



**UnB**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
JOACY VICTOR MAIA ARAUJO**

**TEORIA DA RESPOSTA AO ITEM  
EM PROCESSO DE DECISÃO**

**Brasília  
2014**

**JOACY VICTOR MAIA ARAUJO**

**TEORIA DA RESPOSTA AO ITEM  
EM PROCESSO DE DECISÃO**

Dissertação apresentada à Universidade de Brasília  
como requisito para obtenção do título de  
mestre em Estatística.

Orientador: Prof. Dr. Raul Yukihiro Matsushita

Brasília  
2014

*If you are out to describe the truth,  
leave elegance to the tailor.*

**Albert Einstein**



# Agradecimentos

Agradeço, inicialmente, à minha família, em especial a Tarsila, pelo suporte e por entender a ausência provocada pelos estudos que se transformaram nesse trabalho. Também ao meu filho, Pedro, cujo nascimento trouxe como irmãs a inspiração e a motivação necessárias para o desenvolvimento desta dissertação.

Aos meus amigos e colegas que, privados do contato, permaneceram fiéis e solícitos. Em particular, ao Glauber De Bona, cuja vocação acadêmica e amor ao conhecimento sempre me estimularam.

Ao Professor Dr. Raul Yukihiro Matsushita, pela dedicação e pelas orientações acadêmicas, sem as quais este trabalho não seria possível. Também agradeço a contribuição dos demais professores e funcionários do Departamento de Estatística da UnB, em particular aos Doutores Afrânio, Nakano e Peter.

Finalmente, a todos que de alguma forma contribuíram para este trabalho.



# Resumo

O trabalho consiste na construção de uma metodologia voltada ao processo de escolha de carreira pelo aspirante ao serviço público. Parte do trabalho reside na construção de simulados realizados por Testagem Adaptativa Computadorizada, fundamentados pela Teoria da Resposta ao Item. Outra parte consiste em inferir os parâmetros das distribuições de resultados dos diversos concursos. Essa inferência é particularmente desafiadora, pois só existe informação pública dos aprovados, ou seja, da parte direita da distribuição. Finalmente, cruzaram-se os resultados dos simulados padronizados com os resultados reais dos concursos. Calcularam-se as probabilidades do resultado do concursando estar dentro da zona de aprovação nas diversas carreiras. Essas probabilidades poderão ser ranqueadas de forma a direcionar o candidato à área de maior chance de sucesso, considerando também o valor esperado, calculado em função da remuneração dos cargos.

**Palavras-chave:** 1. Teoria da Resposta ao Item. 2. Inferência Estatística. 3. Teste Adaptativo Computadorizado.





# Abstract

This work consists of constructing a methodology focused on the career choice for aspiring to public service process. Part of it involves the construction of Computerized Adaptive Testing, grounded by Item Response Theory. Another part is to infer the parameters of the distributions of results of various competitions. This inference is particularly challenging because there is only public information of approved candidates, *i.e.*, the right tail of distribution. Finally, simulated proficiencies were crossed to actual results of contests. The odds of the outcome of candidate to be within the approval zone in the various careers were calculated. These probabilities were ranked in order to direct the candidate to the area of greatest chance of success, considering also the expected value, calculated according to the compensation of positions.

**Keywords:** 1. Item Response Theory. 2. Statistical Inference. 3. Computerized Adaptive Test.



# Sumário

<b>Lista de Siglas Utilizadas</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos . . . . .	1
1.2 Estrutura do trabalho . . . . .	2
<b>2 Fundamentação teórica</b>	<b>5</b>
2.1 Teoria da Resposta ao Item . . . . .	5
2.1.1 O Modelo Logístico . . . . .	6
2.1.2 Estimação dos parâmetros da Curva Característica do Item (CCI) . . . . .	8
2.1.3 Estimação das proficiências dos candidatos ( $\theta_j$ ) . . . . .	11
2.1.4 Ciclo de estimação dos parâmetros . . . . .	13
2.1.5 Simulação de proficiência . . . . .	13
2.2 Teste adaptativo computadorizado (TAC) . . . . .	14
<b>3 Metodologia</b>	<b>19</b>
3.1 Estimativa dos parâmetros necessários ao cálculo da probabilidade de aprovação . . . . .	19
3.2 Cálculo da probabilidade de aprovação . . . . .	22
<b>4 Resultados e análises</b>	<b>25</b>
<b>5 Conclusão</b>	<b>37</b>
<b>A Algoritmos</b>	<b>39</b>
A.1 Otimização dos parâmetros da Teoria de Resposta ao Item . . . . .	39
A.2 Algoritmo genético . . . . .	44
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>49</b>



# Lista de Siglas Utilizadas

PIB	Produto Interno Bruto
DOU	Diário Oficial da União
IPEA	Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada
Anpac	Associação Nacional de Proteção e Apoio aos Concursos
TRI	Teoria da Resposta ao Item
TAC	Teste Adaptativo Computadorizado ( <i>Computer Adaptive Test</i> )
CCI	Curva Característica do Item ( <i>Item Characteristic Curve</i> )
FDP	Função Densidade de Probabilidade
TCM	Teoria Clássica da Medida



# Lista de Figuras

1.1	Perguntas fundamentais que o trabalho propõe-se a responder. . . . .	2
2.1	Exemplos de Curvas Características do Item para diversos $a$ e $b$ , $c = 0, 2$ . . . . .	7
2.2	Relação entre os parâmetros dos itens e a CCI. . . . .	7
2.3	Simulação da frequência de acerto (eixo vertical) em função da dificuldade da questão (abscissa) de $-6$ a $+6$ , para $c = 0, 2$ e $a = 1, 5; 2, 0$ e $1, 0$ . . . . .	12
2.4	Ciclo de estimação dos parâmetros. . . . .	13
2.5	Estimativa de $\theta$ pelo algoritmo de Newton-Raphson. . . . .	15
2.6	Fluxograma de um teste adaptativo (Wainer, 2012). . . . .	16
3.1	Exemplo de curva resultado de concurso, modelado por uma distribuição Beta. . . . .	21
3.2	Curva de % acerto em função da proficiência $\theta$ Delegado da Polícia Civil/BA (CESPE, 2013) ( $m_k = 1, 84$ ). . . . .	22
4.1	Fluxograma de análises: dos dados aos resultados. . . . .	25
4.2	Exemplo de estimação da proficiência em função do número de questões resolvidas. . . . .	28
4.3	Curva de % acerto em função da proficiência $\theta$ - Escrivão ( $m_k = 1, 65$ ). . . . .	29
4.4	Curva de % acerto em função da proficiência $\theta$ - Agente ( $m_k = 1, 59$ ). . . . .	30
4.5	Curva de % acerto em função da proficiência $\theta$ - Delegado ( $m_k = 1, 91$ ). . . . .	30
4.6	Curva de % acerto em função da proficiência $\theta$ - Papiloscopista ( $m_k = 1, 94$ ). . . . .	31
4.7	FDP dos resultados para Escrivão - $Beta(3, 5; 9, 0)$ . . . . .	31
4.8	FDP dos resultados para Agente - $Beta(5, 0; 13, 5)$ . . . . .	32
4.9	FDP dos resultados para Delegado - $Beta(5, 0; 13, 0)$ . . . . .	32
4.10	FDP dos resultados para Papiloscopista- $Beta(4, 0; 16, 5)$ . . . . .	33
4.11	Remuneração $\times$ probabilidade estimada de aprovação — Candidato $A$ . . . . .	35
4.12	Proficiência do candidato $A$ e relevância das disciplinas da carreira de papiloscopista. . . . .	36





# Lista de Tabelas

2.1	Parâmetros da população de questões criadas para as simulações. . . . .	14
4.1	Distribuição percentual das disciplinas cobradas nas questões das provas para cada uma das carreiras. . . . .	26
4.2	Proficiências reais dos candidatos. . . . .	27
4.3	Proficiências estimadas dos candidatos. . . . .	28
4.4	Proficiências reais dos candidatos - ponderada pela relevância de cada matéria. . . . .	29
4.5	Proficiências estimadas dos candidatos - ponderada pela relevância de cada matéria. . . . .	29
4.6	Remuneração por cargo conforme Edital do concurso. . . . .	33
4.7	Probabilidade de aprovação e valor esperado estimados utilizando a proficiência real dos candidatos. . . . .	34
4.8	Probabilidade de aprovação e valor esperado estimados utilizando a proficiência estimada dos candidatos. . . . .	34
4.9	Recomendações do modelo quanto a qual concurso escolher. . . . .	35
4.10	Proficiência do candidato $A$ e relevância das disciplinas da carreira de papiloscopista. . . . .	36



# Capítulo 1

## Introdução

De acordo com o Ministério do Planejamento (2011), o País gastou em torno de R\$ 187 bilhões com servidores públicos federais, incluindo ativos, aposentados e pensionistas, o que equivale a quase 5% do Produto Interno Bruto (PIB) brasileiro.

Segundo o Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA), existem no Brasil mais de 10 milhões de servidores públicos. E conforme dados da Associação Nacional de Proteção e Apoio aos Concursos (Anpac), atualmente, no País existem em torno de 12 milhões de candidatos ao serviço público, o que representa mais de 6% da população brasileira ou 12% da população economicamente ativa.

Acerca desses candidatos, além da concorrência, que é um obstáculo natural para o ingresso na carreira pública, muitos têm dificuldade em escolher as oportunidades que lhes são convenientes dentre as diversas oferecidas. O ideal é que o candidato se prepare para uma carreira compatível com a sua capacidade intelectual. Mas como ele poderia avaliar essa capacidade e monitorar sua evolução ao longo de seus estudos?

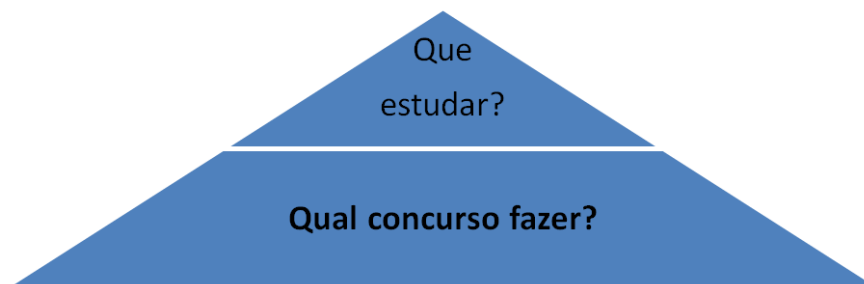
Para isso, sugere-se desenvolver uma ferramenta que auxilie os concursistas a escolherem qual carreira devem perseguir, com base em suas aptidões e em probabilidades de aprovação.

Se, por um lado, os estudos na área educacional têm avançado bastante, principalmente com a Teoria da Resposta ao Item (TRI) — que se tornou uma ferramenta imprescindível para as gestões dessa área no Brasil —, pouco se tem conhecimento acerca de estudos sobre os milhares de dados de concursos públicos.

Além disso, ao considerar que esses processos seletivos movimentam um grande mercado de cursos preparatórios, é importante que não apenas os gestores desses processos, mas também próprio candidato, se beneficiem da TRI.

### 1.1 Objetivos

Assim, este trabalho consiste no estudo de uma metodologia voltada para o processo de escolha de carreira pelo aspirante ao serviço público. Além de identificar em qual certame o candidato possui maior chance de aprovação, a metodologia identifica as disciplinas que o aluno deve priorizar, seja pela maior relevância no edital do concurso, seja pela menor proficiência no assunto.



**Figura 1.1:** Perguntas fundamentais que o trabalho propõe-se a responder.

Parte do trabalho é montar um banco de dados de questões de concursos públicos com as estatísticas de acerto de cada questão ou item das provas. Isso subsidiará a elaboração de simulados computadorizados, segregados por área e por matéria. Esses simulados serão realizados por **Testagem Adaptativa Computadorizada** (Wainer, 2012), fundamentados pela **Teoria da Resposta ao Item** (Baker, 2001).

Para o desenvolvimento deste trabalho, reuniram-se dados de aproximadamente 3 mil concursos públicos, desde 2009, perfazendo um total superior a 300 mil questões.

Como resultado, cada candidato poderia não apenas dispor de uma estimativa de sua proficiência, mas também monitorar sua evolução temporal, submetendo-se, de forma sistemática, a testes com bancos de itens já calibrados.

Outra parte é coletar os resultados das pontuações obtidas pelos candidatos nos diversos concursos e estimar suas funções de distribuição de probabilidade. Essa **inferência** é particularmente desafiadora. O problema se refere à publicação parcial dos dados, ou seja, apenas são disponibilizados pelas organizadoras dos concursos públicos as notas dos candidatos aprovados, o número de candidatos e a média das notas, com base nas estatísticas de acerto de cada questão ou item. Mas como o foco deste trabalho não é tratar especificamente desse assunto, por simplicidade, optou-se por uma abordagem paramétrica elementar que se baseia na estimação por momentos e por ajustamento da função de distribuição acumulada empírica, semelhantemente ao que foi proposto por Öztürk e Dale (1985).

Finalmente, cruzar-se-ão os resultados dos simulados padronizados com os resultados dos concursos. Serão calculadas as probabilidades de o concursando estar na zona de aprovação nas diversas carreiras e, em seguida, essas probabilidades serão ordenadas. Assim, espera-se que seja possível orientar o candidato para a área de maior chance de sucesso, levando-se em consideração ainda o retorno financeiro esperado com base nas remunerações dos cargos.

## 1.2 Estrutura do trabalho

O Capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica acerca da Teoria da Resposta a Item e dos Testes Adaptativos Computadorizados. Em particular, nesse capítulo, detalham-se os processos de estimação dos parâmetros das Curvas Características dos Itens e das proficiências dos candidatos.

No Capítulo 3, encontra-se a metodologia desenvolvida, por meio da qual são detalhadas as estimativas dos parâmetros necessários para o cálculo da probabilidade de aprovação e os próprios cálculos das probabilidades de aprovação.

No Capítulo 4, discutem-se os resultados e as análises pertinentes. Para exemplificar a aplicação da metodologia apresentada, procedeu-se à análise de qual concurso mais apropriado para nove candidatos fictícios, considerando-se quatro carreiras diferentes da Polícia Federal: agente, escrivão, delegado e papiloscopista.

Finalmente, o Capítulo 5 conclui com as considerações, as limitações do modelo e as perspectivas para trabalhos futuros. No Apêndice A, são encontrados os algoritmos utilizados neste trabalho.



## Capítulo 2

# Fundamentação teórica

### 2.1 Teoria da Resposta ao Item

A Teoria da Resposta ao Item (TRI) é um conjunto de modelos matemáticos que permitem representar a probabilidade de um indivíduo dar determinada resposta, dependendo das suas habilidades e do próprio item ou da questão (Andrade, Tavares, e Valle, 2000). Com base na TRI, formas matemáticas podem ser sugeridas para representar a relação entre a probabilidade de um indivíduo que se submete a um teste de conhecimento dar determinada resposta a um item ou questão, além dos traços latentes desse indivíduo, como por exemplo, sua proficiência ( $\theta$ ).

De acordo com Moreira Junior (2010), traços latentes são características do indivíduo que não podem ser observadas diretamente; isto é, não existe um aparelho capaz de medi-las fisicamente, como, por exemplo, um termômetro que mede as variações térmicas em um ambiente. Mas essas características não observáveis podem ser mensuradas por meio de variáveis secundárias, relacionadas com o traço latente em estudo.

A TRI é uma poderosa ferramenta estatística que preenche as lacunas decorrentes das limitações da Teoria Clássica da Medida (TCM) — uma teoria tradicional na área de avaliações (Andrade, Tavares, e Valle, 2000). Detalhes sobre os fundamentos da TRI e seus principais modelos matemáticos podem ser encontrados nas obras de Andrade, Tavares, e Valle (2000), Baker (2001), Baker e Kim (2004), Boomsma *et al.* (2000), De Ayala (2008), Embretson e Reise (2000), e Lord (1980), entre outros.

Moreira Junior (2010) apresenta uma revisão das aplicações da TRI no Brasil e um breve relato histórico do seu desenvolvimento no País. Embora tenha começado na área de avaliação educacional, as aplicações da TRI alcançaram as mais diversas áreas cujo propósito é a avaliação (mercadologia, gestão empresarial e organizacional, saúde pública, gestão da qualidade, estudos sociológicos e econômicos, além de outras áreas).

Enquanto a maioria dessas aplicações na área de avaliação geram resultados mais interessantes para os gestores do que para os respondentes, nosso trabalho foca o próprio respondente (candidato de concurso público) como gestor (principal interessado) da sua avaliação educacional.

Quanto ao modelo, neste trabalho nos restringiremos ao caso unidimensional, em que se avalia um único traço latente para um único grupo (i.e., uma amostra de indivíduos retirada de certa população). Além disso, considerou-se apenas o caso que se aplica para a análise de itens do tipo certo ou errado, ou de questões de múltipla escolha dicotomizados em certo ou errado. Assim, a seguir, descreveremos o modelo logístico unidimensional de três parâmetros.

### 2.1.1 O Modelo Logístico

Entre os diversos modelos disponíveis, o modelo logístico (unidimensional) de três parâmetros proposto por Birnbaum (1968) será utilizado neste trabalho pela sua conveniência e simplicidade. Segundo Wainer (2012), trata-se de um modelo bastante aplicado em testes de larga escala, e os modelos de um e de dois parâmetros são seus casos particulares (Andrade, Tavares, e Valle, 2000).

Seja  $U_{ij}$  a variável aleatória binária correspondente à resposta dada pelo indivíduo  $j$  para o item  $i$ , em que se observa  $U_{ij} = 1$  caso a resposta seja correta e, caso contrário,  $U_{ij} = 0$ . Considerando que  $\theta_j$  represente a proficiência (traço latente) do indivíduo  $j$ , define-se o modelo logístico de três parâmetros como:

$$P_i(\theta_j) = P(U_{ij}|\theta_j, a_i, b_i, c_i) = c_i + \frac{1 - c_i}{1 + e^{-a_i(\theta_j - b_i)}}, \quad (2.1)$$

em que os parâmetros  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$  são os parâmetros pertinentes ao item  $i$ . A forma da função  $P_i(\theta_j)$  denomina-se Curva Característica do Item (CCI).

O parâmetro  $b_i$  representa a **dificuldade** do item  $i$ . Quanto maior for o seu valor, maior será sua dificuldade (ou seja, menor será a probabilidade de se responder corretamente o item  $i$ ). Como  $b_i$  define a posição do item na escala, ele também pode ser chamado de parâmetro de localização ou posição. Teoricamente,  $b_i$  pode assumir valores entre  $-\infty$  e  $+\infty$ ; mas valores muito altos ou baixos podem indicar que o item não é adequado. Como em geral utiliza-se uma escala com média zero e variância unitária — ou escala (0,1) —, tipicamente os valores desse parâmetro variam entre  $-3$  e  $3$  (Moreira Junior, 2010).

$a_i$  é o parâmetro de **discriminação** do  $i$ -ésimo item e relaciona-se diretamente com a inclinação da CCI no ponto  $b_i$ . De acordo com Moreira Junior (2010), valores baixos de  $a_i$  indicam que o item  $i$  tem pouco poder de discriminação, ou seja, a probabilidade de um indivíduo respondê-lo corretamente ou concordar com ele depende muito pouco de sua proficiência.

