

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ANÁLISE SÍSMICA DE PÓRTICOS PLANOS COM**  
**DISSIPADORES METÁLICOS DE ENERGIA**

**DAVID MIGUEL CHALCO PARI**

**ORIENTADOR: WILLIAM TAYLOR MATIAS SILVA**

**CO-ORIENTADOR: LUCIANO MENDES BEZERRA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E**  
**CONSTRUÇÃO CIVIL**

**PUBLICAÇÃO: E.DM-003A/14**

**BRASÍLIA/DF: ABRIL – 2014**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ANÁLISE SÍSMICA DE PÓRTICOS PLANOS COM DISSIPADORES**  
**METÁLICOS DE ENERGIA**

**DAVID MIGUEL CHALCO PARI**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.**

**APROVADA POR:**

---

**Prof. William Taylor Matias Silva, Dr. Ing. (UnB)**  
**(Orientador)**

---

**Prof. Artur António de Almeida Portela , Ph.D. (UnB)**  
**(Examinador Interno)**

---

**Prof. Osvaldo Luís Manzoli, Dr. Ing. (UNESP)**  
**(Examinador Externo)**

---

**Prof. Francisco Evangelista Junior, Ph.D. (UnB)**  
**(Suplente)**

**BRASÍLIA/DF, 16 DE ABRIL DE 2014**

## FICHA CATALOGRÁFICA

CHALCO PARI, DAVID MIGUEL

Análise Sísmica de Pórticos Planos com Dissipadores Metálicos de Energia. [Distrito Federal] 2014.

xix, 118p., 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2014).

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília.

Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Análise dinâmica não linear

2. Dissipadores de energia metálicos

3. Dispositivo ADAS

4. Método dos elementos finitos

I. ENC/FT/UnB

II. Título (série)

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

CHALCO, D. M. (2014). Análise Sísmica de Pórticos Planos com Dissipadores Metálicos de Energia. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil. Publicação E.DM-003A/14, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 118p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: David Miguel Chalco Pari

TÍTULO: Análise Sísmica de Pórticos Planos com Dissipadores Metálicos de Energia

GRAU: Mestre

ANO: 2014

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

**David Miguel Chalco Pari**

CLN 407 Bloco C 202 – Asa Norte

70.855-530 Brasília – DF – Brasil

e-mail: davidchalcop@hotmail.com

## DEDICATÓRIA

*"A Deus que ilumina meu caminho e me dá força para continuar nele."*

*"Aos meus pais, Erly e Luz, por seu inestimável apoio, amor e compreensão que me encheu de força e coragem para alcançar todos os meus objetivos e sonhos."*

*"O homem é o que ele acredita."*

*Anton Tchecóv*

*"A boa madeira não cresce com sossego; quanto mais forte o vento, mais forte as árvores."*

*J. William Marriot*

*"Nossas dúvidas são traidoras, e nos fazem perder o bem que sempre poderíamos ganhar, por medo de tentar."*

*William Shakespeare*

## **AGRADECIMENTOS**

Ao professor William Taylor Matias Silva, pela orientação e incentivo durante todo o desenvolvimento deste trabalho. Pelo apoio e disponibilidade.

Ao Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil pela atenção, amizade e união de seus integrantes: colaboradores, discentes e docentes.

Ao CNPq pelo apoio financeiro, essencial para viabilizar a pesquisa no Brasil.

As tantas pessoas que hoje fazem parte da minha vida. As quais deixam e levam experiências.

## **RESUMO**

### **ANÁLISE SÍSMICA DE PÓRTICOS PLANOS COM DISSIPADORES METÁLICOS DE ENERGIA**

**Autor: David Miguel Chalco Pari**

**Orientador: William Taylor Matias Silva**

**Co-orientador: Luciano Mendes Bezerra**

**Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil**

**Brasília, 16 de abril de 2014**

No âmbito dos sistemas de dissipação de energia passiva para proteção sísmica de estruturas de edifícios, os dissipadores de energia metálicos têm sido comumente usados. O foco deste trabalho está em um desses dispositivos - o amortecedor ADAS (Added Damping And Stiffness). A análise das estruturas que empregam estes dispositivos requer a utilização de métodos de análise não linear. Este trabalho apresenta uma metodologia detalhada para realizar a análise dinâmica tempo-história não linear de pórticos planos com amortecedores ADAS pelo método dos elementos finitos. Adicionalmente mostram-se: o modelo força-deslocamento bilinear para o comportamento não linear histerético do dispositivo ADAS, o algoritmo return-mapping para integrar este modelo bilinear e a idealização em elementos finitos do dispositivo ADAS. Na metodologia proposta são utilizados conjuntamente o método de Newmark, o método de Newton-Raphson e o algoritmo return-mapping para obter a resposta da estrutura ao longo do tempo.

A implementação computacional desta metodologia se materializa com a criação de um programa computacional capaz de realizar a análise acima mencionada. A eficiência da metodologia proposta e a validade do programa criado são avaliadas por meio de dois exemplos acadêmicos, nos quais se comparam os resultados das análises com os do programa de computador SAP2000.

**Palavras chave:** Análise dinâmica não linear; Dissipadores de energia metálicos; Dispositivo ADAS; Método dos elementos finitos.

## **ABSTRACT**

### **SEISMIC ANALYSIS OF PLANE FRAMES WITH METALLIC YIELD DAMPERS**

**Autor: David Miguel Chalco Pari**

**Orientador: William Taylor Matias Silva**

**Co-orientador: Luciano Mendes Bezerra**

**Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil**

**Brasília, 16 de abril de 2014**

Within the framework of passive energy dissipation systems for seismic protection of building structures, the metallic yield dampers have been commonly used. The focus of this study is on one of these devices - the ADAS (Added Damping And Stiffness) damper. The analysis of structures employing these devices requires the use of nonlinear analysis methods. This study presents a detailed methodology to perform the nonlinear time-history dynamic analysis of plane frames with ADAS dampers by finite element method. In addition are presented: the bilinear force-displacement model for the hysteretic nonlinear behavior of the ADAS device, the return-mapping algorithm to integrate this bilinear model, and the finite element idealization of the ADAS device. In the proposed methodology the Newmark method, the Newton-Raphson method and the return-mapping algorithm are used together to obtain the response of the structure over time.

The computational implementation of this methodology is materialized with the creation of a computational program capable of performing the aforementioned analysis. The efficiency of this proposed methodology and the validity of the created program are evaluated by means of two academic examples, in which we compare the results of the analyses with the ones of the computer program SAP2000.

**Keywords:** Nonlinear dynamic analysis; Metallic yield dampers; ADAS device; Finite element method.

## SUMÁRIO

<b>1 - INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1 – VISÃO GERAL .....</b>	<b>1</b>
<b>1.2 - PROPOSTA DO PROBLEMA .....</b>	<b>2</b>
<b>1.3 – OBJETIVOS .....</b>	<b>3</b>
<b>1.4 – ESTRUTURA DO TRABALHO .....</b>	<b>3</b>
<b>2 - SISTEMAS PASSIVOS DE CONTROLE DE VIBRAÇÕES .....</b>	<b>5</b>
<b>2.1 - INTRODUÇÃO .....</b>	<b>5</b>
<b>2.2 - SISTEMAS DE CONTROLE DE VIBRAÇÕES .....</b>	<b>5</b>
<b>2.2.1 - Sistemas de controle passivo .....</b>	<b>7</b>
<b>2.3 - DISSIPADORES HISTERÉTICOS POR PLASTIFICAÇÃO DE METAIS .....</b>	<b>8</b>
<b>2.3.1 - Dispositivo ADAS .....</b>	<b>8</b>
<b>2.3.2 - Dispositivo TADAS .....</b>	<b>10</b>
<b>2.3.3 - Dispositivo BUCKLING-RESTRAINED BRACE (BRB) .....</b>	<b>11</b>
<b>2.4 - DISPOSITIVO CONSIDERADO NO ESTUDO .....</b>	<b>14</b>
<b>2.4.1 - Estudos experimentais .....</b>	<b>15</b>
<b>2.4.2 - Implementações estruturais .....</b>	<b>19</b>
<b>3 - FORMULAÇÃO E SOLUÇÃO DO MODELO DINÂMICO .....</b>	<b>22</b>
<b>3.1 - INTRODUÇÃO .....</b>	<b>22</b>
<b>3.2 - FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS .....</b>	<b>23</b>
<b>3.3 – SOLUÇÃO .....</b>	<b>24</b>
<b>3.3.1 - Esquemas de Newton-Raphson .....</b>	<b>25</b>
<b>3.3.2 - Integração implícita .....</b>	<b>28</b>
<b>3.3.3 - Critérios de convergência .....</b>	<b>30</b>
<b>3.3.4 - Algoritmo para solução passo-a-passo .....</b>	<b>31</b>
<b>4 - MODELAGEM DO DISSIPADOR METÁLICO .....</b>	<b>33</b>
<b>4.1 - INTRODUÇÃO .....</b>	<b>33</b>
<b>4.2 - PRINCÍPIOS BÁSICOS .....</b>	<b>33</b>
<b>4.2.1 - Modelo de atrito unidimensional da plasticidade independente-da-taxa</b>	<b>34</b>
<b>4.2.2 - Modelo elementar da plasticidade com endurecimento isotrópico linear</b>	<b>41</b>

4.2.3 - Refinamentos adicionais da lei do endurecimento.....	46
4.2.4 - Algoritmos de integração para a plasticidade independente-da-taxa.....	49
4.2.4.1 - A forma incremental da plasticidade independente-da-taxa.....	50
4.2.4.2 - Algoritmos return-mapping - endurecimento isotrópico .....	52
4.2.4.3 - Extensão ao modelo de endurecimento isotrópico/cinemático combinado .	58
<b>4.3 - MODELAGEM MACROSCÓPICA DO DISSIPADOR METÁLICO .....</b>	<b>62</b>
4.3.1 - Modelo bilinear .....	62
4.3.2 - Modelo de Bouc-Wen.....	64
4.3.3 - Interpretação geométrica para cada ciclo .....	65
<b>4.4 - MODELAGEM CONSIDERADA .....</b>	<b>66</b>
4.4.1 - Características mecânicas analíticas do dissipador ADAS .....	67
4.4.2 - Modelo força-deslocamento e algoritmo de integração do dissipador ADAS.....	70
<b>4.5 - ELEMENTO LINK .....</b>	<b>76</b>
4.5.1 - Conectividade nodal.....	76
4.5.2 - Graus de liberdade.....	76
4.5.3 - Sistema de coordenadas.....	76
4.5.4 - Deslocamentos internos .....	77
4.5.5 - Velocidades internas .....	77
4.5.6 - Tipos de elemento link .....	78
4.5.7 - Propriedade link.....	79
4.5.7.1 - Propriedade link linear .....	79
4.5.7.2 - Propriedade link não linear .....	84
4.5.8 - Massa.....	87
4.5.9 - Elemento link para modelar o dispositivo ADAS .....	87
<b>5 - DESCRIÇÃO DO PROGRAMA E ALGORITMO GERAL .....</b>	<b>89</b>
5.1 - INTRODUÇÃO .....	89
5.2 – INTRODUÇÃO AO MATLAB.....	89
5.3 - DESCRIÇÃO DO PROGRAMA .....	90
5.4 - ALGORITMO GERAL.....	94
5.4.1 - Matriz de rigidez $K$ .....	96
5.4.2 - Matriz de massa $M$ .....	97
5.4.3 - Matriz de amortecimento $C$ .....	98

<b>6 – EXEMPLOS DE APLICAÇÃO.....</b>	<b>101</b>
<b>6.1 - INTRODUÇÃO.....</b>	<b>101</b>
<b>6.2 - EXEMPLO 1.....</b>	<b>101</b>
<b>6.3 - EXEMPLO 2.....</b>	<b>107</b>
<b>7 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....</b>	<b>115</b>
<b>7.1 CONCLUSÕES GERAIS.....</b>	<b>115</b>
<b>7.2 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....</b>	<b>116</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Classificação geral das técnicas de controle de resposta sísmica .....	6
Figura 2.2 - Dissipador ADAS de cobre.....	9
Figura 2.3 – (a) Placa em X – elevação, (b) Dissipador ADAS – elevação lateral e (c) Dissipador ADAS – elevação da extremidade .....	10
Figura 2.4 - Dissipador TADAS.....	11
Figura 2.5 - Componentes de um buckling-restrained brace (BRB).....	12
Figura 2.6 - Resposta histerética de um buckling-restrained brace (BRB) .....	13
Figura 2.7 - Fotos de (a) Hospital Santa Clara Medical Center em construção; (b) vista close- up dos buckling-restrained braces (BRBs) instalados.....	14
Figura 2.8 - Laços de histerese de dissipadores ADAS em um pórtico plano com cargas de gravidade .....	16
Figura 2.9 - Geometria da estrutura de ensaio ADAS-3.....	16
Figura 2.10 - Foto da elevação lateral da estrutura de ensaio ADAS-3 .....	17
Figura 2.11 - Comparação da resposta da estrutura de ensaio ADAS-3 para o registro (N10E) do terremoto de Chile, Lolleo 1985. ....	18
Figura 2.12 - Edifício Izazaga #38-40.....	20
Figura 2.13 - Arranjo contraventamento-amortecedor no edifício Izazaga #38-40 .....	20
Figura 2.14 - Comparação dos resultados calculados para o edifício Wells Fargo Bank .....	21
Figura 4.1 - Dispositivo de atrito unidimensional ilustrando a plasticidade independente-da- taxa .....	35
Figura 4.2 - Descrição da resposta de atrito para um dispositivo com constante $\sigma_Y > 0$ .....	37
Figura 4.3 - Representação esquemática do comportamento mecânico de um modelo elástico-atrito unidimensional para a plasticidade perfeita .....	40
Figura 4.4 - Plasticidade com endurecimento-por-deformação (B) contra plasticidade perfeita (A) .....	43
Figura 4.5 - Resposta de um modelo com endurecimento isotrópico linear em um ciclo fechado. Embora a deformação plástica total no final do ciclo seja $\epsilon_{3p} = 0$ , o valor da variável de endurecimento é $\alpha_3 = 2\alpha_1$ .....	44
Figura 4.6 - (A) O modulo tangente elastoplástico e (B) o modulo plástico.....	46
Figura 4.7 - Ilustração idealizada do comportamento do endurecimento cinemático .....	47

Figura 4.8 - O papel dos algoritmos return-mapping elastoplásticos. Note-se que $\sigma$ é uma variável dependente calculada pela relação $\sigma(x) = E\varepsilon(x) - \varepsilon_p x$ .....	50
Figura 4.9 - Exemplo de um passo elástico incremental de um estado plástico. A solução final coincide com o estado preditor (trial) .....	54
Figura 4.10 - O estado preditor (trial) viola a condição de restrição $f \leq 0$ . Por conseguinte, o processo incremental deve ser plástico desde que $\Delta\gamma > 0$ para atingir $\sigma_n + 1 \neq \sigma_n + 1_{\text{trial}}$ .....	55
Figura 4.11 - A tensão final é obtido por "retornar" a tensão trial à superfície do escoamento através de um escalonamento, por isso, a denominação de return-mapping.....	58
Figura 4.12 - Modelo bilinear.....	63
Figura 4.13 - Parâmetros para o modelo Bouc-Wen .....	65
Figura 4.14 - Propriedades efetivas de cada ciclo modelado bilinearmente. ....	66
Figura 4.15 - Modelo bilinear – Curva esqueleto.....	67
Figura 4.16 - Geometria idealizada para as placas do dispositivo ADAS.....	68
Figura 4.17 - Força e deslocamento do dispositivo ADAS .....	71
Figura 4.18 - Deslocamentos internos para o elemento link .....	78
Figura 4.19 - Molas internas independentes em um elemento link linear.....	80
Figura 4.20 - Amortecedores internos independentes em um elemento link linear .....	81
Figura 4.21 - Forças de rigidez internas em um elemento link linear .....	82
Figura 4.22 - Forças de amortecimento internas em um elemento link linear .....	83
Figura 4.23 - Forças internas em um elemento link não linear .....	85
Figura 4.24 - Propriedade Link Não Linear para um deslocamento interno .....	86
Figura 5.1 - Fluxograma do algoritmo geral do programa .....	95
Figura 6.1 - Esquema para o pórtico plano estudado no exemplo 1 (dimensões em polegadas)101	
Figura 6.2 - Vista frontal do modelo em SAP2000 para o pórtico no exemplo 1 .....	103
Figura 6.3 - Vista 3D do modelo em SAP2000 para o pórtico no exemplo 1 .....	103
Figura 6.4 - Acelerograma El Centro N-S 1940.....	105
Figura 6.5 - Comparação entre as histórias do deslocamento no nó do meio do vão dos modelos X-Structure2D e SAP2000 do pórtico no exemplo 1 .....	106
Figura 6.6 - Comportamento histerético dos ADAS para os modelos X-Structure2D e SAP2000 do pórtico no exemplo 1, quando submetidos ao acelerograma El Centro 1940 .....	107

Figura 6.7 - Esquema para ADAS-3, estrutura de teste na mesa vibratória (dimensões em polegadas).....	108
Figura 6.8 - Vista frontal do modelo em SAP2000 para ADAS-3 .....	110
Figura 6.9 - Vista 3D do modelo em SAP2000 para ADAS-3.....	111
Figura 6.10 - Acelerograma El Centro N-S 1940 escalado a 0.33 g .....	112
Figura 6.11 - Comparação entre as histórias do deslocamento no nó do meio vão no primeiro andar dos modelos X-Structure2D e SAP2000 do pórtico ADAS-3 .....	113
Figura 6.12 - Comportamento hysterético dos ADAS para os modelos do pórtico ADAS-3 quando submetidos ao acelerograma El Centro-33; (a) modelo MSL-WBAT, (b) modelo X-Structure2D e (c) modelo SAP2000.....	114

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Características dinâmicas das estruturas testadas.....	17
Tabela 3.1 - Algoritmo para solução passo-a-passo.....	32
Tabela 4.1 - Modelo constitutivo da plasticidade perfeita independente-da-taxa unidimensional .....	40
Tabela 4.2 - Modelo constitutivo da plasticidade independente-da-taxa unidimensional com endurecimento isotrópico linear .....	44
Tabela 4.3 - Modelo constitutivo da plasticidade independente-da-taxa unidimensional com endurecimento isotrópico e cinemático combinado .....	48
Tabela 4.4 - Algoritmo return-mapping para a plasticidade independente-da-taxa unidimensional com endurecimento isotrópico.....	57
Tabela 4.5 - Algoritmo return-mapping para a plasticidade independente-da-taxa unidimensional com endurecimento isotrópico/cinemático combinado .....	61
Tabela 4.6 - Modelo força-deslocamento do dissipador ADAS.....	73
Tabela 4.7 - Algoritmo return-mapping para o modelo constitutivo do dissipador ADAS .....	74
Tabela 6.1 - Autovalores, frequências $f$ e períodos $T$ dos três primeiros modos de vibração para o pórtico plano no exemplo 1 .....	104
Tabela 6.2 - Valores máximos e mínimos do deslocamento no nó do meio do vão dos modelos X-structure2D e SAP2000 do pórtico no exemplo 1.....	106
Tabela 6.3 - Valores máximos e mínimos da força de cisalhamento e do deslocamento dos ADAS para os modelos X-structure2D e SAP2000 do pórtico no exemplo 1..	107
Tabela 6.4 - Parâmetros da curva força-deslocamento em cisalhamento dos dispositivos ADAS (unidades: kip, in, kip/in (kN, cm, kN/cm)) .....	109
Tabela 6.5 - Pesos medidos para a estrutura de teste na mesa vibratória ADAS-3 (unidades: kip (kN)).....	109
Tabela 6.6 - Propriedades dos elementos estruturais dos modelos do pórtico ADAS-3.....	109
Tabela 6.7 - Períodos fundamentais para os diferentes modelos de ADAS-3.....	111
Tabela 6.8 - Valores máximos e mínimos do deslocamento no nó do meio vão no primeiro andar dos modelos X-structure2D e SAP2000 do pórtico ADAS-3 .....	113
Tabela 6.9 - Valores máximos e mínimos da força de cisalhamento e do deslocamento dos ADAS para os modelos X-structure2D e SAP2000 do pórtico ADAS-3 .....	114

## LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

### Símbolos:

$A$	- Área da seção transversal
$A$	- Fator de escala geral no modelo Bouc-Wen
$a_0$ e $a_1$	- Coeficientes para o amortecimento de Rayleigh
$b$	- Largura da placa-X
$b_{eq}$	- Largura equivalente da placa-X em sua extremidade
$\mathbf{C}$	- Matriz de amortecimento independente do tempo
$c_{ux}$ , $c_{uy}$ e $c_{rz}$	- Coeficientes de amortecimento dos amortecedores internos do elemento link linear
$d$	- Deslocamento do dissipador
$d$	- Deslocamento interno total
$d_{rz}$	- Deslocamento por flexão pura do elemento link
$d_{ux}$	- Deslocamento por cisalhamento do elemento link
$d_{uy}$	- Deslocamento axial do elemento link
$d_y$	- Deslocamento de escoamento
$d_y^{ADAS}$	- Deslocamento de escoamento em cisalhamento do dispositivo ADAS
$d^p$	- Deslocamento interno plástico
${}^{t+\Delta t}d$	- Deslocamento interno total no tempo $t + \Delta t$
${}^t d^p, {}^{t+\Delta t}d^p$	- Deslocamento interno plástico no tempo $t$ e $t + \Delta t$ respectivamente
$\dot{d}^p$	- Taxa de deslocamento interno plástico
$E$	- Módulo de elasticidade
$E$	- Modulo de elasticidade do material da placa-X
${}^t \mathbf{F}$	- Vetor de forças pontuais nodais equivalentes às tensões dos elementos no tempo $t$
$f$	- Força interna
$f$	- Força no dissipador
$f(\sigma)$	- Condição de escoamento
$f_f(f, q_f, \alpha_d)$	- Condição de escoamento

$f_{rz}$	- Momento de flexão interno do elemento link
$f_{ux}$	- Força de cisalhamento interna do elemento link
$f_{uy}$	- Força axial interna do elemento link
$f_y$	- Força de escoamento
$f_{rz}^d$	- Momento de amortecimento interno do elemento link
$f_{ux}^d$ e $f_{uy}^d$	- Forças de amortecimento internas do elemento link
${}^{t+\Delta t}f$	- Força interna no tempo $t + \Delta t$
${}^{t+\Delta t}f^{\text{trial}}$	- Força interna trial no tempo $t + \Delta t$
${}^{t+\Delta t}f_f^{\text{trial}}$	- Condição de escoamento trial no tempo $t + \Delta t$
$H$	- Módulo de endurecimento cinemático
$I$	- Momento de inércia da seção transversal em torno do eixo z
$I_x$	- Momento de inercia ao redor do eixo x da seção transversal da placa-X
$\text{int}(E_\sigma)$	- Faixa elástica
$\mathbf{J}$	- Vetor de influencia de $\dot{u}_g$
$K$	- Modulo plástico
${}^0\mathbf{K}$	- Matriz de rigidez inicial
${}^t\mathbf{K}$	- Matriz de rigidez tangente no tempo $t$
${}^t\widehat{\mathbf{K}}$	- Matriz de rigidez efetiva no tempo $t$
${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(k-1)}$	- Matriz de rigidez tangente atual
$k_{ADAS}$	- Rigidez de cisalhamento elástica do dispositivo ADAS
$k_H$	- Coeficiente de rigidez para endurecimento cinemático
$k_K$	- Coeficiente de rigidez plástico para endurecimento isotrópico
$k_{PL}$	- Rigidez de cisalhamento elástica de cada placa-X
$k_e$	- Coeficiente de rigidez elástico
$k_e$	- Rigidez elástica inicial
$k_{ux}, k_{uy}$ e $k_{rz}$	- Coeficientes de rigidez das molas internas do elemento link linear
$k_y$	- Rigidez pós-escoamento
$l$	- Altura da placa-X
$l$	- Comprimento de cada elemento
$\mathbf{M}$	- Matriz de massa independente do tempo

$M_p^{PL}$	- Capacidade do momento plástico de cada placa-X (o momento de flexão quando toda a seção transversal escoar completamente)
$m_{link}$	- Massa translacional do elemento link
$n$	- Número de placas do dispositivo ADAS
$n$	- Parâmetro que regula a suavidade da transição entre a região linear e não linear no modelo Bouc-Wen
$q$	- Tensão de volta
$q_f$	- Força interna de volta
${}^t q_f, {}^{t+\Delta t} q_f$	- Força interna de volta no tempo $t$ e $t + \Delta t$ respectivamente
${}^t \mathbf{R}$	- Vetor de cargas pontuais nodais aplicadas externamente no tempo $t$
$r$	- Taxa de endurecimento
$t$	- Espessura da placa-X
${}^t \mathbf{U}$	- Vetor de deslocamentos pontuais nodais no tempo $t$
${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(k)}$	- Vetor de deslocamentos pontuais nodais no tempo $t + \Delta t$ , iteração $k$
${}^t \dot{\mathbf{U}}$	- Vetor de velocidades pontuais nodais no tempo $t$
${}^t \ddot{\mathbf{U}}$	- Vetor de acelerações pontuais nodais no tempo $t$
$u_{xi}, u_{yi}$ e $r_{zi}$	- Translações e rotação no nó $i$ do elemento link
$u_{xj}, u_{yj}$ e $r_{zj}$	- Translações e rotação no nó $j$ do elemento link
$\dot{u}_{xi}, \dot{u}_{yi}$ e $\dot{r}_{zi}$	- Velocidades no nó $i$ do elemento link
$\dot{u}_{xj}, \dot{u}_{yj}$ e $\dot{r}_{zj}$	- Velocidades no nó $j$ do elemento link
${}^t \ddot{u}_g$	- Aceleração do solo devido ao sismo no tempo $t$
${}^{t+\Delta t} u_j, {}^{t+\Delta t} u_i$	- Deslocamento no nó $j$ e no nó $i$ do elemento link no tempo $t + \Delta t$ respetivamente
$V_p^{PL}$	- Capacidade de cisalhamento plástico de cada placa-X
$V_y^{ADAS}$	- Cisalhamento de escoamento do dispositivo ADAS
$v_{rz}$	- Velocidade por flexão pura do elemento link
$v_{ux}$	- Velocidade por cisalhamento do elemento link
$v_{uy}$	- Velocidade axial do elemento link
$Z$	- Modulo da seção plástica da placa-X
$z$	- Variável adimensional no modelo Bouc-Wen
$\alpha$	- Variável de endurecimento interna

$\alpha, \delta$	- Parâmetros que podem ser determinados para obter precisão da integração e estabilidade no método de Newmark
$\alpha_d$	- Variável de endurecimento interna
${}^t\alpha_d, {}^{t+\Delta t}\alpha_d$	- Variável de endurecimento interna no tempo $t$ e $t + \Delta t$ respectivamente
$\beta, \gamma$	- Parâmetros que determinam a forma da curva no modelo Bouc-Wen
$\gamma$	- Valor absoluto da taxa de deslizamento
$\gamma_d$	- Valor absoluto da taxa do deslocamento interno plástico
$\Delta \mathbf{R}^{(k-1)}$	- Vetor de carga fora-de-balanço
$\Delta \mathbf{U}^{(k)}$	- Vetor de incrementos nos deslocamentos pontuais nodais, iteração $k$
$\Delta_p^{PL}$	- Deslocamento de escoamento plástico da placa-X
$\Delta \gamma$	- Parâmetro de consistência plástica incremental
$\Delta \gamma_d = {}^{t+\Delta t}\gamma \Delta t$	- Parâmetro de consistência plástica incremental; onde ${}^{t+\Delta t}\gamma$ é o valor absoluto da taxa de deslocamento interno plástico no tempo $t + \Delta t$
$\varepsilon$	- Deformação total
$\varepsilon^e$	- Deformação elástica
$\varepsilon^p$	- Deformação plástica
$\dot{\varepsilon}$	- Taxa de deformação total
$\dot{\varepsilon}^p$	- Taxa de deslizamento (fluxo plástico, deslizamento plástico)
$\theta$	- Parâmetro que define o modelo do endurecimento
$\xi$	- Tensão relativa
$\xi_n$	- Taxa de amortecimento para o $n$ ésimo modo do sistema
${}^{t+\Delta t}\xi_f^{\text{trial}}$	- Força relativa trial no tempo $t + \Delta t$
$\rho$	- Densidade de massa
$\sigma_Y$	- Tensão de escoamento
$\sigma_y$	- Tensão de escoamento do material da placa-X
$\Phi$	- Modo de vibração correspondente à frequência $\omega$
$\omega_n$	- $n$ ésima frequência natural correspondente ao $n$ ésimo modo
$\epsilon_D$	- Tolerância de convergência do deslocamento
$\epsilon_E$	- Tolerância de convergência da energia
$\epsilon_F$	- Tolerância de convergência da força
$\mathbb{E}_f$	- Conjunto de forças internas admissíveis

- $\mathbb{E}_\sigma$  - Conjunto de tensões admissíveis  
 $\partial\mathbb{E}_\sigma$  - Superfície de escoamento (contorno de  $\mathbb{E}_\sigma$ )

**Abreviaturas:**

- ADAS - Added Damping And Stiffness (amortecimento e rigidez adicionais)  
BRB - Buckling Restrained Brace (contraventamento com restrição à flambagem)  
MEF - Método dos Elementos Finitos

# **1 - INTRODUÇÃO**

## **1.1 – VISÃO GERAL**

Os terremotos constituem desastres naturais de grande impacto, experimentados pela humanidade. Podem destruir completamente cidades e dizimar grande numero de pessoas, causando prejuízos sociais e econômicos. Como exemplo um dos mais recentes e mais devastadores da América foi o de Haiti ocorrido no dia 12 de janeiro de 2010. O terremoto alcançou 7 graus na escala de Richter. De acordo com estimativas, foram 222.570 pessoas mortas e 1,3 milhões de desabrigados. Milhares de edifícios, incluindo os elementos mais significativos do patrimônio da capital, como o Palácio Presidencial, o edifício do Parlamento, a Catedral de Notre-Dame de Port-au-Prince, a principal penitenciária do país e todos os hospitais foram destruídos ou gravemente danificados.

Sabe-se que no Brasil ocorrem terremotos, geralmente com pequena intensidade. Porém, não se pode descartar a possibilidade de ocorrência de sismos de magnitudes mais elevadas, como o registrado em 1955 no Mato Grosso, medindo 6.6 graus na escala de Richter. Terremotos com esta magnitude são capazes de provocar grandes tragédias.

Diante dessa realidade, preocupados com a integridade física das edificações e com a segurança dos seus ocupantes, os engenheiros necessitam encontrar maneiras de evitar ou pelo menos amenizar os danos nos edifícios causados pelas excitações sísmicas. Uma das técnicas empregadas na atualidade é o uso de dissipadores de energia. Os avanços recentes da tecnologia de dissipadores de energia, cuja função principal é reduzir a vulnerabilidade das edificações ante a ação de sismos intensos, permitem sua ampla utilização em países como Japão, Estados Unidos, Nova Zelândia, Itália e China.

Em relação à análise de estruturas que empregam dissipadores de energia, uma análise dinâmica não linear é necessária para avaliar corretamente a resposta destas estruturas. O Método dos Elementos Finitos (MEF) atualmente proporciona o quadro mais adequado para a formulação desta análise.

Neste capítulo faz-se uma introdução geral a este trabalho, onde se expõe a problemática em questão e de que forma se pretende atingir os objetivos propostos.

## **1.2 - PROPOSTA DO PROBLEMA**

O conceito de dissipação de energia está se tornando a cada dia mais importante e necessário ao se projetar estruturas de grande envergadura, especialmente em países com natureza sísmica. Igualmente destaca-se a importância da aplicação de dissipadores na restauração de edifícios de grande valor para a sociedade.

Estes dispositivos reduzem a demanda de deformação e os esforços produzidos pelo sismo mediante o aumento do amortecimento estrutural. Como resultado, os esforços induzidos pelo sismo na estrutura podem ser em mais de 50% menores que os correspondentes à estrutura sem dissipadores, reduzindo substancialmente as incursões inelásticas da estrutura, assim como os deslocamentos ocasionados pela solicitação dinâmica.

O edifício sem dissipadores de energia sobrevive ao sismo severo dissipando energia em seus elementos principais, identificados como aqueles que sofrem dano. Se a estrutura é submetida a deformações que possam alcançar graus excessivos, isto pode ser refletido em um desempenho estrutural deficiente. Embora o desenho sísmico tradicional propõe-se de tal maneira que o nível de dano na estrutura não resulte em seu colapso, este dano pode conduzir a situações altamente indesejáveis, tal como os elevados custos de reabilitação estrutural.

Analisar uma estrutura que incursiona na faixa inelástica pode vir a apresentar certa incerteza em relação ao momento de prever o comportamento e a intensidade do dano nos diferentes elementos estruturais. Ante isto, se adota o conceito de um sistema especialmente incorporado à estrutura para absorver a energia mediante o escoamento de um dispositivo metálico. Assim é possível realizar uma análise com maior nível de certeza, uma vez que com isto se concentra o comportamento inelástico em pontos previamente definidos pela localização dos dissipadores.

Considerando a importância desta análise, propõe-se como principal linha desta dissertação, estabelecer uma metodologia detalhada para realizar a análise dinâmica tempo-história não linear de pórticos planos com dissipadores de energia e sua implementação em um programa

em linguagem computacional MATLAB capaz de realizar este tipo de análise. Para concretizar isto se apresentam dois exemplos acadêmicos para avaliar a eficiência da metodologia proposta.

Além disso, deve-se notar que existe inúmera quantidade de softwares comerciais para realizar esta análise, incluindo-se o ABAQUS, o ADINA, o ANSYS e os orientados exclusivamente para estruturas de engenharia civil, tais como o SAP e o ETABS. Ao contrário destes softwares, neste estudo é mostrado o algoritmo da metodologia proposta para a solução passo-a-passo do problema. Igualmente, o programa computacional criado é de código fonte aberto, o qual além de realizar a análise requerida permite a implementação de novas funções e o melhoramento das existentes.

### **1.3 – OBJETIVOS**

#### ***Gerais:***

- Desenvolver uma metodologia detalhada e eficiente para realizar a análise dinâmica tempo-historia não linear de estruturas com dissipadores metálicos de energia.
- Caracterizar a resposta global do dissipador metálico, para o qual é necessário definir um modelo para o seu comportamento força-deslocamento não linear, mostrar o algoritmo de integração deste modelo e apresentar a idealização de elemento finito do dissipador.

#### ***Específicos:***

- Criar um programa computacional, em formato MATLAB, capaz de analisar pórticos planos com dissipadores metálicos de energia, de acordo com a metodologia a desenvolver.
- Mostrar a eficácia da metodologia proposta e a validade do programa criado, para o qual se consideram dois exemplos acadêmicos e se comparam os resultados das análises com os do software comercial SAP2000.

### **1.4 – ESTRUTURA DO TRABALHO**

O documento está organizado seguindo uma sequência lógica de tal maneira que seja fácil o acompanhamento da metodologia proposta. Uma breve descrição dos capítulos apresenta-se a seguir:

O Capítulo 1 tem por finalidade apresentar de maneira geral o tema a ser desenvolvido, justificando a importância do trabalho e relacionando os principais objetivos do mesmo.

No Capítulo 2 apresentam-se os aspectos gerais dos principais sistemas de controle de vibrações que existem na atualidade, com uma especial ênfase aos dissipadores metálicos e de um modo particular ao dispositivo ADAS (Added Damping And Stiffness), o qual será considerado neste estudo.

No Capítulo 3 apresenta-se a formulação de elementos finitos para a análise dinâmica não linear de estruturas com dissipadores e posteriormente se aborda a resolução deste problema.

No Capítulo 4 mostra-se o modelamento do dissipador ADAS, para o qual se parte dos princípios básicos de plasticidade. Igualmente apresenta-se a formulação do modelo força-deslocamento bilinear do dispositivo ADAS, o algoritmo de integração deste modelo e a idealização em elementos finitos do dispositivo ADAS.

No Capítulo 5 apresenta-se o programa em formato MATLAB ao descrever o procedimento geral seguido por este para realizar a análise de pórticos planos com dissipadores ADAS. Mostra-se também o fluxograma referente ao algoritmo empregado no programa.

No Capítulo 6 apresentam-se dois exemplos acadêmicos com a finalidade de avaliar a eficácia da metodologia proposta nos capítulos anteriores e a validade do programa criado. Nestes exemplos se fará uma comparação das respostas obtidas com aquelas do software comercial SAP2000.

Finalmente, no Capítulo 7 expõem-se as conclusões referentes à metodologia apresentada e discute-se a possibilidade de continuação do presente tema em pesquisas futuras.

## **2 - SISTEMAS PASSIVOS DE CONTROLE DE VIBRAÇÕES**

### **2.1 - INTRODUÇÃO**

Com base em considerações derivadas do avanço tecnológico, propôs-se resolver o problema de edificar construções mais seguras e minimizar o efeito do sismo nas estruturas mediante a utilização de sistemas de dissipação, cujo fim básico é reduzir e controlar as vibrações de um edifício provocadas principalmente por solicitações sísmicas. A ideia é acoplar à estrutura um sistema mecânico e permitir que o mencionado sistema absorva uma parte da energia sísmica imposta ao conjunto.

Algumas das vantagens do uso de dissipadores de energia em edificações são:

- Redução da demanda sísmica na estrutura principal;
- Concentração do dano em pontos e elementos identificados e fáceis de substituir após um evento sísmico intenso;
- Aumento da rigidez da edificação, o que traz consigo a proteção dos elementos não estruturais.

