Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Construções Relacionadas ao Grupo de Comutatividade Fraca

por

Bruno César Rodrigues Lima

Brasília

2014

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Construções Relacionadas ao Grupo de Comutatividade Fraca

por

Bruno César Rodrigues Lima *

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Brasília, 14 de Fevereiro de 2014.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Said Najati Sidki - MAT/UnB (Orientador)

Prof. Dr. Alexei Krassinilkov - MAT/UnB (membro)

Prof. Dr. Noraí Romeu Rocco - MAT/UnB (membro)

Prof. Dr. Alexandre Grichkov - IME/USP (membro)

Prof. Dr. Ricardo Nunes de Oliveira - IME/UFG (membro)

*O autor foi bolsista da CAPES/REUNI durante a elaboração desta tese.

Ao filho(a) que está por vir...

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por todas as bençãos e graças alcançadas. À minha familia pelo incetivo e encorajamento para enfrentar mais essa batalha.

Ao professor Dr. Said Najati Sidki pela valiosa orientação, paciência e ajuda durante a realização deste trabalho.

Aos professores da comissão examinadora, pelas correções e sugestões enriquecendo este trabalho.

Ao professor Dr. Norai Romeu Rocco que me confiou e recomendou para essa empreitada.

Ao professor Dr. Ricardo Nunes de Oliveira que tanto me ajudou a concretizar este trabalho.

Aos amigos Bruno Nunes e Marcelo Bezerra, pelo apoio e companheirismo nos momentos mais difíceis dessa caminhada.

Agradeço todos os colegas, funcionários e professores do Departamento de Matemática-UnB, que contríbuiram de algum modo para o nosso enriquecimento pessoal e profissional.

Enfim, agradeço a CAPES/REUNI, pelo suporte financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos a comutatividade fraca entre grupos isomorfos através do grupo $\chi(H)$ construído por Sidki, dado pela apresentação

$$\chi(H) = \left\langle H,\ H^{\psi} \mid [h, h^{\psi}] = 1\ \forall\, h \in H \right\rangle,$$

onde $h \mapsto h^{\psi}$ define um isomorfismo entre os grupos H e H^{ψ}, bem como algumas construções relacionadas. É conhecido que o operador χ preserva algumas propriedades de um grupo H, tais como finitude, solubilidade e nilpotência para grupos finitamente gerados. Demonstramos nesta tese que χ também preserva a propriedade policíclica por finito. Como consequência desse resultado vimos que o quadrado tensorial não abeliano $H \otimes H$ de um grupo H, definido por Brown e Loday, também preserva a propriedade policíclica por finito, generalizando o resultado de Blyth e Morse em que se mostra que $H \otimes H$ é policíclico se H é policíclico.

Determinamos uma estimativa para a ordem do grupo de comutatividade fraca de n cópias de um grupo. Introduzimos um novo grupo $\mathcal{E}(H)$ que tem $\chi(H)$ como imagem homomorfa e núcleo abeliano. Mostramos que $\mathcal{E}$ preserva solubilidade e também a propriedade policíclica se, e somente se, o abelianizado de H é finito. Além disso, mostramos que $\mathcal{E}(H)$ é finito se, e somente se, H é finito perfeito.

Palavras-chave: Comutatividade fraca, grupos policíclicos, p-grupos finitos, grupos perfeitos.

Abstract

In this work we study the weak commutativity between isomorphic groups through the group $\chi(H)$ constructed by Sidki given by the presentation

$$\chi(H) = \left\langle H\, H^{\psi} \mid [h, h^{\psi}] = 1 \,\forall\, h \in H \right\rangle,$$

where $h \to h^{\psi}$ is an isomorphism between groups H and H^{ψ}, as well as some related constructions. It is known that the operator χ, preserves some properties of a group H, such as finiteness, solubility and nilpotency for finitely generated groups. We prove in this work that χ also preserves the property polycyclic by finite. As a consequence of this result, we conclude that the non-abelian tensor square $H \otimes H$ of a group H, defined by Brown and Loday, also preserves the property polycyclic by finite. This last result generalizes that of Blyth and Morse which shows that $H \otimes H$ is polycyclic if H is polycyclic.

We determine an estimate for the order of the group of weak commutativity of n copies of a group. We introduce a new group $\mathcal{E}(H)$ which is an extension of an abelian group by $\chi(H)$. We show that $\mathcal{E}$ preserves solubility and also polycyclicity provided the abelianized of H is finite. Moreover, we show that $\mathcal{E}(H)$ is finite if and only if H is finite and perfect.

Keywords: weak commutativity, polycyclic groups, finite p-groups, perfect groups.

Sumário

Introdução

Estudamos nesta tese a comutatividade fraca entre grupos isomorfos, bem como algumas construções relacionadas a comutatividade fraca. O conceito de permutabilidade fraca e comutatividade fraca foi introduzido por Sidki em 1980 [19].

A permutabilidade entre dois subgrupos H e K de um grupo G, é equivalente a existência de certas funções $\alpha : H \times K \mapsto K$ e $\beta : H \times K \mapsto H$, tal que

$$hk = \alpha(h,k)\beta(h,k)$$

para todos $h \in H, \;\; k \in K$.

A permutabilidade fraca de dois subgrupos H e K de um grupo G está relacionada à condição de existência de funções $\gamma : H \mapsto K, \; \alpha : H \mapsto K$ e $\beta : H \mapsto H$, tal que

$$h\gamma(h) = \alpha(h)\beta(h)$$

para todo $h \in H$. O conceito de comutatividade fraca é um caso particular de permutabilidade fraca entre grupos em que $\alpha = \gamma$ e $\beta = 1_H$.

Nesse mesmo trabalho é introduzido e estudado com detalhes o grupo $\chi(H)$, gerado por duas cópias isomorfas de um grupo H, que comutam fracamente entre si,

$$\chi(H) = \left\langle H, \; H^{\psi} \mid [h, h^{\psi}] = 1, \; \forall h \in H \right\rangle,$$

em que $h \mapsto h^{\psi}$ define um isomorfismo entre H e H^{ψ}.

Os subgrupos $D(H) = [H, H^{\psi}]$ e $L(H) = \left\langle h^{-1}h^{\psi}, h \; \in H \right\rangle$ de $\chi(H)$ são de grande importância no estudo de sua estrutura, visto que da comutatividade fraca decorre a relação $[D(H), L(H)] = 1$.

Nesse mesmo artigo mostra-se ainda que propriedades de um grupo H como finitude, fatores primos de $|H|$, solubilidade e nilpotência para grupos finitos são preservadas por χ. Rocco e Sidki deram continuidade ao assunto e em 1980 [16], fizeram um estudo de χ quando H é um p-grupo finito, p-ímpar. Já em 1986 [4] Gupta, Rocco e Sidki estabelecem para H um grupo nilpotente finitamente gerado, cotas bastante precisas para a classe de nilpotência de χ, em função da classe de nilpotência e do número de geradores de H.

Em 1991, Rocco [14] faz a construção do grupo

$$\nu(H) = \left\langle H,\ H^{\psi} \mid [h_1, h_2^{\psi}]^{h_3} = [h_1, h_2^{\psi}]^{h_3^{\psi}} = [h_1^{h_3}, (h_2^{h_3})^{\psi}],\ \forall h_1,\ h_2,\ h_3\ \in H \right\rangle$$

onde $h \mapsto h^{\psi}$ é um isomorfismo entre H e H^{ψ}. Uma das motivações do estudo de $\nu(H)$ é que o subgrupo $[H, H^{\psi}] \lhd \nu(H)$ é isomorfo ao quadrado tensorial não abeliano, $H \otimes H$ introduzido por Brown e Loday [2].

Rocco mostra em 1994 [15], que os grupos $\nu(H)$ e $\chi(H)$ possuem imagens isomorfas $\frac{\chi(H)}{R(H)} \cong \frac{\nu(H)}{\Delta(H)}$, em que $R(H) = [H, L(H), H^{\psi}]$, e $\Delta(H) = \langle [h, h^{\psi}],\ \forall h \in H \rangle$. Neste mesmo artigo Rocco mostra que para um grupo H solúvel finito, dado por sua apresentação policíclica, $\nu(H)$ é solúvel finito e sua apresentação policíclica é dada em termos da apresentação policíclica de H. Em [1], Blyth e Morse estende esse resultado de Rocco para um grupo policíclico qualquer.

Outra linha de estudo desenvolvida por Oliveira [10] em 2007, é uma generalização de $\chi(H)$ em que considera um sistema de grupos isomorfos que comutam fracamente entre si. Mais precisamente, dados um grupo H e $\langle \psi \rangle$ um grupo cíclico de ordem n, considera-se

$$G = \left\langle H, \psi\ \mid [h^{\psi^i}, h^{\psi^j}] = 1\ [D_{i,j}, L_{k,l}] = 1, \psi^n = 1\ \forall\, h \in H,\ i,\ j,\ k,\ l\ \in \{0, \ldots, n-1\} \right\rangle$$

onde $D_{i,j} = [H^{\psi^i}, H^{\psi^j}]$, e $L_{i,j} = [H^{\psi^i}, \psi^j]$, com $[h^{\psi^i}, h^{\psi^j}] = h^{\psi^{-i}} h^{\psi^i h^{\psi^j}}$. Notemos que o grupo G possui n subgrupos $H,\ H^{\psi},\ \ldots,\ H^{\psi^{n-1}}$, que comutam fracamente. Daí é definido o grupo de comutatividade fraca entre n cópias de H como sendo

$$\chi(n, H) = \left\langle H,\ H^{\psi},\ \ldots,\ H^{\psi^{n-1}} \right\rangle.$$

Oliveira mostra resultados sobre nilpotência de $\chi(n, H)$ semelhantes aos obtidos por Gupta, Rocco e Sidki em [4] e estabelece uma estimativa para ordem de $\chi(n, H)$, quando H é um grupo abeliano.

O objetivo desta tese é estudar $\chi(H)$ quando H está na classe dos policíclicos e em particular a apresentação de $\chi(H)$ para H abeliano finitamente gerado. Analisamos $\chi(n, H)$, H na classe dos grupos abelianos ou perfeitos. Introduzimos e estudamos também o grupo $\mathcal{E}(H)$, dado por

$$\mathcal{E}(H) = \langle H,\ H^{\psi} \mid [\mathcal{D}, \mathcal{L}] = 1 \rangle$$

onde $\mathcal{D} = \mathcal{D}(H) = [H, H^{\psi}]$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(H) = [H, \psi]$, cujo núcleo do epimorfismo $\theta : \mathcal{E}(H) \to \chi(H)$ é abeliano.

O Capítulo I é dedicado à recapitulação de conceitos e resultados preliminares que serão utilizados no desenvolvimento subsequente da tese e de modo a facilitar as referências destacamos os principais resultados obtidos por Gupta, Rocco e Sidki em [4] e [19], sobre $\chi(H)$.

No Capítulo II, a fim de generalizar o resultado obtido por Blyth e Morse sobre $\nu(H)$, mostramos

Teorema 1: *Seja H um grupo policíclico por finito. Então $\chi(H)$ é policíclico por finito.*

Para alguns tipos de grupos H, Oliveira e Sidki dão em [11], uma apresentação do grupo $\chi(H)$ com um conjunto reduzido de relações $[h, h^\psi] = 1$. Especificamente, se $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ é um conjunto gerador do grupo H, e

$$S^n = \bigcup_{1 \leq k \leq n} \{x \mid x = a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k},\ i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_k,\ a_{i_j} \in S\},$$

consideram então o grupo

$$\hat{\chi}(H, S^n) = \left\langle H,\ H^\psi \mid [a, a^\psi] = 1,\ \forall a \in S^n \right\rangle$$

junto com o epimorfismo natural

$$\theta_n : \hat{\chi}(H, S^n) \to \chi(H).$$

Mostram no mesmo trabalho que $\hat{\chi}(H, S^2) = \chi(H)$, quando H é um grupo abeliano de ordem ímpar ou não abeliano de ordem p^3. Para o caso $H \cong \mathbb{Z}_2^3$ têm-se $\mathrm{Nuc}(\theta_2) \cong \mathbb{Z}^4$. Melhoramos estes resultados obtendo que $\chi(H) = \hat{\chi}(H, S^2)$ para H um grupo abeliano n-gerado, $n \geq 3$, tal que pelo menos $n-2$ de seus geradores têm ordem ímpar, e para H um grupo policíclico, com série policíclica de comprimento 2. Provamos também o

Teorema 2: *Seja $H = \mathbb{Z}_2^n$ com geradores $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Então o núcleo N do epimorfismo $\theta_{n-1} : \hat{\chi}(H, S^{n-1}) \mapsto \chi(H)$ é abeliano livre de posto no máximo $1 + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{i}$ se n é ímpar, e no máximo $1 + \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{i} + \frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}$ se n é par.*

No Capítulo III, estudamos o grupo $\chi(n, H)$. Encontramos alguns resultados quando H é perfeito e damos uma estimativa para a ordem de $\chi(n, H)$, para um grupo finito H qualquer. Em particular, quando H é um p-grupo abeliano elementar, p-ímpar, a estimativa é atingida. Para o caso $p = 2$ encontramos uma estimativa ainda menor.

Teorema 3: *Se H é um grupo finito, então $|\chi(n, H)|$ divide $|\chi(H)|^m |H|^{n-2m}$, onde $m = \binom{n}{2}$.*

Teorema 4: *Se H é um grupo perfeito então,*

i. $D_{i,j} = D_{k,s} \cong D, \ \forall\, 1 \leq i < j \leq n-1, \quad 1 \leq k < s \leq n-1;$

ii. $\chi(n, H) \cong D.H.H^{\psi} \cdots H^{\psi^{n-1}} \cong T_n(\tilde{H}).$

Aqui $T_n(\tilde{H})$ é um grupo que generaliza o grupo $T(\tilde{H})$ construído por Sidki em [19].

Vale salientar que ainda não se sabe se $\chi(H)$ está imerso em $\chi(n, H)$. Para contornar essa dificuldade, dado um grupo H e $\langle\psi\rangle$ um grupo cíclico de ordem n definimos, no Capítulo IV, o grupo

$$G^* = \left\langle H,\ \psi\ \mid\ [h^{\psi^i}, h^{\psi^j}] = \psi^n = 1,\ [D^*_{i,j}, H^{\psi^k}] = 1,\ i,\ j,\ k\ \in \{0, 1, \dots, n-1\},\ k \neq i, j \right\rangle$$

onde $D^*_{i,j} = [H^{\psi^i}, H^{\psi^j}]$. Consideramos então o subgrupo de G^*,

$$\chi^*(n, H) = \left\langle H, H^{\psi}, \dots, H^{\psi^{n-1}} \right\rangle.$$

Observamos que em $\chi^*(n, H)$ também ocorre a comutatividade fraca entre as cópias de H. Mostramos que para todo grupo H, $\chi(H)$ mergulha em $\chi^*(n, H)$ e, semelhantemente aos resultados sobre nilpotência de $\chi(n, H)$ obtidos por Oliveira [10], mostramos:

Teorema 5: *Se H é um grupo nilpotente de classe no máximo c, 2-gerado, então $\chi^*(n, H)$ é nilpotente de classe no máximo $c + 1$.*

Teorema 6: *Seja H um grupo m-gerado nilpotente de classe no máximo c tal que $m \geq 2$, $c \geq 1$. Então para $m \leq c + 2$, $\gamma_{c+3}(\chi^*(n, H)) = 1$.*

Teorema 7: *Seja H um grupo m-gerado nilpotente de classe no máximo c, com $m \geq 2$, $c \geq 1$. Então, para $m \geq c + 3$, $\gamma_{c+3}(\chi^*(n, H))$ é um 2-grupo abeliano elementar de posto no máximo*

$$\sum_{k=c+3}^{m} \binom{m}{k}\binom{n}{2}.$$

No Capítulo V construímos o grupo $\mathcal{E}(H)$ e mostramos alguns resultados semelhantes aos obtidos por Sidki em [19], conseguimos uma condição de finitude para $\mathcal{E}(H)$ e também obtemos resultados que dizem respeito da estrutura de $\mathcal{E}(H)$, no caso em que H é abeliano, policíclico ou perfeito.

Teorema 8: *Seja H um grupo. Então existe um epimorfismo*

$$\hat{\varepsilon} : \mathcal{E}(H) \to \mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(H/H') \cdot H.$$

Em particular, se H é abeliano, então $\mathrm{Nuc}(\hat{\varepsilon}) = \mathcal{L}'$.

Obtemos ainda que $\mathcal{L}'$ é um grupo abeliano finito se H é abeliano finito e, em particular, $\mathcal{L}' = 1$ se H é cíclico.

Teorema 9: *Seja H um grupo policíclico. Então $\mathcal{E}(H)$ é policíclico se, e somente se, H/H' é finito.*

Teorema 10: *Seja H um grupo finito. Então $\mathcal{E}(H)$ é finito se, e somente se, H é perfeito.*

Em particular, se H é um grupo perfeito mostramos que $\mathcal{E}(H) \cong \chi(H)$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, no intuito de facilitar a leitura do trabalho, fazemos uma breve revisão de alguns tópicos da Teoria de Grupos e alguns resultados preliminares sobre $\chi(H)$, sem demonstrações.

1.1 Subgrupos Comutadores

Sejam G um grupo e $x_1, x_2, \ldots$ elementos de G. O *conjugado* de x_1 por x_2 é $x_1^{x_2} := x_2^{-1}x_1x_2$, e o comutador de x_1 e x_2 nesta ordem é

$$[x_1, x_2] := x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2 (= x_1^{-1}x_1^{x_2}).$$

O comutador simples de peso n é definido indutivamente por $[x_1] := x_1$ e para $n \geq 2$,

$$[x_1, \ldots, x_n] := [[x_1, \cdots x_{n-1}], x_n].$$

Denotamos também

$$[x, ny] = [x, y_1, y_2, \ldots, y_n], \text{ tal que } y = y_1 = \ldots = y_n$$
$$[x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots y_m] = \big[[x_1, x_2, \ldots, x_n], [y_1, y_2, \ldots y_m]\big]$$

As demonstrações a seguir nesta seção, podem ser encontradas em [13].

Proposição 1.1.1. *Sejam x, y e z elementos de um grupo. Então*

(i) $[x, y] = [y, x]^{-1} = [x, y^{-1}]^{-y} = [x^{-1}, y]^{-x}$*;*

(ii) $[xy, z] = [x, z]^y[y, z]$ *;* $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$*;*

(iii) $[x, y]^z = [x, y][x, y, z] = [x^z, y^z]$*;*

(iv) $[x, y^{-1}, z]^y[y, z^{-1}, x]^z[z, x^{-1}, y]^x = 1$*; (identidade de Hall-Witt)* *equivalente a* $[z, [x, y]] = [z, y^{-1}, x^z]^y[z, x^{-1}, y^{-1}]^{xy}$.

Sejam X e Y subconjuntos não vazios de um grupo G. O *subgrupo comutador* de X e Y, indicado por $[X, Y]$ é, por definição, o subgrupo de G gerado por todos os comutadores $[x, y]$, com x em X e y em Y.

Em símbolos,

$$[X, Y] := \langle [x, y] \mid x \in X, y \in Y \rangle.$$

Notemos que $[X, Y] = [Y, X]$.

Se $H_1, H_2, \ldots, H_n, K$ são subgrupos do grupo G, então definimos $[H_1, H_2, \ldots H_n] = [[H_1, \ldots, H_{n-1}], H_n]$. Em particular, denotamos $[H, nK] = [H, K_1, \ldots, K_n]$ com $K_i = K,\ 1 \leq i \leq n$.

O subgrupo comutador de G é $[G, G]$, que é também chamado de subgrupo derivado de G e denotado por G'.

Definimos a série derivada de G que é obtida tomando sucessivos subgrupos derivados. Ou seja, $G^{(0)} = G, G^{(1)} = G', G^{(2)} = (G')'$, e em geral $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$.

Definição 1.1.1. Se G é um grupo e H um subgrupo de G, então dizemos que H é característico em G se $\alpha(H) = H$ para todo automorfismo $\alpha : G \to G$.

Lema 1.1.2. *Sejam* A *,* B *e* C *subgrupos de um grupo* G*. Então*

(i) Se A *e* B *são subgrupos normais (respectivamente característicos) em* G*, então* $[A, B]$ *é subgrupo normal (respectivamente característico) de* G*;*

(ii) $[A, B] \lhd \langle A, B \rangle$ *;*

(iii) Se existir um epimorfismo $\lambda : A \to B$*, então*

$$[A, \lambda] \lhd \langle A, B \rangle \qquad [A, \lambda]B = \langle A, B \rangle\,,$$

onde $[A, \lambda] = \left\langle a^{-1}a^{\lambda},\ a \in A \right\rangle$ *;*

(iv) Se $\alpha : G \to G_1$ *é homomorfismo então* $[A, B]^\alpha = [A^\alpha, B^\alpha]$*;*

(v) Se $B = \langle Y \rangle$ *então* $[A, B] = [A, Y]^B$*;*

(vi) *Se* $A = \langle X \rangle$ *e* $B = \langle Y \rangle$ *então* $[A, B] = [X, Y]^{\langle A,B \rangle}$;

(vii) *Se* N *é um subgrupo normal de* G *contendo* $[A, B, C]$ *e* $[B, C, A]$, *então* N *contém* $[C, A, B]$.

O item (vii) às vezes é chamado de Lema dos Três Subgrupos.

Definição 1.1.2. Seja G um grupo. Definimos os seguintes subgrupos de G indutivamente:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(G) &= G, \\
\gamma_2(G) &= [\gamma_1(G), G] = [G, G] = G', \\
\gamma_3(G) &= [\gamma_2(G), G], \\
&\vdots \\
\gamma_i(G) &= [\gamma_{i-1}(G), G].
\end{aligned}$$

A cadeia seguinte

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \ldots \geq \gamma_i(G) \geq \ldots$$

é dita *série central inferior* do grupo G.

Proposição 1.1.3. *Para todos* i *e* j, *inteiros positivos, temos:*

(i) $[\gamma_i(G), \gamma_j(G)] \leq \gamma_{i+j}(G)$;

(ii) $\gamma_i(\gamma_j(G)) \leq \gamma_{ij}(G)$.

.

Lema 1.1.4 (Congruência de Jacobi)**.** *Para todo* $x, y, z \in G$,

$$[x, y, z][y, z, x][z, x, y] \equiv 1 \ mod \ \gamma_2(\gamma_2(\langle x, y, z \rangle)).$$

Definição 1.1.3. Seja G um grupo. Definimos indutivamente:

$$\begin{aligned}
\zeta_0(G) &= 1 \\
\zeta_1(G) &= Z(G) \text{ e, para } i \geq 1,
\end{aligned}$$

$\zeta_i(G)$ é definido como sendo o único subgrupo de G tal que $\zeta_i(G)/\zeta_{i-1}(G) = Z(G/\zeta_{i-1}(G))$.

A cadeia

$$1 = \zeta_0(G) \leq \zeta_1(G) \leq \ldots \leq \zeta_i(G) \leq \ldots \tag{1.1.1}$$

é chamada *série central superior* de G.

Definição 1.1.4. Um grupo G é dito *nilpotente* se existe uma cadeia finita

$$1 = G_0 < G_1 < G_2 < \ldots < G_n = G$$

tal que

(i) $G_i \trianglelefteq G$;

(ii) $[G_i, G] \leq G_{i-1} \quad i = 0, \ldots, n-1.$

Uma tal cadeia é chamada *série central* de G. A classe de nilpotência de um grupo nilpotente G, $cl(G)$, é o comprimento da menor série central de G.

A proposição a seguir justifica os adjetivos *inferior* e *superior* das séries acima.

Proposição 1.1.5. *Seja $G = A_1 \geq A_2 \geq \ldots \geq A_{n+1} = 1$ uma série central de G. Então*

(i) $\gamma_i(G) \leq A_i \quad , \quad i = 1, \ldots, n+1;$

(ii) $A_{n+1-i} \leq \zeta_i(G) \quad , \quad i = 0, 1, \ldots, n.$

Colorário 1.1.6. *Em um grupo nilpotente G as séries centrais inferior e superior têm comprimento finito. Além disso, ambas as séries têm o mesmo comprimento e este número é a classe de nilpotência de G.*

Proposição 1.1.7. *Sejam G um grupo nilpotente de classe c e $H \leq G$. Então*

(i) H é nilpotente de classe menor ou igual a c;

(ii) Se $H \trianglelefteq G$ então G/H é nilpotente de classe menor ou igual a c.

As demonstrações dos resultados descritos nesta seção podem ser encontradas em [13].

1.2 Grupos Policíclicos

Um grupo G é chamado policíclico se ele possui uma cadeia finita

$$G = G_1 \geq G_2 \geq \ldots \geq G_n \geq G_{n+1} = 1$$

de subgrupos, tal que cada G_{i+1} é normal em G_i (série subnormal), e G_i/G_{i+1} é cíclico para todo $1 \leq i \leq n$. Tal cadeia de subgrupos é chamada uma série policíclica de G de comprimento n.

O teorema seguinte apresenta algumas propriedades de grupos policíclicos que podem ser encontradas em [18] e [13].

Teorema 1.2.1. *(i) Subgrupos e quocientes de grupos policíclicos são policíclicos;*

(ii) Grupos policíclicos são finitamente gerados;

(iii) Sejam G um grupo e N um subgrupo normal de G. Se N e G/N são policíclicos então G é policíclico;

(iv) Todo grupo nilpotente finitamente gerado é policíclico;

(v) Um grupo G é policíclico se, e somente se, é solúvel e todo subgrupo de G é finitamente gerado;

(vi) Se G tem uma série policíclica de comprimento n, então todo subgrupo de G pode ser gerado por n ou menos elementos.

Seja G um grupo policíclico. Nem toda série policíclica de G tem o mesmo comprimento. Entretanto, o número de quocientes infinitos em uma série policíclica é o mesmo para toda série. Esse numero é chamado número de Hirsch de G. É possível escolher a série policíclica de modo que todos os fatores infinitos venham após os fatores finitos. Veja Proposição 2 no Capítulo 1 de [18].

1.2.1 Apresentações policíclicas

Seja G um grupo policíclico com uma série policíclica $G = G_1 \geq \ldots \geq G_{n+1} = 1$. Como G_i/G_{i+1} é cíclico, existem elementos $x_i \in G$, tal que $G_i/G_{i+1} = \langle G_{i+1}x_i \rangle$ para todo índice i.

Definição 1.2.1. A sequência dos elementos $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ tal que $G_i/G_{i+1} = \langle G_{i+1}x_i \rangle$ para $1 \leq i \leq n$ é chamada uma sequência policíclica para G.

Note que na definição acima a ordem é importante e cada subsequência $X_i = \{x_i, \ldots, x_n\}$ é uma sequência policíclica para o subgrupo G_i.

Definição 1.2.2. Seja X uma sequência policíclica para um grupo policíclico G. A sequência $R(X) = \{r_1, \ldots, r_n\}$ definida por $r_i = [G_i : G_{i+1}]$, o índice de G_{i+1} em G_i, $r_i \in \mathbb{N} \cup \infty$, é chamada sequência de ordens relativas para X. Denotamos por $I(X) = \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid r_i \text{ é finito}\}$.