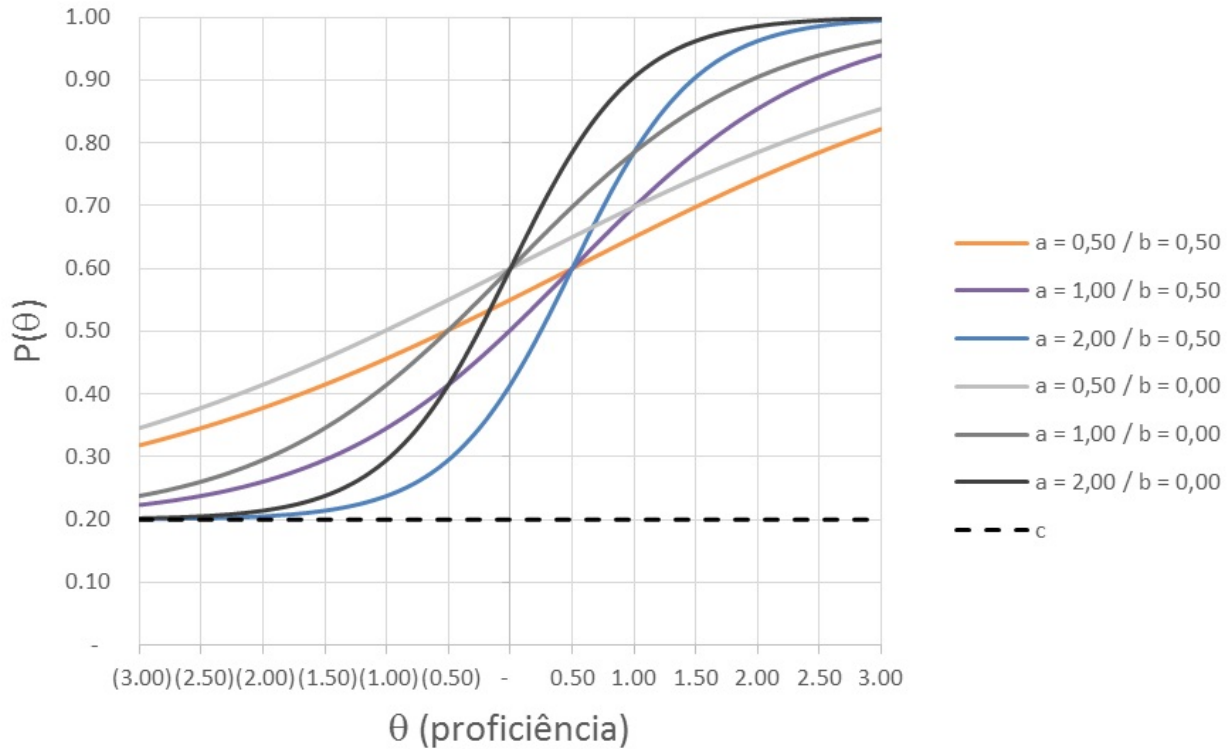
Por outro lado, valores altos de  $a_i$  indicam que o item  $i$  apresenta grande poder de discriminação, dividindo os indivíduos praticamente em dois grupos: os que possuem habilidades abaixo do valor de  $b_i$  e aqueles com habilidades acima do valor de  $b_i$ . Mas não existe um valor exato de  $a_i$  para decidir se um item discrimina bem ou não. Em geral, na métrica logística, considera-se aceitável  $a_i > 0,7$ ; e  $a_i \geq 1$  indica que o item  $i$  discrimina bem (Moreira Junior, 2010).

O parâmetro  $c_i$  representa a probabilidade de acerto para o indivíduo com nenhuma proficiência. Em uma questão com  $m$  alternativas, o valor de  $c_i$  tende a  $1/m$  caso o candidato efetue escolhas aleatórias. Assim, esse parâmetro permite representar a possibilidade do acerto casual e o seu valor depende da quantidade de alternativas que a questão apresenta e do parâmetro de dificuldade da questão (Wainer, 2012).

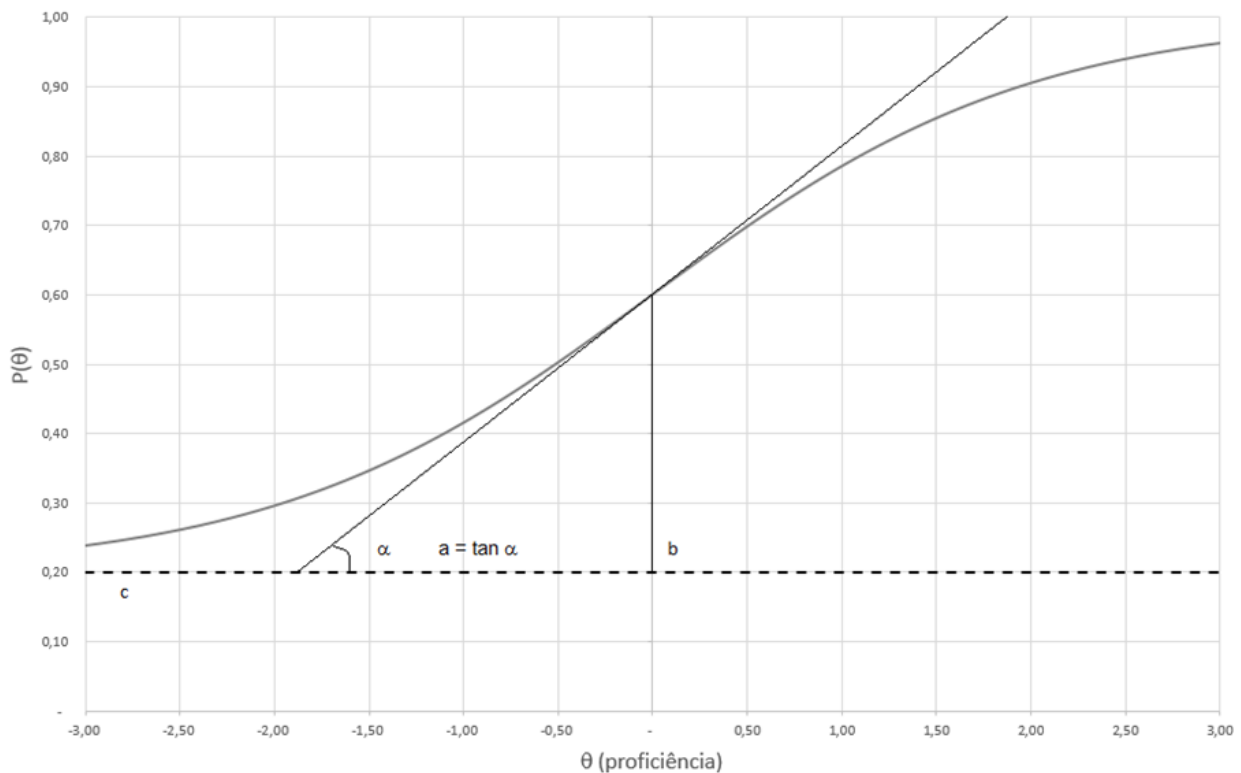
A Curva Característica do Item (CCI), que descreve a probabilidade condicional de acerto de um item, é uma função crescente da proficiência condicionante  $\theta_j$ . A Figura 2.1 ilustra algumas formas da CCI para diferentes valores dos parâmetros dos itens.

Geometricamente, o parâmetro  $a$  é a inclinação (derivada de primeira ordem) da CCI. O parâmetro  $b$  é a abscissa no ponto de inflexão, ou seja, é um ponto sobre a CCI na qual há troca de sinal da curvatura (derivada de segunda ordem). Já o parâmetro  $c$  é a assíntota da CCI, quando a proficiência ( $\theta$ ) tende a  $-\infty$   $\left[ \lim_{\theta \rightarrow -\infty} \left( c_i + \frac{1 - c_i}{1 + e^{-a_i(\theta_j - b_i)}} \right) = c_i \right]$ . A Figura 2.2 explicita graficamente essa interpretação geométrica dos três parâmetros da CCI.





**Figura 2.1:** Exemplos de Curvas Características do Item para diversos  $a$  e  $b$ ,  $c = 0,2$ .



**Figura 2.2:** Relação entre os parâmetros dos itens e a CCI.

Com respeito ao processo de estimação a ser descrito nas próximas subseções, ele se dará em duas etapas. Primeiramente estimam-se os parâmetros dos itens (Seção 2.1.2) e, em seguida, o da proficiência (Seção 2.1.3), conforme Baker (2001) e Andrade, Tavares, e Valle (2000). Os parâmetros dos itens e o da proficiência poderiam ser estimados conjuntamente (Andrade, Tavares, e Valle,

2000), mas, por simplicidade, essa abordagem não será considerada neste trabalho.

### 2.1.2 Estimação dos parâmetros da Curva Característica do Item (CCI)

A parte fundamental da TRI é a estimação dos parâmetros da CCI. Do ponto de vista estatístico, em essência, trata-se de um problema de estimação de uma função de distribuição acumulada condicional (Andrade, Tavares, e Valle, 2000). Embora haja outras abordagens modernas de estimação, neste trabalho, emprega-se o método tradicional de estimação por máxima verossimilhança, cujo processo de otimização é feito com base no algoritmo de Newton-Raphson.

A seguir, detalharemos o processo de estimação por máxima verossimilhança, segundo Baker e Kim (2004).

Para um determinado item  $i$ , a proporção observada de respostas corretas  $p(\theta_i)$  e a proporção observada de respostas incorretas  $q(\theta_j)$  para uma proficiência  $\theta_j$  são dadas por:

$$p(\theta_i) = p_i = \frac{r_i}{f_i},$$

e

$$q(\theta_i) = q_i = 1 - p_i,$$

sendo que  $r_i$  representa o número de indivíduos que responderam corretamente ao item  $i$ , e  $f_i$  o total de respostas.

Por simplicidade, nas linhas subsequentes, faremos  $a \equiv a_i$ ,  $b \equiv b_i$  e  $c \equiv c_i$  e, lembrando que a CCI é definida como

$$P_j = P(\theta_j) = c + \frac{1 - c}{1 + e^{-a(\theta_j - b)}},$$

considere as funções auxiliares

$$Q_j = Q(\theta_j) = 1 - P_j,$$

e

$$P_j^* = P^*(\theta_j) = \frac{1}{1 + e^{-a(\theta_j - b)}}.$$

As derivadas parciais da CCI com respeito aos parâmetros do item podem ser escritas como

$$\frac{\partial P_j}{\partial a} = \frac{(\theta_j - b)Q_j(P_j - c)}{1 - c},$$

$$\frac{\partial P_j}{\partial b} = \frac{-aQ_j(P_j - c)}{1 - c},$$

$$\frac{\partial P_j}{\partial c} = \frac{Q_j}{1 - c}.$$

Considerando que existem  $k$  respondentes independentes, e lembrando que  $r_i$  representa o número de indivíduos que responderam corretamente ao item  $i$ , forma-se o o vetor de respostas possíveis  $R = (r_1, \dots, r_k)$ . Com base no vetor  $R = (r_1, \dots, r_k)$  define-se a função de verossimilhança

$$L(R) = \prod_{j=1}^k \frac{f_j!}{r_j!(f_j - r_j)!} P_j^{r_j} Q_j^{(f_j - r_j)},$$

na qual  $f_j$  representa o total de respostas.

Assim, a função log da verossimilhança é dado por:

$$l = \log L(R) = \sum_{j=1}^k r_j \log P_j + \sum_{j=1}^k (f_j - r_j) \log Q_j + \text{constante}.$$

Logo, para maximizar a função de verossimilhança com respeito aos parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$ , devemos calcular as derivadas parciais de primeira e segunda ordem de  $l$  em relação aos parâmetros que desejamos calibrar.

As derivadas de primeira ordem, que formam o vetor gradiente da função objetivo, são

$$l_1 = \frac{\partial l}{\partial a} = \sum_{j=1}^k \frac{r_j}{P_j} \frac{\partial P_j}{\partial a} + \sum_{j=1}^k \frac{(f_j - r_j)}{Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial a},$$

$$l_1 = \sum_{j=1}^k f_j (p_j - P_j) (\theta_j - b) \frac{P_j^*}{P_j},$$

$$l_2 = \frac{\partial l}{\partial b} = \sum_{j=1}^k \frac{r_j}{P_j} \frac{\partial P_j}{\partial b} + \sum_{j=1}^k \frac{(f_j - r_j)}{Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial b},$$

$$l_2 = -a \sum_{j=1}^k f_j (p_j - P_j) \frac{P_j^*}{P_j},$$

$$l_3 = \frac{\partial l}{\partial c} = \sum_{j=1}^k \frac{r_j}{P_j} \frac{\partial P_j}{\partial c} + \sum_{j=1}^k \frac{(f_j - r_j)}{Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial c},$$

$$l_3 = \sum_{j=1}^k f_j (p_j - P_j) \frac{P_j^*}{P_j}.$$

E as derivadas de segunda ordem, que formam a matriz hessiana da função de log verossimilhança, são dadas por

$$l_{11} = \frac{\partial^2 l}{\partial a^2} = \frac{\partial l_1}{\partial a},$$

$$l_{11} = \sum_{j=1}^k f_j (\theta_j - b)^2 \left[ \frac{P_j - c}{P_j(1-c)} \right] \frac{Q_j}{P_j(1-c)} (cp_j - P_j^2),$$

$$l_{22} = \frac{\partial^2 l}{\partial b^2} = \frac{\partial l_2}{\partial b},$$

$$l_{22} = a^2 \sum_{j=1}^k f_j \left[ \frac{P_j - c}{P_j(1-c)} \right] \frac{Q_j}{P_j(1-c)} (cp_j - P_j^2),$$

$$l_{33} = \frac{\partial^2 l}{\partial c^2} = \frac{\partial l_3}{\partial c},$$

$$l_{33} = - \sum_{j=1}^k \frac{f_j p_j}{(1-c)^2} \frac{Q_j}{P_j^2},$$

$$l_{12} = \frac{\partial l_1}{\partial b} = l_{21},$$

$$l_{12} = \sum_{j=1}^k f_j(\theta_j - b) \left\{ \frac{a(P_j - c)^2 Q_j}{(1 - c)^2 P_j} - (p_j - P_j) \left[ \frac{ac(P_j - c)}{P_j(1 - c)} \frac{Q_j}{P_j(1 - c)} + \frac{(P_j - c)}{P_j(1 - c)} \right] \right\},$$

$$l_{13} = \frac{\partial l_1}{\partial c} = l_{31},$$

$$l_{13} = - \sum_{j=1}^k f_j(\theta_j - b) \left\{ \frac{(P_j - c)^2 Q_j}{(1 - c)^2 P_j} - (p_j - P_j) \left[ \frac{(P_j - c) Q_j}{(1 - c)^2 P_j^2} \right] \right\},$$

$$l_{23} = \frac{\partial l_2}{\partial c} = l_{32},$$

$$l_{23} = a \sum_{j=1}^k f_j \left\{ \frac{(P_j - c)^2 Q_j}{(1 - c)^2 P_j} + (p_j - P_j) \left[ \frac{(P_j - c) Q_j}{(1 - c)^2 P_j^2} \right] \right\}.$$

Como as segundas derivadas da verossimilhança contêm os valores observados  $r_1, \dots, r_k$ , mostra-se necessário substituir  $p_j$  por sua esperança  $P_j$ . Os valores esperados dos elementos da matriz Hessiana são:

$$E(l_{11}) = \Lambda_{11} = - \sum_{j=1}^k f_j(\theta_j - b)^2 Q_j \frac{P_j^{*2}}{P_j},$$

$$E(l_{22}) = \Lambda_{22} = -a^2 \sum_{j=1}^k f_j Q_j \frac{P_j^{*2}}{P_j},$$

$$E(l_{33}) = \Lambda_{33} = - \sum_{j=1}^k f_j \frac{Q_j}{(1 - c)} \frac{1}{(P_j - c)} \frac{P_j^*}{P_j},$$

$$E(l_{12}) = \Lambda_{12} = \Lambda_{21} = \sum_{j=1}^k a f_j(\theta_j - b) P_j Q_j \frac{P_j^*}{P_j},$$

$$E(l_{13}) = \Lambda_{13} = \Lambda_{31} = - \sum_{j=1}^k f_j(\theta_j - b) \frac{Q_j}{(1 - c)} \frac{P_j^*}{P_j},$$

$$E(l_{23}) = \Lambda_{23} = \Lambda_{32} = - \sum_{j=1}^k a f_j \frac{Q_j}{(1 - c)} \frac{P_j^*}{P_j}.$$

Assim, com base na aproximação de segunda ordem dada pela fórmula de Taylor, os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  podem ser estimados iterativamente mediante a equação dada por (Zörnig, 2011).

P

De

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{bmatrix}_{t+1} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{bmatrix}_t - \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix}_t^{-1} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

na qual o índice  $t$  representa a iteração.

Para inicializar o processo iterativo, tem-se apenas uma estimativa razoável de  $b$ , por não conhecermos  $a$  e  $c$ , *a priori*. O parâmetro  $c$  possui um valor inicial natural,  $c = \frac{1}{m}$ , sendo que  $m$  é o número de alternativas por item. Para o parâmetro  $a$ , utilizou-se o valor 1.

Conhecendo-se as estatísticas das médias de acerto ( $p_i$ ) para cada uma das  $n$  questões, tem-se,

com base na CCI, uma estimativa inicial de  $b$  na forma

$$b_0 = \ln \left( \frac{1 - p_i}{p_i - c} \right)^{\frac{1}{a}} \quad (2.3)$$

Em nossas aplicações, cujos resultados serão apresentados nos capítulos subsequentes, não registramos problemas de convergência desse método. A proximidade dos parâmetros iniciais  $b$  e  $c$  aos seus valores reais contribuíram para a agilidade da convergência, embora o modelo tenha convergido mesmo sem a preocupação com os parâmetros iniciais, ainda que de forma mais lenta.

### 2.1.3 Estimação das proficiências dos candidatos ( $\theta_j$ )

Agora que já foi proposto o processo de estimação dos parâmetros dos itens, trataremos da estimativa da proficiência do candidato  $j$  ( $\theta_j$ ). Este é o principal objetivo da TRI. Para o avaliado  $j$ , essa medida será a estimativa de máxima verossimilhança de sua proficiência desconhecida com base nas respostas dos  $n$  itens do teste dadas por esse indivíduo e nas estimativas dos parâmetros desses itens, conforme a seção anterior.

Para isso, mostra-se necessário assumir quatro hipóteses:

1. os parâmetros das questões são conhecidos;
2. os avaliados são independentes;
3. os itens estão modelados na mesma família de CCI (Baker e Kim, 2004). Essa hipótese está mitigada por construção, assumindo-se que as questões possam ser perfeitamente descritas pelo modelo logístico de três parâmetros e
4. há independência entre os candidatos.

A Figura 2.3 mostra o resultado de simulações das frequências de acerto em função da dificuldade da questão, para diferentes valores do parâmetro de discriminação.

Agora, segue-se com a construção do estimador de  $\theta_j$ . O examinado  $j$  responde às  $n$  questões do simulado, e as respostas são  $u_{ij} = 0$  ou  $1$ , sendo que  $i$  representa o item ( $i = 1, \dots, n$ ), e  $j$  designa o candidato ( $j = 1, \dots, N$ ), o que constitui o vetor  $U_j = (u_{1j}, \dots, u_{nj} | \theta_j)$ .