Tais vantagens são compatíveis com a filosofia moderna na engenharia sísmica em que “os elementos dissipadores de energia possam ser inspecionados e substituídos após um terremoto importante” (WILSON, 2002).

Neste capítulo faz-se uma revisão geral dos aspectos técnicos dos dispositivos atualmente usados na dissipação passiva de energia, e em especial aos que atuam por meio do escoamento de metais.

### **2.2 - SISTEMAS DE CONTROLE DE VIBRAÇÕES**

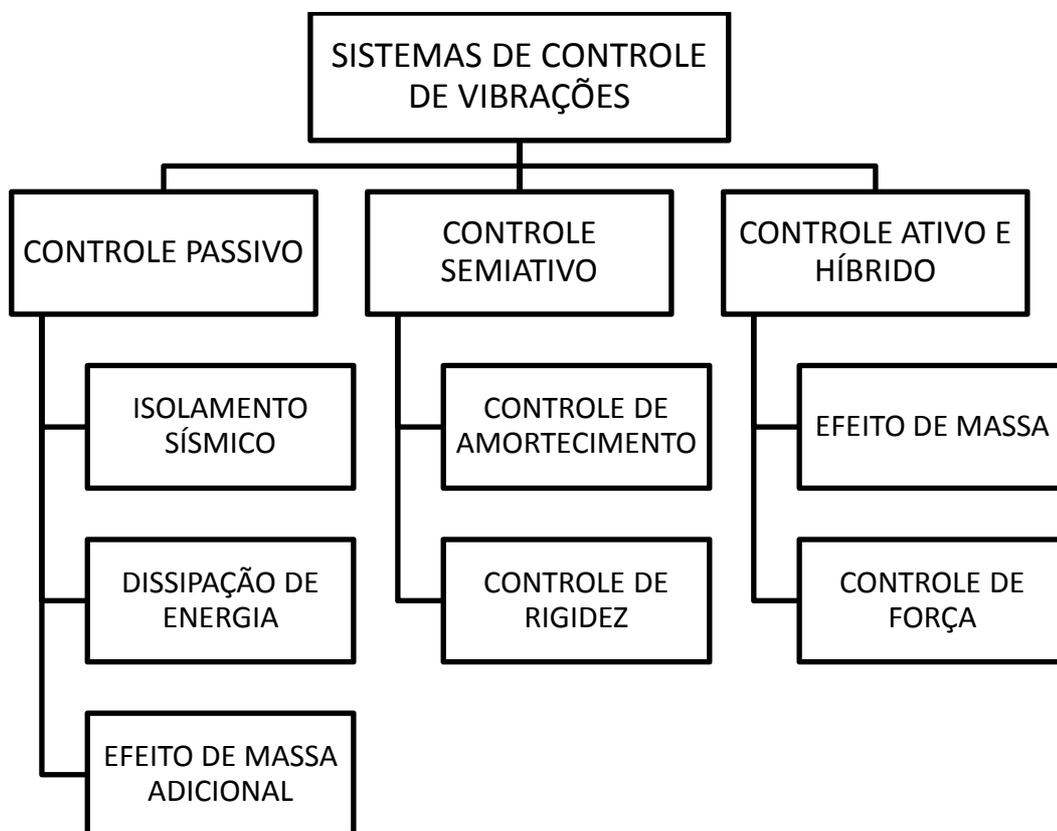
Todas as estruturas dissipam energia, produto de esforços internos, fricção, rompimento, deformações plásticas, etc. Quanto maior é a capacidade de dissipação de energia menor será a amplitude das vibrações. Algumas estruturas têm um reduzido amortecimento, pelo que experimentam grandes amplitudes de vibração inclusive para sismos moderados. Os métodos que incrementam a capacidade de dissipação de energia são muito eficientes para reduzir a

amplitude da vibração. Em definitivo, os sistemas de controle de vibrações reduzem e controlam a resposta da estrutura, focando-se primordialmente nas excitações de natureza sísmica.

As técnicas de controle de resposta sísmica podem ser classificadas segundo a forma de como o sistema maneja a energia imposta pelo sismo, sua absorção e dissipação. Conhecem-se como dissipadores os mecanismos ou dispositivos incorporados à estrutura encarregados de contribuir com uma quantidade extra de dissipação e se conhecem como sistemas isoladores aos que se focam em diminuir a energia de entrada no sistema estrutural. Tradicionalmente propõe-se utilizar o conceito de energia como ferramenta para determinar o comportamento e a resposta de uma estrutura sujeita a cargas dinâmicas.

Segundo a norma internacional ISO 3010 (2001) sugere-se uma classificação geral que consiste em três sistemas de controle da resposta sísmica: controle passivo, controle ativo e híbrido e controle semiativo (ver Figura 2.1).

Figura 2.1 - Classificação geral das técnicas de controle de resposta sísmica



Fonte: ISO 3010 (2001)

### **2.2.1 - Sistemas de controle passivo**

Em relação ao objetivo deste trabalho destaca-se o primeiro ramo do esquema anterior (ver Figura 2.1). Os sistemas passivos de dissipação de energia abarcam diferentes tipos de materiais e dispositivos que melhoram o amortecimento, a rigidez e a resistência de uma estrutura. Estes se baseiam em elementos que respondem de forma inercial à ação sísmica e ao contrario do resto dos sistemas, não precisam de uma fonte de energia para seu funcionamento.

Os dispositivos passivos são elementos de caráter reativo cuja resposta não é controlável e dependem unicamente das condições de trabalho (ou de contorno) em que se encontrem. São sistemas que intervêm alterando as propriedades dinâmicas do edifício, provocando uma redução de sua resposta estrutural. Esta redução pode ser atingida pela conversão de energia cinética em calor ou pela transferência de energia entre modos de vibração. O primeiro método inclui dispositivos que operam com base em princípios tais como atrito, escoamento de metais, transformações de fase em metais, deformações de sólidos visco-elásticos ou fluidos. O segundo método inclui a incorporação de osciladores adicionais, os quais atuam como absorvedores de vibrações dinâmicas.

Entre suas vantagens se encontra sua competitividade econômica e a robustez de seu comportamento. Em definitivo, os sistemas de controle passivo podem ser classificados em: i) sistemas de isolamento de base, ii) sistemas de dissipação, e iii) sistemas inerciais acoplados. Estes podem ser usados tanto para a redução de ameaças naturais como para a reabilitação de estruturas danificadas ou para estruturas deficientes. Nos últimos anos, empreenderam-se sérios esforços para converter o conceito de dissipação de energia ou amortecimento adicional em uma tecnologia factível, de tal forma que um número considerável destes dispositivos apresenta uma ampla utilização em estruturas ao redor de todo o mundo. Em geral, todos se caracterizam por sua capacidade de melhorar a dissipação de energia dos sistemas estruturais nos quais se instalam. Observa-se que os sistemas de isolamento de bloco de elastômero e de fricção podem também ser utilizados em combinação com sistemas de dissipação de energia.

## 2.3 - DISSIPADORES HISTERÉTICOS POR PLASTIFICAÇÃO DE METAIS

Dentro dos sistemas passivos, podemos encontrar os de absorção ou dissipação de energia, os quais dissipam a energia de entrada dos sismos para reduzir a resposta de vibração da estrutura. Estes por sua vez, se classificam em dispositivos com amortecimento viscoso e hysterético.

Este trabalho foca-se especialmente na utilização dos dispositivos que dissipam a energia de entrada do sismo através da deformação inelástica de metais. Estes utilizam o deslocamento relativo de entrepiso (*drift*) gerado durante as excitações provocadas principalmente por ações sísmicas.

Este tipo de dispositivos oferece grande capacidade de amortecimento com volumes pequenos em relação à totalidade do edifício, conseguindo-se isto basicamente porque suas formas geométricas induzem a que o escoamento se apresente na maior parte ou na totalidade do metal, variando seu efeito de amortecimento com a amplitude da resposta ou vibração.

Estes dissipadores metálicos apresentam características favoráveis, tais como:

- ✓ Caracterizam-se, ao invés de outras técnicas, por ser econômicos em sua instalação e reposição, não se deterioram em longos períodos de tempo e são altamente confiáveis;
- ✓ Baseiam-se na capacidade do aço, cobre ou outras ligas metálicas, de sustentar muitos ciclos do comportamento de desempenho hysterético estável para dissipar a energia de entrada;
- ✓ E por último, seu comportamento hysterético não depende da velocidade ou aceleração da resposta, em vez disso depende dos níveis de deformação atingidos.

A seguir descrevem-se alguns dos dispositivos metálicos mais utilizados em edifícios.

### 2.3.1 - Dispositivo ADAS

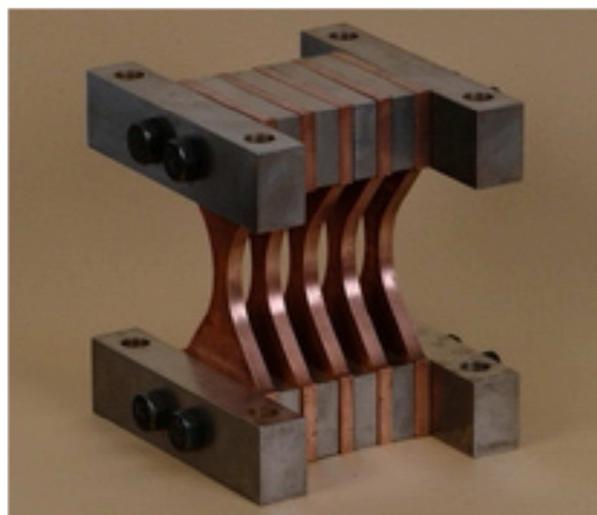
Added Damping And Stiffness (ADAS) consiste em múltiplas placas de aço em paralelo em forma de “X” tal como é mostrado na Figura 2.2 e Figura 2.3. Este dispositivo é projetado para ser instalado em um pórtico de edifício, onde sua base seja conectada na parte superior do contraventamento tipo chevron (V invertido) e sua mesa na parte inferior da viga do

pavimento. O número de placas em paralelo é variável permitindo ajustar o dissipador às necessidades da estrutura a qual se incorpora. Cada placa do dispositivo encontra-se impedida de giro em ambos extremos, de forma que um deslocamento relativo entre estes na direção perpendicular ao plano da placa produz uma distribuição linear de momentos fletores, simétrica e com dupla curvatura. Ao longo do dissipador ocorre uma proporcionalidade linear com a distribuição de momentos fletores, o qual deriva em uma generalização da plastificação em um curto intervalo de deslocamento.

A vantagem particular das placas em forma de X é que permitem uma distribuição uniforme de deformações plásticas em toda a altura do dispositivo. Ao evitar zonas não desejáveis de concentração de deformações, pode ser conseguido um comportamento plástico estável e repetitivo.

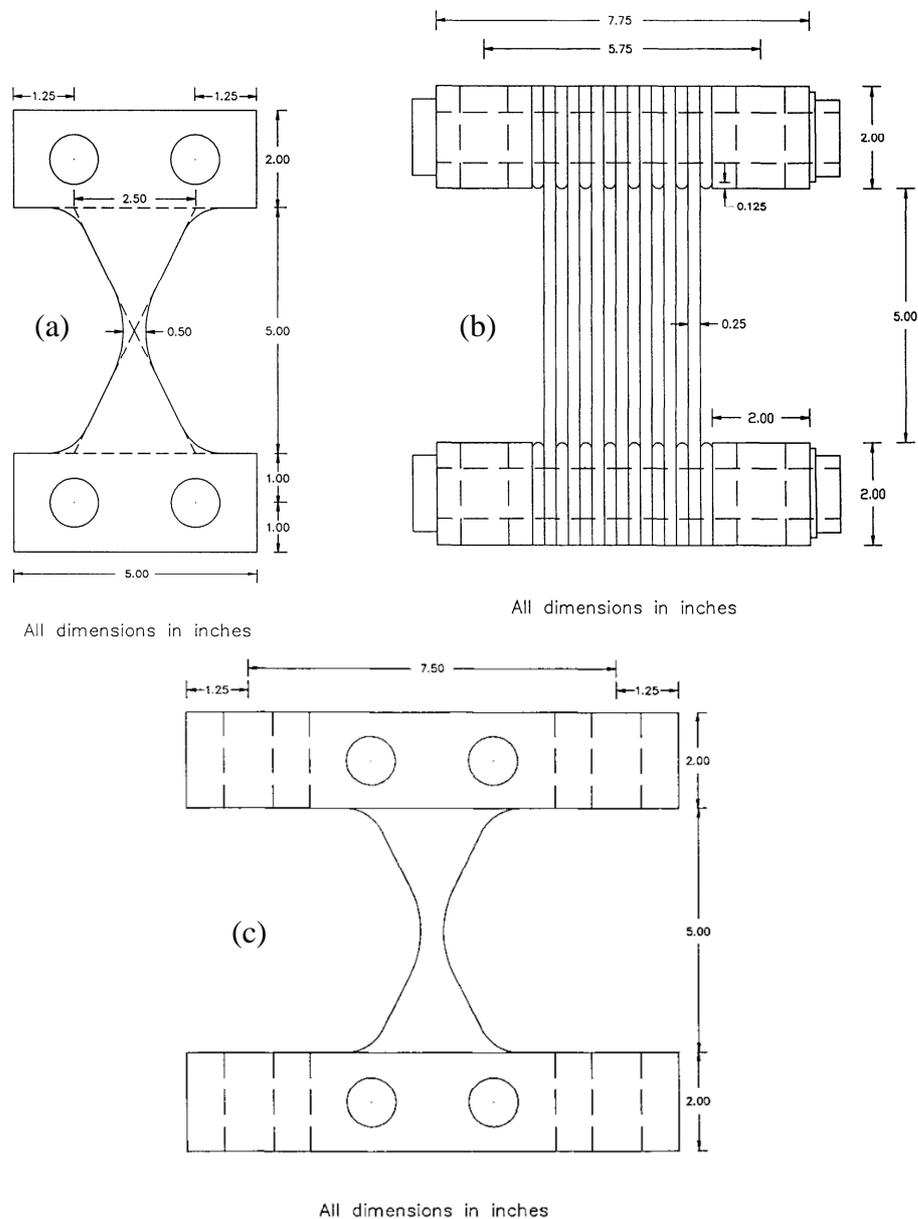
O dispositivo ADAS é projetado para auxiliar a reduzir a resposta sísmica de estruturas através da sua deformação plástica, que produz um aumento substancial da energia histerética dissipada na estrutura. Esta dissipação de energia histerética adicional devido aos dispositivos de ADAS também pode ser entendida como um aumento do amortecimento interno equivalente da estrutura.

Figura 2.2 - Dissipador ADAS de cobre



Fonte: SIRVE (2014)

Figura 2.3 – (a) Placa em X – elevação, (b) Dissipador ADAS – elevação lateral e (c) Dissipador ADAS – elevação da extremidade



Fonte: Whittaker et al. (1989)

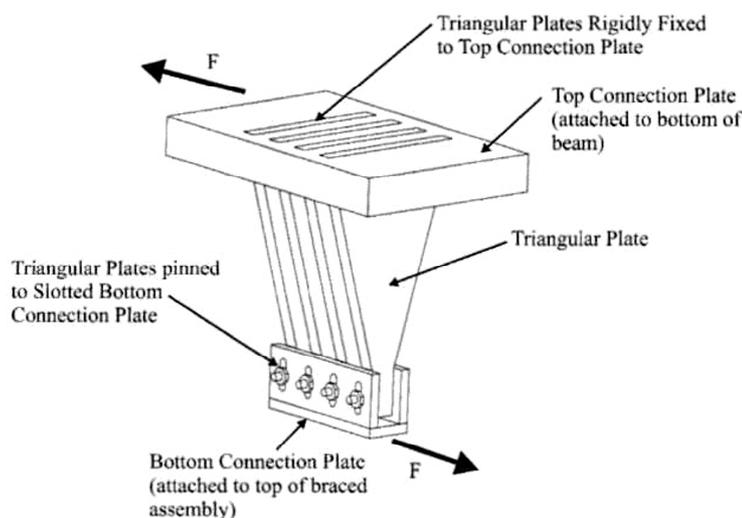
### 2.3.2 - Dispositivo TADAS

Triangular Plate Added Damping And Stiffness (TADAS) é um dissipador constituído por placas triangulares de aço dispostas em paralelo tal como é mostrado na Figura 2.4. A base maior da placa liga-se ao nível da viga de uma estrutura de pórticos, enquanto que a outra se articula com uma união de pino a dois contraventamentos dirigidos à base dos pilares do pórtico. Com um deslocamento relativo entre os extremos da placa perpendicular a seu plano,

consegue-se a plastificação por flexão por curvatura simples. Ao incorporar este sistema em um pórtico de aço em escala natural observou-se que as reduções na resposta são similares às obtidas com o ADAS.

A característica de maior interesse do TADAS é que o efeito das cargas de gravidade da estrutura pode ser separado completamente do dissipador usando orifícios ovalados no extremo livre. Assim, para grandes deformações os deslocamentos verticais nesse extremo não estão restringidos. Portanto, ao se gerar plasticidade por flexão, a resposta inelástica do dispositivo é altamente previsível. Ademais não há risco de instabilidade da placa por carga axial excessiva.

Figura 2.4 - Dissipador TADAS



Fonte: Christopoulos e Filiatrault (2006)

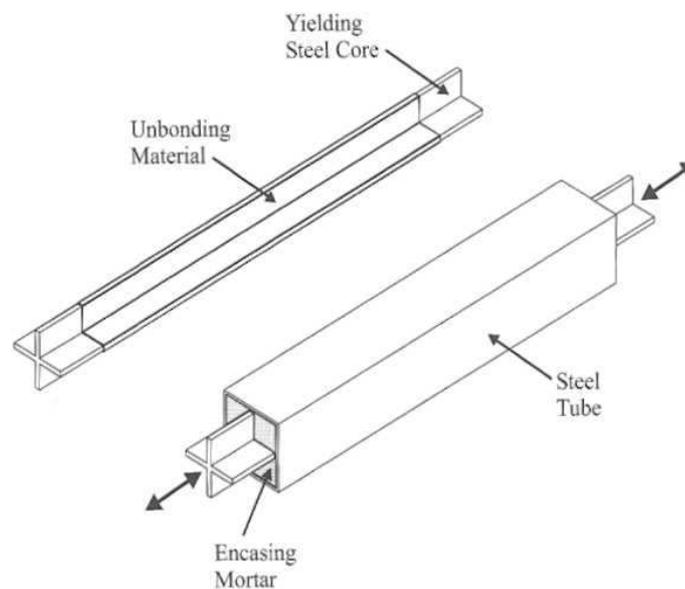
### 2.3.3 - Dispositivo BUCKLING-RESTRAINED BRACE (BRB)

O buckling-restrained brace (BRB) (contraventamento restrito à flambagem) se trata de um elemento de aço estrutural que se caracteriza por oferecer resistência e dissipação da energia, e ao mesmo tempo exibe um escoamento bem distribuído. Tal BRB é um contraventamento não aderente, fabricado pela Nippon Steel Corporation, no Japão. Conforme é ilustrado na Figura 2.5, o contraventamento não aderente consiste de um elemento de núcleo de aço, frequentemente referido como a placa núcleo, envolto em um tubo de aço preenchido com concreto. O núcleo de aço suporta a carga axial, enquanto o tubo exterior, por meio do concreto, proporciona suporte lateral para o núcleo e evita a flambagem global. Uma camada delgada de material lubrificante ao longo do núcleo de aço na interface com o concreto

elimina a transferência de cisalhamento e as concentrações de tensão localizadas durante o alongamento. Ao mesmo tempo acomoda a contração e a expansão longitudinal do núcleo de aço, quando este escoa durante a tração e a compressão.

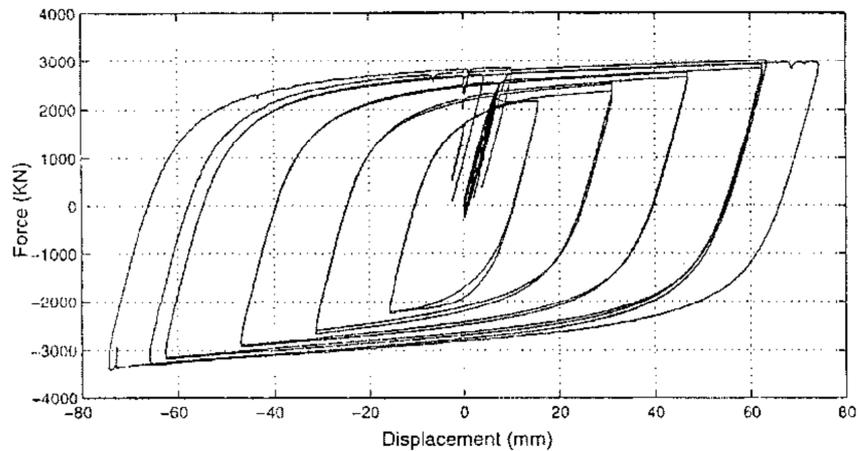
Como é mostrado na Figura 2.6, durante a resposta elástica inicial do amortecedor BRB, o dispositivo fornece apenas rigidez. A medida que o amortecedor BRB escoa, a rigidez se reduz e a dissipação de energia ocorre devido à resposta histerética inelástica. O comportamento histerético de um amortecedor BRB pode ser representado por vários modelos matemáticos que descrevem o comportamento plástico dos metais. Como exemplo tem-se o modelo de Bouc-Wen (WEN, 1976), o qual é descrito por Black et al. (2004) e comparado com os dados dos ensaios experimentais no BRB. A capacidade de dissipação de energia estável dos BRBs os torna muito atrativos para aplicações de proteção sísmica. Detalhes adicionais sobre o comportamento dos amortecedores BRB são fornecidos por Black et al. (2004).

Figura 2.5 - Componentes de um buckling-restrained brace (BRB)



Fonte: Christopoulos e Filiatrault (2006)

Figura 2.6 - Resposta histerética de um buckling-restrained brace (BRB)



Fonte: Black et al. (2004)

A vantagem de os BRBs sobre os contraventamentos convencionais está na sua capacidade para suportar a carga, escoar e assim dissipar a energia quando carregado tanto em tração como em compressão. Em contraste, contraventamentos convencionais alcançam sua capacidade total através do escoamento inelástico quando eles são carregados em tração, enquanto que eles se curvam sem dissipar uma quantidade substancial de energia quando carregados em compressão.

Em muitos casos, os amortecedores BRB são instalados dentro de um arranjo de contraventamento tipo chevron (veja a Figura 2.7). Neste caso, quando sujeito a carga lateral, um amortecedor estará em compressão e o outro em tração e, por conseguinte carga vertical zero é aplicada no ponto de interseção entre os amortecedores e a viga acima. Neste sentido, os amortecedores podem ser considerados como superiores a um arranjo de contraventamento tipo chevron convencional onde o elemento de compressão é esperado para curvar-se elasticamente, deixando uma componente potencialmente elevada da força vertical desequilibrada no elemento de tração, a qual por sua vez será aplicada na viga acima.

Figura 2.7 - Fotos de (a) Hospital Santa Clara Medical Center em construção; (b) vista close-up dos buckling-restrained braces (BRBs) instalados



Fonte: Symans et al. (2008)

## 2.4 - DISPOSITIVO CONSIDERADO NO ESTUDO

Para o desenvolvimento deste estudo escolheu-se analisar o dissipador ADAS, devido à ampla utilização destes dispositivos em edifícios situados em zonas de risco sísmico elevado e às vantagens deste dispositivo. Os principais benefícios destes dispositivos são: (1) a dissipação de energia é concentrada em localizações que foram projetados para esta finalidade, (2) as exigências de dissipação de energia em outros elementos estruturais podem ser substancialmente reduzidas; e (3) o escoamento dos dispositivos ADAS não afetará a capacidade de serviço para cargas de gravidade do sistema estrutural, porque os dispositivos são apenas parte do sistema para resistir cargas laterais. Se for necessário os dispositivos ADAS podem ser facilmente substituídos após um terremoto. Na seção 2.3.1 descreveu-se o dissipador ADAS e a seguir se apresentarão os estudos experimentais e as implementações estruturais realizadas.

### 2.4.1 - Estudos experimentais

Investigações extensas foram realizadas do comportamento individual dos dissipadores ADAS e quando incorporados em sistemas estruturais. De fato é seguro afirmar que a maioria dos pesquisadores tem empregado uma abordagem experimental para o projeto destes elementos.

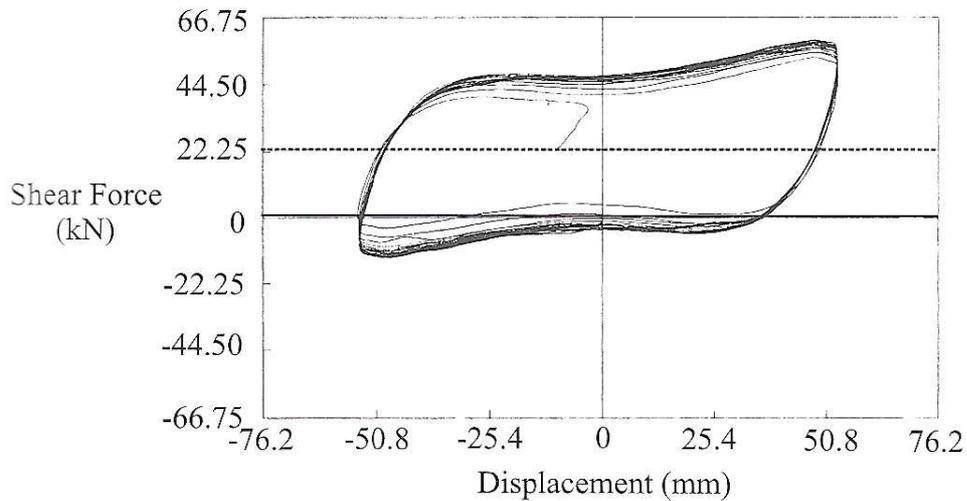
Em primeiro lugar, deve ser mencionado como antecedente que Bergman e Goel (1987) relataram sobre ensaios cíclicos de amortecedores de placas de aço em forma X e em forma de V similares ao dispositivo ADAS. Detalhes adicionais são encontrados no relatório destes autores.

Nesta seção nos concentraremos em um dos estudos experimentais mais completos, o qual foi realizado na Universidade de Califórnia em Berkeley e relatado por Whittaker et al. (1989). A investigação, a qual foi patrocinada pela Bechtel Power Corporation e CounterQuake Corporation, concentrou-se na avaliação dos amortecedores ADAS. As características dimensionais de um elemento típico ADAS mostraram-se previamente nas Figura 2.3. Em Whittaker et al. (1989) realizaram-se ensaios cíclicos de componentes e ensaios no simulador de terremoto.

Para a determinação das características mecânicas dos elementos ADAS foi empregado um pórtico plano para ensaio usando-se o controle do deslocamento horizontal e o controle da força vertical. Tal como é ilustrado na Figura 2.8, os ensaios cíclicos sobre o pórtico plano incluindo as cargas gravitacionais mostraram um comportamento histerético estável para várias amplitudes de deformação.

Os resultados do teste realizado por Whittaker et al. (1989) indicaram que os elementos ADAS foram capazes de sustentar 100 ciclos de carga a uma deformação correspondente a três vezes o deslocamento de escoamento medido  $\Delta_y$  sem sinais de degradação. Com base nestes testes, conclui-se que os elementos ADAS podem ser projetados de forma segura para um intervalo dos deslocamentos de pico até  $10\Delta_y$ .

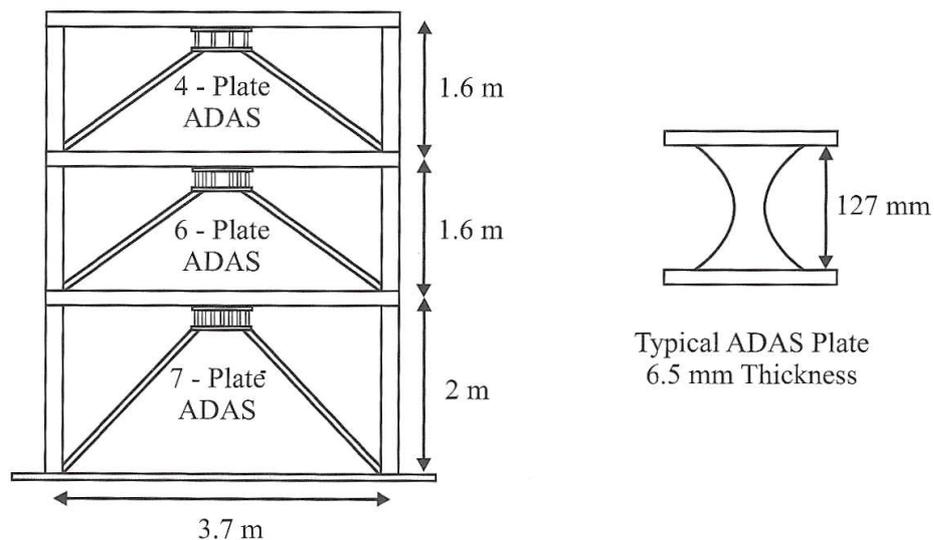
Figura 2.8 - Laços de histerese de dissipadores ADAS em um pórtico plano com cargas de gravidade



Fonte: Whittaker et al. (1989)

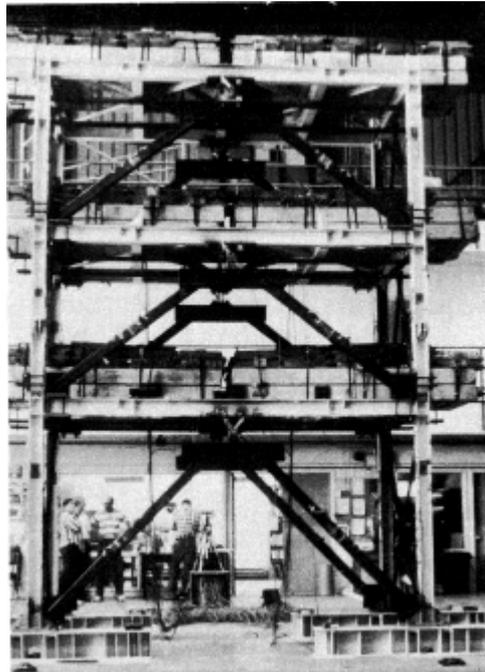
Testes com mesa vibratória em um pórtico espacial (Ductile Moment Resisting Space Frame - DMRSF) denominado ADAS-3, com dimensões de 3.7 m por 4.9 m e equipado com seis dissipadores ADAS de aço A36, também foram realizados por Whittaker et al. (1989). A geometria do pórtico testado é mostrada na Figura 2.9, e a foto da elevação lateral da estrutura é mostrada na Figura 2.10.

Figura 2.9 - Geometria da estrutura de ensaio ADAS-3



Fonte: Whittaker et al. (1989)

Figura 2.10 - Foto da elevação lateral da estrutura de ensaio ADAS-3



Fonte: Whittaker et al. (1989)

A Tabela 2.1 apresenta as características dinâmicas do pórtico testado com o sistema ADAS, denominado ADAS-3, e sem os dissipadores ADAS, denominado DMRSF. Há uma redução significativa no período natural fundamental causada pela rigidez suplementar do contraventamento tipo V invertido (chevron) e dos dissipadores ADAS.

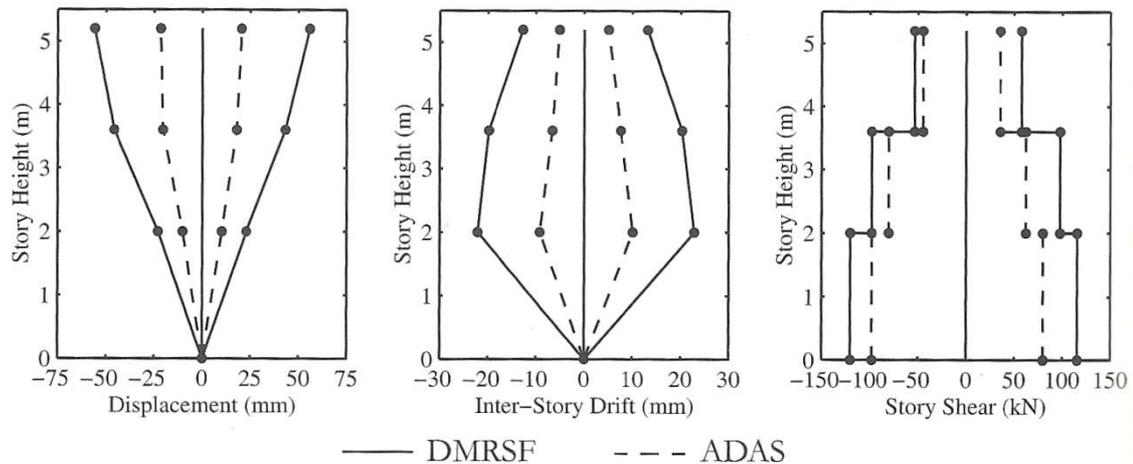
Tabela 2.1 - Características dinâmicas das estruturas testadas.

		1° modo	2° modo
DMRSF	Período (s)	0.74	0.22
	Taxa de amortecimento (%)	2.10	1.30
ADAS-3	Período (s)	0.47	0.17
	Taxa de amortecimento (%)	3.40	1.70

Fonte: Whittaker et al. (1989)

Vários registros de terremoto foram usados nos ensaios da mesa de vibrar. Comparação da resposta com e sem os dissipadores ADAS para o registro (N10E) do terremoto de Chile, Lollole 1985, é mostrada na Figura 2.11. Os efeitos benéficos da introdução dos dissipadores ADAS são evidentes.

Figura 2.11 - Comparação da resposta da estrutura de ensaio ADAS-3 para o registro (N10E) do terremoto de Chile, Lolleo 1985.



Fonte: Whittaker et al. (1989)

Finalmente algumas das conclusões da investigação de Whittaker et al. (1989) são:

- Todos os dispositivos ADAS testados exibiram um comportamento histerético estável, sem nenhum sinal de redução ou degradação da resistência e rigidez para amplitudes de deslocamento de até cerca de  $14\Delta_y$ .
- Os dispositivos podem sustentar um número extremamente grande de reversões de escoamento (mais de 100 ciclos no ensaio) e acumular uma elevada quantidade de deformação plástica, o que indica que os dispositivos ADAS são dissipadores de energia extremamente confiáveis.
- Na faixa de deslocamento  $\Delta$  menor que  $6\Delta_y$ , o comportamento histerético de um dispositivo de ADAS depende apenas da força de escoamento  $P_y$ , o deslocamento de escoamento  $\Delta_y$  e o grau de restrição no contorno. Os dispositivos ADAS podem ser modelados como perfeitamente plásticos para analisar a resposta inelástica das estruturas.
- Para o deslocamento além da faixa  $6\Delta_y$ , a taxa de endurecimento por deformação é significativa e um modelo bilinear deve ser utilizado para ter em consideração o aumento de resistência devido ao endurecimento por deformação.
- Os dispositivos ADAS adicionados aos pórticos testados aumentam a rigidez e resistência dos pórticos. Mas o aumento mais significativo pela adição de dispositivos ADAS foi sua capacidade de dissipação de energia que resultou em uma resposta do deslocamento pequena.

## 2.4.2 - Implementações estruturais

Nesta seção, nos concentraremos em dois exemplos nos quais os amortecedores metálicos ADAS são utilizados como dissipadores de energia passivos dentro da superestrutura de um edifício. Os dois exemplos utilizam os dissipadores ADAS para a reabilitação sísmica de uma estrutura existente. Estes exemplos são descritos com mais detalhe por Soong e Dargush (1997), igualmente exemplos adicionais são descritos por estes autores.

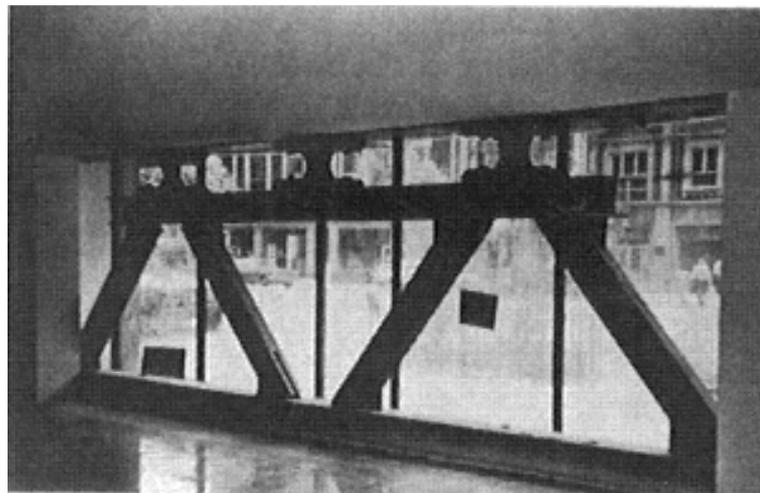
O primeiro destes ocorreu na Cidade de México e é relatado por Martinez-Romero (1993). O edifício de treze andares Izazaga # 38-40 é mostrado na Figura 2.12. Esta é uma estrutura aporticada de concreto armado com paredes de alvenaria construída no final de 1970. O edifício sofreu danos moderados nos terremotos na Cidade do México em 1985. Uma reabilitação depois foi mal sucedida, uma vez que danos novos ocorreram durante ataques sísmicos em 1986 e 1989. Tecnologia de dissipação de energia passiva foi selecionada para uma segunda reabilitação. Para este projeto cerca de 250 amortecedores ADAS foram instalados nos marcos externos em 1990, para permitir a operação contínua do edifício durante a construção. Uma imagem de uma instalação típica de um arranjo contraventamento-amortecedor é fornecida na Figura 2.13. Análises estruturais indicaram que os períodos fundamentais nas direções principais foram reduzidos de 3.82s e 2.33 s para 2.24 s e 2.01 s com a adição dos dispositivos ADAS. Os cálculos também determinaram uma redução de 40% no deslocamento relativo entre andares, enquanto mantendo o mesmo coeficiente de cisalhamento na base. Análises tempo-história não lineares com o software DRAIN-2DX foram utilizados para verificar o projeto final.

