

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**MODELAGEM E CONTROLE DE UMA PONTE ROLANTE
DE TRÊS GRAUS DE LIBERDADE UTILIZANDO
CONTROLE POR PLANEJAMENTO E RASTREAMENTO
DE TRAJETÓRIA**

ELIZA CRISTINA PAIVA MARCOS

**ORIENTADOR: GUILHERME CARIBÉ DE CARVALHO
COORIENTADOR: EUGÊNIO LIBÓRIO FEITOSA FORTALEZA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
EM SISTEMAS MECATRÔNICOS**

**PUBLICAÇÃO: ENM.DM - 069 A/14
BRASÍLIA/DF: JUNHO - 2014**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**MODELAGEM E CONTROLE DE UMA PONTE ROLANTE DE
TRÊS GRAUS DE LIBERDADE UTILIZANDO CONTROLE POR
PLANEJAMENTO E RASTREAMENTO DE TRAJETÓRIA**

ELIZA CRISTINA PAIVA MARCOS

**DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE
ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA
DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE
MESTRE EM SISTEMAS MECATRÔNICOS.**

APROVADA POR:

**Prof. Dr. Guilherme Caribé de Carvalho (ENM-UnB)
(Orientador)**

**Prof. Dra. Carla Maria Chagas e Cavalcante Koike (CIC-UnB)
(Examinadora Interna)**

**Prof. Dr. Alex da Rosa (ENE-UnB)
(Examinador Externo)**

BRASÍLIA/DF, 25 DE JUNHO DE 2014.

FICHA CATALOGRÁFICA

MARCOS, ELIZA CRISTINA PAIVA

Modelagem e controle de uma ponte rolante de três graus de liberdade utilizando controle por planejamento e rastreamento de trajetória. [Distrito Federal] 2014.

xvii,138p., 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Sistemas Mecatrônicos, 2014).
Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

1. Ponte Rolante

3. Rastreamento de Trajetória

I. ENM/FT/UnB

2. Controle Não Linear

4. Planicidade diferencial

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

MARCOS, E. C. P. (2014). Modelagem e controle de uma ponte rolante de três graus de liberdade utilizando controle por planejamento e rastreamento de trajetória. Dissertação de Mestrado em Sistemas Mecatrônicos, Publicação ENM.DM - 069 A/14, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 138p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Eliza Cristina Paiva Marcos

TÍTULO: Modelagem e controle de uma ponte rolante de três graus de liberdade utilizando controle por planejamento e rastreamento de trajetória.

GRAU: Mestre

ANO: 2014

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Eliza Cristina Paiva Marcos

SEPS 712/912. Grand Ville.

CEP 70390-125. Brasília – DF.

Dedico este trabalho aos que
caminharam ao meu lado nesta jornada.
Meu marido, minha família, meus
amigos e meus mestres.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me dado força, saúde, proteção e por iluminar meu caminho.

Ao meu tão amado marido Glauber, pela cumplicidade, amor, paciência e por estar ao meu lado nos momentos difíceis, não me deixando desistir, mostrando que o sucesso é uma jornada de sacrifícios.

À minha mãe e à minha irmã pelo amor e apoio incondicionais. Por terem sido parte fundamental dessa conquista e me darem a certeza que sempre estariam comigo, mesmo a alguns quilômetros de distância, estando presentes em pensamentos e orações.

Ao meu pai, irmão, cunhados, sogros e a todos de minha família e da família Martins da Costa, que me apoiaram e torceram por mim. À Vó Chica pelas orações e carinho.

Ao meu amigo Fillipe pelos anos compartilhados. Por ter me ajudado academicamente e profissionalmente no que fosse preciso, mas, principalmente, por ter se tornado um amigo presente, generoso, que faz os dias difíceis mais alegres.

Ao Professor Guilherme Caribé pela orientação, paciência e ensinamentos. Ao Professor Eugênio pela coorientação.

Agradeço o apoio e a amizade dos caríssimos Patrícia, Marrocos, Esdras e Álvaro.

Ao Professor Henrique Ferreira por sua generosidade, ensinamentos e por todo material de estudo disponibilizado.

À Wélida e todas as amigas da república Quarto Crescente, pela amizade e carinho.

À Capes pelo apoio financeiro.

Ao ensino público, gratuito e de qualidade.

RESUMO

MODELAGEM E CONTROLE DE UMA PONTE ROLANTE DE TRÊS GRAUS DE LIBERDADE UTILIZANDO CONTROLE POR PLANEJAMENTO E RASTREAMENTO DE TRAJETÓRIA.

Autor: Eliza Cristina Paiva Marcos

Orientador: Guilherme Caribé de Carvalho

Programa de Pós-graduação em Sistemas Mecatrônicos

Brasília, 25 de junho de 2014

Este trabalho apresenta a modelagem dinâmica de uma ponte rolante de três graus de liberdade, considerando a presença de arrasto aerodinâmico causado por ventos. Dois tipos de controle são utilizados: um baseado em linearização por realimentação dinâmica de estados via extensão dinâmica, e outro, em controle hierárquico. O sistema de realimentação dinâmica baseia-se na propriedade de planicidade diferencial (*Flatness*) do modelo dinâmico da ponte rolante. Já o controlador hierárquico baseia-se em sistemas singularmente perturbados e separa o sistema em duas escalas de tempo. Demonstra-se que em sistemas com planicidade diferencial (*Flat Systems*), todas as variáveis podem ser apresentadas em função de suas chamadas saídas planas (*flat outputs*) e de um número finito de derivadas no tempo das mesmas saídas. Com o planejamento da trajetória destas, é possível planejar todas as variáveis do sistema. Simulações comparativas são apresentadas, incluindo diferentes condições de carregamento, arrasto aerodinâmico e tempo de transporte.

Palavras-chave: Ponte Rolante, Controle Não Linear, Rastreamento de Trajetória, Sistemas com Planicidade Diferencial.

ABSTRACT

MODELING AND CONTROL OF A THREE DEGREE-OF-FREEDOM OVERHEAD CRANE USING TRAJECTORY PLANNING AND TRACKING CONTROL

Author: Eliza Cristina Paiva Marcos

Supervisor: Guilherme Caribé de Carvalho

Mechatronic Systems Post-graduation Program

Brasília, June 25th2014

This work presents the dynamic modeling of a three degree-of-freedom overhead crane considering the presence of aerodynamic drag force caused by winds. Two types of control are used, one based on dynamic state feedback linearization through dynamic extension, and another based on hierarchical control. On one hand, the dynamic feedback system is based on the Flatness property of the overhead crane. On the other hand, the hierarchical controller is based on singularly perturbed systems and it separates the system into two time scales. It is shown that in differentially flat systems, all variables can be presented according to their flat outputs and according to a finite number of their time derivatives. By planning the trajectory of these outputs, all system variables can also be planned. Comparative simulations are presented, including different conditions for loading, aerodynamic drag force and travelling time.

Keywords: Overhead Crane, Nonlinear Control, Trajectory Tracking, Flatness Systems.

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO	1
1.1 - OBJETIVOS	4
1.2 - METODOLOGIA DO TRABALHO.....	5
1.3 - ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	6
2 - FUNDAMENTOS TEÓRICOS E REVISÃO DE LITERATURA	7
2.1 - DESCRIÇÃO E MODELAGEM DE SISTEMAS	7
2.1.1 - Arrasto Aerodinâmico	8
2.1.1.1 - Tipos de escoamento	8
2.1.1.2 - Força de arrasto aerodinâmico na carga.....	11
2.1.2 - Modelagem via equações de Lagrange.....	12
2.2 - REPRESENTAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS	14
2.2.1 - Ponto de Equilíbrio	15
2.2.2 - Linearização em torno dos pontos de equilíbrio	15
2.2.3 - Controlabilidade	18
2.2.4 - Observabilidade	19
2.3 - MÉTODOS DE CONTROLE	20
2.3.1 - Controle não linear por realimentação dinâmica	20
2.3.1.1 - Linearização via realimentação entrada-saída.....	24
2.3.1.2 - Obtendo o grau relativo via extensão dinâmica	27
2.3.2 - Observador de estados.....	28
2.3.2.1 - Rastreamento	31
2.3.3 - Controle hierárquico	33
2.4 - SISTEMAS COM PLANICIDADE DIFERENCIAL	36
2.4.1 - Planejamento da trajetória	39
2.4.1.1 - Planejamento do Movimento que inicia em repouso e finaliza em repouso (<i>Rest to rest</i>)	40
2.5 - PESQUISA GERAL SOBRE O CONTROLE DE PONTES ROLANTES.....	41
3 - MODELAGEM DA PONTE ROLANTE.....	47
3.1 - MODELAGEM DO ARRASTO AERODINÂMICO	47
3.1.1 - O efeito do ar na ponte rolante	47
3.1.1.1 - Número de Reynolds.....	48

3.1.2 - Modelagem da Força de Arrasto Aerodinâmico atuante na carga	49
3.2 - DESCRIÇÃO E MODELAGEM DO SISTEMA DA PONTE ROLANTE.....	52
3.3 - MODELAGEM VIA EQUAÇÕES DE LAGRANGE	55
3.3.1 - Energia Cinética do Sistema (T).....	55
3.3.1.1 - Carro.....	55
3.3.1.2 - Motor.....	55
3.3.1.3 - Carga	56
3.3.2 - Energia Potencial do Sistema (V)	57
3.3.3 - Lagrangeano (G)	57
3.3.4 - Forças Generalizadas	57
3.3.4.1 - Força não conservativa relacionada a coordenada x_C (Q_{nc_xc})	58
3.3.4.2 - Força não conservativa relacionada à coordenada L (Q_{nc_L}).....	59
3.3.4.3 - Força não conservativa relacionada a coordenada θ ($Q_{nc_}\theta$)	59
3.3.5 - Equações diferenciais do sistema.....	59
3.3.5.1 - Coordenada x_C	59
3.3.5.2 - Coordenada L	60
3.3.5.3 - Coordenada θ	61
3.3.6 - Equações que modelam o sistema.....	61
3.4 - ESPAÇO DE ESTADOS.....	63
3.5 - LINEARIZAÇÃO DO SISTEMA EM TORNO DOS PONTOS DE EQUILÍBRIO.....	65
3.5.1 - Pontos de equilíbrio do sistema	65
3.5.2 - Linearização em torno dos pontos de equilíbrio do sistema	67
3.5.2.1 - Controlabilidade e a Observabilidade do sistema linearizado	71
4 - CONTROLE DA PONTE ROLANTE.....	73
4.1 - CONTROLE NÃO LINEAR VIA LINEARIZAÇÃO POR REALIMENTAÇÃO DINÂMICA ENTRADA- SAÍDA	73
4.1.1 - Grau Relativo do Sistema.....	73
4.1.2 - Algoritmo de extensão dinâmica e projeto do controlador.....	75
4.1.3 - Ganhos de realimentação	81
4.1.4 - Observador de estados.....	84
4.2 - REPRESENTAÇÃO DA PONTE ROLANTE COMO UM SISTEMA EM FUNÇÃO DE SUAS SAÍDA PLANAS	85
4.2.1 - Planejamento da trajetória	87

4.3 - CONTROLE HIERÁRQUICO	90
5 - RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES E DISCUSSÃO	94
5.1 - TRANSPORTE EM SITUAÇÃO IDEAL.....	94
5.2 - VARIAÇÃO DE PERÍODO DE TRANSPORTE	97
5.3 - ARRASTO AERODINÂMICO	100
5.3.1 - Rajada de vento no período de 4 a 8 segundos do movimento	101
5.3.2 - Vento atuando durante todo o movimento	104
5.4 - VARIAÇÃO DA MASSA DA CARGA SEM CONTROLE ADAPTATIVO	106
5.4.1 - Massa da carga de 250kg.....	108
5.4.2 - Massa da carga de 1000kg.....	109
5.5 - VARIAÇÃO DO COMPRIMENTO INICIAL DO CABO SEM CONTROLE ADAPTATIVO.....	112
5.6 - DISCUSSÃO DE RESULTADOS.....	117
6 - CONCLUSÕES	122
6.1 - SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	123
REFERÊNCIAS	124
ANEXOS	128
ANEXO I - GRAU RELATIVO DE UM SISTEMA COM MÚLTIPLAS ENTRADAS E MÚLTIPLAS SAÍDAS (MIMO)	128
ANEXO II – ALGORITMO DE EXTENSÃO DINÂMICA APRESENTADO POR ISIDORI (1995)	130
ANEXO III – ISOMORFISMO DE LIE-BÄCKLUND.....	132
APÊNDICES	134
APÊNDICE A.....	135
APÊNDICE B.....	136

LISTA DE TABELAS

Tabela 3-1- Valores das constantes utilizadas para linearização.....	70
Tabela A-1-Valores das constantes utilizadas	135

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Ponte Rolante utilizada em portos. Fonte: Konecranes (2014).	1
Figura 1.2 - Ponte Rolante. Fonte: Konecranes (2014).	1
Figura 1.3 – Representação da Ponte Rolante	2
Figura 2.1- Representação Gráfica da Propriedade de Planicidade Diferencial (<i>Flatness</i>): Equivalência de Lie-Bäcklund entre as trajetórias do sistema trivial (abaixo) e as trajetórias do sistema não linear (acima). Fonte: Lévine (2009)	38
Figura 3.1- Plano XZ do sistema	50
Figura 3.2- Modelo esquemático da ponte rolante	53
Figura 4.1- Sistema controlado por linearização via realimentação dinâmica da saída	81
Figura 4.2- Sistema controlado via controle hierárquico	93
Figura 5.1 – Deslocamento da carga em relação ao eixo X, sem arrasto e T=12s	95
Figura 5.2 - Deslocamento da carga em relação ao eixo Z, sem arrasto e T=12s	95
Figura 5.3– Ângulo de oscilação da carga, sem arrasto e T=12s	95
Figura 5.4 – Movimento da carga, sem arrasto e T=12s	95
Figura 5.5 – Força do motor do carro, sem arrasto e T=12s	95
Figura 5.6 – Torque do motor de enrolamento do cabo, sem arrasto e T=12s	95
Figura 5.7 – Análise de z_1 para transporte em situação ideal	96
Figura 5.8 - Deslocamento da carga em relação ao eixo X, sem arrasto e T=6s	98
Figura 5.9 - Deslocamento da carga em relação ao eixo Z, sem arrasto e T=6s	98
Figura 5.10 - Ângulo de oscilação da carga, sem arrasto e T=6s	98
Figura 5.11 – Movimento da carga, sem arrasto e T=6s	98
Figura 5.12 – Força do motor do carro, sem arrasto e T=6s	98
Figura 5.13 – Torque do motor de enrolamento, sem arrasto e T=6s	98
Figura 5.14 – Análise de z_1 para transporte em período de 6s	99
Figura 5.15 - Deslocamento da carga em relação ao eixo X com rajada de vento	102
Figura 5.16 - Deslocamento da carga em relação ao eixo Z com rajada de vento	102
Figura 5.17 - Ângulo de oscilação da carga com rajada de vento	102
Figura 5.18 - Movimento da carga com rajada de vento	102
Figura 5.19 – Força do motor do carro com rajada de vento	102
Figura 5.20 - Torque do motor de enrolamento do cabo com rajada de vento	102
Figura 5.21 – Análise de z_1 para transporte com rajada de vento	103

Figura 5.22 - Deslocamento da carga em relação ao eixo X com vento constante.	104
Figura 5.23 - Deslocamento da carga em relação ao eixo Z com vento constante.....	104
Figura 5.24 - Ângulo de oscilação da carga com vento constante.	105
Figura 5.25 - Movimento da carga com vento constante.	105
Figura 5.26- Força do motor do carro com vento constante.....	105
Figura 5.27 - Torque do motor de enrolamento do cabo com vento constante.	105
Figura 5.28 – Análise de z_1 para transporte com vento constante.	105
Figura 5.29 - Deslocamento da carga de massa 250kg, em relação ao eixo X.....	108
Figura 5.30 - Deslocamento da carga de massa 250kg, em relação ao eixo Z.	108
Figura 5.31 - Ângulo de oscilação, carga de 250kg.	108
Figura 5.32 - Movimento da carga de 250kg.....	108
Figura 5.33 – Força do motor do carro, carga de 250kg.	108
Figura 5.34 – Torque do motor de enrolamento do cabo, carga de 250kg.....	108
Figura 5.35 – Análise de z_1 para transporte com massa da carga de 250kg.	109
Figura 5.36- Deslocamento da carga de massa 1000kg em relação ao eixo X.....	110
Figura 5.37 - Deslocamento da carga de massa 1000kg em relação ao eixo Z.	110
Figura 5.38 - Ângulo de oscilação, carga de 1000kg.	110
Figura 5.39 - Movimento da carga de 1000kg.....	110
Figura 5.40 - Força do motor do carro, carga de 1000kg.....	111
Figura 5.41 – Torque do motor de enrolamento do cabo, carga de 1000kg.....	111
Figura 5.42 – Análise de z_1 para transporte com massa da carga de 1000kg.	111
Figura 5.43 - Deslocamento da carga em relação ao eixo X, $L_i = 15 m$	113
Figura 5.44 - Deslocamento da carga em relação ao eixo Z, $L_i = 15 m$	113
Figura 5.45 – Ângulo de oscilação da carga, $L_i = 15 m$	113
Figura 5.46- Movimento da carga, $L_i = 15 m$	113
Figura 5.47- Força do carro, $L_i = 15 m$	113
Figura 5.48 –Torque do motor de enrolamento do cabo, $L_i = 15 m$	113
Figura 5.49 – Análise de z_1 para $L_i = 15 m$	114
Figura 5.50 – Erro entre os estados reais e os estados estimados pelo observador.....	115
Figura 5.51 - Deslocamento da carga em relação ao eixo X, $L_i = 15 m$, sensor para medição de θ_e e de θ	116
Figura 5.52 - Deslocamento da carga em relação ao eixo Z, $L_i = 15 m$, sensor para medição de θ e de θ	116

Figura 5.53 – Ângulo de oscilação da carga, $L_i = 15\text{ m}$, sensor para medição de θ e de $\dot{\theta}$	116
Figura 5.54- Movimento da carga, $L_i = 15\text{ m}$, sensor para medição de θ e de $\dot{\theta}$	116
Figura 5.55- Força do carro, $L_i = 15\text{ m}$, sensor para medição de θ e de $\dot{\theta}$	116
Figura 5.56 –Torque do motor de enrolamento do cabo, $L_i = 15\text{ m}$, sensor para medição de θ e de $\dot{\theta}$	116
Figura 5.57 – Análise de z_1 para $L_i = 15\text{ m}$, com sensor para medição de θ e de $\dot{\theta}$	117

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Descrição	Unidade
A_r	Área da maior secção da carga voltada para o movimento.	m^2
a_L	Aceleração de deslocamento da carga.	m/s^2
a_v	Aceleração do fluido (como neste caso o fluido é o ar, será chamado de aceleração do vento).	m/s^2
B_C	Coefficiente de atrito viscoso na direção de x_C .	kg/s
B_S	Coefficiente de atrito viscoso no eixo do carretel.	$kg.m^2/s$
c	Velocidade do som no fluido.	m/s
C_α	Coefficiente de massa adicionada pela esfera.	adimensional
C_d	Coefficiente de arrasto da esfera em escoamento turbulento.	adimensional
C_m	Coefficiente de inércia.	adimensional
d	Diâmetro da esfera.	m
D_l	Longitude característica do fluido, diâmetro para o fluxo no cano.	m
ε	Escala de tempo.	adimensional
F	Força externa atuando no carro na direção X.	N
φ	Ângulo de rotação do carretel.	radiano
F_r	Força de arrasto aerodinâmico na carga.	N
F_{rc}	Parcela conservativa da força de arrasto.	$kg.m/s^2$
F_{rnc}	Parcela não conservativa da força de arrasto.	$kg.m/s^2$
G	Função lagrangeana.	J
g	Aceleração da gravidade.	m/s^2
J_S	Inércia do motor de enrolamento do carretel.	$kg.m^2$
L	Comprimento do cabo de aço.	m
M	Número de Mach.	adimensional
μ	Viscosidade dinâmica ou absoluta.	$kg/m.s$
m_α	Massa adicionada.	kg
m_C	Massa do carro.	kg
m_{Fr}	Parcela de massa proveniente do arrasto na carga.	kg
m_L	Massa total da carga.	kg
m_{fl}	Massa de fluido deslocada.	kg

m_l	Massa da carga.	kg
q	Coordenada generalizada.	-
Q_{nc_q}	Forças não conservativas relacionadas à coordenada generalizada q .	N
R	Raio do carretel (spool).	m
Re	Número de Reynolds.	adimensional
r	Grau relativo do sistema.	adimensional
\mathbf{r}	Vetor grau relativo do sistema.	adimensional
r_L	Raio da carga esférica.	m
ρ	Massa específica.	kg/m ³
t	Tempo.	s
T	Energia cinética do sistema.	J
T_C	Energia cinética do carro.	J
T_e	Força de tensão relacionada com o torque T_s do motor.	N
θ	Ângulo entre o cabo e o eixo vertical Z.	radiano
T_L	Energia cinética da carga.	J
T_m	Energia cinética do motor.	J
T_s	Torque aplicado para elevar a carga, positivo no sentido anti-horário, ou seja, quando a carga está descendo.	N.m
T_t	Período de tempo de deslocamento da carga.	s
u_i	Entrada do sistema em espaço de estados.	-
\mathbf{u}	Vetor de entrada do sistema em espaço de estados.	-
V	Energia potencial do sistema.	J
v_c	Velocidade característica do sistema.	m/s
\bar{v}_c	Velocidade média do fluido.	m/s
V_e	Velocidade de escoamento do fluido.	m/s
V_{ol}	Volume da carga.	m ³
ν_k	Viscosidade cinemática.	m ² /s
v_L	Velocidade de deslocamento da carga .	m/s
v_v	Velocidade do fluido (como neste caso o fluido é o ar, será chamado de velocidade do vento).	m/s
x_C	Posição do carro em relação ao eixo X.	m
x_L	Posição da carga em relação ao eixo X.	m

x_i	Estados do sistema.	-
\mathbf{x}	Vetor de estados do sistema.	-
W	Trabalho realizado.	J
y_i	Saída do sistema em espaço de estados.	-
\mathbf{y}	Vetor de saída do sistema em espaço de estados.	-
z_L	Posição da carga em relação ao eixo Z.	m

1 - INTRODUÇÃO

Uma ponte rolante é uma espécie de guindaste. É comumente utilizada para transporte em portos, na construção naval, em indústrias de fundição, entre outras áreas que exigem estabilidade e segurança no transporte de cargas muito pesadas. A Figura 1.1 e a Figura 1.2 mostram modelos de pontes rolantes utilizadas em portos para carga e descarga em navios.



Figura 1.1 - Ponte Rolante utilizada em portos. Fonte: Konecranes (2014).



Figura 1.2 - Ponte Rolante. Fonte: Konecranes (2014).

Geralmente um carro fixado nesta ponte se desloca horizontalmente pela haste da ponte e, por meio de um cabo de aço existente neste carro, a carga é içada, deslocada até o ponto desejado e despejada. A Figura 1.3 mostra uma representação esquemática da ponte rolante.

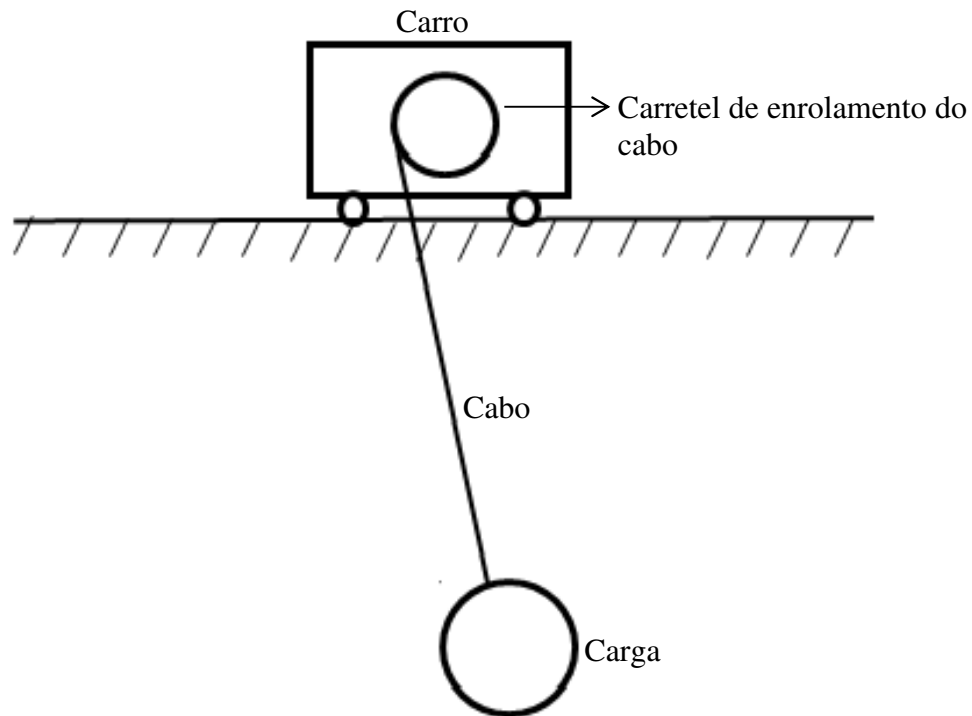


Figura 1.3 – Representação da Ponte Rolante

A ponte rolante é um sistema mecânico subatuado, ou seja, possui um número maior de parâmetros a serem controlados do que entradas de controle. Ao se projetar o controle desse tipo de sistema é muito importante que todos os comandos sejam feitos de forma correta e precisa. Caso não seja feito dessa forma, a carga pode apresentar oscilações que comprometam a agilidade do transporte e até mesmo a segurança da operação (Chwa, 2009).

Yang (2009) diz que uma proposta de automação e controle deste tipo de ponte se torna de grande valia quando se tem em conta a dificuldade de determinar padrões quando estas pontes são operadas manualmente. No caso de operação manual, a ponte é controlada de acordo com a experiência e características normalmente usadas por seu operador, fazendo com que o tempo de operação entre o içamento e a descida da carga seja diferente

e dependa de quem a está operando, não possibilitando assim estabelecer com precisão uma média de tempo necessário para a conclusão da atividade.

Segundo Chwa (2009), para que este transporte seja eficiente, é necessário que aconteça de forma rápida, reduzindo o tempo de ciclo de trabalho na movimentação das cargas nos locais onde estão estabelecidas. Nesse caso, a alta velocidade solicitada para que se tenha um ciclo de trabalho rápido, induz a oscilações indesejadas na carga, dificultando seu posicionamento preciso e aumentando o tempo necessário para a realização do transporte. Consequentemente, para que os objetivos de alta velocidade e precisão sejam alcançados, há a necessidade de se introduzirem controladores no sistema de movimentação, de modo a se controlar a oscilação da carga em níveis mínimos.

Existem diversas formas de operação de controle de pontes rolantes baseados em diferentes metodologias. Cada uma apresenta vantagens, desvantagens e limitações de acordo com o tipo de operação e objetivo desejado.

Para um bom desempenho durante a operação, é necessário que o sistema apresente uma modelagem bem próxima do comportamento real, identificando as hipóteses e variáveis do sistema, como por exemplo, a interferência do arrasto aerodinâmico no transporte e as condições assumidas no desenvolvimento das equações dinâmicas (Klaassens *et al.*, 1999). Entretanto, não é possível incluir em um modelo matemático todos os efeitos existentes em um caso real e sempre haverá diferenças entre o sistema de controle simulado, que é uma aproximação, e o sistema real (Box *et al.*, 2005).

Este trabalho apresenta uma proposta de modelagem do sistema da ponte rolante para obtenção das equações dinâmicas, considerando a presença do arrasto aerodinâmico no modelo.

Controladores que apresentam bons resultados para condições específicas podem não ser robustos o suficiente quando alterados parâmetros do projeto do controlador. Alguns controladores podem atender condições específicas, apresentar movimento estável ao sistema, porém não respeitar a trajetória pré-determinada que serve de referência.

Para a análise dos controladores é importante avaliar como a ponte se comporta, quando solicitada a operar em condições diferentes daquelas projetadas para o controlador. Dois controladores aqui projetados apresentam bom desempenho e bom rastreamento da trajetória quando operados em condição de projeto. Entretanto, para fins de comparação, é solicitado que a ponte opere em condições em que os parâmetros dados por fatores externos sejam alterados. Dessa forma, é possível avaliar o desempenho e a sensibilidade de cada controlador, quando se exige que a carga faça um transporte em um curto período de tempo, ou que possa transportar cargas com diferentes massas. A comparação permite ainda avaliar qual a consequência de se operar a ponte quando o sistema se encontra sob a presença de ventos.

1.1 - OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho é estudar o problema de controle do movimento da carga transportada por uma ponte rolante de três graus de liberdade, considerando perturbações provenientes do arrasto produzido pela incidência de correntes de ar sobre a carga, variação na massa transportada e variação no comprimento inicial do cabo de sustentação da carga. Mais especificamente, pretende-se:

- Desenvolver a modelagem dinâmica de uma ponte rolante de três graus de liberdade incluindo forças atuantes devido à interação da carga com rajadas de vento e com ventos de velocidade constante.
- Demonstrar a característica deste sistema de poder ser planejado e de ter a trajetória de sua carga rastreada.
- Implementar diferentes técnicas de controle e realizar simulações para fins de comparação de desempenho, fazendo com que a ponte rolante opere em diferentes condições variando o período de tempo em que se solicita que o transporte seja realizado, a massa de sua carga, o comprimento inicial do cabo e o comportamento do sistema na presença de ventos constantes e rajadas de vento atuando sobre a carga.

1.2 - METODOLOGIA DO TRABALHO

A metodologia compreende a modelagem dinâmica da força de arrasto e da ponte rolante, o projeto dos controladores e a simulação de desempenho entre eles.

Para a modelagem da ponte rolante, primeiramente é feita a análise do arrasto aerodinâmico atuante na carga. Depois é feita a análise do sistema mecânico e são explicitadas as condições a que esta ponte está sujeita durante sua operação. Desta forma é possível elaborar as hipóteses necessárias para a modelagem, e então obter as equações dinâmicas que regem o sistema.

Com relação ao controle, apresentam-se duas técnicas aplicadas ao problema da ponte rolante, para fins de comparação de seus desempenhos respectivos. A primeira técnica refere-se a um controlador de linearização por realimentação dinâmica de estados, projetado de modo a demonstrar a propriedade de planicidade diferencial (*Flatness*) do sistema. Esta propriedade permite que o movimento da carga seja feito de forma planejada e todo o sistema seja projetado em função das trajetórias de referência desejadas para suas saídas planas (*flat outputs*) e de um número finito de derivadas no tempo dessas saídas, possibilitando, assim, que se realize o rastreamento da trajetória. Este tipo de realimentação exige que o sistema tenha grau relativo bem definido. De um modo geral, o grau relativo de um sistema é determinado pelo número de vezes que é necessário derivar a equação da saída, até que a entrada do sistema apareça explicitamente nesta equação (Isidori, 1995). Como a ponte rolante não possui grau relativo bem definido é necessário que se faça a extensão dinâmica de estados, de modo a se obter um grau relativo bem definido para a ponte e então projetar seu controlador para linearização por realimentação dinâmica de estados.

A segunda técnica refere-se ao controle hierárquico. Dentre as estratégias de controle não linear pesquisadas na literatura, o controle hierárquico de pontes rolantes foi demonstrado em Lévine (2009) e se mostrou o mais robusto para realizar o controle deste tipo de sistema, uma vez que apresenta bons resultados em sistemas com associação de dinâmicas lentas com dinâmicas rápidas, como é o caso da ponte rolante. O controlador hierárquico se baseia na teoria de sistemas singularmente perturbados. Por meio dessa

técnica, o controlador consegue separar o sistema em duas escalas de tempo: uma lenta e outra rápida.

Para se comparar a robustez de cada controlador, situações diferentes de operação são apresentadas. Simula-se o sistema para diferentes durações de tempo de movimentação, de modo a se analisar qual apresenta melhor desempenho quando é solicitado um transporte mais rápido da carga. Também são alterados parâmetros que foram utilizados para se programar o controlador, de modo a observar como estes controles, que não têm nenhum tipo de programação adaptativa de parâmetros, se comportam quando solicitados a operar em configurações diferentes daquelas utilizadas no projeto de controle (para fins de alocação dos polos do controlador e do observador e, conseqüentemente, de seus respectivos ganhos). Os parâmetros alterados são a massa de carregamento e o comprimento inicial do cabo de sustentação da carga.

Como muitas vezes estas pontes operam em portos onde se têm rajadas de vento com efeitos consideráveis na oscilação da carga, é estudado também como o sistema se comporta na presença de tais perturbações e como os controladores tentam superar essas perturbações.

Apresenta-se a seguir a forma como este texto foi organizado.

1.3 - ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Esta dissertação contém seis capítulos que são organizados da seguinte forma: O primeiro capítulo introduz o contexto sobre pontes rolantes e o que se deseja ao realizar o controle de pontes rolantes. O segundo capítulo aborda os fundamentos de modelagem de sistemas, representação em espaço de estados, métodos de controle, sistemas que apresentam planicidade diferencial (*Flat Systems*) e geração de trajetória. Aborda também uma revisão de literatura através de uma pesquisa geral sobre o problema de controle de pontes rolantes. No terceiro capítulo é realizada a modelagem dinâmica da ponte rolante incluso a modelagem para a força de arrasto. No quarto capítulo são projetados os dois controladores que são comparados para análise e simulação de resultados. O quinto capítulo apresenta a discussão dos resultados da simulação dos controladores projetados no capítulo anterior. O sexto capítulo faz a conclusão sobre a modelagem, o controle e apresenta propostas de trabalhos futuros.

2 - FUNDAMENTOS TEÓRICOS E REVISÃO DE LITERATURA

2.1 - DESCRIÇÃO E MODELAGEM DE SISTEMAS

De acordo com Eykhoff (1974), modelar um sistema é fazer uma representação dos aspectos essenciais deste sistema, de forma a apresentar esse conhecimento em uma forma utilizável.

Modelar um sistema dinâmico pode ser entendido como realizar uma descrição matemática, geralmente por meio de um conjunto de equações diferenciais, que são capazes de representar o sistema físico a ser controlado. Para modelar um sistema, deve-se entender como atuam suas dinâmicas e suas tarefas de controle, de modo a se obter um modelo que se consiga trabalhar. É desejável que esses conhecimentos sejam suficientes para desenvolver um modelo acurado. Porém, apesar da necessidade de precisão do modelo, devem ser analisadas quais são as reais necessidades e características deste sistema que deverão ser consideradas para atender a tarefa de controle desejada. Há casos em que diversas especificações são necessárias para se obter um desempenho específico, porém, em outros casos, essas especificações podem tornar o sistema muito detalhado e demandar análises e computações desnecessárias; além de um projeto de controle mais complexo. Para isso, deve-se então, analisar o comportamento das dinâmicas do sistema na faixa de operação de interesse e considerar seus efeitos significantes, bem como ignorar os efeitos insignificantes (Slotine e Li, 1991).

Nos itens que se seguem, serão abordados temas relevantes ao desenvolvimento da modelagem realizada nesta dissertação, iniciando pela obtenção das relações dinâmicas representativas de forças externas de excitação decorrentes da interação fluido-estrutura que ocorre em situações em que um determinado corpo se encontra imerso em um fluido em movimento. Para isso, introduz-se inicialmente uma pequena revisão de conceitos de mecânica dos fluidos, resultando na metodologia de cálculo das forças de arrasto baseada na chamada equação de Morison (Morison *et al.*, 1950).

2.1.1 - Arrasto Aerodinâmico

Quando se faz o transporte de cargas é importante verificar qual o efeito da perturbação causada pelo arrasto aerodinâmico no funcionamento ideal do sistema e de qual modo este arrasto aerodinâmico se comporta.

2.1.1.1 - Tipos de escoamento

Os princípios de mecânica dos fluidos são aplicados em praticamente todos os projetos de meios de transporte. Segundo Fox e McDonald (2008), um fluido é uma substância que se deforma continuamente sob a aplicação de uma tensão de cisalhamento (tangencial) por menor que seja esta tensão. As moléculas dos fluidos estão em movimento constante e, nos projetos de engenharia, geralmente é interessante saber o efeito global ou médio de muitas moléculas desses fluidos. São estes efeitos que podem ser medidos e percebidos. Uma possível classificação para os fluidos é de acordo com a relação entre a tensão de cisalhamento aplicada e a taxa de deformação do fluido.

- Newtoniano: quando a relação entre a tensão de cisalhamento aplicada e a taxa de deformação do fluido é diretamente proporcional. Fluidos como a água, o ar e a gasolina, sob condições normais, apresentam comportamentos muito próximos ao Newtoniano.
- Não Newtoniano: são os casos contrários, em que a relação entre a tensão e a taxa de deformação não são diretamente proporcionais.

Conforme Fox e McDonald (2008), a principal subdivisão no tipo de escoamento de um fluido é entre escoamentos viscosos e não-viscosos.

A viscosidade é o termo utilizado para a taxa na qual o fluido irá se deformar sob a ação de uma tensão de cisalhamento. A constante de proporcionalidade na qual essa deformação acontece é chamada de viscosidade absoluta ou dinâmica (μ). A viscosidade cinemática (ν_k) representa o quociente da viscosidade absoluta (μ) em relação à massa específica (ρ) (Fox e McDonald, 2008), conforme mostra a equação (2.1).

$$\nu_k = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.1)$$

A classificação dos escoamentos em relação à viscosidade é dada por (Brunetti, 2005):

- Escoamento não viscoso (fluido ideal): a viscosidade do fluido, μ , é supostamente nula. Este tipo de escoamento não existe; entretanto há muitos problemas em que esta suposição simplifica a análise e conduz a resultados significativos.
- Escoamentos viscosos: a viscosidade do fluido, μ , não é nula.