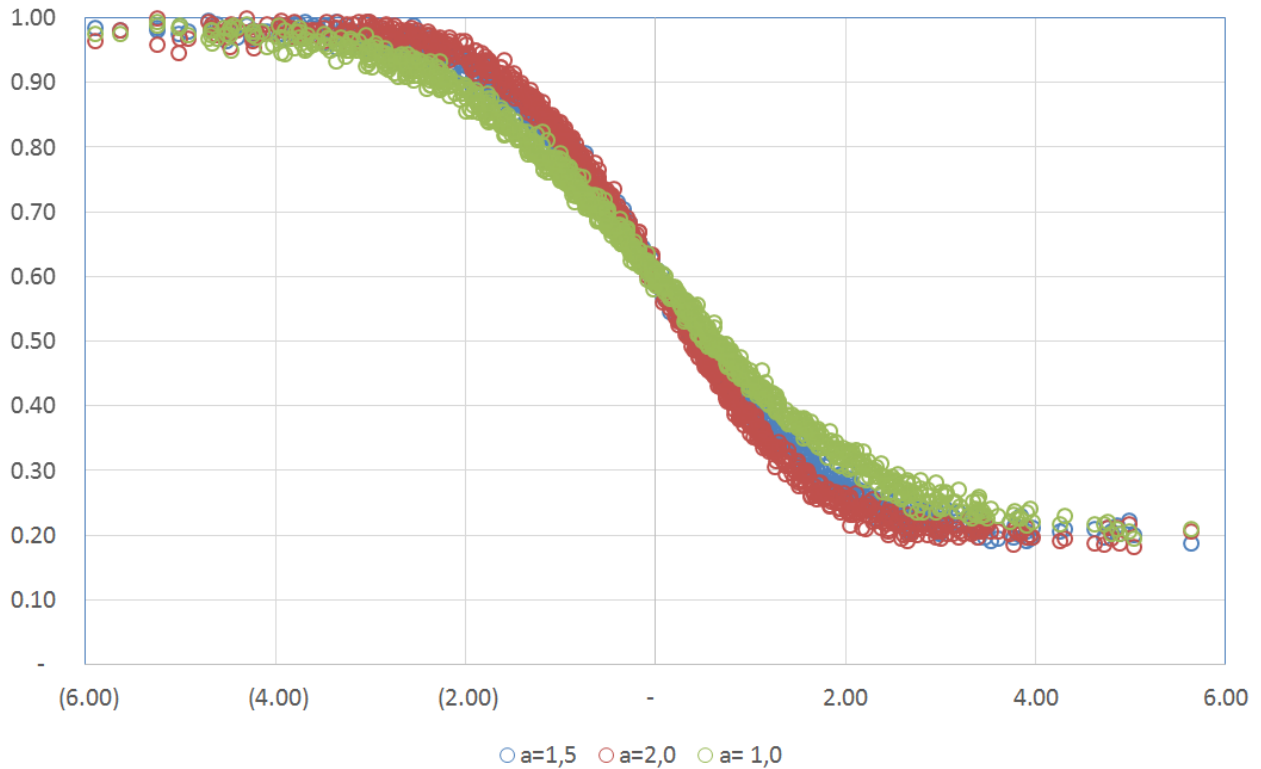
A hipótese de independência garante que as variáveis  $u_{ij}$  sejam independentes. Dessa forma, para determinado examinado  $j$ , tem-se a função de verossimilhança:

$$\begin{aligned} L(U_j | \theta_j) &= \prod_{i=1}^n P_i^{u_{ij}}(\theta_j) Q_i^{1-u_{ij}}(\theta_j), \\ &= \prod_{i=1}^n P_{ij}^{u_{ij}} Q_{ij}^{1-u_{ij}}, \end{aligned}$$

na qual, por simplicidade, considera-se a notação

$$P_i(\theta_j) = P_{ij},$$

$$Q_i(\theta_j) = Q_{ij}.$$



**Figura 2.3:** Simulação da frequência de acerto (eixo vertical) em função da dificuldade da questão (abscissa) de  $-6$  a  $+6$ , para  $c = 0,2$  e  $a = 1,5; 2,0$  e  $1,0$ .

Aplicando-se a função logaritmo, obtemos a seguinte função de log verossimilhança:

$$l = \log L(U_j|\theta_j) = \sum_{i=1}^n [u_{ij} \log P_{ij} + (1 - u_{ij}) \log Q_{ij}].$$

Na estimação da proficiência, utilizam-se as estimativas dos parâmetros dos itens obtidas pelo processo descrito na Seção 2.1.2. Assim, apenas a derivada da log verossimilhança em relação à proficiência deve ser determinada, *i.e.*,

$$\frac{\partial l}{\partial \theta_j} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{u_{ij}}{P_{ij}} \frac{\partial P_{ij}}{\partial \theta_j} + \frac{(1 - u_{ij})}{Q_{ij}} \frac{\partial Q_{ij}}{\partial \theta_j} \right].$$

Para se estimar a proficiência, mediante uso da forma iterativa do método de Newton-Raphson, conforme a Equação (2.4), usamos:

$$[\hat{\theta}_j]_{t+1} = [\hat{\theta}_j]_t + \left[ \frac{\partial^2 l}{\partial \theta_j^2} \right]_t^{-1} \left[ \frac{\partial l}{\partial \theta_j} \right]_t, \quad (2.4)$$

sendo que  $t$  representa a iteração, com  $[\hat{\theta}_j]_t = 0$ , e o  $\frac{\partial l}{\partial \theta_j}$  o gradiente na expressão acima é

$$\frac{\partial l}{\partial \theta_j} = \sum_{i=1}^n a_i (u_{ij} - P_{ij}) \frac{P_{ij}^*}{P_{ij}},$$

pois

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial \theta_j} = (1 - c_j) P_{ij}^* Q_{ij}^* a_i.$$

Novamente, precisamos substituir os valores observados  $u_{ij}$  por seus valores esperados  $P_{ij}$ , temos

$$E \left( \frac{\partial^2 l}{\partial \theta_j^2} \right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 P_{ij} Q_{ij} \left[ \frac{P_{ij} - c_i}{(1 - c_i)^2} \frac{1}{P_{ij}^2} (c_i - P_{ij}) \right] = - \sum_{i=1}^n a_i^2 P_{ij} Q_{ij} \left( \frac{P_{ij}^*}{P_{ij}} \right)^2 .$$

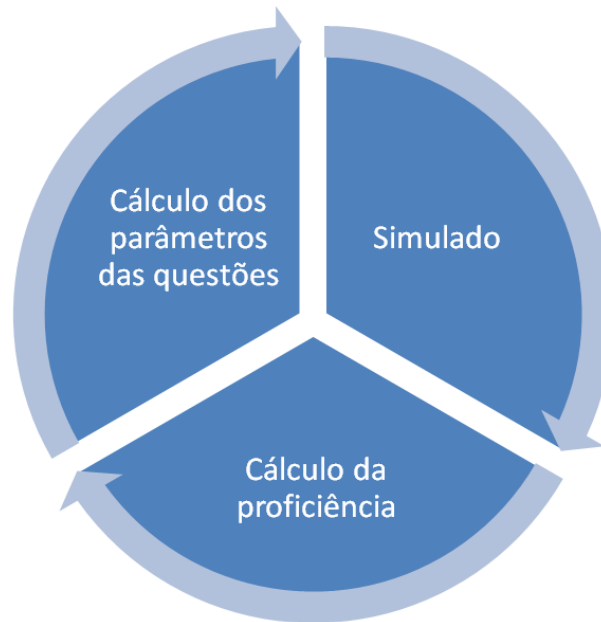
Substituindo-se o resultado acima na Equação (2.4), temos a forma iterativa do método de Newton-Raphson::

$$[\hat{\theta}_j]_{t+1} = [\hat{\theta}_j]_t - \left[ \frac{\sum_{i=1}^n a_i (u_{ij} - P_{ij}) \frac{P_{ij}^*}{P_{ij}}}{-\sum_{i=1}^n a_i^2 P_{ij} Q_{ij} \left( \frac{P_{ij}^*}{P_{ij}} \right)^2} \right]_t .$$

### 2.1.4 Ciclo de estimação dos parâmetros

Na prática, como os parâmetros dos itens e as proficiências não são conhecidas, o processo de estimação se dá conforme o seguinte processo cíclico, representado na Figura 2.4:

1. Assume-se  $\theta_j = 0$  e estimam-se os parâmetros dos itens de acordo com a Equação (2.2);
2. Com base nas estimativas dos parâmetros dos itens do passo anterior, estima-se as proficiências  $\theta_j$ ;
3. Utilizando-se  $\hat{\theta}_j$ , os parâmetros dos itens são novamente estimados;
4. O processo repete-se até que haja convergência.



**Figura 2.4:** *Ciclo de estimação dos parâmetros.*

A seguir, ilustraremos esse ciclo de estimação mediante simulação.

### 2.1.5 Simulação de proficiência

Nesta Subseção, mediante simulações, avaliaremos o desempenho da metodologia proposta, nas quais será aplicada a TRI para a estimação das habilidades nas diversas disciplinas de concurso

público (Capítulo 4). Nessa simulação, consideraremos hipoteticamente que os parâmetros dos itens já são conhecidos.

Para realizar as simulações, criou-se uma população hipotética de indivíduos e de questões. Foram gerados aleatoriamente 1.000 indivíduos cujas proficiências se distribuem conforme uma distribuição normal padrão. Também foram criadas 1.000 questões cujos parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  se distribuem aleatoriamente de forma independente, e de acordo com distribuições normais cujas médias e desvios-padrão se encontram na Tabela 2.1.

**Tabela 2.1:** *Parâmetros da população de questões criadas para as simulações.*

Parâmetro	Média	Desvio-padrão
$a$	2,0	0,2
$b$	0,0	2,0
$c$	0,2	0,01

Nesses dados, gerados artificialmente, consideramos que as realizações da proficiências representam os valores “verdadeiros” das proficiências dos indivíduos. Consideramos, também, que cada trinca de parâmetros  $(a, b, c)$  representa a característica “real” de uma questão.

Assim, com base nessa amostra hipotética, comparamos os valores “reais” de  $\theta$  com as suas estimativas correspondentes conforme o método de máxima verossimilhança apresentado na Seção 2.1.2, na qual se utiliza os parâmetros “reais” das questões. Depois, efetuamos o método de estimação em duas etapas, no qual se estimam os parâmetros dos itens (Seção 2.1.1) e, com base neles, se obtêm as estimativas das proficiências, conforme foi discutido na Seção 2.1.

A Figura 2.5 mostra a dispersão entre o  $\theta$  “real” e sua estimativa correspondente de máxima verossimilhança. Na simulação em que se utiliza os parâmetros “reais” das questões, a correlação entre o valor estimado de  $\theta$  e o seu valor “real” foi de 0,95. Já a simulação que considera os parâmetros estimados produziu correlação igual a 0,91.

A correlação pode ser vista como a razão entre a covariância de duas variáveis pelo produto dos desvios-padrão de cada uma delas. Este coeficiente pode variar de  $-1$  a  $+1$  e mostra a intensidade da relação linear entre as duas variáveis estudadas. Triola (2008) considera que valores maiores que 0,90 representam correlações muito fortes.

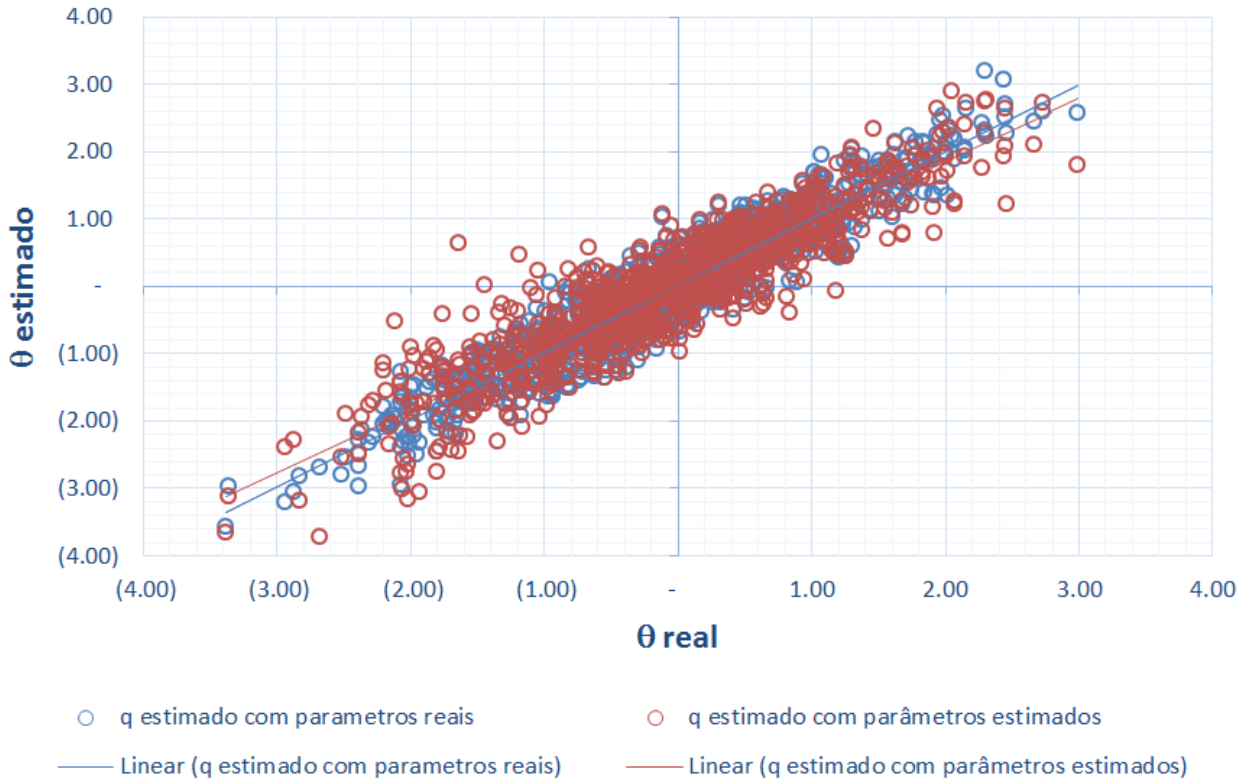
## 2.2 Teste adaptativo computadorizado (TAC)

O Teste Adaptativo Computadorizado (TAC) propõe uma forma de avaliação que se caracteriza pela seleção de questões segundo os níveis estimados de proficiência ( $\theta$ ) do usuário. Com base em um banco de dados de questões, um TAC tem como principal característica a individualidade dos testes, ou seja, cada participante recebe um elenco de questões diferentes, em diferentes quantidades.

Essa metodologia permite a aplicação de testes com maior flexibilidade e adaptabilidade, além da redução do tempo, resultados imediatos e maior precisão em relação ao teste objetivo tradicional (Díaz *et al.*, 1998).

Um TAC baseado na TRI seleciona as questões de forma que se valorize o conhecimento do respondente a partir do histórico das questões anteriormente respondidas (Weiss e Kingsbury, 1984).





**Figura 2.5:** Estimativa de  $\theta$  pelo algoritmo de Newton-Raphson.

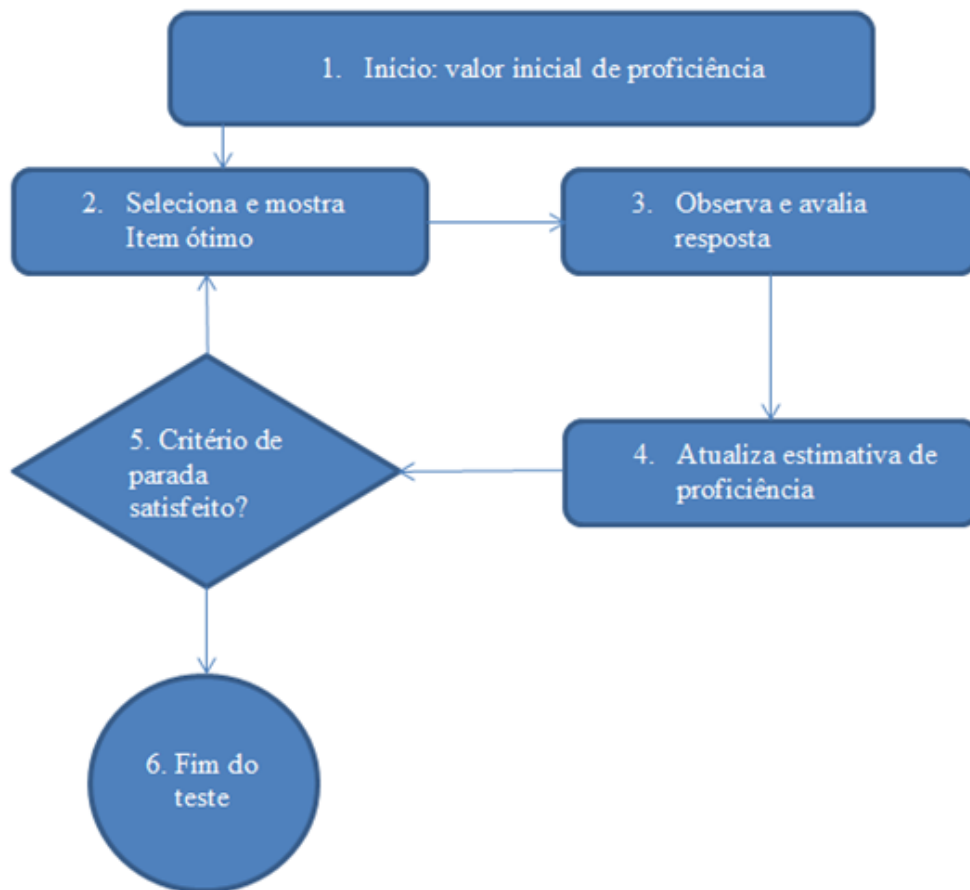
Em comparação com os testes convencionais, [Wainer \(2012\)](#) destaca, entre outras, as seguintes vantagens proporcionadas pelo TAC:

- aumento de segurança;
- os indivíduos podem trabalhar no seu próprio ritmo, e essa velocidade pode ser uma informação adicional ao acessar a proficiência;
- todos são desafiados, mas não desencorajados, pois os itens se adaptam à proficiência do candidato;
- o teste possui resultado imediato, isto tem profundas implicações no seu uso diagnóstico;
- os itens problemáticos podem rapidamente ser detectados e expurgados do banco de questões.

Outro ponto fundamental em um TAC é a escolha da questão no simulado. Na proposta de [Andrade, Tavares, e Valle \(2000\)](#), uma medida bastante utilizada em conjunto com a CCI é a função de informação do item. Ela permite analisar quanto uma questão agrega de informação para a medida de proficiência. Essa função, para o modelo de três parâmetros utilizado neste trabalho, é dada por:

$$I_i(\theta) = \frac{\left[\frac{d}{d\theta} P(\theta)\right]^2}{P_i(\theta)Q_i(\theta)}.$$

Essa medida indica como, para um dado  $\theta$ , cada um dos três parâmetros influencia a informação obtida com a resolução de uma questão. A informação da questão é tão maior quando  $b_i$  se aproxima de  $\theta$ ; quanto maior for o  $a_i$ ; e quanto mais  $c_i$  se aproximar de 0.