Figura 2.12 - Edifício Izazaga #38-40



Fonte: Martinez-Romero (1993)

Figura 2.13 - Arranjo contraventamento-amortecedor no edifício Izazaga #38-40

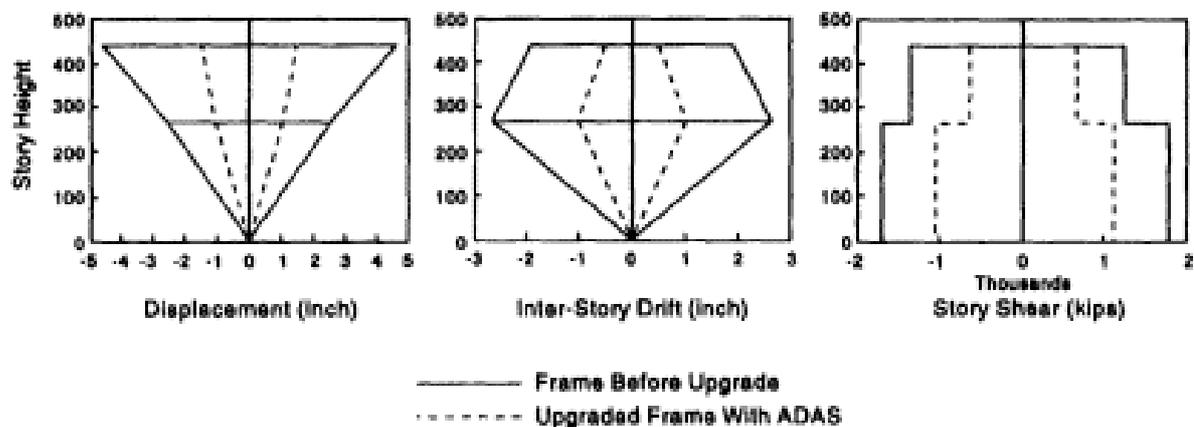


Fonte: Martinez-Romero (1993)

O segundo exemplo de implementação de amortecedores ADAS considerado nesta seção envolve a reabilitação do edifício Wells Fargo Bank em San Francisco, Califórnia (EUA) discutido em Perry et al. (1993). O edifício é uma estrutura de marcos de concreto não dúctil de dois andares construída originalmente em 1967 e, posteriormente, danificada pelo terremoto de Loma Prieta de 1989. A reabilitação voluntária por parte de Wells Fargo utilizou contraventamentos chevron e amortecedores ADAS. Esquemas de reabilitação mais convencionais foram rejeitados devido à incapacidade de cumprir os objetivos de desempenho

evitando ao mesmo tempo o trabalho na fundação. Um total de sete dispositivos ADAS foram utilizados, cada um com uma força de escoamento de 150 kips. Numerosas análises lineares e não lineares foram utilizados no processo do projeto de reabilitação. O projeto final foi verificado com análises tempo-história não lineares com o software DRAIN-2D. A comparação da resposta calculada antes e depois da reabilitação está contida na Figura 2.14. Os resultados numéricos indicaram que o projeto revisado era estável e que todos os critérios foram cumpridos. Perry et al. (1993) também sugerem que os elementos ADAS tem muitas aplicações potenciais para projetos novos e de reabilitação os quais envolvem tanto estruturas aperticadas de aço ou de concreto.

Figura 2.14 - Comparação dos resultados calculados para o edifício Wells Fargo Bank



Fonte: Perry et al. (1993)

### **3 - FORMULAÇÃO E SOLUÇÃO DO MODELO DINÂMICO**

#### **3.1 - INTRODUÇÃO**

Para estruturas que incorporam sistemas passivos de dissipação de energia, a idealização tradicional destas como entidades estáticas não é mais adequada. Em vez disso, as estruturas devem ser analisadas e projetadas considerando o seu comportamento dinâmico. Igualmente, torna-se imperativo caracterizar com precisão o comportamento de qualquer dispositivo passivo através da construção de um modelo força-deslocamento, adequado para carga cíclica dependente-do-tempo. A forma específica do modelo será altamente dependente do tipo de dispositivo. O modelo apropriado para o dispositivo ADAS será desenvolvido em detalhe no capítulo seguinte. Uma vez que o modelo é estabelecido para um dispositivo, este deve ser adequadamente incorporado numa idealização matemática da estrutura global. A idealização de vários-graus-de-liberdade para uma estrutura real é apropriada. Então, deve-se estabelecer a respectiva formulação para a análise dinâmica.

O método dos elementos finitos (MEF) atualmente fornece a base mais adequada para esta formulação. De um ponto de vista puramente físico, cada elemento estrutural particular é representado matematicamente por um ou mais elementos finitos com a mesma massa, rigidez e características de amortecimento do membro original. Vigas e colunas são representadas por elementos unidimensionais, enquanto os muros de cisalhamento e lajes são idealizados pelo emprego de elementos finitos bidimensionais. Para componentes estruturais mais complexos ou críticos, modelos tridimensionais completos podem ser desenvolvidos e incorporados ao modelo da estrutura global. Em relação à solução desta formulação, existem procedimentos de solução baseados em integração no tempo explícita e implícita, e superposição modal. Para estruturas com sistemas de dissipação de energia passiva, os métodos no domínio do tempo são muitas vezes necessários. Para uma discussão aprofundada sobre a análise de elementos finitos deve-se consultar Bathe (1996).

Portanto, a fim de abordar a análise dinâmica de estruturas reais com sistemas passivos de dissipação de energia, as quais são idealizadas como um sistema de vários-graus-de-liberdade, uma formulação baseada no MEF será introduzida, e posteriormente a solução usando o método da análise direta no domínio do tempo será desenvolvido.

### 3.2 - FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS

Para uma análise real, é necessário decidir se um problema cai em uma ou outra categoria de análise, e esta determina qual formulação será utilizada para descrever a situação física real.

Bathe (1996) apresenta uma classificação das análises não lineares, a qual estabelece o tipo de análise e a formulação típica usada para este. Segundo esta classificação o tipo de análise do presente problema é uma análise não linear somente-material, uma vez que o efeito não linear reside apenas na relação força-deslocamento não linear dos dissipadores, e os deslocamentos e as deformações são infinitesimais. Igualmente, a formulação usada é não linear somente-material. Portanto, nesta seção se abordará a formulação não linear somente-material.

O problema básico numa análise não linear geral é encontrar o estado de equilíbrio de uma estrutura correspondente às cargas aplicadas. Assumindo que as cargas aplicadas externamente são descritos como uma função do tempo, as equações do movimento de um sistema de elementos finitos que representam à estrutura em questão podem ser expressas como:

$$\mathbf{M} \, {}^t\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \, {}^t\dot{\mathbf{U}} + {}^t\mathbf{F} - {}^t\mathbf{R} = 0 \quad (3.1)$$

Onde:

- $\mathbf{M}$  = Matriz de massa independente do tempo;
- $\mathbf{C}$  = Matriz de amortecimento independente do tempo;
- ${}^t\mathbf{F}$  = Vetor de forças pontuais nodais internas no tempo  $t$ ;
- ${}^t\mathbf{R}$  = Vetor de forças pontuais nodais externas no tempo  $t$ ;
- ${}^t\dot{\mathbf{U}}$  = Vetor de velocidades pontuais nodais no tempo  $t$ ;
- ${}^t\ddot{\mathbf{U}}$  = Vetor de acelerações pontuais nodais no tempo  $t$ .

No caso de uma excitação sísmica temos que:

$${}^t\mathbf{R} = -\mathbf{M} \mathbf{J} \, {}^t\ddot{u}_g \quad (3.2)$$

Onde:

- ${}^t\ddot{u}_g$  = Aceleração do solo devido ao sismo no tempo  $t$ ;
- $\mathbf{J}$  = Vetor de influencia de  $\ddot{u}_g$ .

A matriz  $\mathbf{M}$  e o vetor  ${}^t\mathbf{F}$  incluem o aporte dos amortecedores passivos presentes na estrutura. Igualmente, a formulação apresentada tacitamente assume que a evolução no tempo do movimento do solo sísmico é totalmente conhecida.

### 3.3 – SOLUÇÃO

A solução da resposta dinâmica não linear de um sistema de elementos finitos é, em essência, obtida usando os seguintes procedimentos: a formulação incremental, o procedimento de solução iterativo, e o algoritmo de integração no tempo. Assim, a seguir se apresenta como estes procedimentos são utilizados em conjunto na solução da resposta em uma análise dinâmica não linear.

Considerando a solução da resposta não linear, reconhecemos que as equações de equilíbrio em (3.1) devem ser satisfeitas ao longo do histórico completo da aplicação de carga, ou seja, a variável tempo  $t$  pode assumir qualquer valor desde zero até o tempo máximo de interesse. Em uma análise dinâmica, com efeitos no tempo do material, a variável tempo é uma variável real a ser devidamente incluída na modelagem da situação física real.

Assim, quando a análise inclui não linearidade material, as equações de equilíbrio em (3.1) precisam ser resolvidas para o intervalo de tempo completo de interesse. Este cálculo da resposta é efetivamente realizado utilizando uma solução passo-a-passo incremental.

A abordagem básica em uma solução passo-a-passo incremental é assumir que a solução para o tempo discreto  $t$  é conhecida e a solução para o tempo discreto  $t + \Delta t$  é requerida, onde  $\Delta t$  é um incremento no tempo convenientemente escolhido. Assim, considerando (3.1) no tempo  $t + \Delta t$ , temos:

$$\mathbf{M}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} = 0 \quad (3.3)$$

Onde o sobrescrito esquerdo indica “no tempo  $t + \Delta t$ ”.

### 3.3.1 - Esquemas de Newton-Raphson

Uma vez que as forças pontuais nodais  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}$  dependem não linearmente dos deslocamentos pontuais nodais, é necessário iterar na solução de (3.3).

Os esquemas de iteração mais frequentemente utilizados para a solução de equações de elementos finitos não lineares são a iteração de Newton-Raphson e técnicas intimamente relacionadas. Devido à importância do método de Newton-Raphson, vamos derivar o procedimento de uma maneira formal.

As equações do movimento dadas na Eq. (3.3) podem ser reformuladas na forma:

$$\mathbf{f}({}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(k)}) = \mathbf{M} {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}^{(k)} + \mathbf{C} {}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}}^{(k)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}({}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(k)}) - {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} = 0 \quad (3.4)$$

Onde  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(k)}$  é o vetor de deslocamentos pontuais nodais no tempo  $t + \Delta t$ , iteração  $k$ , é o vetor da solução das equações. Igualmente, assumimos que as cargas aplicadas externamente ( ${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}$ ) são independentes da deformação.

Assumindo que na solução iterativa  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(k-1)}$  é conhecido, assim uma expansão da série de Taylor conduz a:

$$\mathbf{f}({}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(k)}) = \mathbf{f}({}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(k-1)}) + \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}} \right] \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{U}^{(k-1)}} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(k)} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(k-1)}) + \text{termos de ordem superior} = 0 \quad (3.5)$$

Substituindo (3.4) em (3.5), obtém-se:

$$\mathbf{M} {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}^{(k)} + \mathbf{C} {}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}}^{(k)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(k-1)} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} + \left[ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \right] \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{U}^{(k-1)}} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(k)} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(k-1)}) + \text{termos de ordem superior} = 0 \quad (3.6)$$

Reorganizando os termos na equação de acima:

$$\mathbf{M} {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}^{(k)} + \mathbf{C} {}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}}^{(k)} + \left[ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \right] \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{U}^{(k-1)}} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(k)} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(k-1)}) + \text{termos de ordem superior} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(k-1)} \quad (3.7)$$

Negligenciando os termos de ordem superior em (3.7), podemos calcular um incremento nos deslocamentos,

$$\mathbf{M}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}^{(k)} + \mathbf{C}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}}^{(k)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(k-1)} \Delta \mathbf{U}^{(k)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(k-1)} \quad (3.8)$$

Onde  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(k-1)}$  é a matriz de rigidez tangente atual

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(k-1)} = \left[ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \right] \Big|_{t+\Delta t \mathbf{U}^{(k-1)}} \quad (3.9)$$

E a solução do deslocamento melhorada é

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(k)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(k-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(k)} \quad (3.10)$$

Onde  $\Delta \mathbf{U}^{(k)}$  = vetor de incrementos nos deslocamentos pontuais nodais, iteração  $k$ .

As relações em (3.8) e (3.10) constituem a solução de Newton-Raphson de (3.4). Uma vez que uma solução-incremental é efetuada com passos de tempo de tamanho  $\Delta t$ , as condições iniciais nesta iteração são:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(0)} = {}^t \mathbf{K}; \quad {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(0)} = {}^t \mathbf{F}; \quad {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(0)} = {}^t \mathbf{U} \quad (3.11)$$

Estas equações foram obtidas pela linearização da resposta do sistema de elementos finitos sobre as condições no tempo  $t + \Delta t$ , iteração  $(k - 1)$ .

A iteração continua até que os critérios de convergência apropriados são satisfeitos como se discute posteriormente. A característica desta iteração é que uma nova matriz de rigidez tangente é calculada em cada iteração, que é por isso que este método também é conhecido como o *método de Newton-Raphson completo*. Mencionaremos a seguir métodos nos quais uma matriz de rigidez tangente atualizada não é usada, e essas técnicas são, portanto, métodos de Newton-Raphson não completos, constituindo-se em técnicas relacionadas.

Em um programa eficaz de elementos finitos, a matriz de rigidez tangente exata será utilizada, se for possível, e, portanto, o procedimento primário para alcançar a convergência (se dificuldades de convergência são encontradas) é diminuir a magnitude do passo da carga.

Em geral o principal custo computacional por iteração reside no cálculo e fatoração da matriz de rigidez tangente. Uma vez que estes cálculos podem ser bastante caros quando sistemas de elevada ordem são considerados, o uso de uma modificação do algoritmo de Newton-Raphson completo pode ser eficaz.

Uma possível modificação consiste em utilizar a matriz de rigidez inicial  ${}^0\mathbf{K}$  em (3.8) e assim operar as equações:

$$\mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}^{(k)} + \mathbf{C} {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}^{(k)} + {}^0\mathbf{K} \Delta\mathbf{U}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(k-1)} \quad (3.12)$$

Com as condições iniciais:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(0)} = {}^t\mathbf{F}; \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(0)} = {}^t\mathbf{U} \quad (3.13)$$

Neste caso, apenas a matriz  ${}^0\mathbf{K}$  precisa ser fatorada, evitando assim a despesa de recalculá-la e fatorá-la muitas vezes a matriz de coeficiente em (3.8). Este *método da "tensão inicial"* corresponde a uma linearização da resposta sobre a configuração inicial do sistema de elementos finitos e pode convergir lentamente ou até mesmo divergir.

Na *iteração de Newton-Raphson modificada* uma abordagem um tanto entre a iteração Newton-Raphson total e o método da tensão inicial é empregada. Neste método, usamos:

$$\mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}^{(k)} + \mathbf{C} {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}^{(k)} + {}^\tau\mathbf{K} \Delta\mathbf{U}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(k-1)} \quad (3.14)$$

Com as condições iniciais:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(0)} = {}^t\mathbf{F}; \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(0)} = {}^t\mathbf{U} \quad (3.15)$$

Onde  $\tau$  corresponde a uma das configurações de equilíbrio aceitas nos tempos  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$ , ou  $t$ . A iteração de Newton-Raphson modificada envolve menos reformulações de rigidez do que a iteração de Newton-Raphson total e baseia a atualização da matriz de rigidez em uma configuração de equilíbrio aceita. A escolha dos passos de tempo, quando a matriz de rigidez deveria ser atualizada depende do grau de não linearidade na resposta do sistema, ou seja, o mais linear da resposta, o mais frequente a atualização deve ser realizada.

Os métodos que apresentamos são técnicas básicas que na prática serão combinados em um procedimento auto adaptativo que escolhe os passos de carga, o método iterativo e os critérios de convergência automaticamente, dependendo do problema considerado e da precisão da solução procurada.

No programa criado foram implementados os métodos Newton-Raphson não completos, ou seja, o método da tensão inicial e a iteração de Newton-Raphson modificada, sendo este último o método utilizado por defeito. Na iteração de Newton-Raphson modificada

empregada no programa criado se define  $\tau = t$ , ou seja, a matriz rigidez tangente se atualiza em cada passo de tempo ( ${}^t \mathbf{K}$ ).

Assim, as equações de equilíbrio incrementais governantes, para uma montagem de elementos, usadas em nossa formulação de elementos finitos com só não linearidade material para uma análise dinâmica, são (BATHE, 1996):

$$\mathbf{M} {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}^{(k)} + \mathbf{C} {}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}}^{(k)} + {}^t \mathbf{K} \Delta \mathbf{U}^{(k)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(k-1)} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.16)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(k)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(k-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(k)} \quad (3.17)$$

Com as condições iniciais:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(0)} = {}^t \mathbf{F}; \quad {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(0)} = {}^t \mathbf{U} \quad (3.18)$$

Onde  ${}^t \mathbf{K}$  é a matriz de rigidez tangente no tempo  $t$ .

Igualmente, o procedimento de solução continuará utilizando estas equações (3.16), (3.17) e (3.18).

### 3.3.2 - Integração implícita

Os esquemas de integração implícitos no tempo utilizados para a análise dinâmica linear também podem ser empregados no cálculo da resposta dinâmica não linear. Um esquema usado extensivamente na dinâmica estrutural é o *método de Newmark*, e nós usamos este método para integrar as equações não lineares em (3.16) e (3.17). Adicionalmente, um esquema de integração explícita como o operador de diferença central poderia ser empregado, mas pela desvantagem no uso deste esquema que reside na severa restrição do passo do tempo este não foi utilizado.

O esquema de integração de Newmark pode ser entendido como uma extensão do método de aceleração linear. As seguintes premissas são usadas:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = {}^t \mathbf{U} + {}^t \dot{\mathbf{U}} \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \delta \right) {}^t \ddot{\mathbf{U}} + \alpha {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} \right] \Delta t^2 \quad (3.19)$$

$${}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}} = {}^t \dot{\mathbf{U}} + [(1 - \delta) {}^t \ddot{\mathbf{U}} + \delta {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}] \Delta t \quad (3.20)$$

Onde  $\alpha$  e  $\delta$  são parâmetros que podem ser determinados para obter precisão na integração e estabilidade. Verificou-se que para valores de  $\delta$  diferentes de  $1/2$ , o método introduz amortecimento supérfluo no sistema. Por esta razão, este parâmetro é geralmente definido como  $\delta = 1/2$ . Para  $\delta = 1/2$  e  $\alpha = 1/4$  o método é equivalente ao método da aceleração-média-constante, também chamado de regra trapezoidal. Neste caso, o método de Newmark é incondicionalmente estável.

Usando a relação (3.19) em sua forma iterativa e em seguida substituindo para  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(k)}$  em (3.17) para depois resolver para  ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}^{(k)}$ , assim obtemos:

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}^{(k)} = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(k-1)} + \Delta\mathbf{U}^{(k)} - {}^t\mathbf{U}) - \frac{1}{\alpha \Delta t} {}^t\dot{\mathbf{U}} - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right) {}^t\ddot{\mathbf{U}} \quad (3.21)$$

Utilizando a relação (3.21) para substituir  ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}^{(k)}$  na relação (3.20) em sua forma iterativa obtemos a seguinte expressão para  ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}^{(k)}$

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}^{(k)} &= \frac{\delta}{\alpha \Delta t} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(k-1)} + \Delta\mathbf{U}^{(k)} - {}^t\mathbf{U}) \\ &\quad - \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1\right) {}^t\dot{\mathbf{U}} - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2\right) {}^t\ddot{\mathbf{U}} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Assim obtemos equações para  ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}^{(k)}$  e  ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}^{(k)}$ , cada uma em termos apenas do incremento do deslocamento desconhecido  $\Delta\mathbf{U}^{(k)}$ . Estas duas relações são substituídas em (3.16) para resolver para  $\Delta\mathbf{U}^{(k)}$ , assim temos

$${}^t\hat{\mathbf{R}}\Delta\mathbf{U}^{(k)} = \Delta\mathbf{R}^{(k-1)} \quad (3.23)$$

Onde:

$\Delta\mathbf{R}^{(k-1)}$  = Vetor de carga desbalanceado.

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{R}^{(k-1)} &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(k-1)} \\ &\quad + \mathbf{M} \left[ \frac{1}{\alpha \Delta t^2} ({}^t\mathbf{U} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(k-1)}) + \frac{1}{\alpha \Delta t} {}^t\dot{\mathbf{U}} + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right) {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right] \\ &\quad + \mathbf{C} \left[ \frac{\delta}{\alpha \Delta t} ({}^t\mathbf{U} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(k-1)}) + \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1\right) {}^t\dot{\mathbf{U}} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2\right) {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right] \end{aligned} \quad (3.24)$$

${}^t\hat{\mathbf{R}}$  = Matriz de rigidez efetiva no tempo  $t$ .

$${}^t\hat{\mathbf{R}} = {}^t\mathbf{K} + \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \mathbf{C} \quad (3.25)$$

### 3.3.3 - Critérios de convergência

Para que uma estratégia de solução incremental baseada em métodos iterativos seja efetiva, critérios realistas devem ser usados para o término da iteração. No final de cada iteração, a solução obtida deve ser verificada para ratificar se ela tem convergido e cumpre as tolerâncias pré-definidas ou se a iteração está divergindo. Se as tolerâncias de convergência são muito folgadas, resultados imprecisos são obtidos, e se as tolerâncias são muito estreitas, um esforço computacional adicional é gasto para obter uma precisão desnecessária. O objetivo desta Subseção é discutir brevemente alguns dos critérios de convergência.

Uma vez que estamos buscando a configuração do deslocamento correspondente ao tempo  $t + \Delta t$ , é natural se requerer que os deslocamentos no final de cada iteração estejam dentro de certa tolerância da solução do deslocamento verdadeira. Assim, um critério de convergência realista é:

$$\frac{\|\Delta \mathbf{U}^{(k)}\|_2}{\|{}^{t+\Delta t} \mathbf{U}\|_2} \leq \epsilon_D \quad (3.26)$$

Onde:

$\epsilon_D$  = Tolerância de convergência do deslocamento.

O vetor  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}$  não é conhecido e deve ser aproximado. Frequentemente, é apropriado usar em (3.26) o ultimo valor calculado  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(k)}$  como uma aproximação para  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}$  e um valor suficientemente pequeno de  $\epsilon_D$ . Assim, (3.26) pode ser reescrita como:

$$\frac{\|\Delta \mathbf{U}^{(k)}\|_2}{\|{}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(k)}\|_2} \leq \epsilon_D \quad (3.27)$$

Um segundo critério de convergência é obtido através da medição do vetor de carga fora-de-balanço. Por exemplo, podemos requerer que a norma do vetor de carga fora-de-balanço esteja dentro de uma tolerância predefinida  $\epsilon_F$  do incremento de carga original:

$$\frac{\|{}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(k-1)} - \mathbf{M} {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}^{(k-1)} - \mathbf{C} {}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}}^{(k-1)}\|_2}{\|{}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^t \mathbf{F} - \mathbf{M} {}^t \ddot{\mathbf{U}} - \mathbf{C} {}^t \dot{\mathbf{U}}\|_2} \leq \epsilon_F \quad (3.28)$$

Onde:

$\epsilon_F$  = Tolerância de convergência da força.

A dificuldade com este critério é que a solução do deslocamento calculada não entra no critério de terminação.

A fim de fornecer uma indicação de quando tanto o deslocamento como as forças estão próximos aos valores de equilíbrio, um terceiro critério de convergência pode ser útil, no qual o incremento da energia interna durante cada iteração (i.e., a quantidade de trabalho realizado pelas cargas fora-de-balanço sobre os incrementos do deslocamento) é comparado com o incremento da energia interna inicial. Convergência é assumida para ser alcançada quando, com uma tolerância de energia predefinida:

$$\frac{\Delta \mathbf{U}^{(k)T} \left( {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(k-1)} - \mathbf{M} {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}^{(k-1)} - \mathbf{C} {}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}}^{(k-1)} \right)}{\Delta \mathbf{U}^{(k)T} \left( {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^t \mathbf{F} - \mathbf{M} {}^t \ddot{\mathbf{U}} - \mathbf{C} {}^t \dot{\mathbf{U}} \right)} \leq \epsilon_E \quad (3.29)$$

Onde:

$\epsilon_F$  = Tolerância de convergência da energia.

Uma vez que este critério de convergência contém ambos os deslocamentos e as forças, este é na prática uma medida atraente.

Um ponto importante é que as tolerâncias de convergência  $\epsilon_D$ ,  $\epsilon_F$  e  $\epsilon_E$  podem precisar ser bastante pequenas em algumas soluções, a fim de alcançar uma boa precisão na solução.

Os critérios baseados no deslocamento e na força foram implementados no programa criado, sendo o critério baseado no deslocamento o utilizado por defeito, dado que consome menos recursos computacionais.

### 3.3.4 - Algoritmo para solução passo-a-passo

O algoritmo completo utilizando o método de integração de Newmark conjuntamente com o método de Newton-Raphson modificado é dado na Tabela 3.1.

No Capítulo 4, se exporá o procedimento para incluir o comportamento histerético do dissipador ADAS nas equações governantes através da força  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(k-1)}$  (Eq.(3.16)).

Tabela 3.1 - Algoritmo para solução passo-a-passo.

A. *Condições iniciais*

1. Montar a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ , a matriz de massa  $\mathbf{M}$ , e a matriz de amortecimento  $\mathbf{C}$ .
2. Inicializar  ${}^0\mathbf{U}$ ,  ${}^0\dot{\mathbf{U}}$ ,  ${}^0\ddot{\mathbf{U}}$  e  ${}^0\mathbf{F}$
3. Selecione o passo de tempo  $\Delta t$  e os parâmetros  $\alpha$  e  $\delta$  e calcular as constantes de integração:

$$\delta \geq 0.50; \quad \alpha \geq 0.25(0.5 + \delta)^2$$

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}; \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}; \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}; \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1;$$

$$a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1; \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right); \quad a_6 = \Delta t(1 - \delta); \quad a_7 = \delta \Delta t$$

4. Condição inicial para a matriz de rigidez tangente:  ${}^0\mathbf{K} = \mathbf{K}$

B. *Para cada passo de tempo:*

1. Montar a matriz de rigidez tangente  ${}^t\mathbf{K}$  no tempo  $t$  (método de Newton-Raphson modificado).
2. Formar a matriz de rigidez efetiva no tempo  $t$ .

$${}^t\hat{\mathbf{K}} = {}^t\mathbf{K} + a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}$$

3. Calcular o vetor de forças concentradas nodais externas no tempo  $t + \Delta t$ .

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R} = \mathbf{M}\mathbf{J}{}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}_g$$

4. Condições iniciais para a primeira iteração.

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(0)} = {}^t\mathbf{U}; \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(0)} = {}^t\mathbf{F}$$

C. *Para cada iteração ( $k = 1, 2, 3 \dots$ ):*

1. Teste de convergência:

$$\frac{\|\Delta\mathbf{U}^{(k)}\|_2}{\|{}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(k)}\|_2} \leq \epsilon_D$$

2. Calcular o vetor de cargas desbalanceado no tempo  $t + \Delta t$ , iteração  $k - 1$ .

$$\Delta\mathbf{R}^{(k-1)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(k-1)} + \mathbf{M} \left[ a_0 ({}^t\mathbf{U} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(k-1)}) + a_2 {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_3 {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right]$$

$$+ \mathbf{C} \left[ a_1 ({}^t\mathbf{U} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(k-1)}) + a_4 {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_5 {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right]$$

3. Calcular os deslocamentos incrementais no tempo  $t + \Delta t$ , iteração  $k$ .

$${}^t\hat{\mathbf{K}} \Delta\mathbf{U}^{(k)} = \Delta\mathbf{R}^{(k-1)}$$

4. Calcular os deslocamentos, as acelerações e as velocidades no tempo  $t + \Delta t$ , iteração  $k$ .

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(k-1)} + \Delta\mathbf{U}^{(k)}$$

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}^{(k)} = a_0 ({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(k)} - {}^t\mathbf{U}) - a_2 {}^t\dot{\mathbf{U}} - a_3 {}^t\ddot{\mathbf{U}}$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_6 {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_7 {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}$$

5. Montar o vetor de forças pontuais nodais internas  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(k)}$  no tempo  $t + \Delta t$ , iteração  $k$ . Para os elementos com comportamento linear estas forças são as forças nodais internas do elemento, ou seja, o produto da matriz de rigidez do elemento e o vetor de deslocamentos nas coordenadas nodais do elemento; e no caso dos dissipadores (elementos link não lineares) estas forças se calculam de acordo com o algoritmo return-mapping (veja o Capítulo 4-Seção 4.4).

## **4 - MODELAGEM DO DISSIPADOR METÁLICO**

### **4.1 - INTRODUÇÃO**

Para incluir efetivamente os dissipadores metálicos no projeto de uma estrutura real, é preciso ser capaz de caracterizar o seu comportamento força-deslocamento não linear esperado sobre cargas cíclicas arbitrárias. Ozdemir (1976) foi o primeiro a considerar este problema de modelagem. Ele utilizou analogias com as teorias constitutivas elastoplásticas e viscoplásticas existentes para desenvolver formas adequadas para as relações de força-deslocamento. Além disso, Ozdemir detalhou algoritmos numéricos eficientes para calcular a resposta de estruturas metálicas com amortecedores submetidos à carga dependente do tempo em geral, tais como as causadas por um terremoto.

A fim de apreciar plenamente o comportamento dos dissipadores de energia metálicos, deve-se considerar em primeiro lugar a resposta inelástica dos metais sob carga cíclica dependente-do-tempo. Esta questão é abordada em detalhe na Seção 4.2, a qual aborda principalmente a definição dos modelos constitutivos e dos algoritmos de integração respectivos. Estes modelos são então utilizados na Seção 4.4 para desenvolver uma relação força-deslocamento apropriada para o amortecedor metálico ADAS. Uma vez que o modelo de força-deslocamento é estabelecido, devemos incorporar essa informação na análise da estrutura global, isto é, na equação dinâmica geral apresentada no Capítulo 3. Esta tarefa é discutida na Seção 4.5, onde se introduz o elemento finito de comprimento zero chamado “link” para modelar o comportamento dos dissipadores metálicos, especificamente o amortecedor ADAS. Cada elemento link pode exibir dois tipos diferentes de comportamento: linear e não linear, segundo os tipos de propriedades atribuídos a esse elemento e o tipo de análise que esta sendo efetuado.

### **4.2 - PRINCÍPIOS BÁSICOS**

Apesar das diferenças óbvias na configuração geométrica dos diversos dissipadores metálicos, a base do mecanismo de dissipação em todos os casos resulta da deformação inelástica de um metal. Normalmente aquele metal é aço macio, embora às vezes ligas metálicas de chumbo ou mais complexas são empregadas. Idealmente, se esperaria desenvolver um modelo para

qualquer amortecedor metálico a partir da teoria micromecânica de deslocamentos, que deve finalmente determinar a resposta inelástica. No entanto, uma vez que a abordagem física direta dos princípios fundamentais ainda não é viável, normalmente se aceita uma descrição fenomenológica com base na observação do comportamento no nível macroscópico. Um quadro matematicamente consistente, como a teoria da plasticidade ou viscoplasticidade, é necessário ser construído para reproduzir esse comportamento e para prever a resposta em condições muito gerais.

Nas subseções seguintes, começamos por apresentar primeiramente o modelo unidimensional da plasticidade independente-da-taxa clássica. Posteriormente se generalizara este modelo para considerar os efeitos do endurecimento e discutir a estrutura matemática de dois modelos de endurecimento fenomenológicos clássicos conhecidos como endurecimento isotrópico e cinemático. Posteriormente, discute-se a integração destes modelos constitutivos desenvolvidos e se introduz o conceito fundamental do algoritmo return-mapping.

A formulação e integração numérica dos modelos da plasticidade unidimensional aqui apresentada baseiam-se na teoria exposta por Simo e Hughes (1998). Para informação mais detalhada consulte o texto destes autores.

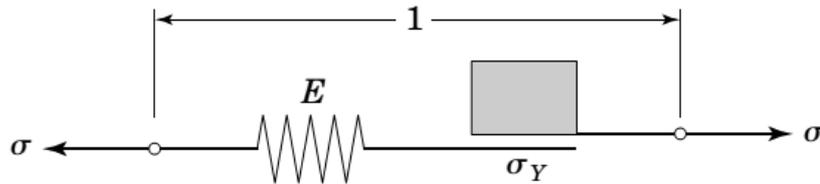
#### **4.2.1 - Modelo de atrito unidimensional da plasticidade independente-da-taxa**

Primeiramente é necessário esclarecer que *independência-da-taxa* neste contexto significa que *a deformação do material não depende da taxa à qual as cargas são aplicadas*. A principal diferença entre os modelos do material plástico independente-da-taxa e dependente-da-taxa (viscoplástico) é que o último não só exhibe deformações permanentes após a aplicação de cargas, mas continua a experimentar uma deformação por fluência como uma função do tempo sobre a influência da carga aplicada. Esclarece-se que os dissipadores metálicos são sistemas independentes-da-taxa, cuja saída da força não depende da taxa de mudança do deslocamento ao longo do amortecedor, mas sim da magnitude do deslocamento e o sinal da velocidade (isto é, a direção do movimento).

Para entender a estrutura matemática da plasticidade independente da taxa clássica, examina-se a resposta mecânica do dispositivo de atrito unidimensional ilustrado na Figura 4.1. Assumimos que o dispositivo inicialmente possui comprimento unitário (e área unitária) e

consiste de uma mola, com constante elástica  $E$ , e um elemento de atrito de Coulomb, com constante  $\sigma_Y > 0$ , dispostos como se mostra na Figura 4.1. Deixamos  $\sigma$  ser a tensão aplicada (força) e  $\varepsilon$  a deformação total (mudança do comprimento) no dispositivo.

Figura 4.1 - Dispositivo de atrito unidimensional ilustrando a plasticidade independente-da-taxa



Fonte: Simo e Hughes (1998)

A partir da Figura 4.1 se fazem as seguintes observações:

- A deformação total  $\varepsilon$  se divide em uma parte  $\varepsilon^e$  na mola com constante  $E$ , referida como a *parte elástica*, e uma deformação  $\varepsilon^p$  no dispositivo de atrito, referida como a *parte plástica*, isto é:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (4.1)$$

- Por considerações de equilíbrio óbvias, a tensão na mola com constante  $E$  é  $\sigma$ , e temos a relação elástica:

$$\sigma = E\varepsilon^e \equiv E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (4.2)$$

### Resposta de atrito irreversível

Agora a resposta mecânica do elemento de atrito descreve-se como segue. Assuma que  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^p$  e  $\sigma$  são funções do tempo em um intervalo  $[0, T]$ . Em particular, se tem:

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon^p \quad (4.3)$$

Mudança na configuração do dispositivo de atrito é possível somente se  $\dot{\varepsilon}^p \neq 0$ . Para descrever essa mudança, isolamos o dispositivo de atrito como se mostra na Figura 4.2.

Fazemos as seguintes premissas físicas:

1. A tensão  $\sigma$  no dispositivo de atrito não pode ser maior em valor absoluto que  $\sigma_Y > 0$ . Isto significa que as tensões admissíveis são restritas a estar no intervalo fechado  $[-\sigma_Y, \sigma_Y]$ . Para uso futuro se apresenta a notação:

$$\mathbb{E}_\sigma = \{\tau \in \mathbb{R} \mid f(\tau) := |\tau| - \sigma_Y \leq 0\} \quad (4.4)$$

Para designar o conjunto de tensões admissíveis. Denotamos por  $\sigma_Y$  à *tensão de escoamento* do dispositivo de atrito. A função  $f$  definida como

$$f(\tau) := |\tau| - \sigma_Y \leq 0 \quad (4.5)$$

Então é referida como a *condição de escoamento*.

2. Se o valor absoluto da tensão aplicada  $\sigma$  é inferior que a tensão de escoamento  $\sigma_Y$  nenhuma mudança em  $\varepsilon^p$  acontece, i.e.,  $\dot{\varepsilon}^p = 0$ . Esta condição implica:

$$\dot{\varepsilon}^p = 0 \quad \text{se} \quad f(\sigma) := |\sigma| - \sigma_Y < 0 \quad (4.6)$$

A partir de (4.2) e (4.5), resulta que:

$$f(\sigma) < 0 \implies \dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} \quad (4.7)$$

E a resposta instantânea do dispositivo é *elástica* com constante da mola  $E$ . Isto motiva a denominação de *faixa elástica* dada ao conjunto aberto:

$$\text{int}(\mathbb{E}_\sigma) = \{\tau \in \mathbb{R} \mid f(\tau) := |\tau| - \sigma_Y < 0\} \quad (4.8)$$

Uma vez que (4.6) e (4.7) se mantenham para  $\sigma \in \text{int}(\mathbb{E}_\sigma)$ .

