uma equação linear não homogênea determinada por

$$u'' - \left(1 + (u')^2\right)\frac{x}{2}u' + \left(1 + (u')^2\right)\frac{1}{2}u = \frac{(n-1)}{u}(1 + (u')^2). \tag{3.17}$$

Segue do Lema 1.14, que a solução geral da equação (3.17) é dada por

$$\begin{aligned} u(x) = c_1 x + c_2 x \int_x^a &\frac{e^{-\int_s^a \frac{z}{2}(1+(u'(z))^2)dz}}{s^2} ds \\ &+ (n-1)x \int_x^a \frac{1}{t^2}\left\{ \int_t^a s\frac{(1 + (u'(s))^2)}{u(s)} e^{-\int_t^s \frac{z}{2}(1+(u'(z))^2)dz} ds \right\} dt, \end{aligned} \tag{3.18}$$

para constantes arbitrarias c_1 e c_2. Quando $x = a$, obtemos

$$c_1 = \frac{u(a)}{a} \quad \text{e} \quad c_2 = u(a) - u'(a)a.$$

Assim, substituindo em (3.18) os valores de c_1 e c_2, tem-se que

$$\begin{aligned} u(x) = {} & \frac{u(a)}{a}x + (u(a) - u'(a)a)\, x \int_x^a \frac{e^{-\int_s^a \frac{z}{2}(1+(u'(z))^2)dz}}{s^2} ds \\ & + (n-1)x \int_x^a \frac{1}{t^2} \left\{ \int_t^a s\frac{(1+(u'(s))^2)}{u(s)} e^{-\int_t^s \frac{z}{2}(1+(u'(z))^2)dz} ds \right\} dt. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Para completar a prova de (3.15), vamos mostrar que existe um $\sigma \geq 0$ tal que

$$\lim_{a\to\infty} \frac{u(a)}{a} = \sigma, \tag{3.20}$$

e que

$$\lim_{a\to\infty} \left[(u(a) - u'(a)a)x \int_x^a \frac{e^{-\int_s^a \frac{z}{2}(1+(u'(z))^2)dz}}{s^2} ds \right] = 0. \tag{3.21}$$

Pelo Lema 3.2, se existe um intervalo onde $\Psi(x) = xu'(x) - u(x) \geq 0$, $x \geq x_0$, então o intervalo maximal onde u está definido é finito. Assim, como no Lema 3.4 estamos considerando que o domínio de qualquer solução $u : (d, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ este definido em (d, ∞), então podemos concluir que a quantidade $\Psi(x)$ é negativa, ou seja, $u'(x) < \dfrac{u(x)}{x}$. Deste modo, $\dfrac{u(a)}{a}$ é monótona decrescente em a, e portanto existe um $\sigma \geq 0$ tal que

$$\lim_{a\to\infty} \frac{u(a)}{a} = \sigma.$$

Como a negatividade de $\Psi(x)$ implica que $xu'(x) - u(x) < 0$, em particular, quando $x = a$, temos que $u(a) - u'(a)a > 0$. Assim, na equação (3.19), obtemos

$$u(x) \geq (n-1)x \int_x^a \frac{1}{t^2} \left\{ \int_t^a s\frac{(1+(u'(s))^2)}{u(s)} e^{-\int_t^s \frac{z}{2}(1+(u'(z))^2)dz} ds \right\} dt + \sigma x. \tag{3.22}$$

Por isso, segue-se que existe uma sequência $\{a_k\}$ aumentando ao infinito tal que $u(a_k) \geq \sqrt{2(n-1)}$. Caso contrário, teríamos que $u(x) < \sqrt{2(n-1)}$ para x suficientemente grande, e portanto $\dfrac{1}{u(x)} > \dfrac{1}{\sqrt{2(n-1)}}$.

Daí, usando a desigualdade (3.22) obtemos para tais x suficientemente grandes que

$$u(x) \geq \frac{(n-1)}{\sqrt{2(n-1)}} x \int_x^a \frac{1}{t^2} \left\{ \int_t^a s(1+(u'(s))^2) e^{-\int_t^s \frac{z}{2}(1+(u'(z))^2)dz} ds \right\} dt$$
$$+ \sigma x.$$

Logo, considerando

$$p(s) = \int_t^s \frac{z}{2}(1+(u'(z))^2)dz,$$

tem-se que

$$\begin{aligned} u(x) &\geq \sqrt{2(n-1)} x \int_x^a \frac{1}{t^2} \left(1 - \frac{1}{e^{p(a)}}\right) dt + \sigma x \\ &\geq \sqrt{2(n-1)} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{e^{p(a)}}\right) + \frac{\sigma}{a} \\ &\geq \sqrt{2(n-1)} - R(a), \end{aligned}$$

onde

$$R(a) = \sqrt{2(n-1)} \left[\frac{x}{a} - \frac{x}{ae^{p(a)}} + \frac{1}{e^{p(a)}} - \frac{\sqrt{2(n-1)}\sigma}{2(n-1)a} \right],$$

e

$$\lim_{a \to \infty} R(a) = 0.$$

Assim, quando a tende para o infinito, temos que

$$u(x) \geq \sqrt{2(n-1)},$$

originando a contradição.

Além disso, pode-se modificar a sequência a_k para satisfazer $u'(a_k) \geq 0$. Isso pode ser obtido a partir da equação (3.5) e o teorema de valor médio, usando $u(a_k) \geq \sqrt{2(n-1)}$ na sequência original. Assim, considerando $x = d$ e $a = a_k$ na expressão (3.19), quando $a_k \longrightarrow \infty$, obtemos

$$0 < u(a_k) - u'(a_k)a_k < \sqrt{2(n-1)},$$

de modo que este termo é limitado.

Note que, como $(u'(z))^2 \geq 0$ para $z \in (s, a_k)$, temos $1 + (u'(z))^2 \geq 1$, daí $z(1 + (u'(z))^2) \geq z$. Agora integrando esta última desigualdade no domínio (s, a_k), tem-se

$$\int_s^{a_k} z(1 + (u'(z))^2) dz \geq \int_s^{a_k} z dz = \frac{{a_k}^2}{2} - \frac{s^2}{2},$$
$$-\int_s^{a_k} \frac{z}{2}(1 + (u'(z))^2) dz \leq -\frac{{a_k}^2}{4} + \frac{s^2}{4},$$

daí pela continuidade da função exponencial, e para $x \leq s$ obtemos

$$\int_x^{a_k} \frac{e^{-\int_s^{a_k} \frac{z}{2}(1+(u'(z))^2)dz}}{s^2} \leq \frac{e^{-\frac{{a_k}^2}{4}}}{x^2} \int_x^{a_k} e^{\frac{s^2}{4}} ds.$$

Observamos que

$$\lim_{a_k \to \infty} \frac{e^{-\frac{{a_k}^2}{4}}}{x^2} \int_x^{a_k} e^{\frac{s^2}{4}} ds = 0,$$

de modo que

$$\lim_{a_k \to \infty} \int_x^{a_k} \frac{e^{-\int_s^{a_k} \frac{z}{2}(1+(u'(z))^2)dz}}{s^2} ds = 0.$$

Assim, a inserção da sequência $a_k \longrightarrow \infty$ em (3.19) conduz a (3.15).