Pode-se provar que dado um grupo policíclico G com uma sequência policíclica $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ e ordem relativa $R(X) = \{r_1, \ldots, r_n\}$, todo elemento $g \in G$ pode ser escrito unicamente na forma

$$g = x^{e_1} \cdots x^{e_n}$$

onde $e_i \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq e_i \leq r_i$ se $r_i \neq \infty$. Tal expressão é chamada forma normal de g com respeito a X. Observe que $x_i^{ri} \in G_{i+1}$ e $x_k^{x_j} \in G_{j+1}$ para todo $0 \leq i \leq n$ e $0 \leq j \leq k \leq n$. Assim, podemos escrever G como um grupo gerado pelos elementos $x_1, \ldots, x_n$ sujeito às seguintes relações:

$$
\begin{aligned}
x_i^{s_i} &= x_{i+1}^{\alpha_{i,i+1}} \cdots x_n^{\alpha_{i,n}} \text{ para } 1 \leq i \leq n;\ r_i \leq s_i < \infty; \\
x_i^{x_j} &= x_{j+1}^{\beta_{i,j,j+1}} \cdots x_n^{\beta_{i,j,n}} \text{ para } 1 \leq j < i \leq n; \qquad (*) \\
x_i^{x_j^{-1}} &= x_{j+1}^{\gamma_{i,j,j+1}} \cdots x_n^{\gamma_{i,j,n}} \text{ para } 1 \leq j < i \leq n;\ s_j < \infty.
\end{aligned}
$$

As relações em $(*)$ são chamadas de relações policíclicas e a apresentação acima é denominada apresentação policíclica para G.

Podemos mostrar que $r_i \leq s_i$, para todo $i \in I$. Além disso, se considerarmos $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ com $s_i \in \mathbb{N} \cup \infty$, dizemos que essa apresentação policíclica é consistente se, e somente se, $S = R$. Portanto, todo grupo policíclico pode ser definido por uma apresentação policíclica consistente.

1.3 Grupos Livres e Produtos Livres

Definição 1.3.1. Um grupo F é dito *livre* sobre um conjunto $X \subseteq F$ se, para qualquer grupo G e qualquer função $\theta : X \to G$, existe um único homomorfismo $\theta' : F \to G$ tal que

$$\theta' x = \theta x \tag{1.3.1}$$

para todo $x \in X$. O cardinal $|X|$ é chamado o *posto* de F.

Substituindo a palavra "grupo"por "grupo abeliano"nos dois lugares em que ela aparece, obtemos o conceito de *grupo abeliano livre*. A construção de um grupo livre pode ser verificada em Johnson [5].

Proposição 1.3.1. *(i) Se F é livre sobre X, então X gera F;*

(ii) Grupos livres de mesmos postos são isomorfos;

(iii) Grupos livres de postos diferentes não são isomorfos.

Denotaremos por $F(X)$ o grupo livre sobre X.

Proposição 1.3.2. *Todo grupo é imagem homomorfa de algum grupo livre.*

Seja G um grupo e $\phi : F(X) \to G$ um epimorfismo do grupo livre $F = F(X)$ sobre G. Temos então que $F/N \cong G$, em que N é o núcleo de ϕ. Agora seja $R \subseteq F$ um conjunto que gera N como subgrupo normal de F, i.e., $\langle R\rangle^F = N$. Observamos que X e R determinam G (a menos de isomorfismos). Assim, escrevemos $G = \langle X|R\rangle$ e chamamos este par uma *apresentação livre*, ou simplesmente apresentação de G. Os elementos de X são os *geradores* e os de R, os *relatores*. Dizemos que G é finitamente apresentado se existe uma apresentação $G = \langle X|R\rangle$ em que X e R são finitos.

Teorema 1.3.3 (Teste de Substituição)**.** *Sejam G um grupo com apresentação $\langle X|R\rangle$, H um grupo arbitrário e $\theta : X \to H$ uma função. Então θ se estende a um homomorfismo $\theta' : G \to H$ se, e somente se, θ é consistente com os relatores de G, i.é., se para todo $x \in X$ e todo $r \in R$, o resultado da substituição de x por $\theta(x)$ em r dá a identidade de H.*

Proposição 1.3.4. *Se G e H são grupos com apresentações $\langle X|R\rangle$ e $\langle Y|S\rangle$ respectivamente, então o produto direto $G \times H$ tem apresentação*

$$\langle X, Y \mid R, S, [X, Y]\rangle.$$

Agora generalizamos a noção de grupos livres para produtos livres.

Definição 1.3.2. Sejam $\{A_i\}_{i\in I}$ uma família de grupos. Um *produto livre* dos A_i é um grupo P e uma família de homomorfismos $j_i : A_i \to P$ tal que, para todo grupo G e toda família de homomorfismos $f_i : A_i \to G$, existe um único homomorfismo $\varphi : P \to G$ com $\varphi j_i = f_i$, para todo $i \in I$.

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "j_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & P \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Proposição 1.3.5. *Sejam $\{A_i\}_{i\in I}$ uma família de grupos. Se P e Q são ambos produtos livres dos A_i, então $P \cong Q$.*

Por causa da proposição acima, vamos denotar o produto livre P de $\{A_i\}$ por

$$P = *_{i\in I} A_i.$$

No caso de uma família finita de grupos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, é comum escrever-se $A_1 * A_2 * \ldots * A_n$ para indicar o produto livre dos A_i.

Proposição 1.3.6. *Seja $G * H$ o produto livre de dois grupos não triviais. Então o subgrupo comutador $[G, H]$ é um grupo livre sobre o conjunto*

$$\{[g, h] \mid g \in G\backslash\{e\},\ h \in H\backslash\{e\}\}.$$

1.4 Comutatividade Fraca entre Grupos Isomorfos

Sejam H um grupo, $\psi : H \mapsto H^{\psi}$ um isomorfismo entre H e H^{ψ}. Definimos o grupo de comutatividade fraca por

$$\chi(H) = \left\langle H,\ H^{\psi} \mid [h, h^{\psi}] = 1 \right\rangle,$$

Além disso, destacamos os subgrupos de $\chi(H)$.

$$\begin{gathered} D = D(H) = [H, H^{\psi}],\ L = L(H) = [H, \psi] \\ W(H) = D(H) \cap L(H), \\ L_1(H) = [L, H],\ L_2(H) = [L, H^{\psi}], \\ R = R(H) = [H, L, H^{\psi}]. \end{gathered}$$

1.4.1 Resultados sobre $\chi(H)$

Em [19] e [4], Gupta, Rocco e Sidki mostraram os seguintes resultados a respeito de $\chi(H)$.

Lema 1.4.1. *Sejam h_1, h_2, h_3, $z_i \in H$. Então,*

(i) $[h_1, h_2^{\psi}] = [h_1^{\psi}, h_2]$;

(ii) $[h_1, \psi]$ *comuta com* $[h_2, {h_3}^{\psi}]$;

(iii) $[h_1, h_2^{\psi}]^{w(z_1^{\epsilon_1}, z_2^{\epsilon_2}, \cdots, z_n^{\epsilon_n})} = [h_1, h_2^{\psi}]^{w(z_1, z_2, \cdots, z_n)}$ $\epsilon_k \in \{1, \psi\}$;

(iv) $[h_1, {h_2}^{\psi}] = [\psi, h_2, h_1][h_1, h_2]$;

(v) $[h_1, h_2^{\psi}]^{h_3} \equiv [h_1^{h_3}, (h_2^{h_3})^{\psi}]$ *mod* $R(H)$;

(vi) ψ *centraliza* D;

(vii) D *centraliza* L;

(viii) $[H, H^{\psi}, H^{\epsilon_1}, \ldots, H^{\epsilon_n}] = [H, (n+1)H^{\psi}]$ $\forall n \geq 1,\ \epsilon_i \in \{1, \psi\}$;

(ix) W *é central em* D, *e consiste de elementos de* $\chi(H)$ *da forma* $[h_1, h_2^{\psi}] \ldots [h_{2k-1}, h_{2k}^{\psi}]$, *onde,* $[h_1, h_2] \ldots [h_{2k-1}, h_{2k}] = 1$;

(x) $[W, H] \subseteq R \subseteq W$.

Proposição 1.4.2. *Segue o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & \chi(H) \arrow[d, "H/H'"] \arrow[ddl, bend right, "H\times H"'] \arrow[ddr, bend left, "H"] & \\
 & DL \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
D \arrow[dr] & & L \arrow[dl] \\
 & W \arrow[d] & \\
 & 1 &
\end{tikzcd}$$

de subgrupos de $\chi(H)$.

Ressaltamos aqui o caso H abeliano, pois relacionaremos essa condição, à alguns resultados futuros. Primeiro, se H é um p-grupo abeliano finito , onde p é um numero primo, temos uma diferença entre os casos $p = 2$ e p ímpar. Por exemplo, se H é um p-grupo abeliano elementar de posto k, então

$$|\chi(H)| = \begin{cases} p^{\frac{k(k-1)}{2}} p^{2k}, & p \text{ ímpar} \\ 2^{2^k - 1} 2^k, & p = 2. \end{cases}$$

Teorema 1.4.3. *Seja H um grupo abeliano. Então,*

(i) $D = W = [L, H],\ R = [D, H] = [L, 2H]$;

(ii) L *é nilpotente de classe* $\leq 2,\ \ L' \subseteq D \subseteq Z(D),\ \ L' \subseteq Z(\chi)$;

(iii) $L' = D^2 = [H^2, H^\psi],\ \ R^2 = 1.$

Em [19] Sidki considera H um grupo, e $\tilde{H}$ algum recobrimento de H de modo que existe um subgrupo Z de $\tilde{H}$, tal que

$$Z \leq \tilde{H}' \cap Z(\tilde{H}) \quad \text{e} \quad \tilde{H}/Z \cong H,$$

isto é $(Z|\tilde{H})$ é uma extensão tronco de H. Define-se então

$$\tilde{T} = \tilde{H} \times \tilde{H} \times \tilde{H},$$

$$\tilde{\psi} \in \mathrm{Aut}(\tilde{T}) \text{ tal que, } \tilde{\psi} : (a_1, a_2, a_3) \mapsto (a_3, a_2, a_1),$$

$$\tilde{H}_1 = \left\langle (h, h, 1) \mid h \in \tilde{H} \right\rangle, \ \tilde{H}_2 = \tilde{H}_1{}^{\tilde{\psi}},$$

$$Z_1 = \langle (z, z, 1) \mid z \in Z \rangle, \ Z_2 = Z_1{}^{\tilde{\psi}},$$

$$\tilde{G} = \left\langle \tilde{H}_1, \ \tilde{H}_2 \right\rangle,$$

$$T(\tilde{H}) = \tfrac{\tilde{G}}{Z_1 Z_2},$$

$$H_1 = \tfrac{\tilde{H}_1 Z_2}{Z_1 Z_2}, \ H_2 = \tfrac{\tilde{H}_2 Z_1}{Z_1 Z_2}.$$

Logo

$$T(\tilde{H}) = \langle H_1, \ H_2 \rangle,$$
$$H \cong H_1 \cong H_2, \quad \text{já que } H_i = \tfrac{\tilde{H}_i Z_1 Z_2}{Z_1 Z_2} = \tfrac{\tilde{H}_i}{H_i \cap Z_1 Z_2} = \tfrac{\tilde{H}_i}{Z_i} \cong H.$$

Observe que se $Z = 1$, então o grupo $T(H)$ é um subgrupo de $H \times H \times H$. Mostra-se o seguinte teorema para H um grupo perfeito.

Teorema 1.4.4 (Sidki)**.** *Seja H um grupo perfeito. Então existe um único grupo de recobrimento universal $\tilde{H}$, de H, tal que $\chi(H) \cong T(\tilde{H})$. Além disso $D \cong \tilde{H}$*

O grupo $\tilde{H}$ no Teorema 1.4.4 é uma extensão tronco maximal de H, isto é, todas as extensões tronco maximais de H são isomorfas.

Capítulo 2

Sobre $\chi(H)$

2.1 H policíclico por finito

Na classe dos grupos policíclicos que são finitos ou nilpotentes finitamente gerados, χ funciona como um operador, pois no trabalho de Gupta, Rocco e Sidki [4], mostra-se que sendo H um grupo nilpotente finitamente gerado, então $\chi(H)$ é nilpotente finitamente gerado e em [19] Sidki mostra que se H é solúvel então $\chi(H)$ é solúvel.

Para o caso mais geral de um grupo policíclico por finito H qualquer, uma condição necessária e suficiente para que $\chi(H)$ seja policíclico por finito é que o subgrupo $W(H)$ de $\chi(H)$ seja finitamente gerado, pois em [19], Sidki mostra que $\frac{\chi(H)}{W(H)} \cong T(H)$.

O objetivo desta seção é provar que $W(H)$ é finitamente gerado se H é policíclico por finito.

Consideremos $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(H)$, o ideal de aumento do anel de grupo $\mathbb{Z}(H)$.

Seja $\tilde{G} = \mathbb{Z}(H) \cdot H$, o produto semi direto de $\mathbb{Z}(H)$ por H, em que H age sobre $\mathbb{Z}(H)$ por multiplicação à direita

$$(\sum x_h h)^{h_1} = \sum x_h h h_1$$

Seja $G = \mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(H) \cdot H$, subgrupo de $\tilde{G}$. Defina $u = (1,1) \in \tilde{G}$ e considere

$$[H, u] = \langle [h, u], \quad h \in H \rangle,$$

subgrupo de $\tilde{G}$.

Observe que

$$\begin{aligned} [h, u] &= h^{-1} h^u \\ &= u^{-h} u \in \mathbb{Z}(H), \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Passando a última equação para a notação aditiva em $\mathbb{Z}(H)\cdot H$

$$[h,u]=(-h+1,1)$$

Portanto $[H,u]=\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(H)$ e $G=\langle H,\ H^u\rangle$.

Agora a relação $[h,h^u]=1$ é equivalente à relação $[u,h,h]=1$, que em notação aditiva temos

$$[u,h,h]=((h-1)^2,1).$$

Consideremos então o subgrupo normal $N=\langle((h-1)^2,1);\ h\in\ H\rangle^{\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(H)\cdot H}$ de $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(H)\cdot H$.

Observemos que

$$\begin{aligned} ((h_1-1)^2,1)^{(h_2-1,h_3)} &= (h_2-1,h_3)^{-1}((h_1-1)^2,1)(h_2-1,h_3) \\ &= (-(h_2-1)h_3,h_3^{-1})((h_1-1)^2,1)(h_2-1,h_3) \\ &= (-(h_2-1)h_3+(h_1-1)^2h_3,h_3^{-1})(h_2-1,h_3) \\ &= (-(h_2-1)h_3+(h_1-1)^2h_3+(h_2-1)h_3^{-1},1) \\ &= ((h_1-1)^2h_3,1) \qquad (2.1.2) \end{aligned}$$

Além disso, para todos $h,\ h'\in H$

$$(h-1)^2h'=(h-1)^2(h'-1)+(h-1)^2. \qquad (2.1.3)$$

Logo $N=I\cdot 1$, onde $I=\langle(h-1)^2h'\ ;\ h,\ h'\in H\rangle\lhd\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(H)$.

Agora a aplicação

$$\epsilon: H\cup H^{\psi}\to\frac{\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(H)\cdot H}{N}$$

definida por $h^{\epsilon}=N(0,h)$ e $(h^{\psi})^{\epsilon}=N(o,h)^u,\ \ \forall h\ \in H$, preserva a relações de $\chi(H)$, estendendo-se à um epimorfismo

$$\hat{\epsilon}:\chi(H)\to\frac{\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(H)\cdot H}{N}.$$

Por Sidki [19, Teorema 2.2.1], $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(H)\cdot H\cong\left\langle H,\ H^{\psi}\mid\ [H,\psi]'=1\right\rangle$. Logo $\mathrm{Nuc}(\hat{\epsilon})=L'$.

Como $\chi(H)=L\cdot H$ e $L^{\epsilon}=\frac{\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(H)\cdot 1}{N}\cong\frac{\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(H)}{I}$, então $\frac{L}{L'}\cong\frac{\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(H)}{I}$.

Agora $I=\langle(h-1)^2h'\ ;\ h,\ h'\in H\rangle$ é um ideal de $\mathbb{Z}(H)$. Logo $\frac{\mathbb{Z}(H)}{I}=<I+h\mid h\in H>$. Supondo $S=\{a_1,\ldots,a_n\}$ e $H=\langle S\rangle$ então para todos $a_i,\ a_j\in S$ seguem as equações, mod I:

$$\begin{aligned}
(a_i - 1)^2 &= 0; \\
a_i^2 &= 2a_i - 1; \\
a_i^k &= ka_i - (k-1); \ \forall\, k \in \mathbb{N} \\
a_i^{-1} &= 2 - a_i; \\
(a_j a_i)^{-1} &= 2 - a_j a_i; \\
a_i^{-1} a_j^{-1} &= (2 - a_i)(2 - a_j) = a_i a_j - 2a_i - 2a_j + 4; \\
a_j a_i &= -a_i a_j + 2a_j + 2a_i - 2.
\end{aligned}$$

Dessas equações resulta que $\{I + a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_s} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots i_s \leq n\}$ é uma base de $\frac{\mathbb{Z}(H)}{I}$. Portanto $\frac{\mathcal{A}(H)}{I}$ é um grupo abeliano finitamente gerado. Provamos portanto o lema seguinte.

Lema 2.1.1. *Para todo grupo H,*

$$\frac{\chi(H)}{L'} \cong \frac{\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(H) \cdot H}{I \cdot 1},$$

onde $I = \langle (h-1)^2 \ ; \ h \in H \rangle$ e um ideal de $\mathbb{Z}(H)$. Além disso, se H é um grupo finitamente gerado, então $\frac{L}{L'}$ também é finitamente gerado.

Teorema 2.1.2. *Seja H um grupo policíclico por finito. Então $\chi(H)$ é policíclico por finito.*

Demonstração. Temos o seguinte diagrama de subgrupos de $\chi(H)$.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \chi(H) \arrow[ddll, bend right, "H\times H"'] \arrow[d, "H/H'"'] \arrow[dd, bend left, "H"] \\
 & & DL \arrow[dll] \arrow[d] \\
D \arrow[dd] & & L \arrow[ddll] \arrow[d] \\
 & & L'W \arrow[ddl] \arrow[d] \\
W \arrow[dr] & & L' \arrow[dl] \\
 & W \cap L' \arrow[d] & \\
 & 1 &
\end{tikzcd}
$$

Primeiro temos

$$\frac{H}{H'} \cong \frac{\chi(H)}{DL} \cong \frac{\frac{\chi(H)}{D}}{\frac{DL}{D}}, \tag{2.1.4}$$

e como

$$\frac{\chi(H)}{D} \cong H \times H, \tag{2.1.5}$$

segue então de 2.1.4 e 2.1.5 que

$$\frac{DL}{D} \cong \frac{L}{W} \cong H' \cdot H.$$

Logo, sendo H policíclico por finito, $\frac{L}{W}$ é policíclico por finito e, portanto, seu subgrupo $\frac{L'}{L'\cap W} \cong \frac{L'W}{W}$ também o é. Além disso, pelo Lema 2.1.1, $\frac{L}{L'}$ é abeliano finitamente gerado. Segue então que $\frac{L}{L'\cap W} \cong \frac{L}{L'} \cdot \frac{L'}{L'\cap W}$ é policíclico por finito.

Agora, como $L'\cap W \leq L' \cap Z(L)$, por Schur [7, Proposição 2.1.7], $W \cap L'$ é isomorfo a um subgrupo do Multiplicador de Schur de $\frac{L}{L'\cap W}$. Por Stambach [20], como $\frac{L}{L'\cap W}$ é finitamente apresentado, já que é policíclico por finito, então $M(\frac{L}{L'\cap W})$ é finitamente gerado. Logo $L'\cap W$ é finitamente gerado. Como $\frac{W}{W\cap L'} \cong \frac{L'W}{L'}$ e $\frac{L'W}{L'} \leq \frac{L}{L'}$ é finitamente gerado, então W também é finitamente gerado.

$\square$

Considerando $\mathcal{P}$ uma propriedade de grupos fechada para subgrupos, quocientes e extensões, tal que todo grupo abeliano finitamente gerado tem $\mathcal{P}$, H um grupo que tem $\mathcal{P}$ finitamente apresentado, tal que H' também seja finitamente apresentado, então com demonstração idêntica, o teorema anterior pode ser generalizado mostrando-se que $\chi(H)$ têm a propriedade $\mathcal{P}$. De modo particular, se H é policíclico então $\chi(H)$ é policíclico.

Em [1], Blyth e Morse mostram que o grupo definido por Rocco [14]

$$\nu(H) = \left\langle H, H^{\psi} \mid [h_1, h_2^{\psi}]^{h_3^{\psi}} = [h_1, h_2^{\psi}]^{h_3} = [h_1^{h_3}, (h_2^{h_3})^{\psi}] \right\rangle$$

é policíclico se H é policíclico. Como $R(H) \leq W(H)$ e por Rocco [15, Teorema 2.11] $\frac{\chi(H)}{R(H)} \cong \frac{\nu(H)}{\Delta(H)}$, em que $\Delta(H) = \langle [h, h^{\psi}] \mid h \in H \rangle$ é abeliano finitamente gerado, então $\nu(H)$ é policíclico por finito se H é policíclico por finito, generalizando o resultado de Blyth e Morse. Segue também que o subgrupo $[H, H^{\psi}]$ de $\nu(H)$, isomorfo ao quadrado tensorial não abeliano $H \otimes H$, é policíclico por finito se H é policíclico por finito.

Agora, de modo mais específico, vamos mostrar que $\chi(H) \cong \frac{\nu(H)}{\Delta(H)}$ se H é um grupo policíclico com série policíclica de comprimento igual a 2.

Proposição 2.1.3. *Sejam H um grupo e T um transversal de H/H'. Então,*

$$R(H) = \left\langle [h_1, h_2^{\psi}]^{h_3} [{h_1}^{h_3}, ({h_2}^{h_3})^{\psi}]^{-1} \mid h_1,\ h_2,\ h_3\ \in H \right\rangle^{T}.$$

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que

$$R(H) = \left\langle [h_1, h_2^{\psi}]^{h_3} [{h_1}^{h_3}, ({h_2}^{h_3})^{\psi}]^{-1} \mid h_1,\ h_2,\ h_3\ \in H \right\rangle^{\chi(H)}.$$

Seja

$$J(H) = \left\langle [h_1, h_2^{\psi}]^{h_3} [{h_1}^{h_3}, ({h_2}^{h_3})^{\psi}]^{-1} \mid h_1,\ h_2,\ h_3\ \in H \right\rangle^{\chi(H)}.$$

Temos que $J(H) \leq R(H)$ pois, pelo Lema 1.4.1 (v),

$$[h_1, h_2^{\psi}]^{h_3} [{h_1}^{h_3}, ({h_2}^{h_3})^{\psi}]^{-1} \in R(H).$$

Por Rocco [15, Teorema 2.11] o epimorfismo $\varepsilon : \chi(H) \longrightarrow \frac{\nu(H)}{\Delta(H)}$ dado por $h \mapsto \Delta(H)h$, $h^{\psi} \mapsto \Delta(H)h^{\psi}$, $\forall h \in H$ têm núcleo $R(H)$. Logo ε induz $\bar{\varepsilon} : \frac{\chi(H)}{J(H)} \longrightarrow \frac{\nu(H)}{\Delta(H)}$. Por outro lado a aplicação $\varsigma : \frac{\nu(H)}{\Delta(H)} \longrightarrow \frac{\chi(H)}{J(H)}$ tal que $\Delta(H)h \mapsto J(H)h$, $\Delta(H)h^{\psi} \mapsto J(H)h^{\psi}$ estende-se a um epimorfismo $\bar{\varsigma} : \frac{\nu(H)}{\Delta(H)} \longrightarrow \frac{\chi(H)}{J(H)}$, já que

$$\frac{\nu(H)}{\Delta(H)} = \left\langle H, H^{\psi} \mid [h, h^{\psi}] = 1\ ,\ [h_1, h_2^{\psi}]^{h_3} = [{h_1}^{h_3}, ({h_2}^{h_3})^{\psi}] = [h_1, h_2^{\psi}]^{h_3^{\psi}},\ \forall h,\ h_1\, h_2,\ h_3 \in H \right\rangle$$

e as relações

$$[h_1, h_2^{\psi}]^{h_3^{\psi}} = [h_1, h_2^{\psi}]^{h_3} = [{h_1}^{h_3}, (h_2^{h_3})^{\psi}], \quad [h, h^{\psi}] = 1, \ \forall h, \ h_1, \ h_2, \ h_3 \in H$$

seguem em $\frac{\chi(H)}{J(H)}$. Agora como $\bar{\varsigma}\bar{\varepsilon}$ é a identidade em $\frac{\chi(H)}{J(H)}$, então $R(H) = J(H)$.

Agora temos que $R(H) \leq D(H)$, então pelo Lema 1.4.1 (iii),

$$R(H) = \left\langle [h_1, h_2^{\psi}]^{h_3}[{h_1}^{h_3}, ({h_2}^{h_3})^{\psi}]^{-1} \mid h_1, \ h_2, \ h_3 \ \in H \right\rangle^{H}$$

Além disso, novamente pelos itens (iii) e (x) do Lema 1.4.1,

$$[R(H), H'] = [R(H), [H, H^{\psi}]] = 1.$$

Portanto

$$R(H) = \left\langle [h_1, h_2^{\psi}]^{h_3}[{h_1}^{h_3}, ({h_2}^{h_3})^{\psi}]^{-1} \mid h_1, \ h_2, \ h_3 \ \in H \right\rangle^{T}.$$

□

Proposição 2.1.4. *Sejam H um grupo policíclico com sequência policíclica $S = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ e T um transversal de H/H'. Então*

$$R(H) = \left\langle [a_i, a_j^{\psi}]^{a_k}[{a_i}^{a_k}, ({a_j}^{a_k})^{\psi}]^{-1} \mid a_i, \ a_j, \ a_k \ \in S \right\rangle^{T}.$$

Demonstração. Como $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ é um conjunto gerador de H, por um resultado de A. McDermott [8, Teorema 2.2.8], o subgrupo

$$K = \left\langle [h_1, h_2^{\psi}]^{h_3}[{h_1}^{h_3}, ({h_2}^{h_3})^{\psi}]^{-1} \mid h_1, \ h_2, \ h_3 \ \in H \right\rangle^{H * H^{\psi}}$$

do produto livre $H * H^{\psi}$ é igual a

$$J = \left\langle [a_i, a_j^{\psi}]^{a_k}[{a_i}^{a_k}, ({a_j}^{a_k})^{\psi}]^{-1} \mid a_i, \ a_j, \ a_k \ \in S \right\rangle^{H * H^{\psi}}.$$

Assim, se $\phi : H * H^{\psi} \mapsto \chi(H)$ é o epimorfismo natural, temos que

$$\begin{aligned} \phi(J) = R(H) &= \left\langle [a_i, a_j^{\psi}]^{a_k}[{a_i}^{a_k}, ({a_j}^{a_k})^{\psi}]^{-1} \mid a_i, \ a_j, \ a_k \ \in S \right\rangle^{\chi(H)} \\ &= \left\langle [a_i, a_j^{\psi}]^{a_k}[{a_i}^{a_k}, ({a_j}^{a_k})^{\psi}]^{-1} \mid a_i, \ a_j, \ a_k \ \in S \right\rangle^{T}, \quad \text{(pela Proposição 2.1.3).} \end{aligned}$$

□

Proposição 2.1.5. *Seja H um grupo policíclico com sequência policíclica $S = \{a_1, a_2\}$. Então $R(H) = 1$, isto é, $\chi(H) \cong \frac{\nu(H)}{\Delta(H)}$.*

Demonstração. Temos que $S = \{a_1,\ a_2\}$ é um conjunto gerador de H, e

$$R(H) = \left\langle [a_i, a_j^{\psi}]^{a_k}[a_i{}^{a_k}, (a_j{}^{a_k})^{\psi}]^{-1} \mid a_i,\ a_j,\ a_k \in S \right\rangle^T,$$

pela Proposição 2.1.4, onde T é um transversal de H/H'.

