

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA – UnB
FACULDADE DE TECNOLOGIA – FT
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA – UnB**

**UMA ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE MODELOS DE
DANO CONTÍNUO DEPENDENTES DO TERCEIRO
INVARIANTE E COM MÚLTIPLOS PONTOS DE
CALIBRAÇÃO**

JOÃO DE ALMEIDA NETO

ORIENTADOR: PROF. LUCIVAL MALCHER

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS

PUBLICAÇÃO: ENM.DM-220A/14

BRASÍLIA/ DF: SETEMBRO / 2014

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA – UnB
FACULDADE DE TECNOLOGIA – FT
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA – UnB**

**UMA ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE MODELOS DE DANO
CONTÍNUO DEPENDENTES DO TERCEIRO INVARIANTE E COM
MÚLTIPLOS PONTOS DE CALIBRAÇÃO**

JOÃO DE ALMEIDA NETO

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO
DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
CIÊNCIA MECÂNICAS.**

APROVADO POR:

**LUCIVAL MALCHER, Doutor, ENM/FT/UnB
(orientador)**

**THIAGO DE CARVALHO DOCA, Doutor, ENM/FT/UnB
(Examinador externo)**

**EDGAR NOBUO MAMIYA, Doutor, ENM/FT/UnB
(Examinador interno)**

**FÁBIO GOMES DE CASTRO, Doutor, ENM/FT/UnB
(Suplente)**

BRASÍLIA/ DF, 12 DE SETEMBRO / 2014

FICHA CATALOGRÁFICA

ALMEIDA NT, JOÃO DE

Uma Análise Comparativa Entre Modelos de Dano Contínuo Dependentes do Terceiro Invariante e com Múltiplos Pontos de Calibração

Xvii, 94 p., 300 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Ciências Mecânicas, 2014).

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Fadiga Multiaxial

2.Critério do invariante do tensor

3.Carregamento

4.Tensão cisalhante

I. ENM/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ALMEIDA NT, JOÃO DE (2014). Uma Análise Comparativa Entre Modelos de Dano Contínuo Dependentes do Terceiro Invariante e com Múltiplos Pontos de Calibração. Dissertação de Mestrado, Publicação ENM.DM-220^a/14 , Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF,94 p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: João de Almeida Neto.

TÍTULO: Uma Análise Comparativa Entre Modelos de Dano Contínuo Dependentes do Terceiro Invariante e com Múltiplos Pontos de Calibração.

GRAU: Mestre em Ciências Mecânicas

ANO: 2014

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

JOÃO DE ALMEIDA NETO

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
BRASÍLIA – DF – BRASIL
CEP: 70910-900

AGRADECIMENTO

Agradeço, primeiramente, ao Prof. Lucival Malcher, quem possibilitou este estudo e que, com seu enorme suporte, me orientou neste trabalho.

Agradeço, em especial, toda minha família. Meu Pai, Hugo, pelo suporte sempre prestado a mim, minha mãe Marisa e minha esposa Naomi, que são as pessoas, que com toda certeza, mais acreditam em meu potencial. Meus irmãos agradeço meus irmãos, Alessandro e Alice, que são dois grandes exemplos que tenho.

Por último, mas não menos importante, um agradecimento aos meus amigos, que ,sem os quais, este mundo não teria a mesma graça.

RESUMO

Neste trabalho foram feitas análises e comparações de quatro modelos de previsão de dano contínuo para materiais dúcteis. Dois deles baseados na Mecânica do dano contínuo, Lemaitre e CDM Aperfeiçoado e dois deles baseados na Micromecânica do defeito, GTN e GTN Estendido. Foram considerados dois materiais, aço 1045 e uma liga de alumínio aeronáutico, de modo a verificar a real melhoria nos novos modelos propostos, que advém dos dois modelos mais difundidos na literatura, Lemaitre e GTN. Uma revisão bibliográfica de todos os modelos foi feita. Foram elaboradas simulações numéricas para que fossem feitas as comparações, utilizando como base resultados experimentais. Foi possível constatar que os modelos modificados apresentaram bom desempenho quando em tensões cisalhantes. O desempenho pôde ser observado tanto na determinação do deslocamento correto para a fratura quanto na previsão do potencial local para início da fratura dúctil. Nota-se que para carregamentos predominantemente axiais, somente o modelo CDM Aperfeiçoado produziu previsões próximas as observações experimentais.

SUMARIO

1	INTRODUÇÃO	01
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO DO ASSUNTO	01
1.2	OBJETIVO DO TRABALHO	03
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	03
2	ASPECTOS TEÓRICOS	05
2.1	DEFINIÇÕES PRELIMINARES	05
2.2	MODELOS BASEADOS NA MICROMECAÂNICA DO DEFEITO	09
2.2.1	GURSON E GURSON- TVERGAARD-NEEDLEMAN (GTN)	09
2.2.2	MODELO GTN ESTENDIDO	16
2.2.2.1	Mecanismo de Nucleação	17
2.2.2.2	Inserindo o Efeito Do Cisalhamento	18
2.2.2.3	Evolução do Dano	21
2.2.2.4	Critério de Coalescência	22
2.3	MODELOS BASEADOS NA MECÂNICA DO DANO	24
2.3.1	MODELO DE DANO DE LEMAITRE	24
2.3.2	MODELO CDM APERFEIÇOADO	31
2.3.2.1	Função Denominador de Dano	32
2.3.2.2	Acoplamento Entre A Função Denominador E Evolução Do Dano	34
2.3.2.3	Determinação da Lei de Fluxo Plástico: Modelo Associativo	37
2.3.2.4	Determinação da Lei de Fluxo Plástico: Modelo Não Associativo	39
2.3.3	CRITÉRIO DE DANO CRÍTICO	41
3	ESTRATÉGIA NUMÉRICA	42
3.1	ALGORITMO DE ATUALIZAÇÃO DAS TENSÕES E VARIÁVEIS INTERNAS	43
3.2	MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON	48
3.3	OPERADOR TANGENTE CONSISTENTE	51
3.4	EQUAÇÕES RESIDUAIS PARA O MODELO CDM APERFEIÇOADO	52

3.5	EQUAÇÕES RESIDUAIS PARA OS MODELOS BASEADOS NA MICROMECAÂNICA DE DEFEITOS	53
4	RESULTADOS NUMÉRICOS	55
4.1	GEOMETRIA E MALHA DE ELEMENTOS FINITOS	55
4.2	PROPRIEDADES DOS MATERIAIS	58
4.3	RESULTADOS NUMÉRICOS PARA O AÇO 1045	62
4.4	RESULTADOS NUMÉRICOS PARA A LIGA DE ALUMÍNIO AERONÁUTICO	72
4.5	PREVISÃO DO POTENCIAL LOCAL PARA INÍCIO DA FRATURA	78
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	88
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	91

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura		Página
1.1	Lateral do Audi A2 produzida com um único painel estampado	01
1.2	Projeto de uma tubulação offshore de transporte de fluidos	02
2.1	Definição do ângulo de Lode, dentro do espaço π . Fonte: Xue (2007)	07
2.2	Representação esquemática do elemento representativo com um vazio esférico (Gurson, 1977)	09
2.3	Representação do processo de nucleação, crescimento e coalescência dos micro-vazios e a relação com o carregamento macroscópico (Pineau e Pardoën, 2003)	10
4.1	Corpos de prova para o aço 1045. a) cilíndrico liso, b) cilíndrico entalhado e c) tipo borboleta	54
4.2	Corpos de prova para a liga e alumínio aeronáutico. Retangular sem entalhe, com entalhe e tipo cisalhante	56
4.3	Malha de elementos finitos para os corpos de prova em aço 1045	57
4.4	Malha de elementos finitos para os corpos de prova em alumínio aeronáutico	58
4.5	Curva de encruamento para o aço 1045	61
4.6	Curva de encruamento para a liga de alumínio aeronáutico	61
4.7	Curva força versus deslocamento e dano versus deslocamento para o corpo de prova cilíndrico liso sujeito a tração pura	63
4.8	Curva força versus deslocamento e dano versus deslocamento para o corpo de prova cilíndrico entalhado sujeito a tração pura	64
4.9	Curva força versus deslocamento e dano versus deslocamento para o corpo de prova tipo borboleta sujeito a cisalhamento simples	66
4.10	Curva força versus deslocamento e dano versus deslocamento para o corpo de prova tipo borboleta sujeito a tração pura	67
4.11	Curva força versus deslocamento e dano versus deslocamento para o corpo de prova tipo borboleta sujeito a combinação cisalhamento-tração	68

4.12	Evolução da deformação plástica equivalente versus deslocamento para os diferentes corpos de prova de aço 1045	70
4.13	Evolução do nível de triaxialidade versus deslocamento para os diferentes corpos de prova de aço 1045	71
4.14	Curva força versus deslocamento e dano versus deslocamento para o corpo de prova retangular liso sujeito a tração pura	74
4.15	Curva força versus deslocamento e dano versus deslocamento para o corpo de prova retangular entalhado sujeito a tração pura	75
4.16	Curva força versus deslocamento e dano versus deslocamento para o corpo de cisalhamento	76
4.17	Evolução da deformação plástica equivalente versus deslocamento para os diferentes corpos de prova de liga de alumínio aeronáutico	77
4.18	Evolução do nível de triaxialidade versus deslocamento para os diferentes corpos de prova de liga de alumínio aeronáutico	78
4.19	Previsão do potencial local para início da fratura dúctil, considerando CP cilíndrico liso – aço 1045	79
4.20	Previsão do potencial local para início da fratura dúctil, considerando CP cilíndrico entalhado – aço 1045	80
4.21	Previsão do potencial local para início da fratura dúctil, considerando CP borboleta sujeito a cisalhamento simples – aço 1045	81
4.22	Previsão do potencial local para início da fratura dúctil, considerando CP borboleta sujeito a tração pura – aço 1045	82
4.23	Previsão do potencial local para início da fratura dúctil, considerando CP borboleta sujeito a carregamento combinado – aço 1045	83
4.24	Previsão do potencial local para início da fratura dúctil, considerando CP retangular liso sujeito a tração pura - liga de alumínio aeronáutico	85
4.25	Previsão do potencial local para início da fratura dúctil, considerando CP retangular entalhado sujeito a tração pura – liga de alumínio aeronáutico	86

4.26	Previsão do potencial local para início da fratura dúctil, considerando CP retangular entalhado sujeito a tração pura – liga de alumínio aeronáutico	87
------	--	----

ÍNDICE DE TABELAS

Figura		Página
2.1	Valores associados pelos parâmetros de acordo com o estado de tensão	08
2.2	Modelo GTN:com endurecimento isotrópico	15
2.3	Modelo GTN estendido com inclusão de efeitos de nucleação, crescimento, cisalhamento e endurecimento isotrópico	23
2.4	Variáveis de estado para a teoria de dano isotrópico	25
2.5	Modelo de dano de Lemaitre com a função denominador de dano	36
2.6	Modelo associativo de aproximação melhorada do modelo MDC	38
2.7	Modelo não associativo de aproximação melhorada do modelo MDC	40
3.1	Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas	47
3.2	Algoritmo para resolução do sistema linear através do método de Newton-Raphson	49
4.1	Propriedades materiais para o aço 1045	59
4.2	Propriedades materiais para a liga de alumínio aeronáutico	60
4.3	Resumo dos deslocamentos previstos pelos modelos e também os valores observados experimentalmente	69
4.4	Valores de deformação plástica equivalente na fratura, bem como os níveis iniciais e finais para a triaxialidade, considerando todos os estados de tensão	73

1 INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização do assunto

Devido a maior necessidade de descrever de maneira correta o comportamento mecânico de materiais dúcteis e, assim, desenvolver projetos otimizados de engenharia, o desenvolvimento de modelos constitutivos para previsão de falha dúctil passou por grande crescimento nas últimas décadas. Principalmente, desde o final dos anos 60, inúmeros modelos com acoplamento de efeitos, como o da pressão hidrostática, por meio do nível de triaxialidade, a do terceiro invariante, através do ângulo de Lode, o de mais de um estado de tensão para determinação dos parâmetros materiais, entre outros, foram propostos.

A importância do estudo de materiais dúcteis vem com o intuito de auxiliar o projetista em várias vertentes da indústria, como: automotiva, podendo otimizar chapas para estampagem, fig. (1.1), petrolífera, na qual as tubulações de transporte de flúidos offshore sofrem abalos sísmicos, fig. (1.2), aeroespacial, militar dentre outros. Pode-se citar, por exemplo, a redução de peso das estruturas, sem perda de desempenho, como uma das grandes vantagens do uso dos modelos constitutivos com boa capacidade preditiva.



Figura 1.1 - Lateral do Audi A2 produzida com um unico painel estampado



Figura 1.2 – Projeto de uma tubulação offshore de transporte de flúidos.

Da teoria de modelos constitutivos, duas grandes abordagens são utilizadas: a mecânica do dano contínuo e a micromecânica de defeitos. Os principais modelos propostos com base nestas abordagens são os modelos de Lemaitre (1985:1990) e Gurson (1977) na sua versão GTN (1984). Estas formulações conseguem prever a localização correta do início da fratura e sua potencial localização com relativa acurácia, mas apenas quando dentro de intervalos específicos de combinações de tensão de triaxialidade e ângulo de Lode. Sendo assim, estes modelos clássicos têm suas limitações, como a correta previsão do local da fratura ou na determinação dos precisos valores das variáveis internas fora de seu intervalo específico (ponto de calibração) e baixo poder de previsões quando tratamos de carregamentos predominantemente cisalhantes.

Outros modelos foram, também, propostos com o intuito de se melhorar a capacidade preditiva de tais modelos clássicos, como os propostos por: Andrade Pires (2003), que apresentou um modelo numérico de dano plástico para matérias dúcteis; Xue (2007), que propôs um melhoramento para baixos níveis de triaxialidade baseando-se no afinamento dos vazios durante o cisalhamento; Nahshon e Hutchinson (2008), que inseriram uma dependência do ângulo de Lode e uma relação quadrática com o terceiro invariante normalizado; Malcher (2011:2014), que propôs um modelo GTN modificado para a predição de fratura dúctil em baixos níveis de triaxialidade;

Malcher (2012:2013) com uma avaliação de modelos constitutivos isotrópicos para fratura dúctil sob alta e baixa tensão triaxialidade.

Desta forma, neste capítulo serão abordados os aspectos teóricos dos dois modelos mais difundidos na literatura, Lemaitre e GTN, bem como duas novas abordagens que propõem melhorias em suas capacidades preditivas.

1.2 Objetivo do trabalho

Neste trabalho, objetiva-se fazer um estudo numérico comparativo entre as duas mais recentes abordagens de dano, cujo terceiro invariante do tensor desviador e múltiplos estados de tensão são incorporados na lei de evolução do dano. Para isto, o modelo GTN Estendido e o modelo CDM Aperfeiçoado serão implementados em uma ferramenta acadêmica de elementos finitos, bem como suas versões clássicas. Testes numéricos serão feitos para dois tipos de materiais, como o aço 1045 Normalizado e a liga de alumínio aeronáutico. Diferentes estados tensão serão aplicados, considerando históricos de cisalhamento simples, tração e combinações cisalhamento/tração. Parâmetros como a evolução da variável de dano, da deformação plástica equivalente serão observados, bem como as curvas de reação e o nível de deslocamento previsto para o início da fratura dúctil.

1.3 Organização do trabalho

O trabalho estará organizado na forma: no primeiro capítulo será mostrada a importância do estudo para o desenvolvimento de projetos mecânicos, bem como seu objetivo principal. No capítulo 2, os aspectos teóricos serão estudados onde os modelos clássicos de Lemaitre e GTN serão discutidos, bem como os aspectos matemáticos dos modelos avançados CDM Aperfeiçoado e GTN Estendido. Já no capítulo 3, a estratégia numérica para obtenção do algoritmo de integração implícita dos modelos será o alvo de estudo, bem como a determinação da matriz tangente consistente. Para o capítulo 4, simulações numéricas serão feitas considerando diversos estados tensão e dois tipos de materiais. No capítulo 5, discussões sobre os resultados encontrados serão feitas, assim como considerações quanto a melhor

performance dos modelos em estudo. No capítulo 6 as conclusões gerais da dissertação e o desenvolvimento para trabalhos futuros serão colocados.

2 ASPECTOS TEÓRICOS

2.1 Definições Preliminares

Antes de se iniciar com os conceitos relativos a definição de um modelo constitutivo, é necessário apresentar algumas definições preliminares. Considerando que, σ , representa o chamado tensor das tensões, pode-se decompor o mesmo em uma chamada contribuição desviadora e outra volumétrica (Lemaitre &Chaboche, 1990), na forma:

$$\sigma = \mathcal{S} + pI, \quad (2.1)$$

onde \mathcal{S} representa o tensor das tensões desviadoras, p é a tensão hidrostática/volumétrica e I representa o tensor identidade de segunda ordem. A pressão hidrostática é, então, definida como sendo:

$$p = \frac{1}{3} tr(\sigma), \quad (2.2)$$

onde $tr(\sigma)$ representa o traço do tensor tensão. Pode-se também definir os chamados invariantes do tensor tensão, como sendo:

$$\begin{aligned} I_1 &= tr(\sigma), \\ I_2 &= \frac{1}{2} \{ [tr(\sigma)]^2 - tr(\sigma^2) \}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$I_3 = det(\sigma),$$

onde I_1 , I_2 e I_3 representam, respectivamente, o primeiro, segundo e terceiro invariantes do tensor tensão (ver Holzapfel, 2000). Além disso, a tensão hidrostática também pode ser definida em função do primeiro invariante do tensor tensão. Para o tensor desviador, \mathcal{S} , os seus invariantes são determinados como:

$$J_2 = \frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}, \quad (2.4)$$

$$J_3 = \det(\mathbf{S}),$$

onde J_2 e J_3 representam o segundo e terceiro invariantes do tensor desviador, respectivamente. Como o tensor desviador, pela sua própria definição, não possui parte volumétrica, seu primeiro invariante é igual a zero (ver Holzapfel, 2000). Alguns parâmetros elasto-plásticos importantes necessitam, também, ser definidos previamente, como a tensão equivalente de von Mises, que é uma função do segundo invariante do tensor desviador, e matematicamente representada por:

$$q = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}}, \quad (2.5)$$

onde q representa a tensão equivalente de von Mises (Souza Neto et al, 2008). O terceiro invariante do tensor desviador, também pode ser escrito na forma:

$$r = \sqrt[3]{\frac{27}{2} J_3} = \sqrt[3]{\frac{27}{2} \det(\mathbf{S})}, \quad (2.6)$$

onde r representa uma outra forma de mostrar o terceiro invariante do tensor desviador (Bai, 2008; Malcher et al, 2012). O terceiro invariante também pode ser escrito na forma normalizada de acordo com a expressão:

$$\xi = \left(\frac{r}{q}\right)^3 = \frac{27}{2} \frac{J_3}{q^3}, \quad (2.7)$$

O ângulo de Lode é um parâmetro elasto-plástico de extrema importância que, define a forma da superfície de escoamento do material. Este parâmetro é definido como sendo o menor ângulo entre a projeção do tensor das tensões e a projeção dos eixos das tensões principais dentro do plano desviador π (ver Figura 2.1).

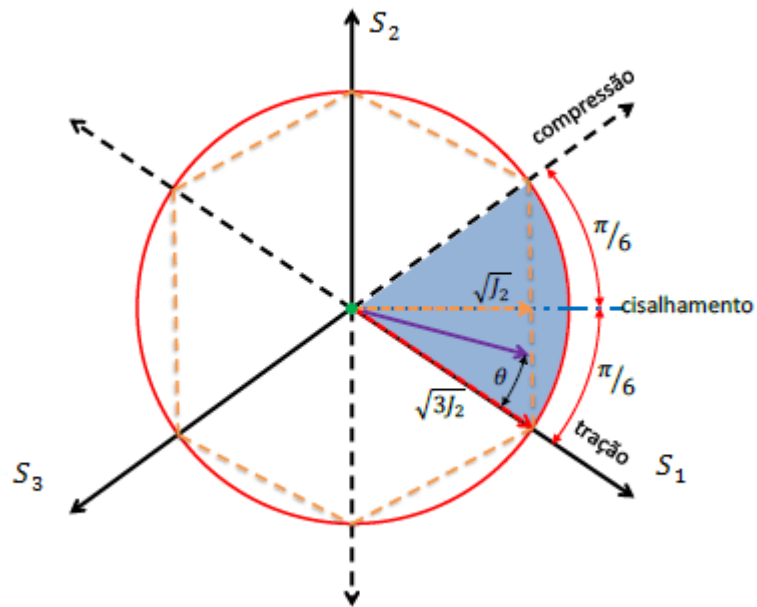


Figura 2.1- Definição do ângulo de Lode, dentro do plano π . (Xue, 2007).

Matematicamente, este ângulo pode ser definido como:

$$\theta = \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \left[2 \frac{S_2 - S_3}{S_1 - S_3} - 1 \right] \right\}, \quad (2.8)$$

onde θ representa o ângulo de Lode e S_1 , S_2 e S_3 são componentes principais do tensor desviador. A relação entre o ângulo de Lode e o terceiro invariante normalizado pode ser escrita como sendo:

$$\xi = \cos(3\theta). \quad (2.9)$$

O ângulo de Lode também pode ser escrito na forma normalizada como sendo:

$$\bar{\theta} = 1 - \frac{6\theta}{\pi} = 1 - \frac{2}{\pi} \arccos(\xi), \quad (2.10)$$

onde $\bar{\theta}$ é o ângulo de Lode normalizado. É importante ressaltar que θ varia entre zero e $(\pi/3)$, ξ entre -1 e 1, e $\bar{\theta}$ entre -1 e 1 (ver Bai, 2008). A Tabela 2.1 resume os valores destes parâmetros para cada estado de tensão.

Tabela 2.1 – Valores associados pelos parâmetros de acordo com o estado de tensão.

	θ	ξ	$\bar{\theta}$
Tração	0°	1	1
Cisalhamento	$\pi/6$	0	0
Compressão	$\pi/3$	-1	-1

Finalizando as definições preliminares, apresenta-se abaixo a triaxialidade. A Triaxialidade é a razão entre a tensão hidrostática e a tensão equivalente. Este parâmetro é responsável pelo tamanho do regime elástico do material (Ver Bai, 2008). A mesma é representada por:

$$\eta = \frac{p}{q}, \quad (2.11)$$

onde p é a tensão volumétrica e q representa a tensão equivalente de von Mises.

2.2 Modelos baseados na micromecânica do defeito:

2.2.1 Gurson e Gurson- Tvergaard-Needleman (GTN)

Um dos primeiros modelos baseados na micromecânica do defeito (MD) para descrever a fratura dúctil é o de Gurson (1977). Este introduziu uma relação entre o parâmetro de dano e a deformação plástica quando o material está sob uma deformação finita. O trabalho de Gurson descreve o crescimento dos vazios baseado no desenvolvimento de Rice e Tracey (1969), que analisaram um vazio dentro de uma matriz metálica. Sendo assim, Gurson propôs o aparecimento de micro vazios associados à grandes deformações plásticas, bem como a degradação interna. Para se obter as equações de evolução do modelo é necessário assumir um vazio na forma esférica contido em uma matriz de material ou volume do elemento representativo, de acordo com a figura 2.2. Através da relação entre o volume do vazio e o volume do elemento representativo a fração volumétrica do vazio no material é determinada matematicamente como sendo:

$$f = \frac{V_{\text{vazio}}}{V_{ER}}, \quad (2.12)$$

onde V_{vazio} é o volume do vazio e V_{ER} é o volume do elemento representativo.

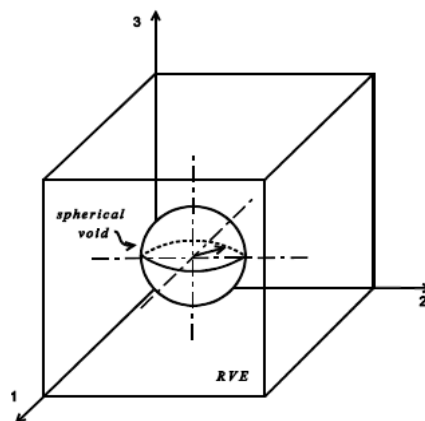


Figura 2.2 – Representação esquemática do elemento representativo com um vazio esférico (Gurson, 1977).

A relação entre a degradação da microestrutura do material, a qual acontece pela existência de micro vazios ou pela nucleação de novos vazios na matriz do material, e a evolução do carregamento macroscópico pode ser mostrada pela figura 2.3, para carregamentos predominantemente de tração. A figura mostra que no domínio elástico o material é representado pelo estágio (a). Neste caso, não há mudança significativa na microestrutura. Contudo, com o acréscimo do carregamento macroscópico a nucleação de micro vazios é desencadeada devido a existência de deformações plásticas localizadas, mostrado no estágio (b) da figura. Já no estágio (c), o crescimento dos vazios é dado pela alta tensão hidrostática e seguido pela coalescência dos vazios, com mostrado no estágio (d).

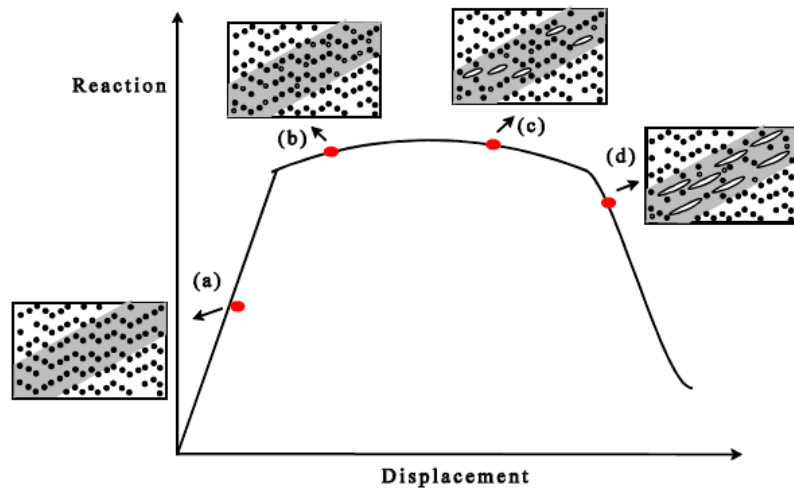


Figura 2.3 – Representação do processo de nucleação, crescimento e coalescência dos micro vazios e a relação com o carregamento macroscópico (Pineau e Pardoen, 2003).

