Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

O Teorema de Robinson e a Construção de Campos Eletromagnéticos Nulos

por

Victor Barbosa Jatobá

Orientador: Pedro Roitman

Brasília
2014

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

O Teorema de Robinson e a Construção de Campos Eletromagnéticos Nulos

por

Victor Barbosa Jatobá*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 2014.

Comissão Examinadora:

___

Prof. Pedro Roitman - MAT/UnB (Orientador)

___

Prof. Nilton Moura Barroso Neto - MAT/UnB - Membro

___

Prof. Levi Lopes de Lima - MAT/UFC - Membro

*O autor foi bolsista das agências CNPq e CAPES durante a elaboração deste trabalho.

À minha família e à Rebeca

Agradecimentos

Gostaria de agradecer aos meus pais, Alexandre Silva Jatobá e Rejane Maria Lemos Barbosa, pelo amor fraterno incondicional, pela criação, ensino e apoio desde o primeiro momento da minha vida. A eles eu devo tudo.

À minha família como um todo, incluindo Rosiene Jatobá, pela paciência, e Hellen Cristina Moraes, pelo tempo e apoio. À Rafaella Jatobá, pelo caminho trilhado de mãos dadas desde início. Aos meus avôs, Leda e José Barbosa, que não estão mais entre nós, mas criaram filhos excelentes e exemplares, Osvaldo Jatobá, pelos ensinamentos e luta, e Ita Casado, pela compreensão, carinho e as várias comidas deliciosas que me alegram até hoje. Um agradecimento especial ao meu primo Ivã Barbosa, por ser o irmão que não tive e o companheiro em todos os momentos, inclusive os mais bestas.

Ao meu orientador, Pedro Roitman, pela paciência e sacrifício nesta causa. Aprendi mais que *spinors* durante esta orientação e a ele devo muito. Obrigado.

Aos meus amigos do curso de Matemática, em particular Bruno Xavier e Gabriel Carvalho, pelas tardes de estudo, companheirismo, pizzas e momentos de descontração, que sem estes sei que esta tarefa seria extremamente mais difícil. À Paula Lins e Yuri Santos, pela ajuda e companhia desde o início desta caminhada pela Matemática, mesmo depois de uma má primeira impressão da minha parte. Ao Matheus Bernardini, pela humildade e ajuda nos momentos críticos. Aos petianos, por ser essa grande segunda família. Finalmente, ao Robson Nascimento.

Aos professores e trabalhadores do Departamento de Matemática. Em particular ao Professor Mauro Rabelo, pela sabedoria compartilhada e humildade. Ao Professor Celius Magalhães, pela oportunidade de trabalho e ensino conjunto durante todos esses anos. Ao Professor Lineu Neto, por orientar o primeiro estudo aprofundado em Matemática. A Professora Liliane Maia, por abrir as portas para o meu futuro. Ao Professor Noraí Rocco, pela conhecimento passado e apoio em todos os momentos.

Aos meus amigos e companheiros, em particular Jakson Rodrigo Barbosa, Ramon Baião, Pedro Cardoso, Gustavo Neri, Ronaldo Nonato, Filipe Lins e Bruno Briseno pelos momentos divertidos e o crescimento conjunto. Ao Saulo Briseno, pelos ensinamentos marciais e sua filosofia de vida.

À Jéssyca Cristine Souza e Angélica Felix, pela grande amizade com Rebeca Chuffi que tanto valorizo. À Camila Loretti, pela paciência e compreensão, além das lasanhas e bolos.

À Rebeca Chuffi Saccochi, por esses anos de companhia e vivência, oferecendo a mim todos os dias a oportunidade de sorrir e me mostrar a definição de ser feliz. À sua família, Vinícius, Caroline e Lara, além de todos os seres vivos que se encontram naquela casa, pelos vários momentos de apoio e compreensão.

Ao CNPq/CAPES pelo apoio financeiro concedido durante a elaboração deste trabalho.

Resumo

O tema desta dissertação é o Teorema de Robinson, que trata da relação entre os chamados campos eletromagnéticos nulos e as congruências de geodésicas nulas shear-free no espaço de Minkowski. Atualmente, muito tem sido feito nos estudos de propriedades topológicas de campos eletromagnéticos nulos, como feito por W. Irvine em 2008 e H. Kedia 2013. Além disso, Adamo e Newman, em 2009, utilizaram as congruências de geodésicas nulas shear-free para o estudo e interpretação de problemas relacionados com a relatividade geral. Estes estudos são baseados no Teorema de Robinson, que relaciona toda congruência de geodésicas nulas shear-free com uma família de campos eletromagnéticos nulos e, reciprocamente, todo campo eletromagnético nulo com uma congruência nula de geodésicas shear-free, e o Teorema de Kerr, que caracteriza toda congruência de geodésicas nulas como os zeros de uma função analítica arbitrária.

Palavras-chave: Spinors, Campos Eletromagnéticos Nulos, Congruência Nula de Geodésicas Shear-free, Teorema de Robinson, Teorema de Kerr.

Abstract

The theme of this work is the relation between null electromagnetic fields and congruence of null geodesic shear-free in Minkowski space-time, known as the Robinson Theorem. Recently studies have been done about topologic properties of null electromagnetic fields, such as W. Irvine in 2008 and H. Kedia 2013. Also, Adamo and Newman, in 2009, used the congruence of null geodesic shear-free to study and understand problems related to General Relativity. These studies are based in Robinson's Theorem, which states that each congruence of null geodesic shear-free is related to a family of null electromagnetic fields and, conversely, each null electromagnetic field is related to a congruence of null geodesic shear-free, and Kerr's Theorem, which relates a congruence of null geodesic shear-free to the zeros of an arbitrary analytic function.

Keywords: Spinors, Null Electromagnetic Fields, Congruence of Null Geodesic Shear-free, Robinson's Theorem, Kerr's Theorem.

Sumário

Introdução

O tema desta dissertação é a relação entre os chamados campos eletromagnéticos nulos e as congruências de geodésicas nulas shear-free no espaço de Minkowski.

Campos eletromagnéticos nulos são soluções especiais das equações de Maxwell tais que os campos elétricos e magnéticos, E e B, tem pontualmente a mesma norma e são ortogonais. Tais campos foram estudados nos anos 1950, ver por exemplo (H. Bateman, [2]), e ressurgiram em publicações recentes associadas a configurações topologicamente interessantes envolvendo as linhas dos campos eletromagnéticos (W. Irvine [10], A. Rañada [16], J. Dalhuisen [7], H. Kedia [11] entre outros).

Em 1961, Robinson [17] mostrou que os campos eletromagnéticos nulos estão relacionados com as chamadas congruências de geodésicas nulas shear-free no espaço de Minkowski de dimensão 4. Observamos que o conceito de congruência de geodésicas nulas shear-free tem sido utilizado em contextos mais gerais no estudo da relatividade geral (Adamo e Newman, [1]). Curiosamente, por volta de 1963, Roger Penrose se interessou pelo trabalho de Robinson e como Penrose conta em *Origins of Twistor Theory* (1987), o estudo das congruências foi fundamental para que Penrose desenvolvesse as suas idéias sobre twistor.

Ainda segundo Penrose, o seu colega de departamento Roy Kerr, que tinha uma sala vizinha à de Penrose, mostrou como se poderia construir todas as congruências de geodésicas nulas shear free no espaço de Minkowski e Penrose, interpretando geometricamente o trabalho de Kerr, percebeu a forca dos twistors para relacionar geometria com soluções de certas equações diferenciais parciais.

O objetivo desta dissertação é apresentar com detalhes alguns dos resultados mencionados acima. Uma dificuldade básica para entender esses resultados é que a maior parte deles foi formulada em termos de spinors. Outra dificuldade inerente ao tema é tentar entender a notação e o grau de rigor utilizados por físicos ao tratar do tema.

Uma referência que nos pareceu equilibrada e escrita de maneira adequada para um matemático é o trabalho de Nagatomo [13], já para os pré-requisitos básicos sobre spinors e eletromagnetismo utilizamos o livro de Naber [12].

Dividimos a dissertação em 6 capítulos. Os primeiros três capítulos é baseado no livro de G. Naber [12]. O capítulo 4 é baseado no que é discutido no livro de S. Huggett e K. Tod [9]. O capítulo 5 e 6 será baseado em diversos artigos, mas principalmente em K. Nagatomo [13].

No capítulo 1, apresentaremos o espaço de Minkowski, onde ambientará uma parte dos nossos objetos de estudos. Em seguida, será introduzido o conceito de campos eletromagnéticos.

No capítulo 2, será motivado e definido um spinor, além de explicado algumas ferramentas algébricas necessárias para trabalharmos com estes elementos. Finalmente, será feito a relação entre spinors e o espaço de Minkowski.

No capítulo 3 discutiremos as relações entre campos eletromagnéticos e spinors. Concluiremos com a representação das equações de Maxwell na forma de spinor.

No capítulo 4, definiremos um campo de spinor. Em seguida, estudaremos o que é uma congruência nula de geodésicas shear-free no espaço de Minkowski e como podemos relacioná-la com campos de spinors no espaço de Minkowski.

No capítulo 5, o Teorema de Robinson é discutido. Obtemos a relação entre congruências nulas de geodésicas shear-free e os campos eletromagnéticos nulos shear-free.

No capítulo 6, mostramos o teorema de Kerr em duas formas distintas. Uma envolvendo campos spinors e uma segunda versão, escrita na forma de twistors nulos. Esta forma do teorema é importantíssima e está presente em vários artigos importantes, como em [13], onde Nagatomo escreve uma maneira explícita de se obter a relação do Teorema de Robinson e em [11], onde o método de Nagatomo e o Teorema de Kerr são usados para obter explicitamente campos eletromagnéticos nulos com propriedades topológicas.

Capítulo 1

O Espaço de Minkowski, Aplicação Spinor e Campos Eletromagnéticos

Neste capítulo, baseado no livro de G. Naber, [12], introduziremos o Espaço de Minkowski como um espaço vetorial, munido de um tensor bilinear simétrico. Vamos considerar as transformações lineares com relação a g, as chamadas transformações de Lorentz, e ver como essas transformações se relacionam com o grupo de matrizes $SL(2, \mathbb{C})$, via a chamada Aplicação Spinor. Na seção 2.3, definiremos os campos eletromagnéticos em $\mathcal{M}$.

1.1 O Espaço de Minkowski e algumas propriedades

Começaremos com as noções básicas.

Definição 1.1.1. O Espaço de Minkowski $\mathcal{M}$ é um espaço vetorial real de dimensão 4, $\mathbb{R}^4$, onde está definido o tensor simétrico e bilinear g, tal que

$$g(v, w) = v^1w^1 + v^2w^2 + v^3w^3 - v^4w^4.$$

Os elementos de $\mathcal{M}$ são chamados de *eventos* e g é chamado de produto interno de Lorentz. A norma em $\mathcal{M}$ é definida de maneira natural como $||u|| = sgn(g)\sqrt{|g(u, u)|}, \forall u \in \mathcal{M}$, onde $sgn(g)$ é o sinal de $g(u, u)$.

Por conveniência, introduziremos agora a matriz η como:

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Note que $\eta_{ab} = \eta^{ab}$, onde $\eta^{ab} = \eta_{ab}^{-1}$.

Pela natureza do produto interno de Lorentz, existem eventos diferentes da origem que possuem norma zero. Isso motiva a seguinte definição.

Definição 1.1.2. Um evento que possui norma zero é chamado de *evento nulo*, ou *vetor nulo*. Eventos que possuem norma estritamente positivas são chamados de *eventos espaciais* e eventos que possuem norma estritamente negativas são chamados de *eventos temporais*.

Vamos considerar agora as transformações lineares ortogonais em $\mathcal{M}$.

Definição 1.1.3. Uma transformação linear $L : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ é dita uma transformação ortogonal se $g(Lx, Ly) = g(x, y), \forall x, y \in \mathcal{M}$.

Segue da definição de g como tensor bilinear simétrico não degenerado, isto é, se $g(v, w) = 0, \forall w \in \mathcal{M}$, então $v = 0$, que uma transformação ortogonal é um isomorfismo. Assim, L também preserva formas quadráticas e L leva bases ortonormais de $\mathcal{M}$ em bases ortonormais de $\mathcal{M}$. Portanto, existe uma matriz 4×4, $\Lambda = [\Lambda^a{}_b]_{a,b=1,2,3,4}$, associada a transformação ortogonal L e uma base ortonormal $\{e_a\}$ de $\mathcal{M}$ tal que

$$\Lambda^a{}_c \Lambda^b{}_d \eta_{ab} = \eta_{cd},$$

onde a convenção de Einstein para somatórios é utilizada, isto é, se o mesmo índice aparecer "em cima " e "em baixo", então eles estão somando para os seus valores definidos. Por exemplo, se $v, w \in \mathcal{M}$, então, para $a = 1, 2, 3, 4$,

$$\begin{aligned} g(u, v) &= v^1 w^1 + v^2 w^2 + v^3 w^3 - v^4 w^4 \\ &= v^1 w_1 + v^2 w_2 + v^3 w_3 + v^4 w_4 \\ &= v^a w_a. \end{aligned}$$

Em forma matricial, a equação acima pode ser reescrita como

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \tag{1.1.1}$$

o que motiva a seguinte definição:

Definição 1.1.4. Uma matriz 4×4 satisfazendo (1.1.1) é chamada de transformação de Lorentz (homogênea).

Notemos que o produto de duas transformações de Lorentz é uma transformação de Lorentz, pois se $\Lambda = \Lambda_1 \Lambda_2$,

$$\begin{aligned} (\Lambda_1 \Lambda_2)^T \eta \Lambda_1 \Lambda_2 &= \Lambda_2^T \Lambda_1^T \eta \Lambda_1 \Lambda_2, \\ &= \Lambda_2^T \eta \Lambda_2, \\ &= \eta. \end{aligned}$$

Além disso, como as transformações de Lorentz são isomorfismos, segue que cada Λ possui inversa. Isso motiva a seguinte definição:

Definição 1.1.5. As transformações de Lorentz formam um grupo com o produto usual de matrizes e a este grupo será chamado Grupo de Lorentz e denotado por $\mathcal{L}$.

1.2 O Grupo de Lorentz e a Aplicação Spinor

Iremos agora desenvolver uma nova técnica para a construção e investigação de transformações de Lorentz. A ferramenta principal será um homomorfismo de grupo, chamado de Mapa ou Aplicação Spinor, do grupo de matrizes 2×2 com determinante 1 sobre o grupo de Lorentz $\mathcal{L}$.

Seja $\mathbb{C}^{2\times 2}$ o conjunto de todas as matrizes 2×2 com entradas complexas. Dado $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, denotamos a sua conjugada transposta por A^{CT}.

Definição 1.2.1. $H \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ é chamada Hermitiana se $H^{CT} = H$ e denotaremos por $\mathcal{H}_2$ o conjunto de todas as matrizes Hermitianas.

Solucionando o sistema de 8 equações de $H = H^{CT}$ obtemos que toda matriz Hermitiana pode ser expressa de maneira única como

$$H = \begin{bmatrix} x^3 + x^4 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & -x^3 + x^4 \end{bmatrix}, \quad x^1, x^2, x^3, x^4 \in \mathbb{R}.$$

Denotamos por $(SL(2,\mathbb{C}), \cdot)$ o grupo formado por todas as matrizes em $\mathbb{C}^{2\times 2}$ com determinante igual a 1 e com o produto usual. Notemos que $A \in SL(2,\mathbb{C})$ gera uma aplicação $M_A : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ definida por:

$$M_A(H) = AHA^{CT},$$

para todo $H \in \mathcal{H}_2$. Notemos que $M_A(H) \subset \mathcal{H}_2$ pois

$$\begin{aligned} (AHA^{CT})^{CT} &= (A^{CT})^{CT}(AH)^{CT}, \\ &= AH^{CT}A^{CT}, \\ &= AHA^{CT}. \end{aligned}$$

Logo AHA^{CT} é Hermitiana. Além disso

$$\begin{aligned} detM_A(H) &= det(AHA^{CT}), \\ &= det(A)det(H)det(A^{CT}), \\ &= det(H). \end{aligned}$$

Porém, $M_A(H)$ pode ser escrita de maneira única como uma matriz Hermitiana, isto é, na forma

$$M_A(H) = \begin{bmatrix} \hat{x}^3 + \hat{x}^4 & \hat{x}^1 + i\hat{x}^2 \\ \hat{x}^1 - i\hat{x}^2 & -\hat{x}^3 + \hat{x}^4 \end{bmatrix}$$

para números reais $\hat{x}^a, a = 1, 2, 3, 4$. Como $det(M_A(H)) = det(H)$, obtemos que

$$(\hat{x}^1)^2 + (\hat{x}^2)^2 + (\hat{x}^3)^2 - (\hat{x}^4)^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2. \quad (1.2.1)$$

Portanto, a aplicação $[x^a] \to [\hat{x}^a]$ definida por

$$\begin{bmatrix} \hat{x}^3+\hat{x}^4 & \hat{x}^1+i\hat{x}^2 \\ \hat{x}^1-i\hat{x}^2 & -\hat{x}^3+\hat{x}^4 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x^3+x^4 & x^1+ix^2 \\ x^1-ix^2 & -x^3+x^4 \end{bmatrix} A^{CT},$$

que é claramente linear, preserva a forma quadrática η. Logo, esta aplicação é uma transformação de Lorentz. De fato, se

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix},$$

denotemos por $h_{11} = x^3 + x^4, h_{12} = x^1 + ix^2, h_{21} = x^1 - ix^2, h_{22} = -x^3 + x^4$ e suas respectivas formas com "chapéu" ($\hat{h}_{11} = \hat{x}^3 + \hat{x}^4 \cdots$), temos que

$$\begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{21} \\ h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{bmatrix}.$$

O qual escreveremos de maneira mais sucinta

$$[h_{ij}] = G[x^i],$$

e similarmente para $[\hat{h}_{ij}]$. Além disso, obtemos que G^{-1} é igual a

$$G^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -i & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Similarmente, um cálculo direto a partir de

$$AHA^{CT} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{bmatrix}$$

nos diz que $M_A(H) = AHA^{CT}$ é equivalente a

$$\begin{bmatrix} \hat{h}_{11} \\ \hat{h}_{12} \\ \hat{h}_{21} \\ \hat{h}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\bar{\alpha} & \alpha\bar{\beta} & \bar{\alpha}\beta & \beta\bar{\beta} \\ \alpha\bar{\gamma} & \alpha\bar{\delta} & \beta\bar{\gamma} & \beta\bar{\delta} \\ \bar{\alpha}\gamma & \bar{\beta}\gamma & \bar{\alpha}\delta & \bar{\beta}\delta \\ \gamma\bar{\gamma} & \gamma\bar{\delta} & \bar{\gamma}\delta & \delta\bar{\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{21} \\ h_{22} \end{bmatrix},$$

o que novamente nós iremos escrever de maneira sucinta como

$$[\hat{h}_{ij}] = R_A[h_{ij}].$$

Consequentemente, a aplicação $[x^a] \to [\hat{x}^a]$ definida anteriormente é dada por GR_AG^{-1}, pois

$$[x^a] \xrightarrow{\quad G \quad} [h_{ij}] \xrightarrow{\quad R_A \quad} [\hat{h}_{ij}] \xrightarrow{\quad G^{-1} \quad} [\hat{x}_a]$$

e a transformação de Lorentz Λ_A determinada por A é

$$\Lambda_A = G R_A G^{-1}.$$

Isso tudo motiva a seguinte definição:

Definição 1.2.2. Chamamos de *Aplicação Spinor* a aplicação S definida por

$$S : SL(2,\mathbb{C}) \to \mathcal{L}$$
$$A \mapsto \Lambda_A.$$

Notemos que se $A, B \in SL(2,\mathbb{C})$, então

$$\Lambda_A \Lambda_B = (G^{-1} R_A G)(G^{-1} R_B G) = G^{-1}(R_A R_B) G. \tag{1.2.2}$$

Porém, como

$$\begin{aligned} M_{AB}(H) &= (AB)H(AB)^{CT} \\ &= ABHB^{CT}A^{CT} \\ &= A(BHB^{CT})A^{CT} \\ &= M_A(BHB^{CT}) \\ &= M_A(M_B(H)) \\ &= M_A \circ M_B(H), \end{aligned}$$

concluimos que $M_{AB} = M_A \circ M_B$ e portanto $R_{AB} = R_A R_B$. Assim, (1.2.2) nos dá que $\Lambda_A \Lambda_B = G^{-1} R_{AB} G$ e portanto

$$\Lambda_A \Lambda_B = \Lambda_{AB}. \tag{1.2.3}$$

Assim, a aplicação Spinor preserva a operação, isto é, é um homomorfismo de grupo de $SL(2,\mathbb{C})$ em $\mathcal{L}$. Notemos que ela não é injetiva, pois tanto A quanto $-A$ tem a mesma imagem sobre $\mathcal{L}$. De fato, a aplicação Spinor é exatamente dois-para-um, isto é, o conjunto imagem inversa possui dois elementos, e neste caso é sempre composta por $\{A, -A\}$. Isto segue do fato de que se $A, B \in SL(2,\mathbb{C})$ e $\Lambda_A = \Lambda_B$, então AB^{-1} é levado em $\Lambda_{AB^{-1}} = \Lambda_A \Lambda_{B^{-1}} = \Lambda_A \Lambda_B^{-1} = \Lambda_A \Lambda_A^{-1} = Id$. Logo $A = \pm B$.

1.3 Campos Eletromagnéticos

Começaremos definido uma transformação linear anti-simétrica, F, que será posteriormente interpretada em termos de um campo eletromagnético.

Definição 1.3.1. Uma transformação linear $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ é dita anti-simétrica se

$$g(Fx, y) = -g(x, Fy), \quad \forall x, y \in \mathcal{M}$$

Nesta seção, F representará uma transformação linear anti-simétrica, não identicamente nula, em $\mathcal{M}$. Uma conseqüência imediata da anti-simetria é que

$$g(Fx, x) = g(x, Fx) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{M}. \tag{1.3.1}$$

Se $\{e_a\}_{a=1}^4$ é uma base admissível arbitrária de $\mathcal{M}$, isto é, uma base ortonormal tal que e_4 é *temporal* e com a última coordenada $t > 0$, e $\{e_1, e_2, e_3\}$ são vetores *espaciais* e orientados pela regra da mão direita. Temos que $Fe_b = F^a{}_b e_a$ e como consequência de (1.3.1), temos que $F^a{}_a = 0$, o que implica que a diagonal principal da matriz que representa F possui todas as suas entradas iguais a zero. Além disso, para $i, j = 1, 2, 3,\ F^j{}_i = -F^i{}_j$ e $F^4{}_i = F^i{}_4$, pois:

$$Fe_i = g(F^4{}_i, e_4) \Rightarrow g(Fe_i, e_4) = (F^4{}_i(g(e_4, e_4)) = -F^4{}_i, \text{ por outro lado } -g(e_i, Fe_4) = -F^i{}_4.$$

Se definirmos dois $3-$vetores $E = E^1e_1 + E^2e_2 + E^3e_3$ e $B = B^1e_1 + B^2e_2 + B^3e_3$, onde $E^1 = F^1{}_4$, $E^2 = F^2{}_4$, $E^3 = F^3{}_4$, $B^1 = F^2{}_3$, $B^2 = -F^1{}_3$ e $B^3 = F^1{}_2$, então $[F^a{}_b]$ pode ser escrita como

$$[F^a{}_b] = \begin{bmatrix} 0 & B^3 & -B^2 & E^1 \\ -B^3 & 0 & B^1 & E^2 \\ B^2 & -B^1 & 0 & E^3 \\ E^1 & E^2 & E^3 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.3.2}$$

Escrito dessa forma, e lembrando que $|E|^2 = (E_1)^2 + (E_2)^2 + (E_3)^2$, $|B|^2 = (B_1)^2 + (B_2)^2 + (B_3)^2$, $E \cdot B = E_1B_1 + E_2B_2 + E_3B_3$ e denotando por I a matriz identidade 4×4 , temos que um cálculo direto mostra que

$$det([F^a{}_b] - \lambda I) = \lambda^4 + (|B|^2 - |E|^2)\lambda^2 - (E \cdot B)^2. \tag{1.3.3}$$

Consequentemente, os autovalores de F são as soluções reais do polinômio característico (1.3.3). Como as raízes do polinômio característico são independentes da escolha da base e como o coeficiente líder é 1, temos que $|B|^2 - |E|^2$ e $E \cdot B$ são invariantes de Lorentz, ou seja, são iguais em qualquer base admissível. Tudo isso motiva a seguinte definição.

Definição 1.3.2. Seja F uma transformação linear em $\mathcal{M}$ anti-simétrica definida pela matriz (1.3.2). Então, F é dita *nula* se $|B|^2 - |E|^2 = E \cdot B = 0$

Para continuarmos o estudo dos campos eletromagnéticos, precisaremos de algumas definições básicas de análise.