3. Porque pela premissa 1, os estados de tensão  $\sigma$  tais que  $f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y > 0$  são inadmissíveis e  $\dot{\varepsilon}^p = 0$  para  $f(\sigma) < 0$  pela premissa 2, *uma mudança em  $\varepsilon^p$  pode ocorrer somente se  $f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y = 0$* . Se esta ultima condição for atendida, o dispositivo de atrito experimenta *deslizamento na direção da tensão aplicada  $\sigma$* , com uma *taxa de deslizamento constante*. Deixamos  $\gamma \geq 0$  ser o *valor absoluto da taxa de deslizamento*. Então a premissa física anterior toma a forma:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}^p &= \gamma \geq 0 \quad \text{se} \quad \sigma = \sigma_Y > 0 \\ \dot{\varepsilon}^p &= -\gamma \leq 0 \quad \text{se} \quad \sigma = -\sigma_Y < 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Se  $\gamma \geq 0$  é realmente positivo, i.e.,  $\gamma > 0$  ou zero depende de outras condições que envolvem à taxa de deformação aplicada  $\dot{\varepsilon}$ , as quais serão discutidas abaixo e são referidas como as *condições de carga/descarga*. Por agora note que (4.9) pode ser reformulada na seguinte única equação:

$$\dot{\epsilon}^p = \gamma \text{sign}(\sigma) \text{ sse } f(\sigma) := |\sigma| - \sigma_Y = 0 \quad (4.10)$$

Onde  $\gamma \geq 0$ , a qual leva o nome da **regra do fluxo**. Aqui  $\text{sign}$  é a função signo definida como:

$$\text{sign}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{se } \sigma > 0 \\ -1 & \text{se } \sigma < 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

O contorno  $\partial\mathbb{E}_\sigma$  do conjunto  $\mathbb{E}_\sigma$ , definido por:

$$\partial\mathbb{E}_\sigma = \{\tau \in \mathbb{R} \mid f(\tau) := |\tau| - \sigma_Y = 0\} \quad (4.12)$$

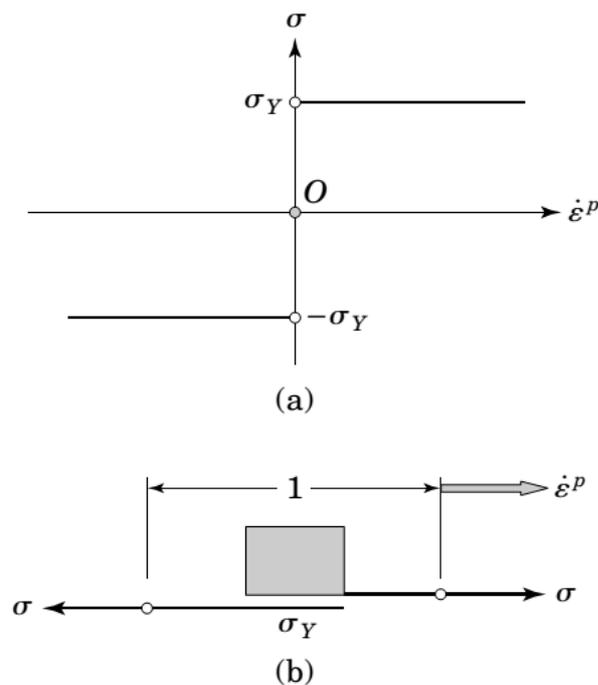
É chamada a *superfície de escoamento*. No presente modelo unidimensional,  $\partial\mathbb{E}_\sigma = \{-\sigma_Y, \sigma_Y\}$  se reduz a dois pontos. Note-se que:

$$\mathbb{E}_\sigma = \text{int}(\mathbb{E}_\sigma) \cup \partial\mathbb{E}_\sigma \quad (4.13)$$

Isto é,  $\partial\mathbb{E}_\sigma$  é o cerramento da faixa elástica  $\text{int}(\mathbb{E}_\sigma)$ .

Para completar a descrição do modelo em mãos, resta apenas determinar a taxa de deslizamento  $\gamma \geq 0$ . Isto envolve as seguintes condições essenciais que incorporam a *noção de irreversibilidade* inerente à resposta do modelo na Figura 4.1.

Figura 4.2 - Descrição da resposta de atrito para um dispositivo com constante  $\sigma_Y > 0$



Fonte: Simo e Hughes (1998)

## Condições de carga/descarga

Com as observações feitas acima na mente, vamos mostrar que a avaliação de  $\varepsilon^p: [0, T]$  pode ser completamente descrita, para qualquer estado de tensão admissível  $\sigma \in \mathbb{E}_\sigma$ , com a única equação evolutiva:

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \text{sign}(\sigma) \quad (4.14)$$

Desde que  $\gamma$  e  $\sigma$  são restritos por certas *restrições unilaterais*.

- Em primeiro lugar, nota-se que  $\sigma$  deve ser admissível, ou seja,  $\sigma \in \mathbb{E}_\sigma$  pela premissa 1, e  $\gamma$  dever ser não negativa pela premissa 3. Consequentemente:

$$\gamma \geq 0 \quad \text{e} \quad f(\sigma) \leq 0 \quad (4.15)$$

- Em segundo lugar, pela premissa 2,  $\gamma = 0$  se  $f(\sigma) < 0$ . Por outro lado, pela premissa 3,  $\dot{\varepsilon}^p \neq 0$ , e por conseguinte  $\gamma > 0$  só se  $f(\sigma) = 0$ . Estas observações implicam as condições:

$$\left. \begin{array}{l} f(\sigma) < 0 \Rightarrow \gamma = 0, \\ \gamma > 0 \Rightarrow f(\sigma) = 0. \end{array} \right\}$$

Dai se conclui que é necessário que:

$$\gamma f(\sigma) = 0 \quad (4.16)$$

Condições (4.15) e (4.16) expressam os requisitos físicos, elaborados anteriormente, que a tensão deve ser admissível e que o fluxo plástico, no sentido de *taxa de deformação de atrito diferente de zero*  $\dot{\varepsilon}^p \neq 0$ , só pode ter lugar na superfície de escoamento  $\partial\mathbb{E}_\sigma$ . Estas condições (ou seja, (4.15) e (4.16)) tem o nome de **condições de Kuhn-Tucker**.

A ultima condição a ser descrita abaixo nos permite determinar o valor real de  $\gamma \geq 0$  em qualquer tempo dado  $t \in [0, T]$  e é referida como o **requisito de consistência**.

- Deixamos  $\{\varepsilon(t), \varepsilon^p(t)\}$  sejam dados no tempo  $t \in [0, T]$  de modo que  $\sigma(t)$  também é conhecido no tempo  $t$  pela relação elástica (4.2), i.e.,  $\sigma(t) = E[\varepsilon(t) - \varepsilon^p(t)]$ . Suponha que prescrevemos a *taxa de deformação total*  $\dot{\varepsilon}(t)$  no tempo  $t$ . Além disso, consideramos o caso onde:

$$\sigma(t) \in \partial\mathbb{E}_\sigma \Leftrightarrow f(t) := f[\sigma(t)] = 0$$

No tempo  $t$ . Então facilmente é demonstrado que  $\dot{f}(t) \leq 0$ , uma vez que  $\dot{f}(t)$  deve ser positivo isso implicaria que  $f(t + \Delta t) > 0$  para algum  $\Delta t > 0$ , o qual viola a condição de admissibilidade  $f \leq 0$ . Além disso, especificamos que  $\gamma > 0$  somente se  $\dot{f}(t) = 0$ , e definir  $\gamma = 0$  se  $\dot{f}(t) < 0$ , ou seja, definimos:

$$\left. \begin{aligned} \gamma > 0 &\Rightarrow \dot{f} = 0, \\ \dot{f} < 0 &\Rightarrow \gamma = 0. \end{aligned} \right\}$$

Por tanto, temos a condição adicional:

$$\gamma \dot{f}(\sigma) = 0 \quad (4.17)$$

A condição (4.17) é alternativamente referida como **condição de persistência (ou consistência)**, e corresponde ao requisito físico que para  $\dot{\varepsilon}^p$  ser diferente de zero (i.e.  $\gamma > 0$ ) o ponto de tensão  $\sigma \in \partial \mathbb{E}_\sigma$  deve “persistir” na superfície de escoamento  $\partial \mathbb{E}_\sigma$  para que  $f[\sigma(t)] = 0$ .

### Deslizamento de atrito (fluxo plástico)

Para o modelo em mãos, a expressão para  $\gamma > 0$  quando a condição de consistência (4.17) se mantém, toma uma forma particularmente simples. Pela regra da cadeia e as condições (4.2) e (4.14),

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \\ &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} E \dot{\varepsilon} - \gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma} E \text{sign}(\sigma) \end{aligned} \quad (4.18)$$

No entanto,

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} |\sigma| = \text{sign}(\sigma) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} (|\sigma| - \sigma_Y) = \text{sign}(\sigma) \quad (4.19)$$

Consequentemente, observando que  $[\text{sign}(\sigma)]^2 = 1$ , (4.18) e (4.19) implicam:

$$\begin{aligned} \text{Se } \dot{f} = 0 &\Rightarrow 0 = \text{sign}(\sigma) E \dot{\varepsilon} - \gamma E [\text{sign}(\sigma)]^2 = E(\dot{\varepsilon} \text{sign}(\sigma) - \gamma) \\ &\Rightarrow \gamma = \dot{\varepsilon} \text{sign}(\sigma) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Substituição de (4.20) em (4.14) produz o resultado:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon} \text{ para } f(\sigma) = 0; \quad \dot{f}(\sigma) = 0 \quad (4.21)$$

Que afirma que o deslizamento “plástico” no dispositivo de atrito é igual à taxa de deformação aplicada.

A resposta do dispositivo mostrado na Figura 4.1 esta ilustrada na Figura 4.3. A teoria que apresentamos ate agora é chamada de *plasticidade perfeita*. Um resumo do modelo constitutivo esta contido na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 - Modelo constitutivo da plasticidade perfeita independente-da-taxa unidimensional

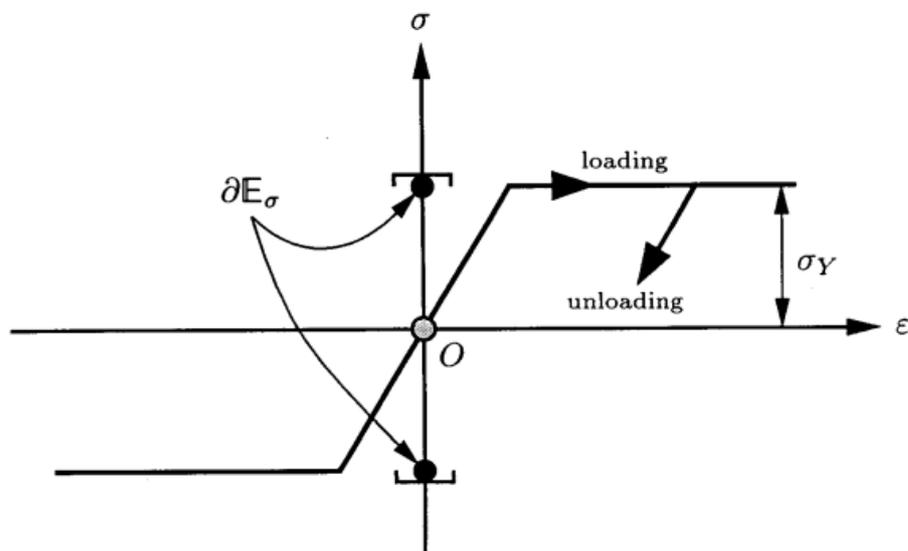
---

i.	Relação tensão-deformação elástica	$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p)$
ii.	Regra de fluxo	$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \text{sign}(\sigma)$
iii.	Condição de escoamento	$f(\sigma) =  \sigma  - \sigma_Y \leq 0$
iv.	Condições de complementaridade Kuhn-Tucker	$\gamma \geq 0, \quad f(\sigma) \leq 0, \quad \gamma f(\sigma) = 0$
v.	Condição de consistência (persistência)	$\gamma \dot{f}(\sigma) = 0 \quad (\text{se } f(\sigma) = 0)$

---

Fonte: Simo e Hughes (1998)

Figura 4.3 - Representação esquemática do comportamento mecânico de um modelo elástico-atrito unidimensional para a plasticidade perfeita



Fonte: Simo e Hughes (1998)

## 4.2.2 - Modelo elementar da plasticidade com endurecimento isotrópico linear

Como próximo passo se examinara um aperfeiçoamento do modelo discutido na seção 4.2.1 que ilustra um efeito observado experimentalmente em muitos metais, chamado *endurecimento-por-deformação*.

Para o modelo na seção 4.2.1, o deslizamento (i.e.,  $\varepsilon^p \neq 0$ ) ocorre a um valor constante da tensão aplicada  $\sigma$  tal que  $|\sigma| = \sigma_Y$ , levando à resposta tensão-deformação na Figura 4.3. *Um modelo de endurecimento-deformação*, por outro lado, conduz a uma curva de tensão-deformação do tipo idealizado na Figura 4.4.

A diferença essencial entre os dois modelos ilustrados na Figura 4.4 reside no fato de que para a plasticidade perfeita o cerramento da faixa elástica  $\mathbb{E}_\sigma$  permanece inalterado, enquanto que para o modelo com endurecimento,  $\mathbb{E}_\sigma$  *se expande com a quantidade de deslizamento no sistema* (i.e., a quantidade de fluxo plástico). Um modelo matemático que captura este efeito é considerado a seguir.

### Modelo matemático

Nossas premissas básicas sobre a resposta elástica para um modelo de endurecimento-por-deformação permanecem inalteradas. Assumimos como na seção 4.2.1, a decomposição aditiva:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (4.22)$$

Adicionalmente postulamos a relação tensão-deformação elástica:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (4.23)$$

Para ilustrar a estrutura matemática da plasticidade com endurecimento-por-deformação consideramos a situação mais simples ilustrada na Figura 4.5. Neste modelo, a expansão (endurecimento) experimentada por  $\mathbb{E}_\sigma$  é assumida que obedece duas condições:

- a. O endurecimento é *isotrópico* no sentido que em qualquer estado de carga, o centro de  $\mathbb{E}_\sigma$  permanece na origem.

- b. O endurecimento é *linear* na quantidade de fluxo plástico (i.e., linear em  $|\dot{\varepsilon}^p|$ ) e independente de  $\text{sign}(\dot{\varepsilon}^p)$ .

A primeira condição conduz a um critério de escoamento da forma:

$$f(\sigma, \alpha) = |\sigma| - [\sigma_Y + K\alpha] \leq 0, \quad \alpha \geq 0 \quad (4.24)$$

Onde  $\sigma_Y > 0$  e  $K \geq 0$  são constantes dadas,  $K$  é frequentemente chamado o *modulo plástico*. A variável  $\alpha: [0, T]$  é a uma função não-negativa da quantidade do fluxo plástico (deslizamento), chamada *variável de endurecimento interna*. Se  $K < 0$ , fala-se de uma resposta de amaciamento-por-deformação.

Com a condição **b** em mente, consideramos a *equação evolutiva* mais simples para  $\alpha$ , isto é:

$$\dot{\alpha} = |\dot{\varepsilon}^p| \quad (4.25)$$

O mecanismo *irreversível* que governa a evolução do deslizamento no sistema (fluxo plástico), o qual é definido pela regra de fluxo, mantém-se inalterado. Consequentemente, tal como na seção 4.2.1, assumimos que:

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \text{sign}(\sigma) \quad (4.26)$$

Onde  $\gamma \geq 0$  é a taxa à qual o deslizamento ocorre. A natureza irreversível do fluxo plástico é novamente capturada por meio das condições de carga/descarga de Kuhn-Tucker, as quais no presente contexto são:

$$\gamma \geq 0, \quad f(\sigma, \alpha) \leq 0, \quad \gamma f(\sigma, \alpha) = 0 \quad (4.27)$$

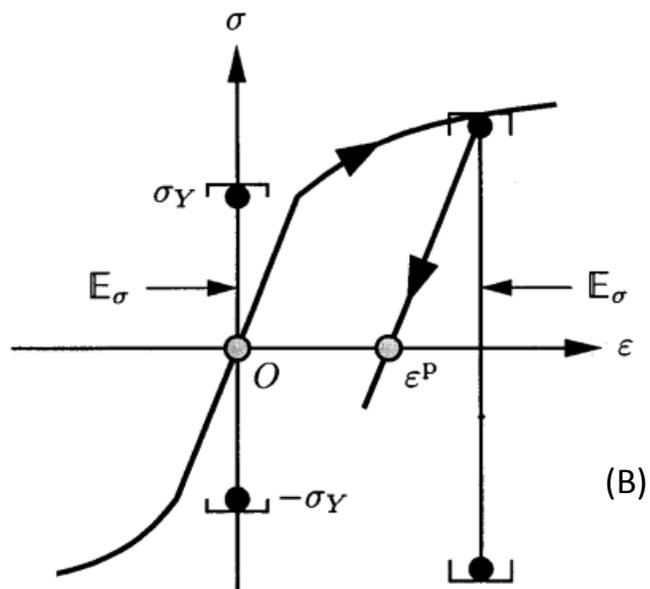
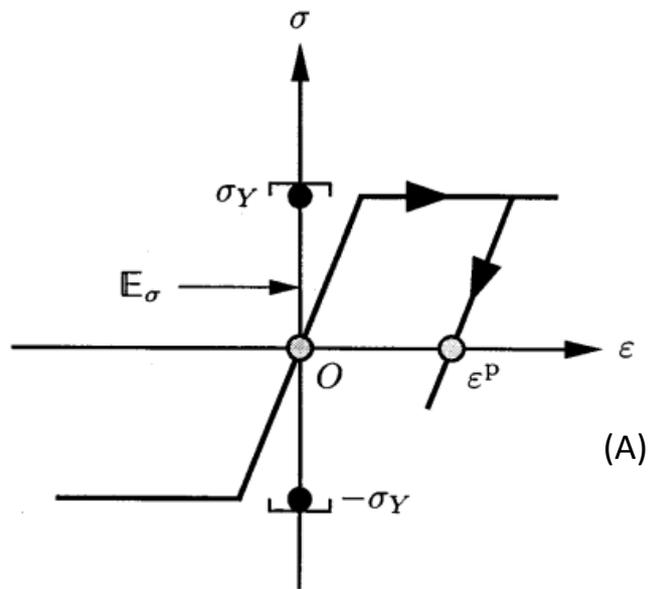
Onde  $\gamma \geq 0$  é determinada pela condição de consistência:

$$\gamma \dot{f}(\sigma, \alpha) = 0 \quad (4.28)$$

A interpretação das condições (4.27) e (4.28) é idêntica à discutida em detalhe na seção 4.2.1.

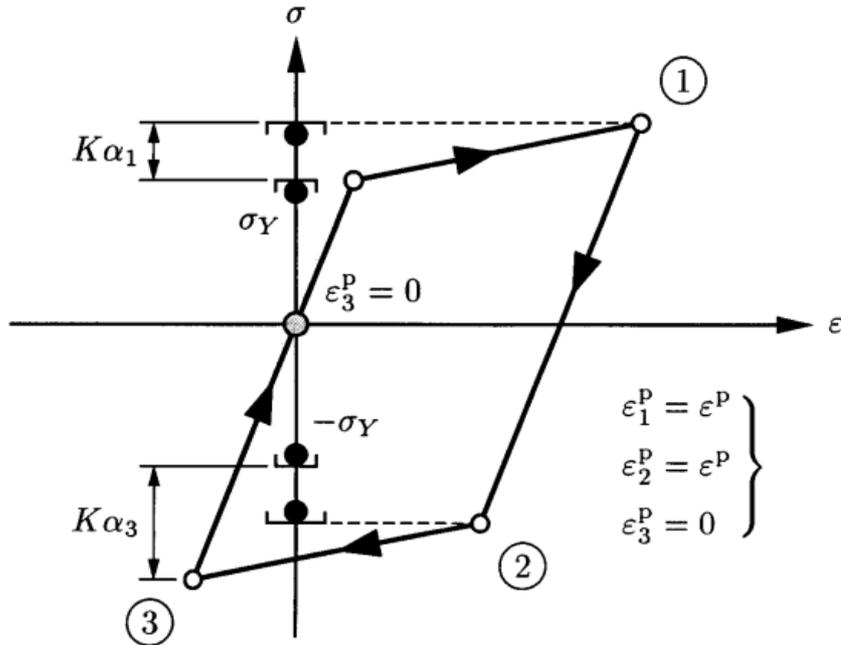
Por conveniência e posterior referencia, resumimos o modelo constitutivo desenvolvido anteriormente na Tabela 4.2.

Figura 4.4 - Plasticidade com endurecimento-por-deformação (B) contra plasticidade perfeita (A)



Fonte: Simo e Hughes (1998)

Figura 4.5 - Resposta de um modelo com endurecimento isotrópico linear em um ciclo fechado. Embora a deformação plástica total no final do ciclo seja  $\varepsilon_3^p = 0$ , o valor da variável de endurecimento é  $\alpha_3 = 2\alpha_1$



Fonte: Simo e Hughes (1998)

Tabela 4.2 - Modelo constitutivo da plasticidade independente-da-taxa unidimensional com endurecimento isotrópico linear

i.	Relação tensão-deformação elástica	$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p)$
ii.	Regra de fluxo e lei de endurecimento isotrópico	$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \text{sign}(\sigma)$ $\dot{\alpha} = \gamma$
iii.	Condição de escoamento	$f(\sigma, \alpha) =  \sigma  - [\sigma_Y + K\alpha] \leq 0$
iv.	Condições de complementaridade Kuhn-Tucker	$\gamma \geq 0, \quad f(\sigma, \alpha) \leq 0, \quad \gamma f(\sigma, \alpha) = 0$
v.	Condição de consistência (persistência)	$\gamma \dot{f}(\sigma, \alpha) = 0 \quad (\text{se } f(\sigma, \alpha) = 0)$

Fonte: Simo e Hughes (1998)

## Modulo elastoplástico tangente

A condição de consistência (4.28) permite que se resolva explicitamente para  $\gamma$  e relacionar as taxas de tensão com as taxas de deformação como segue. A partir de (4.24), (4.25), e (4.26), juntamente com a relação de tensão-deformação elástica:

$$\begin{aligned}\dot{f} &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \\ &= \text{sign}(\sigma)E(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) - K\dot{\alpha} \\ &= \text{sign}(\sigma)E\dot{\epsilon} - \gamma[E + K] \leq 0\end{aligned}\tag{4.29}$$

Observe-se mais uma vez que a relação  $\dot{f} > 0$  não se pode manter. A partir de (4.27) e (4.28) segue-se que  $\gamma$  pode ser diferente de zero somente se:

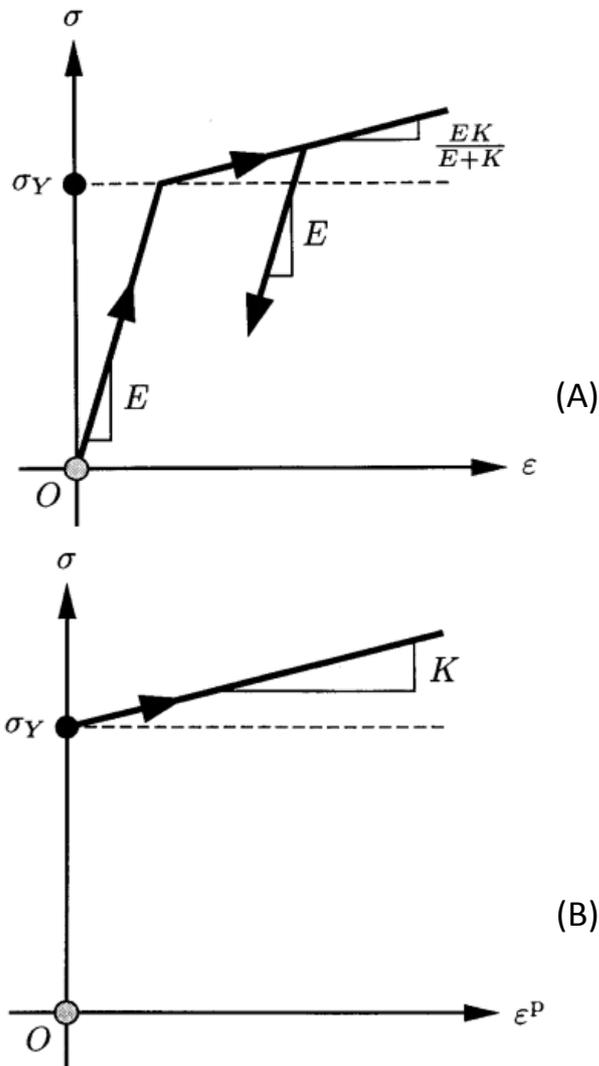
$$f = \dot{f} = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{\text{sign}(\sigma)E\dot{\epsilon}}{E + K}\tag{4.30}$$

Em seguida a forma de taxa da relação elástica (4.23) juntamente com (4.30) produz:

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} E\dot{\epsilon} & \text{se } \gamma = 0 \\ \frac{EK}{E + K}\dot{\epsilon} & \text{se } \gamma > 0 \end{cases}\tag{4.31}$$

A quantidade  $EK/(E + K)$  é chamada o *modulo tangente elastoplástico*. Veja a Figura 4.6 para uma ilustração. A interpretação do modulo plástico é dado na Figura 4.6.

Figura 4.6 - (A) O módulo tangente elastoplástico e (B) o módulo plástico



Fonte: Simo e Hughes (1998)

#### 4.2.3 - Refinamentos adicionais da lei do endurecimento

O modelo de endurecimento isotrópico discutido anteriormente é uma simplificação grosseira do comportamento do endurecimento nos materiais reais, em particular, os metais. Um mecanismo fenomenológico simples alternativo, referido como *o endurecimento cinemático*, utilizado isoladamente ou em conjunto com o endurecimento isotrópico, fornece um meio melhorado de representação do comportamento de endurecimento em metais submetidos a cargas cíclicas. A lei fenomenológica básica é creditada a Prager (1956), com melhorias adicionais de Ziegler (1959). Dentro do presente contexto unidimensional, o modelo pode ser ilustrada como segue.

### Lei do endurecimento cinemático

Em muitos metais submetidos a cargas cíclicas, é observado experimentalmente que o centro da superfície de escoamento experimenta um movimento na direção do fluxo plástico. A Figura 4.7 dá uma ilustração idealizada deste comportamento do endurecimento intimamente relacionado a um fenômeno conhecido como o efeito Bauschinger.

Um modelo fenomenológico simples que captura o efeito acima mencionado está construído pela introdução de uma variável interna adicional, denotado por  $q$  e chamada *tensão de volta*, a qual define a localização do centro da superfície de escoamento. Então a condição de escoamento é modificada à forma:

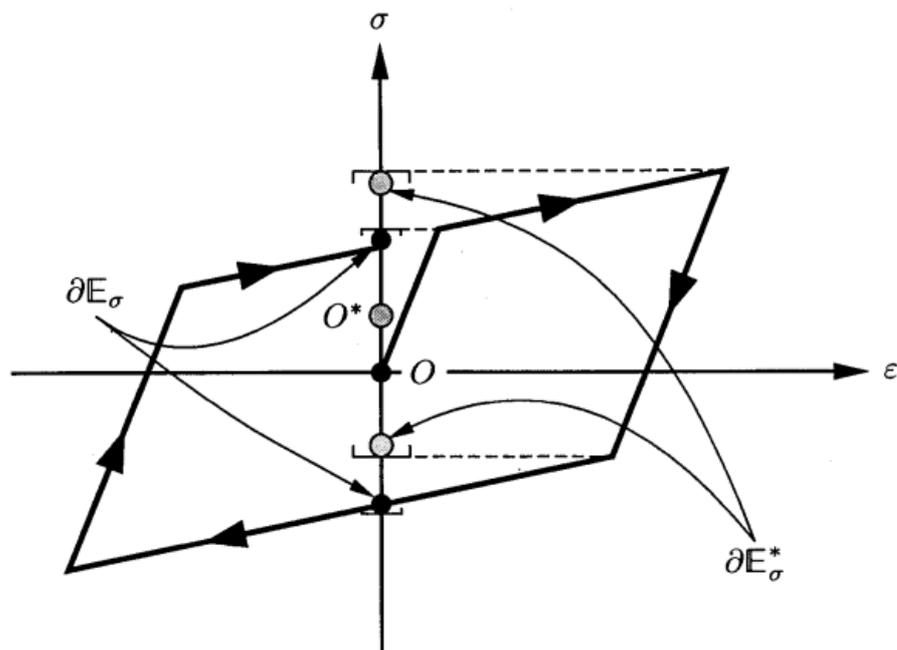
$$f(\sigma, q, \alpha) := |\sigma - q| - [\sigma_Y + K\alpha] \leq 0 \quad (4.32)$$

A evolução da tensão de volta  $q$  é definida pela regra de Ziegler como:

$$\dot{q} = H \dot{\varepsilon}^p \equiv \gamma H \text{sign}(\sigma - q) \quad (4.33)$$

Onde  $H$  é chamado o *módulo de endurecimento cinemático*. Finalmente, a evolução de  $\alpha$  permanece inalterada e dada por (4.25). A adição das condições de Kuhn-Tucker da forma (4.27), juntamente com uma condição de consistência análoga a (4.28) completam a formulação do modelo o qual é resumido por conveniência na Tabela 1.3.

Figura 4.7 - Ilustração idealizada do comportamento do endurecimento cinemático



Fonte: Simo e Hughes (1998)

Tabela 4.3 - Modelo constitutivo da plasticidade independente-da-taxa unidimensional com endurecimento isotrópico e cinemático combinado

---

i.	Relação tensão-deformação elástica	$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p)$
ii.	Regra de fluxo	$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \text{sign}(\sigma - q)$
iii.	Leis de endurecimento cinemático e isotrópico	$\dot{q} = \gamma H \text{sign}(\sigma - q)$ $\dot{\alpha} = \gamma$
iv.	Condição de escoamento e encerramento da faixa elástica	$f(\sigma, q, \alpha) :=  \sigma - q  - [\sigma_Y + K\alpha] \leq 0$ $\mathbb{E}_\sigma = \{(\sigma, q, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mid f(\sigma, q, \alpha) \leq 0\}$
v.	Condições de complementaridade Kuhn-Tucker	$\gamma \geq 0, \quad f(\sigma, q, \alpha) \leq 0, \quad \gamma f(\sigma, q, \alpha) = 0$
vi.	Condição de consistência (persistência)	$\gamma \dot{f}(\sigma, q, \alpha) = 0 \quad (\text{se } f(\sigma, q, \alpha) = 0)$

---

Fonte: Simo e Hughes (1998)

### Módulo elastoplástico tangente

O cálculo do parâmetro de consistência e o módulo tangente elastoplástico é efetuado da mesma maneira discutida na Seção 4.2.2. Primeiro, calcula-se a derivada respeito ao tempo do critério de escoamento utilizando a regra da cadeia junto com a relação tensão-deformação (4.23), a regra de fluxo (4.26), e as leis de endurecimento (4.25) e (4.33). Assim, a partir de (4.32) verifica-se que:

$$\begin{aligned}
 \dot{f} &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \\
 &= \text{sign}(\sigma - q)[E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) - \dot{q}] - K\dot{\alpha} \\
 &= \text{sign}(\sigma - q)E\dot{\varepsilon} - \gamma[E + (H + K)] \leq 0
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Outra vez lembramos que a relação  $\dot{f} > 0$  não se pode manter na plasticidade independente-da-taxa. Por outro lado, se  $\gamma$  é diferente de zero, as condições de Kuhn-Tucker juntamente com a condição de consistência exige que  $f = 0$  e  $\dot{f} = 0$ . Então este último requisito e (4.34) produzem:

$$\gamma = \frac{\text{sign}(\sigma - q)E\dot{\varepsilon}}{E + [H + K]} \quad (4.35)$$

Desde que  $\dot{\sigma} = [d\sigma/d\varepsilon]\dot{\varepsilon}$ , a relação elástica (4.23) junto com a de fluxo regra (4.26) e (4.35) resultam na expressão:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon} = \begin{cases} E & \text{se } \gamma = 0 \\ \frac{E[H + K]}{E + [H + K]} & \text{se } \gamma > 0 \end{cases} \quad (4.36)$$

A qual define o módulo tangente elastoplástico para endurecimento isotrópico/cinemático combinado.

#### 4.2.4 - Algoritmos de integração para a plasticidade independente-da-taxa

Os algoritmos de integração referem-se aos métodos para encontrar uma solução numérica aproximada das equações diferenciais ordinárias.

O problema a ser abordado nesta seção é puramente local e se afirma o seguinte:

- i. Seja  $x \in \bar{\mathcal{B}} = [0, L]$  um determinado ponto de interesse no corpo obedecendo ao modelo constitutivo independente-de-taxa na Tabela 4.1, Tabela 4.2, ou Tabela 4.3.
- ii. Suponha que o estado local do corpo no ponto  $x \in \mathcal{B}$  e tempo atual, dizer  $t_n$ , está completamente definido. Por esta afirmação, queremos dizer que o valor de:

$$\{\varepsilon_n(x), \varepsilon_n^p(x), \alpha_n(x), q_n(x)\} \quad (4.37)$$

É conhecido e, por conseguinte, o estado de tensão:

$$\sigma_n(x) = E[\varepsilon_n(x) - \varepsilon_n^p(x)] \quad (4.38)$$

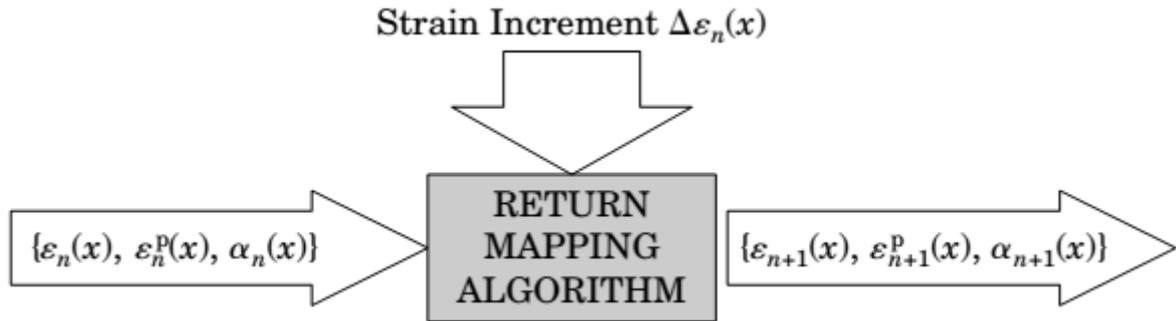
Também é conhecido.

- iii. Suponha-se que é dado um "incremento" na deformação total em  $x \in \mathcal{B}$ , isto é  $\Delta\varepsilon(x)$ , o que leva ao estado para o tempo  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ . O problema básico com o qual se deve preocupar é a atualização das variáveis básicas (4.37) para o tempo  $t_{n+1}$  em uma maneira consistente com o modelo constitutivo na Tabela 4.2 ou Tabela 4.3.

Assim, no contexto descrito acima, a integração "incremental" do modelo elastoplástico independente-da-taxa em qualquer das Tabela 4.2 ou Tabela 4.3 ao longo de um passo de tempo  $[t_n, t_n + \Delta t]$  é considerada como um *processo dirigido-pela-deformação* no qual a

deformação total  $\varepsilon = \partial u / \partial x$  é a variável independente básica. Uma vez mais, note-se que este processo de integração é local no espaço, isto é, ocorre em pontos específicos do corpo (estes pontos correspondem, tipicamente, a pontos de quadratura de um elemento finito). Uma ilustração do problema básico na plasticidade computacional é dada na Figura 4.8.

Figura 4.8 - O papel dos algoritmos return-mapping elastoplásticos. Note-se que  $\sigma$  é uma variável dependente calculada pela relação  $\sigma(x) = E[\varepsilon(x) - \varepsilon^p(x)]$



Fonte: Simo e Hughes (1998)

#### 4.2.4.1 - A forma incremental da plasticidade independente-da-taxa

Para motivar o *esquema de integração* adotado na formulação de algoritmos return-mapping, em primeiro lugar revisamos uma família clássica de esquemas para a integração numérica de equações diferenciais ordinárias.

#### A regra do ponto médio generalizada

Seja  $f$  uma função suave, e considerar o problema de valor inicial:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_n \end{array} \right\} \text{ em } [0, T] \quad (4.39)$$

Devemos estar preocupados com a seguinte classe de algoritmos de integração de um parâmetro chamado de regra do ponto médio generalizado:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta t f(x_{n+\vartheta}) \\ x_{n+\vartheta} &= \vartheta x_{n+1} + (1 - \vartheta)x_n; \quad \vartheta \in [0,1] \end{aligned} \quad (4.40)$$

Aqui,  $x_{n+1} \cong x(t_{n+1})$  denota a aproximação algorítmica para o valor exato de  $x(t_{n+1})$  no tempo  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ . Ressaltamos que esta família de algoritmos contém esquemas de integração bem conhecidos, em particular,

$$\left. \begin{aligned} \vartheta = 0 &\Rightarrow \text{Euler para a frente (explícita)} \\ \vartheta = \frac{1}{2} &\Rightarrow \text{regra do ponto médio} \\ \vartheta = 1 &\Rightarrow \text{Euler para trás (implícita)} \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

Aqui, nós simplesmente lembraremos que a precisão de segunda ordem é somente obtida para  $\vartheta = \frac{1}{2}$  enquanto a estabilidade incondicional (linear) exige que  $\vartheta \geq \frac{1}{2}$ .

O nosso objetivo aqui é ilustrar a aplicação da classe de algoritmos (4.40) para a integração do problema de valor inicial elastoplástico. Primeiro consideramos uma análise detalhada do modelo de endurecimento isotrópico na Tabela 4.2. A extensão da análise ao modelo de endurecimento isotrópico/cinemático combinado na Tabela 4.3 é examinada na Seção 4.2.4.3.