Como há aumento da fração volumétrica de vazios previsto pelo modelo de Gurson, assumindo a incompressibilidade plástica do mesmo, a densidade do elemento representativo de um material com vazios pode ser descrita da seguinte forma:

$$\rho = \rho_m \frac{V_m}{V_{ER}}, \quad (2.13)$$

onde, ρ é a densidade do elemento representativo, ρ_m é a densidade de matriz de material e V_m é o volume do matriz de material. Desta maneira a relação entre o volume do matriz de material, V_m , e a fração volumétrica de vazios, f , pode ser estabelecida por:

$$\frac{V_m}{V_{ER}} = (1 - f). \quad (2.14)$$

Substituindo a eq. (2.14) na eq. (2.13), tem-se que:

$$\rho = \rho_m(1 - f). \quad (2.15)$$

A taxa da densidade do elemento representativo, $\dot{\rho}$, é determinada pela diferenciação no tempo da eq. (2.15), onde representa a taxa da densidade da matriz do material, $\dot{\rho}_m$, pela taxa da fração volumétrica de vazios, \dot{f} .

$$\dot{\rho} = \dot{\rho}_m(1 - f) - \rho_m \dot{f}. \quad (2.16)$$

A matriz de material é assumida como plasticamente incompressível, além disso, a tensão volumétrica elástica é presumidamente descartada. Portanto, o princípio de conservação de massa manda que $\dot{\rho}_m = 0$. Sendo assim, substituindo a eq. (2.15) na eq. (2.16) e depois de algumas manipulações algébricas, obtém-se a seguinte expressão:

$$\dot{f} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho_m} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho}(1-f). \quad (2.17)$$

O princípio de conservação de massa estabelece que a taxa de deformação volumétrica é determinada por:

$$-\frac{\dot{\rho}}{\rho} = \dot{\varepsilon}_v = \dot{\varepsilon}_v^e + \dot{\varepsilon}_v^p, \quad (2.18)$$

onde, as taxas de deformações volumétricas elástica e plástica são representadas respectivamente por, $\dot{\varepsilon}_v^e$ e $\dot{\varepsilon}_v^p$. No modelo de Gurson a matriz de material é assumida como sendo rígido-plástica, portanto, desconsiderando a parte elástica a eq. (2.17) pode ser reescrita como:

$$\dot{f} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho_m} = \dot{\varepsilon}_v^p(1-f). \quad (2.19)$$

A equação mostrada acima é a contribuição mais significativa para a degradação de um material poroso e expressa a lei de evolução para fração volumétrica de vazios. A função de escoamento original derivada por Gurson (1977) para uma matriz de vazios agregados é expressa por:

$$\phi(\sigma, k, f) = \left(\frac{q}{\sigma_y}\right)^2 + 2f \cosh\left(\frac{tr\sigma}{2\sigma_y}\right) - 1 - f^2, \quad (2.20)$$

onde, σ_y representa a tensão de escoamento do material, que neste caso pode evoluir com a deformação plástica. A função de escoamento de Gurson também pode ser escrita da seguinte forma:

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, k, f) = J_2(\boldsymbol{S}) - \frac{1}{3} \left\{ 1 + f^2 - 2f \cosh\left(\frac{3p}{2\sigma_y}\right) \right\} \sigma_y^2, \quad (2.21)$$

onde, J_2 representa o segundo invariante do tensor das tensões desviadoras e p é a tensão hidrostática.

De acordo com a hipótese de normalização generalizada (Plasticidade Associativa), a lei de fluxo plástico para o modelo de Gurson pode ser escrita como:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^p + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^p \mathbf{I} = \dot{\gamma} \boldsymbol{S} + \frac{1}{3} \dot{\gamma} f \sigma_y \sinh\left(\frac{3p}{2\sigma_y}\right) \mathbf{I}, \quad (2.22)$$

onde $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ e $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^p$ são as contribuições desviadora e volumétrica do tensor das deformações plásticas.

Substituindo a expressão que representa a contribuição volumétrica de deformação plástica na eq. (2.19), tem-se:

$$\dot{f} = (f - f^2) \dot{\gamma} \sigma_y \sinh\left(\frac{3p}{2\sigma_y}\right). \quad (2.23)$$

Uma das grandes deficiências do modelo original de Gurson é o fato de que, seja qual for a tensão que o material possa estar sendo submetido, não é possível prever qualquer evolução da fratura, se a porosidade inicial for zero. Logo, para aprimorar o modelo, há a introdução do histórico das tensões. Uma das mais conhecidas modificações foi proposta por Chu & Needleman, em 1980, e mais tarde utilizado por Tvergaard em 1984 no modelo conhecido como Gurson –Tvergaard- Needleman (GTN). A evolução do dano no modelo GTN é representada por três mecanismos simultâneos ou sucessivos: nucleação, crescimento e coalescência de vazios. A porosidade efetiva, f^* , é, então, introduzida e calculada através da equação bi-linear:

$$f^* = \begin{cases} f & , f < f_c \\ f_c + \left(\frac{1}{q_1} - f_c\right) \frac{(f - f_c)}{(f_f - f_c)} & , f \geq f_c \end{cases} \quad (2.24)$$

onde f_c representa o volume crítico de vazio e f_f o volume de vazio na fratura.

A porosidade efetiva, f^* , passa agora a ser definida pela contribuição dos mecanismos de nucleação e crescimento quando a porosidade é inferior ao valor crítico f_c . Além disso, quando $f \geq f_c$, o mecanismo de nucleação é ativado e passa a contribuir com a porosidade efetiva. No modelo GTN a taxa de crescimento da porosidade passa a ser o somatório da taxa de nucleação com a taxa de crescimento de vazios.

$$\dot{f} = \dot{f}^n + \dot{f}^g; \quad (2.25)$$

onde, \dot{f}^n representa a taxa de nucleação e \dot{f}^g a taxa de crescimento.

O mecanismo de nucleação pode ser descrito por deformação plástica ou pela tensão hidrostática. A definição do mecanismo de nucleação com base na deformação plástica equivalente é dada por:

$$\dot{f}^n = \frac{f_N}{S_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\varepsilon}^p - \varepsilon_N}{S_N} \right)^2 \right] \dot{\varepsilon}^p, \quad (2.26)$$

onde f_N representa o volume das frações de todas as partículas com potencial para nuclear, ε_N representa a deformação média para nucleação e S_N o desvio padrão da deformação média para nucleação. A variável $\bar{\varepsilon}^p$ representa a deformação plástica equivalente e $\dot{\varepsilon}^p$ é a taxa da deformação plástica equivalente.

A evolução do mecanismo de crescimento no modelo GTN é dado pela mesma expressão do modelo de Gurson original, mostrada na eq. (2.23).

A função de escoamento do modelo GTN, que assume o endurecimento e o dano isotrópicos, é expressa como:

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, k, f) = J_2(\boldsymbol{S}) - \frac{1}{3} \left\{ 1 + q_3 f^{*2} - 2q_1 f^* \cosh\left(\frac{q_2 3p}{2\sigma_y}\right) \right\} \sigma_y^2, \quad (2.27)$$

onde, q_1 , q_2 e q_3 são parâmetros introduzidos para melhor se ajustar os resultados numéricos as observações experimentais.

Tabela 2.2 Modelo GTN com endurecimento isotrópico:

(i)	Decomposição aditiva da deformação:
	$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$
(ii)	Lei de Hooke:
	$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$
(iii)	Função de escoamento:
	$\phi(\boldsymbol{\sigma}, r, f) = J_2(\boldsymbol{S}) - \frac{1}{3} \left\{ 1 + q_3 f^2 - 2q_1 f \cosh\left(\frac{q_2 3p}{2\sigma_y}\right) \right\} \sigma_y^2$
(iv)	Lei de escoamento plástico e equações de evolução para R e f :
	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \left[\boldsymbol{S} + \frac{1}{3} q_1 q_2 f \sigma_y \sinh\left(\frac{q_2 3p}{2\sigma_y}\right) \boldsymbol{I} \right]$

$$\dot{R} = \dot{\gamma} \frac{\{q_1 q_2 f p \sinh\left(\frac{q_2 3p}{2\sigma_y}\right) + \frac{2}{3} \left[1 + q_3 f^2 - 2q_1 f \cosh\left(\frac{q_2 3p}{2\sigma_y}\right)\right] \sigma_y\}}{(1-f)}$$

$$\dot{f} = \dot{f}^N + \dot{f}^G = \frac{f_N}{S_N \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\varepsilon}^p - \varepsilon_N}{S_N}\right)^2\right] \dot{\varepsilon}^p + (1-f) \dot{\varepsilon}_v^p$$

e,

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \mathbf{S} : \mathbf{S} + \frac{1}{3} \left[q_1 q_2 f \sigma_y \sinh\left(\frac{q_2 3p}{2\sigma_y}\right) \right]^2 \right\}}$$

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \dot{\gamma} q_1 q_2 f \sigma_y \sinh\left(\frac{q_2 3p}{2\sigma_y}\right)$$

(v) Critério de carregamento

$$\dot{\gamma} \geq 0; \quad \phi \leq 0; \quad \dot{\gamma} \phi = 0$$

2.2.2 Modelo GTN Estendido

Devido à limitação de modelo GTN na previsão de início da fratura sob condições de baixa triaxialidade, vários pesquisadores têm proposto a introdução de mecanismos de cisalhamento na formulação (Malcher, L.; Andrade Pires, F.M. ; Cesar de Sa, J.M.A., 2013). Embora os resultados obtidos com o modelo de GTN mostraram melhorias na previsão de dano, tem sido também observado que ambos os modelos têm limitações inerentes. A previsão do local de fratura, o deslocamento até a fratura e a deformação, para estados de tensão combinados não são adequados. O modelo GTN Estendido propõe duas principais contribuições para melhoria: a evolução da porosidade, f^n , e a evolução do mecanismo de cisalhamento, \dot{D}^n .

2.2.2.1 Mecanismo de nucleação

A nucleação dos vazios associada ao modelo GTN, descrita pela equação a seguir,

$$\dot{f} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho_m} = \dot{\varepsilon}_v^p(1-f), \text{ foi proposta por Chu \& Needleman (1980).}$$

A forma específica para a nucleação dos vazios primários é controlada pela taxa de deformação e foi introduzida em uma base estritamente fenomenológica. Contudo, como descrito anteriormente, ligas usadas na engenharia submetidas a cisalhamento criam faixas de localização, devido à nucleação de vazios secundários, apesar do mecanismo de laminação dos vazios. Embora a nucleação secundária seja de difícil detecção em alguns materiais, será introduzido um novo mecanismo de nucleação independente que desencadeia a laminação dos vazios e estime o potencial local para início da fratura nestas condições. Este mecanismo de nucleação é o resultado de partículas de segunda fase de descolamento e rachaduras.

Seguindo a mesma aproximação de Chu & Needleman (1980), será considerada uma distribuição normal de todas as partículas de segunda fase com potencial de nucleação como:

$$\dot{D}^n = \frac{D_N}{S'_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\varepsilon}^p - \varepsilon'_N}{S'_N} \right)^2 \right] \dot{\varepsilon}^p, \quad (2.28)$$

onde D_N representa a fração de todas as partículas de segunda fase com potencial para nucleação, ε'_N e S'_N representam a tensão média para nucleação de segunda fase e seu desvio padrão, respectivamente.

Este conjunto de parâmetros mencionados acima necessita ser calibrado em uma condição de cisalhamento puro.

O modelo GTN Estendido mostrado neste capítulo incorpora dois mecanismos independentes de nucleação. O primeiro, que é o mecanismo convencional do modelo GTN que desencadeia a evolução da porosidade. O segundo, descrito pela eq. (2.30),

desencadeia a evolução do mecanismo de cisalhamento. A ativação deste mecanismo de nucleação sob cisalhamento puro é relativamente simples de ser estabelecida, no entanto, caso haja uma tensão arbitrária, que pode conter combinações de tração e cisalhamento ou compressão e cisalhamento, é possível não ser tão simples de ser estabelecida. Neste caso, é necessário juntar ambos os mecanismos e estabelecer suas magnitudes relativas. Neste momento introduziremos a função do ângulo de Lode, g_0 , para combinar os dois mecanismos. Desta forma, a equação do modelo GTN, eq. (2.27) e a eq. (2.28) são definidas como:

$$\dot{f}^n = (1 - g_0) \frac{f_N}{S_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\varepsilon}^p - \varepsilon_N}{S_N} \right)^2 \right] \dot{\varepsilon}^p, \quad (2.29)$$

$$\dot{D}^n = g_0 \frac{D_N}{S'_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\varepsilon}^p - \varepsilon'_N}{S'_N} \right)^2 \right] \dot{\varepsilon}^p. \quad (2.30)$$

Sob carregamento de tração pura, a função g_0 é igual a zero e somente as nucleações primárias ocorrem. Para carregamentos com cisalhamento puro a função g_0 é igual a um (1) e apenas a nucleação secundária ocorre. Para carregamentos combinados de tração e cisalhamento os dois mecanismos serão ativados e a função do ângulo de Lode define a importância de cada componente. Por fim, para carregamentos combinados de compressão e cisalhamento não há nucleação primária e a nucleação secundária toma o lugar com a função g_0 definindo a magnitude relativa.

2.2.2.2 Inserindo o efeito do cisalhamento

Como já mencionado anteriormente, várias versões modificadas do modelo de Gurson, que inclui crescimento da trinca sobre baixa tensão de triaxialidade para um estado de tensão predominantemente de cisalhamento, foram propostos na literatura. Mesmo assim, a introdução do efeito do cisalhamento no modelo de Gurson foi realizado principalmente pela incorporação dos termos adicionais na nucleação dos vazios, \dot{f} , como:

$$\dot{f} = \dot{f}^n + \dot{f}^g + \dot{f}^s, \quad (2.31)$$

onde \dot{f}^s não é um valor físico de porosidade, mas, assegura o efeito prejudicial da distorção dos poros e as ligações entre os mesmos, associada à baixa triaxialidade no material e f , que é a porosidade. Na versão modificada f não representa a mudança plástica de volume do material como no modelo de Gurson. Neste caso f é uma variável escalar que mensura a média do acúmulo total de diferentes tipos de dano no material.

Em contraste com esta aproximação, neste caso, usaremos duas variáveis de dano separadas. A primeira é a evolução da porosidade aplicada no modelo GTN, reescrita abaixo com as modificações apropriadas, Malcher (2013):

$$\dot{f} = \dot{f}^n + \dot{f}^g = (1 - g_0) \frac{f_N}{S_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\varepsilon}^p - \varepsilon_N}{S_N} \right)^2 \right] \dot{\varepsilon}^p + (1 - f) \dot{\varepsilon}_v^p. \quad (2.32)$$

A segunda variável é a evolução do dano devido ao efeito do cisalhamento, a qual é definida por uma variável escalar independente mostrada a seguir:

$$\dot{D} = \dot{D}^n + q_6 \dot{D}^{shear} = g_0 \frac{D_N}{S'_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\varepsilon}^p - \varepsilon'_N}{S'_N} \right)^2 \right] \dot{\varepsilon}^p + q_6 \dot{D}^{shear}, \quad (2.33)$$

onde \dot{D} representa a evolução da variável de dano por cisalhamento, \dot{D}^n representa a nucleação, \dot{D}^{shear} , a evolução dos efeitos do cisalhamento e q_6 é a constante do material, que define a magnitude da taxa de crescimento do dano em cisalhamento.

O modelo GTN Estendido tem duas variáveis de dano escalares: um componente volumétrico de dano caracterizado pela porosidade, f , e uma componente de tensão do dano, descrita por dano de cisalhamento, D . Cada uma dessas variáveis serão unidas com uma componente específica do tensor tensão: a tensão hidrostática, p , será relacionada a porosidade, f , e o componente desviador do tensor tensão, S , será associado com a variável de dano pela torção, D . A função de escoamento para este modelo é definido por:

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, k, f, D) = \frac{J_2(\mathbf{S})}{(1-D)} - \frac{1}{3} \left\{ 1 + q_3 f^2 - 2q_1 f^* \cosh\left(\frac{q_2 3p}{2\sigma_y}\right) \right\} \sigma_y^2. \quad (2.34)$$

De acordo com o princípio de dissipação máxima, a função de escoamento é tida como o potencial de dissipação do modelo. Desta forma, a lei da evolução para o escoamento plástico assumindo a hipótese de normalidade generalizada é dada por:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\varepsilon}_d^p + \dot{\varepsilon}_v^p = \dot{\gamma} \frac{\mathbf{S}}{(1-D)} + \dot{\gamma} \frac{1}{3} q_1 q_2 f \sigma_y \sinh\left(\frac{q_2 3p}{2\sigma_y}\right) \mathbf{I}, \quad (2.35)$$

onde $\dot{\gamma}$ representa o multiplicador plástico, \mathbf{S} representa o componente do tensor tensão e \mathbf{I} o tensor identidade de segunda ordem.

Da equação anterior é possível observar que cada componente do tensor taxa de deformação plástica é afetado por uma diferente variável de dano. Além disso, apenas a taxa de deformação plástica, $\dot{\varepsilon}_v^p$, foi alterada quando comparado ao modelo de Gurson devido a introdução de uma variável de dano de cisalhamento diferente.

A lei para a variável de endurecimento, R , é determinada através da derivação da função de escoamento em relação a força de endurecimento, k :

$$\begin{aligned} \dot{R} = -\dot{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial k} = & \frac{\dot{\gamma}}{(1-f-D)} \left\{ q_1 q_2 f p \sinh\left(\frac{q_2 3p}{2\sigma_y}\right) \right. \\ & \left. + \frac{2}{3} \sigma_y \left[1 + q_3 f^2 - 2q_1 f \cosh\left(\frac{3q_2 p}{2\sigma_y}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

onde o termo $(1-f-D)$ é inserido para contabilizar o efeito de amolecimento na lei de evolução do material. A taxa equivalente de deformação plástica para este modelo pode ser determinado por:

$$\dot{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \frac{\mathbf{S} : \mathbf{S}}{(1-D)^2} + \frac{1}{3} \left[\sigma_y q_1 q_2 f \sinh\left(\frac{3q_2 p}{2\sigma_y}\right) \right]^2 \right\}}. \quad (2.37)$$

É importante mencionar que, quando o estado de tensão não apresenta cisalhamento, o modelo GTN Estendido descrito pela equação anterior não muda em relação ao modelo GTN original. A extensão somente modifica as previsões para estados que incluem cisalhamento, ou seja, problemas com a função ângulo de Lode, g_0 , diferente de zero.

2.2.2.3 Evolução do Dano

A lei de evolução para a nucleação dos vazios, \dot{f} , tem dois componentes: Nucleação e crescimento. A contribuição mais significativa para a evolução de vazios esféricos é o mecanismo de crescimento, \dot{f}^g , que depende da evolução da deformação plástica volumétrica, $\dot{\varepsilon}_v^p$, estabelecida na eq. (2.36). Assim, com a substituição da taxa de deformação plástica volumétrica, $\dot{\varepsilon}_v^p$, na eq. (2.33) obtém-se a lei de evolução para a porosidade, \dot{f} , do modelo:

$$\begin{aligned} \dot{f} = \dot{f}^n + \dot{f}^g = (1 - g_0) \frac{f_N}{S_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\varepsilon}^p - \varepsilon_N}{S_N} \right)^2 \right] \dot{\varepsilon}^p \\ + \dot{\gamma} \frac{1}{3} f(1 - f) q_1 q_2 \sigma_y \sinh \left(\frac{3q_2 p}{2\sigma_y} \right) \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Será utilizada a lei de evolução para o dano de cisalhamento, baseadas em considerações geométricas. A evolução do dano reduz inevitavelmente todas as propriedades elásticas do material. Todavia este efeito é pequeno quando comparado a influência do dano no comportamento plástico. Sendo assim, a evolução do dano durante efeito do cisalhamento e a influência do dano na elasticidade serão desconsideradas, como é feito, normalmente, neste tipo de modelo. A lei de evolução do dano por cisalhamento será redefinida como uma função da tensão plástica acumulada e a taxa de tensão plástica acumulada, ao invés da tensão equivalente e da taxa de tensão equivalente.

$$\dot{D}_{shear} = g_0(q_4 D^{q_5} \bar{\varepsilon}^p \dot{\varepsilon}^p). \quad (2.39)$$

Somado a isto, devido a introdução de duas variáveis de dano separadas, a evolução do dano de cisalhamento descrita pelas equações acima, para este modelo, não dependem da porosidade instantânea, f , mas sim do valor da variável do dano do cisalhamento neste instante, D . Com a substituição da taxa de tensão plástica, $\dot{\varepsilon}_v^p$, estabelecida na eq. (2.38), na lei do dano de torção baseada em Xue (2.39), obtém-se:

$$\dot{D}_{shear} = \dot{\gamma} g'_0 q_4 D^{q_5} \bar{\varepsilon}^p \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \frac{\mathbf{S}:\mathbf{S}}{(1-D)^2} + \frac{1}{3} \left[\sigma_y q_1 q_2 f \sinh\left(\frac{3q_2 p}{2\sigma_y}\right) \right]^2 \right\}}, \quad (2.40)$$

onde g'_0 é uma função modificada do ângulo de Lode.

Se uma das funções dependentes do ângulo de Lode, Xue (2007); Nahshon & Hutchinson (2008), g_0 , é selecionada, a função modificada é expressa por:

$$g'_0(\xi, \eta) = [1 - \xi^2]^{1/|\eta|+k}; \quad (2.41)$$

onde, η é a tensão de triaxialidade e k é a constante numérica (referente ao material).

2.2.2.4 Critério de coalescência

O critério de coalescência introduz uma variável efetiva de dano, D^{ef} , que é normalizada, para combinar os dois parâmetros de dano críticos (f_c e D_c). A determinação do início da fratura é estabelecido quando a variável efetiva de dano for um.

$$D^{ef} = \begin{cases} \frac{D}{D_c} & , \quad g'_0 = 1 \\ \left(1 + \frac{f_c}{D_c}\right) \left(\frac{f}{f_c} + \frac{D}{D_c}\right) & , \quad 0 < g'_0 < 1 \\ \frac{f}{f_c} & , \quad g'_0 = 0 \end{cases} \quad (2.42)$$

Tabela 2.3 Modelo GTN Estendido com inclusão de efeitos de nucleação, crescimento, cisalhamento e endurecimento isotrópico:

(i) Decomposição aditiva da deformação:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p.$$

(ii) Lei da Hooke:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e.$$

(iii) Função de escoamento:

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, r, f, D) = \frac{J_2}{1-D} - \frac{1}{3} \left\{ 1 + q_3 f^2 - 2q_1 f \cosh\left(\frac{3q_2 p}{2\sigma_y}\right) \right\} \sigma_y^2.$$

(iv) Lei de escoamento plástico e equações de evolução para R , f , D :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \mathbf{N},$$

$$\dot{R} = -\dot{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial k},$$

$$\dot{f} = (1 - g_0') \frac{f_N}{S_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\varepsilon}^p - \varepsilon_N}{S_N} \right)^2 \right] \dot{\varepsilon}^p + (1 - f) \dot{\varepsilon}_v^p,$$

$$\dot{D} = g_0' \frac{D_N}{S_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\varepsilon}^p - \varepsilon_N}{S_N} \right)^2 \right] \dot{\varepsilon}^p + |g_0'| \frac{1}{|\eta| + k} q_6 \dot{D}^{shear},$$

onde,

$$\dot{D}^{shear} = q_4 D^{q_5} \bar{\varepsilon}^p \dot{\varepsilon}^p,$$

$$g_0' = 1 - \xi^2,$$

e,

$$\dot{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} (\dot{\varepsilon}^p : \dot{\varepsilon}^p),$$

$$\dot{\varepsilon}_v^p = tr(\dot{\varepsilon}^p).$$

(v) Critério de carregamento

$$\dot{\gamma} \geq 0; \quad \phi \leq 0; \quad \dot{\gamma} \phi = 0.$$

2.3 Modelos baseados na mecânica do dano

2.3.1 Modelo de dano de Lemaitre

O modelo de Lemaitre é baseado na hipótese de existência de um potencial termodinâmico, onde as leis de estado ou forças termodinâmicas envolvidas no processo são determinadas. Assim, a chamada energia livre de Helmholtz é adotada como potencial termodinâmico e pode ser definida como uma função do conjunto de variáveis $(\varepsilon^e, r, \beta, D)$:

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, r, \boldsymbol{\beta}, D), \quad (2.43)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ é o tensor das deformações elásticas, r e D são variáveis internas escalares referentes respectivamente ao endurecimento isotrópico e dano isotrópico e $\boldsymbol{\beta}$ é o tensor de segunda ordem (variável interna relacionada ao endurecimento cinemático).

Assumindo o processo como sendo isotrópico a escolha das variáveis depende do fenômeno físico em estudo, os quais podem ser os seguintes: elasticidade, endurecimento isotrópico, endurecimento cinemático e dano, como pode ser visto na tabela à seguir:

Tabela 2.4 Variáveis de estado para a teoria de dano isotrópico

Mecanismo	tipo	variáveis de estado		Variáveis associadas
		Observável	interna	
Elasticidade	Tensorial	$\boldsymbol{\varepsilon}^e$		$\boldsymbol{\sigma}$
Plasticidade	Tensorial		$\boldsymbol{\varepsilon}^p$	$-\boldsymbol{\sigma}$
Endurecimento isotrópico	Escalar		r	R
Endurecimento cinemático	Tensor		$\boldsymbol{\beta}$	X
Dano	Escalar		D	Y

Quando o dano afeta apenas o comportamento elástico, a energia livre pode ser expressa por:

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, r, \boldsymbol{\beta}, D) = \psi^{ed}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D) + \psi^p(r, \boldsymbol{\beta}), \quad (2.44)$$

onde ψ^{ed} e ψ^p são, respectivamente, a contribuição devido a elasticidade-dano e a plasticidade na energia liberada.

O potencial de estado associado à elasticidade-dano é definida como mostrado abaixo:

$$\bar{\rho} \psi^{ed}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : (1 - D) \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (2.45)$$

onde \mathbb{D} é o tensor de elasticidade padrão.

Por Chaboche (2007) pode-se eliminar os processos reversíveis da desigualdade de Clausius-Duhem, logo, as relações de estado ficam como mostrado a seguir (Lei de Hooke):

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi^{ed}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = (1 - D) \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e. \quad (2.46)$$

De forma equivalente, a lei elástica danificada pode ser escrita como:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (2.47)$$

onde $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ é o tensor tensão efetivo.

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{1 - D} \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.48)$$

Dando continuidade, a força termodinâmica associada a variável de dano, Y , também deriva do potencial de estado:

$$Y = \bar{\rho} \frac{\partial \psi^{ed}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D)}{\partial D} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (2.49)$$

ou,

$$Y = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{D}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.50)$$

Manipulando matematicamente é possível escrever Y como função da pressão hidrostática, p , e da tensão equivalente de von Mises, q :

$$-Y = \left[\frac{q^2}{6G(1 - D)^2} + \frac{p^2}{2K(1 - D)^2} \right], \quad (2.51)$$

onde, o módulo de cisalhamento é $G = E/2(1 + \nu)$ e o módulo volumétrico é $K = E/3(1 - 2\nu)$.

Acima, ν , representa o coeficiente de Poisson, E , é o módulo de Young.

Também se pode demonstrar que $-Y$ é igual à metade da energia de deformação elástica liberada devido à evolução do dano para uma tensão fixa (Chaboche, 2007). Tem-se, a partir da lei elástica, que:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbb{D}}:d\boldsymbol{\varepsilon}^e + \frac{\partial \tilde{\mathbb{D}}}{\partial D}:\boldsymbol{\varepsilon}^e dD = 0. \quad (2.52)$$

Como se sabe que $\tilde{\mathbb{D}} = (1 - D)\mathbb{D}$, pode-se rearranjar matematicamente a eq. (2.52) da forma a seguir:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon}^e \frac{dD}{1 - D}. \quad (2.53)$$

Agora definindo a variação da energia elástica para uma função constante, obtém-se:

$$dW^e = \boldsymbol{\sigma}:d\boldsymbol{\varepsilon}^e. \quad (2.54)$$

Assim, usando a definição da eq. (2.54), pode-se calcular que:

$$dW^e = \boldsymbol{\sigma}:d\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}^e \frac{dD}{1 - D} = \boldsymbol{\varepsilon}^e:(1 - D)\mathbb{D}:\boldsymbol{\varepsilon}^e \frac{dD}{1 - D} = \boldsymbol{\varepsilon}^e:\mathbb{D}:\boldsymbol{\varepsilon}^e dD. \quad (2.55)$$

Por fim, pode-se obter, a partir da eq. (2.50), a equação abaixo:

$$-Y = \frac{1}{2} \frac{dW^e}{dD}. \quad (2.56)$$

Da eq. (2.56) o termo $-Y$ pode ser chamado de taxa de densidade de energia de deformação liberada devido ao dano. Esta taxa é a metade da variação da densidade de energia (Lemaitre, 1996). Também corresponde a taxa de energia de deformação liberada pela trinca, J , muito utilizada na teoria básica da mecânica da fratura.