**Figura 2.6:** Fluxograma de um teste adaptativo (Wainer, 2012).

Neste trabalho, para a escolha de itens nas simulações, considerou-se apenas a quantidade de informações que o item agregava. Entretanto, na prática, há diversos outros fatores que poderiam ser considerados além de proporcionar o máximo ganho de informação. Entre esses fatores, cita-se a exposição dos itens e a necessidade de abordar distintos assuntos dentro de uma mesma disciplina.

O algoritmo *Shadow-test*, desenvolvido por van der Linden (2007), propõe uma solução para esses problemas práticos apontados.

A escolha de item tem que atender as mesmas especificações quanto à diversidade de assuntos abordados na prova dos seus antecessores de papel e lápis. O que criou um dilema, porque quando os itens são selecionados de forma adaptativa, cada candidato recebe um conjunto diferente de itens. Então, existe um *trade-off* entre a quantidade de informação que um item agrega e a homogeneidade de assuntos cobrados nos simulados.

Um problema ainda mais urgente era a segurança (van der Linden, 2007). Por sua própria natureza, um algoritmo adaptativo de testes tende a capitalizar sobre um pequeno conjunto de itens de alta qualidade. Se o banco de itens é usado por algum tempo, esses itens apresentam exposição bem superior aos demais, o que pode comprometer a sua segurança contra fraudes. Isso porque o TAC permite que o mesmo exame seja aplicado em diferentes lugares e tempos, como ocorre com o GMAT ou o GRE.

Outra questão relevante para o TAC é o critério de parada na avaliação da proficiência ( $\theta$ ). O critério de parada é uma regra usada para determinar quando o teste deve terminar e está

relacionada com o objetivo do teste, as características do banco de itens e as restrições operacionais (Segall, 2005)

Neste trabalho, utilizou-se, por simplicidade, um critério fixo de parada. Nestes simulados, todos os indivíduos respondem a mesma quantidade de itens e, conseqüentemente, a precisão da habilidade estimada não vai ser a mesma para todos os indivíduos (Moreira Junior, 2011).



## Capítulo 3

# Metodologia

Neste Capítulo, tratamos da metodologia para estimar a probabilidade de aprovação em um certame de um candidato que possui determinada proficiência  $\theta$ . Isso se dá em duas etapas. Primeiro, inferir a distribuição de todos os resultados a partir das notas publicadas. Segundo, mostra-se necessário estimar o percentual de acerto que um candidato com proficiência  $\theta$ .

### 3.1 Estimativa dos parâmetros necessários ao cálculo da probabilidade de aprovação

No capítulo anterior, tratamos das inferências acerca dos parâmetros das questões e da proficiência de um respondente. Agora, abordaremos o seguinte problema específico na área de concursos: se um candidato possui determinada proficiência  $\theta$ , qual seria sua chance de aprovação em um certame?

Evidentemente, essa probabilidade de aprovação pode depender das características do próprio certame, como a banca examinadora escolhida para organizar o concurso, da distribuição dos níveis de dificuldade dos itens ou questões da prova, do poder de discriminação dos itens ou questões que compõem a prova.

Por simplicidade, assumiremos que essas características se encontram embutidas na distribuição dos resultados (escores dos candidatos) do concurso; e, ainda, que a média  $\mu$  e o desvio-padrão  $\sigma$  das notas sejam suficientes para descrever por completo tal distribuição.

Além disso, consideramos natural que a probabilidade de aprovação seja uma variável aleatória, acomodando as diversas outras fontes de variação que se impõem sobre um candidato se sujeita a um processo seletivo.

Quanto aos dados, a amostra disponível consiste apenas dos resultados dos candidatos aprovados com base nos critérios estabelecidos pelo Edital do certame, e, usualmente, seu tamanho representa cinco vezes o número de vagas. Aqui, considera-se que o resultado alcançado pelo último candidato aprovado seja considerado como ponto de “corte” para se avaliar a probabilidade de aprovação.

De acordo com [Casella e Berger \(1990\)](#), a distribuição Beta é uma candidata natural para modelar proporções, que naturalmente limitam-se entre 0 e 1. A função de densidade de probabilidades de uma distribuição Beta com parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , denotada como  $Beta(\alpha, \beta)$ , é dada por:

$$f(x|\alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx} = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}},$$

com  $0 < x < 1$ ,  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ .

Os dois primeiros momentos da distribuição Beta são (Rathie e Zörnig, 2012)

$$\mu = EX = \frac{\alpha}{\alpha + \beta},$$

$$\sigma^2 = EX^2 - (EX)^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}.$$

Em geral, os métodos dos momentos ou da máxima verossimilhança permitem estimar tais parâmetros. No entanto, em nosso caso, dispomos apenas da informação acerca dos candidatos aprovados. A parte restante, que em geral representa uma grande massa, se perde (*missing*) sistematicamente. Pela existência de uma regra bem definida para essa perda (*i.e.*, apenas as maiores notas são registradas cujo tamanho da sequência representa cinco vezes o número de vagas), empiricamente a probabilidade  $P(X > A_u)$ , sendo que  $A_u$  representa a nota de corte (ou a nota do último candidato) poderia ser estimada como

$$P(X > A_u) = \frac{5v}{T},$$

sendo que  $v$  representa o número de vagas e  $T$  é o número de candidatos.

Como as maiores notas registradas são as estatísticas de ordem da distribuição (Mood, 1950), também é possível ajustar os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  minimizando-se a distância entre a forma da função de distribuição acumulada e a distribuição acumulada empírica (ver, por exemplo, Öztürk e Dale, 1985) para a região que se refere ao evento  $[X > A_u]$ .

Em nosso trabalho, como se dispõe da média de acertos em cada questão de uma prova, é possível estimar a média das notas,  $\mu$ . Assim, com base no primeiro momento, caso se disponha do valor do parâmetro  $\alpha$  e a média  $\mu$ , determina-se o parâmetro  $\beta$  com a ajuda da expressão

$$\beta = \frac{\alpha}{\mu} - \alpha.$$

Considerando esses aspectos, os parâmetros ajustados,  $\hat{\alpha}^*$  e  $\hat{\beta}^*$ , são obtidos minimizando-se (com respeito a  $\alpha$  e  $\beta$ ) a soma dos quadrados das diferenças entre o modelo hipotético e a distribuição empírica para valores acima do ponto  $A_u$ , ou seja,

$$\min \sum_{k=1}^n [h_k - \hat{h}_k(\hat{\alpha}^*, \hat{\beta}^*)]^2.$$

Adicionamos a esse processo de minimização a seguinte restrição, com base na distribuição beta e na média amostral:

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{\alpha}^*}{\hat{\alpha}^* + \hat{\beta}^*} = \sum_{k=1}^n \frac{A_r}{n}$$

e

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\alpha}^* \hat{\beta}^*}{(\hat{\alpha}^* + \hat{\beta}^*)^2 (\hat{\alpha}^* + \hat{\beta}^* + 1)}.$$

Como dispomos da média de acerto  $A_r$  de todas as questões da prova, a estimativa de  $\hat{\mu}$  nos dá

a seguinte relação não enviesada entre  $\hat{\alpha}^*$  e  $\hat{\beta}^*$ .

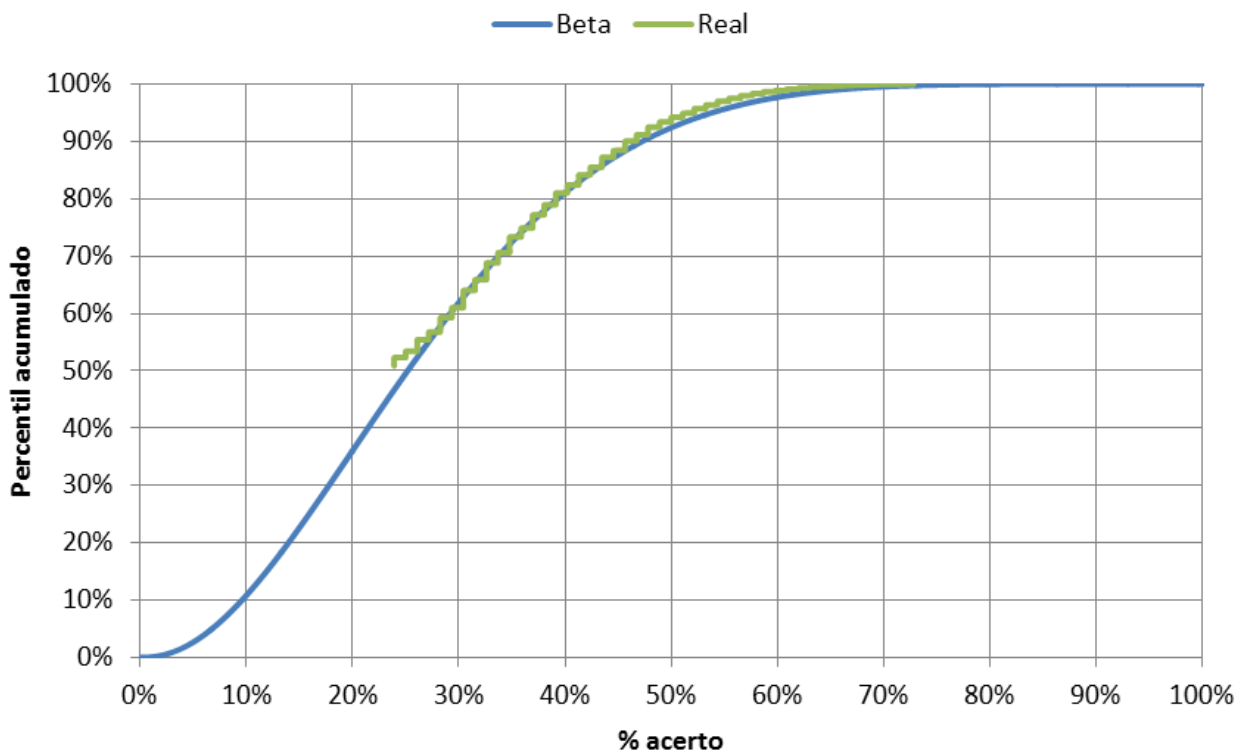
$$\hat{\beta}^* = \frac{\hat{\alpha}^* - \sum_{k=1}^n \frac{p_k}{n}}{\sum_{k=1}^n \frac{p_k}{n}}.$$

Com respeito ao processo de minimização da soma de quadrados para a obtenção das estimativas dos parâmetros  $\hat{\alpha}^*$  e  $\hat{\beta}^*$ , utilizamos o algoritmo genético, buscando-se a distribuição Beta que melhor adere aos dados reais.

Os algoritmos genéticos são uma classe particular de algoritmos evolutivos que usam técnicas inspiradas na biologia evolutiva como hereditariedade, mutação, seleção natural e recombinação (Mitchell, 1998). Nessa técnica estocástica de otimização, a introdução da aleatoriedade no processo de busca permite elevar as chances de se encontrar um mínimo global, em oposição a um mínimo local, independentemente do estado inicial (Goldberg, 1989).

A implementação desse algoritmo para os nossos propósitos se encontra no Apêndice A.

Para exemplificar, a Figura 3.1 mostra uma distribuição empírica dos resultados do concurso público para o cargo de Delegado da Polícia Civil do Estado da Bahia, organizada pelo Cespe, em 2013 e o modelo ajustado segundo a distribuição Beta. Nesse exemplo, parâmetros ajustados foram  $\alpha = 6,5$  e  $\beta = 11$ . Com base nesses resultados, por exemplo, estima-se que 60% dos candidatos não obtiveram acerto superior a 30% da prova; e 97% dos alunos acertaram menos de 60% da prova aplicada nesse concurso.



**Figura 3.1:** Exemplo de curva resultado de concurso, modelado por uma distribuição Beta.

Na próxima seção discutiremos acerca do cálculo da probabilidade de seleção para um candidato com determinada proficiência.

### 3.2 Cálculo da probabilidade de aprovação

De posse das estimativas dos parâmetros que permitem descrever a distribuição dos resultados de um concurso, em particular  $(\hat{\mu}_k, \hat{\sigma}_k^2)$ , o próximo passo é calcular a probabilidade de um candidato com proficiência  $\theta$  ser aprovado em cada um dos  $k$ -concursos cuja nota do último convocado foi  $A_{ak}$ .

Define-se o escore do candidato  $k$  como

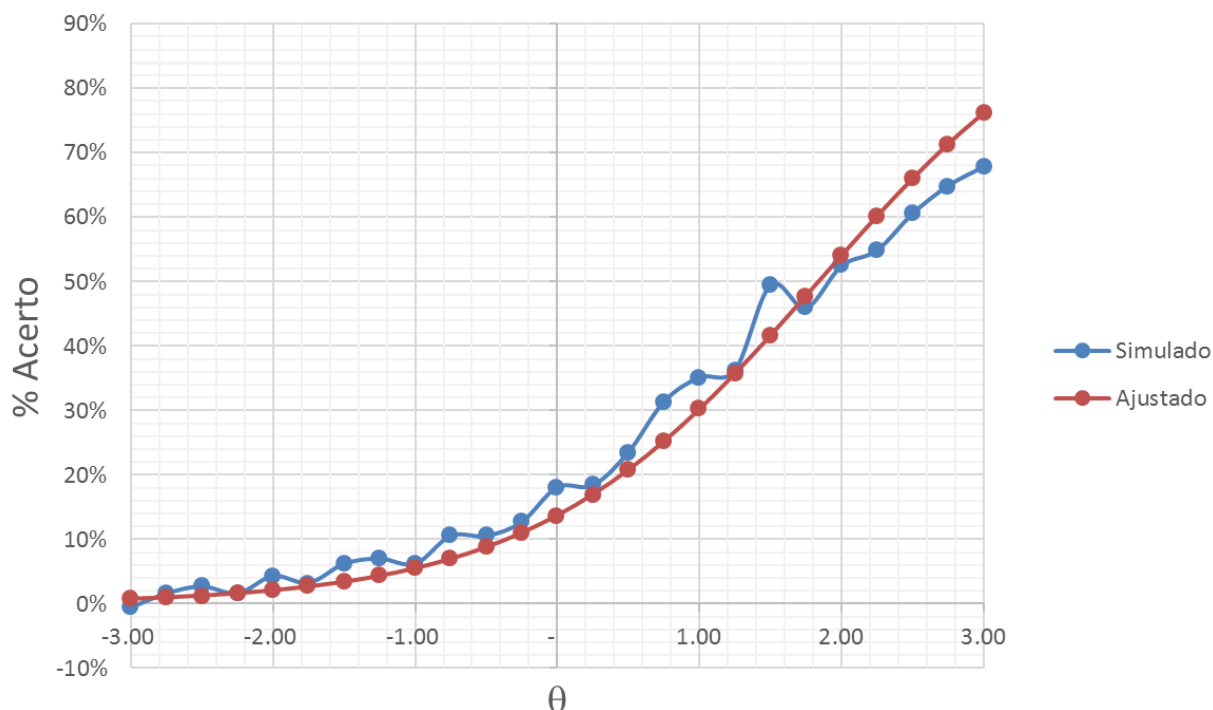
$$A_k(\theta) = \frac{1}{1 + e^{-(\theta - m_k)}}, \quad (3.1)$$

sendo que  $\theta$  representa sua proficiência e  $m_k$  é um parâmetro da função.

Como ilustração, simulou-se o desempenho para valores discretos de  $\theta$  para uma amostra hipotética de 100 candidatos submetidos a uma prova com 100 questões cujos parâmetros dos itens já foram estimados. Nessa simulação, variou-se  $\theta$  de  $-3,00$  a  $3,00$ , com passo de  $0,25$ .

Na sequência, ajustaram-se os pontos da porcentagem de acerto em cada prova em função de  $\theta$ . Esse ajuste foi realizado minimizando o erro quadrático médio da diferença entre os valores simulados e os obtidos por meio da Equação (3.1).

O parâmetro  $m_k$  foi otimizado pelo algoritmo genético discutido na Seção 3.1. A Figura 3.2 mostra o ajuste empírico do percentual de acerto nas questões do concurso público para o cargo de Delegado da Polícia Civil do Estado da Bahia, organizado pelo Cespe, em 2013. Nesse exemplo, o parâmetro ajustado foi  $m_k = 1,84$ .



**Figura 3.2:** Curva de % acerto em função da proficiência  $\theta$  Delegado da Polícia Civil/BA (CESPE, 2013) ( $m_k = 1,84$ ).

Assumindo-se que a distribuição do desempenho do  $j$ -ésimo candidato seja uma  $Beta(\hat{\alpha}_{jk}, \hat{\beta}_{jk})$ ,



as estimativas da média e do desvio padrão são

$$\bar{x}_{jk} = \frac{\hat{\alpha}_{jk}}{\hat{\alpha}_{jk} + \hat{\beta}_{jk}} = A_j$$

e

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{\hat{\alpha}_{jk}\hat{\beta}_{jk}}{(\hat{\alpha}_{jk} + \hat{\beta}_{jk})^2(\hat{\alpha}_{jk} + \hat{\beta}_{jk} + 1)}.$$

Dessa maneira, a probabilidade de aprovação desse candidato  $j$  na prova  $k$  é

$$P_{jk}(X > A_{ak} | \hat{\alpha}_{jk}, \hat{\beta}_{jk}) = \frac{\int_{A_{ak}}^1 x^{\hat{\alpha}_{jk}-1} (1-x)^{\hat{\beta}_{jk}-1} dx}{\int_0^1 x^{\hat{\alpha}_{jk}-1} (1-x)^{\hat{\beta}_{jk}-1} dx} \quad (3.2)$$



## Capítulo 4

# Resultados e análises

Para exemplificar a aplicação da metodologia apresentada, procedeu-se à análise das probabilidades de aprovação de nove candidatos hipotéticos, chamados de  $A$  a  $I$ , em quatro carreiras diferentes da Polícia Federal: agente, escrivão, delegado e papiloscopista.

A Figura 4.1 mostra o fluxo de análises efetuadas, dos dados aos resultados. Da estatística de acerto por questão, estimaram-se os parâmetros iniciais da CCI, conforme explicitado na Seção 2.1.2. Na sequência, procederam-se as estimativas de  $\theta$  para cada uma das 22 disciplinas (A Tabela 4.1 apresenta a relevância de cada disciplina nas quatro provas em análise), como o explicado na Seção 2.1.3.

