

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE GAMA / FACULDADE DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE
MATERIAIS DA ENGENHARIA**

**ANÁLISE NUMÉRICA DE MODELOS DE DANO BASEADOS
NA MICROMECAÂNICA DE DEFEITOS**

MAURÍLIO ANTÔNIO DE CASTRO DIAS CUNHA

ORIENTADOR: PROF. LUCIVAL MALCHER, DR. (ENM/FT/UNB)

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS
DA ENGENHARIA**

PUBLICAÇÃO: 018A/2014

BRASÍLIA/DF: OUTUBRO – 2014

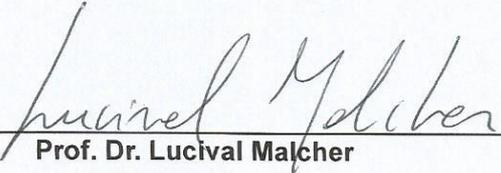
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE GAMA / FACULDADE DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE
MATERIAIS DA ENGENHARIA.

ANÁLISE NUMÉRICA DE MODELOS DE DANO BASEADOS NA
MICROMECAÂNICA DE DEFEITOS

MAURÍLIO ANTONIO DE CASTRO DIAS CUNHA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA DA FACULDADE GAMA E FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA.

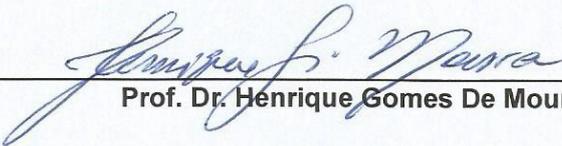
APROVADA POR:



Prof. Dr. Lucival Malcher
(Orientador)



Prof.ª Dr.ª Carla Tatiana Mota Anflor
(Examinador Interno)



Prof. Dr. Henrique Gomes De Moura
(Examinador Externo)

BRASÍLIA, 31 DE OUTUBRO DE 2014.

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE GAMA / FACULDADE DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE
MATERIAIS DA ENGENHARIA**

MAURÍLIO ANTÔNIO DE CASTRO DIAS CUNHA

**ANÁLISE NUMÉRICA DE MODELOS DE DANO BASEADOS
NA MICROMECAÂNICA DE DEFEITOS**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA DA FACULDADE GAMA E FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA.

ORIENTADOR: PROF. LUCIVAL MALCHER, DR. (ENM/FT/UNB)

**BRASÍLIA
2014**

FICHA CATALOGRÁFICA

Cunha, Maurílio Antônio de Castro Dias Cunha

ANÁLISE NUMÉRICA DE MODELOS DE DANO BASEADOS NA MICROMECAÂNICA DE DEFEITOS.

[Distrito Federal] 2014.

92p. 210 x 297 mm (FGA/FT/UnB, Mestre, Integridade de Materiais da Engenharia, 2014).

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília. Faculdade UnB Gama. Programa de Pós-Graduação em Integridade de Materiais da Engenharia.

1. MICROMECAÂNICA DO DANO

2. MICROMECAÂNICA DA FRATURA

3. POROSIDADE PARA O DANO

4. MODELO DE GURSON

I. FGA/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

MAURÍLIO ANTÔNIO DE CASTRO DIAS CUNHA, (2014). ANÁLISE NUMÉRICA DE MODELOS DE DANO BASEADOS NA MICROMECAÂNICA DE DEFEITOS. Dissertação de Mestrado em Integridade de Materiais da Integridade da Engenharia, Publicação FGA.DM-018A/2014, Faculdade UnB Gama/FT/Universidade de Brasília, DF, 92.p.

CESSÃO DE DIREITOS

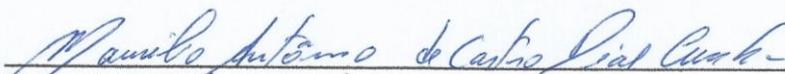
AUTOR: MAURÍLIO ANTÔNIO DE CASTRO DIAS CUNHA

TÍTULO: ANÁLISE NUMÉRICA DE MODELOS DE DANO BASEADOS NA MICROMECAÂNICA DE DEFEITOS.

GRAU: Mestre

ANO: 2014.

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.



NOME: MAURÍLIO ANTÔNIO DE CASTRO DIAS CUNHA

QS 404, C.J.A, BL. B, APTO 402, SAMAMBAIA NORTE, CEP 72.318-551. Brasília, DF –
Brasil. macdcunha@yahoo.com.br

Dedico este trabalho ao meu Pai, Amigo, Professor e Benfeitor Milton Antônio da Cunha, rogando a Deus o faça receber o meu abraço de saudade e gratidão e saber que finalmente realiza-se um sonho que não foi somente meu.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus Criador e Provedor, por conceder-me esta vitória. Agradeço também aos professores Dr. Lucival Malcher, Dra. Sandra Maria da Luz, Dr. Fábio Comes de Castro, Dra. Carla Tatiana Mota Anflor, Dr. Jorge Luiz de Almeida Ferreira e Dr. Éder Lima de Albuquerque, pela dedicação e interesse por meu aprimoramento; aos colegas de curso, aos funcionários da UnB e a todos os amigos, encarnados e desencarnados, que comigo compartilharam desta jornada através de seu apoio, compreensão às minhas limitações e incentivo ao constante aperfeiçoamento, mas em especial a uma Pessoa que, quando os caminhos de nossas vidas se cruzaram, deixou ele a condição de professor, passando a de um Amigo fiel, confidente e incentivador. Ao meu Orientador, Prof. Dr. Lucival Malcher, os meus mais sinceros agradecimentos por ter-me trago até aqui.

“Se eu vi mais longe, foi por estar de pé sobre ombros de gigantes”.

(Isaac Newton)

RESUMO

A falha de componentes de máquinas, equipamentos e estruturas em geral tem sido constante causa de preocupações da engenharia, não só pelos prejuízos materiais que ocasiona, mas principalmente pelas perdas humanas que pode carrear consigo.

Diversos pesquisadores debruçaram-se arduamente sobre o tema, buscando identificar o momento, local de ocorrência e causa da falha, obtendo resultados que acresceram contribuições para maior conhecimento dos materiais, mas a versão final e definitiva, aquela precisa para a quase totalidade dos casos, ainda não foi atingida.

Partindo de dados experimentais tomados à literatura, neste trabalho apresentaremos um estudo comparativo dos resultados para a previsão da falha obtidos por três modelos embasados na micromecânica do dano, a saber: Modelo de Gurson; Modelo GTN (modelo de Gurson, Tvergaard, Needleman) e Modelo GTN Xue (modelo GTN com cisalhamento).

Palavras chave: micromecânica do dano; micromecânica da fratura; porosidade para o dano; modelo de Gurson; modelo GTN; modelo GTN Xue.

ABSTRACT

The component failure of machinery, equipment and structures in General has been a constant cause of engineering concerns, not only by physical damage which causes, but mainly by the loss of life that can carry you.

Several researchers focused hard on the subject, seeking to identify the moment, place of occurrence and cause of the failure, obtaining results that contribute to greater understanding of the points are materials, but the final and definitive version, that need for almost all of the cases, has not yet been reached.

Starting from experimental data taken to literature, in this work we present a comparative study of the results for the prediction of failure resulting from three models based on Micromechanics of damage, namely: Gurson model; GTN Model (Gurson, Tvergaard, Needleman) and GTN Xue Model (GTN Model with shearing).

Keywords: Micromechanics of damage; Micromechanics of fracture; porosity for the damage; Gurson Model; GTN Model; GTN Xue Model.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Gráfico Tecnologia (eventos) x Tempo de Humanidade (anos).....	21
Figura 1.2 Relação entre resistência a tração à temperatura ambiente e às altas temperaturas – MBCEM-SIDERBRAS, Vol I, pg 48).....	23
Figura 1.3 Trinca em roda ferroviária tendo como uma das causas a concentração de tensões por desalinhamento eixo x roda e a outra o defeito na borda externa do boleto na região da trinca. A priori, apenas com inspeção visual, não podemos afirmar que a trinca tenha sentido de propagação, mas apenas direção. .	26
Figura 2.1 Definição do ângulo de Lode, dentro do espaço π (Xue - 2007)....	33
Figura 2.2 Critério de Tresca.	35
Figura 2.3 Critério de von Mises	36
Figura 2.4 Sobreposição dos critérios de Tresca e von Mises.....	37
Figura 2.5 Representação esquemática da cavidade esférica interna ao VRE proposta por Gurson (Rice & Tracey).....	39
Figura 2.6 Representação esquemática do processo de nucleação, crescimento e coalescência de vazios e sua correlação com o carregamento global.	40
Figura 2.7 VRE: (a) estado inicial; (b) estado final após solicitação de corte.	45
Figura 2.8 Evolução das funções do ângulo de Lode normalizado em relação ao terceiro invariante proposto por Xue (2008).	51
Figura 4.1 Geometria dos corpos de prova utilizados – material aço 1045: a) cilíndrico liso, b) cilíndrico entalhado e c) tipo borboleta.	65
Figura 4.2 Configuração da malha de elementos finitos para os corpos de prova adotados.....	66
Figura 4.3 Aço 1045 -Curva de encruamento – Micromecânica de Defeitos.	68
Figura 4.4 Aço 1045 - Curva de reação e evolução do dano para o corpo de prova cilíndrico liso.....	69
Figura 4.5 Aço 1045 - Curva de reação e evolução do dano para o corpo de prova cilíndrico entalhado.....	70

Figura 4.6 Aço 1045 - Curva de reação e evolução do dano para o corpo de prova borboleta em cisalhamento simples.	71
Figura 4.7 Aço 1045 - Curva de reação e evolução do dano para o corpo de prova borboleta em tração pura.	72
Figura 4.8 Aço 1045 - Curva de reação e evolução do dano para o corpo de prova borboleta em carregamento combinando tração e cisalhamento.	73
Figura 4.9 Aço 1045 - Curva de evolução da deformação plástica equivalente para os diferentes corpos de prova. a) cilíndrico liso, b) cilíndrico entalhado, c) borboleta em cisalhamento, d) borboleta em tração e d) borboleta em combinado. .	74
Figura 4.10 Aço 1045 - Curva de evolução da deformação plástica equivalente para os diferentes corpos de prova. a) cilíndrico liso, b) cilíndrico entalhado, c) borboleta em cisalhamento, d) borboleta em tração e d) borboleta em combinado. .	75
Figura 4.11 Contorno do nível de dano (porosidade) para o CP cilíndrico liso. a) modelo GTN, b) modelo GTN Xue e c) modelo de Gurson.	78
Figura 4.12 Contorno do nível de dano (porosidade) para o CP cilíndrico entalhado. a) modelo GTN, b) modelo GTN Xue e c) modelo de Gurson.	79
Figura 4.13 Contorno do nível de dano (porosidade) para o CP borboleta sujeito a cisalhamento. a) modelo GTN, b) modelo GTN Xue e c) modelo de Gurson.	80
Figura 4.14 Contorno do nível de dano (porosidade) para o CP borboleta sujeito a tração. a) modelo GTN, b) modelo GTN Xue e c) modelo de Gurson.	81
Figura 4.15 Contorno do nível de dano (porosidade) para o CP borboleta sujeito a carregamento combinado tração/cisalhamento. a) modelo GTN, b) modelo GTN Xue e c) modelo de Gurson.	82

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 Algoritmo de atualização das tensões e variáveis int.....	59
Tabela 3.2 Algoritmo para resol.do sist. linear – método Newton-Raphson.....	60
Tabela 4.1 Aço 1045 – Propriedades Materiais.....	67

ABREVIATURAS

CDM: Continuous Damage Model;

CP: Corpo de Prova;

GTN Model: Gurson - Tvergaard - Needleman Model;

GTN Xue Model: Gurson - Tvergaard - Needleman Xue Model – Modelo GTN com mecanismo de cisalhamento;

CTOD: Crack Tip Open Displacement;

MBCEM: Manual Brasileiro para Cálculo de Estruturas Metálicas;

MFLE: Mecânica da Fratura Linear Elástica;

NBR 8800/86: Projeto e Execução de Estruturas de Aço em Edifícios;

SIDERBRAS: Siderúrgicas Brasileiras S/A;

VRE: Volume Representativo Elementar;

SÍMBOLOS

D = Dano;

D_{cis} = Dano associado ao cisalhamento;

\dot{D}_{cis} = Taxa do dano associado ao cisalhamento;

ε^e = Tensor das deformações elásticas;

ε_{n+1}^e = Tensor das deformações elásticas no pseudo-tempo t_{n+1} ;

ε_{n+1}^{et} = Tensor das deformações elásticas tentativa;

$\dot{\varepsilon}_d^e$ = Tensor elástico deviador;

$\dot{\varepsilon}_d^e$ = Tensor elástico deviador;

$\dot{\varepsilon}^p$ = Lei de fluxo plástico;

ε_{n+1}^p = Tensor das deformações plásticas no pseudo-tempo t_{n+1} ;

ε_{n+1}^{pt} = Tensor das deformações plásticas tentativa;

$\dot{\varepsilon}_d^p$ = Tensor plástico deviador;

$\bar{\varepsilon}^p$ = Variável interna associada ao endurecimento isotrópico;

$\dot{\bar{\varepsilon}}_d^p$ = Taxa de evolução da deformação plástica equivalente;

ε_{eq} = Deformação equivalente;

$\dot{\varepsilon}_{eq}$ = Taxa da deformação equivalente;

ε_N = Média das deformações/pressões por nucleação de vazios;

ε_v = Tensor das deformações volumétricas;

$\dot{\varepsilon}_v$ = Taxa do fluxo volumétrico;

$\dot{\varepsilon}_v^e$ = Taxa do fluxo volumétrico elástico;

$\dot{\varepsilon}_v^p$ = Taxa do fluxo volumétrico plástico;

$\bar{\varepsilon}^p$ = Deformação plástica equivalente;

ε_{art} = Deformação artificial;

ε_{cis} = Deformação associada ao cisalhamento;

$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{et}$ = Tensor das deformações elásticas tentativa;

$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pt}$ = Tensor das deformações plásticas tentativa;

$\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{et}$ = Componente deviadora do tensor das deformações elásticas tentativa;

$\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{pt}$ = Componente deviadora do tensor das deformações plásticas tentativa;

E = Módulo de elasticidade do material;

f = Fração volumétrica de vazios;

f_C = Fração volumétrica de vazios crítica;

f_f = Fração volumétrica de vazios para fratura;

f_N = Fração volumétrica de todos os vazios com potencial para entrar em nucleação;

f_r = Tensão residual;

f_y = Tensão de escoamento do material;

f^* = Fração volumétrica de vazios efetiva = porosidade efetiva;

\dot{f} = Taxa da fração volumétrica de vazios;

\dot{f}^g = Taxa da fração volumétrica de vazios devida à coalescência;

\dot{f}^n = Taxa da fração volumétrica de vazios devida à nucleação;

g_0 = Função do ângulo de Lode;

G = Módulo de cisalhamento do material;

H = Módulo de endurecimento isotrópico;

$I_{1,2,3}$ = Primeiro, segundo e terceiro invariantes do tensor das tensões;

I = Tensor identidade de segunda ordem;

$J_{2,3}$ = Segundo e terceiro invariantes do tensor tensão deviador;

k = Constante de Boltzmann; força termodinâmica associada ao endurecimento isotrópico; módulo volumétrico do material;

N = Vetor do fluxo plástico;

γ = Multiplicador plástico;

$\dot{\gamma}$ = Taxa de evolução do multiplicador plástico;

$\Delta\gamma$ = Incremento Do multiplicador plástico;

L = Aresta generalizada da célula;

L_x = Aresta da célula na direção x;

L_y = Aresta da célula na direção y;

θ = Ângulo de Lode;

$\bar{\theta}$ = Ângulo de Lode normalizado;

p = Pressão hidrostática (primeiro invariante do tensor tensão);

p_{n+1} = Pressão hidrostática no pseudo-tempo t_{n+1} ;

p_{n+1}^t = Pressão hidrostática tentativa no pseudo-tempo t_{n+1} ;

p_N = Limite de pressão hidrostática abaixo da qual não há nucleação;

R = Raio do vazio central;

R_x = Raio do vazio na direção x;

R_y = Raio do vazio na direção y;

ρ = Densidade do material (VRE);

ρ_m = Densidade da matriz material;

$\dot{\rho}_m$ = Taxa da densidade da matriz material;

S_N = Tensor desviador;

S_{n+1} = Tensor das tensões desviadoras no pseudo-tempo t_{n+1} ;

S_{n+1}^t = Tensor das tensões desviadoras tentativa;

σ_y = Lei de encruamento do material;

σ_0 = Tensão de escoamento inicial do material;

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ = Tensões principais;

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ = Tensões máxima, média e mínima principais no ponto considerado;

$\sigma_{VM} = q$ = Tensão de von Mises;

σ_{n+1} = Tensor das tensões no pseudo-tempo t_{n+1} ;

σ_{n+1}^t = Tensor das tensões tentativa no pseudo-tempo t_{n+1} ;

μ_d = Energia de distorção/deformação;

μ_{de} = Energia de distorção/deformação necessária para provocar escoamento;

ξ = Terceiro invariante normalizado;

λ_1 = Razão entre os raios do vazio nas direções x/y;

λ_2 = Razão entre as dimensões do vazio nas direções x/y;

ϕ = Função de escoamento do material;

α = Ângulo de deformação da célula sob tensão cisalhante;

ρ_m = Densidade do material;

τ = Tensão cisalhante;

t_{n+1} = Pseudo-tempo;

v_m = Porosidade material;

X = Parâmetro de proporção do tamanho da ligação;

SUMÁRIO

1	Introdução	20
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO DO ASSUNTO	22
1.2	OBJETIVO	27
1.3	ESCOPO DO TRABALHO	28
2	Revisão bibliográfica	29
2.1	DEFINIÇÕES PRELIMINARES	31
2.1.1	<i>Tensor Tensão</i>	31
2.1.2	<i>Pressão hidrostática</i>	31
2.1.3	<i>Tensão equivalente de von Mises</i>	32
2.1.4	<i>Ângulo de Lode</i>	33
2.2	CRITÉRIO DE TRESCA OU TEORIA DA MÁXIMA TENSÃO CISALHANTE	34
2.3	CRITÉRIO DE VON MISES OU TEORIA DA MÁXIMA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO	35
2.3.1	<i>Sobreposição dos critérios de Tresca e von Mises</i>	36
2.4	MODELO DE GURSON	37
2.4.1	<i>Mecanismos de formação de microvazios</i>	40
2.5	MODELO DE GURSON-TVERGAARD-NEEDLEMAN (MODELO GTN)	43
2.5.1	<i>Nucleação ou formação de microvazios</i>	43
2.5.2	<i>Coalescência de vazios</i>	43
2.6	MECANISMOS DE CISALHAMENTO	44
2.6.1	<i>Função do ângulo de Lode</i>	50
2.7	RESUMO DOS MODELOS MATEMÁTICOS	51
2.7.1	<i>Modelo matemático de Gurson</i>	51
2.7.2	<i>Modelo matemático GTN</i>	52
2.7.3	<i>Modelo matemático GTN com cisalhamento</i>	53
3	Aspectos Numéricos	55
3.1	ALGORITMO DE ATUALIZAÇÃO DAS TENSÕES E VARIÁVEIS INTERNAS	55
3.2	OPERADOR TANGENTE CONSISTENTE	61
3.3	EQUAÇÕES RESIDUAIS PARA OS MODELOS GTN E GTN COM CISALHAMENTO	62
4	Resultados e Discussões	64
4.1	GEOMETRIA E MALHA DE ELEMENTOS FINITOS	64

	19
4.2 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS.....	66
4.3 RESULTADOS NUMÉRICOS PARA O AÇO 1045.....	68
4.4 PREVISÃO DO LOCAL POTENCIAL PARA INICIO DA FRATURA	77
5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS.....	83
6 Anexos	85
6.1 ANEXO A – EQUAÇÕES RESIDUAIS PARA O MODELO DE GURSON.....	85
6.2 ANEXO B - EQUAÇÕES RESIDUAIS PARA O MODELO GTN.....	87
6.3 ANEXO C - EQUAÇÕES RESIDUAIS PARA O MODELO GTN COM CISLHAMENTO.....	88
7 Referências Bibliográficas	91

1 INTRODUÇÃO

Toda a área tecnológica sofreu um grande desenvolvimento no último século e meio. Se antes o homem passava uma vida inteira para incorporar alguma mudança tecnológica, agora uma década é suficiente para mudar-lhe a vida.

Tomemos o setor de transportes como exemplo.

Em meados do século XVII o padre brasileiro Bartolomeu de Gusmão inventou o balão a ar quente, o mais famoso dos quais foi aquele denominado Passarola. Daí pouca coisa mudou em relação ao transporte, pois, como na pré-história, o homem viajava à velocidade do cavalo, quando muito, até que em meados do século XIX outra grande reviravolta, a popularização das ferrovias e passou-se então a viajar com a velocidade das locomotivas a vapor, as mais velozes atingindo a “estupenda” marca de 60 km/h.

Em 1906 Santos Dumont realizou o primeiro voo verdadeiro e público com um mais pesado que o ar (decolado e não “secreto”, lançado por catapulta e divulgado apenas após o sucesso de Santos Dumont). Nove anos após, esse invento já embarcava tecnologia suficiente para ser utilizado como eficiente arma de guerra.

Em 1957 o primeiro artefato humano controlado é lançado ao espaço emitindo um simples sinal em morse.

Em 1969 o homem pisa a Lua e atualmente já são planejadas viagens a Marte e outros planetas do Sistema Solar com fins de implantação de colônias humanas para exploração dos recursos minerais, dentre outras finalidades.

Da Passarola de Bartolomeu de Gusmão ao 14 Bis decorreram aproximadamente trezentos anos; do 14 Bis ao pouso na Lua 63 anos. Do pouso na Lua a uma sonda em Júpiter, menos de 14 anos e considerando as dificuldades logísticas de uma viagem exo-planetária onde os esforços para garantir a segurança, suprimento de energia, manutenção da vida e distâncias a vencer são enormes para nossa atual tecnologia, tem-se assim um sistema de dificuldades a superar que não se faz pequeno.

Cada quilograma de material colocado em órbita custa verdadeira fortuna e, como não é possível reduzir o consumo de ar, alimentos, etc., para manutenção dos

ocupantes biológicos, deve-se então reduzir o peso próprio dos aparelhos de transportes, armazenamento e manutenção da vida, projetando-os estruturalmente mais esbeltos o que implica trabalhar sob maiores solicitações, mas tudo isso com razoável grau de confiabilidade. O mesmo tem ocorrido com os aparelhos e estruturas aeronáuticas, navais, de edificações e outras.

Por todas estas questões, econômicas, necessidades biológicas e de segurança, necessários se fazem maiores conhecimentos sobre os materiais quanto às suas características e possibilidades, parcela que compete à engenharia de materiais, pois os métodos de dimensionamento que atenderam razoavelmente bem até algum tempo atrás já não satisfazem aos atuais níveis de exigências e aqueles que vierem a ser descobertos, em breve lapso temporal serão superados.

Lançando os dados citados acima em um gráfico *tempo versus fatos tecnológicos*, obtemos uma curva com a configuração próxima à lançada na Figura 1.1, onde podemos verificar que nos últimos três séculos houve um incremento muito grande da tangente a essa curva, e a cada novo dia esse incremento aumento fazendo-a tender ao infinito.