Como uma consequência imediata da equação (3.15) podemos ver que $u(x) > \sigma x$. ∎

Lema 3.5. *Seja* $u : (d, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *como no Lema 3.4, com* $\sigma > 0$. *Então*

$$\sup_{s \in (x,\infty)} |u(s) - \sigma s| \leq \frac{2(n-1)}{\sigma x}, \tag{3.23}$$

$$\sup_{s \in (x,\infty)} |u'(s) - \sigma| \leq \frac{3(n-1)}{\sigma x^2}, \tag{3.24}$$

para $x \in (d, \infty)$.

Prova. Da equação (3.15) tem-se que para todo $x \geq d$,

$$u(x) - \sigma x = (n-1)x \int_x^{\infty} \frac{1}{t^2} \left\{ \int_t^{\infty} s \frac{(1 + (u'(s))^2)}{u(s)} e^{-\int_t^s \frac{z}{2}(1+(u'(z))^2)dz} ds \right\} dt.$$

Dado que $0 \leq d < x \leq t \leq s$, e $u(s) > 0$, para todo $s \in (d, \infty)$, temos que o lado direito da igualdade acima é sempre positivo, pelo fato de que o integrando são funções positivas e os limites de integração também são positivos. Assim, aplicando o valor absoluto a cada lado da igualdade, obtemos

$$\begin{aligned}|u(x)-\sigma x| &= (n-1)x\int_x^\infty \frac{1}{t^2}\left\{\int_t^\infty s\frac{(1+(u'(s))^2)}{u(s)}e^{-\int_t^s \frac{z}{2}(1+(u')^2)dz}ds\right\}dt\\ &= (n-1)\int_x^\infty \frac{1}{t^2}\left\{\int_t^\infty xs\frac{(1+(u'(s))^2)}{u(s)}e^{-\int_t^s \frac{z}{2}(1+(u')^2)dz}ds\right\}dt\\ &\le (n-1)\int_x^\infty \frac{1}{t^2}\left\{\int_t^\infty s^2\frac{(1+(u'(s))^2)}{u(s)}e^{-\frac{1}{2}\int_t^s z(1+(u')^2)dz}ds\right\}dt.\end{aligned}$$

Mas como $u(s) > \sigma s$, para $\sigma > 0$, segue-se que $\dfrac{s}{u(s)} < \dfrac{1}{\sigma}$. Daí

$$|u(x)-\sigma x| \le \frac{(n-1)}{\sigma}\int_x^\infty \frac{1}{t^2}\left\{\int_t^\infty s(1+(u'(s))^2)e^{-\int_t^s \frac{z}{2}(1+(u'(z))^2)dz}ds\right\}dt. \tag{3.25}$$

Seja

$$p(s) = \int_t^s \frac{z}{2}(1+(u'(z))^2)dz.$$

Portanto

$$p'(s) = \frac{s}{2}(1+(u'(s))^2),$$

$$\lim_{s\to t} p(s) = 0,$$

e

$$\lim_{s\to\infty} p(s) = \infty.$$

Logo, considerando em (3.25)

$$q(t) = \int_t^\infty s(1+(u'(s))^2)e^{-\int_t^s \frac{z}{2}(1+(u'(z))^2)dz}ds,$$

tem-se que

$$q(t) = 2\int_t^\infty p'(s)e^{-p(s)}ds = -2e^{-p(s)}\Big|_t^\infty = -2\lim_{s\to\infty} e^{-p(s)} + 2e^{-p(t)} = 2. \tag{3.26}$$

Assim, substituindo o valor de $q(t)$ na desigualdade (3.25), obtemos

$$|u(x)-\sigma x| \le \frac{2(n-1)}{\sigma}\int_x^\infty \frac{1}{t^2}dt = \frac{2(n-1)}{\sigma x}.$$

Portanto, usando $u(x) > \sigma x$ dada pelo Lema 3.4, podemos estimar

$$|u(x)-\sigma x| \le \frac{2(n-1)}{\sigma x}, \tag{3.27}$$

para todo $x \in (d, \infty)$ e $\sigma > 0$.

Finalmente, para estimativas L^{∞}, obtemos

$$\|u(s) - \sigma s\|_{\infty} = \|u(s) - \sigma s\|_{L^{\infty}} = \sup_{s \in (x,\infty)} |u(s) - \sigma s| \leq \frac{2(n-1)}{\sigma x},$$

ou simplesmente

$$\sup_{s \in (x,\infty)} |u(s) - \sigma s| \leq \frac{2(n-1)}{\sigma x},$$

o que prova (3.23).

Analogamente para mostrar (3.24), vamos derivar a equação (3.15) em relação a x, de onde obtemos

$$\begin{aligned} u'(x) - \sigma = (n-1) \int_x^{\infty} \frac{1}{t^2} \left\{ \int_t^{\infty} s \frac{(1 + (u'(s))^2)}{u(s)} e^{-\int_t^s \frac{z}{2}(1+(u'(z))^2) dz} ds \right\} dt \\ - \frac{(n-1)}{x} \int_x^{\infty} s \frac{(1 + (u'(s))^2)}{u(s)} e^{-\int_x^s \frac{z}{2}(1+(u'(z))^2) dz} ds. \end{aligned}$$

Como $x > 0$ e cada uma das integrais é positiva, temos que

$$\begin{aligned} |u'(x) - \sigma| &\leq (n-1) \int_x^{\infty} \frac{1}{t^2} \left\{ \int_t^{\infty} s \frac{(1 + (u'(s))^2)}{u(s)} e^{-\int_t^s \frac{z}{2}(1+(u'(z))^2) dz} ds \right\} dt \\ &\quad + \frac{(n-1)}{x} \int_x^{\infty} s \frac{(1 + (u'(s))^2)}{u(s)} e^{-\int_x^s \frac{z}{2}(1+(u'(z))^2) dz} ds \\ &\leq \frac{(n-1)}{\sigma} \int_x^{\infty} \frac{1}{t^3} \left\{ \int_t^{\infty} s(1 + (u'(s))^2) e^{-\int_t^s \frac{z}{2}(1+(u'(z))^2) dz} ds \right\} dt \\ &\quad + \frac{(n-1)}{\sigma x^2} \int_x^{\infty} s(1 + (u'(s))^2) e^{-\int_x^s \frac{z}{2}(1+(u'(z))^2) dz} ds \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $u(s) > \sigma s$ e $x \leq t \leq s$.

Aplicando o resultado obtido em (3.26), temos que

$$\begin{aligned} |u'(x) - \sigma| &\leq \frac{2(n-1)}{\sigma} \int_x^{\infty} \frac{1}{t^3} dt + \frac{2(n-1)}{\sigma x^2} \\ &= \frac{(n-1)}{\sigma x^2} + \frac{2(n-1)}{\sigma x^2} = \frac{3(n-1)}{\sigma x^2}. \end{aligned}$$

Assim, usando $u(x) > \sigma x$, podemos estimar

$$|u'(x) - \sigma| \leq \frac{3(n-1)}{\sigma x^2}, \tag{3.28}$$

para todo $x \in (d, \infty)$ e $\sigma > 0$.