O potencial de estado plástico $\psi^p(r, \boldsymbol{\beta})$, pode ser considerado como a soma de diferentes contribuições relacionadas ao endurecimento isotrópico e cinemático. Assim, o potencial de estado plástico é dado pela soma de termos:

$$\bar{\rho} \psi^p(r, \boldsymbol{\beta}) = \bar{\rho} \psi^I(r) + \frac{a}{2} \boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\beta}, \quad (2.57)$$

onde a é a constante material associada ao endurecimento cinemático devido ao endurecimento isotrópico e $\psi^I(r)$ é uma função escalar arbitrária da variável interna isotrópica, r .

Desta forma pode-se postular as relações de estado para as forças termodinâmicas associadas com as variáveis internas como:

$$R = \bar{\rho} \frac{\partial \psi^p(r, \boldsymbol{\beta})}{\partial r} = \frac{\partial \psi^I(r)}{\partial r} = R(r), \quad (2.58)$$

$$\mathbf{X} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi^p(r, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = a \boldsymbol{\beta},$$

onde \mathbf{X} é o Tensor “Back-Stress”.

Após definidos estado e correspondentes variáveis associadas, o segundo potencial dará as relações constitutivas cinemáticas para descrição da evolução do fenômeno (Lemaitre, 1996).

A existência de um potencial único de dissipação, ψ , é assumido, na qual, usando a regra da normalidade, as equações de evolução para todas as variáveis internas são derivadas.

Antes disto, pode-se estabelecer algumas restrições para a formulação acima mencionada.

Com a escolha do endurecimento isotrópico, endurecimento cinemático e dano, a dissipação intrínseca deve satisfazer a desigualdade de Clausius-Duhem:

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \mathbf{X} : \dot{\boldsymbol{\beta}} - R\dot{r} - Y\dot{D} \geq 0. \quad (2.59)$$

Considerando-se a definição das forças termodinâmicas associadas a cada variável interna, pode-se reescrever a desigualdade apresentada anteriormente, assumindo que ela pode ser decomposta em dois termos (dissipação plástica e dissipação do dano, respectivamente), como:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \mathbf{X} : \dot{\boldsymbol{\beta}} - R\dot{r} &\geq 0, \\ -Y\dot{D} &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Como apresentado na eq. (2.60), a desigualdade deveria ser verificada para cada mecanismo de dissipação selecionado. Sendo, $-Y$, uma função quadrática positiva eq. (2.52), a taxa de dano \dot{D} também deve ser uma função não negativa. Logo a variável de dano só leva em conta a degradação progressiva de materiais, não sendo possível nenhuma recuperação de energia. Sendo assim, satisfazendo esta restrição e a desigualdade de dissipação, é assumida a existência de um pseudo-potencial de dissipação ψ^* , que é função das taxas de mudanças das variáveis internas:

$$\psi^* = \psi^*(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{r}, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \dot{D}, \boldsymbol{\varepsilon}^e, r, \boldsymbol{\beta}, D), \quad (2.61)$$

onde as variáveis internas são consideradas como variáveis do processo no pseudo-potencial.

Usando a transformação de Legendre-Fenchel, um equivalente pseudo-potencial de dissipação complementar, ψ , pode ser postulado, que também é uma função com variáveis escalares, contínuo, não negativo e convexo com relação a cada força termodinâmica:

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\sigma}, R, \mathbf{X}, Y, \boldsymbol{\varepsilon}^e, r, \boldsymbol{\beta}, D). \quad (2.62)$$

Com uma abordagem de um potencial de dissipação única, esse potencial de dissipação complementar é dado pela decomposição aditiva dos potenciais de endurecimento ψ^p e dano ψ^d na forma:

$$\psi = \psi^p + \psi^d = \phi + \frac{b}{2a} \mathbf{X} : \mathbf{X} + \frac{S}{(1-D)(s+1)} \left(\frac{-Y}{S} \right)^{s+1}, \quad (2.63)$$

onde, a , b , S e s são constantes materiais e, ϕ , é a função de escoamento de von Mises:

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R, D) = \frac{\sqrt{3J_2(\mathbf{S} - \mathbf{X})}}{(1-D)} - (\sigma_0 + R(r)), \quad (2.64)$$

onde σ_0 é o valor inicial da tensão de escoamento do material.

Segundo a hipótese da normalidade generalizada, o escoamento plástico é dado por:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma} \mathbf{N}, \quad (2.65)$$

onde \mathbf{N} é o vetor de fluxo.

$$\text{(Lemaitre)} \quad \mathbf{N} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(\mathbf{S} - \mathbf{X})}{2(1-D) \|\mathbf{S} - \mathbf{X}\|}. \quad (2.66)$$

Com a evolução das variáveis internas associadas ao endurecimento isotrópico e cinemático \dot{r} e $\dot{\boldsymbol{\beta}}$, são:

$$\dot{r} = -\dot{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial R} = \dot{\gamma}, \quad (2.67)$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{X}} = \dot{\gamma} (a\mathbf{N} - b\mathbf{X}).$$

A lei de evolução do dano é dada por:

$$\dot{D} = \dot{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial Y} = \frac{\dot{\gamma}}{1-D} \left(\frac{-Y}{S} \right)^s, \quad (2.68)$$

onde $\dot{\gamma}$ é o parâmetro plástico (satisfaz a lei de complementariedade da plasticidade):

$$\dot{\gamma} \geq 0; \quad \phi \leq 0; \quad \dot{\gamma}\phi = 0. \quad (2.69)$$

Complementado a descrição formal da elasto-plasticidade acoplada ao dano, é importante definir a taxa de deformação plástica equivalente, $\dot{\varepsilon}^p$, no qual deve estar de acordo com o critério de escoamento adotado.

Para o critério de von Mises, e assumindo a equivalência da taxa de trabalho plástico, tem-se:

$$\dot{W}^p = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\varepsilon}^p = q \dot{\varepsilon}^p. \quad (2.70)$$

Utilizando a eq. (2.65) e a definição da tensão equivalente de von Mises, obtém-se:

$$q = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}} = \sqrt{3J_2}. \quad (2.71)$$

A taxa de deformação plástica equivalente pode ser calculada pela eq. (2.72):

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\dot{\gamma}}{1 - D}. \quad (2.72)$$

Assim, pelas equações (2.68) e (2.72), a lei de evolução do dano pode ser escrita como mostrado abaixo:

$$\dot{D} = \dot{\varepsilon}^p \left(\frac{-\dot{\gamma}}{S} \right)^s. \quad (2.73)$$

2.3.2 Modelo CDM Aperfeiçoado

O modelo CDM Aperfeiçoado, Malcher, L., (2013), é um modelo avançado do modelo clássico de Lemaitre. No mesmo é proposta a troca do denominador de dano. No modelo de Lemaitre este denominador é uma constante material. Para o modelo proposto, CDM Aperfeiçoado, o denominador de dano passa a ser uma função,

chamada de função denominador de dano, que é dependente da triaxialidade e do terceiro invariante do tensor das tensões em sua forma normalizada.

2.3.2.1 Função denominador de Dano

A função denominador de dano decresce com o aumento da triaxialidade, independentemente da região que está sendo estudada. No modelo CDM Aperfeiçoado se propõe uma substituição do denominador de dano da lei de evolução de dano de Lemaitre, que é uma constante, calibrada com base em testes experimentais em corpos de prova lisos sujeitos a tração.

Com a inserção da função no lugar da constante, procura-se aumentar a precisão do modelo de dano, em específico na capacidade de prever o correto nível de deslocamento que configura o início da fratura dúctil do material.

O denominador de dano tem uma forte dependência da razão de triaxialidade, logo não pode ser considerada uma constante para qualquer condição.

Como o mesmo decresce com o aumento da triaxialidade, em qualquer região estudada, serão estudadas separadamente as regiões de baixa e alta triaxialidade.

Para a região de alta triaxialidade é sugerida uma função em que se utiliza somente parâmetros materiais calibrados tradicionalmente, isto é, através de ensaios de tração pura em corpos de prova cilíndricos e lisos.

A expressão fenomenologicamente sugerida é:

$$W(\eta) = \frac{a}{3|\eta|}, \quad (2.74)$$

onde $W(\eta)$ é a função denominador de dano para a região de alta triaxialidade, η é a razão de triaxialidade e a o parâmetro material (calibrado através do experimento com o corpo de prova)

$$W(\eta) = \frac{S_{0,33}}{3|\eta|}, \quad (2.75)$$

onde $S_{0,33}$ é o denominador de dano calibrado tradicionalmente com o corpo de prova cilíndrico liso sujeito a tração pura.

Para a região de baixa triaxialidade é sugerido utilizar a condição de cisalhamento puro, $\eta = 0$, como um segundo ponto de calibração. Sendo assim, a equação fenomenológica é definida como a seguir:

$$V(\xi) = b(1 - \xi^2), \quad (2.76)$$

onde $V(\xi)$ é uma função denominador de dano para região de baixa triaxialidade, ξ é o terceiro invariante normalizado do tensor desviador e b o parâmetro material a ser calibrado (denominador do dano calibrado em cisalhamento puro).

$$\xi = \frac{(27/2) \det \mathcal{S}}{q^3}, \quad (2.77)$$

onde \mathcal{S} é o tensor das tensões desviadoras e q é a tensão equivalente de von Mises $\left(q = \sqrt{(3/2) \mathcal{S} : \mathcal{S}} \right)$.

A eq. (2.76) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$V(\xi) = S_{0,0}(1 - \xi^2), \quad (2.78)$$

onde $S_{0,0}$ é o denominador de dano calibrado sob cisalhamento puro.

Para que possamos aplicar a função denominador de dano a toda faixa de razão de triaxialidade, as equações (2.78) e (2.81) precisam ser acopladas. A função denominador de dano será dependente tanto da razão de triaxialidade, como do terceiro invariante normalizado, ficando da seguinte forma:

$$S(\eta, \xi) = \frac{S_{0,33}}{3|\eta| + \frac{S_{0,33}}{S_{0,0}}(1 - \xi^2)}. \quad (2.79)$$

Esta função requer dois pontos de calibração, $S_{0,0}$ (cisalhamento puro) e $S_{0,33}$ (tração pura) para sua correta definição.

2.3.2.2 Acoplamento entre a função denominador e evolução do dano

A lei de evolução do dano, como proposta inicialmente por Lemaitre (eq.2.73) estabelece que o denominador de dano é uma constante material, logo, ao introduzir a função denominador de dano $S(\eta, \xi)$, como já descrita previamente, na lei de evolução de dano proposta por Lemaitre, no lugar da constante material, obtém-se:

$$\dot{D} = \frac{\dot{\gamma}}{1 - D} \left[\frac{-Y}{S(\eta, \xi)} \right]^s, \quad (2.80)$$

onde s é o expoente do dano original de Lemaitre (para a maioria dos materiais dúcteis é igual a um).

Com esta modificação aplicada ao modelo original de Lemaitre e assumindo que a abordagem de existência de um potencial de dissipação único, dado pela decomposição aditiva dos potenciais de endurecimento ψ^p e dano ψ^d , e definindo inicialmente pela de ψ^p apresentada anteriormente, a nova contribuição no potencial devido ao dano passará a ser:

$$\psi^d = \frac{S_{0,33}}{(1 - D)(s + 1) \left[3|\eta| + \frac{S_{0,33}}{S_{0,0}} (1 - \xi^2) \right]} \left\{ \frac{-Y}{S_{0,33}} \left[3|\eta| + \frac{S_{0,33}}{S_{0,0}} (1 - \xi^2) \right] \right\}^{s+1}. \quad (2.81)$$

A expressão acima foi obtida, assumindo q integração da eq. (2.82) em função da força termodinâmica associada ao dano, Y . Substituindo a eq. (2.83) na expressa da decomposição aditiva do potencial de dissipação já apresentada anteriormente, tem-se:

$$\psi = \psi^p + \psi^d = \phi + \frac{S_{0.33}}{(1-D)(s+1) \left[3|\eta| + \frac{S_{0.33}}{S_{0.0}} (1-\xi^2) \right]} \left\{ \frac{-Y}{S_{0.33}} \left[3|\eta| + \frac{S_{0.33}}{S_{0.0}} (1-\xi^2) \right] \right\}^{s+1}, \quad (2.82)$$

onde,

$$\phi(\sigma, R, D) = \frac{\sqrt{3J_2(\mathcal{S})}}{(1-D)} - (\sigma_0 + R(r)). \quad (2.83)$$

Tem-se que se destacar que o efeito do endurecimento cinemático é desprezado, pelo fato de que somente carregamentos monotônicos são aplicados para as simulações numéricas dos corpos de prova selecionados. Deste modo, tem-se o modelo de dano de Lemaitre, com a função denominador de dano, descrito na tabela (2.6):

Tabela 2.5 Modelo de dano de Lemaitre com a função denominador de dano.

(i) Decomposição aditiva da deformação:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$$

(ii) Potencial de estado ou potencial termodinâmico:

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, r, D) = \psi^{ed}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D) + \psi^p(r)$$

com as forças termodinâmicas definidas por:

$$\sigma = \bar{\rho} \frac{\partial \psi^{ed}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}; Y = \bar{\rho} \frac{\partial \psi^{ed}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D)}{\partial D}; R = \bar{\rho} \frac{\partial \psi^p(r)}{\partial r},$$

(iii) Potencial complementar de dissipação ou potencial de fluxo:

$$\begin{aligned} \psi = \psi^p + \psi^d = \phi & \\ & + \frac{S_{0.33}}{(1-D)(s+1) \left[3|\eta| + \frac{S_{0.33}}{S_{0.0}} (1-\xi^2) \right]} \left\{ \frac{-Y}{S_{0.33}} \left[3|\eta| \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{S_{0.33}}{S_{0.0}} (1-\xi^2) \right] \right\}^{s+1}, \end{aligned}$$

onde,

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, R, D) = \frac{\sqrt{3J_2(\boldsymbol{\sigma})}}{(1-D)} - (\sigma_0 + R(r)).$$

A lei de fluxo plástico e evolução das variáveis internas r e D definidas por:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}; \dot{r} = -\dot{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial R}; \dot{D} = \dot{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial Y}$$

(iv) Condição de complementariedade:

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad \phi \leq 0, \quad \dot{\gamma} \phi = 0.$$

2.3.2.3 Determinação da lei de fluxo plástico: Modelo associativo

Referente a inclusão da plasticidade associativa é usada como potencial de escoamento ou dissipação potencial, $\psi \equiv \phi$. Deste modo, a plasticidade associada implica que a taxa de deformação plástica é um tensor normal à superfície de rendimento em relação ao plano desviador. Sendo assim, a equação de evolução para a deformação plástica, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$, a variável interna de endurecimento isotrópico, \dot{r} e o dano, \dot{D} , são obtidos como:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{S}}{(1-D)\|\boldsymbol{S}\|},$$
$$\dot{r} = -\dot{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \dot{\gamma}, \quad (2.84)$$

$$\dot{D} = \dot{\gamma} \frac{\partial \psi^p}{\partial Y} = \frac{\dot{\gamma}}{1-D} \left\{ \frac{-Y}{S_{0.33}} \left[3|\eta| + \frac{S_{0.33}}{S_{0.0}} (1 - \xi^2) \right] \right\}^s,$$

Assim, O modelo CDM Aperfeiçoado em relação à plasticidade associativa, o endurecimento isotrópico, o dano isotrópico e a função denominador do dano pode ser resumido conforme a tabela abaixo:

Tabela 2.6 Modelo associativo de aproximação melhorada do modelo CDM
Aperfeiçoado:

(i) Decomposição da deformação:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$$

(ii) Lei da elasticidade com dano acoplado:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D) D : \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

(iii) Função de rendimento:

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, R, D) = \frac{\sqrt{3J_2(\boldsymbol{S})}}{(1 - D)} - (\sigma_0 + R(r))$$

(iv) Lei de escoamento plástico e evolução de r e D :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{3}{2(1 - D)}} \frac{\boldsymbol{S}}{\|\boldsymbol{S}\|}$$

$$\dot{r} = -\dot{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma}$$

$$\dot{D} = \dot{\gamma} \frac{\partial \psi^p}{\partial Y} = \frac{\dot{\gamma}}{1 - D} \left\{ \frac{-Y}{S_{0.33}} \left[3|\eta| + \frac{S_{0.33}}{S_{0.0}} (1 - \xi^2) \right] \right\}^s$$

$$-Y = \frac{1}{2E(1 - D)^2} \left[\frac{2}{3} (1 - D) q^2 + 3(1 - 2D) p^2 \right]$$

$$\eta = p/q$$

$$\xi = 27 \det \boldsymbol{S} 2q^3$$

(v) Condições complementares:

$$\dot{\gamma} \geq 0; \quad \phi \leq 0; \quad \dot{\gamma} \phi = 0.$$

2.3.2.4 Determinação da lei de fluxo plástico: Modelo não associativo

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \left\{ \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{S}}{(1-D)\|\boldsymbol{S}\|} - \left[(a\boldsymbol{S} - b\boldsymbol{M} + c\boldsymbol{I}) \left(\frac{1}{1-D} \right) \left(\frac{S(\eta, \xi)}{S(\eta, \xi) + 1} \right) \left(\frac{-Y}{S(\eta, \xi)} \right)^{s+1} \right] \right\}, \quad (2.85)$$

$$\dot{r} = -\dot{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial R} = \dot{\gamma},$$

$$\dot{D} = \dot{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial Y} = \frac{\dot{\gamma}}{1-D} \left\{ \frac{-Y}{S_{0.33}} \left[3|\eta| + \frac{S_{0.33}}{S_{0.0}} (1 - \xi^2) \right] \right\}^s,$$

onde \boldsymbol{M} é o tensor de segunda ordem, definido como:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{S}^2 - \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{S}^2, \quad (2.86)$$

e os termos a , b e c são definidos como:

$$a = \frac{S_{0.33}}{\left[3|\eta| + \frac{S_{0.33}}{S_{0.0}} (1 - \xi^2) \right]^2} \left(\frac{S_{0.33}}{S_{0.0}} 6\xi^2 I_1 \right),$$

$$b = \frac{S_{0.33}}{\left[3|\eta| + \frac{S_{0.33}}{S_{0.0}} (1 - \xi^2) \right]^2} \left(\frac{S_{0.33}}{S_{0.0}} \frac{27\xi^2}{r^3} \right), \quad (2.87)$$

$$c = \frac{S_{0.33}}{\left[3|\eta| + \frac{S_{0.33}}{S_{0.0}} (1 - \xi^2) \right]^2} \left(3 \frac{\eta}{|\eta|} \frac{1}{2q} \right),$$

onde, I_1 , representa o primeiro invariante do tensor tensão.

Desta forma, o modelo CDM Aperfeiçoado em relação à plasticidade não associativa, o endurecimento isotrópico, o dano isotrópico e a função denominador do dano pode ser resumida conforme o quadro abaixo:

Tabela 2.7 Modelo não associativo de aproximação melhorada do modelo CDM Aperfeiçoado:

(i)	Decomposição da deformação: $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$
(ii)	Lei da elasticidade com dano acoplado: $\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)\mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e$
(iii)	Função de rendimento: $\phi(\boldsymbol{\sigma}, R, D) = \frac{\sqrt{3J_2(\boldsymbol{S})}}{(1 - D)} - (\sigma_0 + R(r))$
(iv)	Lei de escoamento plástico e evolução de r e D : $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \left\{ \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{S}}{(1 - D)\ \boldsymbol{S}\ } - \left[(a\boldsymbol{S} - b\boldsymbol{M} + c\boldsymbol{I}) \left(\frac{1}{1 - D} \right) \left(\frac{S}{S + 1} \right) \left(\frac{-Y}{S(\eta, \xi)} \right)^{s+1} \right] \right\}$ $\dot{r} = \dot{\gamma}$ $\dot{D} = \frac{\dot{\gamma}}{1 - D} \left\{ \frac{-Y}{S_{0.33}} \left[3 \eta + \frac{S_{0.33}}{S_{0.0}} (1 - \xi^2) \right] \right\}^s$ com, $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{S}^2 - \frac{1}{3} tr \boldsymbol{S}^2$ $-Y = \frac{1}{2E(1 - D)^2} \left[\frac{2}{3} (1 - D)q^2 + 3(1 - 2D)p^2 \right]$ $S(\eta, \xi) = \frac{S_{0.33}}{3 \eta + \frac{S_{0.33}}{S_{0.0}} (1 - \xi^2)}$

$$a = \frac{S_{0.33}}{\left[3|\eta| + \frac{S_{0.33}}{S_{0.0}}(1 - \xi^2)\right]^2} \left(\frac{S_{0.33}}{S_{0.0}} 6\xi^2 I_1\right)$$

$$b = \frac{S_{0.33}}{\left[3|\eta| + \frac{S_{0.33}}{S_{0.0}}(1 - \xi^2)\right]^2} \left(\frac{S_{0.33}}{S_{0.0}} \frac{27\xi^2}{r^3}\right)$$

$$c = \frac{S_{0.33}}{\left[3|\eta| + \frac{S_{0.33}}{S_{0.0}}(1 - \xi^2)\right]^2} \left(3 \frac{\eta}{|\eta|} \frac{1}{2q}\right)$$

e,

$$\eta = p/q$$

$$\xi = 27 \det S 2q^3$$

(v) Condições complementares

$$\dot{\gamma} \geq 0,$$

$$\phi \leq 0,$$

$$\dot{\gamma}\phi = 0.$$

2.3.3 Critério de dano crítico

Dentre as várias maneiras de se definir a localização e o início da uma trinca na escala mesoscópica, a mais simples e de solução mais prática é usar o critério do dano crítico.

Este diz que a trinca mesoscópica é iniciada quando o valor do dano atinge um valor crítico (Lemaitre, 2005).

$$D > D_c, \quad (2.88)$$

onde D_c é a constante material (valor de difícil determinação – para muitos materiais está entre 0.2 e 0.5).

3 ESTRATÉGIA NUMÉRICA

Neste capítulo, a estratégia numérica para integração das equações de evolução dos modelos em estudo será mostrada. Para que não haja uma repetição na descrição da metodologia, a mesma será apresentada para o modelo de Lemaitre podendo ser, aplicada posteriormente aos demais modelos.

Para o modelo de Lemaitre, a determinação do algoritmo de atualização das tensões, também chamado de mapeamento de retorno, é então apresentado considerando a hipótese de pequenas deformações. Neste sentido, este algoritmo de retorno foi originalmente proposto por Benallal et al (1988) e Doghri e Billardon (1995), e, em seguida, considerando-se grandes deformações, por De Souza Neto (1994;1998;2002) e Saanouni (2000;2007). A metodologia usada é baseada no esquema de integração implícita de Euler, na metodologia de decomposição do operador e no método de Newton-Rapshon para resolução de um sistema não-linear de equações (Simo, 1998).

Neste sentido, a resolução do problema baseia-se em formular procedimentos de integração numérica capazes de atualizar as variáveis internas conhecidas, usualmente descritas como α_n no tempo t_n . A partir destas deve-se obter as variáveis internas α_{n+1} no tempo t_{n+1} , considerando um incremento de deformação $\Delta\varepsilon$ conhecido. Também é aplicada ao modelo a discretização das equações constitutivas no pseudo-tempo $[t_n, t_{n+1}]$, como no modelo de Euler implícito (Simo e Hughes, 1998). Implementando em programa acadêmico de elementos finitos para carregamento quase-estático, é necessário derivar a matriz tangente consistente com o algoritmo de integração.

Para atualizar as tensões é utilizada a metodologia da decomposição do operador (Simo e Hughes, 1998; De Souza Neto et al. 2008). A mesma é adequada para integração numérica do problema de evolução e vem sendo muito utilizada na plasticidade computacional. O método baseia-se em dividir o problema em duas partes, o preditor elástico, onde estamos numa fase completamente elástica e um corretor plástico, onde o sistema de equações residuais formado pela lei elástica, pela função

de escoamento e pelas equações de evolução é resolvido, utilizando os valores obtidos na construção do preditor elástico como valores iniciais do problema. Quando a função de escoamento é violada, o corretor plástico é, então, iniciado, e o método de Newton-Rapshon deve ser utilizado para resolver o conjunto de equações não lineares discretizado. Este método de Newton-Rapshon foi escolhido na resolução em virtude de se atingir uma taxa quadrática de convergência para a solução.

3.1 Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas

O algoritmo de atualização, também, conhecido como mapeamento de retorno, na plasticidade computacional requer as seguintes etapas: tendo como conhecidos a deformação elástica $\boldsymbol{\varepsilon}_n^e$ e o conjunto de variáveis internas α_n , no início do pseudo tempo $[t_n, t_{n+1}]$, e o incremento de deformação prescrito, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$, ocorrida neste intervalo, o estado tentativa elástico é descrito da forma abaixo apresentada:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon},$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = (1 - D_n)\mathbb{D}:\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p, \quad (3.1)$$

$$R_{n+1}^{trial} = R_n, \quad D_{n+1}^{trial} = D_n,$$

onde, $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}$ é o tensor das tensões tentativa, $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial}$ é o tensor de deformações plásticas tentativa, R_{n+1}^{trial} representa a variável interna associada ao endurecimento isotrópico tentativa e D_{n+1}^{trial} é a variável de dano tentativa.

O tensor das tensões tentativas pode, então, ser decomposto em duas partes, uma desviadora e uma hidrostática:

$$S_{n+1}^{trial} = (1 - D_n)2G\varepsilon_{d\ n+1}^{e\ trial}, \quad p_{n+1}^{trial} = (1 - D_n)K\varepsilon_{v\ n+1}^{e\ trial}, \quad (3.2)$$

onde, S_{n+1}^{trial} e p_{n+1}^{trial} são, respectivamente a componente desviadora e a hidrostática do tensor das tensões tentativas. G e K são as constantes de Lamé, conhecidas respectivamente como, modulo de cisalhamento e módulo volumétrico. $\varepsilon_d^{e\ trial}$ e $\varepsilon_v^{e\ trial}$ representam as componentes desviadora e volumétrica do tensor das deformações elástica tentativa.

O passo seguinte é a verificação se o estado tentativa se encontra dentro ou fora do limite elástico do material. Isto é realizado determinando-se a função de escoamento, com base nos termos definidos anteriormente. No modelo de Lemaitre a função de escoamento é definida da seguinte forma:

$$\phi^{trial} = \frac{q^{trial}}{1 - D_n} - \sigma_y(R_n), \quad (3.3)$$

onde, q^{trial} é a tensão equivalente de von Mises e é definida em função da contribuição desviadora do tensor das tensões tentativa $q^{trial} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S}_{n+1}^{trial} : \mathbf{S}_{n+1}^{trial}}$. O termo $\sigma_y(R_n)$ representa o encruamento do material, que é uma função da variável de endurecimento isotrópico, R_n . A expressão que define a evolução do limite de escoamento do material em função de R_n pode ser escrita como:

$$\sigma_y(R_n) = \sigma_0 + HR_n, \quad (3.4)$$

onde H é o módulo de endurecimento isotrópico, que neste caso é uma função da variável interna associada ao endurecimento isotrópico $H = H(R)$.