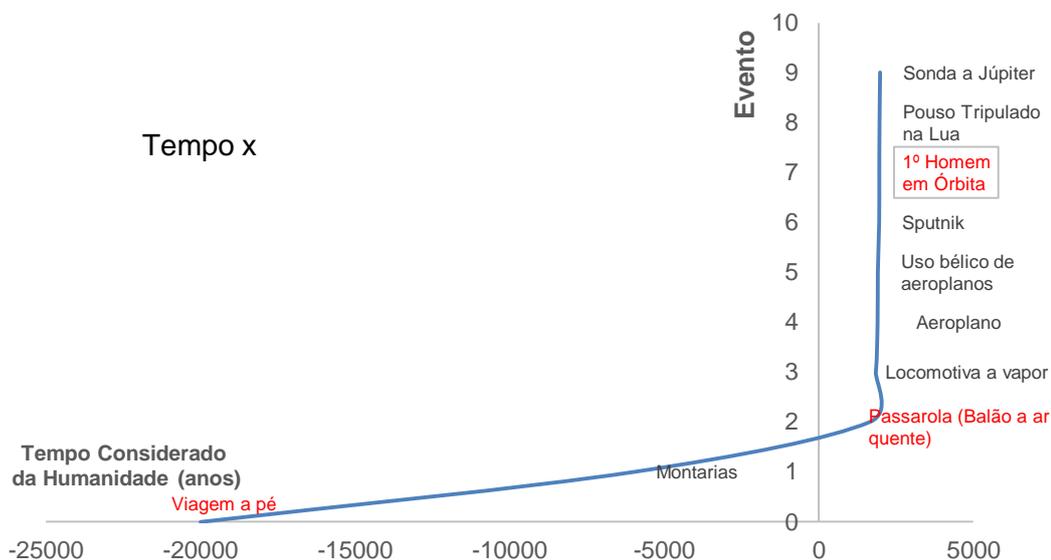


Figura 1.1 Gráfico Tecnologia (eventos) x Tempo de Humanidade (anos)

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO DO ASSUNTO

A literatura recente conta com diversos trabalhos desenvolvidos para determinação dos parâmetros constitutivos de modelos de deformação elasto-plástica dos materiais utilizados em engenharia, principalmente quanto à caracterização dos modelos de encruamento clássico de von Mises e daqueles com dano.

Materiais dúcteis são todos aqueles que sofrem considerável deformação antes de atingir o rompimento.

O Manual Brasileiro para Cálculo de Estruturas Metálicas (MBCEM - SIDERBRAS -1989-Vol I, pg 45) assim define:

“Ductilidade é o índice que avalia a capacidade do material que se deforma na fase inelástica.”

Em outras palavras, ductilidade é a propriedade do material de sofrer grandes deformações plásticas. Quanto maior a ductilidade, maiores serão as deformações plásticas suportadas pelo material antes de atingir o dano.

Vários fatores influenciam nos valores da ductilidade de determinado aço, dentre eles espessura e tipo de aço, temperatura de trabalho e outros. Temos também que considerar como fator que modifica a ductilidade do aço um fenômeno conhecido como envelhecimento por deformação.

Esta situação ocorre quando o material é submetido a variações cíclicas de temperatura. Aços armazenados ao tempo, em regiões ensolaradas, sofrem grandes variações térmicas durante o dia vindo, com o prazo, paulatinamente perder ductilidade e ganhar resistência a tração. Segundo o Manual Brasileiro para Cálculo de Estrutura Metálica, este fenômeno é mais acentuado na faixa de temperatura compreendida entre 150° C e 370° C (MBCEM - SIDERBRAS – 1989-Vol I, pg 46), conforme mostrado na Figura 1.2 a seguir:

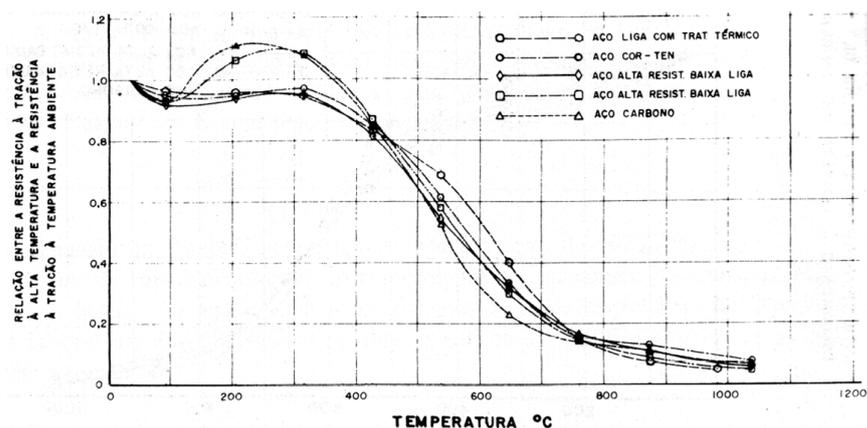


Figura 1.2 Relação entre resistência a tração à temperatura ambiente e às altas temperaturas – MBCEM-SIDERBRAS, Vol I, pg 48).

Diversos pesquisadores tem se debruçado sobre o problema de desenvolvimento de uma metodologia para previsão da vida à fadiga de materiais metálicos, mas coube a Basquin (1911) desenvolver aquela que, embora considerando apenas um parâmetro, a quantidade de ciclos de carregamento e desconsiderando tempo e forma desse carregamento, continua em uso até o momento ainda que, atualmente, com ressalvas, pois apresenta resultados hora conservadores hora otimistas, ou seja, converge, tem boa aproximação, mas não exatidão.

É importante lembrar que à época do desenvolvimento de seu método Basquin não dispunha das tecnologias auxiliares hoje popularizadas, o que só faz aumentar seu mérito.

Pesquisadores, como Mohr, Coulomb, von Mises, Treska, Drucker, Prager e outros também se engajaram na busca por métodos que predissessem a vida de uma peça metálica sujeita a determinado carregamento, de forma mais realística.

Todas essas metodologias são consagradas e ainda utilizadas, embora não tão precisas quanto a realidade de suas previsões de vida, pois apresentam resultados hora pessimistas, hora otimistas, o que torna sua classificação, frente às exigências de mercado, com o passar do tempo cada vez mais arrojadas, apenas satisfatórios e a justificativa para tal imprecisão reside em algo comum a todos os materiais dúcteis, a plasticidade, que tem sido natural maciço a ser conquistado, já que é fenômeno detentor de duas grandes características:

- i) Grande complexidade; e
- ii) Difícil modelagem.

Aliados, estes dois fatores tornaram-se barreiras quase intransponíveis para uma situação tecnológica desprovida de ferramentas computacionais e tanto assim que, somente após a popularização desses meios, que facilitaram, agilizaram e reduziram os custos dos cálculos matemáticos, permitindo inclusive a utilização de simulações virtuais, ocorreu um grande incremento nas pesquisas envolvendo plasticidade.

A partir de 2008 intensificaram-se as proposições de teorias plásticas e apesar de sua maior ou menor facilidade de utilização são ainda apenas indicativas dos caminhos a serem seguidos pelos novos pesquisadores, já que conseguem prever razoavelmente o comportamento dos materiais, mas com exatidão prejudicada, pois tomam poucos parâmetros para obtenção de seus resultados, como por exemplo o carregamento trativo aliado ao cisalhante, mas desconsiderando os demais como temperatura, frequência, intensidade, etc.

A combinação de fatores, como por exemplo das temperaturas do corpo e ambiente; tipo, velocidade e durabilidade de carregamento; intervalos de repouso totalmente descarregados pós carregamento ou conformação, etc., ainda não foram adequadamente calibrados e sabe-se que todos exercem fortes influências sobre a ductilidade.

Lembrando que o dano dúctil pode ser iniciado a qualquer momento ou fase da existência da peça ou material, inclusive durante seus processos de fabricação, conformação ou manuseio, ou seja, em quaisquer etapas onde sofra trabalho, carregamentos devidos aos processos fabris, de transporte, de montagem ou regime de trabalho.

Tais etapas tomam importância pelas possibilidades de geração de energias suficientes para desencadeamento dos processos de formação e evolução de trincas com evolução para o dano e/ou redução das tensões residuais com o consequente ganho de resistência tornando variável o tempo de vida útil.

Em processos fabris pequenos defeitos, más formações, descontrolado ou falhas nas etapas envolvendo variações térmicas, descuidos em montagens (principalmente aqueles que envolvam metais e cerâmicas) dentre outros, podem gerar tensões residuais, empenos, nódulos de material frágil ou encruado e, portanto com resistência diferente daquela apresentada pelo material original, formando pontos de problemas

que permanecerão latentes até que determinada ação, com energia suficiente, os tire dessa dormência, iniciando-se assim a evolução da má formação ou defeito (microfissura, nódulo, incrustação, etc.) para o dano.

Podemos então afirmar que o dano em si pode ter sido originado ainda na fase de fabricação/formação ou em qualquer período após a mesma e, portanto, muito antes de detectada sua evolução ou consequências necessitando apenas o surgimento de uma solicitação com energia suficiente para ser desencadeado o processo de evolução para trinca e desta para a falha.

Um exemplo prático desses efeitos é aquele que envolve perfis metálicos, soldados ou laminados, onde nas regiões de ligação das mesas e alma, temos uma concentração de tensões devidas às diferenças de velocidades de resfriamento que causam reduções de confiabilidade quanto a resistência do material naquelas áreas. Normas diversas que regem o cálculo e fabricação de estruturas metálicas, como por exemplo a NBR 8800/86 – Projeto e Execução de Estruturas de Aço em Edifícios (itens 5.4.5.1 a 5.4.5.3), definem a redução de resistência nominal do perfil, em função desse problema, como sendo de 115 MPa para todos os perfis.

Na proposta para 2003 a mesma norma reduziu este valor para 70 MPa para perfis laminados e soldados mantendo a redução de 115 MPa para os demais perfis (conformados a frio, compostos, etc.). Tomando um perfil estrutural em aço comercial com $f_y = 250$ MPa, 115 MPa representam 46% de redução da capacidade efetiva somente devido a este efeito.

A edição 2008 da mesma norma modificou esse percentual referente à tensão residual para 30% da tensão de escoamento ($f_r = 0,3 f_y$) o que, no caso do aço acima referido, torna o valor de $f_r = 75$ MPa, muito alto e 5,0 MPa maior que aquele da proposta 2003. Para o regime plástico pouca coisa muda. A perda econômica é enorme.

Nas etapas de montagem podemos ter a inserção de cargas com energias suficientes para contribuir no processo de dano.

Unões por atrito, como aquelas utilizadas entre eixos e rodas ferroviárias, nas quais os eixos apresentam diâmetros maiores que os furos das rodas nas quais irão se alojar, por si só causam concentrações de tensões.

Caso, durante o processo de montagem, sejam negligenciadas as temperaturas envolvidas no processo, ou os alinhamentos entre as peças, dimensões e perpendicularidade eixo/roda (ver Figura 1.3) dentre outros, podem tais fatos gerar grandes forças compressivas com energia suficiente para trincarem a roda com direção fronteira furo/eixo–borda mais exterior da roda.

A evolução para a falha será iniciada assim que ocorra solicitação adicional que pode ser pequena deformação nas fibras exteriores da roda, ou uma carga dinâmica não prevista e seu lapso temporal de evolução será inversamente proporcional ao regime de trabalho a que o conjunto está submetido.

Portanto, o óvulo para a falha já existe necessitando apenas ser fecundado pelo regime de trabalho. Quanto mais solicitado o conjunto, menor o tempo de vida do mesmo.



Figura 1.3 Trinca em roda ferroviária tendo como uma das causas a concentração de tensões por desalinhamento eixo x roda e a outra o defeito na borda externa do boleto na região da trinca. A priori, apenas com inspeção visual, não podemos afirmar que a trinca tenha sentido de propagação, mas apenas direção.

Soldas executadas de forma incorreta, apresentando bolhas ou fissuras internas também são fontes desse tipo de problema e contribuem para a falha da peça metálica de forma semelhante à aquela dos vazios gerados em peças executadas em concreto onde houve deficiência no adensamento, na fluidez da massa, ou cimento fora do prazo de validade, etc., que geram vazios no interior das peças, constituindo-se em problema de difícil solução e eterna fonte de cuidados.

Em peças metálicas, caso tenhamos problemas de trincas internas, após identificadas, dependendo de sua localização e possibilidades de acesso podemos recorrer às técnicas de retirada de material até a trinca, enchimento com solda e o problema passará então aos cuidados executivos para não provocarmos modificações indevidas na microestrutura do material, criando assim ilhas concentradoras de tensões, visto ser agora a região trabalhada de resistência nominal maior que a do metal base.

Em conjuntos soldados de grandes dimensões, como vasos de pressão, cascas de fornos, etc., devido ao processo executivo, por etapas, é prática comum após sua execução, realizar-se o método conhecido como alívio de tensões.

Tal processo nada mais é que um conjunto de procedimentos envolvendo variações térmicas de forma lenta e controlada, utilizando das propriedades da ductilidade do material para mitigação dos efeitos das tensões residuais decorrentes das etapas de soldagem, conformação, forjamento, etc., e que, caso não tratados, impõem à peça tensões concentradas de magnitudes e direções desconhecidas, levando-a ao "empeno", à deformação e mesmo à falha.

Para peças em concreto armado a solução já é um pouco mais trabalhosa pois este material não aceita processos de integração de material novo ao material velho com facilidade. Existem produtos que até minimizam os problemas das chamadas juntas frias, mas seu sucesso é parcial, apresentando ainda aqueles problemas inerentes às concentrações de tensões.

Como vimos, em todos os casos citados temos o envolvimento, em maior ou menor grau, do dano dúctil.

1.2 OBJETIVO

Neste trabalho estudam-se os modelos de Gurson, GTN (Modelo Gurson - Tvergaard - Needleman) e GTN Xue, modelo GTN acrescido com mecanismo de cisalhamento, comparando seus resultados com a curva experimental.

Foram adotados corpos de prova cilíndrico liso, cilíndrico entalhado e borboleta, carregados a tração, cisalhamento e combinação de tração x cisalhamento, sempre comparando os resultados experimentais obtidos da literatura com aqueles obtidos via simulação computacional.

1.3 ESCOPO DO TRABALHO

Este trabalho destina-se à apresentação e comparação das previsões de dano obtidas através de três dos principais modelos de previsão de dano, a saber: do modelo de Gurson, do modelo GTN e do modelo GTN Xue, comparando-os às curvas experimentais.

O modelo de Gurson é baseado na análise da micromecânica de evolução da trinca considerando a pré-existência de porosidade, ou seja, neste modelo o material é tomado como portador de um certo valor de vazios pré-existentes. O material é tomado como pré-danificado.

O Modelo GTN (Modelo de Gurson – Tvergaard – Needleman) acresce ao modelo de Gurson o poder de tratar os efeitos da nucleação, crescimento e coalescência dos vazios.

O modelo GTN Xue acresceu ao modelo GTN o tratamento do cisalhamento até então desconsiderado e permite dispensar a estimativa inicial para a fração volumétrica de vazios.

Alimentando os diversos modelos com dados experimentais tomados à literatura consagrada, realizamos simulação numérica em softwares acadêmicos de elementos finitos procedendo então à comparação dos resultados obtidos através dos três métodos citados com aqueles resultados fornecidos pelas curvas experimentais tomadas à literatura.

Foram também utilizadas três geometrias para os corpos de prova, submetidos aos seguintes carregamentos: CP Cilíndrico liso sob tração; CP Cilíndrico entalhado sob tração e CP tipo borboleta, carregado sob tração pura, cisalhamento puro e tração combinada com cisalhamento.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Fissuras são entidades de difícil detecção a olho nu, principalmente quando se iniciam, seja por suas reduzidas dimensões, muitas vezes microscópicas, seja por sua localização, que pode ser interna ao corpo quando então detectáveis apenas por exames a raios X, ultrassonografia ou líquido penetrante, testes mais comuns.

Para o cálculo da evolução do dano várias abordagens foram tentadas, mas todas apresentando algum tipo de limitação ou deixando de considerar algum aspecto:

- ✓ Modelo de Rousselier (1980, 2001):
 - Abordagem termodinâmica do contínuo com dependência diferenciada do campo de tensões hidrostáticas;
 - Utiliza a densidade do estado e dissipação;
 - Apresenta efeito de danos do acoplamento elástico, mas limitado à variação de densidade;
 - Não inclui a fase da coalescência.
- ✓ Modelo Leblond – Gologanu-Deveux (1993-1997):
 - Introdução de um parâmetro de forma também utilizado por Pardoen e Hutchinson (2000), Benzerga et al (1999), Benzerga (2002), Sirueguet e Leblond (2004);
 - Inconveniente: equações de evolução devem ser tratadas nos eixos principais das cavidades elipsoidais;
- ✓ Modelo de dano da Mecânica dos Meios Contínuos - CDM (Continuous Damage Model):
 - De estrutura claramente termodinâmica:
 - Baseia-se no princípio da conservação de energia através da tensão eficaz;
 - Inconveniente:
 - Equações de evolução devem ser tratadas nos eixos principais das cavidades elipsoidais;
 - Variável do estado de danos afeta:
 - Comportamento elástico;

- Fluxo plástico;
- Provoca incremento na evolução de danos pela taxa de liberação de energia elástica já incorporados os efeitos multiaxiais;
- Descreve os efeitos das tensões triaxiais sobre a tensão de fratura. Lemaitre (1986);
- Perda total da capacidade de serviço ocorre quando dano atinge o valor crítico ($D = 1$).

Existem diversas metodologias para estudo da evolução da trinca, mas aquele que interessa a este trabalho partiu do modelo proposto por Gurson (1977) para abordagens locais de fratura baseado na análise da micromecânica de crescimento da trinca.

Contribuições a este modelo, realizadas por Tvergaard e Needleman, acrescentaram o tratamento dos efeitos da nucleação, crescimento e coalescência dos vazios, ficando este modelo, agora acrescido, conhecido como modelo GTN (modelo Gurson - Tvergaard - Needleman) cuja característica básica é a combinação do primeiro invariante das tensões (pressão hidrostática) com o segundo invariante (de von Mises) através de uma função de acoplamento, que por sua vez é função da porosidade do material (fração volumétrica de vazios), ou seja, sua característica básica é a utilização do fluxo plástico potencial.

Podemos então afirmar que as características mais marcantes do modelo são:

- ✓ Descrição da componente volumétrica para a deformação plástica;
- ✓ Modelagem da evolução do dano principal através da equação de conservação de massa a nível global do volume representativo elementar(VRE).

Para implementação em elementos finitos, ambos os modelos, Gurson original e GTN, utilizam técnicas lagrangeanas e espectros de pequenas deformações.

O nível de deformação de um corpo é diretamente dependente da ductilidade, importante fenômeno material, influenciando fenômenos que envolvam vazios ou porosidade material.

Assim, tomaremos como base os seguintes trabalhos:

- ✓ Teoria da máxima tensão cisalhante: critério de Tresca;
- ✓ Teoria da máxima energia de deformação: critério de von Mises;
- ✓ Modelo de Gurson;
- ✓ Modelo Gurson – Tvergaard- Needleman (modelo GTN);
- ✓ Modelo de Gurson com mecanismo de cisalhamento (modelo GTN Xue);

2.1 DEFINIÇÕES PRELIMINARES

Para que entendamos os conceitos relativos às definições de um modelo constitutivo, necessário fazamos antes uma breve apresentação dos entes que serão tratados.

2.1.1 TENSOR TENSÃO

O tensor Tensão σ é composto por duas parcelas, uma deviatora e outra volumétrica (Lemaitre & Chabouche, 1990) cuja representação é:

$$\sigma = S + pI \quad (2.1)$$

Onde:

S = Tensor das tensões deviatoras;

p = pressão hidrostática/volumétrica;

I = Tensor identidade de segunda ordem;

2.1.2 PRESSÃO HIDROSTÁTICA

Pela equação 1.1 podemos retirar a equação da pressão hidrostática em função das tensões deviatoras:

$$p = \frac{1}{3} tr(\sigma) \quad (2.2)$$

Onde:

$tr(\sigma)$ = traço do tensor tensão;

Agora podemos definir os invariantes do tensor tensão:

$$I_1 = tr(\sigma)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \{ [tr(\sigma)]^2 - tr(\sigma^2) \} \quad (2.3)$$

$$I_3 = \det(\boldsymbol{\sigma})$$

Onde:

I_1, I_2, I_3 = primeiro, segundo e terceiro invariantes do tensor tensão (Holzapfel, 2000);

Podemos agora definir a pressão hidrostática em função do invariante do tensor tensão. Para o tensor deviator \mathbf{S} , os seus invariantes podem ser determinados como:

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S} \\ J_3 &= \det(\mathbf{S}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Onde:

J_2 e J_3 = segundo e terceiro invariantes do tensor deviator;

$\mathbf{S} : \mathbf{S}$ = dupla contração entre dois tensores de segunda ordem.

O tensor deviator, por sua própria definição, não possui parte volumétrica e portanto seu primeiro invariante é igual a zero (Holzapfel, 2000).

2.1.3 TENSÃO EQUIVALENTE DE von MISES

A tensão equivalente de von Mises é uma função do segundo invariante do tensor deviator e pode ser escrita como:

$$q = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}} \quad (2.5)$$

Onde:

q = Tensão equivalente de von Mises (Souza Neto et al, 2008);

O terceiro invariante do tensor deviator é escrito como:

$$r = \sqrt[3]{\frac{27}{2} J_2} = \sqrt[3]{\frac{27}{2} \det(\mathbf{S})} \quad (2.6)$$

Onde:

r = terceiro invariante do tensor deviator (Bai, 2008; Malcher et al, 2012);

Escrevendo o terceiro invariante na forma normalizada, teremos:

$$\xi = \left(\frac{r}{q}\right)^3 = \frac{\frac{27}{2}J_2}{q^3} \quad (2.7)$$

Onde:

ξ = terceiro invariante normalizado;

2.1.4 ÂNGULO DE LODE

O ângulo de Lode é um importante parâmetro elasto-plástico. Segundo alguns pesquisadores (Xue, 2007; Bai, 2008; Gao, 2011), é o parâmetro responsável por dar forma à superfície de escoamento do material.

É definido como sendo o menor ângulo formado entre a projeção do tensor das tensões e os eixos das tensões principais dentro do espaço deviator (ver figura abaixo).

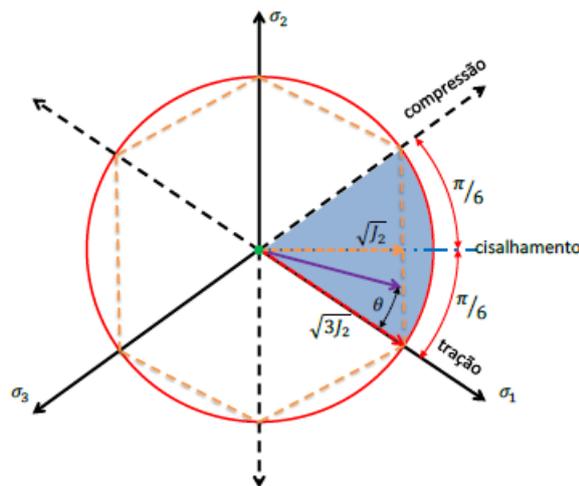


Figura 2.1 Definição do ângulo de Lode, dentro do espaço π (Xue - 2007).

Matematicamente, sua definição é:

$$\theta = \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \left[2 \left(\frac{S_2 - S_3}{S_1 - S_3} \right) - 1 \right] \right\} \quad (2.8)$$

Onde:

θ = Ângulo de Lode;

S_1, S_2, S_3 = componentes do tensor deviator;

A relação entre o ângulo de Lode e o terceiro invariante normalizado pode ser escrita como sendo:

$$\xi = \cos(3\theta) \quad (2.9)$$

Escrevendo na forma normalizada:

$$\bar{\theta} = 1 - \frac{60}{\pi} = 1 - \frac{2}{\pi} \arccos(\xi) \quad (2.10)$$

Onde:

$\bar{\theta}$ = ângulo de Lode normalizado.