Definição 1.3.3. Dizemos que o subconjunto $R \subset \mathcal{M}$ é aberto em $\mathcal{M}$ se para todo $p \in R$, existe um número real positivo ϵ tal que $B_\epsilon(p) = \{x \in \mathcal{M}; ((x^1 - p^1)^2 + (x^2 - p^2)^2 + (x^3 - p^3)^2 + (x^4 - p^4)^2)^{\frac{1}{2}} < \epsilon\}$ está contido em R.

Abertos em $\mathcal{M}$ serão chamados de regiões em $\mathcal{M}$. Um função real $f : R \to \mathbb{R}$ definida numa região $R \subset \mathcal{M}$ é dita suave se possui derivadas parciais contínuas de todas as ordens e tipos com respeito a

x^1, x^2, x^3 e x^4 para todos os sistemas de coordenadas. Admitiremos a seguinte notação para indicar uma derivada parcial: $\frac{\partial f}{\partial x^a}$ será denotado por $f_{,a}$. Agora, suponha que tenhamos atribuído para cada ponto $p \in R$ uma transformação linear $F(p) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$. Relativa a uma base, cada $F(p)$ terá uma matriz $[F^a{}_b(p)]$. Se as entradas dessa matriz forem suaves em R, dizemos que a atribuição $p \xrightarrow{F} F(p)$ é em si, suave.

Se cada uma das transformações lineares $F(p)$ for anti-simétrica, estaremos próximo do que seria um "campo eletromagnético em R". Para isso, é necessário que F satisfaça também as equações de Maxwell, que numa região livre de carga e assumindo que as constantes físicas que aparecem nas equações todas iguais a 1, se resume a:

$$div E = 0, \quad rot B - \frac{\partial E}{\partial x^4} = 0; \tag{1.3.4}$$

$$div B = 0, \quad rot E + \frac{\partial B}{\partial x^4} = 0. \tag{1.3.5}$$

Traduziremos estas equações para o Espaço de Minkowski. Para mostrar uma relação entre as Equações de Maxwell e a definição de F dada neste capítulo é mais conveniente expressar a equação (1.3.4) e (1.3.5) em termos de um objeto matemático relacionado com F, representado por um campo de matrizes anti-simétricas. Assim, para cada campo de transformações lineares anti-simétricas $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, definimos uma forma bilinear associada como:

$$\begin{aligned} G :& \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R} \\ & (u, v) \mapsto G(u, v) = g(u, Fv) \end{aligned}$$

para todos u e v em $\mathcal{M}$. Claramente, G é anti-simétrica. A *matriz* $[F_{ab}]$ de G relativo a uma base admissível $\{e_a\}$ tem entradas dadas por

$$F_{ab} = G(e_a, e_b) = g(e_a, Fe_b) = \eta_{ac} F^c{}_b. \tag{1.3.6}$$

Logo, dados quaisquer dois eventos $u = u^a e_a$ e $v = v^b e_b$, então, pela linearidade de "g" e de "F", segue que $G(u, v) = F_{ab} u^a v^b$. As entradas F_{ab} são frequentemente chamados de *componentes* de G na base $\{e_a\}$. Isso motiva a seguinte proposição:

Proposição 1.3.4. Se $\{\hat{e}_a\}$ é outra base admissível, relacionado a $\{e_a\}$ pela transformação de Lorentz $[\Lambda^a{}_b]$, então os componentes de G nessas duas bases estão relacionados por

$$\hat{F}_{ab} = \Lambda_a{}^\alpha \Lambda_b{}^\beta F_{\alpha\beta}, \qquad a, b = 1, 2, 3, 4. \tag{1.3.7}$$

Demonstração. Primeiro, mostraremos que $\hat{F}^c_b = \Lambda^c{}_\gamma \Lambda_b{}^\beta F^\gamma{}_\beta$. Se $\hat{e}_b = \Lambda_b{}^\beta e_\beta$ e $\hat{e}_c = \Lambda_c{}^\gamma e_\gamma$, temos por definição que

$$
\begin{aligned}
F(\hat{e}_b) &= \hat{F}^c{}_b \hat{e}_c \\
F({\Lambda_b}^\beta e_\beta) &= \hat{F}^c{}_b {\Lambda_c}^\gamma e_\gamma \\
{\Lambda_b}^\beta F(e_\beta) &= {\Lambda_c}^\gamma \hat{F}^c{}_b e_\gamma \\
\Lambda^c{}_\gamma {\Lambda_b}^\beta F(e_\beta) &= \hat{F}^c{}_b e_\gamma \\
\Lambda^c{}_\gamma {\Lambda_b}^\beta F^\gamma{}_\beta e_\gamma &= \hat{F}^c{}_b e_\gamma .
\end{aligned}
$$

E o resultado segue. Notemos que $\Lambda^a{}_b = \eta^{ac}\eta_{bd}{\Lambda_c}^d$. Por definição, temos que:

$$
\begin{aligned}
\hat{F}_{ab} &= \eta_{ac}\hat{F}^c_b \\
&= \eta_{ac}\Lambda^c{}_\gamma {\Lambda_b}^\beta F^\gamma{}_\beta \\
&= \eta_{ac}\eta^{c\rho}\eta_{\gamma\alpha}{\Lambda_\rho}^\alpha {\Lambda_b}^\beta F^\gamma{}_\beta \\
&= \eta_{ac}\eta^{c\rho}{\Lambda_\rho}^\alpha {\Lambda_b}^\beta (\eta_{\gamma\alpha}F^\gamma{}_\beta) \\
&= \delta^\rho_a {\Lambda_\rho}^\alpha {\Lambda_b}^\beta F_{\alpha\beta} \\
&= {\Lambda_a}^\alpha {\Lambda_b}^\beta F_{\alpha\beta}.
\end{aligned}
$$

□

Calculando as quantidades $\eta_{ac}F^c{}_b$ em termos de E e B obtemos

$$
[F_{ab}] = \begin{bmatrix} 0 & B^3 & -B^2 & E^1 \\ -B^3 & 0 & B^1 & E^2 \\ B^2 & -B^1 & 0 & E^3 \\ -E^1 & -E^2 & -E^3 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Assim, cada associação $p \xrightarrow{F} F(p)$ de uma transformação linear anti-simétrica para cada ponto de uma região de $\mathcal{M}$ gera uma associação $p \xrightarrow{G} G(p)$ que é suave no sentido de que as entradas de sua matriz são funções reais suaves. Uma das conseqüências mais importante é a seguinte:

Proposição 1.3.5. A equação

$$
F_{ab,c} + F_{bc,a} + F_{ca,b} = 0, \qquad a, b, c = 1, 2, 3, 4 \text{ e } a \neq b \neq c \tag{1.3.8}
$$

é equivalente à segunda equação das Equações de Maxwell (1.3.5).

Demonstração. A prova segue do cálculo direto. Notemos que $div(B) = B_{1,1} + B_{2,2} + B_{3,3}$, onde usamos a notação de que $B_{a,i} := \frac{\partial B_a}{\partial x^i}$. Analogamente,

$$
rot(E) + \frac{\partial B}{\partial x^4} = (E_{3,2} - E_{2,3} + B_{1,4}\ ,\ E_{1,3} - E_{3,1} + B_{2,4}\ ,\ E_{2,1} - E_{1,2} + B_{3,4})
$$

Isto é, as equações de Maxwell são escritas como o seguinte sistema

$$\begin{cases} B_{1,1} + B_{2,2} + B_{3,3} &= 0, \\ E_{3,2} - E_{2,3} + B_{1,4} &= 0, \\ E_{1,3} - E_{3,1} + B_{2,4} &= 0, \\ E_{2,1} - E_{1,2} + B_{3,4} &= 0. \end{cases}$$

Relembrando que

$$E^1 = F_{14}, \quad E^2 = F_{24}, \quad E^3 = F_{34}, \tag{1.3.9}$$

$$B^1 = F_{23}, \quad B^2 = -F_{13}, \quad B^3 = F_{12}, \tag{1.3.10}$$

Temos então que as equações são escritas como

$$\begin{cases} F_{23,1} + F_{31,2} + F_{12,3} &= 0, \\ F_{34,2} + E_{42,3} + F_{23,4} &= 0, \\ F_{14,3} + F_{43,1} + F_{31,4} &= 0, \\ F_{24,1} + F_{41,2} + F_{12,4} &= 0. \end{cases}$$

Que são exatamente as quatro equações descritas por $F_{ab,c} + F_{bc,a} + F_{ca,b} = 0$.

□

Notemos que a proposição acima (1.3.5) implica que $dG = 0$, onde dG é a 3-forma diferencial associada a 2-forma G dada explicitamente por $F_{ab,c} + F_{bc,a} + F_{ca,b}, \quad a, b, c = 1, 2, 3, 4, \ a \neq b \neq c$, é equivalente a segunda equação de Maxwell (1.3.5). Definiremos agora uma outra associação que será útil na obtenção de uma equação equivalente a primeira Equação de Maxwell (1.3.4) o que finalmente motivará na definição de um Campo Eletromagnético Nulo.

Para começar, notemos que existe uma certa “dualidade” entre as duas Equações de Maxwell. Especificamente, o primeiro par de equações pode ser obtido a partir do segundo fazendo uma troca entre B com E e E por $-B$. Isso sugere uma definição de um “dual” da 2-forma G como sendo uma outra 2-forma $*G$ cuja matriz em cada ponto é obtida através da matriz $[F_{ab}]$ fazendo formalmente as substituições. Para isso, primeiramente, iremos introduzir os símbolos de Levi-Civita ϵ_{abcd} definidos por:

$$\epsilon_{abcd} = \begin{cases} 1, & \text{se } abcd \text{ for uma permutação par de 1234}, \\ -1, & \text{se } abcd \text{ for uma permutação ímpar de 1234}, \\ 0, & \text{caso contrário}. \end{cases}$$

Definição 1.3.6. O dual da 2-forma G, denotado por $*G$, é a 2-forma cuja representação matricial é dada por:

$$[*F_{ab}] = -\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta ab}F^{\alpha\beta},$$

onde $F^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\upsilon}F_{\mu\upsilon}$.

Fazendo um cálculo semelhante a da proposição (1.3.8), obtemos o desejado, isto é, que em termos de E e B, a matriz $[*F_{ab}]$ é dada por

$$[*F_{ab}] = \begin{bmatrix} 0 & E^3 & -E^2 & -B^1 \\ -E^3 & 0 & E^1 & -B^2 \\ E^2 & -E^1 & 0 & -B^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Além disso, segue da linearidade da definição de $*F$ que $*F$ não depende da escolha da base. Assim, temos que $*G(u,v) = *F_{ab}u^a b^b$ e isto está bem definido.

Finalmente, pela própria maneira como está definido $[*F_{ab}]$, obtemos que o primeiro par das equações de Maxwell (1.3.4) é equivalente a

$$*F_{ab,c} + *F_{bc,a} + *F_{ca,b} = 0, \quad a, b, c = 1, 2, 3, 4 \text{ e } a \neq b \neq c,$$

e consequentemente

$$d(*G) = 0.$$

Assim, podemos resumir tudo que foi dito neste capítulo no seguinte teorema:

Teorema 1.3.7. Seja F um campo de transformações lineares anti-simétricas $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, G a sua 2-forma associada e $*G$ o dual da 2-forma. Então, as Equações de Maxwell dadas por

$$divE = 0, \quad rotB - \frac{\partial E}{\partial x^4} = 0,$$
$$divB = 0, \quad rotE + \frac{\partial B}{\partial x^4} = 0,$$

são equivalentes a

$$dG = 0, \quad d(*G) = 0.$$

Assim, podemos finalmente definir um campo eletromagnético nulo como sendo

Definição 1.3.8. Um campo eletromagnético numa região R em $\mathcal{M}$ é uma associação suave $p \xrightarrow{F} F(p)$ de uma transformação linear anti-simétrica em cada ponto $p \in R$ tal que suas formas bilineares anti-simétricas associadas $G(p)$ e $*G(p)$ satisfazem as Equações de Maxwell equivalentes $dG = 0$ e $d * G = 0$. Mais ainda, se o campo eletromagnético satisfaz $|E| - |B| = E \cdot B = 0$ para todo ponto $p \in \mathcal{M}$, dizemos que este campo eletromagnético é *nulo*.

Capítulo 2

Spinors

Neste capítulo, baseado no livro de G. Naber, [12], introduziremos a noção de Spinor e mostraremos como rescrever as equações de Maxwell em forma de Spinors.

2.1 O Espaço Spin

Definição 2.1.1. O espaço Spin é um espaço vetorial $\mathcal{B}$ sobre $\mathbb{C}$, que está definido a 2-forma:

$$\cdot : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathbb{C}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

i) Existem $\phi, \psi \in \mathcal{B}$ tal que $\phi \cdot \psi \neq 0$;

ii) $\phi \cdot \psi = -\psi \cdot \phi, \ \forall \phi, \psi \in \mathcal{B}$;

iii) "$\cdot$" é linear em cada entrada sobre $\mathbb{C}$;

iv) $(\phi \cdot \psi)\xi + (\xi \cdot \phi)\psi + (\psi \cdot \xi)\phi = 0, \ \forall \phi, \psi, \xi \in \mathcal{B}$.

Um elemento de $\mathcal{B}$ é chamado de vetor spin.

Lema 2.1.2. As seguintes propriedades são válidas em $\mathcal{B}$:

a) $\phi \cdot \phi = 0, \forall \phi \in \mathcal{B}$;

b) Qualquer par $\{\phi, \psi\} \in \mathcal{B}$ que satisfaz $\phi \cdot \psi \neq 0$ é uma base para $\mathcal{B}$, em particular, $\dim \mathcal{B} = 2$;

c) Existe uma base em $\mathcal{B}$, $\{s^1, s^0\}$, que satisfaz $s^1 \cdot s^0 = 1$. Chamaremos tal base de spin frame;

d) Se $\{s^1, s^0\}$ é um spin frame, e $\phi = \phi_1 s^1 + \phi_0 s^0 = \phi_A s^A$, então $\phi_1 = \phi \cdot s^0$ e $\phi_0 = -\phi \cdot s^1$;

e) Se $\{s^1, s^0\}$ é um spin frame e $\phi = \phi_A s^A$ e $\psi = \psi_A s^A$, então

$$\phi \cdot \psi = \begin{bmatrix} \phi_1 & \psi_1 \\ \phi_0 & \psi_0 \end{bmatrix} = \phi_1\psi_0 - \phi_0\psi_1;$$

f) $\phi, \psi \in \mathcal{B}$ são linearmente independentes se, e somente se, $\phi \cdot \psi \neq 0$;

g) Se $\{s^1, s^0\}$ e $\{\hat{s}^1, \hat{s}^0\}$ são dois spin frames, com $s^1 = {G_1}^1 \hat{s}^1 + {G_0}^1 \hat{s}^0 = {G_A}^1 \hat{s}^A$ e $s^0 = {G_1}^0 \hat{s}^1 + {G_0}^0 \hat{s}^0 = {G_A}^0 \hat{s}^A$, o que será denotado por

$$s^B = {G_A}^B \hat{s}^A, \quad B = 1, 0$$

então $G = [{G_A}^B] = \begin{bmatrix} {G_1}^1 & {G_1}^0 \\ {G_0}^1 & {G_0}^0 \end{bmatrix}$ pertence a $SL(2, \mathbb{C})$;

h) Se $\{s^1, s^0\}$ e $\{\hat{s}^1, \hat{s}^0\}$ são dois spin frames e $\phi = \phi_A s^A = \hat{\phi}_A \hat{s}^A$, então

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {G_1}^1 & {G_1}^0 \\ {G_0}^1 & {G_0}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_0 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\hat{\phi}_A = {G_A}^B \phi_B, \quad A = 1, 0;$$

i) Uma transformação linear $T : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ preserva $\cdot$ se, e somente se, a matriz relativa a T em qualquer spin frame pertence a $SL(2, \mathbb{C})$.

Demonstração. a) Segue do fato que somente o zero satisfaz a equação $\phi \cdot \phi = -\phi \cdot \phi$.

b) Segue do item a) que $(\lambda\phi) \cdot \phi = \phi \cdot (\lambda\phi) = 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall \phi \in \mathcal{B}$. Consequentemente, se $\phi \cdot \psi \neq 0$, nem ϕ, nem ψ pode ser um múltiplo de outro. Além disso, $\forall \xi \in \mathcal{B}$, segue da quarta propriedade do produto interno $\cdot$, que qualquer ξ pode ser escrito como combinação linear de $\{\phi, \psi\}$, já que se $\phi \cdot \psi \neq 0$, então $(\phi \cdot \psi)\xi = -(\xi \cdot \phi)\psi - (\psi \cdot \xi)\phi$. Assim, $\{\phi, \psi\}$ é uma base de $\mathcal{B}$.

c) Suponha sem perda de generalidade que $\phi \cdot \psi \neq 0$. Assuma que $\phi \cdot \psi \in \mathbb{R}$ e que $\phi \cdot \psi > 0$. Por b), $\{\phi, \psi\}$ formam uma base de $\mathcal{B}$. Defina $\lambda = (\phi \cdot \psi)^{\frac{-1}{2}}$. Assim, se $s^1 = \lambda\phi$ e $s^0 = \lambda\psi$ formam uma base tal que $s^1 \cdot s^0 = 1$.

d) $\phi = \phi_1 s^1 + \phi_0 s^0 \Rightarrow \phi \cdot s^0 = \phi_1(s^1 \cdot s^0) = \phi_1$. Analogamente, $\phi \cdot s^1 = -\phi_0$.

e) $\phi \cdot \psi = \phi_A s^A \cdot \psi_B s^B = \phi_A \psi_B (s^A \cdot s^B) = \phi_1 \psi_0 - \phi_0 \psi_1$.

f) $\phi \cdot \psi \neq 0$ implica que ϕ e ψ são linearmente independentes. Suponha agora que $\phi \cdot \psi = 0$. Se um dos dois vetores spin for igual a 0, então eles são linearmente dependentes. Selecione um spin frame $\{s^1, s^0\}$ e escrevamos $\phi = \phi_A s^A$ e $\psi = \psi_A s^A$. Sem perda de generalidade, suponha que $\phi_1 \neq 0$.

Por e), temos que

$$\phi \cdot \psi = 0 \Rightarrow \phi_1 \psi_0 - \phi_0 \psi_1 = 0 \Rightarrow \psi_0 = \left(\frac{\phi_0}{\phi_1}\right) \psi_1$$

e portanto $\psi = \left(\frac{\psi_1}{\phi_1}\right) \phi$. Logo, ψ e ϕ são linearmente dependentes.

g) $s^1 \cdot s^0 = 1$ implica que $1 = ({G_1}^1 \hat{s}^1 + {G_0}^1 \hat{s}^0 \cdot {G_1}^0 \hat{s}^1 + {G_0}^0 \hat{s}^0) = {G_1}^1 {G_0}^0 - {G_0}^1 {G_1}^0 = det(G)$.

h) $\hat{\phi}_1 \hat{s}^1 + \hat{\phi}_0 \hat{s}^0 = \phi_1 s^1 + \phi_0 s^0 = \phi_1({G_1}^1 \hat{s}^1 + {G_0}^1 \hat{s}^0) + \phi_0({G_1}^0 \hat{s}^1 + {G_0}^0 \hat{s}^0) = ({G_1}^1 \phi_1 + {G_1}^0 \phi_0)\hat{s}^1 + ({G_0}^1 \phi_1 + {G_0}^0 \phi_0)\hat{s}^0$. Logo, igualando os dois lados e usando o fato de que o spin frame é uma base, obtemos que

$$\hat{\phi}_A = {G_A}^B \phi_B, \quad A = 1, 0.$$

i) Seja $T : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ uma transformação linear e $\{s^1, s^0\}$ um spin frame. Seja $[{T_A}^B]$ a matriz de T relativa a $\{s^1, s^0\}$. Então, para todo ϕ e $\psi \in \mathcal{B}$, $T\phi = {T_A}^B \phi_B, T\psi = {T_A}^B \psi_B$ e calculando:

$$\begin{aligned} T\phi \cdot T\psi &= \begin{vmatrix} {T_1}^1 \phi_1 + {T_1}^0 \phi_0 & {T_1}^1 \psi_1 + {T_1}^0 \psi_0 \\ {T_0}^1 \phi_1 + {T_0}^0 \phi_0 & {T_0}^1 \psi_1 + {T_0}^0 \psi_0 \end{vmatrix} \\ &= \left| \begin{bmatrix} {T_1}^1 & {T_1}^0 \\ {T_0}^1 & {T_0}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & \psi_1 \\ \phi_0 & \psi_0 \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} {T_1}^1 & {T_1}^0 \\ {T_0}^1 & {T_0}^0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \phi_1 & \psi_1 \\ \phi_0 & \psi_0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, $T\phi \cdot T\psi = \phi \cdot \psi$ se, e somente se det $[{T_A}^B] = 1$, ou seja, se $[{T_A}^B] \in SL(2, \mathbb{C})$.

$\square$

De maneira análoga, definimos o espaço dual de $\mathcal{B}$ e seus elementos da seguinte maneira

Definição 2.1.3. Denotamos por $\mathcal{B}^*$ o espaço dual de $\mathcal{B}$, que, relativo a um spin frame $\{s^1, s^0\}$ de $\mathcal{B}$, possui o spin frame dual $\{s_1, s_0\}$ definido como

$$s_A(s^B) = \delta_A^B, \quad A, B = 1, 0.$$

Chamaremos de os elementos de $\mathcal{B}^*$ de covetores spin. Para cada $\phi \in \mathcal{B}$, definimos a sua contração ϕ^* como

$$\phi^*(\psi) = \phi \cdot \psi,$$

para cada $\psi \in \mathcal{B}$.

Consequências imediatas da definição de covetor spin é que ϕ^* é linear e que cada elemento de $\phi^* \in \mathcal{B}^*$ é o dual de algum $\phi \in \mathcal{B}$. Agora, notemos que se $\phi = \phi_A s^A$ e $\phi^* = \phi^A s_A$, então, temos que $\phi^*(s^1) = (\phi^A s_A)(s^1) = \phi^1 s_1(s^1) = \phi^1$, analogamente $\phi^*(s^0) = \phi^0$. Por outro lado, $\phi^*(s^1) = \phi \cdot s^1 = -\phi_0$ e, analogamente, $\phi^*(s^0) = \phi_1$. Assim, encontramos explicitamente as relações entre ϕ_A e ϕ^A, a saber

$$\begin{cases} \phi^1 = -\phi_0, \\ \phi^0 = \phi_1. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Suponha agora que $\{\hat{s}^1, \hat{s}^0\}$ é outro spin frame com $s^B = G_A{}^B \hat{s}^A$. Então, por (h) do Lema (2.1.2), temos que

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1{}^1 & G_1{}^0 \\ G_0{}^1 & G_0{}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_0 \end{bmatrix},$$

para todo $\phi = \phi_A s^A = \hat{\phi}_A \hat{s}^A \in \mathcal{B}$. Definimos a matriz $\mathcal{G}$ como

$$\begin{bmatrix} \mathcal{G}^1{}_1 & \mathcal{G}^1{}_0 \\ \mathcal{G}^0{}_1 & \mathcal{G}^0{}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_0{}^0 & -G_0{}^1 \\ -G_1{}^0 & G_1{}^1 \end{bmatrix} = \left([G_A{}^B]^{-1}\right)^T. \tag{2.1.2}$$

Encontramos que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathcal{G}^1{}_1 & \mathcal{G}^1{}_0 \\ \mathcal{G}^0{}_1 & \mathcal{G}^0{}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \phi^0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} G_0{}^0 & -G_0{}^1 \\ -G_1{}^0 & G_1{}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\phi_0 \\ \phi_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -G_0{}^B \phi_B \\ G_1{}^B \phi_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{\phi}_0 \\ \hat{\phi}_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\phi}^1 \\ \hat{\phi}^0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e portanto

$$\hat{\phi}^A = \mathcal{G}^A{}_B \phi^B, \quad A = 1, 0.$$

A partir da equação acima obtemos que $\hat{s}^A = \mathcal{G}^A{}_B\phi^B$. Além disso, pelo Lema (2.1.2), temos que $\hat{s}_A = G_A{}^B s_B$. Ambos os fatos seguem da definição de $G_A{}^B$ e de $\mathcal{G}^A{}_B$, que possuem determinante igual a 1 e portanto

$$\mathcal{G}^A{}_B G_B{}^C = \delta^A_B$$
$$G_C{}^A \mathcal{G}^C{}_B = \delta^A_B.$$

Portanto, pelo lema anterior, $s^B = G_A{}^B \hat{s}^A$ e por uma conta análoga do ϕ feito anteriormente, temos que $s_B = \mathcal{G}^A{}_B \hat{s}_A$.