Logo para estimativas L^∞ obtêm-se que

$$\|u'(s)-\sigma\|_\infty = \|u'(s)-\sigma\|_{L^\infty} = \sup_{s\in(x,\infty)} |u'(s)-\sigma| \leq \frac{3(n-1)}{\sigma x^2},$$

ou seja,

$$\sup_{s\in(x,\infty)} |u'(s)-\sigma| \leq \frac{3(n-1)}{\sigma x^2}.$$

■

Assim, quando $\sigma > 0$, podemos assumir sem perda de generalidade que $d = 0$, e substituir a solução u por $u_\sigma : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Além disso, dado um $\sigma > 0$, pelo Lema 3.4 qualquer função u_σ deve satisfazer

$$u_\sigma(x) > \sigma x, \tag{3.29}$$

assim como as estimativas L^∞ em (3.23) e (3.24).

Corolário 3.6. *Seja $u_\sigma : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma solução não constante da equação (3.5). Então, temos a seguinte ordem de convergência:*

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} |u_\sigma(x)-\sigma x| = O\left(\frac{1}{x}\right)$,

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} |u'_\sigma(x)-\sigma| = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Prova. Usando os resultados obtidos em (3.27) e (3.28), quando x tende para $+\infty$, mostra-se imediatamente os itens *(i)* e *(ii)* respectivamente. ■

3.3 - Aplicação do teorema do ponto fixo de Banach

Nesta seção aplicaremos o teorema do ponto fixo de Banach para determinar a existência e unicidade de soluções u_σ da equação diferencial ordinária (3.5). Para esses propósitos, começamos considerando para $b > 0$ o espaço de Banach

$$C_0^1([b,\infty)) = \{v : [b,\infty) \longrightarrow \mathbb{R} | v, v' \in C_0([b,\infty))\},$$

de funções continuamente diferenciáveis v tais que

$$\lim_{x\to\infty} |v(x)| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty} |v'(x)| = 0,$$

dotado com a norma C^1 uniforme $\|v\|_{C^1} = \|v\|_\infty + \|Dv\|_\infty$, onde o supremo é tomado sobre $[b, \infty)$.

Além disso, para $b, \sigma > 0$, podemos considerar os subconjuntos abertos

$$Y_{\sigma,b} := \{v \in C_0^1([b,\infty)) | v(x) > 0, |v'(x)| < \frac{4(n-1)}{\sigma x^2}\}, \tag{3.30}$$

de modo que pelas estimativas (3.23) e (3.24), para as soluções positivas u_σ de (3.5), temos que $u_\sigma - \sigma x \in Y_{\sigma,b}$.

Então, vamos mostrar que a aplicação não-linear

$$T_\sigma : Y_{\sigma,b} \to Y_{\sigma,b},$$

dada por

$$[T_\sigma v](x) = (n-1)x \int_x^\infty \frac{1}{t^2} \left\{ \int_t^\infty s \frac{(1 + (v' + \sigma)^2)}{v(s) + \sigma s} e^{-\int_t^s \frac{z}{2}(1+(v'+\sigma)^2)dz} ds \right\} dt, \tag{3.31}$$

é uma contração, se $b = b(n, \sigma)$ é escolhido suficientemente grande. Note que se u é uma solução da equação (3.5), então pela identidade integral do Lema 3.4

$$[\widetilde{T}_\sigma u](x) := [T_\sigma v](x) + \sigma x = u(x), \tag{3.32}$$

onde $v(s) = u(s) - \sigma s$, e reciprocamente. Portanto, $u(x) = v(x) + \sigma x$ resolve a equação (3.5) se, e só se, $T_\sigma v = v$.

Proposição 3.7. *Seja $T_\sigma : Y_{\sigma,b} \to Y_{\sigma,b}$ uma aplicação definida por (3.31). Então existe $b_0 = b_0(n, \sigma)$ tal que T_σ é uma aplicação de contração (ver Definição 1.8) na norma $\|.\|_{C^1}$ para todo $b \geq b_0$.*

Prova. Para duas funções v_1 e v_2 pertencentes ao conjunto $Y_{\sigma,b}$ podemos escrever $u_i(x) = v_i(x) + \sigma x$ e obter para $\widetilde{T}_\sigma(u_i)$, dada por (3.32). Portanto,

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}_\sigma u_2 - \widetilde{T}_\sigma u_1 &= (n-1)x\int_x^\infty \frac{1}{t^2}\left\{\int_t^\infty s\frac{(1+(u_2')^2)}{u_2(s)}e^{-\int_t^s \frac{z}{2}(1+(u_2'(z))^2)dz}ds\right\}dt\\
&\quad - (n-1)x\int_x^\infty \frac{1}{t^2}\left\{\int_t^\infty s\frac{(1+(u_1')^2)}{u_1(s)}e^{-\int_t^s \frac{z}{2}(1+(u_1'(z))^2)dz}ds\right\}dt\\
&= (n-1)x\int_x^\infty \frac{1}{t^2}\left\{\int_t^\infty s\left(\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_1}\right)(1+(u_2')^2)e^{-p_2}ds\right\}dt\\
&\quad - (n-1)x\int_x^\infty \frac{1}{t^2}\left\{\int_t^\infty s\left(\frac{1+(u_2')^2-(u_2')^2+(u_1')^2}{u_1}\right)e^{-p_1}ds\right\}dt\\
&= (n-1)x\int_x^\infty \frac{1}{t^2}\left\{\int_t^\infty s\left(\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_1}\right)(1+(u_2'(s))^2)e^{-p_2}ds\right\}dt\\
&\quad + (n-1)x\int_x^\infty \frac{1}{t^2}\left\{\int_t^\infty \frac{s}{u_1}(1+(u_2')^2)\left(e^{-p_2(s)}-e^{-p_1(s)}\right)ds\right\}dt\\
&\quad + (n-1)x\int_x^\infty \frac{1}{t^2}\left\{\int_t^\infty \frac{s}{u_1(s)}\left((u_2'(s))^2-(u_1'(s))^2\right)e^{-p_1}ds\right\}dt\\
&= A+B+C,
\end{aligned}$$

onde,

$$p_i(s) = \int_t^s \frac{z}{2}(1+(u_i'(z))^2)dz, \tag{3.33}$$

e estamos denotando por A, B e C as três últimas parcelas da última igualdade.