Pode-se, ainda, classificar o fluido de acordo com a estrutura interna do escoamento, podendo ser escoamento em regime laminar ou escoamento em regime turbulento (Brunetti, 2005):

- Regime laminar: é aquele em que as partículas se deslocam em lâminas individualizadas, sem trocas de massas entre elas.
- Regime turbulento: é aquele em que as partículas apresentam um movimento aleatório macroscópico, isto é, a velocidade apresenta componentes transversais ao movimento geral do conjunto do fluido.

O parâmetro para o qual se determina o tipo de escoamento é chamado de número de Reynolds.

Outra subdivisão dos escoamentos em viscosos e não viscosos é dada em relação às variações de massa específica. Sua classificação pode ser dada em relação à compressibilidade como (Fox e McDonald, 2008):

- Escoamentos incompressíveis: as variações de massa específica são desprezíveis.
- Escoamentos compressíveis: as variações de massa específica não são desprezíveis.

Em casos práticos gerais, considera-se que os escoamentos em líquidos são incompressíveis e os escoamentos em gases são compressíveis. Porém, escoamentos gasosos também podem ser considerados incompressíveis desde que a velocidade de escoamento seja pequena em relação à velocidade do som no fluido (Fox e McDonald, 2008). A razão entre estas velocidades é definida como número de Mach (M), introduzido por Ernst Mach, e é dada pela equação (2.2).

$$M = \frac{V_e}{c} \quad (2.2)$$

Onde V_e representa a velocidade de escoamento no fluido e c a velocidade do som no fluido.

Para valores de $M < 0,3$, as variações na densidade atingem apenas 2% do valor médio. Deste modo, escoamentos gasosos com $M < 0,3$ podem ser tratados como incompressíveis (Fox e McDonald, 2008).

Número de Reynolds

Osborne Reynolds estudou a transição entre os escoamentos laminar e turbulento em um cano. Ele descobriu que o número adimensional dado pela equação (2.3) é um critério pelo qual o estado de um escoamento pode ser determinado (Fox e McDonald, 2008).

$$Re = \frac{\bar{v}_c D_l}{\nu_k} \quad (2.3)$$

Com \bar{v}_c sendo a velocidade média do fluido e D_l a dimensão característica do fluido.

O significado físico do número de Reynolds pode ser entendido como uma proporcionalidade da razão entre a força de inércia e a força de viscosidade:

$$Re \sim \frac{\text{forças de inércia}}{\text{forças viscosas}} .$$

Mais tarde mostrou-se que o número de Reynolds é também um parâmetro para outros tipos de escoamento. Assim como foi feito em Brunetti (2005), é possível provar que o número encontrado por Reynolds é válido para uma esfera de diâmetro d imersa em um fluido, de onde se tem a equação:

$$Re = \frac{v_c d}{\nu_k} \quad (2.4)$$

Segundo Brunetti (2005), Reynolds verificou que, no caso de tubos, seriam observados os seguintes valores:

- Se $Re < 2000$ então o escoamento é laminar.
- Se $2000 < Re < 2400$ então o escoamento é de transição.
- Se $Re > 2400$ então o escoamento é turbulento.

2.1.1.2 - Força de arrasto aerodinâmico na carga

Para um corpo em escoamento turbulento, utiliza-se a equação de Morison (Morison *et al.*, 1950) para determinar a força de resistência deste fluido no corpo. A equação de Morison é a soma de duas componentes de força: a força de inércia presente na direção da aceleração do fluxo e a força de arraste, proporcional ao quadrado da velocidade instantânea do fluxo. Essa força resultante interpreta a relação entre a massa específica (ρ), o coeficiente de inércia (C_m), o coeficiente de arrasto (C_d), o volume de escoamento (V_{ol}), a área de escoamento (A_r), a velocidade do escoamento (v_v) e a aceleração do escoamento (a_v).

Para um corpo que se encontra fixo em meio a um escoamento turbulento, a força que atua nele na direção do escoamento é dada pela equação de Morison:

$$F_r = \rho C_m V_{ol} a_v + \frac{1}{2} \rho C_d A_r v_v |v_v|. \quad (2.5)$$

O coeficiente de inércia C_m pode ser dado por:

$$C_m = 1 + C_\alpha. \quad (2.6)$$

Com C_α sendo o coeficiente de massa adicionada.

A equação (2.5) é utilizada quando se tem um corpo fixo em meio a um escoamento turbulento.

Entretanto, se o corpo também estiver em movimento, como é o caso da carga sendo transportada pela ponte rolante, a equação de Morison (equação (2.5)) fica conforme mostra a equação:

$$F_r = \rho V_{ol} a_v + \rho C_\alpha V_{ol} (a_v - a_L) + \frac{1}{2} \rho C_d A_r (v_v - v_L) |v_v - v_L|. \quad (2.7)$$

Com v_L a velocidade do corpo e a_L a aceleração do corpo respectivamente.

Definida a forma de cálculo da força dissipativa atuante na carga, introduz-se nos itens subsequentes uma breve revisão da técnica de modelagem dinâmica baseada na mecânica Lagrangeana.

2.1.2 - Modelagem via equações de Lagrange

A formulação de Lagrange consiste em uma forma alternativa resultante do método da energia, através da qual se consegue expressar as equações diferenciais de movimento do sistema. Nela o sistema não precisa ser separado em partes isoladas.

Para se obterem as equações diferenciais dinâmicas do movimento de um sistema, pode-se também aplicar diretamente as leis de Newton.

Porém, em casos mais complexos, se torna mais simples obter a energia cinética e ou potencial, e as forças do sistema, em coordenadas generalizadas, para depois escrever as equações na forma de Lagrange, evitando assim complicadas transformações de coordenadas. Isso se torna uma vantagem na utilização deste método, principalmente nos casos de sistemas que envolvem vínculos.

Segundo Symon (1996), uma função lagrangeana denominada por G , tem o mesmo valor, em qualquer conjunto de posições e de velocidades das partículas do sistema, não importando em que sistemas de coordenadas elas sejam consideradas. Mas a forma da função G pode ser diferente em sistemas de coordenadas diferentes. A importância deste método se dá pelo fato de as equações de Lagrange terem o mesmo valor em todos os

sistemas de coordenadas, representando assim uma maneira uniforme de escrever as equações de movimento do sistema, independente do sistema de referência adotado.

A função lagrangeana G é definida como a diferença entre a energia cinética T e a energia potencial V do sistema:

$$G = T - V . \quad (2.8)$$

O movimento do corpo é representado pelo conjunto de n coordenadas generalizadas $q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ que se relacionam com as coordenadas cartesianas. Um sistema de coordenadas generalizadas é aquele em que as posições das partículas neste sistema podem ser especificadas por um número mínimo de parâmetros independentes associados aos graus de liberdade (Symon, 1996).

Através do princípio de Hamilton consegue-se obter as equações de Lagrange para um sistema conservativo, como mostra a equação:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial G}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial G}{\partial q} = 0 . \quad (2.9)$$

Em se tratando de um sistema dissipativo, as equações de Lagrange assumem a forma (Symon, 1996):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial G}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial G}{\partial q} = Q_{nc_q} . \quad (2.10)$$

Onde Q_{nc_q} são as forças não conservativas generalizadas relacionadas à coordenada q . Forças não conservativas são aquelas que não são derivadas de uma função potencial. As forças que são derivadas de uma função potencial já estão incluídas na energia potencial V (Esfandiari e Vu, 1997).

2.2 - REPRESENTAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS

Dentre as diversas maneiras de se representar um sistema dinâmico, pode-se destacar a representação por meio de equações dinâmicas em termos de variáveis de estado, o que resulta na chamada representação em espaço de estados. O conjunto chamado de variáveis de estado é dado pelo menor conjunto de variáveis independentes que descrevam um sistema. Dorf e Bishop (1998) afirmam que, através do conhecimento desse conjunto, das funções de entrada e das equações dinâmicas, é possível obter os estados futuros e as saídas futuras do sistema. Desta forma, conhecendo-se os valores destas variáveis em um tempo fixo ($t = t_0$), as funções de entrada e as equações dinâmicas, uma descrição completa do comportamento do sistema pode ser obtida, fornecendo então os estados futuros e as saídas futuras do sistema em um tempo $t \geq t_0$.

O objetivo a ser atingido por meio da introdução de variáveis de estado adequadas é reescrever as equações de movimento do sistema como sendo um sistema maior de equações diferenciais de primeira ordem. Cada uma dessas equações diferenciais consiste da derivada no tempo de uma das variáveis de estado no lado esquerdo da igualdade e uma função algébrica das variáveis de estado, assim como das entradas do sistema no lado direito da igualdade (Esfandiari e Vu, 1997).

A representação do sistema em equações de variáveis de estado é então dada por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t). \end{aligned} \tag{2.11}$$
$$\begin{aligned} y_1 &= h_1(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t), \\ y_2 &= h_2(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t), \\ &\vdots \\ y_p &= h_p(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t). \end{aligned}$$

Onde n é o número de variáveis de estado, m o número de entradas, p o número de saídas x_1, \dots, x_n são as variáveis de estado, u_1, \dots, u_m as entradas do sistema e f_1, \dots, f_n e h_1, \dots, h_p são funções algébricas de $(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t)$.

De uma forma geral e compacta, tem-se então que as equações de variáveis de estado e as saídas do sistema podem ser representadas por:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t).\end{aligned}\tag{2.12}$$

Sendo \mathbf{x} o vetor de estados, \mathbf{u} o vetor de entradas, \mathbf{y} o vetor de saídas e \mathbf{f} e \mathbf{h} funções vetoriais.

2.2.1 - Ponto de Equilíbrio

Os pontos de equilíbrio são as raízes da equação:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \mathbf{0}.\tag{2.13}$$

De acordo com Slotine (1991) um sistema linear, usualmente, possui apenas um único ponto de equilíbrio (embora, em alguns casos, possa haver um conjunto contínuo de pontos de equilíbrio), já um sistema não linear frequentemente possui mais de um ponto de equilíbrio isolado.

2.2.2 - Linearização em torno dos pontos de equilíbrio

Em alguns casos, é possível determinar o comportamento de um sistema não linear perto de um ponto de equilíbrio, através da linearização deste sistema em torno deste ponto.

Pode-se encontrar uma nova representação linear para o modelo em torno de seu ponto de equilíbrio, como mostram as equações:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{eq} + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{u}_{eq} + \Delta\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{eq}, \mathbf{u}_{eq}) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_{eq}, \mathbf{u}_{eq})\Delta\mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_{eq}, \mathbf{u}_{eq})\Delta\mathbf{u},\tag{2.14}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_{eq} + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{u}_{eq} + \Delta\mathbf{u}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}_{eq}, \mathbf{u}_{eq}) + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_{eq}, \mathbf{u}_{eq})\Delta\mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_{eq}, \mathbf{u}_{eq})\Delta\mathbf{u}.\tag{2.15}$$

Ou uma forma alternativa de representar o modelo linearizado na forma da equação (2.12):

$$\dot{\mathbf{x}}_{eq} + \Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{eq}, \mathbf{u}_{eq}) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_{eq}, \mathbf{u}_{eq})\Delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_{eq}, \mathbf{u}_{eq})\Delta \mathbf{u}, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{y}_{eq} + \Delta \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_{eq}, \mathbf{u}_{eq}) + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_{eq}, \mathbf{u}_{eq})\Delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_{eq}, \mathbf{u}_{eq})\Delta \mathbf{u}. \quad (2.17)$$

Com $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{eq}$, $\Delta \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_{eq}$, $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{eq}$. O vetor \mathbf{u}_{eq} representa o vetor de entradas para a qual o sistema permanece em equilíbrio.

Fazendo separadamente as derivações requeridas nas equações (2.16) e (2.17), tem-se as equações:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_{eq}, \mathbf{u}_{eq}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_{eq} \\ u=u_{eq}}}, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_{eq}, \mathbf{u}_{eq}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_{eq} \\ u=u_{eq}}}, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_{eq}, \mathbf{u}_{eq}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_p}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_{eq} \\ u=u_{eq}}}, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_{eq}, \mathbf{u}_{eq}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial h_p}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{eq} \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_{eq}}} . \quad (2.21)$$

O novo sistema linear tem como estado variações de \mathbf{x} , como entrada variações de \mathbf{u} e como saída variações de \mathbf{y} . Nomeando essas variações como novas variáveis:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \Delta \mathbf{x}, \\ \mathbf{u}' &= \Delta \mathbf{u}, \\ \mathbf{y}' &= \Delta \mathbf{y}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

A representação do sistema linearizado é dada por:

$$\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{A}\mathbf{x}' + \mathbf{B}\mathbf{u}', \quad (2.23)$$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{C}\mathbf{x}' + \mathbf{D}\mathbf{u}'. \quad (2.24)$$

Segundo Brogan (1991) para classificar se um ponto de equilíbrio é estável ou não, essa classificação depende de vários fatores que interferem no ponto de equilíbrio, dentre eles, do que é considerado perto ao se falar em torno de uma vizinhança, da magnitude dos estados ou entradas de perturbação e do tempo que estas são aplicadas. Estas condições de qualificação são a razão pela qual existe uma variedade de definições sobre estabilidade.

Uma forma de se verificar a estabilidade de um ponto de equilíbrio, e fazer sua classificação, é através da localização dos autovalores da matriz \mathbf{A} encontrada por meio da equação (2.18).

Em alguns casos, é possível analisar a estabilidade de um sistema fazendo uma relação entre o sistema linearizado e o sistema original não linear. Slotine e Li (1991) definem que:

- Se o sistema linearizado é estritamente estável, isto é, todos os autovalores da matriz \mathbf{A} estão estritamente no lado esquerdo do plano complexo (ou seja, possuem

parte real negativa), então o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável para o sistema original não linear.

- Se o sistema linearizado é instável, isto é, se ao menos um autovalor da matriz \mathbf{A} está estritamente no lado direito do plano complexo (possui parte real positiva), então o ponto de equilíbrio é instável para o sistema original não linear.
- Se o sistema linearizado é marginalmente estável, isto é, ao menos um autovalor da matriz \mathbf{A} se encontra sobre o eixo imaginário, e os outros autovalores estão no lado esquerdo do plano complexo, nada se pode concluir sobre a estabilidade do sistema original não linear. O ponto de equilíbrio pode ser estável, assintoticamente estável, ou instável para o sistema não linear que originou o modelo linearizado.

2.2.3 - Controlabilidade

Para Chen (1999), um sistema dinâmico descrito pelas matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} é dito ser controlável se, para qualquer estado inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ e um estado final qualquer $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$, com $t_1 > 0$, exista uma entrada \mathbf{u} que transfira qualquer estado inicial \mathbf{x}_0 para qualquer outro estado desejado \mathbf{x}_1 em um intervalo de tempo finito. Caso contrário o sistema é dito ser não controlável.

Segundo Chen (1999), para determinar se o sistema é controlável, deve-se fazer a análise da matriz de Controlabilidade. A condição algébrica para um sistema ser dito controlável é que o posto da matriz de controlabilidade seja igual à dimensão n do sistema:

$$\text{posto } Cont = n .$$

Sendo a matriz de Controlabilidade dada por:

$$Cont = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] .$$

Em Dorf e Bishop (1998) encontra-se também outro método para se determinar se o sistema é controlável. Nele deve-se desenhar o modelo do sistema em diagrama de fluxo

de sinais e determinar se existe percurso entre o sinal de controle, u , e cada uma das variáveis de estado. Se tal percurso existir, o sistema é controlável.

Se um sistema é completamente controlável, ele permite, por exemplo, que todos os polos de um controlador responsável pela realimentação do sistema, sejam alocados arbitrariamente (Ogata, 2003).

2.2.4 - Observabilidade

De acordo com Chen (1999) um sistema dinâmico descrito pelas matrizes A e C é dito ser observável, se para qualquer estado desconhecido $x(0)$ existe um tempo finito $t_1 > 0$, tal que o conhecimento da entrada u e da saída y em $[0, t_1]$ é suficiente para determinar unicamente o estado inicial $x(0)$. Caso contrário o sistema é dito ser não observável.

A observabilidade pode também ser interpretada como a capacidade do sistema em permitir que se estime uma variável de estado. Segundo Chen (1999), para determinar se o sistema é observável, deve-se fazer a análise da matriz de Observabilidade. A condição algébrica para um sistema ser dito observável é que o posto da matriz de Observabilidade seja igual à dimensão n do sistema:

$$\text{posto } Observ = n .$$

Sendo a matriz de Observabilidade dada por:

$$Observ = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} .$$

Da mesma forma que para a Controlabilidade, Dorf e Bishop (1998) mostram que outro método de se analisar a observabilidade é através do diagrama de fluxo de sinais. Se no diagrama existir um percurso entre cada uma das variáveis de estado e a variável de saída do modelo, o sistema é observável.

Se um sistema é totalmente observável, ele permite, por exemplo, que em casos de realimentação por estados estimados, os polos do observador sejam alocados arbitrariamente (Ogata, 2003).

2.3 - MÉTODOS DE CONTROLE

A realimentação de um sistema pode ser utilizada em muitas tarefas de controle. A teoria de controle utilizada dependerá dos objetivos traçados para o projeto de acordo com o problema a ser solucionado. Vários desses problemas estão ligados a rastreamento, estabilização e rejeição ou atenuação da perturbação.

Uma lei de controle de realimentação deve fazer com que o sistema em malha fechada apresente o comportamento desejado, atenda o objetivo do projeto para um sistema físico que deve ser controlado e siga as especificações de comportamento que foram previamente estabelecidas.

2.3.1 - Controle não linear por realimentação dinâmica

Conforme Slotine e Li (1991) se a tarefa de controle do sistema envolve grandes faixas e ou altas velocidades de movimento, efeitos não lineares serão significantes nas dinâmicas e o controle não linear pode ser necessário para alcançar o desempenho desejado. Essas tarefas podem ser divididas em:

- Estabilização ou regulação: projeta-se um estabilizador tal que os estados do sistema em malha fechada serão estabilizados em torno do ponto de equilíbrio.
- Rastreamento: projeta-se um rastreador, tal que as saídas do sistema rastreiem uma trajetória pré-definida e variante no tempo.

Segundo Khalil (2002), a estabilização por realimentação de estado do sistema representado pela equação:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (2.25)$$

é o problema de projetar uma lei de controle $\mathbf{u} = \boldsymbol{\gamma}(t, \mathbf{x})$ tal que a origem do sistema $\mathbf{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio uniformemente assintoticamente estável do sistema em malha fechada:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}(t, \mathbf{x})) . \quad (2.26)$$

De acordo com Khalil (2002) a lei de controle de realimentação $\mathbf{u} = \boldsymbol{\gamma}(t, \mathbf{x})$ é usualmente chamada de realimentação estática, pois é uma função “sem memória” de \mathbf{x} . A lei de controle de realimentação é chamada dinâmica quando é feita através do uso de um controlador do tipo $\mathbf{u} = \boldsymbol{\gamma}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z})$ onde \mathbf{z} é a solução de um sistema dinâmico guiado por \mathbf{x} dado pela equação:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}) . \quad (2.27)$$

Em se tratando de realimentação da saída, Khalil (2002) considera o controle de realimentação dinâmica como o mais comum devido à falta de medição de algumas das variáveis de estado. Essa falta de informação é usualmente compensada pela inclusão de componentes observadores no controlador de realimentação. Estabilizar um sistema por meio de realimentação da saída significa projetar uma lei de controle de realimentação (estática ou dinâmica), tal que a origem seja um ponto de equilíbrio uniformemente assintoticamente estável do sistema em malha fechada. Se a teoria utilizada é a de controle por realimentação dinâmica, a origem a ser estabilizada é $\mathbf{x} = 0$ e $\mathbf{z} = 0$.

Geralmente a estabilização considerada padrão é a estabilização de um ponto de equilíbrio na origem. Porém, pode-se estabilizar o sistema em relação a um ponto qualquer \mathbf{x}_{SS} . Para que isso aconteça é necessário também um valor de entrada em estado estacionário \mathbf{u}_{SS} . Essa entrada deve manter em equilíbrio \mathbf{x}_{SS} , tal que a equação (2.28) seja satisfeita (Khalil, 2002).

$$0 = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_{SS}, \mathbf{u}_{SS}) \quad \forall \quad t \geq 0 \quad (2.28)$$

De acordo com o que foi apresentado em Khalil (2002), a mudança de variáveis (mostrada na equação (2.29)):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\delta &= \mathbf{x} - \mathbf{x}_{SS}, \\ \mathbf{u}_\delta &= \mathbf{u} - \mathbf{u}_{SS}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

resulta em:

$$\dot{\mathbf{x}}_\delta = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_{SS} + \mathbf{x}_\delta, \mathbf{u}_{SS} + \mathbf{u}_\delta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f}_\delta(t, \mathbf{x}_\delta, \mathbf{u}_\delta), \quad (2.30)$$

onde $\mathbf{f}_\delta(t, 0, 0) \equiv 0$ para todo $t \geq 0$.

Em se tratando de realimentação da saída, a saída é redefinida como a equação:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_\delta &= \mathbf{y} - \mathbf{h}(t, \mathbf{x}_{SS}, \mathbf{u}_{SS}) = \mathbf{h}(t, \mathbf{x}_{SS} + \mathbf{x}_\delta, \mathbf{u}_{SS} + \mathbf{u}_\delta) - \mathbf{h}(t, \mathbf{x}_{SS}, \mathbf{u}_{SS}) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{h}_\delta(t, \mathbf{x}_\delta, \mathbf{u}_\delta). \end{aligned} \quad (2.31)$$

No qual $\mathbf{h}_\delta(t, 0, 0) \equiv 0$ para todo $t \geq 0$.

Através dessa mudança de variáveis é possível colocar o sistema na forma padrão, logo se deve solucionar o problema de estabilização do sistema padrão:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_\delta &= \mathbf{f}_\delta(t, \mathbf{x}_\delta, \mathbf{u}_\delta), \\ \mathbf{y}_\delta &= \mathbf{h}_\delta(t, \mathbf{x}_\delta, \mathbf{u}_\delta). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Onde \mathbf{u}_δ é projetado como um controle de realimentação de \mathbf{x}_δ ou \mathbf{y}_δ .

A entrada global de controle será dada pela componente da entrada em malha aberta em estado estacionário \mathbf{u}_{SS} e pela componente de realimentação \mathbf{u}_δ , resultando em:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{SS} + \mathbf{u}_\delta. \quad (2.33)$$

Khalil (2002) explica que o problema da estabilização se torna menos complexo em se tratando de um sistema linear invariante no tempo (equações (2.34) e (2.35)). Pois o

controle de realimentação de estado $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ preserva a linearidade do sistema em malha aberta. Essa entrada de controle de realimentação de estados irá garantir a estabilidade assintótica do sistema, se, e somente se, a matriz $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ for Hurwitz, pois desta forma a origem do sistema em malha fechada representado pela equação (2.36) será assintoticamente estável.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (2.35)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} \quad (2.36)$$

Com essa nova entrada de controle, o problema de estabilização de estado será resolvido ao se projetar \mathbf{K} de modo que todos os autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ tenham parte real negativa no plano complexo. Os autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ correspondem aos polos introduzidos pelo controlador.

A matriz \mathbf{K} não necessariamente é única para um dado sistema, pois ela depende da localização dos polos de malha fechada selecionados e estes polos determinam a velocidade e o amortecimento da resposta. Ogata (2003) diz que a seleção dos polos desejados de malha fechada ou a equação característica desejada é um compromisso entre a velocidade de resposta do vetor de erro e a sensibilidade aos distúrbios e aos ruídos de medida. Ou seja, ao se aumentar a velocidade da resposta do erro, em geral, aumentarão os efeitos contrários nos distúrbios e nos ruídos de medida.

De acordo com Ogata (2003), os polos de um sistema em malha fechada podem ser expressos em função do coeficiente de amortecimento (ζ_{Damp}) e da frequência natural não amortecida (ω_n). Desta forma, ao se projetar polos para um sistema em malha fechada, pode-se fazê-lo de modo que estes satisfaçam alguma especificação de coeficiente de amortecimento (ζ_{Damp}) e de frequência natural não amortecida (ω_n) desejados para o sistema.

2.3.1.1 - Linearização via realimentação entrada-saída

Uma forma de se representar o sistema não linear é separando a função $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ em duas partes. Chamando então de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ a parte que não está relacionada com nenhuma entrada \mathbf{u} e a outra parte, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, a parte que está relacionada com a entrada \mathbf{u} . Considerando um sistema com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO), porém com o mesmo número de canais de entrada e de saída, e considerando também que na função de saída y_m não apareça nenhuma entrada u_m , o sistema da equação (2.11) pode ser representado como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m g_i(\mathbf{x})u_i, \quad (2.37)$$
$$\begin{aligned} y_1 &= h_1(\mathbf{x}), \\ &\vdots \\ y_m &= h_m(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Para Slotine e Li (1991) a ideia central de uma linearização por realimentação de um sistema como o apresentado na equação (2.37) é transformar algebricamente a dinâmica de um sistema originalmente não-linear em uma dinâmica linear, ou seja, um modelo equivalente, porém menos complexo. O conceito básico de linearização entrada-saída pode ser entendido como simplesmente diferenciar a função de saída y repetidamente até que uma entrada u apareça nesta função de saída, e então projetar u para cancelar a não linearidade.

O número r de diferenciações requeridas para a entrada u aparecer, é chamado de grau relativo do sistema. Necessariamente, $r \leq n$ onde n é a ordem do sistema. Para sistemas com mais de uma entrada, o grau relativo é dado na forma de vetor grau relativo $[r_1, \dots, r_m]$ em \mathbf{x}^0 . E deve satisfazer a equação:

$$r_1 + \dots + r_m \leq n. \quad (2.38)$$

Isidori (1995) diz que a realimentação de um sistema pode ser utilizada para reduzi-lo, pelo menos do ponto de vista entrada-saída, para um agregado de canais independentes

de uma entrada/uma saída. Significa transformar o sistema da equação (2.37) com uma lei de controle de realimentação de estados da equação:

$$u_i = \alpha_i(x) + \sum_{j=1}^m \beta_{ij}(x)v_j. \quad (2.39)$$

Que resulta no sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)\alpha_i(x) + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m g_i(x)\beta_{ij}(x) \right) v_j, \\ y_1 &= h_1(x), \\ &\vdots \\ y_m &= h_m(x). \end{aligned} \quad (2.40)$$

de tal modo que este sistema tenha um vetor grau relativo r no ponto $x = 0$; de tal forma que para $1 \leq i \leq m$, a saída y_i seja afetada somente por uma entrada correspondente v_i e não por v_j , se $j \neq i$.

No Anexo I apresenta-se a definição da matriz $A_{rd}(x)$ no contexto de grau relativo dada em Isidori (1995). Sendo $A_{rd}(x)$ uma matriz de desacoplamento do sistema, em que desacoplar significa obter a separação dos canais entrada-saída de forma que se tornem individuais.

A propriedade que o sistema em malha fechada tenha vetor grau relativo no ponto de equilíbrio $x = 0$ serve para evitar soluções triviais, soluções nas quais, no sistema em malha fechada, algumas saídas não são afetadas por nenhuma entrada. O principal resultado sobre o problema de controle não interativo é que o problema é solucionável, se, e somente se, o sistema tem algum vetor grau relativo. Ou seja, se e somente se, $A_{rd}(0)$ é não singular (Isidori, 1995).

Para se descobrir o grau relativo de um sistema, como o representado pela equação (2.40) deve-se encontrar a derivada da função de uma determinada saída y do sistema. Caso na primeira derivação não apareça a entrada u , deve-se fazer a diferenciação sucessiva até que a entrada u apareça.

Em alguns casos, a diferenciação sucessiva para se obter a linearização entrada-saída não pode ser realizada, porque o grau relativo do sistema é indefinido.

Das notações utilizadas nas equações a seguir, o termo:

$$L_f \mathbf{h}(x) = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x} \mathbf{f}(x). \quad (2.41)$$

É chamado de Derivada de Lie de \mathbf{h} em relação à \mathbf{f} (Khalil, 2002).

Outras propriedades da geometria diferencial são mostradas nas equações abaixo:

$$L_f^0 \mathbf{h}(x) = \mathbf{h}(x), \quad (2.42)$$

$$L_f^k \mathbf{h}(x) = L_f L_f^{k-1} \mathbf{h}(x) = \frac{\partial (L_f^{k-1} \mathbf{h})}{\partial x} \mathbf{f}(x), \quad (2.43)$$

$$L_g \mathbf{h}(x) = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x} \mathbf{g}(x), \quad (2.44)$$

$$L_g L_f \mathbf{h}(x) = \frac{\partial (L_f \mathbf{h})}{\partial x} \mathbf{g}(x). \quad (2.45)$$

Para uma região Ω_x no espaço de estados e usando as notações de geometria diferencial, tem-se que a derivada primeira da saída pode ser escrita como:

$$\dot{\mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x} [\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)\mathbf{u}] = L_f \mathbf{h}(x) + L_g \mathbf{h}(x)\mathbf{u}. \quad (2.46)$$

Se $L_g \mathbf{h}(x) \neq 0$ para algum $x = x_0$ em Ω_x , então a função $\dot{\mathbf{y}}$ é dependente de \mathbf{u} e a linearização pode ser feita (Slotine e Li, 1991).

Porém se $L_g \mathbf{h}(x) = 0$ para todo x em Ω_x , diferencia-se $\dot{\mathbf{y}}$ conforme mostrado na equação (2.47).

$$\ddot{\mathbf{y}} = \frac{\partial(L_f \mathbf{h})}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}] = L_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}) + L_g L_f \mathbf{h}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (2.47)$$

Se novamente $L_g L_f \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$ para todo \mathbf{x} em Ω_x , isso significa que $\ddot{\mathbf{y}}$ é independente de \mathbf{u} , e o processo deve ser repetido até que se encontre a equação:

$$\mathbf{y}^r = L_f^r \mathbf{h}(\mathbf{x}) + L_g L_f^{r-1} \mathbf{h}(\mathbf{x})\mathbf{u}. \quad (2.48)$$

Onde $L_g L_f^{r-1} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \neq 0$ para algum $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ em Ω_x . O coeficiente r é chamado de grau relativo do sistema (Slotine e Li, 1991). No caso de sistemas MIMO, tem-se o vetor grau relativo, \mathbf{r} , do sistema. As definições e condições para que seja encontrado vetor grau relativo em sistemas MIMO estão representadas no Anexo I.

Segundo Khalil (2002), depois de encontrado o grau relativo do sistema, pode-se verificar que o controle de realimentação de estados é dado pela equação:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} \mathbf{h}(\mathbf{x})} [-L_f^r \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}]. \quad (2.49)$$

O que reduz a relação entrada-saída para uma relação linearizada representada por:

$$\mathbf{y}^{(r)} = \mathbf{v}. \quad (2.50)$$

De onde se verifica a realimentação dinâmica por linearização entrada-saída.

A linearização via realimentação dinâmica apresentada na equação (2.50) é um tipo de realimentação endógena e demonstra a propriedade de planicidade diferencial do sistema. Tal propriedade será apresentada em detalhes na seção 2.4.

2.3.1.2 - Obtendo o grau relativo via extensão dinâmica

Isidori (1995) mostra que é possível transformar, através de leis de controle, um sistema que não tem um vetor grau relativo, em um novo sistema que tenha grau relativo.

Para isso, pode-se utilizar uma estrutura de realimentação que incorpora um conjunto de variáveis de estado, chamada realimentação dinâmica de estados. A adição de variáveis de estado auxiliares, em particular a adição de integradores em certos canais de entrada, é útil para que se obtenha grau relativo para o sistema e, assim, possa ser realizada uma linearização por realimentação entrada-saída.

A realimentação dinâmica de estados é modelada por equações da forma mostrada em Isidori (1995) que estão representadas na equação:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta})\mathbf{v}, \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta}) + \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta})\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Em Slotine e Li (1991) e em Isidori (1995) apresenta-se uma análise mais aprofundada do comportamento desses sistemas, assim como detalhes e exemplos dessa técnica.

Isidori (1995) demonstra um algoritmo para a realização da extensão dinâmica. Este algoritmo é apresentado no Anexo II. É um processo recursivo que essencialmente identifica em quais canais os integradores precisam ser adicionados e o número de integradores necessários para adquirir o objetivo desejado, que é o de obter algum vetor grau relativo para o sistema. Ao se realizar este processo, todo o sistema de realimentação incorpora essa modificação de forma que o controle passa a ser um controle de realimentação dinâmica de estados.

2.3.2 - Observador de estados

Segundo Brogan (1991), quando não é possível medir todos os estados de um sistema (representado pelas equações (2.52) e (2.53)):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \quad (2.52)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx}, \quad (2.53)$$

pode-se utilizar um observador de estados. Este observador irá fornecer estados estimados de \mathbf{x} , denominados $\hat{\mathbf{x}}$, e será um observador de ordem plena, tal que seu controlador possa ser projetado como mostrado na equação:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}. \quad (2.54)$$

Onde $\hat{\mathbf{x}}$ é obtido por meio do sistema que contém o estimador definido por:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{H}\mathbf{y}. \quad (2.55)$$

Onde o erro de estimação, $\mathbf{e}(t)$, é dado pela equação:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (2.56)$$

e sua derivada por:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t). \quad (2.57)$$

Substituindo os sistemas (2.52) e (2.55) na equação (2.57) tem-se:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{G}\mathbf{u} - \mathbf{H}\mathbf{y}. \quad (2.58)$$

De onde, usando a equação (2.53) obtém-se:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{C})\mathbf{x} - \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + (\mathbf{B} - \mathbf{G})\mathbf{u}. \quad (2.59)$$

Fazendo:

$$\mathbf{G} = \mathbf{B}, \quad (2.60)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{C}, \quad (2.61)$$

tem-se que:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{C})\mathbf{e} . \quad (2.62)$$

Se a planta for completamente observável, é possível escolher a matriz \mathbf{H} tal que $\mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{C}$ tenha seus autovalores arbitrariamente escolhidos (Ogata, 2003).

Se todos os autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{C}$ forem projetados para terem parte real negativa, então um erro assintoticamente estável pode ser obtido. Desta forma, $\mathbf{e}(t) \rightarrow 0$, ou $\hat{\mathbf{x}}(t) \rightarrow \mathbf{x}(t)$ a medida que $t \rightarrow \infty$ (Brogan, 1991).

Ogata (2003) chama a atenção para o fato de, se as medidas das variáveis de saída envolverem ruídos significativos e forem relativamente imprecisas, o uso de observador para todos os estados (ou seja, onde todas as variáveis são estimadas e nenhuma é medida diretamente) pode resultar em um desempenho melhor.

Para se garantir que os polos do controlador sejam dominantes na resposta do sistema e que o erro de observação convirja rapidamente para zero, deve-se escolher os polos do observador de duas a cinco vezes mais rápidos que os polos do controlador (Ogata, 2003). Isso significa projetar os polos do observador, de modo que eles tenham parte real negativa duas a cinco vezes maior que a parte real negativa do(s) polo(s) do controlador. Através dessa escolha consegue-se fazer com que o erro de estimação decaia de duas a cinco vezes mais rápido que o vetor de estados \mathbf{x} .

Entretanto, Ogata (2003) diz que se o ruído do sensor for considerável, podem-se escolher polos do observador mais lentos que duas vezes a velocidade dos polos do controlador, tal que a banda passante do sistema se torne menor e filtre o ruído. Se os polos do observador estiverem localizados à direita dos polos do controlador, no lado esquerdo do plano s , a resposta do sistema será dominada pelos polos do observador, e não pelos polos do controlador.

Brogan (1991) demonstra que os autovalores de malha fechada do sistema consistirão nos autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ e nos autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{C}$. Este fato é usualmente referido como princípio da separação, pois as alocações dos autovalores em malha fechada podem ser feitas como tarefas separadas para problemas de realimentação de estados e de observador.

2.3.2.1 - Rastreamento

De um ponto de vista prático, pode-se requerer que x permaneça razoavelmente delimitado, e, em particular, na faixa de validade do modelo do sistema. Isto pode ser verificado analiticamente ou em simulações. Supõe-se que a trajetória desejada $y_{ref}(t)$ e suas derivadas de ordem superior (geralmente igual à ordem do sistema) são contínuas e delimitadas. Assume-se também que $y_{ref}(t)$ e suas derivadas estão disponíveis para controle *online*.

Para Lévine (2009), o objetivo de um controlador rastreador é projetar uma lei de controle para seguir uma trajetória de referência pré-determinada, mesmo que alguma perturbação tente fazer o sistema desviar de tal trajetória. Para conseguir realizar este rastreamento, a lei de controle precisa obter informações de medições *online*, que podem ser realizadas por sensores, ou obter informações através de outro tipo de observador, como um estimador de estados. Dessa forma, qualquer desvio, em qualquer momento da trajetória, pode ser detectado e por meio do controlador esta situação pode ser contornada.

Caso não haja desvios, o controle deve fazer com que a referência seja seguida e, caso ocorra alguma perturbação, tão breve ela seja constatada, o sistema em malha fechada deve garantir a convergência para a trajetória de referência.

Para o projeto de controle, pode-se determinar a entrada de controle para o rastreamento como uma entrada u tal que, a partir de um estado inicial na região Ω , o erro $e(t)$ entre a saída real $y(t)$ e a saída de referência $y_{ref}(t)$ tenda para zero (equação (2.63)), enquanto todo o estado x permanece delimitado. Ou seja, que a saída controlada y rastreie a trajetória de referência $y_{ref}(t)$.

$$e(t) = y(t) - y_{ref}(t) \approx 0 \quad \forall t \geq t_o \quad (2.63)$$

$$e(t) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty$$

De acordo com Slotine e Li (1991), quando o sistema em malha fechada é tal que os próprios estados iniciais implicam em erro zero de rastreamento para qualquer tempo (equação (2.64)):

$$y(t) \equiv y_{ref}(t) \quad \forall t \geq 0, \quad (2.64)$$

o sistema de controle é dito ser capaz de rastreamento perfeito. Já o rastreamento assintótico implica que o rastreamento perfeito é alcançado assintoticamente. A convergência de rastreamento exponencial pode ser definida similarmente.