Dessas duas equações para s^B, multiplicamos $\mathcal{G}$ ou G dos dois lados para obtermos δ^A_B, isto é

$$\begin{aligned} s^C &= G_B{}^C \hat{s}^B \\ \mathcal{G}^A{}_C s^C &= \mathcal{G}^A{}_C G_B{}^C \hat{s}^B \\ \mathcal{G}^A{}_C s^C &= \delta^C_B \hat{s}^B \\ \mathcal{G}^A{}_B s^B &= \hat{s}^B \end{aligned}$$

Para cada $\phi \in \mathcal{B}$, se definirmos $\phi^{**} : \mathcal{B}^* \to \mathbb{C}$ por $\phi^{**}(f) = f(\phi)$ teremos um funcional linear em $\mathcal{B}^*$ e portanto, o mapa $\phi \mapsto \phi^{**}$ é um isomorfismo entre $\mathcal{B}$ em $\mathcal{B}^{**}$. Portanto, assim como $\mathcal{B}^*$ é formado pelos funcionais lineares de $\mathcal{B}$, podemos pensar em $\mathcal{B}$ como sendo os funcionais lineares de $\mathcal{B}^*$.

Agora, considere o funcional bilinear em $\xi : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathbb{C}$. Este funcional será o que definiremos em breve como um tipo de *spinor*, muito semelhante com a idéia de um tensor. Defina agora, dado um spin frame $\{s^1, s^0\}$, $\xi^{AB} = \xi(s^A, s^B)$. Então, temos que $\xi(\phi, \psi) = \xi(\phi_A s^A, \psi_B s^B) = \xi(s^A, s^B)\phi_A\psi_B = \xi^{AB}\phi_A\psi_B$. Bilinearidade de ξ garante que em qualquer outro spin frame, teremos que

$$\hat{\xi}^{C_1C_2} = \mathcal{G}^{C_1}{}_{D_1}\mathcal{G}^{C_2}{}_{D_2}\xi^{D_1D_2}, \quad C_1, C_2 = 1, 0.$$

Analogamente, poderíamos definir $\xi : \mathcal{B}^* \times \mathcal{B}^* \to \mathbb{C}$, tal que, se $\xi_{AB} = \xi(s_A, s_B)$, então $\xi(\phi, \psi) = \xi(\phi^A s_A, \psi^B s_B) = \xi(s_A, s_B)\phi^A\psi^B = \xi_{AB}\phi^A\psi^B$. Além disso, em qualquer outro spin frame dual,

$$\hat{\xi}_{A_1A_2} = G_{A_1B_1}G_{A_2B_2}\xi_{B_1B_2}, \quad B_1, B_2 = 1, 0.$$

É possível também, definir um funcional bilinear $\xi : \mathcal{B}^* \times \mathcal{B} \to \mathbb{C}$. Dessa forma, seguindo os mesmos passos anteriores, com $\{s^A\}$, $\{\hat{s}^A\}$ spin frames e $\{s_A\}$, $\{\hat{s}_A\}$ seus respectivos duais, teríamos que $\xi_A{}^B = \xi(s_A, s^B)$ e dado a mudança de spin frames por $G_A{}^C$ e $\mathcal{G}^B{}_D$ teríamos

$$\hat{\xi}_{A_1}{}^{B_1} = G_{A_1}{}^{C_1}\mathcal{G}^{B_1}{}_{D_1}\xi_{C_1}{}^{D_1}, \quad A_1, B_1 = 1, 0.$$

Além do que já foi falado sobre $\mathcal{B}$, precisaremos de outro Espaço Spin que seja uma cópia distinta de $\mathcal{B}$. Para isso, definiremos $\mathcal{B}'$.

Definição 2.1.4. Seja $\mathcal{B}'$ o Espaço Spin dado por

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B} \times 1,$$

tal que cada vetor spin de $\mathcal{B}'$ é do tipo $\bar{\phi} = (\phi, 1)$. A estrutura de espaço linear em $\mathcal{B}'$ é dada por

$$\bar{\phi} + \bar{\psi} = \overline{\phi + \psi}$$

e

$$c\bar{\phi} = \overline{\bar{c}\phi},$$

onde $\bar{c}$ é o conjugado complexo de c. Os elementos de $\mathcal{B}'$ são chamados de vetores spin conjugados.

Assim, temos um isomorfismo $\phi \mapsto \bar{\phi}$ entre $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ chamado de isomorfismo conjugado. Segue das propriedades do isomorfismo entre espaços vetoriais que se $\{s^1, s^0\}$ é um spin frame de $\mathcal{B}$, então sua imagem pelo isomorfismo conjugado, denotado por $\{\bar{s}^{1'}, \bar{s}^{0'}\}$, é uma base para $\mathcal{B}'$. Além disso, se $\phi = \phi_A s^A$, então sua imagem pelo ismorfismo conjugado é dada por $\bar{\phi} = \bar{\phi}_{1'}\bar{s}^{1'} + \bar{\phi}_{0'}\bar{s}^{0'} = \bar{\phi}_{X'}\bar{s}^{X'},\ X' = 0', 1'$. Assim, todas as equações anteriores de mudança de base possui versões com "linha", isto é, que se $\{\bar{\hat{s}}^{X'}\}$ é outro spin frame relativo a $\mathcal{B}'$, então

$$\bar{\hat{s}}^{X'} = \bar{\mathcal{G}}^{X'}{}_{Y'}\bar{s}^{Y'},\ X' = 1', 0',$$

e

$$\bar{s}^{Y'} = \bar{G}^{Y'}{}_{X'}\bar{\hat{s}}^{X'},\ Y' = 1', 0',$$

Os elementos do dual $\mathcal{B}'^*$ de $\mathcal{B}'$ são chamados de covetores spin conjugados. Todas as equações de mudanças de base são satisfeitas para o dual, onde a base dual para $\{\bar{s}^{X'}\}$ e $\{\bar{\hat{s}}^{X'}\}$ são denotadas por $\{\bar{s}_{X'}\}$ e $\{\bar{\hat{s}}_{X'}\}$, respectivamente.

Consideremos agora o funcional multilinear $\xi : \mathcal{B} \times \mathcal{B}' \times \mathcal{B}^* \times \mathcal{B}'^* \to \mathbb{C}$. Se $\phi = \phi_A s^A, \bar{\psi} = \bar{\psi}_{X'}\bar{s}^{X'}, \zeta = \zeta^B s_B$ e $\bar{\upsilon} = \bar{\upsilon}^{Y'}\bar{s}_{Y'}$ pertencem, respectivamente, a $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}^*, \mathcal{B}'^*$, então

$$\begin{aligned}
\xi(\phi, \bar{\psi}, \zeta, \bar{\upsilon}) &= \xi(\phi_A s^A, \bar{\psi}_{X'}\bar{s}^{X'}, \zeta^B s_B, \bar{\upsilon}^{Y'}\bar{s}_{Y'}) \\
&= \xi(s^A, \bar{s}^{X'}, s_B, \bar{s}_{Y'})\phi_A\bar{\psi}_{X'}\zeta^B\bar{\upsilon}^{Y'} \\
&= \xi^{AX'}{}_{BY'}\phi_A\bar{\psi}_{X'}\zeta^B\bar{\upsilon}^{Y'}.
\end{aligned}$$

Onde $\xi(s^A, \bar{s}^{X'}, s_B, \bar{s}_{Y'}) = \xi^{AX'}{}_{BY'}$ são os componentes de ξ relativo a um spin frame $\{s^A\}$ e suas bases relacionadas para $\mathcal{B}^*$, $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}'^*$. Dado um outro spin frame de $\mathcal{B}$ $\{\hat{s}^A\}$, temos que $\xi(\phi, \bar{\psi}, \zeta, \bar{\upsilon}) = \hat{\xi}^{AX'}{}_{BY'}\hat{\phi}_A\bar{\hat{\psi}}_{X'}\hat{\zeta}^B\bar{\hat{\upsilon}}^{Y'}$ onde

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}^{AX'}{}_{BY'} &= \xi(\hat{s}^A, \bar{\hat{s}}^{X'}, \hat{s}_B, \bar{\hat{s}}_{Y'}) && (2.1.3)\\
&= \xi(\mathcal{G}^A{}_{A_1}s^{A_1}, \bar{\mathcal{G}}^{X'}_{X'_1}\bar{s}^{X'_1}, G_B{}^{B_1}s_{B_1}, \bar{G}^{Y'_1}_{Y'}\bar{s}_{Y'}) && (2.1.4)\\
&= \mathcal{G}^A{}_{A_1}\bar{\mathcal{G}}^{X'}{}_{X'_1}G_B{}^{B_1}\bar{G}_{Y'}{}^{Y'_1}\xi^{A_1X'_1}{}_{B_1Y'_1}. && (2.1.5)
\end{aligned}$$

Esta é o que definiremos como a lei de transformação relativa a um spin frame de um *spinor de valência* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Finalmente, podemos definir o que vêm a ser um spinor.

Definição 2.1.5. Um spinor de valência $\begin{pmatrix} r & s \\ m & n \end{pmatrix}$ é um funcional linear

$$\xi : \underbrace{\mathcal{B} \times \cdots \times \mathcal{B}}_{r\ fatores} \times \underbrace{\mathcal{B}' \times \cdots \times \mathcal{B}'}_{s\ fatores} \times \underbrace{\mathcal{B}^* \times \cdots \times \mathcal{B}^*}_{m\ fatores} \times \underbrace{\mathcal{B}'^* \times \cdots \times \mathcal{B}'^*}_{n\ fatores} \to \mathbb{C}.$$

tal que, dado um spin frame de $\mathcal{B}$, $\{s^A\}$, e suas bases associadas a $\mathcal{B}', \mathcal{B}^*, \mathcal{B}'^*$, os componentes de ξ relativo a $\{s^A\}$ é definido por

$$\begin{aligned} \xi^{A_1 \cdots A_r X'_1 \cdots X'_s}{}_{B_1 \cdots B_m Y'_1 \cdots Y'_n} &= \xi(s^{A_1}, \cdots, s^{A_r}, \bar{s}^{X'_1}, \cdots, \bar{s}^{X'_s}, s_{B_1}, \cdots, s_{B_m}, \bar{s}_{Y'_1}, \cdots, \bar{s}_{Y'_n}) \\ & A_1 \cdots A_r, B_1 \cdots B_m = 1, 0, \\ & X'_1 \cdots X'_s, Y'_1 \cdots Y'_n = 1', 0'. \end{aligned}$$

Segue direto da definição que se $\{\hat{s}^A\}$ é outro spin frame, então o spinor $\hat{\xi}$ segue as mesmas relações de (2.1.5). Além disso, como $\mathcal{B}$ é munido da 2-forma $\cdot$, cada spin pode ser visto como um spinor de valência $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.2 Álgebra dos Spinors

Para a demonstração das propriedades algébricas básicas, é necessário primeiramente introduzir uma matriz que desempenhará um papel fundamental durante os cálculos. Denotaremos por ϵ a matriz 2×2 definida por

$$[\epsilon_{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{10} \\ \epsilon_{01} & \epsilon_{00} \end{bmatrix}$$

Dependendo do contexto e da necessidade de utilizar a convenção de somatório, os índices de ϵ poderão vir tanto em cima, quanto em baixo, usando tanto AB, quanto $X'Y'$, isto é

$$\epsilon = [\epsilon_{AB}] = [\epsilon^{AB}] = [\bar{\epsilon}_{X'Y'}] = [\bar{\epsilon}^{X'Y'}]$$

Além disso, notemos que $\epsilon^2 = -Id$ e, portanto, $\epsilon^{-1} = -\epsilon$.

Se ϕ e ψ são dois vetores spin, e $\{s^1, s^0\}$ é um spin frame, então, usando a convenção de somatório, $\epsilon^{AB}\psi_A\phi_B = \epsilon^{10}\psi_1\phi_0 + \epsilon^{01}\psi_0\phi_1 = \phi_1\psi_0 - \phi_0\psi_1 = \phi \cdot \psi$. Outras propriedades também são satisfeitas, como descrito a seguir:

Proposição 2.2.1. Usando a mesma notação para spin frames, vetores spin e covetores spin, as seguintes relações são satisfeitas:

$$\phi \cdot \psi = \epsilon^{AB}\psi_A\phi_B = -\epsilon^{AB}\phi_A\psi_B; \tag{2.2.1}$$
$$\phi^A = \epsilon^{AB}\phi_B = -\phi_B\epsilon^{BA}; \tag{2.2.2}$$
$$\phi_A = \phi^B\epsilon_{BA} = -\epsilon_{AB}\phi^B; \tag{2.2.3}$$
$$\phi^A\psi_A = \phi \cdot \psi = -\phi_A\psi^A; \tag{2.2.4}$$
$$\epsilon^{AC}\epsilon_{BC} = \delta^A_B = \epsilon^{CA}\epsilon_{CB}; \tag{2.2.5}$$
$$(\epsilon^{CB}\phi_B)\epsilon^{CA} = \phi_A \ e \ \epsilon^{AC}(\phi^B\epsilon_{BC}) = \phi^A; \tag{2.2.6}$$
$$\epsilon^{AB}\epsilon_{AB} = \epsilon_{AB}\epsilon^{AB} = 2. \tag{2.2.7}$$

Demonstração. Notemos que todas as propriedades seguem do cálculo direto.

(2.2.1) Foi provado anteriormente.

(2.2.2) A equação representa dois sistemas, um para $A = 0$ e outro para $A = 1$,

$$\begin{array}{lll} \phi^0 & = \epsilon^{0B}\phi_B = \epsilon^{00}\phi_0 + \epsilon^{01}\phi_1 = (0)\phi_0 + (1)\phi_1 = & \phi_1 \\ \phi^1 & = \epsilon^{1B}\phi_B = \epsilon^{10}\phi_0 + \epsilon^{11}\phi_1 = (-1)\phi_0 + (0)\phi_1 & -\phi_0 \end{array}$$

Que está de acordo com o obtido em (2.1.1).

(2.2.3) Demonstração análoga ao item anterior.

(2.2.4) Usando novamente (2.1.1)

$$\phi^A\psi_A = \phi^0\psi_0 + \phi^1\psi_1 = \phi_1\psi_0 - \phi_0\psi_1 = \phi \cdot \psi.$$

(2.2.5) Temos que

$$\epsilon^{AC}\epsilon_{BC} = \epsilon^{A0}\epsilon_{B0} + \epsilon^{A1}\epsilon_{B1},$$

se $A = 0$, então

$$\epsilon^{00}\epsilon_{B0} + \epsilon^{01}\epsilon_{B1} = \epsilon^{01}\epsilon_{B1}.$$

Se $B = 0$, então $\epsilon^{01}\epsilon_{01} = 1$ e Se $B = 1$, então $\epsilon^{01}\epsilon_{11} = 0$.
Se $A = 1$, então

$$\epsilon^{10}\epsilon_{B0} + \epsilon^{11}\epsilon_{B1} = \epsilon^{10}\epsilon_{B0}.$$

Se $B = 0$, então $\epsilon^{10}\epsilon_{00} = 0$ e Se $B = 1$, então $\epsilon^{10}\epsilon_{10} = 1$.
Logo

$$\epsilon^{AC}\epsilon_{BC} = \delta_B^A.$$

(2.2.6) Segue da utilização do item (2.2.2) e (2.2.3).

(2.2.7) Notemos que

$$\begin{aligned}
\epsilon^{AB}\epsilon_{AB} &= \epsilon^{0B}\epsilon_{0B} + \epsilon^{1B}\epsilon_{1B} \\
&= \epsilon^{00}\epsilon_{00} + \epsilon^{10}\epsilon_{10} + \epsilon^{01}\epsilon_{01} + \epsilon^{11}\epsilon_{11} \\
&= (1)(1) + (-1)(-1) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

□

Obviamente, todas as identidades acima possuem versões "com barras e linha".

Proposição 2.2.2. Se $G = [G_A{}^B] \in SL(2, \mathbb{C})$, então

$$G_A{}^{A_1} G_B{}^{B_1} \epsilon_{A_1 B_1} = \epsilon_{AB}, \quad A, B = 1, 0. \tag{2.2.8}$$

Demonstração. Isto segue do fato de que

$$\begin{aligned}
G_A{}^{A_1} G_B{}^{B_1} \epsilon_{A_1 B_1} &= G_A{}^1 G_B{}^0 \epsilon_{10} + G_A{}^0 G_B{}^1 \epsilon_{01} \\
&= G_A{}^0 G_B{}^1 - G_A{}^1 G_B{}^0 \\
&= \begin{cases} 0 & ,\text{se } A = B \\ det(G) & ,\text{se } A = 0, B = 1 \\ -det(G) & ,\text{se } A = 1, B = 0 \end{cases} \\
&= \epsilon_{AB} det(G) \\
&= \epsilon_{AB}.
\end{aligned}$$

Pois $det(G) = 1$. □

Proposição 2.2.3. Se $\mathcal{G} = [\mathcal{G}^A{}_B] \in SL(2, \mathbb{C})$, então

$$\mathcal{G}^A{}_{A_1} \mathcal{G}^B{}_{B_1} \epsilon^{A_1 B_1} = \epsilon^{AB}, \quad A, B = 1, 0. \tag{2.2.9}$$

A prova é análoga a da proposição (2.2.2). Notemos que a forma bilinear $\cdot : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ é um spinor de valência $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e possui componentes em qualquer spin frame dado por $s^A \cdot s^B = -\epsilon^{AB}$. Portanto, a proposição acima só confirma a boa escolha de ϵ quando comparado com a fórmula de mudança de base para spinor dada por (2.1.5).

As equações demonstradas em (2.2.2) são conhecidas como *subir ou levantar o índice de* ϕ_B e as equações de (2.2.3) são conhecidas como *descer o índice de* ϕ^B. Elas fazem um elo entre os coeficientes de um vetor spin com o seu dual. Essas operações serão bastante utilizadas nos próximos capítulos. Importante notar que as igualdades de (2.2.3) nos mostram que essas operações são consistentes. Além disso, vale ressaltar que essas operações são válidas para spinors de valência maior, como demonstrado a seguir.

Proposição 2.2.4. Dado um spinor $\xi^{A_1\cdots A_r X'_1\cdots X'_s}{}_{B_1\cdots B_m Y'_1\cdots Y'_n}$ de valencia $\begin{pmatrix} r & s \\ m & n \end{pmatrix}$. Então, os componentes $\xi_{A_1}{}^{A_2\cdots A_r X'_1\cdots X'_s}{}_{B_1\cdots B_m Y'_1\cdots Y'_n}$ dados por

$$\xi_A{}^{A_2\cdots A_r X'_1\cdots X'_s}{}_{B_1\cdots B_m Y'_1\cdots Y'_n} = \xi^{A_1\cdots A_r X'_1\cdots X'_s}{}_{B_1\cdots B_m Y'_1\cdots Y'_n}\epsilon_{A_1 A}$$

definem um spinor ξ de valência $\begin{pmatrix} r-1 & s \\ m+1 & n \end{pmatrix}$.

Demonstração. Para isso, precisamos mostrar somente se ele está bem definido, isto é, se em algum outro spin frame nós temos que $\hat{\xi}_A{}^{A_2\cdots A_r X'_1\cdots X'_s}{}_{B_1\cdots B_m Y'_1\cdots Y'_n} = \hat{\xi}^{A_1\cdots A_r X'_1\cdots X'_s}{}_{B_1\cdots B_m Y'_1\cdots Y'_n}\epsilon_{A_1 A}$, então

$$\hat{\xi}_A{}^{A_2\cdots A_r X'_1\cdots X'_s}{}_{B_1\cdots B_m Y'_1\cdots Y'_n} = G_A{}^{A_1}\mathcal{G}^{A_2}{}_{\hat{A}_2}\cdots\mathcal{G}^{X'_1}{}_{\hat{X}'_1}\cdots G_{B_1}{}^{\hat{B}_1}\cdots G_{Y'_1}{}^{\hat{Y}'_1}\cdots G_{Y'_n}{}^{\hat{Y}'_n}\xi_{A_1}{}^{\hat{A}_2\cdots\hat{X}'_s}{}_{\hat{B}_1\cdots\hat{Y}'_n}$$

Como as matrizes $\mathcal{G}$ e G pertencem a $SL(2,\mathbb{C})$, então o seu produto comuta. Assim, para evitar o carregamento de índices, resolveremos o caso para um spinor de valência $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e o transformaremos num spinor de valência $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Lembramos que, como $[\mathcal{G}] = [(G)^{-1}]^T$, temos que o produto de uma linha de $\mathcal{G}$ com uma outra linha de G é igual a δ^A_B, isto é, $\mathcal{G}^A{}_D G_B{}^C = \delta^C_D$. Assim, se definirmos $\xi_A{}^B{}_C = \xi^{A_1 B}{}_C\epsilon_{A_1 A}$ queremos ele esteja bem definido. Isso segue do fato de que

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}_A{}^B{}_C &= \hat{\xi}^{A_1 B}_C\epsilon_{A_1 A} = (\mathcal{G}^{A_1}{}_{A_2}\mathcal{G}^B{}_{B_1}G_C{}^{C_1}\xi^{A_2 B_1}{}_{C_1})(G_{A_1}{}^{A_3}G_A{}^{A_4}\epsilon_{A_3 A_4}) \\
&= (\mathcal{G}^{A_1}{}_{A_2}G_{A_1}{}^{A_3})(\mathcal{G}^B{}_{B_1}G_C{}^{C_1}G_A{}^{A_4})(\xi^{A_2 B_1}{}_{C_1}\epsilon_{A_3 A_4}) \\
&= \delta^{A_3}_{A_2}(\mathcal{G}^B{}_{B_1}G_C{}^{C_1}G_A{}^{A_4})(\xi^{A_2 B_1}{}_{C_1}\epsilon_{A_3 A_4}) \\
&= (\mathcal{G}^B{}_{B_1}G_C{}^{C_1}G_A{}^{A_4})(\xi^{A_3 B_1}{}_{C_1}\epsilon_{A_3 A_4}) \\
&= (\mathcal{G}^B{}_{B_1}G_C{}^{C_1}G_A{}^{A_4})(\xi_{A_4}{}^{B_1}{}_{C_1}) \\
&= (\mathcal{G}^B{}_{B_1}G_C{}^{C_1}G_A{}^{A_1})(\xi_{A_1}{}^{B_1}{}_{C_1}).
\end{aligned}$$

Para o caso geral, a demonstração é semelhante, mas carregando um produtório de matrizes maior que não interfere nos cálculos.

□

Usando a outra igualdade de ϵ^{AB}, obtemos que podemos também "levantar" índices de spinors. Como ϵ_{AB} e ϵ^{AB} são, em si, spinors, usando (2.2.5) vale então as seguintes identidades:

$$\epsilon_A{}^B = \epsilon^{BC}\epsilon_{AC} = \delta_A^B;$$
$$\epsilon^A{}_B = \epsilon^{AC}\epsilon_{CB} = -\delta_C^A.$$

Introduziremos agora uma matriz importante para a continuação do trabalho

Definição 2.2.5. Chamaremos de $[G^A{}_B]$ a matriz associada a $[G_A{}^B] \in SL(2,\mathbb{C})$ dada por

$$G^A{}_B = \epsilon^{AA_1}G^{A_1}{}_{B_1}\epsilon_{B_1B}, \quad A,B = 1,0.$$

Notemos que

$$\begin{bmatrix} G^1{}_1 & G^0{}_1 \\ G^1{}_0 & G^1{}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_0{}^0 & G_1{}^0 \\ G_0{}^1 & G_1{}^1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathcal{G}^1{}_1 & \mathcal{G}^0{}_1 \\ \mathcal{G}^1{}_0 & \mathcal{G}^1{}_1 \end{bmatrix}.$$

e portanto

$$G^A{}_{A_1}G^B{}_{B_1}\epsilon^{A_1B_1} = \epsilon^{AB}, \quad A,B = 1,0.$$

Assim como no caso dos tensores, podemos dar a $\mathcal{B}$ uma estrutura de espaço vetorial de maneira natural. Especificamente, se $\xi,\zeta \in \mathcal{B}^{rs}_{mn}$ e $\overbrace{\phi}^{1},\cdots,\overbrace{\phi}^{r} \in \mathcal{B}$, $\overbrace{\bar{\psi}}^{1},\cdots,\overbrace{\bar{\psi}}^{s} \in \mathcal{B}'$, $\overbrace{\mu}^{1},\cdots,\overbrace{\mu}^{m} \in \mathcal{B}^*$ e $\overbrace{\bar{\upsilon}}^{1},\cdots,\overbrace{\bar{\upsilon}}^{n} \in \mathcal{B}'^*$, então

$$\begin{aligned}
(\xi+\zeta)(\overbrace{\phi}^{1},\cdots,\overbrace{\bar{\upsilon}}^{n}) &= \xi(\overbrace{\phi}^{1},\cdots,\overbrace{\bar{\upsilon}}^{n}) + \zeta(\overbrace{\phi}^{1},\cdots,\overbrace{\bar{\upsilon}}^{n}); \\
(\alpha\xi)(\overbrace{\phi}^{1},\cdots,\overbrace{\bar{\upsilon}}^{n}) &= \alpha(\xi(\overbrace{\phi}^{1},\cdots,\overbrace{\bar{\upsilon}}^{n})),\ \alpha \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Se $\{s^A\}$ é um spin frame, e considerando os seus correspondentes duais e e conjugados, definimos $s_{A_1} \otimes \cdots \otimes s_{A_r} \otimes \bar{s}_{X_1'} \otimes \cdots \otimes \bar{s}_{X_s'} \otimes s^{B_1} \otimes \cdots \otimes s_{B_m} \otimes \bar{s}_{Y_1'} \otimes \cdots \otimes \bar{s}_{Y_n'}$, abreviadamente denotado por $s_{A_1} \otimes \cdots \otimes \bar{s}_{Y_n'}$ por

$$\begin{aligned}
s_{A_1} \otimes \cdots \otimes \bar{s}_{Y_n'}(\overbrace{\phi}^{1},\cdots,\overbrace{\bar{\upsilon}}^{n}) &= s_{A_1}(\overbrace{\phi}^{1})\cdots\bar{s}^{Y'_n}(\overbrace{\bar{\upsilon}}^{n}) \\
&= \overbrace{\phi}^{1}{}_{A_1}\cdots\overbrace{\bar{\upsilon}}^{n}{}_{Y_n'}.
\end{aligned}$$

Assim, como nos casos dos tensores, $s_{A_1} \otimes \cdots \otimes \bar{s}_{Y_n'}$ formam uma base para $\mathcal{B}^{rs}_{mn}$ e cada $\xi \in \mathcal{B}^{rs}_{mn}$ pode ser escrito como

$$\xi = \xi^{A_1\cdots X'_s}{}_{B_1\cdots Y'_n}s_{A_1} \otimes \cdots \otimes \bar{s}_{Y_n'},$$

onde

$$\xi^{A_1 \cdots X'_s}{}_{B_1 \cdots Y'_n} = \xi(s^{A_1}, \cdots, \bar{s}^{X'_s}, s_{B_1}, \cdots, \bar{s}_{Y'_n}), \quad A_i, B_i = 1, 0, \quad X'_i Y'_i = 1, 0'.$$

Algumas propriedades algébricas importantíssimas serão discutidas agora sobre um spinor ϕ de valência $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ que desempenhará um papel fundamental no entendimento de campos eletromagnéticos escritos na forma de um spinor.

