

**AVALIAÇÃO COMPARATIVA PARA ESTIMATIVA
DA PARADA DE TRINCAS CURTAS NA FADIGA
POR FRETTING**

Estarle Roberto Ferreira de Souza Campos

Brasília, 28 de fevereiro de 2014

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM
CIÊNCIAS MECÂNICAS

**AVALIAÇÃO COMPARATIVA PARA ESTIMATIVA
DA PARADA DE TRINCAS CURTAS NA FADIGA
POR FRETTING**

ESTARLE ROBERTO FERREIRA DE SOUZA CAMPOS

ORIENTADOR: JOSÉ ALEXANDER ARAÚJO

**PUBLICAÇÃO ENM.DM-213A/2014
Brasília, 28 de fevereiro de 2014**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS

AVALIAÇÃO COMPARATIVA PARA ESTIMATIVA DA PARADA DE TRINCAS CURTAS NA FADIGA POR FRETTING

Estarle Roberto Ferreira de Souza Campos

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE.

Banca Examinadora

Prof. José Alexander Araújo, D.Phil (ENM-FT-UnB)
(Orientador)

Prof. Francisco Evangelista Junior, PhD (ENC-FT-UnB)
(Examinador Externo)

Prof. Jorge Luiz de Almeida Ferreira, DSc (ENM-FT-UnB)
(Examinador Interno)

Brasília, 28 de Fevereiro de 2014

FICHA CATALOGRÁFICA

CAMPOS, ESTARLE ROBERTO FERREIRA DE SOUZA

AVALIAÇÃO COMPARATIVA PARA ESTIMATIVA DA PARADA DE TRINCAS CURTAS NA FADIGA POR FRETTING. [Distrito Federal] 2014.

xii, 140p., 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Ciências Mecânicas, 2014)

Dissertação de mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica .

1. Fadiga por *Fretting*

2. Fadiga Multiaxial

3. Parada de Trincas Curtas

4. Método Distribuição de Discordâncias

I. ENM/FT/UnB

II. Título (ENM.DM-213A/2014)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

CAMPOS, E. R. F. S., (2014) Avaliação comparativa para estimativa da parada de trincas curtas na fadiga por fretting. Dissertação de mestrado, Publicação ENM.DM-213A/2014, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, DF, 140 p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Estarle Roberto Ferreira de Souza Campos.

TÍTULO: Avaliação comparativa para estimativa da parada de trincas curtas na fadiga por fretting.

GRAU: Mestre

ANO: 2014

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Estarle Roberto Ferreira de Souza Campos

Correio Eletrônico: estarle.roberto@gmail.com

Dedicatória(s)

Dedico este trabalho primeiramente a Deus e a minha família, especialmente a minha mãe, que com amor e dedicação me tornou quem sou. Dedico-o também à Flávia de Sá cujo amor, carinho e apoio foram fundamentais durante toda a realização deste projeto.

Estarle Roberto F. de S. Campos

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, que com graça e misericórdia sempre tem abençoado meus caminhos.

Agradeço à minha mãe, Ana Cláudia, sem a qual não teria feito escolhas tão acertadas na minha vida, sempre me ensinando os valores e preceitos para uma vida íntegra e digna.

Aos meus familiares, que mesmo nos momentos mais difíceis dessa caminhada me apoiaram e me ajudaram a seguir em frente. .

Aos professores do grupo do de mecânica dos materiais, técnicos e outros colaboradores, especialmente ao Prof. José Alexander pelas inúmeras lições, não apenas acadêmicas, mas também de vida, um exemplo a ser seguido.

Por fim, agradeço a pessoa muito especial, a quem possuo grande amor e afeto, sem a qual nada disso teria sentido. “Flávia, você é o meu orgulho e minha alegria”.

Estarle Roberto F. de S. Campos

RESUMO

O presente trabalho tem como principal objetivo a previsão da parada de trincas curtas, em corpos submetidos a condições de *fretting*. O modelo proposto se baseia na determinação do Fator Intensidade de Tensão dentro da zona de processo, sob à ação de cargas de contato, e posterior comparação com dois critérios de limiar de propagação de trincas curtas: El-Haddad e Kitagawa-Takahashi. Os resultados encontrados foram confrontados com dados experimentais da literatura. Todos os casos estudados utilizaram contato entre cilindro e plano feitos de aço 52100 e AISI 1034, respectivamente. Os testes foram conduzidos em regime de escorregamento parcial, sem a presença de carga remota de fadiga. Para estes dados à metodologia que forneceu as melhores estimativas para o tamanho da trinca parada baseou-se no cálculo de um fator intensidade de tensão efetivo (Modo I e Modo II) e na curva limiar de Kitagawa-Takahashi. Para determinar a priori o ângulo de propagação da trinca utilizou-se um critério de fadiga multiaxial de Plano Crítico associado à Teoria das Distâncias. Concluiu-se a escolha do modelo mais apropriado para estimar a parada do crescimento de trincas curtas depende fortemente do material estudado e de seu fator de Bazant.

Palavras-chave: Fadiga por *fretting*, Parada de trincas curtas, Fadiga multiaxial, Plano crítico, Teoria das Distâncias Críticas.

ABSTRACT

The aim of this work is to estimate the arrest size of short cracks in bodies subjected to conditions of fretting. The proposed model is based on determining the Stress Intensity Factor within the process zone under the action of contact loads, and later compare with two threshold criteria for of short propagating cracks, El-Haddad and Kitagawa-Takahashi. The results were compared with experimental data from literature . All case studies used contact between cylinder and plane made of steel AISI 52100 and 1034, respectively. The tests were conducted in partial slip regime, without the presence of bulk stress. For these data the methodology that provided the best estimates for the size of the crack arrest was based on the calculation of an effective stress intensity fator (Mode I and Mode II) and the threshold curve Kitagawa - Takahashi . To determine a priori the angle of crack propagation used a criterion of multiaxial fatigue associated with Critical Theory Plan of distance. It was concluded the choice of the most appropriate model to estimate the growth arrest of short cracks strongly depends on the material studied and its factor Bazant.

Key-Words: Fretting fatigue, short crack arrest, multiaxial fatigue, critical plate, Theory of Critical Distances (TDC).

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1. Contexto do Desenvolvimento do Trabalho.....	1
1.2. Revisão do Estado da Arte.....	2
1.3. Objetivo e Estrutura Do Trabalho.....	6
2. FADIGA.....	8
2.1. Mecanismos do Processo de Fadiga em Metais.....	8
2.2. Fadiga Uniaxial.....	10
2.2.1. Estado Uniaxial de Tensões.....	10
2.2.2. Curva de Wöhler.....	11
2.2.3. Efeito da Tensão Média.....	12
2.3. Fadiga Multi Axial e Modelos de Plano Crítico.....	15
2.3.1. Estado Multiaxial de Tensões.....	16
2.3.2. AMPLITUDE DA TENSÃO CISALHANTE EM FADIGA MULTIAXIAL.....	19
2.4. Teoria das Distancias Críticas.....	25
3. MECÂNICA DO CONTATO ELÁSTICO.....	28
3.1. Aspectos gerais.....	28
3.2. Conceitos fundamentais.....	28
3.2.1. Classificação dos tipos de contato.....	28
3.2.2. Contato Hertziano Em Corpos Cilíndricos 2-D.....	29
3.3. Formulação Para Contato Sob Condições De <i>Fretting</i>	31
3.3.1. Particularização Para O Contato De Corpos Cilíndricos.....	32
3.3.2. Distribuição De Pressão Normal Para Cilindro.....	33
3.3.3. Distribuição De Força Tangencial Para Contato Entre Cilindros Em Escorregamento Parcial.....	34
3.3.4. DISTRIBUIÇÃO TENSÕES NA REGIÃO DE CONTATO.....	39
4. MECÂNICA DA FRATURA.....	41
4.1. Aspectos Gerais.....	41
4.2. Mecânica da Fratura Linear Elástica.....	41
4.2.1. Fator Intensidade de Tensão.....	42
4.2.2. Zona Plástica.....	44
4.2.3. Tamanho da Zona Plástica.....	45
4.2.4. Campo de Validade da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE).....	46
4.2.5. Tenacidade à Fratura.....	47
4.3. Discordâncias.....	48