Nos estimamos o termo A por

$$A \leq \frac{(n-1)}{\sigma^2 x^2}\|u_2-u_1\|_\infty.$$

De fato, usando a propriedade de que $u_i(s) > \sigma s$, temos que

$$\begin{aligned}
A &= (n-1)x\int_x^\infty \frac{1}{t^2}\left\{\int_t^\infty s\left(\frac{u_1-u_2}{u_1u_2}\right)(1+(u_2')^2)e^{-p_2(s)}ds\right\}dt\\
&\leq (n-1)\|u_2-u_1\|_\infty\int_x^\infty \frac{1}{t^2}\left\{\int_t^\infty \frac{s}{u_1}\frac{s}{u_2}(1+(u_2')^2)e^{-p_2}ds\right\}dt\\
&\leq \frac{2(n-1)}{\sigma^2}\|u_2-u_1\|_\infty\int_x^\infty \frac{1}{t^3}\left\{\int_t^\infty \frac{s}{2}(1+(u_2')^2)e^{-p_2(s)}ds\right\}dt.
\end{aligned}$$

Portanto, segue de (3.26) que

$$A \leq \frac{2(n-1)}{\sigma^2}\|u_2-u_1\|_\infty\int_x^\infty \frac{1}{t^3}dt = \frac{(n-1)}{\sigma^2x^2}\|u_2-u_1\|_\infty.$$

Para estimar o termo B, note que para números reais $a, b \leq c$, temos a propriedade de que $|e^a - e^b| \leq e^c|a-b|$. Logo, como

$$B = (n-1)x\int_x^\infty \frac{1}{t^2}\left\{\int_t^\infty \frac{s}{u_1}(1+(u_2')^2)\left(e^{-p_2(s)}-e^{-p_1(s)}\right)ds\right\}dt,$$

podemos considerar a e b da seguinte forma:

$$a = -p_2(s),$$

$$b = -p_1(s).$$

Segue de (3.33) que

$$a - b = \int_t^s \frac{z}{2}(u_1'(z) - u_2'(z))(u_1'(z) + u_2'(z))dz. \tag{3.34}$$

Agora, como $1 + (u_i'(z))^2 \geq 1$, temos que $\frac{z}{2}(1 + (u_i'(z))^2) \geq \frac{z}{2}$. Logo, integrando ambos os membros desta desigualdade de s a t e multiplicando por -1, obtemos

$$-p_i(s) = -\int_t^s \frac{z}{2}(1 + (u_i'(z))^2)dz \leq -\int_t^s \frac{z}{2}dz = -\frac{1}{4}(s^2 - t^2), \quad i = 1, 2.$$

Assim, observamos que

$$-p_i(s) \leq -\frac{1}{4}(s^2 - t^2), \tag{3.35}$$

onde

$$c = -\frac{1}{4}(s^2 - t^2).$$

Portanto, observando que $u_1(s) > \sigma s$, temos que

$$\begin{aligned} B &\leq \|u_2' + u_1'\|_\infty \|u_2' - u_1'\|_\infty \|1 + (u_2')^2\|_\infty \frac{2(n-1)}{\sigma} \int_x^\infty \frac{1}{t^2}dt \\ &\leq \frac{2(n-1)}{\sigma x} \|u_2' + u_1'\|_\infty \|u_2' - u_1'\|_\infty \|1 + (u_2')^2\|_\infty. \end{aligned}$$

Finalmente, estimamos o termo C.

$$\begin{aligned} C &= (n-1)x \int_x^\infty \frac{1}{t^2} \left\{ \int_t^\infty \frac{s}{u_1(s)} \left((u_2')^2 - (u_1')^2 \right) e^{-p_1(s)} ds \right\} dt \\ &\leq \frac{2(n-1)}{\sigma} \|u_2' + u_1'\|_\infty \|u_2' - u_1'\|_\infty \int_x^\infty \frac{1}{t^2} \left\{ \int_t^\infty \frac{s}{2} e^{-\frac{1}{4}(s^2 - t^2)dz} \right\} dt \\ &= \frac{2(n-1)}{\sigma x} \|u_2' + u_1'\|_\infty \|u_2' - u_1'\|_\infty. \end{aligned}$$

Sabemos que $\widetilde{T}_\sigma u = T_\sigma v + \sigma x$, ou seja

$$\widetilde{T}_\sigma u := (n-1)x \int_x^\infty \frac{1}{t^2} \left\{ \int_t^\infty s \frac{(1 + (u'(s))^2)}{u(s)} e^{-\int_t^s \frac{z}{2}(1 + (u'(z))^2)dz} ds \right\} dt + \sigma x.$$

Derivando temos

$$\begin{aligned}
\left(\widetilde{T}_\sigma u\right)' &= (n-1)\int_x^\infty \frac{1}{t^2}\left\{\int_t^\infty s\frac{(1+(u'(s))^2)}{u(s)}e^{-\int_t^s \frac{z}{2}(1+(u'(z))^2)dz}ds\right\}dt \\
&\quad - \frac{(n-1)}{x}\int_x^\infty s\frac{(1+(u'(s))^2)}{u(s)}e^{-\int_x^s \frac{z}{2}(1+(u'(z))^2)dz}dt+\sigma \\
&= \frac{\widetilde{T}_\sigma u}{x} - \frac{(n-1)}{x}\int_x^\infty s\frac{(1+(u'(s))^2)}{u(s)}e^{-\int_x^s \frac{z}{2}(1+(u'(z))^2)dz}ds.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Considerando

$$\widetilde{p}_i(s) = \int_x^s \frac{z}{2}(1+(u_i'(z))^2)dz,$$

seque de (3.36), que

$$\begin{aligned}
\left(\widetilde{T}_\sigma u_2\right)' - \left(\widetilde{T}_\sigma u_1\right)' &= \frac{1}{x}\left(\widetilde{T}_\sigma u_2 - \widetilde{T}_\sigma u_1\right) \\
&\quad - \frac{(n-1)}{x}\int_x^\infty s\left(\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_1}\right)(1+(u_2')^2)e^{-\widetilde{p}_2(s)}ds \\
&\quad - \frac{(n-1)}{x}\int_x^\infty \frac{s}{u_1}(1+(u_2')^2)\left(e^{-\widetilde{p}_2(s)}-e^{-\widetilde{p}_1(s)}\right)ds \\
&\quad - \frac{(n-1)}{x}\int_x^\infty \frac{s}{u_1}\left((u_2')^2-(u_1')^2\right)e^{-\widetilde{p}_1(s)}ds \\
&= \frac{1}{x}\left(\widetilde{T}_\sigma u_2 - \widetilde{T}_\sigma u_1\right) - A^* - B^* - C^*,
\end{aligned} \tag{3.37}$$

onde A^*, B^*, e C^* denotam as três ultimas parcelas da igualdade.

Agora, de maneira similar aos termos A, B e C estudados acima, usando a propriedade de que $u_i(s) > \sigma s$, vamos estimar cada um dos termos A^*, B^*, e C^*.