Mas em $\chi(H)$,

$$\begin{aligned} [a_1, a_2{}^{\psi}]^{a_1} &= [a_1{}^{\psi}, a_2]^{a_1} \\ &= [a_1{}^{\psi}, a_2^{a_1}] \\ &= [a_1{}^{a_1}, (a_2^{a_1})^{\psi}]. \end{aligned}$$

Analogamente

$$[a_1, a_2{}^{\psi}]^{a_2} = [a_1{}^{a_2}, (a_2^{a_2})^{\psi}]$$

e portanto $R(H) = 1$. □

2.2 Redução da apresentação de $\chi(H)$

Em [11], Oliveira e Sidki introduzem uma variação do grupo $\chi(H)$ em que nesta nova versão suas relações são apenas em termos dos geradores de H, isto é, um grupo com menos relações. Para isto consideram S, um conjunto gerador do grupo H, e

$$S^n = \bigcup_{1 \le k \le n} \{x \mid x = a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k},\ i_1 \ne i_2 \ne \ldots \ne i_k,\ a_{i_j} \in S, \}.$$

Define-se então, para todo $n \geq 1$, o grupo

$$\hat{\chi}(H, S^n) = \left\langle H,\ H^{\psi} \mid [a, a^{\psi}] = 1,\ \forall a \in S^n \right\rangle.$$

É claro que a aplicação

$$\theta_n : \hat{\chi}(H, S^n) \longrightarrow \chi(H) \text{ tal que } h^{\theta} = h,\ (h^{\psi})^{\theta} = h^{\psi}$$

é um epimorfismo. Analisamos nesta seção o núcleo de θ_n quando H é abeliano, e alguns casos em que θ_n é um isomorfismo.

Proposição 2.2.1. *Seja H um grupo policíclico com sequência policíclica $S = \{a_1, a_2\}$. Então $\chi(H) = \hat{\chi}(H, S^2)$.*

Demonstração. Em $\hat{\chi}(H, S^2)$ ocorrem as relações $[a_1, a_1{}^{\psi}] = [a_2, a_2{}^{\psi}] = [a_1a_2, a_1a_2{}^{\psi}] = 1$. Basta mostrar que $[a_1{}^m a_2{}^n, (a_1{}^m a_2{}^n)^{\psi}] = 1$, $\forall m,\ n\ \in \mathbb{Z}$. Mas,

$$\begin{aligned} [a_1{}^m a_2{}^n, (a_1{}^m a_2{}^n)^{\psi}] &= [a_1{}^m, (a_1{}^m a_2{}^n)^{\psi}]^{a_2{}^n}[a_2{}^n, (a_1{}^m a_2{}^n)^{\psi}] \\ &= [a_1{}^m, (a_2{}^n)^{\psi}]^{a_2{}^n}[a_1{}^m, (a_1{}^m)^{\psi}]^{(a_1{}^m)^{\psi}a_2{}^n}[a_2{}^n, (a_2{}^n)^{\psi}][a_2{}^n, (a_1{}^m)^{\psi}]^{(a_2{}^n)^{\psi}} \\ &= [(a_1{}^m)^{a_2{}^n}, (a_2{}^n)^{\psi}][a_2{}^n, ((a_1{}^m)^{(a_2{}^n)})^{\psi}] \qquad (2.2.1) \end{aligned}$$

Suponhamos que $1 = H_3 \lhd H_2 \lhd H_1 = H$ é uma série policíclica de H tal que $H_i/H_{i+1} = \langle H_{i+1}a_i \rangle$, então para todos $m,\ n\ \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} (a_2{}^n)^{a_1{}^{-m}} &= a_2{}^k, \quad \text{para algum } k\ \in \mathbb{Z}, \text{ já que } H_2 \lhd H_1 = H, \text{e} \\ (a_1{}^m)^{a_2{}^n} &= a_2{}^{k-n}a_1{}^m. \qquad (2.2.2) \end{aligned}$$

Logo, por 2.2.1 e 2.2.2,

$$\begin{aligned} [a_1{}^m a_2{}^n, (a_1{}^m a_2{}^n)^{\psi}] &= [a_2{}^{k-n}a_1{}^m, (a_2{}^n)^{\psi}][a_2{}^n, (a_2{}^{k-n}a_1{}^m)^{\psi}] \\ &= [a_1{}^m, (a_2{}^n)^{\psi}][a_2{}^n, (a_1{}^m)^{\psi}]. \end{aligned}$$

Mostraremos que ψ move-se no ultimo comutador. Primeiro, para $m = n = 1$, temos

$$\begin{aligned} 1 &= [a_1a_2, (a_1a_2)^{\psi}] \\ &= [a_1, a_2^{\psi}][a_2, a_1^{\psi}]. \qquad (2.2.3) \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} [a_1, (a_2^2)^{\psi}] &= [a_1, a_2^{\psi}][a_1, a_2^{\psi}]^{a_2^{\psi}} \\ &= [a_1, a_2^{\psi}][a_1^{\psi}, a_2]^{a_2^{\psi}} \quad (\text{por } 2.2.3) \\ &= [a_1, a_2^{\psi}][(a_1^{a_2})^{\psi}, a_2] \\ &= [a_1, a_2^{\psi}][(a_2{}^{k-1}a_1)^{\psi}, a_2] \quad (\text{por } 2.2.2) \\ &= [a_1, a_2^{\psi}][(a_2{}^{k-1})^{\psi}, a_2]^{a_1^{\psi}}[a_1{}^{\psi}, a_2] \\ &= [a_1, a_2^{\psi}]^2. \end{aligned}$$

Por indução sobre i,

$$\begin{aligned} [a_1, (a_2^{i+1})^{\psi}] &= [a_1, a_2^{i\,\psi}][a_1, a_2^{\psi}]^{a_2^{i\,\psi}} \\ &= [a_1, a_2^{\psi}]^i[a_1^{\psi}, a_2]^{a_2^{i\,\psi}} \quad (\text{hipótese de indução e } 2.2.3) \\ &= [a_1, a_2^{\psi}]^i[a_1{}^{a_2^{i\,\psi}}, a_2] \\ &= [a_1, a_2^{\psi}]^i[(a_2{}^{l-i}a_1)^{\psi}, a_2] \quad (\text{por } 2.2.2) \\ &= [a_1, a_2^{\psi}]^i[(a_2{}^{l-i})^{\psi}, a_2]^{a_1^{\psi}}[a_1{}^{\psi}, a_2] \\ &= [a_1, a_2^{\psi}]^{i+1}. \qquad (2.2.4) \end{aligned}$$

Analogamente mostramos que $[a_1^{\psi}, a_2{}^i] = [a_1, a_2^{\psi}]^i$. Agora, $[a_1, a_2^{-\psi}] = [a_1, a_2^{\psi}]^{-a_2^{-\psi}} = [a_1, a_2^{\psi}]^{-1}$.

Portanto, $[a_1, (a_2{}^i)^{\psi}] = [a_1^{\psi}, a_2{}^i] = [a_1, a_2^{\psi}]^i$, $\forall\, i \in \mathbb{Z}$. Resta mostrar que $[a_1^j, (a_2{}^i)^{\psi}] = [(a_1^j)^{\psi}, a_2{}^i]$, $\forall\, i,\, j\, \in \mathbb{Z}$. Mas,

$$\begin{aligned}
[a_1^2, (a_2^j)^{\psi}] &= [a_1, (a_2^j)^{\psi}]^{a_1}[a_1, (a_2^j)^{\psi}] \\
&= [a_1^{\psi}, (a_2^j)^{a_1}][a_1, (a_2^j)^{\psi}] \quad \text{(por 2.2.4)} \\
&= [a_1^{\psi}, a_2^k][a_1, (a_2^j)^{\psi}], \quad k \in \mathbb{Z} \text{ (pois } H_2 \lhd H_1) \\
&= [a_1, a_2^{\psi}]^{k+j}, \quad \text{(por 2.2.4)}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
[(a_1^2)^{\psi}, a_2^j] &= [a_1^{\psi}, a_2^j]^{a_1^{\psi}}[a_1^{\psi}, a_2^j] \\
&= [a_1^{\psi}, (a_2^j)^{a_1}][a_1, a_2^{j\,\psi}] \\
&= [a_1^{\psi}, a_2^k][a_1, (a_2^j)^{\psi}], \quad k \in \mathbb{Z} \text{ (pois } H_2 \lhd H_1) \\
&= [a_1, a_2^{\psi}]^{k+j} \quad \text{(por 2.2.4)} \\
&= [a_1^2, a_2^{j\,\psi}].
\end{aligned}$$

Agora, por indução sobre i,

$$\begin{aligned}
[(a_1^{i+1})^{\psi}, a_2^j] &= [(a_1^i)^{\psi}, a_2^j]^{a_1^{\psi}}[a_1^{\psi}, a_2^j] \\
&= [a_1^i, (a_2^{j\,a_1})^{\psi}][a_1, (a_2^j)^{\psi}] \\
&= [a_1^i, (a_2^k)^{\psi}][a_1, (a_2^j)^{\psi}], \quad \text{para algum } k \in \mathbb{Z} \text{ (pois } H_2 \lhd H_1).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
[(a_1^{i+1}), a_2^{j\,\psi}] &= [a_1^i, (a_2^j)^{\psi}]^{a_1}[a_1, (a_2^j)^{\psi}] \\
&= [(a_1^i)^{\psi}, a_2^j]^{a_1}[a_1, (a_2^j)^{\psi}] \quad \text{(por indução sobre } i) \\
&= [(a_1^i)^{\psi}, (a_2^{j\,a_1})][a_1, (a_2^j)^{\psi}] \\
&= [a_1^{i\,\psi}, (a_2^k)][a_1, a_2^{j\,\psi}] \\
&= [(a_1^{i+1})^{\psi}, a_2^j].
\end{aligned}$$

Como $[a_1^{-1}, a_2^{\psi}] = [a_1, a_2^{\psi}]^{-a_1{}^{-1}} = [a_1, a_2^{\psi}]^{-1}$, segue que $[(a_1^i), (a_2^j)^{\psi}] = [(a_1^i)^{\psi}, a_2^j]$, $\forall\, i,\, j\, \in \mathbb{Z}$ □

2.2.1 H abeliano

Nesta subseção vamos considerar H um grupo abeliano. Generalizamos aqui alguns resultados obtidos por Oliveira e Sidki em [11].

Lema 2.2.2 (Oliveira e Sidki, [11]). *Seja H um grupo. Suponhamos que*

$$[x, x^{\psi}] = 1 = [y, y^{\psi}], \quad \forall\ x,\ y \in H.$$

Então,

(i) $[xy, x^{\psi}y^{\psi}] = [x^{y}, y^{\psi}][y, (x^{y})^{\psi}]$. *Se, além disso,* $[x, y] = 1$, *então* $[xy, x^{\psi}y^{\psi}] = [x, y^{\psi}][y, x^{\psi}]$;

(ii) Se ainda $[x, y] = 1$ *e mais* $[xy, x^{\psi}y^{\psi}] = 1$, *então* $[x, y^{\psi}] = [x^{\psi}, y]$.

Lema 2.2.3 (Oliveira e Sidki, [11]). *Seja* $H = \langle a_1,\ a_2,\ a_3\rangle$ *um grupo abeliano 3-gerado. Então valem as igualdades:*

(i) $[a_i^m, a_j^{\psi}] = [a_i, (a_j^m)^{\psi}] = [a_i, a_j^{\psi}]^m$;

(ii) $[a_i^m, a_j^{n\psi}] = [a_i, a_j^{\psi}]^{mn}$;

(iii) $[a_i^m a_j^n, (a_i^m)^{\psi}(a_j^n)^{\psi}] = [a_i, a_j^{\psi}]^{mn}[a_j, a_i^{\psi}]^{mn}$

para $i,\ j \in \{1, 2, 3\},\ n,\ m \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.2.4. *Se* $H = \langle a_1,\ a_2, \cdots\ a_n\rangle$ *é um grupo abeliano n-gerado,* $n \geq 3$, *tal que pelo menos* $n-2$ *de seus geradores têm ordem ímpar, então* $\chi(H) \cong \hat{\chi}(H, S^2)$.

Demonstração. Se $n = 3$, então $H = \langle a_1,\ a_2,\ a_3\rangle$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que a_1 tem ordem ímpar.

Pelos Lemas 2.2.2 e 2.2.3, os elementos $[a_i^m, (a_i^m)^{\psi}]$ e $[a_i^m a_j^n, (a_i^m)^{\psi}(a_j^n)^{\psi}]$ são triviais em $\hat{\chi}(H, S^2)$ para $m,\ n \in \mathbb{Z}$ e $i,\ j \in \{1, 2, 3\}$. Assim, para demonstrarmos o caso $n = 3$, é suficiente mostrarmos que $[a_1^m a_2^n a_3^l, (a_1^m a_2^n a_3^l)^{\psi}]$ $m,\ n,\ l \in \mathbb{Z}$ é trivial. Mas note que

$$\begin{array}{rcl} [a_1^m a_2^n a_3^l, (a_1^m a_2^n a_3^l)^{\psi}] & = & [a_1^m a_2^n, (a_1^m)^{\psi}(a_2^n)^{\psi}(a_3^l)^{\psi}]^{{a_3}^l}[a_3^l, (a_1^m)^{\psi}(a_2^n)^{\psi}(a_3^l)^{\psi}] \\ & = & [a_1^m a_2^n, (a_3^l)^{\psi}]^{a_3^l}[a_3^l, (a_1^m)^{\psi}(a_2^n)^{\psi}]^{a_3^{l\psi}} \\ & = & [a_1^m, (a_3^l)^{\psi}]^{a_2^n}[a_2^n, (a_3^l)^{\psi}][a_3^l, (a_2^n)^{\psi}][a_3^l, (a_1^m)^{\psi}]^{(a_2^n)^{\psi}} \\ & = & [a_1^m, (a_3^l)^{\psi}]^{a_2^n}[a_2^n, (a_3^l)^{\psi}][a_3^l, (a_2^n)^{\psi}][a_3^l, (a_1^m)^{\psi}]^{(a_2^n)^{\psi}} \\ & = & [a_1, a_3^{\psi}]^{ml a_2^n}[a_1, a_3^{\psi}]^{-ml(a_2^n)^{\psi}} \end{array}$$

Agora, como a_1 tem ordem ímpar, então $a_1^m = a_1^{2k}$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Logo

$$[a_1^m a_2^n a_3^l, (a_1^m a_2^n a_3^l)^\psi] \;=\; [a_1, a_3^\psi]^{2kla_2^n}[a_1, a_3{}^\psi]^{-2kl(a_2^n)^\psi}.$$

Mas se considerarmos $m = 2,\ n = 1$ e $l = 1$ na igualdade acima obtemos,

$$[a_1^2 a_2 a_3, (a_1^2 a_2 a_3)^\psi] \;=\; [a_1, a_3^\psi]^{2a_2}[a_1, a_3{}^\psi]^{-2a_2^\psi},$$

ou seja a relação $[a_1^m a_2^n a_3^l, (a_1^m a_2^n a_3^l)^\psi] = 1$ é consequência de $[a_1^2 a_2 a_3, (a_1^2 a_2 a_3)^\psi] = 1$, pois, no último caso, a ação de $[a_2, \psi] = a_2{}^{-1}a_2^\psi$ sobre $[a_1, a_3^\psi]^2$ é trivial.

Considerando agora $m = 1,\ n = 1$ e $l = 1$ na igualdade $[a_1^m a_2^n a_3^l, (a_1^m a_2^n a_3^l)^\psi] = [a_1, a_3^\psi]^{mla_2^n}[a_1, a_3{}^\psi]^{-mla_2^{n\psi}}$, obtemos

$$\epsilon = [a_1 a_2 a_3, (a_1 a_2 a_3)^\psi] \;=\; [a_1, a_3^\psi]^{a_2}[a_1, a_3{}^\psi]^{-a_2{}^\psi}, \tag{2.2.5}$$

Fazendo as substituições, $a_1 \leftrightarrow a_3,\ a_2 \leftrightarrow a_2$, obtemos

$$\epsilon \;=\; [a_3, a_1^\psi]^{a_2}[a_3, a_1{}^\psi]^{-a_2{}^\psi} \tag{2.2.6}$$

e, igualando as expressões acima obtemos

$$\begin{aligned} [a_1, a_3^\psi]^{a_2}[a_1, a_3^\psi]^{-a_2{}^\psi} &= [a_3, a_1^\psi]^{a_2}[a_3, a_1^\psi]^{-a_2^\psi} \\ [a_3, a_1^\psi]^{-a_2}[a_1, a_3^\psi]^{a_2} &= [a_3, a_1^\psi]^{-a_2^\psi}[a_1, a_3^\psi]^{a_2^\psi} \\ [a_1, a_3^\psi]^{2a_2} &= [a_1, a_3^\psi]^{2a_2^\psi} \end{aligned}$$

de onde segue

$$[a_1^2, a_3^\psi]^{[a_2,\psi]} = [a_1^2, a_3^\psi].$$

Ou seja, $[a_1^2 a_2 a_3, a_1^{2\psi}, a_2^\psi a_3^\psi] = 1$.

Considerando $H = \langle a_1,\ a_2, \cdots, a_n\rangle$ um grupo abeliano, em que pelo menos $n - 2$ de seus geradores têm ordem ímpar, os cálculos desenvolvidos acima nos mostram que para $x,\ y,\ z \in H$ com um deles de ordem ímpar e as relações

$$[x, x^\psi] = [y, y^\psi] = [z, z^\psi] = [xy, x^\psi y^\psi] = [xz, x^\psi z^\psi] = [zy, z^\psi y^\psi] = 1,$$

então $[x^i y^j z, x^{i\psi} y^{j\psi} z^\psi] = 1,\ i,\, j \in \mathbb{Z}$. Assim, considerando $x = a_1,\ y = a_2,\ z = a_3^k a_4^l,\ k,\, l \in \mathbb{Z}$, e x de ordem ímpar, os comutadores

$$[a_1^i a_2^j a_3^k a_4^l, a_1^{i\psi} a_2^{j\psi} a_3^{k\psi} a_4^{l\psi}],\ i,\, j,\, k,\, l \in \mathbb{Z}$$

são triviais em $\hat{\chi}(H, S^2)$. Prosseguindo indutivamente sobre o número de geradores provamos a proposição. $\square$

Lema 2.2.5. *Seja H um grupo abeliano com geradores $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Então o epimorfismo $\theta_{n-1} : \hat{\chi}(H, S^{n-1}) \to \chi(H)$ têm núcleo $N = \left\langle [a_1 \cdots a_n\ ,\ a_1^{\psi} \cdots a_n^{\psi}] \right\rangle^{\hat{\chi}(H,S^{n-1})}$*

Demonstração. Para mostrar que $\mathrm{Nuc}(\theta_{n-1}) = N$, vamos verificar que

$$[a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n}, a_1^{\alpha_1 \psi} a_2^{\alpha_2 \psi} \cdots a_n^{\alpha_n \psi}] = 1 \quad \alpha_1,\, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{Z},$$

é consequência de $\varepsilon = [a_1 a_2 \cdots a_n, a_1^{\psi} a_2^{\psi} \cdots a_n^{\psi}] = 1$

Mas vejamos que

$$\begin{aligned}
[a_1 a_2 \cdots a_n, a_1^{\psi} a_2^{\psi} \cdots a_n^{\psi}] &= [a_1 a_2 \cdots a_{n-1}, a_1^{\psi} a_2^{\psi} \cdots a_n^{\psi}]^{a_n} [a_n, a_1^{\psi} a_2^{\psi} \cdots a_n^{\psi}] \qquad (2.2.7)\\
&= [a_1 a_2 \cdots a_{n-1}, a_n^{\psi}]^{a_n} [a_n, a_1^{\psi} a_2^{\psi} \cdots a_{n-1}^{\psi}]^{a_n^{\psi}}\\
&= [a_1, a_n^{\psi}]^{a_2 \cdots a_{n-1}} [a_2 \cdots a_{n-1}, a_n^{\psi}][a_n, a_2^{\psi} \cdots a_{n-1}^{\psi}][a_n, a_1^{\psi}]^{a_2^{\psi} \cdots a_{n-1}^{\psi}}\\
&= [a_1, a_n^{\psi}]^{a_2 \cdots a_{n-1}} [a_n, a_1^{\psi}]^{a_2^{\psi} \cdots a_{n-1}^{\psi}}
\end{aligned}$$

Assim, se $[a_1 a_2 \cdots a_n, a_1^{\psi} a_2^{\psi} \cdots a_n^{\psi}] = 1$, obtemos que

$$\begin{aligned}
[a_1, a_n^{\psi}]^{a_2 \cdots a_{n-1}} &= [a_1, a_n^{\psi}]^{a_2^{\psi} \cdots a_{n-1}^{\psi}}\\
\left([a_1, a_n^{\psi}]^{a_2 \cdots a_{n-1}}\right)^{\alpha_1} &= \left([a_1, a_n^{\psi}]^{a_2^{\psi} \cdots a_{n-1}^{\psi}}\right)^{\alpha_1} \qquad \alpha_1 \in \mathbb{Z}\\
[a_1^{\alpha_1}, a_n^{\psi}]^{a_2 \cdots a_{n-1}} &= [a_1^{\alpha_1}, a_n^{\psi}]^{a_2^{\psi} \cdots a_{n-1}^{\psi}}
\end{aligned}$$

Repetindo os cálculos como na equação 2.2.7, obtemos

$$[a_1^{\alpha_1} a_2 \cdots a_n, a_1^{\alpha_1 \psi} a_2^{\psi} \cdots a_n^{\psi}] = 1.$$

Agora, fazendo as substituições $a_1^{\alpha_1} \leftrightarrow a_2$, $a_i \leftrightarrow a_i$, $i \in \{3, \ldots, n\}$ na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned}
[a_2, a_n^{\psi}]^{a_1^{\alpha_1} \cdots a_{n-1}} &= [a_2, a_n^{\psi}]^{a_1^{\alpha_1 \psi} \cdots a_{n-1}^{\psi}}\\
\left([a_2, a_n^{\psi}]^{a_1^{\alpha_1} \cdots a_{n-1}}\right)^{\alpha_2} &= \left([a_2, a_n^{\psi}]^{a_1^{\alpha_1 \psi} \cdots a_{n-1}^{\psi}}\right)^{\alpha_2}, \qquad \alpha_2 \in \mathbb{Z}\\
[a_2^{\alpha_2}, a_n^{\psi}]^{a_1^{\alpha_1} \cdots a_{n-1}} &= [a_2^{\alpha_2}, a_n^{\psi}]^{a_1^{\alpha_1 \psi} \cdots a_{n-1}^{\psi}}.
\end{aligned}$$

E, novamente repetindo os cálculos como na equação 2.2.7,

$$[a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_n, a_1^{\alpha_1 \psi} a_2^{\alpha_2 \psi} \cdots a_n^{\psi}] = 1.$$

Prosseguindo indutivamente dessa maneira sobre as potências, chegamos que

$$[a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n}, a_1^{\alpha_1 \psi} a_2^{\alpha_2 \psi} \cdots a_n^{\alpha_n \psi}] = 1, \quad \alpha_1,\, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$$

□

Teorema 2.2.6. *Seja $H = \mathbb{Z}_2^n$ com geradores $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Então o núcleo N do epimorfismo $\theta_{n-1} : \hat{\chi}(H, S^{n-1}) \mapsto \chi(H)$ é abeliano livre de posto no máximo $1 + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{i}$ se n é ímpar e no máximo $1 + \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{i} + \frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}$ se n é par.*

Demonstração. Pelo Lema 2.2.5, $N = \left\langle [a_1 \cdots a_n\,,\, a_1^{\psi} \cdots a_n^{\psi}] \right\rangle^{\hat{\chi}(H,S^{n-1})}$. Vamos determinar os conjugados de $\varepsilon = [a_1 a_2 \cdots a_n, a_1^{\psi} a_2^{\psi} \cdots a_n^{\psi}]$ em $\hat{\chi}(H, S^{n-1})$.

Vejamos que se $x = a_i,\ y = a_1 a_2 \cdots a_n a_i^{-1}$ então

$$\begin{aligned} \varepsilon &= [xy, x^{\psi} y^{\psi}] \\ &= [x, x^{\psi} y^{\psi}]^{y} [y, x^{\psi} y^{\psi}] \\ &= [x, y^{\psi}]^{y} [y, x^{\psi}]^{y^{\psi}} \\ &= [x, y^{\psi}][y, x^{\psi}] \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-a_i} &= [x^{\psi} y^{\psi}, xy]^{x} \\ &= [y^{\psi} x^{\psi}, yx]^{x} \\ &= [y^{\psi}, yx]^{x^{\psi} x} [x^{\psi}, yx]^{x} \\ &= [y^{\psi}, x]^{x} [x^{\psi}, y]^{x} \\ &= [x, y^{\psi}][x^{\psi}, y] \qquad (\text{já que } 1 = [x^2, y^{\psi}] = [x, y^{\psi}]^{x}[x, y^{\psi}]) \\ &= [x, y^{\psi}]^{x^{\psi}} [y, x^{\psi}]^{x^{\psi}} \\ &= \varepsilon^{a_i^{\psi}} \quad (\text{por } 2.2.8). \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} 1 &= [(a_1 a_2 \cdots a_n)^2, a_1^{\psi} a_2^{\psi} \cdots a_n^{\psi}] \\ &= \varepsilon^{a_1 a_2 \cdots a_n} \varepsilon \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Donde segue a fórmula

$$\begin{aligned} \varepsilon^{a_{i_1}^{\epsilon_1} a_{i_2}^{\epsilon_2} \ldots a_{i_k}^{\epsilon_k}} &= \varepsilon^{(-1)^{\sum_{j=1}^{k} |\epsilon_j|} a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}} && (\text{por } 2.2.9) \\ &= \begin{cases} \varepsilon^{a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}} & \text{se } (-1)^{\sum_{j=1}^{k} |\epsilon_j|} = 1 \\ \varepsilon^{a_1 a_2 \cdots a_n a_{i_1}^{-1} a_{i_2}^{-1} \ldots a_{i_k}^{-1}} & \text{se } (-1)^{\sum_{j=1}^{k} |\epsilon_j|} = -1 \end{cases} && (\text{por } 2.2.10) \end{aligned}$$

em que $\epsilon_j \in \{1, \psi\}$ e $|\epsilon_j| = \begin{cases} 0, & \text{se } \epsilon_j = 1 \\ 1, & \text{se } \epsilon_i = \psi, \quad j \in \{1, 2, \ldots, k\},\ k \in \{1, 2, \ldots, n\} \end{cases}$.

Assim, N é gerado por ε e seus conjugados da forma

$$\varepsilon^{a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k}},\ 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n,$$

tal que $k \in \{1, \ldots, \frac{n}{2}\}$, se n é par, e $k \in \{1, \ldots, \frac{n-1}{2}\}$, se n é ímpar.

Portanto, N tem no máximo $1 + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{i}$ geradores, se n é ímpar, e no máximo $1 + \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{i} + \frac{1}{2} \cdot \binom{n}{\frac{n}{2}}$ geradores, se n é par.