2.2 CRITÉRIO DE TRESCA OU TEORIA DA MÁXIMA TENSÃO CISA- LHANTE

Para Tresca (1868) as principais causas do escoamento dos materiais dúcteis são as tensões cisalhantes e seu critério tem como limite de referência o ponto no qual a tensão cisalhante máxima se iguala à tensão cisalhante máxima do corpo de prova no momento de seu escoamento em um ensaio de tração.

Uma crítica ao modelo de Tresca tem sido o fato do mesmo não considerar a significativa influência da tensão intermediária no comportamento plástico dos materiais.

Assim trabalhando, Tresca determinou que a falha no elemento estrutural ocorre quando, em algum de seus pontos:

$$\tau = \sigma_x \frac{\text{sen}2\alpha}{2} \quad (2.11)$$

Para

$$\alpha = 45^\circ \Rightarrow \begin{cases} \tau_{max} = \sigma_x \frac{1}{2} \\ \tau_{max} = \frac{\sigma_x}{2} \\ \tau_{max} \geq \frac{\sigma_y}{2} \end{cases} \quad (2.12)$$

Onde:

σ_y = Tensão de escoamento do material;

τ_{max} = Máxima cortante no ponto considerado;

$$\tau_{max} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} \quad (2.13)$$

σ_1, σ_3 = maior e menor tensão principal no ponto considerado.

Igualando a equação 2.12 à equação 2.13 temos:

$$\frac{\sigma_y}{2} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} \Rightarrow \sigma_y = (\sigma_1 - \sigma_3) \quad (2.14)$$

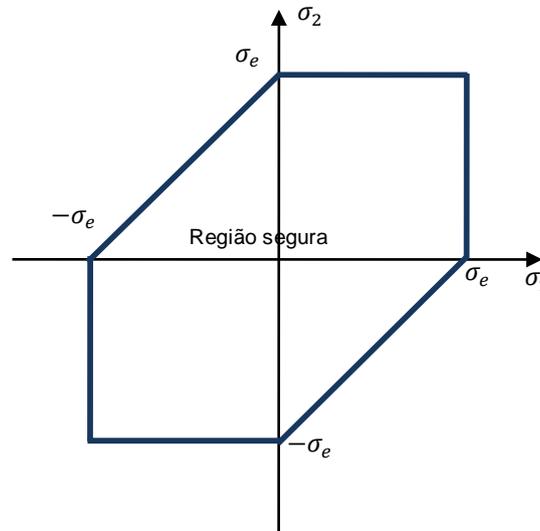


Figura 2.2 Critério de Tresca.

2.3 CRITÉRIO DE VON MISES OU TEORIA DA MÁXIMA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

O critério de von Mises (1913) baseia-se no critério de Tresca (1868) refinado por Maxwell (1865). Pela proposta de von Mises, uma peça ou material resistente falha quando, em algum de seus pontos, a energia de distorção por unidade de volume assume:

$$\mu_d \geq \frac{\sigma_y}{2E} \quad (2.15)$$

Reescrevendo em termos da tensão:

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} \geq \sigma_y \quad (2.16)$$

Onde:

$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \rightarrow$ tensões principais no ponto considerado.

Em outras palavras para von Mises a segurança esta garantida até o ponto no qual a energia de distorção (μ_d) se iguala ou supera a energia de distorção necessária para provocar o escoamento do corpo de prova no ensaio de tração μ_{d_e} (constante para dado material e condições e independente do estado de tensões) ou seja, a segurança esta garantida enquanto o ponto estiver interno à área da Figura 2.2.

$$\text{Segurança } \mu_d < \mu_{d_e} \quad (2.17)$$

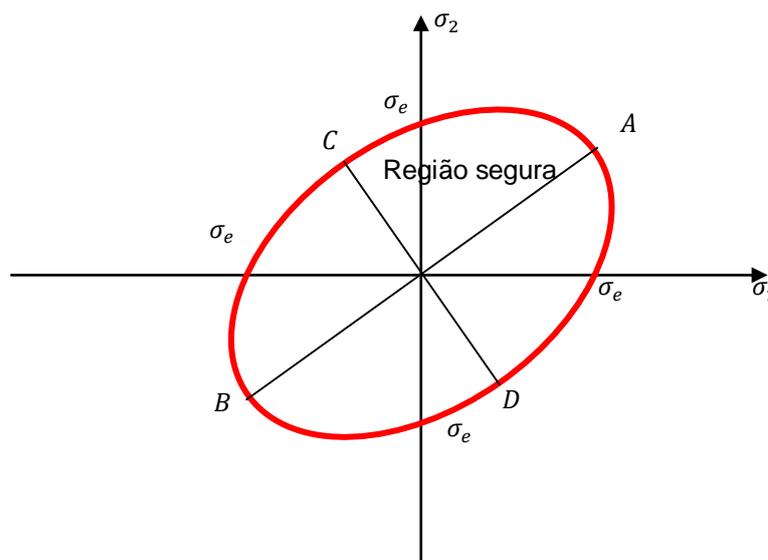


Figura 2.3 Critério de von Mises

2.3.1 SOBREPOSIÇÃO DOS CRITÉRIOS DE TRESCA E VON MISES

Por considerar a tensão intermediária o critério de von Mises apresenta resultados mais realísticos que aqueles obtidos por Tresca exceto para estados cilíndricos de tensão quando ambos os critérios se igualam e von Mises apresenta diferentes valores para seus respectivos campos de tensões limites.

Comparando-os, vemos que Tresca é um critério conservador frente a von Mises (otimista) e neste caso torna-se difícil definir, pelo gráfico, a área segura. Até pode-se tomar a região exterior a Tresca e interior a von Mises como região de transição, mas nesse caso estaríamos admitindo Tresca como totalmente seguro e von Mises seguro somente em sua intersecção com Tresca, o que gera dúvidas quanto à acurácia dessa metodologia.

A sobreposição dos gráficos de ambos os critérios gera a seguinte figura:

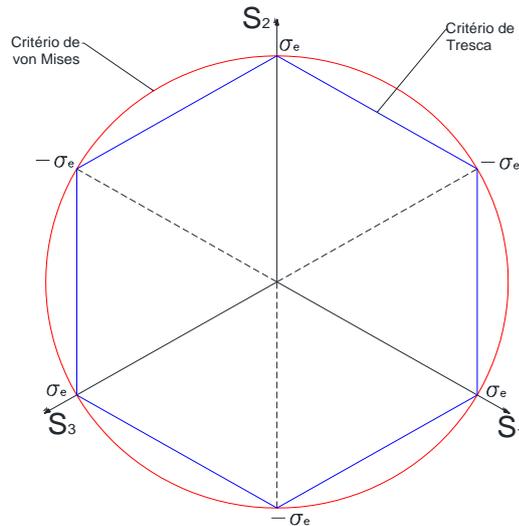


Figura 2.4 Sobreposição dos critérios de Tresca e von Mises

2.4 MODELO DE GURSON

Partindo do modelo de von Mises, Gurson (1977) propôs um modelo que na realidade é uma extensão daquele, mas descrevendo a degradação do material considerando que:

- i) Os metais apresentam porosidade inicial pré-existente;
- ii) Os defeitos materiais pré-existent, associados às grandes deformações plásticas, são os responsáveis pela redução da resistência característica;
- iii) A degradação material pode ser descrita através do crescimento das cavidades esféricas de vazios, pré-existent ou não;
- iv) O comportamento da matriz metálica pode ser descrito pelas equações constitutivas de von Mises.

Desta forma, a função de escoamento para o modelo de Gurson é função:

- i) Da pressão hidrostática p (primeiro invariante do tensor tensão);
- ii) Do segundo invariante do tensor tensão deviator J_2 ;
- iii) Da fração volumétrica de vazios f ; e

iv) Do limite de escoamento inicial do material σ_y .

Gurson (1977) considerou uma célula cúbica com um vazio esférico em seu interior (Figura 2.4) e derivou a função de escoamento, definida pela equação:

$$\phi(\sigma, k, f) = J_2(\mathcal{S}) - \frac{1}{3} \left[1 + f^2 - 2f \cosh\left(\frac{3p}{2\sigma_y}\right) \right] \sigma_y^2 = 0 \quad (2.18)$$

Onde:

J_2 = Segundo invariante do tensor tensão deviator;

p = Pressão hidrostática (primeiro invariante do tensor tensão);

f = Fração volumétrica de vazios;

σ_y = Limite de escoamento do material.

Tornando a fração volumétrica de vazios nula ($f = 0$), constatamos que o modelo de Gurson reduz-se ao modelo de von Mises.

Assim podemos afirmar que a degradação das propriedades mecânicas de qualquer material é função dos micro vazios¹ pré-existentes ou que venham a se formar na matriz desse material.

O modelo proposto por Gurson (1977) descreve a degradação do material através do crescimento de vazios, tomados como cavidades esféricas assumindo, dentre outras considerações que possam simular defeitos materiais pré-existentes, os metais como porosos, associando tal fato às grandes deformações plásticas, o que contribui para a redução da resistência característica e ainda, assume que o comportamento da matriz metálica pode ser descrito pelas equações constitutivas de von Mises.

A presença de vazios induz ao emprego de uma superfície de escoamento dependente:

- ✓ Pressão hidrostática (p);
- ✓ Porosidade do material.

¹ Aqui tomamos os termos vazios e microvazios como equivalentes.

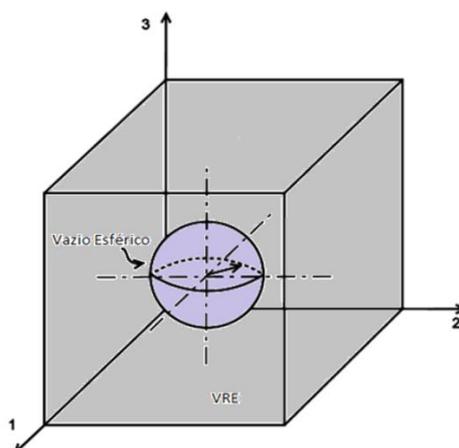


Figura 2.5 Representação esquemática da cavidade esférica interna ao VRE proposta por Gurson (Rice & Tracey).

A superfície de escoamento é então obtida a partir da consideração de uma cavidade esférica em um meio rígido plástico sem endurecimento.

A relação entre volume de vazios (porosidade) predita no modelo de Gurson, e o volume do elemento (volume de referência) recebe a denominação de fração volumétrica de vazios (f), utilizada como parâmetro de mensuração do grau de degradação do material:

$$f = \frac{V_m}{V_{VRE}} \quad (2.19)$$

Onde:

f = Fração volumétrica de vazios = parâmetro de degradação material;

V_m = Volume dos vazios;

V_{VRE} = Volume representativo elementar;

Portanto, para Gurson, o material é dilatável, sensível à pressão hidrostática e apresenta comportamento elastoplástico contínuo (Reis, 2009; de Souza Neto et al., 2008; Xue, 2007).

A Figura 2.5, adaptada por Pineau & Pardoën (2003) para cargas predominantemente trativas, descreve a degradação da estrutura material devida à presença de vazios ou criação de novos vazios em função da evolução do carregamento. Nela podemos observar quatro fases distintas:

Fase a: domínio elástico; não há alteração na micro estrutura.

Fase b: aumento da carga macroscópica provoca deformação plástica localizada que por sua vez induz a nucleação de vazios.

Fase c: aumento do crescimento de vazios devido às altas tensões hidrostáticas elásticas.

Fase d: sequencialmente ao crescimento (fase c), ocorre a coalescência dos vazios.

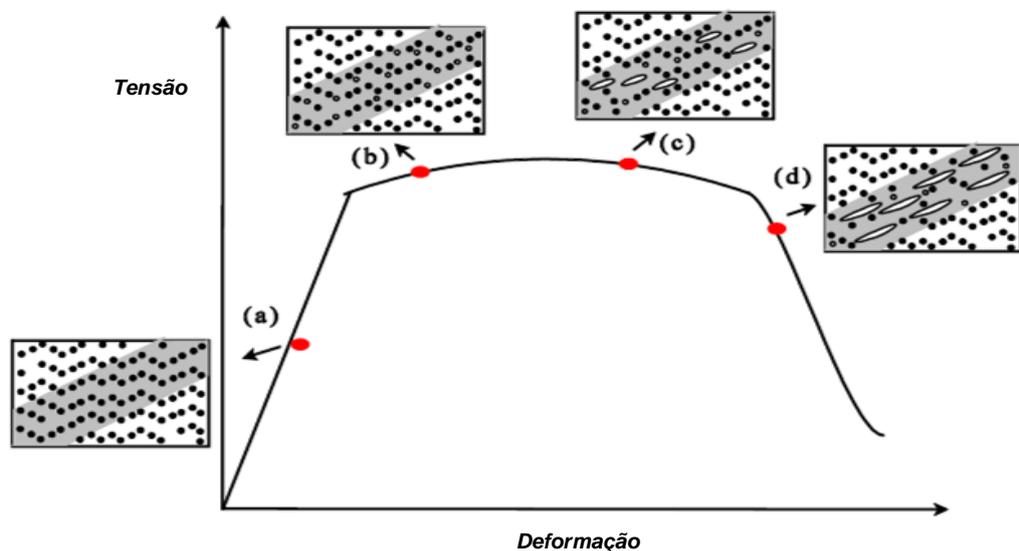


Figura 2.6 Representação esquemática do processo de nucleação, crescimento e coalescência de vazios e sua correlação com o carregamento global.

2.4.1 MECANISMOS DE FORMAÇÃO DE MICROVAZIOS

A lei de evolução da fração volumétrica de vazios foi desenvolvida tomando por premissas:

- ✓ Lei da conservação de massa;
- ✓ Suposição de que a deformação volumétrica elástica é desprezível (de Souza Neto et al., 2008; Reis, 2009).

Tomando um material poroso, com vazios dispersos numa matriz sólida (conforme Figura 2.4, podemos descrever a densidade como:

$$\rho = \rho_m \frac{V_m}{V_{VRE}} \quad (2.20)$$

Onde:

ρ = Densidade do material (VRE);

ρ_m = Densidade da matriz do material;

V_m = Volume de vazios (= volume de micro vazios);

V_{VRE} = Volume de referência = volume do elemento considerado (VRE= Volume Representativo Elementar);

O somatório do volume total de sólido por unidade de volume e a fração volumétrica de vazios, evidentemente, é igual à unidade:

$$\frac{V_m}{V_{VRE}} = (1 - f) \quad (2.21)$$

Levando a equação (2.21) na equação (2.20) temos:

$$\rho = \rho_m(1 - f) \quad (2.22)$$

Derivando a equação (2.12) obtemos:

$$\dot{\rho} = \dot{\rho}_m(1 - f) - \rho_m \dot{f} \quad (2.23)$$

Em regime plástico, a matriz é incompressível e, portanto, a deformação volumétrica elástica é desprezada. Assim, a densidade permanece inalterada, ou seja:

$$\dot{\rho}_m = 0 \quad (2.24)$$

Onde:

$\dot{\rho}$ = Taxa da densidade do VRE;

\dot{f} = Taxa da fração volumétrica de vazios;

$\dot{\rho}_m$ = Taxa da densidade da matriz material;

Daí que:

$$\dot{f} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho_m} \quad (2.25)$$

$$\dot{f} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho}(1 - f) \quad (2.26)$$

Pela lei da conservação de massa temos:

$$-\frac{\dot{\rho}}{\rho} = \dot{\epsilon}_V = \dot{\epsilon}_V^e + \dot{\epsilon}_V^p \quad (2.27)$$

$$\dot{f} = -\frac{\dot{p}}{\rho_m} \quad (2.28)$$

$$\dot{f} = \dot{\varepsilon}_v^p (1 - f) \quad (2.29)$$

Onde:

$\dot{\varepsilon}_v$ = Taxa do fluxo volumétrico;

$\dot{\varepsilon}_v^e$ = Taxa do fluxo volumétrico elástico;

$\dot{\varepsilon}_v^p$ = Taxa do fluxo volumétrico plástico;

A equação (2.29):

- ✓ Expressa a lei de evolução da fração volumétrica de vazios;
- ✓ Descreve a degradação de materiais porosos.

A regra de fluxo plástico é regida por:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} = \dot{\varepsilon}_d^p + \dot{\varepsilon}_v^p \quad (2.30)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \mathbf{S} + \frac{1}{3} \dot{\gamma} f \sigma_y \sinh\left(\frac{3p}{2\sigma_y}\right) \mathbf{I} \quad (2.31)$$

Onde:

$\dot{\varepsilon}^p$ = Tensor plástico;

$\dot{\varepsilon}_d^p$ = Tensor plástico deviator;

$\dot{\varepsilon}_v^p$ = Taxa do fluxo volumétrico plástico;

$\dot{\gamma}$ = Taxa do multiplicador plástico;

p = Pressão hidrostática;

Tomando o segundo termo do lado direito da equação (2.21) e levando na equação (2.19), obtemos a equação para a lei de evolução da fração volumétrica de vazios f :

$$\dot{f} = (f - f^2) \dot{\gamma} \sigma_y \sinh\left(\frac{3p}{2\sigma_y}\right) \quad (2.32)$$

2.5 MODELO DE GURSON-TVERGAARD-NEEDLEMAN (MODELO GTN)

Tvergaard e Needleman (1980) propuseram alterações no modelo de Gurson visando a consideração da nucleação de vazios, o que permitiu tomar qualquer elemento considerando-o como perfeito, sem defeitos, pois com esta introdução naturalmente ocorre a evolução da variável de dano e ainda descreve o efeito da coalescência de vazios (Tvergaard e Needleman -1984). Desta forma, a evolução da porosidade é determinada com:

$$\dot{f} = \dot{f}^n + \dot{f}^g \quad (2.33)$$

Onde:

\dot{f} = Taxa da fração volumétrica de vazios;

\dot{f}^n = Taxa da fração volumétrica de vazios devida à nucleação;

\dot{f}^g = Taxa da fração volumétrica de vazios devida à coalescência.

2.5.1 NUCLEAÇÃO OU FORMAÇÃO DE MICROVAZIOS

Com o aumento da deformação plástica ocorre a nucleação que nada mais é que o surgimento de novos vazios no interior do material. Desta forma a fração volumétrica de vazios passa a ser composta por duas parcelas, uma devida ao crescimento dos vazios e outra devida à nucleação.

$$\dot{f}^n = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\epsilon}^p - \epsilon_N}{s_N} \right)^2 \right] \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (2.34)$$

Onde:

f_N = Fração volumétrica de todos os vazios com potencial para entrar em nucleação;

ϵ_N = Média das deformações/pressões por nucleação de vazios;

s_N = Tensor desviador;

$\bar{\epsilon}^p$ = Deformação equivalente plástica;

$\dot{\bar{\epsilon}}^p$ = Taxa da deformação equivalente plástica.

2.5.2 COALESCÊNCIA DE VAZIOS

Continuando os efeitos da deformação plástica, após o crescimento e nucleação de vazios, ocorre a coalescência, nome dado à aglutinação dos vazios para

formação de vazios cada vez maiores o que incrementa positivamente a perda da capacidade de carga do material ou, em outras palavras, reduz sua capacidade resistiva. Introduce-se a coalescência de vazios no modelo com:

$$f^* = \begin{cases} f, & f < f_c \\ f_c + \left(\frac{1}{q_1} - f_c\right) \frac{(f-f_c)}{(f_f-f_c)}, & f \geq f_c \end{cases} \quad (2.35)$$

Onde:

f_c = Fração volumétrica de vazios crítica;

f_f = Fração volumétrica de vazios para fratura.

f^* = Fração volumétrica de vazios efetiva = porosidade efetiva.

Quando a fração volumétrica de vazios efetiva ou porosidade efetiva (f^*) for menor que a fração volumétrica de vazios crítica (f_c), sua obtenção se dá através dos mecanismos de crescimento e nucleação; caso contrário, sua obtenção advém do mecanismo de coalescência.

A função de escoamento do modelo GTN então assume o endurecimento isotrópico e o dano isotrópico, ficando:

$$\Phi(\sigma, k, f) = J_2(\mathcal{S}) - \frac{1}{3} \left[1 + q_3 f^{*2} - 2q_1 f^* \cosh\left(\frac{q_2 3p}{2\sigma_y}\right) \right] \sigma_y^2 \quad (2.36)$$

Os parâmetros q_1 , q_2 e q_3 são introduzidos com o objetivo de capacitar o modelo a predições mais exatas da periodicidade da matriz de vazios, utilizando a análise numérica.

2.6 MECANISMOS DE CISALHAMENTO

O modelo original de Gurson não inclui os efeitos de cisalhamento e, portanto, não permite a predição dos locais onde ocorreriam o cisalhamento e também a fratura em baixa triaxialidade.

Acresce o fato de que, sob cisalhamento dominante, a distorção dos vazios vinculada aos intervazios promove incrementos na degradação interna ao material, tornando-o mais macio.

As leis de evolução que incluem a influência do terceiro invariante do tensor tensão e do tensor de deformação plástica, surgiram da necessidade de dotar o modelo de Gurson da capacidade de fornecer respostas adequadas mesmo sob tensões a baixos níveis de triaxialidade.

O mecanismo de dano por cisalhamento proposto por Xue (2007) foi baseado na solução de McClintock et al. (1968) para a coalescência de vazios em uma faixa de cisalhamento baseada em uma célula quadrada representativa contendo um vazio circular no centro, sujeita a um tensão cisalhante simples (Figura 2.6-a).

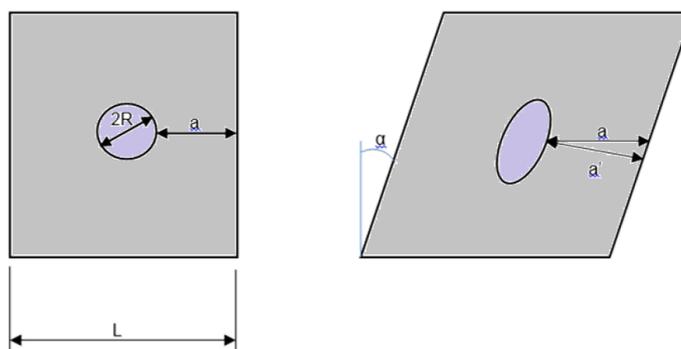


Figura 2.7 VRE: (a) estado inicial; (b) estado final após solicitação de corte.

A célula quadrada, com aresta L e raio do vazio central R , ao ser carregada sofre um giro e o vazio se alonga na direção preferencial. Pela lei de conservação do volume, Xue (2008) pressupôs que as posições relativas do vazio em relação à célula não se alteram, mas à medida que a tensão cisalhante aumenta, as distâncias entre o contorno do vazio e as bordas da célula diminuem (Figura 2.6-b), sendo representado pelo ângulo de deformação α , fruto da aplicação de uma tensão cisalhante simples, podendo sua relação ser assim escrita:

$$\alpha = \frac{L}{2} - R \quad (2.37)$$

$$\text{e } \tan \alpha = \gamma \quad (2.38)$$

Onde:

α = Ângulo de deformação da célula sob carregamento cisalhante;

γ = Tensão cisalhante simples.