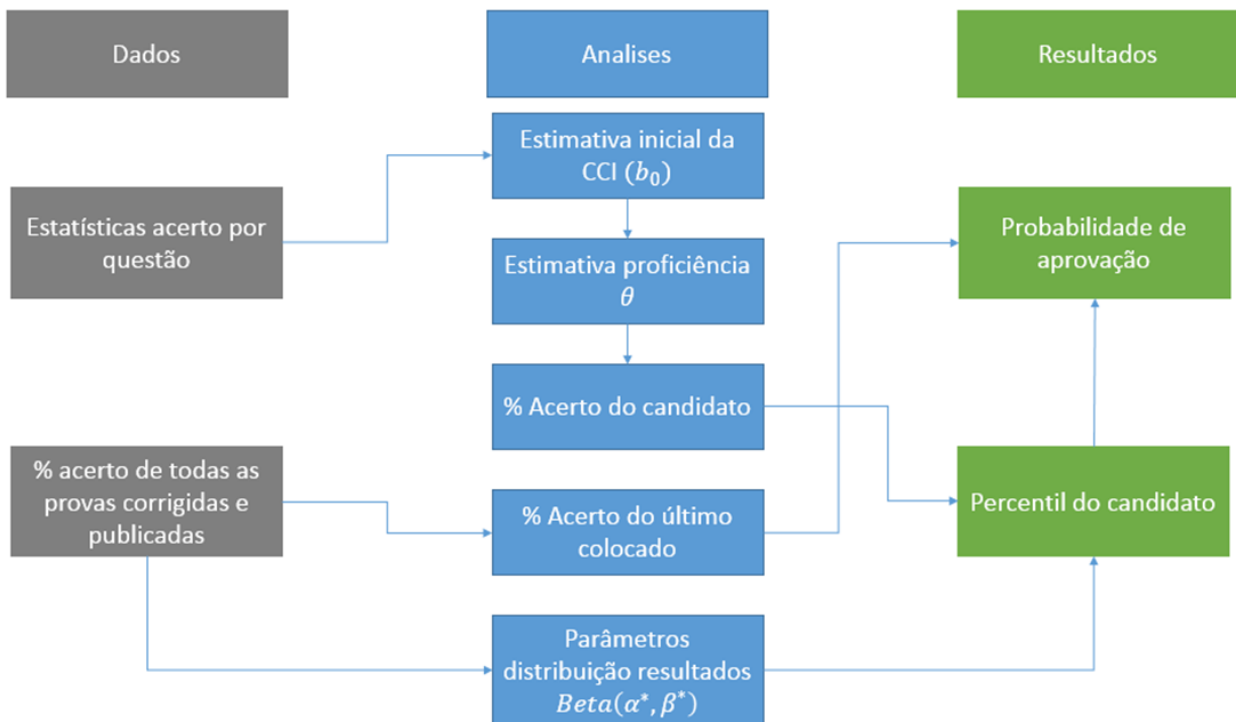


Figura 4.1: Fluxograma de análises: dos dados aos resultados.

Paralelamente, a partir da porcentagem de acerto de todas as provas corrigidas e publicadas no DOU (2013), para cada um dos quatro concursos, extraiu-se imediatamente a porcentagem de acerto do último candidato convocado e, conforme explicitado na Seção 3.1, estimaram-se os parâmetros da distribuição ( $Beta(\alpha^*, \beta^*)$ ) que melhor se adaptam aos resultados reais.

Finalmente, a partir destas análises pôde-se calcular a probabilidade de aprovação, conforme explicado na Seção 3.2. Essas probabilidades foram calculadas tanto com os parâmetros reais quanto com os estimados, de forma a comparar a eficiência do método no processo decisório.

Na sequência, detalham-se os resultados de cada etapa.

**Tabela 4.1:** *Distribuição percentual das disciplinas cobradas nas questões das provas para cada uma das carreiras.*

Disciplina	Número de questões (%)			
	Delegado	Escrivão	Papiloscopista	Agente
Administração	0,0%	5,0%	0,0%	3,3%
Administração Financeira e Orçamentária	0,0%	1,7%	0,0%	3,3%
Arquivologia	0,0%	10,0%	4,2%	0,0%
Atualidades	0,0%	5,8%	5,0%	7,5%
Biologia	0,0%	0,0%	5,8%	0,0%
Contabilidade Geral	0,0%	0,0%	0,0%	9,2%
Criminologia	7,5%	0,0%	10,8%	0,0%
Direito Administrativo	10,8%	10,0%	5,8%	6,7%
Direito Civil	5,8%	0,0%	0,0%	0,0%
Direito Comercial	7,5%	0,0%	0,0%	0,0%
Direito Constitucional	10,0%	5,0%	4,2%	4,2%
Direito Internacional Público	5,8%	0,0%	0,0%	0,0%
Direito Penal	43,3%	20,8%	10,8%	18,3%
Direito Previdenciário	6,7%	0,0%	0,0%	0,0%
Direito Tributário	2,5%	0,0%	0,0%	0,0%
Economia	0,0%	0,0%	0,0%	6,7%
Estatística	0,0%	0,0%	5,0%	0,0%
Física	0,0%	0,0%	8,3%	0,0%
Informática	0,0%	15,0%	10,0%	11,7%
Português	0,0%	18,3%	16,7%	21,7%
Química	0,0%	0,0%	8,3%	0,0%
Raciocínio Lógico	0,0%	8,3%	5,0%	7,5%
<b>Total</b>	<b>100,0%</b>	<b>100,0%</b>	<b>100,0%</b>	<b>100,0%</b>

Para cada disciplina, a proficiência de cada candidato hipotético foi gerada aleatoriamente a partir de uma distribuição normal de média e desvio-padrão um. Considerarmos essa proficiência como a proficiência “real” do candidato. A Tabela 4.1 apresenta a distribuição percentual de questões das diferentes disciplinas cobradas em cada uma das carreiras, e a Tabela 4.2 mostra a proficiência real desses nove candidatos em cada uma das 22 disciplinas cobradas nas quatro carreiras em análise.

Dessa forma, nessa simulação, assume-se que os candidatos tenham, em média, proficiências equivalentes e que suas proficiências em cada matéria não sejam correlacionadas.

Considerando-se que as provas para essas diferentes carreiras envolvem diversas disciplinas comuns, o propósito desta simulação é ilustrar como se pode, objetivamente, indicar sugestões para qual carreira cada candidato deveria concorrer.

Tabela 4.2: Proficiências reais dos candidatos.

Disciplina	Proficiência (real)								
	Candidato								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Administração	1,94	1,64	2,01	2,65	1,56	1,29	2,42	0,66	0,91
Administração Financeira e Orçamentária	1,85	2,27	1,62	1,83	1,08	-0,05	1,60	1,13	2,28
Arquivologia	1,41	0,05	1,35	1,10	-0,60	1,02	3,02	-0,99	1,23
Atualidades	0,24	0,54	1,80	0,94	2,38	1,26	1,75	1,63	-0,84
Biologia	0,57	0,68	2,87	1,01	0,54	0,71	-0,67	-0,99	-0,57
Contabilidade Geral	-0,88	1,11	1,57	2,69	-0,16	-0,13	1,71	-0,81	1,55
Criminologia	2,49	-0,83	0,57	-1,85	2,39	1,78	-1,84	1,71	-0,51
Direito Administrativo	-0,32	1,93	-0,28	1,04	2,00	0,22	2,21	0,01	2,83
Direito Civil	2,53	0,78	-0,44	-0,03	2,64	2,11	-0,53	1,11	0,76
Direito Comercial	1,44	2,33	2,41	1,21	2,12	2,99	1,49	2,26	0,77
Direito Constitucional	0,90	1,30	2,48	-0,60	1,93	0,19	-0,66	1,18	-0,98
Direito Internacional Público	1,77	0,30	0,10	1,72	0,80	-0,18	-0,17	1,85	2,08
Direito Penal	0,77	2,77	0,48	-0,31	2,68	-0,32	0,13	2,71	1,79
Direito Previdenciário	0,21	1,88	1,93	1,47	-0,63	1,06	-0,46	1,42	2,83
Direito Tributário	-0,69	-0,13	2,84	0,50	-0,03	1,99	-0,61	1,92	0,19
Economia	2,87	0,59	0,76	2,16	1,68	-0,66	0,34	0,42	2,65
Estatística	0,90	0,71	1,26	2,67	1,69	-0,78	2,05	0,25	1,08
Física	0,27	1,72	2,60	2,68	2,22	0,63	0,49	0,56	2,97
Informática	0,74	0,79	1,84	1,85	0,59	2,74	-0,76	1,54	-0,11
Português	1,68	0,21	0,50	1,76	1,45	0,32	2,70	-0,26	-0,87
Química	1,78	1,84	2,15	0,31	2,59	1,62	0,91	1,92	-0,32
Raciocínio Lógico	-0,84	-0,86	-0,30	0,29	-0,15	-0,04	1,43	2,17	2,64
<b>Média</b>	<b>0,98</b>	<b>0,98</b>	<b>1,37</b>	<b>1,14</b>	<b>1,31</b>	<b>0,81</b>	<b>0,75</b>	<b>0,97</b>	<b>1,02</b>

De início, apresentou-se ao candidato hipotético a questão de maior informação para  $\hat{\theta}_0 = 0$ . Respostas corretas, como as obtidas nas questões 1, 2, 4, 5, 7, 9 e 10, aumentam a estimativa da proficiência e, portanto, levam o candidato a responder uma questão subsequente mais difícil. De forma oposta, quando o candidato erra o item oferecido, como ocorrido nas questões 3, 6 e 8, diminui-se a estimativa da proficiência e, portanto, induz-se o candidato a responder uma questão subsequente mais fácil.

Assim, estimaram-se as 198 proficiências, como detalhado na Seção 2.1.3. Os resultados estão na Tabela 4.3. A convergência da proficiência estimada, em função do número de questões resolvidas para o seu valor real está exemplificada na Figura 4.2, que ilustra a estimação da proficiência do candidato  $G$  em Administração.

De posse das proficiências reais e estimadas por matéria, determinaram-se as proficiências ponderadas pela relevância de cada disciplina nos quatro concursos. Esse resultado é obtido do produto da proficiência por matéria (Tabela 4.2 e Tabela 4.3) pela proporção de questões das diferentes disciplinas cobradas em cada uma das carreiras. Os resultados para as proficiências reais estão dispostos na Tabela 4.4 e na Tabela 4.5.

O parâmetro  $m_k$  foi ajustado conforme discutido na Seção 3.1. Esses resultados podem ser vistos nas Figuras 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6.

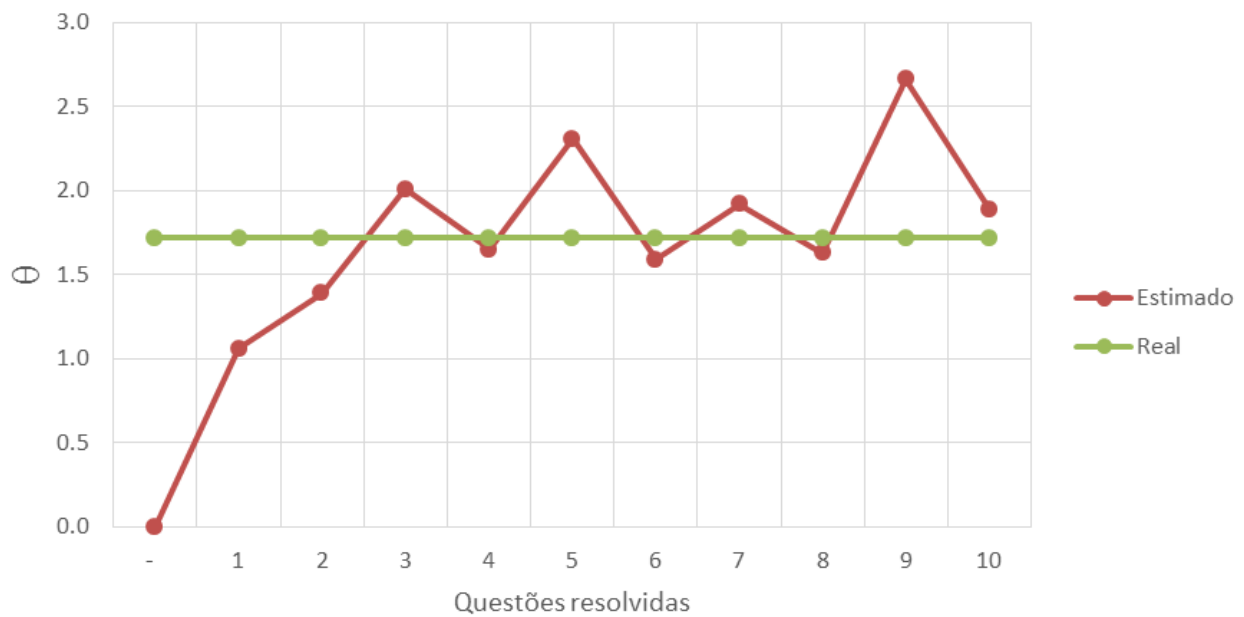


Figura 4.2: Exemplo de estimação da proficiência em função do número de questões resolvidas.

Tabela 4.3: Proficiências estimadas dos candidatos.

Disciplina	Proficiência (estimada)									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
Administração	2,67	1,38	2,72	1,98	1,34	0,93	2,07	0,97	0,98	
Administração Financeira e Orçamentária	2,48	2,43	2,01	1,21	0,97	-0,14	0,94	1,45	2,39	
Arquivologia	1,55	0,67	2,08	0,85	-0,83	1,16	2,53	-0,79	2,17	
Atualidades	0,39	0,42	1,43	-0,25	2,23	1,31	1,48	1,95	-1,29	
Biologia	0,22	0,08	2,43	-0,04	-0,35	-0,08	-0,44	-0,49	-1,22	
Contabilidade Geral	-0,64	1,24	0,54	1,86	-0,63	-0,11	1,88	-0,41	0,98	
Criminologia	2,52	-1,27	0,37	-1,61	1,94	1,67	-1,49	1,54	-0,50	
Direito Administrativo	-0,11	2,52	-0,27	1,52	1,60	0,11	2,08	-0,39	3,17	
Direito Civil	2,26	1,15	0,11	-0,01	2,94	2,50	-0,85	0,98	0,73	
Direito Comercial	0,60	2,79	3,07	1,45	2,71	3,11	1,72	2,38	0,43	
Direito Constitucional	1,41	1,64	2,90	-0,74	1,36	0,63	-0,77	1,22	-1,37	
Direito Internacional Público	1,57	0,01	-0,47	2,08	0,48	-1,64	-1,25	2,30	1,74	
Direito Penal	0,93	4,12	0,28	0,10	2,02	-0,17	1,13	2,64	1,90	
Direito Previdenciário	-0,54	2,30	2,34	0,84	0,38	0,94	0,10	0,90	2,97	
Direito Tributário	-0,85	0,44	2,66	-0,18	0,30	1,32	-0,87	1,12	0,43	
Economia	2,70	0,53	2,01	2,10	1,49	-0,76	0,97	0,03	2,92	
Estatística	0,97	0,93	1,34	2,65	0,60	-0,45	2,32	0,51	1,87	
Física	-0,59	1,62	2,50	2,81	1,86	1,38	0,87	-0,14	2,55	
Informática	1,03	0,55	2,28	1,93	-0,01	2,90	-1,56	1,60	0,22	
Português	1,78	-0,06	0,56	2,72	1,51	0,15	1,72	-0,65	-1,10	
Química	1,60	1,44	3,46	-0,58	3,17	1,86	0,71	2,43	-0,29	
Raciocínio Lógico	-0,83	-0,68	0,15	1,20	-0,38	-0,81	1,70	1,96	2,94	
<b>Média</b>	<b>0,96</b>	<b>1,10</b>	<b>1,57</b>	<b>0,99</b>	<b>1,12</b>	<b>0,72</b>	<b>0,68</b>	<b>0,96</b>	<b>1,03</b>	

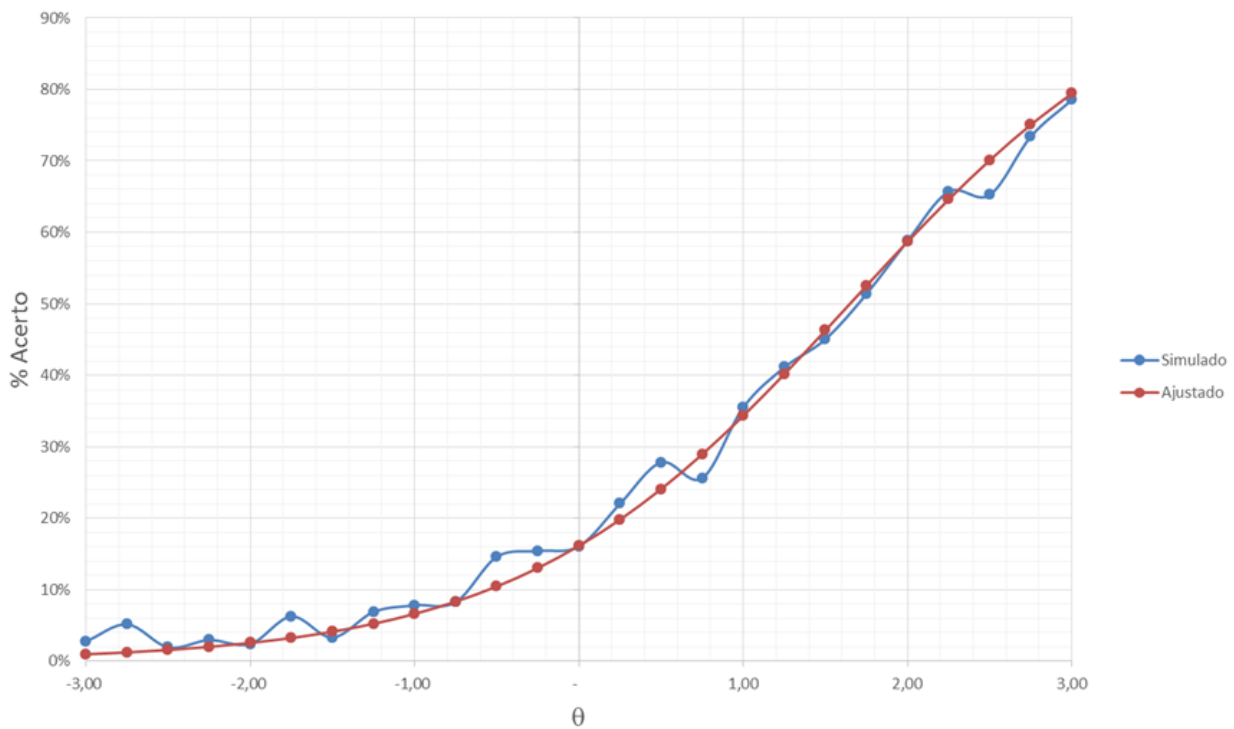
$$A_k(\theta) = \frac{1}{1 + e^{-(\theta - m_k)}} \quad (4.1)$$

**Tabela 4.4:** Proficiências reais dos candidatos - ponderada pela relevância de cada matéria.

Carreira	Proficiência (real)								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Delegado	0,93	1,84	0,83	0,08	2,07	0,49	0,12	1,91	1,37
Escrivão	0,80	1,08	0,91	0,96	1,37	0,67	1,27	1,04	0,81
Papiloscopista	1,00	0,85	1,22	0,83	1,65	0,80	0,75	0,95	0,49
Agente	0,80	1,08	0,92	1,22	1,44	0,43	1,19	0,97	0,84

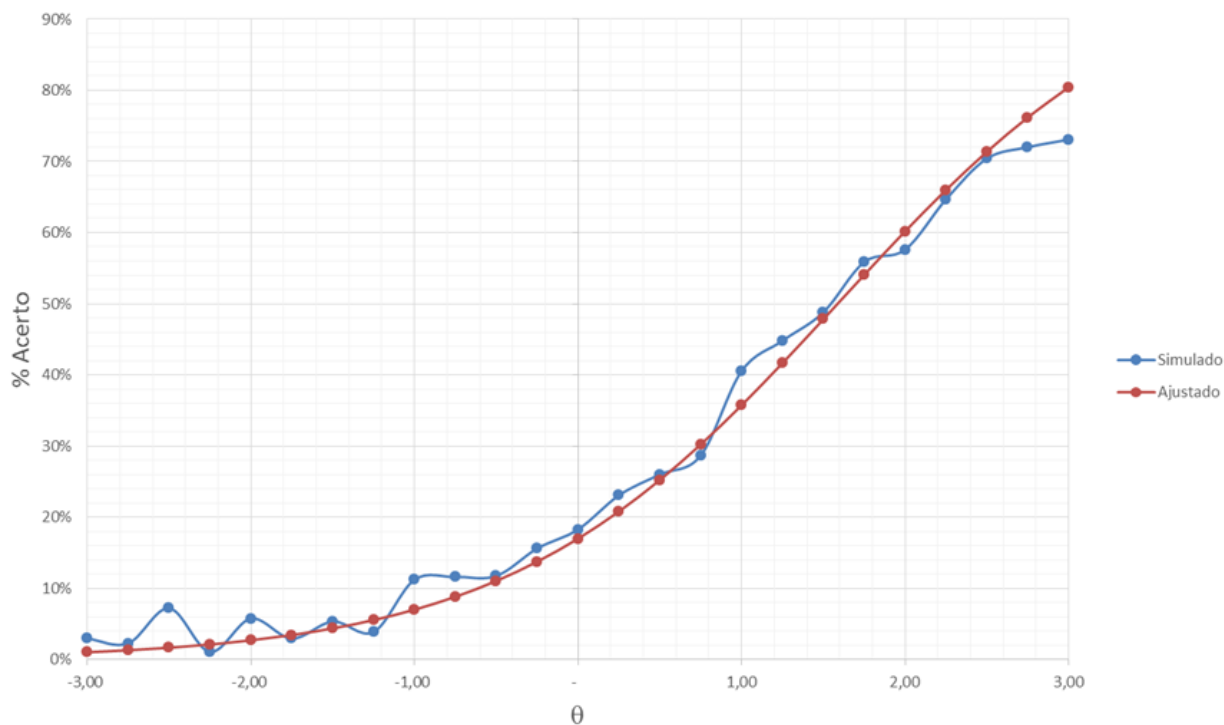
**Tabela 4.5:** Proficiências estimadas dos candidatos - ponderada pela relevância de cada matéria.