Vamos mostrar agora que N é abeliano livre. Primeiro consideremos, $x = a_i,\ y = a_2 \ldots a_n a_i^{-1},\ z = a_1, \quad i \in \{2, \ldots, n\}$. Como $G = \langle x,\ y,\ z\rangle \cong \mathbb{Z}_2^3$ e as igualdades

$$[x, x^\psi] = [y, y^\psi] = [z, z^\psi] = [xy, x^\psi y^\psi] = [xz, x^\psi z^\psi] = [yz, y^\psi z^\psi] = 1$$

ocorrem, recorrendo ao caso $n = 3$ em [11, Teorema 8], segue que

$$[[xyz, x^\psi y^\psi z^\psi]^x, [xyz, x^\psi y^\psi z^\psi]] = [\varepsilon^{a_i}, \varepsilon] = 1, \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n-2\}.$$

Além disso, $[xyz, x^\psi y^\psi z^\psi] = \varepsilon$ é de ordem infinita.

Agora consideremos $x = a_1 a_2 \ldots a_k,\ y = a_{k+1} \ldots a_{n-1},\ z = a_n \quad k \in \{1, \ldots, n-2\}$. Pelo mesmo argumento anterior,

$$[[xyz, x^\psi y^\psi z^\psi]^x, [xyz, x^\psi y^\psi z^\psi]] = [\varepsilon^{a_1 a_2 \ldots a_k}, \varepsilon] = 1, \quad \forall\, k \in \{1, \ldots, n-2\}.$$

Para $k = n-1$, temos que $\varepsilon^{a_1 \ldots a_{n-1}} \overset{(2.2.10)}{=} \varepsilon^{-a_n}$. Pelo primeiro caso, $[\varepsilon^{a_n}, \varepsilon] = 1$; logo, $[\varepsilon^{a_1 \ldots a_{n-1}}, \varepsilon] = 1$.

Para $k = n$, temos que $\varepsilon^{a_1 a_2 \cdots a_n} = \varepsilon^{-1}$ e $[\varepsilon, \varepsilon^{-1}] = 1$. Portanto, os geradores de N, comutam entre si.

$\square$

Capítulo 3

Comutatividade fraca por isomorfismo entre n cópias de H

3.1 Definições

Consideremos H um grupo e $\chi(H)$ o grupo já definido anteriormente. De modo a generalizar o comportamento desse grupo, dados um grupo H e $\langle\psi\rangle$ um grupo cíclico de ordem n, Oliveira considera em [10] o grupo definido pela apresentação

$$G = \left\langle H, \psi \ \mid [h^{\psi^i}, h^{\psi^j}] = 1,\ [D_{i,j}, L_{k,l}] = 1, \psi^n = 1,\ \forall\, h \in H,\ i,\ j,\ k,\ l\ \in \{0, \dots, n-1\} \right\rangle,$$

onde $D_{i,j} = [H^{\psi^i}, H^{\psi^j}]$ e $L_{i,j} = [H^{\psi^i}, \psi^j]$, com $[h^{\psi^i}, h^{\psi^j}] = h^{\psi^{-i}}(h^{\psi^i})^{h^{\psi^j}}$. Notemos que o grupo G possui n subgrupos H, H^{ψ}, ... , $H^{\psi^{n-1}}$, que comutam fracamente entre si. Daí é definido o grupo de comutatividade fraca entre n cópias de H como sendo o subgrupo

$$\chi(n, H) = \left\langle H,\ H^{\psi},\ \dots,\ H^{\psi^{n-1}} \right\rangle.$$

As relações $[D_{i,j}, L_{i,j}]$ são consequências das relações $[h^{\psi^i}, h^{\psi^j}] = 1$. A inclusão das relações $[D_{i,j}, L_{k,l}] = 1,\ \{i,\ j\} \neq \{k,\ l\}$, deve-se ao fato que, sem essas relações, pode-se obter exemplos com grupos finitos H, para os quais o grupo G é infinito. Como exemplo, com ajuda do programa GAP, Oliveira mostra em [10] que se $H = C_2^2$, o grupo

$$\left\langle H, \psi \mid [h, h^{\psi}] = \psi^3 = 1,\ \forall\, h \in H \right\rangle,$$

é uma extensão de $\mathbb{Z}^4$ por um grupo finito de ordem $2^{13}3$.

3.2 Sobre $\chi(n, H)$

Nesta seção apresentamos alguns resultados gerais sobre $\chi(n, H)$.

Proposição 3.2.1. *Existe um epimorfismo* $\delta : \chi(n, H) \to H^n$ *tal que* $\text{Nuc}(\delta) = \prod_{0 \leq i < j \leq n-1} D_{i,j}$.

Demonstração. È claro que a aplicação

$$\begin{gathered} \chi(n, H) \to H^n \\ h \mapsto (h, 1, \ldots, 1) \\ h^{\psi} \mapsto (1, h, \ldots, 1) \\ \vdots \\ h^{\psi^{n-1}} \mapsto (1, 1, \ldots, h) \end{gathered}$$

estende-se a um epimorfismo $\delta : \chi(n, H) \to H^n$, já que preserva as relações definidoras de $\chi(n, H)$.

Consideremos $C = \langle D_{i,j};\ 1 \leq i < j \leq n \rangle^{\chi(n,H)}$.

Observamos que $D_{i,j} \triangleleft \chi(n, H)$, $\forall\ 1 \leq i < j \leq n$, pois

$$\begin{aligned} [h_1{}^{\psi^i}, h_2{}^{\psi^j}]^{h_3{}^{\psi^k}} &= [h_1^{\psi^i}, h_2^{\psi^j}]^{h_3^{\psi^i}} \qquad (\text{já que } [D_{i,j}, L_{k,i}] = 1) \\ &= [(h_1 h_3)^{\psi^i}, h_2^{\psi^j}][h_3^{\psi^i}, h_2^{\psi^j}]^{-1}, \end{aligned}$$

logo $C = \displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq n} D_{i,j}$. Agora, como $C \subseteq \text{Nuc}(\delta)$, então δ induz o homomorfismo

$$\begin{gathered} \bar{\delta} : \tfrac{\chi(n,H)}{C} \to H^n \\ Ch \mapsto (h, 1, \ldots, 1) \\ Ch^{\psi} \mapsto (1, h, \ldots, 1) \\ \vdots \\ Ch^{\psi^{n-1}} \mapsto (1, 1, \ldots, h) \end{gathered}$$

Por outro lado a aplicação

$$\begin{gathered} H^n \to \tfrac{\chi(n,H)}{C} \\ (h, 1, \ldots, 1) \mapsto Ch \\ (1, h, \ldots, 1) \mapsto Ch^{\psi} \\ \vdots \\ (1, 1, \ldots, h) \mapsto Ch^{\psi^{n-1}}, \end{gathered}$$

também preserva as relações de H^n, de modo que se estende a um epimorfismo $\alpha : H^n \to \frac{\chi(n,H)}{C}$, em que a composta $\alpha\bar{\delta} = 1$ sobre H^n. Portanto, $\mathrm{Nuc}(\delta) = C$. $\square$

Notemos também que a aplicação

$$\begin{aligned} \phi_1 : \chi(H) &\to \chi(n, H) \\ h &\mapsto h \\ h^\psi &\mapsto h^\psi \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

pode ser estendida a um homomorfismo.

Por outro lado, em geral não temos um homomorfismo de $\chi(n, H)$ para $\chi(H)$. Como exemplo, com a ajuda do GAP não encontramos nenhum homomorfismo de $\chi(n, S_3)$ para $\chi(S_3)$.

No caso em que H é abeliano, pelo Teorema 1.4.3 (i), $R(H) = [D, H^\psi] = [D, H]$; logo, se $R(H) = 1$ então a aplicação

$$\begin{aligned} \phi_2 : \chi(n, H) &\to \chi(H) \\ h &\mapsto h \\ h^\psi &\mapsto h^\psi \\ h^{\psi^i} &\mapsto 1 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

pode ser estendida a um homomorfismo, onde a composta $\phi_1\phi_2$ é a identidade sobre $\chi(H)$, de onde segue que ϕ_1 é injetiva. Logo

$$\chi(H) \hookrightarrow \chi(n, H).$$

Para H abeliano a condição $R(H) = 1$ não é necessária para ver que $\chi(H) \hookrightarrow \chi(n, H)$, pois a aplicação

$$\begin{aligned} \phi_3 : \chi(n, H) &\to \chi(H) \\ h &\mapsto h \\ h^\psi &\mapsto h^\psi \\ h^{\psi^i} &\mapsto h \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

estende-se a um homomorfismo, já que

$$[\phi_3(h^{\psi^i}), \phi_3(h^{\psi^j})] = 1 \;\text{ e } [[\phi_3(h_1^{\psi^i}), \phi_3(h_2^{\psi^j})], \phi_3(h^{-\psi^k})\phi_3(h^{\psi^l})] = 1, \; \forall\, i,\, j,\, k,\, l \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

Logo a composta $\phi_1\phi_3$ é a identidade sobre $\chi(H)$ e, portanto, sempre que H é um grupo abeliano,

$$\chi(H) \hookrightarrow \chi(n, H).$$

Proposição 3.2.2. *Se H é solúvel então $\chi(n,H)$ é solúvel.*

Demonstração. Pelo homomorfismo $\phi_1 : \chi(H) \to \chi(n,H)$, definido em 3.2.1, temos que cada $D_{i,j} \subseteq \chi(n,H)$ é solúvel, já que é uma imagem de $D \subseteq \chi(H)$. Pela Proposição 3.2.1, $\chi(n,H) \cong \prod_{0\leq i<j\leq n-1} D_{i,j}H^n$ e, portanto, é solúvel. □

3.3 Estimativa para a ordem de $\chi(n,H)$

Em [10], Oliveira estima a ordem de $\chi(n,H)$, para H abeliano finito. Aqui generalizamos essa estimativa para H um grupo finito qualquer.

Teorema 3.3.1. *Se H é um grupo finito, então $|\chi(n,H)|$ divide $|\chi(H)|^m|H|^{n-2m}$, onde $m = \binom{n}{2}$.*

Demonstração. Como $|D_{i,j}| \mid |D|$, segue que $|C| \mid |D|^m$, já que $C = \prod_{1\leq i<j\leq n} D_{i,j}$. Além disso,

$$\frac{\chi(n,H)}{C} \cong H^n.$$

Consequentemente, como $|\chi(H)| = |D||H|^2$,

$$|\chi(n,H)| \mid |D|^m|H|^n = |\chi(H)|^m|H|^{n-2}$$

□

A estimativa acima é atingida quando H é um grupo abeliano finito e o subgrupo $R(H) = [H, L, H^\psi]$ de $\chi(H)$ é trivial.

Proposição 3.3.2. *Se H é um grupo abeliano finito tal que $R(H) = 1$, então $\chi(n,H) \cong (\oplus_{0\leq i<j\leq n-1} D_{i,j}) \cdot H \cdot H^\psi \cdots H^{\psi^{n-1}}$.*

Demonstração. Vamos primeiro considerar o caso $n = 3$.

Vimos que se $R(H) = 1$, então $\chi(H) \hookrightarrow \chi(3,H)$. Segue então que $D \cong D_{i,j}$, $\forall\, 0 \leq i < j \leq 2$.

Agora, do epimorfismo $\phi_3 : \chi(3,H) \to \chi(H)$, definido em 3.2.3, temos que $\mathrm{Nuc}(\phi_3) = D_{0,2}D_{1,2}H^{\psi^2}$, logo

$$|\chi(3,H)| = |\chi(H)||D_{0,2}D_{1,2}H^{\psi^2}|.$$

Por outro lado, do epimorfismo $\delta : \chi(3,H) \to H^3$, conforme a Proposição 3.2.1, temos

$$|\chi(3,H)| = |D_{0,1}D_{0,2}D_{1,3}||H|^3.$$

Donde segue que

$$\begin{aligned}|D_{0,1}D_{0,2}D_{1,3}||H|^3 &= |\chi(H)||D_{0,2}D_{1,2}H^{\psi^2}| \\ &= |D||H|^2|D_{0,2}D_{1,2}H^{\psi^2}|.\end{aligned}$$

Mas $H^{\psi^2} \cap D_{0,2}D_{1,2} = 1$, pois $H^{\psi^2} \cap \mathrm{Nuc}(\delta) = 1$. Logo

$$\begin{aligned}|D_{0,1}D_{0,2}D_{1,3}| &= |D||D_{0,2}D_{1,2}| \\ &= |D_{0,1}||D_{0,2}D_{1,2}|\end{aligned}$$

Portanto $D_{0,1} \cap D_{0,2}D_{1,2} = 1$. Permutando os índices dos $D_{i,j}$ na equação anterior, concluímos que $D_{0,1}D_{0,2}D_{1,3}$ é uma soma direta.

Para o caso geral $n \geq 3$, temos novamente as aplicações que podem ser estendidas a homomorfismos,

$$\begin{aligned}\phi_4 : \chi(3, H) &\to \chi(n, H) \\ h &\mapsto h \\ h^{\psi} &\mapsto h^{\psi} \\ h^{\psi^2} &\mapsto h^{\psi^2} \qquad\qquad , \qquad \text{e}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_5 : \chi(n, H) &\to \chi(3, H) \\ h &\mapsto h \\ h^{\psi} &\mapsto h^{\psi} \\ h^{\psi^2} &\mapsto h^{\psi^2} \\ h^{\psi^j} &\mapsto 1 \qquad\qquad (j > 2),\end{aligned}$$

onde a composta $\phi_5\phi_4$ é a identidade sobre $\chi(3, H)$, donde vemos que

$$\chi(H) \hookrightarrow \chi(3, H) \hookrightarrow \chi(n, H).$$

Recorremos agora ao caso $n = 3$ e verificamos que $D_{i,j} \cap D_{l,k} = 1, \ \forall \ 0 \leq i < j \leq n-1, \ 0 \leq l < k \leq n-1$.

Portanto, $C = \prod_{1 \leq i < j \leq n} D_{i,j} = \oplus_{1 \leq i < j \leq n} D_{i,j}$. □

Pelo Teorema 1.4.3 (iii), quando H é um grupo abeliano, segue que $R^2 = 1$. Logo se H é um p-grupo abeliano com p ímpar então $R = 1$, donde segue o

Colorário 3.3.3. *Se H é um p-grupo abeliano finito, onde p é impar, então $\chi(n,H) \cong (\oplus_{0\leq i<j\leq n-1})D_{i,j} \cdot H \cdot H^{\psi} \cdots H^{\psi^{n-1}}$.*

A estimativa da Proposição 3.3.1, para a ordem de $\chi(n,H)$, não é atingida no caso em que H é um 2-grupo abeliano elementar.

Proposição 3.3.4. *Se H é um 2-grupo abeliano elementar de posto k, então $|\chi(n,H)|$ divide $2^{\binom{k}{2}\binom{n}{2}+\sum_{p=3}^{k}\binom{k}{p}(n-1)+nk}$.*

Demonstração. Do epimorfismo $\delta : \chi(n,H) \to H^n$, conforme a Proposição 3.2.1, temos que $|\chi(n,H)| = |C||H|^n$.

Agora notemos que, $\forall\, h_1,\ h_2,\ h_3,\ h_4\ \in H,\ 0 \leq i < j \leq n-1,\ 0 \leq k < l \leq n-1$,

$$
\begin{aligned}
[h_1^{\psi^i}, h_2^{\psi^j}]^{[h_3^{\psi^k}, h_4^{\psi^l}]} &= [h_1^{\psi^i}, h_2^{\psi^j}]^{[h_3,h_4]} && (\text{já que}[D_{i,j}, L_{k,s}] = 1)\\
&= [h_1^{\psi^i}, h_2^{\psi^j}] && (\text{já que } H \text{ é abeliano}).
\end{aligned}
$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
1 &= [(h_1^{\psi^i})^2, h_2^{\psi^j}]\\
&= [h_1^{\psi^i}, h_2^{\psi^j}]^{h_1^{\psi^i}}[h_1^{\psi^i}, h_2^{\psi^j}]\\
&= [h_1^{\psi^i}, h_2^{\psi^j}]^{h_1^{\psi^j}}[h_1^{\psi^i}, h_2^{\psi^j}]\\
&= [h_1^{\psi^i}, h_2^{\psi^j}][h_1^{\psi^i}, h_2^{\psi^j}]\\
&= [h_1^{\psi^i}, h_2^{\psi^j}]^2.
\end{aligned}
$$

Logo C é um 2-grupo abeliano elementar.

Suponhamos que $H = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k\rangle$. Pelas relações de comutadores e pelo fato de $[D_{i,j}, L_{k,s}] = 1,\ \forall\ 0 \leq i < j \leq n-1,\ \ 0 \leq k < s \leq n-1$, então um comutador $[h_1^{\psi^i}, h_2^{\psi^j}] \in C$ é o produto de comutadores do tipo $[a_r^{\psi^i}, a_s^{\psi^j}]^{a_1^{\epsilon_1}a_2^{\epsilon_2}\cdots a_k^{\epsilon_k}}$, em que $\epsilon_i \in \{0,1\}$.

Mas $[a_r^{\psi^i}, a_s^{\psi^j}]^{a_1^{\epsilon_1}} = [a_r^{\psi^i}, a_s^{\psi^j}][a_r^{\psi^i}, a_s^{\psi^j}, a_1^{\epsilon_1}]$. Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
&[a_r^{\psi^i}, a_s^{\psi^j}]^{a_1^{\epsilon_1}a_2^{\epsilon_2}\cdots a_k^{\epsilon_k}} =\\
&[a_r^{\psi^i}, a_s^{\psi^j}]\prod_{1\leq l\leq k}[a_r^{\psi^i}, a_s^{\psi^j}, a_l^{\epsilon_l}]\prod_{1\leq l<t\leq k}[a_r^{\psi^i}, a_s^{\psi^j}, a_l^{\epsilon_l}, a_t^{\epsilon_t}]\cdots[a_r^{\psi^i}, a_s^{\psi^j}, a_1^{\epsilon_1}, \ldots a_k^{\epsilon_k}]
\end{aligned}
$$

Agora para comutadores de peso maior que 2, da identidade de Witt vemos que

$$
\begin{aligned}
[a_r^{\psi^i}, a_s^{\psi^j}, a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}}, \ldots, a_{i_t}^{\epsilon_{i_t}}] &= [[a_s^{\psi^j}, a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}}, a_r^{\psi^i},][a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}}, a_r^{\psi^i}, a_s^{\psi^j}], \ldots, a_{i_t}^{\epsilon_{i_t}}]\\
&= [a_s^{\psi^j}, a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}}, a_r^{\psi^i}, \ldots, a_{i_t}^{\epsilon_{i_t}}][a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}}, a_r^{\psi^i}, a_s^{\psi^j}, \ldots, a_{i_t}^{\epsilon_{i_t}}]\\
&= [a_s^{\psi^j}, a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}}, a_r, \ldots, a_{i_t}^{\epsilon_{i_t}}][a_r^{\psi^i}, a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}}, a_s, \ldots, a_{i_t}^{\epsilon_{i_t}}].
\end{aligned}
$$

Além disso, novamente pela identidade de Witt

$$\begin{aligned}
[a_r^{\psi^i}, \ldots, a_{i_o}^{\epsilon^{i_o}}, a_{i_p}^{\epsilon^{i_p}}, a_{i_q}^{\epsilon^{i_q}} \ldots] &= \left[\left[a_{i_p}^{\epsilon^{i_p}}, a_{i_q}^{\epsilon^{i_q}}, [a_r^{\psi^i}, \ldots, a_{i_o}^{\epsilon^{i_o}}]\right]\left[a_{i_q}^{\epsilon^{i_q}}, [a_r^{\psi^i}, \ldots, a_{i_o}^{\epsilon^{i_o}}], a_{i_p}^{\epsilon^{i_p}}\right], \ldots,\right] \\
&= \left[a_{i_q}^{\epsilon^{i_q}}, [a_r^{\psi^i}, \ldots, a_{i_o}^{\epsilon^{i_o}}], a_{i_p}^{\epsilon^{i_p}}, \ldots,\right] \\
&= \left[a_r^{\psi^i}, \ldots, a_{i_o}^{\epsilon^{i_o}}, a_{i_q}^{\epsilon^{i_q}}, a_{i_p}^{\epsilon^{i_p}}, \ldots,\right].
\end{aligned}$$

Ou seja, C é gerado pelos comutadores de peso 2 da forma $[a_r^{\psi^i}, a_s^{\psi^j}]$, com $0 \leq i < j \leq n-1$ e $1 \leq r < s \leq k$, mais os comutadores de peso maior que 2 da forma $[a_r^{\psi^i}, a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_t}]$, em que $1 \leq r < i_1 < i_2 < \ldots i_t \leq k$

Assim C tem, no máximo, $\binom{k}{2}\binom{n}{2}$ geradores de peso 2, e $\binom{k}{p}(n-1)$ geradores de peso $p > 2$. Logo $|C|$ divide $2^{\binom{k}{2}\binom{n}{2}+\sum_{p=3}^{k}\binom{k}{p}(n-1)}$. Portanto, $|\chi(n,H)|$ divide $2^{\binom{k}{2}\binom{n}{2}+\sum_{p=3}^{k}\binom{k}{p}(n-1)+nk}$.

$\square$

Observe que para o caso $n = 2$, Sidki mostra que $|\chi(H)| = 2^{2^k-1}2^k$. ([19, Teorema 4.2.4])

Ou seja,

$$|D| = \frac{2^{2^k-1}2^k}{2^{2k}}.$$

Mas como $2^k = (1+1)^k = \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \ldots + \binom{k}{k}$, então

$$|D| = 2^{\binom{k}{2}+\binom{k}{3}+\ldots+\binom{k}{k}}$$

Portanto, $2^{\binom{k}{2}\binom{n}{2}+\sum_{p=3}^{k}\binom{k}{p}(n-1)}$ é menor que $|D|^m = 2^{\binom{k}{2}\binom{n}{2}+\binom{k}{3}\binom{n}{2}+\ldots+\binom{k}{k}\binom{n}{2}}$.

3.4 H perfeito

Em [19], Sidki mostra que para um grupo H perfeito, $\chi(H)$ é isomorfo ao grupo $T(\tilde{H})$, em que $\tilde{H}$ é uma extensão tronco maximal de H, isto é, existe $Z \leq \tilde{H}' \cup Z(\tilde{H})$ tal que $\frac{\tilde{H}}{Z} \cong H$; além disso $D \cong \tilde{H}$ neste caso.

De modo a analisar o comportamento da estrutura de $\chi(n,H)$ quando H é um grupo perfeito, vamos apresentar uma generalização do grupo $T(\tilde{H})$.

Seja H um grupo, e $\tilde{H}$ algum recobrimento de H de modo que existe um subgrupo Z de $\tilde{H}$, tal que

$$Z \leq \tilde{H}' \cap Z(\tilde{H}) \quad \text{e} \quad \tilde{H}/Z \cong H,$$

isto é $(Z|\tilde{H})$ é uma extensão tronco de H. Agora defina

$$\tilde{T_n} = \tilde{H}^{n+1},$$
$$\phi = (1)(2,3,\ldots,n+1) \in S_{n+1},$$
$$\tilde{\psi} \in \operatorname{Aut}(\tilde{T}) \text{ tal que,}$$
$$\tilde{\psi} : (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}) \mapsto (a_{\phi(1)}, a_{\phi(2)}, a_{\phi(3)}, \ldots, a_{\phi(n+1)}),$$

$$\tilde{H}_1 = \left\langle (h, h, 1, 1, \ldots, 1) \mid \quad h \in \tilde{H} \right\rangle, \quad \tilde{H}_i = \tilde{H}_1^{\tilde{\psi}^{i-1}},\ 2 \leq i \leq n,$$

$$Z_1 = \langle (z, z, 1, 1, \ldots, 1) \mid \quad z \in Z \rangle, \quad Z_i = Z_1^{\tilde{\psi}^{i-1}},\ 2 \leq i \leq n,$$

$$\tilde{G} = \left\langle \tilde{H}_1,\ \tilde{H}_2, \ldots, \tilde{H}_n \right\rangle,$$

$$T_n(\tilde{H}) = \tfrac{\tilde{G}}{Z_1 Z_2 \cdots Z_n},$$

$$H_1 = \tfrac{\tilde{H}_1 Z_2 Z_3 \cdots Z_n}{Z_1 Z_2 \cdots Z_n},\ H_2 = \tfrac{\tilde{H}_2 Z_1 Z_3 \cdots Z_n}{Z_1 Z_2 \cdots Z_n},\ \ldots,\ H_n = \tfrac{\tilde{H}_n Z_1 Z_2 \cdots Z_{n-1}}{Z_1 Z_2 \cdots Z_n}.$$

Vemos assim que $T_n(\tilde{H}) = \langle H_1,\, H_2, \ldots,\, H_n \rangle$, com $H \cong H_1 \cong H_2 \cong \ldots \cong H_n$, já que $H_i = \frac{\tilde{H}_i Z_1 Z_2 \cdots Z_n}{Z_1 Z_2 \cdots Z_n} = \frac{\tilde{H}_i}{H_i \cap Z_1 Z_2 \cdots Z_n} = \frac{\tilde{H}_i}{Z_i} \cong H$.

Definamos, $\tilde{D}_{i,j} = [\tilde{H}_i, \tilde{H}_j]$ e $\tilde{L}_{i,j} = [\tilde{H}_i, \tilde{\psi}^j]$, subgrupos de $\tilde{G}$, e $\overline{D}_{i,j}$, $\overline{L}_{i,j}$ suas respectivas imagens em $G\ (= T_n(\tilde{H}))$, para $1 \leq i < j \leq n$.

Temos que $\tilde{G}$ e $Z_1 Z_2 \cdots Z_n$ são $\tilde{\psi}$-invariantes. Denotando por $(h)_i$, o elemento $(1, 1, \ldots, h, 1, \ldots, 1) \in \tilde{H}$, tal que h aparece na i-ésima coordenada, então $\tilde{\psi}$ induz um automorfismo ψ de $T_n(\tilde{H})$ tal que

$$\psi : Z_1 Z_2 \ldots Z_n (a)_1 (a)_i \mapsto Z_1 Z_2 \ldots Z_n (a)_1 (a)_{i+1}$$

para todo $a \in \tilde{H}$. Logo

$$H_i = H_1^{\psi^{i-1}} \quad \text{e } T_n(\tilde{H}) = \left\langle H_1, H_1^{\psi}, \ldots, H_1^{\psi^{n-1}} \right\rangle.$$

Observação 3.4.1. Para todo $1 \leq i < j \leq n$, segue

(i)

$$\tilde{D}_{i,j},\ \tilde{L}_{i,j} \lhd \tilde{T}_n$$
$$\tilde{D}_{i,j} = \left\langle ([h,k],1,\ldots,1),\ h,\ k \in \tilde{H} \right\rangle = \tilde{H}' \times 1 \times \ldots \times 1, \tag{3.4.1}$$
$$\tilde{L}_{i,j} = \left\langle (h^{-1})_i (h)_j \ \mid\ h \in \tilde{H} \right\rangle,$$
$$\tilde{D}_{i,j} \cap Z_1 Z_2 \ldots Z_n = 1,\ \text{logo}\ \ \tilde{D}_{i,j} \cong \overline{D}_{i,j}.$$

(ii) Seja H é um grupo perfeito. Então

$$\tilde{D}_{i,j} = \tilde{H} \times 1 \times \ldots \times 1$$

.