4.3.1.	Discordâncias Aplicadas Em Trincas.....	49
4.3.2.	Trincas perpendiculares à superfície.....	50
4.3.3.	Trincas inclinadas à superfície.....	53
4.4.	Crescimento de Trincas.....	57
4.4.1.	Curva da/dN versus ΔK	58
4.5.	Comportamento de Trincas Curtas.....	60
4.5.1.	Os Diagramas de Kitagawa-Takahashi e El Haddad.....	61
4.6.	Formulações De Parada De Trincas Curtas Na Fadiga Por <i>Fretting</i>	63
4.6.1.	Metodologia de Araújo e Nowell (1999).....	64
4.6.2.	MODELO DINI ET AL., (2006).....	66
4.6.3.	Metodologia Fouvry et al., (2007).....	67
4.7.	Metodologia Proposta no Presente Trabalho.....	70
5.	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	74
5.1.	Dados Experimentais Utilizados Para Avaliação.....	74
5.2.	Resultados para previsão de para de trincas curtas considerando modo I e Trinca Perpendicular à Superfície.....	76
5.2.1.	Pressão Normal baixa.....	76
5.2.2.	Pressão Normal alta.....	78
5.3.	Resultados para previsão de parada de trincas curtas considerando modo misto e 30°.....	81
5.3.1.	Pressão Normal Baixa.....	82
5.3.2.	Pressão Normal alta.....	83
5.4.	Resultados para previsão dos ângulos de nucleação e propagação das trincas utilizando o modelo de plano crítico.....	86
5.4.1.	Resultados para previsão do tamanho de parada de trincas curtas utilizando os ângulos de propagação indicados pelo Plano Crítico.....	92
5.5.	Fator de Bazant.....	99
6.	CONCLUSÕES.....	102
7.	SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS.....	104
8.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	105
Anexo I.....	113
A.1	Definição de Vetor e Tensor Tensão.....	113
Anexo II.....	117
A.2	Regras de transformação para Discordâncias.....	117
Anexo III.....	120
A.3	Programas computacionais utilizados nos cálculos do fator intensidade de tensão.....	120

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1- Falha e eixo ferroviário (adaptado de railway investigation report R01Q0010 Transportation Safety Board of Canada (TSB), 2001)	1
Figura 2.1- Bandas de escorregamento devido a ação de carregamentos monotônico e cíclico. 8	
Figura 2.2 Marcas de praia na superfície de fratura de uma Liga de Al-Cu , Adaptado de Pook (2007)	9
Figura 2.3- Curva de S-N típica.	12
Figura 2.4- Efeito da tensão média na curva S-N	13
Figura 2.5 Diagrama de amplitude de tensão normalizado vs tensão média.	14
Figura 2.6- Vetor unitário \mathbf{n} referenciado em um sistema de coordenadas $Oxyz$ pelas suas coordenadas esféricas θ e ϕ	17
Figura 2.7- (a) Vetor tensão normal σ e a tensão cisalhante τ atuando em um plano material β ; (b) Evolução dessas quantidades de tensão atuando ao longo de β durante um carregamento complexo	18
Figura 2.8- Envelope convexo da história do vetor tensão cisalhante ϕ no plano β e o Maior Retângulo Circunscrito (MRC) como uma alternativa do Envelope convexo.	21
Figura 2.9 - Retângulo de lados a_i , $i=1,2$, circunscrevendo a projeção da história de tensões ϕ no plano β com as faces tangentes em \mathbf{p}_i e \mathbf{q}_i , $i=1,2$	22
Figura 2.10- Maior Retângulo Circunscrito (MRC) para ϕ no plano β	23
Figura 2.11- Corpo de prova entalhado submetido a carregamento uniaxial.	26
Figura 2.12 - Diferentes formalizações da Teoria das Distâncias Críticas: (a) Método do Ponto; (b) Método da Linha; (c) Método da Área.	27
Figura 3.1- Modos de Contato.	29
Figura 3.2- Contato entre cilindro com eixos paralelos.	30
Figura 3.3- Variação da carga tangencial no tempo.	36
Figura 3.4 - Distribuição da carga Qax sobre a superfície devido à Q em vários instantes de tempo.	37
Figura 3.5- Configuração típica de aplicações de carga em fadiga por <i>fretting</i>	38
Figura 3.6 – Distribuição de carregamento para diferentes cargas tangenciais com atuação da carga remota de fadiga.	39
Figura 4.1- Furo elíptico em uma placa plana sobre tração uniforme	42
Figura 4.2- trinca em uma placa infinita sujeita a tensão biaxial	43
Figura 4.3- Esquema tridimensional da região da zona plástica. Adaptado de Broek (1982)	45
Figura 4.4- Distribuição de discordâncias em uma descontinuidade de espessura δ	48
Figura 4.5- Discordâncias em trinca perpendicular a superfície.	51
Figura 4.6- Trinca inclinada à superfície.	54
Figura 4.7- Comportamento Anômalo de trincas curtas.	61
Figura 4.8- Diagrama esquemático de K-T mostrando o comportamento e propagação de trincas em termos de ΔK	62
Figura 4.9: Diagramas K-T e El-Haddad de forma esquemática	63
Figura 4.10- Comportamento do FIT no Diagrama K-T em fadiga por <i>fretting</i>	65
Figura 4.11 – Exemplo de resultado comparativo entre o diagrama K-T e a curva de E-H para prever regime de vidas longas ou curtas. Adaptado de Dini el Al, (2006)	67

Figura 4.12- Ilustração da metodologia de trincas curtas paradas em <i>fretting</i> considerando o tamanho medido experimentalmente para comparação.....	68
Figura 4.13- Fator Intensidade de Tensão (FIT) contra tamanho de trinca normalizado, adaptado de Fouvry et al. (2007).	69
Figura 4.14- Princípio de Bueckner para o caso analisado. (a) representa o corpo sem trinca submetido às cargas de contato (b) representa um corpo desprovido de cargas externas, mas com trações na face da trinca iguais e opostas aos componentes de tensão em (a), de modo que, após a superposição as faces da trinca sejam livre de tensões.	71
Figura 4.15: Esquema da metodologia utilizada na estimativa do comprimento da trinca em propagação perpendicular a superfície.....	72
Figura 4.16: Esquema da metodologia utilizada na estimativa do comprimento da trinca, utilizando ΔK_{eff} para trinca inclinada $\theta = 30^\circ$	73
Figura 5.1- Morfologia da trinca de <i>fretting</i> , seção transversal ao longo do plano <i>xy</i> , trinca estudada ($P = 540 N/mm$, $Q = 282 N/mm$, 106 cycles); b_{exp} = máximo comprimento experimental da trinca; Adaptado de Fouvry et. al (2007).	75
Figura 5.2 - Faixa de FIT ΔKI contra o diagrama K-T e a curva Limiar de El-Haddad ($P = 227 N/mm$).....	78
Figura 5.3-Amplitude de FIT ΔKI contra a diagrama K-T e a curva Limiar de El-Haddad ($P = 540 N/mm$)	80
Figura 5.4- Diagrama comparativo normalizado $\Delta KI, exp \times b$, incluindo todas as condições de carga.....	81
Figura 5.5 Amplitude de FIT ΔK_{eff} contra a diagrama K-T e a curva Limiar de El-Haddad, para trinca a 30° do eixo perpendicular à superfície ($P = 227 N/mm$)	83
Figura 5.6- Amplitude de FIT ΔK_{eff} contra a diagrama K-T e a curva Limiar de El-Haddad ($P = 540 N/mm$)	84
Figura 5.7- Diagrama comparativo normalizado $\Delta K_{eff}, exp \times b$, incluindo todos os casos ..	85
Figura 5.8- Variação do ângulo θ_c do vetor normal ao plano crítico em função da profundidade $y = [0, b/2]$ para cada uma das cargas tangenciais e $P = 227 N/mm$	88
Figura 5.9- Variação do ângulo θ_c do vetor normal ao plano crítico em função da profundidade $y = [0, b/2]$ para cada uma das cargas tangenciais e $P=227 N/mm$	92
Figura 5.10 – Resultados das avaliações para carga normal baixa ($P = 227 N/mm$) do tamanho das trincas curtas paradas para os três ângulos sugeridos na análise do plano crítico.....	95
Figura 5.11– Resultados das avaliações para carga normal alta ($P = 540 N/mm$) do tamanho das trincas curtas paradas para os três ângulos sugeridos na análise do plano crítico.	98
Figura 5.12- Transição entre o regime de transição entre os limiares de propagação de trincas curtas e longas em função da razão b_0/b e do fator de ajuste γ	100
Figura 5.13- Introdução do fator de Bazant $\gamma = 4$ à curva de E-H; (a) Resultados para carga $P = 277 N/mm$; (b) Resultados para carga $P = 540 N/mm$	101
Figura 8.1- Forças externas atuando sobre um corpo material e um plano S passando pelo ponto P.....	113
Figura 8.2- Tetraedro infinitesimal sob a ação dos vetores tensão	114
Figura 8.3- Vetor unitário \mathbf{n} referenciado em um sistema de coordenadas $Oxyz$ e pela suas coordenadas esféricas θ e ϕ	115