Proposição 2.2.6. Seja ϕ um spinor de valência $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ com componentes em algum spin frame dados por ϕ_{AB}. Então valem as seguintes identidades:

1. $\phi_1{}^1 = -\phi_{10},\ \phi_0{}^0 = \phi_{01},\ \phi_1{}^0 = \phi_{11},\ \phi_0{}^1 = -\phi_{00}$;

2. $\phi^{11} = \phi_{00},\ \phi^{00} = \phi_{11},\ \phi^{10} = -\phi_{01},\ \phi^{01} = -\phi_{10}.$;

3. $\phi_{AB}\phi^{AB} = 2det \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{10} \\ \phi_{01} & \phi_{00} \end{bmatrix} = 2det \begin{bmatrix} \phi_1{}^1 & \phi_1{}^0 \\ \phi_0{}^1 & \phi_0{}^0 \end{bmatrix}.$

Demonstração. 1. Usando ϵ^{AB} para subir os índices, temos que:

$$\phi_A{}^B = \epsilon^{BC}\phi_{AC}.$$

Logo,

$$\phi_1{}^1 = \epsilon^{1C}\phi_{1C} = \epsilon^{10}\phi_{10} + \epsilon^{11}\phi_{11} = -\phi_{10}.$$

Analogamente para os outros casos.

2. Usando ϵ^{AB} e ϵ_{AB} para subir e descer os índices, temos que:

$$\phi^{AB} = \epsilon^{AD}\epsilon^{BC}\phi_{CD}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \phi^{00} &= \epsilon^{0D}\epsilon^{0C}\phi_{CD} \\ &= \epsilon^{00}\epsilon^{0C}\phi_{C0} + \epsilon^{01}\epsilon^{0C}\phi_{C1} \\ &= \epsilon^{00}\epsilon^{00}\phi_{00} + \epsilon^{01}\epsilon^{00}\phi_{01} + \epsilon^{00}\epsilon^{01}\phi_{10} + \epsilon^{01}\epsilon^{01}\phi_{11} \\ &= \epsilon^{01}\epsilon^{01}\phi_{11} \\ &= \phi_{11}. \end{aligned}$$

Analogamente para os outros casos.

3. Usando o item anterior, temos que

$$\begin{aligned}\phi_{AB}\phi^{AB} &= \phi_{0B}\phi^{0B} + \phi_{1B}\phi^{1B} \\ &= \phi_{00}\phi^{00} + \phi_{10}\phi^{10} + \phi_{01}\phi^{01} + \phi_{11}\phi^{11} \\ &= \phi_{00}\phi_{11} + \phi_{10}(-\phi_{01}) + \phi_{01}(-\phi_{10}) + \phi_{11}\phi_{00} \\ &= 2(\phi_{00}\phi_{11} - \phi_{10}\phi_{01}) \\ &= 2(det[\phi_{AB}]).\end{aligned}$$

□

Para as considerações finais dessa seção, seguem algumas definições importantes:

Definição 2.2.7. Dado um spinor ξ de valência $\begin{pmatrix} r & r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, definimos o conjugado de ξ, denotado por $\bar{\xi}$, como sendo o spinor que possui seus componentes em qualquer spin frame dado por

$$\bar{\xi}^{A'_1\cdots A'_r X_1\cdots X_r} = \overline{\xi^{A_1\cdots A_r X'_1\cdots X'_r}}.$$

Definição 2.2.8. Um spinor ξ é dito Hermitiano se $\bar{\xi} = \xi$.

Definição 2.2.9. Um spinor ξ é dito simétrico, se dado dois índices que representam o mesmo espaço ($\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^*$, $\bar{\mathcal{B}}$ ou $\bar{\mathcal{B}}^*$), a sua permutação não altera o seu valor, isto é, se $\xi(\cdots, p, \cdots, q, \cdots) = \xi(\cdots, q, \cdots, p\cdots)$.

Definição 2.2.10. Um spinor ξ é dito anti-simétrico, se dado dois índices que representam o mesmo espaço ($\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^*$, $\bar{\mathcal{B}}$ ou $\bar{\mathcal{B}}^*$), a sua permutação altera o seu sinal, isto é, se $\xi(\cdots, p, \cdots, q, \cdots) = -\xi(\cdots, q, \cdots, p\cdots)$.

Definição 2.2.11. Uma simetrização de um spinor ξ é o spinor $\xi_{(AB)}$ cujas componentes são dadas por

$$\xi_{(AB)} = \frac{1}{2}(\xi_{AB} + \xi_{BA}).$$

Definição 2.2.12. Uma anti-simetrização de um spinor ξ é o spinor $\xi_{[AB]}$ cujas componentes são dadas por

$$\xi_{[AB]} = \frac{1}{2}(\xi_{AB} - \xi_{BA}).$$

2.3 Spinors e o Espaço de Minkowski

Nesta seção, estabeleceremos uma correspondência entre spinors de valência $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e eventos no espaço de Minkowski. Para isso, precisaremos das matrizes spin de Pauli:

Definição 2.3.1. As *matrizes spin de Pauli* , $\sigma_i, i = 1, 2, 3, 4$ são as seguintes matrizes Hermitianas:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \\ \sigma_2 &= \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}; \\ \sigma_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \\ \sigma_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Elas servem de base para as seguintes matrizes que desempenharão um papel importante nos próximos capítulos.

Definição 2.3.2. Definimos as matrizes ${\sigma_a}^{AX'}$, chamadas de *símbolos de Infeld-van der Waerden*, por:

$${\sigma_a}^{AX'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_a, \quad a = 1, 2, 3, 4$$

Notemos que essas matrizes não dependem de A, nem de X'. Além disso, como anteriormente, não faremos distinção em que a ordem de A e X' aparecem. Agora, descreveremos o processo que transforma um evento $v \in \mathcal{M}$ num spinor V de valência $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Para isso, dado uma base $\{e_a\}$ de $\mathcal{M}$, definimos as componentes de V da seguinte forma: Se $v = v^a e_a$, então

$$V^{AX'} = {\sigma_a}^{AX'} v^a, \quad A = 1, 0, \ X' = 1', 0'.$$

Assim, a forma explicita matricial de $V^{AX'}$ é

$$V^{AX'} = \begin{bmatrix} V^{11'} & V^{10'} \\ V^{01'} & V^{00'} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (v^3 + v^4) & (v^1 + iv^2) \\ (v^1 - iv^2) & (-v^3 + v^4) \end{bmatrix}$$

Notemos que $V^{AX'}$ é um spinor Hermitiano, pois $\bar{V}^{AX'} = \overline{V^{A'X}} = \overline{{\sigma_a}^{A'X} v^a} = \overline{{\sigma_a}^{A'X}}\,\overline{v^a} = {\sigma_a}^{AX'} v^a = V^{AX'}$, pois ${\sigma_a}^{AX'}$ é Hermitiana e v^a são reais.

Proposição 2.3.3. Seja $\mathcal{G} \in SL(2, \mathbb{C})$ e seu correspondente pela aplicação spin $\Lambda = \Lambda_{\mathcal{G}} \in \mathcal{L}$. Então ${\sigma_a}^{A'X}$ satisfaz a seguinte equação

$${\Lambda_a}^b {\mathcal{G}^A}_B {\bar{\mathcal{G}}^{X'}}_{Y'} {\sigma_b}^{BY'} = {\sigma_a}^{AX'}, \quad a = 1, 2, 3, 4, \quad A = 1, 0, \quad X' = 1', 0'.$$

Isto é, ${\sigma_a}^{AX'}$ é constate quando mudamos de Spinor por $\mathcal{G}$ e por seu correspondente em $\mathcal{L}$.

Demonstração. Selecione uma base admissível arbitrária e um spin frame. Fixemos A e X'. Seja $v \in \mathcal{M}$ e $V^{AX'} = {\sigma_a}^{AX'} v^a$. Num outro spin frame, relacionado com o primeiro por $\mathcal{G}$, temos que:

$$\hat{V}^{AX'} = {\sigma_a}^{AX'} \hat{v}^a.$$

Porém

$$
\begin{aligned}
\hat{V}^{AX'} &= \mathcal{G}^{A}{}_{B}\bar{\mathcal{G}}^{X'}{}_{Y'}V^{BY'} \\
&= \mathcal{G}^{A}{}_{B}\bar{\mathcal{G}}^{X'}{}_{Y'}(\sigma_{b}{}^{BY'}v^{b}) \\
&= \mathcal{G}^{A}{}_{B}\bar{\mathcal{G}}^{X'}{}_{Y'}\sigma_{b}{}^{BY'}(\delta^{b}_{c}v^{b}) \\
&= \mathcal{G}^{A}{}_{B}\bar{\mathcal{G}}^{X'}{}_{Y'}\sigma_{b}{}^{BY'}(\Lambda_{a}{}^{b}\Lambda^{a}{}_{c}v^{b}) \\
&= \Lambda_{a}{}^{b}\mathcal{G}^{A}{}_{B}\bar{\mathcal{G}}^{X'}{}_{Y'}\sigma_{b}{}^{BY'}(\Lambda^{a}{}_{c}v^{b}) \\
&= \Lambda_{a}{}^{b}\mathcal{G}^{A}{}_{B}\bar{\mathcal{G}}^{X'}{}_{Y'}\sigma_{b}{}^{BY'}(\hat{v}^{a})
\end{aligned}
$$

$$\therefore \Lambda_{a}{}^{b}\mathcal{G}^{A}{}_{B}\bar{\mathcal{G}}^{X'}{}_{Y'}\sigma_{b}{}^{BY'}(\hat{v}^{a}) = \sigma_{a}{}^{AX'}\hat{v}^{a}.$$

Como v foi arbitrário, segue o resultado.

□

Definição 2.3.4. Definimos a matriz $\sigma^{a}{}_{AX'}$ como sendo:

$$\sigma^{a}{}_{AX'} = \eta^{ab}(\sigma_{b}{}^{BY'}\epsilon_{BA})\bar{\epsilon}_{Y'X'}$$

De maneira explícita, obtemos que

$$
\begin{aligned}
\sigma^{1}{}_{AX'} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
\sigma^{2}{}_{AX'} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \\
\sigma^{3}{}_{AX'} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
\sigma^{4}{}_{AX'} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Similarmente, podemos provar que

$$G_{A}{}^{B}\bar{G}_{X'}{}^{Y'}\sigma^{a}{}_{BY'} = \Lambda_{\alpha}{}^{a}\sigma^{a}{}_{AX'} \tag{2.3.1}$$

A partir disso, vemos que $\sigma_{a}{}^{AX'}$ comporta-se formalmente com um evento e um Spinor. Assim, podemos garantir que podemos usar as fórmulas já obtidas de *levantar índices* e *abaixar índices*.

Também chamamos $\sigma^{a}{}_{AX'}$ de *símbolos de Infeld-van der Waerden*. Algumas propriedades desses símbolos, além de levantar e descer índices, são:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{a}{}^{AX'}\sigma^{b}{}_{AX'} &= -\delta^{b}_{a} \\
\sigma_{a}{}^{AX'}\sigma^{a}{}_{BY'} &= \delta^{A}_{B}\delta^{X'}_{Y'}
\end{aligned}
$$

A primeira equação acima nos mostra uma maneira de re-obter o evento $v \in \mathcal{M}$ a partir do Spinor $V^{AX'}$ de valência $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Isso se deve ao fato de que, como $V^{AX'} = \sigma_b{}^{AX'} v^b$, então

$$\begin{aligned} V^{AX'} \sigma^a{}_{AX'} &= \sigma^a{}_{AX'} \sigma_b{}^{AX'} v^b \\ &= -\delta^a_b v^b \\ &= -v^a. \end{aligned}$$

E como $V^{AX'}$ é Hermitiano, segue que $\overline{V^{AX'} \sigma^a{}_{AX'}} = V^{AX'} \sigma^a{}_{AX'}$ e portanto, real. Assim,

$$v^a = -V^{AX'} \sigma^a{}_{AX'}, \quad a = 1, 2, 3, 4.$$

Além disso, segue das propriedades de $\sigma^a{}_{AX'}$ e da definição de $V^{AX'}$ que esta associação é bem definida, isto é, que se $\hat{v}^a = \Lambda^a{}_b v^b$, então $-\hat{V}^{AX'} \sigma^a{}_{AX'} = \Lambda^a{}_b v^b$. Tudo isso se resume no seguinte teorema:

Teorema 2.3.5. Seja $\{e_a\}$ uma base admissível para $\mathcal{M}$ e $\{s^A\}$ um spin frame de $\mathcal{B}$. Então, o mapa que atribui a cada evento $v \in \mathcal{M}$ em seu equivalente Spinor $V = V^{AX'} s_A \otimes \bar{s}_{X'}$ é uma bijeção entre $\mathcal{M}$ e todos os spinors Hermitianos de valência $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

De maneira análoga ao desenvolvido até aqui, obtemos que o mapa que leva cada covetor $v^* \in \mathcal{M}^*$ no seu spinor equivalente $V_{AX'} s^A \otimes \bar{s}^{X'}$, onde $V_{AX'} = \sigma^a{}_{AX'} v_a$ é uma bijeção entre $\mathcal{M}^*$ e todos os spinors Hermitianos de valência $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Agora, notemos que, fixado uma base admissível $\{e_a\}$ e um spin frame $\{s^A\}$. Se $v = v^b e_b, u = u^a e_a \in \mathcal{M}$ e $V = V^{AX'} s_A \otimes \bar{s}_{X'}, U = U^{AX'} s_A \otimes \bar{s}_{X'}$ são seus respectivos Spinors equivalentes. então:

$$\begin{aligned} U_{AX'} V^{AX'} &= (\sigma^a{}_{AX'} u_a)(\sigma_b{}^{AX'} v^b) \\ &= (\sigma^a{}_{AX'} \sigma_b{}^{AX'})(u_a v^b) \\ &= (u_a v^b)(-\delta^a_b) \\ &= -(u_a v^a) \\ &= -\eta_{ab} u^b v^a \\ &= -u \cdot v. \end{aligned}$$

Portanto

$$V_{AX'} V^{AX'} = 2det[V^{AX'}] = -v \cdot v.$$

Consequentemente, se v é nulo diferente de zero, então $\det[V^{AX'}] = 0$ e $[V^{AX'}]$ possui posto 1. Sabemos da Álgebra Linear que se $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é uma matriz 2×2 com entradas em $\mathbb{C}$ com posto 1, então existem dois pares de números complexos $(\phi^1, \phi^0), (\psi^1, \psi^0)$ tal que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \phi^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\psi}^{1'} & \bar{\psi}^{0'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^1\bar{\psi}^{1'} & \phi^1\bar{\psi}^{0'} \\ \phi^0\bar{\psi}^{1'} & \phi^0\bar{\psi}^{0'} \end{bmatrix}$$

Logo, se v é nulo, então podemos escrever $V^{AX'} = \phi^A\bar{\psi}^{X'}$, ou seja, $V = \phi \otimes \bar{\psi}$. Mais ainda pode ser dito. Resolvendo um sistema linear de duas equações, é fácil ver que se z_1 e z_2 são dois números complexos tal que $z_1\bar{z}_2 \in \mathbb{R}$, então, $z_1 = \alpha z_2, \alpha \in \mathbb{R}$. Agora, pela própria definição de V, temos que $V^{11'}, V^{00'} \in \mathbb{R}$, e portanto, $\phi^1\bar{\psi}^{1'}$ e $\phi^0\bar{\psi}^{0'}$ são reais e não podem ser simultaneamente nulos. Logo, existe $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\psi^1 = r_1\phi^1$ ou $\phi^1 = r_1\psi^1$ e $\psi^0 = r_0\phi^0$ ou $\phi^0 = r_0\psi^0$. Como pelo menos um entre r_1, r_0 é diferente de zero, podemos assumir sem perda de generalidade que

$$\begin{bmatrix} \psi^1 \\ \psi^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1\phi^1 \\ r_0\phi^0 \end{bmatrix}.$$

Proposição 2.3.6. Nas mesmas condições acima, existe um número real r tal que

$$\begin{bmatrix} \psi^1 \\ \psi^0 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \phi^0 \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Primeiro, suponha que $\phi^1 = 0$. Então $\phi^1 = 0$. Então r_0 é o valor real escolhido. Similarmente para $\phi = 0$. Suponha então que nem ϕ^1, nem ϕ^0 sejam iguais a zero. Então, como $\overline{V^{10'}} = V^{01'}$ temos que

$$\begin{aligned} \overline{\phi^1\bar{\psi}^{0'}} &= \phi^0\bar{\psi}^{1'} \\ \bar{\phi}^{1'}\psi^0 &= \phi^0\bar{\psi}^{1'} \\ \frac{\bar{\phi}^{1'}}{\phi^0}\psi^0 &= \bar{\psi}^{1'}. \end{aligned}$$

Logo, ψ^0 e $\bar{\psi}^{1'}$ são ambos diferentes de zero, caso contrário ambos seriam iguais a zero e $[V^{AX'}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, o que seria um absurdo. Logo, obtemos que

$$\frac{\bar{\phi}^{1'}}{\phi^0} = \frac{\bar{\psi}^{1'}}{\psi^0} = \frac{r_1\bar{\phi}^{1'}}{r_0\phi^0}.$$

Portanto $r_1 = r_0$.

□

Podemos escrever $V^{AX'}$ como

$$V^{AX'} = \phi^A\bar{\psi}^{X'} = \pm(|r|^{\frac{1}{2}}\phi^A)(|r|^{\frac{1}{2}}\bar{\phi}^{X'}).$$

Defina então o vetor spin $\xi^A = |r|^{\frac{1}{2}}\phi^A$. Então:

$$V^{AX'} = \pm\xi^A\bar{\xi}^{X'}.$$

Notemos agora que $2v^4 = V^{11'} + V^{00'} = r(\phi^1\bar{\phi}^{1'} + \phi^0\bar{\phi}^{0'})$. Logo:

$$2v^4 = r(|\phi^1|^{\frac{1}{2}} + |\phi^0|^{\frac{1}{2}}).$$

Como isso vale para qualquer base admissível, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.3.7. Seja $\{e_a\}$ uma base admissível para $\mathcal{M}$ e $\{s^A\}$ um spin frame de $\mathcal{B}$. Seja $v \in \mathcal{M}$ um vetor nulo diferente de zero, $v = v^a e_a$ e V seu spinor equivalente. Então, existe um vetor spin ξ tal que:

a) Se v possui direção-futuro, isto é, $v^4 > 0$, então

$$V^{AX'} = \xi^A \bar{\xi}^{X'},$$

b) Se v possui direção-passado, isto é, $v^4 < 0$, então

$$V^{AX'} = -\xi^A \bar{\xi}^{X'}.$$

Capítulo 3

Spinors e Campos Eletromagnéticos

Relembramos que um bivetor em $\mathcal{M}$ é uma forma bilinear real $G : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ que é anti-simétrica. O objetivo deste capítulo, que é baseado no livro de G. Naber, [12], é entendermos a ligação entre G e Spinors e finalmente obtermos a representação das equações de Maxwell na forma de spinor.

3.1 Bivetores e Spinors

Comecemos com uma base admissível $\{e_a\}$ para $\mathcal{M}$ e um spin frame $\{s^A\}$ para $\mathcal{B}$. Os componentes de um bivetor G relativo a $\{e_a\}$ são dados por $F_{ab} = G(e_a, e_b)$ e, por serem anti-simétricos, satisfazem

$$F_{ab} = \frac{1}{2}(F_{ab} - F_{ba}) = F_{[ab]}.$$

Definição 3.1.1. Para $A, B = 1, 0$ e $X', Y' = 1', 0'$ definimos os componentes do equivalente spinor de G relativo a $\{s^a\}$ como sendo:

$$F_{AX'BY'} = \sigma^a{}_{AX'}\sigma^b{}_{BY'}F_{ab}.$$

$F_{AX'BY'}$ está bem definido, pois se $\{\hat{s}^a\}$ é outro spin frame relacionado com $\{s^a\}$ por $\Lambda \in \mathcal{L}$ temos que

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{AX'BY'} &= G_A{}^{A_1}\bar{G}_{X'}{}^{X'_1}G_B{}^{B_1}\bar{G}_{Y'}{}^{Y'_1}F_{AX'BY'} \\
&= G_A{}^{A_1}\bar{G}_{X'}{}^{X'_1}G_B{}^{B_1}\bar{G}_{Y'}{}^{Y'_1}(\sigma^\alpha{}_{A_1X'_1}\sigma^\beta{}_{B_1Y'_1}F_{\alpha\beta}) \\
&= (G_A{}^{A_1}\bar{G}_{X'}{}^{X'_1}\sigma^\alpha{}_{A_1X'_1})(G_B{}^{B_1}\bar{G}_{Y'}{}^{Y'_1}\sigma^\beta{}_{B_1Y'_1})F_{\alpha\beta} \\
&= (\Lambda_a{}^\alpha\sigma^a{}_{AX'})(\Lambda_b{}^\beta\sigma^b{}_{BY'})F_{\alpha\beta} \text{ por (2.3.1)} \\
&= \sigma^a{}_{AX'}\sigma^b{}_{BY'}(\Lambda_a{}^\alpha\Lambda_b{}^\beta F_{\alpha\beta}).
\end{aligned}$$

$$\therefore \hat{F}_{AX'BY'} = \sigma^a{}_{AX'}\sigma^b{}_{BY'}\hat{F}_{\alpha\beta}.$$

Algumas propriedades do spinor equivalente a um bivetor são

$$F_{ab} = \sigma_a{}^{AX'}\sigma_b{}^{BY'}F_{AX'BY'} \tag{3.1.1}$$
$$\bar{F}_{AX'BY'} = F_{AX'BY'} \tag{3.1.2}$$
$$F_{BY'AX'} = -F_{AX'BY'}. \tag{3.1.3}$$

Todas as propriedades seguem do cálculo direto e das propriedades envolvendo os símbolos de de Infeld-van der Waerden. A segunda equação nos diz que $F_{AX'BY'}$ é um spinor Hermitiano.