(iii) Dado $x = Z_1 Z_2 \cdots Z_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in T_n(\tilde{H})$ e $y \in \tilde{H}$, denote $\bar{y} = Zy$ e defina

$$\alpha_n : T_n(\tilde{H}) \to H^n$$

por $\alpha(x) = (\bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_{n+1})$. Então segue que α_n é um epimorfismo, tal que

$$\mathrm{Nuc}(\alpha_n) = \overline{D}_{i,j}$$

Proposição 3.4.2. *Existe um epimorfismo* $\lambda_{\tilde{H}} : \chi(n,H) \to T_n(\tilde{H})$*, tal que* $\mathrm{Nuc}(\lambda_{\tilde{H}}) \subseteq C$*.*

Demonstração. Definamos a aplicação

$$\lambda_{\tilde{H}} : \chi(n,H) \to T_n(\tilde{H})$$

tal que, $\lambda_{\tilde{H}}(h^{\psi^i}) = Z_1 Z_2 \cdots Z_n (h)_1 (h)_i$.

Como
$$[Z_1 Z_2 \cdots Z_n (a)_1 (a)_i, Z_1 Z_2 \cdots Z_n (a)_1 (a)_j] = Z_1 Z_2 \cdots Z_n \tag{3.4.2}$$
para todo $a \in \tilde{H}$, e além disso,

$$\begin{aligned} &[Z_1 Z_2 \cdots Z_n (a_1)_1 (a_1)_i, Z_1 Z_2 \cdots Z_n (a_2)_1 (a_2)_j] = Z_1 Z_2 \cdots Z_n ([a_1, a_2])_1, \\ &\text{e}\ \left(Z_1 Z_2 \cdots Z_n (a)_1 (a)_k\right)^{-1} Z_1 Z_2 \cdots Z_n (a)_1 (a)_s = Z_1 Z_2 \cdots Z_n (a^{-1})_k (a)_s \quad , \end{aligned}$$

então,

$$[Z_1 Z_2 \cdots Z_n ([a_1, a_2])_1, Z_1 Z_2 \cdots Z_n (a^{-1})_k (a)_s] = Z_1 Z_2 \cdots Z_n. \tag{3.4.3}$$

Portanto, podemos concluir de 3.4.2 e 3.4.3 que a aplicação

$$\lambda : \chi(n,H) \to T_n(\tilde{H}),$$

estende-se a um epimorfismo tal que

$$\lambda_{\tilde{H}}(H^{\psi^i}) = H_1^{\psi^i},\ \forall\, 1 \leq i \leq n,$$

$$\lambda_{\tilde{H}}(D_{i,j}) = \overline{D}_{i,j}.$$

Pela observação (iii) de 3.4.1, temos que $C = \langle D_{i,j}\ ;\ 1 \leq i < j \leq n\rangle = \mathrm{Nuc}(\lambda_{\tilde{H}}\alpha_n)$, logo $\mathrm{Nuc}(\lambda_{\tilde{H}}) \subseteq C$.

□

Proposição 3.4.3. *Se H é um grupo perfeito então,*

(i) $D_{i,j} = D_{k,s} \cong D,\ \ \forall\, 1 \leq i < j \leq n-1, \quad 1 \leq k < s \leq n-1$

(ii) $\chi(n,H) \cong D \cdot H \cdot H^{\psi} \cdots H^{\psi^{n-1}} \cong T_n(\tilde{H})$

Demonstração. (i) Pelo Teorema 1.4.4, se H é um grupo perfeito então $\tilde{H} \cong D$, em que $\tilde{H}$ é uma extensão tronco maximal de H. Logo, por 3.4.1,

$$\bar{D}_{i,j} \cong \tilde{H} \cong D,\ \forall\, 1 \leq i < j \leq n.$$

Como $D \cong \bar{D}_{i,j}$ é imagem de $D_{i,j}$ por $\lambda_{\tilde{H}}$, $\forall\, 1 \leq i < j \leq n$ e, por outro lado, $D_{i,j}$ é imagem de D, pelo homomorfismo $\phi_1 : \chi(H) \to \chi(n,H)$ definido em 3.2.1, então $D \cong D_{i,j},\ \forall\, 1 \leq i < j \leq n$.

Da relação $[D_{i,j}, L_{k,s}] = 1$ em $\chi(n,H)$, segue que

$$D'_{i,j} = [D_{i,j}, D_{i,j}] = [D_{i,j}, D_{k,s}] = [D_{k,s}, D_{k,s}] = D'_{k,s},\ \forall\, 1 \leq i < j \leq n, \quad 1 \leq k < s \leq n.$$

Mas $D \cong D_{i,j}$ é perfeito, logo $D_{i,j} = D_{k,s}, \forall\, 1 \leq i < j \leq n, \quad 1 \leq k < s \leq n.$

(ii) O isomorfismo $\chi(n,H) \cong D \cdot H \cdot H^{\psi} \cdots H^{\psi^{n-1}}$ é consequência imediata de (i) e da Proposição 3.2.1.

Pela Proposição 3.4.2 e item (i) da observação 3.4.1, $\mathrm{Nuc}(\lambda_{\tilde{H}}) \subseteq D_{i,j}$; mas note que o subgrupo $\left\langle H^{\psi^i}, H^{\psi^j}\right\rangle$ de $\chi(n,H)$ é isomorfo a $\chi(H)$, já que $D \cong D_{i,j}$. Logo pelo Teorema 1.4.4, $\lambda_{\tilde{H}}|_{\left\langle H^{\psi^i}, H^{\psi^j}\right\rangle}$ é isomorfismo, então $D_{i,j} \cap \mathrm{Nuc}(\lambda_{\tilde{H}}) = 1$ e, portanto, deve ocorrer que $\mathrm{Nuc}(\lambda_{\tilde{H}}) = 1$. □

Capítulo 4

O Grupo $\chi^*(n, H)$

No capítulo anterior nos deparamos com os problemas de decidir se os subgrupos $D_{i,j},\ \ 1 \leq i < j \leq n$ de $\chi(n, H)$ são independentes e se $\chi(H)$ está imerso em $\chi(n, H)$. Um caso em que essas afirmações valem, é quando tem-se a relação $[D, H] = 1$ em $\chi(H)$.

Afim de averiguar essas condições, vamos introduzir neste capítulo um novo grupo em que também ocorre a comutatividade fraca por n cópias de um grupo H.

4.1 Definições

Sejam H um grupo e $\langle \psi \rangle$ um grupo cíclico de ordem n. Definamos

$$G^* = \left\langle H,\ \psi\ \mid\ [h^{\psi^i}, h^{\psi^j}] = \psi^n = 1,\ [D^*_{i,j}, H^{\psi^k}] = 1,\ \ i,\ j,\ k\ \in \{0, 1, \ldots, n-1\},\ k \neq i, j \right\rangle$$

onde $D^*_{i,j} = [H^{\psi^i}, H^{\psi^j}]$. Seja

$$\chi^*(n, H) = \left\langle H, H^{\psi}, \ldots, H^{\psi^{n-1}} \right\rangle,$$

subgrupo de G^*. Observe ainda que os subgrupos $H,\ H^{\psi},\ \ldots, H^{\psi^{n-1}}$ de $\chi^*(n, H)$ comutam fracamente e, além disso, vamos mostrar neste capitulo que $\chi^*(n, H)$ deve manter algumas propriedades de $\chi(n, H)$.

4.2 Propriedades gerais para $\chi^*(n, H)$

Nesta seção verificamos a estrutura de $\chi^*(n, H)$.

Proposição 4.2.1. *Para todo grupo H, $\chi(H)$ está imerso em $\chi^*(n, H)$.*

Demonstração. Consideremos a aplicação

$$\phi_1^* : \chi(H) \to \chi^*(n, H)$$

tal que $h \mapsto h$, $h^\psi \mapsto h^\psi$. É claro que a relação $[h, h^\psi] = 1$ é preservada em $\chi^*(n, H)$, por ϕ^*, logo ϕ^* estende-se a um homomorfismo.

Por outro lado, a aplicação

$$\phi_2^* : \chi^*(n, H) \to \chi(H)$$

tal que $h \mapsto h$, $h^\psi \mapsto h^\psi$ e $h^{\psi^i} \mapsto 1$, $1 < i \leq n-1$, também preserva as relações de $\chi^*(n, H)$, estendendo-se a um homomorfismo.

Como

$$\chi(H) \overset{\phi_1^*}{\to} \chi^*(n, H) \overset{\phi_2^*}{\to} \chi(H)$$

é a identidade, segue que $\chi(H) \hookrightarrow \chi^*(n, H)$. □

Proposição 4.2.2. *Seja H um grupo finito. Então*

(i) $D_{i,j}^* \lhd \chi^*(n, H)$, $D_{i,j}^* \cong D$,

(ii) $\chi^*(n, H) = C^* \cdot H \cdot H^\psi \cdots H^{\psi^{n-1}}$, *em que* $C^* = \oplus_{1 \leq i < j \leq n-1} D_{i,j}^*$

(iii) $|\chi^*(n, H)| = |D|^{\binom{n}{2}} |H|^n$.

Demonstração. (i) Como $\chi(H) \hookrightarrow \chi^*(n, H)$, segue imediatamente que $D_{i,j}^* \cong D$, logo $D_{i,j}^*$ é normalizado por H^{ψ^i} e por H^{ψ^j}. Se $k \neq \{i,\ j\}$ temos $[D_{i,j}^*, H^{\psi^k}] = 1$. Portanto, $D_{i,j}^* \lhd \chi^*(n, H)$.

(ii) A demonstração é idêntica à da Proposição 3.3.2.

(iii) Segue de (ii). □

Colorário 4.2.3. *Se H é um grupo abeliano finito tal que $R(H) = 1$, então $\chi^*(n, H) \cong \chi(n, H)$.*

Colorário 4.2.4. *Se H é um p-grupo abeliano finito, onde p é um numero primo ímpar, então $\chi^*(n, H) \cong \chi(n, H)$*

As demonstrações seguem imediatamente da proposição anterior e da Proposição 3.3.2.

4.3 H Nilpotente

A propriedade de comutatividade fraca entre cópias de um grupo H parece ser uma forte característica para herdar propriedades de H. Como vimos no desenvolvimento do trabalho, os grupos $\chi(H)$ e $\chi(n, H)$ preservam finitude, solubilidade e nilpotênca, entre outras propriedades.

Vamos examinar nesta seção a nilpotência de $\chi^*(n, H)$, quando H é um grupo nilpotente de classe c.

Algumas demonstrações a seguir são análogas às encontradas em [4], porém vamos repeti-las aqui para facilitar a leitura do trabalho.

Lema 4.3.1. *Sejam $x,\ y,\ z,\ y_i,\ z_i\ \in H$, então:*

(i) $[x^{\psi^i}, y^{\psi^j}] = [x^{\psi^j}, y^{\psi^i}],\ i, j \in \{0, 1,\ \ldots, n-1\}$;

(ii) $[x^{\psi^i}, y^{\psi^j}]^{z^{\psi^i}} = [x^{\psi^i}, y^{\psi^j}]^{z^{\psi^j}},\ i, j \in \{0, 1,\ \ldots, n-1\}$;

(iii) $[x^{\psi^i}, y^{\psi^j}]^{w(z_1^{\epsilon_1}, z_2^{\epsilon_2}, \cdots, z_n^{\epsilon_n})} = [x^{\psi^i}, y^{\psi^j}]^{w(z_1^{\delta_1}, z_2^{\delta_2}, \cdots, z_n^{\delta_n})},\ \ \epsilon_k \in \{1, \psi,\ \psi^2,\ \ldots, \psi^{n-1}\}$, *em que* $\delta_k = \psi^i$, *se* $\epsilon_k \in \{\psi^i, \psi^j\}$, *e* $\delta_k = 0$ *se* $\epsilon_k \notin \{\psi^i, \psi^j\}$;

(iv) $[x^{\psi^i}, y^{\psi^j}, x^{\psi^j}] = [x^{\psi^j}, y^{\psi^j}, x^{\psi^i}],\ i \neq j \in \{0,\ 1,\ \ldots, n-1\}$;

(v) $[x^{\psi^i}, y_1^{\psi^j}, \cdots, y_k^{\psi^j}, x^{\psi^j}] = [x^{\psi^j}, y_1^{\psi^j}, \cdots, y_k^{\psi^j}, x^{\psi^i}],\ i \neq j \in \{0,\ 1, \ldots, n-1\}$.

Demonstração. (i) Temos que $[u^{\psi^i}, u^{\psi^j}] = 1,\ \forall i, j \in \{0, 1, \ldots, n-1\},\ u \in H$. Logo

$$\begin{aligned} 1 &= [x^{\psi^i} y^{-\psi^i}, x^{\psi^j} y^{-\psi^j}] \\ &= [x^{\psi^i}, x^{\psi^j} y^{-\psi^j}]^{y^{-\psi^i}} [y^{-\psi^i}, x^{\psi^j} y^{-\psi^j}] \\ &= [x^{\psi^i}, y^{-\psi^j}]^{y^{-\psi^i}} [y^{-\psi^i}, x^{\psi^j}]^{y^{-\psi^j}} \end{aligned}$$

Conjugando a igualdade acima por $y^{\psi^i} y^{\psi^j}$, obtemos

$$1 = [x^{\psi^i}, y^{-\psi^j}]^{y^{\psi^j}} [y^{-\psi^i}, x^{\psi^j}]^{y^{\psi^i}}$$

de onde segue que

$$[x^{\psi^j}, y^{\psi^i}] = [x^{\psi^i}, y^{\psi^j}]$$

(ii) Por (i) temos que

$$\begin{aligned}
[x^{\psi^i} z^{\psi^i}, y^{\psi^j}] &= [x^{\psi^j} z^{\psi^j}, y^{\psi^i}] \\
[x^{\psi^i}, y^{\psi^j}]^{z^{\psi^i}} [z^{\psi^i}, y^{\psi^j}] &= [x^{\psi^j}, y^{\psi^i}]^{z^{\psi^j}} [z^{\psi^j}, y^{\psi^i}] \\
[x^{\psi^i}, y^{\psi^j}]^{z^{\psi^i}} &= [x^{\psi^j}, y^{\psi^i}]^{z^{\psi^j}} \\
[x^{\psi^i}, y^{\psi^j}]^{z^{\psi^i}} &= [x^{\psi^i}, y^{\psi^j}]^{z^{\psi^j}}.
\end{aligned}$$

(iii) Seja $w(z_1^{\epsilon_1}, z_2^{\epsilon_2}, \cdots, z_n^{\epsilon_n}) = h_1^{\psi^{i_1}} h_2^{\psi^{i_2}} \dots h_m^{\psi^{im}}$ tal que

$$w(z_1^{\delta_1}, z_2^{\delta_2}, \cdots, z_n^{\delta_n}) = h_1^{\delta_{i_1}} h_2^{\delta_{i_2}} \dots h_m^{\delta_{im}},$$

onde $\delta_{i_j} = \psi^i$ se $\psi^{i_j} \in \{\psi^i, \psi^j\}$ e $\delta_{i_j} = 0$ se $\psi^{i_j} \notin \{\psi^i, \psi^j\}$. Para $m = 1$, por (i) ,

$$[x^{\psi^i}, y^{\psi^j}]^{h_1^{\psi^{i_1}}} = [x^{\psi^i}, y^{\psi^j}]^{h_1^{\psi^i}}$$

se $\psi^{i_1} \in \{\psi^i, \psi^j\}$. Caso $\psi^{i_1} \notin \{\psi^i, \psi^j\}$ então pela relação

$$[D^*_{i,j}, H^{\psi^k}],\ k \neq \{i,\ j\}$$

segue que $[x^{\psi^i}, y^{\psi^j}]^{h_1^{\psi^{i_1}}} = [x^{\psi^i}, y^{\psi^j}]$.

Agora suponhamos por indução sobre m que, $[x^{\psi^i}, y^{\psi^j}]^{h_1^{\psi^{i_1}} h_2^{\psi^{i_2}} \dots h_m^{\psi^{im}}} = [x^{\psi^i}, y^{\psi^j}]^{h_1^{\delta_{i_1}} h_2^{\delta_{i_2}} \dots h_m^{\delta_{im}}}$, logo

$$\begin{aligned}
[x^{\psi^i}, y^{\psi^j}]^{h_1^{\psi^{i_1}} h_2^{\psi^{i_2}} \dots h_m^{\psi^{im}} h_{m+1}^{\psi^{im+1}}} &= [x^{\psi^i}, y^{\psi^j}]^{h_1^{\delta_{i_1}} h_2^{\delta_{i_2}} \dots h_m^{\delta_{im}} h_{m+1}^{\psi^{im+1}}} \\
&= [x^{\psi^i}, y^{\psi^j}]^{h_1^{\delta_{i_1}} h_2^{\delta_{i_2}} \dots h_m^{\delta_{im}} h_{m+1}^{\delta^{im+1}}} \\
&\quad \text{novamente por } (ii) \text{ e pela relação } [D^*_{i,j}, H^{\psi^k}] = 1
\end{aligned}$$

(iv) Expandindo a igualdade $[y^{\psi^j}, x^{\psi^i} x^{\psi^j}] = [y^{\psi^j}, x^{\psi^j} x^{\psi^i}]$, temos

$$[y^{\psi^j}, x^{\psi^j}][y^{\psi^j}, x^{\psi^i}][y^{\psi^j}, x^{\psi^i}, x^{\psi^j}] = [y^{\psi^j}, x^{\psi^i}][y^{\psi^j}, x^{\psi^j}][y^{\psi^j}, x^{\psi^j}, x^{\psi^i}],$$

logo

$$[y^{\psi^j}, x^{\psi^j}]^{-1}[y^{\psi^j}, x^{\psi^i}]^{-1}[y^{\psi^j}, x^{\psi^j}][y^{\psi^j}, x^{\psi^i}][y^{\psi^j}, x^{\psi^i}, x^{\psi^j}] = [y^{\psi^j}, x^{\psi^j}, x^{\psi^i}],$$

Mas por (iii)

$$1 = [y^{\psi^j}, x^{\psi^i}; y^{\psi^j}, x^{\psi^i}] = [y^{\psi^j}, x^{\psi^i}; y^{\psi^j}, x^{\psi^j}]$$

aqui $[y^{\psi^j}, x^{\psi^i}; y^{\psi^j}, x^{\psi^i}] = [[y^{\psi^j}, x^{\psi^i}], [y^{\psi^j}, x^{\psi^i}]])$.
Usando essa relação na igualdade anterior, obtemos

$$[y^{\psi^j}, x^{\psi^i}, x^{\psi^j}] = [y^{\psi^j}, x^{\psi^j}, x^{\psi^i}].$$

Logo,

$$\begin{aligned} [y^{\psi^j}, x^{\psi^i}, x^{\psi^j}]^{-[x^{\psi^i}, y^{\psi^j}]} &= [y^{\psi^j}, x^{\psi^j}, x^{\psi^i}]^{-[x^{\psi^i}, y^{\psi^j}]} \\ [x^{\psi^i}, y^{\psi^j}, x^{\psi^j}] &= [y^{\psi^j}, x^{\psi^j}, x^{\psi^i}]^{-[x^{\psi^j}, y^{\psi^j}]} \text{ por } (iii) \\ [x^{\psi^i}, y^{\psi^j}, x^{\psi^j}] &= [x^{\psi^j}, y^{\psi^j}, x^{\psi^i}]. \end{aligned}$$

(v) Por indução sobre k, suponhamos que

$$[x^{\psi^i}, y_1^{\psi^j}, \cdots, y_{k-1}^{\psi^j}, x^{\psi^j}] = [x^{\psi^j}, y_1^{\psi^j}, \cdots, y_{k-1}\psi^j, x^{\psi^i}],\ i \neq j\ \in \{0,\ 1, \ldots, n-1\}$$

Expandindo então a igualdade

$$[x^{\psi^i}, y_1^{\psi^j}, \cdots, y_{k-2}^{\psi^j}, y_{k-1}^{\psi^j} y_k^{\psi^j}, x^{\psi^j}] = [x^{\psi^j}, y_1^{\psi^j}, \cdots, y_{k-2}^{\psi^j}, y_{k-1}^{\psi^j} y_k^{\psi^j}, x^{\psi^i}],$$

para $i \neq j \in \{0,\ 1, \ldots, n-1\}$, temos,

$$\begin{gathered} \big[[x^{\psi^i}, y_1^{\psi^j}, \cdots, y_{k-2}^{\psi^j}, y_k^{\psi^j}][x^{\psi^i}, y_1^{\psi^j}, \cdots, y_{k-2}^{\psi^j}, y_{k-1}^{\psi^j}][x^{\psi^i}, y_1^{\psi^j}, \cdots, y_{k-2}^{\psi^j}, y_{k-1}^{\psi^j}, y_k^{\psi^j}], x^{\psi^j}\big] = \\ \big[[x^{\psi^j}, y_1^{\psi^j}, \cdots, y_{k-2}^{\psi^j}, y_k^{\psi^j}][x^{\psi^j}, y_1^{\psi^j}, \cdots, y_{k-2}^{\psi^j}, y_{k-1}^{\psi^j}][x^{\psi^j}, y_1^{\psi^j}, \cdots, y_{k-2}^{\psi^j}, y_{k-1}^{\psi^j}, y_k^{\psi^j}], x^{\psi^i}\big]. \end{gathered}$$

Logo,

$$\begin{aligned} &[x^{\psi^i}, y_1^{\psi^j}, \cdots, y_{k-2}^{\psi^j}, y_k^{\psi^j}, x^{\psi^j}]^{[x^{\psi^i}, y_1^{\psi^j}, \cdots, y_{k-2}^{\psi^j}, y_{k-1}^{\psi^j}][x^{\psi^i}, y_1^{\psi^j}, \cdots, y_{k-2}^{\psi^j}, y_{k-1}^{\psi^j}, y_k^{\psi^j}]} \\ &\times [x^{\psi^i}, y_1^{\psi^j}, \cdots, y_{k-2}^{\psi^j}, y_{k-1}^{\psi^j}, x^{\psi^j}]^{[x^{\psi^i}, y_1^{\psi^j}, \cdots, y_{k-2}^{\psi^j}, y_{k-1}^{\psi^j}, y_k^{\psi^j}]} \\ &\times [x^{\psi^i}, y_1^{\psi^j}, \cdots, y_{k-2}^{\psi^j}, y_{k-1}^{\psi^j}, y_k^{\psi^j}, x^{\psi^j}] \\ = &[x^{\psi^j}, y_1^{\psi^j}, \cdots, y_{k-2}^{\psi^j}, y_k^{\psi^j}, x^{\psi^i}]^{[x^{\psi^j}, y_1^{\psi^j}, \cdots, y_{k-2}^{\psi^j}, y_{k-1}^{\psi^j}][x^{\psi^j}, y_1^{\psi^j}, \cdots, y_{k-2}^{\psi^j}, y_{k-1}^{\psi^j}, y_k^{\psi^j}]} \\ &\times [x^{\psi^j}, y_1^{\psi^j}, \cdots, y_{k-2}^{\psi^j}, y_{k-1}^{\psi^j}, x^{\psi^i}]^{[x^{\psi^j}, y_1^{\psi^j}, \cdots, y_{k-2}^{\psi^j}, y_{k-1}^{\psi^j}, y_k^{\psi^j}]} \\ &\times [x^{\psi^j}, y_1^{\psi^j}, \cdots, y_{k-2}^{\psi^j}, y_{k-1}^{\psi^j}, y_k^{\psi^j}, x^{\psi^i}] \end{aligned}$$

de onde podemos concluir, por hipótese de indução junto com (iii), que

$$[x^{\psi^i}, y_1^{\psi^j}, \cdots, y_k^{\psi^j}, x^{\psi^j}] = [x^{\psi^j}, y_1^{\psi^j}, \cdots, y_k^{\psi^j}, x^{\psi^i}],\ i \neq j \in \{0,\ 1, \ldots, n-1\}$$

$\square$

Lema 4.3.2. *(i)* $[H^{\psi^i}, H^{\psi^j}, H^{\epsilon_1}, \ldots, H^{\epsilon_n}] = [H^{\psi^i}, (n+1)H^{\psi^j}]$, $\forall n \geq 1,\ i \neq j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, *e* $\epsilon_i \in \{\psi^i, \psi^j\}$

(i') $[H^{\psi^i}, H^{\psi^j}, H^{\epsilon_1}, \ldots, H^{\epsilon_n}] = 1$, $\forall n \geq 1,\ i \neq j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ *e se algum* $\epsilon_i \in \big\{\{1, \psi, \ldots, \psi^{n-1}\} - \{\psi^i, \psi^j\}\big\}$;

(ii) $[H^{\psi^i}, mH^{\psi^j}; \gamma_n(H^{\psi^j})] \leq [H^{\psi^i}, (m+n)H^{\psi^j}]$, $\forall\ m \geq 0,\ n \geq 1,\ i \neq j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$;

(iii) $[H^{\epsilon_1}, H^{\epsilon_2}, \ldots, H^{\epsilon_n}] \leq [H^{\psi^i}, (n-1)H^{\psi^j}]\gamma(H^{\psi^i})^{\chi^*(n,H)}\gamma(H^{\psi^j})^{\chi^*(n,H)}$, *para* $\epsilon_k \in \{\psi^i, \psi^j\}$, $i \neq j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

Demonstração. As demonstrações de (i) e (i') seguem imediatamente do item (iii) do Lema 4.3.1 junto com a relação $[D^*_{i,j}, H^{\psi^k}] = 1$ $k \neq \{i, j\}$.

A demonstração de (ii) é por indução sobre n. Para $n = 1$ não há nada a fazer. Por indução suponhamos o resultado válido para $2 \leq k \leq n-1$. Agora com $x \in \gamma_{n-1}(H^{\psi^j})$, $y \in H^{\psi^j}$, $z \in [H^{\psi^i}, mH^{\psi^j}]$, tomando a forma equivalente da identidade de Witt $[z, [x, y]] = [z, y^{-1}, x^z]^y [z, x^{-1}, y^{-1}]^{xy}$ junto com o item (ii) do Lema 4.3.1, temos

$$\begin{aligned} [H^{\psi^i}, mH^{\psi^j}, \gamma_n(H^{\psi^j})] &\leq [H^{\psi^i}, (m+1)H^{\psi^j}, \gamma_{n-1}(H^{\psi^j})]^{H^{\psi^j}} [H^{\psi^i}, mH^{\psi^j}, \gamma_n(H^{\psi^j})]^{H^{\psi^j}} \\ &\leq [H^{\psi^i}, (m+1)H^{\psi^j}, \gamma_{n-1}(H^{\psi^j})][H^{\psi^i}, mH^{\psi^j}, \gamma_n(H^{\psi^j})] \\ &\leq [H^{\psi^i}, (m+n)H^{\psi^j}], \quad \text{(por indução)}. \end{aligned}$$

Em (iii), se $n \geq 2$ e $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = (\psi^i, \psi^i, \ldots, \psi^i)$ ou $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = (\psi^j, \psi^j, \ldots, \psi^j)$, não há nada a fazer.

Então sem perda de generalidade, podemos supor

$$(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = (\psi^i, \psi^i, \ldots, \psi^i, \psi^j, \epsilon_{k+2}, \ldots, \epsilon_n)$$

para algum $1 \leq k \leq n$.