Começamos estimando o termo A^*.

$$\begin{aligned}
A^* &= \frac{(n-1)}{x}\int_x^\infty s\left(\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_1}\right)(1+(u_2')^2)e^{-\widetilde{p}_2(s)}ds \\
&\le \frac{(n-1)}{x^2}\|u_2-u_1\|_\infty\int_x^\infty \frac{s}{u_1}\frac{s}{u_2}(1+(u_2')^2)e^{-\widetilde{p}_2(s)}ds \\
&\le \frac{2(n-1)}{\sigma^2 x^3}\|u_2-u_1\|_\infty\int_x^\infty \frac{s}{2}(1+(u_2')^2)e^{-\widetilde{p}_2(s)}ds.
\end{aligned}$$

Portanto, seque de (3.26) que

$$A^* \le \frac{2(n-1)}{\sigma^2 x^3}\|u_2-u_1\|_\infty.$$

Para estimar o termo

$$B^* = \frac{(n-1)}{x}\int_x^\infty \frac{s}{u_1}(1+(u_2')^2)(e^{-\widetilde{p}_2(s)} - e^{-\widetilde{p}_1(s)})ds,$$

lembremos a seguinte propriedade: Se $a, b \leq c$, então $|e^a - e^b| \leq e^c|a-b|$. Logo, como vimos em (3.35)

$$-\widetilde{p}_i(s) \leq -\frac{1}{4}(s^2 - x^2), \quad i = 1, 2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|e^{-\widetilde{p}_2(s)} - e^{-\widetilde{p}_1(s)}\|_\infty &\leq e^{-\frac{1}{4}(s^2-x^2)}\int_x^s \frac{z}{2}\|(u_2')^2 - (u_1')^2\|_\infty dz \\
&= \|u_2' - u_1'\|_\infty \|u_2' + u_1'\|_\infty \frac{1}{4}(s^2 - x^2)e^{-\frac{1}{4}(s^2-x^2)}.
\end{aligned}$$

Daí, observando que $u_1(s) > \sigma s > \sigma x$, concluímos que

$$B^* \leq \frac{2(n-1)}{\sigma x^2}\|u_2' - u_1'\|_\infty \|u_2' + u_1'\|_\infty \|1 + (u_2')^2\|_\infty.$$

Agora, vamos estimar C^*.

$$\begin{aligned}
C^* &= \frac{(n-1)}{x}\int_x^\infty \frac{s}{u_1}((u_2')^2 - (u_1')^2)e^{-\widetilde{p}_1(s)}ds \\
&\leq \frac{(n-1)}{\sigma x}\|u_2' - u_1'\|_\infty \|u_2' + u_1'\|_\infty \int_x^\infty e^{-\widetilde{p}_1(s)}ds \\
&\leq \frac{2(n-1)}{\sigma x^2}\|u_2' - u_1'\|_\infty \|u_2' + u_1'\|_\infty \int_x^\infty \frac{s}{2}e^{-\frac{1}{4}(s^2-x^2)}ds \\
&= \frac{2(n-1)}{\sigma x^2}\|u_2' - u_1'\|_\infty \|u_2' + u_1'\|_\infty.
\end{aligned}$$

Assim, obtivemos as seguintes estimativas para os termos A^*, B^* e C^*.

$$\begin{aligned}
A^* &\leq \frac{2(n-1)}{\sigma^2 x^3}\|u_2 - u_1\|_\infty, \\
B^* &\leq \frac{2(n-1)}{\sigma x^2}\|u_2' - u_1'\|_\infty \|u_2' + u_1'\|_\infty \|1 + (u_2')^2\|_\infty, \\
C^* &\leq \frac{2(n-1)}{\sigma x^2}\|u_2' - u_1'\|_\infty \|u_2' + u_1'\|_\infty.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Além disso, como

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}_\sigma u_2 &= T_\sigma v_2 + \sigma x, \\
\widetilde{T}_\sigma u_1 &= T_\sigma v_1 + \sigma x,
\end{aligned}$$

em (3.37) temos que

$$T_\sigma v_2 - T_\sigma v_1 = x\left[(T_\sigma v_2)' - (T_\sigma v_1)'\right] + x(A^* + B^* + C^*). \tag{3.39}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
|T_\sigma v_2 - T_\sigma v_1| &\le x|(T_\sigma v_2)' - (T_\sigma v_1)'| + |x(A^* + B^* + C^*)| \\
&\le x\left(|(T_\sigma v_2)'| + |(T_\sigma v_1)'|\right) + |x(A^* + B^* + C^*)|. \qquad (3.40)
\end{aligned}
$$

Note que, por definição $T_\sigma v_i \in Y_{\sigma,b}$, então $|(T_\sigma v_i)'| < \dfrac{4(n-1)}{\sigma x^2}$. Assim em (3.40), obtemos

$$
|T_\sigma v_2 - T_\sigma v_1| < \frac{8(n-1)}{\sigma x} + |x(A^* + B^* + C^*)|. \qquad (3.41)
$$

Seja $b \ge b_0$, e sendo $x \ge b$ em (3.41), temos

$$
|T_\sigma v_2 - T_\sigma v_1| < \frac{8(n-1)}{\sigma b_0} + |x(A^* + B^* + C^*)|.
$$

Considerando o supremo em ambos os lados desta desigualdade, segue-se que

$$
\begin{aligned}
\sup_{x\in[b,\infty)} |T_\sigma v_2 - T_\sigma v_1| &< \frac{8(n-1)}{\sigma b_0} + \sup_{x\in[b,\infty)} |x(A^* + B^* + C^*)| \\
\|T_\sigma v_2 - T_\sigma v_1\|_\infty &< \frac{8(n-1)}{\sigma b_0} + \|x(A^* + B^* + C^*)\|_\infty.
\end{aligned}
$$

Novamente somando $\|(T_\sigma v_2)' - (T_\sigma v_1)'\|_\infty$ a ambos os lados da desigualdade acima, obtém-se

$$
\|T_\sigma v_2 - T_\sigma v_1\|_{C^1} < \frac{8(n-1)}{\sigma b_0} + \underbrace{\|(T_\sigma v_2)' - (T_\sigma v_1)'\|_\infty}_{(I)} + \underbrace{\|x(A^* + B^* + C^*)\|_\infty}_{(II)}. \qquad (3.42)
$$

Sabemos que $T_\sigma v_i \in Y_{\sigma,b}$, o qual implica que $|(T_\sigma v_i)'| < \dfrac{4(n-1)}{\sigma x^2}$. Daí,

$$
|(T_\sigma v_2)' - (T_\sigma v_1)'| \le |(T_\sigma v_2)'| + |(T_\sigma v_1)'| < \frac{8(n-1)}{\sigma x^2}.
$$

E como estamos assumindo que $x \ge b \ge b_0$, temos

$$
|(T_\sigma v_2)' - (T_\sigma v_1)'| < \frac{8(n-1)}{\sigma b_0^2}.
$$

Considerando o supremo em ambos os lados desta desigualdade, obtemos

$$
\|(T_\sigma v_2)' - (T_\sigma v_1)'\|_\infty < \frac{8(n-1)}{\sigma b_0^2}, \qquad (3.43)
$$

assim, temos uma estimativa para o termo (I) de (3.42).