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1- Componentes de distribuição da carga tangencial de contato para entre cilindros sob regime de escorregamento parcial.....	37
Tabela 3.2-Soma das componentes de tensão superpostas.....	40
Tabela 5.1- Propriedades Mecânicas dos Materiais	74
Tabela 5.2 - Parâmetros de fretting utilizados e resultados obtidos pelos nos experimentos de Fouvry et al. (2007)	75
Tabela 5.3- Resultados Trinca Perpendicular a Superfície e ΔKI ($P_0 = 450 MPa$).....	77
Tabela 5.4- Resultados Trinca Perpendicular a Superfície e ΔKI ($P = 540N/mm$)	79
Tabela 5.5- Resultados Trinca oblíqua a 30° e modo misto ($P = 227N/mm$).....	82
Tabela 5.6-Resultados Trinca oblíqua a 30° do eixo perpendicular à Superfície e ΔK_{eff} ($P=540N/mm$).....	83
Tabela 5.7- Ângulo do vetor normal ao plano crítico em função da profundidade y , a partir da extremidade anterior do contato $x = -a$ e da carga tangencial de <i>fretting</i>	87
Tabela 5.8- Máxima Amplitude da tensão cisalhante e Tensão normal máxima atuando sobre o plano crítico na condição de carga normal baixa ($P=227N/mm$).....	89
Tabela 5.9- Resultados para média aritmética dos ângulos entre $y = 0$ a $y = b_0/2$, para cada condição de carga tangencial.....	89
Tabela 5.10-Ângulo do vetor normal ao plano crítico em função da profundidade y , a partir da extremidade anterior do contato $x=-a$ e da carga tangencial de fretting.....	90
Tabela 5.11- Máxima Amplitude da tensão cisalhante e Tensão normal máxima atuando sobre o plano crítico na condição de carga normal baixa ($P=540N/mm$).....	91
Tabela 5.12 - Resultados para média aritmética dos ângulos entre $y = 0$ a $y = b_0/2$, para cada condição de carga tangencial	91
Tabela 5.13- Resultados para estimativas do tamanho das trincas paradas e utilizando os ângulos sugeridos pela análise de plano crítico e condição de carga normal baixa ($P = 227N/m$).....	93
Tabela 5.14-- Resultados para estimativas do tamanho das trincas paradas e utilizando os ângulos sugeridos pela análise de plano crítico e condição de carga normal baixa ($P = 540N/m$).....	97

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

A	razão de amplitude
A	complacência composta
a	semi-largura do contato
a_{crit}	semi-largura do contato crítico
b	comprimento da trinca
b_0	comprimento da trinca de transição entre trincas curtas e longas
b_{eet}	comprimento da trinca estimado
b_{exp}	comprimento da trinca experimental
c	metade do tamanho da zona de adesão para os instantes de carregamento máximo e mínimo
c^*	metade do tamanho da zona de adesão, para um instante t , com carregamento variando no tempo
E	Módulo de Elasticidade
e	deslocamento da zona de adesão para tensão remota no seu valor máximo
e^*	deslocamento da zona de adesão, para um instante t , com carregamento variando no tempo
f	coeficiente de atrito
$g(x)$	deslocamento tangencial relativo na direção x das superfícies de contato
$h(x)$	deslocamento normal relativo na direção y das superfícies de contato
ΔK_{th}	faixa do fator de intensidade de tensão limiar
K	Fator Intensidade de tensão
K_{IC}	tenacidade à fratura
ΔK_I	faixa do fator intensidade de tensão em modo I
ΔK_{II}	faixa do fator intensidade de tensão em modo II
ΔK_{eff}	faixa do fator intensidade de tensão efetivo em modo misto
$\Delta K_{,exp}$	faixa do fator intensidade de tensão para tamanho de trinca experimental
L	distância crítica
L_{MP}	distância crítica utilizando a formulação do Método do Ponto
L_M	distância crítica calculada no regime de fadiga de médio ciclo
L_s	distância crítica calculada para um carregamento estático

\mathbf{n}	vetor unitário de um plano
$\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z$	componentes do vetor unitário \mathbf{n}
P_o	pressão de pico, pressão máxima de contato
P	carga normal de contato
$p(x,y)$	distribuição de pressão normal na região de contato
Q	carga tangencial de contato
Q_{max}	carga tangencial máxima
Q_{min}	carga tangencial mínima
$q(x,y)$	distribuição de carga tangencial na região de contato
$q'(x)$	perturbação na distribuição de carga cisalhante superficial
$q''(x)$	termo de correção para a distribuição da carga cisalhante superficial
R	razão de carregamento
R_s	raio da superfície de contato
t	variável tempo
\mathbf{t}_n	vetor tensão atuando sobre um elemento de área ΔA
\mathbf{t}	vetor tensão atuando sobre uma superfície S

Símbolos gregos

β	plano material elementar
ν	coeficiente de Poisson
μ	módulo de rigidez
φ	curva descrita pelo vetor tensão \mathbf{t}
ψ	projeção de φ sobre o plano material β
θ, φ	coordenadas esféricas do vetor unitário
τ	vetor tensão cisalhante
τ_a	amplitude da tensão cisalhante
τ_m	tensão cisalhante média
σ_{max}	tensão máxima
σ_{min}	tensão mínima
$\Delta\sigma_{-1}$	limite de resistência a fadiga para $R = -1$
σ_y	limite de escoamento do material
σ_{UTS}	limite último de resistência à tração de engenharia.