Logo,

$$\begin{aligned} [H^{\epsilon_1}, H^{\epsilon_2}, \ldots, H^{\epsilon_n}] &= [\gamma_k(H^{\psi^i}), H^{\psi^j}, H^{\epsilon_{k+2}}, \ldots, H^{\epsilon_n}] \\ &= [\gamma_k(H^{\psi^i}), H^{\psi^j}, (n-k-1)H^{\psi^j}] \quad \text{(pelo item } (iii) \text{ do Lema 4.3.1)} \\ &= [\gamma_k(H)^{\psi^i}, H^{\psi^j}, (n-k-1)H^{\psi^j}] \\ &= [\gamma_k(H)^{\psi^j}, H^{\psi^i}, (n-k-1)H^{\psi^j}] \quad \text{(pelo item } (i) \text{ do Lema 4.3.1)} \\ &= [H^{\psi^i}, \gamma_k(H^{\psi^j}), (n-k-1)H^{\psi^j}] \\ &= [H^{\psi^i}, \gamma_{n-1}(H^{\psi^j})] \quad \text{(pelo item } (ii)). \end{aligned}$$

$\square$

Lema 4.3.3. *Seja* $\gamma_{c+1}(H) = 1$ *e* $\chi_n^* = \chi^*(n, H)$*. Então,*

(i) $[\gamma_{c+1}(\chi_n^*), \gamma_2(\chi_n^*)] = 1$*;*

(ii) $[\gamma_i(\chi_n^*), \gamma_2(\chi_n^*), (2c-1-i)\chi_n^*] = 1, \quad \forall i \geq 2$.

Demonstração. (i) Pelos itens (i') e (iii) do Lema 4.3.2, $\gamma_{c+1}(\chi_n^*) \leq \prod_{0\leq i<j\leq n-1} [H^{\psi^i}, cH^{\psi^j}]$. Logo,

$$\begin{aligned}
[\gamma_{c+1}(\chi_n^*), \gamma_2(\chi_n^*)] &\leq \Big[\prod_{0\leq i<j\leq n-1} [H^{\psi^i}, cH^{\psi^j}], \prod_{0\leq i\leq j\leq n-1} [H^{\psi^i}, H^{\psi^j}]\Big] \\
&\leq \prod_{0\leq i<j\leq n-1} \Big[[H^{\psi^i}, cH^{\psi^j}], [H^{\psi^i}, H^{\psi^j}]\Big] \\
&\quad \text{(pela relação } [D_{i,j}, H^{\psi^k}] = 1 \ k \neq \{i,j\} \text{ e pelo Lema 4.3.2 } (iii)) \\
&= \prod_{0\leq i<j\leq n-1} \Big[[H^{\psi^i}, H^{\psi^j}], [H^{\psi^i}, cH^{\psi^j}]\Big] \\
&= \prod_{0\leq i<j\leq n-1} \Big[[H^{\psi^i}, H^{\psi^j}], [H^{\psi^j}, cH^{\psi^j}]\Big] \\
&= 1.
\end{aligned}$$

No item (ii), uma repetitiva aplicação do Lema dos três subgrupos

$$[A, B, C] \leq [A, C, B][B, C, A],$$

para subgrupos normais A, B, e C de χ_n^*, obtemos, para $i \geq 2$,

$$[\gamma_i(\chi_n^*), \gamma_2(\chi_n^*), (2c-1-i)\chi_n^*] \leq \prod_{m+n=2c+1,\ m,n\geq 2} [\gamma_n(\chi_n^*), \gamma_m(\chi_n^*)].$$

Logo como $m \geq c+1$ ou $n \geq c+1$, o resultado segue pelo item (i). □

Lema 4.3.4. *Se* $\gamma_{c+1}(H) = 1$*, então para todo* $h_i \in H$ *e* $\epsilon_i \in \{\psi^i, \psi^j\}$*,*

$$[h_1^{\epsilon_1}, h_2^{\epsilon_2}, \ldots, h_{2c+1}^{\epsilon_{2c+1}}] = [h_1^{\epsilon_1}, h_2^{\epsilon_2}, h_{\sigma(3)}^{\epsilon_{\sigma(3)}}, \ldots, h_{\sigma(2c+1)}^{\epsilon_{\sigma(2c+1)}}]$$

para toda permutação σ *de* $\{3, 4, \ldots, 2c+1\}$.

Demonstração. Temos que, $\forall\, i \in \{3, \ldots, 2c+1\}$,

$$[h_1^{\epsilon_1}, h_2^{\epsilon_2}, \ldots, [h_{i-1}^{\epsilon_{i-1}}, h_i^{\epsilon_i}]] \equiv 1 \bmod ([\gamma_{i-2}(\chi_n^*), \gamma_2(\chi_n^*)]).$$

Então por Levin [6, Teorema 2.1],

$$[h_1^{\epsilon_1}, h_2^{\epsilon_2}, \ldots, h_i^{\epsilon_i}, h_{i-1}^{\epsilon_{i-1}}] \equiv [h_1^{\epsilon_1}, h_2^{\epsilon_2}, \ldots, h_{i-1}^{\epsilon_{i-1}}, h_i^{\epsilon_i}] \bmod ([\gamma_{i-2}(\chi_n^*), \gamma_2(\chi_n^*)]).$$

Pelo Lema 4.3.3 item (ii),

$$[h_1^{\epsilon_1}, h_2^{\epsilon_2}, \ldots, h_i^{\epsilon_i}, h_{i+1}^{\epsilon_{i+1}}, \ldots, h_{(2c+1)}^{\epsilon_{(2c+1)}}] = [h_1^{\epsilon_1}, h_2^{\epsilon_2}, \ldots, h_{i+1}^{\epsilon_{i+1}}, h_i^{\epsilon_i}, \ldots, h_{(2c+1)}^{\epsilon_{(2c+1)}}].$$

Logo

$$[h_1^{\epsilon_1}, h_2^{\epsilon_2}, \ldots, h_{2c+1}^{\epsilon_{2c+1}}] = [h_1^{\epsilon_1}, h_2^{\epsilon_2}, h_{\sigma(3)}^{\epsilon_{\sigma(3)}}, \ldots, h_{\sigma(2c+1)}^{\epsilon_{\sigma(2c+1)}}]$$

para toda permutação σ de $\{3, 4, \ldots, 2c+1\}$.

□

O lema seguinte é ma consequência do Lema 4.3.4.

Lema 4.3.5. *Se H é localmente nilpotente então $\chi^*(n, H)$ é localmente nilpotente.*

Demonstração. Seja $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ um conjunto de elementos de $\chi^*(n, H)$ e seja $\{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$ seu suporte em H. Queremos mostrar que $\langle g_1, g_2, \ldots, g_n\rangle$ é um subgrupo nilpotente de $\chi^*(n, H)$. Claramente, podemos admitir que $m \geq 2$. Como $\langle h_1, h_2, \ldots, h_m\rangle$ é um subgrupo nilpotente de H, digamos de classe c, então para analisarmos a nilpotência de $\langle g_1, g_2, \ldots, g_n\rangle$, pelo Lema 4.3.2 é suficiente mostrar que

$$[x^{\psi^i}, y^{\psi^j}, z_1^{\psi^j}, \ldots, z_{c^*}^{\psi^j}] = 1$$

para algum $c^* > c$ e todo $i \neq j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $x, y, z_i \in \langle h_1, \ldots, h_m\rangle$.

Com $c^* \geq 2cm$, pelos Lemas 4.3.3 e 4.3.4, $[x^{\psi^i}, y^{\psi^j}, z_1^{\psi^j}, \ldots, z_{c^*}^{\psi^j}]$ pode ser reescrito como produto de comutadores da forma

$$[x^{\psi^i}, y^{\psi^j}, k_1 {h'}_1^{\psi^j}, \ldots, k_m {h'}_m^{\psi^j}]$$

onde $\{h'_1, \ldots, h'_m\} = \{h_1, \ldots, h_m\}$, $k_1 \geq \ldots \geq k_m \geq 0$ e $\sum_{i=1}^m k_i \geq c^* \geq 2cm$. Dessa forma deve ocorrer $k_1 \geq 2c$ e, portanto, vamos mostrar que $[x^{\psi^i}, y^{\psi^j}, kz^{\psi^j}] = 1$ para todo $k \geq 2c$ e $x, y, z \in \langle h_1, \ldots, h_m\rangle$.

Agora seja $\overline{H} = \langle x, y, z\rangle$. Então, por hipótese, $\gamma(\overline{H})_{c+1} = 1$. Podemos usar a congruência de Jacobi 1.1.4, para escrever

$$[x^{\psi^i}, y^{\psi^j}, z^{\psi^j}] \equiv [x^{\psi^i}, z^{\psi^j}, y^{\psi^j},][x^{\psi^i}, [y^{\psi^j}, z^{\psi^j}]] \bmod (\gamma_2(\gamma_2(< x^{\psi^i}, y^{\psi^j}, z^{\psi^j} >))).$$

Pelo Lema 4.3.3,

$$[x^{\psi^i}, y^{\psi^j}, z^{\psi^j}, (k-1)z^{\psi^j}] = [x^{\psi^i}, z^{\psi^j}, y^{\psi^j}, (k-1)z^{\psi^j}][x^{\psi^i}, [y^{\psi^j}, z^{\psi^j}], (k-1)z^{\psi^j}].$$

Segue também que,

$$[x^{\psi^i},[y^{\psi^j},z^{\psi^j}]] \equiv [z^{\psi^j},y^{\psi^j},x^{\psi^i}] \bmod (\gamma_2(\gamma_2(< x^{\psi^i},y^{\psi^j},z^{\psi^j} >))) \tag{4.3.1}$$

De 4.3.1 e novamente usando o Lema 4.3.3,

$$\begin{aligned}
[x^{\psi^i},[y^{\psi^j},z^{\psi^j}],(k-1)z^{\psi^j}] &= [z^{\psi^j},y^{\psi^j},x^{\psi^i},(k-1)z^{\psi^j}] \\
&= [z^{\psi^j},y^{\psi^j},(k-1)z^{\psi^j},x^{\psi^i}] \quad \text{(pelo Lema 4.3.4)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
[x^{\psi^i},y^{\psi^j},z^{\psi^j},(k-1)z^{\psi^j}] &= [x^{\psi^i},z^{\psi^j},y^{\psi^j},(k-1)z^{\psi^j}] \\
&= [z^{\psi^i},x^{\psi^j},y^{\psi^j},(k-2)z^{\psi^j},z^{\psi^j}]^{-1} \\
&= [z^{\psi^j},x^{\psi^j},y^{\psi^j},(k-2)z^{\psi^j},z^{\psi^i}]^{-1} \quad \text{(pelo Lema 4.3.1 } (iv)) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

O que completa a prova do lema. $\square$

Considere agora H um grupo nilpotente de classe no máximo c, $c \geq 1$. Então pelo Lema 4.3.1 (v), $\chi^*(n,H)$ satisfaz a identidade

$$[x^{\psi^i},y_2^{\psi^j},\ldots y_{c+1}^{\psi^j},x^{\psi^j}] = 1, \tag{4.3.2}$$

para todos $x,\ y_i\ \in H$. Se $H = \langle x,y\rangle$ então, modulo $\gamma_{c+3}(\chi^*(n,H))$, $\gamma_{c+2}(\chi^*(n,H))$ é gerado pelos elementos da forma $[x^{\psi^i},z_2^{\psi^j},\ldots z_{c+1}^{\psi^j},x^{\psi^j}]$, com $Z_i \in \{x,y\}$ e $i \neq j \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, que são triviais pela equação 4.3.2 acima. Logo, $\gamma_{c+3}(\chi^*(n,H)) = \gamma_{c+2}(\chi^*(n,H))$. Como pelo Lema 4.3.5 $\chi^*(n,H)$ é nilpotente, segue que $\gamma_{c+2}(\chi^*(n,H)) = 1$. Isso nos dá o seguinte resultado:

Teorema 4.3.6. *Se H é um grupo nilpotente de classe no máximo c, 2-gerado, então $\chi^*(n,H)$ é nilpotente de classe no máximo $c+1$.*

Vamos investigar o caso geral com $\gamma_{c+1}(H) = 1$. Vejamos que, módulo $\gamma_{c+3}(\chi^*(n,H))$, a equação 4.3.2 nos dá

$$1 \equiv [x^{\psi^i}y_1^{\psi^j},\ldots,y_{c+1}^{\psi^j},x^{\psi^j}y_1^{\psi^j}] \equiv [x^{\psi^i},y_2^{\psi^j},\ldots,y_{c+1}^{\psi^j},y_1^{\psi^j}][y_1^{\psi^i},y_2^{\psi^j}\ldots,y_{c+1}^{\psi^j},x^{\psi^j}] \tag{4.3.3}$$

que, comutando com x^{ψ^j} e usando 4.3.2, dá

$$[y_1^{\psi^i},y_2^{\psi^j}\ldots,y_{c+1}^{\psi^j},x^{\psi^j},x^{\psi^j}] \equiv 1 \pmod{\gamma_{c+4}(\chi^*(n,H))} \tag{4.3.4}$$

para todo $x,\ y_i\ \in H$. Além disso, módulo $\gamma_{c+4}(\chi^*(n,H))$, para $2\leq k\leq c$, temos

$$\begin{aligned}
&\big[[y_1^{\psi^i}, y_2^{\psi^j}, \ldots, y_k^{\psi^j}], [x^{\psi^j}, y_{k+1}^{\psi^j}], y_{k+2}^{\psi^j}, \ldots, y_{c+1}^{\psi^j}, x^{\psi^j}\big]\\
&\quad\equiv\ \big[[y_1^{\psi^i}, y_2^{\psi^j}, \ldots, y_k^{\psi^j}], [x^{\psi^i}, y_{k+1}^{\psi^j}], y_{k+2}^{\psi^j}, \ldots, y_{c+1}^{\psi^j}, x^{\psi^j}\big]\\
&\quad\equiv\ \big[[x^{\psi^i}, y_{k+1}^{\psi^j}], [y_1^{\psi^j}, y_2^{\psi^j}, \ldots, y_k^{\psi^j}], y_{k+2}^{\psi^j}, \ldots, y_{c+1}^{\psi^j}, x^{\psi^j}\big]^{-1}\\
&\quad\equiv\ \big[[x^{\psi^j}, y_{k+1}^{\psi^j}], [y_1^{\psi^j}, y_2^{\psi^j}, \ldots, y_k^{\psi^j}], y_{k+2}^{\psi^j}, \ldots, y_{c+1}^{\psi^j}, x^{\psi^i}\big]^{-1} \quad \text{por 4.3.2}\\
&\quad\equiv\ 1, \text{ já que } \gamma_{c+1}(H)=1.
\end{aligned}$$

Vamos recordar isso como

$$\big[[y_1^{\psi^i}, y_2^{\psi^j}, \ldots, y_k^{\psi^j}], [x^{\psi^j}, y_{k+1}^{\psi^j}], y_{k+2}^{\psi^j}, \ldots, y_{c+1}^{\psi^j}, x^{\psi^j}\big] \equiv 1 \mod \gamma_{c+4}(\chi^*(n,H)), \tag{4.3.5}$$

para todos $x,\ y_i\ \in H$, $0\leq i<j\leq\ n-1$ e $2\leq k\leq c$. Então, por 4.3.5, para $2\leq k\leq c$, temos

$$\begin{aligned}
&[y_1^{\psi^i}, y_2^{\psi^j}, \ldots, y_k^{\psi^j}, x^{\psi^j}, y_{k+1}^{\psi^j}, y_{k+2}^{\psi^j}, \ldots, y_{c+1}^{\psi^j}, x^{\psi^j}]\\
&\quad\equiv\ [y_1^{\psi^i}, y_2^{\psi^j}, \ldots, y_k^{\psi^j}, x^{\psi^j}, y_{k+1}^{\psi^j}, y_{k+2}^{\psi^j}, \ldots, y_{c+1}^{\psi^j}, x^{\psi^j}]\\
&\quad\equiv\ [y_1^{\psi^i}, y_2^{\psi^j}, \ldots, y_{k+1}^{\psi^j}, x^{\psi^j}, y_{k+2}^{\psi^j}, \ldots, y_{c+1}^{\psi^j}, x^{\psi^j}]\\
&\quad\ \ \vdots\\
&\quad\equiv\ [y_1^{\psi^i}, y_2^{\psi^j}, \ldots, y_{c+1}^{\psi^j}, x^{\psi^j}, x^{\psi^j}]\\
&\quad\equiv\ 1, \text{ por 4.3.4.}
\end{aligned}$$

Além disso, $[y_1^{\psi^i}, x^{\psi^j}, y_2^{\psi^j}, \ldots, y_{c+1}^{\psi^j}, x^{\psi^j}] \equiv [x^{\psi^i}, y_1^{\psi^j}, y_2^{\psi^j}, \ldots, y_{c+1}^{\psi^j}, x^{\psi^j}]^{-1} \equiv 1$, por 4.3.2. Logo,

$$[y_1^{\psi^i}, y_2^{\psi^j}, \ldots, y_k^{\psi^j}, x^{\psi^j}, y_{k+1}^{\psi^j}, y_{k+2}^{\psi^j}, \ldots, y_{c+1}^{\psi^j}, x^{\psi^j}] \equiv 1 \mod \gamma_{c+4}(\chi^*(n,H)), \tag{4.3.6}$$

para todo $1\leq k\leq c+1$.

Agora trocando x por xz em 4.3.6 e expandindo módulo $\gamma_{c+4}(\chi^*(n,H))$, obtemos a congruência

$$\begin{aligned}
[y_1^{\psi^i}, y_2^{\psi^j}, \ldots, y_k^{\psi^j}, x^{\psi^j}, y_{k+1}^{\psi^j}, y_{k+2}^{\psi^j}, \ldots, y_{c+1}^{\psi^j}, z^{\psi^j}]\ &\equiv \\
[y_1^{\psi^i}, y_2^{\psi^j}, \ldots, y_k^{\psi^j}, z^{\psi^j}, y_{k+1}^{\psi^j}, y_{k+2}^{\psi^j}, \ldots, y_{c+1}^{\psi^j}, x^{\psi^j}]^{-2}&.
\end{aligned}\tag{4.3.7}$$

Usando 4.3.8, segue que todo comutador de peso $c+3$ em $\chi^*(n,H)$, com uma entrada x repetida, pode ser expressa, módulo $\gamma_{c+4}(\chi^*(n,H))$, como produto de comutadores da forma

$$[y_1^{\psi^i}, y_2^{\psi^j}, \ldots, y_k^{\psi^j}, x^{\psi^j}, y_{k+1}^{\psi^j}, y_{k+2}^{\psi^j}, \ldots, y_{c+1}^{\psi^j}, x^{\psi^j}], \quad 1\leq k\leq c+1,$$

que é trivial por 4.3.6. Em particular, se H é um grupo m-gerado com $\gamma_{c+1}(H)=1$ e $m\leq c+2$, então $\gamma_{m+3}(\chi^*(n,H))=\gamma_{m+4}(\chi^*(n,H))=\ldots=1$. Então, pelo Lema 4.3.4, provamos o

Teorema 4.3.7. *Seja H um grupo m-gerado nilpotente de classe no máximo c tal que $m \geq 2$, $c \geq 1$. Então, para $m \leq c+2$, $\gamma_{c+3}(\chi^*(n, H)) = 1$.*

Considerando ainda H um grupo nilpotente de classe no máximo c, a congruência 4.3.8 nos dá

$$\begin{aligned} [y_1^{\psi^i}, \ldots, y_{c+1}^{\psi^j}, x^{\psi^j}, z^{\psi^j}] &\equiv [y_1^{\psi^i}, \ldots, y_{c+1}^{\psi^j}, z^{\psi^j}, x^{\psi^j}]^{-1} \\ &\equiv [y_1^{\psi^i}, \ldots, y_{c+1}^{\psi^j}, x^{\psi^j}, z^{\psi^j}]^{-1} \quad \text{(pelo Lema 4.3.3 } (i)). \end{aligned}$$

Logo,

$$[y_1^{\psi^i}, \ldots, y_{c+1}^{\psi^j}, x^{\psi^j}, z^{\psi^j}]^2 \equiv 1 \mod \gamma_{c+4}(\chi^*(n, H)).$$

Pelo Teorema 4.3.7 todo comutador de peso $c+4$ em $\chi^*(n, H)$ com entradas no conjunto $\{y_1, \ldots, y_{c+1}, x, z\}$, é trivial. Logo

$$[y_1^{\psi^i}, \ldots, y_{c+1}^{\psi^j}, x^{\psi^j}, z^{\psi^j}]^2 \equiv 1. \tag{4.3.8}$$

Repetindo a aplicação de 4.3.8 segue que

$$[y_1^{\psi^i}, y_2^{\psi^j} \ldots, y_{c+3}^{\psi^j}] = [y_1^{\psi^i}, y_{\rho 2}^{\psi^j} \ldots, y_{\rho c+3}^{\psi^j}]^{|\rho|},$$

onde ρ é uma permutação de $\{2, 3, \ldots, c+3\}$ e $|\rho| = 1$ ou -1, conforme ρ seja uma permutação par ou ímpar. Logo, se H é um grupo m-gerado com $m \geq c+3$, então para $c+3 \leq k \leq m$, existem $\binom{m}{k}\binom{n}{2}$ escolhas distintas para se ter um comutador de peso k. Este fato junto com 4.3.8 e $[D_{i,j}, D_{k,s}] = 1$ para todo $1 \leq i < j \leq n-1$ e $1 \leq s < k \leq n-1$, temos o seguinte teorema:

Teorema 4.3.8. *Seja H um grupo m-gerado nilpotente de classe no máximo c, com $m \geq 2$, $c \geq 1$. Então, para $m \geq c+3$, $\gamma_{c+3}(\chi^*(n, H))$ é um 2-grupo abeliano elementar de posto no máximo*

$$\sum_{k=c+3}^{m} \binom{m}{k}\binom{n}{2}.$$

Capítulo 5

Sobre o grupo $\mathcal{E}(H)$

Neste capítulo dado um grupo H e um isomorfismo $\psi : H \mapsto H^{\psi}$, entre H e H^{ψ}, introduzimos o grupo

$$\mathcal{E}(H) = \left\langle H,\ H^{\psi} \mid [\mathcal{D}, \mathcal{L}] = 1 \right\rangle$$

onde $\mathcal{D} = \mathcal{D}(H) = [H, H^{\psi}]$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(H) = [H, \psi]$. Analisamos sua estrutura e observamos se ainda é um operador na classe dos grupos finitos, solúveis, nilpotentes e policíclicos como $\chi(H)$ o é.

Análogo ao grupo $\chi(H)$, destacamos os subgrupos de $\mathcal{E}(H)$.

$$\mathcal{W}(H) = \mathcal{D}(H) \cap \mathcal{L}(H),$$
$$\mathcal{L}_1(H) = [\mathcal{L}, H],\ \mathcal{L}_2(H) = [\mathcal{L}, H^{\psi}],$$
$$\mathcal{R} = [H, \mathcal{L}, H^{\psi}].$$

O exemplo a seguir mostra que se H é finito ou nilpotente, então $\mathcal{E}(H)$ pode não ser finito ou nilpotente.

Exemplo 5.0.9. Seja $\mathbb{Z}_2 =< a >$, vamos determinar $\mathcal{E}(\mathbb{Z}_2)$.

Vejamos que

$$1 = [aa, a^{\psi}] \quad = \quad [a, a^{\psi}]^{a}[a, a^{\psi}]$$

Da mesma forma

$$1 = [a, a^{\psi}a^{\psi}] \quad = \quad [a, a^{\psi}][a, a^{\psi}]^{a^{\psi}}$$

Logo, a igualdade $[a, a^\psi]^a = [a, a^\psi]^{a^\psi}$, vale trivialmente em $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ e, portanto, $\mathcal{E}(\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \cong D_\infty$, o grupo diedral infinito.

5.1 Um estudo sobre $\mathcal{E}(H)$, H um grupo qualquer

Alguns resultados a seguir são adaptações de resultados referentes ao grupo $\chi(H)$ encontrados por Sidki em [19].

Lema 5.1.1. *Sejam $\mathcal{L}(H)$, $\mathcal{D}(H)$, e $\mathcal{W}(H)$, subgrupos de $\mathcal{E}(H)$. Então*

(i) $\mathcal{L}(H)$, $\mathcal{D}(H)$, $\mathcal{W}(H) \lhd \mathcal{E}(H)$;

(ii) $\mathcal{E}(H) = \mathcal{L} \cdot H$ *é um produto semidireto;*

(ii') Existe um epimorfismo $\rho : \mathcal{E}(H) \to H$, $h \mapsto h, h^\psi \mapsto h$, $\forall h \in H$, *tal que* $\mathrm{Nuc}(\rho) = \mathcal{L}$;

(iii) $\mathcal{E}(H) = (\mathcal{D} \cdot H) \cdot H^\psi$;

(iii') Existe um epimorfismo $\upsilon : \mathcal{E}(H) \to H \times H$, $h \mapsto (h, 1)$, $h^\psi \mapsto (1, h), \forall h \in H$, *tal que* $\mathrm{Nuc}(\upsilon) = \mathcal{D}$. *Além disso,* $\mathcal{D} \cap H = 1$.

Demonstração. (i) Sejam $h_1,\ h_2,\ h \in H$, então

$$\begin{aligned} [h_1, \psi]^h &= h^{-1}{h_1}^{-1}h_1^\psi h \\ &= h^{-1}{h_1}^{-1}h_1^\psi h^\psi h^{-\psi} h \\ &= [h_1 h, \psi][h, \psi]^{-1} \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} [h_1, \psi]^{h^\psi} &= h^{-\psi}{h_1}^{-1}h_1^\psi h^\psi \\ &= h^{-\psi} h h^{-1}{h_1}^{-1}h_1^\psi h^\psi \\ &= [h, \psi]^{-1}[h_1 h, \psi]. \end{aligned}$$

Logo $\mathcal{E}(H)$ normaliza $\mathcal{L}(H)$.

Da mesma forma $\mathcal{E}(H)$ normaliza $\mathcal{D}(H)$, pois

$$[h_1, h_2^\psi]^h = [h_1, h_2^\psi]^{h^\psi} = [h_1, h^\psi]^{-1}[h_1, h_2^\psi h^\psi].$$

$\mathcal{W}(H) = \mathcal{D} \cap \mathcal{L} \lhd \mathcal{E}(H)$ é imediato.

(ii) Como pelo item (i) , $\mathcal{L} \lhd \mathcal{E}(H)$, e

$$h^{\psi} = hh^{-1}h^{\psi} = h[h,\psi],$$

obtemos parte de (ii)

(ii) e (ii') A função $\tilde{\rho} : H \cup H^{\psi} \to H$, tal que $h \mapsto h,\ h^{\psi} \mapsto h^{\psi},\ \forall h \in H$, estende-se a um epimorfismo $\rho : \mathcal{E}(H) \to H$, já que $\forall\ h_1,\ h_2,\ h_3 \in H$

$$([h_1, h_2^{\psi}]^{h_3^{\psi}})^{\tilde{\rho}} = [h_1, h_2]^{h_3} = ([h_1, h_2^{\psi}]^{h_3})^{\tilde{\rho}},$$

ou seja, ρ preserva as relações definidoras de $\mathcal{E}(H)$. Além disso, a restrição de ρ a H é a identidade, logo $\mathrm{Nuc}(\rho) \cap H = 1$. Mas como $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{Nuc}(\rho)$, então $\mathcal{L} \cap H = 1$, completando a prova de (ii).

Agora $\frac{\mathcal{E}(H)}{\mathcal{L}} = \frac{LH}{L} \cong \frac{H}{\mathcal{L}\cap H} \cong H$. Portanto $\mathrm{Nuc}(\rho) = \mathcal{L}$.

(iii) e (iii') Podemos escrever

$$h_2^{\psi}h_1 = [h_2^{-\psi}, h_1^{-1}]h_1h_2^{\psi} \quad \forall\ h_1,\ h_2 \in H,$$

logo como $\mathcal{D} \lhd \mathcal{E}(H)$, temos que $\mathcal{E}(H) = \mathcal{D} \cdot H \cdot H^{\psi}$.