Sendo ϕ^{trial} menor ou igual a zero, representa que o incremento de deformação prescrito é totalmente elástico e o estado tentativa construído passa a ser o estado real do material, $(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^{trial}$. De forma oposta, se ϕ^{trial} for maior que zero, então, se constata que o material se encontra em um regime plástico e que o incremento de deformação prescrito, inicialmente tido como elástico, possui, na verdade, uma parte plástica. Assim, há a necessidade de corrigir o estado tentativa construído anteriormente.

A correção do estado tentativa pode ser feito a partir do incremento de deformação plástica de dentro da deformação elástica tentativa, expresso como segue:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (3.5)$$

No modelo original de Lemaitre, o incremento de deformação plástica é definido como, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta\gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{(1-D_{n+1})\|\mathbf{S}_{n+1}\|}$, assim, substituindo na expressão acima, tem-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} - \Delta\gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{(1-D_{n+1})\|\mathbf{S}_{n+1}\|}, \quad (3.6)$$

na qual, $\Delta\gamma$ é o multiplicador plástico e $\|\mathbf{S}_{n+1}\|$ é a norma da parte desviadora do tensor tensão. Deve-se destacar, ainda, que o efeito cinemático no encruamento do material está sendo desprezado.

A atualização das variáveis isotrópicas de dano e encruamento podem ser obtidas da forma a seguir:

$$R_{n+1} = R_n + \Delta\gamma, \quad (3.7)$$

$$D_{n+1} = D_n + \frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})} \left(\frac{-Y}{S}\right)^s, \quad (3.8)$$

onde, S e s são, respectivamente, o denominador e expoente de dano.

Findando o processo, a função de escoamento atualizada é então determinada através do estado real no pseudo-tempo t_{n+1} , conforme mostrado abaixo:

$$\phi_{n+1} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S}_{n+1} \cdot \mathbf{S}_{n+1}}}{1-D_{n+1}} - \sigma_{y0} - HR_n - H\Delta\gamma = 0 \quad (3.9)$$

Sendo assim, analisando as equações 3.6, 3.8 e 3.9, nota-se que para determinar o estado real do material há necessidade de resolver um sistema não-linear de equações com as seguintes variáveis: ε_{n+1}^e , D_{n+1} e $\Delta\gamma$.

Este sistema não-linear pode ser considerado, para um modelo geral de tensão tridimensional, como um sistema com oito variáveis e oito equações.

Além disto, a eq. (3.6) pode ser reescrita em função das tensões, bastando, para isto, aplicar a chamada lei de Hooke. Fincando da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - 2G\Delta\gamma \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{\|\mathbf{S}_{n+1}\|}} \quad (3.10)$$

Desta forma, o novo sistema de equações não-lineares será formado pelas equações (3.8), (3.9) e (3.10).

Tomando em consideração que o tensor das deformações elásticas também pode ser decomposto em uma parte desviadora e outra volumétrica, $\varepsilon^e = \varepsilon_d^e + \varepsilon_v^e \mathbf{I}$, e após manipulação matemática, pode-se concluir que:

$$\mathbf{S}_{n+1} = (1 - D_{n+1})2G\varepsilon_d^{e\,trial} - 2G\Delta\gamma \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{\|\mathbf{S}_{n+1}\|}} \quad (3.11)$$

$$p_{n+1} = (1 - D_{n+1})K\varepsilon_v^{e\,trial} \quad (3.12)$$

Tabela 3.1 Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas

- (i) Determinação do estado tentativa conhecendo o incremento de deformação $\Delta\varepsilon$, e as variáveis de estado no pseudo-tempo t_n :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\varepsilon \qquad R_{n+1}^{trial} = R_n \qquad D_{n+1}^{trial} = D_n$$

- (ii) Verificação da admissibilidade plástica:

Se,

$$\phi^{trial} = \frac{q^{trial}}{1-D_n} - \sigma_y(R_n) \leq 0,$$

então,

$$(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^{trial} \text{ (passo elástico), vá para o (v).}$$

Caso contrário, vá para (iii).

- (iii) Algoritmo de retorno (passo plástico): Solucionar o sistema de equações não lineares, pelo método de Newton-Rapshon.

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - 2G\Delta\gamma \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{\|\mathbf{S}_{n+1}\|}}$$

$$D_{n+1} = D_n + \frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})} \left(\frac{-Y}{S}\right)^s$$

$$\phi_{n+1} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1}}}{1-D_{n+1}} - \sigma_{y0} - HR_n - H\Delta\gamma = 0$$

- (iv) Atualização das variáveis de estado:

$$R_{n+1} = R_n + \Delta\gamma$$

$$p_{n+1} = (1-D_{n+1})K\varepsilon_{v\ n+1}^{e\ trial}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} - \Delta\gamma \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{(1-D_{n+1})\|\mathbf{S}_{n+1}\|}}$$

- (v) Fim.

3.2 Método de Newton-Raphson

Na resolução do sistema não-linear descrito na tabela (3.1), o método de Newton-Raphson é adotado. Como ponto de partida, o sistema necessita ser escrito na forma de equações residuais, como mostrado abaixo:

$$\begin{cases} Res_{\sigma_{n+1}} = \sigma_{n+1} - \sigma_{n+1}^{trial} + 2G\Delta\gamma \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{\|\mathbf{S}_{n+1}\|}} = 0 \\ Res_{D_{n+1}} = D_{n+1} - D_n - \frac{\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} \left(\frac{-Y}{S}\right)^s = 0 \\ Res_{\Delta\gamma} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1}}}{1 - D_{n+1}} - \sigma_{y0} - HR_n - H\Delta\gamma = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

O sistema de equações residuais descrito acima, pode ser agora linearizado na forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial Res_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial Res_{\sigma_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial Res_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial Res_{D_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial Res_{D_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial Res_{D_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial Res_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial Res_{\Delta\gamma}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial Res_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}^k \cdot \begin{bmatrix} \delta\sigma_{n+1} \\ \delta D_{n+1} \\ \delta\Delta\gamma \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} Res_{\sigma_{n+1}} \\ Res_{D_{n+1}} \\ Res_{\Delta\gamma} \end{bmatrix}^k. \quad (3.14)$$

Assim, a tabela a seguir mostra de forma resumo a aplicação do método de Newton-Raphson para resolução do sistema linear eq. (3.14), onde o estado tentativa é tomado como parâmetro inicial do problema.

Tabela 3.2. Algoritmo para resolução do sistema linear através do método de Newton-Raphson;

<p>Dado o estado tentativa como parâmetros iniciais:</p> $\sigma_{n+1}^{(0)} = \sigma_{n+1}^{trial} \quad \Delta\gamma^{(0)} = \Delta\gamma \quad D_{n+1}^{(0)} = D_n$	
i)	<p>Resolver o sistema de equações para: σ_{n+1}, r_{n+1} e $\Delta\gamma$.</p> $\begin{bmatrix} \frac{\partial Res_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial Res_{\sigma_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial Res_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial Res_{D_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial Res_{D_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial Res_{D_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial Res_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial Res_{\Delta\gamma}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial Res_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}^k \cdot \begin{bmatrix} \delta\sigma_{n+1} \\ \delta D_{n+1} \\ \delta\Delta\gamma \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} Res_{\sigma_{n+1}} \\ Res_{D_{n+1}} \\ Res_{\Delta\gamma} \end{bmatrix}^k .$
ii)	<p>Calcular:</p> $\sigma_{n+1}^{(k+1)} = \sigma_{n+1}^{(k)} + \delta\sigma_{n+1}^{(k+1)} \quad \Delta\gamma^{(k+1)} = \Delta\gamma^{(k)} + \delta\Delta\gamma^{(k+1)}$ $D_{n+1}^{(k+1)} = D_{n+1}^{(k)} + \delta D_{n+1}^{(k+1)}$
iii)	<p>Verificar convergência:</p> $\phi^{(k+1)} = \frac{q^{(k+1)}}{1 - D^{(k+1)}} - \sigma_0 - HRn - H\Delta\gamma^{(k+1)}$ $erro = \frac{\phi^{(k+1)}}{[\sigma_0 - HRn - H\Delta\gamma^{(k+1)}]} \leq 10^{-6}$
iv)	<p>Fim.</p>

onde,

$$\frac{\partial Res_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} = \mathbb{I}^4 + 2G\Delta\gamma \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}}, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial Res_{\sigma_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} = 2G\Delta\gamma \frac{\partial N_{n+1}}{\partial D_{n+1}}, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial Res_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} = 2GN_{n+1}, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial Res_{D_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} = -\frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})^s} \left(\frac{-Y}{S}\right)^{s-1} \frac{\partial(-Y)}{\partial \sigma_{n+1}} \frac{1}{S}, \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Res_{D_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} = 1 - & \left[\Delta\gamma(-1)(1-D_{n+1})^{-2}(-1) \left(\frac{-Y}{S}\right)^s \right. \\ & \left. + \Delta\gamma(1-D_{n+1})^{-1} s \left(\frac{-Y}{S}\right)^{s-1} \frac{\partial(-Y)}{\partial D_{n+1}} \frac{1}{S} \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial Res_{D_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} = -\frac{1}{(1-D_{n+1})} \left(\frac{-Y}{S}\right)^s, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial Res_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{n+1}} = N_{n+1}, \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial Res_{\Delta\gamma}}{\partial D_{n+1}} = \frac{q_{n+1}}{(1-D_{n+1})^2}, \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial Res_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} = -H, \quad (3.23)$$

Lembrando ainda que,

$$N_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{S_{n+1}}{(1 - D_{n+1}) \|S_{n+1}\|}}, \quad (3.24)$$

e que, $-Y$ é uma função dependente do dano e pode ser mostrada como:

$$-Y = \frac{1}{2E(1 - D)^2} \left[\frac{2}{3} (1 - \nu) q^2 + 3(1 - 2\nu) p^2 \right]. \quad (3.25)$$

3.3 Operador tangente consistente

Baseando-se na integração implícita do modelo generalizado em um desenvolvimento de elementos finitos, descrito no item anterior, o operador tangente consistente com o algoritmo de integração é requerido para se construir a matriz de rigidez. Tendo o caso como elástico, quando o fluxo plástico é zero dentro do passo específico, o operador tangente no tempo t_{n+1} é simplesmente o operador elástico danificado, que pode ser mostrado como:

$$\hat{\mathbb{D}}^e = \frac{1}{1 - D} \mathbb{D}. \quad (3.26)$$

De forma oposta, em casos elasto-plásticos, onde se tem o fluxo plástico, o operador tangente, $\hat{\mathbb{D}}^{ep}$, pode ser mostrado como:

$$\hat{\mathbb{D}}^{ep} = \frac{d\hat{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}, \quad (3.27)$$

onde, $\hat{\sigma}$ é a função algorítmica constitutiva implícita para atualização das tensões, que é definida pelo algoritmo de retorno mostrado anteriormente. Pode ser mostrado, para um modelo geral, como abaixo:

$$\begin{bmatrix} d\sigma_{n+1} \\ dr_{n+1} \\ d\Delta\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{D}^e : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

onde,

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial r_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial r_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial r_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}^{-1}. \quad (3.29)$$

Os termos C_{22} , C_{23} , C_{32} , e C_{33} representam escalares, os C_{12} , C_{21} , C_{13} e C_{31} são tensores de segunda ordem e \mathbb{C}_{11} é um tensor de quarta ordem. Sendo assim, pode-se escrever que:

$$\mathbb{D}^{ep} = \frac{d\sigma_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}} = \mathbb{C}_{11} : \mathbb{D}^e, \quad (3.30)$$

em que a operação $(\mathbb{C}_{11} : \mathbb{D})$ representa a composição entre o tensor da quarta ordem, \mathbb{C}_{11} e o tensor de quarta ordem, \mathbb{D} , da matriz de elasticidade.

A metodologia descrita acima e aplicada ao modelo de Lemaitre, para determinação do algoritmo de atualização das tensões e matriz tangente consistente, também será aplicada aos modelos CDM Aperfeiçoado, GTN e GTN Estendido. Assim, a diferença para aplicação da metodologia aos outros modelos está, apenas, na formação do chamado sistema de equações residuais. Abaixo serão particularizados os sistemas referentes à cada modelo citado.

3.4 Equações residuais para o modelo CDM Aperfeiçoado.

Para o modelo CDM Aperfeiçoado, descrito no capítulo anterior, as seguintes equações residuais são usadas para formar o sistema requerido e assim compor o algoritmo de mapeamento de retorno. Neste caso, somente o modelo associativo foi utilizado.

$$\left\{ \begin{array}{l} Res_{\sigma_{n+1}} = \sigma_{n+1} - \sigma_{n+1}^{trial} + 2G\Delta\gamma \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{\|\mathbf{S}_{n+1}\|}} = 0 \\ Res_{D_{n+1}} = D_{n+1} - D_n - \frac{\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} \left(\frac{-Y}{S(\eta, \xi)} \right)^s = 0 \\ Res_{\Delta\gamma} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1}}}{1 - D_{n+1}} - \sigma_{y0} - HR_n - H\Delta\gamma = 0 \end{array} \right. \quad (3.31)$$

3.5 Equações residuais para os modelos baseados na Micromecânica de Defeitos

Considerando agora os modelos GTN e GTN Estendido, os sistemas de equações residuais descritos a seguir são então utilizados na composição do algoritmo de mapeamento de retorno. A eq. (3.32) mostra o sistema não linear para o modelo GTN e a eq. (3.33) mostra o sistema agora para o modelo GTN Estendido.

$$\left\{ \begin{array}{l} Res_{\Delta\gamma} = J_{2n+1}^{trial} - \frac{1}{3} \left[1 + q_3 f_{n+1}^2 - 2q_1 f_{n+1} \cosh\left(\frac{3q_2 p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right] \sigma_y^2 = 0 \\ Res_p = p_{n+1} - p_n + \Delta\gamma K \sigma_y q_1 q_2 f_{n+1} \sinh\left(\frac{3q_2 p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) = 0 \\ Res_f = f_{n+1} - f_n - \Delta f^n - \Delta f^g = 0 \\ Res_R = R_{n+1} - R_n - \frac{\Delta\gamma}{(1 - f_{n+1})} \\ \left\{ q_1 q_2 f_{n+1} p_{n+1} \sinh\left(\frac{3q_2 p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) + \frac{2}{3} \sigma_y \left[1 + q_3 f_{n+1}^2 - 2q_1 f_{n+1} \cosh\left(\frac{3q_2 p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) \right] \right\} = 0 \end{array} \right. \quad (3.32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
Res_{\Delta\gamma} = \frac{J_{2n+1}^{trial}}{\left[1 + \left(\frac{2G\Delta\gamma}{1-D_{n+1}}\right)\right]^2 (1-D_{n+1})} - \frac{1}{3} \left[1 + q_3 f_{n+1}^2 - 2q_1 f_{n+1} \cosh\left(\frac{3q_2 p_{n+1}}{2\sigma_y}\right)\right] \sigma_y^2 = 0 \\
Res_p = p_{n+1} - p_n + \Delta\gamma K \sigma_y q_1 q_2 f_{n+1} \sinh\left(\frac{3q_2 p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) = 0 \\
Res_f = f_{n+1} - f_n - \Delta f^n - \Delta f^g = 0 \\
Res_R = R_{n+1} - R_n - \frac{\Delta\gamma}{(1-f_{n+1}-D_{n+1})} \\
\left\{ q_1 q_2 f_{n+1} p_{n+1} \sinh\left(\frac{3q_2 p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) + \frac{2}{3} \sigma_y \left[1 + q_3 f_{n+1}^2 - 2q_1 f_{n+1} \cosh\left(\frac{3q_2 p_{n+1}}{2\sigma_y}\right)\right] \right\} = 0 \\
Res_d = D_{n+1} - D_n - \Delta D^n - \Delta D^s = 0
\end{array} \right. \quad (3.33)$$

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

4.1 Geometria e malha de elementos finitos

Para se testar a robustez dos modelos numéricos implementados, dois tipos de materiais aplicados na engenharia foram usados: aço 1045 e uma liga de alumínio aeronáutico. Dentre estes dois tipos de materiais, resultados experimentais disponíveis na literatura (ver Bai & Wierzbicki, 2007; Driemeier, 2010) foram utilizados, considerando diferentes estados de tensão.

Considerando o aço 1045, três tipos de corpos de prova foram usados: cilíndrico liso, cilíndrico entalhado e borboleta (ver Bai & Wierzbicki, 2007). Para os dois primeiros corpos, carregamentos monotônicos de tração foram aplicados até a completa separação do corpo. Já para o corpo de prova tipo borboleta, carregamentos cisalhantes e combinações de cisalhamento com tração foram usados. A Figura 4.1 apresenta a geometria dos três corpos de prova citados.

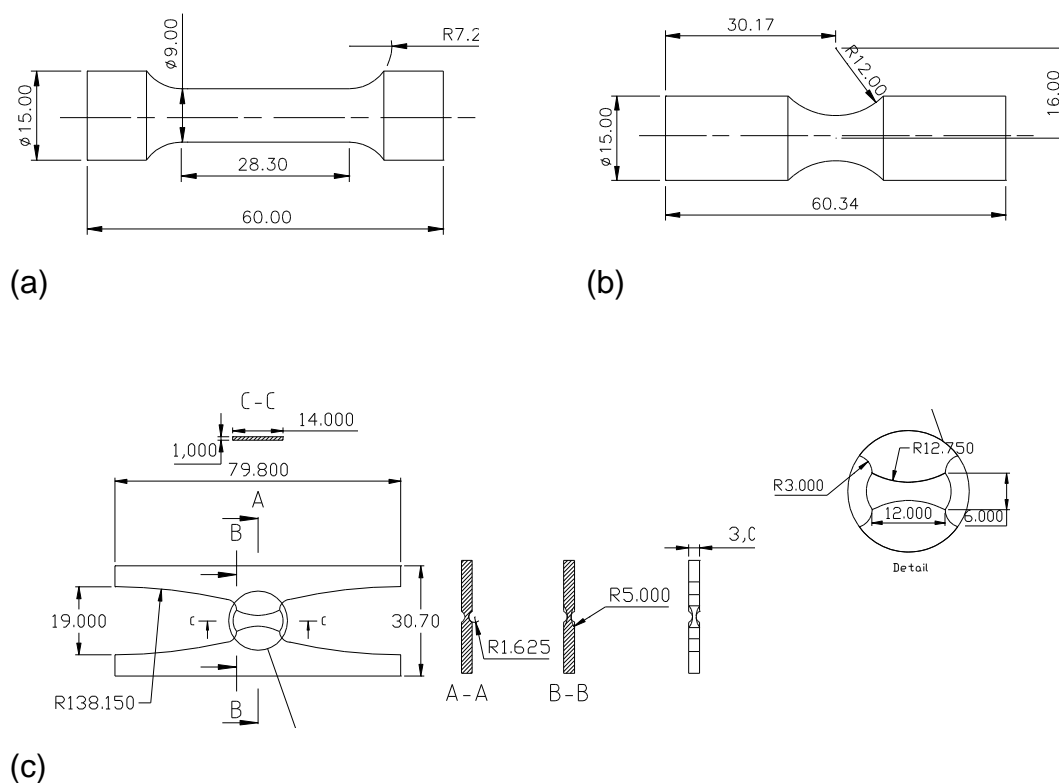


Figura 4.1 – Corpos de prova para o aço 1045. a) cilíndrico liso, b) cilíndrico entalhado e c) tipo borboleta.

Para a liga de alumínio aeronáutico (ver Driemeier, 2010), três tipos de corpos de prova com seção transversal retangular foram utilizados, sendo eles: sem entalhe, com entalhe de $r = 10 \text{ mm}$ e tipo cisalhamento. Neste caso, carregamentos de tração (dois primeiros CP's) e cisalhamento (terceiro CP) foram aplicados. A Figura 4.2 apresenta a geometria dos três corpos de prova citados.

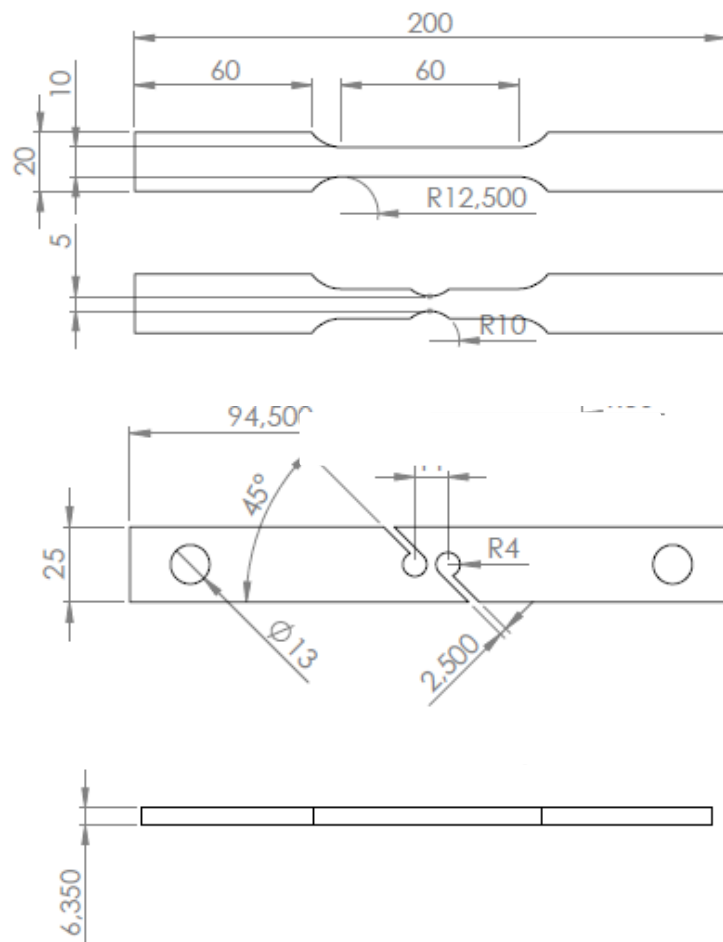


Figura 4.2 – Corpos de prova para a liga e alumínio aeronáutico. Retangular sem entalhe, com entalhe e tipo cisalhante.

Na simulação em elementos finitos os corpos de prova cilíndricos liso e entalhado, foram discretizados utilizando elemento finito bidimensional quadrilateral de 8 nós, sendo a malha formada por 1800 elementos e 5581 nós. Neste caso, como o problema em questão é completamente simétrico, somente um quarto do corpo é discretizado. Neste caso, um *clip gage* de 20,6 mm foi adotado para medição do

deslocamento da área de interesse do CP (ver Bai, 2008). Para o corpo de prova tipo borboleta, uma malha tridimensional é construída utilizando elemento hexaédrico de 20 nós com 1440 elementos e 7773 nós. Considerando os corpos de prova de seção retangular utilizados em tração pura, elemento finito tridimensional hexaédrico de 8 nós foram utilizados, sendo a malha de elementos finitos construída com 1840 elementos e 2376 nós. Por fim, para o corpo de cisalhamento, novamente elemento finito tridimensional hexaédrico de 20 nós foram utilizados, a malha de elementos finitos formada por 3456 elementos e 17165 nós. Neste caso, um *clip gage* de 25 mm foi adotado para medição do deslocamento da área de interesse do CP (ver Driemeier, 2010). Em todos os casos, na resolução do problema através do método dos elementos finitos, utilizou-se integração reduzida. As Figuras 4.3 e 4.4 apresentam as malhas de elementos finitos utilizados para todos os CP's em estudo.

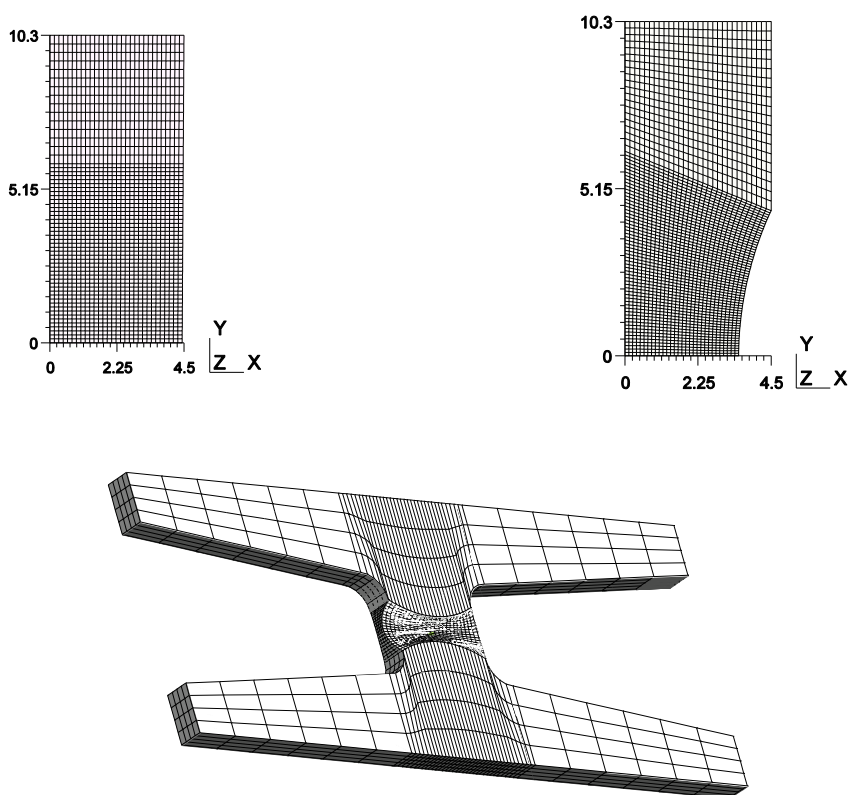


Figura 4.3 – Malha de elementos finitos para os corpos de prova em aço 1045.