Slotine e Li (1991) supõem que a trajetória desejada $y_{ref}(t)$ e suas derivadas de “ordem elevada” (geralmente igual à ordem do sistema) são contínuas e delimitadas e estão disponíveis para controle *online*. Então, para fazer o rastreamento de uma saída $y^{(n)}$ (de ordem n) é possível determiná-la por meio da equação:

$$y^{(n)} = y_{ref}^{(n)} - K_{n-1}(y^{(n-1)} + y_{ref}^{(n-1)}) - \dots - K_1(\dot{y} + \dot{y}_{ref}) - K_0(y + y_{ref}). \quad (2.65)$$

Onde K_{n-1}, \dots, K_0 representam os ganhos a serem projetados.

Lévine (2009) mostra que, se todo estado x de uma realimentação entrada-saída como a apresentada na equação:

$$y^{(n)} = v \quad (2.66)$$

puder ser medido a todo tempo e se deseja seguir a trajetória de referência:

$$y_{ref}^{(n)} = v_{ref}, \quad (2.67)$$

o erro entre a saída real $y(t)$ e a saída de referência $y_{ref}(t)$, calculado pela equação (2.63), satisfaz a n -ésima equação diferencial:

$$e^{(n)} = v - v_{ref}. \quad (2.68)$$

O erro acima (equação (2.68)) e suas derivadas de ordem inferior podem ser computados a todo tempo, devido à medição ou estimação dos estados de x . Portanto, deve-se garantir a convergência de $e^{(n)}$ e de suas derivadas de ordem mais baixa para zero. Definindo-se então $e^{(n)}$ conforme mostra a equação (2.69), pode-se representar o conjunto das derivadas de ordem n , para $n \geq 1$, como uma equação matricial (equação (2.70)).

$$e^{(n)} = - \sum_{i=0}^{n-1} K_i e^{(i)} \quad (2.69)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \vdots \\ e^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -K_0 & -K_1 & -K_2 & -K_3 & \cdots & -K_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \\ \vdots \\ e^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

Pode-se verificar que os ganhos K_i são os coeficientes do polinômio característico da matriz acima. Dessa forma, com uma escolha adequada dos ganhos, pode-se alocar os autovalores da matriz arbitrariamente no plano complexo.

Lévine (2009) confirma que, se os ganhos da matriz acima forem escolhidos tais que as raízes do polinômio característico tenham parte real negativa, as dinâmicas do erro são exponencialmente estáveis.

2.3.3 - Controle hierárquico

Para Scattolini (2009), quando um sistema que está sendo controlado possui comportamentos dinâmicos diferentes, tais como dinâmicas rápidas e lentas, o uso de um controlador hierárquico pode colaborar com a regulação desse comportamento, pois este controlador consegue atuar em duas escalas de tempo: rápida e lenta.

Scattolini (2009) explica que a malha de alto nível da hierarquia corresponde ao sistema dinâmico com dinâmicas lentas. Esse sistema pode ser controlado pela análise de seu comportamento em uma escala de tempo longa e suas entradas de controle devem ser providenciadas pelo subsistema localizado na camada mais baixa da hierarquia e

caracterizado pelas dinâmicas rápidas. O controlador de alto nível computa suas entradas de controle desejadas, as quais são os sinais de referência para a camada de baixo nível. A malha de controle rápida é geralmente chamada de malha de controle de baixo nível. O controlador de baixo nível deve garantir a solução dos problemas de rastreamento, tal que a diferença entre o que é desejado pela camada de alto nível e o que é oferecido pelo controlador de baixo nível não desestabilize o sistema ou diminua seu desempenho.

Sistemas nos quais duas escalas de tempo coexistem são frequentemente referenciados na literatura como sistemas singularmente perturbados. Alberto (2006) diz que, embora estes sistemas físicos possuam a mesma estrutura de modelo dos sistemas não lineares regulares, modelados por um conjunto de equações diferenciais ordinárias, a aplicação das técnicas tradicionais usualmente é acompanhada de problemas de natureza numérica e analítica.

O entendimento de sistemas singularmente perturbados, por meio de um estudo mais aprofundado de suas características e de sua capacidade de separar o sistema em duas escalas de tempo, e a compreensão de como estes sistemas se comportam em cada escala podem ser vistos em Khalil (2002), Lévine (2009), Isidori (1995) e Alberto (2006).

O procedimento utilizado neste trabalho para o projeto do controlador hierárquico baseado em sistemas singularmente perturbados é obtido de Lévine (2009), em que se pode encontrar um estudo mais detalhado do tema, suas restrições e condições de existência. Lévine (2009) exemplifica tal procedimento considerando um sistema bidimensional da forma mostrada na equação:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + u.\end{aligned}\tag{2.71}$$

Atribui-se à variável x_2 uma trajetória de referência x_{2ref} , em um domínio onde $f_2(x_1, x_2)$ é delimitado. Utilizando um controlador de alto ganho:

$$u = -\frac{k}{\varepsilon}(x_2 - x_{2ref}).\tag{2.72}$$

Onde ε é suficientemente pequeno e k é um numero real positivo.

Lévine (2009) introduz nesse sistema a escala de tempo rápida:

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon}, \quad (2.73)$$

o sistema da equação (2.71) assume a forma da equação (2.74):

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \varepsilon f_1(x_1, x_2) \quad \frac{dx_2}{d\tau} = \varepsilon f_2(x_1, x_2) - k(x_2 - x_{2ref}). \quad (2.74)$$

De acordo com o teorema apresentado em Lévine (2009), o sistema apresentado na equação (2.74) representa a variedade (*manifold*) da equação $x_2 = x_{2ref} + \frac{\varepsilon}{k} f_2(x_1, x_2)$ invariante na ordem 1 em ε . Como $k > 0$, este espaço é atrativo e as dinâmicas lentas resultantes são dadas, na ordem 1 em ε , pela equação:

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \varepsilon f_1(x_1, x_{2ref}). \quad (2.75)$$

A equação (2.75) permite que as dinâmicas lentas sejam controladas através da referência x_{2ref} . Essa referência x_{2ref} pode ser interpretada como uma variável de controle para o subsistema lento. A realimentação indireta realizada por meio da referência x_{2ref} é chamada de malha de controle de alto nível. Como ε é uma variável projetada, pode-se fazê-la pequena suficiente tal que aproxime a curvas $x_2(t)$ e $x_{2ref}(t)$ (Lévine, 2009).

De acordo com Scattolini (2009), do ponto de vista da engenharia de controle, a estrutura hierárquica multicamadas corresponde a um clássico sistema de controle de realimentação por cascata. A tarefa de controle de um sistema de dimensão 2 é então dividida em 2 tarefas de controle para 2 subsistemas de dimensão 1, em cascata.

Segundo Lévine (2009), completa-se o projeto de malha de alto nível como feito na seção de controle lento. Escolhe-se uma referência x_{1ref} para ser rastreada, usando x_{2ref} como entrada, e requerendo que se satisfaça a equação:

$$\frac{dx_1}{d\tau} - \frac{dx_{1ref}}{d\tau} = -k\varepsilon(x_1 - x_{1ref}), \quad (2.76)$$

em que x_{2ref} deve satisfazer a equação (2.77):

$$-k\varepsilon(x_1 - x_{1ref}) = f_1(x_1, x_{2ref}) - f_1(x_{1ref}, x_{2ref}). \quad (2.77)$$

Com x_{2ref} satisfazendo:

$$\dot{x}_{1ref} = f_1(x_{1ref}, x_{2ref}). \quad (2.78)$$

A malha de alto nível deve ser suficientemente lenta para preservar a realimentação dissociada lenta-rápida que foi criada.

2.4 - SISTEMAS COM PLANICIDADE DIFERENCIAL

O conceito de planicidade diferencial (*Flatness*) foi introduzido por M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, e P. Rouchon (Fliess *et al.*, 1992) e é tido como uma nova relação de equivalência de sistemas, utilizando como base a geometria diferencial. O problema de planejamento e rastreamento da trajetória é mais simples de ser resolvido para essa classe de sistemas não lineares.

Neste contexto de equivalência entre sistemas na determinação da propriedade de planicidade diferencial, dois sistemas são ditos equivalentes, desde que qualquer variável de um sistema possa ser representada como uma função de variáveis de um outro sistema e de um número finito de suas derivadas. Esta equivalência, que vem se tornando mais comum em teoria de controle, é chamada de isomorfismo de Lie-Bäcklund.

Um estudo mais detalhado e avançado sobre isomorfismo de Lie-Bäcklund pode ser encontrado em Lévine (2009) e em Fliess *et al.* (1999). O Anexo III apresenta algumas definições dadas em Lévine (2009) sobre o isomorfismo de Lie-Bäcklund e sua aplicabilidade no caso da ponte rolante. Fliess *et al.* (1999) provam que o isomorfismo de Lie-Bäcklund pode ser realizado através de uma realimentação endógena.

Segundo Franch (1999), um sistema dinâmico possui planicidade diferencial, se, e somente se, ele é linearizável por realimentação dinâmica endógena. Por este motivo é afirmado na seção 2.3.1.1 que, o fato de um sistema permitir sua linearização via realimentação dinâmica de estados, que é um tipo de realimentação dinâmica endógena, confirma sua propriedade de planicidade diferencial. Fliess *et al.* (1994) afirmam que uma realimentação é dita endógena se, e somente se, suporta que seja feita sua conversão, isto é, se, e somente se, cada componente de y puder ser expressa como uma função real analítica de x , de u e de um número finito de suas derivadas (equação (2.79)).

$$y = C(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(r)}) \quad (2.79)$$

De uma maneira geral, pode-se tentar entender que a equivalência de Lie-Bäcklund entre um sistema e seu respectivo sistema plano é que toda trajetória do sistema original pode ser mapeada de forma a se levar a uma única trajetória correspondente no sistema plano e vice-versa. Essa correspondência gerada por este mapeamento dá-se por meio de um difeomorfismo entre os dois sistemas. Desta forma, podem-se computar as trajetórias desejadas no sistema planejável e encontrar sua correspondência no sistema original.

Se dois sistemas são Lie-Bäcklund equivalentes, eles podem apresentar dimensões de estado diferentes, porém o número de entradas independentes é o mesmo. Isso é provado por alguns autores como em Fliess *et al.* (1999) e Lévine (2009).

A Figura 2.1 obtida de Lévine (2009) faz a representação gráfica da equivalência de Lie-Bäcklund entre as trajetórias de um sistema trivial e as trajetórias de um sistema não linear, representando assim a propriedade de planicidade diferencial de um sistema.

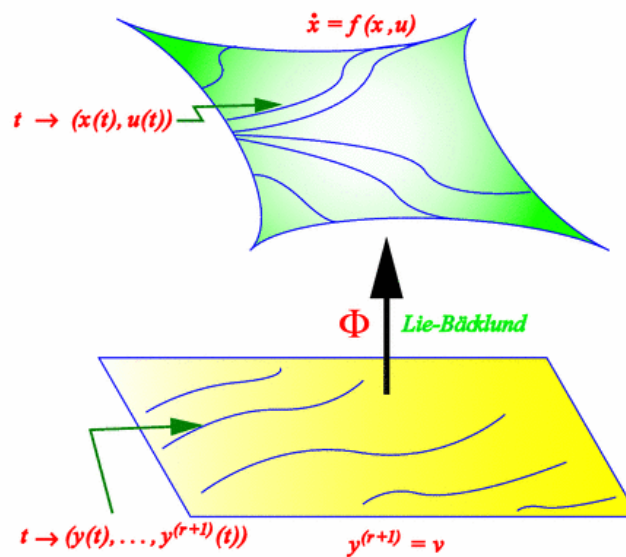


Figura 2.1- Representação Gráfica da Propriedade de Planicidade Diferencial (*Flatness*): Equivalência de Lie-Bäcklund entre as trajetórias do sistema trivial (abaixo) e as trajetórias do sistema não linear (acima). Fonte: Lévine (2009)

Um sistema com planicidade diferencial é Lie-Bäcklund equivalente a um sistema cujas curvas integrais não têm restrições diferenciais (curvas ordinárias) que é chamado de sistema trivial. Um sistema possui planicidade diferencial, se e somente se, ele é Lie-Bäcklund equivalente a um sistema trivial.

Pode-se dizer que, identificar a propriedade de planicidade diferencial de um sistema consiste em encontrar um conjunto de saídas, chamadas saídas planas (o número de saídas é igual ao número de entradas), tal que todos os estados e entradas possam ser determinados através dessas saídas planas e de suas derivadas, sem necessitar de integração (Martin *et al.*, 2002).

Para provar a existência dos conceitos e das relações acima citados, é necessária a utilização de conhecimentos complexos da teoria de geometria diferencial. Detalhes, provas e teoremas desses conceitos podem ser encontrados em Anderson e Ibragimov (1979), Fliess *et al.* (1999), Ibragimov (1985), Lévine (2009) e Zharinov (1992).

Na teoria de controle moderna, a dinâmica inversa é muito utilizada para se controlar o sistema. Com isso, ao invés de, como em um sistema tradicional, uma saída ser dada pela aplicação de determinada entrada desejada, é calculada qual a entrada necessária para que

se obtenha a saída desejada. Essas saídas podem ser referenciadas por meio do planejamento de suas trajetórias. Na próxima seção é apresentado como são feitos o planejamento e a geração da trajetória.

2.4.1 - Planejamento da trajetória

O planejamento do movimento consiste na geração *off-line* de um caminho e das ações de controle necessárias para que o sistema siga o caminho estabelecido. Este caminho pode ser obtido pela geração da trajetória de referência. Esta trajetória pode levar o sistema de um ponto inicial a um ponto final, baseando-se somente no conhecimento das equações que modelam o sistema, realizando um controle em malha aberta. Considerando um sistema não linear (equação (2.80)), em que os estados e as entradas no tempo inicial t_i e no tempo final t_f são conhecidos (equações (2.81) e (2.82)), então fazer o planejamento do movimento é encontrar a trajetória $t \mapsto (\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ para $t \in [t_i, t_f]$ que satisfaça a equação (2.80) e suas condições iniciais e finais dadas pelas equações (2.81) e (2.82).

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (2.80)$$

$$\mathbf{x}(t_i) = \mathbf{x}_i \quad \mathbf{u}(t_i) = \mathbf{u}_i \quad (2.81)$$

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f \quad \mathbf{u}(t_f) = \mathbf{u}_f \quad (2.82)$$

Em geral, para se resolver este problema é necessária uma solução iterativa por métodos numéricos para encontrar a entrada de controle \mathbf{u} tal que as condições iniciais e finais acima sejam satisfeitas. Lévine (2009) informa que tal solução pode ser considerada difícil por necessitar de integração das equações do sistema e envolver uma série de passos para que se encontre sua solução.

Em sistemas com planicidade diferencial, este problema é simplificado pelo fato de sua solução ser dada sem a necessidade de se integrarem as equações diferenciais do sistema. Logo, para planejar uma trajetória cujas condições iniciais e finais possam ser especificadas, precisa-se somente computar a trajetória da saída desejada. A integração das

equações diferenciais utilizada para outros tipos de sistemas é então dispensada para sistemas com planicidade diferencial.

Assumindo que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \boldsymbol{\varphi}_0(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(r)}), \\ \mathbf{u} &= \boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(r+1)}). \end{aligned} \quad (2.83)$$

Onde $\boldsymbol{\varphi}_0$ e $\boldsymbol{\varphi}_1$ são funções da saída plana \mathbf{y} e de suas derivadas.

Se os valores iniciais e finais de \mathbf{x} e \mathbf{u} forem dados, podem-se encontrar os valores iniciais e finais de $(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(r+1)})$. Então, é suficiente encontrar a trajetória $t \mapsto \mathbf{y}(t)$ pelo menos até sua derivada de ordem $r + 1$, que satisfaça as condições iniciais e finais. Desta forma a trajetória pode ser computada por interpolação polinomial (Lévine, 2009).

2.4.1.1 - Planejamento do Movimento que inicia em repouso e finaliza em repouso (*Rest to rest*)

Um movimento que se inicia em repouso e finaliza em repouso possui dois pontos de equilíbrio, um no tempo inicial e um no tempo final. Então, se o ponto inicial $(\mathbf{x}(t_i), \mathbf{u}(t_i))$ e o ponto final $(\mathbf{x}(t_f), \mathbf{u}(t_f))$ são pontos de equilíbrio, tem-se que:

$$\dot{\mathbf{x}}(t_i) = 0, \quad \dot{\mathbf{u}}(t_i) = 0, \quad \dot{\mathbf{x}}(t_f) = 0, \quad \dot{\mathbf{u}}(t_f) = 0. \quad (2.84)$$

Logo $\mathbf{y}(t_i)$ e $\mathbf{y}(t_f)$ são pontos de equilíbrio também pelo sistema trivial associado e, de acordo com as equações (2.83) e (2.84), tem-se que:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t_i) = \boldsymbol{\varphi}_0(\mathbf{y}(t_i), 0, \dots, 0) \\ \mathbf{u}(t_i) = \boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{y}(t_i), 0, \dots, 0) \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{x}(t_f) = \boldsymbol{\varphi}_0(\mathbf{y}(t_f), 0, \dots, 0) \\ \mathbf{u}(t_f) = \boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{y}(t_f), 0, \dots, 0) \end{cases} \quad (2.85)$$

O que mostra que todas as derivadas de \mathbf{y} podem ser substituídas por 0 no tempo inicial e no tempo final.

Segundo Lévine (2009), para o planejamento da saída tem-se a equação:

$$y_j(t) = y_j(t_i) + (y_j(t_f) - y_j(t_i)) \left(\frac{t - t_i}{t_f - t_i} \right)^{r+2} \left(\sum_{k=0}^{r+1} \alpha_{j,k} \left(\frac{t - t_i}{t_f - t_i} \right)^k \right). \quad (2.86)$$

Com $j = 1, \dots, m$, e $\alpha_{j,0}, \dots, \alpha_{j,r+1}$ são obtidas pela solução de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r+2 & r+3 & \dots & 2r+3 \\ (r+1)(r+2) & (r+2)(r+3) & \dots & (2r+2)(2r+3) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (r+2)! & \frac{(r+3)!}{2} & \dots & \frac{(2r+3)!}{(r+2)!} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{j,0} \\ \vdots \\ \alpha_{j,r+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.87)$$

Para o planejamento é então necessário um número de derivadas da saída igual a $r + 1$. Como todas as derivadas da saída são iguais a 0 nos pontos de equilíbrio considerados (t_i e t_f), pode-se adicionar arbitrariamente um número $r + 1$ de derivadas nulas em um tempo inicial e final. Para Lévine (2009), esse aumento no número de derivadas para originar o polinômio é interessante, pois permite movimentos de início e parada mais suaves ao movimento, evitando, em alguns casos, oscilações indesejadas no ponto final.

Os fundamentos teóricos que foram apresentados neste capítulo, a respeito da modelagem do arrasto aerodinâmico, modelagem de sistemas, representação em espaço de estados, análise de um sistema não linear através de linearização em torno do ponto de equilíbrio, controle não linear, sistemas com planicidade diferencial e planejamento da trajetória, serviram para introduzir os conceitos que são utilizados no desenvolvimento deste trabalho. Na próxima seção é apresentada uma pesquisa geral sobre o problema de controle de pontes rolantes.

2.5 - PESQUISA GERAL SOBRE O CONTROLE DE PONTES ROLANTES

Os efeitos indesejáveis das pontes rolantes são geralmente causados pelo movimento horizontal do carro da ponte (efeitos inerciais na carga suspensa decorrentes de acelerações impostas ao carro), assim como pelo movimento ascendente ou descendente da carga

suspensa, uma vez que este altera a dinâmica do sistema. No caso de pontes rolantes utilizadas em ambientes abertos, há ainda o efeito produzido pelas forças de arrasto aerodinâmico resultantes da ação do vento sobre a carga. Estes movimentos causam oscilações no cabo de sustentação da carga.

A redução da oscilação e a precisão da trajetória realizada pela carga tornou-se alvo dos estudos de controle de pontes. Esta seção apresenta algumas abordagens e técnicas encontradas na literatura para tratar os problemas relacionados a esse tipo de situação. Os procedimentos adotados para o controle podem variar dependendo da eficiência requerida, do modelo matemático adotado, das condições de contorno a serem satisfeitas, entre outros aspectos.

Através de uma pesquisa geral sobre o controle de pontes, foi possível tomar conhecimento do histórico de técnicas existentes para tais fins, assim como, verificar em outros trabalhos, uma das técnicas de controle aqui apresentadas. O controle via linearização por realimentação dinâmica de estados, que é apresentado em Boustany e d'Andréa-Novel (1992), Cheng e Chen (1996), Aranda *et al.* (2001) e Aranda *et al.* (2002).

Para a ponte rolante, bem como para qualquer manipulador rígido clássico que possua um pêndulo simples, a propriedade de linearização completa via extensão dinâmica, caso todos os estados sejam conhecidos, pode ser obtida (Boustany e d'Andréa-Novel, 1992).

Um observador de estados é apresentado neste trabalho para se obter os estados que não estão disponíveis para medição. Aranda *et al.* (2001) e Aranda *et al.* (2002) também utilizam de observadores para estimar os estados, porém no primeiro é utilizado um observador de ordem reduzida, enquanto que no segundo são projetados dois observadores a título de comparação entre eles, um observador numérico e um observador de alto ganho.

Em Aranda *et al.* (2002) ambos observadores de estado apresentam bom desempenho. A vantagem do observador numérico se dá devido a sua simplicidade, porém é um observador que apresenta sensibilidade a medidas com ruídos. Já o observador de alto ganho requer mais trabalho para seu projeto, porém se mostrou mais robusto para medidas com ruídos e erros nas condições iniciais.

Cheng e Chen (1996) projetaram um controlador que combina a técnica de linearização por realimentação com o controle por atraso de tempo. O polinômio gerado no planejamento da trajetória é o mesmo polinômio apresentado neste trabalho. O controle de sistemas com dinâmicas desconhecidas e perturbações inesperadas por meio do controle por atraso de tempo foi apresentado na pesquisa de Ito e Youcef-Toumi (1990). Nesta técnica utilizam-se observações passadas (com atraso de tempo) dos estados dos sistemas e das entradas de controle para definir uma ação de controle. Este tipo de controle, quando aplicado à ponte rolante em conjunto com a linearização por realimentação, apresenta boa resposta na presença de incertezas e rejeição de perturbação. Isto é demonstrado por Cheng e Chen (1996) com resultados para diferentes condições de transporte da carga.

Boustany e d'Andréa-Novel (1992), alegam que, em seus trabalhos anteriores, simulações numéricas demonstraram que o controlador por realimentação dinâmica é robusto em relação a todos os parâmetros inerciais, exceto a massa da carga. Para contornar este problema é projetado um controlador adaptativo que apresenta bons resultados, mesmo quando a massa é desconhecida e para valores diferentes de massa. No trabalho aqui estudado, o problema causado pelo transporte de cargas com massas diferentes também é abordado, e simulações computacionais demonstram o comportamento do sistema.

Corriga *et al.* (1998) utilizam um modelo de parâmetro linear variante no tempo para implementar um controlador de escalonamento do ganho (*gain-scheduling*). O parâmetro variante considerado é o comprimento do cabo. Eles projetam um modelo invariante no tempo, que não depende do comprimento do cabo, usando uma escala de tempo adequada. A relação da escala de tempo é usada para projetar uma lei de controle para o sistema variante no tempo, que implementa um ganho implícito programado no sistema.

Giua *et al.* (1999) apresentam um controlador projetado por meio da técnica de estabilização da realimentação de estados para sistemas variantes no tempo. O experimento consegue obter um sistema em malha fechada que é equivalente a um sistema estável invariante no tempo, com autovalores definidos por meio da transformação de Lyapunov. Demonstra-se também que um observador de estados pode ser projetado para medir algumas variáveis de controle da ponte rolante.

Kiss *et al.* (2000) demonstraram a possibilidade de se controlar guindastes através de um controlador proporcional derivativo com realimentação da saída. Nesse controle não se tem a necessidade de medição do ângulo ou de posições diretas da carga, e se consegue assegurar a estabilidade assintótica global do sistema para qualquer ponto de equilíbrio especificado pelo controlador. O controle apresentado é de simples implementação e eficiente, no caso de o modelo do guindaste ser suficientemente preciso e as forças de atrito serem satisfatoriamente compensadas, podendo ser utilizado em vários tipos de estruturas físicas diferentes de guindastes.

Em Kiss *et al.* (2001) é realizada uma extensão do trabalho apresentado em Kiss *et al.* (2000) com a intenção de comparar o desempenho de dois controladores com a mesma estrutura e demonstrar que projetar um controlador tendo como referência o ponto final de equilíbrio pode garantir a estabilidade global do sistema (como demonstrado em Kiss *et al.* 2000). Porém, se não for feito um planejamento do movimento, estes resultados podem ser inferiores aos resultados de um controlador que seja baseado em rastreamento e apresente estabilidade local. Isto se dá porque o controlador que apresenta estabilidade global é projetado utilizando a coordenada do ponto final de equilíbrio como referência, mas não especifica qual caminho deve ser feito entre o ponto inicial e o ponto final do movimento. Já o controlador projetado para rastrear uma trajetória de referência, compensando a diferença entre o estado atual do sistema e o estado desejado na trajetória de referência, demonstrou controlar a oscilação da carga mais rapidamente para o mesmo ponto de equilíbrio final do outro controlador, além de percorrer o caminho que lhe foi estabelecido previamente. Se, no rastreamento, o erro inicial entre as condições iniciais e as de referência for pequeno, o desempenho do rastreador de estabilidade local é superior ao do controlador de estabilidade global. É dito também que o planejamento do movimento pode ser realizado, pois o modelo do guindaste apresentado em Kiss *et al.* (2001) possui a característica de planicidade diferencial.

Abdel-Rahman *et al.* (2003) estudam diferentes modelagens dinâmicas e técnicas de controle de guindastes com estruturas físicas diferentes. Trabalhos de guias existentes na literatura, de diversos autores e de inúmeras linhas de pesquisas, são avaliados, classificados e descritos de acordo com suas aplicações e limitações.

Hong e Ngo (2009) fazem uma análise dos diversos meios utilizados para o controle de pontes rolantes, tais como: controle linear, controle não linear, controle difuso, controle de limites, controle adaptativo, controle por modos deslizantes, controle de formatação da entrada e controle ótimo.

Hong e Ngo (2009) consideram que modelos de controle não linear, incluindo os que envolvem linearização da realimentação, apesar de serem muito utilizados, não são robustos o suficiente quando se trata de pontes de grande porte, com cabos compridos e cargas muito pesadas. Nesses casos, eles sugerem que o modelo por distribuição de massa possa ser utilizado para criar um algoritmo de controle que descreva exatamente como é o sistema. Porém, a grande dificuldade neste tipo de caso, é criar uma lei de controle de forma sistemática. A técnica de formatação da entrada mostra habilidade para o controle, porém não apresenta robustez suficiente para ser usada em diversos tipos de pontes. Dependendo do parâmetro de incerteza presente no sistema, este método não é capaz de rejeitar a perturbação externa e, assim, estabilizar a carga. Ressalvas são feitas por Hong e Ngo (2009), dizendo que, qualquer combinação de métodos de controle pode ser considerada uma boa estratégia, desde que permita variações no comprimento do cabo e nas massas do carro e da carga. Isso torna o sistema de controle mais robusto. Porém, enfatiza-se que projetar um controlador híbrido que garanta uma estratégia de controle robusta e eficiente, muitas vezes requer uma complexa modelagem e um custo computacional alto.

Lévine (2009) é com certeza a referência mais influente deste trabalho e será a mais discutida e utilizada. Aborda a técnica de controle para diversos mecanismos através de sistemas que possuem planicidade diferencial e explica os fundamentos e características de tais sistemas. A técnica de se descobrir se um sistema possui a propriedade de planicidade diferencial e utilizá-la para o projeto de um controlador eficiente, é descrita em detalhes ao longo de Lévine (2009), pois permite a solução do problema de controle utilizando a variável de controle desejada, as derivadas temporais dessas variáveis e as respectivas trajetórias de referência. Para o controle da ponte rolante, Lévine (2009) utiliza o controle hierárquico de alto ganho, que é apresentado também neste trabalho, para obter um controlador robusto e eficiente em diferentes escalas de tempo para deslocamentos da carga em um curto período, explorando a característica de sistema com planicidade diferencial da ponte rolante para realizar o planejamento e rastreamento da trajetória.

Alguns projetos de controle apresentados na pesquisa geral, apesar de não terem suas técnicas utilizadas nos projetos de controle realizados neste trabalho, servem como referência de outras técnicas que podem ser encontradas na literatura.

A revisão de literatura realizada proporcionou o conhecimento de alguns métodos de controle de pontes rolantes, que possibilitaram então criar diretrizes para serem seguidas no projeto de controle do sistema aqui apresentado. Nos capítulos que seguem, os conceitos apresentados pela fundamentação teórica nas seções anteriores são aplicados de forma específica para o sistema da ponte rolante. Começando então, com o próximo capítulo, onde se apresenta a modelagem e conseqüentemente a obtenção das equações dinâmicas do sistema da ponte rolante.

3 - MODELAGEM DA PONTE ROLANTE

Neste capítulo, apresentam-se a aplicação das teorias de mecânica de fluidos e de dinâmica de corpos rígidos introduzidas no capítulo anterior para fins de modelagem dinâmica da ponte rolante, incluindo efeitos de dissipação de energia decorrentes de arrasto aerodinâmico resultante do movimento relativo entre a carga transportada e o ar em seu contorno.

3.1 - MODELAGEM DO ARRASTO AERODINÂMICO

3.1.1 - O efeito do ar na ponte rolante

O movimento relativo entre a carga e o ar, estando este em movimento ou não, produz um efeito de dissipação viscosa de energia que afeta o comportamento dinâmico do sistema. Para se modelar esse efeito, há a necessidade de se caracterizar o tipo de escoamento existente em torno da carga. Um dos fatores importantes é a consideração se o escoamento é compressível ou não, o que, segundo Fox e McDonald (2008) pode ser feito por meio do Número de Mach (M) dado pela equação (2.2), que pode ser interpretado como a razão entre as forças de inércia e as forças devido à compressibilidade do fluido. Como já mencionado no capítulo anterior, Fox e McDonald (2008) consideram que escoamentos gasosos com $M < 0,3$ podem ser tratados como incompressíveis.

Quando se considera o fluido como sendo o ar, em condições normais, para que M seja igual a 0,3, é preciso que o fluido esteja em uma velocidade de aproximadamente 103 m/s . Qualquer velocidade abaixo disso resultará em $M < 0,3$ e poderá ser considerado como um escoamento incompressível.

Logo, para fins de análise do efeito do arrasto aerodinâmico na ponte rolante, considera-se que a velocidade do vento atuando no sistema durante o transporte de carga nunca irá ultrapassar 100 m/s . Portanto, em qualquer situação de operação da ponte rolante, o escoamento é tratado como incompressível.

3.1.1.1 - Número de Reynolds

Para que se possa determinar o número de Reynolds, é necessário calcular a velocidade característica do sistema.

Cálculo da velocidade característica

Para o sistema da ponte rolante, a velocidade característica dada pela equação (3.1) é formada pela soma vetorial das componentes referentes à velocidade do vento e à velocidade de deslocamento da carga.

$$\vec{v}_c = \vec{v}_v + \vec{v}_L \quad (3.1)$$

A magnitude do vetor velocidade característica (equação (3.1)) pode ser calculada por meio da lei dos cossenos (equação (3.2)), em que se considera o ângulo α formado entre as direções da velocidade do vento e da velocidade da carga no plano horizontal:

$$v_c^2 = v_v^2 + v_L^2 - 2v_v v_L \cos \alpha . \quad (3.2)$$

Considerando que a velocidade do vento tem a mesma probabilidade de atuação em todos os sentidos na região de um plano horizontal:

$$v_c^2 = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \cdot (v_v^2 + v_L^2 - 2v_v v_L \cos \alpha) d\alpha \right] = [v_v^2 + v_L^2] . \quad (3.3)$$

Cálculo do número de Reynolds (Re) para o sistema

Para o cálculo do número de Reynolds, primeiramente é preciso obter os valores de algumas constantes que são utilizadas para tal cálculo. De acordo com Emanuel (2000) pode-se assumir a densidade ρ e a viscosidade μ do ar como:

$$\rho = 1,177 \text{ kg/m}^3 \text{ a } 27^\circ\text{C e } 1 \text{ atm,}$$

e $\mu = 1,846 \cdot 10^{-5} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ a 27°C e 1 atm .

Aplicando esses valores na equação (2.4) obtém-se:

$$Re = \frac{\rho v_c d}{\mu} = \frac{1,177 (v_v^2 + v_L^2) d}{1,846 \times 10^{-5}} \cong 63759 (v_v^2 + v_L^2) d . \quad (3.4)$$

De acordo com a equação (3.4), para que $Re < 4000$ e o escoamento possa ser classificado como de transição ou laminar, conforme classificação apresentada na seção 2.1.1.1, é preciso que:

$$(v_v^2 + v_L^2) d < 0,0627 , \quad (3.5)$$

Para o estudo aqui apresentado, é considerado que tal situação não existe durante o movimento de cargas grandes e pesadas, transportadas por pontes rolantes em portos e indústrias, conforme é o caso de análise. Logo, percebe-se que, generalizando por considerações práticas, para qualquer caso em que a ponte rolante estiver em operação, o escoamento é turbulento, mesmo em condições em que não haja vento.

3.1.2 - Modelagem da Força de Arrasto Aerodinâmico atuante na carga

Viu-se no capítulo anterior que a equação de Morison para um corpo em movimento em meio a um escoamento turbulento é dada por:

$$F_r = \rho V_{ol} a_v + \rho C_\alpha V_{ol} (a_v - a_L) + \frac{1}{2} \rho C_d A_r (v_v - v_L) |v_v - v_L|. \quad (3.6)$$

Assume-se, para efeito de simulação e obtenção de resultados, que o vento atua na direção X, conforme mostra a Figura 3.1, e em qualquer condição de trabalho da ponte a aceleração do vento é nula ($a_v = 0$).

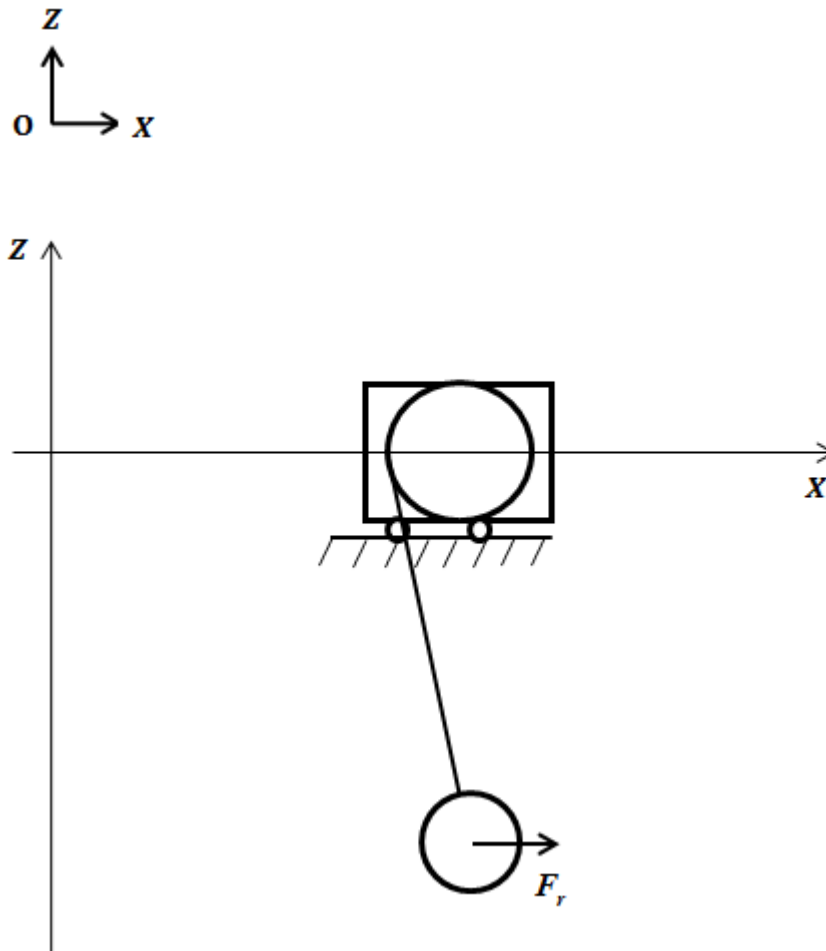


Figura 3.1- Plano XZ do sistema

Logo, a equação da força de arrasto aerodinâmico dada pela equação (3.6), na ausência de aceleração do vento fica como mostra a equação:

$$F_r = -\rho C_\alpha V_{ol} a_L + \frac{1}{2} \rho C_d A_r (v_v - v_L) |v_v - v_L|. \quad (3.7)$$

As respectivas velocidades e acelerações acima devem ser inseridas tendo em conta o sentido de atuação de cada uma delas. Sendo assim, nesta formulação, o sentido contrário da força em relação ao deslocamento da carga já está sendo computado e, não deverá ser computado novamente na obtenção do modelo dinâmico.

Para o caso da ponte rolante, assumiu-se o transporte de uma carga esférica em meio ao ar e o vento atuando na direção X, logo a área resistente, A_r , e o volume, V_{ol} , são calculados pelas equações (3.8) e (3.9), respectivamente:

$$A_r = \pi r_L^2, \quad (3.8)$$

e

$$V_{ol} = \frac{4\pi r_L^3}{3}, \quad (3.9)$$

onde r_L é o raio da carga esférica.