A distância mínima do vazio ao bordo da célula na configuração deformada pode ser calculada como:

$$a' = a \cos(\alpha) = a \sqrt{\frac{1}{1+\gamma^2}} \quad (2.39)$$

Segundo Xue (2008), pode-se também associar esta distância mínima com a tensão de cisalhamento simples através de uma equação logaritmica:

$$\varepsilon_{art} = \ln \frac{a}{a'} = \ln \sqrt{1+\gamma^2} \quad (2.40)$$

Onde:

ε_{art} = Deformação artificial.

a = Distância não deformada entre a borda do vazio central e aresta da célula.

a' = Distância entre a borda do vazio central à aresta da célula deformada.

McClintock et al. (1968) pode-se definir o início da fratura em determinada faixa de cisalhamento através da condição de contorno das fronteiras do vazio na direção longitudinal da faixa cisalhante.

Para Xue (2008), em pequenas frações volumétricas, a falha é consequência da tensão cisalhante e a determinou como:

$$\varepsilon_{cis} = \frac{L}{2R} \quad (2.41)$$

Onde:

ε_{cis} = Deformação associada ao cisalhamento.

L = Aresta da célula;

R = Raio do vazio central.

Assim, pode-se determinar os danos associados ao cisalhamento do vazio como:

$$\mathbf{D}_{cis} = \frac{\varepsilon_{art}}{\varepsilon_{cis}} = \frac{\ln \sqrt{1+\gamma^2}}{\left(\frac{L}{2R}\right)} = \frac{2R \ln \sqrt{1+\gamma^2}}{L} \quad (2.42)$$

Onde:

\mathbf{D}_{cis} = Dano associado ao cisalhamento

ε_{art} = Deformação artificial

ε_{cis} = Parcela da deformação associada ao cisalhamento

Trabalhando uma expressão da série de Taylor e simplificando-a, Xue (2008) definiu o termo para a deformação artificial como:

$$\varepsilon_{art} \approx \frac{1}{2}\gamma^2 \quad (2.43)$$

Desta forma a tensão cisalhante pode ser expressa através da tensão equivalente de von Mises:

$$\gamma = \sqrt{3}\varepsilon_{eq} \quad (2.44)$$

O que permite, para cisalhamento simples e pequenas frações volumétricas de vazio, reescrever a equação (2.42):

$$\mathbf{D}_{cis} \approx \frac{\frac{1}{2}\gamma^2}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{f}}} = \frac{\gamma^2}{\sqrt{\frac{\pi}{f}}} = \gamma^2 \sqrt{\frac{f}{\pi}} = \frac{3}{\sqrt{\pi}} f^{\left(\frac{1}{2}\right)} \varepsilon_{eq}^2 \quad (2.45)$$

Onde:

Fração volumétrica de vazios da célula:

$$f = \frac{\pi R^2}{L^2} \rightarrow \text{Problema bidimensional};$$

$$f = \frac{4\pi R^3}{3L^3} \rightarrow \text{Problema tridimensional}.$$

De maneira similar, para o caso tridimensional:

$$\mathbf{D}_{cis} = \frac{3}{2} \left(\frac{6}{\pi}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)} f^{\left(\frac{1}{3}\right)} \varepsilon_{eq}^2 \quad (2.46)$$

Daí que a evolução do dano por cisalhamento pode ser expressa:

$$\dot{\mathbf{D}}_{cis} = q_4 \cdot f^{q_5} \cdot \varepsilon_{eq} \cdot \dot{\varepsilon}_{eq} \quad (2.47)$$

Onde q_4 e q_5 são parâmetros geométricos assim definidos:

$$\text{Problema bidimensional:} \quad \begin{cases} q_4 = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \\ q_5 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.48)$$

$$\text{Problema tridimensional:} \quad \begin{cases} q_4 = \frac{2}{3} \left(\frac{6}{\pi}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)} \\ q_5 = \frac{1}{3} \end{cases} \quad (2.49)$$

Butcher & Zhen (2009) também derivaram uma expressão logaritmica para deformação de ruptura, por cisalhamento, mas não a partir da série de Taylor:

$$D_{cis} = \frac{\varepsilon_{art}}{\varepsilon_{cis}} = \frac{\ln\sqrt{1+\gamma^2}}{\ln\sqrt{\frac{1}{\chi}}} \quad (2.50)$$

Onde:

D_{cis} = Dano associado ao cisalhamento

χ = Parâmetro de proporção do tamanho da ligação definido diferentemente para:

$$\text{Problema bidimensional: } \chi = \frac{R_x}{L_x} = \left(\frac{4}{\pi} f \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.51)$$

$$\text{Problema tridimensional: } \chi = \frac{R_x}{L_x} = \left(\frac{6}{\pi} f \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.52)$$

Com:

$$\lambda_1 = \frac{R_y}{R_x} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{L_y}{L_x} \quad (2.53)$$

Onde:

R_x = Raio do vazio na direção x;

R_y = Raio do vazio na direção y;

L_x = Dimensão da célula na direção x;

L_y = Dimensão da célula na direção y;

λ_1 e $\lambda_2 = 1$ (modelo de Xue – 2008) → rotação da célula é proporcional ao alongamento do vazio;

Pode-se representar estes parâmetros como função do estado de tensão obtendo por resultado a evolução das dimensões da ligação relacionada às tensões normais. Butcher e Zhen (2009).

Trabalhando com cisalhamento simples e pequena fração volumétrica de vazios, a tensão cisalhante e a tensão equivalente de von Mises com: $\gamma = \sqrt{3}\varepsilon_{eq}$, podemos definir a evolução do dano por cisalhamento como:

$$\dot{D}_{cis} = \frac{1}{\ln\sqrt{\frac{1}{\chi}}} \left(\frac{3\varepsilon_{eq}}{1+3\varepsilon_{eq}^2} \right) \dot{\varepsilon}_{eq} \quad (2.54)$$

Onde:

D_{cis} = Dano associado ao cisalhamento

ϵ_{eq} = Deformação equivalente;

$\dot{\epsilon}_{eq}$ = Taxa da deformação equivalente.

χ = Definido pelas equações 2.51 e 2.52, conforme o caso.

Nahshon e Hutchinson (N&H-2008) sugeriram um mecanismo de cisalhamento baseado nos aspectos fenomenológicos que podem ser expressos por:

$$\dot{D}_{cis} = k \cdot f \frac{\mathcal{S}:\dot{\epsilon}^p}{q} \quad (2.55)$$

Onde:

k = Parâmetro material passível de calibração;

$\dot{\epsilon}^p$ = Lei de fluxo plástico;

\mathcal{S} = Tensor tensão deviator;

q = Tensão equivalente de von Mises;

f = Fração volumétrica de vazios.

O trabalho plástico, representado por $(\mathcal{S}:\dot{\epsilon}^p)$, pode ser substituído pelo equivalente $(\sigma:\dot{\epsilon}^p)$. Reescrevendo a equação 2.54:

$$\dot{D}_{cis} = k \cdot f \frac{\sigma:\dot{\epsilon}^p}{q} = k \cdot f \dot{\epsilon}^p \quad (2.56)$$

Onde:

\dot{D}_{cis} = Taxa de evolução do dano associado ao cisalhamento;

$\dot{\epsilon}^p$ = Taxa de evolução da deformação plástica equivalente.

Com isto a variável de dano pode ser reescrita como:

$$\dot{f} = \dot{f}^n + \dot{f}^g + \dot{D}_{cis} \quad (2.57)$$

Onde:

\dot{f} = Taxa da fração volumétrica de vazios;

\dot{f}^n = Taxa da fração volumétrica de vazios devida à nucleação;

\dot{f}^g = Taxa da fração volumétrica de vazios devida à coalescência;

\dot{D}_{cis} = Taxa do dano associado ao cisalhamento;

Sob condições de cisalhamento dominante, introduzindo-se um dos mecanismos de cisalhamento no modelo GTN, este tem sensível melhora na capacidade de predição da falha, mas para isso é necessária a introdução de uma função do ângulo

de Lode com valor $0 \leq g_0 \leq 1$ como condição de carregamento para generalizar a evolução de danos por cisalhamento para o estado de tensão arbitrário.

2.6.1 FUNÇÃO DO ÂNGULO DE LODE

As evoluções de danos por cisalhamento puro descritas devem ser generalizadas para estados de tensões arbitrárias e isso pode ser feito através da introdução de uma função diretamente associada ao terceiro invariante do tensor tensão desviador, o ângulo de Lode, parâmetro essencial na caracterização do efeito do estado de tensão na fratura dúctil (Kim et al., 2003 e 2004; Bao e Wierzbicki, 2004; Gao et al., 2005; Breit e Faleskog, 2007a e 2007b; Bai e Wierzbicki, 2008; Gao et al., 2009).

O ângulo de Lode está compreendido no intervalo entre 0 para estados de tensão de tração pura e 1 para os estados de cisalhamento puro. Para valores intermediários, por ser um estado de tensões combinadas, a função deve ser capaz de definir a grandeza relativa a cada condição de tensão.

A função de dependência do ângulo de Lode proposta por Xue (2008) é definida por uma expressão linear do ângulo de Lode normalizado, como:

$$g_0 = 1 - |\bar{\theta}| \quad (2.58)$$

Onde:

g_0 = Função do ângulo de Lode;

$\bar{\theta}$ = Ângulo de Lode normalizado.

Nahshon & Hutchinson (2008) propuseram alternativa para a função do ângulo de Lode, que discrimina tensões uniaxiais daquelas biaxiais e expressa uma relação quadrática com o terceiro invariante normalizado.

$$g_0 = 1 - \xi^2 \quad (2.59)$$

Onde:

ξ = Terceiro invariante normalizado.

As equações 2.58 e 2.59 podem ser utilizadas para ativar o mecanismo de cisalhamento descritos na seção anterior sempre que os efeitos de cisalhamento estiverem presentes. A Figura 2.7 representa ambas funções em relação ao terceiro invariante do tensor tensão.

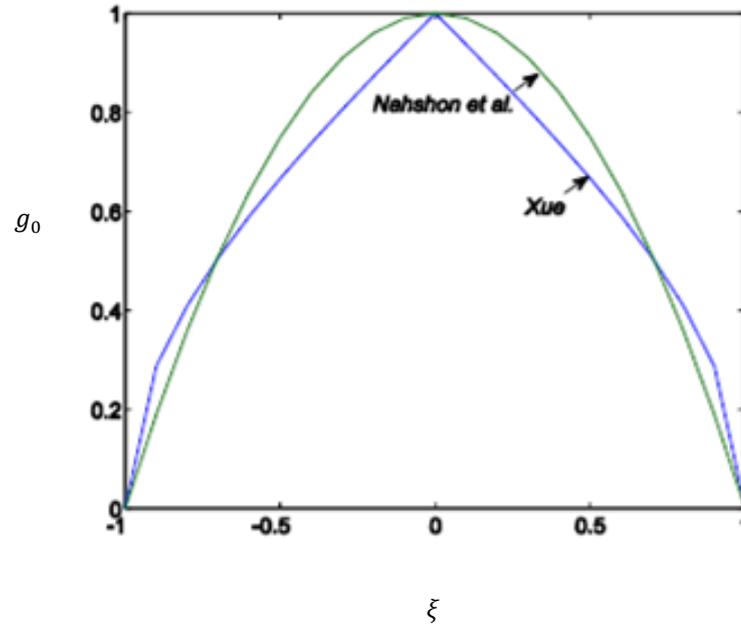


Figura 2.8 Evolução das funções do ângulo de Lode normalizado em relação ao terceiro invariante proposto por Xue (2008).

A evolução do dano por cisalhamento expresso nas equações 2.47, 2.54 e 2.56 podem ser reescritas para condições de carregamento arbitrário como:

$$\dot{D}_{cis} = g_0 (q_4 f^{q_5} \varepsilon_{eq} \dot{\varepsilon}_{eq}) \quad (2.60)$$

$$\dot{D}_{cis} = g_0 \left[\frac{1}{\ln \sqrt{\frac{1}{x}}} \left(\frac{3\varepsilon_{eq}}{1+3\varepsilon_{eq}^2} \right) \dot{\varepsilon}_{eq} \right] \quad (2.61)$$

$$\dot{D}_{cis} = g_0 k f \dot{\varepsilon}^p \quad (2.62)$$

2.7 RESUMO DOS MODELOS MATEMÁTICOS

2.7.1 MODELO MATEMÁTICO DE GURSON

- i) Decomposição aditiva da deformação

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (2.63)$$

- ii) Lei de Hooke

$$\sigma = D^e : \varepsilon^e \quad (2.64)$$

- iii) Função de escoamento

$$\emptyset = J_2(\mathbf{S}) - \frac{1}{3} \left[1 + f^2 - 2f \cosh\left(\frac{3p}{2\sigma_y}\right) \right] \sigma_y^2 \quad (2.65)$$

iv) Lei de fluxo plástico

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial N}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma} \sqrt{\mathbf{S} : \mathbf{S} + \frac{1}{3} \left[f \cdot \sigma_y \cdot \sinh\left(\frac{3p}{2\sigma_y}\right) \right]^2} \quad (2.66)$$

$$\dot{R} = \dot{\gamma} \frac{\left\{ f \cdot p \cdot \sinh\left(\frac{3p}{2\sigma_y}\right) + \frac{2}{3} \left[1 + f^2 - 2f \cdot \cosh\left(\frac{3p}{2\sigma_y}\right) \right] \sigma_y \right\}}{(1-f)} \quad (2.67)$$

$$\dot{f} = \dot{f}^G = (1-f) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^p \quad (2.68)$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \sqrt{\mathbf{S} : \mathbf{S} + \frac{1}{3} \left[f \cdot \sigma_y \cdot \sinh\left(\frac{3p}{2\sigma_y}\right) \right]^2} \quad (2.69)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^p = \dot{\gamma} \cdot f \sigma_y \cdot \sinh\left(\frac{3p}{2\sigma_y}\right) \quad (2.70)$$

v) Critério de carregamento e descarregamento

$$\dot{\gamma} \geq 0; \quad \emptyset \leq 0; \quad \dot{\gamma} \emptyset = 0 \quad (2.71)$$

2.7.2 MODELO MATEMÁTICO GTN

Partindo do modelo proposto de Gurson, Tvergaard e Needleman fizeram acréscimos ao modelo, tornando-o capaz de tratar a nucleação e coalescência de vazios, ficando o novo modelo conhecido como GTN (modelo Gurson-Tvergaard-Needleman).

As premissas matemáticas são:

i) Decomposição aditiva da deformação

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.72)$$

ii) Lei de Hooke

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.73)$$

iii) Função de escoamento

$$\emptyset = J_2(\mathbf{S}) - \frac{1}{3} \left[1 + q_3 f^{*2} - 2q_1 f^* \cosh\left(\frac{3q_2 p}{2\sigma_y}\right) \right] \sigma_y^2 \quad (2.74)$$

iv) Lei do fluxo plástico e equações de evolução para R e f

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \left[\mathbf{S} + \frac{1}{3} q_1 q_2 f \sinh \left(\frac{3q_2 p}{2\sigma_y} \right) \mathbf{I} \right] \quad (2.75)$$

$$\dot{R} = \dot{\gamma} \frac{\left\{ q_1 q_2 f p \sinh \left(\frac{3q_2 p}{2\sigma_y} \right) + \frac{2}{3} \left[1 + q_3 f^2 - 2q_1 f \cosh \left(\frac{3q_2 p}{2\sigma_y} \right) \right] \sigma_y \right\}}{(1-f)} \quad (2.76)$$

$$\dot{f} = \dot{f}^n + \dot{f}^g = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\varepsilon}^p - \varepsilon_N}{s_N} \right)^2 \right] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + (1-f) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^p \quad (2.77)$$

$$f^* = \begin{cases} f, & f \leq f_c \\ f_c + \left(\frac{1}{q_1} - f_c \right) \left(\frac{f - f_c}{f_f - f_c} \right), & f \geq f_c \end{cases} \quad (2.78)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \mathbf{S} : \mathbf{S} + \frac{1}{3} \left[q_1 q_2 f \sigma_y \sinh \left(\frac{3q_2 p}{2\sigma_y} \right) \right]^2 \right\}} \quad (2.79)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^p = \dot{\gamma} q_1 q_2 f \sigma_y \sinh \left(\frac{3q_2 p}{2\sigma_y} \right) \quad (2.80)$$

v) Critério de carregamento e descarregamento

$$\dot{\gamma} \geq 0; \quad \dot{\phi} \leq 0; \quad \dot{\gamma} \dot{\phi} = 0 \quad (2.81)$$

2.7.3 MODELO MATEMÁTICO GTN COM CISALHAMENTO

i) Decomposição aditiva da deformação

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.82)$$

ii) Lei de Hooke

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.83)$$

iii) Função de escoamento

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, r, f) = J_2(\mathbf{S}) - \frac{1}{3} \left[1 + q_3 f^2 - 2q_1 f \cosh \left(\frac{3q_2 p}{2\sigma_y} \right) \right] \sigma_y^2 \quad (2.84)$$

iv) Lei do fluxo plástico e equações de evolução para R e f

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \left[\mathbf{S} + \frac{1}{3} q_1 q_2 f \sigma_y \sinh \left(\frac{3q_2 p}{2\sigma_y} \right) \mathbf{I} \right] \quad (2.85)$$

$$\dot{R} = \dot{\gamma} \frac{\left\{ q_1 q_2 f p \sinh \left(\frac{3q_2 p}{2\sigma_y} \right) + \frac{2}{3} \left[1 + q_3 f^2 - 2q_1 f \cosh \left(\frac{3q_2 p}{2\sigma_y} \right) \right] \sigma_y \right\}}{(1-f)} \quad (2.86)$$

$$\dot{f} = \dot{f}^n + \dot{f}^g + \dot{D}_{cis} = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_N}{s_N} \right)^2 \right] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + (1-f) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^p + \dot{D}_{cis} \quad (2.87)$$

Onde:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \mathbf{S} : \mathbf{S} + \frac{1}{3} \left[q_1 q_2 f \sigma_y \sinh \left(\frac{3q_2 p}{2\sigma_y} \right) \right]^2 \right\}} \quad (2.88)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^p = \dot{\gamma} q_1 q_2 f \sigma_y \sinh \left(\frac{3q_2 p}{2\sigma_y} \right) \quad (2.89)$$

$$\dot{D}_{cis} = \begin{cases} q_4 f^{q_5} g_0 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p & (Xue) \\ k f g_0 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p & (Nahshon) \end{cases} \quad (2.90)$$

$$g_0 = \begin{cases} 1 - |\bar{\theta}| & (Xue) \\ 1 - \xi^2 & (Nahshon) \end{cases} \quad (2.91)$$

v) Critério de carregamento e descarregamento

$$\dot{\gamma} \geq 0; \quad \dot{\phi} \leq 0; \quad \dot{\gamma} \dot{\phi} = 0 \quad (2.92)$$

3 ASPECTOS NUMÉRICOS

Partindo do modelo de von Mises, Gurson (1977) propôs um novo modelo para estudo do dano considerando a porosidade inicial do material que, associada às grandes deformações plásticas, são responsáveis pelo dano.

Desta forma, a função de escoamento para o modelo de Gurson é função da pressão hidrostática p (primeiro invariante do tensor tensão), do segundo invariante do tensor tensão desviador J_2 , da fração volumétrica de vazios f e do limite de escoamento inicial do material σ_y .

Com isto, a função de escoamento para o modelo de Gurson fica conforme descrita pela equação (2.8).

Constata-se assim que, caso a fração volumétrica de vazios f seja nula, o modelo de Gurson reduz-se ao de von Mises.

3.1 ALGORITMO DE ATUALIZAÇÃO DAS TENSÕES E VARIÁVEIS INTERNAS

O algoritmo de atualização, também chamado em plasticidade computacional de *algoritmo de mapeamento de retorno*, é construído através do prévio conhecimento da deformação elástica (ϵ_n^e); do incremento de deformação prescrito para este intervalo, $\Delta\epsilon$ (fornecido); do conjunto das variáveis internas α_n , no início do intervalo do pseudo-tempo $[t_n, t_{n+1}]$;

Com estes dados, o chamado estado tentativa elástico pode ser assim construído:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{n+1}^{e^t} &= \epsilon_n^e + \Delta\epsilon \\
 \epsilon_{n+1}^{p^t} &= \epsilon_n^p \\
 \sigma_{n+1}^t &= \mathbf{D}^e : \epsilon_{n+1}^{e^t} \\
 \sigma_y &= \sigma_y(\alpha_n) \\
 \alpha_{n+1}^t &= \alpha_n
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Onde:

σ_{n+1}^t = Tensor das tensões tentativa;

$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{et}$ = Tensor das deformações plásticas tentativa;

α_{n+1}^t = Variável interna associada ao endurecimento isotrópico tentativa;

σ_y = Limite de escoamento inicial do material.

Lembremos que σ_y , limite de escoamento inicial do material, é função da variável interna associada ao endurecimento isotrópico, $\sigma_y(\alpha_n)$. No modelo de von Mises a deformação plástica equivalente, $\bar{\varepsilon}^p$ é tomada como a variável interna associada ao endurecimento isotrópico $\bar{\varepsilon}_n^p$ e assim podemos afirmar que o limite de escoamento do material, ou limite de escoamento inicial do material σ_y , é função da deformação plástica equivalente $\bar{\varepsilon}_n^p$.

Podemos então decompor o tensor das tensões tentativas em uma parte deviadora e outra hidrostática:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{n+1}^t &= 2G\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{et} \\ p_{n+1}^t &= K\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{et} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Onde:

\mathbf{S}_{n+1}^t = Componente deviadora tentativa;

p_{n+1}^t = Componente hidrostática tentativa;

G = Módulo de cisalhamento;

k = Módulo volumétrico;

$\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{et}$ = Componente deviadora do tensor das deformações elásticas tentativa;

Prosseguindo, verificamos a posição do estado tentativa em relação ao intervalo contendo os limites elásticos do material e para tal, a função de escoamento é definida com base nos termos acima. Novamente para o modelo de Gurson, a função de escoamento tentativa é então determinada como:

$$\phi = J_2 - \frac{1}{3} \left[1 + f_{n+1}^{t2} - 2f_{n+1}^t \cosh\left(\frac{3p_{n+1}^t}{2\sigma_y}\right) \right] \sigma_y^2 \quad (3.3)$$

Caso ϕ seja menor ou igual a zero, temos que o incremento de deformação prescrito inicialmente é totalmente elástico e o estado tentativa construído passa então

a ser considerado como estado real do material, $(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^t$. Em caso contrário, ou seja, sendo \emptyset maior que zero, temos a comprovação de que o material se encontra inserido nos limites do regime plástico e que o incremento de deformação prescrito, que inicialmente foi considerado elástico, possui uma parcela plástica, o que nos obriga à correção do estado tentativa construído acima, procedimento que será realizado a partir da remoção do incremento de deformação plástica daquele valor tomado para deformação elástica tentativa, nos permitindo então escrever:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e^t} - \Delta\gamma \left[\mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3} f_{n+1} \sigma_y \sinh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \right] \quad (3.4)$$

Assim como no modelo de von Mises, para o modelo de Gurson, o incremento de deformação plástica é definido através da *Lei de Fluxo Plástico*, ficando:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \left[\mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3} f_{n+1} \sigma_y \sinh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \right] \quad (3.5)$$

A atualização das variáveis de estado pode então ser obtida através das equações a seguir:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3} \left[f_{n+1} \sigma_y \sinh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \right]^2 \right\}} \quad (3.6)$$

Onde:

$\Delta\gamma$ = Incremento da deformação plástica equivalente.