Nesta fase, é importante ressaltar uma diferença fundamental entre (4.39) e o modelo na Tabela 4.2. Em (4.39), a curva  $t \in \mathbb{R} \mapsto x(t)$  (o "fluxo") é irrestrita enquanto que no modelo na Tabela 4.2, a curva:

$$t \in \mathbb{R} \mapsto (\sigma(x), \alpha(x)) \in \mathbb{E}_\sigma \quad (4.42)$$

É restrito a estar dentro do encerramento do domínio elástico  $\mathbb{E}_\sigma$ . Assim, fala-se de um *problema restrito da evolução*. Observe que, por meio da relação tensão-deformação, podemos equivalentemente, considerar a curva:

$$t \in \mathbb{R} \mapsto [\varepsilon(x), \varepsilon^p(x), \alpha(x)] \in \mathbb{E}_\varepsilon \quad (4.43)$$

Onde  $\mathbb{E}_\varepsilon$  é o encerramento do domínio elástico no espaço da deformação, o qual é definido da relação de tensão-deformação como:

$$\mathbb{E}_\sigma = \{(\varepsilon, \varepsilon^p, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \mid f(E(\varepsilon - \varepsilon^p), \alpha) \leq 0\} \quad (4.44)$$

A presença da condição de restrição é precisamente a característica essencial que caracteriza à plasticidade.

### **Problema de valor inicial elastoplástico incremental. Endurecimento isotrópico.**

Como motivação, vamos começar nossa análise por considerar o caso mais simples para o qual  $\vartheta = 1$  em (4.40). Esta escolha de  $\vartheta$  corresponde ao *método Euler para trás*, e leva aos

algoritmos return-mapping clássicos. Da Tabela 4.2, através da aplicação de (4.40) com  $\vartheta = 1$ , obtemos:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{n+1}^p &= \varepsilon_n^p + \Delta\gamma \operatorname{sign}(\sigma_{n+1}) \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n + \Delta\gamma \end{aligned} \right\} \quad (4.45)$$

Onde  $\Delta\gamma = \gamma_{n+1} \Delta t \geq 0$  é um multiplicador de Lagrange (a contraparte algorítmica do parâmetro de consistência  $\gamma \geq 0$  e

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{n+1} &= E[\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p] \\ \varepsilon_{n+1} &:= \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_n \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

As variáveis  $(\sigma_{n+1}, \alpha_{n+1})$ , juntamente com  $\Delta\gamma$  são restringidas pela seguinte *versão discreta* das condições de Kuhn-Tucker:

$$\left. \begin{aligned} f_{n+1} &:= |\sigma_{n+1}| - [\sigma_Y + K\alpha_{n+1}] \leq 0 \\ \Delta\gamma &\geq 0 \\ \Delta\gamma f_{n+1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.47)$$

Observamos que  $\Delta\varepsilon_n$  é dado, e por tanto a equação (4.46) é considerada simplesmente como a definição para  $\varepsilon_{n+1}$ . Além disso, nota-se que, através da aplicação do *algoritmo de Euler para trás implícito*, nós transformamos o problema restrito inicial de evolução em um problema algébrico restrito discreto para as variáveis  $(\varepsilon_{n+1}, \alpha_{n+1})$ . Surpreendentemente, há uma estrutura variacional subjacente a qual torna as equações (4.45)-(4.47) em condições de otimização de um *problema de otimização restrito discreto*. Nós não discutiremos essas ideias e concentraremos a nossa atenção sobre a solução direta do problema (4.45)-(4.47), para maior informação ao respeito ver Simo e Hughes (1998).

#### 4.2.4.2 - Algoritmos return-mapping - endurecimento isotrópico

Por agora vamos supor que a solução do problema (4.45)-(4.47) é única. Um passo essencial na solução de (4.45)-(4.47) é a introdução de o seguinte problema auxiliar.

## O estado elástico preditor (trial)

Consideramos um estado auxiliar, o qual como é mostrado abaixo não precisa corresponder a um estado real, e é obtido por *congelamento do fluxo plástico*. Em outras palavras, em primeiro lugar consideramos um passo puramente elástico (trial) definida pelas fórmulas:

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1}^{\text{trial}} &:= E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) \equiv \sigma_n + E \Delta\varepsilon_n \\ \varepsilon_{n+1}^{p\text{trial}} &:= \varepsilon_n^p \\ \alpha_{n+1}^{\text{trial}} &:= \alpha_n \\ f_{n+1}^{\text{trial}} &:= |\sigma_{n+1}^{\text{trial}}| - [\sigma_Y + K \alpha_n]\end{aligned}\tag{4.48}$$

Observamos que o estado preditor (trial) é determinado unicamente em termos das *condições iniciais*  $\{\varepsilon_n, \varepsilon_n^p, \alpha_n\}$  e a deformação incremental dada  $\Delta\varepsilon_n$ . Mais uma vez, nós observamos que esse estado pode não, e em geral não, corresponder a nenhum estado admissível fisicamente real a menos que o processo incremental seja elástico no sentido descrito abaixo.

## Forma algorítmica das condições de carga

Uma vez que o estado preditor (trial) é calculado por (4.48), em primeiro lugar, consideramos o caso para o qual

$$f_{n+1}^{\text{trial}} \leq 0\tag{4.49}$$

Segue-se que o estado preditor (trial) é *admissível* no sentido de que

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n+1}^p &= \varepsilon_n^p \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n \\ \sigma_{n+1} &= \sigma_{n+1}^{\text{trial}}\end{aligned}\tag{4.50}$$

Satisfazem:

1. A relação tensão-deformação,
2. A regra de fluxo e a lei endurecimento com,  $\Delta\gamma \equiv 0$ , e
3. As condições de Kuhn-Tucker, uma vez que as condições:

$$f_{n+1} \equiv f_{n+1}^{\text{trial}} \leq 0 \quad \text{e} \quad \Delta\gamma = 0\tag{4.51}$$

São consistentes com (4.47).

Portanto, uma vez que a solução para o problema (4.45)-(4.47) é única, o estado preditor (trial) de facto é a solução para o problema. Uma ilustração desta situação é dada na Figura 4.9.

Em seguida, vamos considerar o caso para o qual  $f_{n+1}^{\text{trial}} > 0$ . Claramente, o estado preditor (trial) não pode ser uma solução para o problema incremental desde que  $(\sigma_{n+1}^{\text{trial}}, \alpha_n)$  viola a condição de restrição  $f(\sigma, \alpha) \leq 0$ . Assim, exigimos que  $\Delta\gamma > 0$  para que  $\varepsilon_{n+1}^p \neq \varepsilon_n^p$  para obter  $\sigma_{n+1} \neq \sigma_{n+1}^{\text{trial}}$ . Pelas condições de Kuhn-Tucker

$$\begin{aligned} \Delta\gamma &> 0 \\ \Delta\gamma f_{n+1} &= 0 \implies f_{n+1} = 0 \end{aligned} \tag{4.52}$$

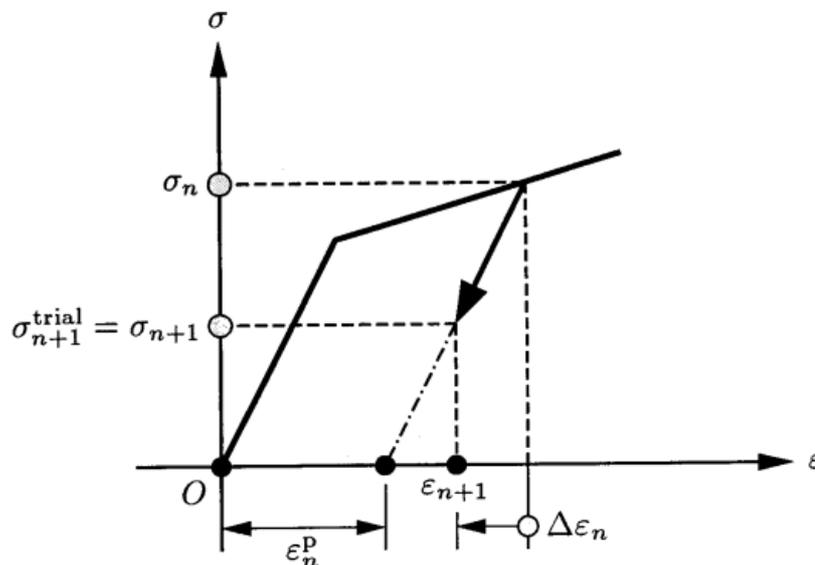
E o processo é incrementalmente plástico. Ver Figura 4.10 para uma ilustração.

Para resumir nossos resultados, a conclusão de que um processo incremental para deformação incremental dada é elástico ou plástico é determinado exclusivamente com a base do estado trial de acordo com o critério

$$f_{n+1}^{\text{trial}} \begin{cases} \leq 0 \implies & \text{passo elástico} & \Delta\gamma = 0 \\ > 0 \implies & \text{passo plástico} & \Delta\gamma > 0 \end{cases} \tag{4.53}$$

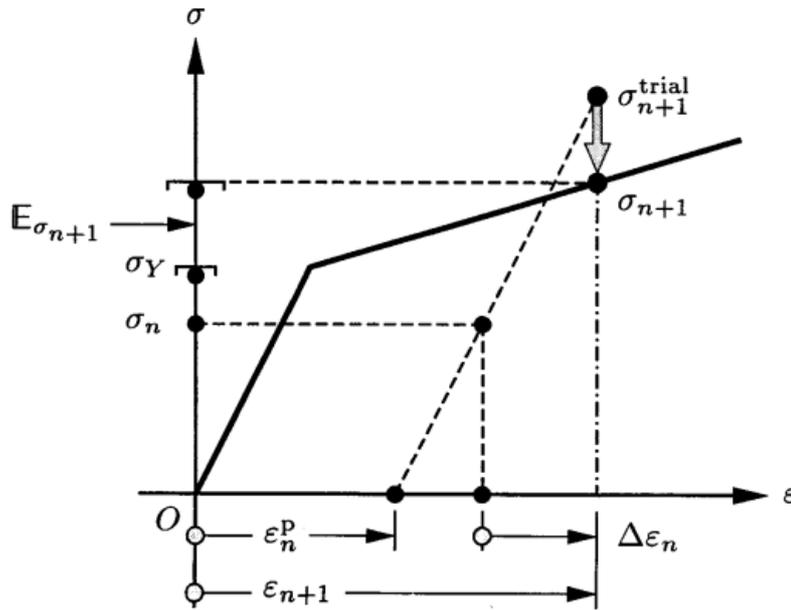
Note-se que essas condições de carga/descarga são a contrapartida algorítmica das condições de Kuhn-Tucker.

Figura 4.9 - Exemplo de um passo elástico incremental de um estado plástico. A solução final coincide com o estado preditor (trial)



Fonte: Simo e Hughes (1998)

Figura 4.10 - O estado predictor (trial) viola a condição de restrição  $f \leq 0$ . Por conseguinte, o processo incremental deve ser plástico desde que  $\Delta\gamma > 0$  para atingir  $\sigma_{n+1} \neq \sigma_{n+1}^{\text{trial}}$



Fonte: Simo e Hughes (1998)

### O algoritmo return-mapping

Aqui vamos examinar o problema algorítmico para um processo plástico incremental caracterizado por as condições:

$$\begin{aligned} f_{n+1}^{\text{trial}} > 0 &\Leftrightarrow f(\sigma_{n+1}, \alpha_{n+1}) = 0 \\ \Delta\gamma &> 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

Nosso objetivo é determinar a solução  $\{\varepsilon_{n+1}^p, \alpha_{n+1}, \sigma_{n+1}, \Delta\gamma\}$  para o problema (4.45)-(4.47).

Para realizar esta tarefa, primeiro expressamos o esforço final de  $\sigma_{n+1}$  em termos de  $\sigma_{n+1}^{\text{trial}}$  e  $\Delta\gamma$  como segue:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \\ &= E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) - E(\varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_n^p) \\ &= \sigma_{n+1}^{\text{trial}} - E \Delta\gamma \text{sign}(\sigma_{n+1}) \end{aligned} \quad (4.55)$$

Portanto, uma vez que  $\Delta\gamma > 0$ , (4.45)-(4.47) é escrito, em vista de (4.55), como:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{n+1} &= \sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \Delta\gamma E \text{sign}(\sigma_{n+1}) \\ \varepsilon_{n+1}^p &= \varepsilon_n^p + \Delta\gamma \text{sign}(\sigma_{n+1}) \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n + \Delta\gamma \\ f_{n+1} &\equiv |\sigma_{n+1}| - [\sigma_Y + K \alpha_{n+1}] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.56)$$

Agora o problema (4.56) é resolvido explicitamente em termos do estado elástico preditor (trial) pelo procedimento a seguir. De (4.56)<sub>1</sub>:

$$|\sigma_{n+1}| \text{sign}(\sigma_{n+1}) = |\sigma_{n+1}^{\text{trial}}| \text{sign}(\sigma_{n+1}^{\text{trial}}) - \Delta\gamma E \text{sign}(\sigma_{n+1}) \quad (4.57)$$

Coletando termos em (4.57), descobrimos que:

$$[|\sigma_{n+1}| + \Delta\gamma E] \text{sign}(\sigma_{n+1}) = |\sigma_{n+1}^{\text{trial}}| \text{sign}(\sigma_{n+1}^{\text{trial}}) \quad (4.58)$$

Desde que  $\Delta\gamma > 0$  e  $E > 0$ , observamos que o termo entre colchetes em (4.58) é necessariamente positivo. Por isso é necessário que

$$\text{sign}(\sigma_{n+1}) = \text{sign}(\sigma_{n+1}^{\text{trial}}) \quad (4.59)$$

Juntamente com a condição

$$|\sigma_{n+1}| + \Delta\gamma E = |\sigma_{n+1}^{\text{trial}}| \quad (4.60)$$

Finalmente, o parâmetro de consistência algorítmica  $\Delta\gamma > 0$  é determinada a partir da condição de consistência discreta (4.56)<sub>4</sub> como segue. Tendo em vista (4.60), o critério de escoamento  $f_{n+1}$  é escrito como:

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= |\sigma_{n+1}^{\text{trial}}| - E \Delta\gamma - [\sigma_Y + K \alpha_n] - K(\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\ &= f_{n+1}^{\text{trial}} - \Delta\gamma(E + K) \end{aligned} \quad (4.61)$$

Onde usamos (4.48) e (4.56)<sub>3</sub> para a obtenção de (4.61). Dai:

$$f_{n+1} = 0 \Rightarrow \Delta\gamma = \frac{f_{n+1}^{\text{trial}}}{E + K} > 0 \quad (4.62)$$

Substituindo (4.59) e (4.62) em (4.56) produz o resultado desejado:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= \sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \Delta\gamma E \text{sign}(\sigma_{n+1}^{\text{trial}}) \\ \varepsilon_{n+1}^p &= \varepsilon_n^p + \Delta\gamma \text{sign}(\sigma_{n+1}^{\text{trial}}) \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n + \Delta\gamma \end{aligned} \quad (4.63)$$

A interpretação convincente de algoritmo (4.62)-(4.63) ilustrada na Figura 4.11 é derivada por escrever (4.63), em uma forma ligeiramente diferente. De (4.63)<sub>1</sub> e (4.62) obtemos a expressão alternativa:

$$\begin{aligned}
\sigma_{n+1} &= (|\sigma_{n+1}^{\text{trial}}| - \Delta\gamma E) \text{sign}(\sigma_{n+1}^{\text{trial}}) \\
&= \left[ 1 - \frac{\Delta\gamma E}{|\sigma_{n+1}^{\text{trial}}|} \right] \sigma_{n+1}^{\text{trial}}
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Como  $f_{n+1} = 0$ , tendo em vista (4.64), podemos concluir que *o estado de tensão final é a projeção da tensão trial sobre a superfície de escoamento*. Devido a essa interpretação, o algoritmo resumido na Tabela 4.4 é chamado de *algoritmo return-mapping*.

Tabela 4.4 - Algoritmo return-mapping para a plasticidade independente-da-taxa unidimensional com endurecimento isotrópico

- 
1. Dados do passo anterior em  $x \in \mathcal{B}$ :  $\{\varepsilon_n^p, \alpha_n\}$
  2. Campo de deformação dado em  $x \in \mathcal{B}$ :  $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_n$
  3. Calcular a tensão trial elástica e testar para a carga plástica

$$\sigma_{n+1}^{\text{trial}} := E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p)$$

$$f_{n+1}^{\text{trial}} := |\sigma_{n+1}^{\text{trial}}| - [\sigma_Y + K \alpha_n]$$

IF  $f_{n+1}^{\text{trial}} \leq 0$  THEN

*Passo elástico:* Estabelecer

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{\text{trial}}$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p \quad \Rightarrow \text{EXIT}$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n$$

ELSE

*Passo plástico:* Prossiga para o passo 4.

ENDIF

4. Return-mapping

$$\Delta\gamma := \frac{f_{n+1}^{\text{trial}}}{E + K} > 0$$

$$\sigma_{n+1} := \left[ 1 - \frac{\Delta\gamma E}{|\sigma_{n+1}^{\text{trial}}|} \right] \sigma_{n+1}^{\text{trial}}$$

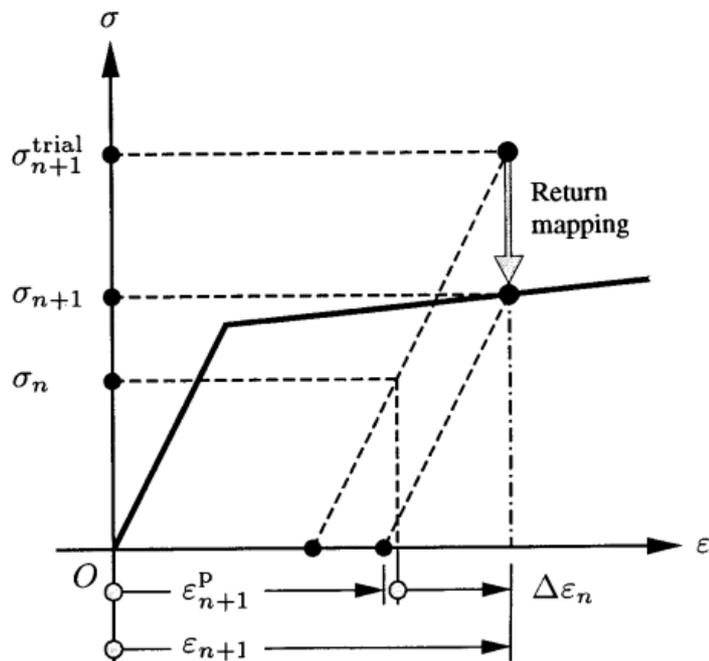
$$\varepsilon_{n+1}^p := \varepsilon_n^p + \Delta\gamma \text{sign}(\sigma_{n+1}^{\text{trial}})$$

$$\alpha_{n+1} := \alpha_n + \Delta\gamma$$


---

Fonte: Simo e Hughes (1998)

Figura 4.11 - A tensão final é obtido por "retornar" a tensão trial à superfície do escoamento através de um escalonamento, por isso, a denominação de return-mapping



Fonte: Simo e Hughes (1998)

#### 4.2.4.3 - Extensão ao modelo de endurecimento isotrópico/cinemático combinado

Em seguida, vamos ilustrar melhor o desenvolvimento de algoritmos de integração para a plasticidade independente-da-taxa, considerando a situação um pouco mais geral proporcionada por um mecanismo de endurecimento isotrópico/cinemático combinado, como resumido na Tabela 4.3. Veremos que os passos envolvidos na formulação do algoritmo são idênticos aos examinados em detalhe na seção anterior (4.2.4.2).

Para abordar a implementação numérica do modelo na Tabela 4.3, é conveniente introduzir a variável auxiliar:

$$\xi := \sigma - q \quad (4.65)$$

Conhecida como a *tensão relativa*.

### Estado elástico predictor (trial)

No presente contexto, o problema auxiliar (4.48) obtido por *congelamento do fluxo plástico* no intervalo  $[t_n, t_{n+1}]$  agora toma a forma:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{n+1}^{\text{trial}} &:= E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) \equiv \sigma_n + E \Delta\varepsilon_n \\
 \xi_{n+1}^{\text{trial}} &:= \sigma_{n+1}^{\text{trial}} - q_n \\
 \varepsilon_{n+1}^p &:= \varepsilon_n^p \\
 \alpha_{n+1}^{\text{trial}} &:= \alpha_n \\
 q_{n+1}^{\text{trial}} &:= q_n \\
 f_{n+1}^{\text{trial}} &:= |\sigma_{n+1}^{\text{trial}}| - [\sigma_Y + K \alpha_n]
 \end{aligned} \tag{4.66}$$

Outra vez observamos que o estado predictor (trial) é determinado unicamente em termos das condições iniciais  $\{\varepsilon_n, \varepsilon_n^p, \alpha_n\}$  e a deformação incremental dada  $\Delta\varepsilon_n$ . Uma análise inteiramente análoga à realizada em detalhe na seção anterior (4.2.4.2) conduz à seguinte afirmação da contraparte algorítmica das condições de carga/descarga de Kuhn-Tucker.

$$f_{n+1}^{\text{trial}} \begin{cases} \leq 0 \Rightarrow & \text{passo elástico} & \Delta\gamma = 0 \\ > 0 \Rightarrow & \text{passo plástico} & \Delta\gamma > 0 \end{cases} \tag{4.67}$$

Se o passo é elástico no sentido de (4.67), o estado predictor (trial) é a solução real do problema incremental associado com o modelo constitutivo na Tabela 4.3.

Por outro lado, se o passo é plástico, um algoritmo da forma fechada é construído como se segue.

### O algoritmo return-mapping

As equações algorítmicas discretas são obtidas a partir do modelo contínuo na Tabela 4.3, aplicando um *esquema de integração de Euler para trás implícito*. Prosseguindo no mesmo sentido que conduz a as equações (4.56), o resultado final é expresso como:

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{n+1} &= \sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \Delta\gamma E \text{sign}(\xi_{n+1}) \\
 \varepsilon_{n+1}^p &= \varepsilon_n^p + \Delta\gamma \text{sign}(\xi_{n+1}) \\
 \alpha_{n+1} &= \alpha_n + \Delta\gamma \\
 q_{n+1} &= q_n + \Delta\gamma H \text{sign}(\xi_{n+1}) \\
 f_{n+1} &:= |\xi_{n+1}| - [\sigma_Y + K \alpha_{n+1}] = 0
 \end{aligned} \right\} \tag{4.68}$$

Onde

$$\xi_{n+1} := \sigma_{n+1} - q_{n+1} \quad (4.69)$$

O passo fundamental envolvido na solução de forma fechada do problema discreto (4.68)-(4.69) baseia-se na exploração de uma expressão para  $\xi_{n+1}$  obtido como se segue.

Subtraindo (4.68)<sub>4</sub> a partir de (4.68)<sub>1</sub> e utilizando a definição (4.69),

$$\xi_{n+1} = (\sigma_{n+1}^{\text{trial}} - q_n) - \Delta\gamma (E + H) \text{sign}(\xi_{n+1}) \quad (4.70)$$

Agora vamos usar o fato de que  $\xi_{n+1}^{\text{trial}} := \sigma_{n+1}^{\text{trial}} - q_n$  e reorganizar termos em (4.70) para obter:

$$[ |\xi_{n+1}| + \Delta\gamma (E + H) ] \text{sign}(\xi_{n+1}) = |\xi_{n+1}^{\text{trial}}| \text{sign}(\xi_{n+1}^{\text{trial}}) \quad (4.71)$$

Desde que  $\Delta\gamma > 0$  e  $E + H > 0$  pela premissa, segue-se necessariamente que o coeficiente de  $\text{sign}(\xi_{n+1})$  em (4.71) deve ser positivo. Portanto, (4.71) implica o resultado:

$$\text{sign}(\xi_{n+1}) = \text{sign}(\xi_{n+1}^{\text{trial}}) \quad (4.72)$$

Juntamente com a condição

$$|\xi_{n+1}| + \Delta\gamma (E + H) = |\xi_{n+1}^{\text{trial}}| \quad (4.73)$$

Agora o *parâmetro de consistência plástica incremental*  $\Delta\gamma > 0$  é determinada a partir do requisito de consistência (4.68)<sub>5</sub> usando (4.73) e (4.68)<sub>3</sub>:

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= |\xi_{n+1}^{\text{trial}}| - (E + H) \Delta\gamma - [\sigma_Y + K \alpha_{n+1}] \\ &= |\xi_{n+1}^{\text{trial}}| - (E + H) \Delta\gamma - [\sigma_Y + K \alpha_n] - K(\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\ &= f_{n+1}^{\text{trial}} - \Delta\gamma[E + (K + H)] = 0 \end{aligned} \quad (4.74)$$

Resolvendo esta equação algébrica para  $\Delta\gamma > 0$  produz o seguinte resultado:

$$\Delta\gamma = \frac{f_{n+1}^{\text{trial}}}{E + [K + H]} > 0 \quad (4.75)$$

Assim, as condições (4.72) e (4.75) determinam completamente o algoritmo em (4.68). Por conveniência, uma descrição passo-a-passo do esquema computacional global é dada na Tabela 4.5.

Tabela 4.5 - Algoritmo return-mapping para a plasticidade independente-da-taxa unidimensional com endurecimento isotrópico/cinemático combinado

- 
1. Dados do passo anterior em  $x \in \mathcal{B}$ :  $\{\varepsilon_n^p, \alpha_n, q_n\}$
  2. Campo de deformação dado em  $x \in \mathcal{B}$ :  $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_n$
  3. Calcular a tensão trial elástica e testar para a carga plástica

$$\sigma_{n+1}^{\text{trial}} := E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p)$$

$$\xi_{n+1}^{\text{trial}} := \sigma_{n+1}^{\text{trial}} - q_n$$

$$f_{n+1}^{\text{trial}} := |\xi_{n+1}^{\text{trial}}| - [\sigma_Y + K\alpha_n]$$

IF  $f_{n+1}^{\text{trial}} \leq 0$  THEN

*Passo elástico:* Estabelecer

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{\text{trial}}$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p \quad \Rightarrow \text{EXIT}$$

$$q_{n+1} = q_n$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n$$

ELSE

*Passo plástico:* Prossiga para o passo 4.

ENDIF

4. Return-mapping

$$\Delta\gamma := \frac{f_{n+1}^{\text{trial}}}{E + [K + H]} > 0$$

$$\sigma_{n+1} := \sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \Delta\gamma E \text{sign}(\xi_{n+1}^{\text{trial}})$$

$$\varepsilon_{n+1}^p := \varepsilon_n^p + \Delta\gamma \text{sign}(\xi_{n+1}^{\text{trial}})$$

$$q_{n+1} := q_n + \Delta\gamma H \text{sign}(\xi_{n+1}^{\text{trial}})$$

$$\alpha_{n+1} := \alpha_n + \Delta\gamma$$


---

Fonte: Simo e Hughes (1998)

### 4.3 - MODELAGEM MACROSCÓPICA DO DISSIPADOR METÁLICO

Tendo discutido o comportamento mecânico de metais no nível constitutivo, a partir de agora a ênfase muda para a caracterização da resposta global do amortecedor metálico. Segundo Soong e Dargush (1997) no desenvolvimento de modelos de força-deslocamento adequados, existem, pelo menos, um par de abordagens diferentes que podem ser utilizadas. A primeira abordagem envolve o uso direto de dados experimentais obtidos a partir de ensaios dos componentes do amortecedor. A forma básica do modelo força-deslocamento, chamada *curva esqueleto*, é selecionada em primeiro lugar e, em seguida, os parâmetros do modelo são determinados através de um procedimento de ajuste de curva. Na segunda abordagem, o modelo de força-deslocamento é em vez disso construído a partir de uma relação constitutiva apropriada para o metal, aplicando os princípios da mecânica. Esta última abordagem muitas vezes pode fornecer esclarecimentos adicionais sobre o comportamento do dispositivo, além de reduzir os requisitos para ensaios dos componentes.

De acordo com a primeira abordagem, uma vez obtida a curva experimental de um dissipador de energia, é necessário encontrar um modelo do comportamento matemático que se ajuste bem aos dados e seja representativo do dispositivo. Os dados obtidos podem ser adaptados ao modelo bilinear ou modelo Bouc-Wen, pois estes modelos são os mais recomendados para simular dissipadores metálicos de comportamento histerético.

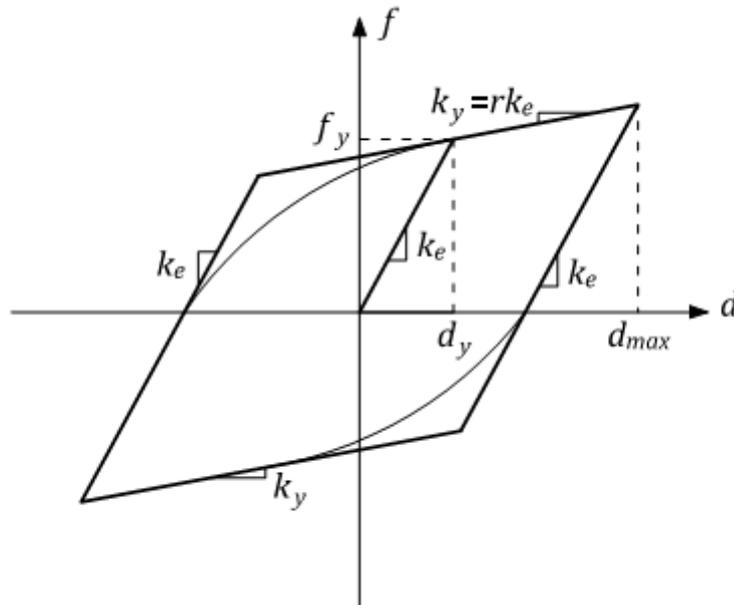
A seguir se apresentam alguns dos modelos força-deslocamento utilizados para modelar analiticamente o comportamento histerético não linear do dissipador:

- Modelo Bilinear, onde a força  $f$  se obtém do modelo bilinear que depende dos parâmetros  $f_y, d_y, k_e$  e  $r$ . Ver item 4.3.1.
- Modelo Bouc-Wen, onde se obtém uma expressão  $f = f(d, z)$ , com  $z$  definido tal como mostra o item 4.3.2.
- Interpretação geométrica para cada ciclo, de onde se obtêm valores lineares equivalentes de rigidez e amortecimento para cada ciclo. Ver item 4.3.3.

#### 4.3.1 - Modelo bilinear

No comportamento do modelo bilinear, a histerese obtida no teste de carga cíclica é aproximada por meio de retas, tal como o mostra a Figura 4.12.

Figura 4.12 - Modelo bilinear



Fonte própria

Podem ser observadas as seguintes relações da Figura 4.12.

- 1) Uma rigidez elástica inicial ( $k_e$ ), associada com a reação do dispositivo frente a cargas de baixa magnitude. Obtêm-se ao traçar uma reta tangente as zonas de menor carga do ciclo.
- 2) Uma rigidez pós-escoamento ( $k_y = rk_e$ ), associada à reação do dispositivo frente às cargas mais altas do ciclo. Obtêm-se ao traçar uma reta tangente à curva que passe pelo ponto de maior deslocamento da histerese. Onde  $r$  é a taxa da rigidez pós-escoamento ( $k_y$ ) à rigidez elástica ( $k_e$ ), chamada *taxa de endurecimento*.
- 3) Uma força de escoamento ( $f_y$ ), com seu correspondente deslocamento de escoamento ( $d_y$ ), que estabelecem um valor convencional de transição entre as relações carga-deformação antes mencionadas. Obtêm-se no ponto de interseção da reta de rigidez pós-escoamento com a de rigidez inicial, esta última deve passar pela origem de coordenadas (representado assim o estado prévio ao primeiro escoamento no ciclo).

Sua principal vantagem é a simplicidade que se apresenta ao modelar a curva histerética, sua desvantagem está associada à região de transição no estado elastoplástico, que se aproxima melhor com uma curva e não com uma reta, onde está se considerando deformações muito menores que as reais.

### 4.3.2 - Modelo de Bouc-Wen

Este modelo pode ser considerado como uma extensão do modelo originalmente proposto por Bouc (1971) e subsequentemente estendido por Wen (1976).

O modelo de Bouc-Wen é capaz de representar com boa precisão diferentes tipos de relações constitutivas de acordo com o valor de seus parâmetros, dentre estas é capaz de representar bem a relação constitutiva bilinear, à do dispositivo de fricção e da maioria dos dissipadores metálicos.

Este modelo compõe-se de uma força que utiliza como variável o deslocamento  $d$ , além de uma variável adimensional denominada  $z$  (WEN, 1976).

$$f(t) = r k_e d(t) + (1 - r) f_y z(t) \quad (4.76)$$

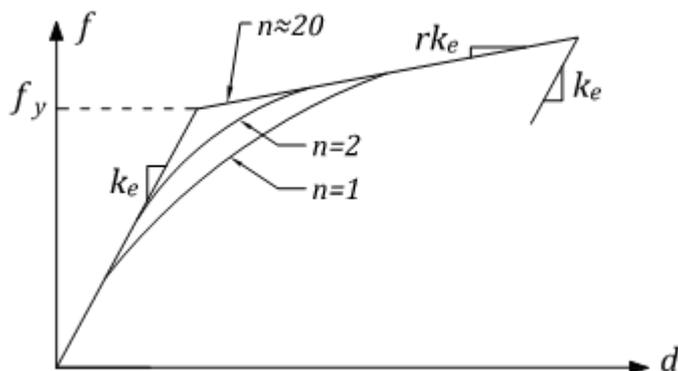
A variável  $z$  é adimensional e seu comportamento vem dado pela seguinte equação diferencial.

$$\dot{z}(t) = A \dot{d}(t) - \beta z(t) \left| \dot{d}(t) \right| |z(t)|^{n-1} - \gamma \dot{d}(t) |z(t)|^n \quad (4.77)$$

Os parâmetros  $A$ ,  $r$ ,  $\beta$  e  $n$  são coeficientes adimensionais que regulam a forma do ciclo histerético. Onde  $A$  é o fator de escala geral,  $r$  é a taxa de endurecimento,  $\beta$  e  $\gamma$  determinam a forma da curva e  $n$  regula a suavidade da transição entre a região linear e não linear. Por exemplo, para valores grandes de  $n$ , a transição do comportamento linear para o não linear é abrupta e o laço de histerese é associado com o modelo bilinear, veja a Figura 4.13. As expressões acima dadas foram modificadas em relação à nomenclatura, de modo que a mesma nomenclatura seja usada em todo o capítulo.

A principal vantagem deste modelo é seu refinamento e exatidão, pois ao variar seus parâmetros é possível simular uma grande variedade de comportamentos elastoplásticos que servem para caracterizar a resposta de um dispositivo no tempo. Sua desvantagem está em que se trata de um modelo descrito mediante uma equação diferencial.

Figura 4.13 - Parâmetros para o modelo Bouc-Wen



Fonte própria: Baseado em Computer and Structures Inc. (2009)

### 4.3.3 - Interpretação geométrica para cada ciclo

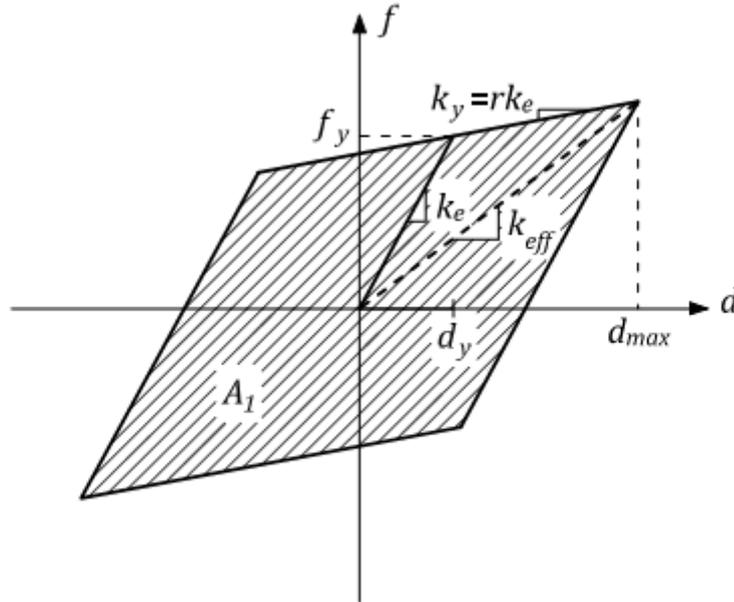
No caso não linear, a energia dissipada em um ciclo de deformação por um dispositivo qualquer esta diretamente relacionada com a área encerrada pelo laço de histerese força-deslocamento. É então possível escolher um sistema linear equivalente que dissipe em um ciclo a mesma energia que o sistema não linear.

Assim, uma das técnicas aproximadas mais diretas da análise implica em substituir o sistema não linear por um sistema linear equivalente. As conclusões sobre as características da resposta do sistema não linear podem então ser deduzidas analisando a resposta do sistema linear. Isto genericamente refere-se ao método de linearização equivalente.

Na Figura 4.14 apresenta-se um gráfico onde podem ser observados os conceitos das propriedades efetivas de cada ciclo modelado bilinearmente. O amortecimento tem direta relação com a área encerrada pela curva de histereses que corresponde à energia dissipada em um ciclo. A rigidez secante corresponde à inclinação da reta relacionada com a deformação máxima atingida pelo ciclo.

Esta aproximação de JDSS (Jacobsen's Damping Secant Stiffness) é aplicada para o modelo bilinear histerético mostrado na Figura 4.14. Este método considera uma rigidez inicial  $k_e$ , rigidez secundaria  $r k_e$ , a deformação de escoamento  $d_y$  e a deformação máxima  $d_{max}$ . Pode ser observado que o amortecimento equivalente é representado pela área  $A_1$  e a rigidez efetiva do ciclo representada pela tangente da reta  $k_{eff}$ .