σ'_{UTS}	limite último de resistência à tração real.
σ_n	componente normal tensor tensão normal paralelo ao vetor unitário \mathbf{n}
σ_B	tensão remota de fadiga, tensão alternada cíclica
$\sigma_{n,max}$	máximo valor da tensão normal
$\sigma_{n,m}$	valor médio da tensão normal
$\sigma_{n,a}$	amplitude da tensão normal
$\bar{\sigma}$	tensão normal média
σ_m	tensão normal média
σ_a	amplitude da tensão normal
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	tensão normal na direção x, y e z, respectivamente
θ_c	ângulo entre o vetor normal ao plano crítico e o eixo x no plano
$\bar{\theta}_c$	Média do ângulo entre os vetores normais ao plano crítico e entre a extremidade anterior do contato e L_{MP}

Subscritos

<i>max</i>	máximo valor de uma grandeza
<i>mín</i>	mínimo valor de uma grandeza
<i>m</i>	valor médio de uma grandeza
<i>a</i>	amplitude de uma grandeza
<i>xx, yy, zz, xy</i>	componentes do tensor tensão

Siglas

MRC	Método do Maior Retângulo Circunscrito
TDC	Teoria das Distâncias Críticas
K-T	Diagrama de Kitagawa-Takahashi
E-H	Curva de El Haddad
FIT	Fator Intensidade de Tensão
LEFM	Mecânica da Fratura Linear Elástica

1.INTRODUÇÃO

1.1. Contexto do Desenvolvimento do Trabalho

Um dos grandes desafios da engenharia reside na necessidade de entender como o processo de falha mecânica ocorre e estabelecer critérios mais acurados de controle sobre a vida operacional de elementos mecânicos. Torna-se cada vez mais importante reduzir a ocorrência de quebras inesperadas de componentes em serviços, as quais que podem trazer sérios danos sobre a economia e a segurança. Em estudo realizado nos Estados Unidos, Reed et al.(1983), os custos econômicos decorrentes de fraturas em 1978 foram de aproximadamente U\$ 119 bilhões (em dólares de 1982), o que representou cercar de 4% do Produto Interno Bruto (PIB) do país. Um valor similar foi relatado em estudo de 1991 realizado na Europa, Milne (1994). Essas investigações indicam que tais custos podem ser significativamente reduzidos por meio de aperfeiçoamento de tecnologia de projetos, principalmente na área de fadiga.

Em vários tipos de montagens mecânicas a existência de pontos de contato submetidos a cargas variáveis torna-se praticamente inevitável. Exemplos desse fato podem ser encontrados em diversos tipos aplicações, sendo as mais comuns em eixos ferroviários, juntas flangeadas, fixações por arrebites de fuselagem de aviões, pás e rotores de turbinas a gás, entre outras. A presença de cargas variáveis ou de vibrações externas atuando sobre elementos em contato produzem movimentos tangenciais entre as superfícies. Isso pode acelerar o desgaste e redução na vida em serviço desses componentes.



Figura 1.1- Falha e eixo ferroviário (adaptado de railway investigation report R01Q0010 Transportation Safety Board of Canada (TSB), 2001)

Ao pequeno movimento oscilatório entre duas superfícies sólidas em contato denomina-se o fenômeno de *fretting*. A consequente redução da vida de e componentes onde esse movimento está presente denota-se a fadiga por *fretting*. Adicionalmente, a ocorrência de desgastes superficial devido a escorregamentos entre as superfícies em contato é chamada de desgaste por *fretting*.

Em diferentes tipos de máquinas e estruturas em que a fadiga exerce papel crucial, provavelmente a de maior destaque é a aviação. Poucos outros ramos estão sujeitos a acidentes catastróficos, tanto do ponto de vista econômico quanto do potencial número de vítimas, como o setor de aviação. Em muitas partes críticas de um avião o *fretting* está presente e demanda maior preocupação durante o projeto. Em contraponto, a demanda por projetos mais eficientes, econômicos, leves e duráveis, sem que se abra mão da segurança, tem desafiado pesquisadores e engenheiros a superar os paradigmas e desenvolverem metodologias e critérios de projeto capazes de reduzir o conservadorismo e o pragmatismo nas abordagens aplicadas atualmente.

Portanto, a fadiga por *fretting* é um ramo da fadiga de alta relevância para indústria e para economia, onde avanços na tecnologia de projeto podem trazer ganhos importantes para sociedade, principalmente no que concerne a maior segurança e confiabilidade, além de redução nos custos de manutenção e produção.

1.2. Revisão do Estado da Arte

O termo fadiga se refere ao fenômeno de degradação gradual de um componente ou material submetido à aplicação de carregamentos cíclicos, eventualmente culminando em falha mecânica. O engenheiro alemão W. A. J. Albert iniciou o estudo de fadiga em metais, por volta de 1829, analisando falhas em correntes de ferro Albert (1838). Devido à ligação intrínseca entre avanços tecnológicos e motivações econômicas, os estudos em fadiga se tornaram importantes em 1850, quando falhas em eixos de locomotivas eram frequentes, causando enormes prejuízos. Entre 1850 e 1860 Wöhler realizou importantes estudos sobre o tema, iniciando os primeiros ensaios de espécimes em laboratório. Wöhler mostrou como a vida em fadiga diminui à medida que a amplitude de carregamento diminui, e que abaixo de uma amplitude de tensão limiar os espécimes testados não fraturam. Assim, foram introduzidos os conceitos de diagrama tensão versus vida (Curva S-N) e limite de fadiga.

A partir de dados experimentais muitos critérios de falha para fadiga uniaxial foram desenvolvidos por diferentes estudiosos como, Gerber (1874), Goodman (1899) e Soderberg (1930), os quais se dedicaram a quantificar o efeito da tensão média na vida em fadiga. Desde então, avanços significativos foram realizados sobre o entendimento dos mecanismos de fadiga, tais como, mecânica da fratura e propagação de trincas (Griffith,1920); efeito de concentradores de tensão na vida em fadiga, Neuber (1946); conceitos de danos acumulativos, Miner (1945) e Palmgren (1924); crescimento e propagação de trincas de fadiga, Paris (1963).

A fadiga por *fretting* é um caso particular do processo de fadiga, caracteriza-se pelo estudo do desgaste ou a fratura de corpos submetidos a cargas de contato superficial aplicadas de forma cíclica. Há cerca de um século Eden et al. (1911) identificou resquícos de óxido de ferro na próximo a zona de contato entre o espécime e a garra em teste de fadiga uniaxial, caracterizando o desgaste por *fretting*, ou “*fretting wear*”, dando início aos estudos sobre o tema, embora o termo, *fretting*, em específico não tenha sido mencionado. Posteriormente, o fenômeno foi relacionado à redução da vida em fadiga, Tomlinson et al.(1939) notou a existência de zonas de microescorregamento na região de contato e a associou a diminuição da vida de componentes, trazendo o termo fadiga por *fretting* ao uso comum na descrição deste fenômeno.

Experimentos de fadiga utilizando espécimes de aço previamente submetidos a danos de *fretting* foram realizados por Warlow e Davies (1941), os resultados mostraram que uma redução de entre 13 a 17% na resistência a fadiga quando comparado a espécimes submetidos ao *fretting*. Investigações posteriores, McDowell (1953), mostraram que danos muito mais severos podem ser introduzido se a ação conjunta fadiga e *fretting* for introduzida, reduzindo a resistência em fatores entre 2 e 5, podendo atingir valores ainda maiores.

Os primeiros a demonstraram que o *fretting* é responsável por acelerar fortemente o processo de iniciação de trincas foram Fenner e Field (1958). Em fadiga plana, o processo de iniciação pode representar cerca de 90% da vida do espécime testado, ao passo que condições de *fretting* podem provocar o surgimento de micro trincas em poucos milhares de ciclos. Apesar e sua importância, até meados da década de sessenta, pouco avanço havia sido realizado no entendimento de como os principais fatores que atuam na fadiga por *fretting* se comportam, tais como a pressão de contato, amplitude do movimento relativo, propriedades materiais, etc.. Contudo, uma série de trabalhos

publicados entre o fim dos anos 60 e o início dos anos 70 por Nishioka e Hirakawa (1968, 1969 a, b, c, d, 1972) apresentaram um estudo sistemático sobre a influência desses fatores separadamente. Os experimentos conduzidos utilizaram o contato de sapatas cilíndricas pressionadas contra um espécime plano, configuração que permitiu controlar e mensurar a pressão normal, a carga tangencial, a carga remota de fadiga possibilitando uma análise de tensão. Dentre suas principais conclusões os autores reportaram que micro trincas eram iniciadas, mas não se propagaram até a fratura completa, perceberam ainda que para amplitudes de micro escorregamento abaixo de 5 micrometros não havia formação de micro trincas, a que entre 5 e 30 microns havia formação de micro trincas, mas não ocorrera propagação. Porém, quando a amplitude de escorregamento foi elevada acima de 50 microns, a vida do espécime testado era fortemente reduzida, para cerca de 1/8 do valor esperado para a ausência de *fretting*. Foi notado que as trincas se iniciaram na extremidade da região de contato, região de alta concentração de tensão, e se propagavam obliquamente para o interior na fase de propagação inicial. Outra conclusão importante foi a avaliação do efeito da tensão média, onde não se observou influência significativa na fase de iniciação de trincas, porém, uma forte dominância no processo de propagação e redução na vida dos componentes. Assim, o *fretting* mostrou possuir papel crítico na fase de formação e propagação inicial enquanto a carga remota de fadiga domina o processo de propagação macroscópico até a ruptura.