Já a atualização da fração volumétrica de vazios fica:

$$f_{n+1} = f_n + \Delta\gamma (1 - f_{n+1}) f_{n+1} \sigma_y \sinh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \quad (3.7)$$

Agora, a função de escoamento atualizada é determinada através do estado real no pseudo-tempo t_{n+1} , de acordo com a expressão:

$$\emptyset = J_2 - \frac{1}{3} \left[1 + f_{n+1}^{t^2} - 2f_{n+1}^t \cosh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \right] \sigma_y^2 \quad (3.8)$$

Analisando as equações (3.5), (3.7) e (3.8), verifica-se que para determinarmos o estado real do material, deve-se, primeiro, resolver um sistema de equações não lineares que tem como variáveis $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$ e $\Delta\gamma$.

O sistema não linear citado acima, para um problema tridimensional (estado geral de tensão), pode ser considerado como um sistema com oito variáveis e oito equações, o que permite reescrever a equação (3.5) em termos do campo de tensão:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e^t} \quad (3.9)$$

Assim, o sistema de equações não-lineares a ser resolvido passa a ter como variáveis $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, f , $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$ e $\Delta\gamma$ podendo ser representado na forma de equações residuais:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial f} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p}}{\partial f} & \frac{\partial R_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_f}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_f}{\partial f} & \frac{\partial R_f}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial f} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\sigma} \\ \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \\ \delta f \\ \delta \Delta\gamma \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_{\boldsymbol{\sigma}} \\ R_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \\ R_f \\ R_{\Delta\gamma} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Desta forma o modelo numérico desenvolvido para o modelo matemático de Gurson fica resumido conforme demonstrado na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas associado ao modelo de Gurson.

i)	Determinar o estado tentativa: Dado um incremento de deformação, $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$.
	$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ t} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ t} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p$ $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^t = \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ t} \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{p\ t} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p$ $\sigma_y = \sigma_y(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p) \quad f_{n+1}^t = f_n$
ii)	Verificar a admissibilidade Plástica:
	$\phi^t = J_2 - \frac{1}{3} \left[1 + f_{n+1}^{t^2} - 2f_{n+1}^t \cosh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \right] \sigma_y^2$ <p>Se $\phi^t \leq 0$, então (passo elástico): $(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^t$;</p> <p>Caso contrário, então (passo plástico):</p>
iii)	Algoritmo de retorno: resolver o sistema de equações não-lineares (Newton-Raphson), tendo como variáveis: $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$, f e $\Delta \gamma$.
	$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial f} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \Delta \gamma} \\ \frac{\partial R_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p}}{\partial f} & \frac{\partial R_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p}}{\partial \Delta \gamma} \\ \frac{\partial R_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_f}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_f}{\partial f} & \frac{\partial R_f}{\partial \Delta \gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta \gamma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta \gamma}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta \gamma}}{\partial f} & \frac{\partial R_{\Delta \gamma}}{\partial \Delta \gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\sigma} \\ \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p \\ \delta f \\ \delta \Delta \gamma \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_{\boldsymbol{\sigma}} \\ R_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \\ R_f \\ R_{\Delta \gamma} \end{bmatrix}$
iv)	Atualizar outras variáveis internas:
v)	Fim.

Para resolução do sistema não-linear descrito na tabela acima adota-se o método de Newton-Raphson, pelo fato de sua convergência ser bem mais rápida. Partindo da equação (3.10).

Assim, a tabela a seguir mostra de forma resumida a aplicação do método de Newton-Raphson para resolução do sistema linear acima citado, onde o estado tentativa é tomado como parâmetro inicial do problema.

Tabela 3.2. Algoritmo para resolução do sistema linear através do método de Newton-Raphson.

i) Dado o estado tentativa como parâmetros iniciais:

$$\sigma_{n+1}^{(0)} = \sigma_{n+1}^t; \quad \bar{\epsilon}_{n+1}^{p(0)} = \bar{\epsilon}_n^p; \quad f_{n+1}^0 = f_{n+1}^t; \quad \Delta\gamma^{(0)} = \Delta\gamma$$

ii) Resolver o sistema de equações para: σ_{n+1} , $\bar{\epsilon}_{n+1}^p$, f e $\Delta\gamma$.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial f} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p}}{\partial f} & \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_f}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_f}{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_f}{\partial f} & \frac{\partial R_f}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial f} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\sigma \\ \delta\bar{\epsilon}_n^p \\ \delta f \\ \delta\Delta\gamma \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R\sigma \\ R\bar{\epsilon}^p \\ Rf \\ R\Delta\gamma \end{bmatrix}$$

iii) Calcular:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1}^{(k+1)} &= \sigma_{n+1}^{(k)} + \delta\sigma_{n+1}^{(k+1)} & \bar{\epsilon}_{n+1}^{p(k+1)} &= \bar{\epsilon}_{n+1}^{p(k)} + \delta\bar{\epsilon}_{n+1}^{p(k+1)} \\ f_{n+1}^{(k+1)} &= f_{n+1}^{(k)} + \delta f_{n+1}^{(k+1)} & \Delta\gamma^{(k+1)} &= \Delta\gamma^{(k)} + \delta\Delta\gamma^{(k+1)} \end{aligned}$$

iv) Verificar convergência:

$$\phi^{k+1} = J_2 - \frac{1}{3} \left[1 + (f_{n+1}^{k+1})^2 - 2f_{n+1}^{k+1} \cosh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right] \sigma_y^2$$

$$\text{erro} = \frac{\phi^{(k+1)}}{\frac{1}{3} \left[1 + (f_{n+1}^{k+1})^2 - 2f_{n+1}^{k+1} \cosh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right] \sigma_y^2} \leq \text{tolerância}$$

v) Fim.

Onde:

$$\begin{bmatrix} R_{\sigma_{n+1}} \\ R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p} \\ R_{f_{n+1}} \\ R_{\Delta\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{n+1} - \sigma_{n+1}^t + \Delta\gamma \left[2G\mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3}kf_{n+1}\sigma_y \sinh\left(\frac{3p}{2\sigma_y}\right) \mathbf{I} \right] \\ \bar{\epsilon}_{n+1}^p - \bar{\epsilon}_n^p - \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3} \left[f_{n+1}\sigma_y \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right]^2 \right\}} \\ f_{n+1} - f_n - \Delta\gamma(1 - f_{n+1})f_{n+1}\sigma_y \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \\ J_{2n+1} - \frac{1}{3} \left[1 + f_{n+1}^2 - 2f_{n+1} \cosh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right] \sigma_y^2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

3.2 OPERADOR TANGENTE CONSISTENTE

Tomando como base a implementação implícita do modelo descrito acima em um desenvolvimento de elementos finitos, requer-se o operador tangente consistente com o algoritmo de integração como ferramenta para construção da chamada matriz de rigidez. Considerando um caso elástico, ou seja, quando o fluxo plástico é igual a zero dentro de um passo específico, o operador tangente no tempo t_{n+1} , passa a ser simplesmente o operador elástico danificado, descrito por:

$$\hat{\mathbf{D}}^e = \frac{1}{1-f} \mathbf{D} \quad (3.12)$$

Por outro lado, em um caso elasto-plástico, ou seja, quando se assume a existência do fluxo plástico, o operador tangente, escrito por $\hat{\mathbf{D}}^{ep}$, é definido como:

$$\hat{\mathbf{D}}^{ep} = \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \epsilon_{n+1}} \quad (3.13)$$

Onde $\hat{\sigma}$ representa a função algorítmica constitutiva implícita para a atualização das tensões, definida pelo algoritmo de retorno descrito acima. Para o modelo de Gurson, a metodologia aplicada para determinação do operador tangente consistente com o algoritmo de atualização de tensões é escrito a partir da Equação (3.10) escrita na forma inversa:

$$\begin{bmatrix} \partial \sigma_{n+1} \\ \partial \bar{\epsilon}_{n+1}^p \\ \partial f_{n+1} \\ \partial \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{13} & \mathbf{C}_{14} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \mathbf{C}_{23} & \mathbf{C}_{24} \\ \mathbf{C}_{31} & \mathbf{C}_{32} & \mathbf{C}_{33} & \mathbf{C}_{34} \\ \mathbf{C}_{41} & \mathbf{C}_{42} & \mathbf{C}_{43} & \mathbf{C}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}^e : \partial \epsilon_{n+1}^{et} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Onde:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{13} & \mathbf{C}_{14} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \mathbf{C}_{23} & \mathbf{C}_{24} \\ \mathbf{C}_{31} & \mathbf{C}_{32} & \mathbf{C}_{33} & \mathbf{C}_{34} \\ \mathbf{C}_{41} & \mathbf{C}_{42} & \mathbf{C}_{43} & \mathbf{C}_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial f} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p}}{\partial f} & \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_f}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_f}{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_f}{\partial f} & \frac{\partial R_f}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial f} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.15)$$

- Escalares: $C_{22}, C_{23}, C_{32}, C_{33}$;
- Tensores de segunda ordem: $\mathbf{C}_{12}, \mathbf{C}_{21}, \mathbf{C}_{13}, \mathbf{C}_{31}, \mathbf{C}_{14}, \mathbf{C}_{41}$;
- Tensor de quarta ordem: \mathbf{C}_{11} .

Assim, a Equação 3.13, pode ser reescrita como:

$$\mathbf{D}^{ep} = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}^e} = \mathbf{C}_{11} : \mathbf{D}^e \quad (3.16)$$

Onde a operação $(\mathbf{C}_{11} : \mathbf{D})$ representa a composição entre o tensor de quarta ordem \mathbf{C}_{11} e o tensor de quarta ordem \mathbf{D} , dado pela matriz de elasticidade.

Toda a metodologia aqui descrita aplicada ao modelo de Gurson para determinação do algoritmo de atualização das tensões e matriz tangente consistente, também será aplicada aos modelos GTN e GTN com cisalhamento, diferenciando apenas na formação do sistema de equações residuais particularizados a seguir.

3.3 EQUAÇÕES RESIDUAIS PARA OS MODELOS GTN E GTN COM CISALHAMENTO

Para o modelo GTN o seguinte sistema de equações residuais é definido:

$$\begin{bmatrix} R_{\sigma_{n+1}} \\ R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p} \\ R_{f_{n+1}} \\ R_{\Delta\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{n+1} - \sigma_{n+1}^t + \Delta\gamma \left[2G\mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3}q_1q_2kf_{n+1}\sigma_y \sinh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \mathbf{I} \right] \\ \bar{\epsilon}_{n+1}^p - \bar{\epsilon}_n^p - \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3} \left[q_1q_2f_{n+1}\sigma_y \sinh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right]^2 \right\}} \\ f_{n+1} - f_n - f^N - \Delta\gamma(1 - f_{n+1})q_1q_2f_{n+1}\sigma_y \sinh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \\ J_{2n+1} - \frac{1}{3} \left[1 + q_3f_{n+1}^2 - 2q_1f_{n+1} \cosh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right] \sigma_y^2 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Para o modelo GTN com cisalhamento, o sistema de equações residuais fica definido como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial f} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p}}{\partial f} & \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_f}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_f}{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_f}{\partial f} & \frac{\partial R_f}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial f} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \sigma \\ \delta \bar{\epsilon}^p \\ \delta f \\ \delta \Delta\gamma \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R \sigma \\ R \bar{\epsilon}^p \\ R f \\ R \Delta\gamma \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\begin{bmatrix} R \sigma_{n+1} \\ R \bar{\epsilon}_{n+1}^p \\ R f_{n+1} \\ R \Delta\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{n+1} - \sigma_{n+1}^t + \Delta\gamma \left[2G S_{n+1} + \frac{1}{3} q_1 q_2 k f_{n+1} \sigma_y \sinh \left(\frac{3q_2 p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \mathbf{I} \right] \\ \bar{\epsilon}_{n+1}^p - \bar{\epsilon}_n^p - \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3} \left[q_1 q_2 f_{n+1} \sigma_y \sinh \left(\frac{3q_2 p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \right]^2 \right\}} \\ f_{n+1} - f_n - \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\epsilon}^p - \epsilon_N}{s_N} \right)^2 \right] \dot{\bar{\epsilon}}^p + (1-f) \dot{\bar{\epsilon}}_v^p + \dot{D}_{cis} \\ J_{2n+1} - \frac{1}{3} \left[1 + q_3 f_{n+1}^2 - 2q_1 f_{n+1} \cosh \left(\frac{3q_2 p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \right] \sigma_y^2 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

As derivadas das equações residuais para o modelo GTN e GTN com cisalhamento são encontradas no anexo deste trabalho.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 GEOMETRIA E MALHA DE ELEMENTOS FINITOS

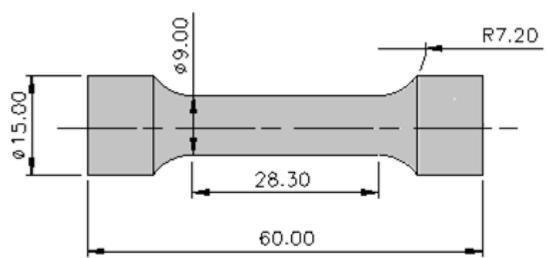
Os corpos de prova utilizados para testar a robustez dos modelos numéricos propostos foram retirados da literatura (Bai, 2008) e fabricados em aço 1045 sob três geometrias clássicas (Figura 4.1):

- ✓ Cilíndrico liso;
- ✓ Cilíndrico entalhado;
- ✓ Tipo Borboleta.

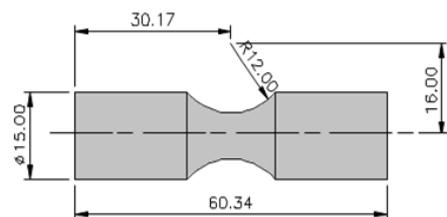
A escolha do aço 1045 deu-se em função, principalmente, da facilidade de obtenção, na literatura disponível, de resultados experimentais para as diferentes geometrias dos corpos de prova e estados de tensão (ver Bai & Wierzbicki, 2007), nos permitindo assim, maior assertividade quanto ao estudo como um todo.

Foram eleitos também três tipos de carregamentos, aplicados até falha total do corpo de provas (completo rompimento/separação):

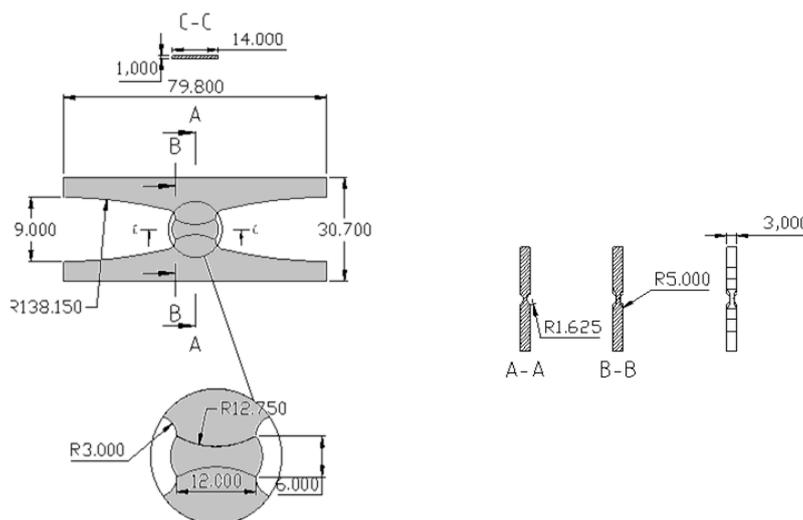
- ✓ Carregamentos trativos, monotônicos:
 - Cilíndrico liso (Figura 4.1 a);
 - Cilíndrico entalhado (Figura 4.1 b);
 - Tipo borboleta (Figura 4.1 c);
- ✓ Carregamentos cisalhantes:
 - Tipo Borboleta (Figura 4.1 c);
- ✓ Carregamentos combinando tração e cisalhamento:
 - Tipo Borboleta (Figura 4.1 c).



(a) Cilíndrico liso



(b) Cilíndrico entalhado



(c) Tipo Borboleta

Figura 4.1 Geometria dos corpos de prova utilizados – material aço 1045: a) cilíndrico liso, b) cilíndrico entalhado e c) tipo borboleta.

A geometria para discretização dos corpos de prova para simulação numérica é mostrada na Figura 4.2 com as seguintes particularidades:

- ✓ Corpos de prova cilíndrico liso e cilíndrico entalhado:
 - Discretizados como elementos finitos bidimensionais, quadriláteros de 8 nós, formando malha com 1.800 elementos e 5.581 nós.
 - Considerando que neste estudo o problema é completamente simétrico, a discretização pode ser realizada em apenas um quarto do corpo, adotando, para medição do deslocamento da área de interesse do CP, um clip gage de 20,6 mm (ver Bai, 2008);
- ✓ Corpo de prova tipo borboleta:
 - Sob tração pura:

- Adotados elementos finitos tridimensionais hexaédricos de 8 nós, formando malha de 1.840 elementos e 2.376 nós.
- Sob carregamento combinado (tração e cisalhamento):
 - Adotamos malha tridimensional constituída por elementos finitos hexaédricos de 20 nós, totalizando 1.440 elementos e 7.773 nós.

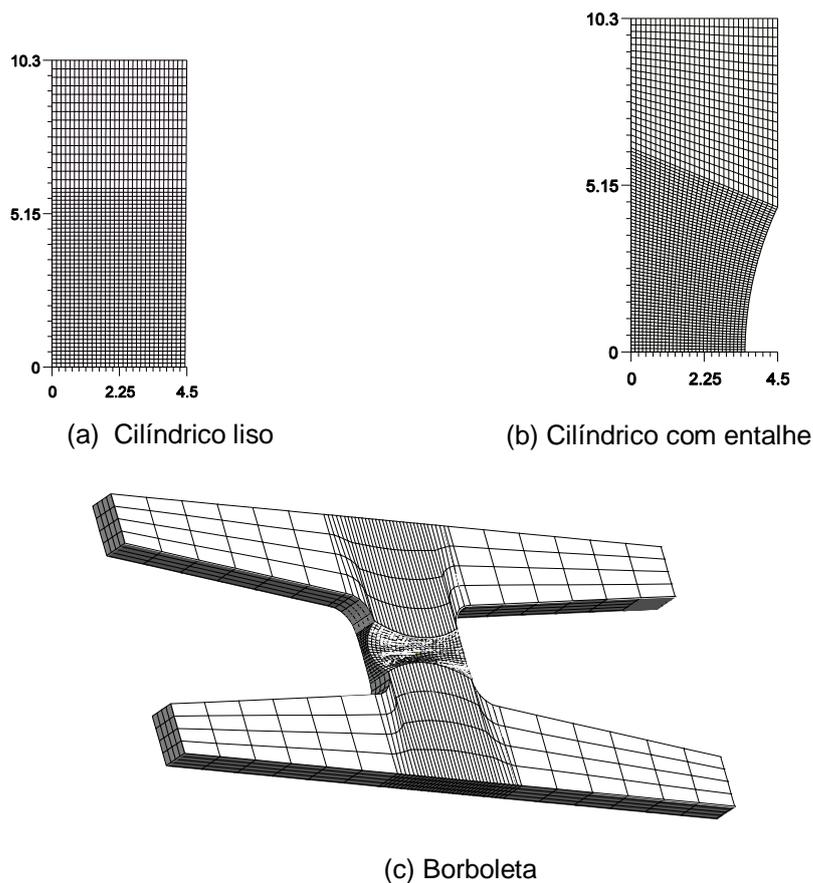


Figura 4.2 Configuração da malha de elementos finitos para os corpos de prova adotados.

4.2 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS.

A utilização dos modelos constitutivos descritos exigiu um grande número de parâmetros materiais em boa parte tomados à literatura disponível (ver Bai & Wierzbicki, 2007; Malcher, 2011; Malcher, 2013 e outros), calibrados através da utilização de método de identificação de parâmetros baseado na seção áurea.

A Tabela 4.1 a seguir, apresenta as propriedades materiais para o aço 1045.

Tabela 4.1 Aço 1045 - Propriedades Materiais.

PROPRIEDADE	UNIDADE	VALOR
Módulo de elasticidade(E)	[GPa]	220
Limite de escoamento inicial (σ_y)	[MPa]	830
Fração volumétrica de vazios com potencial para nucleação (f_N)	-	0.05
Desvio padrão da deformação para nucleação de vazios (S_N)	-	0.20
Deformação média para nucleação de vazios (ϵ_N)	-	0.10
Parâmetro de forma (q_1)	-	1.5
Parâmetro de forma (q_2)	-	1.0
Parâmetro de forma (q_3)	-	2.25
Fração volumétrica crítica de vazio (f_c)	-	0,07964
Plasticidade inicial (f_0)	-	0.056

A Figura 4.3 a seguir, nos permite comparar as curvas de encruamento para o aço 1045, plotadas segundo a Micromecânica de Defeitos.

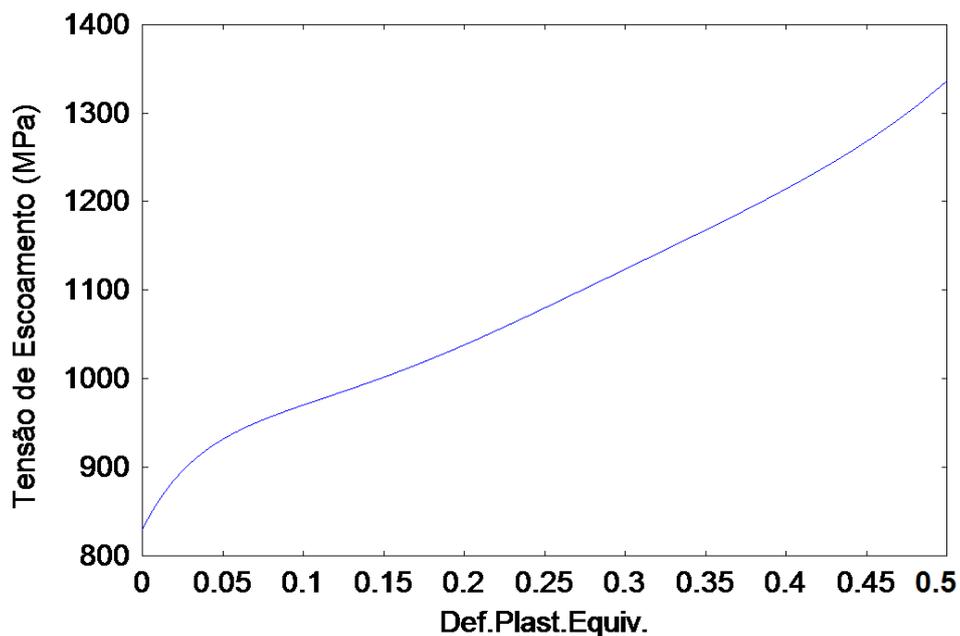


Figura 4.3 Aço 1045 -Curva de encruamento – Micromecânica de Defeitos.

4.3 RESULTADOS NUMÉRICOS PARA O AÇO 1045

As Figuras 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8 apresentam as curvas de reação e evolução do dano para os diferentes CP's e estados de tensão aplicados.

A Figura 4.4 nos mostra quatro curvas de reação e evolução do dano para o corpo de prova cilíndrico liso sob tração pura. Uma dessas curvas refere-se àquela obtida experimentalmente e as demais aos resultados obtidos através dos modelos de Gurson, GTN e GTN com cisalhamento (GTN Xue), estando as curvas obtidas pelos dois últimos modelos perfeitamente sobrepostas. Todos os modelos foram capazes de prever o dano e, apesar de otimistas, o fizeram bastante próximos ao dado experimental.