Schmidt (2005) define que o coeficiente de massa adicional, C_α , é calculado pela equação:

$$C_\alpha = \frac{m_\alpha}{m_{fl}} \quad (3.10)$$

e que a massa de fluido deslocada, m_{fl} , é dada por:

$$m_{fl} = V_{ol}\rho. \quad (3.11)$$

Segundo Techet (2010) a massa adicionada é dada pela equação(3.12):

$$m_\alpha = \frac{1}{2}V_{ol}\rho. \quad (3.12)$$

Logo o valor considerado para o coeficiente de massa adicionada pela esfera é de:

$$C_\alpha = 0,5.$$

Segundo Nagurka (2003) o coeficiente de arrasto da esfera em escoamento turbulento é:

$$C_d = 0,48.$$

Como será visto posteriormente, para obtenção do modelo dinâmico é necessário saber qual a energia cinética, a energia potencial e as forças não conservativas atuando no sistema.

Conforme mostrado na equação (3.7), a força de arrasto aerodinâmico é composta por duas forças: a força de inércia e a força de arrasto. Portanto, na equação da força de arrasto aerodinâmico é considerada como força conservativa (F_{r_c}) a parcela proveniente da força de inércia e esta é utilizada no cálculo da energia cinética do sistema, e é considerada como força não conservativa ($F_{r_{nc}}$) a parcela proveniente da força de arrasto.

Logo:

$$F_r = -m_{Fr}a_L + C_1(v_v - v_L)|v_v - v_L|, \quad (3.13)$$

onde:

$$F_r = F_{r_{conservativa}} + F_{r_{nãiconservativa}} = F_{r_c} + F_{r_{nc}}, \quad (3.14)$$

com:

$$m_{Fr} = \rho C_d V_{ol}, \quad \text{e} \quad C_1 = \frac{1}{2} \rho C_d A_r. \quad (3.15)$$

Tem-se então:

$$F_{r_c} = -m_{Fr}a_L, \quad (3.16)$$

e

$$F_{r_{nc}} = C_1(v_v - v_L)|v_v - v_L|. \quad (3.17)$$

3.2 - DESCRIÇÃO E MODELAGEM DO SISTEMA DA PONTE ROLANTE

Para se obter o modelo da ponte rolante, deve-se ter em conta quais as hipóteses que estão sendo assumidas em relação a um processo real.

O modelo esquemático do sistema é mostrado na Figura 3.2.

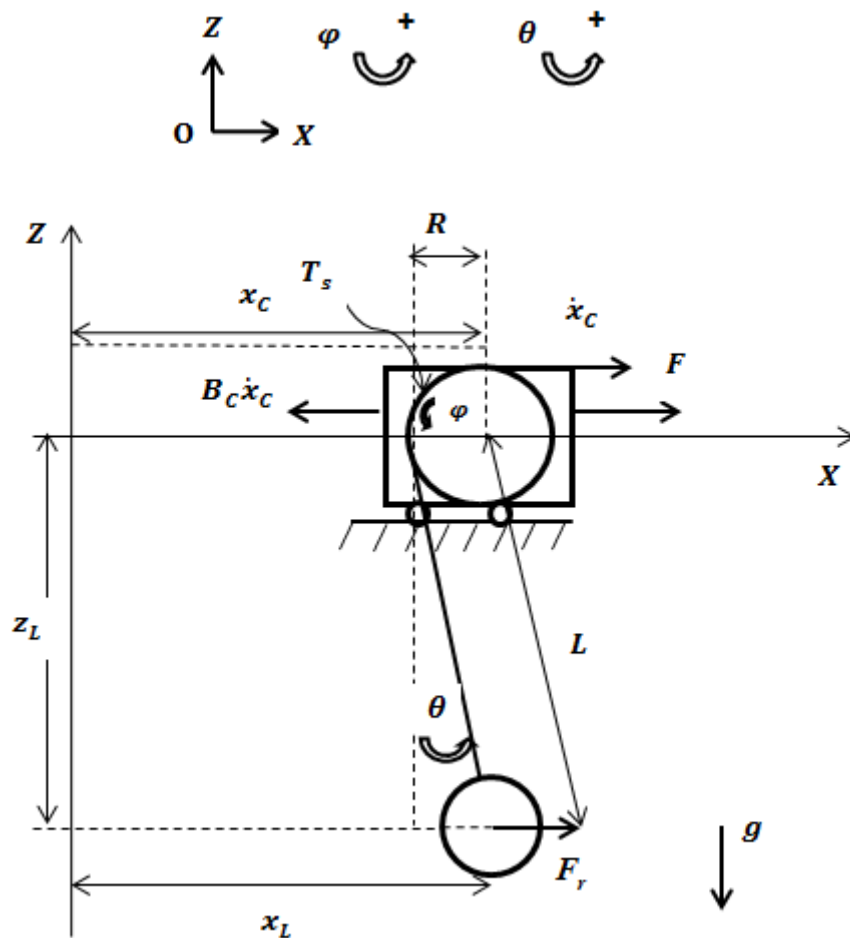


Figura 3.2- Modelo esquemático da ponte rolante

Onde:

x_c posição do carro em relação ao eixo X;

x_L posição da carga em relação ao eixo X;

z_L posição da carga em relação ao eixo Z;

m_c massa do carro;

m_l massa da carga;

φ ângulo de rotação do carretel, positivo no sentido horário;

θ ângulo entre o cabo e o eixo vertical Z, positivo no sentido anti-horário;

F_r força de arrasto aerodinâmico atuando na carga;

F força externa atuando no carro na direção X;

T_s torque aplicado para elevar a carga, positivo no sentido anti-horário, ou seja, quando a carga está descendo;

T_e força de tensão no cabo, relacionada com o torque T_s do motor;

L comprimento do cabo de aço;

R raio do carretel (*spool*);

J_S inércia do motor de enrolamento do carretel;

B_C coeficiente de atrito viscoso na direção de x_C ;

B_S coeficiente de atrito viscoso no eixo do carretel.

O sistema apresenta as seguintes restrições geométricas:

$$x_L = x_C - R + L \sin \theta, \quad (3.18)$$

$$z_L = -L \cos \theta. \quad (3.19)$$

As hipóteses assumidas

Para formular o modelo matemático consideram-se as seguintes hipóteses:

- A carga tem formato esférico;
- A massa do cabo e suas relações dinâmicas são desprezadas;
- Considera-se que o cabo está sempre esticado, ou seja, não faz arcos e que $L > 0$;
- $\dot{L} > 0$ no sentido de crescimento de L ;
- Adota-se θ positivo no sentido anti-horário. Será considerado que $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$;
- Não há forças relacionadas com molas no movimento translacional, considera-se o carro, a correia transportadora, as guias e outros elementos relacionados ao movimento translacional infinitamente rígidos;
- O motor possui potência suficiente para fornecer o torque e a força necessários, sendo saturados em 10000 kg. m² e 100000 N respectivamente (Lévine, 2009);
- A carga não efetuará movimento rotacional, ou seja, o ponto de fixação do cabo é em seu centro de massa;
- A carga permanece em um plano vertical fixo OXZ;
- A posição da carga é descrita pelas coordenadas x_C , L e θ . Logo, as coordenadas generalizadas serão x_C , L e θ .

3.3 - MODELAGEM VIA EQUAÇÕES DE LAGRANGE

Como mostrado anteriormente, para se obterem as equações dinâmicas do sistema através das equações de Lagrange, é necessário calcular a energia cinética, a energia potencial e as forças não conservativas atuando neste sistema em função das coordenadas generalizadas, que são, como mostrado acima: x_C , L e θ .

3.3.1 - Energia Cinética do Sistema (T)

A energia cinética total do sistema é dada pela soma da energia cinética que atua no carro, no motor e na carga:

$$T = T_C + T_m + T_L . \quad (3.20)$$

3.3.1.1 - Carro

A energia cinética do carro é dada pela equação:

$$T_C = \frac{1}{2} m_C \dot{x}_C^2 . \quad (3.21)$$

3.3.1.2 - Motor

A energia cinética rotacional do motor é dada por:

$$T_m = \frac{1}{2} J_S \dot{\phi}^2 ; \quad (3.22)$$

sabendo que:

$$\dot{L} = R\dot{\phi} \quad \rightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{\dot{L}}{R} . \quad (3.23)$$

Logo a equação (3.24) resulta da substituição da equação (3.23) na equação (3.22):

$$T_m = \frac{1}{2} J_s \frac{\dot{L}^2}{R^2}. \quad (3.24)$$

A parcela da energia cinética do motor devida a seu movimento translacional na direção X foi incluída no cálculo da energia cinética do carro, ou seja, a massa do carro inclui as massas do carretel e do motor.

3.3.1.3 - Carga

A energia cinética da carga é dada pela equação:

$$T_L = \frac{1}{2} m_l v_L^2 + \frac{1}{2} m_{Fr} v_L^2, \quad (3.25)$$

onde $\frac{1}{2} m_{Fr} v_L^2$ é a energia cinética introduzida pela parcela conservativa da força de arrasto aerodinâmico.

Fazendo $m_L = m_l + m_{Fr}$, tem-se:

$$T_L = \frac{1}{2} m_L v_L^2, \quad (3.26)$$

onde:

$$\begin{aligned} v_L^2 = |\vec{v}_L|^2 &= \left\| \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L\dot{\theta} \cos \theta \\ 0 \\ L\dot{\theta} \sin \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{L} \sin \theta \\ 0 \\ -\dot{L} \cos \theta \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} \dot{x}_c + L\dot{\theta} \cos \theta + \dot{L} \sin \theta \\ 0 \\ L\dot{\theta} \sin \theta - \dot{L} \cos \theta \end{bmatrix} \right\|^2, \end{aligned} \quad (3.27)$$

e

$$v_L^2 = \dot{x}_c^2 + L^2 \dot{\theta}^2 + \dot{L}^2 + 2\dot{x}_c L \dot{\theta} \cos \theta + 2\dot{x}_c \dot{L} \sin \theta. \quad (3.28)$$

Logo:

$$T_L = \frac{1}{2} m_L (\dot{x}_c^2 + L^2 \dot{\theta}^2 + \dot{L}^2 + 2\dot{x}_c L \dot{\theta} \cos \theta + 2\dot{x}_c \dot{L} \sin \theta). \quad (3.29)$$

3.3.2 - Energia Potencial do Sistema (V)

Como nas hipóteses do sistema é desconsiderado qualquer efeito de mola existente, a única energia potencial é a energia gravitacional, que é medida a partir do eixo do carretel:

$$V = V_{gravitacional}, \quad (3.30)$$

$$V = -m_l g L \cos \theta. \quad (3.31)$$

3.3.3 - Lagrangeano (G)

$$G = T - V \quad (3.32)$$

$$G = \frac{1}{2} (m_c + m_L) \dot{x}_c^2 + \frac{1}{2} \left(m_L + \frac{J_S}{R^2} \right) \dot{L}^2 + \frac{1}{2} m_L L^2 \dot{\theta}^2 + m_L \dot{x}_c L \dot{\theta} \cos \theta + m_L \dot{x}_c \dot{L} \sin \theta + m_l g L \cos \theta \quad (3.33)$$

3.3.4 - Forças Generalizadas

Forças não conservativas

As forças não conservativas atuando no sistema são:

F : força externa proveniente do sistema de controle;

T_s : torque aplicado para elevar a carga. Torque este positivo no sentido anti-horário, ou seja, quando a carga está descendo;

$B_c \dot{x}_c$: atrito viscoso na direção de x_c ;

$B_S \dot{\phi}$: atrito viscoso no eixo do carretel;

$F_{r_{nc}}$: Força não conservativa proveniente da força de arrasto aerodinâmico na carga que, conforme assumido, atua na direção X.

Logo, as forças não conservativas são dadas por:

$$Q_{nc,q} = \frac{\partial \delta W}{\partial q}, \quad (3.34)$$

e

$$Q_{nc,q} = (F - B_C \dot{x}_C) \frac{\partial x_C}{\partial q} + (F_{r_{nc}}) \frac{\partial x_L}{\partial q} + (-T_S + B_S \dot{\phi}) \frac{\partial \delta y_S}{\partial q}. \quad (3.35)$$

Sabendo que:

$$x_L = x_C - R + L \sin \theta, \quad (3.36)$$

$$L = R\varphi, \quad (3.37)$$

e

$$\delta y_S = -\varphi \quad \rightarrow \quad \delta y_S = -\frac{L}{R}, \quad (3.38)$$

tem-se então:

$$Q_{nc,q} = (F - B_C \dot{x}_C) \frac{\partial x_C}{\partial q} + (F_{r_{nc}}) \frac{\partial (x_C - R + L \sin \theta)}{\partial q} + (-T_S + B_S \dot{\phi}) \frac{\partial \left(-\frac{L}{R}\right)}{\partial q}. \quad (3.39)$$

3.3.4.1 - Força não conservativa relacionada a coordenada x_C (Q_{nc,x_C})

$$Q_{nc,x_C} = \frac{\partial \delta W}{\partial x_C} \quad (3.40)$$

$$Q_{nc,x_C} = (F - B_C \dot{x}_C) \frac{\partial x_C}{\partial x_C} + (F_{r_{nc}}) \frac{\partial (x_C - R + L \sin \theta)}{\partial x_C} + (-T_S + B_S \dot{\phi}) \frac{\partial \left(-\frac{L}{R}\right)}{\partial x_C} \quad (3.41)$$

$$Q_{nc,x_C} = F - B_C \dot{x}_C + F_{r_{nc}} \quad (3.42)$$

3.3.4.2 - Força não conservativa relacionada à coordenada L (Q_{nc_L})

$$Q_{nc_L} = \frac{\partial \delta W}{\partial L} \quad (3.43)$$

$$Q_{nc_L} = (F - B_C \dot{x}_C) \frac{\partial x_C}{\partial L} + (F_{r_{nc}}) \frac{\partial (x_C - R + L \sin \theta)}{\partial L} + (-T_S + B_S \dot{\phi}) \frac{\partial \left(-\frac{L}{R}\right)}{\partial L} \quad (3.44)$$

$$Q_{nc_L} = F_{r_{nc}} \sin \theta + \frac{T_S}{R} - \frac{B_S}{R^2} \dot{L} \quad (3.45)$$

3.3.4.3 - Força não conservativa relacionada a coordenada θ (Q_{nc_θ})

$$Q_{nc_\theta} = \frac{\partial \delta W}{\partial \theta} = (F - B_C \dot{x}_C) \frac{\partial x_C}{\partial \theta} + (F_{r_{nc}}) \frac{\partial (x_C - R + L \sin \theta)}{\partial \theta} + (-T_S + B_S \dot{\phi}) \frac{\partial \left(-\frac{L}{R}\right)}{\partial \theta} \quad (3.46)$$

$$Q_{nc_\theta} = F_{r_{nc}} L \cos \theta \quad (3.47)$$

3.3.5 - Equações diferenciais do sistema

Conforme descrito no capítulo 2, as equações dinâmicas do sistema são obtidas por meio da aplicação da equação de Lagrange (equação (3.48)) em relação a cada coordenada generalizada do sistema.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial G}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial G}{\partial q} = Q_{nc_q} \quad (3.48)$$

3.3.5.1 - Coordenada x_C

Aplicando-se a equação (3.48) à coordenada generalizada x_C , obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_c} \right] - \frac{\partial G}{\partial x_c} = Q_{nc_{xc}} , \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_c} = (m_c + m_L)\dot{x}_c + m_L L \dot{\theta} \cos \theta + m_L \dot{L} \sin \theta , \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_c} \right] &= (m_c + m_L)\ddot{x}_c + m_L(\ddot{L} \sin \theta + \dot{L} \dot{\theta} \cos \theta) \\ &+ m_L(\dot{L} \dot{\theta} \cos \theta + L \ddot{\theta} \cos \theta - L \dot{\theta}^2 \sin \theta) , \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_c} = 0 , \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} (m_c + m_L)\ddot{x}_c + m_L(\ddot{L} \sin \theta + \dot{L} \dot{\theta} \cos \theta) + m_L(\dot{L} \dot{\theta} \cos \theta + L \ddot{\theta} \cos \theta - L \dot{\theta}^2 \sin \theta) \\ = F - B_C \dot{x}_c + F_{r_{nc}} . \end{aligned} \quad (3.53)$$

3.3.5.2 - Coordenada L

Aplicando-se a equação (3.48) à coordenada L , obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial G}{\partial \dot{L}} \right] - \frac{\partial G}{\partial L} = Q_{nc_L} , \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{L}} = \left(m_L + \frac{J_S}{R^2} \right) \dot{L} + m_L \dot{x}_c \sin \theta , \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial G}{\partial \dot{L}} \right] = \left(m_L + \frac{J_S}{R^2} \right) \ddot{L} + m_L \ddot{x}_c \sin \theta + m_L \dot{x}_c \dot{\theta} \cos \theta , \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial G}{\partial L} = m_L L \dot{\theta}^2 + m_L \dot{x}_c \dot{\theta} \cos \theta + m_l g \cos \theta , \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \sin \theta \ddot{x}_c + \left(1 + \frac{J_S}{m_L R^2} \right) \ddot{L} \\ = \frac{m_l}{m_L} g \cos \theta + L \dot{\theta}^2 + \frac{1}{m_L} \sin \theta F_{r_{nc}} + \frac{1}{m_L R} T_S - \frac{B_S}{m_L R^2} \dot{L} . \end{aligned} \quad (3.58)$$

3.3.5.3 - Coordenada θ

Aplicando-se a equação (3.48) à coordenada θ , obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial G}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial G}{\partial \theta} = Q_{nc\theta}, \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{\theta}} = m_L \dot{L}^2 \dot{\theta} + m_L \dot{x}_c \dot{L} \cos \theta, \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial G}{\partial \dot{\theta}} \right] = m_L (2L\dot{L}\dot{\theta} + L^2\ddot{\theta}) + m_L (\ddot{x}_c L \cos \theta + \dot{x}_c \dot{L} \cos \theta - \dot{x}_c L \dot{\theta} \sin \theta), \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = -m_L \dot{x}_c L \dot{\theta} \sin \theta + m_L \dot{x}_c \dot{L} \cos \theta - m_l g L \sin \theta, \quad (3.62)$$

$$\cos \theta \ddot{x}_c + L\ddot{\theta} = -2\dot{L}\dot{\theta} - \frac{m_l}{m_L} g \sin \theta + \frac{1}{m_L} \cos \theta F_{r_{nc}}. \quad (3.63)$$

3.3.6 - Equações que modelam o sistema

Tem-se que as equações diferenciais que modelam o sistema são as equações encontradas em (3.53), (3.58) e (3.63), as quais podem ser reescritas isolando-se as derivadas de segunda ordem:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_c = & \text{Beta}(\theta) [J_S \sin \theta (m_L L \dot{\theta}^2 + g m_l \cos \theta) + (J_S + m_L R^2) (-B_C \dot{x}_c + F) \\ & + m_L \sin \theta (B_S \dot{L} - R T_S) + J_S \sin^2 \theta F_{r_{nc}}]; \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \ddot{L} = & \text{Beta}(\theta) [m_C R^2 (m_L L \dot{\theta}^2 + g m_l \cos \theta) + (m_C + m_L \sin^2 \theta) (-B_S \dot{L} + R T_S) \\ & + R^2 \sin \theta (m_L B_C \dot{x}_c - m_L F + m_C F_{r_{nc}})]; \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{\cos \theta}{L} \text{Beta}(\theta) [J_S \sin \theta (m_L L \dot{\theta}^2 + g m_l \cos \theta) + (J_S + m_L R^2)(-B_C \dot{x}_C + F) + m_L \sin \theta (B_S \dot{L} - R T_S) + J_S \sin^2 \theta F_{r_{nc}}] - \frac{1}{L} \left(2L \dot{\theta} + g \frac{m_l}{m_L} \sin \theta - \frac{1}{m_L} \cos \theta F_{r_{nc}} \right). \quad (3.66)$$

Com

$$\text{Beta}(\theta) = \frac{1}{J_S m_C + m_C m_L R^2 + J_S m_L \sin^2 \theta}. \quad (3.67)$$

Está sendo considerado que o movimento da carga da ponte rolante ocorre somente no plano XZ. A força de arrasto atua na direção oposta à da velocidade relativa entre a carga e o vento. A velocidade da carga possui componentes na direção X e Z. Para fins de cálculo da força de arrasto, será considerado que o ângulo formado pelo cabo de sustentação da carga e o eixo vertical Z, (ângulo θ), é suficientemente pequeno ($\theta \approx 0$), que se pode desprezar a componente da velocidade da carga na direção Z, dadas as relativamente baixas velocidades esperadas na direção Z quando $\theta \approx 0$. Assume-se então, que a velocidade da carga é paralela à do vento, tendo então $v_L = \dot{x}_L$, $a_L = \ddot{x}_L$ e $v_v = \dot{x}_v$. Como $\theta \approx 0$, assume-se também que $\sin \theta = \theta$ e $\cos \theta = 1$. Entretanto, esta hipótese é considerada somente para fins de cálculo da força de arrasto. Logo, para substituição nas equações de (3.64) a (3.66), a parcela não conservativa da força de arrasto aerodinâmico ($F_{r_{nc}}$), que antes era dada pela equação (3.17), reescrita abaixo na equação (3.68) é agora dada pela equação (3.69).

$$F_{r_{nc}} = C_1 (v_v - v_L) |v_v - v_L| \quad (3.68)$$

Após a hipótese assumida:

$$F_{r_{nc}} = C_1 (v_v - \dot{x}_L) |v_v - \dot{x}_L|, \quad (3.69)$$

em que:

$$\dot{x}_L = \dot{x}_C + L \dot{\theta} + \dot{L} \theta. \quad (3.70)$$

Tem-se então que:

$$F_{r_{nc}}(x) = C_1(v_v - \dot{x}_c - L\dot{\theta} - \dot{L}\theta)|v_v - \dot{x}_c - L\dot{\theta} - \dot{L}\theta|. \quad (3.71)$$

3.4 - ESPAÇO DE ESTADOS

O sistema de equações dinâmicas dado pelas equações (3.64), (3.65) e (3.66) pode ser representado por um sistema não linear na forma de variáveis de estado:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.72)$$

As funções de saída, y_1 e y_2 , são escolhidas como sendo as posições da carga em relação ao eixo X e ao eixo Z. Essas posições, dadas anteriormente pelas equações (3.18) e (3.19), respectivamente x_L e z_L , agora representam:

$$y_1 = x_c - R + L \sin \theta, \quad (3.73)$$

$$y_2 = -L \cos \theta. \quad (3.74)$$

Fazendo $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ tem-se que:

$$\begin{cases} x_c = x_1 \\ \dot{x}_c = \dot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{x}_c = \ddot{x}_1 = \dot{x}_2 \end{cases} \begin{cases} L = x_3 \\ \dot{L} = \dot{x}_3 = x_4 \\ \ddot{L} = \ddot{x}_3 = \dot{x}_4 \end{cases} \begin{cases} \theta = x_5 \\ \dot{\theta} = \dot{x}_5 = x_6 \\ \ddot{\theta} = \ddot{x}_5 = \dot{x}_6 \end{cases} \begin{cases} F = u_1 \\ T_S = u_2 \end{cases}. \quad (3.75)$$

Logo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2(x) \\ x_4 \\ f_4(x) \\ x_6 \\ f_6(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) \\ 0 & 0 \\ g_{41}(x) & g_{42}(x) \\ 0 & 0 \\ g_{61}(x) & g_{62}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (3.76)$$

Onde:

$$f_2(x) = Beta(x_5) [J_S \sin x_5 (m_L x_3 x_6^2 + g m_l \cos x_5) - (J_S + m_L R^2) B_C x_2 + m_L \sin x_5 B_S x_4 + J_S \sin^2 x_5 F_{r_{nc}}(x)], \quad (3.77)$$

$$g_{21}(x) = Beta(x_5) (J_S + m_L R^2), \quad (3.78)$$

$$g_{22}(x) = -Beta(x_5) m_L R \sin x_5, \quad (3.79)$$

$$f_4(x) = Beta(x_5) [m_C R^2 (m_L x_3 x_6^2 + g m_l \cos x_5) - (m_C + m_L \sin^2 x_5) B_S x_4 + R^2 \sin x_5 (m_L B_C x_2 + m_C F_{r_{nc}}(x))], \quad (3.80)$$

$$g_{41}(x) = -Beta(x_5) m_L R^2 \sin x_5, \quad (3.81)$$

$$g_{42}(x) = Beta(x_5) R (m_C + m_L \sin^2 x_5), \quad (3.82)$$

$$f_6(x) = -\frac{\cos x_5}{x_3} Beta(x_5) [J_S \sin x_5 (m_L x_3 x_6^2 + g m_l \cos x_5) - (J_S + m_L R^2) B_C x_2 + m_L \sin x_5 B_S x_4 + J_S \sin^2 x_5 F_{r_{nc}}(x)] - \frac{1}{m_L x_3} (2m_L x_4 x_6 + g m_l \sin x_5 - \cos x_5 F_{r_{nc}}(x)), \quad (3.83)$$

$$g_{61}(x) = -\frac{\cos x_5}{x_3} Beta(x_5) (J_S + m_L R^2), \quad (3.84)$$

$$g_{62}(x) = \frac{\cos x_5}{x_3} Beta(x_5) m_L R \sin x_5. \quad (3.85)$$

Com

$$Beta(x_5) = \frac{1}{J_S m_C + m_C m_L R^2 + J_S m_L \sin^2 x_5}, \quad (3.86)$$

e

$$F_{rnc}(x) = C_1(v_v - x_2 - x_3x_6 - x_4x_5)|v_v - x_2 - x_3x_6 - x_4x_5|. \quad (3.87)$$

Fazendo $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(x_1, x_3, x_5)$ tem-se que:

$$y_1 = x_1 - R + x_3 \sin x_5, \quad (3.88)$$

$$y_2 = -x_3 \cos x_5. \quad (3.89)$$

Tendo encontrado as equações dinâmicas que modelam o sistema da ponte rolante, a representação em espaço de estados é utilizada na próxima seção para que se obtenha a linearização do sistema em torno do ponto de equilíbrio. Essa linearização permite a análise do comportamento do sistema e auxilia no projeto dos controladores.

3.5 - LINEARIZAÇÃO DO SISTEMA EM TORNO DOS PONTOS DE EQUILÍBRIO

3.5.1 - Pontos de equilíbrio do sistema

Um dos métodos para se conseguir a representação linear em espaço de estados é fazer a linearização do sistema ao redor do ponto de equilíbrio através de sua matriz jacobiana, conforme é mostrado a seguir.

Como visto na equação (2.13), para se achar os pontos de equilíbrio deve-se fazer:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} = 0. \quad (3.90)$$

Nas equações de (3.76), igualando as derivadas das variáveis de estado a zero, as raízes das equações resultantes correspondem a pontos de máximo ou mínimo que podem constituir-se em pontos de equilíbrio do sistema.

$$\begin{aligned}
x_{2eq} &= 0, \\
x_{4eq} &= 0, \\
x_{5eq} &= \operatorname{atan}\left(\frac{F_{r_{nc}}}{gm_l}\right), \\
x_{6eq} &= 0, \\
u_{1eq} &= -gm_l \tan x_5, \\
u_{2eq} &= -gm_l R \frac{1}{\cos x_5}.
\end{aligned} \tag{3.91}$$

Observa-se que as variáveis de estado x_1 (posição horizontal do carro) e x_3 (comprimento do cabo que suspende a carga) não aparecem na resolução das equações para se obterem os pontos de equilíbrio. Isso significa que o equilíbrio do sistema não depende de seus valores, podendo então x_{1eq} e x_{3eq} serem escolhidos arbitrariamente (desde que não violem as restrições do sistema). Como no caso da ponte rolante se interessa em saber o comportamento do sistema após o período de transporte da carga, ou seja, em um tempo final $t = t_f$, os valores x_{1eq} e x_{3eq} podem ser escolhidos como os valores das variáveis de estado x_1 e x_3 no tempo $t = t_f$, ou seja, na posição final do deslocamento, que são, respectivamente, x_{1final} e x_{3final} ou x_{cfinal} e L_{final} .

Como em casos reais a direção e velocidade do vento são parâmetros que se alteram constantemente, é difícil que o sistema encontre equilíbrio se esses parâmetros variarem de modo a causar um efeito significativo no sistema. Desse modo, a partir deste momento, para efeito de análise das características e comportamento da ponte, e para o projeto dos controladores, são ignoradas as perturbações externas causadas pelo vento.

Somente para a simulação das dinâmicas da ponte transportando uma carga é que a perturbação causada pelo vento volta a ser considerada, e fica a cargo do controlador em questão minimizar os efeitos dessa perturbação.

Portanto, para um sistema sem a perturbação do vento, ou seja $\dot{x}_v = 0$ e conseqüentemente $F_{r_{nc}} = 0$, tem-se que os pontos de equilíbrio são:

$$\begin{aligned}
x_{1eq} &= x_{1final} , \\
x_{2eq} &= 0 , \\
x_{3eq} &= x_{3final} , \\
x_{4eq} &= 0 , \\
x_{5eq} &= 0 \text{ ou } x_{5eq} = \pm\pi , \\
x_{6eq} &= 0 , \\
u_{1eq} &= 0 , \\
u_{2eq} &= -gm_l R .
\end{aligned} \tag{3.92}$$

Devido às hipóteses assumidas na modelagem, x_5 não pode ser $\pm\pi$, pois foi considerado que $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Logo o único ponto de equilíbrio para x_5 será: $x_5 = 0$. O que significa analisar os pontos de equilíbrio em:

$$\begin{aligned}
x_{1eq} &= x_{cfinal} , \\
x_{2eq} &= 0 , \\
x_{3eq} &= L_{final} , \\
x_{4eq} &= 0 , \\
x_{5eq} &= 0 , \\
x_{6eq} &= 0 , \\
u_{1eq} &= 0 , \\
u_{2eq} &= -gm_l R .
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Nota-se que, apesar da definição de que para se encontrarem os pontos de equilíbrio de um sistema, consideram-se as entradas nulas, o torque nunca será nulo em estado estacionário, pois o sistema necessita de um torque constante aplicado ao carretel, de modo a compensar o torque constante produzido pela força peso da carga, a qual atua tangencialmente ao carretel. Essa parcela constante de torque não gera efeitos dinâmicos na carga após a sua estabilização, uma vez que é necessária para mantê-la estabilizada em alguma altura, entre os limites de movimento vertical da carga.

3.5.2 - Linearização em torno dos pontos de equilíbrio do sistema

Tendo encontrado os pontos de equilíbrio, pode-se fazer a linearização do sistema tal que:

$$\dot{x}_{eq} + \Delta\dot{x} = \mathbf{F}(x_{eq}, \mathbf{u}_{eq}) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(x_{eq}, \mathbf{u}_{eq})\Delta\mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}(x_{eq}, \mathbf{u}_{eq})\Delta\mathbf{u}, \quad (3.94)$$

$$\mathbf{y}_{eq} + \Delta\mathbf{y} = \mathbf{h}(x_{eq}, \mathbf{u}_{eq}) + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}(x_{eq}, \mathbf{u}_{eq})\Delta\mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}}(x_{eq}, \mathbf{u}_{eq})\Delta\mathbf{u}. \quad (3.95)$$

Com

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{eq} = \begin{bmatrix} x_1 - x_{c\,final} \\ x_2 \\ x_3 - L_{final} \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}, \quad (3.96)$$

$$\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{eq} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 + gm_l R \end{bmatrix}, \quad (3.97)$$

$$\Delta\mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_{eq} = \begin{bmatrix} y_1 - (x_{c\,final} - R) \\ y_2 - (-L_{final}) \end{bmatrix}, \quad (3.98)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(x_{eq}, \mathbf{u}_{eq}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-B_C}{m_c} & 0 & 0 & \frac{gm_l}{m_c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-B_S}{(J_S + R^2 m_L)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{B_C}{m_c L_{final}} & 0 & 0 & -\frac{gm_l}{L_{final}} \left(\frac{1}{m_L} + \frac{1}{m_c} \right) & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.99)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}(x_{eq}, \mathbf{u}_{eq}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_c} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\left(\frac{J_S}{R} + R m_L \right)} \\ -\frac{1}{m_c L_{final}} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.100)$$

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_{eq}, \mathbf{u}_{eq}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & L_{final} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.101)$$

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_{eq}, \mathbf{u}_{eq}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.102)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-B_C}{m_C} & 0 & 0 & \frac{gm_L}{m_C} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-B_S}{(J_S + R^2 m_L)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{B_C}{m_C L_{final}} & 0 & 0 & -\frac{gm_L}{L_{final}} \left(\frac{1}{m_L} + \frac{1}{m_C} \right) & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \Delta \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_C} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{(J_S + R m_L)} \\ \frac{1}{m_C L_{final}} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \Delta \mathbf{u}, \quad (3.103)$$

$$\Delta \mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \Delta \mathbf{x}. \quad (3.104)$$

O novo sistema linear tem como estado variações de \mathbf{x} , como entrada variações de \mathbf{u} e como saída variações de \mathbf{y} . Nomeando essas variações como novas variáveis:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \Delta \mathbf{x}, \\ \mathbf{u}' &= \Delta \mathbf{u}, \\ \mathbf{y}' &= \Delta \mathbf{y}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

A representação do sistema linear fica:

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= Ax' + Bu', \\ y' &= Cx'. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Pode-se notar que a matriz A encontrada na equação (3.99) é singular. De acordo com Khalil (2002), uma matriz como a matriz A ser singular, representa que o sistema possui pontos de equilíbrio múltiplos, o que era esperado por se tratar de um sistema não linear.

A matriz A encontrada não permite prever a estabilidade global do sistema, porém, através dos autovalores de A , pode-se avaliar a estabilidade do sistema na vizinhança do ponto de equilíbrio.

Os valores das constantes da Tabela 3-1, são obtidos dos trabalhos de Cheng e Chen (1996) e Lévine (2009). De acordo com Cheng e Chen (1996), os valores de m_c , J_S , m_L , R e L_{final} podem ser considerados para uma ponte rolante de tamanho médio encontrada em indústrias.

Constante	Valor	Constante	Valor
B_c	20 kg.m^2	m_c	5000 kg
B_S	$8 \text{ kg.m}^2/\text{s}$	m_l	500 kg
g	10 m/s^2	m_{fr}	$8,3197 \text{ kg}$
J_S	50 kg.m^2	m_L	$508,3197 \text{ kg}$
L_{final}	4 m	R	$0,4 \text{ m}$

Tabela 3-1- Valores das constantes utilizadas para linearização

Aplicando as constantes da Tabela 3-1 na matriz A , verifica-se que os autovalores de A , que correspondem aos polos da matriz de transferência do sistema, são:

$$\text{Autovalores de } A \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -3,6309 \times 10^{-3} \\ -60,9147 \times 10^{-3} \\ -184,5635 \times 10^{-6} + 1,6459i \\ -184,5635 \times 10^{-6} - 1,6459i \end{array} \right. \quad (3.107)$$

Como dito na seção 2.2.2 ao menos um autovalor da matriz A se encontra sobre o eixo imaginário, e os outros autovalores estão no lado esquerdo do plano complexo, portanto, nada se pode concluir sobre a estabilidade do sistema original não linear através dos autovalores da matriz A .

3.5.2.1 - Controlabilidade e a Observabilidade do sistema linearizado

Para encontrar a matriz de controlabilidade $Cont$, dada na seção 2.2.3, utilizam-se as matrizes encontradas na equação (3.99) e na equação (3.100) tal que:

$$Cont = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B \quad A^4B \quad A^5B]. \quad (3.108)$$

De onde se encontra que o posto de $Cont$ é igual à ordem n do sistema:

$$Posto(Cont) = 6. \quad (3.109)$$

Logo, se o posto da matriz de controlabilidade é igual a ordem do sistema, o sistema é dito ser controlável (Chen, 1999).

Para se analisar a observabilidade do sistema, utiliza-se as matrizes encontradas nas equações (3.99) e (3.101), e formula-se a matriz de observabilidade $Observ$ dada na seção 2.2.4, tal que:

$$Observ = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \\ CA^5 \end{bmatrix}. \quad (3.110)$$

A liberdade de se escolher a saída desejada do sistema, permite que várias funções de saída possam ser analisadas para se determinar a observabilidade do sistema. Pode-se, por exemplo, considerar a saída como sendo as posições linearizadas da carga em relação ao eixo X e Z, como já havia sido considerado anteriormente:

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & L_{final} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}'. \quad (3.111)$$

Neste caso, seria necessária a medição do ângulo de oscilação para a realimentação de controle do sistema.

Para se evitar a necessidade de sensores que façam a medição do ângulo de oscilação, pode-se considerar a saída como sendo a medida de posição do carro, velocidade de deslocamento do carro, o comprimento do cabo e a velocidade de descida/subida do cabo, ficando então a função de saída como:

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}'. \quad (3.112)$$

Independente da escolha da saída, como sendo a matriz da equação (3.111) ou a matriz da equação (3.112), tem-se que o posto de **Observ** é igual a ordem n do sistema:

$$Posto(Observ) = 6. \quad (3.113)$$

De acordo com Chen (1999), se o posto da matriz de observabilidade for igual a ordem do sistema, esse sistema é dito ser observável. Portanto, o sistema linearizado é observável nas duas opções de função de saída, o que mostra que a escolha destas, pode ficar a cargo das especificações do projeto, como por exemplo, a utilização ou não de sensores de medição do ângulo de oscilação.

No apêndice B são apresentados os códigos do MATLAB® utilizados para análise de controlabilidade e observabilidade do sistema.

Após realizar nesse capítulo a modelagem da força de arrasto, modelagem das equações dinâmica, linearização do sistema, análise de controlabilidade e análise de observabilidade, são apresentados no próximo capítulo os projetos dos controladores da ponte rolante.