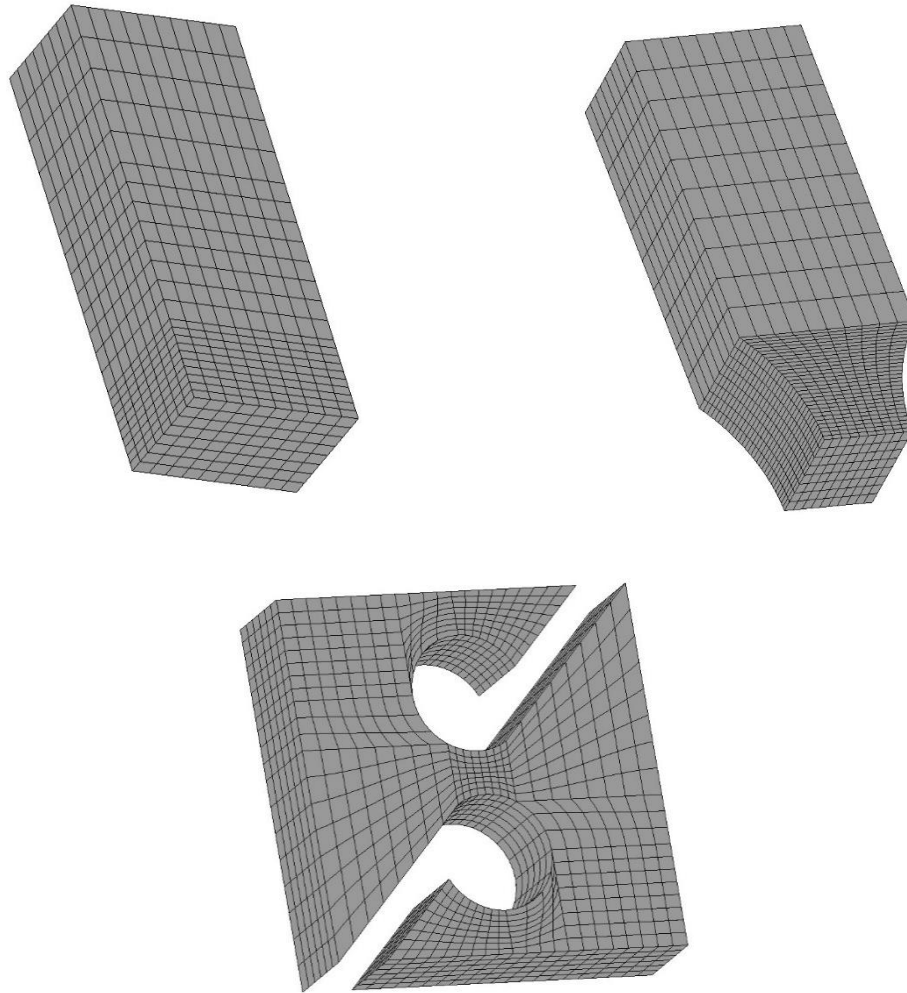


Figura 4.4 – Malha de elementos finitos para os corpos de prova em alumínio aeronáutico.

4.2 Propriedades dos materiais.

Na utilização dos modelos constitutivos já descritos, inúmeros parâmetros dos materiais são necessários. Neste trabalho, parte dos parâmetros foram obtidos através da literatura (ver Bai & Wierzbicki, 2007; Driemeier, 2010, Malcher, 2011; Malcher, 2013) e outros calibrados utilizando um método de identificação de parâmetros baseado na seção áurea. As Tabelas 4.1 e 4.2 apresentam as propriedades dos materiais para o aço 1045 e liga de alumínio aeronáutico.

Tabela 4.1: Propriedades materiais para o aço 1045.

PROPRIEDADE	UNIDADE	VALOR
Módulo de elasticidade (E)	[GPa]	220
Limite de escoamento inicial (σ_y)	[MPa]	830
Expoente de dano (s)	-	1
Denominador de dano ($S_{0,0}$)	[MPa]	8.20
Denominador de dano ($S_{0,33}$)	[MPa]	5.90
Dano crítico (D_c)	-	0.26
Fração volumétrica de vazios com potencial para nucleação (f_N)	-	0.05
Desvio padrão da deformação para nucleação de vazios (S_N)	-	0.20
Deformação média para nucleação de vazios (ϵ_N)	-	0.10
Parâmetro de forma (q_1)	-	1.5
Parâmetro de forma (q_2)	-	1.0
Parâmetro de forma (q_3)	-	2.25
Fração volumétrica crítica de vazio (f_c)	-	0,076
Defeitos com potencial para nucleação (d_N)	-	0.10
Desvio padrão da deformação para nucleação de defeitos (S'_N)	-	0.15
Deformação média para nucleação de defeitos (ϵ'_N)	-	0.10
Parâmetro material de sensibilidade ao cisalhamento (k)	-	0.10
Parâmetro de forma (q_6)	-	1.0
Dano crítico em cisalhamento (D_c^S)	-	0.16

Tabela 4.2: Propriedades materiais para a liga de alumínio aeronáutico.

PROPRIEDADE	UNIDADE	VALOR
Módulo de elasticidade (E)	[GPa]	65
Limite de escoamento inicial (σ_y)	[MPa]	420
Expoente de dano (s)	-	1
Denominador de dano ($S_{0,0}$)	[MPa]	25
Denominador de dano ($S_{0,33}$)	[MPa]	10
Dano crítico (D_c)	-	0.37
Fração volumétrica de vazios com potencial para nucleação (f_N)	-	0.04
Desvio padrão da deformação para nucleação de vazios (S_N)	-	0.20
Deformação média para nucleação de vazios (ε_N)	-	0.10
Parâmetro de forma (q_1)	-	1.0
Parâmetro de forma (q_2)	-	1.5
Parâmetro de forma (q_3)	-	2.25
Fração volumétrica crítica de vazio (f_c)	-	0.061
Defeitos com potencial para nucleação (d_N)	-	0.08
Desvio padrão da deformação para nucleação de defeitos (S'_N)	-	0.15
Deformação média para nucleação de defeitos (ε'_N)	-	0.10
Parâmetro material de sensibilidade ao cisalhamento (k)	-	0.10
Parâmetro de forma (q_6)	-	1.0
Dano crítico em cisalhamento (D_c^s)	-	0.10

As curvas de encruamento para ambos os materiais são descritas através dos Gráficos 4.1 e 4.2, respectivamente para o aço 1045 e liga de alumínio aeronáutico.

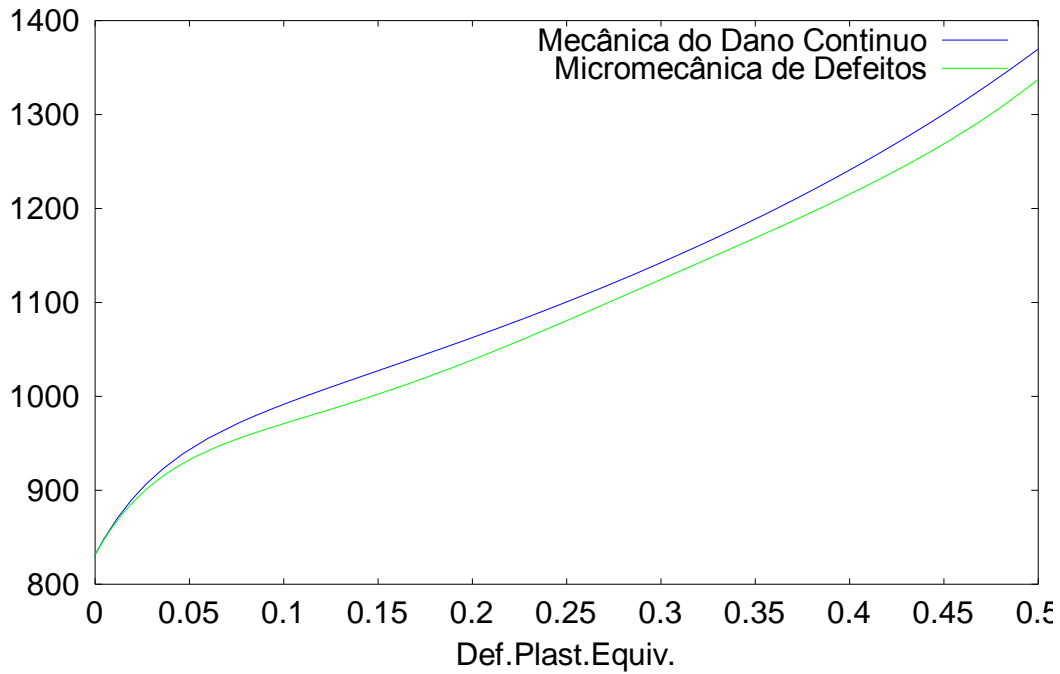


Figura 4.5 - Curva de encruamento para o aço 1045

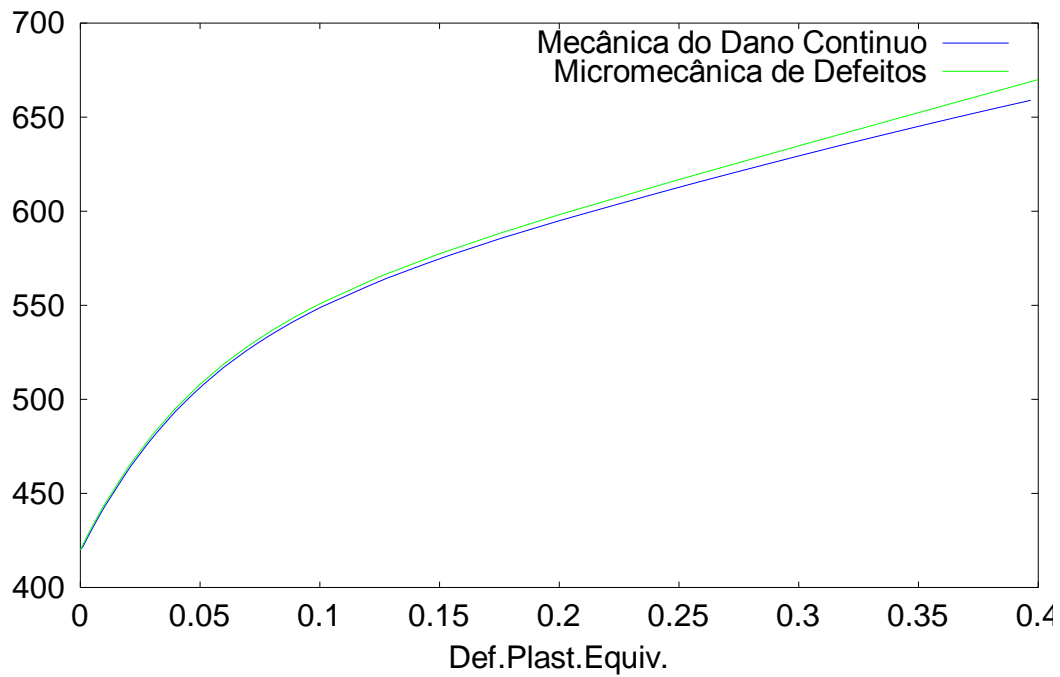


Figura 4.6 - Curva de encruamento para a liga de alumínio aeronáutico.

4.3 Resultados numéricos para o aço 1045

As Figuras 4.7, 4.8, 4.9, 4.10 e 4.11 apresentam as curvas de reação e evolução do dano para os diferentes CP's e estados de tensão aplicados. Observa-se, de acordo com a Figura 4.7, que o comportamento mecânico descrito pelos quatro modelos constitutivos em estudo foi semelhante. Este fato ocorre devido a este estado de tensão ser tradicionalmente usado para calibração e determinação de todos os parâmetros do material. Neste caso, observa-se um valor de dano crítico na ordem de 0.26 para os modelos baseados na Mecânica do Dano Contínuo. Para os dois modelos baseados na Micromecânica de Defeitos, dois valores de dano crítico (porosidade) são avaliados, visto a existência de dois parâmetros de dano para o modelo GTN Estendido. Estes valores são 0.076 para a porosidade crítica e 0.16 para o dano em cisalhamento.

De acordo com a Figura 4.8, observa-se que os modelos tradicionais de dano têm um comportamento otimista com relação a determinação do correto deslocamento para a fratura dúctil. Verifica-se que para o modelo de Lemaitre, o deslocamento para a fratura é por volta de 50% maior que o observado experimentalmente. Além disso, o modelo GTN faz uma previsão por volta de 30% maior que a observação experimental. Considerando o comportamento dos dois modelos avançados, o modelo CDM Aperfeiçoado apresenta os melhores resultados, perfazendo uma previsão na ordem de menos de 5% da previsão experimental. Contudo, o modelo GTN Estendido apresentou a mesma previsão do modelo GTN original. Esta condição é justificada pelo fato de que a melhoria adicionada ao modelo, captar predominantemente condições cisalhantes para a previsão da fratura dúctil.

Desta forma, para estados de tensão predominantemente de tração, o modelo CDM Aperfeiçoado passa a ser o mais recomendado para determinação da fratura dúctil e estimativa dos corretos campos de tensão e deformação.

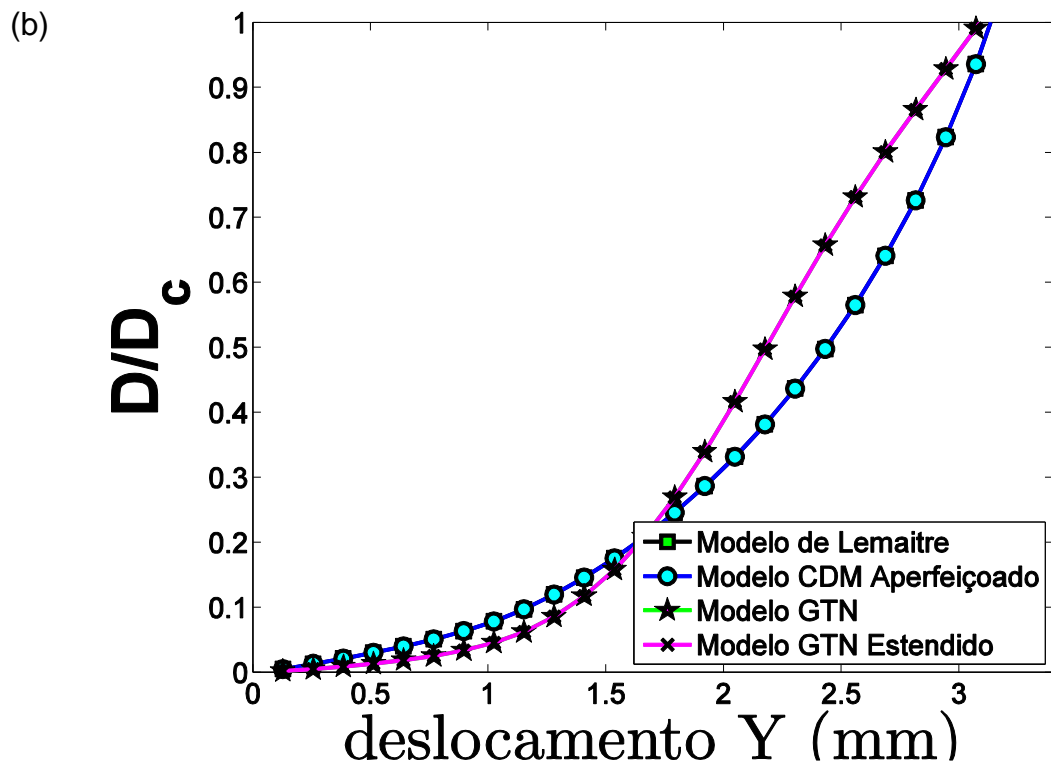
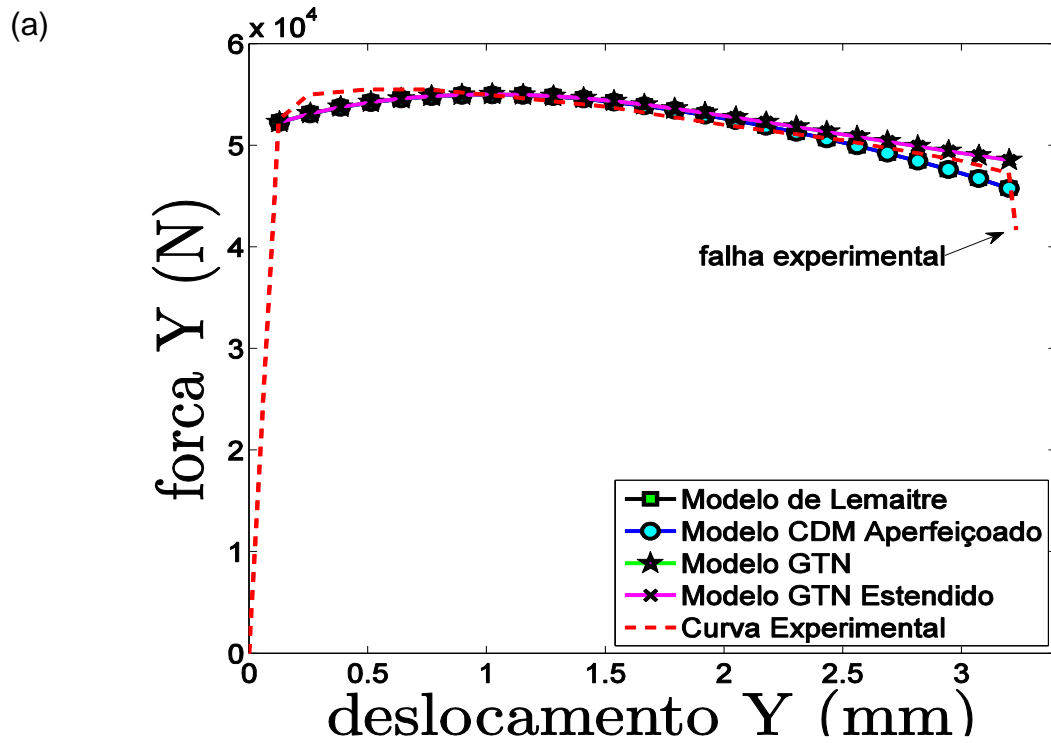


Figura 4.7: (a) Curva força versus deslocamento, (b) dano versus deslocamento, para o corpo de prova cilíndrico liso sujeito a tração pura.

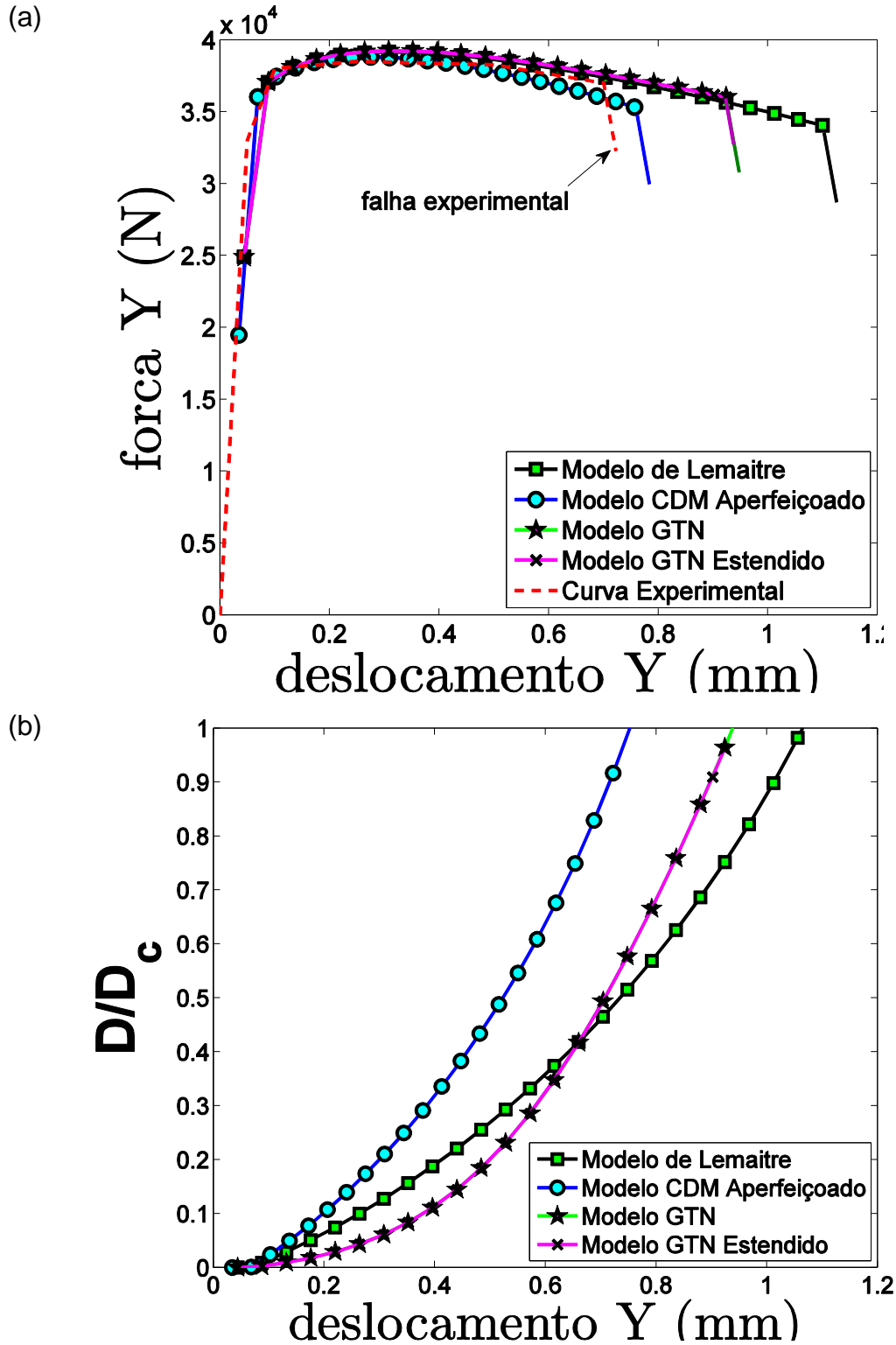


Figura 4.8: (a) Curva força versus deslocamento, (b) dano versus deslocamento, para o corpo de prova cilíndrico entalhado sujeito a tração pura.

Para o corpo de prova borboleta, a Figura 4.9 apresenta o desempenho dos modelos, considerando um carregamento de cisalhamento simples. Nesta condição, o modelo de Lemaitre tradicional faz uma previsão prematura do início da fratura dúctil. Por sua vez, o modelo GTN original não é capaz de prever a fratura sob este estado de tensão, visto que o valor de porosidade crítica não é atingido para qualquer valor de deslocamento aplicado. Este fato é justificado pela própria proposição da lei de evolução da fração volumétrica de vazios. Neste caso, o mecanismo é proposto no sentido de captar somente a mudança volumétrica de vazios, o que em carregamentos puramente cisalhante não ocorre. Para estas condições de carga, uma significativa distorção do vazio ocorre no lugar de seu aumento volumétrico.

Considerando os resultados para os modelos avançados (CDM Aperfeiçoado e GTN Estendido) a previsão do início da fratura dúctil foi exatamente em concordância com a observação experimental.

Analisando a Figura 4.10, onde o CP borboleta é submetido a carregamento de tração pura, verifica-se um comportamento semelhante ao observado para o CP cilíndrico entalhado analisado anteriormente. Neste caso, o modelo CDM Aperfeiçoado é novamente o que melhor prevê o início da fratura dúctil. Os modelos tradicionais novamente apresentam um comportamento otimista. O modelo GTN Estendido acaba recuperando as mesmas condições e desempenho do modelo original neste estado de tensão.

Considerando os resultados para o CP borboleta sujeito a carregamento combinado de tração e cisalhamento mostrados na Figura 4.11, observa-se que os modelos avançados possuem uma previsão próxima a observação experimental, o que não ocorre com os modelos clássicos que sempre fazem previsões otimista. Nesta condição de carregamento aplicada, o carregamento cisalhante é predominante sob o carregamento trativo, fazendo com que o modelo GTN Estendido tenha um comportamento diferente do modelo GTN original, devido a adição de mecanismo capaz de detectar a distorção dos vazios existentes no material.

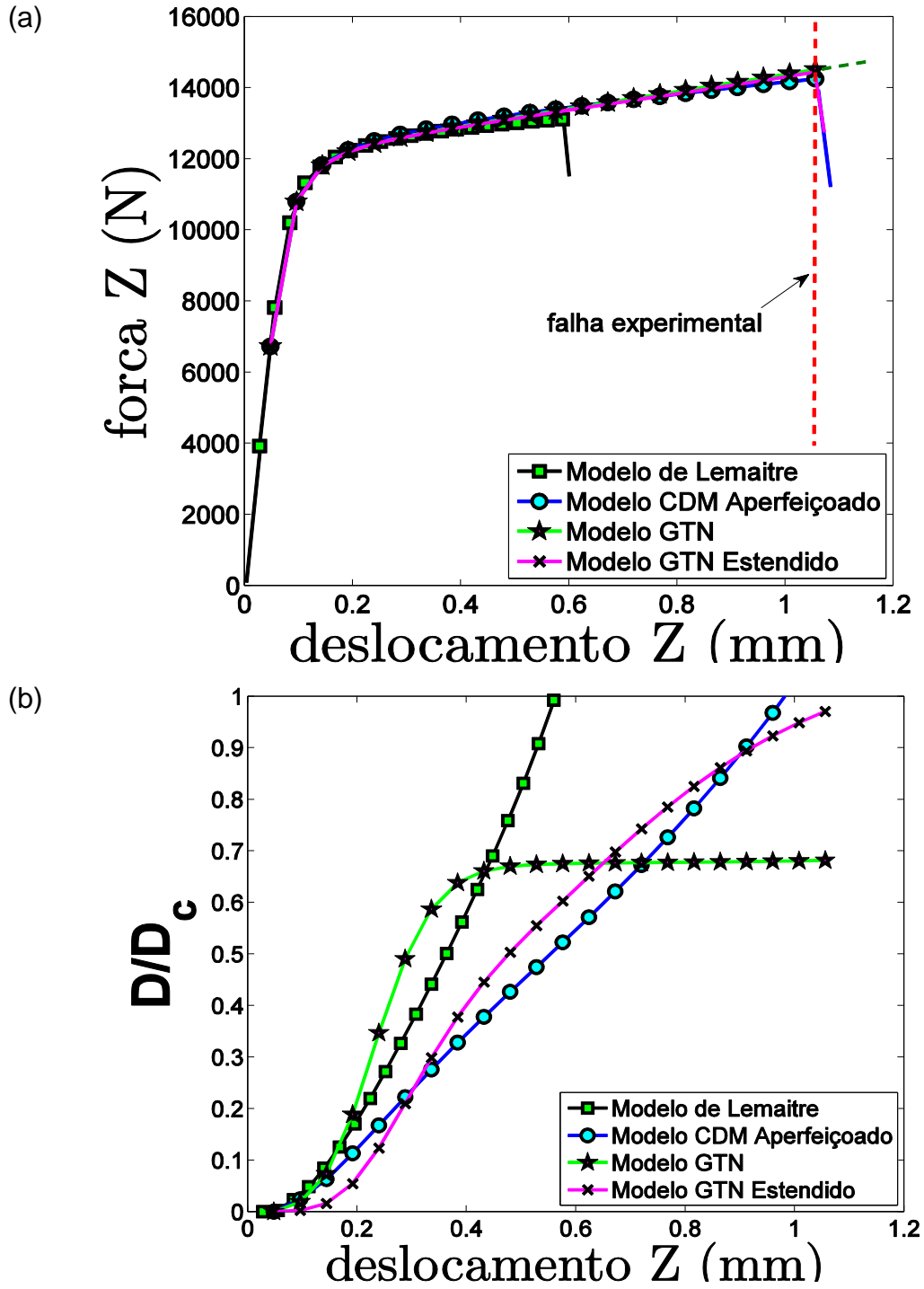


Figura 4.9: (a) Curva força versus deslocamento, (b) dano versus deslocamento, para o corpo de prova tipo borboleta sujeito a cisalhamento simples.