Figura 4.14 - Propriedades efetivas de cada ciclo modelado bilinearmente.



Fonte própria

#### 4.4 - MODELAGEM CONSIDERADA

Neste estudo, a *modelagem bilinear* será usada para modelar o dispositivo ADAS devido a sua simplicidade matemática e sua capacidade para levar em conta ambos o endurecimento por deformação e o comportamento histerético do material.

Assim, a relação força-deslocamento na primeira carga, chamada a curva esqueleto, correspondera a uma curva bilinear. Esta curva bilinear é determinada pela força de escoamento  $f_y$ , o deslocamento de escoamento  $d_y$  e a taxa de endurecimento  $r$ . Veja a Figura 4.15. A rigidez elástica do dispositivo ADAS,  $k_e$ , pode ser expressa da seguinte forma:

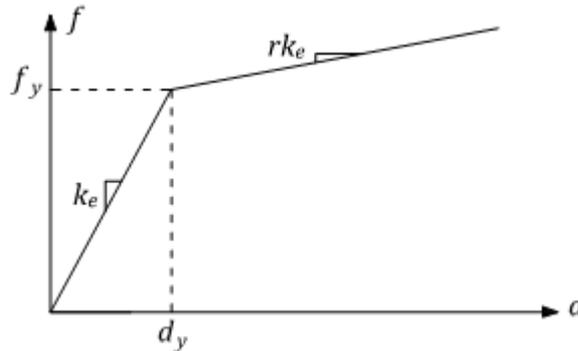
$$k_e = \frac{f_y}{d_y} \quad (4.78)$$

Estes parâmetros do modelo bilinear são obtidos dos dados experimentais. Alternativamente, na Subseção 4.4.1, se apresenta um procedimento analítico desenvolvido por Whittaker et al. (1989) para calcular estes parâmetros.

Para modelar completamente o comportamento histerético do dispositivo ADAS, é necessário complementar o modelo bilinear com uma regra ou lei, tal como o endurecimento isotrópico

ou cinemático, para assim obter as curvas de descarga e recarga. Na subseção 4.4.2 se realiza a implementação do modelo força-deslocamento do dissipador ADAS, assim como de seu respectivo algoritmo de integração.

Figura 4.15 - Modelo bilinear – Curva esqueleto



Fonte própria

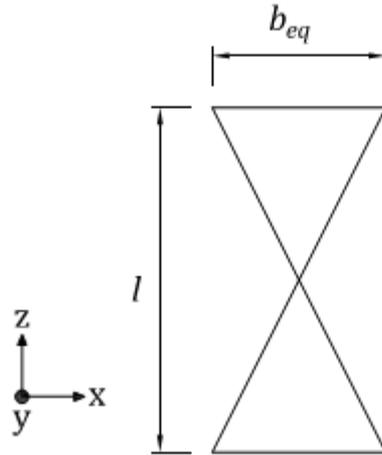
#### 4.4.1 - Características mecânicas analíticas do dissipador ADAS

A seguir se apresenta um método alternativo ao experimental para calcular os parâmetros do modelo bilinear, a qual é o modelo analítico proposto por Whittaker et al. (1989).

Whittaker et al. (1989) propuseram um procedimento simples para definir as características mecânicas do dissipador ADAS, utilizando uma idealização em forma de X equivalente das placas, Figura 4.16, a qual está inscrita no interior do perfil real do ADAS. Seu método é baseado nas seguintes premissas:

- Em primeiro lugar, as placas-X estão rigidamente restringidas em suas extremidades;
- Em segundo lugar, as placas-X se deformam em dupla curvatura, antissimétrica com respeito de sua altura média;
- E finalmente, a largura equivalente das placas-X em suas extremidades é igual à metade de sua altura ( $b_{eq} = l/2$ ).

Figura 4.16 - Geometria idealizada para as placas do dispositivo ADAS



Fonte: Whittaker et al. (1989)

No procedimento adotado por Whittaker et al. (1989), o ponto de escoamento é definido a partir da geometria equivalente proposta. Whittaker et al. (1989) não especificam a expressão que eles usaram para definir os deslocamentos de escoamento relatados em seus estudos analíticos. No entanto, parece que estes deslocamentos foram calculados a partir da dupla integração da curvatura plástica média (TENA-COLUNGA, 1997).

$$\Delta_p^{PL} = \int_0^{l/2} \int_0^{b_{eq}} \frac{M_p^{PL}(z)}{E I_x(z)} dx dz \quad (4.79)$$

Onde:

$$I_x(z) = \frac{b(z) t^3}{12} \quad (4.80)$$

$$M_p^{PL}(z) = \sigma_y Z = \sigma_y \frac{b(z) t^2}{4} \quad (4.81)$$

- $b$       Largura da placa-X;
- $b_{eq}$     Largura equivalente da placa-X em sua extremidade;
- $l$       Altura da placa-X;
- $t$       Espessura da placa-X;
- $\Delta_p^{PL}$     Deslocamento de escoamento plástico da placa-X;
- $E$       Modulo de elasticidade do material da placa-X;
- $\sigma_y$     Tensão de escoamento do material da placa-X;
- $I_x$       Momento de inercia ao redor do eixo x da seção transversal da placa-X;

- $M_p^{PL}$  Capacidade do momento plástico de cada placa-X (o momento de flexão quando toda a seção transversal escoar completamente);
- Z Modulo da seção plástica da placa-X.

Portanto, de acordo com o método proposto por Whittaker et al. (1989), o deslocamento de escoamento plástico de cada placa-X é:

$$\Delta_p^{PL} = \frac{3}{4} \frac{\sigma_y l^2}{E t} \quad (4.82)$$

A capacidade de cisalhamento plástico de cada placa-X equivalente do ADAS ( $V_p^{PL}$ ) é calculada a partir da equação de equilíbrio com base na capacidade de momento plástico da placa-X, equação (4.81), isto é:

$$V_p^{PL} = \frac{2 M_p^{PL}}{l} = \frac{\sigma_y b_{eq} t^2}{2l} \quad (4.83)$$

Assim, a rigidez de cisalhamento elástica de cada placa-X ( $k_{PL}$ ) é calculada como:

$$k_{PL} = \frac{V_p^{PL}}{\Delta_p^{PL}} \quad (4.84)$$

Para um dispositivo ADAS composto de n placas e idealizado como é proposto por Whittaker et al. (1989), o deslocamento de escoamento é aquele calculado a partir da equação (4.82), enquanto que a capacidade de cisalhamento plástico e a rigidez de cisalhamento elástica são n vezes aquelas computadas a partir das equações (4.83) e (4.84).

Dado que a curva de carga-deslocamento em cisalhamento do dispositivo ADAS será idealizada com o modelo bilinear, a capacidade de cisalhamento coincide com o cisalhamento de escoamento, e o deslocamento plástico coincide com o deslocamento de escoamento. Então a seguir se mostram as expressões para o dispositivo ADAS.

Deslocamento de escoamento em cisalhamento do dispositivo ADAS:

$$d_y^{ADAS} = \frac{3}{4} \frac{\sigma_y l^2}{E t} \quad (4.85)$$

Cisalhamento de escoamento do dispositivo ADAS:

$$V_y^{ADAS} = n \frac{\sigma_y b_{eq} t^2}{2l} \quad (4.86)$$

Rigidez de cisalhamento elástica do dispositivo ADAS:

$$k_{ADAS} = \frac{V_y^{ADAS}}{d_y^{ADAS}} \quad (4.87)$$

Onde  $n$  é o número de placas do dispositivo ADAS.

Desta maneira se definem analiticamente os parâmetros do modelo bilinear, necessitando se definir a taxa de endurecimento  $r$ . Segundo Tena-Colunga (1997) é razoável considerar que rigidez pós-escoamento é 5% da rigidez elástica, então a taxa de endurecimento  $r$  é 0.05.

Segundo Tena-Colunga (1997) o procedimento proposto por Whittaker et al. (1989) é uma aproximação simples, válida apenas para a modelagem 2D. Sua idealização de placa-X equivalente está inscrita dentro da forma nominal do ADAS, por conseguinte, a capacidade de cisalhamento e rigidez calculada é subestimada com respeito a seus valores analíticos “exatos” teóricos. Adicionalmente, a modelagem do ADAS é inteiramente baseada em um critério de cisalhamento, negligenciando outros efeitos que poderiam ser relevantes, tais como o impacto das forças axiais e flexão fora do plano. Observou-se, a partir de alguns resultados de testes, que as forças axiais podem ser um fator importante no comportamento dinâmico do dispositivo ADAS quando submetido a grandes deformações, por conseguinte, este efeito deve ser avaliado, tanto analítica como experimentalmente. Portanto, um procedimento mais rigoroso para modelar os dispositivos ADAS, com base no método de flexibilidade, pode ser encontrado no trabalho de Tena-Colunga (1997).

#### **4.4.2 - Modelo força-deslocamento e algoritmo de integração do dissipador ADAS**

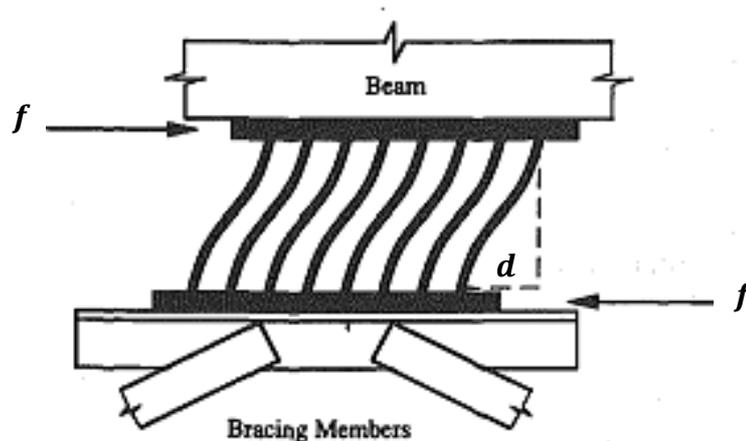
A resposta de qualquer amortecedor metálico é uma função da sua geometria e as características mecânicas do metal a partir do qual é fabricado. Por conseguinte, é lógico utilizar modelos constitutivos que tem uma forma semelhante aos utilizados para a modelagem constitutiva desse metal. Esta é exatamente a abordagem feita por Ozdemir (1976), e a abordagem que será utilizada neste estudo.

Havendo-se definido o modelo bilinear para a relação força-deslocamento do dispositivo ADAS, a estrutura matemática do modelo constitutivo se estabeleceu com base em uma analogia com o modelo constitutivo da plasticidade unidimensional com endurecimento

isotrópico/cinemático combinado, apresentado na Seção 4.2.3. Além disso, este modelo constitutivo bilinear será integrado utilizando outra analogia com o algoritmo de integração return-mapping, apresentado na Seção 4.2.4.3.

Adicionalmente é necessário salientar que o dispositivo ADAS é projetado para ser instalado em um pórtico de um edifício, de tal modo que o deslocamento relativo de andares ocasiona que o topo do dispositivo se mova horizontalmente em relação à base, como se mostra na Figura 4.17. Então deve ser esclarecido que no caso do dispositivo ADAS, o termo deslocamento se refere ao deslocamento relativo da parte superior do dispositivo em relação à parte inferior. Na Seção 4.5 se estabelece uma idealização de elemento finito do dissipador ADAS, definindo-se assim o elemento link. Então o deslocamento do dispositivo ADAS é equivalente ao deslocamento relativo do nó  $j$  em relação ao nó  $i$  do elemento link. Igualmente para o elemento link utilizam-se os termos força interna e deslocamento interno para referir-se à força e o deslocamento respectivamente (Veja a Seção 4.5).

Figura 4.17 - Força e deslocamento do dispositivo ADAS



Fonte: Xia and Hanson (1992)

Nesse contexto se estabelecem as seguintes analogias:

- A tensão é substituída pela força.
- A deformação é substituída pelo deslocamento (deslocamento relativo).
- Os módulos de elasticidade e elastoplástico são substituídos pelos coeficientes de rigidez.
- A notação das variáveis restantes será modificada, tendo em conta que se trabalha com forças e deslocamentos. Igualmente a notação do tempo que será adotada é aquela utilizada no Capítulo 3, ou seja, na esquerda da variável como sobrescrito.

- A respeito do algoritmo de integração return-mapping o deslocamento  ${}^{t+\Delta t}d$  no tempo  $t + \Delta t$  é calculada a partir do deslocamento relativo do nó  $\mathbf{j}$  com relação ao nó  $\mathbf{i}$  do elemento link no tempo  $t + \Delta t$ , uma vez que os deslocamentos no tempo  $t + \Delta t$  são conhecidos;
- O parâmetro  $\theta \in [0,1]$  é introduzido, a fim de facilitar a implementação computacional do algoritmo return-mapping, de modo que:

$\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad$  Endurecimento isotrópico somente

$\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad$  Endurecimento cinemático somente

$0 < \theta < 1 \quad \Rightarrow \quad$  Endurecimento isotrópico/cinemático combinado

Assume-se que os coeficientes de rigidez para endurecimento isotrópico  $k_K$  e para endurecimento cinemático  $k_H$  são iguais. Estes coeficientes plásticos são calculados a partir da rigidez elástica  $k_e$  e a rigidez pós-escoamento  $k_y$  como:

$$k_K = k_H = \frac{k_e k_y}{k_e - k_y} \quad (4.88)$$

Igualmente se deve esclarecer que no caso do dissipador ADAS utilizado neste estudo, o modelo de endurecimento utilizado será o endurecimento cinemático ( $\theta = 1$ ), como se vera nos exemplos de aplicação do Capítulo 6.

Desta maneira se apresenta a Tabela 4.6 do modelo força-deslocamento do dissipador ADAS, e a Tabela 4.7 do algoritmo de integração return-mapping, adaptado ao elemento link.

Tabela 4.6 - Modelo força-deslocamento do dissipador ADAS

i. Relação força-deslocamento elástica

$$f = k_e(d - d^p)$$

ii. Regra de fluxo

$$\dot{d}^p = \gamma_d \text{sign}(f - q_f)$$

iii. Leis de endurecimento isotrópico e cinemático

$$\dot{q}_f = \gamma_d(1 - \theta) k_H \text{sign}(f - q_f)$$

$$\dot{\alpha}_d = \gamma_d$$

iv. Condição de escoamento e encerramento da faixa elástica

$$f_f(f, q_f, \alpha_d) := |f - q_f| - [f_y + \theta k_K \alpha_d] \leq 0$$

$$\mathbb{E}_f = \{(f, q_f, \alpha_d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mid f_f(f, q_f, \alpha_d) \leq 0\}$$

v. Condições de complementaridade Kuhn-Tucker

$$\gamma_d \geq 0, \quad f_f(f, q_f, \alpha_d) \leq 0, \quad \gamma_d f_f(f, q_f, \alpha_d) = 0$$

vi. Condição de consistência (persistência)

$$\gamma_d \dot{f}_f(f, q_f, \alpha_d) = 0 \quad (\text{se } f_f(f, q_f, \alpha_d) = 0)$$

Fonte própria: Baseado em Simo e Hughes (1998)

Tabela 4.7 - Algoritmo return-mapping para o modelo constitutivo do dissipador ADAS

- 
1. Dados do passo anterior:  $\{ {}^t d^p, {}^t \alpha_d, {}^t q_f \}$
  2. Calculo do deslocamento interno do passo atual:  ${}^{t+\Delta t} d = {}^{t+\Delta t} u_j - {}^{t+\Delta t} u_i$
  3. Calcular a força trial elástica e testar para a carga plástica
 
$${}^{t+\Delta t} f^{\text{trial}} := k_e ({}^{t+\Delta t} d - {}^t d^p)$$

$${}^{t+\Delta t} \xi_f^{\text{trial}} := {}^{t+\Delta t} f^{\text{trial}} - {}^t q_f$$

$${}^{t+\Delta t} f_f^{\text{trial}} := |{}^{t+\Delta t} \xi_f^{\text{trial}}| - [f_y + \theta k_K {}^t \alpha_d]$$
 IF  ${}^{t+\Delta t} f_f^{\text{trial}} \leq 0$  THEN
 

*Passo elástico:* Estabelecer

$${}^{t+\Delta t} f = {}^{t+\Delta t} f^{\text{trial}}$$

$${}^{t+\Delta t} d^p = {}^t d^p \quad \Rightarrow \text{EXIT}$$

$${}^{t+\Delta t} q_f = {}^t q_f$$

$${}^{t+\Delta t} \alpha_d = {}^t \alpha_d$$
 ELSE
 

*Passo plástico:* Prossiga para o passo 4.

 ENDIF
  4. Return-mapping
 
$$\Delta \gamma_d := \frac{{}^{t+\Delta t} f_f^{\text{trial}}}{k_E + [\theta k_K + (1 - \theta) k_H]} > 0$$

$${}^{t+\Delta t} f := {}^{t+\Delta t} f^{\text{trial}} - \Delta \gamma_d k_e \text{sign}({}^{t+\Delta t} \xi_f^{\text{trial}})$$

$${}^{t+\Delta t} d^p := {}^t d^p + \Delta \gamma_d \text{sign}({}^{t+\Delta t} \xi_f^{\text{trial}})$$

$${}^{t+\Delta t} q_f := {}^t q_f + \Delta \gamma_d (1 - \theta) k_H \text{sign}({}^{t+\Delta t} \xi_f^{\text{trial}})$$

$${}^{t+\Delta t} \alpha_d := {}^t \alpha_d + \Delta \gamma_d$$
- 

Fonte própria: Baseado em Simo e Hughes (1998)

Onde:

$f$	Força interna;
$d$	Deslocamento interno total;
$d^p$	Deslocamento interno plástico;
$k_e$	Coefficiente de rigidez elástico;
$\dot{d}^p$	Taxa de deslocamento interno plástico;
$\gamma_d$	Valor absoluto da taxa do deslocamento interno plástico;

$q_f$	Força interna de volta;
$\alpha_d$	Variável de endurecimento interna;
$\theta$	Parâmetro que define o modelo do endurecimento;
$f_y$	Força de escoamento;
$f_f(f, q_f, \alpha_d)$	Condição de escoamento;
$\mathbb{E}_f$	Conjunto de forças internas admissíveis;
$k_K$	Coefficiente de rigidez plástico para endurecimento isotrópico;
$k_H$	Coefficiente de rigidez para endurecimento cinemático;
${}^t d^p, {}^{t+\Delta t} d^p$	Deslocamento interno plástico no tempo $t$ e $t + \Delta t$ respectivamente;
${}^t \alpha_d, {}^{t+\Delta t} \alpha_d$	Variável de endurecimento interna no tempo $t$ e $t + \Delta t$ respectivamente;
${}^t q_f, {}^{t+\Delta t} q_f$	Força interna de volta no tempo $t$ e $t + \Delta t$ respectivamente;
${}^{t+\Delta t} d$	Deslocamento interno total no tempo $t + \Delta t$ ;
${}^{t+\Delta t} u_j, {}^{t+\Delta t} u_i$	Deslocamento no nó $j$ e no nó $i$ do elemento link no tempo $t + \Delta t$ respetivamente;
${}^{t+\Delta t} f^{\text{trial}}$	Força interna trial no tempo $t + \Delta t$ ;
${}^{t+\Delta t} f$	Força interna no tempo $t + \Delta t$ ;
${}^{t+\Delta t} \xi_f^{\text{trial}}$	Força relativa trial no tempo $t + \Delta t$ ;
${}^{t+\Delta t} f_f^{\text{trial}}$	Condição de escoamento trial no tempo $t + \Delta t$ ;
$\Delta \gamma_d = {}^{t+\Delta t} \gamma \Delta t$	Parâmetro de consistência plástica incremental; onde ${}^{t+\Delta t} \gamma$ é o valor absoluto da taxa de deslocamento interno plástico no tempo $t + \Delta t$ .

## 4.5 - ELEMENTO LINK

Como foi mencionado no Capítulo 3, o método dos elementos finitos (MEF) atualmente fornece o quadro mais adequado para a análise de estruturas que incluem amortecedores metálicos. Seguindo a abordagem do MEF, é necessário estabelecer uma idealização de elemento finito para o dissipador ADAS. Portanto se estabelece o “elemento link” o qual é um elemento finito criado para modelar o comportamento histerético não linear do dissipador metálico ADAS, assim como outros tipos de comportamentos lineares. O elemento link é similar ao elemento finito do mesmo nome disponível no programa SAP2000. O elemento link consiste de uma ligação conectando dois nós.

Nas subsecções seguintes se descrevem as características básicas do elemento link, e suas propriedades lineares e não lineares.

### 4.5.1 - Conectividade nodal

Cada elemento link conecta dois nós, **i** e **j**, de modo que os dois nós compartilham a mesma localização no espaço criando um elemento de *comprimento zero*. Veja a Figura 4.18. Este modelo simplificado não leva em conta a altura do dissipador.

### 4.5.2 - Graus de liberdade

O elemento link ativa todos os três graus de liberdade em cada um dos seus dois nós conectados. Os três graus de liberdade de deslocamento são: deslocamento axial (na direção do eixo Y), deslocamento por cisalhamento (na direção do eixo Y) e deslocamento por flexão pura (rotação em torno ao eixo Z). Para tais graus de liberdade o elemento contribui em rigidez e amortecimento, dependendo das propriedades atribuídas ao elemento. Deve-se ter certeza que restrições sejam proporcionadas aos graus de liberdade que não recebam rigidez.

### 4.5.3 - Sistema de coordenadas

Cada elemento link segue a convenção estabelecida para o sistema de coordenadas global X-Y-Z. O sistema de coordenadas global é um sistema de coordenadas retangulares tridimensional. Os três eixos, denotados X, Y e Z, são mutuamente perpendiculares entre si e

satisfazem a regra da mão direita. O programa criado assume que Y é o eixo vertical, com +Y sendo para cima. O plano X-Z é horizontal, sendo +X a direção horizontal principal e para a direita. Então a direção do eixo X corresponde ao deslocamento por cisalhamento, a direção do eixo Y corresponde ao deslocamento axial e a rotação em torno do eixo Z corresponde ao deslocamento por flexão pura. Veja a Figura 4.18.

#### 4.5.4 - Deslocamentos internos

Três deslocamentos internos independentes são definidos para o elemento link. Estes são calculadas a partir do *deslocamento relativo do nó j em relação ao nó i*.

Os deslocamentos internos são definidos como:

- Deslocamento Axial :  $d_{uy} = u_{yj} - u_{yi}$
- Deslocamento por cisalhamento no plano X-Y :  $d_{ux} = u_{xj} - u_{xi}$
- Deslocamento por flexão pura no plano X-Y :  $d_{rz} = r_{zj} - r_{zi}$

Onde:

$u_{xi}$ ,  $u_{yi}$  e  $r_{zi}$  são as translações e rotação no nó **i**.

$u_{xj}$ ,  $u_{yj}$  e  $r_{zj}$  são as translações e rotação no nó **j**.

Todas as translações, rotações e deslocamentos são expressos em termos do sistema de coordenadas global. Estes deslocamentos internos são ilustrados na Figura 4.18. Cada deslocamento interno pode ser considerado como um *grau de liberdade deformacional*.

#### 4.5.5 - Velocidades internas

De mesma forma que na Subseção anterior, três velocidades internas independentes são definidas para o elemento link, as quais são calculadas a partir da velocidade relativa do nó **j** em relação ao nó **i**. As velocidades internas são definidas como:

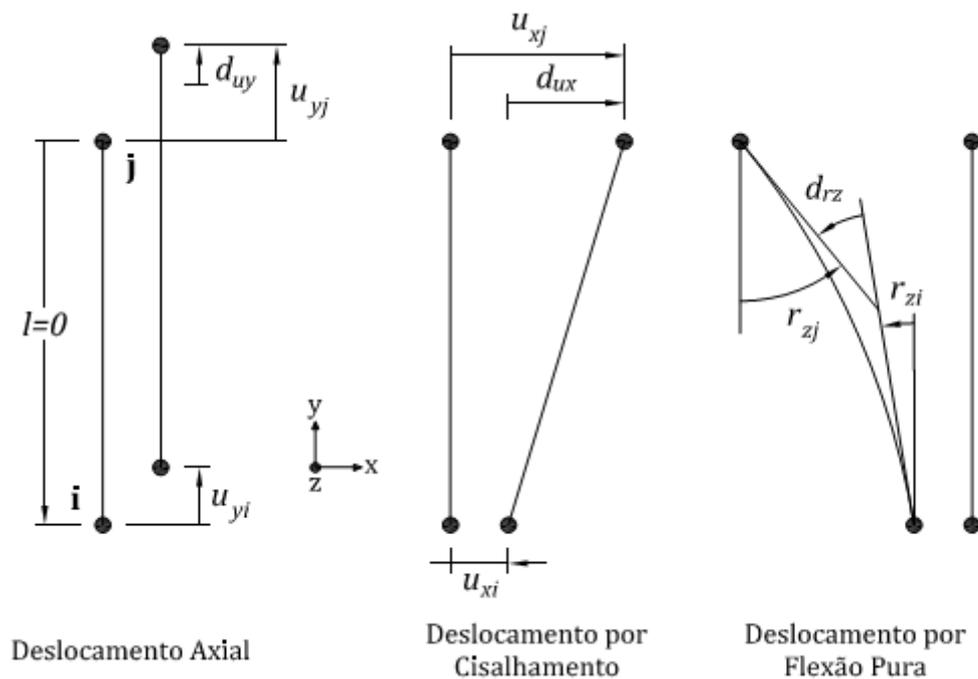
- Velocidade Axial :  $v_{uy} = \dot{u}_{yj} - \dot{u}_{yi}$
- Velocidade por cisalhamento no plano X-Y :  $v_{ux} = \dot{u}_{xj} - \dot{u}_{xi}$
- Velocidade por flexão pura no plano X-Y :  $v_{rz} = \dot{r}_{zj} - \dot{r}_{zi}$

Onde:

$\dot{u}_{xi}$ ,  $\dot{u}_{yi}$  e  $\dot{r}_{zi}$  são as velocidades no nó **i**.

$\dot{u}_{xj}$ ,  $\dot{u}_{yj}$  e  $\dot{r}_{zj}$  são as velocidades no nó **j**.

Figura 4.18 - Deslocamentos internos para o elemento link



Fonte própria: Baseado em Computer and Structures Inc. (2009)

#### 4.5.6 - Tipos de elemento link

No programa criado foram definidos dois tipos de elementos link:

- Elemento link linear
- Elemento link não linear

O elemento link linear tem propriedades lineares que serão utilizadas nas análises lineares e o elemento link não linear tem propriedades não lineares que serão utilizadas nas análises não lineares. Portanto, para descrever cada tipo de elemento link é suficiente descrever as propriedades deste, o qual será feito na Subseção seguinte.

#### 4.5.7 - Propriedade link

Uma Propriedade Link é um conjunto de propriedades estruturais que são utilizadas para definir o comportamento de um ou mais elementos link. A propriedade de massa do elemento link também pode ser especificada.

As Propriedades Link são definidas independentemente dos elementos link e são referenciadas durante a definição dos elementos.

Existem dois tipos de Propriedade Link que podem ser definidas:

- Propriedade Link Linear
- Propriedade Link Não Linear

As Propriedades Link Lineares são usadas pelos elementos link lineares para análises lineares. As Propriedades Link Não Linear serão utilizadas pelos elementos link não lineares para todas as análises não lineares.

##### 4.5.7.1 - Propriedade link linear

A seguir se descrevem as características da Propriedade Link Linear, a qual é utilizada para descrever o comportamento linear do elemento link linear.

#### Molas e amortecedores internos

Cada Propriedade Link Linear é assumida de ser composta por três “molas” internas, uma para cada um dos três deslocamentos internos, e três “amortecedores” internos, um para cada uma das três velocidades internas. As relações força-deslocamento destas molas são independentes umas das outras, ou seja, não acopladas. Igualmente, as relações força-velocidade dos amortecedores são independentes.

A Figura 4.19 mostra as molas para os três deslocamentos: axial, cisalhamento no plano X-Y, e flexão pura no plano X-Y. Onde  $k_{ux}$ ,  $k_{uy}$  e  $k_{rz}$  são os coeficientes de rigidez das molas internas.

A Figura 4.20 mostra os amortecedores para as três velocidades internas ou taxas de deslocamento internas. Onde  $c_{ux}$ ,  $c_{uy}$  e  $c_{rz}$  são os coeficientes de amortecimento dos amortecedores internos.

Portanto, estes coeficientes de rigidez e amortecimento são inseridos no programa criado, a fim de definir a Propriedade Link Linear.

Figura 4.19 - Molas internas independentes em um elemento link linear

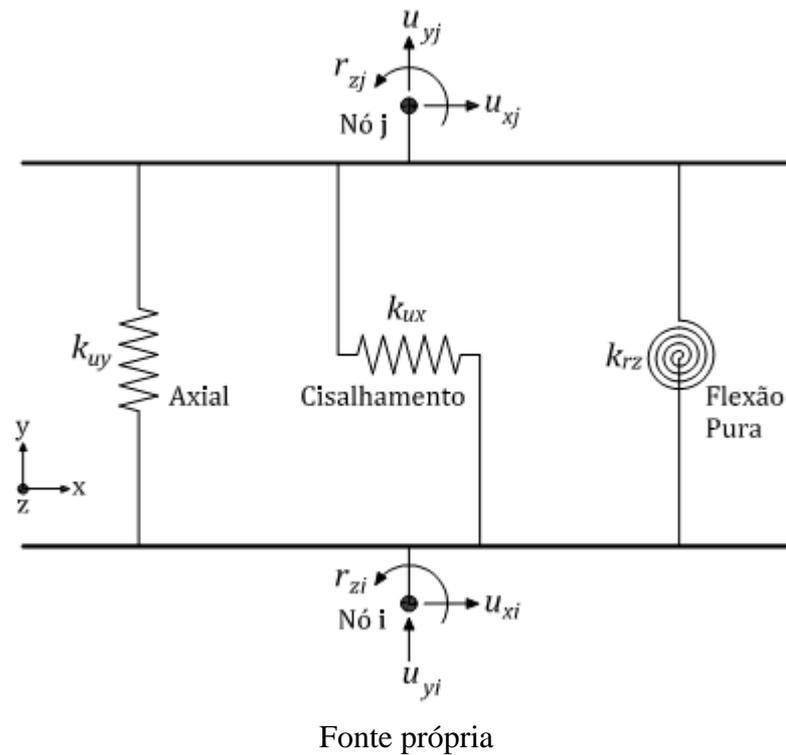
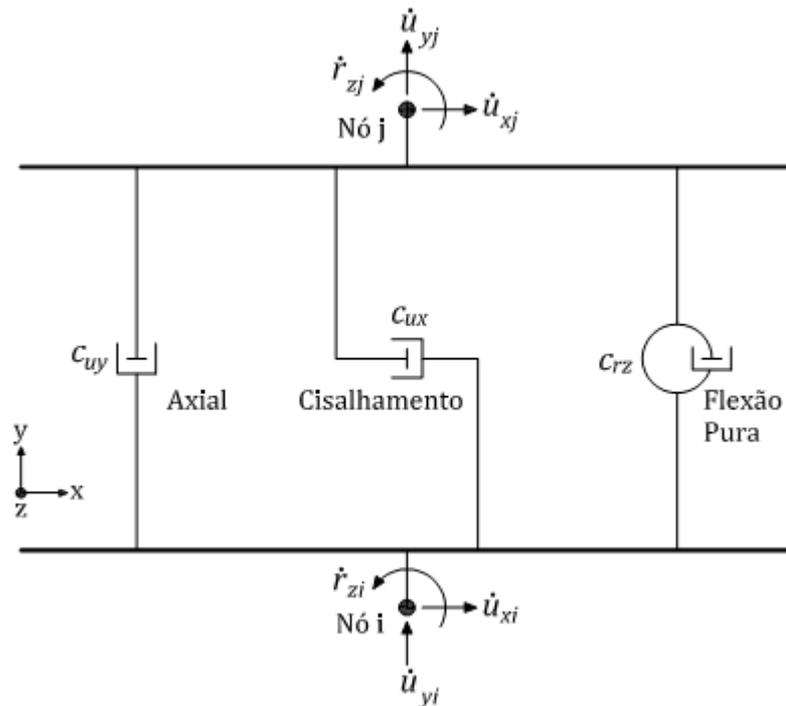


Figura 4.20 - Amortecedores internos independentes em um elemento link linear



Fonte própria

### Relações força-deslocamento das molas

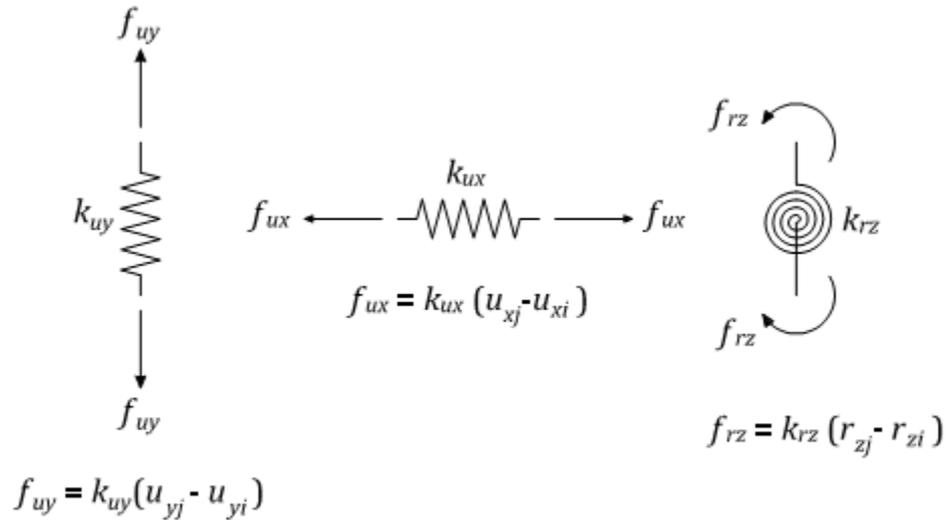
Definem-se três relações força-deslocamento lineares e independentes, que governam o comportamento do elemento link linear, uma para cada uma das molas internas:

- Axial :  $f_{uy}$  vs.  $d_{uy}$  :  $f_{uy} = k_{uy}(u_{yj} - u_{yi}) = k_{uy} d_{uy}$
- Cisalhamento :  $f_{ux}$  vs.  $d_{ux}$  :  $f_{ux} = k_{ux}(u_{xj} - u_{xi}) = k_{ux} d_{ux}$
- Flexão pura :  $f_{rz}$  vs.  $d_{rz}$  :  $f_{rz} = k_{rz}(r_{zj} - r_{zi}) = k_{rz} d_{rz}$

Onde  $f_{ux}$  e  $f_{uy}$  são as forças internas da mola, e  $f_{rz}$  é o momento interno da mola.

Na Figura 4.21 se mostra as forças internas para cada uma das molas independentes.

Figura 4.21 - Forças de rigidez internas em um elemento link linear



Fonte própria

As equações das forças nos nós (coordenadas nodais) do elemento link linear se podem escrever convenientemente em notação matricial como:

$$\begin{Bmatrix} -f_{ux} \\ -f_{uy} \\ -f_{rz} \\ f_{ux} \\ f_{uy} \\ f_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ux} & 0 & 0 & -k_{ux} & 0 & 0 \\ 0 & k_{uy} & 0 & 0 & -k_{uy} & 0 \\ 0 & 0 & k_{rz} & 0 & 0 & -k_{rz} \\ -k_{ux} & 0 & 0 & k_{ux} & 0 & 0 \\ 0 & -k_{uy} & 0 & 0 & k_{uy} & 0 \\ 0 & 0 & -k_{rz} & 0 & 0 & k_{rz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ r_{zi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \\ r_{zj} \end{Bmatrix} \quad (4.89)$$

Ou em notação condensada como:

$$\{f\} = [k] \{u\} \quad (4.90)$$

Onde  $\{f\}$  e  $\{u\}$  são, respectivamente, os vetores de força e deslocamento nodais do elemento link linear, e  $[k]$  é a matriz de rigidez do elemento link linear. Note-se que os coeficientes de rigidez das molas internas são os elementos da matriz de rigidez do elemento link linear.

### Relações força-velocidade dos amortecedores

Relações semelhantes às de força-deslocamento se estabelecem para o comportamento de amortecimento linear, exceto que os termos de rigidez são substituídos com os coeficientes de amortecimento, e os deslocamentos são substituídos com as velocidades correspondentes.

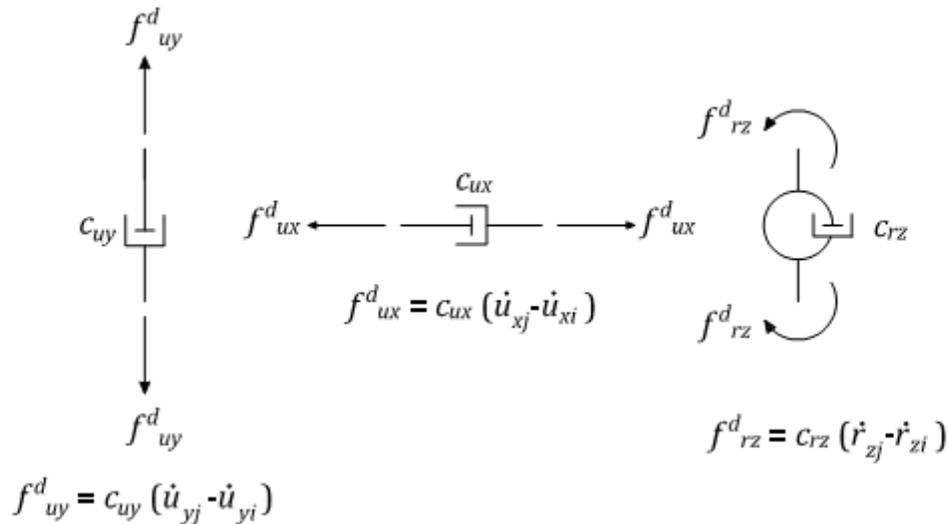
Definem-se três relações força-velocidade que governam o comportamento de amortecimento do elemento link linear, uma para cada um dos amortecedores internos:

- Axial :  $f_{uy}^d$  vs.  $v_{uy}$  :  $f_{uy}^d = c_{uy}(\dot{u}_{yj} - \dot{u}_{yi}) = c_{uy} v_{uy}$
- Cisalhamento :  $f_{ux}^d$  vs.  $v_{ux}$  :  $f_{ux}^d = c_{ux}(\dot{u}_{xj} - \dot{u}_{xi}) = c_{ux} v_{ux}$
- Flexão pura :  $f_{rz}^d$  vs.  $v_{rz}$  :  $f_{rz}^d = c_{rz}(\dot{r}_{zj} - \dot{r}_{zi}) = c_{rz} v_{rz}$

Onde  $f_{ux}^d$  e  $f_{uy}^d$  são as forças de amortecimento internas, e  $f_{rz}^d$  é o momento de amortecimento interno.