Bramhall (1973) investigou os efeitos causados pela variação do tamanho da zona de contato, mantendo-se a concentração de tensão local constante. Os resultados mostraram que a partir de um dado tamanho crítico da zona de contato a vida em fadiga é fortemente reduzida pela influência do *fretting*. Com base nesta observação Bramhall concluiu o campo de tensões induzido por contatos menores é insuficiente para propagar trincas até um comprimento suficientemente para que a carga remota pudesse dominar o processo. Em estudo posterior, Nowell (1988), conduziu uma extensa série de ensaios com o objetivo de confirmar a existência do tamanho crítico de contato, registrando parâmetros relevantes, os quais não foram mensurados inicialmente por Bramhall. Os resultados evidenciaram que para tamanhos de contato maiores, as vidas em *fretting* são curtas (da ordem de 10^5 ciclos). No entanto, abaixo de um tamanho de contato crítico, a_0 , ocorreu uma transição abrupta em regime de vidas de fadiga tornou-se muito longo ($>10^7$) corroborando a observação de Bramhall. Ainda em seu trabalho, Nowell propôs

a utilização de um método poderoso, baseado na distribuição de discordâncias, capaz de calcular o fator intensidade de tensão para trincas, tanto perpendiculares quanto inclinadas em relação à superfície.

As primeiras tentativas em prever o comportamento da fadiga por *fretting* se basearam em modelos empíricos, com aplicação restrita ao problema, principalmente devido à dificuldade de adequar os modelos clássicos de fadiga ao *fretting*. Porém, somente após se entender a inerente multiaxialidade envolvida no campo de tensões. Neu et al. (2000) aplicou métodos multiaxiais de Fatemi-Socie (1988) e Smith-Watson-Topper (1970) para interpretação de testes realizados em aço inox PH 13-8, concluindo que modelo proposto por Fatemi, o qual relaciona a iniciação de trincas à amplitude da deformação de cisalhamento e a máxima tensão normal no plano crítico, se mostrou mais efetivo para a predição tanto do crescimento quanto da direção de propagação de trincas.

De um modo abrangente, o campo de tensões gerado por um contato de *fretting* típico é altamente multiaxial e submete-se a cargas não proporcionais, entretanto, quando se aproxima das extremidades da zona de contato as cargas normal e cisalhante caem para zero, restando apenas a componente paralela a superfície, Nowell et al. (2005). Esse fato justifica o uso de analogia a entalhes para a concentração gerada pela ação do contato, tornando possível aplicar modelos tradicionalmente usados na predição da vida em fadiga de entalhes, modelos de distância crítica tais como os métodos do ponto, da linha e da área, Taylor (2007).

Para que a trinca se inicie e cresça o campo de tensões deve ser suficientemente alto, mesmo a uma distância razoável do contato, caso contrário, a trinca cresce até um local onde as tensões são mais amenas e a energia se torna insuficiente para manter sua propagação. Essa observação se justifica ao aplicar o conceito de parada de trincas curtas. O primeiro trabalho sistemático introduzindo a abordagem de trincas curtas ao problema de *fretting* foi realizado por Araújo e Nowell (1999) e independentemente por Chan (2001). O método se baseia traçar uma curva de evolução da amplitude do fator intensidade de tensão em função do tamanho da trinca e utilizar o diagrama de Kitagawa-Takahashi (1976) para se estabelecer um limiar de propagação, no qual as trincas curtas cessam seu crescimento.

Em trabalho semelhante posteriormente publicado, Dini et al. (2006) propuseram a comparação do uso do diagramas Kitagawa-Takahashi e da curva de El-Haddad para

determinadas condições experimentais, com objetivo de verificar qual modelo de limiar de propagação para trincas curtas era mais indicado a situações de *fretting*. Como conclusão, a curva de El Haddad forneceu melhor concordância com os resultados experimentais, se mostrando mais adequada ao caso estudado. Até então, em ambos os estudos mencionados, foi considerado o cálculo de ΔK apenas para o modo I de abertura, com trincas assumidas como perpendiculares à superfície da região de contato, desprezando-se a contribuição de ΔK_{II} . Neste contexto, Fouvry et al. (2007) desenvolveram trabalho experimental para avaliar o tamanho de parada de trincas sob condições de *fretting* e comparação dos resultados com o tamanho previsto pelo diagrama de K-T. Para tal, foi medido o ângulo de crescimento das trincas e utilizado o valor de ΔK_{eff} para comparação com o diagrama limiar, permitindo que as trincas fossem analisadas em modo misto de propagação.

1.3. Objetivo e Estrutura Do Trabalho

O presente trabalho tem por objetivo aplicar Métodos de Previsão de Parada de Trincas Curtas, utilizando comparativamente as curvas limiaries de Kitagawa-Takahashi e de El Haddad para estimar os tamanhos de trincas paradas em situações de contato cilindro e plano sob condições de *fretting*. Para tanto, é necessário calcular o fator intensidade de tensão considerando trincas perpendiculares e oblíquas à superfície de contato, o qual será obtido utilizando o método de distribuição de discordâncias, bem como determinar campo de tensões induzido pela ação das cargas de contato, calculado por meio de solução analítica considerando os modelos de Mindlin e Deresciewicz (1953).

Essa dissertação está organizada da seguinte forma: no capítulo "Introdução" foi feita a contextualização do fenômeno de fadiga e, além disso, foi apresentada a evolução histórica do estudo de fadiga uniaxial e fadiga multiaxial. No capítulo 2, "Fadiga", serão apresentados os conceitos fundamentais necessários para o estudo do fenômeno de fadiga uniaxial e multiaxial, e também serão apresentadas algumas técnicas para o cálculo da amplitude da tensão cisalhante no plano crítico. No capítulo 3, "Mecânica do contato", será abordado o assunto do contato de corpos necessário para o entendimento do fenômeno de *fretting*. Nesse capítulo será apresentada a teoria de contato hertziano e a modelagem matemática para o contato entre cilindros sob regime de escorregamento parcial, além da determinação da distribuição de tensões superficiais e no interior do material. No capítulo 4, sobre "Mecânica da Fratura", serão apresentados os conceitos

básicos da mecânica da fratura linear elástica, a metodologia de propagação de trincas, além de caracterizar o Método de Distribuição de Discordâncias para o cálculo do Fator Intensidade de Tensão. Ainda neste capítulo é apresentada a análise do comportamento de trincas curtas e as metodologias de parada de trincas curtas em condições de *fretting* existentes. No capítulo 5, “Resultados e Discussões” a descrição dos métodos e dos resultados obtidos são apresentados, bem como as considerações sobre estes. No capítulo 6, “Conclusões”, serão apresentadas as conclusões do presente trabalho. Por fim, No capítulo 7, "Propostas de trabalhos futuros", serão sugeridos algumas propostas de prosseguimento desse trabalho capazes de trazer aperfeiçoamentos às técnicas propostas.

2. FADIGA

2.1. Mecanismos do Processo de Fadiga em Metais

Ao ser observado em escala macroscópica o mecanismo que leva a falhas por fadiga se mostra relativamente simples, porém, ao se reduzir a escala de observação do fenômeno, detalhes de caráter metalúrgicos tornam-se evidentes elucidando a complexidade do tema.

O dano causado por fadiga caracteriza-se por possuir fases bem distintas: a nucleação, coalescência, crescimento e fratura.