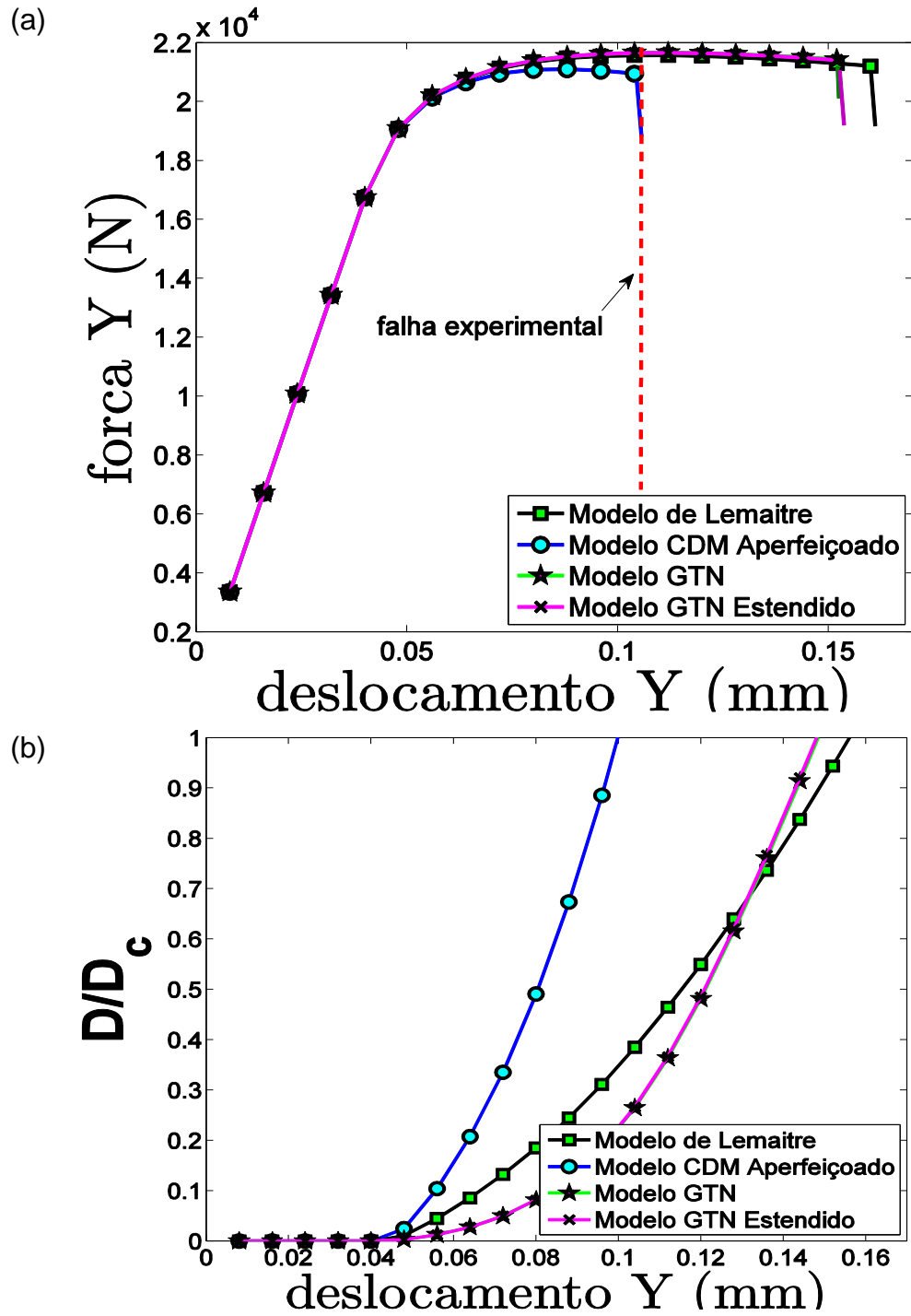


Figura 4.10: (a) Curva força versus deslocamento, (b) dano versus deslocamento, para o corpo de prova tipo borboleta sujeito a tração pura.

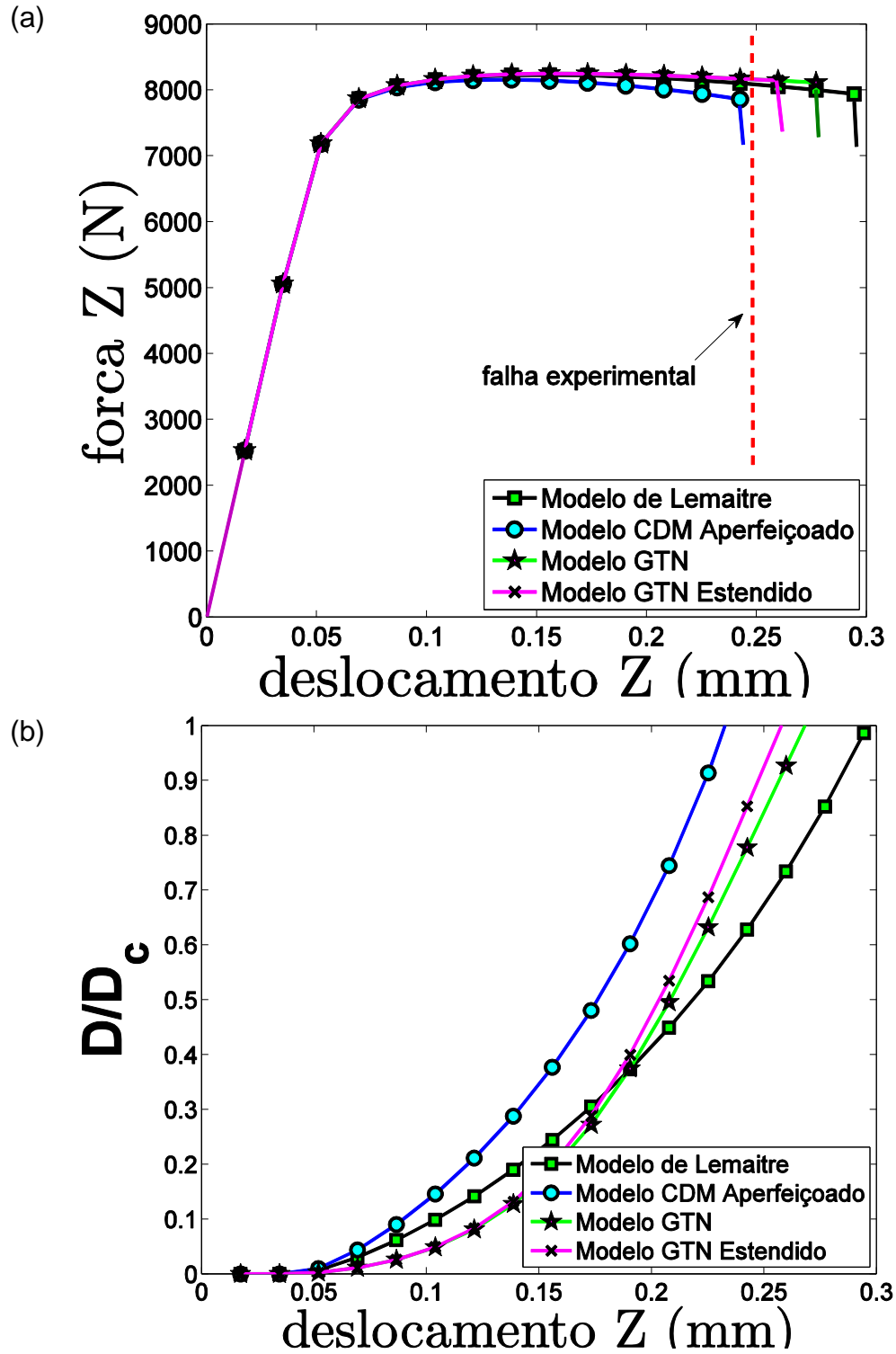


Figura 4.11: (a) Curva força versus deslocamento, (b) dano versus deslocamento, para o corpo de prova tipo borboleta sujeito a combinação cisalhamento-tração.

A Tabela 4.3 apresenta um resumo dos deslocamentos previstos pelos modelos e também os valores observados experimentalmente.

Tabela 4.3: Deslocamento na fratura numéricos e experimental – aço 1045.

Corpo de prova/carregamento	$u_f \text{ numerico [mm]}$				$u_f \text{ exper [mm]}$
	Lemaitre	CDM	GTN	GTN est	
Cilíndrico liso/tração	3.20	3.20	3.20	3.20	3.20
Cilíndrico entalhado/tração	1.10	0.75	0.96	0.96	0.70
Borboleta/cisalhamento	0.60	1.00	-	1.00	1.05
Borboleta/tração	0.16	0.10	0.15	0.15	0.11
Borboleta/combinado	0.29	0.24	0.28	0.26	0.25

As Figuras 4.12 e 4.13 apresentam resultados para a evolução da deformação plástica equivalente e evolução do nível de triaxialidade para todos os CP's e carregamentos aplicados. Observa-se que os modelos baseados na Mecânica do Dano Contínuo apresentam sempre taxa e níveis diferentes para a deformação plástica equivalente. Contudo, os modelos baseados na Micromecânica de Defeitos apresentam sempre a mesma taxa de evolução, porém valores diferentes previstos no momento da fratura. Para a evolução da triaxialidade ao longo dos deslocamentos aplicados, observa-se uma variação significativa com relação aos valores iniciais. Isto é justificado pela mudança na geometria dos CP's ao longo da aplicação da carga. Por exemplo, nos CP's cilíndricos a formação da estrição na zona de interesse gera uma modificação geométrica alterando assim o estado de tensão.

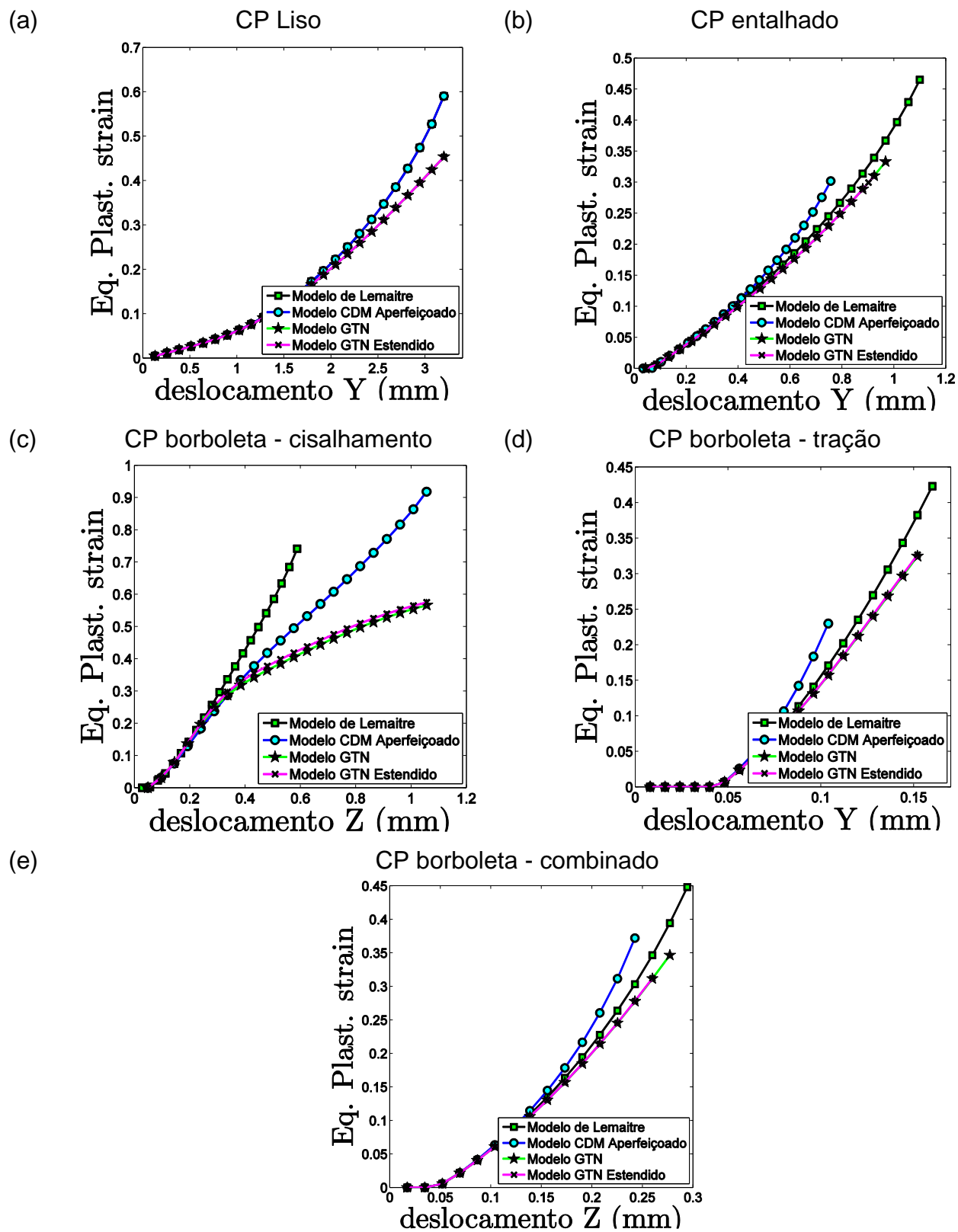


Figura 4.12: (a-e) Evolução da deformação plástica equivalente versus deslocamento para os diferentes corpos de prova de aço 1045.

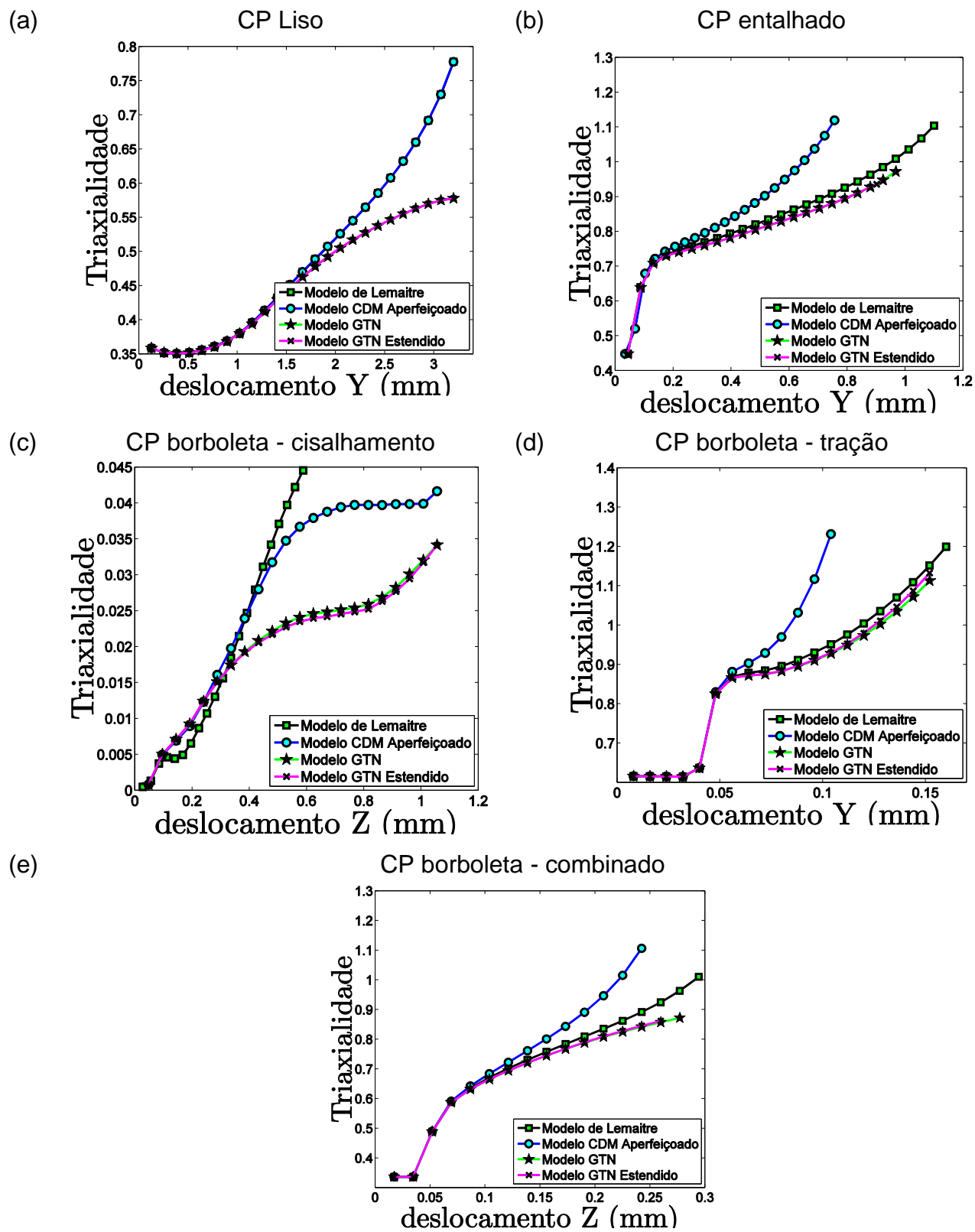


Figura 4.13 (a-e): Evolução do nível de triaxialidade versus deslocamento para os diferentes corpos de prova de aço 1045.

4.4 Resultados numéricos para a liga de alumínio aeronáutico.

As Figuras 4.14, 4.15 e 4.16 apresentam os resultados para as curvas de força versus deslocamento dos corpos de prova usados. Novamente para o ensaio de tração, contudo aplicado no CP retangular liso (Figura 4.14) os desempenhos dos modelos foram semelhantes, visto que o mesmo é usado para a calibração e determinação dos parâmetros do material. Observa-se, neste caso que o dano crítico para os modelos baseado na Mecânica do Dano Contínuo foi na ordem de 0.37. Já para os modelos baseados na Micromecânica de Defeitos, a porosidade crítica foi na ordem de 0.061 e o dano crítico em cisalhamento na ordem de 0.10.

Para os resultados encontrados, considerando o CP retangular entalhado sujeito a tração (Figura 4.15), o modelo CDM Aperfeiçoado foi o que novamente apresentou a melhor previsão quando comparado ao observado experimentalmente. Os outros modelos, incluindo o modelo GTN Estendido apresentaram previsões otimista para o deslocamento na fratura.

Analisando a Figura 4.16, observa-se que a previsão do início da fratura dúctil para os modelos GTN Estendido e CDM Aperfeiçoado foram próximas das observações experimentais. Neste caso, mesmo considerando um estado cisalhante de tensão, os modelos clássicos tiveram um comportamento otimista, diferentemente do comportamento encontrado para o CP borboleta sujeito a cisalhamento simples para o aço 1045. Este comportamento é então justificado pelo fato de que o ponto crítico para início da fratura não está localizado na região central do CP, onde se tem um estado de cisalhamento simples. Este ponto crítico de dano está localizado as extremidades da região de interesse do CP, onde se tem um estado combinado de tensão.

A Tabela 4.4 apresenta os deslocamento para a fratura previstos pelos modelos, bem como os valores experimentais.

Tabela 4.4: Deslocamento na fratura numéricos e experimental – alumínio aeronáutico.

Corpo de prova/carregamento	$u_f \text{ numerico [mm]}$				$u_f \text{ exper [mm]}$
	Lemaitre	CDM	GTN	GTN est	
Retangular liso/tração	7.50	7.50	7.50	7.50	7.50
Retangular entalhado/tração	2.40	1.25	1.80	1.90	1.15
Cisalhamento/cisalhamento	3.90	1.97	3.20	1.99	2.00

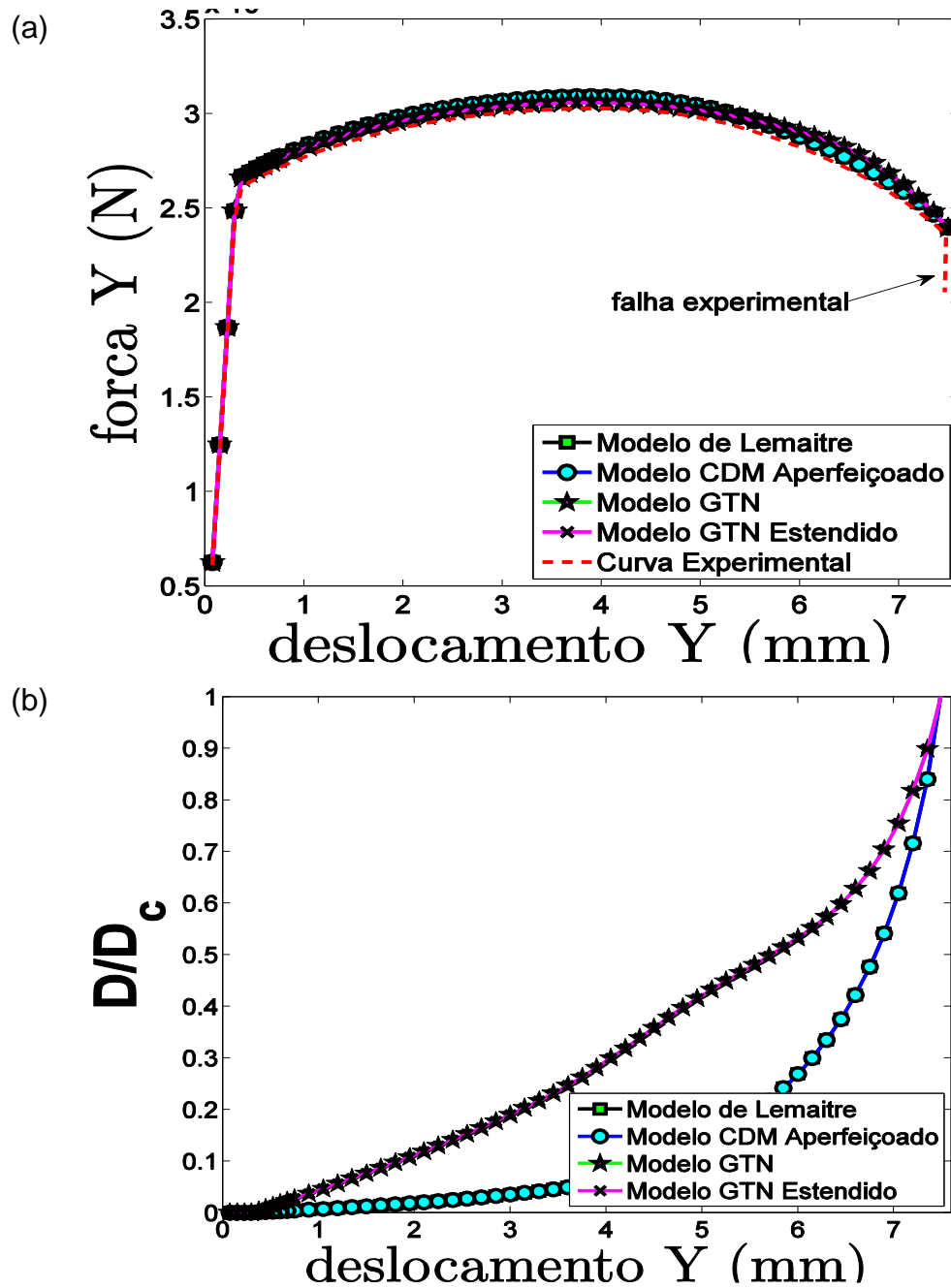


Figura 4.14: (a) Curva força versus deslocamento, (b) dano versus deslocamento, para o corpo de prova retangular liso sujeito a tração pura.

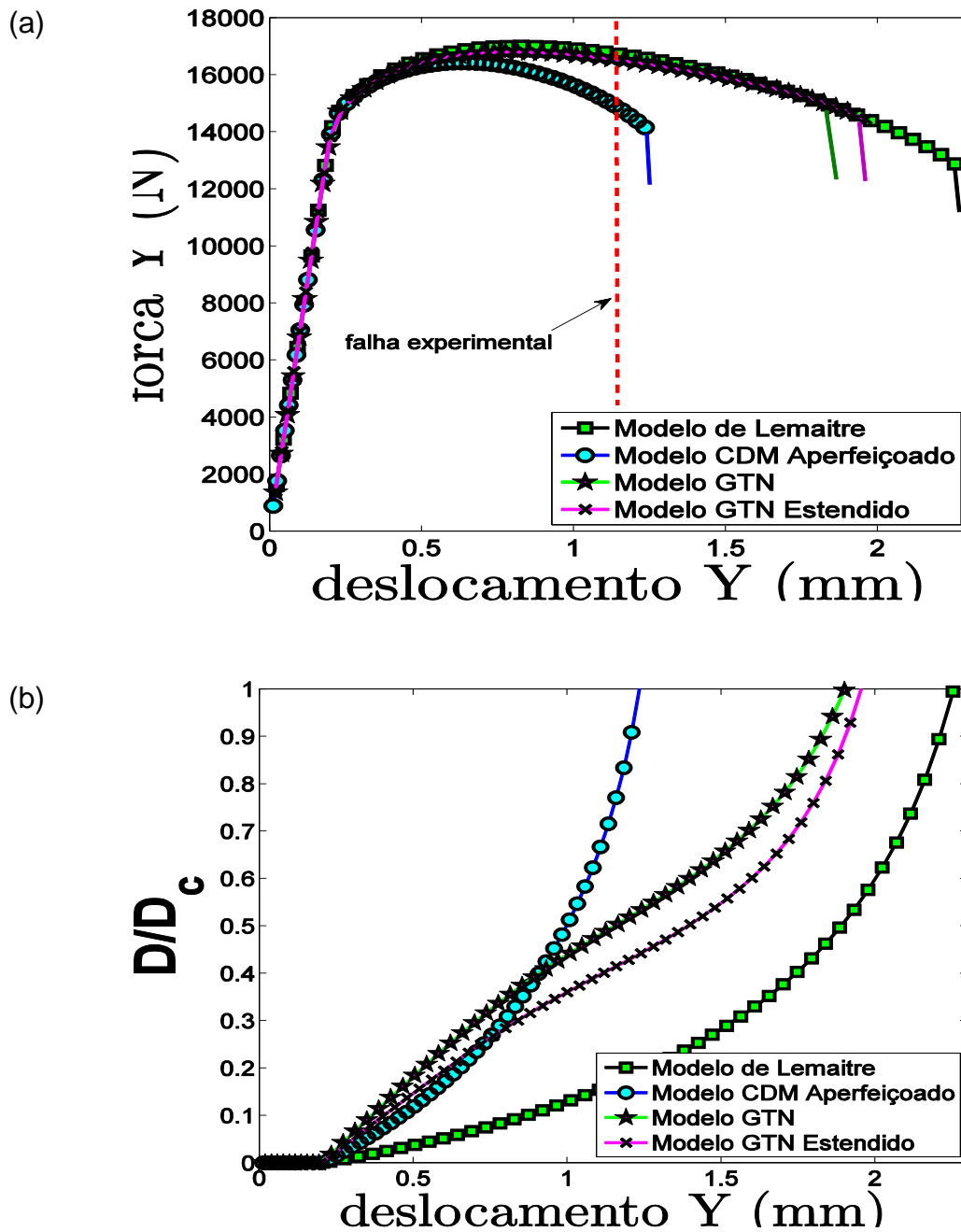


Figura 4.15: (a) Curva força versus deslocamento, (b) dano versus deslocamento, para o corpo de prova retangular entalhado sujeito a tração pura.