Cada uma destas relações é linear e independente. Na Figura 4.22 se mostra as forças de amortecimento internas para cada um dos amortecedores independentes.

Figura 4.22 - Forças de amortecimento internas em um elemento link linear



Fonte própria

As equações das forças de amortecimento nos nós (coordenadas nodais) do elemento link linear se podem escrever convenientemente em notação matricial como:

$$\begin{Bmatrix} -f_{ux}^d \\ -f_{uy}^d \\ -f_{rz}^d \\ f_{ux}^d \\ f_{uy}^d \\ f_{rz}^d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{ux} & 0 & 0 & -c_{ux} & 0 & 0 \\ 0 & c_{uy} & 0 & 0 & -c_{uy} & 0 \\ 0 & 0 & c_{rz} & 0 & 0 & -c_{rz} \\ -c_{ux} & 0 & 0 & c_{ux} & 0 & 0 \\ 0 & -c_{uy} & 0 & 0 & c_{uy} & 0 \\ 0 & 0 & -c_{rz} & 0 & 0 & c_{rz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_{xi} \\ \dot{u}_{yi} \\ \dot{r}_{zi} \\ \dot{u}_{xj} \\ \dot{u}_{yj} \\ \dot{r}_{zj} \end{Bmatrix} \quad (4.91)$$

Ou em notação condensada como:

$$\{f^d\} = [c] \{\dot{u}\} \quad (4.92)$$

Onde  $\{f^d\}$  e  $\{\dot{u}\}$  são, respectivamente, os vetores de força de amortecimento e velocidades nodais do elemento link linear, e  $[c]$  é a matriz de amortecimento do elemento link linear. Note-se que os coeficientes de amortecimento dos amortecedores internos são os elementos da matriz de amortecimento do elemento link linear.

#### 4.5.7.2 - Propriedade link não linear

Para cada Propriedade Link Não Linear se pode definir uma das seguintes três relações força-deslocamento não lineares independentes:

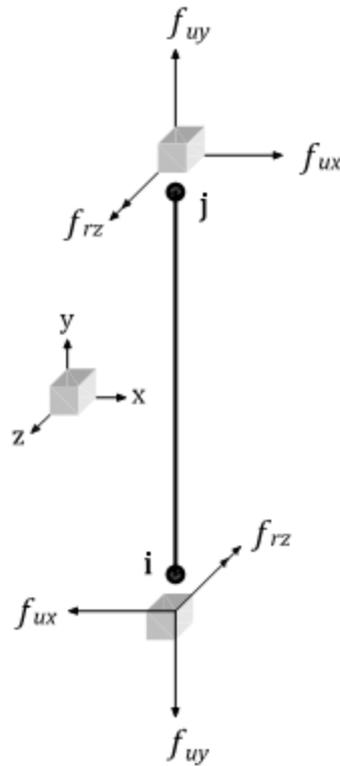
- Axial :  $f_{uy}$  vs.  $d_{uy}$
- Cisalhamento :  $f_{ux}$  vs.  $d_{ux}$
- Flexão pura :  $f_{rz}$  vs.  $d_{rz}$

Onde:

- $f_{uy}$  Força axial interna;
- $f_{ux}$  Força de cisalhamento interna;
- $f_{rz}$  Momento de flexão interno.

São as forças internas do elemento link não linear, as quais são ilustradas na Figura 4.23.

Figura 4.23 - Forças internas em um elemento link não linear



Fonte própria: Baseado em Computer and Structures Inc. (2009)

Estas relações força-deslocamento governam o comportamento não linear do elemento link não linear, e são definidas pelo modelo constitutivo do dispositivo ADAS exposto na Seção anterior (Seção 4.4.2).

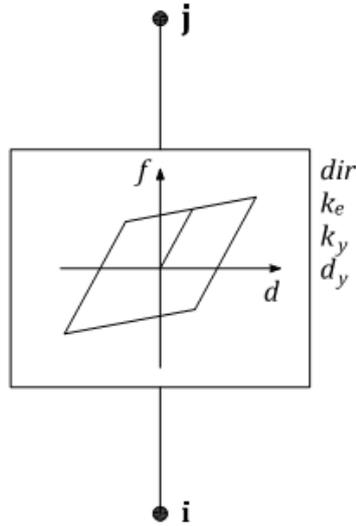
Segundo este modelo os parâmetros necessários para definir a relação força-deslocamento são: o deslocamento de escoamento ( $d_y$ ), a rigidez elástica ( $k_e$ ), a rigidez pós-escoamento ( $k_y$ ) e adicionalmente, é necessário definir a direção ( $dir$ ), ou seja, o deslocamento interno no qual a relação força-deslocamento é estabelecida. Veja a Figura 4.24.

Assim, cada Propriedade Link Não Linear pode ser atribuída a apenas um deslocamento interno (grau de liberdade deformacional) especificado. Os deslocamentos internos são independentes, então o escoamento de um grau de liberdade deformacional não afeta o comportamento dos outros deslocamentos internos.

A Propriedade Link Não Linear não leva em conta o comportamento de amortecimento não linear, dado que o comportamento dos dispositivos metálicos é governado por uma relação

força-deslocamento não linear, mas esse comportamento poderia ser implementado no programa para modelar outros dissipadores.

Figura 4.24 - Propriedade Link Não Linear para um deslocamento interno



Fonte própria: Baseado em Computer and Structures Inc. (2009)

Ao contrário do elemento link linear, a matriz de rigidez do elemento link não linear muda para cada passo de tempo, isto por causa do comportamento não linear. Assim, os elementos da matriz de rigidez mudam de acordo com o estado elástico ou plástico do elemento. Então se pode definir as seguintes expressões para a matriz de rigidez do elemento link não linear:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{ux} & 0 & 0 & -k_{ux} & 0 & 0 \\ 0 & k_{uy} & 0 & 0 & -k_{uy} & 0 \\ 0 & 0 & k_{rz} & 0 & 0 & -k_{rz} \\ -k_{ux} & 0 & 0 & k_{ux} & 0 & 0 \\ 0 & -k_{uy} & 0 & 0 & k_{uy} & 0 \\ 0 & 0 & -k_{rz} & 0 & 0 & k_{rz} \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

Onde os elementos dependem da seguinte condicional:

$$k_{ux}, k_{uy}, k_{rz} = \begin{cases} k_e & \text{se o passo é elástico} \\ k_y & \text{se o passo é plástico} \end{cases} \quad (4.94)$$

Onde  $k_e$  é a rigidez elástica e  $k_y$  é a rigidez pós-escoamento.

#### 4.5.8 - Massa

Em uma análise dinâmica, a massa da estrutura é usada para calcular as forças de inercia. A contribuição de massa pelo elemento link é concentrada nos nós **i** e **j**. Nenhum dos efeitos inerciais são considerados dentro do próprio elemento.

Para cada Propriedade Link Linear e Não Linear, pode-se especificar uma massa translacional total. Metade da massa é atribuída aos dois graus de liberdade de translação em cada um dos dois nós do elemento link. Então a matriz de massa para um elemento link  $[m]$  é dada pela eq. (4.95):

$$[m] = \frac{m_{link}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ sym. & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

Onde  $m_{link}$  é a massa translacional do elemento link.

#### 4.5.9 - Elemento link para modelar o dispositivo ADAS

Havendo-se descrito as características do elemento link e com a finalidade de esclarecer a modelagem do dispositivo ADAS, neste item se esclarece o uso do elemento link para modelar especificamente o amortecedor ADAS.

O elemento link não linear é o apropriado para modelar o dispositivo ADAS. Para este elemento link não linear se define uma Propriedades Link Não Linear, ou seja, os seguintes parâmetros: a direção ou deslocamento interno ( $dir$ ), a rigidez elástica ( $k_e$ ), a rigidez pós-escoamento ( $k_y$ ), o deslocamento de escoamento ( $d_y$ ), e a massa ( $m_{link}$ ).

Com respeito à direção, dado que o dispositivo ADAS esta governado pela relação constitutiva força-deslocamento em cisalhamento, e considerando que o elemento link segue a orientação do sistema global de coordenadas, a direção apropriada é a direção X, ou seja, o deslocamento interno de cisalhamento no plano X-Y.

Com os parâmetros do dispositivo ADAS inseridos no programa, este segue o modelo força-deslocamento discutido na Seção 4.4 para assim modelar seu comportamento histerético. Finalmente, se deve esclarecer que no caso do dissipador ADAS, o modelo de endurecimento utilizado será o endurecimento cinemático, ou seja, o parâmetro  $\theta$  no algoritmo return-mapping será igual a um ( $\theta = 1$ ).

## 5 - DESCRIÇÃO DO PROGRAMA E ALGORITMO GERAL

### 5.1 - INTRODUÇÃO

Ao longo de muitos anos, os computadores vêm adquirindo uma grande importância na linha da engenharia estrutural, e têm surgido novas e mais complexas linguagens de programação que se transformam em ferramentas essenciais ao momento de analisar e projetar, possibilitando a solução de problemas estruturais que manejam grande quantidade de variáveis em forma eficaz e rápida.

Neste capítulo se descreve o programa criado em MATLAB (THE MATHWORKS INC., 2011) e o algoritmo geral no qual se baseia. Este programa baseou-se no programa em linguagem FORTRAN90 denominado **fea\_frames**, desenvolvido pelo professor William Taylor Matias Silva, orientador da presente dissertação.

### 5.2 – INTRODUÇÃO AO MATLAB

A Linguagem da Computação Técnica MATLAB é uma linguagem de alto nível e um ambiente interativo para computação numérica, visualização e programação. Usando MATLAB podem-se analisar dados, desenvolver algoritmos e criar modelos e aplicações. A linguagem, ferramentas e funções matemáticas internas permitem explorar múltiplas abordagens e alcançar uma solução mais rápida do que com planilhas ou linguagens de programação tradicionais, como C/C++ ou Java. Pode-se usar o MATLAB para uma variedade de aplicações, incluindo processamento de sinais e comunicação, imagem e processamento de vídeo, sistemas de controle, teste e medição, finanças computacionais, e biologia computacional. Mais de um milhão de engenheiros e cientistas na indústria e na academia usam MATLAB, a linguagem da computação técnica (THE MATHWORKS INC., 2014).

#### Principais Características

- Linguagem de alto nível para computação numérica, visualização e desenvolvimento de aplicações.
- Ambiente interativo para exploração iterativa, projeto, e resolução de problemas.

- Funções matemáticas para álgebra linear, estatística, análise de Fourier, filtragem, otimização, integração numérica, e resolução de equações diferenciais ordinárias.
- Gráficos incorporados para visualização de dados e ferramentas para a criação de gráficos personalizados.
- Ferramentas de desenvolvimento para melhorar a qualidade do código e a manutenção e maximizando o desempenho.
- Ferramentas para a criação de aplicativos com interfaces gráficas personalizadas.
- Funções para integração de algoritmos baseados em MATLAB com aplicações externas e linguagens como C, Java, NET e Microsoft Excel.

### **5.3 - DESCRIÇÃO DO PROGRAMA**

O programa criado em MATLAB tem como nome **X-Structure2D** e corresponde à versão 1.0. Nesta Seção se descreve de forma sucinta as características principais do programa.

#### **Tipo de análise**

O programa permite realizar os seguintes tipos de análises:

- Análise estática linear
- Análise de autovalor linear (análise modal)
- Análise dinâmica linear
- Análise dinâmica não linear

O presente estudo foca-se na análise dinâmica não linear, devido ao comportamento não linear dos dissipadores. Portanto ao longo deste capítulo nos referiremos apenas à análise dinâmica não linear.

#### **Tipo de matriz de massa**

O programa permite definir os seguintes dois tipos de matriz de massa:

- Matriz de massa consistente
- Matriz de massa concentrada

Para detalhes adicionais revisar o Item 5.4.2.



Lembremos que o sistema de coordenadas global X-Y-Z é um sistema de coordenadas retangulares tridimensional. Os três eixos, denotados X, Y e Z, são mutuamente perpendiculares entre si e satisfazem a regra da mão direita. O programa criado assume que Y é o eixo vertical, com +Y sendo para cima. O plano X-Z é horizontal, sendo +X a direção horizontal principal e para a direita.

### **Definição de elementos**

Os membros estruturais físicos em um modelo estrutural são representados por elementos. Nesta seção do programa se define a geometria dos elementos, para depois atribuir-lhes propriedades para definir completamente o modelo do membro físico.

Os elementos são inseridos no programa utilizando um arranjo de cinco colunas onde a primeira coluna corresponde ao número do elemento, a segunda ao nó inicial, a terceira ao nó final, a quarta ao número da propriedade material ou propriedade link, e a quinta ao tipo de elemento.

Os seguintes tipos de elementos estão disponíveis no programa:

- Elemento de pórtico: Usado para modelar vigas e colunas
- Elemento de treliça: Usado para modelar contraventamentos e treliças
- Elemento link linear: Usado para modelar dissipadores com comportamento linear
- Elemento link não linear: Usado para modelar dissipadores com comportamento não linear.

Os elementos de pórtico e de treliça são amplamente conhecidos no Método dos Elementos Finitos, alguns detalhes são fornecidos nos Itens 5.4.1 e 5.4.2. Os elementos link linear e link não linear foram discutidos na Seção 4.5.

### **Propriedade material / propriedade link**

A Propriedade Material é utilizada para definir as propriedades mecânicas e de densidade utilizadas pelos elementos de pórtico e de treliça.

O conjunto de Propriedades Material é inserido no programa utilizando um arranjo de oito colunas onde a primeira corresponde ao número da Propriedade Material, a segunda ao módulo de elasticidade  $E$ , a terceira ao módulo de cisalhamento  $G$ , a quarta à área  $A$ , a quinta, a sexta e a sétima aos momentos de inércia em torno aos eixos X ( $I_x$ ), Y ( $I_y$ ) e Z ( $I_z$ ) respectivamente, e a oitava à densidade de massa  $\rho$ .

Como a Propriedade Material é realmente utilizada depende do tipo de elemento. Cada Propriedade Material que se define pode ser usada por mais de um elemento ou tipo de elemento. Para cada tipo de elemento, a Propriedade Material é referenciada através da seção do programa Definição de Elementos (item anterior).

A Propriedade Link é utilizada para definir o comportamento dos elementos link linear e link não linear, como foi discutido no Item 4.5.7.

### **Condições de contorno**

As condições de contorno são inseridas no programa utilizando um arranjo de quatro colunas onde a primeira corresponde ao número do nó, a segunda à restrição da translação em X, a terceira à restrição da translação em Y e quarta corresponde à restrição da rotação ao redor de Z.

O critério para as restrições é o seguinte: 0 = *restringido* e 1 = *livre*

### **Massas nodais**

Em uma análise dinâmica, a massa da estrutura é usada para calcular as forças de inércia. Normalmente, a massa é obtida a partir dos elementos usando a densidade de massa do material e o volume do elemento. Muitas vezes é necessário colocar massas concentradas e/ou momentos de inércia de massa adicionais nos nós. Estes podem ser aplicados a qualquer um dos três graus de liberdade, em qualquer dos nós da estrutura.

Estas massas nodais são inseridas no programa utilizando um arranjo de quatro colunas onde a primeira corresponde ao número do nó, a segunda à massa concentrada na direção do eixo X global, a terceira à massa concentrada na direção do eixo Y global e a quarta ao momento de inércia da massa na rotação ao redor do eixo Z global.

Igualmente, estas massas são sempre referidas ao sistema global de coordenadas. Valores de massa em graus de liberdade restringidos são ignorados.

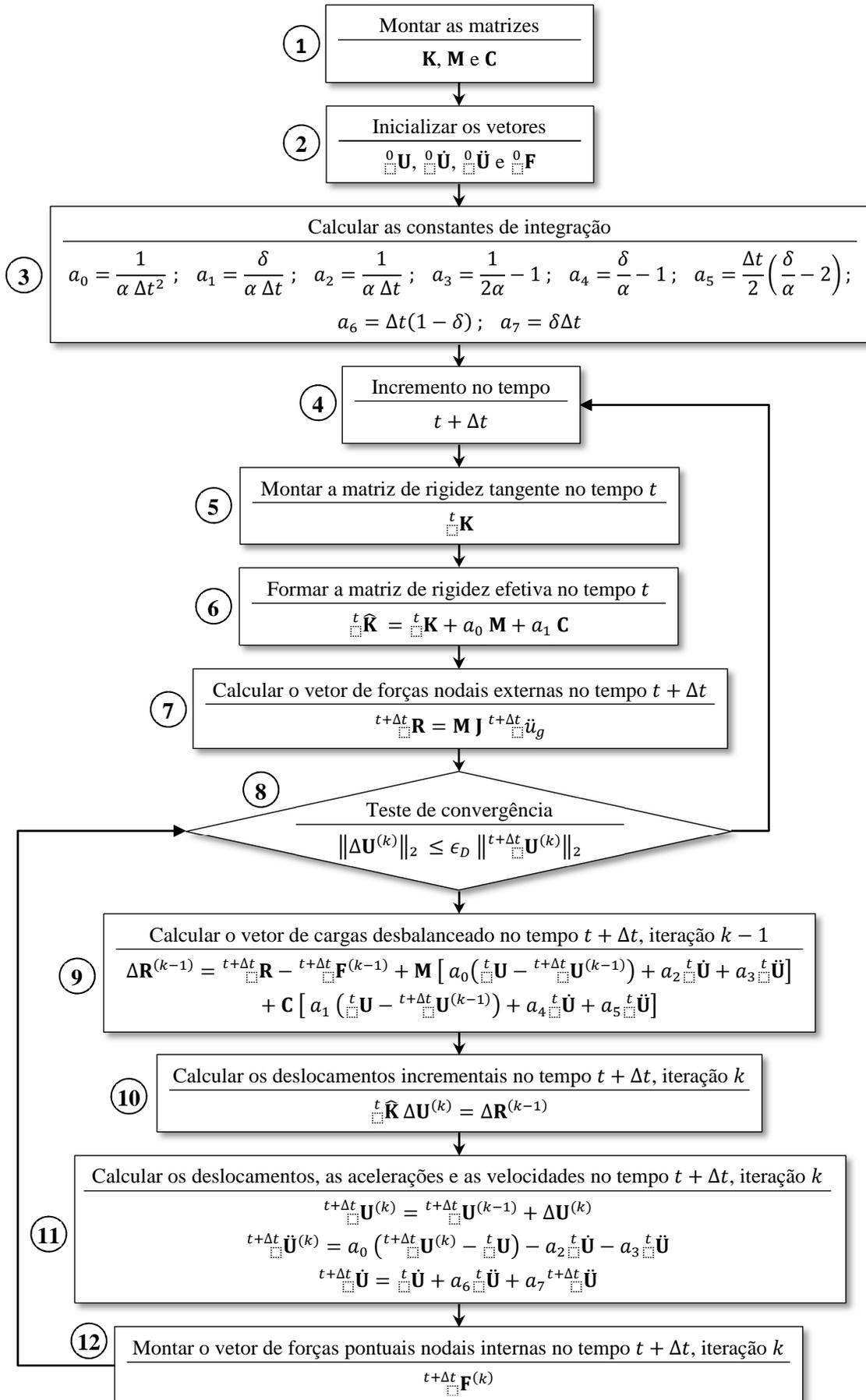
Os valores de massa devem ser dados em unidades de massa consistentes ( $W/g$ ) e os momentos de inércia da massa devem estar em unidades ( $WL^2/g$ ). Aqui  $W$  é o peso,  $L$  é o comprimento, e  $g$  é a aceleração devido à gravidade. Os valores líquidos de massa em cada nó na estrutura devem ser zero ou positivos.

#### **5.4 - ALGORITMO GERAL**

O programa criado em MATLAB tem como objetivo principal efetuar uma análise dinâmica não linear de pórticos planos com dissipadores de energia. Para alcançar este objetivo, o programa se baseia em um algoritmo geral, que é o mesmo que foi exposto na Seção 3.3.4. Assim, para representar graficamente este algoritmo se define o fluxograma mostrado na Figura 5.1.

Nas subsecções seguintes nos focaremos no ponto número 1 do fluxograma, ou seja, a obtenção das matrizes de massa **M**, de rigidez **K** e de amortecimento **C**. Assim, se detalhara os procedimentos empregados pelo programa para obter estas matrizes. Os pontos restantes do algoritmo foram descritos em detalhe nos Capítulos 3 e 4.

Figura 5.1 - Fluxograma do algoritmo geral do programa



### 5.4.1 - Matriz de rigidez **K**

O cálculo da matriz de rigidez de um elemento requer a determinação dos coeficientes de rigidez. Para determinar os coeficientes de rigidez são utilizadas as funções de forma e o Princípio de Trabalho Virtual (trabalho externo igual ao trabalho interno). Isto conduz a seguinte expressão para a matriz de rigidez de um elemento de pórtico:

$$\mathbf{k} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} Al^2/I & 0 & 0 & -Al^2/I & 0 & 0 \\ & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ & & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ & & & Al^2/I & 0 & 0 \\ & & & & 12 & -6l \\ \text{sym.} & & & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Onde  $E$  = módulo de elasticidade;  $I$  = momento de inércia da seção transversal em torno do eixo  $z$ ;  $A$  = área da seção transversal; e  $l$  = comprimento de cada elemento.

E para um elemento de treliça a matriz de rigidez é:

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Depois se deve realizar uma transformação de coordenadas da matriz de rigidez de cada elemento. O objetivo é transformar a matriz de rigidez do elemento a partir da referência dos eixos de coordenadas locais para os eixos de coordenadas globais. Esta transformação é necessária a fim de que as matrizes de todos os elementos se referem ao mesmo sistema de coordenadas, daí, as matrizes se tornam compatíveis para a montagem na matriz de rigidez do sistema para a estrutura.

O próximo passo é obter sistematicamente a matriz de rigidez para cada elemento no sistema, efetuar a transformação de coordenadas e adicionar os coeficientes de rigidez apropriadamente para obter a matriz de rigidez do sistema **K**. Este método de montagem da matriz de rigidez do sistema é chamado de método direto.

### 5.4.2 - Matriz de massa M

O programa determina a matriz de massa por qualquer um dos dois métodos seguintes:

**Método de massa concentrada:** O método mais simples para considerar as propriedades inerciais para um sistema dinâmico é supor que a massa da estrutura está concentrada nas coordenadas nodais onde os deslocamentos translacionais estão definidos, por isso o nome método de massa concentrada. O procedimento habitual é distribuir a massa de cada elemento aos nós do elemento. Neste método, o efeito inercial associado com qualquer grau de liberdade é assumido ser zero. A matriz de massa concentrada tanto para um elemento de pórtico como para um elemento de treliça é dada pela eq. (5.3). Esta abordagem é adequada para a maioria das análises.

$$\mathbf{m}_l = \frac{\rho Al}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ \text{sym.} & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Onde  $\rho$  = densidade de massa.

**Método de massa consistente:** Neste método por um procedimento similar ao de determinação dos coeficientes de rigidez, é possível calcular os coeficientes de massa correspondentes às coordenadas nodais de um elemento de pórtico. Assim a matriz de massa consistente para um elemento de pórtico é dada pela eq. (5.4).

$$\mathbf{m}_c = \frac{\rho Al}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ & & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ & & & 140 & 0 & 0 \\ & & & & 156 & -22l \\ \text{sym.} & & & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

E para um elemento de treliça a matriz de massa consistente é:

$$\mathbf{m}_c = \frac{\rho Al}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 0 \\ & & & & 2 & 0 \\ \text{sym.} & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Uma vez que a matriz de massa, eq. (5.3) ou eq. (5.4) ou eq. (5.5), tem sido avaliada, tal como no caso da matriz de rigidez, uma transformação de coordenadas deve ser realizada. Sendo isto feito para cada elemento da estrutura, a matriz de massa para o sistema inteiro  $\mathbf{M}$  é montada pelo método direto.

### 5.4.3 - Matriz de amortecimento $\mathbf{C}$

A matriz de amortecimento para estruturas práticas não deve ser calculada das dimensões estruturais, medidas dos membros estruturais e o amortecimento dos materiais estruturais utilizados. Pode-se pensar que deve ser possível determinar a matriz de amortecimento para a estrutura a partir das propriedades de amortecimento dos elementos estruturais individuais, assim como a matriz de rigidez estrutural é determinada. No entanto, não é prático determinar a matriz de amortecimento deste modo porque, ao contrário do módulo de elasticidade, o qual entra no cálculo da rigidez, as propriedades de amortecimento dos materiais não estão bem estabelecidas. Mesmo se essas propriedades foram conhecidas, a matriz de amortecimento resultante não representaria uma parte significativa da energia dissipada em fricção em conexões de aço, abertura e fechamento de microfissuras no concreto, tensão de elementos não estruturais (paredes divisórias, equipamentos mecânicos, proteção contra incêndio, etc.), fricção entre a própria estrutura e os elementos não estruturais, e outros mecanismos semelhantes, alguns dos quais são inclusive difíceis de identificar (CHOPRA, 2007).

Por isso a matriz de amortecimento para uma estrutura deve ser determinada a partir de suas taxas de amortecimento modal, as quais representam todos os mecanismos de dissipação de energia. As taxas de amortecimento modal devem ser estimadas a partir de dados disponíveis sobre estruturas semelhantes vibradas fortemente durante terremotos passados, mas não deformadas na faixa inelástica; carecendo desses dados os valores podem ser obtidos de tabelas.

O *amortecimento clássico* é uma idealização apropriada se mecanismos semelhantes de amortecimento são distribuídos por toda a estrutura (por exemplo, um edifício de vários andares com um sistema estrutural e materiais estruturais semelhantes ao longo de sua altura). Assim, no programa foi utilizado o procedimento de amortecimento de Rayleigh para a construção da matriz de amortecimento clássica para o sistema, a partir das taxas de

amortecimento modal. Segundo o procedimento de Rayleigh, o qual é consistente com dados experimentais, a matriz de amortecimento clássica  $\mathbf{C}$  é (CHOPRA, 2007):

$$\mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{K} \quad (5.6)$$

A taxa de amortecimento para o  $n$ -ésimo modo do sistema é:

$$\xi_n = \frac{a_0}{2} \frac{1}{\omega_n} + \frac{a_1}{2} \omega_n \quad (5.7)$$

Onde  $\omega_n$  é a  $n$ -ésima frequência natural correspondente ao  $n$ -ésimo modo.

Os coeficientes  $a_0$  e  $a_1$  podem ser determinados a partir de taxas de amortecimento especificadas  $\xi_i$  e  $\xi_j$  para o  $i$ -ésimo e  $j$ -ésimo modos, respectivamente. Se ambos os modos são assumidos para ter a mesma taxa de amortecimento  $\xi$ , o qual é razoável baseado em dados experimentais, então:

$$a_0 = \xi \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j} \quad a_1 = \xi \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \quad (5.8)$$

A matriz de amortecimento  $\mathbf{C}$  é então conhecida da Eq. (5.6).

Como se pode observar é necessário calcular as frequências naturais da estrutura para obter a matriz de amortecimento clássica do sistema, por esta razão a seguir se explica como obter estas frequências naturais.

### **Modos e frequências naturais (análise modal)**

Consideramos que o amortecimento normalmente presente nas estruturas é relativamente pequeno e praticamente não altera o cálculo das frequências naturais e modos do sistema. Assim, o efeito do amortecimento é negligenciado na determinação das frequências naturais e modos de vibração do sistema estrutural (PAZ; LEIGH, 2004).

O problema de vibração livre requer que o vetor de força  $\mathbf{R}$  seja igual à zero. Concretamente,

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = 0 \quad (5.9)$$

Para vibrações livres da estrutura sem amortecimento, a solução da eq. (5.9) tem a forma:

$$\mathbf{U} = \Phi \sin(\omega t) \quad (5.10)$$

Onde  $\omega$  é a frequência natural e  $\Phi$  é o modo de vibração correspondente à frequência  $\omega$ . Substituindo a eq. (5.10) em eq. (5.9), suprimindo  $\sin(\omega t)$  e reorganizando os termos resultará:

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \Phi = 0 \quad (5.11)$$

A formulação da eq. (5.11) é um importante problema matemático conhecido como um problema de autovalor e autovetor.

Na aplicação do Método dos Elementos Finitos está disponível uma variedade de métodos numéricos para resolver o problema da Eq. (5.11), ou seja, extrair os autovalores (frequências) e autovetores (modos de vibrar) da estrutura. No programa foi implementado o amplamente conhecido *Método de Stodola* o qual é um procedimento iterativo de análise que permite a extração dos modos e frequências da estrutura.

## 6 – EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

### 6.1 - INTRODUÇÃO

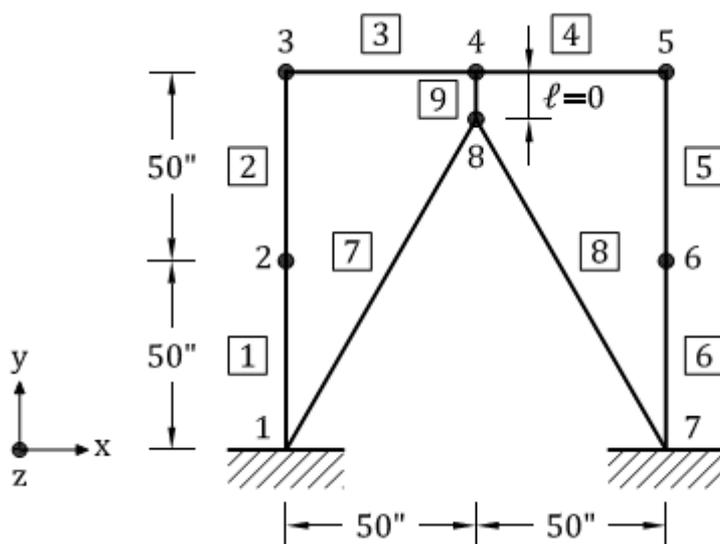
Este capítulo tem como objetivo demonstrar a precisão e a eficiência da metodologia proposta e a validade do programa X-Structure2D. Para tal propósito dois exemplos acadêmicos foram realizados, nos quais os resultados das análises são comparados com os do software comercial SAP2000 (COMPUTER AND STRUCTURES INC., 2009). Assim, a resposta do deslocamento de pórticos planos com dispositivos ADAS e o comportamento histerético (resposta força-deslocamento) de estes dispositivos ADAS foram contrastados. As estruturas analisadas em cada exemplo são descritas em detalhe a seguir.

### 6.2 - EXEMPLO 1

#### Descrição da estrutura

Para este primeiro exemplo a estrutura estudada é um pórtico plano de um vão e um andar equipada com um dispositivo ADAS como ilustrado na Figura 6.1.

Figura 6.1 - Esquema para o pórtico plano estudado no exemplo 1 (dimensões em polegadas)



Fonte própria

As propriedades do pórtico analisado inseridas no programa são:

$A = 6 \text{ in}^2 (38.71 \text{ cm}^2)$  área da seção transversal de cada coluna e viga (elementos de pórtico)

$I = 100 \text{ in}^4 (4162.31 \text{ cm}^4)$  momento de inércia da seção transversal em torno do eixo z de cada coluna e viga

$A_b = 0.80 \text{ in}^2 (5.16 \text{ cm}^2)$  área da seção transversal do contraventamento tipo chevron (elementos de treliça)

A viga, as colunas e o contraventamento são feitos de aço estrutural com Módulo de Elasticidade  $E = 10^4 \text{ kip/in}^2 (6895 \text{ kN/cm}^2)$  e densidade de massa  $\rho = 0.0007 \text{ kip s}^2 \text{ in}^{-4} (7.48 \times 10^{-5} \text{ kN s}^2 \text{ cm}^{-4})$ .

Os parâmetros da curva força-deslocamento em cisalhamento do dispositivo ADAS são:

$V_y^{ADAS} = 2 \text{ kip} (8.90 \text{ kN})$  cisalhamento de escoamento do dispositivo ADAS

$\Delta_y^{ADAS} = 2 \text{ in} (5.08 \text{ cm})$  deslocamento de escoamento em cisalhamento do dispositivo ADAS

$k_{ADAS} = 1 \text{ kip/in} (1.75 \text{ kN/cm})$  rigidez de cisalhamento elástica do dispositivo ADAS

Além disso, uma rigidez pós-escoamento  $k_y$  de 5% da rigidez elástica foi considerado para o dispositivo ADAS.

## Modelagem

A estrutura estudada e o dispositivo ADAS foram modelados como segue: (1) Usando o procedimento do programa X-Structure2D e, por conseguinte, o modelo bilinear para o elemento ADAS. Este modelo é identificado por X-Structure2D. (2) Utilizando o procedimento de SAP2000 e, por conseguinte, um modelo baseado no método de Wen (1976) para os elementos ADAS. Este modelo é identificado por SAP2000.

Para ambos os modelos, o pórtico é discretizado com 9 elementos finitos como mostrado na Figura 6.1. A Figura 6.2 e a Figura 6.3 mostram a estrutura modelada no software SAP2000. Os elementos ADAS são modelados em SAP2000 atribuindo uma zona de painel com uma propriedade link não linear (plasticidade de Wen com o parâmetro  $n = 20$ ) ao nó do centro do vão onde o contraventamento chevron intercepta à viga no nível do pavimento. A propriedade não linear é especificada para a direção horizontal (cisalhamento no plano X-Y). Em relação



As frequências ( $f$ ) e os períodos naturais ( $T$ ) para os três primeiros modos de vibração do pórtico estudado estão resumidos na Tabela 6.1. Note-se que estes valores são os mesmos que os valores obtidos com o modelo em SAP2000. Para o presente exemplo a primeira e a segunda frequência e uma taxa de amortecimento  $\xi = 0.01$  são utilizados para calcular os coeficientes  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$ , de acordo com a Eq. (5.8). Então a matriz de amortecimento clássica  $\mathbf{C}$  é obtida da Eq. (5.6).

Finalmente, o método utilizado para determinar a matriz de massa  $\mathbf{M}$  é o método de massa concentrada, tendo em vista que o software SAP2000 usa massas concentradas para a eficiência computacional e a precisão da solução.

Tabela 6.1 - Autovalores, frequências ( $f$ ) e períodos ( $T$ ) dos três primeiros modos de vibração para o pórtico plano no exemplo 1

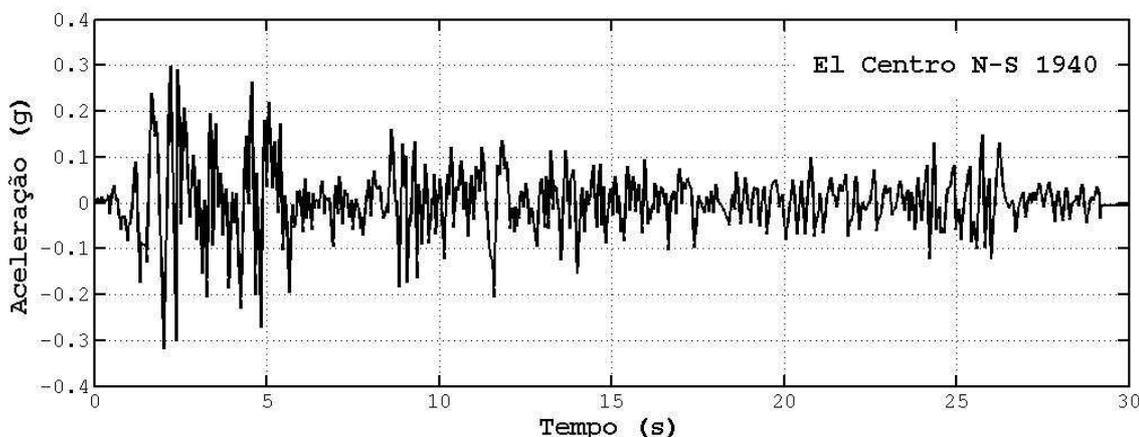
		<b>Modelo X-Structure2D</b>	<b>Modelo SAP2000</b>
<b>Primeiro modo</b>	<b>Autovalor</b>	24.84	24.84
	<b><math>f</math> (1/s)</b>	0.79	0.79
	<b><math>T</math> (s)</b>	1.26	1.26
<b>Segundo modo</b>	<b>Autovalor</b>	34.75	34.75
	<b><math>f</math> (1/s)</b>	2.97	2.97
	<b><math>T</math> (s)</b>	0.34	0.34
<b>Terceiro modo</b>	<b>Autovalor</b>	47.32	47.32
	<b><math>f</math> (1/s)</b>	3.46	3.46
	<b><math>T</math> (s)</b>	0.29	0.29

Fonte própria

### Solicitação sísmica

Os modelos de pórtico foram submetidos a um movimento do solo definido pelos primeiros 30 segundos do componente norte-sul do registro de aceleração El Centro 1940 com uma aceleração pico de 0,319 g (Figura 6.4). Além disso, um passo de tempo de 0.02 segundos é especificado em ambos os modelos.