- i. Nucleação: esta fase é geralmente consequência da plasticidade que ocorre no contorno dos grãos da microestrutura do material, em uma escala de 1 mm . A superfície dos grãos são regiões mais fracas, que se deformam plasticamente a baixas tensões. Devido ao processo contínuo de micro plastificação, à medida que o carregamento evolui surgem bandas de escorregamento nos grãos orientados em direções favoráveis, levando ao surgimento de micro trincas.

Sob a atuação de um carregamento cíclico de tração uniaxial, a máxima tensão cisalhante ocorre a 45° da superfície, provocando o escorregamento favoravelmente a este ângulo. Durante o carregamento degraus entre as bandas são formados na superfície, a medida que o carregamento é revertido, intrusões e extrusões ocorrem na superfície pelo escorregamento. Dessa maneira, pequenas trincas superficiais são formadas graças a estas pequenas deformações plásticas.

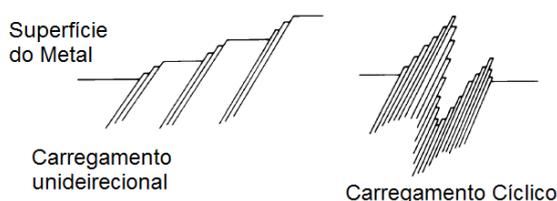


Figura 2.1- Bandas de escorregamento devido a ação de carregamentos monotônico e cíclico.

- ii. Coalescência: as microtrincas oriundas da fase de nucleação continuam se propagando a uma pequena taxa muito pequena no plano da máxima tensão cisalhante, até que estas se juntam a outras microtrincas. Esse processo se desenrola até o momento que a trinca atinge um tamanho crítico, usualmente

menor que 0.25mm e tipicamente em torno de 0.02mm. A partir daí, a micro trinca passa a ser vista como macro trinca e inicia-se o processo de crescimento estável. Esse tamanho crítico pode ser estimado utilizando a abordagem da mecânica da fratura linear elástica em espécimes sem entalhe.

$$b_0 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\Delta K_{th}}{\Delta \sigma_{-1}} \right)^2 \quad (2.1)$$

Onde $\Delta \sigma_{-1}$ é a faixa de tensão do limite de resistência a fadiga do material, ΔK_{th} é o limiar da faixa do fator intensidade de tensão, ambos para $r = -1$.

- iii. Crescimento estável: A partir do momento que a trinca atinge o comprimento crítico e se torna uma macrotrinca o processo de crescimento estável toma início. Uma das características mais marcantes ao observar esse processo microscopicamente é a presença de marcas de praia na superfície onde ocorre a falha, ver Figura 2.2. Cada estria corresponde ao crescimento δl provocado por um ciclo de carregamento (Pook & Smith, 1979). Apesar de ser muito comum, a ausência de marcas de praia não indica que o crescimento da trinca por fadiga não ocorreu.



Figura 2.2 Marcas de praia na superfície de fratura de uma Liga de Al-Cu , Adaptado de Pook (2007)

O mecanismo responsável pela propagação da macrotrinca se baseia na deformação dúctil na ponta da trinca. À medida que a variação do carregamento se eleva provoca a abertura da trinca e sua ponta se torna menos aguda, quando o descarregamento acontece, a trinca se torna novamente aguda e, devido a deformações locais plásticas irreversíveis, mais agudas que as iniciais, levando ao incremento δl em seu comprimento.

- iv. Fratura: Ocorre quando macrotrinca atinge o comprimento suficientemente grande para provocar a fratura do material em apenas um ciclo de carregamento. A redução de área devido à presença da trinca se torna tão severa o crescimento

catastrófico ocorre segundo a fratura frágil ou colapso dúctil dependendo do material.

2.2. Fadiga Uniaxial

O problema de fadiga geralmente se baseia em prever quantos ciclos um componente ou material irá durar até a falha, em outras palavras, prever a qual é a sua vida em serviço para um dado nível de carregamento. Três abordagens distintas são utilizadas para resolução do problema: o método de vida sob tensão, o método de vida sob deformação e a mecânica da fratura. O primeiro consiste em submeter corpos de prova a esforços repetidos pré-determinados e contar o número de ciclos até que ocorra sua falha. O segundo determina que a vida em fadiga possa ser estimada examinando-se as relações entre amplitude de deformações e número de reversões de carga para iniciação de uma trinca de fadiga. O último supõe que a partir do surgimento de uma trinca (defeito) a vida em fadiga remanescente do componente pode ser determinada segundo a taxa de crescimento da trinca para um dado nível de tensão.

A vida em fadiga é geralmente classificada de duas maneiras: *fadiga de baixo ciclo*, quando a vida do material N varia entre $1 \leq N \leq 10^3$ ciclos, em geral a tensão ultrapassa o limite de escoamento do material; *fadiga de alto ciclo*, quando a vida atinge valores superiores à $N \geq 10^3$, neste caso o nível de tensão não ultrapassa o limite de escoamento do material.

2.2.1. Estado Uniaxial de Tensões

Componentes mecânicos são, com frequência, submetidos a carregamentos variáveis no tempo, os quais podem ser cíclicos ou aleatórios, também chamados de randômicos. Carregamentos cíclicos são geralmente caracterizados por possuírem amplitude, um valor médio de tensão, frequência e número total de ciclos.

Quando apenas uma componente do tensor tensão é não nula e todas as são iguais a zero independentemente do tempo, o estado de tensão é dito uniaxial. Matematicamente o tensor para o caso uniaxial é representado por:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Muitas vezes carregamentos cíclicos seguem uma variação senoidal, caracterizados por uma tensão média $\bar{\sigma}_{xx}$, uma amplitude de tensão $\sigma_{xx,a}$ uma frequência angular ω como verificado na equação:

$$\sigma_{xx}(t) = \bar{\sigma}_{xx} + \sigma_{xx,a} \sin(\omega t) \quad (2.3)$$

A partir dessa definição, parâmetros importantes na análise de fadiga podem ser definidos. Os valores máximos e mínimos que σ_{xx} atinge são:

$$\sigma_{max} = \bar{\sigma}_{xx} + \sigma_{xx,a} \quad ; \quad \sigma_{min} = \bar{\sigma}_{xx} - \sigma_{xx,a} \quad (2.4)$$

A diferença de tensões é dada por:

$$\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min} \quad (2.5)$$

A razão de tensão R e a razão de amplitude A definida como:

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \quad ; \quad A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} \quad (2.6)$$

Como $R = \sigma_{min}/\sigma_{max}$ é possível mostrar que para carregamentos onde $\sigma_{max} = -\sigma_{min}$ a tensão média é nula e a razão de tensão é $R = -1$, este é chamado de completamente alternado. Nas situações onde a tensão mínima é nula, $R = 0$ e este é dito repetido.

2.2.2. Curva de Wöhler

Desde meados de 1800, o método de vida sob tensão tem sido o método padrão para análise e projeto de componentes submetidos a fadiga. Também conhecido como método *Stress-Life* (S-N), baseia-se na construção de relações empíricas entre a tensão aplicada no ponto crítico de um corpo de prova padronizado e o tempo de vida necessário para rompê-lo. Este método possui diferenças significativas em relação a outras abordagens, por ser mais simples de aplicar, possui inúmeras fontes de informação técnica disponível, pressupõe-se trabalhar sempre em regime linear elástico, permitindo o uso do princípio superposição.

Os testes de fadiga são conduzidos aplicando-se cargas alternadas, com amplitude σ_a constante e razão de carregamento R também constante. De maneira simples, relacionam-se a amplitude de tensão σ_a e o valor médio de tensão $\bar{\sigma}$ com os valores máximos e mínimos de carga aplicados nos ensaios.

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{m\acute{i}n}) = \frac{1}{2}\Delta\sigma \quad (2.7)$$

Os testes S-N mais comuns utilizam carregamentos completamente alternados, ou seja, com tensão média nula. Para levantar dados úteis a respeito da vida de um material, vários testes são realizados para diferentes níveis de amplitude de carregamento em espécimes identicamente fabricados. Posteriormente, os dados obtidos são traçadas em coordenadas semilog ou log-log, e a curva resultante que melhor ajusta os pontos experimentais é chamada de curva de Wöhler ou curva S-N. A Figura 2.3 mostra uma curva S-N típica de um aço.