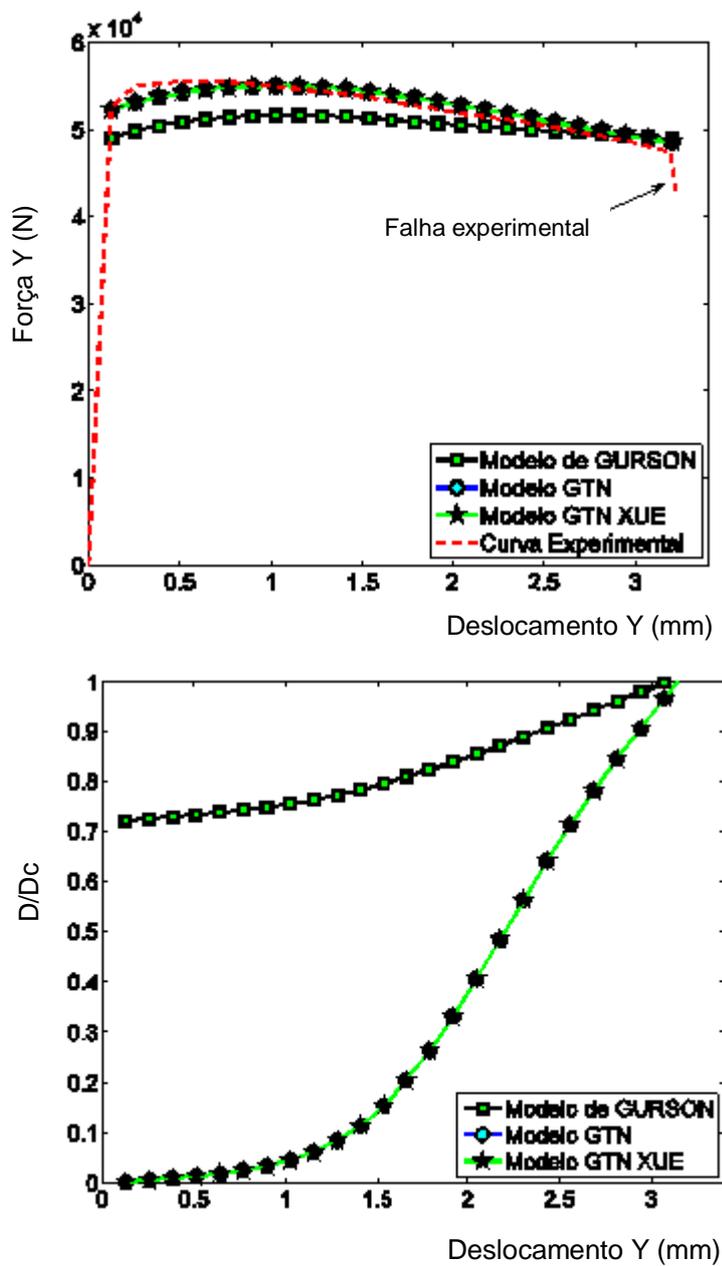


Figura 4.4 Aço 1045 - Curva de reação e evolução do dano para o corpo de prova cilíndrico liso.

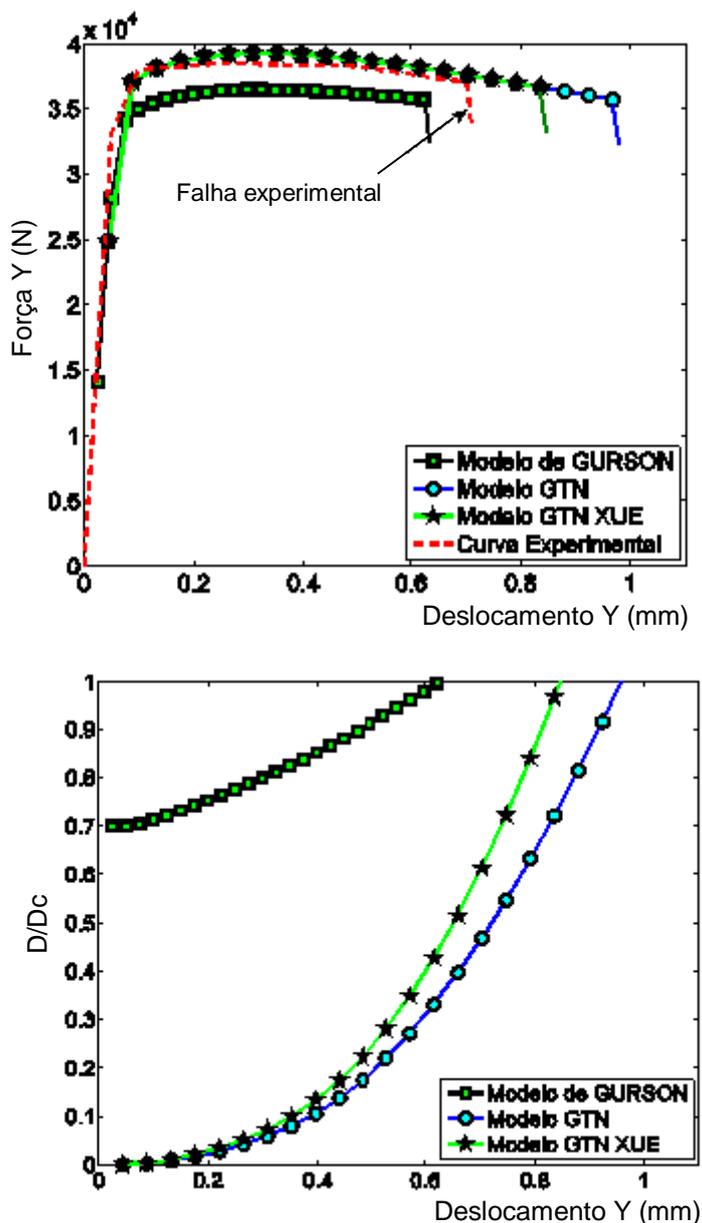


Figura 4.5 Aço 1045 - Curva de reação e evolução do dano para o corpo de prova cilíndrico entalhado.

A Figura 4.5 acima, plotada com os resultados obtidos para o corpo de prova cilíndrico entalhado sob tração pura, nos mostra que os três modelos foram capazes de prever o dano, mas díspares em seus resultados. Tomando a curva experimental como base o modelo de Gurson manteve-se conservador (12% aquém do resultado experimental); GTN otimista (38% além do experimental) e GTN Xue otimista (20% além do experimental).

A Figura 4.6 a seguir apresenta o desempenho dos modelos de Gurson, GTN e GTN Xue para carregamento cisalhante puro. Dos três modelos, apenas o GTN Xue

foi capaz de prever o dano, mas infelizmente, em valores 66% aquém daquele observado experimentalmente.

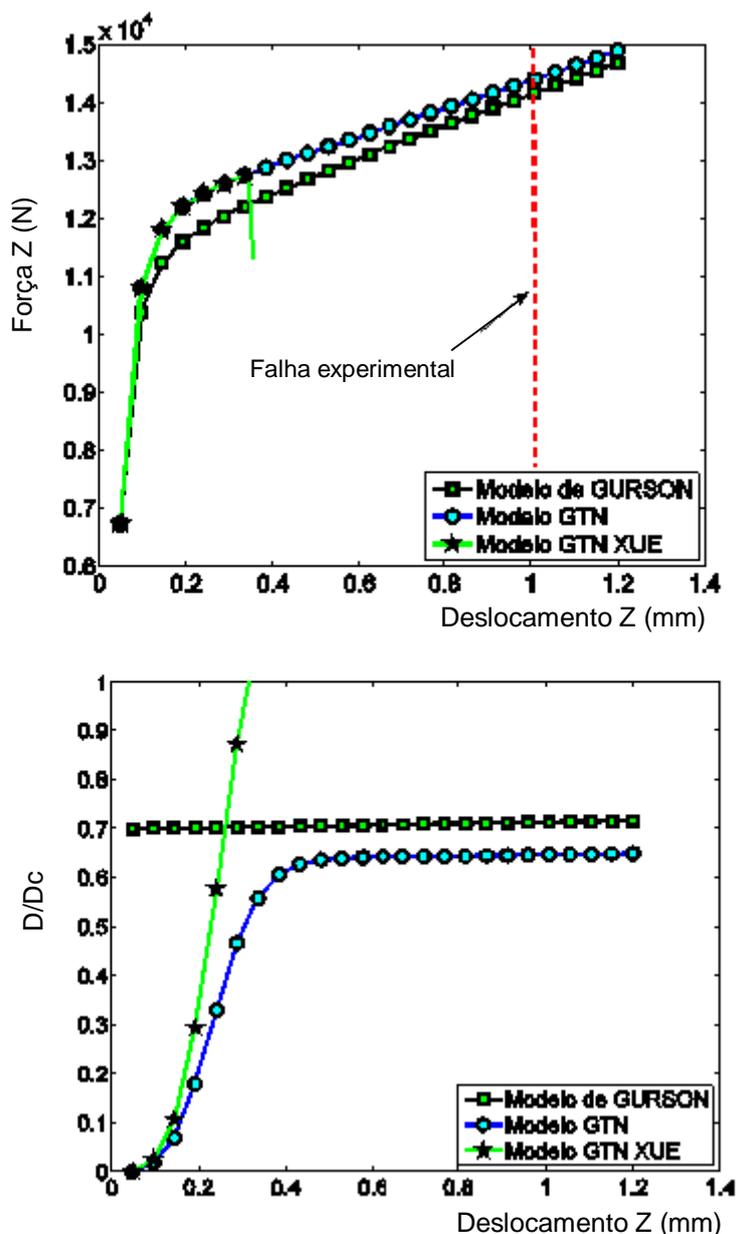


Figura 4.6 Aço 1045 - Curva de reação e evolução do dano para o corpo de prova borboleta em cisalhamento simples.

Podemos explicar a falha dos modelos Gurson e GTN por não serem estes dotados de mecanismos previsores de vazios. Já o modelo GTN Xue potencializou os efeitos da geometria do corpo de prova.

A Figura 4.7 nos mostra que os três modelos foram capazes de prever o dano para o CP borboleta em tração pura, mas todos de forma otimista. A previsão por

Gurson ficou 4,7% além da falha experimental; a previsão pelo modelo GTN Xue ficou em 27% acima e para o modelo GTN em 51,6% além do verificado.

Sob carregamentos puramente trativos, observamos que o CP tipo borboleta (Figura 4.7) apresenta comportamento semelhante àquele observado para o CP cilíndrico entalhado da análise anterior. Observa-se ainda que o modelo GTN Xue retorna ao desempenho e condições do GTN, do qual deriva, para este estado de tensão, como era esperado.

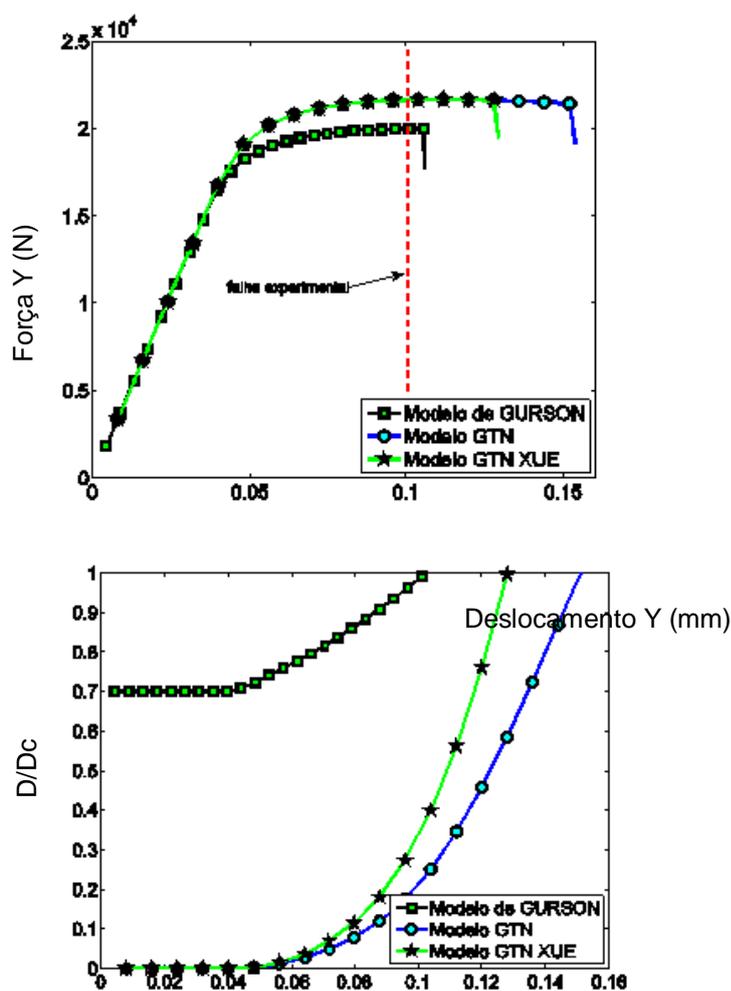


Figura 4.7 Aço 1045 - Curva de reação e evolução do dano para o corpo de prova borboleta em tração pura.

Considerando os resultados para o CP borboleta sujeito a carregamento combinando tração e cisalhamento, conforme mostrado na Figura 4.8, observa-se que os três modelos conseguem prever a falha, mas o modelo GTN Xue de forma conservadora (50,4% do valor da falha verificada); o modelo de Gurson prevê falha a 86,4% do

valor experimental e o modelo GTN Xue, o que melhor se aproximou, previu falha com valor 11,6% além daquele verificado experimentalmente.

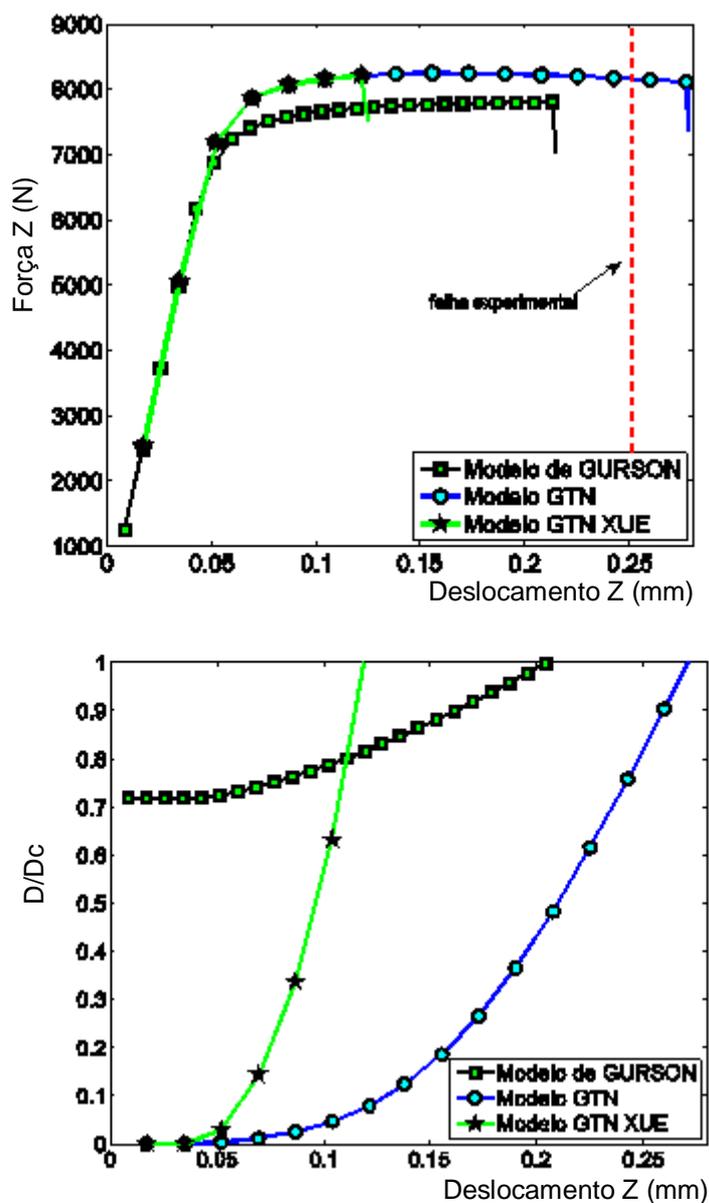


Figura 4.8 Aço 1045 - Curva de reação e evolução do dano para o corpo de prova borboleta em carregamento combinando tração e cisalhamento.

Podemos então afirmar que, em condição de carregamento misto (trativo aliado ao cisalhante), os efeitos do cisalhamento tornam-se predominantes, condição que explica o conservadorismo do modelo GTN Xue, que por vir dotado de mecanismo capaz de detectar a distorção dos vazios existentes no material, o faz prever falha em valores extremamente conservadores frente àqueles verificados experimentalmente

ou previstos pelo modelo GTN, este último, dos três o de maior acurácia, mas ainda assim otimista.

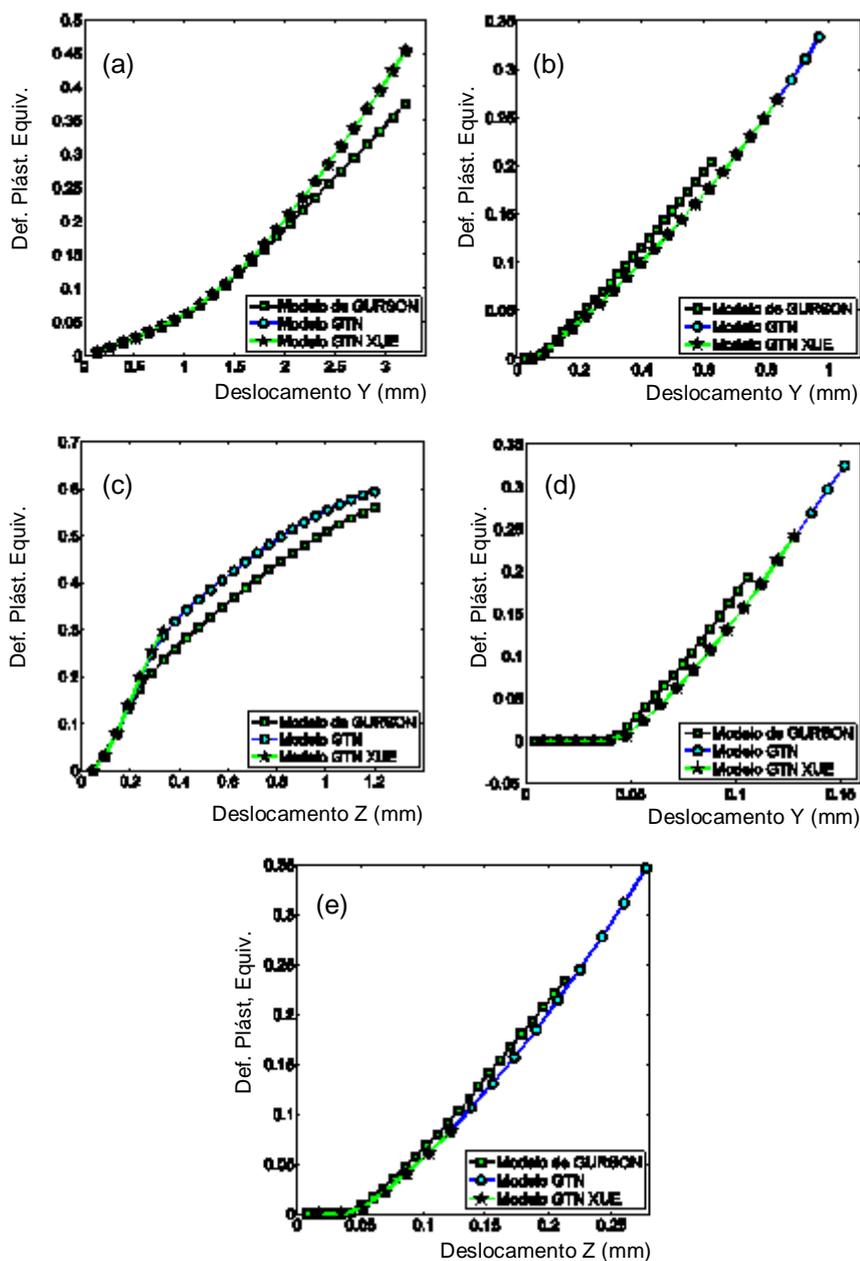


Figura 4.9 Aço 1045 - Curva de evolução da deformação plástica equivalente para os diferentes corpos de prova. a) cilíndrico liso, b) cilíndrico entalhado, c) borboleta em cisalhamento, d) borboleta em tração e d) borboleta em combinado.

A Figura 4.9 nos permite visualizar os resultados sob tração pura.

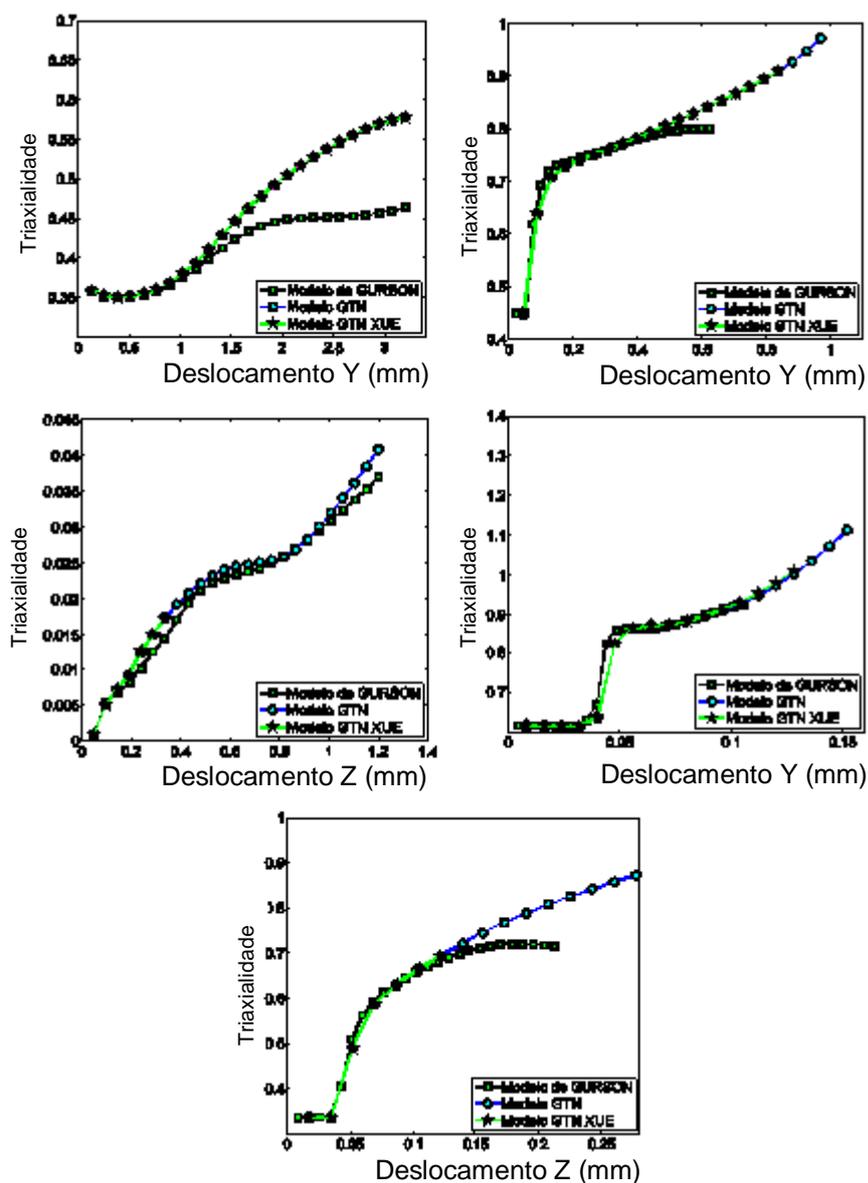


Figura 4.10 Aço 1045 - Curva de evolução da deformação plástica equivalente para os diferentes corpos de prova. a) cilíndrico liso, b) cilíndrico entalhado, c) borboleta em cisalhamento, d) borboleta em tração e e) borboleta em combinado.

a) Corpo cilíndrico liso - tração:

As curvas para os modelos GTN, GTN Xue e Gurson se sobrepõem até as proximidades da metade do deslocamento para falha. Daí apenas as curvas GTN e GTN Xue permanecem sobrepostas até a falha, apresentando ambas, sob o mesmo deslocamento para falha, valor próximo a 20% maior que o modelo de Gurson para a deformação plástica equivalente. As curvas plotadas através dos modelos GTN e GTN Xue, apresentam inclinação mais acentuada que a curva descrita pelo modelo de Gurson ou seja, sua taxa de

crescimento para a deformação plástica equivalente é maior que a curva referente ao modelo de Gurson.

b) Corpo cilíndrico entalhado - tração:

Os três modelos estudados divergiram completamente em suas previsões de falha, tanto para deslocamento quanto para a deformação plástica equivalente, mas novamente houve sobreposição das curvas GTN e GTN Xue em todo desenvolvimento desta última. Gurson foi o mais conservador dos três modelos, tanto para o deslocamento quanto para a deformação plástica equivalente e o modelo GTN o mais otimista.

c) Corpo tipo borboleta - cisalhamento:

Para este corpo de prova, sob carregamento cisalhante, o modelo GTN apresentou previsão do deslocamento para falha igual ao modelo de Gurson, diferindo quanto ao valor para deformação plástica equivalente, onde o modelo GTN se mostra valor 5% maior que a curva para o modelo de Gurson.

d) Corpo tipo borboleta - tração:

Sob carregamento trativo, as curvas para o CP borboleta apresentaram a mesma configuração que para o CP cilíndrico entalhado.

e) Corpo tipo borboleta – tração e cisalhamento:

As curvas para os modelos de Gurson e GTN apresentam-se com geometria similar, apenas com o modelo de Gurson levemente mais otimista para a deformação plástica equivalente que o modelo GTN. O modelo GYN Xue não apresentou boa performance, prevendo valores para deformação plástica equivalente bem menores que os outros dois modelos.