Figura 6.4 - Acelerograma El Centro N-S 1940



Fonte própria

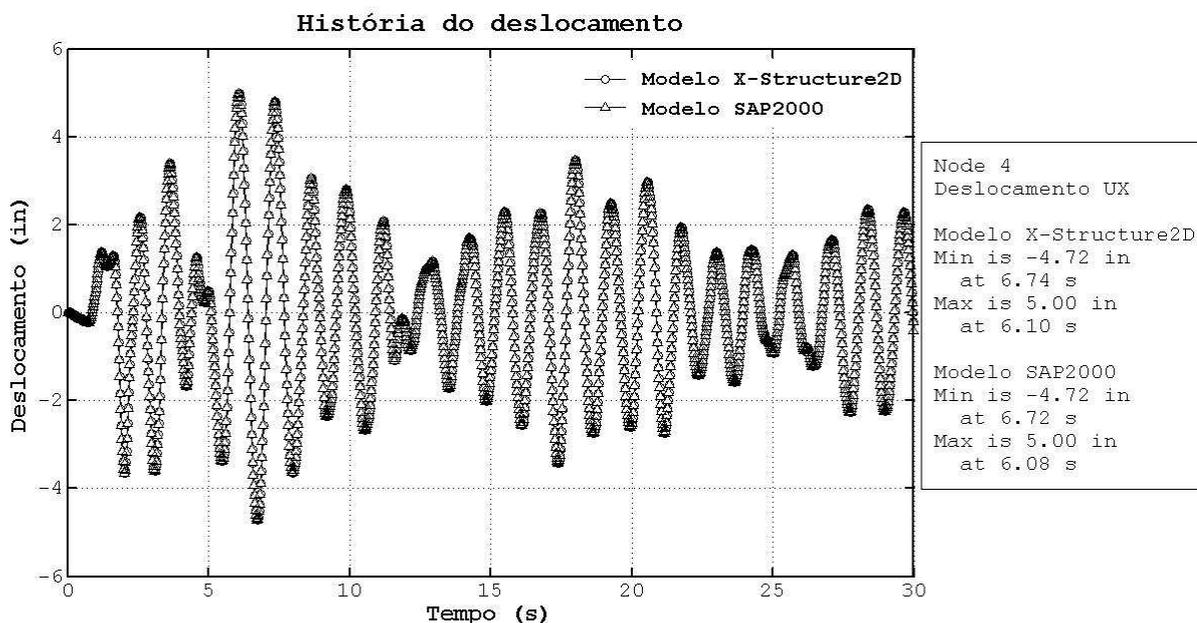
### Apresentação e comparação dos resultados

Os resultados da análise dinâmica tempo-história não linear para ambos os modelos são apresentados e contrastados neste item.

A comparação entre as histórias do deslocamento no nó do meio vão para os modelos X-Structure2D e SAP2000 é mostrada na Figura 6.5. Pode ser observado a partir da Figura 6.5 que o modelo X-Structure2D tem uma excelente correlação com o modelo SAP2000 para os deslocamentos, embora as respostas tenham uma defasagem de 0.02 segundo (o qual é o passo de tempo considerado). Levando em conta os valores máximos e mínimos do deslocamento reportados na Tabela 6.2, estes valores são os mesmos para os modelos X-Structure2D e SAP2000.

As curvas de histerese do ADAS computadas para os modelos X-Structure2D e SAP2000 estão representados na Figura 6.6. Praticamente, não há nenhuma diferença entre as curvas de histerese do ADAS para ambos os modelos. Além disso, os valores máximos e mínimos da força de cisalhamento e do deslocamento para os modelos X-Structure2D e SAP2000 estão resumidos na Tabela 6.3. Ambos os modelos previram praticamente os mesmos valores para a força de cisalhamento e o deslocamento. Assim, pode-se afirmar que existe uma correlação excelente entre os modelos X-Structure2D e SAP2000.

Figura 6.5 - Comparação entre as histórias do deslocamento no nó do meio do vão dos modelos X-Structure2D e SAP2000 do pórtico no exemplo 1



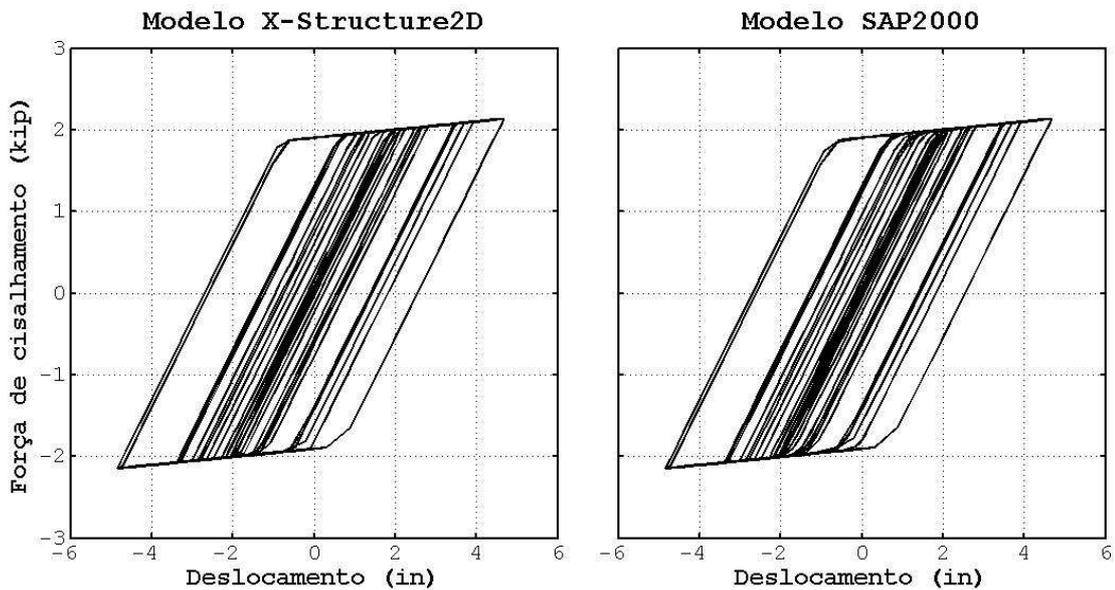
Fonte própria

Tabela 6.2 - Valores máximos e mínimos do deslocamento no nó do meio do vão dos modelos X-structure2D e SAP2000 do pórtico no exemplo 1

		Modelo X-Structure2D	Modelo SAP2000
<b>Deslocamento (in (cm))</b>	<b>Min</b>	-4.72 (11.99) em 6.74 s	-4.72 (11.99) em 6.72 s
	<b>Max</b>	5.00 (12.70) em 6.10 s	5.00 (12.70) em 6.08 s

Fonte própria

Figura 6.6 - Comportamento histerético dos ADAS para os modelos X-Structure2D e SAP2000 do pórtico no exemplo 1, quando submetidos ao acelerograma El Centro 1940



Fonte própria

Tabela 6.3 - Valores máximos e mínimos da força de cisalhamento e do deslocamento dos ADAS para os modelos X-structure2D e SAP2000 do pórtico no exemplo 1

		<b>Modelo X-Structure2D</b>	<b>Modelo SAP2000</b>
<b>Força de cisalhamento (kip (kN))</b>	<b>Min</b>	-2.14 (-9.52) em 7.38 s	-2.14 (-9.52) em 7.36 s
	<b>Max</b>	2.13 (9.47) em 6.72 s	2.13 (9.47) em 6.70 s
<b>Deslocamento (in (cm))</b>	<b>Min</b>	-4.84 (-12.29) em 7.38 s	-4.84 (-12.29) em 7.36 s
	<b>Max</b>	4.67 (11.86) em 6.72 s	4.66 (11.84) em 6.70 s

Fonte própria

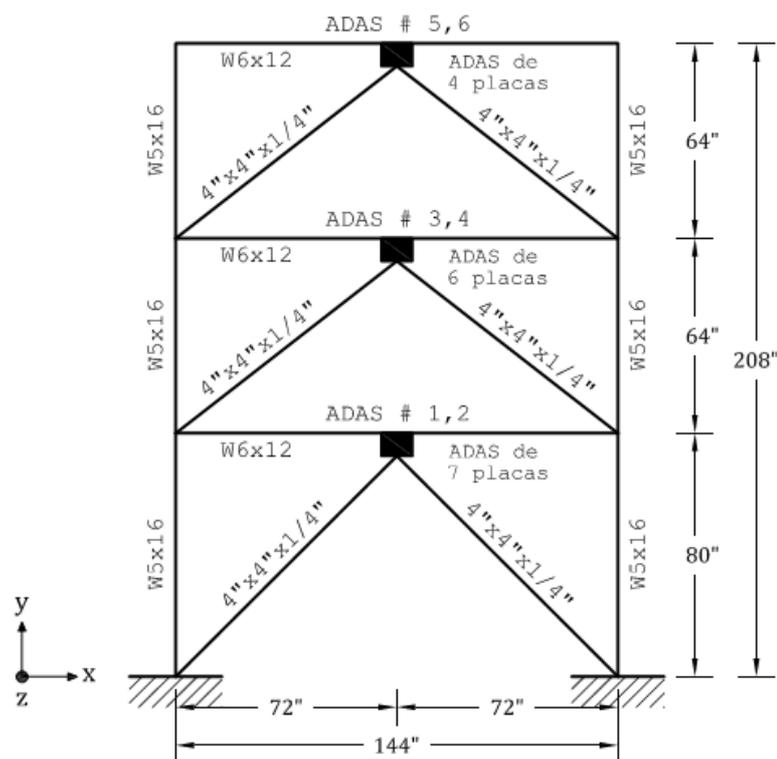
## 6.3 - EXEMPLO 2

### Descrição da estrutura

Neste segundo exemplo a modelagem do edifício de teste na mesa vibratória ensaiado na Universidade da Califórnia em Berkeley, denominado ADAS-3, foi considerado para avaliar a eficácia do procedimento proposto, de forma semelhante ao que foi feito por Tena-Colunga (1997). Por isso foram preparados um modelo em X-Structure2D e um modelo em SAP2000. Os resultados destes modelos foram contrastados entre si e com os resultados de Tena-

Colunga. O edifício ADAS-3 é composto de dois pórticos idênticos com contraventamentos, mas apenas um pórtico (Figura 6.7) foi considerado neste estudo, dado que as respostas torcionais foram mínimas durante os testes de mesa vibratória (WHITTAKER et al., 1989). O modelo de teste ADAS-3 tem um total de seis dispositivos ADAS (três para cada pórtico, um ADAS por andar): dois ADAS de sete placas (ADAS # 1 e 2) no primeiro andar, dois ADAS de seis placas (ADAS # 3 e 4) no segundo andar e dois ADAS de quatro placas (ADAS # 5 e 6) no terceiro andar. Os parâmetros da curva de força-deslocamento em cisalhamento destes dispositivos ADAS, obtidos de acordo com o método usado por Whittaker et al. (1989) (descrito no item 4.4.1) e relatados em Tena-Colunga, encontram-se resumidos na Tabela 6.4. Além disso, uma rigidez pós-escoamento ( $k_y$ ) de 5% da rigidez elástica foi considerado para os dispositivos ADAS como no estudo de Tena-Colunga. As massas dos andares totais do edifício ADAS-3, como relatadas por Whittaker et al. (1989), estão resumidas na Tabela 6.5. As propriedades dos elementos estruturais do edifício ADAS-3 estão resumidos na Tabela 6.6. As colunas, vigas e contraventamentos têm muito mais resistência do que os dispositivos ADAS, assim, a ação não linear deve estar concentrada nos dispositivos de dissipação de energia, como desejado nos testes de mesa vibratória (TENA-COLUNGA, 1997).

Figura 6.7 - Esquema para ADAS-3, estrutura de teste na mesa vibratória (dimensões em polegadas)



Fonte própria: Baseado em Whittaker et al. (1989)

Tabela 6.4 - Parâmetros da curva força-deslocamento em cisalhamento dos dispositivos ADAS (unidades: kip, in, kip/in (kN, cm, kN/cm))

Dispositivo ADAS	No. de placas	$V_y^{ADAS}$	$\Delta_y^{ADAS}$	$k_{ADAS}$
ADAS # 5,6	4	2.63 (11.69)	0.11 (0.27)	23.91 (43.84)
ADAS # 3,4	6	3.94 (17.54)	0.11 (0.27)	35.82 (65.75)
ADAS # 1,2	7	4.60 (20.46)	0.11 (0.27)	41.82 (76.71)

Fonte: Whittaker et al. (1989)

Onde  $V_y^{ADAS}$  = cisalhamento de escoamento do dispositivo ADAS;  $\Delta_y^{ADAS}$  = deslocamento de escoamento em cisalhamento do dispositivo ADAS; e  $k_{ADAS}$  = rigidez de cisalhamento elástica do dispositivo ADAS.

Tabela 6.5 - Pesos medidos para a estrutura de teste na mesa vibratória ADAS-3 (unidades: kip (kN))

Andar	Peso total da estrutura	Peso do pórtico idealizado
3	31.10 (138.51)	15.55 (69.26)
2	31.80 (141.63)	15.90 (70.81)
1	32.10 (142.97)	16.05 (71.48)
Total	95.00 (423.11)	47.50 (211.55)

Fonte: Whittaker et al. (1989)

Tabela 6.6 - Propriedades dos elementos estruturais dos modelos do pórtico ADAS-3

Propriedade	Vigas (W6 x 12)	Colunas (W5 x 16)	Contraventamento (4" x 4" x 1/4")
$A$ in <sup>2</sup> (cm <sup>2</sup> )	3.55 (22.90)	4.68 (30.19)	3.59 (23.16)
$I$ in <sup>4</sup> (cm <sup>4</sup> )	22.10 (919.87)	21.30 (886.57)	-

Fonte: Whittaker et al. (1989)

## Modelagem

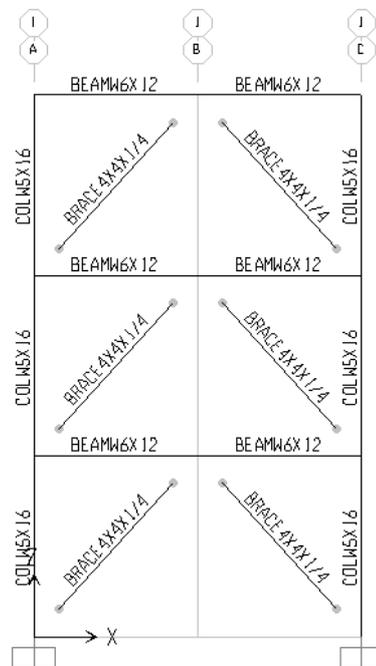
Tal como no estudo de Tena-Colunga, um esquema simplificado para o modelo do pórtico ADAS-3 foi avaliado (Figura 6.7), onde o contraventamento tipo chevron é modelado como diretamente ligado aos dispositivos ADAS, não incluindo a viga de fundo que suporta os dispositivos ADAS na modelagem. O pórtico ADAS-3 e em particular os dispositivos ADAS foram modelados como se segue: (1) Segundo Tena-Colunga utilizando o procedimento do

software DRAIN-2DX. Este modelo é identificado por MSL-WBAT como no estudo de Tena-Colunga. (2) Utilizando o procedimento do programa X-Structure2D e, portanto, o modelo bilinear para os elementos ADAS. Este modelo é identificado por X-Structure2D. (3) Utilizando o procedimento de SAP2000 e, por conseguinte, um modelo baseado no método de Wen (1976) para os elementos ADAS. Este modelo é identificado por SAP2000.

A Figura 6.8 e a Figura 6.9 mostram a estrutura modelada no software SAP2000. Os elementos ADAS foram modelados em SAP2000 como foi descrito no exemplo 1. Igualmente em relação às condições de contorno para os dispositivos ADAS, os graus de liberdade rotacional e translacional (na direção axial) daqueles nós que conectam os dispositivos ADAS foram restringidos.

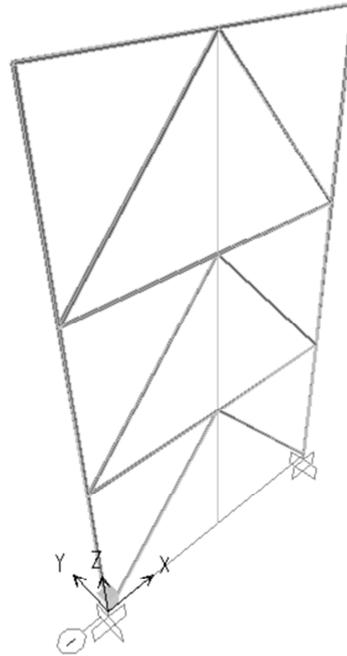
Os períodos naturais para os diferentes modelos acima descritos estão resumidos na Tabela 9. Pode-se observar que não existe uma diferença substancial entre os períodos naturais para estes modelos.

Figura 6.8 - Vista frontal do modelo em SAP2000 para ADAS-3



Fonte: SAP2000

Figura 6.9 - Vista 3D do modelo em SAP2000 para ADAS-3



Fonte: SAP2000

Tabela 6.7 - Períodos fundamentais para os diferentes modelos de ADAS-3

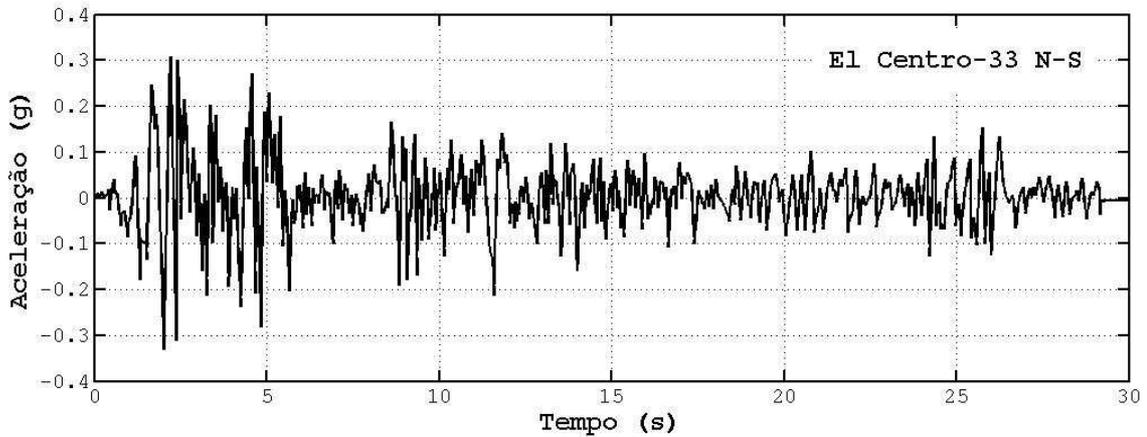
<b>Modelo</b>	<b><i>T</i> (s)</b>
Modelo MSL-WBAT	0.403
Modelo em X-structure2D	0.415
Modelo em SAP2000	0.430

Fonte própria

### Solicitação sísmica

Os modelos ADAS-3 foram submetidos à componente norte-sul do registro de aceleração El Centro 1940 escalado para uma aceleração de pico do solo de 0.33 g (Figura 6.10), como foi feito nos testes da mesa de vibração reais (WHITTAKER et al., 1989).

Figura 6.10 - Acelerograma El Centro N-S 1940 escalado a 0.33 g



Fonte própria

### Apresentação e comparação dos resultados

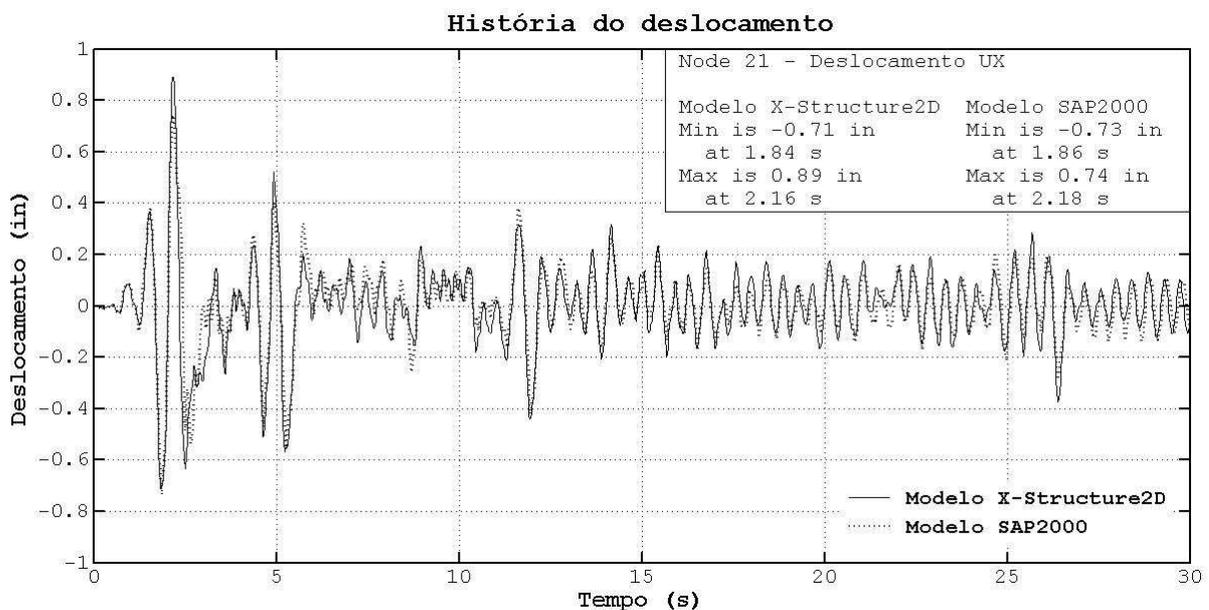
Os resultados da análise dinâmica tempo-história não linear para os diferentes modelos do pórtico ADAS-3 são apresentados e contrastados neste item.

A comparação entre as histórias de deslocamento no nó do meio vão no primeiro andar para os modelos X-Structure2D e SAP2000 é mostrada na Figura 6.11. Pode ser observado a partir da Figura 6.11, que o modelo X-Structure2D tem uma correlação razoável com o modelo SAP2000 para os deslocamentos; igualmente as respostas têm uma defasagem de 0.02 segundos. Levando em conta os valores máximos e mínimos para o deslocamento apresentados na Tabela 6.8, as diferenças dos valores do modelo X-Structure2D com respeito aos calculados para o modelo SAP2000 é de 3% para os valores máximos e 20% para os valores mínimos. Esta diferença nos deslocamentos previstos é atribuída ao fato de que os diferentes modelos foram utilizados para os elementos de ADAS.

As curvas de histerese dos ADAS obtidas para o modelo MSL-WBAT no estudo de Tena-Colunga são mostradas na Figura 6.12a. As curvas de histerese dos ADAS computadas para os modelos X-Structure2D e SAP2000 são representadas na Figura 6.12b e a Figura 6.12c, respectivamente. Não há nenhuma diferença significativa entre as curvas de histerese dos ADAS para os diferentes modelos, embora aquelas para o modelo X-Structure2D (Figura 6.12b) tem uma correlação mais estreita com aquelas para o modelo MSL-WBAT (Figura 6.12a) do que em relação ao modelo SAP2000 (Figura 6.12c). Assim, pode-se inferir que a

mesma idealização ADAS é considerada para os modelos MSL-WBAT e X-Structure2D. Adicionalmente, os valores máximos e mínimos da força de cisalhamento e do deslocamento para os modelos X-Structure2D e SAP2000 são resumidos na Tabela 6.9. As diferenças dos valores do modelo X-Structure2D com respeito a aqueles calculados para o modelo SAP2000 vão de 1% a 9% para as forças de cisalhamento e de 3% a 28% para os deslocamentos. Pode-se observar que as diferenças são maiores em relação aos deslocamentos do que em relação às forças de cisalhamento. Como mencionado acima estas diferenças são atribuídas ao modelo utilizado para os elementos ADAS. Como descrito anteriormente a principal vantagem do modelo bilinear é sua simplicidade em modelar a curva de histerese, a sua desvantagem é que a região de transição entre os estados elástico e plástico é mais bem aproximada por uma curva (como no modelo de Wen) e não por uma linha reta, assim está considerando deslocamentos menores do que os reais.

Figura 6.11 - Comparação entre as histórias do deslocamento no nó do meio vão no primeiro andar dos modelos X-Structure2D e SAP2000 do pórtico ADAS-3



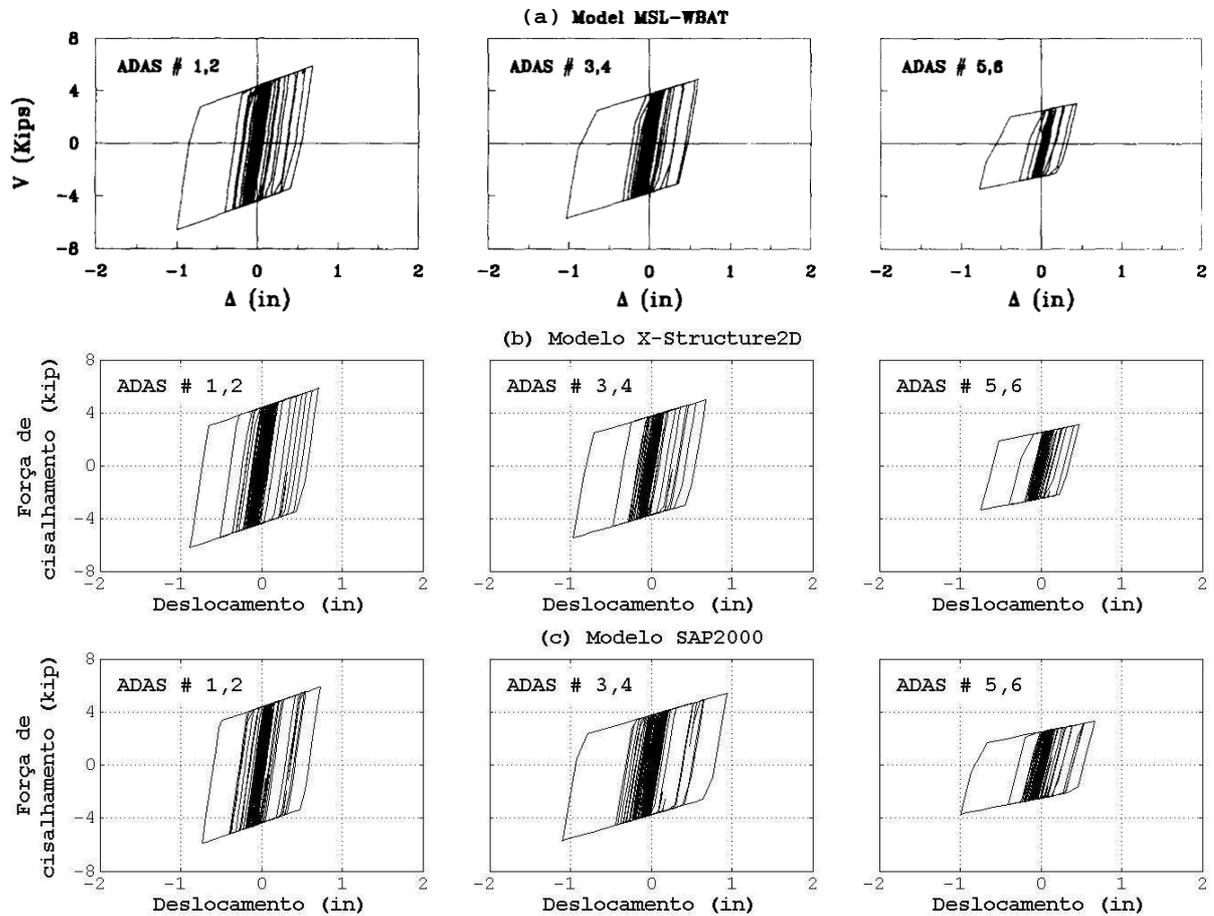
Fonte própria

Tabela 6.8 - Valores máximos e mínimos do deslocamento no nó do meio vão no primeiro andar dos modelos X-structure2D e SAP2000 do pórtico ADAS-3

		<b>Modelo X-Structure2D</b>	<b>Modelo SAP2000</b>
<b>Deslocamento (in (cm))</b>	<b>Min</b>	-0.71 (-1.80) em 1.84 s	-0.73 (-1.85) em 1.86 s
	<b>Max</b>	0.89 (2.26) em 2.16 s	0.74 (1.88) em 2.18 s

Fonte própria

Figura 6.12 - Comportamento histerético dos ADAS para os modelos do pórtico ADAS-3 quando submetidos ao acelerograma El Centro-33; (a) modelo MSL-WBAT, (b) modelo X-Structure2D e (c) modelo SAP2000



(a) Fonte: Tena-Colunga (1997); (b), (c) Fonte própria

Tabela 6.9 - Valores máximos e mínimos da força de cisalhamento e do deslocamento dos ADAS para os modelos X-structure2D e SAP2000 do pórtico ADAS-3

		Modelo X-Structure2D		Modelo SAP2000	
ADAS # 1,2	Força de cisalhamento (kip (kN))	Min	-6.22 (-27.67) em 2.16 s	-5.91 (-26.29) em 2.18 s	
		Max	5.85 (26.02) em 1.84 s	5.89 (26.20) em 1.86 s	
	Deslocamento (in (cm))	Min	-0.88 (-2.24) em 2.16 s	-0.73 (-1.85) em 2.18 s	
		Max	0.71 (1.80) em 1.84 s	0.73 (1.85) em 1.86 s	
ADAS # 3,4	Força de cisalhamento (kip (kN))	Min	-5.48 (-24.38) em 2.20 s	-5.71 (-25.40) em 2.20 s	
		Max	4.96 (22.06) em 1.88 s	5.43 (24.15) em 1.90 s	
	Deslocamento (in (cm))	Min	-0.97 (-2.46) em 2.20 s	-1.10 (-2.79) em 2.20 s	
		Max	0.68 (1.73) em 1.88 s	0.94 (2.39) em 1.90 s	
ADAS # 5,6	Força de cisalhamento (kip (kN))	Min	-3.39 (-15.08) em 2.20 s	-3.69 (-16.41) em 2.22 s	
		Max	3.07 (13.66) em 1.90 s	3.30 (14.68) em 1.92 s	
	Deslocamento (in (cm))	Min	-0.75 (-1.91) em 2.20 s	-0.99 (-2.51) em 2.22 s	
		Max	0.48 (1.22) em 1.90 s	0.67 (1.70) em 1.92 s	

Fonte própria

## **7 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES**

### **7.1 CONCLUSÕES GERAIS**

No presente estudo foi mostrada uma metodologia detalhada e efetiva para realizar a análise dinâmica tempo-história não linear de pórticos planos com dispositivos ADAS. Adicionalmente, apresentaram-se a formulação do modelo bilinear do elemento ADAS, o algoritmo return-mapping para a integração do modelo bilinear e a idealização de elemento finito do dispositivo ADAS. Os seguintes procedimentos foram utilizados em conjunto na metodologia proposta: uma formulação de elementos finitos não linear somente-material, o método de Newton-Raphson para a solução iterativa, o método de Newmark para a integração no tempo e o algoritmo return-mapping para a integração do modelo do elemento ADAS. Assim, este trabalho contribui ao estado da arte dos sistemas de dissipação de energia passiva.

O programa criado em base à metodologia proposta foi comparado com o programa de computador SAP2000. A partir desta comparação, podemos concluir que a metodologia proposta se correlaciona bem com o procedimento de SAP2000 no cálculo da resposta de deslocamento da estrutura e do comportamento histerético dos elementos ADAS. Assim se demonstra a eficácia da metodologia proposta bem como a validade do programa criado. Nota-se que na medida em que o número de elementos ADAS aumenta, o que implica num aumento do número de equações não lineares, diferenças nas respostas são percebidas. Estas diferenças são atribuídas ao fato de que modelos distintos foram utilizados para os elementos ADAS em cada procedimento. Correlações mais estreitas poderiam ter sido obtidas caso a modelagem do dispositivo ADAS tivesse sido baseada no modelo refinado de Wen, como em SAP2000.

Finalmente pode ser afirmado que todos os objetivos particulares foram atingidos, e que ao desenvolver detalhadamente uma metodologia para a análise sísmica de estruturas com dissipadores de energia e corroborar sua eficiência, se cumpriu o objetivo geral inicialmente proposto.

## 7.2 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Neste estudo o comportamento não linear histerético dos dispositivos ADAS foi caracterizado por uma relação força-deslocamento bilinear. Recomenda-se implementar na metodologia proposta o modelo de Bouc-Wen, uma vez que prediz o comportamento do dispositivo ADAS com maior fidelidade. Adicionalmente modelos força-deslocamento mais complexos poderiam ser implementados, dentre estes aqueles que consideram a degradação da rigidez.

A metodologia proposta pode ser estendida para outros dissipadores metálicos por plastificação de metais além do dispositivo ADAS. Adicionalmente, a metodologia que apresentamos utiliza uma técnica básica para a solução das equações não lineares de elementos finitos. Esta poderia ser melhorada incluindo-se um procedimento auto adaptativo que escolhe automaticamente os passos da carga, o método iterativo e os critérios de convergência, dependendo do problema considerado e da precisão da solução procurada.

Na metodologia proposta o comportamento inelástico da estrutura se concentra nos dissipadores de energia. Sugere-se incluir o comportamento inelástico dos elementos estruturais por meio da inclusão de rótulas plásticas.

Incluir no programa criado as habilidades de sub-estruturação, que permitam a separação dos graus de liberdade lineares e não lineares. Assim, a solução em cada intervalo de tempo envolve um sistema relativamente pequeno contendo apenas os graus de liberdade não lineares.

Outra sugestão é implementar interfaces gráficas no programa criado de tal forma que permitam o ingresso de dados e a apresentação de resultados adequadamente, uma vez que o MATLAB disponibiliza de as ferramentas para este fim.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BATHE, K.-J. **Finite Element Procedures**. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1996.
- BERGMAN, D. M.; GOEL, S. C. **Evaluation of Cyclic Testing of Steel-Plate Devices for Added Damping and Stiffness**. Report No. UMCE 87-10. The University of Michigan, 1987.
- BLACK, C.; MAKRIS, N.; AIKEN, I. Component Testing, Seismic Evaluation and Characterization of Buckling-Restrained Braces. **Journal of Structural Engineering**, v. 130, n. 6, p. 880–894, 2004.
- CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering**. Third ed. New Jersey: Pearson Education, Inc., 2007.
- CHRISTOPOULOS, C.; FILIATRAULT, A. **Principles of Passive Supplemental Damping and Seismic Isolation**. Pavia: IUSS Press, 2006.
- COMPUTER AND STRUCTURES INC. **CSI Analysis Reference Manual For SAP2000, ETABS, and SAFE**. Computers and Structures, Inc., 2009.
- ISO. **ISO 3010 Bases for design of structures - Seismic actions on structures**. Second ed. International Organization for Standardization, 2001.
- MARTINEZ-ROMERO, E. Experiences on the Use of Supplemental Energy Dissipators on Building Structures. **Earthquake Spectra**, v. 9, n. 3, p. 581–625, 1993.
- OZDEMIR, H. **Nonlinear Transient Dynamic Analysis of Yielding Structures, Ph.D. Dissertation**, 1976. University of California, Berkeley.
- PAZ, M.; LEIGH, W. **Structural Dynamics: Theory and Computaton**. Fifth ed. New York: Springer Science+Business Media, Inc., 2004.
- PERRY, C. L.; FIERRO, E. A.; SEDARAT, H.; SCHOLL, R. E. Seismic Upgrade in San Francisco Using Energy Dissipation Devices. **Earthquake Spectra**, v. 9, n. 3, p. 559–579, 1993.
- SIMO, J. C.; HUGHES, T. J. R. **Computational Inelasticity**. New York: Springer-Verlag New York, Inc., 1998.
- SIRVE. SIRVE - Seismic Protection Technologies. Disponível em: <<http://www.sirve.cl/>>. Acesso em: 29/3/2014.
- SOONG, T. T.; DARGUSH, G. F. **Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering**. John Wiley & Sons, 1997.

SYMANS, M. D.; CHARNEY, F. A.; WHITTAKER, A. S.; et al. Energy Dissipation Systems for Seismic Applications: Current Practice and Recent Developments. **Journal of Structural Engineering ASCE**, v. 134, n. 1, p. 3–21, 2008.

TENA-COLUNGA, A. Mathematical Modelling of the ADAS Energy Dissipation Device. **Engineering Structures**, v. 19, n. 10, p. 811–821, 1997.

THE MATHWORKS INC. MATLAB. ,2011.

THE MATHWORKS INC. MATLAB. Disponível em: <<http://www.mathworks.com>>. Acesso em: 5/2/2014.

WEN, K. Y. Method for Random Vibration of Hysteretic Systems. **Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE**, v. 1-02, n. EM2, p. 249–263, 1976.

WHITTAKER, A. S.; BERTERO, V. V.; ALONSO, L. J.; THOMPSON, C. L. **Earthquake Simulator Testing of Steel Plate Added Damping And Stiffness Elements**. Report No. UCB/EERC-89/02. Earthquake Engineering Research Center. University of California at Berkeley, 1989.

WILSON, E. L. **Three-dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures**. Third ed. Berkeley: Computers and Structures, Inc., 2002.

XIA, C.; HANSON, R. Influence of ADAS Element Parameters on Building Seismic Response. **Journal of Structural Engineering ASCE**, v. 118, n. 7, p. 1903–1918, 1992.