Carreira	Proficiência (estimada)								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Delegado	0,93	2,57	0,84	0,29	1,77	0,51	0,52	1,79	1,38
Escrivão	1,02	1,41	1,09	1,21	1,02	0,64	1,09	0,97	0,95
Papiloscopista	1,01	0,89	1,37	0,94	1,32	0,83	0,67	0,88	0,50
Agente	0,99	1,30	1,00	1,39	1,12	0,38	1,08	0,89	0,81

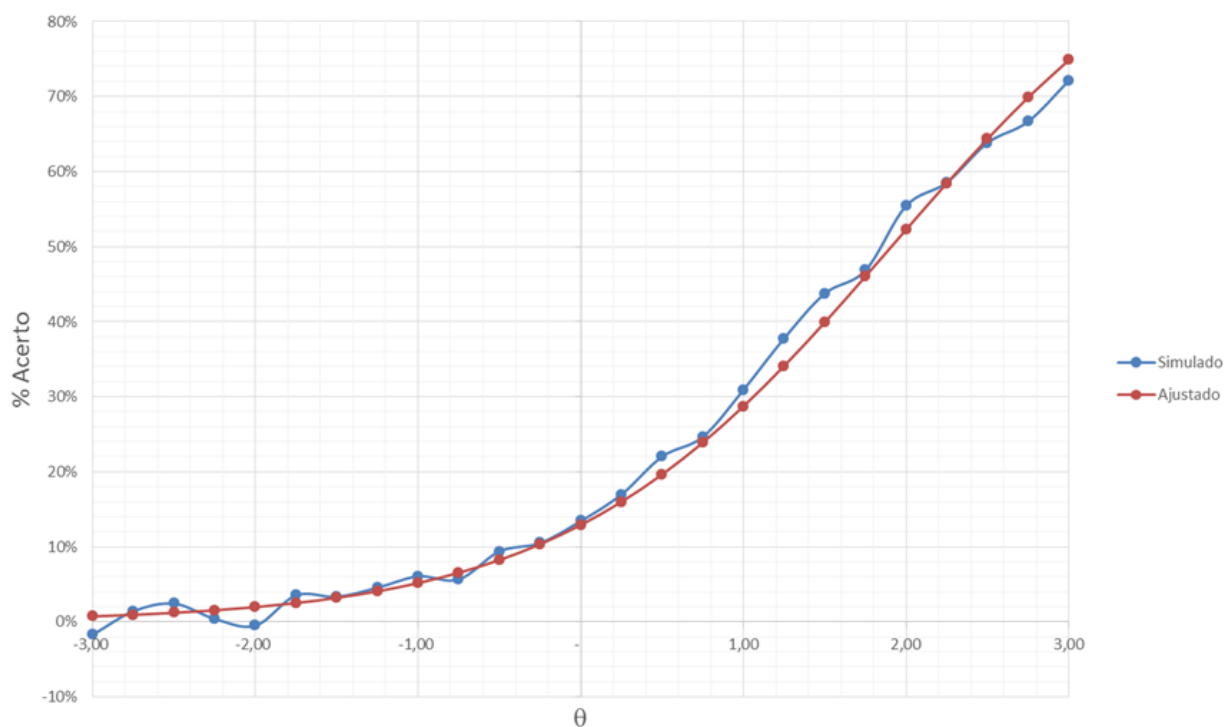


**Figura 4.3:** Curva de % acerto em função da proficiência  $\theta$  - Escrivão ( $m_k = 1,65$ ).

Estimados os percentuais de acerto de cada candidato em todas as provas, o próximo passo é identificar a distribuição de resultados reais, conforme discutido na Seção 3.1. Determinaram-se, por algoritmo genético, os parâmetros dos parâmetros  $\hat{\alpha}^*$  e  $\hat{\beta}^*$  que melhor representam os dados da distribuição real, buscando a que melhor adere aos dados reais.



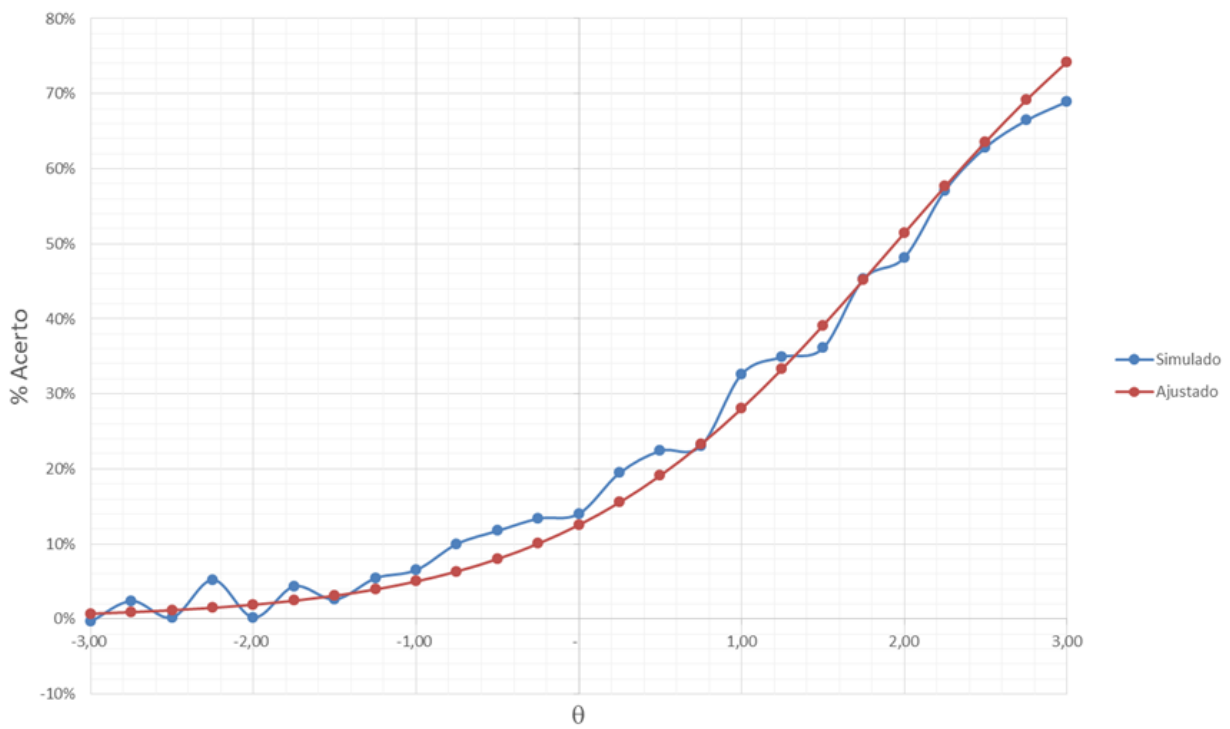
**Figura 4.4:** Curva de % acerto em função da proficiência  $\theta$  - Agente ( $m_k = 1,59$ ).



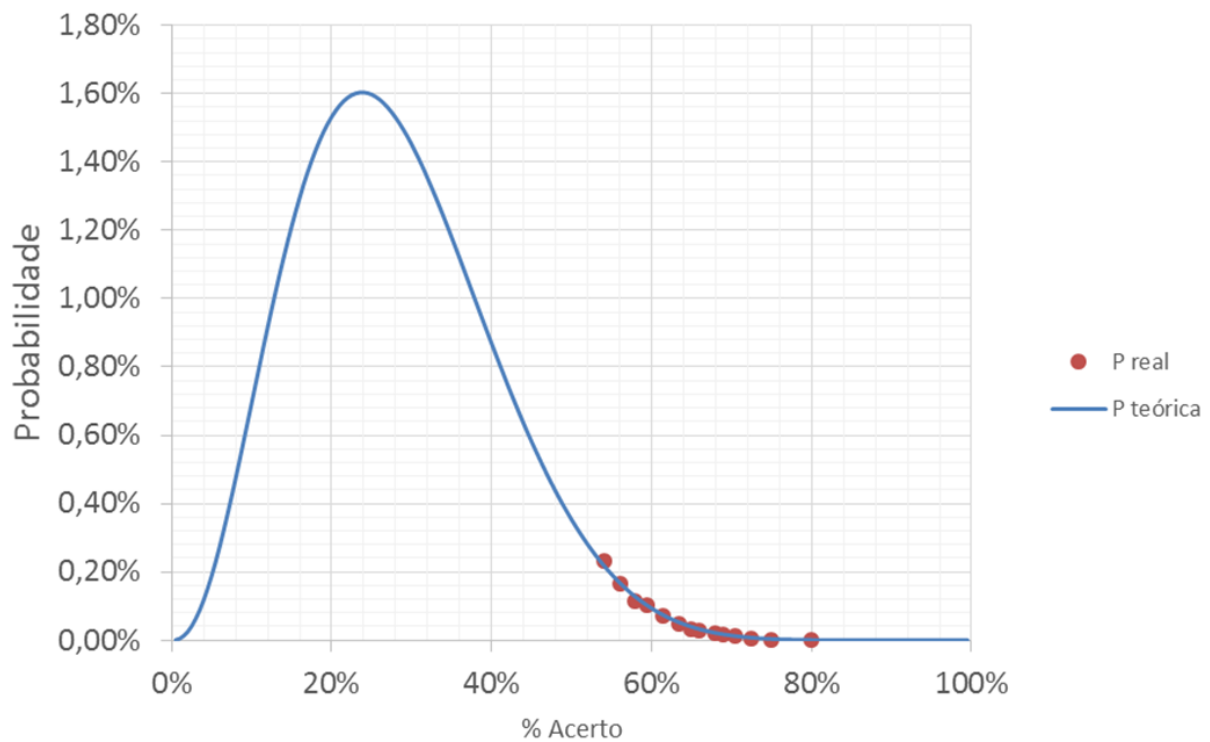
**Figura 4.5:** Curva de % acerto em função da proficiência  $\theta$  - Delegado ( $m_k = 1,91$ ).

Esse procedimento mostrou-se bastante satisfatório, como pode ser visto nas Figuras 4.7, 4.8, 4.9 e 4.10. Em que pese a pouca informação sobre a distribuição de probabilidade, a aderência aos dados reais foi compensada pela informação sobre a ordem dos resultados. Especificamente, essa aderência se refere apenas à região da cauda direita da distribuição, a qual trata da região de aprovação em concurso público.





**Figura 4.6:** Curva de % acerto em função da proficiência  $\theta$  - Papiloscopista ( $m_k = 1,94$ ).



**Figura 4.7:** FDP dos resultados para Escrivão - Beta(3, 5; 9, 0).

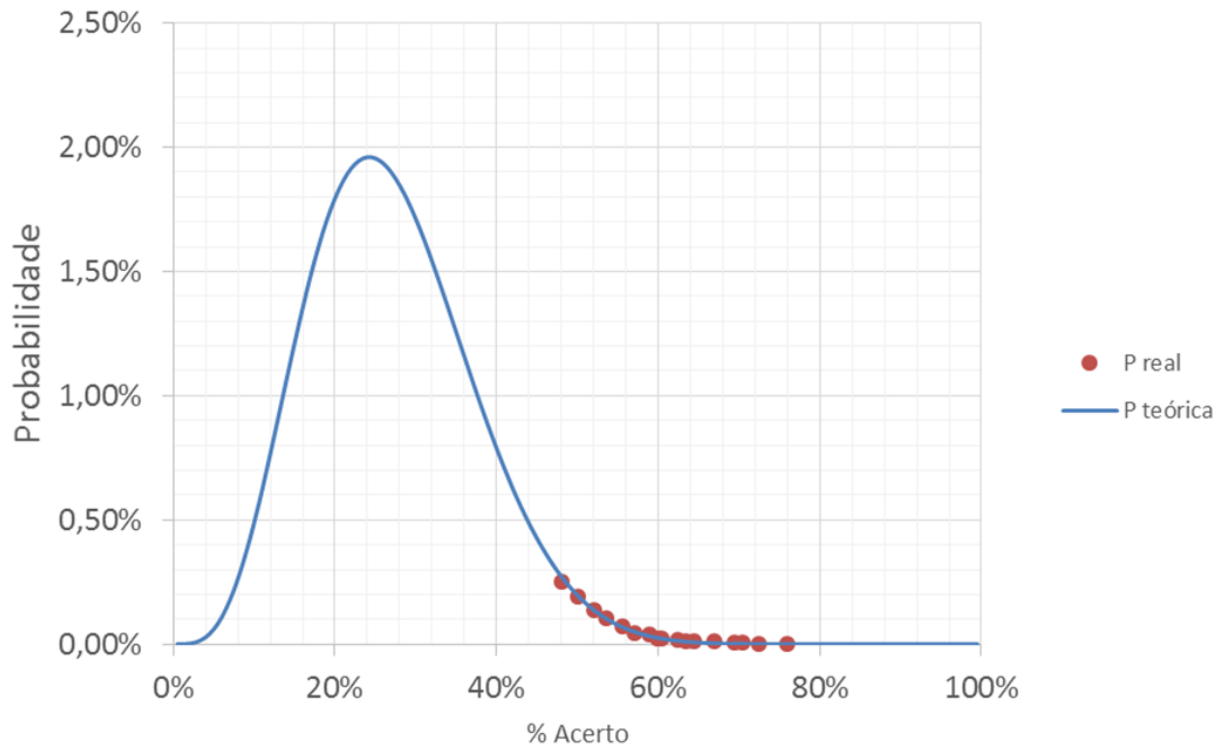


Figura 4.8: FDP dos resultados para Agente -  $Beta(5,0;13,5)$ .

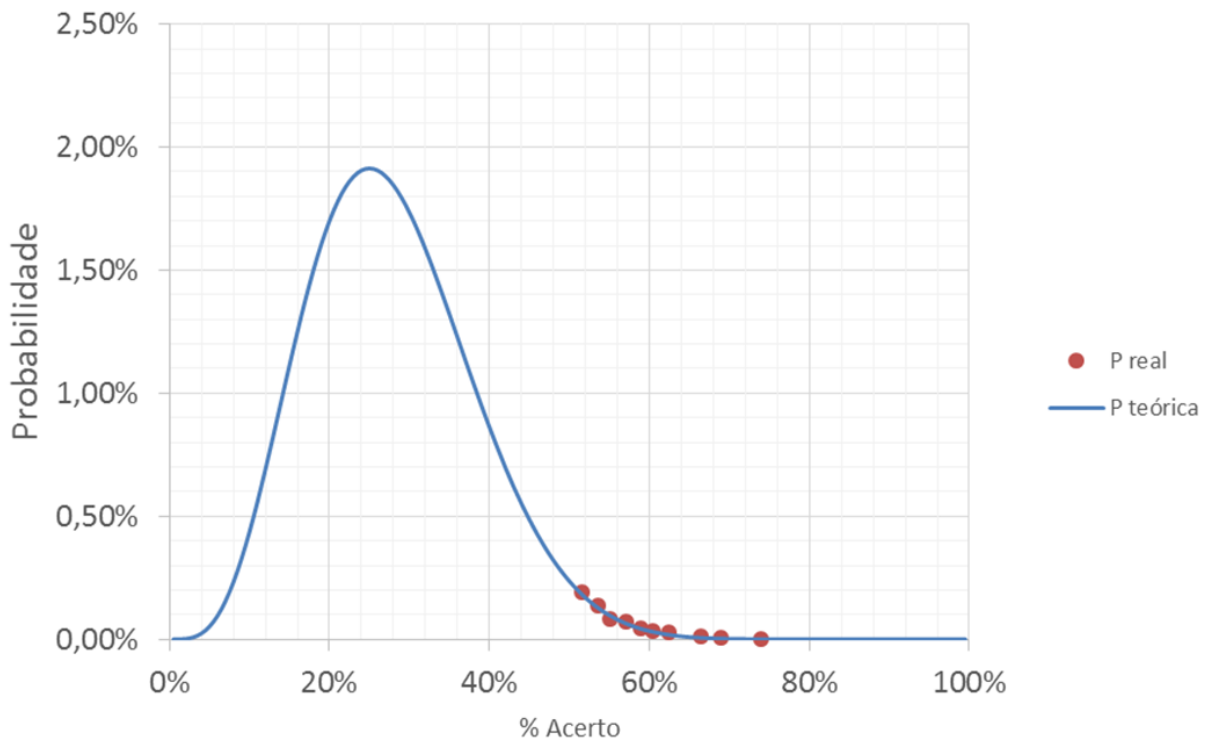
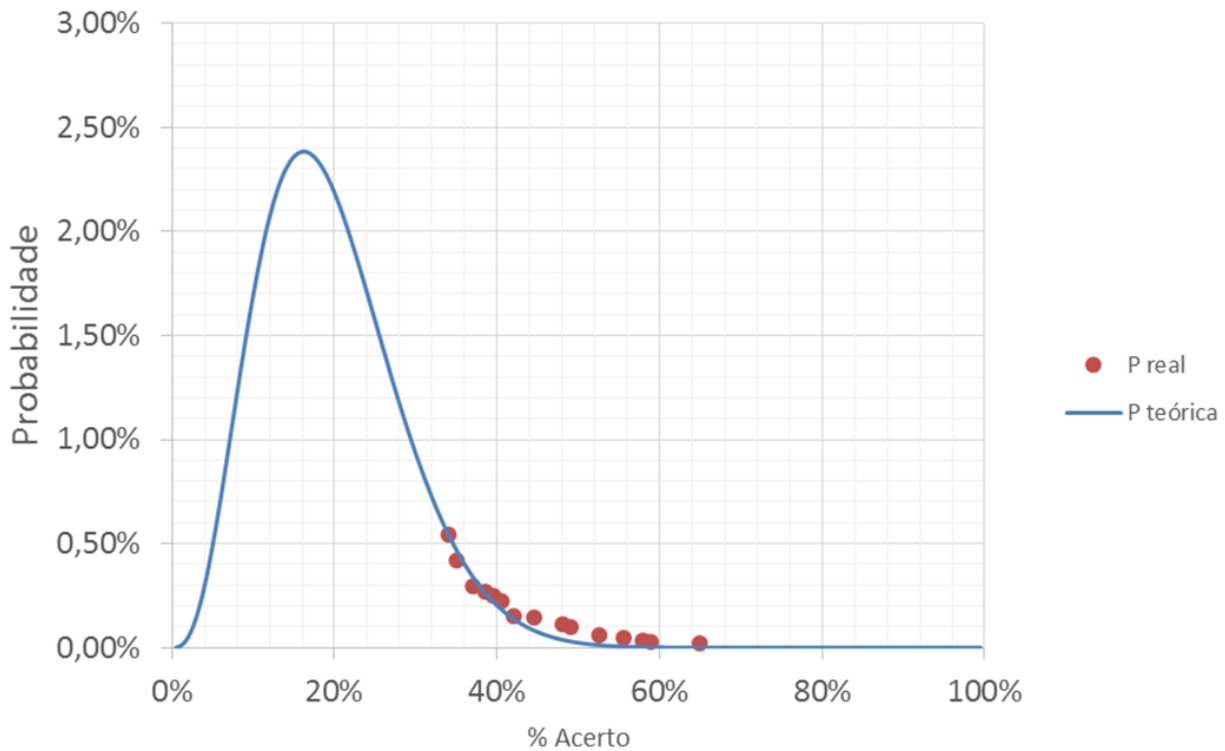


Figura 4.9: FDP dos resultados para Delegado -  $Beta(5,0;13,0)$ .