Consideremos a função $\tilde{\upsilon} : H \cup H^{\psi} \to H \times H,\ h \mapsto (h,1),\ h^{\psi} \mapsto (1,h), \forall h \in H$. Daí temos que

$$([h_1, h_2^{\psi}]^{h_3})^{\tilde{\upsilon}} = (1,1) = ([h_1, h_2^{\psi}]^{h_3^{\psi}})^{\tilde{\upsilon}}.$$

Logo $\tilde{\upsilon}$ estende-se a um epimorfismo de $\upsilon : \mathcal{E}(H) \to H \times H$.

Agora como $\mathcal{D} \subseteq \mathrm{Nuc}(\upsilon)$, então υ induz $\upsilon^* : \frac{\mathcal{E}(H)}{\mathcal{D}} \to H \times H$, tal que $Dh \mapsto (h,1)$ e $Dh^{\psi} \mapsto (1,h)$. Por outro lado consideremos a função $\tilde{\phi} : H \times H \to \frac{\mathcal{E}(H)}{\mathcal{D}}$ tal que $(h,1) \mapsto \mathcal{D}h$ e $(1,h) \mapsto \mathcal{D}h^{\psi}$. Pela Proposição 1.3.4 junto com $\tilde{\phi}([(h_1,1),(1,h_2)]) = D[h_1, h_2^{\psi}] = D$, temos que $\tilde{\phi}$ preserva as relações de $H \times H$. Logo $\tilde{\psi}$ estende-se á um epimorfismo $\phi : H \times H \to \frac{\mathcal{E}(H)}{\mathcal{D}}$, tal que $\phi\upsilon^*$ é a identidade. Portanto $\mathrm{Nuc}(\upsilon) = \mathcal{D}$.

Observemos ainda que a restrição de υ a H é a identidade, e à H^{ψ} é isomorfismo. Logo $\mathcal{D} \cap HH^{\psi} = \mathcal{D} \cap H = \mathcal{D} \cap H^{\psi} = 1$.

$\square$

Lema 5.1.2. *Sejam $h_1,\ h_2,\ h_3,\ z_i \in H$. Então,*

(i) $[h_1, \psi]$ *comuta com* $[h_2, {h_3}^{\psi}]$;

(ii) $[h_1, {h_2}^{\psi}] = [\psi, h_2, h_1][h_1, h_2]$;

(iii) $[h_1, h_2^{\psi}]^{w(z_1^{\epsilon_1}, z_2^{\epsilon_2}, \cdots, z_n^{\epsilon_n})} = [h_1, h_2^{\psi}]^{w(z_1, z_2, \cdots, z_n)}$ $\epsilon_k \in \{1, \psi, \}$.

Demonstração. O item (i) é imediato da definição de $\mathcal{E}(H)$.

O item (ii) segue de

$$\begin{aligned} [h_1, h_2^\psi] &= [h_1, h_2[h_2, \psi]] \\ &= [h_1, [h_2, \psi]][h_1, h_2]^{[h_2,\psi]} \\ &= [h_1, [h_2, \psi]]^{[\psi,h_2]}[h_1, h_2] \qquad \text{(conjugando por } [\psi, h_2] \text{ e usando (i))} \\ &= [\psi, h_2, h_1][h_1, h_2]. \end{aligned}$$

(iii) Seja $w(z_1^{\epsilon_1}, z_2^{\epsilon_2}, \cdots, z_n^{\epsilon_n}) = x_1 y_1^\psi \ldots x_m y_m^\psi$, tal que

$$w(z_1^{\delta_1}, z_2^{\delta_2}, \ldots, z_n^{\delta_n}) = x_1 y_1 \ldots x_m y_m.$$

Para $m = 1$, por (i) obtemos,

$$[h_1, h_2^\psi]^{x_1 y_1^\psi} = [h_1, h_2^\psi]^{x_1^\psi y_1^\psi} = [h_1, h_2^\psi]^{x_1 y_1}.$$

Suponhamos por indução sobre m, que $[h_1, h_2^\psi]^{x_1 y_1^\psi x_2 y_2^\psi \ldots x_m y_m^\psi} = [h_1, h_2^\psi]^{x_1 y_1 x_2 y_2 \ldots x_m y_m}$. Então,

$$\begin{aligned} [h_1, h_2^\psi]^{x_1 y_1^\psi x_2 y_2^\psi \ldots x_m y_m^\psi x_{m+1} y_{m+1}^\psi} &= [h_1, h_2^\psi]^{x_1 y_1 x_2 y_2 \ldots x_m y_m x_{m+1} y_{m+1}^\psi} \\ &= [h_1, h_2^\psi]^{(x_1 y_1 x_2 y_2 \ldots x_m y_m x_{m+1})^\psi y_{m+1}^\psi} \\ &= [h_1, h_2^\psi]^{x_1 y_1 x_2 y_2 \ldots x_m y_m x_{m+1} y_{m+1}} \qquad \text{(novamente por } (i)\text{)}. \end{aligned}$$

□

Proposição 5.1.3. *O grupo $\mathcal{W}(H)$ é central em $\mathcal{D}(H)$ e consiste de todos os elementos de $\mathcal{E}(H)$ da forma $[h_1, h_2^\psi] \cdots [h_s, h_{s+1}^\psi]$, onde $h_1,\ h_2, \cdots, h_{s+1} \in H$ e s é um numero natural ímpar tal que $[h_1, h_2] \cdots [h_s, h_{s+1}] = 1$.*

Demonstração. $\mathcal{W}(H)$ é central em $\mathcal{D}(H)$ direto do fato que $[\mathcal{D}, \mathcal{L}] = 1$, já que $\mathcal{W}(H) = \mathcal{D} \cap \mathcal{L}$.

Seja $\omega \in \mathcal{D}(H)$. Então,

$$\omega = [h_1, h_2^\psi] \ \cdots \ [h_s, h_{s+1}^\psi],$$

para $h_1,\ h_2, \ldots, h_{s+1} \in H$ e "s" um numero natural ímpar. Pelo item (ii) do Lema anterior,

$$\begin{aligned} \omega &= [\psi, h_2, h_1][h_1, h_2] \cdots [\psi, h_{s+1}, h_s][h_s, h_{s+1}] \\ &= c[h_1, h_2] \cdots [h_s, h_{s+1}], \end{aligned}$$

onde $c \in \mathcal{L}(H)$. Agora como $H \cap \mathcal{L}(H) = 1$, temos que

$$\omega \in \mathcal{W}(H) \Leftrightarrow [h_1, h_2] \cdots [h_s, h_{s+1}] = 1.$$

□

Proposição 5.1.4. *Sejam* $\mathcal{L} = \mathcal{L}(H)$, $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1(H)$ *e* $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2(H)$. *Então*

(i) $\mathcal{L}_1,\ \mathcal{L}_2 \lhd \mathcal{E}(H)$;

(ii) $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cap (\mathcal{D}H')$, $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L} \cap (\mathcal{D}H'^{\psi})$;

(iii) $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \mathcal{W}$.

Demonstração. (i) e (ii). Seja $[w, h] \in \mathcal{L}_1$. Então $w = l_1 l_2 \cdots l_s$, para $l_i = [h_i, \psi] \in \mathcal{L}$ e $i \in \{1, \ldots, s\}$. Logo

$$[w, h] \quad = \quad [l_1, h]^{l_2 \cdots l_s} [l_2, h]^{l_3 \cdots l_s} \cdots [l_s, h].$$

Agora pelo Lema 5.1.2 (ii), $[\psi, h_i, h] = [h, h_i^{\psi}][h, h_i]^{-1}$, logo $[w, h] \in (\mathcal{D}H')^{\mathcal{E}(H)}$. Mas se $d \in \mathcal{D}$, $h' \in H'$ e $h_2 \in H$, temos que

$$(dh')^{h_2} = d^{h_2} h'^{h_2} \in DH'$$

e

$$\begin{aligned} (dh')^{h_2^{\psi}} &= d^{h_2^{\psi}} h'^{h_2^{\psi}} \\ &= d^{h_2^{\psi}} [h'^{-1}, h_2^{\psi}] h' \ \in DH'. \end{aligned}$$

Então $DH' \lhd \mathcal{E}(H)$, e portanto,

$$[w, h] \in \mathcal{D}H'.$$

Obviamente $[w, h] \in \mathcal{L}$, já que $\mathcal{L} \lhd \mathcal{E}(H)$. Logo $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L} \cap \mathcal{D}H'$.

Para completar (ii) seja $x \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}H'$. Então $x = dh'$, para algum $d \in \mathcal{D}$ e $h' \in H'$. Novamente pelo Lema 5.1.2, $d = l_0 h_0'$ para algum $l_0 \in \mathcal{L}_1$ e $h_0' \in H'$. Logo $x = l_o h' h_0'$. Mas $x \in \mathcal{L}$ e $\mathcal{L} \cap H = 1$, portanto $x = l_0 \in \mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cap \mathcal{D}H'$.

$\mathcal{L}_1 \lhd \mathcal{E}(H)$ segue do fato que $\mathcal{L}$ e $\mathcal{D}H'$ são normais em $\mathcal{E}(H)$.

A prova de $\mathcal{L}_2 \lhd \mathcal{E}(H)$, $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L} \cap \mathcal{D}H'^{\psi}$ é análoga.

(iii) Pelo item anterior,

$$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \mathcal{L} \cap \mathcal{D}H' \cap \mathcal{D}H'^{\psi}.$$

Logo $\mathcal{W} = \mathcal{L} \cap \mathcal{D} \subseteq \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Mas como $\mathcal{D} \cap HH^{\psi} = 1$, então $\mathcal{W} = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$.

□

Proposição 5.1.5. *Seja $\mathcal{R} = \mathcal{R}(H) = [H, \mathcal{L}(H), H^{\psi}]$. Então,*

(i) $\mathcal{R} \lhd \mathcal{E}(H)$, *$\mathcal{R}$ é ψ-invariante;*

(ii) $[\mathcal{W}, H] \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{W}$*;*

(iii) $[h_1, h_2^{\psi}]^{h_3} = [h_1^{h_3}, h_2^{h_3\psi}]$ *segue em $\mathcal{E}(H)$ módulo $\mathcal{R}$, para todos h_1, h_2, $h_3 \in H$;*

(iv) $[H', Z(H)^{\psi}] \subseteq \mathcal{R}$.

Demonstração. (i) Temos que $R = [\mathcal{L}_1, H^{\psi}]$ e $\mathcal{L}_1 \lhd \mathcal{E}(H)$, logo $R^H \subseteq [\mathcal{L}_1, DH^{\psi}] \subseteq [\mathcal{L}_1, H^{\psi}]$. Da mesma forma é claro que $R^{H^{\psi}} = [\mathcal{L}_1, H^{\psi}]$, portanto $R \lhd \mathcal{E}(H)$.

Como $[\mathcal{D}, \mathcal{L}] = [H, H^{\psi}, L] = 1$, segue que

$$[H^{\psi}, \mathcal{L}, H] = [H, \mathcal{L}, H^{\psi}]$$

e consequentemente R é ψ-invariante.

(ii) Temos pelo lema anterior que $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{L}_2$, então $[\mathcal{W}, H] \subseteq [\mathcal{L}_2, H] = R$.

Como $\mathcal{L}_1 \lhd \mathcal{E}(H)$, segue que $R = [\mathcal{L}_1, H^{\psi}] \subseteq \mathcal{L}_1$. Analogamente $R = [\mathcal{L}_2, H] \subseteq \mathcal{L}_2$, portanto $R \subseteq \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \mathcal{W}$.

(iii) Sejam $h_1,\ h_2,\ h_3 \in H$, então

$$\begin{aligned}
[h_1, h_2^{\psi}]^{h_3} &= [h_1^{h_3}, (h_2^{\psi})^{h_3^{\psi} h_3^{-\psi} h_3}] \\
&= [h_1^{h_3}, (h_2^{h_3})^{\psi}[(h_2^{h_3})^{\psi}, h_3^{-\psi} h_3]] \\
&= [h_1^{h_3}, [(h_2^{h_3})^{\psi}, h_3^{-\psi} h_3]][h_1^{h_3}, (h_2^{h_3})^{\psi}]^{[(h_2^{h_3})^{\psi}, h_3^{-\psi} h_3]}.
\end{aligned}$$

Como $[(h_2^{h_3})^{\psi}, h_3^{-\psi} h_3] \in [\mathcal{L}, H^{\psi}] \subseteq \mathcal{L}$, temos $[h_1^{h_3}, (h_2^{h_3})^{\psi}]^{[(h_2^{h_3})^{\psi}, h_3^{-\psi} h_3]} = [h_1^{h_3}, (h_2^{h_3})^{\psi}]$, já que $[\mathcal{D}, \mathcal{L}] = 1$.

Portanto $[h_1, h_2^{\psi}]^{h_3} \in R[h_1^{h_3}, (h_2^{h_3})^{\psi}]$.

□

Proposição 5.1.6. *Existe um epimorfismo $\theta : \mathcal{E}(H) \to \chi(H)$, tal que* $\mathrm{Nuc}(\theta) =$

$\Delta(H) = \left\langle [h, h^{\psi}],\ h \in H \right\rangle^{\mathcal{E}(H)}$. *Além disso, segue o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{E}(H) \arrow[d, "H/H'"] \arrow[ddl, bend right, "H"'] \arrow[ddr, bend left, "H\times H"] \arrow[ddddl, bend right=60, "\chi(H)"'] & \\
& \mathcal{DL} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathcal{L} \arrow[dr] & & \mathcal{D} \arrow[dl] \\
& \mathcal{W} \arrow[dl] \arrow[d] & \\
\Delta \arrow[dr] & \mathcal{R} \arrow[d] & \\
& 1. &
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Consideremos a aplicação $\theta' : H \cup H^{\psi} \to \chi(H)$, tal que $h^{\theta'} = h$ e $(h^{\psi})^{\theta'} = h^{\psi}$.

É claro que θ' preserva as relações de $\mathcal{E}(H)$, já que $[D, L] = 1$ em $\chi(H)$. Logo θ' estende-se a um epimorfismo $\theta : \mathcal{E}(H) \to \chi(H)$. Pela apresentação de $\chi(H) = \left\langle H, H^{\psi} \mid [h, h^{\psi}] = 1 \ \ \forall\, h \in H \right\rangle$, é fácil ver que $\mathrm{Nuc}(\theta) = \left\langle [h, h^{\psi}], \mid h \in H \right\rangle^{\mathcal{E}(H)}$.

Agora pelo Lema 5.1.2 (ii), $\forall\, h \in H$

$$[h, h^{\psi}] = [\psi, h, h] \ \in \mathcal{D} \cap \mathcal{L} = \mathcal{W},$$

logo $\Delta(H) \leq \mathcal{W}(H)$.

O diagrama segue do Lema 5.1.1, da estrutura de $\chi(H)$ e do fato que $\Delta(H) \leq \mathcal{W}$. □

Proposição 5.1.7. *Existe um epimorfismo* $\beta : \mathcal{E}(H) \to \nu(H)$, *tal que* $h \mapsto h, h^{\psi} \mapsto h^{\psi}$, $\forall\, h \in H$ *e* $\mathrm{Nuc}(\beta) = \mathcal{R}$

Demonstração. A função $H \cup H^{\psi} \to \nu(H)$, tal que $h \mapsto h$, $h^{\psi} \mapsto h^{\psi}$ preserva as relações

$$[h_1, h_2^{\psi}]^{h_3\psi} = [h_1, h_2^{\psi}]^{h_3},\ h_1, h_2, h_3 \ \in H,$$

logo estende-se a um epimorfismo

$$\beta : \mathcal{E}(H) \to \nu(H).$$

Agora por Rocco, [15, Teorema 2.11], $\mathcal{R}(H) \leq \mathrm{Nuc}(\beta)$, logo β induz

$$\tilde{\beta} : \frac{\mathcal{E}(H)}{\mathcal{R}(H)} \to \nu(H).$$

Por outro lado a função $H \cup H^{\psi} \to \frac{\mathcal{E}(H)}{\mathcal{R}(H)}$ tal que, $h \mapsto \mathcal{R}(H)h$ e $h^{\psi} \mapsto \mathcal{R}(H)h^{\psi}$, preserva as relações

$$[h_1, h_2^{\psi}]^{h_3\psi} = [h_1, h_2^{\psi}]^{h_3} = [h_1^{h_3}, {h_2^{h_3}}^{\psi}], \; h_1, h_2, h_3 \; \in H$$

de $\nu(H)$, já que $[h_1, h_2^{\psi}]^{h_3\psi} = [h_1, h_2^{\psi}]^{h_3}$ ocorre trivialmente em $\mathcal{E}(H)$ e $[h_1, h_2^{\psi}]^{h_3^{\psi}} = [h_1^{h_3}, {h_2^{h_3}}^{\psi}] \bmod \mathcal{R}$ pêlo Lema 5.1.5 (iii), assim essa função estende-se a um epimorfismo

$$\varepsilon : \nu(H) \to \frac{\mathcal{E}(H)}{\mathcal{R}(H)}.$$

A composição de $\tilde{\beta}$ com ε é a identidade em $\nu(H)$, portanto $\frac{\mathcal{E}(H)}{\mathcal{R}(H)} \cong \nu(H)$. $\square$

Proposição 5.1.8. *Seja H um grupo solúvel de série derivada com comprimento k. Então, $\mathcal{E}(H)$ é um grupo solúvel de série derivada com comprimento no máximo $k+2$.*

.

Demonstração. Consideremos o epimorfismo

$$\theta : \mathcal{E}(H) \to \chi(H),$$

tal que $h^{\theta} = h, \; (h^{\psi})^{\theta} = h^{\psi}$.

Pelo Corolário 4.1.8 de [19], $1 = \chi(H)^{(k+1)} = (\mathcal{E}(H)^{(k+1)})^{\theta}$. Logo $(\mathcal{E}(H))^{(k+1)} \leq Nuc(\theta)$. Como $\Delta(H) \leq \mathcal{W}(H)$ e $\mathcal{W}(H)$ é abeliano, obtemos $\mathcal{E}(H)^{(k+2)} = 1$ $\square$

Proposição 5.1.9. *Sejam $K, \; H_1$ subgrupos de H. Então*

(i) $[K, H_1^{\psi}]$ *e* $[K^{\psi}, H_1]$ *são ambos normais em* $\left\langle H_1, \; H_1^{\psi} \right\rangle$;

(ii) $\left\langle K, K^{\psi} \right\rangle \cap \mathcal{D}(H) = [K, K^{\psi}]$;

(iii) $\left\langle K, K^{\psi} \right\rangle \cap \mathcal{L}(H) = [K, \psi]$.

Demonstração. (i) Para todo $k \in K$ e $h_1, \; h_2 \in H_1$

$$\begin{aligned} [k, h_1^{\psi}]^{h_2} &= [k, h_1^{\psi}]^{{h_2}^{\psi}} \quad \text{pelo Lema 5.1.2 } (i) \\ &= [k, h_1^{\psi}]^{-1}[k, h_1^{\psi} h_2^{\psi}]. \end{aligned}$$

Isso mostra que H_1 e H_1^{ψ} normalizam $[K, H_1^{\psi}]$. Analogamente $[H_1, K^{\psi}] \trianglelefteq \left\langle H_1, \; H_1^{\psi} \right\rangle$.

(ii) Denotemos $\hat{K}$, por $\left\langle K, K^{\psi} \right\rangle$. É claro que $[K, K^{\psi}] \subseteq \hat{K} \cap \mathcal{D}(H)$.

Por outro lado consideremos o epimorfismo $\upsilon : \mathcal{E}(H) \to H \times H$ definido no Lema 5.1.1 iii'.

Como $\mathrm{Nuc}(\upsilon) = \mathcal{D}(H)$ e $\hat{K} \cap \mathcal{D}(H) \subseteq \mathcal{D}(H)$, então υ induz um epimorfismo

$$\frac{\hat{K}}{\hat{K} \cap \mathcal{D}(H)} \to K \times K$$

e segue o epimorfismo

$$K \times K \to \frac{\hat{K}}{[K, K^{\psi}]}.$$

A composição desses dois epimorfismos, nos dá

$$\frac{\hat{K}}{\hat{K} \cap \mathcal{D}(H)} \to \frac{\hat{K}}{[K, K^{\psi}]},$$

tal que $\hat{K} \cap \mathcal{D}(H)x \mapsto [K, K^{\psi}]x \quad \forall\, x \in \hat{K}$.

Portanto $\hat{K} \cap \mathcal{D} \subseteq [K, K^{\psi}]$.

A prova de (iii) é similar a prova de (ii) em que consideramos o epimorfismo $\rho : \mathcal{E}(H) \to H$ definido no Lema 5.1.1 (ii'), e a composição dos epimorfismos

$$\frac{\hat{K}}{\hat{K} \cap \mathcal{L}} \to K \to \frac{\hat{K}}{[K, \psi]}.$$

$\square$

Proposição 5.1.10. *Seja H um grupo e K uma imagem homomorfa de H pelo epimorfismo $\phi : H \mapsto K$. Seja também $N = \mathrm{Nuc}(\phi)$. Então existe uma extensão natural de ϕ para o epimorfismo $\hat{\phi} : \mathcal{E}(H) \mapsto \mathcal{E}(K)$ tal que*

(i) $\hat{\phi}(\mathcal{D}(H)) = \mathcal{D}(K), \qquad \hat{\phi}(\mathcal{L}(H)) = \mathcal{L}(K)$;

(ii) $\mathrm{Nuc}(\hat{\phi}) = \left\langle N, N^{\psi} \right\rangle [N, H^{\psi}][N^{\psi}, H]$;

(iii) $\mathrm{Nuc}(\hat{\phi}\mid_D) = [N, H^{\psi}][N^{\psi}, H]$.

Demonstração. A extensão $\hat{\phi}$ de ϕ é determinada por $h^{\hat{\phi}} = h^{\phi}$ e $(h^{\psi})^{\hat{\phi}} = (h^{\psi})^{\phi}$, para todo $h \in H$. Portanto,

$$\hat{\phi}(\mathcal{D}(H)) = \hat{\phi}([H, H^{\psi}]) = [\hat{\phi}(H), \hat{\phi}(H^{\psi})] = [K, K^{\psi}] = \mathcal{D}(K)$$

e $\forall h \in H$

$$\hat{\phi}([h, \psi]) = \hat{\phi}(h)^{-1}\hat{\phi}(h^{\psi}) = k^{-1}k^{\psi}, \quad \text{para algum } k \in K,$$

logo,

$$\hat{\phi}(\mathcal{L}(H)) = \hat{\phi}([H,\psi]) = [\hat{\phi}(H),\psi]) = [K,\psi],$$

mostrando-se (i).

Para provar (ii) seja $M = \left\langle N, N^{\psi} \right\rangle [N, H^{\psi}].[H, N^{\psi}]$. É claro que $M \leq \mathrm{Nuc}(\hat{\phi})$, pois $N,\ N^{\psi} \subseteq \mathrm{Nuc}(\hat{\phi})$. Assim pelo item (i) da proposição anterior M é um subgrupo normal de $\mathcal{E}(H)$ e portanto podemos definir a função $\theta : H \cup K^{\psi} \to \mathcal{E}(H)/M$ fazendo $\theta(k) = M\phi^{-1}(k)$ e $\theta(k^{\psi}) = M(\phi^{-1}(k))^{\psi}$. Podemos verificar que θ está bem definida já que $N,\ N^{\psi} \subseteq M$. A restrição de θ a K e K^{ψ}, são ambos homomorfismos, logo existe um único homomorfismo θ^* que estende θ ao produto livre $K * K^{\psi}$.

Podemos ver que as relações

$$[k_1, k_2^{\psi}]^{k_3} \quad = \quad [k_1, {k_2}^{\psi}]^{{k_3}^{\psi}}, \quad \forall k_1,\ k_2,\ k_3 \in K,$$

são preservadas por θ^*. Consequentemente, θ^* induz um homomorfismo $\tilde{\theta} : \mathcal{E}(K) \to \mathcal{E}(H)/M$.

Por outro lado como, $M \leq \mathrm{Nuc}(\hat{\phi})$, então temos um homomorfismo $\tilde{\phi} : \mathcal{E}(H)/M \to \mathcal{E}(K)$ tal que $\tilde{\phi}(Mh) = \hat{\phi}(h)$ e $\tilde{\phi}(Mh^{\psi}) = \hat{\phi}(h^{\psi})\ \forall\, h \in H$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Nuc}(\hat{\phi}) \arrow[dr] & & \mathcal{E}(H)/M \arrow[dd, "\tilde{\phi}"] \\
& \mathcal{E}(H) \arrow[ur, two heads, "q"] \arrow[dr, "\hat{\phi}"] & \\
M \arrow[uu] \arrow[ur] & & \mathcal{E}(K)
\end{tikzcd}$$

A composição de $\tilde{\theta}$ e $\tilde{\phi}$ nos dá que $\tilde{\phi}\tilde{\theta}(k) = \tilde{\phi}(M\phi^{-1}(k)) = k$ e $\tilde{\phi}\tilde{\theta}(k^{\psi}) = \tilde{\phi}(M(\phi^{-1}(k))^{\psi}) = k^{\psi}$, $\forall\, k \in K$. Logo $\tilde{\phi}\tilde{\theta} = 1_{\mathcal{E}(K)}$, e isso mostra que $\tilde{\phi}$ é isomorfismo.

(iii) Temos que

$$\mathcal{D}(H) \cap \mathrm{Nuc}\,\hat{\phi} \supseteq [N, H^{\psi}][N^{\psi}, H]$$

de onde podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(H) \cap \mathrm{Nuc}\,\hat{\phi} &= \mathcal{D}(H) \cap (\left\langle N, N^{\psi} \right\rangle [N, H^{\psi}].[H, N^{\psi}]) \\
&= [N, N^{\psi}][N, H^{\psi}][N^{\psi}, H] \quad \text{(pelo item } (ii) \text{ da Proposição 5.1.10)} \\
&= [N, H^{\psi}][N^{\psi}, H]
\end{aligned}$$

□

Proposição 5.1.11. *Seja G um grupo e suponha que H e K são subgrupos normais de G tal que $G = H \oplus K$. Então:*

(i) $\mathcal{E}(G) = \left\langle H, H^{\psi} \right\rangle [H, K^{\psi}][H^{\psi}, K] \left\langle K, K^{\psi} \right\rangle;$

(ii) $\mathcal{E}(H) \cong \left\langle H, H^{\psi} \right\rangle, \quad \mathcal{E}(K) \cong \left\langle K, K^{\psi} \right\rangle.$

Demonstração. Consideremos o epimorfismo $\phi : G \to H$ tal que, $\phi(h) = h$ e $\phi(k) = 1, \ \forall h \in H, \ k \in K$. É claro que $\mathrm{Nuc}(\phi) = K$.