Na Figura 4.10-a temos o corpo cilíndrico liso sob tração, onde as curvas para os modelos GTN e GTN Xue se sobrepõem perfeitamente com inclinação próxima aos 45° enquanto o modelo de Gurson tem sua inclinação reduzida até praticamente voltando a uma leve taxa de crescimento próximo à região do dano.

Notar que na região do dano, a triaxialidade fornecida pelos modelos GTN e GTN Xue são da ordem de 30% maiores que aquela fornecida por Gurson.

Na Figura 4.10-b, que descreve o comportamento do corpo cilíndrico entalhado, as três curvas praticamente se sobrepõem até que a curva de Gurson tenda à inclinação nula, rapidamente atingindo o dano para 0,6 mm de deslocamento e 0,8 para triaxialidade. Já os modelos GTN e GTN Xue mantêm crescente a taxa da triaxialidade até atingir o dano em 1 mm e 0,98 para a triaxialidade total.

Para o corpo de prova borboleta submetido a cisalhamento puro (Figura 4.10 c), as curvas para os três modelos descrevem trajetórias bastante próximas, as três sobrepondo-se em alguns pontos esparsos, com inclinações também muito próximas. Os modelos Gurson e GTN atingem o dano com o mesmo valor de deslocamento, 1,2 mm, mas diferem quanto à triaxialidade, que para Gurson ficou próxima a 0,037 enquanto o GTN apresentou 0,042. O modelo GTN Xue, fortemente conservador para este caso, apresentou deslocamento próximo a 0,35 mm e triaxialidade de 0,018.

A Figura 4-10 d, corpo tipo borboleta sob tração pura, nos mostra uma sobreposição das três curvas com a tendência que tem sido natural para estes modelos: Gurson rompendo a 0,11 mm e 0,92 para triaxialidade; GTN Xue a aproximadamente 0,125 mm e 1 e o modelo GTN atingindo os valores de 0,15 mm e 1,1 para deslocamento e triaxialidade, respectivamente.

Por último temos a Figura 4.10-e, onde, dos três modelos Gurson apresentou deslocamento e triaxialidade de 0,22 e 0,7, GTN Xue 0,125 e 0,68 e o modelo GTN 0,28 e 0,88 para deslocamento e triaxialidade respectivamente. Novamente temos que em casos onde exista cisalhamento, o modelo GTN Xue se mostra conservador.

4.4 PREVISÃO DO LOCAL POTENCIAL PARA INICIO DA FRATURA

A seguir são apresentados os resultados da previsão do local de falha para os três tipos de corpos de prova e dois tipos de carregamentos estudados, retratando o contorno dos parâmetros de dano calculados.

As Figuras 4.11 e 4.12 referem-se aos corpos de prova cilíndricos liso e cilíndrico entalhado respectivamente e as Figuras 4.13 a 4.15 retratam os corpos de provas tipo borboleta sujeitos a cisalhamento puro, tração pura e finalmente à combinação tração x cisalhamento, respectivamente.

Observando as Figuras 4.11 e 4.12, referentes aos corpos de provas cilíndricos liso e entalhado, notamos a forte semelhança gráfica para os três modelos estudados sob carregamento trativo, apontando a região central como início do dano. A diferença entre os gráficos fica por conta do maior espreadimento das tensões para o corpo de prova cilíndrico liso e, em contrapartida, a mais rápida variação de tensões, ou o que equivale, à maior concentração de tensões no entorno da região central do CP cilíndrico entalhado, o que era de se esperar em função do poder concentrador de tensões inerentes aos entalhes.

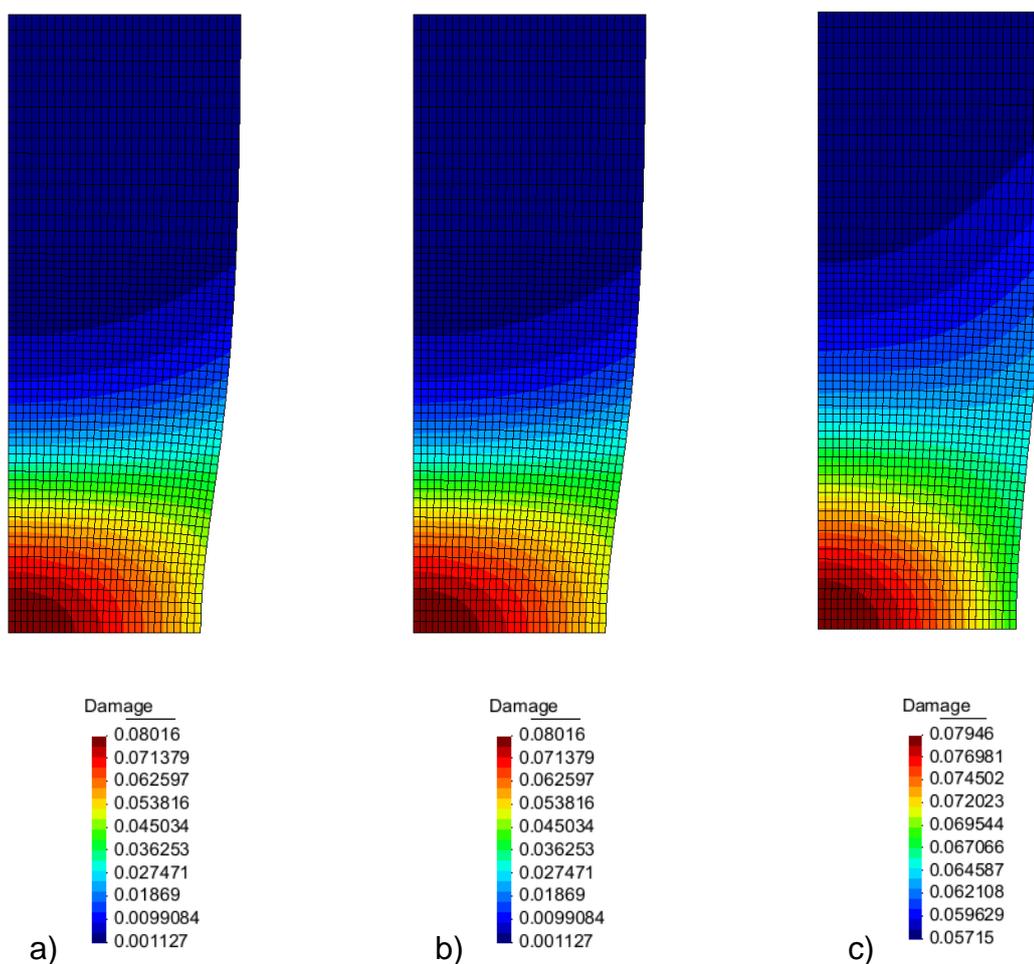


Figura 4.11 Contorno do nível de dano (porosidade) para o CP cilíndrico liso. a) modelo GTN, b) modelo GTN Xue e c) modelo de Gurson.

Os gráficos, demonstrados nas referidas figuras, corroboram tanto as observações experimentais quanto as previsões teóricas e novamente, como podemos observar, dos três modelos o de Gurson (Figura 4.11 c) mostrou-se o mais conservador, enquanto os modelos GTN e GTN Xue mantiveram sobreposição de curvas em todo seu domínio.

Os maiores valores para frações volumétricas de vazios, nos três modelos, ocorrem na região central do CP, reduzindo-se gradativamente em direção às fibras externas do corpo.

Para o corpo de prova cilíndrico entalhado, (Figura 4.12) observamos pequena diferença para a previsão de dano através dos modelos GTN e GTN Xue este último da ordem de 5,6% menor que o GTN, firmando-se como o mais conservador dos três modelos para o caso. Também neste caso o dano ocorre na área central do CP espalhando-se em direção às bordas do corpo.

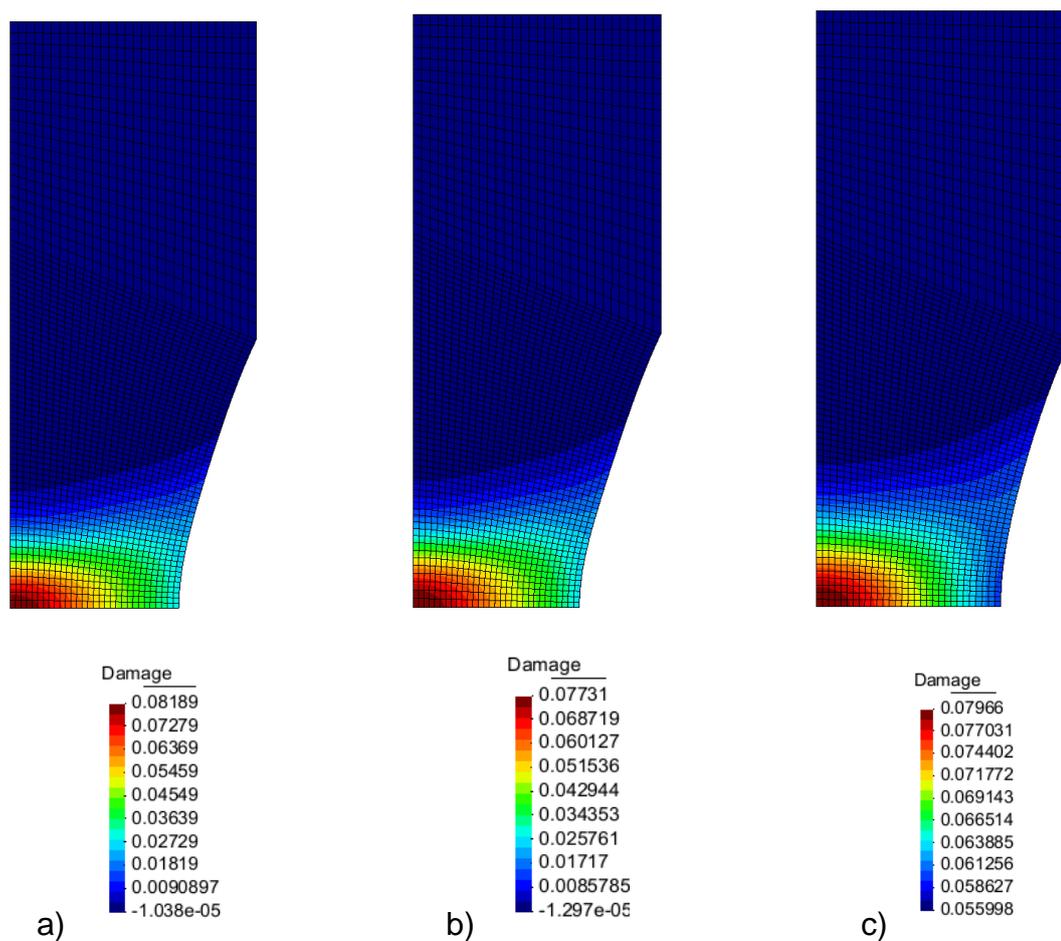


Figura 4.12 Contorno do nível de dano (porosidade) para o CP cilíndrico entalhado. a) modelo GTN, b) modelo GTN Xue e c) modelo de Gurson.

A Figura 4.13 refere-se ao corpo de prova tipo borboleta sujeito a carregamento cisalhante puro. O modelo de Gurson não foi capaz de detectar adequadamente o contorno para a fração volumétrica de vazios, mas todos os modelos detectaram como sendo as regiões mais externas da peça, próximas ao seu núcleo, como locais de maior formação de vazios, daí partindo para o centro do CP.

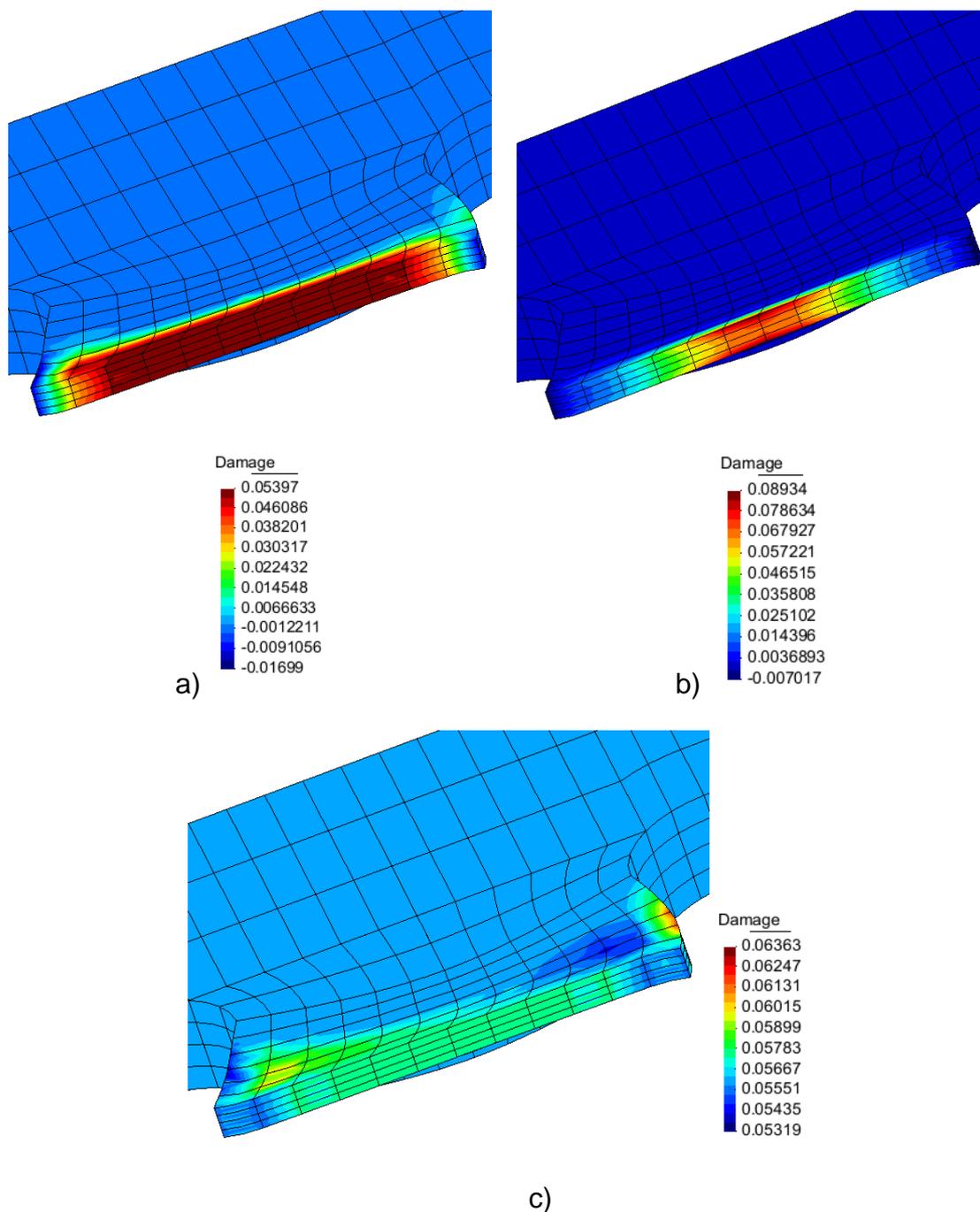


Figura 4.13 Contorno do nível de dano (porosidade) para o CP borboleta sujeito a cisalhamento. a) modelo GTN, b) modelo GTN Xue e c) modelo de Gurson.

A Figura 4.14 nos mostra que o dano ocorreu na região central do CP, com geometria para as previsões das frações volumétricas de vazios para o dano muito próximas para os três modelos.

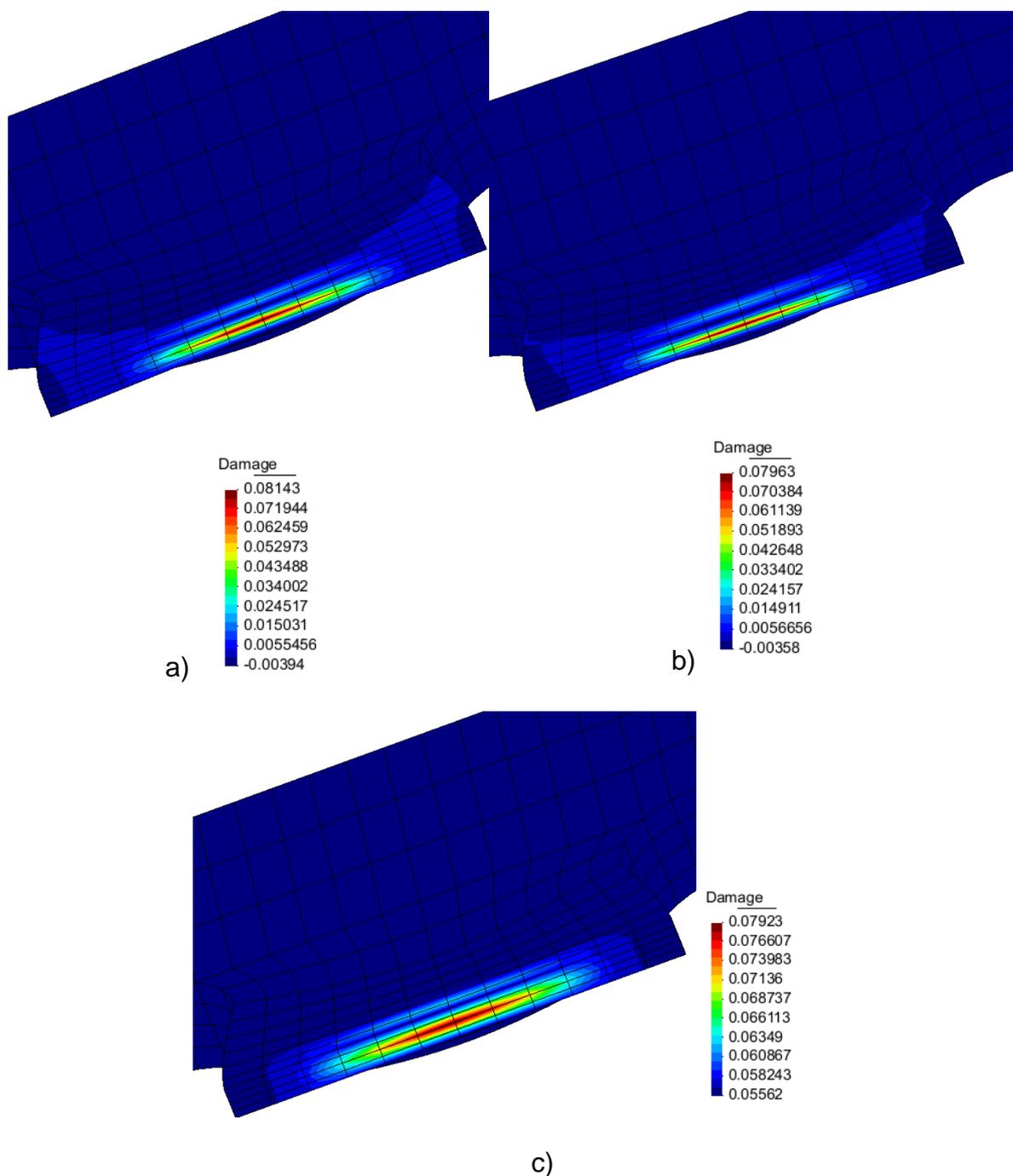


Figura 4.14 Contorno do nível de dano (porosidade) para o CP borboleta sujeito a tração. a) modelo GTN, b) modelo GTN Xue e c) modelo de Gurson.

A Figura 4.15 refere-se ao CP borboleta submetido a carregamento misto tração x cisalhamento. Notamos forte semelhança gráfica entre os resultados para os três modelos, com dano partindo das fibras externas em direção ao núcleo da peça, e também que há uma concentração linear de vazios no núcleo, paralela à largura do CP, acompanhando a direção das forças cisalhantes.