A partir da última equação, podemos escrever

$$\begin{aligned}
F_{AX'BY'} &= \frac{1}{2}[F_{AX'BY'} - F_{BY'AX'}] \\
&= \frac{1}{2}[F_{AX'BY'} - F_{BX'AY'} + F_{BX'AY'} - F_{BY'AX'}] \\
&= \frac{1}{2}[F_{AX'BY'} - F_{BX'AY'}] + \frac{1}{2}[F_{BX'AY'} - F_{BY'AX'}].
\end{aligned}$$

Observe que como $\epsilon_{AB}\epsilon^{CD} = \delta_A^C\delta_B^D - \delta_A^D\delta_B^C$, temos que $\epsilon_{AB}\epsilon^{CD}F_{CX'DY'} = (\delta_A^C\delta_B^D - \delta_A^D\delta_B^C)F_{CX'DY'} = F_{AX'BY'} - F_{BX'AY'}$ e, analogamente, $\bar{\epsilon}_{X'Y'}\bar{\epsilon}^{U'V'}F_{BU'AV'} = F_{BX'AY'} - F_{BY'AX'}$. Portanto temos que:

$$\begin{aligned}
F_{AX'BY'} &= \frac{1}{2}[\epsilon_{AB}\epsilon^{CD}F_{CX'DY'}] + \frac{1}{2}[\bar{\epsilon}_{X'Y'}\bar{\epsilon}^{U'V'}F_{BU'AV'}] \\
&= \epsilon_{AB}\left(\frac{1}{2}\epsilon^{CD}F_{CX'DY'}\right) + \bar{\epsilon}_{X'Y'}\left(\frac{1}{2}\bar{\epsilon}^{U'V'}F_{BU'AV'}\right) \\
&= \epsilon_{AB}\left(\frac{1}{2}F_{CX'}{}^{C}{}_{Y'}\right) + \bar{\epsilon}_{X'Y'}\left(\frac{1}{2}F_{U'B}{}^{U'}{}_{A}\right)
\end{aligned}$$

Definimos então ϕ_{AB} por

$$\phi_{AB} = \frac{1}{2}F_{U'A}{}^{U'}{}_{B}, \quad A, B = 1, 0$$

Proposição 3.1.2. Seja $\phi_{AB} = \frac{1}{2}F_{U'A}{}^{U'}{}_{B}$, então, $\phi_{AB} = \phi_{BA}$ e $\bar{\phi}_{X'Y'} = \frac{1}{2}F_{CX'}{}^{C}{}_{Y'}$

Demonstração. Para a equação de simetria, notemos que

$$\begin{aligned}
\phi_{BA} &= \frac{1}{2}F_{U'B}{}^{U'}{}_{A} = -\frac{1}{2}F^{U'}{}_{AU'B} \\
&= -\frac{1}{2}[\bar{\epsilon}^{U'V'}F_{V'A}{}^{W'}{}_{B}\bar{\epsilon}_{W'U'}] \\
&= -\frac{1}{2}[F_{V'A}{}^{W'}{}_{B}(\bar{\epsilon}^{U'V'}\bar{\epsilon}_{W'U'})] \\
&= -\frac{1}{2}[F_{V'A}{}^{W'}{}_{B}(-\bar{\epsilon}^{U'V'}\bar{\epsilon}_{U'W'})] \\
&= -\frac{1}{2}[F_{V'A}{}^{W'}{}_{B}(-\delta_{W'}^{V'})] \\
&= \frac{1}{2}[F_{V'A}{}^{V'}{}_{B}] \\
&= \phi_{AB}.
\end{aligned}$$

Já para a segunda equação, temos

$$
\begin{aligned}
\bar{\phi}_{X'Y'} &= \overline{\phi_{XY}} \\
&= \overline{\frac{1}{2} F_{U'X}{}^{U'}{}_{Y}} \\
&= \frac{1}{2} F_{UX'}{}^{U}{}_{Y'} \\
&= \frac{1}{2} F_{CX'}{}^{C}{}_{Y'}.
\end{aligned}
$$

□

Assim, podemos escrever $F_{AX'BY'}$ como

$$F_{AX'BY'} = \epsilon_{AB}\bar{\phi}_{X'Y'} + \phi_{AB}\bar{\epsilon}_{X'Y'}.$$

Além disso, podemos fazer o processo inverso. Isto é, dado um spinor simétrico de valência $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, ϕ_{AB}, podemos definir $F_{AX'BY'} = \epsilon_{AB}\bar{\phi}_{X'Y'} + \phi_{AB}\bar{\epsilon}_{X'Y'}$ e assim obtermos um spinor de valência $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ satisfazendo (3.1.2) e (3.1.3). Agora, usando (3.1.1), isto é,

$$F_{ab} = \sigma_a{}^{AX'}\sigma_b{}^{BY'}F_{AX'BY'}.$$

Tudo isso se resume no seguinte teorema:

Teorema 3.1.3. Dado um bivetor G anti-simétrico, com componentes relativo a $\{e_a\}$ dado por F_{ab} e seja ϕ_{AB} um spinor simétrico de valência $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Então a composição de relações $F_{ab} \mapsto F_{AX'BY'} \mapsto \phi_{AB}$ é bijetiva e está bem definida. Ou seja, todo spinor simétrico de valência $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ corresponde a uma forma bilinear real G.

3.2 Campos Eletromagnéticos e as Equações de Maxwell para Spinors

Finalmente, chegamos a principal seção até agora. As equações de Maxwell em forma de Spinor é o motivo pelo qual tudo até agora foi feito. Começamos com uma transformação linear anti-simétrica diferente de zero $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$. Fixe uma base admissível arbitrária $\{e_a\}$ e um spin fram $\{s^A\}$. Conforme definimos anteriormente, o bivetor associado a F tem componentes em $\{e_a\}$ iguais a $F_{ab} = G(e_a, e_b)$. O spinor equivalente a G é definido como $F_{AX'BY'} = \sigma^a{}_{AX'}\sigma^b{}_{BY'}F_{ab}$. Associado a $F_{AX'BY'}$ está o spinor simétrico ϕ_{AB} de valência $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, tal que

$$F_{AX'BY'} = \epsilon_{AB}\bar{\phi}_{X'Y'} + \phi_{AB}\bar{\epsilon}_{X'Y'}$$

Chamaremos ϕ_{AB} como sendo o *spinor eletromagnético* associado com F. Como $\mathcal{G}^A{}_{A_1} G_A{}^{A_2} = \delta^{A_2}_{A_1}$, onde $\mathcal{G}^A{}_{A_1}$ é como definido em 2.1.2, segue que relativo a qualquer outro spin frame, e dado qualquer vetor spin ξ, temos que

$$\hat{\phi}_{AB}\hat{\xi}^A\hat{\xi}^B = \phi_{AB}\xi^A\xi^B.$$

Logo, $\phi_{AB}\xi^A\xi^B$ é um invariante. Assim, o primeiro objetivo é obter uma decomposição canonica para ϕ_{AB} como um produto exterior simétrico de vetores spin. Logo, calcularemos primeiramente os invariantes ξ^A. Considere os vetores spins $\begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix}$ onde $z \in \mathbb{C}$. Então

$$\begin{aligned}
\phi_{AB}\xi^A\xi^B &= \phi_{11}\xi^1\xi^1 + \phi_{10}\xi^1\xi^0 + \phi_{01}\xi^0\xi^1 + \phi_{00}\xi^0\xi^0 \\
&= \phi_{11}z^2 + \phi_{10}z + \phi_{01}z + \phi_{00} \\
&= \phi_{11}z^2 + 2\phi_{10}z + \phi_{00}.
\end{aligned}$$

Pois ϕ é simétrica. Como este polinômio está em $\mathbb{C}[x]$, ele possui uma fatorização em $\mathbb{C}$. Portanto, existem $\alpha_1, \alpha_0, \beta_1, \beta_0$ tal que

$$\phi_{11}z^2 + 2\phi_{10}z + \phi_{00} = (\alpha_1 z + \alpha_0)(\beta_1 z + \beta_0).$$

Assim, obtemos que:

$$\begin{aligned}
\phi_{11} &= \alpha_1\beta_1 &&= \frac{1}{2}(\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_1); \\
\phi_{00} &= \alpha_0\beta_0 &&= \frac{1}{2}(\alpha_0\beta_0 + \alpha_0\beta_0); \\
\phi_{10} & &&= \frac{1}{2}(\alpha_1\beta_0 + \alpha_0\beta_1).
\end{aligned}$$

Logo, para todo $A, B = 1, 0$, temos que:

$$\phi_{AB} = \frac{1}{2}(\alpha_A\beta_B + \alpha_B\beta_A),$$

Notemos que em qualquer outro spin frame, $\hat{\alpha}_A = \mathcal{G}_A{}^{A_1}\alpha_{A_1}$, $\hat{\beta}_B = \mathcal{G}_B{}^{B_1}\beta_{B_1}$, temos que

$$\frac{1}{2}(\hat{\alpha}_A\hat{\beta}_B + \hat{\alpha}_B\hat{\beta}_A) = \mathcal{G}_A{}^{A_1}\mathcal{G}_B{}^{B_1}\phi_{A_1B_1} = \hat{\phi}_{AB}.$$

Consequentemente, ϕ é o produto exterior simétrico dos vetores spin α e β, isto é

$$\phi_{AB} = \alpha_{(A}\beta_{B)}.$$

onde $\alpha_{(A}\beta_{B)} = \frac{1}{2}(\alpha_A\beta_B + \alpha_B\beta_A)$, notação motivada pela Definição 2.2.11.

Os vetores spin α e β estão intimamente conectados com os campos eletromagnéticos. Iremos agora mostrar que os vetores nulos com direções futuras (com $t > 0$) associados com α e β são autovetores do campo eletromagnético F.

Definição 3.2.1. Chamaremos de *direções nulas principais de ϕ_{AB}* os vetores v e w definidos por

$$v^a = -\sigma^a{}_{AX'}\alpha^A\bar{\alpha}^{X'};$$
$$w^a = -\sigma^a{}_{AX'}\beta^A\bar{\beta}^{X'}.$$

Mostraremos agora o seguinte lema:

Lema 3.2.2. As seguintes igualdades são satisfeitas:

$$\phi_{AB}\alpha^B = \frac{1}{2}(\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1)\alpha_A$$
$$\bar{\phi}_{X'Y'}\bar{\alpha}^{Y'} = \frac{1}{2}\overline{(\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1)}\bar{\alpha}_{X'}.$$

Demonstração. Cálculo direto nos informa que

$$\begin{aligned}
\phi_{AB}\alpha^B &= \frac{1}{2}(\alpha_A\beta_B + \alpha_B\beta_A)\alpha^B \\
&= \frac{1}{2}(\alpha_A\beta_B\alpha^B + \alpha_B\beta_A\alpha^B) \\
&= \frac{1}{2}(\alpha^B(\beta_B\alpha_A) + \alpha_B\alpha^B\beta_A) \\
&= \frac{1}{2}(\epsilon^{BC}\alpha_C\beta_B\alpha_A) \\
&= \frac{1}{2}(\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1)\alpha_A.
\end{aligned}$$

Analogamente para o segundo caso. Chamaremos de $\mu = \frac{1}{2}(\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1)$. □

Relembramos que, dos cálculos feitos no capítulo anterior, $F^a{}_b = \eta^{ac}F_{cb}$ como as entradas da matriz F relativa a $\{e_a\}$. Segue então uma importante proposição deste capítulo:

Proposição 3.2.3. As direções nulas principais de ϕ_{AB}, v e w, são autovetores (talvez coincidentes) da matriz de F.

Demonstração. Novamente, esse resultado segue do cálculo direto e usando o Lema anterior.

$$\begin{aligned}
F^a{}_b v^b &= \eta^{ac} F_{cb} v^b = \eta^{ac} \sigma_c{}^{AX'} \sigma_b{}^{BY'} F_{AX'BY'} v^b \\
&= -\eta^{ac} \sigma_c{}^{AX'} \sigma_b{}^{BY'} (\epsilon_{AB} \bar{\phi}_{X'Y'} + \phi_{AB} \bar{\epsilon}_{X'Y'})(\sigma^b{}_{DZ'} \alpha^D \bar{\alpha}^{Z'}) \\
&= -\eta^{ac} \sigma_c{}^{AX'} (\sigma_b{}^{BY'} \sigma^b{}_{DZ'})(\epsilon_{AB} \bar{\phi}_{X'Y'} + \phi_{AB} \bar{\epsilon}_{X'Y'})(\alpha^D \bar{\alpha}^{Z'}) \\
&= -\eta^{ac} \sigma_c{}^{AX'} (-\delta^B_D \delta^{Y'}_{Z'})(\epsilon_{AB} \bar{\phi}_{X'Y'} + \phi_{AB} \bar{\epsilon}_{X'Y'})(\alpha^D \bar{\alpha}^{Z'}) \\
&= \eta^{ac} \sigma_c{}^{AX'} (\epsilon_{AB} \bar{\phi}_{X'Y'} + \phi_{AB} \bar{\epsilon}_{X'Y'})(\alpha^B \bar{\alpha}^{Y'}) \\
&= \eta^{ac} \sigma_c{}^{AX'} [(\epsilon_{AB} \alpha^B)(\bar{\phi}_{X'Y'} \bar{\alpha}^{Y'}) + (\phi_{AB} \alpha^B)(\bar{\epsilon}_{X'Y'} \bar{\alpha}^{Y'})] \\
&= \eta^{ac} \sigma_c{}^{AX'} [(-\alpha_A)(\bar{\mu} \bar{\alpha}_{X'}) + (\mu \alpha_A) \bar{\alpha}_{X'}] \\
&= -\eta^{ac} \sigma_c{}^{AX'} [(\mu + \bar{\mu})(\alpha_A \bar{\alpha}_{X'})] \\
&= -(\mu + \bar{\mu}) \eta^{ac} (\sigma_c{}^{AX'} \alpha_A \bar{\alpha}_{X'}) \\
&= -(\mu + \bar{\mu}) \eta^{ac} (v_c) \\
&= -(\mu + \bar{\mu}) v^a.
\end{aligned}$$

Se $\lambda = -(\mu + \bar{\mu}) = -2Re(\mu) = -Re(\alpha \cdot \beta)$, então concluimos que

$$F^a{}_b v^b = \lambda v^a,$$

ou, equivalentemente

$$Fv = \lambda v = -Re(\alpha \cdot \beta) v.$$

Analogamente segue o caso para w, com $\lambda = Re(\alpha \cdot \beta)$, isto é

$$Fw = -\lambda w.$$

□

A partir do Lema anterior, podemos reescrever $\phi_{AC} \alpha^C$ como

$$\begin{aligned}
\phi_{AC} \alpha^C &= \lambda \alpha_A \\
\therefore \phi_{AC} (\epsilon^{CB} \alpha_B) &= \lambda \alpha_A \\
\therefore (\phi_{AC} \epsilon^{CB}) \alpha_B &= \lambda \alpha_A \\
\therefore -(\epsilon^{CB} \phi_{AC}) \alpha_B &= \lambda \alpha_A \\
\therefore \phi_A{}^B \alpha_B &= \lambda \alpha_A.
\end{aligned}$$

O que motiva a seguinte definição:

Definição 3.2.4. Um número complexo $\lambda \in \mathbb{C}$ é um *autovalor* de ϕ_{AB} se existe um vetor spin $\alpha \in \mathcal{B}$, chamado de *autospinor* de ϕ_{AB}, tal que $\phi_A{}^B \alpha_B = \lambda \alpha_A$.

Pensando agora em $[\phi_A{}^B]$ como uma matriz, relativa a $\{s^A\}$, de uma transformação linear $\phi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ no Espaço Spin, temos que um autospinor existirá se, e somente se,

$$det\left[\begin{bmatrix} \phi_1{}^1 & \phi_1{}^0 \\ \phi_0{}^1 & \phi_0{}^0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right] = 0,$$

o que é equivalente a

$$\lambda^2 - (\phi_1{}^1 + \phi_0{}^0)\lambda + det[\phi_A{}^B] = 0.$$

Porém, como foi provado anteriormente, $(\phi_1{}^1 + \phi_0{}^0) = 0$ e $det[\phi_A{}^B] = det[\phi_{AB}]$. Portanto, concluimos que

Lema 3.2.5. λ é um autovalor de ϕ_{AB} se, e somente se,

$$\lambda = \pm\left(\frac{1}{2}\phi_{AB}\phi^{AB}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Calculando $\phi_{AB} = \frac{1}{2}F_{U'A}{}^{U'}{}_B$ obtemos que, usando $\bar{\epsilon}^{U'X'}$ para "descer" U', temos que:

$$\phi_{AB} = \frac{1}{2}(F_{A0'B1'} - F_{A1'B0'}). \tag{3.2.1}$$

Relembrando que

$$E^1 = F_{14}, \quad E^2 = F_{24}, \quad E^3 = F_{34}, \tag{3.2.2}$$
$$B^1 = F_{23}, \quad B^2 = -F_{13}, \quad B^3 = F_{12}, \tag{3.2.3}$$

temos o seguinte lema:

Lema 3.2.6. As seguintes equações são satisfeitas:

i) $\phi_{11} = \frac{1}{2}[(E^1 - B^2) - i(E^2 + B^1)]$;

ii) $\phi_{10} = \phi_{01} = \frac{1}{2}[-E^3 + iB^3]$;

iii) $\phi_{00} = \frac{1}{2}[-(E^1 + B^2) - i(-E^2 + B^1)]$.

Demonstração. Novamente, segue do cálculo direto da equação (3.2.1).

$$
\begin{aligned}
\phi_{11} &= \frac{1}{2}(F_{10'11'} - (-F_{10'11'})) \\
&= F_{10'11'} = \sigma^a{}_{10'}\sigma^b{}_{11'}F_{ab} \\
&= \sigma^1{}_{10'}\sigma^3{}_{11'}F_{13} + \sigma^1{}_{10'}\sigma^4{}_{11'}F_{14} + \sigma^2{}_{10'}\sigma^3{}_{11'}F_{23} + \sigma^2{}_{10'}\sigma^4{}_{11'}F_{24} \\
&= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)F_{13} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)F_{14} \\
&\quad + \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)F_{23} + \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)F_{24} \\
&= \frac{1}{2}[(-B^2) + E^1 - i(B^1) - i(E^2)] \\
&= \frac{1}{2}[(E^1 - B^2) - i(E^2 + B^1)].
\end{aligned}
$$

Os outros dois casos seguem de maneira análoga.

□

Lema 3.2.7. $det[\phi_{AB}] = \frac{1}{4}(|B|^2 - |E|^2) + \frac{1}{2}(E \cdot B)i.$

Demonstração. Notemos que

$$
\begin{aligned}
\phi_{11}\phi_{00} &= \frac{1}{2}[(E^1 - B^2) - i(E^2 + B^1)]\frac{1}{2}[-(E^1 + B^2) - i(-E^2 + B^1)] \\
&= \frac{1}{4}(-(E^1 - B^2)(E^1 + B^2) - i(E^1 - B^2)(-E^2 + B^1) \\
&\quad + i(E^2 + B^1)(E^1 + B^2) - (E^2 + B^1)(B^1 - E^2)) \\
&= [(B^1)^2 + (B^2)^2 - (E^1)^2 - (E^2)^2 + 2i(B^2E^2 + E^1B^1)].
\end{aligned}
$$

Como $\phi_{10}\phi_{01} = (\phi_{10})^2$, temos que

$$
\begin{aligned}
(\phi_{10})^2 &= \frac{1}{4}(-E^3 + iB^3)^2 \\
&= \frac{1}{4}((E^3)^2 - (B^3)^2 - 2i(E^3B^3))
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\phi_{11}\phi_{00} - \phi_{10}\phi_{01} = \frac{1}{4}(|B|^2 - |E|^2) + \frac{i}{2}(E \cdot B),
$$

e o resultado segue.

□

Tudo isso se resume no seguinte teorema, que é um dos mais importantes desse trabalho.

Teorema 3.2.8. Seja $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ uma transformação linear anti-simétrica diferente de zero, G, definido como $G(u, v) = g(Fx, y)$, seu bivetor associado, $F_{AX'BY'}$ o spinor equivalente a G e ϕ_{AB} o spinor simétrico tal que $F_{AX'BY'} = \epsilon_{AB}\bar{\phi}_{X'Y'} + \phi_{AB}\bar{\epsilon}_{X'Y'}$. Então, F é nula, se e somente se $\lambda = 0$ é o único autovalor de ϕ_{AB}.

Demonstração. Lembrando que $\phi_{AB}\phi^{AB} = det[\phi_{AB}]$, usando o Lema (3.2.5) e o Lema (3.2.7), temos que os autovalores do spinor eletromagnético ϕ_{AB} são dados por

$$\lambda = \pm \left[\frac{1}{4}(|B|^2 - |E|^2) + \frac{i}{2}(E \cdot B)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Logo, $\lambda = 0$ se, e somente se, $(|B|^2 - |E|^2) = E \cdot B = 0$. Logo, F é nula se, e somente se, o único autovalor de ϕ_{AB} é 0.

$\square$

Para finalizar este capítulo, iremos finalmente concluir as Equações de Maxwell na forma de spinors. Para isso, precisamos definir um operador spinor equivalente aos operadores diferenciais $\partial_a = \frac{\partial}{\partial x^a}$.

Motivado pelo uso da matriz $\eta^{a\alpha}$ para subir ou descer índices, definimos $\partial^a = \eta^{a\alpha}\partial_\alpha$.

Definição 3.2.9. Definimos, para cada $A = 1, 0$ e $X' = 1', 0'$ o operador $\nabla^{AX'}$ como sendo

$$\nabla^{AX'} = \sigma_a{}^{AX'}\partial^a = \sigma_a{}^{AX'}(\eta^{a\alpha}\partial_\alpha)$$

Segue da definição de $\nabla^{AX'}$, por ser uma combinação linear de ∂_a, que todas as regras de diferenciação são válidas para o operador ∇, em particular, a famosa "regra do produto". Além disso, escreveremos de forma explícita cada uma das equações de ∇ em termos de x^1, x^2, x^3, x^4:

$$\nabla^{11'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_3 - \partial_4), \quad \nabla^{10'} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\partial_1 + i\partial_2), \tag{3.2.4}$$

$$\nabla^{01'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_1 - i\partial_2), \quad \nabla^{00'} = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\partial_3 + \partial_4). \tag{3.2.5}$$

Reescrevendo o Lema (3.2.6) na forma obtida através de (3.2.2) e (3.2.3), obtemos que

i) $\phi_{11} = \frac{1}{2}[(F_{13} + F_{14}) - i(F_{32} + F_{42})]$;

ii) $\phi_{10} = \phi_{01} = \frac{1}{2}[F_{43} + iF_{12}]$;

iii) $\phi_{00} = \frac{1}{2}[(F_{41} + F_{13}) + i(F_{42} + F_{23})]$.

Lema 3.2.10. As seguintes igualdades são satisfeitas:

1) $\nabla^{A1'}\phi_{A0} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{-div(E) - \left[rot(B)\cdot e_3 - \frac{\partial E^3}{\partial x^4}\right] + i\left(div(B) - \left[rot(E)\cdot e_3 + \frac{\partial B^3}{\partial x^4}\right]\right)\right\};$

2) $\nabla^{A1'}\phi_{A1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{rot(B)\cdot e_1 + rot(E)\cdot e_2 - (\frac{\partial E^1}{\partial x^4} - \frac{\partial B^2}{\partial x^4}) + i\left(-rot(B)\cdot e_2 + rot(E)\cdot e_1 + (\frac{\partial E^2}{\partial x^4} + \frac{\partial B^1}{\partial x^4})\right)\right\}$
;

3) $\nabla^{A0'}\phi_{A1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{-rot(B)\cdot e_3 + div(E) + \frac{\partial E^3}{\partial x^4} + i\left(-div(B) - rot(E)\cdot e_3 - \frac{\partial B^3}{\partial x^4}\right)\right\};$

4) $\nabla^{A0'}\phi_{A0} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{rot(E)\cdot e_2 - rot(B)\cdot e_1 + \frac{\partial E^1}{\partial x^4} + \frac{\partial B^2}{\partial x^4} + i\left(-rot(E)\cdot e_1 - rot(B)\cdot e_2 + \frac{\partial E^2}{\partial x^4} - \frac{\partial B^1}{\partial x^4}\right)\right\};$

Demonstração. Novamente, a demonstração segue pelo cálculo direto. Lembramos que, em termos de F_{ab}, os rotacionais e os divergentes de E e B se escrevem como:

$$\begin{aligned}
rot(B) &= (F_{12,2} + F_{13,3})\cdot e_1 - (F_{12,1} - F_{23,3})\cdot e_2 - (F_{13,1} + F_{23,2})\cdot e_3;\\
rot(E) &= (F_{34,2} - F_{24,3})\cdot e_1 - (F_{34,1} - F_{14,3})\cdot e_2 + (F_{24,1} - F_{14,2})\cdot e_3;\\
div(B) &= F_{23,1} - F_{13,2} + F_{12,3};\\
div(E) &= F_{14,1} - F_{24,2} + F_{34,3};
\end{aligned}$$

1)

$$\begin{aligned}
\nabla^{A1'}\phi_{A0} &= \nabla^{11'}\phi_{10} + \nabla^{01'}\phi_{00}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\{(\partial_3 - \partial_4)(F_{43} + iF_{12}) + (\partial_1 - i\partial_2)[(F_{41} + iF_{13}) + i(F_{42} + F_{23})]\}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\{-[(F_{14,1} + F_{24,2} + F_{34,3}) + (F_{13,1} + F_{23,2} - F_{43,4})]\\
&\quad +i[(F_{12,3} + F_{31,2} + F_{23,1}) - (F_{12,4}) + F_{41,2} + F_{24,1}]\}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{-div(E) - \left[rot(B)\cdot e_3 - \frac{\partial E^3}{\partial x^4}\right] + i\left(div(B) - \left[rot(E)\cdot e_3 + \frac{\partial B^3}{\partial x^4}\right]\right)\right\}.
\end{aligned}$$

2)

$$
\begin{aligned}
\nabla^{A1'}\phi_{A1} &= \nabla^{11'}\phi_{11} + \nabla^{01'}\phi_{01} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\{(\partial_3 - \partial_4)(F_{13} + F_{14} + i(F_{32} + F_{42})) + (\partial_1 - i\partial_2)(F_{43} + iF_{12})\} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\{[(F_{13,3} + F_{12,2} + F_{14,3} + F_{43,1}) - (F_{13,4} + F_{14,4})]\} \\
&\quad + i\frac{1}{2\sqrt{2}}\{[(F_{32,3} + F_{12,1} + F_{42,3} + F_{34,2}) - (F_{32,4} + F_{42,4})]\} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{rot(B)\cdot e_1 + rot(E)\cdot e_2 - (\frac{\partial E^1}{\partial x^4} - \frac{\partial B^2}{\partial x^4})\right\} \\
&\quad + i\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\left(-rot(B)\cdot e_2 + rot(E)\cdot e_1 + (\frac{\partial E^2}{\partial x^4} + \frac{\partial B^1}{\partial x^4})\right)]\right\}.
\end{aligned}
$$

3)

$$
\begin{aligned}
\nabla^{A0'}\phi_{A1} &= \nabla^{10'}\phi_{11} + \nabla^{00'}\phi_{01} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\{(\partial_1 + i\partial_2)(F_{13} + F_{14} + i(F_{32} + F_{42})) - (\partial_3 - \partial_4)(F_{43} + iF_{12})\} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\{[(F_{13,1} + F_{14,1} - F_{32,2} - F_{42,2} - F_{43,3} + F_{43,4})]\} \\
&\quad + i\frac{1}{2\sqrt{2}}\{[(F_{13,2} + F_{14,2} + F_{32,1} + F_{42,1} - F_{12,3} - F_{12,4})]\} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{-rot(B)\cdot e_3 + div(E) + \frac{\partial E^3}{\partial x^4}\right\} \\
&\quad + i\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\left(-div(B) - rot(E)\cdot e_3 - \frac{\partial B^3}{\partial x^4}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

4)

$$
\begin{aligned}
\nabla^{A0'}\phi_{A0} &= \nabla^{10'}\phi_{10} + \nabla^{00'}\phi_{00} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\{(\partial_1 + i\partial_2)(F_{43} + iF_{12}) - (\partial_3 - \partial_4)(F_{41} + F_{13} + i(F_{42} + F_{23})\} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\{[(F_{43,1} - F_{12,2} - F_{41,3} - F_{13,3} - F_{41,4} - F_{13,4})]\} \\
&\quad + i\frac{1}{2\sqrt{2}}\{(F_{43,2} + F_{12,2} - F_{42,3} - F_{23,3} - F_{42,4} - F_{23,4})\} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{rot(E)\cdot e_2 - rot(B)\cdot e_1 + \frac{\partial E^1}{\partial x^4} + \frac{\partial B^2}{\partial x^4}\right\} \\
&\quad + i\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\left(-rot(E)\cdot e_1 - rot(B)\cdot e_2 + \frac{\partial E^2}{\partial x^4} - \frac{\partial B^1}{\partial x^4}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Finalmente, podemos rescrever as Equações de Maxwell usando Spinors.