4 - CONTROLE DA PONTE ROLANTE

Neste capítulo são projetados dois tipos de controle para a ponte rolante modelada. O primeiro controle, chamado de linearização via realimentação dinâmica da saída, é projetado de forma a demonstrar que a ponte rolante permite este tipo de controle, o que é fator determinante para se afirmar a propriedade de planicidade diferencial (*Flatness*) de um sistema.

O segundo controle apresentado é chamado de controle hierárquico e decidiu-se pela sua implementação devido ao seu bom desempenho e robustez, verificados na literatura em Lévine (2009).

Ambos controladores possuem em sua configuração um rastreador para que se consiga seguir a trajetória de referência previamente planejada.

4.1 - CONTROLE NÃO LINEAR VIA LINEARIZAÇÃO POR REALIMENTAÇÃO DINÂMICA ENTRADA- SAÍDA

Para um sistema ter a característica de permitir uma linearização por realimentação da saída, é necessário que ele possua grau relativo bem definido.

4.1.1 - Grau Relativo do Sistema

De acordo com a definição de como se obter o grau relativo de um sistema MIMO, dada por Isidori (1995) no Anexo I, e considerando \mathbf{x}^0 como os pontos de equilíbrio do sistema, tem-se que um sistema não linear multivariável tem um vetor de grau relativo $\{r_1, \dots, r_m\}$ em um ponto \mathbf{x}^0 se:

(i)

$$L_{g_i} L_f^k h_i(\mathbf{x}) = 0. \quad (4.1)$$

Para todo $1 \leq j \leq m$, para todo $k < r_i - 1$; para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo \mathbf{x} em uma vizinhança de \mathbf{x}^0 .

(ii) A matriz $m \times m$:

$$\mathbf{A}_{rd}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

é não singular em $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$.

Analisando-se as condições para o sistema da ponte rolante, tem-se que para $k = 0$, em $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$:

$$\mathbf{A}_{rd}(\mathbf{x}^0) = L_g \mathbf{h}(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

e $\mathbf{A}_{rd}(\mathbf{x})$ é singular.

Para $k = 1$, em $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$:

$$\mathbf{A}_{rd}(\mathbf{x}^0) = L_g L_f \mathbf{h}(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-m_c R}{(m_L m_c R^2 + J_S m_c)} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

e $\mathbf{A}_{rd}(\mathbf{x})$ é singular.

Para $k = 2$, em $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$

$$\mathbf{A}_{rd}(\mathbf{x}^0) = L_g L_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{B_S m_c^2 R}{(m_L m_c R^2 + J_S m_c)^2} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

e $\mathbf{A}_{rd}(\mathbf{x})$ é singular.

Não é necessário analisar a matriz para $k = 3$, pois segundo a definição:

$$r_1 + \cdots + r_m \leq n. \quad (4.6)$$

E em $k = 3$ a equação acima já não se faz mais verdadeira, pois $k < r_i - 1$, e para $k = 3$ a soma de r_1 e r_2 seria maior que a ordem do sistema n .

Pode-se concluir que o sistema não tem grau relativo bem definido em $x = x^0$.

4.1.2 - Algoritmo de extensão dinâmica e projeto do controlador

O primeiro passo do algoritmo de extensão dinâmica de Isidori (1995) apresentado no anexo II, consiste em linearizar o comportamento entrada-saída de uma saída escalar. Nesta etapa w_1 e w_2 são as novas entradas de controle. A realimentação preliminar é dada por:

$$u_1 = w_1 \quad (4.7)$$

e

$$u_2 = \frac{1}{a_{22}(x)} (p(x) + q(x)\xi - a_{21}(x)w_1). \quad (4.8)$$

Com

$$a_{21}(x) = L_{g_1} L_f h_2(x) = -Beta(x_5) J_S \sin x_5 \cos x_5, \quad (4.9)$$

$$a_{22}(x) = L_{g_2} L_f h_2(x) = -Beta(x_5) m_C R \cos x_5, \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} p(x) &= -L_f^2 h_2(x) \\ &= -Beta(x_5) \left(J_S m_C x_3 x_6^2 \cos x_5 \right. \\ &\quad \left. - g \frac{m_l}{m_L} (J_S m_C \sin^2 x_5 + m_C m_L R^2 + J_S m_L \sin^2 x_5) \right. \\ &\quad \left. + m_C \cos x_5 B_S x_4 + J_S \sin x_5 \cos x_5 B_C x_2 \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Sendo ξ a nova variável de estado adicionada (que estende o sistema), $q(x) = 1$ e $Beta(x_5)$ dado pela equação (3.67).

Resultando em:

$$\begin{aligned}
u_2 = & -\frac{1}{m_C R \cos x_5} \left(-J_S m_C x_3 x_6^2 \cos x_5 \right. \\
& + g \frac{m_l}{m_L} (J_S m_C \sin^2 x_5 + m_C m_L R^2 + J_S m_L \sin^2 x_5) \\
& - m_C \cos x_5 B_S x_4 - J_S \sin x_5 \cos x_5 B_C x_2 + \frac{\xi}{\text{Beta}(x_5)} \\
& \left. + J_S \sin x_5 \cos x_5 w_1 \right). \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Sabendo que:

$$\ddot{y}_1 = L_f^2 h_1(x) + L_{g_1} L_f h_1(x) u_1 + L_{g_2} L_f h_1(x) u_2, \tag{4.13}$$

$$\ddot{y}_1 = -tg x_5 \left(g \frac{m_l}{m_L} + \xi \right) \tag{4.14}$$

e

$$\ddot{y}_2 = L_f^2 h_2(x) + L_{g_1} L_f h_2(x) u_1 + L_{g_2} L_f h_2(x) u_2, \tag{4.15}$$

$$\ddot{y}_2 = \xi. \tag{4.16}$$

Fazendo $\xi = w_2$:

$$\ddot{y}_2 = w_2. \tag{4.17}$$

O que mostra a obtenção de uma relação linear entre o comportamento de entrada-saída.

$$\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \frac{m_l}{m_L} tg x_5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -tg x_5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

O segundo passo do algoritmo (Anexo II) consiste em adicionar dois integradores puros de forma que:

$$u_1 = w_1 = q_1 \quad \text{e} \quad \begin{cases} \xi = w_2 = z_1 \\ \dot{\xi} = \dot{z}_1 = z_2 \\ \ddot{\xi} = \dot{z}_2 = q_2 \end{cases} \quad (4.19)$$

Onde q_1 e q_2 são as novas variáveis de controle e z_1 e z_2 são as variáveis de estado do sistema estendido.

O sistema estendido é então dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2(x) + g_{21}(x)q_1 + g_{22}(x)u_2 \\ x_4 \\ f_4(x) + g_{41}(x)q_1 + g_{42}(x)u_2 \\ x_6 \\ f_6(x) + g_{61}(x)q_1 + g_{62}(x)u_2 \\ z_2 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Com:

$$u_2 = -\frac{1}{m_c R \cos x_5} \left(-J_S m_c x_3 x_6^2 \cos x_5 + g \frac{m_l}{m_L} (J_S m_c \sin^2 x_5 + m_c m_L R^2 + J_S m_L \sin^2 x_5) - m_c \cos x_5 B_S x_4 - J_S \sin x_5 \cos x_5 B_C x_2 + \frac{z_1}{\text{Beta}(x_5)} + J_S \sin x_5 \cos x_5 q_1 \right). \quad (4.21)$$

E $f_n(x)$ e $g_{nm}(x)$ são dados pelas equações de (3.77) a (3.85).

Após a extensão dinâmica, deve-se derivar a saída até que as novas variáveis de controle q_1 e q_2 apareçam na equação que se está derivando:

$$y_1^{(3)} = -\left[\dot{x}_5 (1 + tg^2 x_5) \left(g \frac{m_l}{m_L} + z_1 \right) + tg x_5 z_2 \right], \quad (4.22)$$

$$y_2^{(3)} = \dot{w}_2 = \dot{z}_1 = z_2. \quad (4.23)$$

Como as variáveis de controle não apareceram na equação, a derivação é feita novamente:

$$y_1^{(4)} = \frac{\left(g \frac{m_l}{m_L} + z_1\right)}{m_C x_3 \cos x_5} q_1 - tg x_5 q_2 + Art(x, z), \quad (4.24)$$

$$y_2^{(4)} = q_2. \quad (4.25)$$

Com:

$$\begin{aligned} Art(x, z) = & \frac{1}{m_C x_3 \cos^3 x_5} \left(g \frac{m_l}{m_L} + z_1\right) \left(-\frac{2m_C x_3 x_6 z_2 \cos x_5}{\left(g \frac{m_l}{m_L} + z_1\right)} \right. \\ & - 2m_C x_3 \sin x_5 x_6^2 + 2m_C x_4 x_6 \cos x_5 + gm_C \frac{m_l}{m_L} \sin x_5 \cos x_5 \\ & \left. + \left(g \frac{m_l}{m_L} + z_1\right) m_L \sin x_5 \cos x_5 - B_C x_2 \cos^2 x_5 \right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

As variáveis de controle apareceram em função da quarta derivada das funções de saída. Em forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} y_1^{(4)} \\ y_2^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(g \frac{m_l}{m_L} + z_1\right) & -tg x_5 \\ \frac{1}{m_C x_3 \cos x_5} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Art(x, z) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

A matriz de desacoplamento do sistema estendido é dada por:

$$Dec(x, z) = \begin{bmatrix} \left(g \frac{m_l}{m_L} + z_1\right) & -tg x_5 \\ \frac{1}{m_C x_3 \cos x_5} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

A qual será sempre não singular para as condições impostas ao sistema de que $x_5 \neq \pm \frac{\pi}{2}$ e o comprimento do cabo representado por x_3 nunca será zero. Já a condição para não singularidade, que:

$$z_1 \neq g \frac{m_l}{m_L}, \quad (4.29)$$

é analisada no capítulo 5 para cada situação específica de transporte. É considerado para todos os casos que $\frac{m_l}{m_L} \approx 1$, e para que o controle por realimentação dinâmica não tenha singularidade é preciso que:

$$z_1 \neq g \quad \rightarrow \quad z_1 \neq 10.$$

Logo, se $Dec(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ não apresentar singularidade ao se verificar a condição acima, $Dec(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ pode ser invertida:

$$Dec^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \frac{m_C x_3 \cos x_5}{\left(g \frac{m_l}{m_L} + z_1\right)} & \frac{m_C x_3 \sin x_5}{\left(g \frac{m_l}{m_L} + z_1\right)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Portanto, o sistema que agora é um novo sistema estendido, possui um vetor grau relativo \mathbf{r} bem definido $\{r_1, r_2\}$ com $r_1 = 4$ e $r_2 = 4$. O grau relativo do novo sistema estendido é igual a sua dimensão de estado (ordem) e é dado por:

$$r = r_1 + r_2 = 8. \quad (4.31)$$

Logo, o novo sistema obtido através da extensão dinâmica pode ser desacoplado de forma a ser comandado por uma lei de controle não interativo:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = Dec^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \begin{bmatrix} y_1^{(4)} - Art(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \\ y_2^{(4)} \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

Com:

$$v_1 = y_1^{(4)}, \quad (4.33)$$

$$v_2 = y_2^{(4)}. \quad (4.34)$$

As equações (4.33) e (4.34) representam então a linearização por realimentação dinâmica entrada-saída além de, como dito na seção 2.3.1.1, servirem para provar a propriedade de planicidade diferencial do sistema da ponte rolante.

Percebe-se, então, que o sistema pode ser planejado de forma a se projetarem as saídas, $y_1^{(4)}$ e $y_2^{(4)}$, de acordo com a trajetória planejada e especificações de controle pré-definidas. Como para a ponte rolante se deseja obter o rastreamento assintótico de uma trajetória desejada previamente planejada, podem-se projetar as novas entradas de controle tais que:

$$y_1^{(4)} = y_{1ref}^{(4)} - k_{31}(y_1^{(3)} - y_{1ref}^{(3)}) - k_{21}(\ddot{y}_1 - \ddot{y}_{1ref}) - k_{11}(\dot{y}_1 - \dot{y}_{1ref}) - k_{01}(y_1 - y_{1ref}), \quad (4.35)$$

$$y_2^{(4)} = y_{2ref}^{(4)} - k_{32}(y_2^{(3)} - y_{2ref}^{(3)}) - k_{22}(\ddot{y}_2 - \ddot{y}_{2ref}) - k_{12}(\dot{y}_2 - \dot{y}_{2ref}) - k_{02}(y_2 - y_{2ref}). \quad (4.36)$$

em que y_{1ref} e y_{2ref} são as trajetórias desejadas da saída que servem de referência para o rastreador.

Analisando q_1 e q_2 (equação (4.32)), pode-se concluir que o controlador exige para realimentação o conhecimento dos estados do sistema e de suas derivadas, dos ganhos do controlador e das trajetórias das saídas desejadas e de suas derivadas até a quarta ordem.

Dentre os estados necessários para a realimentação do controlador, assume-se que as variáveis de estado referentes à posição do carro (x_c), à velocidade do carro (\dot{x}_c), ao comprimento do cabo (L) e à velocidade de subida/descida do cabo (\dot{L}), que correspondem a, respectivamente, x_1, x_2, x_3 e x_4 , são obtidos por sensores de posição e de velocidade. Já para a obtenção do ângulo de oscilação (θ) e da velocidade angular ($\dot{\theta}$), que correspondem a x_5 e x_6 , respectivamente, não é utilizado sensor. As variáveis de estado x_5 e x_6 são dadas por observadores de estado.

As trajetórias desejadas da saída e suas derivadas são dadas através de planejamento da trajetória.

Portanto, tem-se um sistema de controle realimentado por estados medidos (através de sensores sem ruído), estados estimados (pelos observadores) e estados de referência desejados (pelo planejamento da trajetória). A figura abaixo representa o sistema controlado por linearização via realimentação dinâmica da saída:

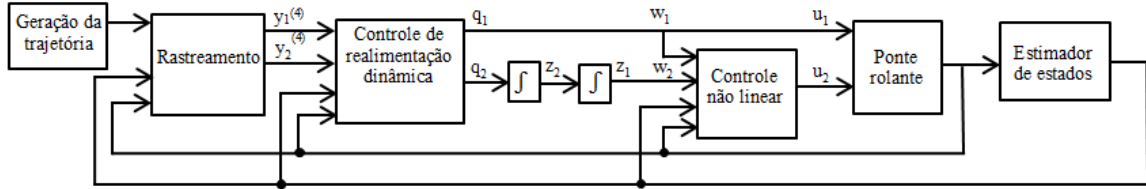


Figura 4.1- Sistema controlado por linearização via realimentação dinâmica da saída

4.1.3 - Ganhos de realimentação

Os ganhos do controlador são obtidos por meio da matriz de erro (desvio) das variáveis. Os ganhos de realimentação \mathbf{k} devem ser projetados de forma que os autovalores das matrizes dos erros da saída y_1 (equação (4.37)) e suas derivadas e da saída y_2 (equação(4.38)) e suas derivadas tenham parte real negativa.

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \ddot{e}_1 \\ e_1^{(3)} \\ e_1^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_{01} & -k_{11} & -k_{21} & -k_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \dot{e}_1 \\ \ddot{e}_1 \\ e_1^{(3)} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_2 \\ \ddot{e}_2 \\ e_2^{(3)} \\ e_2^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_{02} & -k_{12} & -k_{22} & -k_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ \dot{e}_2 \\ \ddot{e}_2 \\ e_2^{(3)} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Como mostrado anteriormente, o sistema linearizado da ponte rolante possui matriz de controlabilidade de posto igual a 6, que é a ordem do sistema, e é, portanto, totalmente controlável. Um sistema totalmente controlável pode ter todos os seus polos alocados arbitrariamente, de acordo com as características desejadas em seu funcionamento como, por exemplo, sua frequência natural e coeficiente de amortecimento. Os autovalores da

matriz de ganhos do controlador devem então ser projetados de forma a fornecer os polos desejados pelo controlador.

Com o intuito de se inserir via controlador um amortecimento crítico no sistema, escolhe-se um polo real puro negativo com módulo igual à frequência natural de oscilação do pêndulo, representado pelo comprimento do cabo e pela carga. Essa frequência natural de oscilação é avaliada de acordo com a saída analisada em questão, se y_1 ou y_2 .

Para a definição dos ganhos de realimentação em relação à saída y_1 (que se refere à posição da carga em X), a frequência natural de oscilação do pêndulo em relação ao movimento da carga em X é dada pela equação (4.39):

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (4.39)$$

em que g é a aceleração da gravidade e L , o comprimento do cabo.

O valor de L é definido no ponto onde este tem seu valor máximo, o que corresponde ao valor de L inicial, L_i , antes de ser iniciado o transporte da carga. Este valor é encontrado no Apêndice A na tabela de valores das constantes utilizadas para cálculos (Tabela A-1).

Logo:

$$\omega_{1n} = \sqrt{\frac{10}{8}} = 1,12 .$$

Portanto, um polo é escolhido como sendo real puro negativo com módulo igual à frequência natural encontrada. Os outros três polos necessários para se completarem os quatro ganhos requeridos pela matriz de erro referente à saída y_1 e suas derivadas, representada na equação ((4.37)), são projetados suficientemente próximos do polo escolhido. No apêndice B são apresentados os códigos do MATLAB® utilizados para os cálculos dos ganhos do controlador. Os valores escolhidos para os polos são:

$$\begin{cases} p_{01} = -1,12 \\ p_{11} = -1,22 \\ p_{21} = -1,02 \\ p_{31} = -0,92 \end{cases} .$$

Para se obterem os polos mostrados acima os ganhos necessários na realimentação devem ter os seguintes valores:

$$\begin{cases} k_{01} = 1,2822 \\ k_{11} = 4,8467 \\ k_{21} = 6,8444 \\ k_{31} = 4,2800 \end{cases} .$$

Para se obterem os ganhos de realimentação em relação à saída y_2 (que se refere a posição da carga em Z), a frequência natural de oscilação na direção Z da carga foi escolhida como sendo o dobro da frequência utilizada anteriormente (equação(4.39)). Isso foi devido ao fato de que a cada ciclo de oscilação realizado pela carga em relação a X, dois ciclos de oscilação são realizados em relação a Z. Logo a frequência natural será dada por:

$$\omega_{2n} = 2\sqrt{\frac{g}{L}} = 2,24 .$$

Pode-se concluir, que os polos desejados para a matriz de erro em relação à saída y_2 e suas derivadas, representada na equação (4.38), serão o dobro dos polos desejados para a matriz de erro em relação à saída y_1 e suas derivadas:

$$\begin{cases} p_{02} = -2,24 \\ p_{12} = -2,44 \\ p_{22} = -2,04 \\ p_{32} = -1,84 \end{cases} .$$

Para se obterem os polos acima, os ganhos necessários na realimentação são:

$$\begin{cases} k_{02} = 20,5157 \\ k_{12} = 38,7734 \\ k_{22} = 27,3776 \\ k_{32} = 8,56000 \end{cases} .$$

4.1.4 - Observador de estados

Como foi dito anteriormente, é preciso estimar as variáveis de estado referentes ao ângulo de oscilação (θ) e à velocidade angular ($\dot{\theta}$), que correspondem a x_5 e x_6 , respectivamente. As outras variáveis de estado serão obtidas admitindo-se a existência de sensores cujas medições não possuem ruído.

Para estimar x_5 e x_6 , projeta-se um observador de estados sem ruído, utilizando o sistema linearizado dado pela matriz \mathbf{A} (equação (3.99)), matriz \mathbf{B} (equação (3.100)) e, considerando que as saídas são constituídas das variáveis que se podem medir diretamente por sensores, pela matriz \mathbf{C}_{ob} (equação (3.112)) como sendo a matriz de saída.

Conforme mostrado na seção 3.5.2.1, o sistema é totalmente observável e, portanto, permite a alocação arbitrária dos polos do observador. A matriz de ganho \mathbf{H} é então projetada para alocar os polos do observador no lugar desejado. Para que estes tenham resposta mais rápida que os polos do controlador, os polos do observador serão alocados mais à esquerda no semi plano esquerdo. Seguindo a recomendação de Ogata (2003), os polos do observador são projetados para terem partes reais negativas cinco vezes superiores, em módulo, às dos polos do controlador.

Escolhendo como referência o polo do controlador do movimento da carga em X que corresponde à frequência natural, os polos do observador são então escolhidos com os valores descritos abaixo, em que o polo p_{ob1} foi obtido multiplicando-se o polo p_{01} por 5 e os demais polos do observador (p_{ob2} a p_{ob6}), subtraindo-se um pequeno valor (0,1) de p_{ob1} sucessivamente, de modo a não haver polos múltiplos. No apêndice B são apresentados os códigos do MATLAB® utilizados para os cálculos dos ganhos do observador.

$$\begin{aligned}
p_{ob_1} &= -5,6 \\
p_{ob_2} &= -5,7 \\
p_{ob_3} &= -5,8 \\
p_{ob_4} &= -5,9 \\
p_{ob_5} &= -6,0 \\
p_{ob_6} &= -6,1
\end{aligned}$$

Os polos de malha fechada do sistema de controle realimentado por estado observado consistem nos polos introduzidos pelo projeto do controlador e nos polos introduzidos pelo projeto do observador. Como dito na seção 2.3.2, a determinação dos polos para o controlador e a determinação dos polos para o observador são independentes entre si, por isso pode-se realizar a alocação de polos de cada um deles separadamente.

4.2 - REPRESENTAÇÃO DA PONTE ROLANTE COMO UM SISTEMA EM FUNÇÃO DE SUAS SAÍDA PLANAS

Uma das maneiras de se verificar se um sistema é diferencialmente plano é descobrir se ele permite uma realimentação dinâmica do tipo endógena. A linearização via realimentação dinâmica da seção 4.1 prova então que o sistema da ponte rolante possui a característica de planicidade diferencial (*Flatness*).

Como dito na seção 2.4, um sistema diferencialmente plano permite que todas as variáveis deste sistema sejam dadas em função de suas saídas planas e um número finito de suas derivadas. Considera-se que as saídas planas da ponte rolante são dadas pelas posições da carga em relação aos eixos X e Z, e que estas variáveis têm suas trajetórias de referência previamente definidas por meio do planejamento do movimento e da geração da trajetória. Desta forma, todo o sistema é dado em relação às trajetórias de referência obtidas em função do movimento que se deseja obter da carga. Logo, as equações que serão mostradas a seguir (da equação (4.40) à equação (4.55)) confirmam o que foi mostrado em Lévine (2009), que é possível encontrar todas as variáveis do sistema da ponte em função das saídas planas x_L e z_L .

Assim como feito na linearização por realimentação de estados, considera-se que a força de arrasto aerodinâmico atua no sistema sempre como uma perturbação externa. Dessa forma, na representação das variáveis em função das saídas planas para o posterior

planejamento da trajetória de referência, a força de arrasto não é computada. Sendo assim, ela atua no sistema como uma perturbação, cabendo ao rastreador reduzir seus efeitos em relação à posição da carga.

Considerando as restrições geométricas já apresentadas nas equações (3.18) e (3.19), e as equações obtidas através da Lei de Newton:

$$m_C \ddot{x}_C = -B_C \dot{x}_C + T_e \sin \theta + F , \quad (4.40)$$

$$\frac{J_S}{R} \ddot{L} = B_S \dot{L} + T_e R - T_S , \quad (4.41)$$

$$m_l \ddot{x}_L = -T_e \sin \theta , \quad (4.42)$$

e

$$m_l \ddot{z}_L = T_e \cos \theta - m_l g , \quad (4.43)$$

em que T_e representa a força de tensão relacionada com o torque T_s do motor.

Ou em forma de espaço de estados:

$$x_L = x_1 - R + x_3 \sin x_5 , \quad (4.44)$$

$$z_L = -x_3 \cos x_5 , \quad (4.45)$$

$$m_C \dot{x}_2 = -B_C x_2 + T_e \sin x_5 + u_1 , \quad (4.46)$$

$$\frac{J_S}{R} \dot{x}_4 = B_S x_4 + T_e R - u_2 , \quad (4.47)$$

$$m_l \dot{x}_L = -T_e \sin x_5 , \quad (4.48)$$

$$m_l \dot{z}_L = T_e \cos x_5 - m_l g . \quad (4.49)$$

Manipulando e combinando as equações acima, obtém-se:

$$\sin x_5 = \frac{-m_L \ddot{x}_L}{\sqrt{m_l^2 (\ddot{z}_L + g)^2 + (m_L \ddot{x}_L)^2}}, \quad (4.50)$$

$$\cos x_5 = \frac{m_l (\ddot{z}_L + g)}{\sqrt{m_l^2 (\ddot{z}_L + g)^2 + (m_L \ddot{x}_L)^2}}, \quad (4.51)$$

$$\tan x_5 = \frac{-m_L \ddot{x}_L}{m_l (\ddot{z}_L + g)}, \quad (4.52)$$

$$T_e = \sqrt{m_l^2 (\ddot{z}_L + g)^2 + (m_L \ddot{x}_L)^2}, \quad (4.53)$$

$$x_1 = x_L + R - \frac{m_L \ddot{x}_L z_L}{m_l (\ddot{z}_L + g)}, \quad (4.54)$$

$$x_3 = \sqrt{\left(\frac{m_L \ddot{x}_L z_L}{m_l (\ddot{z}_L + g)} \right)^2 + z_L^2}. \quad (4.55)$$

Comprovando-se também que, substituindo as equações encontradas de (4.50) a (4.55) nas equações (4.46) e (4.47), as entradas u_1 e u_2 (que representam a força (F) e o torque (T_S), respectivamente), são dependentes das variáveis acima e, portanto, também podem ser demonstrados em função das saídas planas.

O que demonstra então, que todas as variáveis do sistema da ponte rolante podem ser escritas como funções de x_L e z_L e de suas derivadas até ordem 4, provando novamente a característica de planicidade diferencial da ponte rolante.

4.2.1 - Planejamento da trajetória

Devido à característica da ponte rolante ser um sistema diferencialmente plano, o planejamento da trajetória pode ser realizado de modo que todo o sistema seja dependente das suas saídas planas.

A geração da trajetória será dada conforme a interpolação polinomial mostrada na seção 2.4.1. Considera-se que a carga está em repouso em um tempo inicial t_i , antes do início do movimento de transporte, e que, após um período de tempo T_t , a carga volta ao repouso em um tempo final t_f .

Foi demonstrado na seção 4.1 que, para a linearização por realimentação dinâmica da saída, é necessário o conhecimento das trajetórias de referência das saídas y_1 e y_2 e de suas derivadas até a ordem 4. Essas saídas correspondem às saídas do sistema referentes a x_L e z_L , respectivamente, e a suas derivadas.

Da mesma forma, na representação do sistema por suas saídas planas, equações (4.50) a (4.55), demonstra-se que, para explicitar todas as variáveis em função das saídas planas x_L e z_L , as trajetórias das saídas de referência precisam ser planejadas até a derivada de quarta ordem.

O sistema requisita o planejamento tanto da saída plana x_L , como da saída plana z_L , porém, como estas estão submetidas às mesmas condições de movimento (repouso inicial e repouso final), o cálculo do polinômio é feito uma só vez e aplicado para as duas saídas.

Logo, tem-se as saídas no tempo inicial e as saídas no tempo final conforme mostrado na equação (4.56) e (4.57), respectivamente.

$$y_1(t_i), \dots, y_1^{(r+1)}(t_i), \quad y_2(t_i), \dots, y_2^{(r+1)}(t_i) \quad (4.56)$$

$$y_1(t_f), \dots, y_1^{(r+1)}(t_f), \quad y_2(t_f), \dots, y_2^{(r+1)}(t_f) \quad (4.57)$$

Assumindo condição de equilíbrio no tempo inicial (t_i) e no tempo final (t_f) obtêm-se as restrições:

$$\begin{aligned} \dot{y}_j(t_i) &= 0, \quad \dot{y}_j(t_f) = 0; \\ \ddot{y}_j(t_i) &= 0, \quad \ddot{y}_j(t_f) = 0; \\ y_j^{(3)}(t_i) &= 0, \quad y_j^{(3)}(t_f) = 0; \\ y_j^{(4)}(t_i) &= 0, \quad y_j^{(4)}(t_f) = 0. \end{aligned} \quad (4.58)$$

De acordo com a equação (2.86), repetida aqui na equação (4.59) para facilitar o entendimento, a representação polinomial das variáveis $y_1(t)$ e $y_2(t)$ é obtida por meio da solução do sistema de equações resultante:

$$y_j(t) = y_j(t_i) + (y_j(t_f) - y_j(t_i)) \left(\frac{t - t_i}{t_f - t_i} \right)^{r+2} \left(\sum_{k=0}^{r+1} \alpha_{j,k} \left(\frac{t - t_i}{t_f - t_i} \right)^k \right) \quad (4.59)$$

em que:

$$j = 1, 2 \quad r = 3 \quad t_i = 0 \quad T = t_f - t_i \quad y_j(t_i) = y_{j_i} \quad y_j(t_f) = y_{j_f} .$$

As incógnitas, $\alpha_{j,0}, \dots, \alpha_{j,r+1}$, são obtidas resolvendo-se a equação matricial mostrada na equação (4.60), cujos valores são mostrados na equação (4.61).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 20 & 30 & 42 & 56 & 72 \\ 60 & 120 & 210 & 336 & 504 \\ 120 & 360 & 840 & 1680 & 3024 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{j,0} \\ \alpha_{j,1} \\ \alpha_{j,2} \\ \alpha_{j,3} \\ \alpha_{j,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{j,0} \\ \alpha_{j,1} \\ \alpha_{j,2} \\ \alpha_{j,3} \\ \alpha_{j,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 126 \\ -420 \\ 540 \\ -315 \\ 70 \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

Logo, a trajetória de referência para o movimento da carga é dada por:

$$y_{jref}(t) = y_{j_i} + (y_{j_f} - y_{j_i}) \left(126 \left(\frac{t}{T} \right)^5 - 420 \left(\frac{t}{T} \right)^6 + 540 \left(\frac{t}{T} \right)^7 - 315 \left(\frac{t}{T} \right)^8 + 70 \left(\frac{t}{T} \right)^9 \right). \quad (4.62)$$

Da trajetória desejada acima, pode-se, por meio de simples derivação, encontrar as trajetórias de referência para as derivadas até ordem 4, conforme mostram as equações (4.63) a (4.66):

$$\begin{aligned} \dot{y}_{jref}(t) = (y_{j_f} - y_{j_i}) & \left(630 \left(\frac{t}{T} \right)^4 - 2520 \left(\frac{t}{T} \right)^5 + 3780 \left(\frac{t}{T} \right)^6 - 2520 \left(\frac{t}{T} \right)^7 \right. \\ & \left. + 630 \left(\frac{t}{T} \right)^8 \right), \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_{jref}(t) = (y_{j_f} - y_{j_i}) & \left(2520 \left(\frac{t}{T} \right)^3 - 12600 \left(\frac{t}{T} \right)^4 + 22680 \left(\frac{t}{T} \right)^5 - 17640 \left(\frac{t}{T} \right)^6 \right. \\ & \left. + 5040 \left(\frac{t}{T} \right)^7 \right), \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} y_{jref}^{(3)}(t) = (y_{j_f} - y_{j_i}) & \left(7560 \left(\frac{t}{T} \right)^2 - 50400 \left(\frac{t}{T} \right)^3 + 113400 \left(\frac{t}{T} \right)^4 \right. \\ & \left. - 105840 \left(\frac{t}{T} \right)^5 + 35280 \left(\frac{t}{T} \right)^6 \right), \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} y_{jref}^{(4)}(t) = (y_{j_f} - y_{j_i}) & \left(15120 \left(\frac{t}{T} \right) - 151200 \left(\frac{t}{T} \right)^2 + 453600 \left(\frac{t}{T} \right)^3 \right. \\ & \left. - 529200 \left(\frac{t}{T} \right)^4 + 211680 \left(\frac{t}{T} \right)^5 \right). \end{aligned} \quad (4.66)$$

4.3 - CONTROLE HIERÁRQUICO

Conforme mostrado na seção 2.3.3, o controle hierárquico pode ser feito por meio da abordagem a sistemas singularmente perturbados. Considerando-se no projeto de controle hierárquico que se deseja analisar o comportamento na vizinhança tão próxima aos pontos de equilíbrio que se possa considerar na análise que $\theta = 0$, as equações (3.77) a (3.85), sob estas considerações, formam as equações:

$$\dot{x}_2 = -\frac{B_C}{m_C} x_2 + \frac{1}{m_C} u_{1H}, \quad (4.67)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{J_S + m_L R^2} [R^2 g m_l - B_S x_4] + \frac{R}{J_S + m_L R^2} u_{2H}. \quad (4.68)$$

Pela semelhança das equações acima com as demonstradas na equação (2.71), e tendo como referência o projeto de controle hierárquico para ponte rolante de Lévine (2009), pode-se projetar a saída de realimentação para fazer o rastreamento tal que:

$$u_{1H} = -\frac{1}{\frac{1}{m_C}} \left(\frac{k_{\varepsilon 11}}{\varepsilon} (\dot{x}_1 - \dot{x}_{1ref}) + \frac{k_{\varepsilon 10}}{\varepsilon} (x_1 - x_{1ref}) \right), \quad (4.69)$$

$$u_{2H} = -\frac{1}{\frac{R}{J_S + m_L R^2}} \left(\frac{k_{\varepsilon 21}}{\varepsilon} (\dot{x}_3 - \dot{x}_{3ref}) + \frac{k_{\varepsilon 20}}{\varepsilon} (x_3 - x_{3ref}) \right). \quad (4.70)$$

em que ε suficientemente pequeno e u_{1H} e u_{2H} representam as entradas correspondentes à parte do controle hierárquico responsável pela realimentação em malha fechada.

Os ganhos de realimentação são programados para alocar os polos do controlador nos locais desejados, assim como é feito no controlador apresentado na seção 4.1.3. Os mesmos polos são escolhidos neste controle, porém necessita-se apenas de dois polos para cada controlador. No apêndice B são apresentados os códigos do MATLAB® utilizados para os cálculos dos ganhos do controlador.

Para o controlador referente a u_{1H} , escolhem-se os polos desejados como sendo a frequência natural de oscilação do sistema em relação ao eixo X, quando o cabo tem comprimento máximo, e um polo suficientemente próximo, porém não igual, de modo a não haver polos múltiplos. O resultado da alocação realizada é mostrado na equação (4.71) e os respectivos ganhos apresentados abaixo.

$$p_{10h} = -\sqrt{\frac{g}{L}} = -1,12 \quad p_{11h} = -\sqrt{\frac{g}{L}} + 0,1 = -1,02 \quad (4.71)$$

$$k_{\varepsilon 10} = 1,1424 \quad k_{\varepsilon 11} = 2,1400$$

Da mesma forma, para o controlador referente a u_{2H} , escolhem-se os polos desejados como sendo a frequência natural de oscilação do sistema em relação ao eixo Z, que é o

dobro da frequência em relação a X, conforme mostrado na equação (4.72). Os ganhos respectivos são mostrados abaixo.

$$p_{20h} = -2\sqrt{\frac{g}{L}} = -2,24 \quad p_{21h} = -2\sqrt{\frac{g}{L}} + 0,1 = -2,14 \quad (4.72)$$

$$k_{\varepsilon 20} = 4,7936 \quad k_{\varepsilon 21} = 4,3800$$

Para completar o controle, faz-se a parte do controle de referência em malha aberta através das entradas u_{1ref} e u_{2ref} .

Como provado na seção 4.2, devido à característica de planicidade diferencial do sistema, todas as variáveis podem ser dadas em função das saídas planas. Projetando então u_{1ref} e u_{2ref} , onde as variáveis de referência são dadas pelas equações (4.50) a (4.55) e as saídas de referência de posição da carga e suas derivadas são dadas pelas equações (4.62) a (4.66), tem-se:

$$u_{1ref} = m_C \dot{x}_{2ref} + B_C x_{2ref} - T_{eref} \sin(x_{5ref}), \quad (4.73)$$

$$u_{2ref} = -\frac{J_S}{R} \dot{x}_{4ref} + B_S x_{4ref} + T_{eref} R, \quad (4.74)$$

em que a entrada completa para o controle hierárquico é dada pela parte de realimentação e pela parte de referência:

$$u_1 = u_{1H} + u_{1ref}, \quad (4.75)$$

$$u_2 = u_{2H} + u_{2ref}. \quad (4.76)$$

O sistema controlado através de controle hierárquico é representado esquematicamente na Figura 4.2.

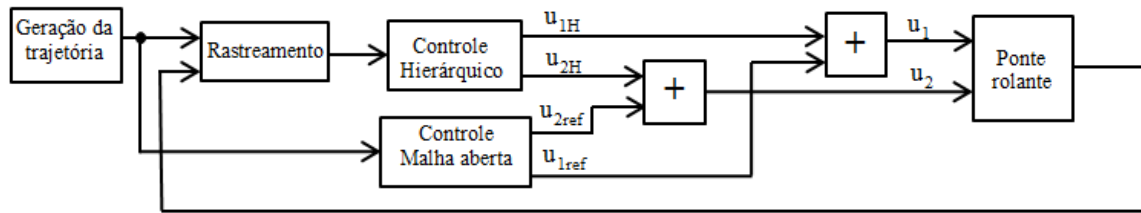


Figura 4.2- Sistema controlado via controle hierárquico

Tendo apresentado neste capítulo os dois projetos de controle (controle por realimentação dinâmica e controle hierárquico) é possível então simular o sistema e realizar as comparações propostas neste trabalho.

O próximo capítulo apresenta as simulações dos controladores projetados e também uma discussão sobre o comportamento de tais controladores em diferentes condições de operação.

5 - RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES E DISCUSSÃO

Neste capítulo avalia-se o desempenho de cada controlador em diferentes condições de operação. Essas condições incluem diferentes períodos de transporte (tempo para realização do movimento desejado), controle não adaptativo para diferentes massas da carga, controle não adaptativo para comprimento inicial do cabo diferente do projetado, perturbação causada por arrasto aerodinâmico por meio de rajada de vento, perturbação causada por arrasto aerodinâmico por meio de ventos com velocidade constante.