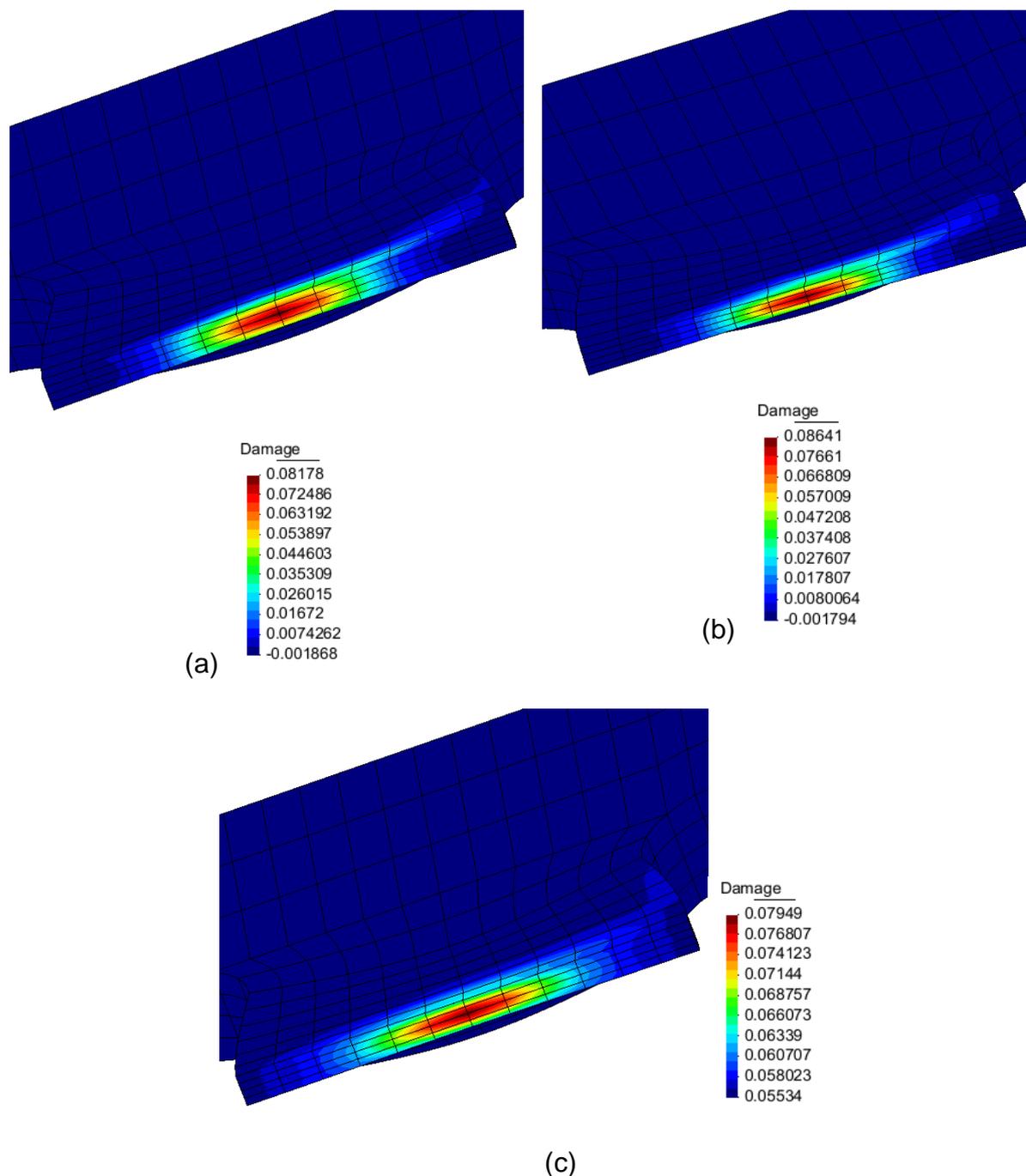


Figura 4.15 Contorno do nível de dano (porosidade) para o CP borboleta sujeito a carregamento combinado tração/cisalhamento. a) modelo GTN, b) modelo GTN Xue e c) modelo de Gurson.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Nesta dissertação, realizamos um estudo comparativo de três modelos de dano a saber: o modelo de Gurson, o modelo GTN (Gurson, Tvergaard, Needleman) derivado do primeiro e o modelo GTN Xue, que é o modelo GTN dotado de mecanismo capaz de detectar a porosidade, todos baseados na micro mecânica do dano.

Analisamos seus desempenhos na previsão do correto momento e potencial local para início da fratura dúctil, implementando-os em uma ferramenta acadêmica de elementos finitos, utilizando algoritmos implícitos de integração.

Para teste da robustez dos modelos implementados, adotamos três tipos de corpos de prova a saber cilíndrico liso, cilíndrico entalhado e tipo borboleta, todos em aço 1045.

Os carregamentos considerados para este estudo foram a tração pura aplicada aos três tipos de corpos de prova; cisalhamento puro e tração combinada ao cisalhamento estes aplicados apenas aos corpos de prova tipo borboleta. Os resultados numéricos foram tomados à literatura.

As simulações numéricas foram realizadas para cada corpo de prova escolhido, sob as diferentes condições de carregamento predefinidas.

Para os CP cilíndricos, sujeitos que foram apenas à tração pura, observamos que o modelo GTN foi otimista quanto à determinação do deslocamento para início da fratura; as curvas para o modelo GTN Xue sobrepuseram-se ao GTN. O modelo de Gurson, geralmente, manteve-se como o mais conservador.

Vimos também que as mudanças de geometria representadas pelos entalhes e/ou a presença de carregamento cisalhante, puro ou combinado à tração, disparam o mecanismo de detecção da porosidade, do qual o modelo GTN Xue é dotado, em alguns casos tornando suas previsões conservadoras frente aos valores experimentais.

Embora seja a calorífica a mais degradada das manifestações da energia, não podemos desconsiderar sua forte influência nas características dos materiais, principalmente dos aços, em última análise fabricados sob processos térmicos e, assim, as

próximas etapas do estudo certamente envolverão a calibração da influência da temperatura aliada às cargas cíclicas nas características dos materiais, relacionando-as ao tempo de aplicação, cobrindo assim, através da energia total fornecida ao sistema, as variações efetivadas em seus parâmetros materiais.

6 ANEXOS

6.1 ANEXO A – EQUAÇÕES RESIDUAIS PARA O MODELO DE GURSON

$$\begin{bmatrix} R_{\sigma_{n+1}} \\ R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p} \\ R_{f_{n+1}} \\ R_{\Delta\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{n+1} - \sigma_{n+1}^t + \Delta\gamma \left[2GS_{n+1} + \frac{1}{3}kf_{n+1}\sigma_y \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \mathbf{I} \right] \\ \bar{\epsilon}_{n+1}^p - \bar{\epsilon}_n^p - \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3} \left[f_{n+1}\sigma_y \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right]^2 \right\}} \\ f_{n+1} - f_n - \Delta\gamma(1 - f_{n+1})f_{n+1}\sigma_y \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \\ J_{2n+1} - \frac{1}{3} \left[1 + f_{n+1}^2 - 2f_{n+1}\cosh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right] \sigma_y^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

O sistema de equações não lineares montado a partir de (A.1), fica:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial f} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p}}{\partial f} & \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_f}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_f}{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_f}{\partial f} & \frac{\partial R_f}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial f} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta\sigma \\ \delta\bar{\epsilon}^p \\ \delta f \\ \delta\Delta\gamma \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_{\sigma} \\ R_{\bar{\epsilon}^p} \\ R_f \\ R_{\Delta\gamma} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Resolvido o sistema descrito em (A.2) por Newton-Raphson, as derivadas das equações residuais em relação às variáveis σ_{n+1} , $\bar{\epsilon}_{n+1}^p$, f e $\Delta\gamma$ podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\sigma}}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial R_{\sigma}}{\partial \bar{\epsilon}^p} \\ \frac{\partial R_{\sigma}}{\partial f} \\ \frac{\partial R_{\sigma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^4 + \Delta\gamma \left[2G\mathbf{I}^d + \frac{1}{6}k(f_{n+1})\cosh\left(\frac{3p}{2\sigma_y}\right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right] \\ \Delta\gamma \left\{ \frac{1}{3}kf_{n+1}H \left[\sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) - \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \cosh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right] \right\} \mathbf{I} \\ \Delta\gamma \left[\frac{1}{3}k\sigma_y \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \mathbf{I} \right] \\ 2GS_{n+1} + \frac{1}{3}kf_{n+1}\sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}^p}}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}^p}}{\partial \bar{\epsilon}^p} \\ \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}^p}}{\partial f} \\ \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}^p}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\Delta\gamma \frac{\left\{ \frac{2}{3} \left[2\mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3}f_{n+1}^2 \cdot \sigma_y \cdot \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \cosh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right] \mathbf{I} \right\}}{2 \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ (\mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1}) + \frac{1}{3} \left[f_{n+1} \sigma_y \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right]^2 \right\}}} \\ 1 - \Delta\gamma \frac{2H(f_{n+1})^2 \sigma_y \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \left[\sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) - \frac{3p_{n+1}}{2} \cosh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right]}{9 \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ (\mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1}) + \frac{1}{3} \left[f_{n+1} \sigma_y \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right]^2 \right\}}} \\ -\Delta\gamma \frac{f_{n+1} \left[\frac{2}{3} 2\sigma_y \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right]^2}{2 \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ (\mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1}) + \frac{1}{3} \left[f_{n+1} \sigma_y \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right]^2 \right\}}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3} \left\{ (\mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1}) + \frac{1}{3} \left[f_{n+1} \sigma_y \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right]^2 \right\}} \end{bmatrix} \quad (A.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \frac{\partial R_f}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial R_f}{\partial \bar{\epsilon}^p} \\ \frac{\partial R_f}{\partial f} \\ \frac{\partial R_f}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \Delta\gamma (1 - f_{n+1}) f_{n+1} \cosh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \mathbf{I} \\ -\Delta\gamma (1 - f_{n+1}) f_{n+1} H \left[\sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) - \frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \cosh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right] \\ 1 - (1 - 2f_{n+1}) \Delta\gamma \sigma_y \cosh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \\ -(1 - f_{n+1}) f_{n+1} \sigma_y \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \end{bmatrix} \quad (A.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\epsilon}^p} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial f} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{S} + \frac{1}{3} \dot{\gamma} f_{n+1} \sigma_y \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \mathbf{I} \\ -\frac{2}{3} f_{n+1} H \left[\sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \frac{3p_{n+1}}{2} - 2\sigma_y \cosh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right] \\ -\frac{2}{3} \sigma_y^2 \left[f_{n+1} - \cosh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right] \\ 0 \end{bmatrix} \quad (A.6)
\end{aligned}$$

6.2 ANEXO B - EQUAÇÕES RESIDUAIS PARA O MODELO GTN

Para o modelo GTN será adotada a mesma metodologia para obtenção do algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas, mas neste caso, o sistema de equações residuais será composto por:

$$\begin{bmatrix} R_{\sigma_{n+1}} \\ R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p} \\ R_{f_{n+1}} \\ R_{\Delta\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{n+1} - \sigma_{n+1}^t + \Delta\gamma \left[2G\mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3}q_1q_2kf_{n+1}\sigma_y \sinh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \mathbf{I} \right] \\ \bar{\epsilon}_{n+1}^p - \bar{\epsilon}_n^p - \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ (\mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1}) + \frac{1}{3} \left[q_1q_2f_{n+1}\sigma_y \sinh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right]^2 \right\}} \\ f_{n+1} - f_n - f^N - \Delta\gamma(1 - f_{n+1})q_1q_2f_{n+1}\sigma_y \sinh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \\ J_{2n+1} - \frac{1}{3} \left[1 + q_3f_{n+1}^2 - 2q_1f_{n+1} \cosh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right] \sigma_y^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Utilizando a mesma metodologia adotada para o modelo de Gurson, partindo do sistema de equações não lineares:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial f} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p}}{\partial f} & \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_f}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_f}{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_f}{\partial f} & \frac{\partial R_f}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial f} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta\sigma \\ \delta\bar{\epsilon}^p \\ \delta f \\ \delta\Delta\gamma \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_{\sigma} \\ R_{\bar{\epsilon}^p} \\ R_f \\ R_{\Delta\gamma} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Resolvendo o sistema (B.2) por Newton-Raphson, obtemos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\sigma}}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial R_{\sigma}}{\partial \bar{\epsilon}^p} \\ \frac{\partial R_{\sigma}}{\partial f} \\ \frac{\partial R_{\sigma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^4 + \Delta\gamma \left[2G\mathbf{I}^d + \frac{1}{6}q_1q_2kf_{n+1} \cosh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right] \\ \Delta\gamma \left\{ \frac{1}{3}q_1q_2kf_{n+1}H \left[\sinh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) - \left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \cosh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right] \right\} \mathbf{I} \\ \Delta\gamma \left[\frac{1}{3}q_1q_2k\sigma_y \cosh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \mathbf{I} \right] \\ 2G\mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3}q_3kf_{n+1} \sinh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\bar{e}^p}}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial R_{\bar{e}^p}}{\partial \bar{e}^p} \\ \frac{\partial R_{\bar{e}^p}}{\partial f} \\ \frac{\partial R_{\bar{e}^p}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\Delta\gamma \frac{\left\{ \frac{2}{3} \left[2\mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3} q_1 q_2 f_{n+1}^2 \cdot \sigma_y \cdot \sinh\left(\frac{3q_2 p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \cosh\left(\frac{3q_2 p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right] \right\}}{2 \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ (\mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1}) + \frac{1}{3} \left[q_1 q_2 f_{n+1} \cdot \sigma_y \cdot \sinh\left(\frac{3q_2 p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right]^2 \right\}}} \right\}} \\ 1 - \Delta\gamma \frac{2Hq_1q_2(f_{n+1})^2\sigma_y\sinh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right)\left[\sinh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) - \frac{3q_2p_{n+1}}{2}\cosh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right)\right]}{9\sqrt{\frac{2}{3}\left\{(\mathbf{S}_{n+1}:\mathbf{S}_{n+1})+\frac{1}{3}\left[q_1q_2f_{n+1}\sigma_y\sinh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right)\right]^2\right\}}} \\ -\Delta\gamma \frac{q_1q_2f_{n+1}\left[\frac{2}{3}2\sigma_y\sinh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right)\right]^2}{2\sqrt{\frac{2}{3}\left\{(\mathbf{S}_{n+1}:\mathbf{S}_{n+1})+\frac{1}{3}\left[q_1q_2f_{n+1}\sigma_y\sinh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right)\right]^2\right\}}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}\left\{(\mathbf{S}_{n+1}:\mathbf{S}_{n+1})+\frac{1}{3}\left[q_3f_{n+1}\sigma_y\sinh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right)\right]^2\right\}} \end{bmatrix} \quad (B.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \frac{\partial R_f}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial R_f}{\partial \bar{e}^p} \\ \frac{\partial R_f}{\partial f} \\ \frac{\partial R_f}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\Delta\gamma q_1q_2(1-f_{n+1})f_{n+1}\cosh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right)\mathbf{I} \\ -\Delta\gamma q_1q_2(1-f_{n+1})f_{n+1}H\left[\sinh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) - \frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\cosh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right)\right] \\ 1 - \Delta\gamma(1 - 2f_{n+1})q_1q_2\sigma_y\cosh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \\ -q_3(1 - f_{n+1})f_{n+1}\sigma_y\sinh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \end{bmatrix} \quad (B.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{e}^p} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial f} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{S} + \frac{1}{3}\dot{\gamma}q_1q_2f_{n+1}\sigma_y\sinh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right)\mathbf{I} \\ -\frac{2}{3}q_1q_2f_{n+1}H\left[\sinh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right)\frac{3q_2p_{n+1}}{2} - 2\sigma_y\cosh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right)\right] \\ -\frac{2}{3}\sigma_y^2\left[q_1q_2f_{n+1} - \cosh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right)\right] \\ 0 \end{bmatrix} \quad (B.6)
\end{aligned}$$

6.3 ANEXO C - EQUAÇÕES RESIDUAIS PARA O MODELO GTN COM CISALHAMENTO

Para o modelo GTN com cisalhamento, as equações residuais são:

$$\begin{bmatrix} R_{\sigma_{n+1}} \\ R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p} \\ R_{f_{n+1}} \\ R_{\Delta\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{n+1} - \sigma_{n+1}^t + \Delta\gamma \left[2G\mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3}q_1q_2kf_{n+1}\sigma_y \sinh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \mathbf{I} \right] \\ \bar{\epsilon}_{n+1}^p - \bar{\epsilon}_n^p - \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3} \left[q_1q_2f_{n+1}\sigma_y \sinh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right]^2 \right\}} \\ f_{n+1} - f_n - \frac{f^N}{s_N\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{\epsilon}^p - \epsilon_N}{s_N}\right)^2\right] \dot{\bar{\epsilon}}^p + (1-f)\dot{\bar{\epsilon}}_v^p + \dot{D}_{cis} \\ J_{2n+1} - \frac{1}{3} \left[1 + q_3f_{n+1}^2 - 2q_1f_{n+1} \cosh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right] \sigma_y^2 \end{bmatrix} \quad (C.1)$$

O sistema de equações não lineares é o mesmo adotado para os modelos anteriores:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial f} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p}}{\partial f} & \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_f}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_f}{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_f}{\partial f} & \frac{\partial R_f}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial f} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta\sigma \\ \delta\bar{\epsilon}^p \\ \delta f \\ \delta\Delta\gamma \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R\sigma \\ R\bar{\epsilon}^p \\ Rf \\ R\Delta\gamma \end{bmatrix} \quad (C.2)$$

Resolvendo (C.2) por Newton-Raphson obtemos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_\sigma}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial R_\sigma}{\partial \bar{\epsilon}^p} \\ \frac{\partial R_\sigma}{\partial f} \\ \frac{\partial R_\sigma}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^4 + \Delta\gamma \left[2G\mathbf{I}^d + \frac{1}{6}q_1q_2kf_{n+1} \cosh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right] \\ \Delta\gamma \left\{ \frac{1}{3}q_1q_2kf_{n+1}H \left[\sinh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) - \left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \cosh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right] \right\} \mathbf{I} \\ \Delta\gamma \left[\frac{1}{3}q_1q_2k\sigma_y \cosh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \mathbf{I} \right] \\ 2G\mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3}q_3kf_{n+1} \sinh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (C.2)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}^p}}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}^p}}{\partial \bar{\epsilon}^p} \\ \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}^p}}{\partial f} \\ \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}^p}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta\gamma \frac{\left\{ \frac{2}{3} \left[2\mathbf{S} + \frac{1}{3}q_1q_2f_{n+1}^2 \cdot \sigma_y \cdot \sinh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \cosh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right] \mathbf{I} \right\}}{2 \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ (\mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1}) + \frac{1}{3} \left[q_1q_2f_{n+1} \cdot \sigma_y \cdot \sinh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right]^2 \right\}}} \\ 1 - \Delta\gamma \frac{2Hq_1q_2(f_{n+1})^2 \sigma_y \sinh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \left[\sinh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) - \frac{3q_2p_{n+1}}{2} \cosh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right]}{9 \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ (\mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1}) + \frac{1}{3} \left[q_1q_2f_{n+1} \sigma_y \sinh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right]^2 \right\}}} \\ -\Delta\gamma \frac{q_1q_2f_{n+1} \left[\frac{2}{3} 2\sigma_y \sinh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right]^2}{2 \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ (\mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1}) + \frac{1}{3} \left[q_1q_2f_{n+1} \sigma_y \sinh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right]^2 \right\}}} \\ - \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ (\mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1}) + \frac{1}{3} \left[q_3f_{n+1} \sigma_y \sinh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right]^2 \right\}} \end{bmatrix} \quad (C.3)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_f}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial R_f}{\partial \bar{\epsilon}^p} \\ \frac{\partial R_f}{\partial f} \\ \frac{\partial R_f}{\partial \Delta \gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \Delta \gamma q_1 q_2 (1 - f_{n+1}) f_{n+1} \cosh\left(\frac{3q_2 p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \mathbf{I} \\ -\Delta \gamma q_1 q_2 (1 - f_{n+1}) f_{n+1} H \left[\sinh\left(\frac{3q_2 p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) - \frac{3q_2 p_{n+1}}{2\sigma_y} \cosh\left(\frac{3q_2 p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right] \\ 1 - \Delta \gamma (1 - 2f_{n+1}) q_1 q_2 \sigma_y \cosh\left(\frac{3q_2 p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \\ -q_3 (1 - f_{n+1}) f_{n+1} \sigma_y \sinh\left(\frac{3q_2 p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\Delta \gamma}}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial R_{\Delta \gamma}}{\partial \bar{\epsilon}^p} \\ \frac{\partial R_{\Delta \gamma}}{\partial f} \\ \frac{\partial R_{\Delta \gamma}}{\partial \Delta \gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} + \frac{1}{3} \dot{\gamma} q_1 q_2 f_{n+1} \sigma_y \sinh\left(\frac{3q_2 p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \mathbf{I} \\ -\frac{2}{3} q_1 q_2 f_{n+1} H \left[\sinh\left(\frac{3q_2 p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \frac{3q_2 p_{n+1}}{2} - 2\sigma_y \cosh\left(\frac{3q_2 p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right] \\ -\frac{2}{3} \sigma_y^2 \left[q_1 q_2 f_{n+1} - \cosh\left(\frac{3q_2 p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right] \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bai, Y. (2008). Effect of Loading History on Necking and Fracture. Ph.D Thesis, Massachusetts Institute of Technology.

Bai, Y., Wierzbicki, T. (2007). A New model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence, *International Journal of Plasticity*, 24:1071-1096.

Bai, Y., Wierzbicki, T. (2008). A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence, *International Journal of Plasticity*, 24:1071-1096.

Bao, Y., Wierzbicki, T. (2004). On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space. *International Journal of Mechanical Sciences*. 46 (81):81-98.

Barsoum, I., Faleskog, J. (2007a). Rupture in combined tension and shear: experiments. *International Journal of Solids and Structures*, 44:1768–1786.

Butcher, C., Chen, Z., Bardelcik, A., Worswick M., (2009). Damage-based finite element modeling of tube hydroforming. *International Journal of Fracture*, 155:55–65.

De Souza Neto, E.A., Peri'c, Owen, D.R.J. (2008). Computational methods for plasticity: theory and applications. John Wiley & sons Ltda.

Gao, X., Wang, T., Kim, J., (2005). On ductile fracture initiation toughness: effects of void volume fraction, void shape and void distribution. *Int. J. Solids Struct.* 42,5097–5117.

Gao, X., Zhang, G., Roe, C., (2009). A study on the effect of the stress state on ductile fracture. *Int. J. Damage Mech.*, 19, 75–94.

Holzappel, G.A. 2000. Nonlinear Solid Mechanics. A Continuum Approach for Engineering. London: John Wiley & Sons.

Kim, J., Gao, X., Srivatsan, T.S., (2003). Modeling of crack growth in ductile solids: a three-dimensional analysis. *Int. J. Solids Struct.* 40, 7357–7374.

Kim, J., Gao, X., Srivatsan, T.S., (2004). Modeling of void growth in ductile solids: effects of stress triaxiality and initial porosity. *Eng. Frac. Mech.* 71, 379–400.

Lemaitre, J. (1985). A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology - Trans. of the ASME*, 107: 83-89.

Malcher, Lucival (2012). Evaluation of Shear Mechanisms and Influence of the Calibration Point on the numerical results of the GTN Model. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

Malcher, L.; Andrade Pires, F.M.; César de Sá, J.M.A., 2011, An Assessment of Isotropic Damage Constitutive Models under High and Low Stress Triaxialities. *International Journal of Plasticity*.

Malcher, L.; Andrade Pires, F.M.; César de Sá, J.M.A., (2013), An extended GTN model for ductile fracture under high and low stress triaxiality. *International Journal of Plasticity*.

MBCEM- Manual Brasileiro para Cálculo de Estrutura Metálica - SIDERBRAS - 1989-Vol I.

McClintock, F.A. (1968). A Criterion for Ductile Fracture by the Growth of Holes. *J. Appl. Mech*, 35, 363-371.

Nahshon, K., Hutchinson, J.W. (2008). Modification of the Gurson Model for Shear Failure *European Journal of Mechanics A/Solids*.

Pardoen, T., Hutchinson, J.W., (2000), An extended model for void growth and coalescence. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48, 2467–2512.

Pineau, A., Pardoen, T. (2003). Damage mechanics. *In: Milne, I., Ritchie, R.O. and B. Karihaloo (eds.) Comprehensive Structural Integrity*, vol. 2. Elsevier-Pergamon, pp. 686–783.

Reis, F.J.P.; Malcher, L.; Andrade Pires, F.M.; César de Sá, J.M.A., (2010), A modified GTN model for the prediction of ductile fracture at low stress triaxialities. *International Journal of Structural Integrity*.

Rice, J. R., Tracey, D., M. (1969). On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17:201–217.

Teng, X. (2008). Numerical prediction of slant fracture with continuum damage mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, 75:2020-2014.

Tvergaard, V. and Needleman, A. (1984). Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Met.* 32:157-169.