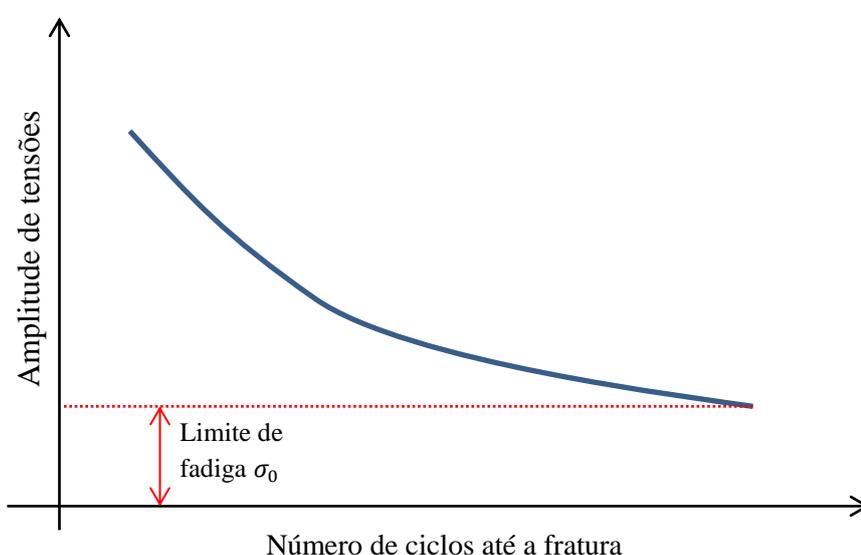


Figura 2.3- Curva de S-N típica.

A expressão matemática empírica que descreve o comportamento da curva S-N conhecida como equação de Basquin, equação (2.8)

$$\sigma_a = \sigma_f'(2N)^{b'} \quad (2.8)$$

Onde σ_f' é o coeficiente de resistência a fadiga; b' é o expoente de resistência à fadiga e N o número de ciclos até a falha.

2.2.3. Efeito da Tensão Média

Além da amplitude de tensão, a tensão média tem forte influência sobre o dano em fadiga. A tensão normal σ é responsável por fechar ou abrir as microtrincas. Quando a tensão σ atua em tração a microtrinca sofre abertura e provoca a aceleração do seu

processo de crescimento. Caso a tensão média atue comprimindo a região da trinca, o processo de crescimento será retardado. Tensões cisalhantes médias não provocam abertura ou fechamento de trincas, exercendo menor influência sobre sua propagação.

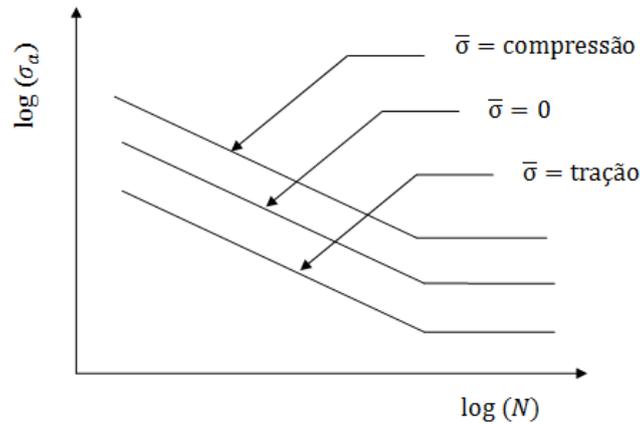


Figura 2.4- Efeito da tensão média na curva S-N

Um gráfico muito esclarecedor pode ser obtido normalizar a amplitude de tensão normalizada σ_a/σ_{a0} versus a tensão média, $\bar{\sigma}$, onde σ_{a0} é a amplitude de tensão para tensão média nula. O diagrama de amplitude de tensão normalizada vs. tensão média, ver Figura 2.5, tende a consolidar os dados em diferentes tensões médias e vidas em uma única curva. Assim, uma curva de ajuste aos dados pode ser traçada permitindo a determinação de um critério que represente a falha. Quando a amplitude de tensão é nula, a tensão média que representa a falha do material tende para o limite de resistência a tração σ_{UTS} . Na ausência de tensão média $\sigma_a/\sigma_{a0} = 1$. Dessa forma, a linha que representa os dados experimentais passa por dois pontos $(\bar{\sigma}, \frac{\sigma_a}{\sigma_{a0}}) = (0,1)$ e $(\sigma_{UTS}, 0)$.

Baseado na observação acima, um linha reta pode ser traçada ligando esses dois pontos resultando na equação:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_0} + \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{UTS}} = 1 \quad (2.9)$$

A equação acima representa o critério de falha de Goodman, onde $\sigma_{a0} = \sigma_{-1}$ que é o limite de fadiga para carregamento totalmente reverso, ou seja, $\bar{\sigma} = 0$.

Na tentativa de promover um melhor ajuste as curvas, Gerber propôs uma relação parabólica na forma:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_0} + \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{UTS}}\right)^2 = 1 \quad (2.10)$$

Entretanto, esta equação se adequa bem aos casos onde a tensão média é positiva, pois para $\bar{\sigma} < 0$, haveria um efeito deletério da tensão média a vida do material, o que está em desacordo ao que é observado experimentalmente.

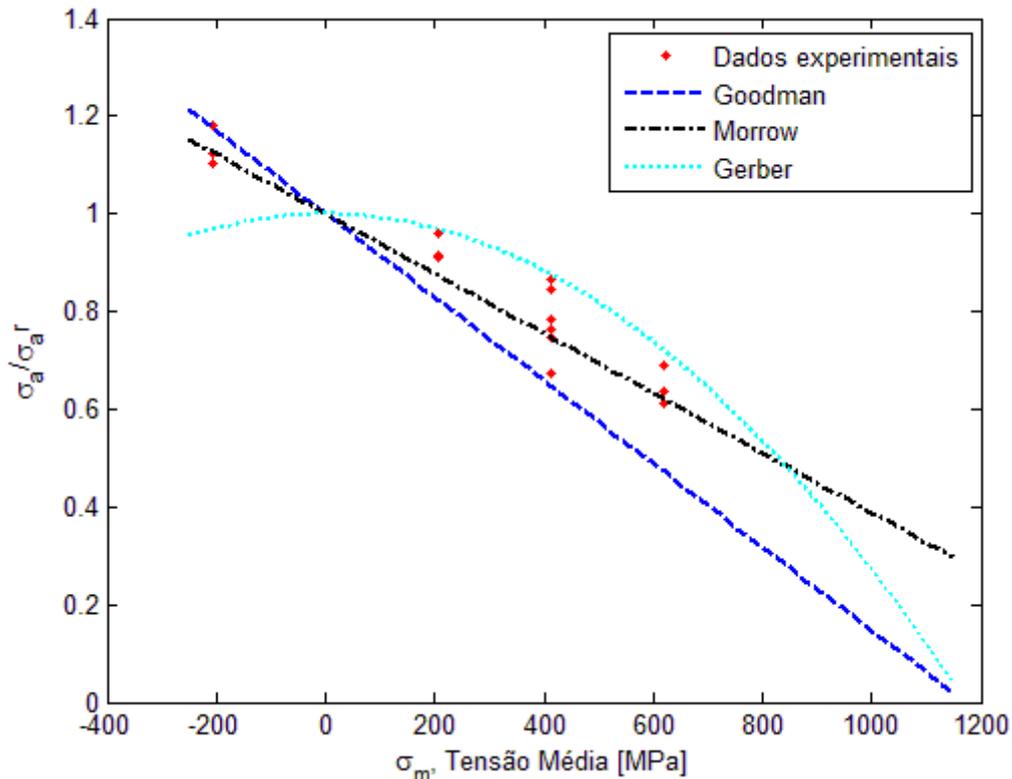


Figura 2.5 Diagrama de amplitude de tensão normalizado vs tensão média.