É utilizado o Simulink® para realizar as simulações e obter os resultados. Os valores das constantes utilizadas estão indicados na Tabela A-1 do Apêndice A.

É considerado que, em qualquer situação, os limites de operação são:

- Deslocamento do carro no eixo X: 0m a 30m.
- Comprimento do cabo: 1m a 15m.

Nas próximas seções são apresentados os resultados das simulações para cada condição de operação.

5.1 - TRANSPORTE EM SITUAÇÃO IDEAL

É chamado de transporte em situação ideal, o resultado obtido quando a ponte está com todas as condições de projeto desejadas e não sofre nenhuma perturbação externa. Por meio de simulações de períodos diferentes, para se verificar qual o período mínimo que apresentava melhores condições de rastreamento para ambos controladores, foi encontrado o período ideal como sendo o de 12 segundos.

Consideram-se para as simulações as seguintes condições hipotéticas:

Posição inicial da carga em X: $x_{L_i} = 0 \text{ m}$; Posição final da carga em X: $x_{L_{final}} = 20 \text{ m}$;

Comprimento inicial do cabo: $L_i = 8 \text{ m}$; Comprimento final do cabo: $L_{final} = 4 \text{ m}$;

Massa da carga: $m_l = 500 \text{ kg}$.

Transporte de referência, condições do projeto, sem perturbação externa e $T=12s$

Legenda: — Controle por realimentação dinâmica — Controle hierárquico Referência

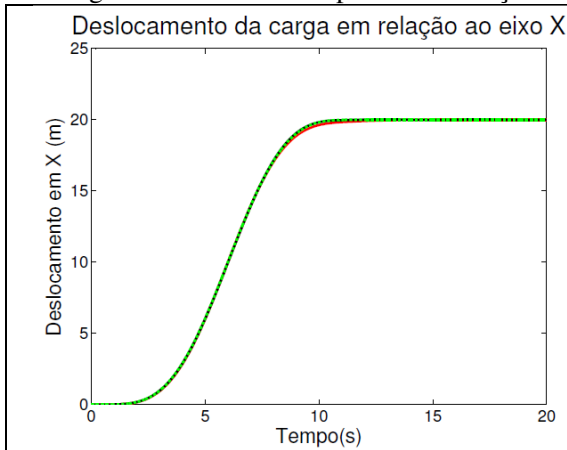


Figura 5.1 – Deslocamento da carga em relação ao eixo X, sem arrasto e $T=12s$

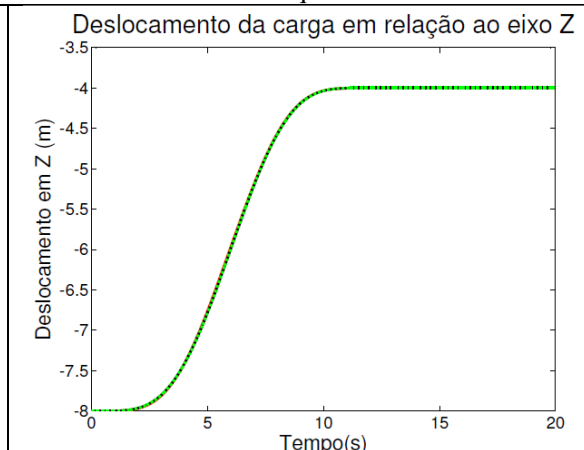


Figura 5.2 - Deslocamento da carga em relação ao eixo Z, sem arrasto e $T=12s$

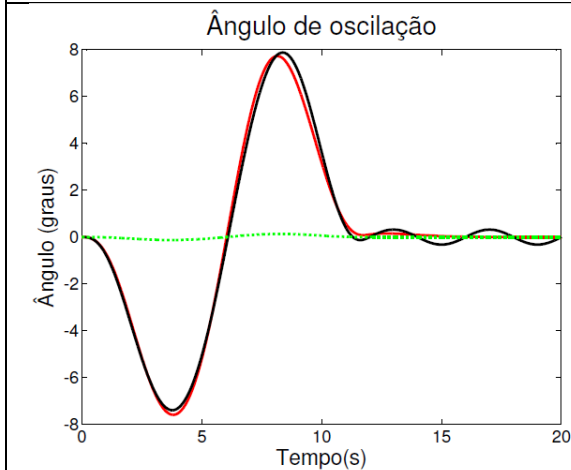


Figura 5.3– Ângulo de oscilação da carga, sem arrasto e $T=12s$

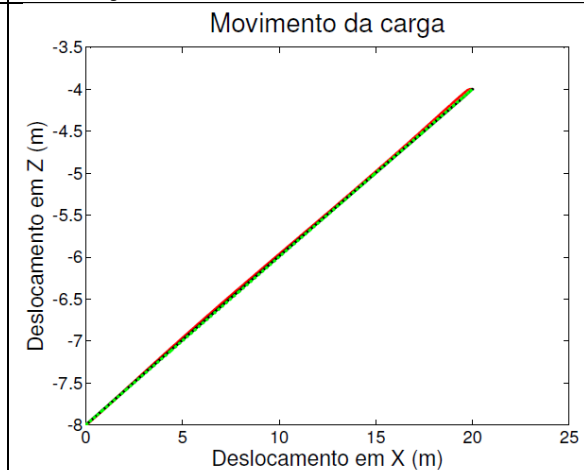


Figura 5.4 – Movimento da carga, sem arrasto e $T=12s$

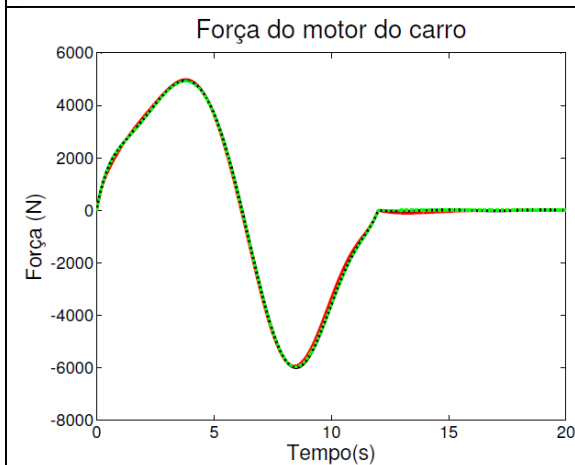


Figura 5.5 – Força do motor do carro, sem arrasto e $T=12s$

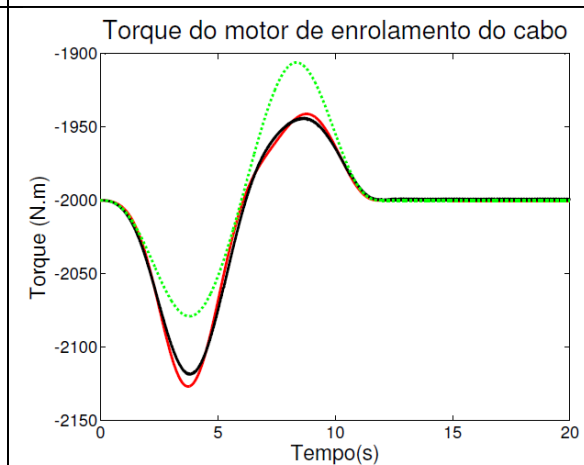


Figura 5.6 – Torque do motor de enrolamento do cabo, sem arrasto e $T=12s$

Analisando a seção 4.1.2, equação (4.29), a condição imposta para que o controle por realimentação dinâmica de estados não tenha singularidade é que $z_1 \neq 10$, simulando o valor de z_1 , tem-se que:

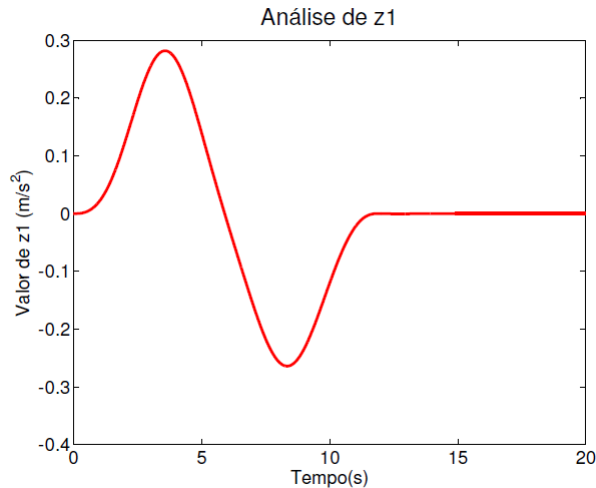


Figura 5.7 – Análise de z_1 para transporte em situação ideal

Logo, não há singularidade.

Simulando o sistema com todas as condições iguais às que foram utilizadas nos projetos dos controladores, e na ausência de perturbações externas, as figuras acima (da Figura 5.1 a Figura 5.6) demonstram que, em um período de 12 segundos, ambos controladores apresentam ótimo desempenho.

O rastreamento da trajetória em ambos é feito de forma acurada, como pode ser verificado pela sobreposição das três curvas (controle por realimentação dinâmica, controle hierárquico e referência) que representam o resultado para a posição da carga em relação ao eixo X (Figura 5.1), posição da carga em relação ao eixo Z (Figura 5.2) e movimento da carga (Figura 5.4).

Pode-se considerar o período de 12 segundos como sendo o de um transporte rápido. O sistema ainda apresenta um movimento suave, praticamente sem oscilação da carga após o período estipulado e com boas condições de operação de força (Figura 5.5) e torque (Figura 5.6).

Por todos os fatores descritos acima, consideram-se os resultados das Figura 5.1 a Figura 5.6 como sendo os da ponte rolante operando em condição ideal.

5.2 - VARIAÇÃO DE PERÍODO DE TRANSPORTE

O próximo período simulado é o de 6 segundos. Este período foi escolhido por demonstrar ser o período mínimo em que o transporte da carga apresenta um resultado aceitável, porém não desejável. Períodos menores que este já começam a apresentar movimentos bruscos, com oscilações da carga em valores indesejáveis e por vezes até inaceitáveis perante as condições físicas da ponte e as especificações assumidas na obtenção do modelo dinâmico.

Consideram-se para as simulações as seguintes condições hipotéticas:

Posição inicial da carga em X: $x_{L_i} = 0 \text{ m}$;

Posição final da carga em X: $x_{L_{final}} = 20 \text{ m}$;

Comprimento inicial do cabo: $L_i = 8 \text{ m}$;

Comprimento final do cabo: $L_{final} = 4 \text{ m}$;

Massa da carga: $m_l = 500 \text{ kg}$.

Transporte da carga em um período de 6 segundos

Legenda: — Controle por realimentação dinâmica — Controle hierárquico Referência

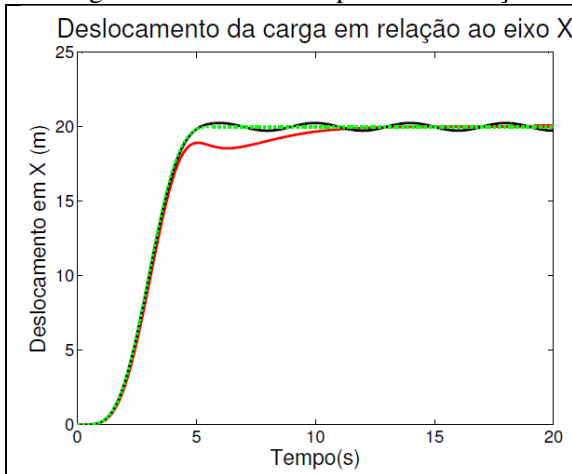


Figura 5.8 - Deslocamento da carga em relação ao eixo X, sem arrasto e $T=6s$

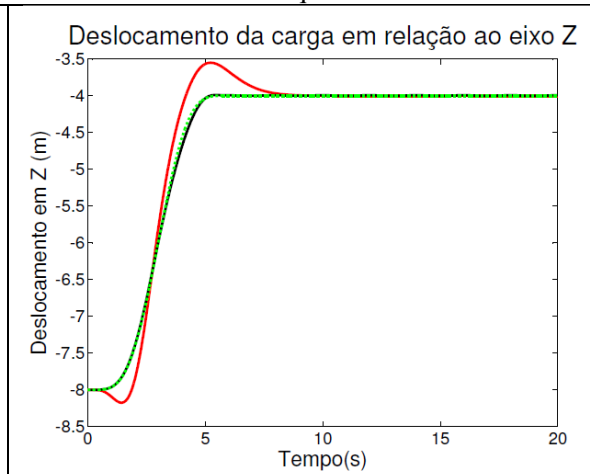


Figura 5.9 - Deslocamento da carga em relação ao eixo Z, sem arrasto e $T=6s$

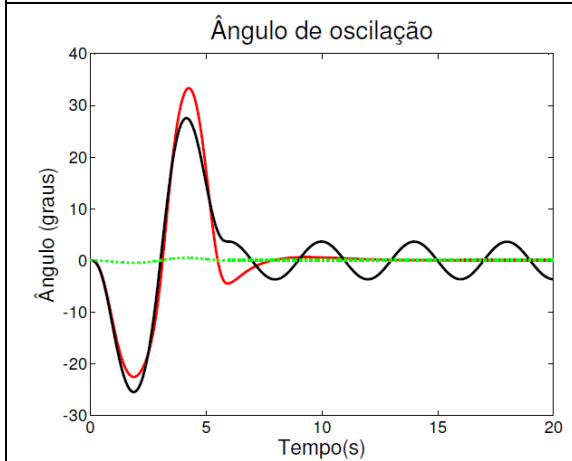


Figura 5.10 - Ângulo de oscilação da carga, sem arrasto e $T=6s$

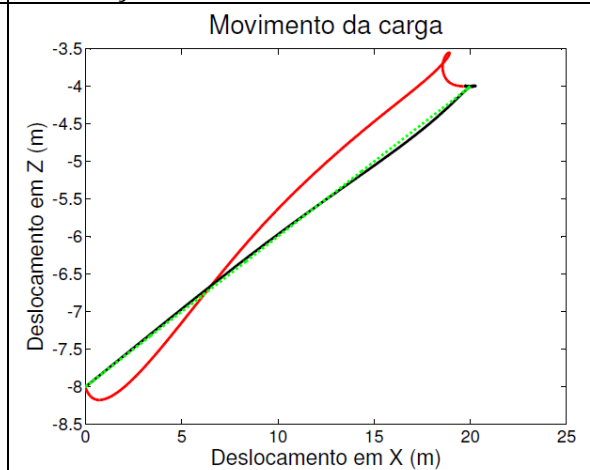


Figura 5.11 - Movimento da carga, sem arrasto e $T=6s$

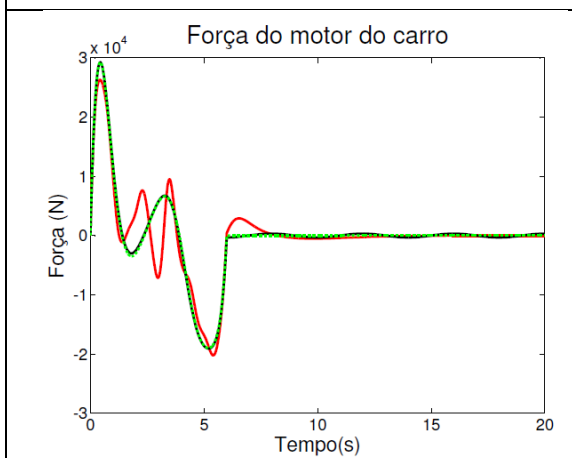


Figura 5.12 - Força do motor do carro, sem arrasto e $T=6s$

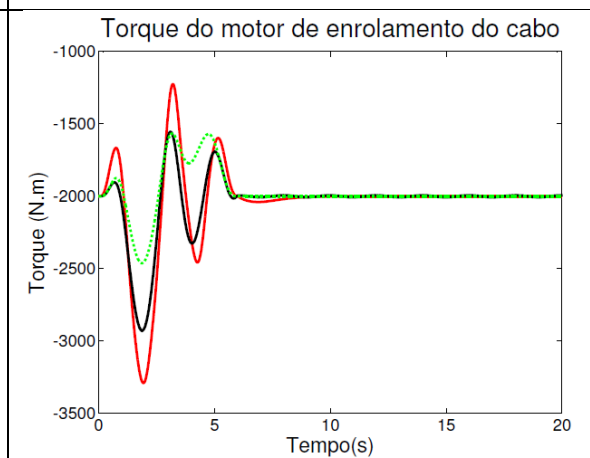


Figura 5.13 - Torque do motor de enrolamento, sem arrasto e $T=6s$

Analisando a seção 4.1.2, equação (4.29), a condição imposta para que o controle por realimentação dinâmica de estados não tenha singularidade é que $z_1 \neq 10$, simulando o valor de z_1 , tem-se que:

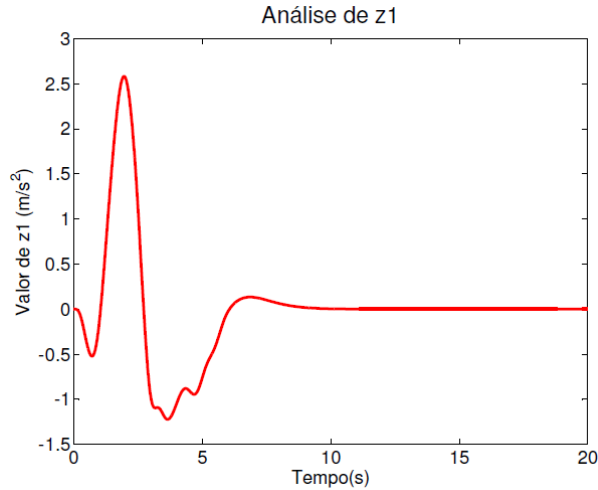


Figura 5.14 – Análise de z_1 para transporte em período de 6s

Logo, não há singularidade.

Devido à necessidade de um movimento rápido para se tentarem atingir os valores de referência no período de tempo especificado de 6 segundos, os controladores apresentam um ângulo de oscilação mais elevado se comparado à Figura 5.3, obtida para o período de 12 segundos. No período de 6 segundos, o controlador hierárquico apresenta $\theta_{max} \approx 35^\circ$ durante o movimento, e o controlador por realimentação dinâmica $\theta_{max} \approx 30^\circ$, conforme mostra o resultado para o ângulo de oscilação (Figura 5.10).

Nos resultados do deslocamento da carga em relação ao eixo X (Figura 5.8) e do deslocamento da carga em relação ao eixo Z (Figura 5.9) percebe-se que o controlador por realimentação dinâmica não consegue atingir os valores de referência no tempo desejado, chegando atrasado aos valores especificados, sendo, portanto, mais lento que o controlador hierárquico.

O controlador hierárquico atinge os valores de referência no tempo especificado e, após este período de tempo de 6 segundos, apresenta oscilação em regime estacionário.

Porém esta oscilação de $\theta \approx 2^\circ$ é considerada pequena, provando então o bom desempenho do controlador hierárquico.

Analisando os resultados acima, percebe-se que, como dito anteriormente o período de 6 segundos é um período aceitável, mas, só desejável em condições específicas, como por exemplo, em casos em que realizar o transporte de forma rápida é mais importante que realizá-lo sem oscilação (ambos controladores). Ou, em casos em que realizar o transporte de forma rápida, é mais importante que realizá-lo atingindo seus valores de referência (utilizando controle por realimentação dinâmica).

5.3 - ARRASTO AERODINÂMICO

No trabalho de Amarante *et al.* (2001), ao representar a velocidade média do vento a 50 metros de altura, em todas as regiões do Brasil, a escala de velocidade média do vento vai de $3,5\text{ m/s}$ a 9 m/s . Logo, qualquer velocidade de vento acima disto já representaria uma situação de transporte mais crítica que a usualmente encontrada no Brasil. Para saber a máxima velocidade do vento que deveria ser utilizada para efeito de simulação, consultaram-se algumas normas. Na Norma Brasileira 8400 (NBR 8400) - Cálculo de equipamentos para levantamento e movimentação de cargas – o vento limite de serviço utilizado para o projeto do equipamento de transporte de carga, quando este equipamento está operando nesta condição limite, é de 20 m/s . Já a Norma Regulamentadora nº18 (NR nº18) - Condições e meio ambiente de trabalho na indústria da construção - diz que:

“18.14.24.6.1: A grua deve dispor de dispositivo automático com alarme sonoro que indique a ocorrência de ventos superiores a 42 km/h . (Incluído pela Portaria SIT n.º 114, de 17 de janeiro de 2005).”

“18.14.24.6.2: Deve ser interrompida a operação com a grua quando da ocorrência de ventos com velocidade superior a 42 km/h . (Incluído pela Portaria SIT n.º 114, de 17 de janeiro de 2005).”

“18.14.24.6.3: Somente poderá ocorrer trabalho sob condições de ventos com velocidade acima de 42 km/h mediante operação assistida. (Incluído pela Portaria SIT n.º 114, de 17 de janeiro de 2005).”

“18.14.24.6.4: Sob nenhuma condição é permitida a operação com guias quando da ocorrência de ventos com velocidade superior a 72 km/h. (Incluído pela Portaria SIT n.º 114, de 17 de janeiro de 2005).”

De acordo com as referências acima, percebe-se que tanto para a NBR 8400, como para a NR n.º18, a ponte rolante nunca deve operar na presença de ventos acima de 20m/s. Entretanto, de acordo com o item 18.14.24.6.3 da NR n.º18, a ponte rolante só pode operar de forma não assistida (sem a presença de um operador) para ventos de até 11,66m/s.

Portanto, como o projeto do controlador é para que a ponte rolante opere de forma não assistida, a velocidade máxima do vento permitida para esta situação será de 11,66m/s. Desta forma, a consideração de um vento com velocidade de 11,66m/s, além de demonstrar a operação em condição limite segundo as normas, ainda pode ser analisada como uma situação acima da média da velocidade do vento no Brasil conforme Amarante *et al* (2001).

São analisados dois casos onde existe a perturbação causada pelo arrasto aerodinâmico no transporte da carga. Na primeira situação, considera-se um vento com velocidade de 11,66m/s que atua como uma rajada, estando presente somente no período de 4 a 8 segundos do movimento. Na segunda situação, considera-se o vento como uma perturbação constante, com velocidade de 11,66m/s, que está presente em todo o período de transporte da carga.

Consideram-se para as simulações as seguintes condições hipotéticas:

Posição inicial da carga em X: $x_{L_i} = 0 \text{ m}$;	Posição final da carga em X: $x_{L_{final}} = 20 \text{ m}$;
Comprimento inicial do cabo: $L_i = 8 \text{ m}$;	Comprimento final do cabo: $L_{final} = 4 \text{ m}$;
Massa da carga: $m_l = 500 \text{ kg}$.	

5.3.1 - Rajada de vento no período de 4 a 8 segundos do movimento

Os resultados para o transporte da carga na presença de arrasto aerodinâmico causado pela rajada de vento estão demonstrados abaixo. Considera-se que o vento está atuando em sentido contrário ao deslocamento da carga.

Transporte da carga em um período de 12 segundos com arrasto aerodinâmico causado por rajada de vento com velocidade de 11,66m/s.

Legenda: — Controle por realimentação dinâmica — Controle hierárquico - - - Referência

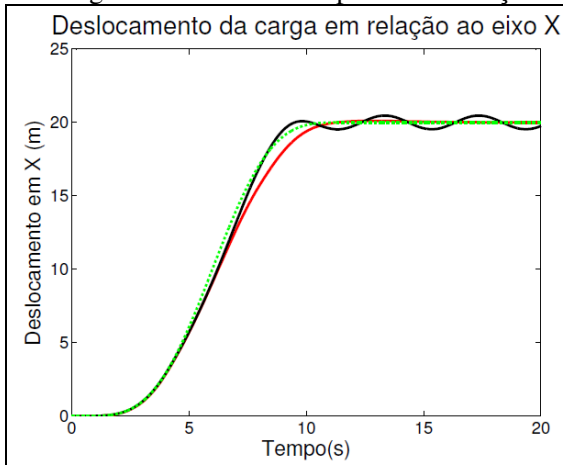


Figura 5.15 - Deslocamento da carga em relação ao eixo X com rajada de vento.

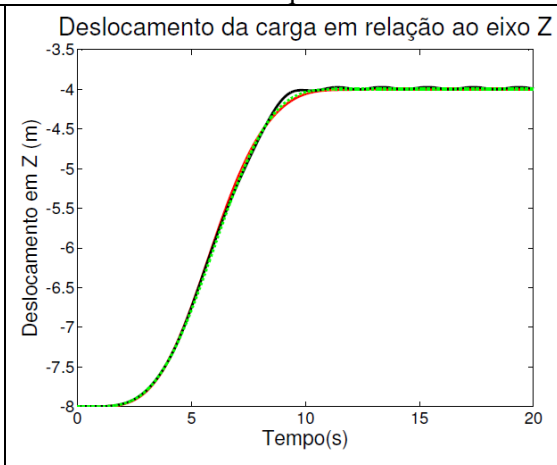


Figura 5.16 - Deslocamento da carga em relação ao eixo Z com rajada de vento.

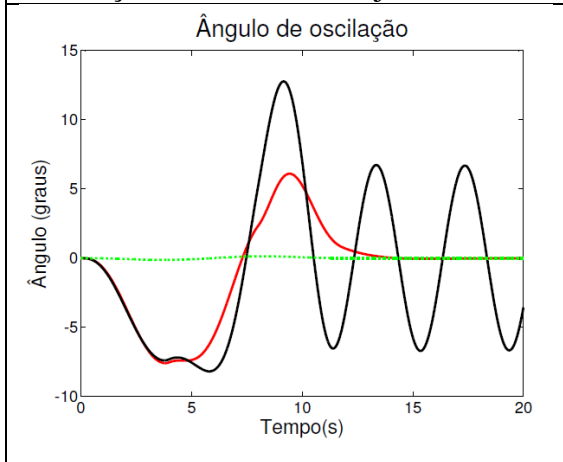


Figura 5.17 - Ângulo de oscilação da carga com rajada de vento.

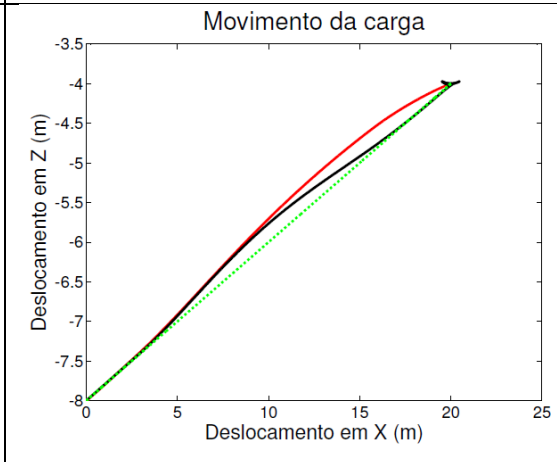


Figura 5.18 - Movimento da carga com rajada de vento.

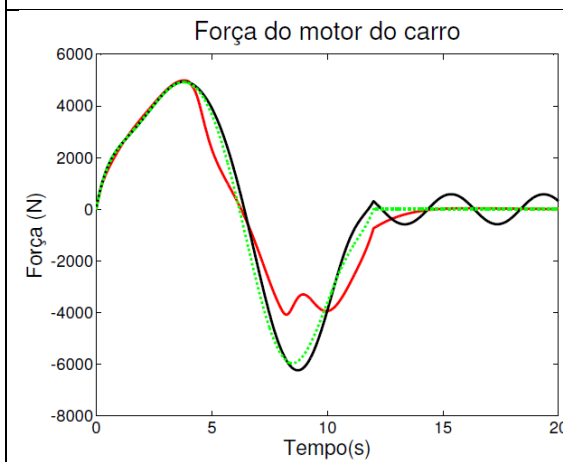


Figura 5.19 - Força do motor do carro com rajada de vento.

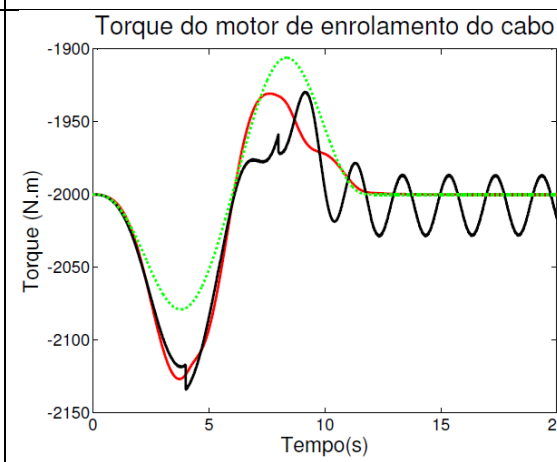


Figura 5.20 - Torque do motor de enrolamento do cabo com rajada de vento.

Analisando a seção 4.1.2, equação (4.29), a condição imposta para que o controle por realimentação dinâmica de estados não tenha singularidade é que $z_1 \neq 10$, simulando o valor de z_1 , tem-se que:

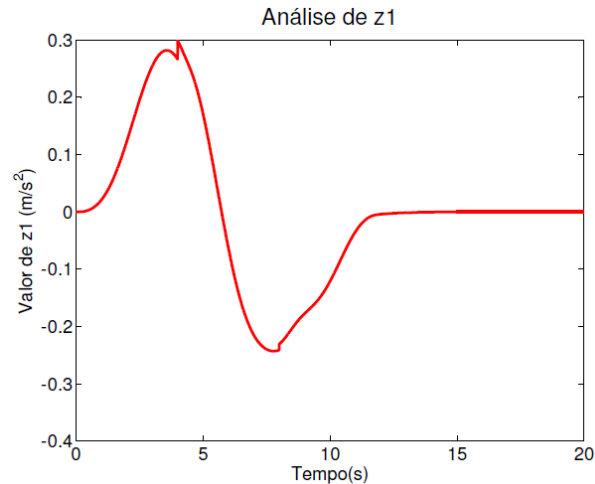


Figura 5.21 – Análise de z_1 para transporte com rajada de vento

Logo, não há singularidade.

Como dito anteriormente, este valor de velocidade para a rajada é escolhido por ser o valor máximo permitido segundo as normas, que uma ponte rolante pode operar de forma não assistida.

Os resultados acima mostram que, mesmo com a presença da perturbação, ambos controladores conseguem contornar este problema e atingir os valores de referência para os deslocamentos em X (Figura 5.15) e os deslocamentos em Z (Figura 5.16), dentro do período especificado para o transporte.

Ao contrário do que acontece na seção 5.1, percebe-se que, como era de se esperar, a perturbação causada pelo vento faz com que a carga saia da trajetória de referência, assim como provoca uma maior oscilação do ângulo durante o transporte (na seção 5.1 $\theta_{max} \approx 8^\circ$ e nesta seção $\theta_{max} \approx 13^\circ$).

No controle hierárquico, na Figura 5.17, um ângulo maior de oscilação após o período de 12 segundos é verificado. Enquanto na seção 5.1, na Figura 5.3, o ângulo do

controlador hierárquico em estado estacionário é praticamente zero, nesta seção, na Figura 5.17, o ângulo passa a ser de $\theta \approx 7^\circ$. Verifica-se nesta seção que o controlador hierárquico rastreia melhor a trajetória do que o controlador por realimentação dinâmica.

Apesar de as oscilações terem aumentado, e de a trajetória não ser seguida exatamente durante todo o movimento, pode-se considerar que ambos os controladores obtêm bons resultados para esta perturbação.

5.3.2 - Vento atuando durante todo o movimento

Diferentemente do arrasto aerodinâmico causado por rajadas de curta duração considerado na seção anterior, nesta seção os resultados apresentados demonstram o sistema atuando na presença de arrasto aerodinâmico causado por um vento com velocidade constante de $11,66 \text{ m/s}$, atuando na direção X em sentido contrário ao movimento, durante todo o período de transporte da carga. Considerando um período de transporte solicitado de 12 segundos:

Transporte da carga em um período de 12 segundos com arrasto aerodinâmico causado por rajada de vento com velocidade de $11,66 \text{ m/s}$.

Legenda: — Controle por realimentação dinâmica — Controle hierárquico Referência

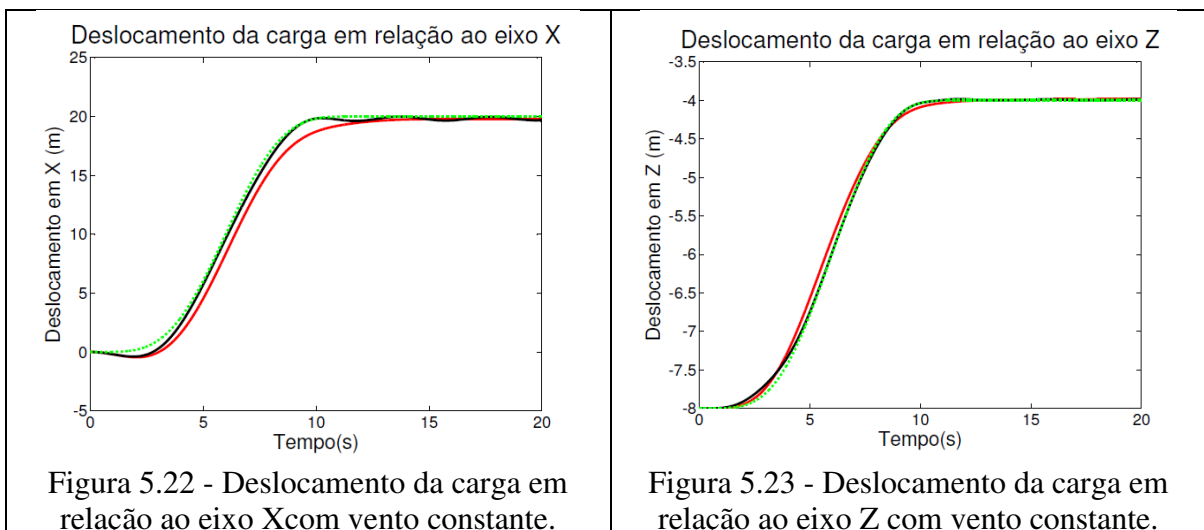


Figura 5.22 - Deslocamento da carga em relação ao eixo X com vento constante.

Figura 5.23 - Deslocamento da carga em relação ao eixo Z com vento constante.

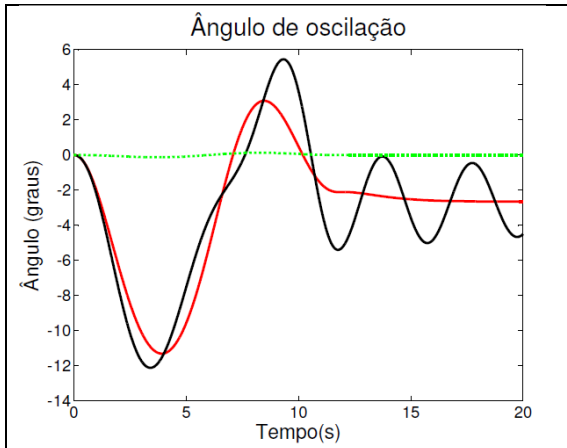


Figura 5.24 - Ângulo de oscilação da carga com vento constante.

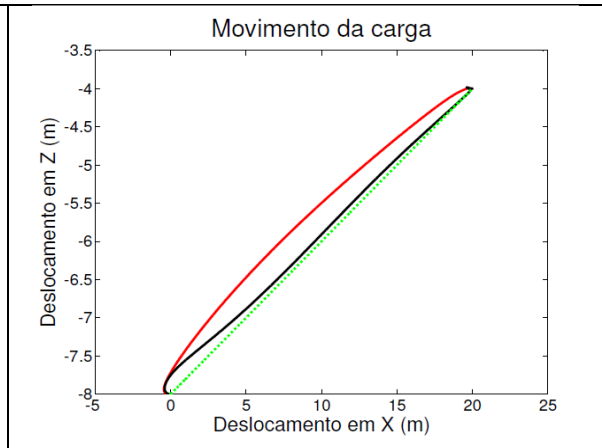


Figura 5.25 - Movimento da carga com vento constante.

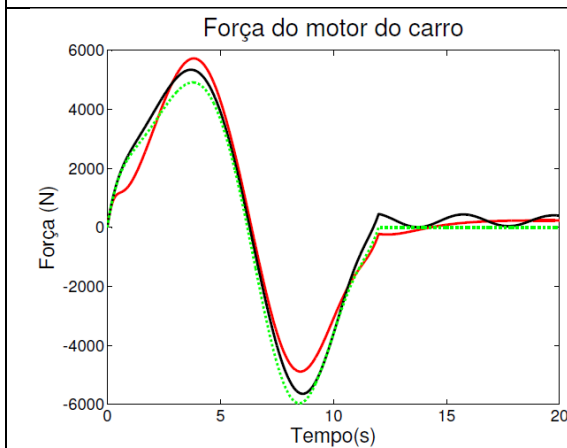


Figura 5.26- Força do motor do carro com vento constante.

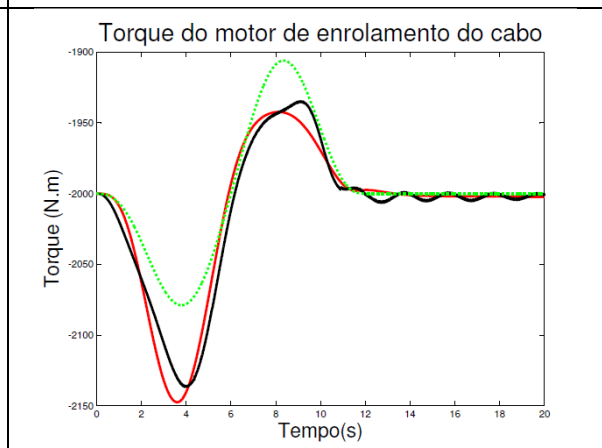


Figura 5.27 - Torque do motor de enrolamento do cabo com vento constante.