Estimando (II), para $x \geq b_0$, obtemos de (3.38) que

$$\begin{aligned}\|x(A^* + B^* + C^*)\|_\infty < &\frac{2(n-1)}{\sigma^2 b_0^2}\|u_2 - u_1\|_\infty \\ &+ \frac{2(n-1)}{\sigma b_0}\|u_2' - u_1'\|_\infty \|u_2' + u_1'\|_\infty \|1 + (u_2')^2\|_\infty \\ &+ \frac{2(n-1)}{\sigma b_0}\|u_2' - u_1'\|_\infty \|u_2' + u_1'\|_\infty. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Logo, substituindo em (3.42) as estimativas de (I) e (II) obtidos em (3.43) e (3.44) respectivamente, temos

$$\begin{aligned}\|T_\sigma v_2 - T_\sigma v_1\|_{C^1} < &\frac{2(n-1)}{\sigma^2 b_0^2}\|u_2 - u_1\|_\infty \\ &+ \frac{2(n-1)}{\sigma b_0}\|u_2' - u_1'\|_\infty \|u_2' + u_1'\|_\infty \|1 + (u_2')^2\|_\infty \\ &+ \frac{2(n-1)}{\sigma b_0}\|u_2' - u_1'\|_\infty \|u_2' + u_1'\|_\infty \\ &+ \frac{8(n-1)}{\sigma b_0} + \frac{8(n-1)}{\sigma b_0^2}. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Note que, para $x \geq b_0$

$$\begin{aligned}\|u_2 - u_1\|_\infty &= \|v_2 - v_1\|_\infty, \\ \|u_2' - u_1'\|_\infty &= \|v_2' - v_1'\|_\infty < \frac{8(n-1)}{\sigma b_0^2}, \\ \|u_2' + u_1'\|_\infty &= \|v_2' + v_1' + 2\sigma\|_\infty < 2\sigma + \frac{8(n-1)}{\sigma b_0^2}, \\ \|1 + (u_2')^2\|_\infty &= \|1 + (v_2' + \sigma)^2\|_\infty < 1 + \sigma^2 + \frac{8(n-1)}{b_0^2} + \frac{16(n-1)^2}{\sigma^2 b_0^4}, \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $v_i \in Y_{\sigma,b}$ definido em (3.30).

Logo em (3.45), temos que

$$\begin{aligned}\|T_\sigma v_2 - T_\sigma v_1\|_{C^1} < &\frac{2(n-1)}{\sigma^2 b_0^2}\|v_2 - v_1\|_\infty \\ &+ \frac{2(n-1)}{\sigma b_0}\left(2\sigma + \frac{8(n-1)}{\sigma b_0^2}\right) . \\ &.\left(1 + \sigma^2 + \frac{8(n-1)}{b_0^2} + \frac{16(n-1)^2}{\sigma^2 b_0^4}\right)\|v_2' - v_1'\|_\infty \\ &+ \frac{2(n-1)}{\sigma b_0}\left(2\sigma + \frac{8(n-1)}{\sigma b_0^2}\right)\|v_2' - v_1'\|_\infty \\ &+ \frac{8(n-1)}{\sigma b_0} + \frac{8(n-1)}{\sigma b_0^2} \\ = &\ \tau_1\|v_2 - v_1\|_\infty + \tau_2\|v_2' - v_1'\|_\infty + \tau_3, \end{aligned}$$

onde,

$$\tau_1 = \frac{2(n-1)}{\sigma^2 b_0^2}$$
$$\tau_2 = \frac{2(n-1)}{\sigma b_0}\left(2\sigma + \frac{8(n-1)}{\sigma b_0^2}\right)\left(2+\sigma^2+\frac{8(n-1)}{b_0^2}+\frac{16(n-1)^2}{\sigma^2 b_0^4}\right)$$
$$\tau_3 = \frac{8(n-1)}{\sigma b_0}+\frac{8(n-1)}{\sigma b_0^2} = \frac{8(n-1)}{\sigma b_0}\left(1+\frac{1}{b_0}\right).$$

Logo, para b_0 suficientemente grande tem-se que

$$\|T_\sigma v_2 - T_\sigma v_1\|_{C^1} \leq \tau_1\|v_2-v_1\|_\infty + \tau_2\|v_2'-v_1'\|_\infty + \tau_4\|v_2'-v_1'\|_\infty,$$

onde $\tau_i \in (0,1)$. Seja $\tau_5 = \max\{\tau_2,\tau_4\}$, então

$$\|T_\sigma v_2 - T_\sigma v_1\|_{C^1} \leq \tau_1\|v_2-v_1\|_\infty + 2\tau_5\|v_2'-v_1'\|_\infty.$$

Mas para o b_0 suficientemente grande $2\tau_4$ ainda pertence ao intervalo $(0,1)$. Assim, tomando $\tau = \max\{\tau_1, 2\tau_5\}$, obtemos

$$\|T_\sigma v_2 - T_\sigma v_1\|_{C^1} \leq \tau\|v_2-v_1\|_{C^1} \tag{3.46}$$

para algum $0<\tau<1$, e com a norma C^1 tomado sobre (b_0,∞). Assim $T_\sigma : Y_{\sigma,b_0} \longrightarrow Y_{\sigma,b_0}$ é uma aplicação de contração.

■

Proposição 3.8. *Seja $n \geq 2$. Para cada raio fixo no plano a partir da origem, $(x, r_\sigma(x))$, onde $r_\sigma : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função dada por*

$$r_\sigma(x) = \sigma x, \quad \sigma > 0,$$

existe uma única solução suave $u_\sigma : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$, de (3.5), tal que u_σ é assintótica ao raio determinado por r_σ. Além disso, qualquer solução $u : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ de (3.5) é ou a função constante $u \equiv \sqrt{2(n-1)}$, ou é uma solução u_σ para algum $\sigma = \sigma(u) > 0$.

Prova. *(Existência)* Primeiro vamos provar que existe uma solução suave u_σ de (3.5). De fato, pela Proposição 3.7, sabemos que para valores de x suficientemente grandes a aplicação $T_\sigma : Y_{\sigma,b} \longrightarrow Y_{\sigma,b}$ definida por (3.31) é uma contração, então para b suficientemente grande temos também que o conjunto $Y_{\sigma,b}$ é uma espaço métrico completo. Assim, pelo Teorema de ponto fixo de Banach enunciado na Seção 1.2 (Teorema 1.12) concluímos que existe uma solução suave u_σ de (3.5).

(Unicidade) Agora, vamos provar que qualquer solução $u_\sigma : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ da equação (3.5) é única. De fato, sejam u_1 e u_2 duas soluções da equação (3.5) para o mesmo valor de σ, tais que

$$u_i(x) = v_i(x) + \sigma x, \quad i = 1, 2.$$

Então, para a aplicação $T_\sigma : Y_{\sigma,b} \longrightarrow Y_{\sigma,b}$ definida por (3.31), a solução v_i satisfaz a equação $T_\sigma(v_i) = v_i$, i.e.

$$\begin{aligned} T_\sigma v_1 &= v_1 = u_1 - \sigma x, \\ T_\sigma v_2 &= v_2 = u_2 - \sigma x. \end{aligned}$$

Além disso, como pela Proposição 3.7 a aplicação T_σ é uma contração, temos que

$$\|u_2 - u_1\|_{C^1} = \|T_\sigma v_2 - T_\sigma v_1\|_{C^1} \leq \tau \|v_2 - v_1\|_{C^1} = \tau \|u_2 - u_1\|_{C^1},$$

onde $0 < \tau < 1$. Portanto

$$(1 - \tau)\|u_2 - u_1\|_{C^1} \leq 0.$$

Como $(1 - \tau) \in (0, 1)$, concluímos que $u_1 = u_2$. Assim, a solução é única.