**Figura 4.10:** FDP dos resultados para Papiloscopista-  $Beta(4, 0; 16, 5)$ .

Finalmente, com base nos parâmetros das distribuições de resultados dos concursos  $(\hat{\mu}_k, \hat{\sigma}_k^2)$ , calculou-se a probabilidade dos candidatos serem aprovados em um cada um dos quatro concursos, considerando a nota do último convocado em cada um deles, conforme a Equação (3.2). E, uma vez, calculadas as probabilidades de aprovação, estimamos também o valor esperado da remuneração, multiplicando-se cada probabilidade pela respectiva remuneração do cargo, explicitada na Tabela 4.6.

**Tabela 4.6:** Remuneração por cargo conforme Edital do concurso.

Carreira	Remuneração (jan/13)
Delegado	R\$ 14.037,11
Escrivão	R\$ 7.514,33
Papiloscopista	R\$ 7.514,33
Agente	R\$ 7.514,33

Para validar o método aqui proposto, comparamos qualitativamente os resultados proporcionados pelas proficiências “reais” e estimadas. Os resultados estão, respectivamente, na Tabela 4.7 e na Tabela 4.8.

A Figura 4.11 exemplifica a exposição dos resultados da metodologia para o candidato A. Traçando um paralelo com uma análise de risco (probabilidade de aprovação) por retorno (remuneração), o candidato elimina as hipóteses da carreira de escrivão e agente. Nessas, a remuneração é idêntica à de papiloscopista, mas a chance de aprovação é menor.

**Tabela 4.7:** Probabilidade de aprovação e valor esperado estimados utilizando a proficiência real dos candidatos.

Carreira	Probabilidade de aprovação (real)								
	Candidato								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Delegado	7,2%	29,1%	5,9%	1,0%	37,4%	2,9%	1,2%	31,4%	15,3%
Escrivão	8,5%	13,6%	10,2%	11,2%	21,1%	6,6%	18,1%	12,7%	8,6%
Papiloscopista	16,9%	13,3%	23,0%	12,9%	37,8%	12,3%	11,4%	15,5%	7,1%
Agente	7,4%	12,1%	9,3%	15,2%	21,0%	3,5%	14,5%	10,0%	7,9%
	Valor esperado (real)								
Delegado	R\$ 1.014	R\$ 4.080	R\$ 833	R\$ 147	R\$ 5.244	R\$ 407	R\$ 161	R\$ 4.411	R\$ 2.149
Escrivão	R\$ 638	R\$ 1.019	R\$ 766	R\$ 843	R\$ 1.582	R\$ 495	R\$ 1.359	R\$ 953	R\$ 644
Papiloscopista	R\$ 1.267	R\$ 996	R\$ 1.731	R\$ 966	R\$ 2.838	R\$ 921	R\$ 853	R\$ 1.167	R\$ 530
Agente	R\$ 554	R\$ 908	R\$ 697	R\$ 1.139	R\$ 1.581	R\$ 260	R\$ 1.093	R\$ 754	R\$ 594

**Tabela 4.8:** Probabilidade de aprovação e valor esperado estimados utilizando a proficiência estimada dos candidatos.

Carreira	Probabilidade de aprovação (estimada)								
	Candidato								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Delegado	7,3%	57,1%	6,1%	1,8%	26,7%	3,0%	3,1%	27,6%	15,6%
Escrivão	12,3%	22,1%	14,0%	16,7%	12,4%	6,2%	13,8%	11,3%	11,0%
Papiloscopista	17,1%	14,2%	27,6%	15,3%	26,0%	12,8%	9,8%	14,0%	7,2%
Agente	10,4%	17,1%	10,6%	19,6%	12,9%	3,1%	12,2%	8,8%	7,5%
	Valor esperado (estimada)								
Delegado	R\$ 1.020	R\$ 8.019	R\$ 857	R\$ 253	R\$ 3.747	R\$ 419	R\$ 429	R\$ 3.878	R\$ 2.187
Escrivão	R\$ 923	R\$ 1.659	R\$ 1.049	R\$ 1.256	R\$ 935	R\$ 467	R\$ 1.033	R\$ 847	R\$ 827
Papiloscopista	R\$ 1.286	R\$ 1.065	R\$ 2.075	R\$ 1.148	R\$ 1.950	R\$ 963	R\$ 733	R\$ 1.054	R\$ 541
Agente	R\$ 779	R\$ 1.288	R\$ 799	R\$ 1.469	R\$ 972	R\$ 231	R\$ 914	R\$ 661	R\$ 567

A análise dos resultados mostra que, embora haja erro na estimação individual, de um modo geral, o critério de decisão proposto é coerente. Ou seja, a metodologia é capaz de identificar a carreira em que o candidato é mais propenso a obter sucesso, considerando, inclusive, o critério econômico, determinado pelo valor esperado. As recomendações de carreira a escolher, baseadas em probabilidade de aprovação e valor esperado estão na Tabela 4.9.

A única divergência de recomendação ocorreu para o candidato E, no que se refere à probabilidade de aprovação. Utilizando os dados reais de proficiência, a probabilidade de aprovação calculada é maior para papiloscopista. Já com as proficiências estimadas, encontrou-se probabilidade maior para delegado. Entretanto, esse erro não foi relevante na escolha, considerando o valor esperado. Em ambos os casos indicou-se a carreira de delegado.

Com a recomendação do cargo, pode-se, analisando a relevância das disciplinas no edital recomendado e a proficiência do candidato em cada uma delas, priorizar o estudo. Essas informações estão explicitadas, para o candidato A, na Tabela 4.10 e na Figura 4.12. Assim, o candidato deve priorizar as disciplinas por dois critérios: as que possuem maior peso no edital e aquelas em que sua proficiência é menor, ou seja, as matérias que possuem maior potencial de melhora no seu score final.

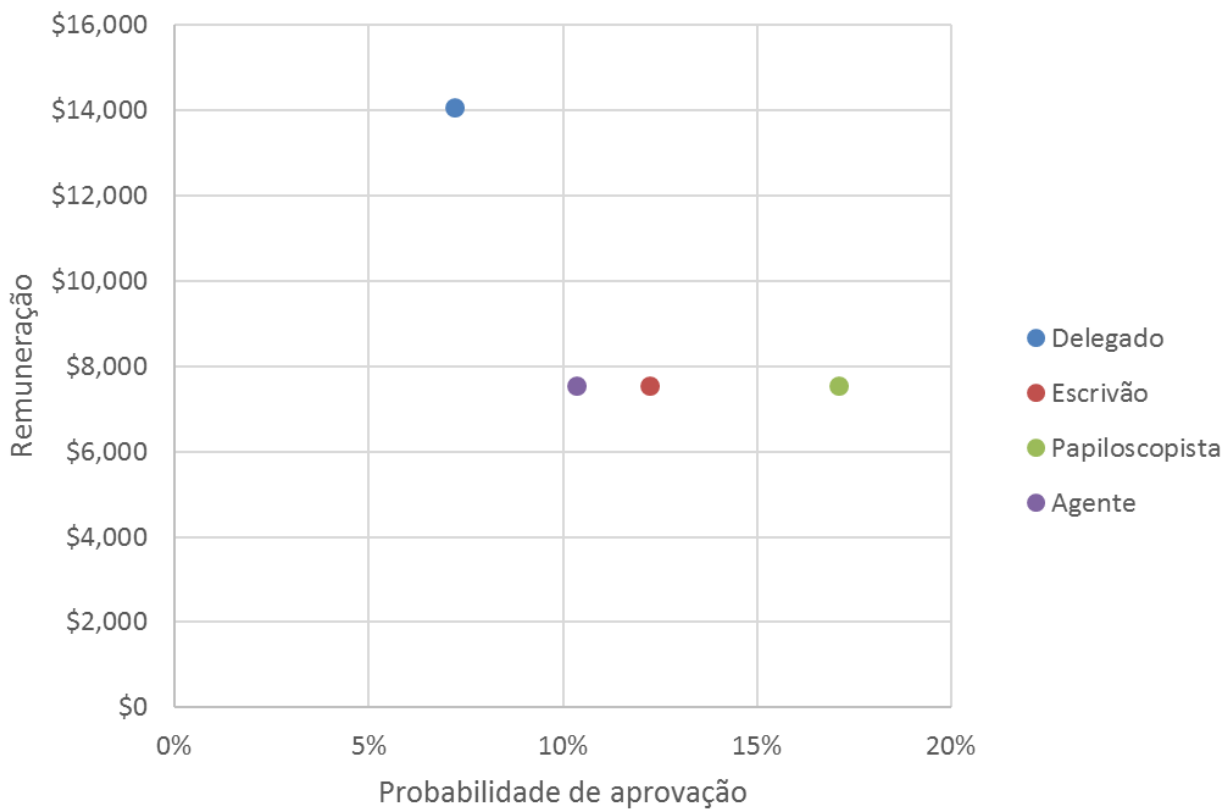


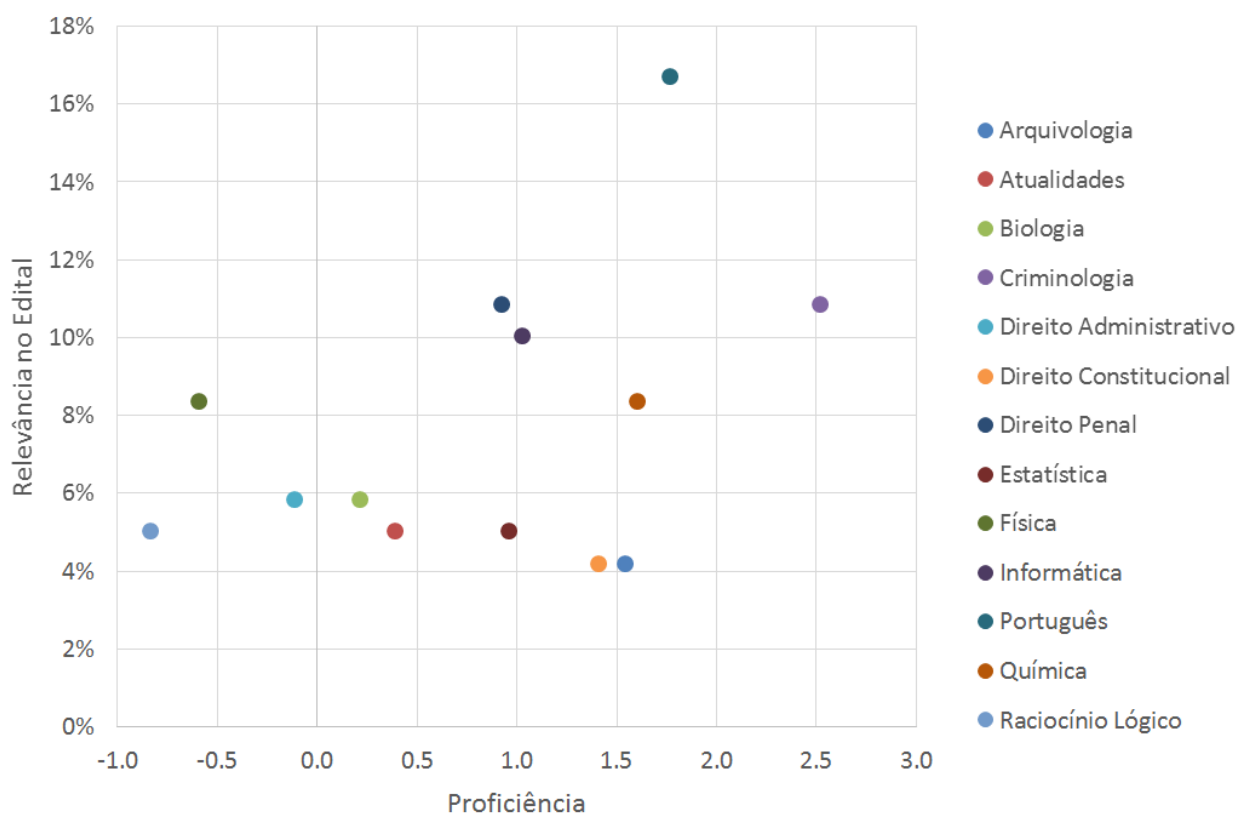
Figura 4.11: Remuneração  $\times$  probabilidade estimada de aprovação — Candidato A.

Tabela 4.9: Recomendações do modelo quanto a qual concurso escolher.

Candidato	Cargo recomendado	
	Probabilidade	Valor esperado
A	Papiloscopista	Papiloscopista
B	Delegado	Delegado
C	Papiloscopista	Papiloscopista
D	Agente	Agente
E	Delegado	Delegado
F	Papiloscopista	Papiloscopista
G	Escrivão	Escrivão
H	Delegado	Delegado
I	Delegado	Delegado

**Tabela 4.10:** Proficiência do candidato A e relevância das disciplinas da carreira de papiloscopista.

Disciplinas (Papiloscopista)	Proficiência	Peso	
Arquivologia	1.55	4.2%	
Atualidades	0.39	5.0%	
Biologia	0.22	5.8%	
Criminologia	2.52	10.8%	
Direito Administrativo	-	0.11	5.8%
Direito Constitucional	1.41	4.2%	
Direito Penal	0.93	10.8%	
Estatística	0.97	5.0%	
Física	-	0.59	8.3%
Informática	1.03	10.0%	
Português	1.78	16.7%	
Química	1.60	8.3%	
Raciocínio Lógico	-	0.83	5.0%

**Figura 4.12:** Proficiência do candidato A e relevância das disciplinas da carreira de papiloscopista.

## Capítulo 5

# Conclusão

O presente trabalho analisou a construção de uma metodologia voltada para o processo de escolha de carreira pelo aspirante ao serviço público. O processo consiste em estimar como um candidato se sairia nos diversos concursos, para assim poder indicar em qual ele teria maior probabilidade de sucesso.

Em relação ao Teste Adaptativo Computadorizado, destaca-se que o trabalho não se preocupou com problemas de ordem prática. Por sua própria natureza, um algoritmo adaptativo de testes tende a capitalizar sobre um pequeno conjunto de itens de alta qualidade. Se o banco de itens é usado por algum tempo, esses itens se tornam vulneráveis a falhas de segurança. Nesse sentido, o algoritmo Shadow-test, desenvolvido por [van der Linden \(2007\)](#), propõe uma solução para esses problemas práticos apontados.

Na Seção 3.1, conclui-se que a determinação da proficiência do concursista nas diversas disciplinas de concurso público, mesmo desconhecendo a priori os parâmetros das questões utilizadas nos simulados, foi eficiente. A correlação entre o valor estimado de  $\theta$  e o seu valor real foi de 0,91. Em futuros trabalhos, recomenda-se estudo aprofundado sobre a determinação dos parâmetros, como o uso da abordagem bayesiana e outros modelos para a CCI, conforme [Andrade, Tavares, e Valle \(2000\)](#).

Outra possibilidade de melhora no modelo é a adoção racional de critérios de parada ([Baker e Kim, 2004](#)). Neste trabalho utilizou-se, por simplicidade, um critério fixo de parada. Nestes testes, todos os indivíduos respondem a mesma quantidade de itens e, conseqüentemente, a precisão da habilidade estimada não vai ser a mesma para todos os indivíduos, motivo pelo qual não é muito recomendado o ([Moreira Junior, 2011](#)).

O procedimento de identificação da distribuição de resultados reais, conforme discutido na Seção 3.1, mostrou-se bastante satisfatório, como pode ser visto na Figura 4.7, Figura 4.8, Figura 4.9 e Figura 4.10. Mesmo com pouca informação sobre a distribuição de probabilidade, a aderência aos dados reais foi compensada pela informação sobre a ordem dos resultados. Especificamente, esta aderência é maior justamente na cauda direita da distribuição, que é o local de interesse deste trabalho, pois se trata da região de aprovação em concurso público.

Da mesma forma, o ajuste da curva de acerto de cada candidato, em função da sua proficiência nas quatro carreiras, mostrou-se bastante eficiente. Os dados simulados aderiram satisfatoriamente ao modelo de um parâmetro, proposto na Equação (3.2). Como futuro desenvolvimento, sugere-se estudar se um modelo, segundo a Equação (5.1), com dois parâmetros representaria melhor os dados simulados.

$$A_k(\theta) = \frac{1}{1 + e^{-q_k(\theta - m_k)}} \quad (5.1)$$

Finalmente, a análise das recomendações produzidas mostra que, embora haja erro na estimação individual, o critério de decisão não foi prejudicado. Ou seja, a metodologia é capaz de identificar a carreira em que o candidato é mais propenso a obter sucesso, considerando inclusive o critério econômico, determinado pelo valor esperado.

Na análise efetuada, a única divergência de recomendação ocorreu para um dos nove candidatos, quando baseada na probabilidade de aprovação. Entretanto, para a recomendação considerando o valor esperado, não houve erro.

Como sugestão final para a pesquisa, recomenda-se aumentar o escopo tanto do número de candidatos, quanto do número de carreiras. Outra possibilidade de desenvolvimento é agregar à análise das recomendações critérios de preferência pessoal, pois este trabalho restringe suas conclusões em fundamentos estritamente probabilísticos e econômicos.