Analisando a seção 4.1.2, equação (4.29), a condição imposta para que o controle por realimentação dinâmica de estados não tenha singularidade é que $z_1 \neq 10$, simulando o valor de z_1 , tem-se que:

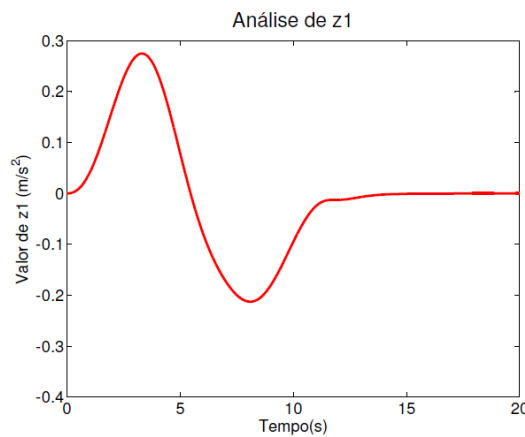


Figura 5.28 – Análise de z_1 para transporte com vento constante.

Logo, não há singularidade.

A média de ângulo ao final do movimento $\theta \approx -2,5^\circ$ (Figura 5.24), mostra que os controladores estabilizam a carga fora da referência planejada.

O ângulo de oscilação não vai para zero, pois, a presença da força de arrasto constante, faz com que haja sempre uma diferença entre a posição do carro e a posição da carga, o que causa o ângulo entre o cabo e a vertical. Porém, percebe-se que a carga fica estabilizada nessa nova condição.

Como os controladores só recebem realimentação vinda de sensores que fornecem a posição e a velocidade do carro, e o comprimento e a velocidade de enrolamento do cabo, para os rastreadores, o erro de referência vai para zero e, então, os controladores estabilizam o sistema naquele ponto.

Apesar da limitação citada acima, devido ao erro de posição final, pode-se notar que, em ambos os controladores, os deslocamentos em relação ao eixo X (Figura 5.22) e em relação ao eixo Z (Figura 5.23), conseguem atingir a referência dentro do tempo desejado.

Entretanto, na análise do rastreamento através do resultado do movimento da carga (Figura 5.25), o controlador hierárquico apresentou melhor desempenho, seguindo bem a trajetória de referência. O controlador por realimentação dinâmica apresentou um movimento mais suave e estabilizou a carga (apesar da limitação citada acima), no período de tempo desejado, não havendo então oscilação em regime estacionário, somente o ângulo fixo devido à força de arrasto constante.

5.4 - VARIAÇÃO DA MASSA DA CARGA SEM CONTROLE ADAPTATIVO

Ao se projetarem os controladores, como visto no capítulo 4, são necessários valores de parâmetros da ponte rolante como as massas do carro, da carga, inércia do motor de enrolamento do cabo, posições iniciais, finais, de equilíbrio, etc.

Dentre esses parâmetros, alguns são constantes fixas que não variam durante a operação da ponte, entretanto, em casos reais, parâmetros como a massa da carga variam de um transporte para outro.

Se a ponte rolante possuir um sensor que forneça o peso da carga para o controlador, ou algum tipo de controle adaptativo para a massa, a ponte rolante irá operar normalmente, pois os parâmetros do controlador estão atualizados corretamente em relação à massa que está sendo transportada.

Entretanto, se a ponte rolante não possuir nenhum sensor de massa da carga, nem nenhum controle adaptativo para a massa da carga, os controladores irão operar de acordo com os valores de parâmetros que foram fixados durante o projeto. No caso da massa, um valor de 500kg. Todas as ações de controle e ganhos são geradas baseando-se nos valores fixos.

Nesta seção estuda-se o caso de, apesar de os controladores não terem sido programados para diferentes carregamentos, a massa de carga para o transporte ser diferente do valor adotado em projeto.

Como o controlador é projetado para uma carga de 500kg, são simulados valores de carga em dois extremos, 250kg e 1000kg, respectivamente, para que o comportamento da ponte possa ser analisado.

Consideram-se para as simulações as seguintes condições hipotéticas:

Posição inicial da carga em X: $x_{L_i} = 0 \text{ m}$;

Posição final da carga em X: $x_{L_{final}} = 20 \text{ m}$;

Comprimento inicial do cabo: $L_i = 8 \text{ m}$;

Comprimento final do cabo: $L_{final} = 4 \text{ m}$.

5.4.1 - Massa da carga de 250kg

Transporte da carga de massa 250kg em um período de 12 segundos

Legenda: — Controle por realimentação dinâmica — Controle hierárquico Referência

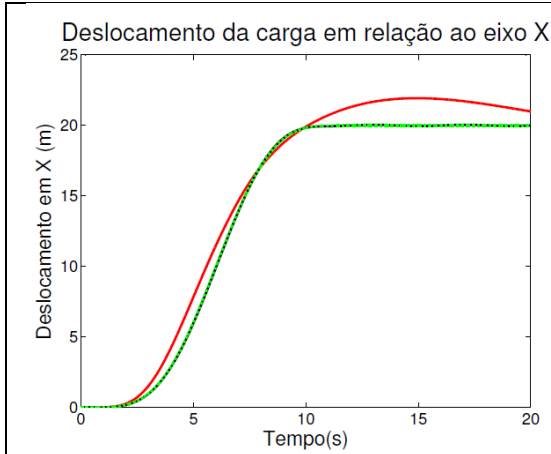


Figura 5.29 - Deslocamento da carga de massa 250kg, em relação ao eixo X.

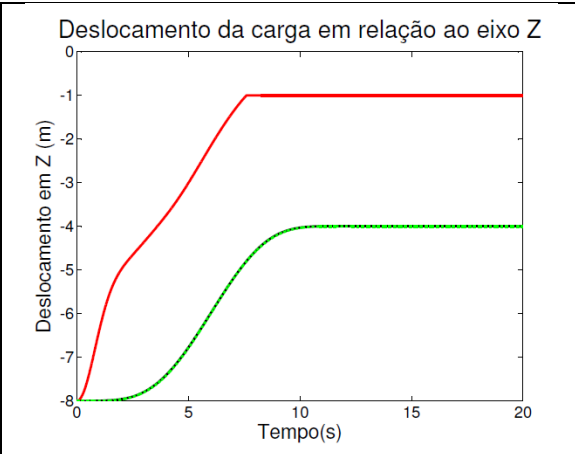


Figura 5.30 - Deslocamento da carga de massa 250kg, em relação ao eixo Z.

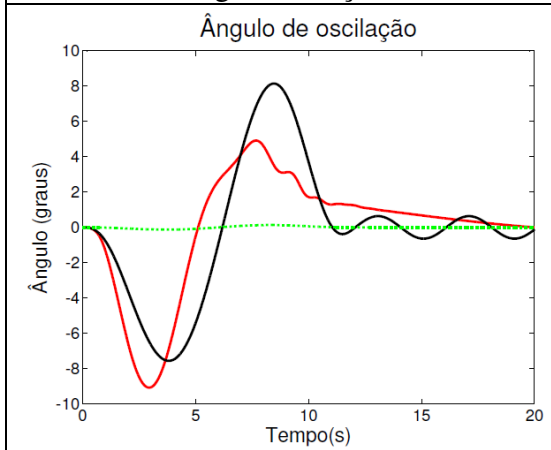


Figura 5.31 - Ângulo de oscilação, carga de 250kg.

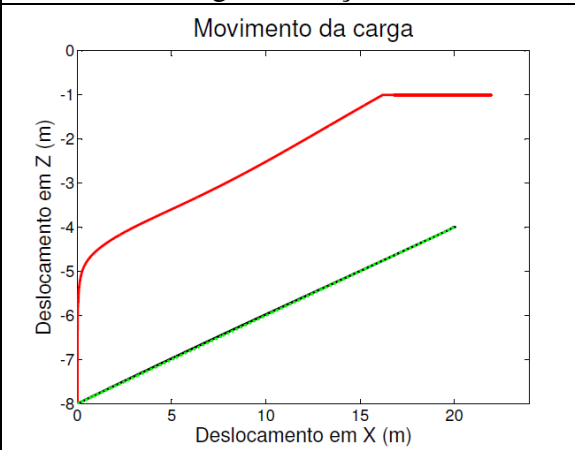


Figura 5.32 - Movimento da carga de 250kg.

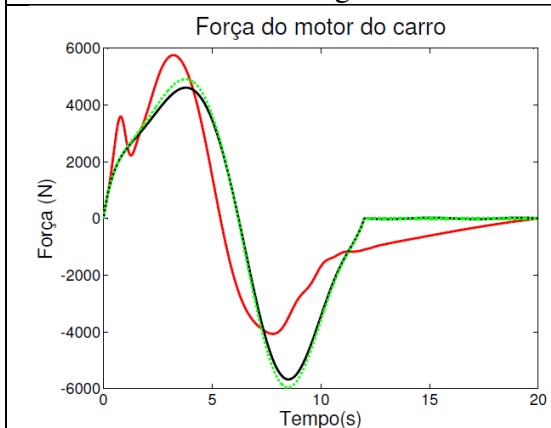


Figura 5.33 - Força do motor do carro, carga de 250kg.

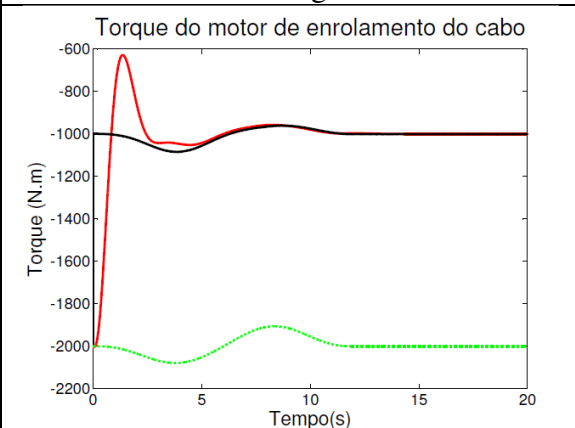


Figura 5.34 - Torque do motor de enrolamento do cabo, carga de 250kg.

Analisando a seção 4.1.2, equação (4.29), a condição imposta para que o controle por realimentação dinâmica de estados não tenha singularidade é que $z_1 \neq 10$, simulando o valor de z_1 , tem-se que:

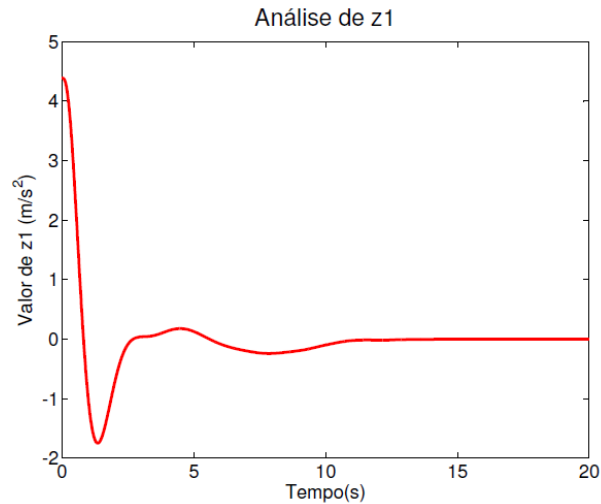


Figura 5.35 – Análise de z_1 para transporte com massa da carga de 250kg.

Logo, não há singularidade.

Por meio das Figura 5.29 a Figura 5.34 percebe-se que o controlador hierárquico é muito robusto, mesmo quando uma massa bem inferior àquela para a qual foi projetado é transportada.

Já o controlador por realimentação dinâmica demonstra-se totalmente insatisfatório. Principalmente no que diz respeito ao deslocamento da carga em relação ao eixo Z, Figura 5.30, o controlador não consegue superar a adversidade de estar transportando uma massa bem aquém daquela para a qual foi projetado e chega ao limite mínimo de comprimento do cabo estabelecido de 1m, não conseguindo então fazer o rastreamento da trajetória.

5.4.2 - Massa da carga de 1000kg

Seguindo a linha de interpretação da seção anterior, analisa-se agora qual o comportamento do sistema quando é solicitado que ele transporte uma carga que é o dobro daquela para a qual foi projetado.

Como era de se esperar, os resultados obtidos são semelhantes aos encontrados na seção 5.4.1. O controlador hierárquico apresenta um ótimo resultado de rastreamento, tendo em vista um carregamento com massa o dobro do que aquela para a qual foi programado.

Já o controlador por realimentação dinâmica não é robusto para essa variação de parâmetro e não consegue seguir a trajetória de referência, fazendo com que, enquanto na Figura 5.30 o cabo chega ao comprimento limite de 1m para a massa da carga de 250kg, na Figura 5.37 o controlador por realimentação dinâmica leva a carga de 1000kg ao limite máximo de comprimento do cabo, que é de 15m.

Transporte da carga de massa 1000kg em um período de 12 segundos

Legenda: — Controle por realimentação dinâmica — Controle hierárquico - - - Referência

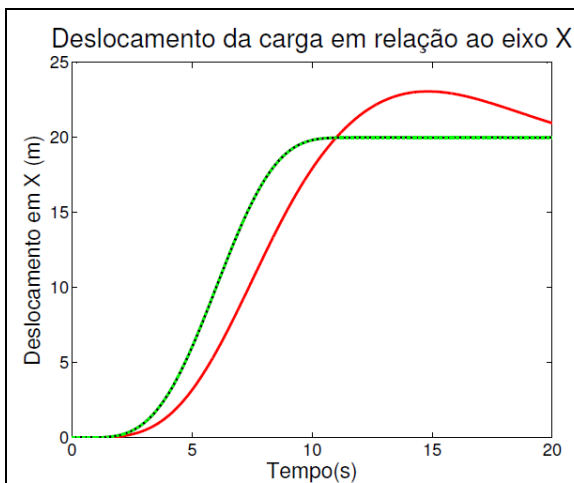


Figura 5.36- Deslocamento da carga de massa 1000kg em relação ao eixo X.

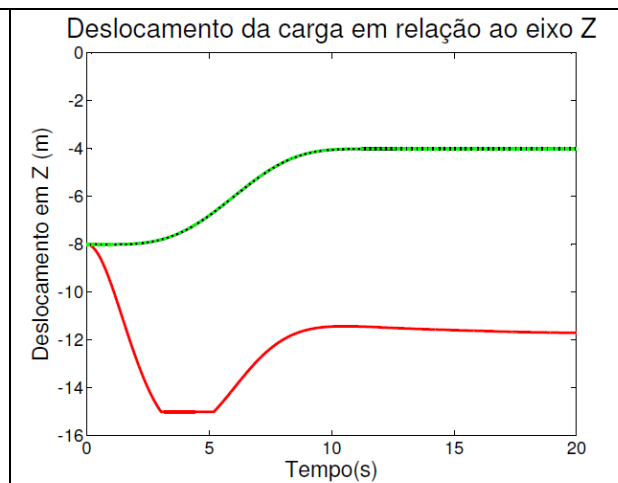


Figura 5.37 - Deslocamento da carga de massa 1000kg em relação ao eixo Z.

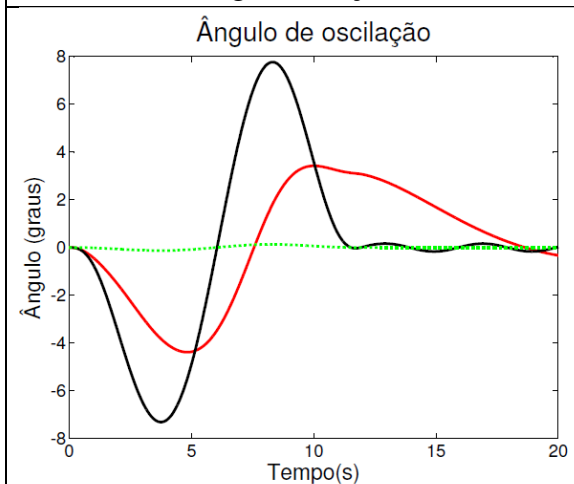


Figura 5.38 - Ângulo de oscilação, carga de 1000kg.

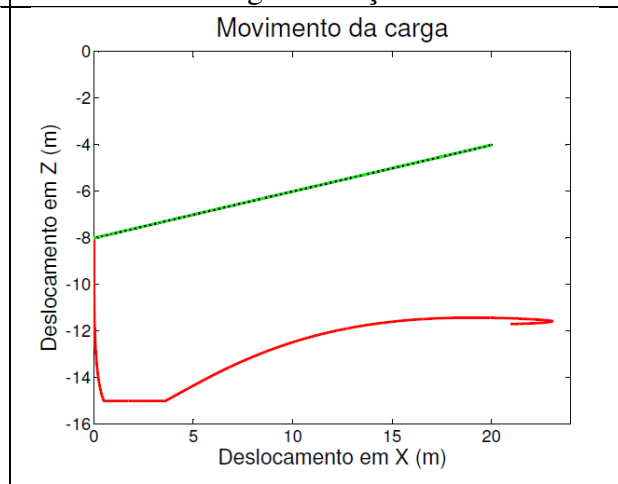


Figura 5.39 - Movimento da carga de 1000kg.

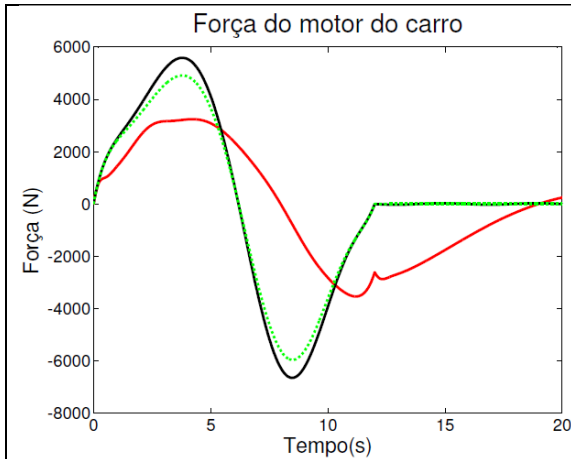


Figura 5.40 - Força do motor do carro, carga de 1000kg.

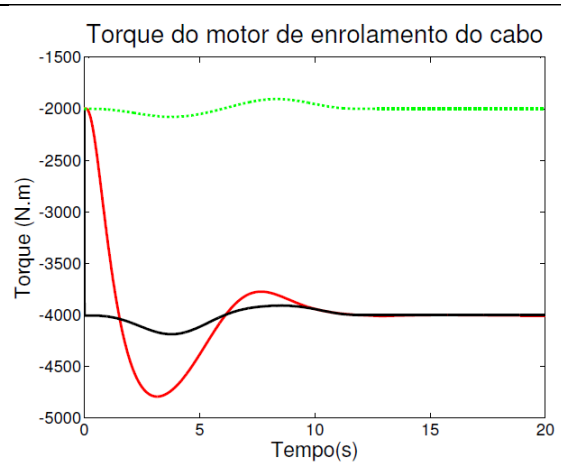


Figura 5.41 – Torque do motor de enrolamento do cabo, carga de 1000kg.

Analisando a seção 4.1.2, equação (4.29), a condição imposta para que o controle por realimentação dinâmica de estados não tenha singularidade é que $z_1 \neq 10$, simulando o valor de z_1 , tem-se que:

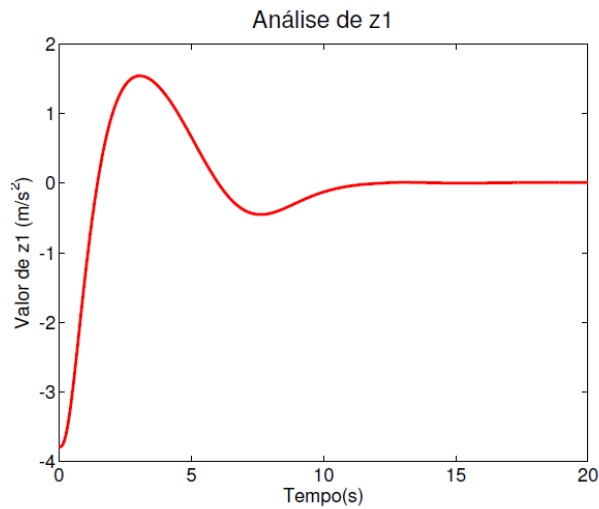


Figura 5.42 – Análise de z_1 para transporte com massa da carga de 1000kg.

Logo, não há singularidade.

5.5 - VARIAÇÃO DO COMPRIMENTO INICIAL DO CABO SEM CONTROLE ADAPTATIVO

Assim como feito na seção anterior para a massa da carga, objetiva-se nesta seção analisar qual o desempenho dos controladores se o comprimento inicial do cabo, L_i , for diferente daquele programado no projeto do controlador para definir seus polos e ganhos.

A análise é feita somente para o comprimento inicial do cabo diferente do programado, pois, além de somente L_i ser utilizado no projeto dos polos dos controladores, em simulações para se testar quais parâmetros alteravam o comportamento do sistema, a modificação dos valores para posição inicial e final da carga em relação ao eixo X, x_{L_i} e $x_{L_{final}}$, e do comprimento de cabo final, L_{final} , não apresentaram alterações significativas no sistema.

Considerando que o controlador foi programado para as condições mostradas a seguir:

Posição inicial da carga em X: $x_{L_i} = 0 \text{ m}$; Posição final da carga em X: $x_{L_{final}} = 20 \text{ m}$;
Comprimento inicial do cabo: $L_i = 8 \text{ m}$; Comprimento final do cabo: $L_{final} = 4 \text{ m}$;
Massa da carga: $m_l = 500 \text{ kg}$.

Solicitando que o sistema seja movimentado a partir de um comprimento inicial do cabo diferente do programado, passando então de $L_i = 8 \text{ m}$ para $L_i = 15 \text{ m}$, obtêm-se das novas simulações os resultados mostrados nas Figura 5.43 a Figura 5.48.

Transporte da carga com comprimento inicial do cabo de 15m, em um período de 12 segundos

Legenda: — Controle por realimentação dinâmica — Controle hierárquico - - - Referência

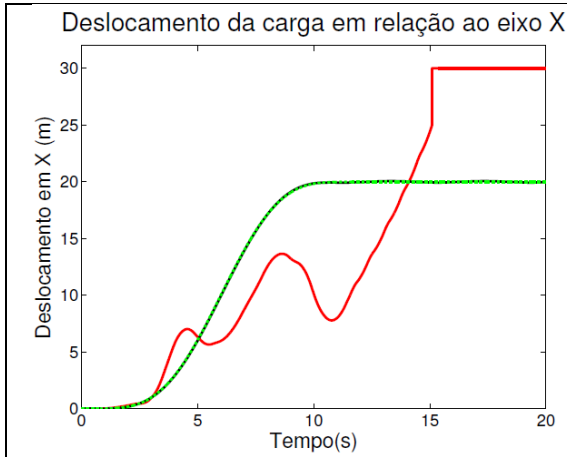


Figura 5.43 - Deslocamento da carga em relação ao eixo X, $L_i = 15\text{ m}$.

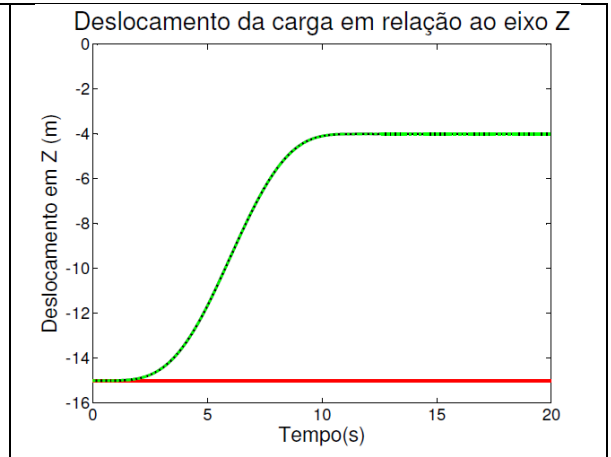


Figura 5.44 - Deslocamento da carga em relação ao eixo Z, $L_i = 15\text{ m}$.

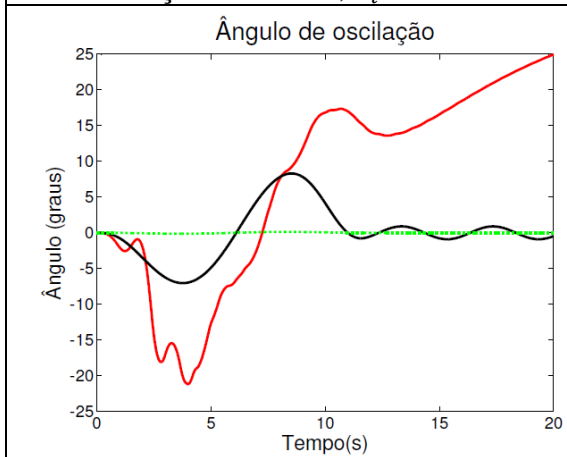


Figura 5.45 – Ângulo de oscilação da carga, $L_i = 15\text{ m}$.

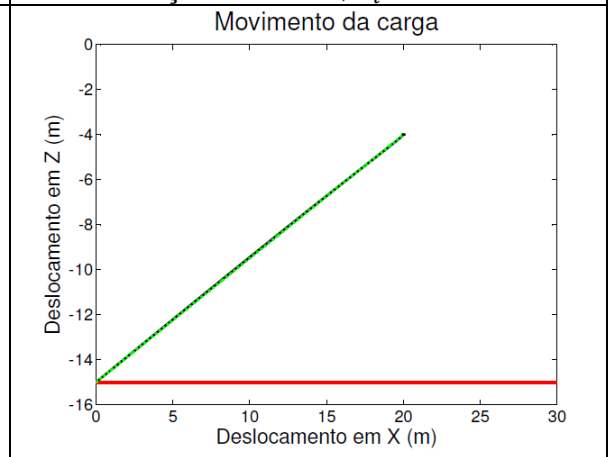


Figura 5.46- Movimento da carga, $L_i = 15\text{ m}$.

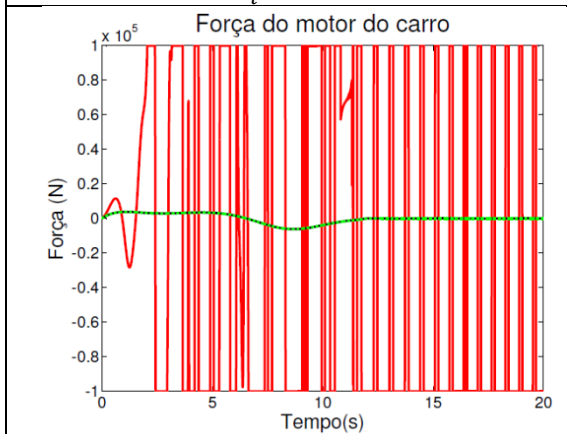


Figura 5.47- Força do carro, $L_i = 15\text{ m}$.

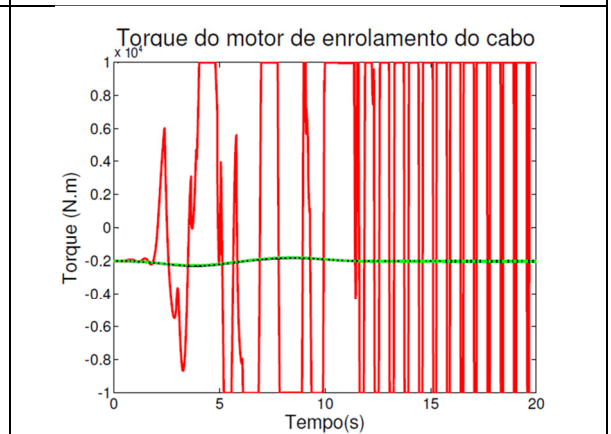


Figura 5.48 –Torque do motor de enrolamento do cabo, $L_i = 15\text{ m}$.

Analisando a seção 4.1.2, equação (4.29), a condição imposta para que o controle por realimentação dinâmica de estados não tenha singularidade é que $z_1 \neq 10$, simulando o valor de z_1 , tem-se que:

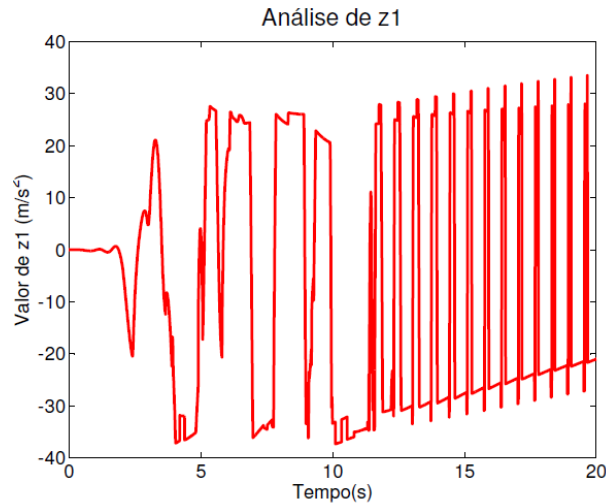


Figura 5.49 – Análise de z_1 para $L_i = 15 m$.

Logo, houve singularidade no controle por realimentação dinâmica.

As Figura 5.43 a Figura 5.48 demonstram novamente a robustez do controlador hierárquico quando comparado ao controlador por realimentação dinâmica, quando se altera o valor do comprimento inicial do cabo que foi utilizado para programar o controlador. O controle hierárquico praticamente não apresentou alteração com o novo valor de comprimento inicial do cabo, quando comparado aos resultados obtidos na seção 5.1 onde não se altera este parâmetro. Já o controlador por realimentação dinâmica demonstrou sua sensibilidade à alteração desse parâmetro que foi utilizado no projeto do controlador, apresentou singularidade no projeto de controle e não conseguiu realizar o transporte que lhe foi solicitado.

Através de simulações foi constatado que, o valor máximo de comprimento inicial do cabo para que o sistema com controle por realimentação dinâmica conseguisse transportar a carga seguindo a referência, e que não houvesse singularidade, é de $L_i \approx 14,6 m$.

Esse comportamento indesejado do sistema está associado ao projeto do observador, que, devido à alteração no momento do transporte, de um parâmetro utilizado no projeto da matriz de ganho do observador, sem controle adaptativo, não consegue fazer com que o erro

entre o estado real e o estado estimado pelo observador convirja para zero, conforme demonstra a Figura 5.50.

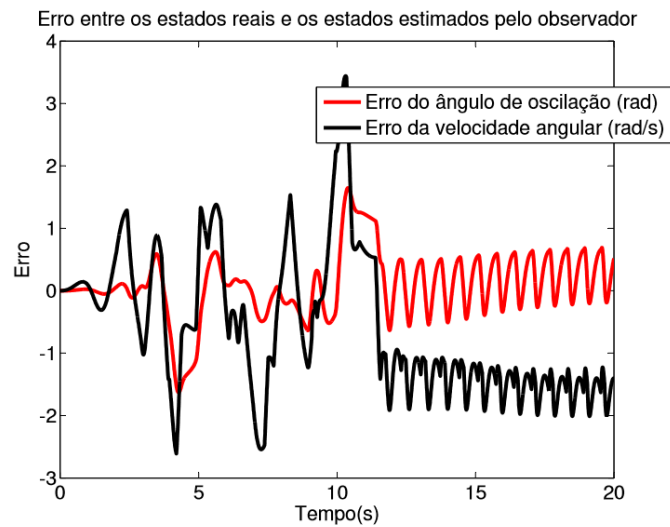


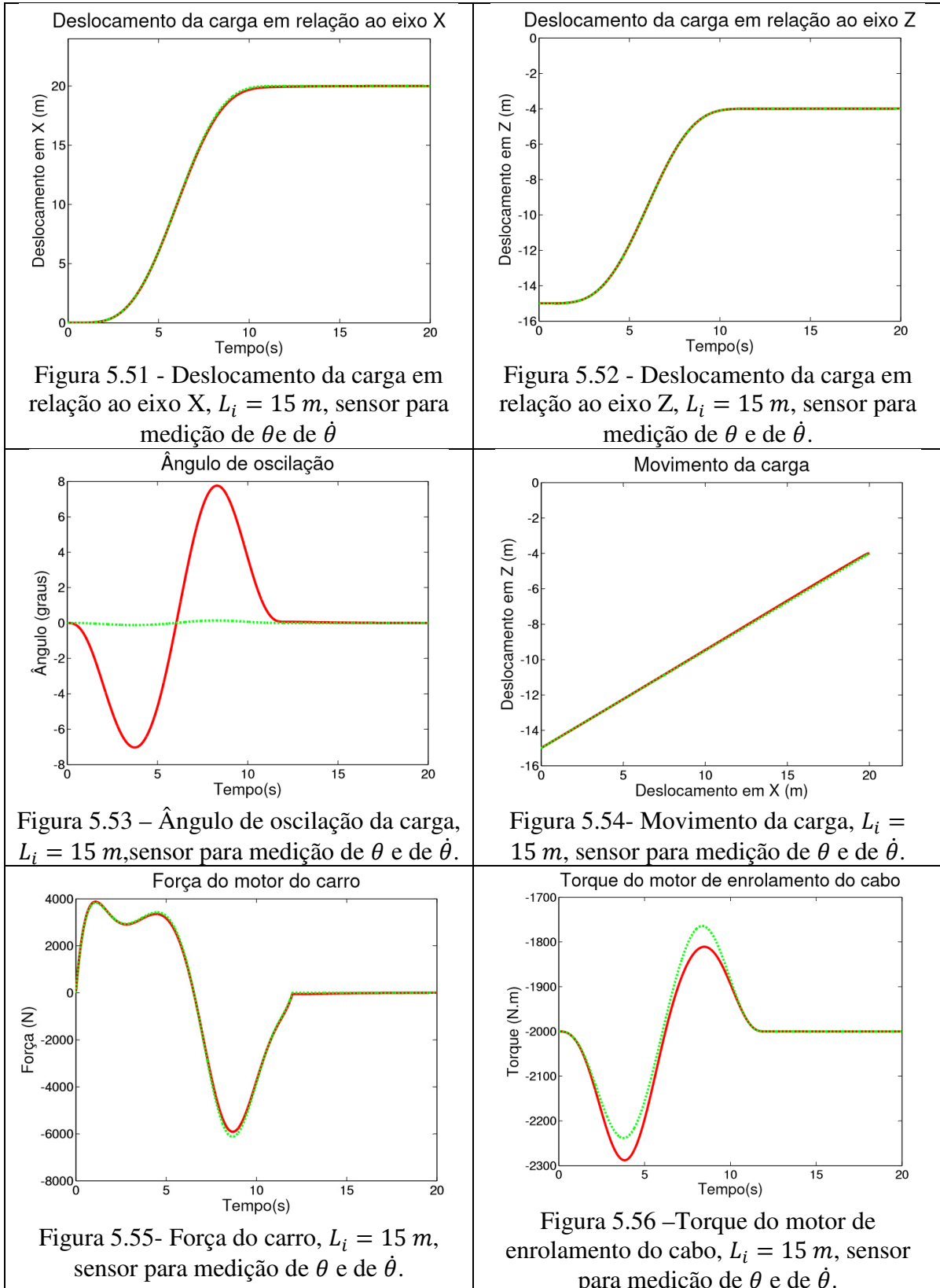
Figura 5.50 – Erro entre os estados reais e os estados estimados pelo observador

Uma solução para esse problema, supostamente, seria a alocação de polos diferentes dos que foram selecionados no projeto deste trabalho, de modo que a matriz de ganho do observador conseguisse convergir mais rapidamente para zero o erro entre os estados reais e os estados estimados pelo observador. Alternativamente, um controlador adaptativo para o comprimento inicial do cabo poderia ser desenvolvido. Entretanto, as possibilidades citadas anteriormente não foram testadas neste trabalho, carecendo portanto de uma comprovação de sua eventual eficácia.

Apesar de os ganhos de realimentação do controlador também terem sido projetados em função do comprimento inicial do cabo, é o observador de estados que causa o comportamento indesejado do sistema. Isto foi demonstrado, pois, se o ângulo de oscilação e a velocidade angular fossem medidos diretamente por sensores que não apresentassem ruídos, não necessitando assim de um observador de estados, o controle por realimentação dinâmica conseguiria apresentar o comportamento desejado e não apresentaria singularidade, conforme mostram os resultados apresentados nas figuras de 6.51 a 6.56.

Transporte da carga com comprimento inicial do cabo diferente do projetado, em um período de 12 segundos, utilizando sensores para medição do ângulo de oscilação e da velocidade angular, no controle por realimentação dinâmica.

Legenda: — Controle por realimentação dinâmica - - - Referência



Analisando a seção 4.1.2, equação (4.29), a condição imposta para que o controle por realimentação dinâmica de estados não tenha singularidade é que $z_1 \neq 10$, simulando o valor de z_1 , utilizando sensores para medição do ângulo de oscilação e para a medição da velocidade angular, tem-se que:

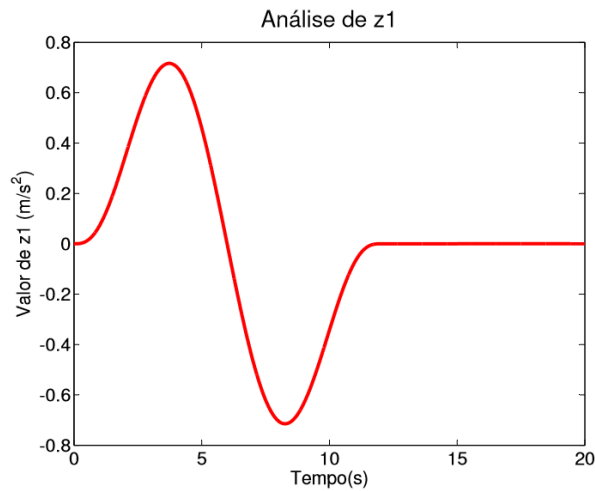


Figura 5.57 – Análise de z_1 para $L_i = 15$ m, com sensor para medição de θ e de $\dot{\theta}$.

Logo, não haverá singularidade no controle por realimentação dinâmica se, no lugar de estimadores de estados, forem utilizados sensores para medição do ângulo de oscilação e para a medição da velocidade angular.