(Assintótica) Para provar que a solução u_σ é assintótica ao raio $r_\sigma = \sigma x$, vamos usar o resultado obtido em (3.27), i.e.

$$|u_\sigma(x) - \sigma x| \leq \frac{2(n-1)}{\sigma x},$$

para $x \in (0, \infty)$. Tomando o limite ambos os lados desta desigualdade quando x tende para o infinito, temos que

$$\lim_{x \to \infty} |u_\sigma(x) - \sigma x| \leq \lim_{x \to \infty} \frac{2(n-1)}{\sigma x} = 0,$$

de modo que

$$\lim_{x \to \infty} |u_\sigma(x) - \sigma x| = 0.$$

Isto implica que a solução u_σ é assintótica ao raio r_σ.

Finalmente, vamos mostrar que a solução u é uma função constante $u \equiv \sqrt{2(n-1)}$ ou uma das funções u_σ. De fato, considerando u como uma função constante, na equação (3.5), temos que

$$\frac{n-1}{u} - \frac{u}{2} = 0.$$

Daí, desenvolvendo esta equação, obtemos $u \equiv \sqrt{2(n-1)}$. No caso em que u é uma solução de (3.5) que não é uma função constante, segue do Lema 3.4 que existe $\sigma = \sigma(u) > 0$ tal que u satisfaz a identidade integral (3.15) e pela existência e unicidade de soluções podemos considerar u como uma solução $u_\sigma : (0,\infty) \to \mathbb{R}^+$ de (3.5).

$\blacksquare$

Proposição 3.9. *As soluções não constantes de (3.5) u_σ tem declividade positiva em $(0,\infty)$ para $\sigma > 0$ suficientemente grande.*

Prova. Da identidade integral (3.15), temos que

$$\frac{u_\sigma(x)}{x} = 2(n-1)\int_x^\infty \frac{1}{t^2}\left\{\int_t^\infty \frac{s}{2}\left(\frac{1+u_\sigma'(s)^2}{u_\sigma(s)}\right)e^{-\int_t^s \frac{z}{2}(1+u'(z)^2)dz}ds\right\}dt + \sigma.$$

Logo, derivando esta igualdade em relação a x, obtemos

$$xu_\sigma'(x) - u(x) = -A(x), \tag{3.47}$$

para todo $x \in (0,\infty)$, onde

$$A(x) = 2(n-1)\int_x^\infty \frac{s}{2}\left(\frac{1+u_\sigma'(s)^2}{u_\sigma(s)}\right)e^{-\int_x^s \frac{z}{2}(1+u'(z)^2)dz}ds.$$

Note que a expressão $A(x)$ é positiva, logo na equação (3.47) temos que

$$xu_\sigma'(x) - u_\sigma(x) < 0. \tag{3.48}$$

Novamente, derivando a equação (3.47) em relação a x, obtemos

$$u_\sigma''(x) > 0, \tag{3.49}$$

para todo $x \in (0.\infty)$. Assim, da equação (3.5) devemos ter que

$$B(x) = \frac{xu_\sigma'(x) - u_\sigma(x)}{2} + \frac{n-1}{u_\sigma(x)} > 0, \tag{3.50}$$

para todo $x \in (0,\infty)$. Agora, vamos supor que existe um ponto $x_0 \in (0,\infty)$ tal que $u_\sigma'(x_0) \le 0$, então temos que

$$B(x_0) < \frac{x_0 u_\sigma'(x_0) - u_\sigma(x_0)}{2} + \frac{n-1}{\sigma x_0}, \tag{3.51}$$

onde usamos o fato de que $u_\sigma(x_0) > \sigma x_0$. Logo, segue de (3.48) que para $\sigma > 0$ suficientemente grande, na equação (3.51), obtemos

$$B(x_0) \leq 0,$$

o que contraria o resultado (3.50). Assim, $u'_\sigma(x) > 0$, para $\sigma > 0$ suficientemente grande. ■

Proposição 3.10. *Seja $u_\sigma : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma solução suave não constante de (3.5), então $u'_\sigma(x) > 0$ se verifica em $(0, \infty)$ e u_σ é estritamente convexo.*

Prova. Em primeiro lugar, vamos provar que as soluções u_σ são estritamente crescentes para qualquer $\sigma > 0$, isto é, $u'_\sigma(x) > 0$. Pela Proposição 3.9, isso é verdade para $\sigma > 0$ suficientemente grande. Suponha que existe um $\sigma > 0$, tal que u_σ não é estritamente crescente em $(0, \infty)$. Seja $\sigma_0 > 0$ o maior de tais σ. Seja $x_0 > 0$ tal que $u'_{\sigma_0}(x_0) = 0$ e, uma vez que σ_0 é o maior, então pela continuidade da solução em σ, temos dois casos:

Se $u_{\sigma_0}(x_0) \neq \sqrt{2(n-1)}$, segue de (3.5), que $u''_{\sigma_0}(x_0) \neq 0$, ou seja, $u''_{\sigma_0}(x_0) > 0$ ou $u''_{\sigma_0}(x_0) < 0$. Em quaisquer dos casos, em uma vizinhança de x_0 a função teria que ser convexo ou concavo, assim, haveria um ponto $x'_0 \neq x_0$ e $\sigma_1 > \sigma_0$ tal que $u'_{\sigma_1}(x'_0) < 0$ violando a maximalidade de σ_0.

Se $u_{\sigma_0}(x_0) = \sqrt{2(n-1)}$, como u_{σ_0} não é a função constante, segue que a hipersuperfície gerada por u_{σ_0} não é o cilindro. Portanto concluí-se da Proposição 2.9 que a curvatura média $\mathbf{H} < 0$. Entretanto, como $u'_{\sigma_0}(x_0) = 0$, segue do Corolário 3.3 que

$$\mathbf{H}(u_{\sigma_0}(x_0)) = \frac{1}{2} u_{\sigma_0}(x_0) = \frac{\sqrt{2(n-1)}}{2} > 0,$$

o que é uma contradição.

Portanto, como a solução u_σ é estritamente crescente em $(0, \infty)$ para qualquer $\sigma > 0$, e pelo resultado (3.49) temos que $u''_\sigma(x) > 0$, para todo $x \in (0, \infty)$, concluímos que u_σ é estritamente convexo.

■

Proposição 3.11. *Seja* $u_\sigma : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *uma solução não constante suave da equação (3.5). Então, temos que*

$$\lim_{x \to 0} u_\sigma(x) \leq \sqrt{2(n-1)}.$$

Prova. Como uma consequência do Lema 3.4 observamos que $u_\sigma(x) > \sigma x$. Agora, considerando a identidade integral dada pelo Lema 3.4 e usando a regra de L'Hôpital junto com o teorema fundamental do cálculo, tem-se que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} u_\sigma(x) &= \lim_{x \to 0} \frac{2(n-1)\int_x^\infty \frac{1}{t^2}\left[\int_t^\infty \frac{s}{2}\frac{1+(u'_\sigma(s))^2}{u_\sigma(s)} e^{-\int_t^s \frac{z}{2}(1+(u'_\sigma(z))^2)dz} ds\right]}{\frac{1}{x}} dt \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{2(n-1)}{x^2}\int_x^\infty \frac{s}{2}\frac{1+(u'_\sigma(s))^2}{u_\sigma(s)} e^{-\int_t^s \frac{z}{2}(1+(u'_\sigma(z))^2)dz} ds}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x \to 0} 2(n-1)\int_x^\infty \frac{s}{2}\frac{1+(u'_\sigma(s))^2}{u_\sigma(s)} e^{-\int_t^s \frac{z}{2}(1+(u'_\sigma(z))^2)dz} ds \\
&\leq 2(n-1)\lim_{x \to 0} \frac{1}{u_\sigma(x)}\int_x^\infty \frac{s}{2}(1+(u'_\sigma(s))^2) e^{-\int_t^s \frac{z}{2}(1+(u'_\sigma(z))^2)dz} ds,
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que u_σ é estritamente crescente, isto é, se $x < s$ então $u_\sigma(x) < u_\sigma(s)$. Segue de (3.26) que