# Apêndice A

## Algoritmos

### A.1 Otimização dos parâmetros da Teoria de Resposta ao Item

```
1
2 /// <summary> C#
3 using System;
4 using System.Collections.Generic;
5 using System.Linq;
6 using System.Text;
7
8 namespace ModeloAprendizagem
9 {
10     public class ItemResponse
11     {
12         /// <summary>Inicializa a instância randômica</summary>
13         public static Random rnd = new Random();
14
15         /// <summary>Classe de estudantes</summary>
16         public class Student
17         {
18             /// <summary>Estimativas anteriores de proficiência</summary>
19             public List<float> PastEstimates = new List<float>();
20
21             /// <summary>Média das estimativas anteriores da proficiência</summary>
22             public float GetPastEstimatesMean()
23             {
24                 double m = 0;
25                 double w = 0;
26                 double wSum = 0;
27                 for (int i = 0; i < PastEstimates.Count; i++)
28                 {
29                     w = 1 / ((float)Math.Sqrt(i + 1));
30                     wSum += w;
31                     m += w * PastEstimates[i];
32                 }
33
34                 return (float)(m / wSum);
35             }
36         }
37     }
38 }
```

```

36
37     /// <summary>Proficiências dos estudantes </summary>
38     public float ability;
39
40     /// <summary>Proficiência estimada </summary>
41     public float EstimatedAbility = 5;
42
43     /// <summary>Cria um novo estudante </summary>
44     /// <param name="ability">Student's ability </param>
45     public Student(float ability)
46     {
47         this.ability = ability;
48     }
49
50     /// <summary>Calcula aleatoriamente a resposta do estudante.
51     /// Respostas corretas retornam o número da questão; respostas
52     erradas são precedidas por *
53     /// So: "1 2 *3 *4" means student got 1 and 2 correct and missed 3
54     and 4</summary>
55     /// <param name="Test">Test </param>
56     /// <param name="score">Proficiência do estudante </param>
57     public string Answers(List<Question> Test, out float score)
58     {
59         string r = "";
60         score = 0;
61         foreach (Question q in Test)
62         {
63             //Calcula a probabilidade do estudante acertar a questão
64             if (rnd.NextDouble() <= q CorrectAnswerChance(this)) { r +=
65                 " "; score++; }
66             else r += " *";
67
68             r += q.Name;
69         }
70         score /= Test.Count;
71         if (score < 0.1f)
72         {
73         }
74         return r;
75     }
76
77     /// <summary>String representation </summary>
78     public override string ToString()
79     {
80         return "Ability: " + ability.ToString();
81     }
82
83     /// <summary>Classe de questões </summary>
84     public class Question
85     {
86         public int numAns = 0;

```

```

86     public float a, b, c;
87     public float est_a = 1, est_b = 5, est_c = 0.25f;
88
89     /// <summary>Número único da questão</summary>
90     public string Name;
91
92     /// <summary>Cria uma nova questão</summary>
93     /// <param name="a">Parâmetro de discriminação</param>
94     /// <param name="b"> Parâmetro de dificuldade </param>
95     /// <param name="c"> Parâmetro de chute </param>
96     /// <param name="name">Nome da questão</param>
97     public Question(float a, float b, float c, string name)
98     {
99         this.a = a;
100        this.b = b;
101        this.c = c;
102
103        //Evita espaços ou * em nomes;
104        Name = name.Trim().Replace(" ", "");
105    }
106
107     /// <summary>Calcula a probabilidade do estudante acertar essa
108     questão</summary>
109     /// <param name="s">Student</param>
110     public float CorrectAnswerChance(Student s)
111     {
112         return c + (1 - c) / (1 + (float)Math.Exp(-a * (s.ability - b)))
113         ;
114     }
115
116     /// <summary>String representation</summary>
117     public override string ToString()
118     {
119         return "a: " + a.ToString() + " b:" + b.ToString() + " c:" + c
120         .ToString();
121     }
122
123     /// <summary>Classe de estudantes</summary>
124     public static List<Student> StudentClass = new List<Student>();
125
126     /// <summary>Teste com questões</summary>
127     public static List<Question> Test = new List<Question>();
128
129     /// <summary>Gera uma nova classe de proficiência com valores entre 0 e
130     10</summary>
131     /// <param name="n">Número de estudantes</param>
132     public static void GenClass(int n)
133     {
134         StudentClass.Clear();
135         for (int i = 0; i < n; i++)
136         {
137             StudentClass.Add(new Student(10 * (float)rnd.NextDouble()));
138         }
139     }

```

```

135     }
136 }
137
138 /// <summary>Gera um teste aleatório com n questões. Retorna a
    dificuldade do teste.</summary>
139 /// <param name="n">Número de questões</param>
140 public static float GenTest(int n)
141 {
142     Test.Clear();
143     float difficulty = 0;
144     for (int i = 0; i < n; i++)
145     {
146         float a = 0.5f + 1 * (float)rnd.NextDouble();
147         float b = 10 * (float)rnd.NextDouble();
148         float c = 0.25f;
149         difficulty += b;
150         Test.Add(new Question(a, b, c, i.ToString()));
151     }
152
153     return difficulty / n;
154 }
155
156 /// <summary>Calibra a questão s e o estudante q baseado na resposta
    correta/incorrecta</summary>
157 /// <param name="s">Student</param>
158 /// <param name="q">Question</param>
159 /// <param name="correct">Questão foi respondida corretamente?</param>
160 public static void Calibrate(Student s, Question q, bool correct)
161 {
162     //Corrige a probabilidade de acerto da questão
163     //F = c + (1 - c) / (1 + (float)Math.Exp(-a * (s.ability - b)))
164
165     //DEBUG - parâmetros
166     //s.EstimatedAbility = s.ability;
167     //q.est_a = q.a;
168     //q.est_b = q.b;
169     q.est_c = q.c;
170
171     float a = q.est_a;
172     float b = q.est_b;
173     float c = q.est_c;
174
175     float theta = s.EstimatedAbility;
176
177     float u = correct ? 1 : 0;
178
179     //função a maximizar: L = ln(uF + (1-u)*(1-F)) = ln(uF + 1 - u - F
    + uF) = ln(1 - u + F*(2u-1))
180
181     float t1 = (float)Math.Exp(-a * (theta - b));
182     if (t1 > 1e10f) t1 = 1e10f;
183     float t3 = 1.0f / (1 + t1);
184     float t2 = t3 * t3;

```

```

185
186     float fval = c + (1 - c) * t3;
187     float invL = 1.0f / (1 - u + fval * (2 * u - 1));
188     if (invL > 1e10f) invL = 1e10f;
189
190     //dL/dthetaf
191
192     float lambFac = 1.1f / (float)Math.Sqrt(1 + (float)q.numAns);
193
194     //double eps = 0.0001f;
195     //double dLdThetaNum = (lnL(a, b, c, theta + eps, u) - lnL(a, b, c,
196     //double dLdaNum = (lnL(a + eps, b, c, theta, u) - lnL(a - eps, b, c
197     //double dLdtheta = invL * (1 - c) * (2 * u - 1) * t2 * a * t1 - 1E-5f
198     //double dLdb = invL * (1 - c) * (2 * u - 1) * t2 * (-a) * t1;
199     float dLdtheta = invL * (1 - c) * (2 * u - 1) * t2 * a * t1 - 1E-5f
200     * 2 * (theta - 5);
201
202     float dLda = invL * (1 - c) * (2 * u - 1) * t2 * (theta - b) * t1;
203     float dLdb = invL * (1 - c) * (2 * u - 1) * t2 * (-a) * t1;
204
205     float lambda = 0.1f;
206
207     if (float.IsNaN(dLdtheta))
208     {
209     }
210     if (float.IsInfinity(dLda))
211     {
212     }
213
214     if (dLda < 0)
215     {
216     }
217
218     s.EstimatedAbility += lambda * dLdtheta;
219     q.est_a += lambda * dLda * lambFac;
220     q.est_b += lambda * dLdb * lambFac;
221
222     s.PastEstimates.Insert(0, s.EstimatedAbility);
223     if (s.PastEstimates.Count > 200) s.PastEstimates.RemoveAt(s.
224     PastEstimates.Count - 1);
225
226     //Corrige valores estranhos para a média
227     if (s.EstimatedAbility > 10) s.EstimatedAbility = 9;
228     if (s.EstimatedAbility < 0) s.EstimatedAbility = 1;
229     if (q.est_b > 10) q.est_b = 5;
230     if (q.est_b < 0) q.est_b = 5;
231     if (q.est_a < 0.1f) q.est_a = 0.1f;
232     if (q.est_a > 5f) q.est_a = 5f;
233 }

```

```

234     static double lnL(double a, double b, double c, double theta, double u)
235     {
236         double f = c + (1 - c) / (1 + Math.Exp(-a * (theta - b)));
237
238         return Math.Log(f * u + (1 - u) * (1 - f));
239     }
240
241 }
242 }

```

## A.2 Algoritmo genético

```

1
2 Sub Algoritmo_genetico()
3 'Visual Basic
4
5 Dim L(1000, 3) As Single
6 Dim x(1000, 3) As Single
7 Dim best(1000, 3) As Single
8 Dim i As Integer
9 Dim j As Integer
10
11 NCros = 2
12 ninic = 0
13 nmax = 50
14 geracao = 1
15 Randomize
16
17 shAlgGen.Select
18 Application.ScreenUpdating = False
19
20 'Geração dos primeiros pares
21
22     For i = 1 To nmax
23         For j = 1 To 3
24             best(i, j) = -1000
25         Next j
26     Next i
27
28 tolerancia = 10000
29
30 Do While tolerancia > 0.1 And geracao <= 100
31
32 'Geração inicial
33     i = 1
34     x(1, 1) = -10 * Rnd
35     shAlgGen.Cells(i + 1, 1) = x(1, 1)
36     x(1, 2) = -10 * Rnd
37     shAlgGen.Cells(i + 1, 2) = x(1, 2)
38     x(1, 3) = fteste(x(i, 1), x(i, 2))
39     shAlgGen.Cells(i + 1, 3) = x(i, 3)
40     For i = 2 To nmax * NCros
41         If x(i - 1, 1) <= 10 Then

```

```

42     x(i, 1) = x(i - 1, 1) + 2 * Rnd
43     shAlgGen.Cells(i + 1, 1) = x(i, 1)
44     x(i, 2) = x(i - 1, 2) + Rnd - Rnd
45     shAlgGen.Cells(i + 1, 2) = x(i, 2)
46     x(i, 3) = fteste(x(i, 1), x(i, 2))
47     shAlgGen.Cells(i + 1, 3) = x(i, 3)
48     Else
49         x(i, 1) = -10 * Rnd
50         shAlgGen.Cells(i + 1, 1) = x(i, 1)
51         x(i, 2) = x(i - 1, 2) + 2 * Rnd
52         shAlgGen.Cells(i + 1, 2) = x(i, 2) + Rnd - Rnd
53         x(i, 3) = fteste(x(i, 1), x(i, 2))
54         shAlgGen.Cells(i + 1, 3) = x(i, 3)
55     End If
56     Next i
57
58 'Seleção para mutação
59
60     r1 = Abs(Rnd)
61     f1 = Fix(r1 * (nmax * NCros)) + 1
62
63 'Fator genético de alteração
64
65     falt = 1.4
66
67     x(f1, 1) = x(f1, 1) * falt
68     x(f1, 2) = x(f1, 2) * falt
69     x(f1, 3) = fteste(x(f1, 1), x(f1, 2))
70
71
72 'Selecao para crossing-over
73
74     rcr1 = Abs(0.7 * Rnd)
75     fcr1 = Fix(rcr1 * (nmax * NCros)) + 1
76
77     rcr2 = Abs(0.7 * Rnd)
78     fcr2 = Fix(rcr2 * (nmax * NCros)) + 1
79
80     troca = x(fcr1, 1)
81     x(fcr1, 1) = x(fcr2, 1)
82     x(fcr2, 1) = troca
83
84     troca = x(fcr1, 2)
85     x(fcr1, 2) = x(fcr2, 2)
86     x(fcr2, 2) = troca
87
88     troca = x(fcr1, 3)
89     x(fcr1, 3) = x(fcr2, 3)
90     x(fcr2, 3) = troca
91
92     x(fcr1, 3) = fteste(x(fcr1, 1), x(fcr1, 2))
93     x(fcr2, 3) = fteste(x(fcr2, 1), x(fcr2, 2))
94

```

```

95 'Ordenação dos melhores
96
97 For i = 1 To nmax * NCros - 1
98
99     If x(i, 3) < x(i + 1, 3) Then
100         troca = x(i, 1)
101         x(i, 1) = x(i + 1, 1)
102         x(i + 1, 1) = troca
103
104         troca = x(i, 2)
105         x(i, 2) = x(i + 1, 2)
106         x(i + 1, 2) = troca
107
108         troca = x(i, 3)
109         x(i, 3) = x(i + 1, 3)
110         x(i + 1, 3) = troca
111
112         i = 0
113     End If
114
115 Next i
116
117 'Comparação de todos com os nmax melhores
118
119 For j = 1 To nmax
120     For i = 1 To nmax
121         If x(j, 3) >= best(i, 3) Then
122             best(i, 1) = x(j, 1)
123             best(i, 2) = x(j, 2)
124             best(i, 3) = x(j, 3)
125             i = nmax
126         End If
127     Next i
128 Next j
129
130 tolerancia = 0
131
132
133 'Cálculo da tolerância de parada
134
135 For j = 1 To nmax
136     tolerancia = tolerancia + best(j, 3) ^ 2
137 Next j
138
139 'Saída dados
140
141 tolerancia = Sqr(tolerancia)
142 shAlgGen.Range("rngOutTemp").Offset(geracao, 5).Value = geracao
143 shAlgGen.Range("rngOutTemp").Offset(geracao, 6).Value = tolerancia
144 shAlgGen.Range("rngOutTemp").Offset(geracao, 7).Value = best(1, 1)
145 shAlgGen.Range("rngOutTemp").Offset(geracao, 8).Value = best(1, 2)
146 shAlgGen.Range("rngOutTemp").Offset(geracao, 9).Value = best(1, 3)
147

```



```
148 For i = 1 To nmax
149   For j = 1 To 3
150     shAlgGen.Range("rngOutTemp").Offset(i).Value = i
151     shAlgGen.Range("rngOutTemp").Offset(i, j).Value = best(i, j)
152     L(i, j) = best(i, j)
153   Next j
154 Next i
155 geracao = geracao + 1
156 AppliTACion.StatusBar = geracao
157 Loop
158
159 AppliTACion.ScreenUpdating = True
160 MsgBox "Fim", , "Final"
161
162 End Sub
```



# Referências Bibliográficas

- [1] **Andrade et al.(2000)** Dalton Francisco de Andrade, Heliton Ribeiro Tavares, e Raquel da Cunha Valle. Teoria da resposta ao item: conceitos e aplicações. *ABE, Sao Paulo*. Citado na pág. [5](#), [6](#), [7](#), [8](#), [15](#), [37](#)
- [2] **Baker(2001)** Frank B Baker. *The basics of item response theory*. ERIC. Citado na pág. [2](#), [5](#), [7](#)
- [3] **Baker e Kim(2004)** Frank B Baker e Seock-Ho Kim. *Item response theory: Parameter estimation techniques*. CRC Press. Citado na pág. [5](#), [8](#), [11](#), [37](#)
- [4] **Birnbaum(1968)** Allan Birnbaum. Some latent trait models and their use in inferring an examinee's ability. *Statistical theories of mental test scores*. Citado na pág. [6](#)
- [5] **Boomsma et al.(2000)** Anne Boomsma, Marijtje AJ van Duijn, e Tom AB Snijders. *Essays on item response theory*. Springer New York. Citado na pág. [5](#)
- [6] **Casella e Berger(1990)** George Casella e Roger L Berger. *Statistical inference*, volume 70. Duxbury Press Belmont, CA. Citado na pág. [19](#)
- [7] **CESPE(2013)** CESPE. Aplicações de provas em computador. *Jornal do CESPE UnB*, 5(23). Citado na pág. [xi](#), [22](#)
- [8] **De Ayala(2008)** Rafael Jaime De Ayala. *Theory and practice of item response theory*. Guilford Publications. Citado na pág. [5](#)
- [9] **Díaz et al.(1998)** Julio Olea Díaz, Vicente Ponsoda Gil, Gerardo Prieto Adánez, e Eduardo Backhoff. *Tests informatizados: fundamentos y aplicaciones*. Pirâmide. Citado na pág. [14](#)
- [10] **DOU(2013)** (Diário Oficial da União) DOU, 2013. URL <http://portal.in.gov.br/>. Citado na pág. [25](#)
- [11] **Embretson e Reise(2000)** Susan E Embretson e Steven P Reise. *Item response theory for psychologists*. Lawrence Erlbaum Associates. Citado na pág. [5](#)
- [12] **Goldberg(1989)** David Edward Goldberg. *Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning*, volume 412. Addison-wesley Reading Menlo Park. Citado na pág. [21](#)
- [13] **Lord(1980)** Frederic M Lord. *Applications of item response theory to practical testing problems*. Routledge. Citado na pág. [5](#)
- [14] **Mitchell(1998)** Melanie Mitchell. *An introduction to genetic algorithms*. MIT press. Citado na pág. [21](#)
- [15] **Mood(1950)** Alexander McFarlane Mood. Introduction to the theory of statistics. Citado na pág. [20](#)
- [16] **Moreira Junior(2010)** Fernando de Jesus Moreira Junior. Aplicações da teoria de resposta ao item (tri) no brasil. *Revista Brasileira de Biom.*, 28(4):137–170. Citado na pág. [5](#), [6](#)

- [17] **Moreira Junior(2011)** Fernando de Jesus Moreira Junior. Sistemática para a implantação de testes adaptativos informatizados baseados na teoria da resposta ao item. Citado na pág. 17, 37
- [18] **Öztürk e Dale(1985)** Aydin Öztürk e Robert F Dale. Least squares estimation of the parameters of the generalized lambda distribution. *Technometrics*, 27(1):81–84. Citado na pág. 2, 20
- [19] **Rathie e Zörnig(2012)** Pushpa N Rathie e Peter Zörnig. *Teoria da probabilidade*. UnB. Citado na pág. 20
- [20] **Segall(2005)** Daniel O Segall. Computerized adaptive testing. *Encyclopedia of Social Measurement*. Amsterdam: Elsevier. Citado na pág. 17
- [21] **Triola(2008)** Mario F Triola. *Essentials of statistics*. Pearson Addison Wesley Boston. Citado na pág. 14
- [22] **van der Linden(2007)** Wim J van der Linden. The shadow-test approach: A universal framework for implementing adaptive testing. *Proceedings of the 2007 GMAC Conference on Computerized Adaptive Testing*. Citado na pág. 16, 37
- [23] **Wainer(2012)** Howard Wainer. *Computerized adaptive testing*. Routledge. Citado na pág. xi, 2, 6, 15, 16
- [24] **Weiss e Kingsbury(1984)** David J Weiss e G Kingsbury. Application of computerized adaptive testing to educational problems. *Journal of Educational Measurement*, 21(4):361–375. Citado na pág. 14
- [25] **Zörnig(2011)** Peter Zörnig. *Introdução à programação não linear*. UnB. Citado na pág. 10