Pela proposição anterior ϕ estende-se ao epimorfismo $\hat{\phi} : \mathcal{E}(G) \to \mathcal{E}(H)$, tal que $\mathrm{Nuc}\,\hat{\phi} =< K, K^{\psi} > [HK, K^{\psi}][H^{\psi}K^{\psi}, K]$. Mas

$$[HK, K^{\psi}] \;\; = \;\; [H, K^{\psi}][K, K^{\psi}],$$

pois pela Proposição 5.1.9 $[H, K^{\psi}]$ é normalizado por K e K^{ψ}, e também por H e H^{ψ}. Analogamente

$$[H^{\psi}K^{\psi}, K] \;\; = \;\; [H^{\psi}, K][K, K^{\psi}].$$

Portanto

$$\mathcal{E}(G) \cong \left\langle K, K^{\psi} \right\rangle [H, K^{\psi}][H^{\psi}, K] \cdot \mathcal{E}(H)$$

Mas $\hat{\phi}\left(\left\langle H, H^{\psi} \right\rangle\right) = \mathcal{E}(H)$ e por outro lado $\mathcal{E}(H)$ é mapeado sobrejetivamente sobre $\left\langle H, H^{\psi} \right\rangle$. Logo $\mathrm{Nuc}(\hat{\phi}) \cap \left\langle H, H^{\psi} \right\rangle = 1$ e $\mathcal{E}(H) \cong < H, H^{\psi} >$. Assim

$$\mathcal{E}(G) \cong \left\langle K, K^{\psi} \right\rangle [H, K^{\psi}][H^{\psi}, K] \left\langle K, K^{\psi} \right\rangle$$

Uma analise semelhante para o epimorfismo $\phi' : G \to K$, tal que $\phi'(k) = k$ e $\phi'(h) = 1$, nos dá que $\mathcal{E}(K) \cong < K, K^{\psi} >$. $\square$

5.2 H abeliano

Nesta seção conseguimos alguns resultados a respeito da estrutura de $\mathcal{E}(H)$, quando H é um grupo abeliano.

Proposição 5.2.1. *Seja H um grupo abeliano. Então,*

(i) $\mathcal{D} = \mathcal{W} = [\mathcal{L}, H] = [\mathcal{L}, H^{\psi}], \quad \mathcal{R} = [\mathcal{D}, H] = [\mathcal{L}, 2H];$

(ii) $\mathcal{L}$ *é nilpotente de classe* ≤ 2, $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{D} \subseteq Z(\mathcal{L})$, $\mathcal{L}' \subseteq Z(\mathcal{E})$.

Demonstração. (i) Pelo item (ii) da Proposição 5.1.4, $\mathcal{L}_1 = [\mathcal{L}, H] = \mathcal{L} \cap \mathcal{D}H'$ e $\mathcal{L}_2 = [\mathcal{L}, H^\psi] = \mathcal{L} \cap \mathcal{D}H'^\psi$. Logo como H é abeliano $\mathcal{W} = \mathcal{L} \cap \mathcal{D} = \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$. Pelo item ($ii$) do Lema 5.1.2 $\mathcal{D} \subseteq [\mathcal{L}, H]H' = [\mathcal{L}, H]$. Logo $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{L}$ e portanto $\mathcal{L} \cap \mathcal{D} = \mathcal{D} = \mathcal{W} = [\mathcal{L}, H] = [\mathcal{L}, H^\psi]$.

Por definição

$$\mathcal{R} = [H, \mathcal{L}, H^\psi] = [\mathcal{D}, H^\psi] = [\mathcal{D}, H] = [\mathcal{L}, H, H] = [\mathcal{L}, 2H].$$

(ii) Temos que H centraliza $\mathcal{L}$ módulo $[\mathcal{L}, H](= \mathcal{D})$, assim como H^ψ também centraliza $\mathcal{L}$ módulo $[\mathcal{L}, H^\psi](= \mathcal{D})$, então

$$\mathcal{L}' \subseteq [\mathcal{E}(H), \mathcal{L}] \subseteq \mathcal{D}.$$

Agora como $1 = [\mathcal{D}, \mathcal{L}] = [\mathcal{L}, H, \mathcal{L}] = [H, \mathcal{L}, \mathcal{L}]$, então

$$[\mathcal{L}, \mathcal{L}, H] = [\mathcal{L}', H] = 1.$$

Da mesma forma $1 = [\mathcal{D}, \mathcal{L}] = [\mathcal{L}, H^\psi, \mathcal{L}] = [H^\psi, \mathcal{L}, \mathcal{L}]$, logo

$$[\mathcal{L}, \mathcal{L}, H^\psi] = [\mathcal{L}', H^\psi] = 1.$$

E portanto $\mathcal{L}' \subseteq Z(\mathcal{E})$.

□

Proposição 5.2.2. *Seja H um grupo abeliano. Então* $\mathcal{L}' = \langle [a^\psi, b][a, b^\psi];\ \ a,\ b \in H \rangle$.

Demonstração. Sejam $l_1,\ l_2 \in \mathcal{L}$, então

$$l_1 = [h_1, \psi][h_2, \psi] \cdots [h_s, \psi] \text{ e}$$

$$l_2 = [h'_1, \psi][h'_2, \psi] \cdots [h'_r, \psi]$$

para $s,\ r \in \mathbb{N}$ e $h_1,\ h_2, \cdots h_s,\ h'_1,\ h'_2, \cdots h'_r \in H$. Logo

$$\begin{aligned} [l_1, l_2] &= [[h_1, \psi][h_2, \psi] \cdots [h_s, \psi], [h'_1, \psi][h'_2, \psi] \cdots [h'_r, \psi]] \\ &= \prod_{i=1}^{s} \prod_{j=1}^{r} [[h_i, \psi], [h'_j, \psi]], \quad \text{já que } \mathcal{L}' \leq \mathcal{D} \text{ e } [\mathcal{L}, \mathcal{D}] = 1. \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
[[h_i,\psi],[h'_j,\psi]] &= [{h_i}^{-1}{h_i}^{\psi},{h'_j}^{-1}{h'_j}^{\psi}] \\
&= [{h_i}^{-1},{h'_j}^{-1}{h'_j}^{\psi}]^{{h_i}^{\psi}}[{h_i}^{\psi},{h'_j}^{-1}b^{\psi}] \\
&= [{h_i}^{-1},{h'_j}^{\psi}]^{{h_i}^{\psi}}[{h_i}^{\psi},{h'_j}^{-1}]^{{h'_j}^{\psi}} \\
&= [{h_i}^{-1},{h'_j}^{\psi}]^{h_i}[{h_i}^{\psi},{h'_j}^{-1}]^{h'_j} \\
&= [h_i,{h'_j}^{\psi}]^{-1}[{h_i}^{\psi},h'_j]^{-1} \\
&= [{h'_j}^{\psi},h_i][h'_j,{h_i}^{\psi}].
\end{aligned}$$

Portanto os elementos de $\mathcal{L}'$ são produtos de elementos da forma $[a^{\psi},b][a,b^{\psi}]$ com $a,\ b\in H$ □

Proposição 5.2.3. *Sejam "a" e "b" elementos de torção de um grupo H abeliano, com ordens n e m respectivamente. Então a ordem de $[a,b^{\psi}][a^{\psi},b]$ divide $m.d.c(n,m)$.*

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}
1=[a^n,b^{\psi}] &= [a^{n-1},b^{\psi}]^a[a,b^{\psi}] \\
&\vdots \\
&= [a,b^{\psi}]^{a^{n-1}}[a,b^{\psi}]^{a^{n-2}}\cdots[a,b^{\psi}]. \qquad (5.2.1)
\end{aligned}$$

Da mesma forma

$$\begin{aligned}
1=[(a^n)^{\psi},b] &= [(a^{n-1})^{\psi},b]^{a^{\psi}}[a,b^{\psi}] \\
&\vdots \\
&= [a^{\psi},b]^{(a^{n-1})^{\psi}}[a^{\psi},b]^{(a^{n-2})^{\psi}}\cdots[a^{\psi},b] \\
&= [a^{\psi},b]^{(a^{n-1})}[a^{\psi},b]^{(a^{n-2})}\cdots[a^{\psi},b], \quad \text{já que } [\mathcal{D},\mathcal{L}]=1 \qquad (5.2.2)
\end{aligned}$$

Multiplicando 5.2.1 e 5.2.2, temos

$$\begin{aligned}
1 &= [a,b^{\psi}]^{a^{n-1}}[a,b^{\psi}]^{a^{n-2}}\cdots[a,b^{\psi}][a^{\psi},b]^{(a^{n-1})}[a^{\psi},b]^{(a^{n-2})}\cdots[a^{\psi},b] \\
&= ([a,b^{\psi}][a^{\psi},b])^{(a^{n-1})}([a,b^{\psi}][a^{\psi},b])^{(a^{n-2})}\cdots[a,b^{\psi}][a^{\psi},b] \qquad (\mathcal{D}=\mathcal{W} \text{ é abeliano}) \\
1 &= ([a,b^{\psi}][a^{\psi},b])^n \qquad (\mathcal{L}'\leq Z(\mathcal{E}(H))).
\end{aligned}$$

De forma analoga obtemos $([a,b^{\psi}][a^{\psi},b])^m=1$ e portanto $m.d.c(n,m)$ divide a ordem de $[a,b^{\psi}][a^{\psi},b]$. □

Colorário 5.2.4. *Se H é um grupo abeliano finito, então $\mathcal{L}'$ é abeliano finito.*

Demonstração. Segue direto da proposição anterior. $\square$

Vamos considerar agora $\tilde{G} = \mathbb{Z}(H/H') \cdot H$ o produto semi direto de $\mathbb{Z}(H/H')$ por H, em que H age sobre $\mathbb{Z}(H/H')$ por multiplicação à direita

$$(\sum x_{H'h} H'h)^{h_1} = \sum x_{H'h} H'hh_1.$$

Dessa forma H' age trivialmente sobre $\mathbb{Z}(H/H')$.

Seja $G = \mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(H/H') \cdot H$ subgrupo de $\tilde{G}$ e defina $u = \bar{1}.1 \in G$, em que $\bar{1}$ é a unidade de $\mathbb{Z}(H/H')$. Consideremos

$$[H, u] = \langle [h, u], \quad h \in H \rangle ,$$

subgrupo de $\tilde{G}$.

Observemos que

$$\begin{aligned} [h, u] &= h^{-1}h^{u} \\ &= u^{-h}u \in \mathbb{Z}(H/H'), \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

além disso, passando para a notação aditiva em $\mathbb{Z}(H/H')$ e fazendo $H'h = \overline{h}$,

$$[h, u] = (\overline{-h_1 + 1}.1).$$

Portanto $[H, u] = \mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(H/H')$ e $G = \langle H,\ H^{u} \rangle$. Assim considere $\varepsilon : H \cup H^{\psi} \rightarrow G$ definida por $h^{\varepsilon} = h$ e $(h^{\psi})^{\varepsilon} = h^{u}$ $\forall h \in H$.

Notemos que, $\forall h_1,\ h_2,\ h \in H$

$$\begin{aligned} [[h_1, h_2^u], [h, u]] &= [h_1^{-1}u^{-1}h_2^{-1}uh_1u^{-1}h_2u, [h, u]] \\ &= [u^{-h_1}h_1^{-1}h_2{-}1uh_1h_2u^{-h_2}u, [h, u]] \\ &= [u^{-h_1}u^{h_2h_1}[h_1, h_2]u^{-h_2}u, u^{-h}u] \quad \text{por } 5.2.3 \\ &= 1, \end{aligned}$$

já que $\mathbb{Z}(H/H')$ é abeliano e H' age trivialmente sobre $\mathbb{Z}(H/H')$.

Podemos concluir então que ε preserva a relações de $\mathcal{E}(H)$ estendendo-se à um epimorfismo $\hat{\varepsilon} : \mathcal{E}(H) \rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(H/H') \cdot H$.

Por Sidki [19], $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(H) \cdot H \cong \left\langle H,\ H^{\psi} \mid\ [H, \psi]' = 1 \right\rangle$, logo se H é abeliano, então $\mathrm{Nuc}(\hat{\varepsilon}) = \mathcal{L}'$. Daí temos o teorema seguinte.

Teorema 5.2.5. *Seja H um grupo. Então existe um epimorfismo $\hat{\varepsilon} : \mathcal{E}(H) \to \mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(H/H') \cdot H$. Em particular, se H é abeliano,* $\mathrm{Nuc}(\hat{\varepsilon}) = \mathcal{L}'$.

Colorário 5.2.6. *Se $H =< x >$ é um grupo cíclico de ordem n, então $\mathcal{E}(H) \cong \mathbb{Z}^{n-1} \cdot H$.*

Demonstração. Temos que se H é cíclico, então $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(H) \cong \mathbb{Z}^{n-1}$. Vamos então mostrar que $\mathcal{L}$ é abeliano.

Seja $l \in \mathcal{L}$, então

$$l = [h_1, \psi][h_2, \psi] \cdots [h_s, \psi] \qquad \text{para algum } s \in \mathbb{N}.$$

Mas

$$\begin{aligned}
[h_i, \psi] &= [x^j, \psi] \\
&= [x^{j-1}, \psi]^x [x, \psi] \\
&= [x^{j-2}, \psi]^{x^2} [x, \psi]^x [x, \psi] \\
&\vdots \\
&= [x, \psi]^{x^{j-1}} [x, \psi]^{x^{j-2}} \cdots [x, \psi],
\end{aligned}$$

para algum $j \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Em particular, se $j = n$

$$\begin{aligned}
1 = [x^n, \psi] &= [x, \psi]^{x^{n-1}} [x, \psi]^{x^{n-2}} \cdots [x, \psi] \\
[x, \psi]^{x^{n-1}} &= [x, \psi]^{-x^{n-2}} \cdots [x, \psi]^{-1}.
\end{aligned}$$

Logo $\mathcal{L} = \left\langle [x, \psi], [x, \psi]^{x^2}, \ldots, [x, \psi]^{x^{n-2}} \right\rangle$.

Agora notemos que pelo Lema 5.1.2 (ii)

$$[x^i, x^\psi] = [\psi, x, x^i] = [x, \psi][x, \psi]^{-x^i} \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \tag{5.2.4}$$

Logo

$$\begin{aligned}
[[x, \psi]^{x^i}, [x, \psi]] &= [[x^\psi, x^i][x, \psi], [x, \psi]] \quad \text{por 5.2.4} \\
&= [[x^\psi, x^i], [x, \psi]]^{[x, \psi]} [[x\psi], [x, \psi]] \\
&= 1, \qquad \text{já que } [\mathcal{D}, \mathcal{L}] = 1.
\end{aligned}$$

E portanto

$$\begin{aligned}
[[x, \psi]^{x^i}, [x, \psi]^{x^j}] &= [[x, \psi]^{x^{i-j}}, [x, \psi]]^{x^{-j}} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

para todo $i,\ j \in \mathbb{Z}$. De onde concluímos que $\mathcal{L}$ é abeliano. □

5.3 H Policíclico

Veremos nesta seção que $\mathcal{E}(H)$ é policíclico se, e somente se, H/H' é finito.

Com demostrações idênticas as Proposições 2.1.3 e 2.1.4, temos as proposições seguintes.

Proposição 5.3.1. *Sejam H um grupo e T um transversal de H/H'. Então*

$$\mathcal{R}(H) = \left\langle [h_1, h_2^{\psi}]^{h_3}[{h_1}^{h_3}, {h_2}^{h_3\psi}]^{-1} \mid h_1,\ h_2,\ h_3\ \in H \right\rangle^{T}.$$

Demonstração. Primeiro mostramos que

$$\mathcal{R}(H) = \left\langle [h_1, h_2^{\psi}]^{h_3}[{h_1}^{h_3}, {h_2}^{h_3\psi}]^{-1} \mid h_1,\ h_2,\ h_3\ \in H \right\rangle^{\mathcal{E}(H)}.$$

Seja $\mathcal{J}(H) = \left\langle [h_1, h_2^{\psi}]^{h_3}[{h_1}^{h_3}, {h_2}^{h_3\psi}]^{-1} \mid h_1,\ h_2,\ h_3\ \in H \right\rangle^{\mathcal{E}(H)}$. Temos que $\mathcal{J}(H) \leq \mathcal{R}(H)$, pois pela Proposição 5.1.5 (iii)

$$[h_1, h_2^{\psi}]^{h_3}[{h_1}^{h_3}, {h_2}^{h_3\psi}]^{-1} \in \mathcal{R}(H).$$

Pela Proposição 5.1.7 o epimorfismo $\beta : \mathcal{E}(H) \to \nu(H)$ dado por $h \mapsto h$, $h^{\psi} \mapsto h^{\psi}$, $\forall h \in H$ têm núcleo $\mathcal{R}(H)$. Logo β induz $\bar{\beta} : \frac{\mathcal{E}(H)}{\mathcal{J}(H)} \to \nu(H)$. Por outro lado a aplicação $\sigma : \nu(H) \to \frac{\mathcal{E}(H)}{\mathcal{J}(H)}$ tal que $h \mapsto \mathcal{J}(H)h$, $h^{\psi} \mapsto \mathcal{J}(H)h^{\psi}$ estende-se a um epimorfismo $\bar{\sigma} : \nu(H) \to \frac{\mathcal{E}(H)}{\mathcal{J}(H)}$, já que

$$\nu(H) = \left\langle H, H^{\psi} \mid ,\ [h_1, h_2^{\psi}]^{h_3} = [{h_1}^{h_3}, ({h_2}^{h_3})^{\psi}] = [h_1, h_2^{\psi}]^{h_3^{\psi}},\ \forall\, h,\ h_1\, h_2,\ h_3\ \in H \right\rangle$$

as relações

$$[h_1, h_2^{\psi}]^{h_3^{\psi}} = [h_1, h_2^{\psi}]^{h_3} = [{h_1}^{h_3}, (h_2^{h_3})^{\psi}],\ \forall h_1,\ h_2,\ h_3 \in H$$

seguem em $\frac{\mathcal{E}(H)}{\mathcal{J}(H)}$. Agora como $\bar{\sigma}\bar{\beta}$ é a identidade em $\frac{\mathcal{E}(H)}{\mathcal{J}(H)}$, então $\mathcal{R}(H) = \mathcal{J}(H)$.

Agora temos que $\mathcal{R}(H) \leq \mathcal{D}(H)$, então pelo Lema 5.1.2 (iii),

$$\mathcal{R}(H) = \left\langle [h_1, h_2^{\psi}]^{h_3}[{h_1}^{h_3}, ({h_2}^{h_3})^{\psi}]^{-1} \mid h_1,\ h_2,\ h_3\ \in H \right\rangle^{H}.$$

Novamente pelo item (iii) do Lema 5.1.2, temos que $[\mathcal{R}(H), H'] = [\mathcal{R}(H), [H, H^{\psi}]]$. Mas como $\mathcal{R}(H) \leq \mathcal{W}(H)$ (5.1.5 (ii)) e pela Proposição 5.1.3 $\mathcal{W}(H)$ é central em $\mathcal{D}(H)$, segue que $[\mathcal{R}(H), H'] = 1$. Logo

$$\mathcal{R}(H) = \left\langle [h_1, h_2^{\psi}]^{h_3}[{h_1}^{h_3}, {h_2}^{h_3\psi}]^{-1} \mid h_1,\ h_2,\ h_3\ \in H \right\rangle^{T}.$$

□

Proposição 5.3.2. *Sejam H um grupo policíclico com sequência policíclica $S = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$ e T um transversal de H/H'. Então*

$$\mathcal{R}(H) = \left\langle [a_i, a_j^{\psi}]^{a_k}[{a_i}^{a_k}, {a_j}^{a_k\psi}]^{-1} \mid a_i,\ a_j,\ a_k \in S \right\rangle^{T}.$$

Demonstração. Como $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ é um conjunto gerador de H, por um resultado de A. McDermott, [8, Teorema 2.2.8] , o subgrupo $K = \left\langle [h_1, h_2^{\psi}]^{h_3}[{h_1}^{h_3}, {h_2}^{h_3\psi}]^{-1} \mid h_1,\ h_2,\ h_3 \in H \right\rangle$ do produto livre $H * H^{\psi}$ é igual a $J = \left\langle [a_i, a_j^{\psi}]^{a_k}[{a_i}^{a_k}, {a_j}^{a_k\psi}]^{-1} \mid a_i,\ a_j,\ a_k \in S \right\rangle^{H*H^{\psi}}$. Assim se $\phi : H * H^{\psi} \mapsto \mathcal{E}(H)$ é o epimorfismo natural, temos que

$$\begin{aligned}
\phi(J) = \mathcal{R}(H) &= \left\langle [a_i, a_j^{\psi}]^{a_k}[{a_i}^{a_k}, {a_j}^{a_k\psi}]^{-1} \mid a_i,\ a_j,\ a_k \in S \right\rangle^{\mathcal{E}(H)} \\
&= \left\langle [a_i, a_j^{\psi}]^{a_k}[{a_i}^{a_k}, {a_j}^{a_k\psi}]^{-1} \mid a_i,\ a_j,\ a_k \in S \right\rangle^{T} \quad \text{(pela Proposição 5.3.1).}
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.3.3. *Seja H um grupo policíclico. Então $\mathcal{E}(H)$ é policíclico se, e somente se, H/H' é finito.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{E}(H)$ é policíclico. Então a imagem $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(H/H')$ de $\mathcal{E}(H)$ é policíclico. Logo H/H' é finto, já que $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(H/H')$ abeliano livre de posto H/H'.

Por outro lado se H/H' é finito então $\mathcal{R}(H)$ é abeliano finitamente gerado. Como $\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{R}} \cong \nu(H)$ é policíclico então $\mathcal{E}(H)$ é policíclico. □

5.4 H Perfeito

Para H um grupo perfeito verificamos nesta seção o isomorfismo entre $\mathcal{E}(H)$ e $\chi(H)$.

Proposição 5.4.1. *Se H é um grupo perfeito, então*

(i) $\mathcal{E} = \mathcal{DL}$; $\mathcal{W}(H) \leq Z(\mathcal{E}(H))$;

(ii) $\mathcal{D}$ *e* $\mathcal{E}(H)$ *são perfeitos;*

(iii) $\mathcal{E}(H) \cong \chi(H)$.

Demonstração. (i) Temos que $\frac{\mathcal{E}(H)}{\mathcal{DL}} \cong \frac{H}{H'}$, logo se H é perfeito $\mathcal{E}(H) = \mathcal{DL}$ e como $\mathcal{W}(H) = \mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ e $[\mathcal{D}, \mathcal{L}] = 1$ segue que $[\mathcal{W}, \mathcal{E}] = 1$.

(ii) Primeiro temos que $\mathcal{E}(H)' = \mathcal{D}'\mathcal{L}'[\mathcal{D}, \mathcal{L}] = \mathcal{D}'\mathcal{L}'$, já que $[\mathcal{D}, \mathcal{L}] = 1$.

Agora como $\chi(H)$ e seus subgrupos L e D são perfeitos (veja em [19, Lema 4.4.6]), então

$$\mathcal{L} \cong L.\Delta = L'\Delta \text{ e } \mathcal{D} \cong D.\Delta = D'\Delta.$$

Por outro lado

$$\mathcal{L}'\Delta \cong L'.\Delta \text{ e } \mathcal{D}'\Delta \cong D'.\Delta$$

Como $\Delta \leq \mathcal{D}'\mathcal{L}' = \mathcal{E}(H)'$, segue que $\mathcal{E}(H) = \mathcal{E}(H)'$.
Para $\mathcal{D}(H)$ temos que $\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{W}} \cong \frac{\mathcal{D}\mathcal{L}}{\mathcal{L}} \cong H = H' \cong \frac{\mathcal{D}'\mathcal{W}}{W}$, implica que $\mathcal{D} = \mathcal{D}'\mathcal{W}$.
Assim seja $\overline{\mathcal{E}(H)} = \frac{\mathcal{E}(H)}{\mathcal{D}'}$. Então $\overline{\mathcal{D}}(= \overline{[H, H^{\psi}]}) = \overline{\mathcal{W}}$, que é central em $\overline{\mathcal{E}(H)}$. Logo

$$[\overline{H^{\psi}}, \overline{H}, \overline{H^{\psi}}] = [\overline{H^{\psi}}, \overline{H}, \overline{H}] = 1,$$

além disso

$$\overline{H'} = (H\mathcal{D}')'/\mathcal{D}' = (H'\mathcal{D}')/\mathcal{D}' = \overline{H} \quad \text{já que } [H, \mathcal{D}']\mathcal{D}'' \leq \mathcal{D}'.$$

Logo

$$[\overline{H^{\psi}}, \overline{H^{\psi}}, \overline{H}] = [\overline{H^{\psi}}, \overline{H}] = 1$$

isto é $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$

(iii) Pelos itens (i) e (ii), $\mathcal{W} \leq \mathcal{D}' \cap Z(\mathcal{D})$ além disso $\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{W}} \cong H$. Então $\mathcal{D}$ é uma extensão tronco de H. Por Sidki, Teorema 1.4.4 $D \leq \chi(H)$ é uma extensão tronco maximal de H. Portanto $\mathcal{D} \cong D$, e então Δ é trivial.

□

Teorema 5.4.2. *Seja H um grupo finito, então o grupo $\mathcal{E}(H)$ é finito se, e somente se, H é perfeito.*

Demonstração. Pelo Teorema 5.2.5, $\mathcal{E}(H)$ tem imagem $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(H/H') \cdot H$, logo se $\mathcal{E}(H)$ é finito então para $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(H/H') \cdot H$ ser finito, deve ocorrer que $H = H'$.

Reciprocamente, se H é perfeito, pela proposição anterior $\mathcal{E}(H) \cong \chi(H)$, que é finito.

□

Referências Bibliográficas

[1] R.D. Blyth, R.F. Morse, *Computing the nonabelian tensor squares of polycyclic groups*, J. Algebra **321**, (2009) 2139-2148.

[2] R. Brown, J.L. Loday, *Van Kampen theorems for diagrams of spaces*, Topology **26** (1987) 311-335.

[3] K. W. Gruenberg, *Cohomological topics in group theory*, Lecture Notes in Mathematic No 143, Spinger-Verlag, New York and Berlim, 1970.

[4] N. Gupta, N. Rocco and S. Sidki, *Diagonal embeddings of nilpotent groups*, Illinois J. of Math., **30** (1986) 274-283.

[5] D.L Johnson, *Topics in the theory of groups presentations*, London Mathematical Society Student Texts 15, New York , Cambridge University Press 1980.

[6] F. Levin, *On some varieties of soluble group I*, Math Zeitchr, **85**, (1964) 369-372.

[7] G. Karpilovsky, *The Schur multiplier* (London Mathematical Society monographs; new ser. 2) Oxford University Press, 1987.

[8] A. McDermott, *The nonabelian tensor product of groups: computations and structural results*, Ph.D thesis, National University of Ireland, Galway (1998).

[9] C. Miller, *The second homology group of a group; relations among commutators*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952) 588-595.

[10] R. N. Oliveira, *Comutatividade fraca entre grupos isomorfos*, Tese de Doutorado, Universidade de Brasília (2007).

[11] R. N. Oliveira, S. Sidki. *On commutativity and finiteness in groups*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **40** (2009), 149–180.

[12] E.R. Pereira, *O multiplicador de Schur e grupos de recobrimento total*, Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília (1999).

[13] D.J.S. Robinson, *A course in the theory of groups*, Springer-Verlag, New York, 1996, Second Edition.

[14] N.R. Rocco, *On a construction related to the non-abelian tensor square of a group*, Bol. Soc. Bras. Mat. **22** (1991) 63-79.

[15] N.R. Rocco, *A presentation for a crossed embedding of finite solvable groups*, Comm. in Algebra **22** (1994) 1975-1998.

[16] N.R. Rocco, *Comutatividade entre p-grupos finitos* , Tese de Doutorado, 1980.

[17] J. J. Rotman, *An introduction to the theory of groups*, Spinger-Verlag, New York and Berlim, 1995, Fourth Edition .

[18] D. Segal, *Polycyclic groups*, Cambridge University Press, 1990.

[19] S. Sidki, *On weak permutability between groups*, J. Algebra **63** (1980) 186-225.

[20] Urs Stammbach, *Über die ganzzahlige homologie von gruppen*, Expo. Math. 3 **4** (1985) 359–372.

[21] The GAP group, GAP-*Groups*, *Algorithms an programming*, version 4.4, available at http://www.gap-system.org, 2005.