Teorema 3.2.11. Seja $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ um campo eletromagnético descrito como uma transformação linear anti-simétrica diferente de zero, G seu bivetor associado, $F_{AX'BY'}$ o spinor equivalente a G e ϕ_{AB} o spinor simétrico tal que $F_{AX'BY'} = \epsilon_{AB}\bar{\phi}_{X'Y'} + \phi_{AB}\bar{\epsilon}_{X'Y'}$. Nestas condições, as Equações de Maxwell são equivalentes a:

$$\nabla^{AX'}\phi_{AB} = 0, \quad A = 1, 0,\ X' = 1', 0'.$$

Demonstração. Analisando somente o lado direito de cada equação do lema (3.2.10), iremos definir as operações elementares de soma de equações de sistema lineares da seguinte forma: $Re(j)$ e $Im(j)$ significam as partes real e imaginária, respectivamente, da equação j, onde $j = 1, 2, 3, 4$. Assim, por exemplo:

$$Re(3) - Re(1) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{-rot(B)\cdot e_3 + div(E) + \frac{\partial E^3}{\partial x^4}\right)\right\} - \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{-div(E) - \left[rot(B)\cdot e_3 - \frac{\partial E^3}{\partial x^4}\right]\right\}\right).$$

Assim, procedendo desta maneira, obtemos que:

i) $Re(3) - Re(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}div(E)$;

ii) $Im(1) - Im(3) = \frac{1}{\sqrt{2}}div(B)$;

iii) $-(Re(3) + Re(1)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(rot(B)\cdot e_3 - \frac{\partial E^3}{\partial x^4})$;

iv) $-(Im(2) + Im(4)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(rot(B)\cdot e_2 - \frac{\partial E^2}{\partial x^4})$;

v) $Re(4) - Re(2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(rot(B)\cdot e_1 - \frac{\partial E^1}{\partial x^4})$;

vi) $-(Im(1) + Im(3)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(rot(E)\cdot e_3 + \frac{\partial B^3}{\partial x^4})$;

vii) $Re(4) + Re(2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(rot(E)\cdot e_2 + \frac{\partial B^2}{\partial x^4})$;

viii) $Im(2) - Im(4) = \frac{1}{\sqrt{2}}(rot(E)\cdot e_1 + \frac{\partial B^1}{\partial x^4})$.

Portanto, como o sistema acima é equivalente ao gerado pelas equações $\nabla^{AX'}\phi_{AB}$, segue que as Equações de Maxwell são satisfeitas se, e somente se, o sistema $\nabla^{AX'}\phi_{AB} = 0$ é satisfeito. □

Capítulo 4

Congruências Nulas de Geodésicas Shear-free

O objetivo deste capítulo é definir uma congruência nula de geodésicas shear-free e obter uma relação com os spinors. Vimos que todo spinor está relacionado a uma direção nula em $\mathcal{M}$ pelo Teorema 2.3.7. Além disso, toda direção nula está associada a dois spinors ξ^A e $-\xi^A$. Se tivermos um campo vetorial nulo sobre $\mathcal{M}$, isto é, um campo vetorial L onde para todo $v \in \mathcal{M}$ o vetor direção $L(v)$ é um vetor nulo, poderemos fazer a associação de cada vetor nulo em T_vM a um spinor $\xi(v)$. Assim com no caso de Geometria de Superfícies, onde temos a liberdade de escolha para o campo normal a superfície entre N e $-N$, podemos escolher entre $\xi^A(v)$ e $-\xi^A(v)$ de tal forma que variando o ponto v temos um campo suave.

Neste capítulo, exceto quando expresso o contrário, $U \subset \mathcal{M}$ será um aberto em $\mathcal{M}$, .

Definição 4.0.12. Um *campo spinor* n^A é uma aplicação

$$n^A : U \mapsto \mathcal{B}^*,$$

tal que para cada ponto de U associamos a um vetor spinor $n^A(v)$. Dizemos que o campo é *suave* se para cada $A = 1, 0,\ n^A(v)$ é uma função complexa suave em v.

Observação: Se trocarmos $\mathcal{B}^*$ por $\mathcal{B}, \mathcal{B}'^*$ ou $\mathcal{B}'$ na Definição 4.0.12, obteríamos *campos spinors conjugados e duais*, respectivamente definidos como $n_A, n^{X'}, n_{X'}$. Dado um campo spinor n^A obtemos o seu conjugado pela fórmula em (2.1.1), isto é:

$$\begin{cases} n^1 = -n_0, \\ n^0 = n_1. \end{cases} \tag{4.0.1}$$

Algumas definições importantes seguem.

Definição 4.0.13. Uma *congruência* em $U \subset \mathcal{M}$ é uma família de curvas que cobrem U, isto é, para cada $v \in U$ existe uma única curva r diferenciável e regular da família passando pelo ponto v. Dizemos que a congruência é *nula* se elas são curvas integrais de um campo nulo, ou seja, se para cada ponto da curva r, o seu vetor tangente $l(v)$ é um vetor nulo e se o campo $L = \{l(v); v \in U\}$ é um campo vetorial suave em $\mathcal{M}$.

Definição 4.0.14. Uma *pré-geodésica* é uma curva diferenciável regular que admite uma reparametrização tal que a curva reparametrizada é uma geodésica.

Definição 4.0.15. Uma congruência nula é dita *geodésica* se cada curva da congruência é uma pré-geodésica em U.

Relembramos que para uma curva ser pré-geodésica é necessário e suficiente que para todo $v \in U$ o vetor $l^b \partial_b l^a$ deve ser paralelo a l^a, onde $l = (l^a) = (l^1, l^2, l^3, l^4)$, isto é, $l^b \partial_b l^a = \lambda(v) l^a$, para alguma função escalar $\lambda(v)$.

O objetivo agora é criar a ponte entre o campo L e um campo de spinors n^A.

Definição 4.0.16. O Espaço de Minkowski complexificado, denotado por $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$, é o espaço $\mathbb{C}^4$ munido do tensor complexo

$$g_{\mathbb{C}}(z, w) = z_1 w_1 + z_2 w_2 + z_3 w_3 - z_4 w_4,$$

com $z, w \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}$.

As definições relacionadas com a norma de Lorentz são estendidos para o caso em $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$, em particular, a de um vetor nulo.

Um referencial móvel ortonormal $\{e_a\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é formado por quatro campos vetoriais em $\mathcal{M}$ tal que para cada $v \in U$, $\eta_{ab} = g(e_a(v), e_b(v))$ é dada por

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Devido a Penrose e Newman, existe uma "boa escolha" de espaço para estudar campos nulos em $\mathcal{M}$. Este espaço é chamado de *tetrad nulo* e é definido a seguir

Definição 4.0.17. Um *tetrad nulo* é uma seção do fibrado tangente de $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$, denotado por $\{l, n, m, \bar{m}\}$ formado por dois vetores nulos reais, l e n, e por um vetor nulo complexo m e o seu conjugado $\bar{m}$. Além disso, pedimos que

$$g_{\mathbb{C}}(l, n) = -1 \tag{4.0.2}$$

$$g_{\mathbb{C}}(m, \bar{m}) = 1. \tag{4.0.3}$$

Um tetrad nulo está relacionado com um referencial móvel em $\mathcal{M}$, $\{e_a\}$, pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 - e_4), \\ m &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + ie_2), \\ \bar{m} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - ie_2), \\ n &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 + e_4). \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \sqrt{2}Re(m), \\
e_2 &= \sqrt{2}Im(m), \\
e_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(l-n), \\
e_4 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}(l+n),
\end{aligned}
$$

Por causa da relação biunívoca entre o tetrad nulo e referencial móvel ortonormal, podemos definir um operador diferencial linear associado a base do tetrad nulo, isto é, se a derivada parcial na direção e_1 é $\partial_{e_1} = \partial_1$, então, podemos definir a derivada parcial na direção l como sendo $\partial_l = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_{e_3} - \partial_{e_4})$ e analogamente para os outros casos. Notemos que esta definição está de acordo com o operador definido anteriormente para campos eletromagnéticos em (3.2.5) .

Observemos que dado um campo nulo L, podemos fazer com que $l(v) = L(v)$, isto é, que o campo L seja um dos campos nulos do tetrad nulo. O objetivo agora é juntar essas definições com o campo spinor.

Como $\mathcal{B} = \mathbb{C}^2$ possui dimensão 4 sobre $\mathbb{R}$, podemos definir campos de spin frames $\{o^A(v), i^A(v)\}$, onde $v \in U$. Pedimos que $\{o^A(v), i^A(v)\}$ satisfaça algumas condições: primeiramente, que $\epsilon_{AB}o^Ai^B = 1$, e consequentemente sejam linearmente independentes; exigimos também uma condição a mais sobre i^A, que será equivalente a ele ser transportado paralelamente ao longo das geodésicas geradas por l. Chamaremos estes campos $\{o^A(v), i^A(v)\}$ como um *dyad* sobre $U \subset \mathcal{M}$.

Definição 4.0.18. Chamaremos de *dyad* como os pares de campos spinors $\{o^A, i^A\}$ tal que $o_Ai^A = \epsilon_{AB}o^Ai^B = 1$ e $l^b\partial_b i^A = 0$ para $A = 0, 1$.

Podemos relacionar cada tetrad nulo com um dyad e vice e versa. Seja $\{l(v), n(v), m(v), \bar{m}(v)\}$ um tetrad nulo. Então $l(v)$ é um vetor nulo e portanto podemos definir um spinor relacionado com $l(v)$ para todo $v \in U$. Definimos então $o^A(v)$ como sendo o spinor equivalente a l, satisfazendo as equações em cada coordenada dada por

$$l^a = \sigma^a_{AX'}o^A\bar{o}^{X'},$$

onde escrevemos a relação como $l \leftrightarrow o^A(v)$. Analogamente, podemos definir um spinor i^A satisfazendo as equações

$$
\begin{aligned}
n^a &= \sigma^a_{AX'}i^A\bar{i}^{X'}, \\
m^a &= \sigma^a_{AX'}o^A\bar{i}^{X'}, \\
\bar{m}^a &= \sigma^a_{AX'}\bar{o}^{X'}i^A.
\end{aligned}
$$

A mesma relação pode ser usada para que dado um dyad possamos definir um tetrad nulo.

Uma observação importante é que, por conveniência, às vezes interpretaremos cada campo de spinor $n^A(v)$ como uma função de $\{u, \zeta, \bar{\zeta}, v\}$ ao invés de $\{x, y, z, t\}$, onde cada incógnita $\{u, \zeta, \bar{\zeta}, v\}$ é dada por

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(z-t), \quad \zeta = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(x+iy), \tag{4.0.4}$$
$$\bar{\zeta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-iy), \quad \upsilon = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}(z+t). \tag{4.0.5}$$

Assim, nessas coordenadas, $n^A(\upsilon) = n^A(u, \zeta, \bar{\zeta}, \upsilon)$ e portanto, podemos definir o operador diferencial nos campos spinors.

Definição 4.0.19. O operador $\nabla^{AX'}$ nos campos spinors é dado por

$$\begin{aligned} \nabla^{11'} &= \partial_u, \\ \nabla^{00'} &= \partial_\upsilon, \\ \nabla^{10'} &= \partial_\zeta, \\ \nabla^{01'} &= \partial_{\bar{\zeta}}. \end{aligned}$$

O que coincide com a definição dada no caso dos campos eletromagnéticos (3.2.5) e consequentemente com a do tetrad nulo.

Vamos agora definir a noção de "*shear-free*" para uma congruência de geodésicas nulas. Seja γ uma geodésica de uma congruência de geodésicas nulas e considere $l = \gamma'$ o campo tangente a γ. Escolha um referencial ortonormal paralelo ao longo de γ, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, de forma que $l = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 - e_4)$ e $g(e_1, l) = 0$ e $g(e_2, l) = 0$. Chamamos o espaço gerado por e_1, e_2 de *Screen Space*.

Considere agora um campo de Jacobi J ao longo de γ que esteja contido no Screen Space. Associado ao referencial móvel $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, considere o tetrad nulo $\{l, m, \bar{m}, n\}$. O plano gerado por e_1, e_2 pode ser escrito em termos de m e $\bar{m}$ e como estamos supondo que o campo de Jacobi J está nesse plano, escreveremos

$$J^a = \bar{z}m^a + z\bar{m}^a, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{4.0.6}$$

Como o campo de Jacobi está naturalmente associado a uma variação ([4], pg 95) e pelo chamado Lema de Simetria ([4], pg 59) segue que

$$l^b \partial_b J^a = J^b \partial_b l^a. \tag{4.0.7}$$

Substituindo a equação acima (4.0.6) em (4.0.7) obtemos que

$$\begin{aligned} l^b \partial_b J^a &= J^b \partial_b l^a \\ \therefore l^b \partial_b(\bar{z}m^a + z\bar{m}^a) &= (\bar{z}m^b + z\bar{m}^b)\partial_b l^a \\ \therefore m^a l^b \partial_b \bar{z} + \bar{m}^a l^b \partial_b z &= \bar{z}m^b \partial_b l^a + z\bar{m}^b \partial_b l^a \end{aligned}$$

Multiplicando os dois lados por m_a, relembrando que m^a é nulo e por (4.0.3) $m_a\bar{m}^a = 1$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow m_a(m^a l^b \partial_b \bar{z} + \bar{m}^a l^b \partial_b z) &= m_a(\bar{z} m^b \partial_b l^a + z\bar{m}^b \partial_b l^a) \\
\Leftrightarrow (1) l^b \partial_b z &= \bar{z} m_a m^b \partial_b l^a + z m_a \bar{m}^b \partial_b l^a \\
\Leftrightarrow l^b \partial_b z &= \sigma \bar{z} + \rho z,
\end{aligned}$$

onde

$$\sigma = m_a m^b \partial_b l^a$$
$$\rho = m_a \bar{m}^b \partial_b l^a.$$

Em σ, podemos subir e descer o índice a. Isso é feito da mesma maneira que em $\mathcal{M}$, porém usando a matriz $\eta_{\mathbb{C}}^{\alpha a}$, onde $\eta_{\mathbb{C}}^{\alpha a}$ é a matriz relacionada com o tensor $g_{\mathbb{C}}$ aplicada no tetrad nulo. Assim, $l^\alpha = \eta_{\mathbb{C}}^{\alpha a} l_a$, e teremos que

$$\begin{aligned}
\sigma &= m_\alpha m^b \partial_b l^\alpha \\
&= m_\alpha m^b \partial_b \eta^{\alpha a} l_a \\
&= \eta^{\alpha a} m_a m^b \partial_b l_a \\
&= m^a m^b \partial_b l_a
\end{aligned}$$

E isto motiva a seguinte definição

Definição 4.0.20. Seja γ uma geodésica em $U \subset \mathcal{M}$ e $\{l, m, \bar{m}, n\}$ seu tetrad nulo associado. Chamaremos de *shear*, denotado por σ, como sendo o valor

$$\sigma = m^a m^b \partial_b l_a \tag{4.0.8}$$

Definição 4.0.21. Dizemos que γ é *shear-free* se em γ é satisfeito a equação $\sigma = 0$, isto é

$$m^a m^b \partial_b l_a = 0 \tag{4.0.9}$$

Uma representação geométrica do que vêm a ser shear-free pode ser encontrada em ([9], pg 46-48). Podemos então definir uma congruência nula de geodésicas shear-free.

Definição 4.0.22. Uma *congruência nula de geodésicas shear-free* é um campo vetorial nulo suave L em $U \subset \mathcal{M}$ tal que suas curvas integrais são pré-geodésicas que cobrem U, e os vetores $L(v)$ em cada ponto $v \in U$ satisfazem as equações de serem shear-free.

Finalmente estamos aptos a criar a relação entre congruências de geodésicas nulas shear-free e spinors. Queremos encontrar uma condição necessária e suficiente para representar a congruência nula de geodésicas shear-free como uma equação "simples" na forma de spinors e finalmente juntarmos com as equações em forma de spinors para campos eletromagnéticos dada pelo Teorema 3.2.11 e assim concluirmos o Teorema de Robinson.

Voltamos agora para o caso da congruência nula por geodésicas shear-free. Dada uma congruência nula, $L(v)$, podemos então definir o primeiro termo do tetrad nulo como $l(v) = L(v)$. Isso define um campo spinor $n^A(v)$. Escolhemos um spinor i^A de tal forma que $\{n^A, i^A\}$ seja um dyad. A partir desse dyad, podemos definir um tetrad nulo $\{l, n, m, \bar{m}\}$. Dessa forma, temos que

$$L^a(v) = l^a = \sigma^a_{AX'} n^A \bar{n}^{X'},$$

onde relembramos que $\sigma^a_{AX'}$ são iguais a

$$\begin{aligned}
{\sigma^1}_{AX'} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
{\sigma^2}_{AX'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \\
{\sigma^3}_{AX'} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\
{\sigma^4}_{AX'} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

A condição para que $L(v)$ seja pré-geodésica é equivalente a $L^b \partial_b L^a$ ser paralelo a L^a para todo $v \in U \subset \mathcal{M}$. Segue então uma pequena proposição:

Proposição 4.0.23. O operador diferencial $l^b \partial_b = L^b \partial_b$ é equivalente em campos spinors a $n_B \bar{n}_{Y'} \nabla^{BY'}$.

Demonstração. Notemos que $L^a(v) = l^a = \sigma^a_{AX'} n^A \bar{n}^{X'}$. Segue da Definição 2.3.4 e da Definição 3.2.9 que

$$\begin{gathered}
{\sigma^a}_{AX'} = \eta^{ab} ({\sigma_b}^{BY'} \epsilon_{BA}) \bar{\epsilon}_{Y'X'} \\
\nabla^{AX'} = {\sigma_a}^{AX'} (\eta^{a\alpha} \partial_\alpha)
\end{gathered}$$

Portanto, segue diretamente do cálculo que

$$\begin{aligned}
L^a(v)\partial_a &= \sigma^a_{AX'} n^A \bar{n}^{X'} \partial_a \\
&= (\eta^{ab} ({\sigma_b}^{BY'} \epsilon_{BA}) \bar{\epsilon}_{Y'X'}) n^A \bar{n}^{X'} \partial_a \\
&= n^A \bar{n}^{X'} ({\sigma_b}^{BY'} \epsilon_{BA} \bar{\epsilon}_{Y'X'}) \eta^{ab} \partial_a \\
&= n^A \bar{n}^{X'} (\epsilon_{BA} \bar{\epsilon}_{Y'X'}) {\sigma_b}^{BY'} \eta^{ab} \partial_a \\
&= n^A \bar{n}^{X'} (\epsilon_{BA} \bar{\epsilon}_{Y'X'}) \nabla^{BY'} \\
&= n^A \bar{n}^{X'} \nabla^{BY'} (\epsilon_{BA} \bar{\epsilon}_{Y'X'}) \\
&= n^A \bar{n}^{X'} \nabla_{AX'}.
\end{aligned}$$

Porém $\epsilon^{AB} \epsilon_{AB} = \epsilon^2_{AB} = -\delta^A_B$, e assim temos que $n^B \bar{n}^{Y'} \nabla_{BY'} = (-1)^2 n_B \bar{n}_{Y'} \nabla^{BY'}$.

□

Proposição 4.0.24. A equação da pré-geodésica para campos spinors é equivalente a exigir que $n_B\bar{n}_{Y'}\nabla^{BY'}n^A$ seja paralelo a n^A, ou seja, que

$$n_An_B\bar{n}_{Y'}\nabla^{BY'}n^A = 0.$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} l^b(v)\partial_b l^a &= n_B\bar{n}_{Y'}\nabla_{BY'}(\sigma^a_{AX'}n^A\bar{n}^{X'}) \\ &= \sigma^a_{AX'}n_B\bar{n}_{Y'}\nabla_{BY'}(n^A\bar{n}^{X'}) \\ &= \sigma^a_{AX'}(n_B\bar{n}_{Y'}n^A\nabla_{BY'}\bar{n}^{X'} + n_B\bar{n}_{Y'}\bar{n}^{X'}\nabla_{BY'}n^A). \end{aligned}$$

Se queremos que $n_B\bar{n}_{Y'}\nabla_{BY'}(n^A\bar{n}^{X'})$ seja paralelo a n^A, queremos que $n_B\bar{n}_{Y'}\nabla_{BY'}(n^A\bar{n}^{X'}) = \lambda(v)n^A$, onde $\lambda(v)$ é uma função complexa diferenciável em $\mathcal{M}$. Por causa do Lema 2.1.2, itens a e b, uma condição necessária e suficiente para dois spinors ξ^A e n^A sejam linearmente dependentes é que $\xi_An^A = 0$. Logo, pedimos que

$$\begin{aligned} n_A\left[\sigma^a_{AX'}(n_B\bar{n}_{Y'}n^A\nabla_{BY'}\bar{n}^{X'} + n_B\bar{n}_{Y'}\bar{n}^{X'}\nabla_{BY'}n^A)\right] &= 0 \\ \Leftrightarrow n_A(n_B\bar{n}_{Y'}n^A\nabla_{BY'}\bar{n}^{X'} + n_B\bar{n}_{Y'}\bar{n}^{X'}\nabla_{BY'}n^A) &= 0 \\ \Leftrightarrow n_An_B\bar{n}_{Y'}\bar{n}^{X'}\nabla_{BY'}n^A &= 0 \\ \Leftrightarrow \bar{n}^{X'}(n_An_B\bar{n}_{Y'}\nabla_{BY'}n^A) &= 0 \\ \Leftrightarrow (n_An_B\bar{n}_{Y'}\nabla_{BY'}n^A) &= 0. \end{aligned}$$

Onde na terceira linha usamos que $n_An^A = 0$ e na quarta comprimimos $\bar{n}^{X'}$, isto é, multiplicamos por um spinor $\bar{\xi}_{X'}$ dos dois lados tal que $\xi_{X'}\bar{n}^{X'} = 1$, como feito no Lema 2.1.2. □

Analogamente, obtemos que a condição de ser shear-free é equivalente a

$$\sigma = n_An_B\bar{i}_{Y'}\nabla^{BY'}n^A = 0.$$

Como $\{n^A, i^A\}$ formam um dyad, então $\{\bar{n}_{Y'}, \bar{i}_{Y'}\}$ formam um dyad em $\mathcal{B}'^*$. Assim, a mesma curva será parte de uma congruência nula de geodésicas shear-free se, e somente se, ela satisfizer as equações de ser geodésica e shear-free ao mesmo tempo, ou seja,

$$\begin{cases} \bar{i}_{Y'}(n_An_B\nabla^{BY'}n^A) = 0 \\ \bar{n}_{Y'}(n_An_B\nabla^{BY'}n^A) = 0. \end{cases}$$

Porém, como $\{\bar{n}_{Y'}, \bar{i}_{Y'}\}$ são linearmente independente, a única maneira desse sistema ser satisfeito é se $n_An_B\nabla^{BY'}n^A = 0$. Assim, uma congruência nula n^A será de geodésicas e shear-free se satisfizer o seguinte sistema de equações:

$$n_An_B\nabla^{BY'}n^A = 0, \quad Y' = 0', 1'. \tag{4.0.10}$$

4.0.1 Exemplo

Um exemplo é o seguinte: considere o campo spinor constante ao longo de todo $v \in \mathcal{M}$ dado por $n^A(v) = (0, -1)$. Para que $\{n^A, i^A\}$ forme um *dyad*, podemos escolher $i^A(v) = (1, 0)$. Usando o fato de que $l^a = \sigma^a_{AX'} n^A \bar{n}^{X'}$ obtemos que:

$$\begin{aligned} l^1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(0(n^1\bar{n}^1) + 1(n^1\bar{n}^0) + 1(n^0\bar{n}^1) + 0(n^0\bar{n}^0)) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(0 + 1(0)(-1) + 1(-1)(0) + 0(-1)(-1)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos que $l^2 = 0,\ l^3 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ l^4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Portanto

$$l = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

define em $\mathcal{M}$ uma campo nulo, onde suas linhas integrais são geodésicas nulas shear-free. Isso segue imediatamente do fato que, por ser constante, $\nabla^{BY'} n^A = 0$. Além disso, as linhas integrais são retas que possuem l como vetor tangente em cada ponto, o que são geodésicas shear-free. Como todas as retas são paralelas, não existe um ponto $v \in \mathcal{M}$ que possui duas retas dessa família e todo $\mathcal{M}$ é coberto por essas retas. Logo l é realmente uma congruência nula shear-free.