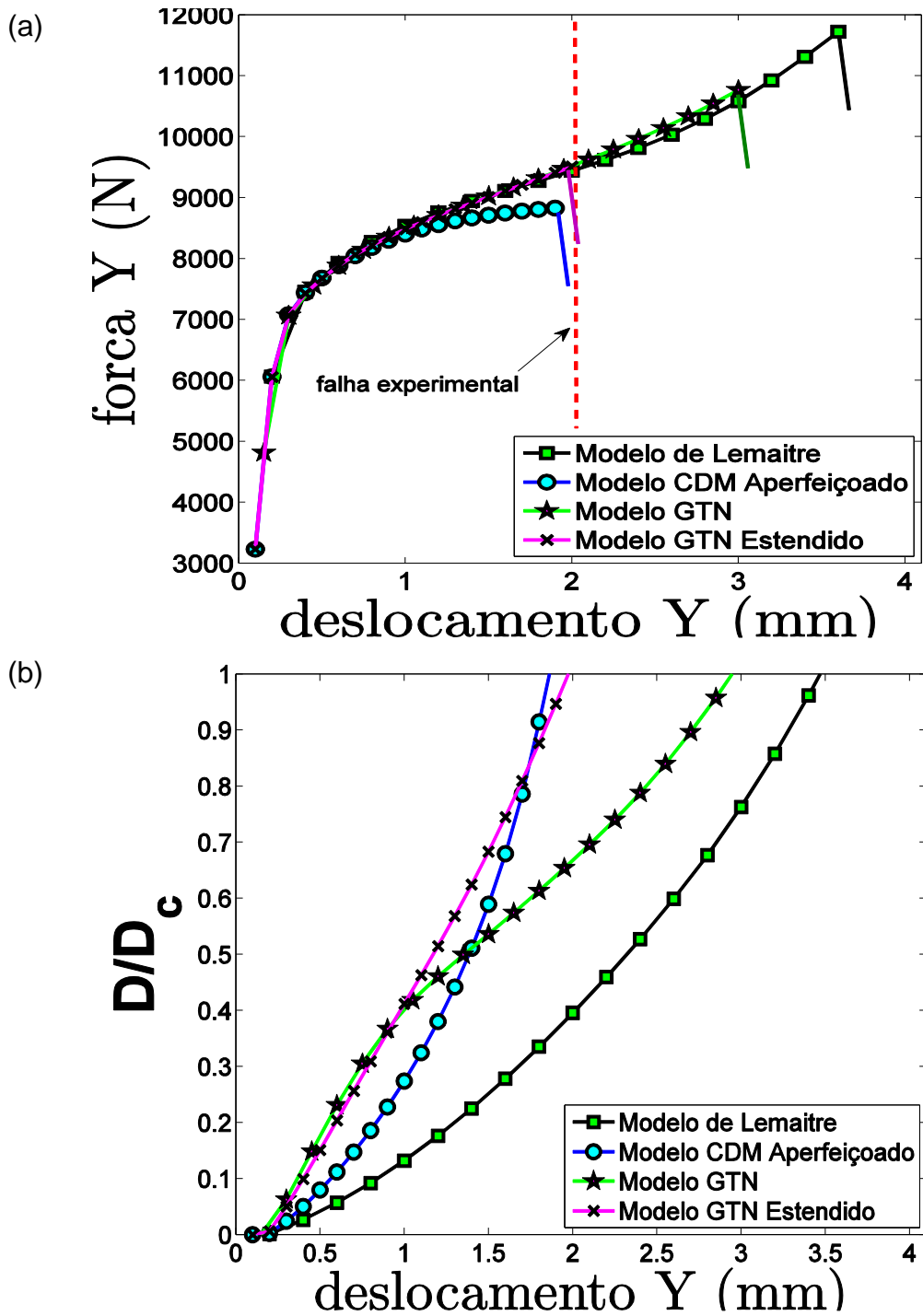


Figura 4.16: (a) Curva força versus deslocamento, (b) dano versus deslocamento, para o corpo de cisalhamento.

As Figura 4.17 e 4.18 apresentam as evoluções da deformação plástica equivalente e triaxialidade para os diferentes CP's utilizados. Um comportamento semelhante ao descrito para o aço 1045 foi observado.

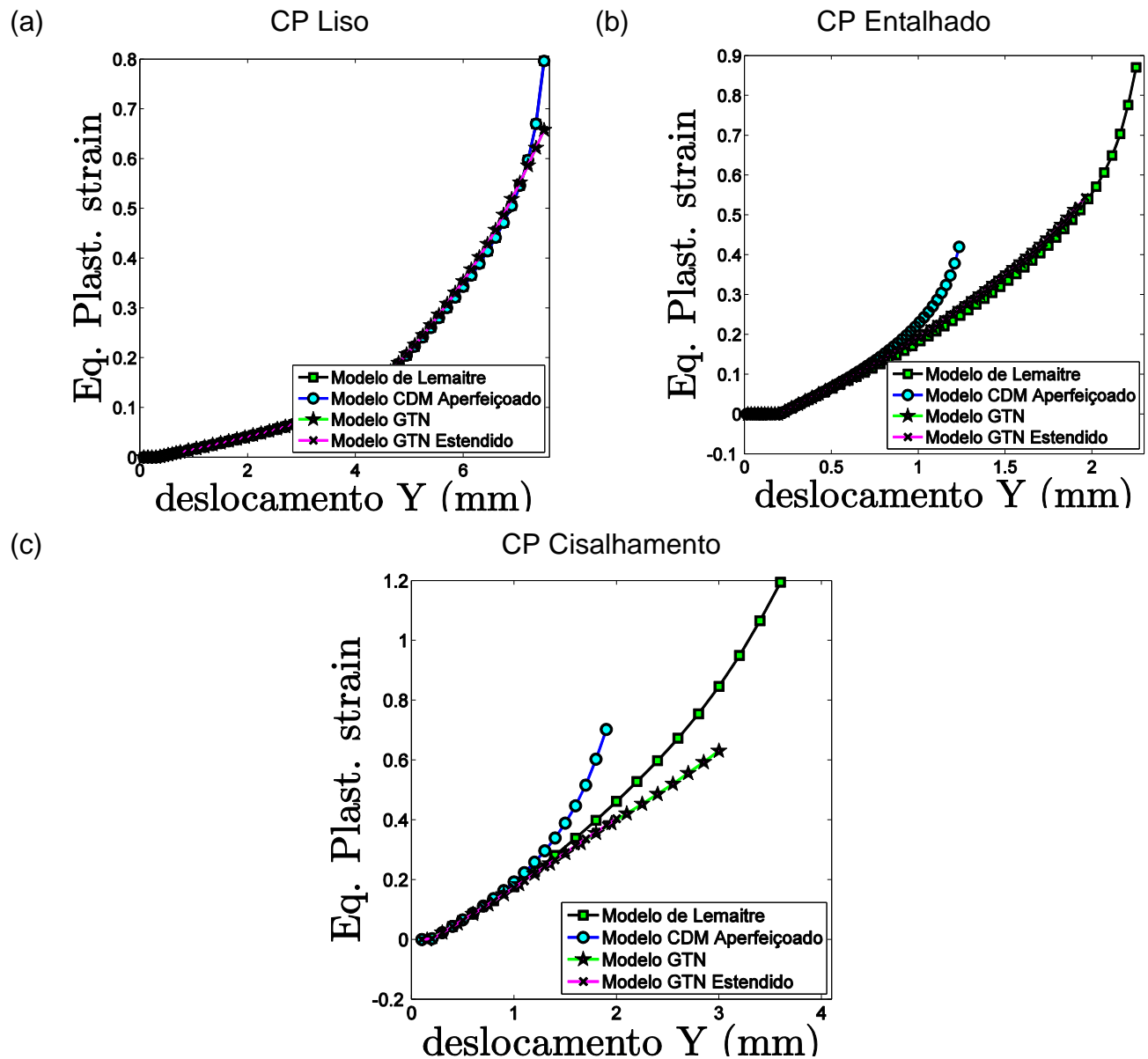


Figura 4.17: (a-c) Evolução da deformação plástica equivalente versus deslocamento para os diferentes corpos de prova de liga de alumínio aeronáutico.

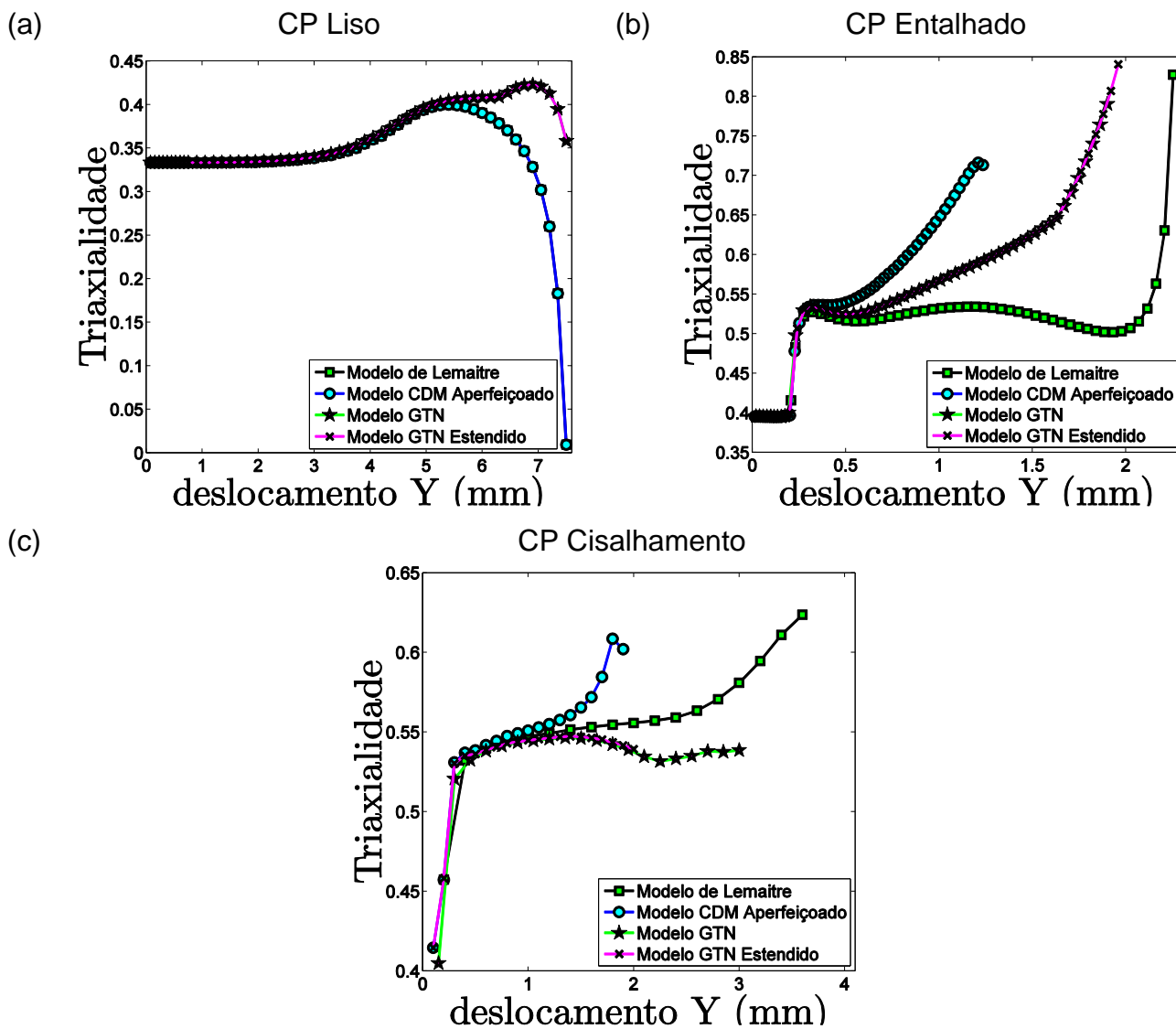


Figura 4.18: (a-c) Evolução do nível de triaxialidade versus deslocamento para os diferentes corpos de prova de liga de alumínio aeronáutico.

4.5 Previsão do potencial local para início da fratura.

As Figuras 4.19, 4.20, 4.21, 4.22 e 4.23 apresentam o contorno dos parâmetros de dano calculados pelos diferentes modelos estados, considerado o aço 1045.

Observa-se que para os CP's cilíndricos (Figura 4.19 e 4.20), as previsões de todos os modelos foram semelhantes para o local da fratura, além de estarem em concordância com as observações experimentais. Neste caso, espera-se que a fratura dúctil se inicie no centro dos CP's e se propague em direção a superfície.

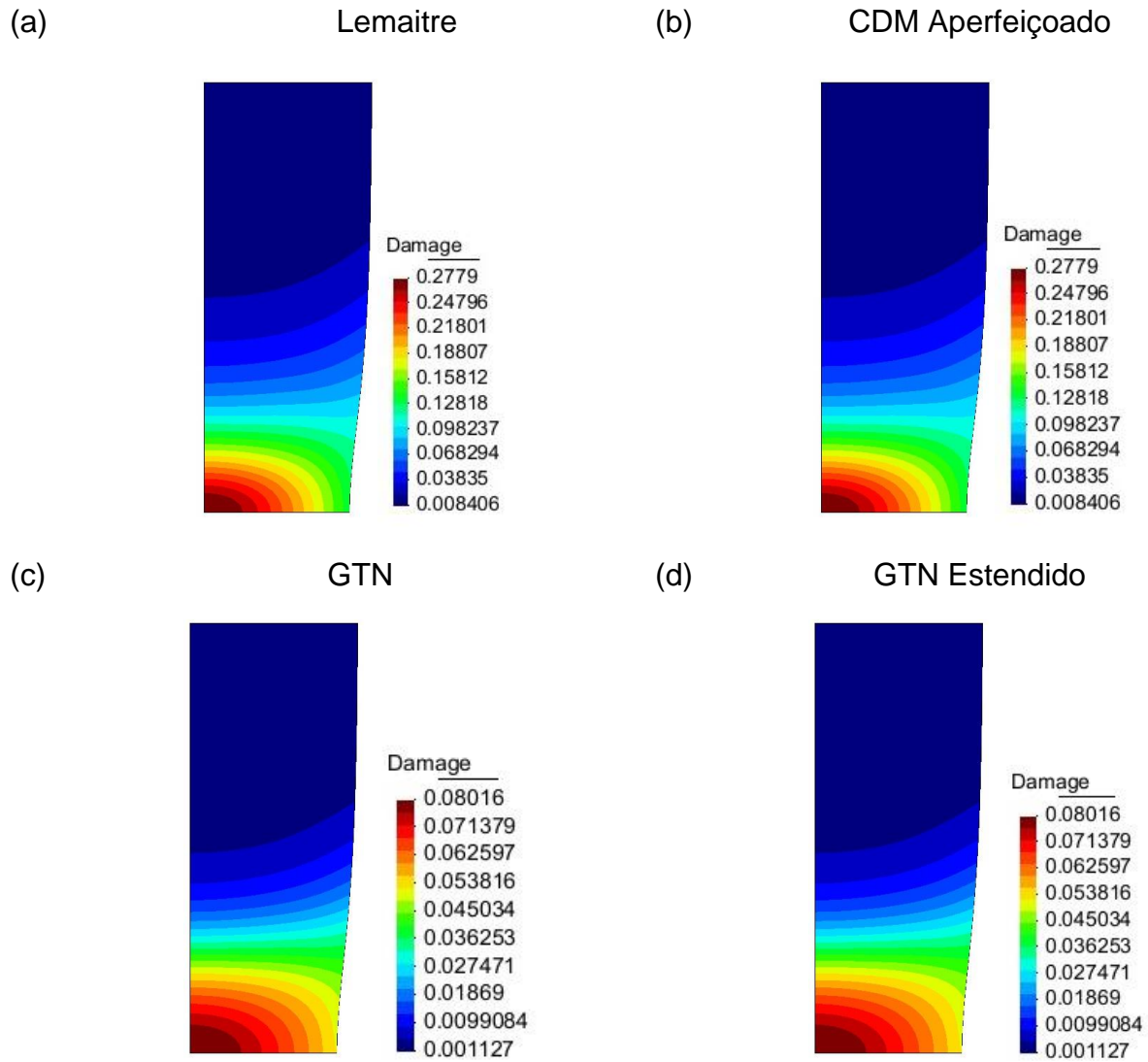


Figura 4.19: (a-d) Previsão do potencial local para início da fratura dúctil, considerando CP cilíndrico liso – aço 1045.

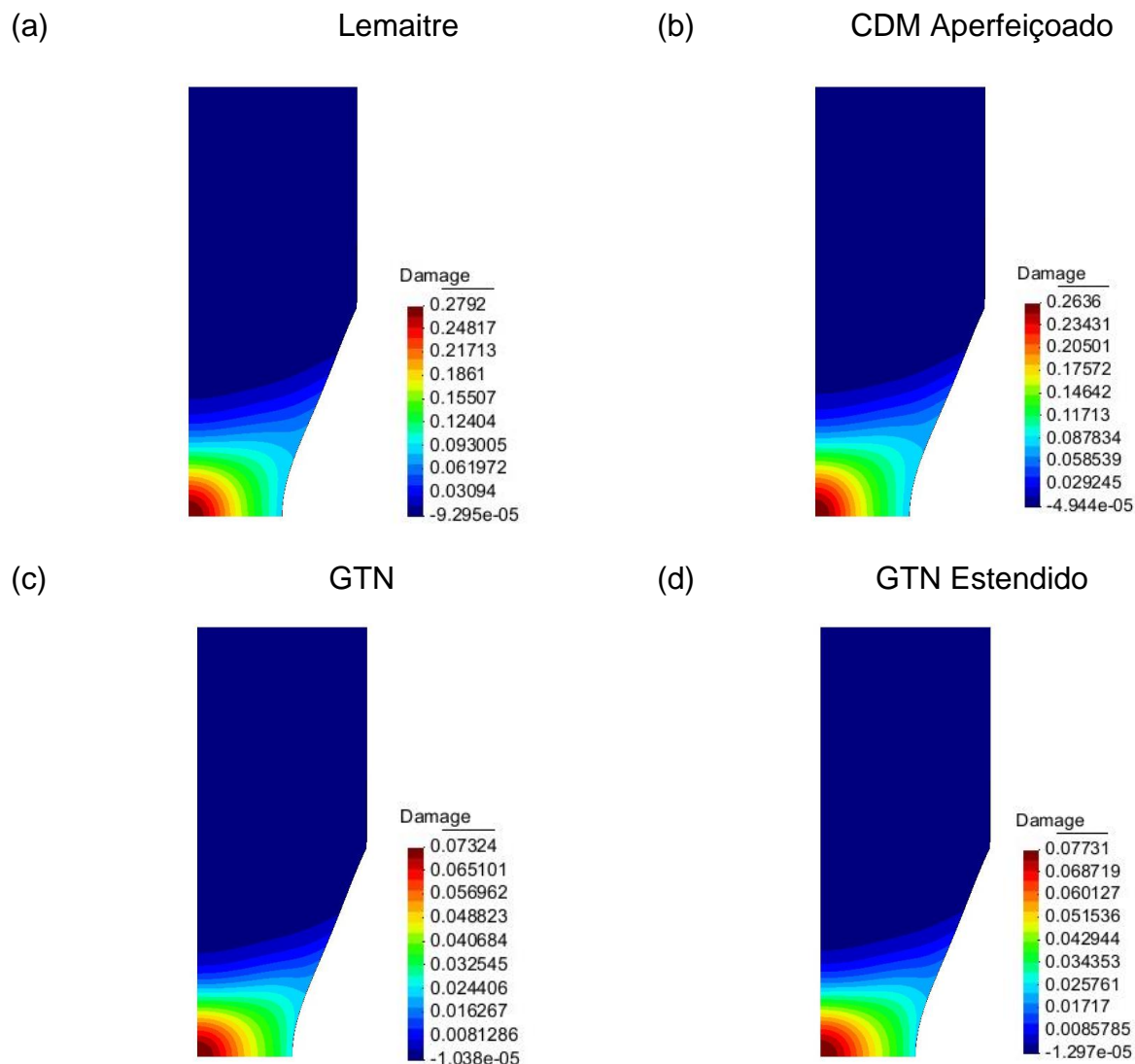


Figura 4.20: Previsão do potencial local para início da fratura dúctil, considerando CP cilíndrico entalhado – aço 1045.

Para o CP borboleta usado em cisalhamento simples (Figura 4.21), observa-se que o GTN original não é capaz de prever o potencial local para início da fratura dúctil, visto que o nível de porosidade crítica nunca é alcançado. Os modelos baseados na Mecânica do Dano Contínuo e o modelo GTN Estendido são capazes de prever o local em concordância com as observações experimentais. Neste caso, espera-se que a fratura se inicie na superfície da zona crítica e se propague em direção ao centro do CP.

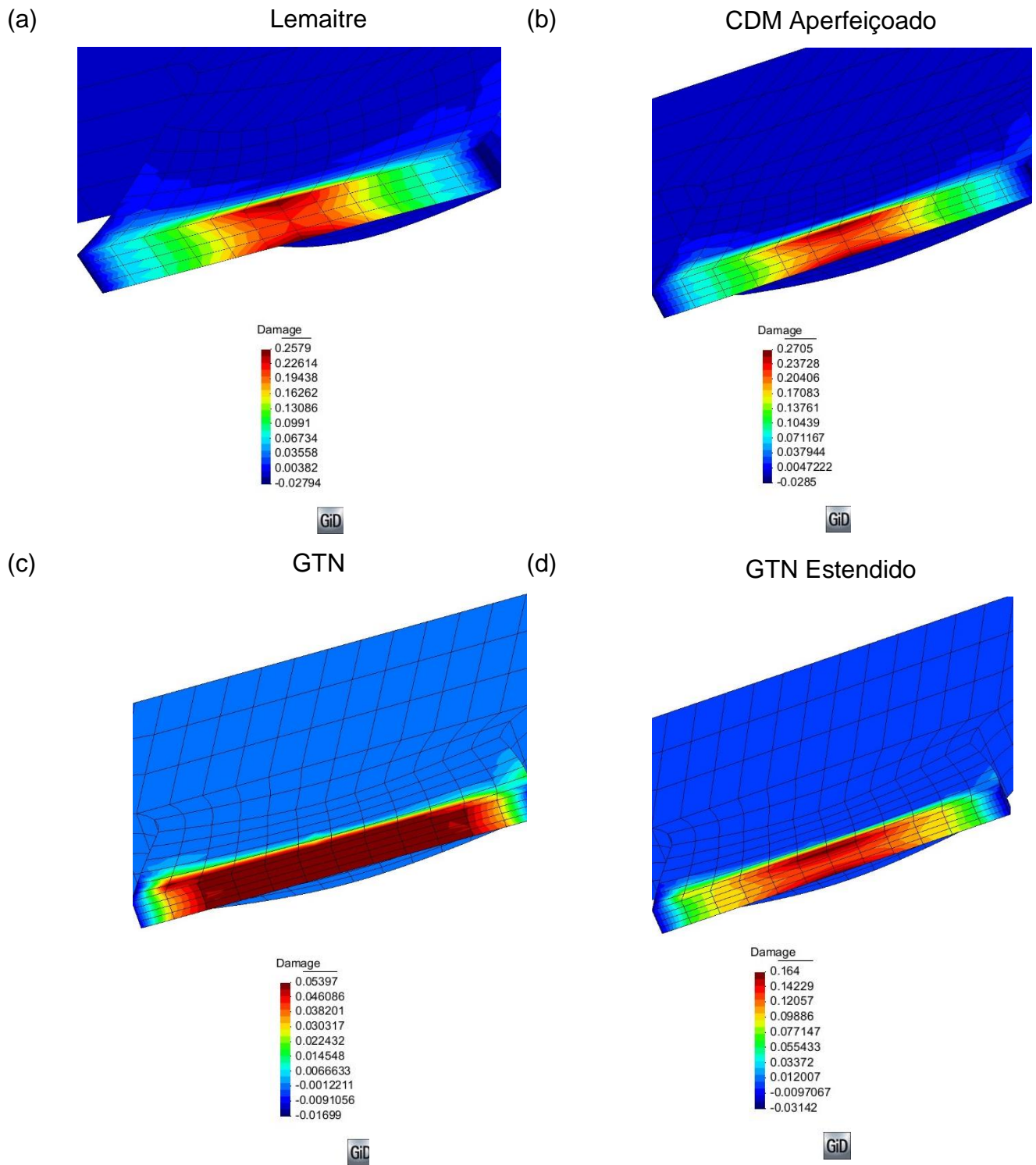


Figura 4.21: (a-d) Previsão do potencial local para início da fratura dúctil, considerando CP borboleta sujeito a cisalhamento simples – aço 1045.

Para os CP's borboleta sujeitos a tração pura e carregamento combinado de tração/cisalhamento (Figura 4.22 e 4.23), todos os modelos foram capazes de identificar o potencial local para início da fratura dúctil, porém em momentos diferentes.

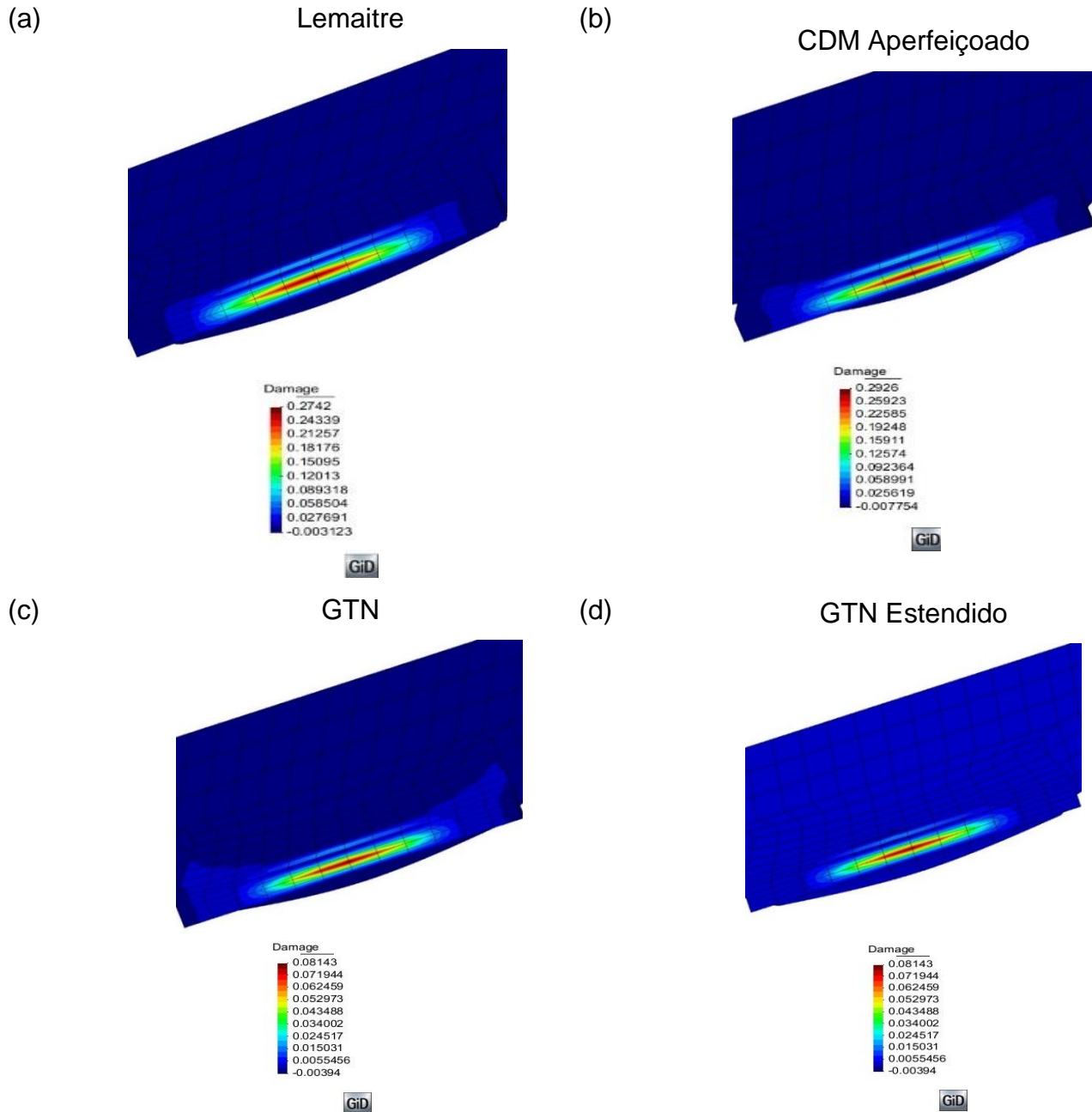


Figura 4.22: (a-d) Previsão do potencial local para início da fratura dúctil, considerando CP borboleta sujeito a tração pura – aço 1045.