$$\lim_{x \to 0} u_\sigma(x) \leq 2(n-1)\lim_{x \to 0} \frac{1}{u_\sigma(x)},$$

isto é

$$\lim_{x \to 0} u_\sigma(x) \leq \sqrt{2(n-1)}.$$

■

Proposição 3.12. *Seja* $u_\sigma : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *uma solução suave da equação (3.5), então a hipersuperfície de rotação* $\Sigma_\sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$*,* $n \geq 2$*, auto-redutora, gerada pela curva plana* u_σ *tem curvatura média* $\mathbf{H}(\Sigma_\sigma) > 0$.

Prova. Sabemos que, da equação auto-redutora (3.3) para hipersuperfícies de rotação Σ_σ gerada pela curva u_σ, a curvatura média é dada por

$$\mathbf{H}(u_\sigma(x)) = \frac{u_\sigma(x) - x u'_\sigma(x)}{2(1 + u'_\sigma(x)^2)^{1/2}}.$$

Além disso, pelo resultado (3.48), temos que

$$x u'_\sigma(x) - u_\sigma(x) < 0.$$

Portanto, juntando estes dois últimos resultados, concluímos que

$$\mathbf{H}(u_\sigma(x)) > 0.$$

$\blacksquare$

Finalmente, na seguinte seção, provamos o Teorema 3.1 que é nosso objetivo principal neste trabalho.

3.4 - Prova do teorema principal

O Teorema 3.1 que vamos mostrar nesta seção, é mais precisamente detalhada como segue:

Teorema 3.13. *Seja $n \geq 2$. Para cada raio fixo no plano a partir da origem $(x, r_\sigma(x))$, onde $r_\sigma : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função dada por*

$$r_\sigma(x) = \sigma x, \quad \sigma > 0,$$

existe uma única solução suave $u_\sigma : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ de (3.5), tal que a curva $(x, u_\sigma(x))$ é assintótica ao raio determinado por r_σ. Além disso, para $d \geq 0$, qualquer solução $u : (d, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ de (3.5), é ou a constante $u \equiv \sqrt{2(n-1)}$, ou é uma solução u_σ para algum $\sigma = \sigma(u) > 0$.

Ainda, as seguintes propriedades se verificam para u_σ :

a) $|u_\sigma(x) - \sigma x| = O(\frac{1}{x})$, *e* $|u'_\sigma(x) - \sigma| = O(\frac{1}{x^2})$, *quando* $x \to +\infty$,

b) $u'_\sigma(x) > 0$, *e* u_σ *é estritamente convexo em* $(0, \infty)$.

c) $\lim\limits_{x \to 0} u_\sigma(x) \leq \sqrt{2(n-1)}$,

d) a hipersuperfície de rotação auto-redutora $\Sigma_\sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 2$, gerada pela curva plana $(x, u_\sigma(x))$, tem curvatura média positiva.

Prova. Definamos a função $r_\sigma : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ como o raio fixo no plano a partir da origem, dada por

$$r_\sigma(x) = \sigma x,$$

para todo $x \in (0, \infty)$ e $\sigma > 0$. Então pela Proposição 3.8, para cada um destes raios r_σ existe uma única solução suave $u_\sigma : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ de (3.5), tal que u_σ é assintótica a r_σ. Ainda, toda solução $u : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$

de (3.5) é uma função constante $u \equiv \sqrt{2(n-1)}$, ou é uma função $u_\sigma : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$, para algum $\sigma = \sigma(u) > 0$.

Note que, a hipersuperfície de rotação auto-redutora $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 2$, gerada por $u \equiv \sqrt{2(n-1)}$ é um cilindro , e a hipersuperfície de rotação auto-redutora $\Sigma_\sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 2$, gerada por u_σ é assintótica a um cone C, gerada pela rotação do raio $(x, \sigma x)$.

O prova do item *a)* já foi dada no Corolário 3.6. Da mesma maneira, os itens *b)*, *c)* e *d)* já foram mostrados nas Proposições 3.10, 3.11 e 3.12 respectivamente. ∎

Referências Bibliográficas

[1] E.L. Lima, *Variedades Diferenciáveis*, IMPA, Rio de Janeiro, 2007.

[2] E.L. Lima, *Curso de Análise*, v.2, 11.ed, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2011.

[3] G. Huisken, *Flow by Mean Curvature of Convex Surfaces into Sphere*, J. Differential Geometry, v.22, no.1, p.237-266, 1984.

[4] G. Huisken, *Asymptotic Behavior for Singularities of the Mean Curvature Flow*, J. Differential Geometry, v.31, no.1, p.285-299, 1990.

[5] G. Huisken, *Local and Global Behaviour of Hypersurfaces Moving by Mean Curvature*, Differential geometry: partial differential equations on manifolds, Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc., v.54, no.1, p.175-191, 1993.

[6] J.C. Robinson, *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[7] K.A. Brakke, *The Motion of a Surface by its Mean Curvature*, Math. Notes, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1978.

[8] K. Ecker, *Regularity Theory for Mean Curvature Flow*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2004.

[9] M.A. Khamsi, W.A. Kirk, *An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory*, Pure and applied mathematics (John Wiley and Sons), Iowa, 2000.

[10] M.P. do Carmo, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, 4.ed., Rio de Janeiro:SBM, 2010.

[11] S. Angenent, *Shrinking Doughnuts*, Nonlinear Diffusion Equations and their Equilibrium States, v.3, p.21-38, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992.

[12] S. Angenent, T. Ilmanen, D.L. Chopp, *A Computed Example Nonuniqueness of Mean Curvature Flow in* $\mathbb{R}^3$, Comm. Partial Differential Equations, v.20, no.11-12, p.1937-1958, 1995.

[13] S.J. Kleene, N. M. M∅ller, *Self-shrinkers with a Rotational Symmetry*, http://arxiv.org/pdf/1008.1609v2, 2011.

[14] T. Ilmanen, unpublished notes. Referenced as [21] in [12].

[15] U. Durson, *Hypersurfaces with Pointwise 1-Type Gauss Map*, v.11, no.5, p. 1407-1416, Taiwanese Journal of Mathematics, 2007. http://www.math.nthu.edu.tw/tjm/

[16] W. Kühnel, *Differential Geometry: Curves, Surfaces and Manifolds*, Translated by Bruce Hunt, American Mathematical Society (AMS), 2.ed., v.16, Stuttgart, 2005.