5.6 - DISCUSSÃO DE RESULTADOS

Analisando os resultados obtidos nas simulações, pode-se verificar que o modelo dinâmico encontrado para a ponte rolante, incluindo a presença de arrasto aerodinâmico, apresenta nas simulações comportamento compatível com o esperado para sistemas desse tipo e permite o projeto de controladores para o rastreamento da trajetória.

A partir do modelo dinâmico são projetados dois controladores para fazer o rastreamento assintótico das saídas (representadas pela posição da carga em relação ao eixo X (x_L) e pela posição da carga em relação ao eixo Z (z_L)).

Um controlador proporciona a linearização via realimentação dinâmica de estados e é projetado via extensão dinâmica, já que a ponte rolante não possui grau relativo bem

definido. Através da linearização via realimentação dinâmica, pode-se demonstrar a propriedade de planicidade diferencial da ponte rolante. Esta propriedade permite que todas as variáveis da ponte, incluindo suas entradas de controle, sejam dadas em função das chamadas saídas planas e de um número finito de suas derivadas. Essas saídas são planejadas por meio da geração da trajetória e servem como referência para o controlador.

Já o controlador hierárquico é projetado com base nas características de sistemas singularmente perturbados, os quais permitem separar o controle em duas escalas de tempo, uma escala de tempo lenta e uma escala de tempo rápida.

São geradas trajetórias de referência para a posição da carga em X e para a posição da carga em Z , e para suas derivadas no tempo. Os controladores são projetados de modo a rastreamos assintoticamente essas trajetórias de referência geradas.

Analisando os resultados obtidos via simulação, em um período de tempo de 12 segundos, ambos controladores apresentam bom desempenho, de forma a não gerarem grandes oscilações na carga e ainda rastreamos assintoticamente sua trajetória de referência.

Em se tratando de um período menor de deslocamento, 6 segundos, verifica-se que, enquanto o controlador hierárquico consegue alcançar a trajetória de referência no tempo desejado, porém com pequenas oscilações após atingir a referência, o controlador por realimentação dinâmica não apresenta oscilações significativas, porém, também, não alcança a referência no tempo desejado.

Na presença de rajadas de ventos, ambos controladores conseguem estabilizar a carga e fazer com que esta chegue ao seu ponto final de referência no período desejado. O controlador hierárquico consegue rastrear melhor a trajetória, entretanto, apresenta oscilações em regime estacionário. Já o controlador por realimentação dinâmica não rastreia tão bem a trajetória, entretanto, não apresenta oscilações em regime estacionário.

No caso da presença de vento com velocidade constante durante todo o movimento, o sistema se comporta de forma semelhante ao caso da perturbação pela rajada de vento. O controlador por realimentação dinâmica apresenta um movimento mais estável, porém não

rastreia tão bem a trajetória. Já o controlador hierárquico apresenta pequena oscilação ao final do movimento, mas rastreia bem a trajetória. Em ambos os casos, verifica-se que os controladores, ao receberem o sinal de realimentação indicando que a posição do carro e o comprimento do cabo estão em seus valores de referência finais, interpretam que o sistema está estabilizado. Entretanto, devido à presença da força constante de arrasto causado pelo vento, um ângulo de deslocamento na posição é gerado e a carga fica estabilizada fora da posição de referência.

Nos resultados obtidos com a presença de arrasto, tanto para a rajada de vento, como para o vento com velocidade constante, verifica-se que, apesar de se tratar de uma operação em condição limite segundo as normas, o sistema apresenta resultados estáveis e que não aparentam sofrer tanto com a perturbação causada por essa velocidade do vento.

O fato de se ter introduzido a força de arrasto aerodinâmico na modelagem mostra que essa força, que por muitas vezes é ignorada, causa perturbação no sistema. A restrição de operação sob condições de ventos fortes existente nas normas implica que no caso limite (11,66 m/s) a perturbação imposta ainda pode ser considerada pequena e os controladores desenvolvidos mostraram-se adequados para limitar seus efeitos.

Em relação aos diferentes valores de massa da carga, é possível verificar que o controlador hierárquico se apresenta robusto (pelo menos no intervalo de variação analisado), confirmando o que foi mostrado em Lévine (2009). Observou-se, entretanto, que o controlador baseado em realimentação dinâmica se desvia totalmente da trajetória de referência, demonstrando-se ineficaz para o controle do transporte de cargas com massas muito diferentes daquelas para as quais tenha sido projetado. Esse comportamento é compatível com a afirmação de Boustany e d'Andréa-Novel (1992), que estabelecem a necessidade do uso de controle adaptativo para a massa, quando há variação deste parâmetro, em associação com a realimentação dinâmica.

A sensibilidade da ponte rolante quando seu transporte é realizado em condições que os parâmetros utilizados são diferentes dos projetados no controlador, como, por exemplo, o comprimento do cabo, é um fato de estudo na literatura de controle de pontes rolantes. Por este motivo, o trabalho de Corrigan *et al.* (1998) utiliza o comprimento do cabo como parâmetro em seu controlador por escalonamento do ganho. Esta sensibilidade é

demonstrada nos resultados do controlador de realimentação dinâmica deste trabalho quando se utiliza de comprimento inicial do cabo diferente do projetado para o controlador. O controle por realimentação dinâmica leva o sistema à singularidade. O fato de o controlador por realimentação dinâmica usar esse parâmetro para realizar a alocação de seus polos, tanto para realimentação de estados quanto para o observador de estados, faz com que o controlador tenha um bom desempenho quando operado nas condições de projeto. Entretanto, como dito na seção 5.5, quando o comprimento inicial do cabo é superior a 14,7m, que é o caso das simulações onde foi usado um comprimento inicial do cabo de 15m, o sistema controlado por realimentação dinâmica apresenta um resultado inaceitável.

Foi dito que esse fato talvez possa ser contornado através de uma outra escolha de alocação de polos, como também através do uso de um controlador adaptativo para o comprimento do cabo. Foi mostrado que a causa do comportamento insatisfatório do controle por realimentação dinâmica se dá pelo fato de o observador de estados, ao ter o parâmetro L_i alterado, não consegue estimar corretamente os estados. Isso foi comprovado através de simulações em que, sob as mesmas condições (comprimento inicial do cabo diferente do projetado), ao se substituir o observador de estados por sensores sem ruídos para medirem o ângulo de oscilação e a velocidade angular da carga, o controle por realimentação dinâmica apresentou ótimos resultados.

Já o controlador hierárquico, apesar de também utilizar o comprimento inicial do cabo para programar a alocação de seus polos, não utiliza observador de estados e demonstra ser robusto e não perder a estabilidade devido à alteração do comprimento inicial do cabo no transporte da carga, apresentando um eficiente rastreamento assintótico da trajetória.

É difícil realizar uma comparação exata entre os controladores projetados neste trabalho e os encontrados na literatura. As considerações feitas na modelagem de cada um (como hipóteses assumidas, presença de perturbações externas, atrito viscoso, arrasto aerodinâmico), fazem com que as equações dinâmicas que representam o sistema sejam diferentes entre um trabalho e outro. O fato de alguns resultados serem dados somente por simulações computacionais e outros por simulações em protótipos, também faz com que os resultados e valores utilizados na simulação sejam diferentes entre trabalhos que,

teoricamente, utilizam o mesmo método de controle. Entretanto, considerando as condições de transporte ideal (seção 5.1), as quais são mais comumente reportadas na literatura, observou-se que ambos os controladores implementados neste trabalho apresentaram desempenho similar aos daqueles encontrados na revisão bibliográfica. Especificamente, os resultados obtidos pelo controlador por realimentação dinâmica implementado neste trabalho mostraram-se compatíveis com aqueles citados por Cheng e Chen (1996), Aranda *et al.* (2001) e Aranda *et al.* (2002). Já os resultados relativos ao controlador hierárquico desenvolvido (seção 4.3) apresentaram-se totalmente compatíveis com os reportados por Lévine (2009).

Em resumo, considerando as diversas situações de transporte apresentadas neste trabalho, pode-se dizer que o controlador por realimentação dinâmica é mais eficiente quando não se necessita um movimento rápido e um rastreamento perfeito da trajetória, mas se deseja que a carga não oscile após seu período de transporte.

Como dito no capítulo 1, a motivação da escolha pelo controlador hierárquico foi devido a bons resultados encontrados em Lévine (2009) para este controlador quando atuando em uma ponte rolante.

Neste trabalho, este controlador mostra ser realmente eficiente e prova conseguir rastrear bem a trajetória de referência e ser robusto mesmo quando a ponte rolante opera em condições diferentes das planejadas, seja em relação à massa, às condições iniciais e finais, à redução no período de tempo de transporte ou à presença de perturbações como o vento.

O fato de o controlador hierárquico ser fundamentado em sistemas singularmente perturbados e permitir que o sistema seja controlado em duas escalas de tempo, uma escala lenta e uma escala rápida, permite que, sistemas como o da ponte rolante, que apresentam dinâmicas lentas e rápidas, sejam controlados de forma robusta.

6 - CONCLUSÕES

Os assuntos que tangem o controle da ponte rolante foram detalhados nesse trabalho, através da apresentação de uma fundamentação teórica, revisão de literatura, modelagem do sistema e projeto dos controladores.

A modelagem dinâmica foi feita, de acordo com as hipóteses levantadas, e considerou-se o arrasto aerodinâmico, o qual também foi modelado, nessa análise. Dois controladores foram projetados. Um controlador de linearização via realimentação de estados e um controlador hierárquico.

A propriedade de planicidade diferencial da ponte rolante foi demonstrada através do projeto do controlador de linearização por realimentação dinâmica de estados. Essa propriedade permitiu que, uma vez geradas as trajetórias para as saídas desejadas, o controlador conseguisse rastrear tais trajetórias de referência. Como este tipo de controlador exige que sejam conhecidas todas as variáveis de estado, foi necessário o projeto de um observador de estados.

Os dois controladores foram implementados de modo que foi possível analisar o desempenho de cada um deles quando operando em condições de projeto, assim como comparar o desempenho de cada um dos controladores quando solicitado o transporte da carga em um período menor que o do projeto, como também alterar parâmetros como a massa da carga e o comprimento inicial do cabo. Além de ser verificado como esses controladores se comportam quando a ponte está operando sob a atuação de fortes ventos, sejam esses rajadas ou ventos com velocidade constante.

Os resultados apresentados foram compatíveis com o que era esperado no caso das situações de transporte já relatadas na literatura. Para o caso da operação da ponte rolante na presença de ventos constantes e rajadas de vento, em que a força de arrasto aerodinâmico foi considerada na modelagem, não houve uma referência para comparação de trabalhos da literatura que também considerasse tal efeito, entretanto, os resultados dos dois controladores apresentaram bom desempenho, mesmo operando em condições de vento limite.

6.1 - SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Futuros trabalhos podem ser desenvolvidos tanto para a parte no que se refere à modelagem da ponte quanto à parte de controle.

Para a parte de modelagem dinâmica, pode-se considerar a ponte atuando no plano tridimensional XYZ, tendo, portanto, mais um ângulo de oscilação, assim como também poder se deslocar nesse novo eixo.

Na parte de controle, sugere-se que controles adaptativos para os parâmetros em que o controlador por realimentação dinâmica não obteve bom resultado (diferentes valores de massa da carga e diferentes condições iniciais do comprimento do cabo) sejam integrados a este controlador, de modo a torná-lo mais robusto na presença dessas variações.

No que se refere ao arrasto aerodinâmico, verificar se, como dito anteriormente, a velocidade permitida para operação de pontes na presença de ventos não poderia ser aumentada, tendo em vista que para transportes nas condições que foram demonstradas aqui, um vento com velocidade de 11,66m/s não causa uma perturbação tão elevada, considerando seu efeito em relação à oscilação na carga.

O planejamento de trajetória que contornasse um obstáculo e um estudo sobre como os controladores aqui projetados rastreiam essa nova trajetória, também seria interessante para análise de resultados e comparação dos dois controladores.

REFERÊNCIAS

- ABDEL-RAHMAN, E. M.; MASOUD, Z. N.; NAYFEH, A. H. (2003). Dynamics and control of cranes: A review. *Journal of Vibration and Control*, 9: P 863-908.
- AHMAD, M. A. (2009). Sway reduction on gantry crane system using delayed feedback signal and PD-type fuzzy logic controller: A comparative assessment. *World Academy Of Science, Engineering And Technology*, v. 50, P 688-693.
- ALBERTO, L. F. C. (2006). Caracterização e estimativa da área de atração de sistemas dinâmicos não lineares. Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo.
- AMARANTE, O. A. C.; BROWER, M.; ZACK, J.; SÁ, A. L. (2001). Atlas do potencial eólico brasileiro. MME; Eletrobras. Brasília. Disponível em: <http://www.cresesb.cepel.br/publicacoes/download/atlas_eolico/mapas_3b.pdf>. Acesso em: 15 abr, 2012.
- ANDERSON, R. L.; IBRAGIMOV, N. H. (1979). Lie-Bäcklund transformations in applications. Philadelphia, PA: SIAM.
- ARANDA-BRICAIRE, E.; GONZÁLEZ-INDA, C.P.; VELASCO-VILLA, M. (2001). Output tracking for an overhead crane without load position measurement. Congreso Nacional de la AMCA.
- ARANDA-BRICAIRE, E.; GONZÁLEZ-INDA, C.P.; PLESTAN, F.; VELASCO-VILLA, M. (2002). Nonlinear observers applied to the control of an overhead crane. 15th Triennial World Congress.
- BOUSTANY, F.; D'ANDRÉA-NOVEL, B. (1992). Adaptive control of an overhead crane using dynamic feedback linearization and estimation design. International Conference on Robotics and Automation. P 1963-1968.
- BOX, G. E. P.; HUNTER, J. S.; HUNTER, W. G. (2005). Statistics for experimenters. 2nd ed, John Wiley & Sons Publication. New Jersey, US.
- BROGAN, W. L. (1974). Modern control theory. Third Edition. Prentice-Hall.
- BRUNETTI, F. (2005). Mecânica dos fluidos. Editora Prentice Hall. São Paulo.
- BURUL, I.; KOLONI, F.; MATUŠKO, J. (2010). The control system design of a gantry crane based on H_∞ control theory. Mipro, Opatija - Croatia, P 183-188.
- CHEN, C. (1999). Linear systems theory and design. Third Edition. Oxford University Press.
- CHENG, C. C.; CHEN, C. Y. (1996). Controller design for an overhead crane system with uncertainty. *Control Engineering Practice*, vol. 4, no. 5, P 645-653.

- CHWA, D. (2009). Nonlinear tracking control of 3-D overhead cranes against the initial swing angle and the variation of payload weight. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 17, n° 4, July.
- CORRIGA, G.; GIUA, A.; USAI, G. (1998). An implicit gain-scheduling controller for cranes. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 6, no.1, pp. 15-20.
- COSTA, A. H. R; CRUZ, J. J. DA; SCÁRDUA, L. A. (2003). Controle ótimo de descarregadores de navios utilizando aprendizado por reforço. *Revista Controle & Automação*, v. 14, n. 4, P 368-376, dez.
- COSTA, H. C. DA. (2010). Aplicação de técnicas de modelagem e controle em sistemas tipo ponte rolante. Instituto Militar de Engenharia. Rio de Janeiro.
- CRUZ, J. J. DA; LEONARDI, F.; MORAES, C. C. DE. (2008). Controle anti-balanço de tempo mínimo usando programação linear aplicado a um descarregador de navios. Congresso Brasileiro de Automática (CBA), Juiz de Fora, p.1-6, 15 set.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. (2001). *Sistemas de controle modernos*. Addison-Wesley, LTC Editora. Oitava edição.
- EMANUEL, G. (2000). *Analytical fluid dynamics*. CRC Press, Florida.
- ESFANDIARI, R.; VU, H. (1997). *Dynamic systems: modeling and analysis*. The McGraw-Hill Companies.
- EYKHOFF P. (1974). *System identification: parameter and state estimation*. Chichester, England: Wiley, 555 p. University of Technology, Eindhoven, The Netherlands.
- FLIESS, M.; LÉVINE, J.; MARTIN, PH.; ROUCHON, P. (1992). Sur les systemes non lineaires differentiellement plats. *C. R. Acad. Sci. Paris*, I-315:619-624.
- FLIESS, M.; LÉVINE, J.; MARTIN, PH.; ROUCHON, P. (1994). Flatness and defect of nonlinear systems introductory theory and examples. CAS internal report A-284.
- FLIESS, M.; LÉVINE, J.; MARTIN, PH.; ROUCHON, P. (1999). A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. *IEEE transactions on automatic control*, vol. 44, no. 5, May.
- FOX, R. W.; MCDONALD, A. T. (2008). *Introdução à mecânica dos fluidos*. Editora Guanabara Dois. 7ª Edição. Rio de Janeiro.
- FRAGA, S. L., SOUSA, J.B., PEREIRA, F.L. (2003). Geração de trajetórias para sistemas diferencialmente planos. *Revista Robótica: Automação, controle e instrumentação*. P 22-27.
- FRANCH, J. (1999). Flatness, tangent systems and flat output. PhD Thesis UPC, Barcelona.

- GIUA, A.; SEATZU, C.; USAI, G. (1999). Observer-controller design for cranes via Lyapunov equivalence. *RevistaAutomatica*, Italy, v. 35, P 669-678.
- HONG, K.; NGO, Q. H. (2009). Port automation: modeling and control of container cranes. *International Conference On Instrumentation, Control & Automation Ica*, Bandung - Indonesia, p.19-26.
- IBRAGIMOV, N. H. (1985). *Transformation groups applied to mathematical physics*. Boston, MA: Reidel.
- ISIDORI, A. (1995). *Nonlinear control systems*. Third Edition. Springer.
- KHALIL, H. K. (2002). *Nonlinear systems*. Third Edition. Pearson Education Asia Limited and Publishing House of Eletronics Industry. Beijing.
- KISS, B.; LÉVINE, J.; MULLHAUPT, PH. (2000). A simple output feedback PD controller for nonlinear cranes. In *Proceedings of the 39th CDC*.
- KISS, B.; LÉVINE, J.; MULLHAUPT, PH. (2001). Global stability without motion planning may be worse than local tracking. *Proc. of the European Control Conference*, P 1106-1110.
- KLAASSENS, J.B.; HONDERD, G.; EL AZZOUZI, A.; CHEOK, KA C.; SMID, G.E. (1999). 3D Modeling Visualisation for studying controls of the jumbo container crane. *Proceedings of the American Control Conference*, June, pp.1754-1758.
- KOLONIC, F.; POLJUGAN, A.; POPADIC, T. (2006). A fuzzy control scheme for the gantry crane position and load swing control., *Zagreb-Croatia*, P 1-6.
- KONECRANES (2014). Disponível em: <<http://www.konecranes.com.br>> Acesso em: 20 jan, 2014.
- LÉVINE, J. (2009). *Analysis and control of nonlinear systems: A flatness-based approach*. Springer.
- LI, X.; TOXQUI, R.; YU, W. (2006). PD control of overhead crane systems with neural compensation. J. Wang et al. (Eds.): *ISSN 2006, LNCS 3972*, P 1110–1115.
- MARTIN, PH.; MURRAY, R. M.; ROUCHON, P. (2002). *Flatness based design*. Notes for EOLSS, January.
- MORISON, J. R.; O'BRIEN, M. P.; JOHNSON, J. W.; SCHAAF, S. A. (1950). The force exerted by surface waves on piles. *AIME Petroleum Transactions*, AIME, 189, 149-154.
- NAGURKA, M. (2003). Aerodynamic effects in a dropped ping-pong ball experiment. *Tempus. Milwaukee*. Disponível em: <<http://www.ijee.ie/articles/Vol19-4/IJEE1433.pdf>> Acesso em: 10 abr, 2012.

NBR 8400 (1984). Norma Brasileira 8400 - Cálculo de equipamentos para levantamento e movimentação de cargas. ABNT-Associação Brasileira de Normas Técnicas.

NR N°18 (1978). Norma Regulamentadora n°18 – Condições e meio ambiente de trabalho na indústria da construção. Ministério do trabalho e emprego.

OGATA, K. (2003). Engenharia de controle moderno. Editora Prentice-Hall do Brasil Ltda. Rio de Janeiro.

SCATTOLINI, R. (2009). Architectures for distributed and hierarchical model predictive control – A review. *Journal of Process Control* 19, P 723–731.

SCHMIDT, H. (2005). Some properties of added-mass coefficients. 2.20 Marine Hydrodynamics, Massachusetts Institute Technology. Disponível em: <<http://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-20-marine-hydrodynamics-13-021-spring-2005/lecture-notes/lecture14.pdf>> Acesso em: 16 abr, 2012.

SLOTINE, J.E.; LI, W. (1991). Applied nonlinear control. Pearson Education Asia Limited and China Machine Press.

SMOCZEK, J.; SZPYTKO, J. (2011). Adaptation control technique of overhead crane mechanisms. The 19th Mediterranean Conference On Control And Automation, Corfu-Greece, p.1-4.

SORENSEN, K.L.; SINGHOSE, W.; DICKERSON, S. (2005). A controller enabling precise positioning and sway reduction in cranes with on-off actuation. 16th Ifac World Congress, Prague, P 1-6.

SYMON, K. R. (1996). Mecânica. Campus, Rio de Janeiro.

TECHET, A.H. (2010). Derivation of added mass around a sphere. 2.016 Hydrodynamics, Massachusetts Institute Technology. Disponível em: <http://web.mit.edu/2.016/www/handouts/Added_Mass_Derivation_050916.pdf> Acesso em: 10 abr, 2012.

YANG, J. H. (2009). On the adaptive tracking control of 3-D overhead crane systems. Adaptive control, Kwanho You (Ed.), ISBN: 978-953-7619-47-3.

ITO, O.; YOUCEF-TOUMI, K. (1990). A time delay controller for systems with unknown dynamics. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 114, P 10-19.

ZHARINOV, V. V. (1992). Geometrical aspect of partial differential equations. Singapore: World Scientific.

ANEXOS

ANEXO I - GRAU RELATIVO DE UM SISTEMA COM MÚLTIPLAS ENTRADAS E MÚLTIPLAS SAÍDAS (MIMO)

De acordo com Isidori (1995), dado um sistema com o mesmo número m de entradas e de canais de saída:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m g_i(\mathbf{x})u_i \\ y_1 &= h_1(\mathbf{x}), \\ y_m &= h_m(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (\text{I.1})$$

Nos quais $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ são campos de vetores suaves e $h_1(\mathbf{x}), \dots, h_m(\mathbf{x})$ funções suaves, definidos em um conjunto aberto de \mathbb{R}^n .

Um sistema não linear multivariável da forma acima tem um vetor de grau relativo $\{r_1, \dots, r_m\}$ em um ponto \mathbf{x}^0 se:

(i)

$$L_{g_i} L_f^k h_i(\mathbf{x}) = 0.$$

Para todo $1 \leq j \leq m$, para todo $k < r_i - 1$; para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo \mathbf{x} em uma vizinhança de \mathbf{x}^0 .

(ii) A matriz $m \times m$:

$$\mathbf{A}_{rd}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (\text{I.2})$$

É não singular em $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$.

Pode-se notar que r_i é o número de vezes que diferencia-se a i -ésima saída $y_i(t)$ em $t = t^0$ para se ter pelo menos um componente do vetor de entrada $\mathbf{u}(t^0)$ explicitamente aparecendo.

Se um sistema que tem um grau relativo (vetor) $\{r_1, \dots, r_m\}$ em \mathbf{x}^0 . Então:

$$r_1 + \dots + r_m \leq n. \quad (\text{I.3})$$

Em que n é a ordem do sistema.

O grau relativo do sistema é dado por $r = r_1 + \dots + r_m$.

ANEXO II – ALGORITMO DE EXTENSÃO DINÂMICA APRESENTADO POR ISIDORI (1995)

O algoritmo de extensão dinâmica apresentado por Isidori (1995) é um procedimento iterativo que permite encontrar uma realimentação de estados dinâmica para sistemas que não possuem grau relativo bem definido. Assim um sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad (\text{II.1})$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}). \quad (\text{II.2})$$

Será realimentado por:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta})\mathbf{v}, \quad (\text{II.3})$$

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta}) + \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta})\mathbf{v}. \quad (\text{II.4})$$

Tal que resultará em:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta})\mathbf{v}, \quad (\text{II.5})$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}). \quad (\text{II.6})$$

Um resumo do algoritmo de extensão dinâmica é apresentado abaixo. Maiores detalhes, demonstrações e deduções podem ser encontrados em Isidori (1995).

Considere a matriz $\mathbf{A}_{rd}(\mathbf{x})$ definida na equação (I.2).

Supondo que esta matriz não possua grau relativo bem definido, deve-se escolher:

$$\mathbf{a}_{i_0 j_0}(\mathbf{x}^0) = L_{g_{j_0}} L_f^{r_{i_0}-1} h_{i_0}(\mathbf{x}^0) \neq 0 \quad (\text{II.7})$$

Definindo a realimentação dinâmica:

$$u_j = v_j \text{ para } j \neq j_0,$$

$$u_{j_0} = \frac{1}{a_{i_0 j_0}(x)} \left(p(x) + q(x)\xi - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^m a_{i_0 j}(x)v_j \right), \quad (\text{II.8})$$

$$\dot{\xi} = v_{j_0}. \quad (\text{II.9})$$

A composição da Equação (II.1) e da Equação (II.8) define um novo sistema:

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^m g_j(x)v_j + \frac{g_{j_0}(x)}{a_{i_0 j_0}(x)} \left(p(x) + q(x)\xi - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^m a_{i_0 j}(x)v_j \right), \quad (\text{II.10})$$

$$\dot{\xi} = v_{j_0}, \quad (\text{II.11})$$

$$y_1 = h_1(x), \quad (\text{II.12})$$

$$y_m = h_m(x). \quad (\text{II.13})$$

Substitua o sistema da Equação (II.1) pelo sistema da Equação (II.10) e faça a iteração do procedimento.

As duas funções $p(x)$ e $q(x)$ consideradas na definição de u_{j_0} podem, as vezes, ajudar a obter expressões mais simples no sistema composto da Equação (II.10).

Então escolhendo:

$$p(x) = -L_f^{r_{i_0}} h_{i_0}(x). \quad (\text{II.14})$$

E $q(x) = 1$ (Isidori (1995) explica e detalha as escolhas de $p(x)$ e $q(x)$).

Leva-se a simples expressão:

$$y_{i_0}^{(r_{i_0})} = \xi. \quad (\text{II.15})$$

Onde a última derivada da saída produz:

$$y_{i_0}^{(r_{i_0}+1)} = v_{j_0}. \quad (\text{II.16})$$

ANEXO III – ISOMORFISMO DE LIE-BÄCKLUND

As informações contidas neste anexo foram obtidas em Lévine (2009) e introduzem o conceito de isomorfismo de Lie-Bäcklund para a ponte rolante. Segundo Lévine (2009) se o conjunto de variáveis da ponte rolante $(x_L, \dot{x}_L, \ddot{x}_L, x_L^{(3)}, x_L^{(4)}, z_L, \dot{z}_L, \ddot{z}_L, z_L^{(3)}, z_L^{(4)})$ for considerado como uma parametrização do par de funções do tempo $t \mapsto (x_L(t), z_L(t))$, o mapeamento Φ para cada $(x_L, \dot{x}_L, \ddot{x}_L, x_L^{(3)}, x_L^{(4)}, z_L, \dot{z}_L, \ddot{z}_L, z_L^{(3)}, z_L^{(4)})$ que corresponde a $(x_C, \dot{x}_C, x_L, \dot{x}_L, R, \dot{R}, z_L, \dot{z}_L, \theta, T_e, F, T_S)$, é inversível no sentido que consegue-se mapear de uma trajetória para outra utilizando-se um único caminho de uma para outra.

As trajetórias $t \mapsto (x_L(t), z_L(t))$ podem ser arbitrariamente escolhidas em um conjunto de funções com derivadas até quarta ordem desde que as variáveis da ponte rolante $(x_L, \dot{x}_L, \ddot{x}_L, x_L^{(3)}, x_L^{(4)}, z_L, \dot{z}_L, \ddot{z}_L, z_L^{(3)}, z_L^{(4)})$ não tenham que satisfazer nenhuma outra equação diferencial além de $\frac{d}{dt} x_L^{(j)} = x_L^{(j+1)}$ e $\frac{d}{dt} z_L^{(j)} = z_L^{(j+1)}$ (Lévine, 2009).

Apesar de o conjunto encontrado mapear as trajetórias em um único caminho, pode-se perceber que a dimensão do conjunto de variáveis é alterada em relação à dimensão do conjunto original. Nas equações do sistema original encontrados pela modelagem da ponte rolante tem-se um conjunto de dimensão 6, $(x_C, \dot{x}_C, R, \dot{R}, \theta, \dot{\theta})$, enquanto que o novo conjunto encontrado para mapear a trajetória, $(x_L, \dot{x}_L, \ddot{x}_L, x_L^{(3)}, x_L^{(4)}, z_L, \dot{z}_L, \ddot{z}_L, z_L^{(3)}, z_L^{(4)})$, tem dimensão 8.

Segundo Lévine (2009) esta alteração nas dimensões pode ser resolvida se substituirmos o sistema de coordenadas dimensionalmente finito encontrado, por uma extensão que seja dimensionalmente infinita, ou seja, no lugar de um mapeamento Φ que leve de $(x_L, \dot{x}_L, \ddot{x}_L, x_L^{(3)}, x_L^{(4)}, z_L, \dot{z}_L, \ddot{z}_L, z_L^{(3)}, z_L^{(4)})$ para $(x_C, \dot{x}_C, x_L, \dot{x}_L, R, \dot{R}, z_L, \dot{z}_L, \theta, T, F, T_S)$, considera-se sua extensão $\tilde{\Phi}$, que mapeia uma sequência infinita de coordenadas $(x_L, \dot{x}_L, \ddot{x}_L, x_L^{(3)}, x_L^{(4)}, z_L, \dot{z}_L, \ddot{z}_L, z_L^{(3)}, z_L^{(4)}, \dots)$ para uma outra sequência também infinita de coordenadas $(x_C, \dot{x}_C, x_L, \dot{x}_L, R, \dot{R}, z_L, \dot{z}_L, \theta, T, F, T_S, \dot{F}, \dot{T}_S, \ddot{F}, \ddot{T}_S, \dots)$. Portanto, agora $\tilde{\Phi}$ está mapeando espaços que possuem a mesma dimensão, a dimensão infinita.

Neste contexto $\tilde{\Phi}$ é chamado de um isomorfismo Lie-Bäcklund.

Em Lévine (2009) verifica-se que as transformações Lie-Bäcklund devem satisfazer as seguintes propriedades:

- Cada componente da transformação depende somente de um número finito, mas não conhecido previamente, de derivadas de tempo sucessivas das coordenadas;
- A transformação preserva a diferenciação em relação ao tempo;
- Essas transformações são inversíveis se pode-se voltar as coordenadas originais através de transformações do mesmo tipo.

As aplicações de Lie-Bäcklund podem ser encontradas em Fliess *et al.*(1999).

Em Lévine (2009) é demonstrada também a equivalência e propriedades deste isomorfismo.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Tabela de valores de constantes utilizadas:

<i>Símbolo</i>	Descrição	Valor
B_C	Coeficiente de atrito viscoso na direção de x_C .	20 kg/s
B_S	Coeficiente de atrito viscoso no eixo do carretel.	8 kg.m ² /s
C_α	Coeficiente de massa adicionada pela esfera	0.5
C_d	Coeficiente de arrasto da esfera em escoamento turbulento	0.48
C_m	Coeficiente de inércia	1.5
d	Diâmetro da esfera	3 m
ε	Escala de tempo	0.01
g	Aceleração da gravidade	10 m/s ²
J_S	Inércia do motor de enrolamento do carretel.	50 kg.m ²
μ	Viscosidade dinâmica ou absoluta	1,846.10 ⁻⁵ kg/m.s
m_C	Massa do carro.	5000 kg
m_{Fr}	Parcela de massa proveniente do arrasto na carga	7,0686 kg
m_L	Massa total da carga	507,0686 kg
m_l	Massa da carga.	500 kg
R	Raio do carretel (spool).	0,4 m
r_L	Raio da carga esférica	1,5 m
ρ	Massa específica	1,177 kg/m ³
\dot{x}_v	Velocidade do fluido na direção X. (como neste caso o fluido é o ar, será chamado de velocidade do vento)	11,66 m/s

Tabela A-1-Valores das constantes utilizadas

APÊNDICE B

Programa em MATLAB® para análise de controlabilidade, análise de observabilidade, cálculo de ganhos do controlador por realimentação dinâmica, cálculo de ganhos do observador de estados e cálculo de ganhos do controlador hierárquico.

```
clc
clear all

%Dados das constantes e condições de trabalho
g=10; %aceleração da gravidade
mc=5000; %massa do carro da ponte
Bc=20; %atrito viscoso translacional do carro
Js=50; %inércia do motor de enrolamento do cabo
Bs=8; %atrito viscoso rotacional do motor de enrolamento do
cabo
R=0.4; %raio do motor de enrolamento do cabo
ml=500; %massa da carga esférica
ro=1.177;%massa específica
ca=0.5; %coeficiente de massa adicionada pela esfera
cd=0.48;%coeficiente de arrasto da esfera
cm=1.5;%coeficiente de inercia
rL=1.5; %raio da carga esférica
Ar=pi*rL^2; %área da carga esférica
Vol=(4/3)*pi*(rL^3); %volume da carga esférica
mfr=ro*ca*Vol;%parcela da massa proveniente do arrasto
mL=ml+mfr;%massa total da carga considerando arrasto
Lfina=4;%comprimento final do cabo

%-----

matriz_A=[0,1,0,0,0,0;0,Bc/mc,0,0,g*ml/mc,0;0,0,0,1,0,0;
0,0,0,Bs/(Js+R^2*mL),0,0;0,0,0,0,0,1;
0,Bc/(mc*Lfina),0,0,(g*ml/Lfina)*(1/mL+1/mc),0];
matriz_B=[0,0;1/mc,0;0,0;0,1/(Js/R+R*mL);0,0;
-1/(mc*Lfina),0];
matriz_Cob
=[1,0,0,0,0,0;0,1,0,0,0,0;0,0,1,0,0,0;0,0,0,1,0,0];
autovalores_A=eig(matriz_A)

%-----

%Análise do sistema:
%Contrabilidade do sistema linearizado:
Cont=[matriz_B,matriz_A*matriz_B,(matriz_A)^2*matriz_B,
(matriz_A)^3*matriz_B,(matriz_A)^4*matriz_B,
(matriz_A)^5*matriz_B];
Rank_C=rank(Cont)
```

```

% Observabilidade do sistema linearizado:
Observ=[matriz_Cob;matriz_Cob*matriz_A;
matriz_Cob*(matriz_A)^2;matriz_Cob*(matriz_A)^3;
matriz_Cob*(matriz_A)^4;matriz_Cob*(matriz_A)^5];
Rank_0=rank(Observ)

%-----

%Projeto controlador por realimentação dinâmica
wln=-1.12; %frequência natural de oscilação em X
%pólos controlador por realimentação dinâmica referentes a X
p01=wln;
p11=wln-0.1;
p21=wln+0.1;
p31=wln+0.2;
%pólos controlador por realimentação dinâmica referentes a Z
p02=2*p01;
p12=2*p11;
p22=2*p21;
p32=2*p31;
polos_x=[p01 p11 p21 p31]
polos_z=[p02 p12 p22 p32]
%calculo do ganho de realimentação
A_polo=[0 1 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1;0 0 0 0];
B_polo=[0;0;0;1];
%Ganho da realimentação de estados:
[k_realimentacao_x]=place(A_polo,B_polo,polos_x) %matriz com
os ganhos da realimentação de estados para y1
[k_realimentacao_z]=place(A_polo,B_polo,polos_z) %matriz com
os ganhos da realimentação de estados para y2

%-----

%Observador de estados
%A1 é a transposta da matriz A
matriz_A1=transpose(matriz_A);
%B1 é a transposta da matriz Cob
matriz_B1=transpose(matriz_Cob);

%Testando se as matrizes transpostas são controláveis, o que
corresponde a analisar a observabilidade:
matriz_Cont_transp=[matriz_B1,matriz_A1*matriz_B1,(matriz_A1)
^2*matriz_B1,(matriz_A1)^3*matriz_B1,(matriz_A1)^4*matriz_B1,
(matriz_A1)^5*matriz_B1];
Rank_transp=rank(matriz_Cont_transp)
%Pólos desejados para o observador de estados:
pob_1=p01*5;
pob_2=p01*5-0.1;
pob_3=p01*5-0.2;
pob_4=p01*5-0.3;

```

```

pob_5=p01*5-0.4;
pob_6=p01*5-0.5;
%Cálculo da matriz de ganho para os pólos desejados para o
observador de estados:
polos_ob=[pob_1 pob_2 pob_3 pob_4 pob_5 pob_6]
matriz_H_preliminar_ob=place(matriz_A1,matriz_B1,polos_ob);
%Encontrou-se a matriz de ganho como se desejasse
realimentação de estados, como se trata de observador deve-se
fazer a transposta:
matriz_H=transpose(matriz_H_preliminar_ob) %Matriz de ganho
do observador de ordem plena

%-----

% Projeto controlador hierárquico
A_hierarquico=[0,1;0,0];
B_hierarquico=[0;1];
%Polos do controlador hierárquico referente a X
polo10h=-1.12;
polo11h=-1.02;
polo_hierarquico_x=[polo10h,polo11h]
%Polos do controlador hierárquico referente a Z
polo20h=-2.24;
polo21h=-2.14;
polo_hierarquico_z=[polo20h,polo21h]
%Ganhos de realimentação do controlador hierarquico referente
a X
K_hierarquico_x=place(A_hierarquico,B_hierarquico,polo_hierar
quico_x)
%Ganhos de realimentação do controlador hierarquico referente
a Z
K_hierarquico_z=place(A_hierarquico,B_hierarquico,polo_hierar
quico_z)

```