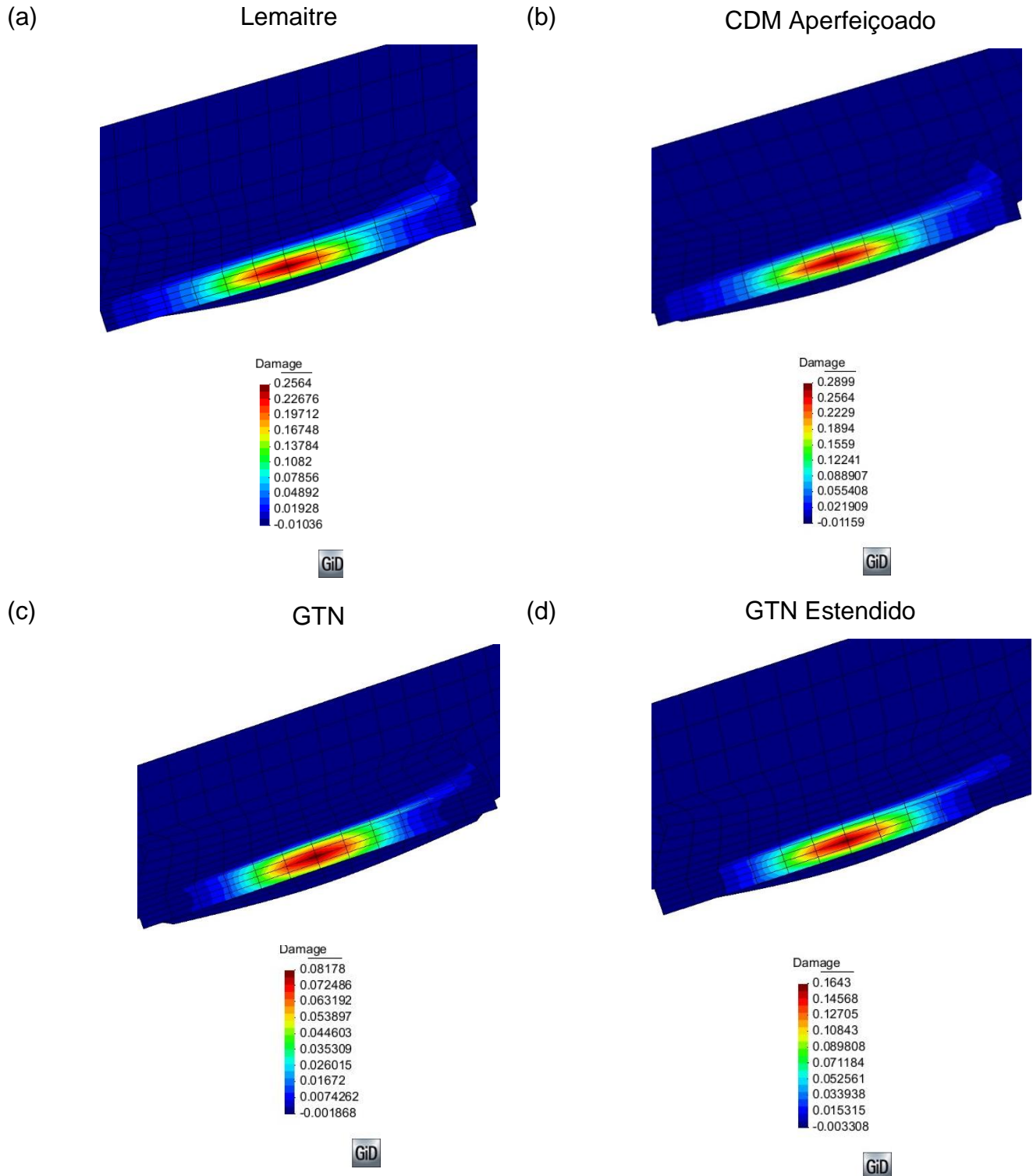


Figura 4.23: (a-d) Previsão do potencial local para início da fratura dúctil, considerando CP borboleta sujeito a carregamento combinado – aço 1045.

As Figuras 4.24, 4.25 e 4.26 apresentam o contorno dos parâmetros de dano para os CP's retangulares fabricados em alumínio aeronáutico. Neste caso, todos os modelos foram capazes de identificar um local potencial para início da fratura. Contudo, para os CP's retangulares liso e entalhado, os modelos baseados na Mecânica do Dano contínuo apresentaram locais ligeiramente afastados do centro geométrico do CP, diferentemente dos modelos baseados na Micromecânica de Defeitos, que apresentaram locais potenciais muito próximos ao centro geométrico do CP. Segundo Driemeier (2010), observações experimentais mostram que a fratura ocorre de forma cônica quando raios brandos de entalhe são utilizados. Neste caso, a fratura dúctil não se inicia no centro geométrico do CP, mas sim em regiões adjacentes. Esta observação experimental se assemelha as previsões segundo os modelos baseados na Mecânica do Dano Contínuo.

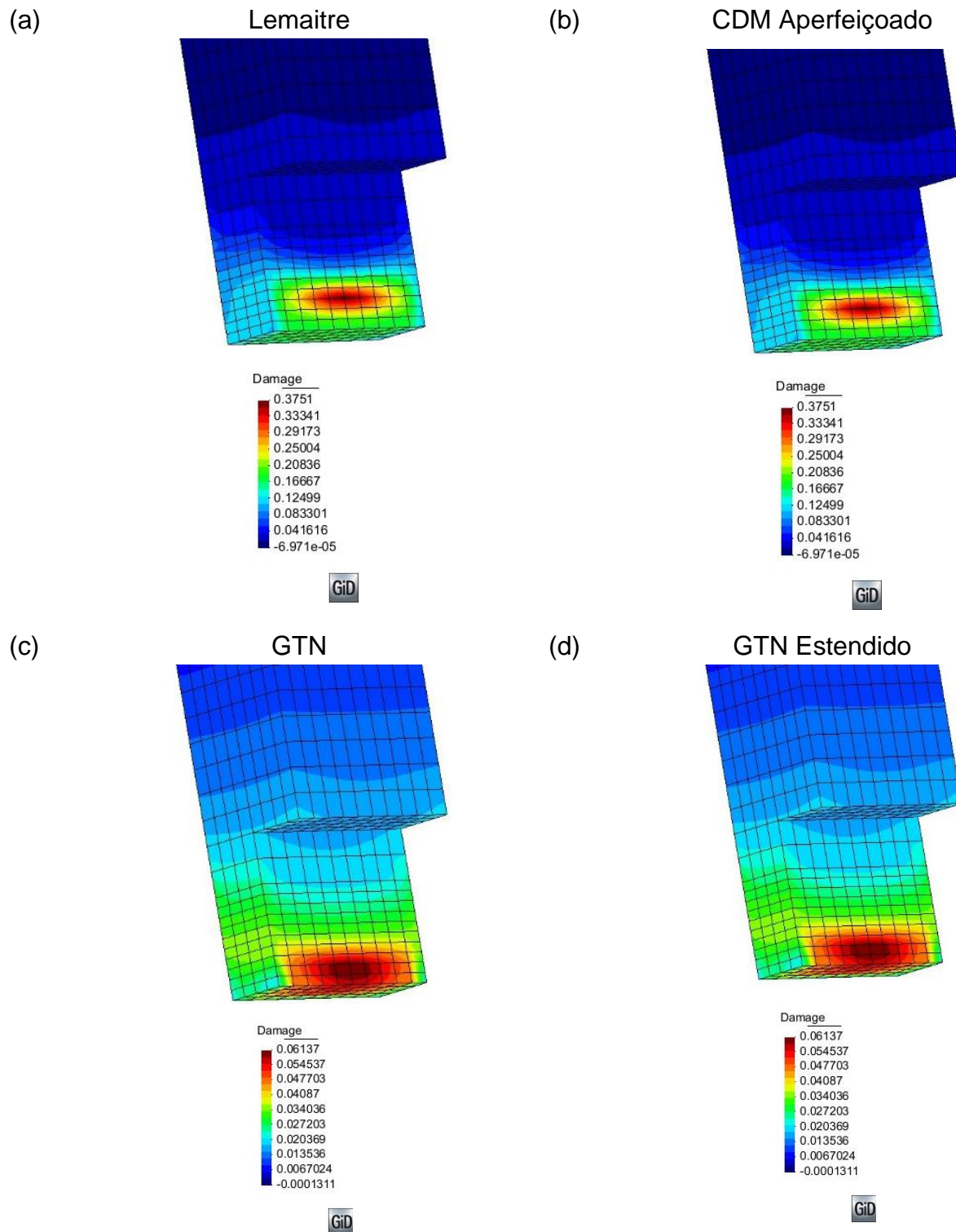


Figura 4.24: (a-d) Previsão do potencial local para início da fratura dúctil, considerando CP retangular liso sujeito a tração pura – liga de alumínio aeronáutico.

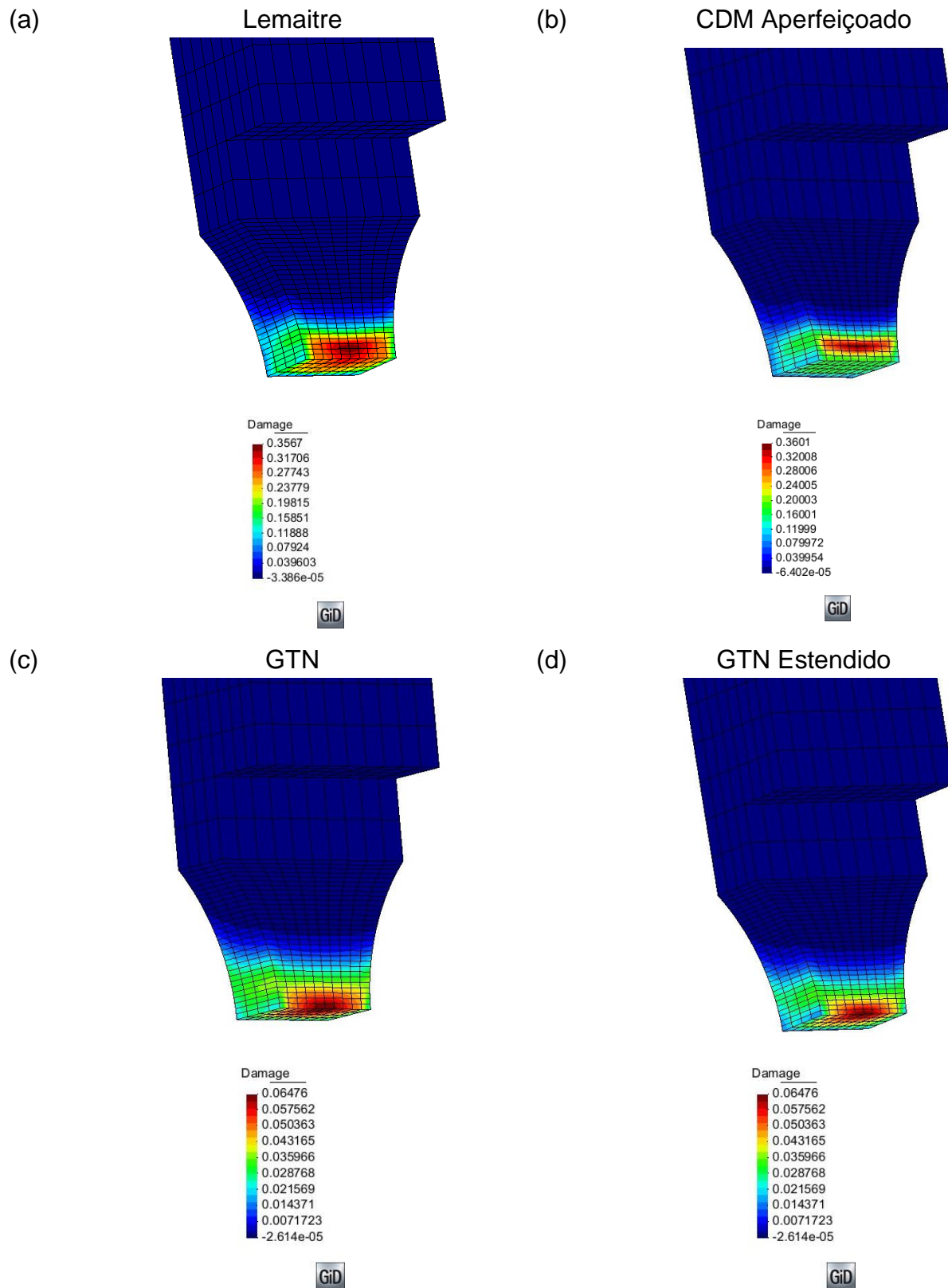


Figura 4.25: (a-d)Previsão do potencial local para início da fratura dúctil, considerando CP retangular entalhado sujeito a tração pura – liga de alumínio aeronáutico.

Para o CP de cisalhamento, todos os modelos apresentaram resultados semelhantes para previsão do potencial local para início da fratura, e em concordância com os resultados experimentais propostos por Driemeier (2010).

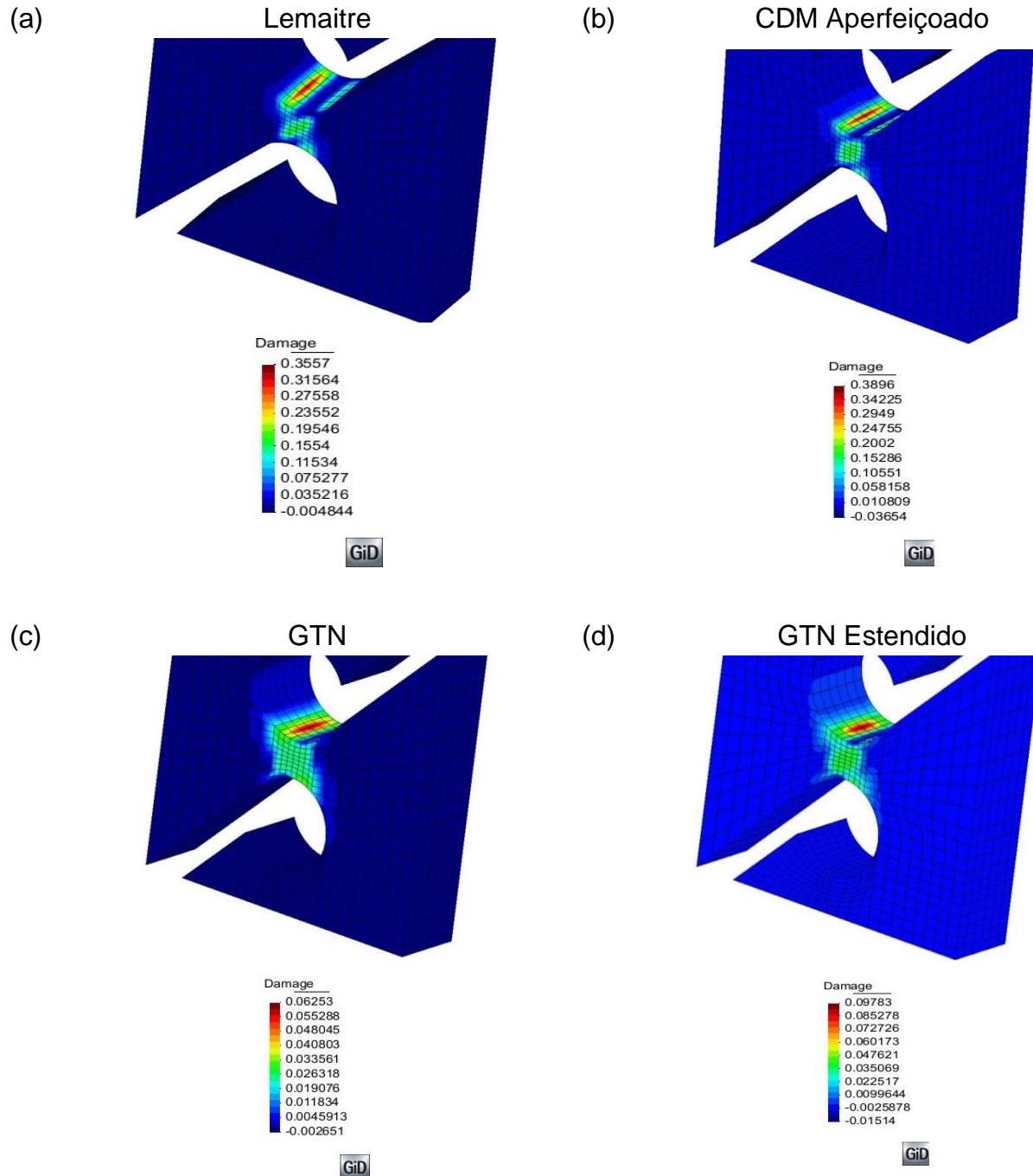


Figura 4.26: (a-d) Previsão do potencial local para início da fratura dúctil, considerando CP retangular entalhado sujeito a tração pura – liga de alumínio aeronáutico.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Nesta dissertação, foi realizado o estudo comparativo de quatro modelos de dano no que tange seus desempenhos na previsão do correto momento e potencial local para início da fratura dúctil. Assim, selecionou-se dois modelos baseados na Mecânica do Dano Contínuo como o modelo de Lemaitre e modelo CDM Aperfeiçoado, bem como dois modelos baseados na Micromecânica de Defeitos, como o modelo GTN e o modelo GTN Estendido. Todos os modelos foram implementados em uma ferramenta acadêmica de elementos finitos, utilizando algoritmos implícitos de integração. Ao se testar a robustez dos modelos, dois materiais largamente utilizados em engenharia foram selecionados, como o aço 1045 e um alumínio aeronáutico, e diferentes tipos de corpos de prova, sujeitos a carregamentos de tração pura, cisalhamento e combinações de tração/cisalhamento.

Simulações numéricas foram feitas para cada corpo de prova e material escolhido, utilizando os diferentes modelos estudados. Considerando os resultados para o aço 1045, observou-se que para os CP's cilíndricos sujeitos a tração pura, o modelo CDM Aperfeiçoado apresentou excelente desempenho tanto na previsão do correto deslocamento para a fratura, quanto na determinação do potencial local para início da fratura dúctil. O desempenho dos modelos clássicos, como o modelo de Lemaitre e o modelo GTN original, foi extremamente otimista quanto a determinação do deslocamento para início da fratura. O modelo GTN Estendido apresentou comportamento semelhante ao modelo GTN original, visto que o mesmo recupera as características originais nesta condição de carregamento (alto nível de triaxialidade).

Considerando agora os CP's borboletas de aço 1045, diferentes tipos de carregamento foram aplicados. Considerando o carregamento cisalhante, ambos os modelos modificados (CDM Aperfeiçoados e GTN Estendido) apresentaram bons desempenhos tanto na determinação do deslocamento para a fratura quanto na previsão do potencial local para início da fratura. O modelo de Lemaitre apresentou desempenho bastante conservativo e o modelo GTN original não foi capaz de prever o início da fratura, visto que neste tipo de carregamento, tem-se uma significativa alteração da forma dos vazios e pouca mudança volumétrica dos mesmos.

Para o carregamento trativo, utilizando também o CP borboleta, somente o modelo CDM modificado foi capaz de prever o comportamento do material de acordo com as observações experimentais disponíveis na bibliografia. Os demais modelos apresentaram comportamento bastante otimista na determinação do deslocamento para a fratura. Contudo, considerando a determinação do potencial local para início da fratura, todos os modelos foram capazes de fazer previsões em concordância com as observações experimentais. Considerando agora o carregamento combinado de tração e cisalhamento, somente os modelos modificados foram capazes de descrever tanto o deslocamento quanto o potencial local para início da fratura dúctil.

Analisando os resultados encontrados para a liga de alumínio aeronáutico, três tipos de carregamentos foram testados. Considerando os CP's retangulares sujeitos a tração, o modelo CDM Aperfeiçoado foi o de melhor desempenho. Neste caso, ao se observar o contorno do parâmetro de dano, constatou-se que somente os dois modelos baseados na Mecânica do Dano Contínuo foram capazes de prever o potencial local para início da fratura, de acordo com as informações experimentais disponíveis. Para o carregamento cisalhante, utilizando o CP retangular, ambos os modelos modificados foram capazes de descrever corretamente o correto deslocamento para a fratura.

Por fim, pode-se constatar que ambos os modelos modificados apresentaram bons desempenhos quando carregamentos cisalhantes estão presentes. Este bom desempenho pode ser garantido tanto na determinação do correto deslocamento para a fratura quanto na previsão do potencial local para início da fratura dúctil. Contudo, considerando carregamentos predominantemente de tração, somente o modelo CDM Aperfeiçoado apresentou previsões próximas as observações experimentais. O modelo GTN Estendido, nestas condições de carregamento, acabam recuperando o mesmo desempenho do modelo GTN original. Este fato é justificado pela própria proposição do modelo de ser apenas estendido para aplicações onde se tem cisalhamento predominante.

Considerando a evolução da pesquisa nesta área, propõe-se como trabalho futuro, a realização de novos testes dos modelos modificados considerando agora históricos de carregamentos cíclicos. Neste sentido, a introdução do efeito de

Bauschinger se faz necessário por meio do estudo do encruamento cinemático. Propõe-se também, modificações no modelo GTN para que o mesmo passe a ter boas previsões tanto em regiões de carregamento de cisalhamento quanto tração predominante.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andrade Pires, (2003). Numerical Modelling of ductile plastic damage in bulk metal forming, *International Journal of Mechanical Sciences*, 45:273–294.

Bai, Y., Wierzbicki, T. (2007). A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence, *International Journal of Plasticity*, 24:1071-1096.

Bai, Y. (2008). Effect of Loading History on Necking and Fracture. Ph.D Thesis, *Massachusetts Institute of Technology*.

Benallal, A., Billardon, R. and Doghri, I. 1988. An Integration Algorithm and the Corresponding Consistent Tangent Operator for Fully Coupled Elastoplastic and Damage Equations. *Comm. Appl. Num. Meth.*, 4, 731–740.

Chu, C. C. and A. Needleman (1980). "Void Nucleation Effects In Biaxially Stretched Sheets." *Journal Of Engineering Materials And Technology-Transactions of the ASME* 102(3): 249-256.

De Souza Neto E.A. (2002). A fast, one-equation integration algorithm for the Lemaitre ductile damage model. *Comm. Num. Meth. Engng.*,18:541–554.

De Souza Neto, E.A., Peric D., Owen, D.R.J., (1994). A model for elasto-plastic damage at finite strains: computational issues and applications. *Engineering Computations*, 11:3: 257-281.

De Souza Neto, E.A., Perić, Owen, D.R.J. (2008). Computational methods for plasticity: theory and applications. *John Wiley & Sons Ltd*.

De Souza Neto, E.A., Perić, Owen, D.R.J. (2008). Computational methods for plasticity: theory and applications. *John Wiley & Sons Ltd*.

DJ Celentano, JL Chaboche (2007). Experimental and numerical characterization of damage evolution in steels - International Journal of Plasticity.

Doghri, I., (1995). Numerical implementation and analysis of a class of metal plasticity models coupled with ductile damage. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 38:3403-3431.

Driemeier, L., Brünig, M., Micheli, G., Alves, M., (2010), Experiments on stress triaxiality dependence of material behavior of aluminum alloys, Mechanics of Materials, vol.42, 2:207-217.

Gao, X., Zhang, T., Zhou, J., Graham, S.M., Hayden, M., Roe, C. (2011), On stress-state dependent plasticity modeling: Significance of the hydrostatic stress, the third invariant of stress deviator and the non-associated flow rule, International. Journal of Plasticity, vol. 27, 2:217-231.

Gurson, A.L. (1977). Continuum Theory of ductile rupture by void nucleation and growth - Part I. Yield criteria and flow rules for porous ductile media. *J. Engrg. Mat. Tech.*, 99:2-15.

Holzapfel, G.A. (2000). Nonlinear Solid Mechanics. A Continuum Approach for Engineering. London: John Wiley & Sons.

Karihaloo (eds.) Comprehensive Structural Integrity, vol. 2. Elsevier-Pergamon, pp. 686–783.

Lemaitre, J. (1984). How to Use Damage Mechanics. Nuclear Engng. Design, 80, 233–245.

Lemaitre, J. (1996). A Course on Damage Mechanics. 2nd edn. Springer.

Lemaitre, J., Chaboche, J.L. (1990). *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge Univ. Press.

Lemaitre, J., Desmorat, R. (2005). *Engineering Damage Mechanics*, Springer.

Malcher, L., (2011). *Da Mecânica do Dano Continuo: Uma evolução do Modelo de Lemaitre para Redução da Dependência do Ponto de Calibração*. Tese de Doutorado em Ciências Mecânicas Publicação ENMTD-09/2011. Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília.

Malcher, L., (2013). *Continuum Modelling and Numerical Simulation of Damage for Ductile Materials*. Dissertação para obter o título de Ph.D., Universidade de Porto.

Malcher, L.; Andrade Pires, F.M. ; César de Sá, J.M.A., (2012). *An Assessment of Isotropic Damage Constitutive Models under High and Low Stress Triaxialities*. *International Journal of Plasticity*.

Malcher, L.; Andrade Pires, F.M. ; César de Sá, J.M.A., (2013). . *An Extended GTN Model for Ductile Fracture under High and Low Stress Triaxiality*. *International Journal of Plasticity*, v. 54, p. 193-228.

Nahshon, K., Hutchinson, J. (2008). *Modification of the Gurson model for shear failure*. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 27:1–17.

Nahshon, K., Hutchinson, J. (2008). *Modification of the Gurson model for shear failure*. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 27:1–17.

Pineau, A., Pardoën, T. (2003). *Damage mechanics*. *In: Milne, I., Ritchie, R.O. and B.*

Rice, J. R., Tracey, D., M. (1969). *On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields*. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17:201–217.

round tensile bar. *Acta Met.* 32:157–169.

Saanouni, K. and J. L. Chaboche (2007). Computational damage mechanics: Application to metal forming simulation. *Comprehensive Structural Integrity*. I. Milne, R. O. Ritchie and B. Karihaloo, Elsevier Science Ltd. 2: 321-376.

Saanouni, K., K. Nesnas and Y. Hammi (2000). "Damage modeling in metal forming processes." *International Journal of Damage Mechanics* 9(3): 196-240.

Simo, J.C., & Hughes, T.J.R. (1998). *Computational Inelasticity*. New York: Springer-Verlag.

Tvergaard, V. and Needleman, A. (1984). Analysis of the cup-cone fracture in a
Xue, L. (2007). *Ductile Fracture Modeling – Theory, Experimental Investigation and Numerical Verification*, Ph.D Thesis, *Massachusetts Inst. of Technology*.