Completando o *tetrad* nulo, obtemos que

$$\begin{aligned} n &= \left(0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ m &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \\ \bar{m} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}, 0, 0\right). \end{aligned}$$

Usando (4.0.4), obtemos que a relação que define o referencial móvel $\{e^a(v)\}$ é dada por

$$\begin{aligned} e_1(v) &= \sqrt{2}Re(m), \\ e_2(v) &= \sqrt{2}Im(m), \\ e_3(v) &= \frac{\sqrt{2}}{2}(l - n), \\ e_4(v) &= -\frac{\sqrt{2}}{2}(l + n), \end{aligned}$$

e portanto,

$$
\begin{aligned}
e_1(v) &= (1,0,0,0),\\
e_2(v) &= (0,1,0,0),\\
e_3(v) &= (0,0,1,0),\\
e_4(v) &= (0,0,0,1).
\end{aligned}
$$

Uma observação: uma definição formal do que vêm a ser um campo spinor sobre uma $n-$variedade envolve um formalismo que vai muito além das necessidades deste trabalho. De fato, assim como os campos vetoriais são definidos a partir de uma seção do fibrado vetorial, os campos spinors são formalmente definidos como uma seção do fibrado spinor (um fibrado vetorial complexo sobre a $n-$variedade relacionado com o fibrado principal tal que o levantamento do Mapa Spin sobre $SO(n)$ é um recobrimento duplo). Porém, nossa variedade é o $\mathbb{R}^4$, que é flat e admite uma paralelização, e essa definição coincide com a definição feita neste trabalho.

Capítulo 5

Sobre a relação entre Campos Eletromagnéticos Nulos e Congruências de Geodésicas Shear-free

Neste capítulo, iremos mostrar que podemos associar um campo eletromagnético nulo a uma congruência nula por geodésicas shear-free e que, reciprocamente, dada uma congruência nula por geodésicas shear-free, existe uma família de campos eletromagnéticos nulos associados. Na segunda seção, provaremos, através de uma generalização do teorema de Frobenius, que o sistema sempre possui solução e assim, teoricamente, concluímos que toda congruência nula de geodésicas shear-free está associada a uma família de campos eletromagnéticos nulos.

Existe uma ambiguidade na notação de Penrose-Newman. O símbolo n^A por vezes denota um campo spinor e outras vezes denota os componentes de um campo spinor. Portanto, cuidado deve ser tomado sobre o que representa o símbolo n^A.Além disso, falaremos que n^A é uma congruência nula por geodésicas shear-free se o campo spinor n^A define uma congruência nula por geodésicas shear-free.

Devido aos cálculos e a necessidade de usar diversas variáveis como índices, a notação sofrerá algumas mudanças. Primeiramente, a distinção entre os índices dos espaços $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ será feita unicamente pelo símbolo $'$. Isto é, até agora, usamos índices $A, B, C, \cdots$ para spinors em $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{B}^*$ e $X', Y', \cdots$ para os espaços $\mathcal{B}'$, ou $\mathcal{B}'^*$. Porém, agora poderemos usar A' como índice para indicar um spinor em $\mathcal{B}'$ ou algo relacionado a $\mathcal{B}'$. Por exemplo, podemos denotar $n^{X'}$ por $n^{A'}$, $\nabla^{AX'}$ por $\nabla^{AA'}$, ou $\nabla^{JJ'}$, onde a "linha" é que faz a distinção entre os espaços. Outra observação importante é que a partir desta seção, exceto expresso contrário, n^A será um campo spinor e, num abuso de notação, o chamaremos somente de spinor. Nesta seção, um (campo) spinor n^A é, para cada escolha de $A = 0, 1$, interpretada como uma função complexa diferenciável do espaço de Minkowski, isto é $n^1 : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{C}$ e $n^0 : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{C}$.

Aproveitamos para relemebrar as relações entre n^A e n_A, isto é, um (campo) spinor e o seu dual:

$$\begin{cases} n^1 = -n_0, \\ n^0 = n_1. \end{cases}$$

Considere um spinor simétrico ϕ_{AB} que representa um campo eletromagnético nulo F. Pela Proposição 3.2.8 , segue que $\phi_{AB}\phi^{AB} = 0$ e portanto existe um autospinor n^A tal que $\phi_{AB}n^A = 0$.

Lema 5.0.25. Se ϕ_{AB} é um spinor simétrico que representa um campo eletromagnético nulo e n^A seu autospinor, então a condição $\phi_{AB}n^A = 0$ é equivalente ao sistema

$$\phi_{JB}n_C - \phi_{BC}n_J = 0. \tag{5.0.1}$$

Demonstração. Primeiro, notemos que

$$\begin{aligned}
\phi_{AB}n^B &= \phi_{AB}\epsilon^{BJ}n_J & (5.0.2)\\
&= \phi_{A0}\epsilon^{01}n_1 + \phi_{A1}\epsilon^{10}n_0 & (5.0.3)\\
&= \phi_{0A}n_1 - \phi_{A1}n_0 & (5.0.4)\\
& & (5.0.5)
\end{aligned}$$

Notemos que os outros casos, como se $C = J$, são zero por simetria de ϕ_{AB}. Segue então que se $\phi_{AB}n^B = 0 \Leftrightarrow \phi_{JB}n_C - \phi_{BC}n_J = 0$.

□

Proposição 5.0.26. Seja ϕ_{AB} um spinor simétrico não nulo e n^B seu autospinor nulo associado. Se ϕ_{AB} satisfaz $\nabla^{AA'}\phi_{AB} = 0$, então $n_B n_J \nabla^{JJ'} n^B = 0$.

Demonstração. Por hipótese, temos que

$$\phi_{AB}n^B = 0 \tag{5.0.6}$$

Segue do Lema 5.0.25 que, diferenciando a equação acima (5.0.6) por $\nabla^{JJ'}$, usando a regra do produto e posteriormente multiplicando os dois lados da igualdade por n_J,obtemos que:

$$\begin{aligned}
\phi_{AB}n^B &= 0 & (5.0.7)\\
(\nabla^{JJ'}\phi_{AB})n^B + \phi_{AB}(\nabla^{JJ'}n^B) &= 0 & (5.0.8)\\
n_J(\nabla^{JJ'}\phi_{AB})n^B + n_J\phi_{AB}(\nabla^{JJ'}n^B) &= 0 & (5.0.9)\\
(n_J\nabla^{JJ'}\phi_{AB})n^B + \phi_{AB}n_J\nabla^{JJ'}n^B &= 0. & (5.0.10)
\end{aligned}$$

Analogamente, diferenciando (5.0.1) por $\nabla^{JJ'}$:

$$(\nabla^{JJ'}\phi_{JB})n_C + \phi_{JB}\nabla^{JJ'}n_C - (\nabla^{JJ'}\phi_{BC})n_J - \phi_{BC}\nabla^{JJ'}n_J = 0 \tag{5.0.11}$$

Como por hipótese $\nabla^{JJ'}\phi_{JB} = 0$, a equação de (5.0.11) é igual a:

$$\phi_{JB}\nabla^{JJ'}n_C - \phi_{BC}\nabla^{JJ'}n_J = (\nabla^{JJ'}\phi_{BC})n_J \tag{5.0.12}$$

Usando o fato que $\phi_{BC} = \phi_{CB}$ e que por hipótese $\phi_{CB}n^B = 0$ e $\phi_{JB}n^B = 0$, obtemos ao multiplicar (5.0.12) por n^B que

$$\begin{aligned}
\phi_{JB}n^B\nabla^{JJ'}n_C - \phi_{CB}n^B\nabla^{JJ'}n_J &= n^B n_J(\nabla^{JJ'}\phi_{BC}) && (5.0.13)\\
0 &= n^B n_J(\nabla^{JJ'}\phi_{BC}) && (5.0.14)\\
0 &= (n_J(\nabla^{JJ'}\phi_{BC}))n^B. && (5.0.15)
\end{aligned}$$

Renomeando C por A e novamente usando a simetria de ϕ_{BC}, obtemos que

$$(n_J(\nabla^{JJ'}\phi_{AB}))n^B = 0. \tag{5.0.16}$$

Substituindo essa informação de (5.0.16) na primeira equação (5.0.10), obtemos então que

$$\phi_{AB}n_J\nabla^{JJ'}n^B = 0.$$

Portanto, $n_J\nabla^{JJ'}n^B$ é um autospinor de ϕ_{AB} que possui 0 como autovalor e portanto é paralelo a n^B, isto é, $n_J\nabla^{JJ'}n^B = \lambda n^B$, para alguma função complexa diferenciável $\lambda : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{C}$. Isto implica que, como $n_B n^B = 0$,

$$n_B(n_J\nabla^{JJ'}n^B) = 0.$$

$\square$

Definição 5.0.27. Dizemos que um spinor n^A é uma congruência (de geodésicas) nula shear-free se n_A satisfaz

$$n_B n_J\nabla^{JJ'}n^B = 0 \ \text{ para } \ J' = 0', 1'. \tag{5.0.17}$$

Vemos que esta definição é a mesma que (4.0.10). Uma consequência imediata da proposição (5.0.26) é que um spinor n^A tal que $\phi_{AB}n^B = 0$ é uma congruência nula shear-free se ϕ_{AB} for um campo eletromagnético nulo. Esta é a primeira relação entre campos eletromagnéticos nulos e congruência de geodésicas nulas shear-free, isto é, *se um spinor simétrico ϕ_{AB} define um campo eletromagnético nulo, então seu autospinor é uma congruência de geodésicas nulas shear-free.* Para obtermos uma recíproca precisaremos de alguns lemas importantes.

Lema 5.0.28. Seja n^A um spinor. Se $n_J\nabla^{JJ'}n^B$ é paralelo a n^B, então existe um spinor $\zeta^{J'}$ tal que $n_J\nabla^{JJ'}n^B = \zeta^{J'}n^B$. Chamaremos este argumento de *argumento do paralelismo.*

Demonstração. Para $J' = 1$, temos que existe uma função complexa $\zeta^{1'}$ tal que

$$n_J\nabla^{J1'}n^B = \zeta^{1'}n^B$$

Pelo Lema 2.1.2, existe um spinor ξ^A tal que $\xi_B n^B = 1$. Defina $\zeta^{1'}$ como

$$\zeta^{1'} = \xi_B n_J\nabla^{J1'}n^B$$

Analogamente, definimos

$$\zeta^{0'} = \xi_B n_J \nabla^{J0'} n^B$$

Assim, fica definido o spinor $\zeta^{J'} = \begin{bmatrix} \zeta^{1'} \\ \zeta^{0'} \end{bmatrix}$ $\square$

Uma observação: a ferramenta algébrica usada na construção do *argumento do paralelismo* motiva a seguinte terminologia: seja n^A um spinor e ξ^A o spinor que satisfaz $n^A \xi_A = 1$. Dada uma equação que depende de n^A, chamaremos de *comprimir um spinor* n^A como multiplicar ambos os lados da igualdade pelo spinor ξ_A.

No Lema 5.0.28 comprimimos o spinor n^B a fim de isolar $\zeta^{1'}$. Porém, *muito* cuidado deve-se ter quando se comprime um spinor para que a notação de somatório não seja prejudicada. Voltemos nosso foco para a construção de campos eletromagnéticos. Podemos também construir campos eletromagnéticos nulos a partir de congruências (de geodésicas) nulas shear-free como explicado a seguir:

Proposição 5.0.29. Seja n^A um congruência nula shear-free. Se um spinor simétrico ϕ_{AB} satisfaz $\phi_{AB} n^B = 0$, então $(\nabla^{AA'} \phi_{AB}) n^B = 0$.

Demonstração. Aplicando o operador diferencial $\nabla^{AA'}$ em $\phi_{BC} n^B = 0$, temos que:

$$(\nabla^{AA'} \phi_{BC}) n^B + \phi_{BC} (\nabla^{AA'} n^B) = 0.$$

Multiplicando os dois lados por n_A obtemos que:

$$(n_A \nabla^{AA'} \phi_{BC}) n^B + \phi_{BC} n_A (\nabla^{AA'} n^B) = 0. \tag{5.0.18}$$

Como demonstrado anteriormente no Lema 5.0.25, $\phi_{AB} n^B = 0$ implica que

$$\phi_{AB} n_C - \phi_{BC} n_A = 0 \tag{5.0.19}$$

Diferenciando a equação (5.0.19) com o operador $\nabla^{AA'}$, multiplicando ambos os lados por n^B e usando o fato de que $\phi_{AB} n^B = 0$, como feito anteriormente, temos:

$$
\begin{aligned}
& \phi_{AB} n_C - \phi_{BC} n_A = 0 && (5.0.20)\\
\Leftrightarrow\quad & n_C \nabla^{AA'} \phi_{AB} + \phi_{AB} \nabla^{AA'} n_C - n_A \nabla^{AA'} \phi_{BC} - \phi_{BC} \nabla^{AA'} n_A = 0 && (5.0.21)\\
\Leftrightarrow\quad & n^B n_C \nabla^{AA'} \phi_{AB} + \phi_{AB} n^B \nabla^{AA'} n_C - n_A n^B \nabla^{AA'} \phi_{BC} - \phi_{BC} n^B \nabla^{AA'} n_A = 0 && (5.0.22)\\
\Leftrightarrow\quad & n_A n^B (\nabla^{AA'} \phi_{BC}) = n^B n_C (\nabla^{AA'} \phi_{AB}) && (5.0.23)\\
\Leftrightarrow\quad & n_A (\nabla^{AA'} \phi_{BC}) n^B = n^B (\nabla^{AA'} \phi_{AB}) n_C. && (5.0.24)
\end{aligned}
$$

Usando a igualdade acima (5.0.24), segue de (5.0.18) que

$$n^B (\nabla^{AA'} \phi_{AB}) n_C = -\phi_{BC} n_A (\nabla^{AA'} n^B). \tag{5.0.25}$$

Pelo argumento do paralelismo, Lema 5.0.28, a natureza shear-free de n^A implica na existência de um campo de spinor $\zeta^{A'}$ tal que

$$n_A(\nabla^{AA'}n^B) = \zeta^{A'}n^B, \tag{5.0.26}$$

Como $\phi_{BC}n^B = 0$, (5.0.25) é equivalente a

$$n^B(\nabla^{AA'}\phi_{AB})n_C = -\phi_{BC}n^B\zeta^{A'} = 0.$$

Logo, comprimindo n_C (pois não está em somatório), temos que

$$n^B(\nabla^{AA'}\phi_{AB}) = 0.$$

□

Seja ϕ_{AB} o mesmo que o definido na Proposição 5.0.29 acima e defina η_A como o campo de spinor tal que $\phi_{AB} = \eta_A n_B$. A natureza simétrica de ϕ_{AB} implica que $0 = \phi_{AB} - \phi_{BA} = \eta_A n_B - \eta_B n_A$ e portanto, quando $B \neq A$, temos que $0 = \eta_A n_B - \eta_B n_A = \eta_A n^A$.

Então, existe uma função escalar κ tal que $\eta_A = \kappa n_A$. Temos então que $\phi_{AB} = \kappa n_A n_B$. Como $n^B(\nabla^{AA'}\phi_{AB}) = 0$, de maneira similar ao argumento do paralelismo, existe um campo de spinor $\xi^{A'}$ tal que $\nabla^{AA'}\phi_{AB} = \xi^{A'}n_B$. Então, $\xi^{A'}$ pode ser representada em termos de κ, n_A e $\zeta^{A'}$ (definida implicitamente em (5.0.26) pela equação $n_A(\nabla^{AA'}n^B) = \zeta^{A'}n^B$) da seguinte maneira:

Diferenciando $\phi_{AB} = \kappa n_A n_B$, obtemos que:

$$\begin{aligned}
\nabla^{AA'}\phi_{AB} &= (n_A\nabla^{AA'}\kappa)n_B + \kappa(n_A\nabla^{AA'}n_B + n_B\nabla^{AA'}n_A) \\
&= \{n_A\nabla^{AA'}\kappa + (\nabla^{AA'}n_A + \zeta^{A'})\kappa\}n_B,
\end{aligned}$$

onde descemos B nos dois lados da equação de $\zeta^{A'}$. Pela definição de $\xi^{A'}$ como $\xi^{A'}n_B = \nabla^{AA'}\phi_{AB}$, temos que:

$$\begin{aligned}
\nabla^{AA'}\phi_{AB} &= \{n_A\nabla^{AA'}\kappa + (\nabla^{AA'}n_A + \zeta^{A'})\kappa\}n_B \\
\xi^{A'}n_B &= \{n_A\nabla^{AA'}\kappa + (\nabla^{AA'}n_A + \zeta^{A'})\kappa\}n_B.
\end{aligned}$$

Comprimindo n_B dos dois lados, obtemos que

$$\xi^{A'} = n_A\nabla^{AA'}\kappa + (\nabla^{AA'}n_A + \zeta^{A'})\kappa.$$

Logo, se a função κ satisfaz

$$n_A\nabla^{AA'}\kappa + (\nabla^{AA'}n_A + \zeta^{A'})\kappa = 0.$$

teremos que $\xi^{A'} = 0$ e, consequentemente, $\nabla^{AA'}\phi_{AB} = 0$. Portanto, $\phi_{AB} = \kappa n_A n_B$ será um campo eletromagnético. Resumindo, temos o seguinte teorema

Teorema 5.0.30 (Robinson)**.** Seja n^A um campo spinor, tal que suas funções n^1 e n^0 são funções complexas analíticas, que define uma congruência de geodésicas nulas shear-free em $U \subset \mathcal{M}$ e $\zeta^{A'}$ o spinor definido como $n_A \nabla^{AA'} n^B = \zeta^{A'} n^B$. Seja $\kappa : U \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa, $\kappa(v) = \kappa(u, \zeta, \bar{\zeta}, v),\ v \in U$, onde $\{u, \zeta, \bar{\zeta}, v\}$ são definidos como em (4.0.5), isto é,

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(z - t), \quad \zeta = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(x + iy),$$
$$\bar{\zeta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy), \quad v = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}(z + t),$$

então, se $\kappa(v)$ satisfaz

$$n_A \nabla^{AA'} \kappa + (\nabla^{AA'} n_A + \zeta^{A'})\kappa = 0 \tag{5.0.27}$$

temos que $\phi_{AB} = \kappa n_A n_B$ é um campo eletromagnético. Além disso, se ϕ_{AB} é o spinor simétrico que define um campo eletromagnético nulo, então seu autospinor associado n^A define uma congruência nula por geodésicas shear-free.

A equação (5.0.27) acima é um sistema cuja existência de solução não é óbvia. Mostraremos agora que tal sistema possui sempre solução, assumindo que os componentes de n^A são funções analíticas em $\{u, \zeta, \bar{\zeta}, v\}$ e assim concluímos o Teorema de Robinson.

5.1 Existência de soluções para (5.0.27)

O objetivo desta seção é demonstrar que o sistema (5.0.27) sempre possui solução. Para isso, iremos usar ferramentas de soluções de sistema de EDP's quasilineares para obter um sistema equivalente. Depois, usaremos o famoso Teorema de Fröbenius para obter uma condição suficiente para a existência de soluções para o sistema equivalente e assim demonstrar que o sistema (5.0.27) sempre possui solução.

Queremos resolver o sistema (5.0.27) para κ. Para isso precisaremos de algumas ferramentas de resolução de equações diferenciais. Como a teoria por trás destes métodos foge um pouco do objetivo deste trabalho, iremos citar a teoria com suas respectivas referências. Em primeiro lugar, notemos que o sistema (5.0.27) é um sistema de equações diferenciais quasi-lineares. Além disso, procuraremos uma solução para κ dependendo de $\{u, \zeta, \bar{\zeta}, v\}$ vendo cada uma dessas variáveis como variáveis complexas independentes. Se obtivermos uma solução (num aberto de $\mathbb{C}^4$), podemos restringir para quando u e v são reais e $\bar{\zeta}$ sendo o conjugado de ζ.

Podemos, como explicado no livro de Courant e Hilbert ([5], pg 31), pensar em κ como uma nova variável independente em $\mathbb{C}$ e dessa maneira obter um novo sistema de equações diferenciais, agora linear, que é equivalente ao sistema quasi-linar (5.0.27). Este novo sistema está definido em $\mathbb{C}^5$, pois dependerá das incógnitas $\{u, \zeta, \bar{\zeta}, v, \kappa\}$. Apesar de ser escrito para o caso real, o teorema usa como hipótese funções analíticas e uma extensão para a teoria complexa existe quando tratarmos de funções complexas analíticas (holomorfas). Assim, o sistema (5.0.27) é equivalente a obtermos uma solução implicitamente dada por uma função $\phi(u, \zeta, \bar{\zeta}, \upsilon, \kappa) = c_i$, onde c_i são constantes, que satisfaz o sistema

$$\left(n_A \nabla^{AA'} - (\nabla^{AA'} n_A + \zeta^{A'}) \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} \right) \phi = 0 \tag{5.1.1}$$

Definimos então os operadores $X^{A'}$ em $\mathbb{C}^5$ por

$$X^{A'} = n_A \nabla^{AA'} - (\nabla^{AA'} n_A + \zeta^{A'}) \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} \quad A' = 0', 1'.$$

Definição 5.1.1. Seja $X_i (i = 1, 2, ..., m)$ operadores diferenciais em $\mathbb{C}^n$, onde $m < n$. Dizemos que o conjunto desses operadores $\{X_i\}_{i=1}^m$ é involutivo, ou um sistema completo, se existem funções λ_{ijk}, para $i, j, k = 1, 2, ..., m$ tal que

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{ijk} X_k$$

onde

$$[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i$$

Existe uma generalização do teorema de Frobenius para funções complexas holomorfas em ([3], pg 14) como enunciado a seguir:

Teorema 5.1.2 (Frobenius)**.** Seja $L_1, \cdots, L_n$ campos vetoriais lineramente independentes holomórfos numa vizinhança $V \subset \mathbb{C}^m$. Suponha que o subfibrado $\mathcal{V}$ de $T\mathbb{C}$ gerado por $L_1, \cdots, L_n$ é involutivo. Então, existe coordenadas holomórfas $w_1, w_2, \cdots, w_m$ tal que, num aberto $U \subset \mathbb{C}^m$, $\mathcal{V}$ é gerado por $\frac{\partial}{\partial w_1}, \frac{\partial}{\partial w_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial w_n}$.

A estratégia para resolver o sistema equivalente (5.1.1) é a seguinte: se provarmos que $\{X^{A'}\}$ é involutivo, teremos, por Frobenius, que existirá um aberto $U \subset \mathbb{C}^5$ e um novo sistema de coordenadas $\{w_1, \cdots, w_5\}$ relacionado de maneira holomorfa a $\{u, \zeta, \bar{\zeta}, \upsilon, \kappa\}$, tal que o plano gerado por $\frac{\partial}{\partial w_1}, \frac{\partial}{\partial w_2}$ será o mesmo que o gerado por $\{X^{1'}, X^{0'}\}$. Podemos, por Frobenius também, construir localmente uma hiper-superfície tal que o seu hiper-plano tangente é o mesmo que o gerado por $\{X^{1'}, X^{0'}, \frac{\partial}{\partial w_3}, \frac{\partial}{\partial w_4}\}$. Esta hiper-superfície define a função $\phi(u, \zeta, \bar{\zeta}, \upsilon, \kappa)$ e que satisfaz o sistema (5.1.1). Podemos, sem perda de generalidade, assumir que $\frac{\partial}{\partial w_5}$ é o campo associado ao vetor normal a hiper-superfície e que $\frac{\partial}{\partial \kappa}$ não pertence ao hiper-plano tangente. Assim como feito no caso de superfícies em $\mathbb{R}^3$, podemos então escrever localmente a hiper-superfície como gráfico da função κ, isto é, a hiper-superfície será, localmente, escrita como $(u, \zeta, \bar{\zeta}, \upsilon, \kappa(u, \zeta, \bar{\zeta}, \upsilon))$ e, por construção, κ está relacionado com ϕ solução do sistema (5.1.1) que é equivalente ao sistema (5.0.27) e, portanto, κ será a solução desejada.

Assim, existirá uma solução κ se o sistema X_i for involutivo.

Teorema 5.1.3. Seja n^A uma congruência nula shear-free e $\zeta^{A'}$ o spinor definido como $n_A \nabla^{AA'} n^B = \zeta^{A'} n^B$. Então o sistema linear de operadores $\{X^{A'}\}_{A'=0',1'}$ definido por

$$X^{A'} = n_A \nabla^{AA'} - (\nabla^{AA'} n_A + \zeta^{A'})\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa}$$

é involutivo.

Demonstração. Sabemos que

$$[X_i, X_i] = 0;$$
$$[X_i, X_j] = -[X_j, X_i].$$

Primeiramente, notemos que κ agora é uma variável independente e que n_A e $\zeta^{A'}$ são funções que não dependem de κ. Como

$$\begin{aligned} X^{0'} &= n_A \nabla^{A0'} - (\nabla^{A0'} n_A + \zeta^{0'})\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} \\ X^{1'} &= n_B \nabla^{B1'} - (\nabla^{B1'} n_B + \zeta^{1'})\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa}. \end{aligned}$$

Logo, calculando os termos $X^{0'} X^{1'}$ e lembrando que as derivadas comutam, temos que

$$\begin{aligned} X^{0'} X^{1'} \;\; = \;\; & n_A(\nabla^{A0'} n_B)\nabla^{B1'} + n_A n_B \nabla^{A0'} \nabla^{B1'} \\ & - n_A \nabla^{A0'} (\nabla^{B1'} n_B + \zeta^{1'})\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} \\ & - n_A (\nabla^{B1'} n_B + \zeta^{1'})\kappa \nabla^{A0'} \frac{\partial}{\partial \kappa} \\ & - (\nabla^{A0'} n_A + \zeta^{0'})\kappa n_B \frac{\partial}{\partial \kappa} \nabla^{B1'} \\ & + (\nabla^{A0'} n_A + \zeta^{0'})\kappa (\nabla^{B1'} n_B + \zeta^{1'}) \frac{\partial}{\partial \kappa} \\ & + (\nabla^{A0'} n_A + \zeta^{0'})(\nabla^{B1'} n_B + \zeta^{1'})\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial \kappa^2}. \end{aligned}$$

Analogamente, temos que

$$\begin{aligned} X^{1'} X^{0'} \;\; = \;\; & n_B(\nabla^{B1'} n_A)\nabla^{A0'} + n_B n_A \nabla^{B1'} \nabla^{A0'} \\ & - n_B \nabla^{B1'} (\nabla^{A0'} n_A + \zeta^{0'})\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} \\ & - n_B (\nabla^{A0'} n_A + \zeta^{0'})\kappa \nabla^{B1'} \frac{\partial}{\partial \kappa} \\ & - (\nabla^{B1'} n_B + \zeta^{1'})\kappa n_A \frac{\partial}{\partial \kappa} \nabla^{A0'} \\ & + (\nabla^{B1'} n_B + \zeta^{1'})\kappa (\nabla^{A0'} n_A + \zeta^{0'}) \frac{\partial}{\partial \kappa} \\ & + (\nabla^{B1'} n_B + \zeta^{1'})(\nabla^{A0'} n_A + \zeta^{0'})\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial \kappa^2}. \end{aligned}$$

Notemos que vários termos são iguais, e portanto, quando calculamos $[X^{0'}, X^{1'}] = X^{0'}X^{1'} - X^{1'}X^{0'}$, obtemos que:

$$\begin{aligned} [X^{0'}, X^{1'}] &= \Big[n_A(\nabla^{A0'}n_B)\nabla^{B1'} - n_B(\nabla^{B1'}n_A)\nabla^{A0'}\Big] \\ &\quad - \left[n_A\nabla^{A0'}(\nabla^{B1'}n_B + \zeta^{1'})\kappa\frac{\partial}{\partial\kappa} - n_B\nabla^{B1'}(\nabla^{A0'}n_A + \zeta^{0'})\kappa\frac{\partial}{\partial\kappa}\right]. \end{aligned}$$

Simplificaremos cada uma das expressões em chaves. Primeiramente, como $n_B\nabla^{BB'}n_A = n_A\zeta^{B'}$, temos que:

$$\begin{aligned} n_A\zeta_{A'}\nabla^{AA'} &= n_A\zeta_{0'}\nabla^{A0'} + n_A\zeta_{1'}\nabla^{A1'} \\ &= (n_A\zeta^{1'})\nabla^{A0'} - (n_A\zeta^{0'})\nabla^{A1'} \\ &= n_B\nabla^{B1'}n_A\nabla^{A0'} - n_B\nabla^{B0'}n_A\nabla^{A1'}, \end{aligned}$$

que, fazendo os ajustes com as letras, concluímos que

$$-(n_A\zeta_{A'}\nabla^{AA'}) = \Big[n_A(\nabla^{A0'}n_B)\nabla^{B1'} - n_B(\nabla^{B1'}n_A)\nabla^{A0'}\Big]$$

Uma conta análoga mostra que

$$\left[n_A\nabla^{A0'}(\nabla^{B1'}n_B + \zeta^{1'})\kappa\frac{\partial}{\partial\kappa} - n_B\nabla^{B1'}(\nabla^{A0'}n_A + \zeta^{0'})\kappa\frac{\partial}{\partial\kappa}\right] = \left[(n_A\nabla^{B}{}_{A'}\nabla^{AA'}n_B + n_A\nabla^{AA'}\zeta_{A'})\kappa\frac{\partial}{\partial\kappa}\right].$$

Portanto,

$$[X^{0'}, X^{1'}] = -n_A\zeta_{A'}\nabla^{AA'} - (n_A\nabla^{B}{}_{A'}\nabla^{AA'}n_B + n_A\nabla^{AA'}\zeta_{A'})\kappa\frac{\partial}{\partial\kappa} \tag{5.1.2}$$

Simplificaremos o segundo termo em parênteses. Diferenciando com o operador $\nabla^{B}{}_{A'}$ a relação $n_A\nabla^{AA'}n_B = \zeta^{A'}n_B$, obtemos que

$$n_A\nabla^{B}{}_{A'}\nabla^{AA'}n_B + (\nabla^{B}{}_{A'}n_A)(\nabla^{AA'}n_B) = \zeta^{A'}\nabla^{B}{}_{A'}n_B + (\nabla^{B}{}_{A'}\zeta^{A'})n_B$$

Agora, notemos que

$$\begin{aligned} (\nabla^{B}{}_{A'}\zeta^{A'})n_B &= n_B\nabla^{B}{}_{A'}\epsilon^{A'B'}\zeta_{B'} \\ &= n_B\epsilon^{A'B'}\nabla^{B}{}_{A'}\zeta_{B'} \\ &= n_B(-\epsilon^{B'A'})\nabla^{B}{}_{A'}\zeta_{B'} \\ &= -n_B\nabla^{BB'}\zeta_{B'} \end{aligned}$$

Assim,

$$n_A \nabla^B{}_{A'} \nabla^{AA'} n_B + (\nabla^B{}_{A'} n_A)(\nabla^{AA'} n_B) = \zeta^{A'} \nabla^B{}_{A'} n_B - n_B \nabla^{BB'} \zeta_{B'}$$
$$n_A \nabla^B{}_{A'} \nabla^{AA'} n_B + n_A \nabla^{AA'} \zeta_{A'} = \zeta^{A'} \nabla^B{}_{A'} n_B - (\nabla^B{}_{A'} n_A)(\nabla^{AA'} n_B).$$

Mostraremos agora que:

$$(\nabla^B{}_{A'} n_A)(\nabla^{AA'} n_B) = 0.$$

Como $(\nabla^B{}_{A'} n_A) = \epsilon_{B'A'} \nabla^{BB'} n_A$, calculamos os sistema para $A' = 0'$ e $B' = 1'$ e obtemos que

$$(\epsilon_{B'A'} \nabla^{BB'} n_A)(\nabla^{AA'} n_B) = (\nabla^{B1'} n_A)(\nabla^{A0'} n_B) - (\nabla^{B1'} n_A)(\nabla^{A0'} n_B).$$

Substituindo os valores em A e B por $0, 1$, temos que a soma é zero. Logo,

$$n_A \nabla^B{}_{A'} \nabla^{AA'} n_B + n_A \nabla^{AA'} \zeta_{A'} = \zeta^{A'} \nabla^B{}_{A'} n_B = \zeta_{A'} \nabla^{BA'} n_B. \tag{5.1.3}$$

Relembramos que $\zeta_{A'} \zeta^{A'} = 0$. Assim, substituindo a equação (5.1.3) na equação (5.1.2) obtemos

$$[X^{0'}, X^{1'}] = -\zeta_{0'} X^{0'} - \zeta_{1'} X^{1'}$$

Portanto, $\{X^{A'}\}_{A'=0',1'}$ é involutivo e assim fica demonstrado o Teorema de Robinson. $\square$

Capítulo 6

O Teorema de Kerr

Neste capítulo iremos demonstrar o Teorema de Kerr, que basicamente nos diz como encontrar as congruências nulas de geodésicas shear-free no espaço de Minkowski a partir de uma função analítica arbitrária de 3 variáveis complexas. Logo em seguida, demonstraremos uma versão do Teorema escrito na forma de Twistors, que é a maneira utilizada na maioria dos artigos relacionados com o tema.

Relembramos que uma congruência de geodésicas shear-free será nula se, e somente se, (5.0.17) ocorre, isto é

$$n_B n_J \nabla^{JJ'} n^B = 0 \quad \text{para} \quad J' = 0', 1'.$$

Lema 6.0.4. Se n^A é uma congruência de geodésicas nulas shear-free e se λ é uma função complexa diferenciável, então λn^A também é uma congruência de geodésicas nulas shear-free.

Demonstração. Relembramos que $n_A n^A = 0$, Logo, segue que

$$\begin{aligned}
(\lambda n_A)(\lambda n_B)\nabla^{BX'}\lambda n^A &= \lambda^2 n_A n_B (n^A \nabla^{BX'}\lambda + \lambda \nabla^{BX'} n^A) \\
&= \lambda^2 (n_A n^A n_B \nabla^{BX'}\lambda + \lambda n_A n_B \nabla^{BX'} n^A) \\
&= \lambda^3 (n_A n_B \nabla^{BX'} n^A) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

□

Relembramos que

$$\begin{cases} n^1 = -n_0, \\ n^0 = n_1. \end{cases}$$

Considere o dual n_A de uma congruência nula de geodésicas shear-free e o escreva na forma $\hat{n}_A = \tilde{\lambda} n_A$. Defina $Y := \frac{n^0}{n^1} = \frac{-n_1}{n_0}$ e consequentemente $\hat{n}_A = -n_0 \begin{pmatrix} Y \\ -1 \end{pmatrix}$. Por causa do Lema 6.0.4, quando tratado de congruência de geodésicas nulas shear-free, não existe perda de generalidade se considerarmos $\hat{n}_A$ como somente $\hat{n}_A = \begin{pmatrix} Y \\ -1 \end{pmatrix}$

Relembramos os operadores diferenciais:

$$\nabla^{AA'} = \begin{pmatrix} \nabla^{11'} & \nabla^{10'} \\ \nabla^{01'} & \nabla^{00'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_3 - \partial_4) & \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_1 + i\partial_2) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_1 - i\partial_2) & -\frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_3 + \partial_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u & \partial_\zeta \\ \partial_{\bar{\zeta}} & \partial_v \end{pmatrix},$$

Lema 6.0.5. Seja n^A uma congruência de geodésicas nulas shear-free e $\hat{n}^A$ a congruência associada tal que $\hat{n}_A = \begin{pmatrix} Y \\ -1 \end{pmatrix}$. Neste caso, a equação (5.0.17) se torna

$$\hat{n}_J \nabla^{JJ'}(Y) = 0.$$

Demonstração. Isso segue diretamente do cálculo

$$\begin{aligned} n_B n_J \nabla^{JJ'} n^B &= 0 \\ \hat{n}_1 \hat{n}_J \nabla^{JJ'} \hat{n}^1 + \hat{n}_0 \hat{n}_J \nabla^{JJ'} \hat{n}^0 &= 0 \\ \hat{n}_0 \hat{n}_J \nabla^{JJ'} \hat{n}^0 &= 0 \\ \hat{n}_J \nabla^{JJ'}(Y) &= 0, \end{aligned}$$

onde lembramos que $\nabla^{JJ'}\hat{n}^1 = 0$, pois $\hat{n}^1 = 1$ e $\hat{n}^0 = Y$.

□

Agora, expandindo a equação acima, temos que

$$\begin{aligned} \hat{n}_J \nabla^{JJ'}(Y) &= 0 \\ \hat{n}_0 \nabla^{0J'}(Y) + \hat{n}_1 \nabla^{1J'}(Y) &= 0. \end{aligned}$$

Substituindo os valores dos operadores, obtemos que o sistema é equivalente a

$$\begin{cases} Y\partial_u Y - \partial_{\bar{\zeta}} Y = 0 \\ Y\partial_\zeta Y - \partial_v Y = 0 \end{cases} \tag{6.0.1}$$

Ou equivalentemente

$$\begin{cases} (Y\partial_u - \partial_{\bar{\zeta}})Y = 0 \\ (Y\partial_\zeta - \partial_v)Y = 0 \end{cases} \tag{6.0.2}$$

Podemos então demonstrar o famoso Teorema de Kerr

Teorema 6.0.6 (Kerr)**.** Seja F uma função analítica de três variáveis tal que a equação

$$F(Y, \zeta + Yv, u + Y\bar{\zeta}) = 0$$

defina Y implicitamente como função de $(u, v, \zeta, \bar{\zeta})$. Então $n^A = \begin{pmatrix} 1 \\ Y \end{pmatrix}$ é uma congruência nula de geodésicas shear-free. Reciprocamente, toda congruência nula de geodésicas shear-free pode ser representada localmente nessa forma.

Demonstração. Seja Y uma solução arbitrária do sistema (6.0.2). Considere então o sistema:

$$\begin{cases} (Y\partial_u - \partial_{\bar{\zeta}})X = 0 \\ (Y\partial_\zeta - \partial_v)X = 0 \end{cases} \tag{6.0.3}$$

onde X é função incógnita. Vamos verificar que este sistema é completamente integrável. De fato, calculando o comutador $[(Y\partial_u - \partial_{\bar{\zeta}}), (Y\partial_\zeta - \partial_v)]\phi$, onde ϕ é uma função diferenciável arbitrária, obtemos que

$$\begin{aligned} [(Y\partial_u - \partial_{\bar{\zeta}}), (Y\partial_\zeta - \partial_v)]\phi &= (Y\partial_u Y\partial_\zeta - \partial_{\bar{\zeta}} Y\partial_\zeta - Y\partial_\zeta Y\partial_u + \partial_v Y\partial_u)\phi \\ &= -(\partial_u\phi)(\partial_v - Y\partial_\zeta)Y - (\partial_\zeta\phi)(\partial_{\bar{\zeta}} - Y\partial_u)Y \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois Y é solução (6.0.2). Segue da teoria em ([18], pg 294) que a solução geral de (6.0.3) tem a seguinte forma

$$X = f(X_1, X_2),$$

onde X_1 e X_2 são soluções independentes de (6.0.3) e f é uma função diferenciável arbitrária. Duas soluções independentes do sistema (6.0.3) são encontradas diretamente, a saber: $X_1 = \zeta + Yv$ e $X_2 = u + Y\bar{\zeta}$, pois

$$\begin{cases} Y\partial_u X_1 - \partial_{\bar{\zeta}} X_1 = v(Y\partial_u Y - \partial_{\bar{\zeta}} Y) = 0 \\ Y\partial_\zeta X_1 - \partial_v X_1 = v(Y\partial_\zeta Y - \partial_v Y) = 0. \end{cases}$$

Analogamente para X_2. Assim a solução analítica mais genérica X deve ser dada na forma

$$X = f(X_1, X_2) = f(\zeta + Yv, u + Y\bar{\zeta}). \tag{6.0.4}$$

Portanto, como Y é solução, podemos escrevê-lo como

$$Y = f(\zeta + Yv, u + Y\bar{\zeta})$$

para alguma f analítica, ou equivalentemente definindo F como

$$F(Y, \zeta + Y\upsilon, u + Y\bar{\zeta}) = Y - f(\zeta + Y\upsilon, u + Y\bar{\zeta}) = 0.$$

Reciprocamente, se $Y = g(\zeta + Y\upsilon, u + Y\bar{\zeta})$, para alguma função analítica arbitrária g, um cálculo direto mostra que

$$\begin{cases} (Y\partial_u - \partial_{\bar{\zeta}})Y = 0 \\ (Y\partial_\zeta - \partial_\upsilon)Y = 0 \end{cases} \tag{6.0.5}$$

Pois, se g_1 é a derivada de g na primeira coordenada e analogamente para g_2, e usando a notação para derivada parcial $\frac{\partial}{\partial u}Y = Y_u$ e analogamente para as outras variáveis, temos que

$$\begin{aligned} Y_u = g_1(Y_u\upsilon) + g_2(1 + Y_u\bar{\zeta}) \quad &\Leftrightarrow \quad Y_u = \frac{g_2}{1 - g_1\upsilon + g_2\bar{\zeta}} \\ Y_{\bar{\zeta}} = g_1(Y_{\bar{\zeta}}\upsilon) + g_2(Y + Y_{\bar{\zeta}}\bar{\zeta}) \quad &\Leftrightarrow \quad Y_{\bar{\zeta}} = \frac{Yg_2}{1 - g_1\upsilon + g_2\bar{\zeta}} \end{aligned}$$

Segue então que $Y = g(\zeta + Y\upsilon, u + Y\bar{\zeta})$ é solução da primeira equação. Analogamente para a segunda equação e, portanto, concluímos o primeiro Teorema de Kerr.

□

Para continuarmos com a notação de somatório, chamaremos de $x_{AA'}$ de

$$x_{AA'} = \begin{bmatrix} u & \zeta \\ \bar{\zeta} & \upsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{10} \\ x_{01} & x_{00} \end{bmatrix}.$$

Definição 6.0.7. Chamaremos de (campo) *twistor*, denotado por $\mathcal{Z}$, como um elemento de $\mathbb{C}^4$ formado por um par de dois (campos) spinors $\mathcal{Z} = (\omega^A, \pi_{A'})$, onde ω^A e $\pi_{A'}$ são campos spinors.

Estaremos interessados num tipo específico de twistor, que é conhecido como um tipo de *twistor nulo*. Este twistor é escrito da seguinte forma $\mathcal{Z} = (n^A, -in^A x_{AA'}) = (n^1, n^0, -in^A x_{A1'}, -in^A x_{A0'}) = (\mathcal{Z}^\alpha)$, $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$.

Desta forma, podemos rescrever o teorema de Kerr na forma de twistors. Seja F a função analítica como no teorema de Kerr, isto é, $F(\frac{n^0}{n^1}, \zeta + \frac{n^0}{n^1}\upsilon, u + \frac{n^0}{n^1}\bar{\zeta}) = 0$, onde n^A é um spinor que define uma congruência nula por geodésicas shear-free. Defina g, uma função homogênea de grau n satisfazendo a equação:

$$\begin{aligned} F\left(\frac{n^0}{n^1}, \zeta + \frac{n^0}{n^1}\upsilon, u + \frac{n^0}{n^1}\bar{\zeta}\right) &= g\left(1, \frac{n^0}{n^1}, -i\left(u + \frac{n^0}{n^1}\bar{\zeta}\right), -i\left(\zeta + \frac{n^0}{n^1}\upsilon\right)\right) \\ &= \left(\frac{1}{n^1}\right)^n g\left(n^1, n^0, -i\left(un^1 + n^0\bar{\zeta}\right), -i\left(\zeta n^1 + n^0\upsilon\right)\right) \\ &= \left(\frac{1}{n^1}\right)^n g\left(n^A, -i\left(n^A x_{AA'}\right)\right). \end{aligned}$$

Como $F = 0$, temos que existe uma função f, homogênea de grau n, tal que

$$f(n^A, -in^A x_{AA'}) = 0,$$

onde $(n^A, -in^A x_{AA'})$ é um twistor nulo $\mathcal{Z} = (n^A, -in^A x_{AA'})$. Portanto, o teorema de Kerr pode ser reformulado da seguinte maneira.

Teorema 6.0.8 (Kerr)**.** Os zeros de uma função homogênea analítica arbitrária $f(\mathcal{Z}^\alpha)$, onde $\mathcal{Z} = (n^A, -in^A x_{AA'})$, definem uma congruência de geodésica nulas shear-free n^A. Reciprocamente, toda congruência de geodésicas nulas shear-free n^A são as raizes de alguma função homogênea analítica $f(n^A, -in^A x_{AA'})$.

Podemos citar algumas referências onde este teorema é provado de maneira mais curta e menos formal, como em ([9], pg 50), ou de maneira mais geométrica, como em ([14], pg 360 - 362).

Referências Bibliográficas

[1] ADAMO, T. M.; KOZAMEH, C.; NEWMAN, E. T. *Null Geodesic Congruences, Asymptotically-Flat Spacetimes and Their Physical Interpretation*. Living Rev. Relativity, v. 15, p. 47, (2009).

[2] BATEMAN, G. *The Mathematical Theory of Electromagnetic Wave Propagation.* (1958).

[3] BERHANU, S.; CORDARO, P.; HOUNIE, J. . *An Introduction to Involutive Structures*, Cambridge University Press (2008).

[4] do CARMO, M. P. . *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, (1979).

[5] COURANT, R.; HILBERT, D. . *Methods of Mathematical Physics*, Wiley Classics Edition, vol. 2 (1989).

[6] COX, D.; FLAHERTY Jr., E. J. . *A Conventional Proof of Kerr's Theorem*, Communications in Mathematical Physics 47, 75-79 (1976)

[7] DALHUISEN, J. W. . *The Robinson congruence in electrodynamics and general relativity* (2014).

[8] HANSEN, R. O.; NEWMAN, E. T. .*A complex Minkowski space approach to twistor*, GRG, vol. 6, n. 4, 361 - 385 (1975).

[9] HUGGETT, S. A.; TOD, K. P. . *An Introduction to Twistor Theory*, 2nd Ed., Cambridge University Press (1994).

[10] IRVINE, W.T. M.; BOUWMEESTER, D. . *Linked and knotted beams of light*, Nature Physics v. 4, p.716-720, September 2008.

[11] KEDIA, H; BIALYNICKI-BIRULA, I. ; PERALTA-SALAS, D. ; IRVINE, W.T.M. . *Tying Knots in Light Fields*, Physical Review Letters, (2013)

[12] NABER, G. L. . *The Geometry of Minkowski Spacetime - An Introduction to the Mathematics of the Special Theory of Relativity*, 2nd Ed, Springer (2010).

[13] NAGATOMO, K. . *On a construction of null electromagnetic fields*, Osaka Journal of Mathematics 20 (1983), no. 2, 285–301.

[14] PENROSE, R. . *Twistor algebra*, , J. Math. Phys. 8 (1967), 345-366.

[15] RAÑADA, A.F. . *A topological theory of the electromagnetic field*, Letters in Mathematical Physics, 18(2):, p. 97-106, 1989.

[16] RAÑADA, A.F. . *Two properties of electromagnetic knots*, Physics Letters A, vol. 232:, p. 25-33, 1997.

[17] ROBINSON, I. . *Null Electromagnetic Fields*, J. Math. Phys. 2, 290 (1961).

[18] SEILER, W. M. *Involution: The formal theory of differential equations and its applications in computer algebra.* Springer, 2009.