Para materiais dúcteis o valor do limite de resistência a tração última, σ_{UTS} , é significativamente menor que o valor real corrigido pela redução de seção na zona de ruptura, σ'_{UTS} . Assim, com a finalidade de promover um melhor ajuste da curva de Goodman para materiais dúcteis, Morrow (1968) propôs uma mudança na equação (2.8), logo:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_0} + \frac{\bar{\sigma}}{\sigma'_{UTS}} = 1 \quad (2.11)$$

A equação (2.11) possui boa concordância com o comportamento de aços. Um relação adicional pode ser determinada ao substituir o termo $\sigma_0 = \frac{\sigma_a}{1 - \frac{\sigma}{\sigma'_{UTS}}}$ na equação de

Basquim, resultando numa equação mais geral que permite computar o efeito exercido pela tensão média na vida em fadiga.

$$\sigma_a = (\sigma'_f - \bar{\sigma})(2N)^{b'} \quad (2.12)$$

2.3. Fadiga Multi Axial e Modelos de Plano Crítico.

O objetivo dos modelos de falha para fadiga multiaxial é relacionar a descrição do fenômeno de vida infinita em fadiga uniaxial para casos de carregamentos multiaxiais. No contexto uniaxial o limite de resistência é convencionado como a amplitude da história de tensão abaixo do qual não há o aparecimento de trincas macroscópicas após um grande número de ciclos (tipicamente, acima de 10^6 ciclos). A generalização deste conceito para o caso multiaxial é feita assumindo-se a existência de um domínio de resistência à fadiga envolvendo histórias de tensão multiaxiais. A formulação geral destes modelos pode ser escrita na forma

$$F(\tau_a, \sigma_n) \leq 0 \quad (2.13)$$

onde τ_a é uma medida associada a amplitude das tensões cisalhantes, σ_n é uma medida associada as tensões normais e a função $F()$ descreve a relação entre essas medidas. Modelos descritos pela equação (2.13) serão denominados *locais*, pois são aplicados em pontos materiais do componente. A diferença entre os vários modelos de fadiga propostos na literatura é a maneira como são definidas as medidas τ_a e σ_n .

As abordagens baseadas no conceito de plano crítico, Socie & Marquis (2000), consideram que as trincas de fadiga têm origem em determinados planos materiais, onde as combinações de tensões ou deformações cisalhantes e normais são mais severas. Neste contexto, as medidas τ_a e σ_n são calculadas considerando-se respectivamente as tensões cisalhantes e normais que atuam nos planos materiais. Cabe notar que modelos deste tipo são capazes de prever não só a resistência do material à fadiga e o local de iniciação da trinca, como também o plano de iniciação da trinca, chamado *plano crítico*. Dentre os modelos de plano crítico mais conhecidos, podem-se citar os propostos por

Brown & Miller (1973), McDiarmid (1974 e 1991), Mataka (1977), Socie (1987), Fatemi & Socie (1988) e Susmel & Lazzarin (2002).

Outra abordagem para a formulação dos modelos de fadiga define a amplitude das tensões cisalhantes, τ_a , a partir de uma medida associada à amplitude da história do tensor das tensões desviadoras, enquanto a medida σ_n é definida como sendo o valor máximo da tensão hidrostática ao longo da história de carregamento. Crossland (1956) define a amplitude das tensões cisalhantes como sendo o raio da menor esfera que envolve a história das tensões desviadoras. Uma forte crítica a esse modelo é a sua incapacidade de diferenciar o dano por fadiga produzido por histórias de tensões proporcionais e não-proporcionais. Por este motivo, novas propostas para a amplitude das tensões desviadoras foram propostas: Bin Li et al. (2000) define τ_a a partir da norma euclidiana associada aos semi-eixos da menor elipse que circunscribe as tensões desviadoras; Mamiya & Araújo (2002), por sua vez, propuseram uma medida para a amplitude das tensões cisalhantes baseada no valor máximo da norma euclidiana associada aos semi-eixos de todos os envelopes prismáticos que envolvem a história das tensões desviadoras.

2.3.1. Estado Multiaxial de Tensões

Elementos mecânicos estão comumente sujeitos a esforços variáveis em atuando em diversas direções. A atuação desses esforços provoca um estado de tensão complexo, onde a identificação das componentes que atuam com mais severidade se mostra uma difícil e torna o projeto seguro de tal elemento uma tarefa não trivial.

Esforços multiaxiais podem variar de diversas maneiras com o tempo, sendo mais comumente aplicados de forma cíclica. Matematicamente, estes estados multiaxiais de tensão são representados pelo tensor σ como na equação (2.14)a e cada componente é descrita como na equação (2.14)b

$$\sigma(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(t) & \sigma_{xy}(t) & \sigma_{xz}(t) \\ & \sigma_{yy}(t) & \sigma_{yz}(t) \\ & & \sigma_{zz}(t) \end{bmatrix} ; \quad \begin{aligned} \sigma_{ij}(t) &= \bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij,a}g(\omega t) \\ \sigma'_{ij}(t) &= \bar{\sigma}'_{ij} + \sigma'_{ij,a}g(\lambda_{ij}\omega t - \beta_{ij}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Onde $\bar{\sigma}_{ij}$ e $\bar{\sigma}'_{ij}$ representam os valores médios das tensões, $\sigma_{ij,a}$ e $\sigma'_{ij,a}$ são amplitudes das tensões, g é uma função periódica qualquer, ω é a frequência angular, λ_{ij} é a razão entre as frequências angulares de σ_{ij} e σ'_{ij} e β_{ij} é o ângulo de fase entre as tensões σ_{ij} e σ'_{ij} .

A forma como as tensões σ_{ij} e σ'_{ij} se relacionam ao variar no tempo pode ser classificadas de três maneiras distintas:

- i. *Proporcional*: quando as componentes de uma história de carregamento mantêm uma relação fixa ou de proporcionalidade durante toda sua evolução, ou seja:

$$\sigma_{ij} = \kappa \sigma'_{ij} \quad (2.15)$$

Onde $\kappa \in \mathfrak{R}$ representa o coeficiente de proporcionalidade

- ii. *Síncrona*: se as componentes do tensor estão na mesma frequência à medida que a história de carregamento progride, isto é, possuem o mesmo período ($\lambda_{ij} = 1$), esta é dita síncrona.
- iii. *Assíncrona*: Nas situações onde $\lambda_{ij} \neq 1$ as frequências angulares entre as componentes do tensor são diferentes, assim, a história de carregamento é chamada de assíncrona.

Considere o corpo da Figura 8.1 submetido a um carregamento cíclico e o plano material β passando pelo ponto P . Para caracterizar o plano β que passa pelo ponto em consideração basta determinar o vetor unitário $\mathbf{n}(\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z)$ normal a esse plano, referenciado por suas coordenadas esféricas (Figura 2.6).

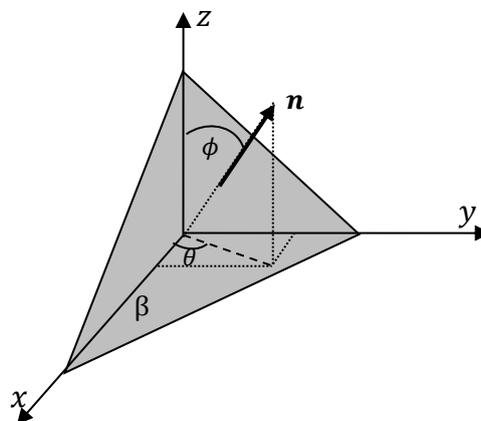


Figura 2.6- Vetor unitário \mathbf{n} referenciado em um sistema de coordenadas $Oxyz$ pelas suas coordenadas esféricas θ e ϕ .

Dessa forma o vetor unitário \mathbf{n} pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_x \\ \mathbf{n}_y \\ \mathbf{n}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin(\phi) \\ \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Devido à simetria constatada entre os componentes de tensão, os planos materiais podem ser investigados em um intervalo de θ e $\phi \in [0 \text{ e } \pi]$.

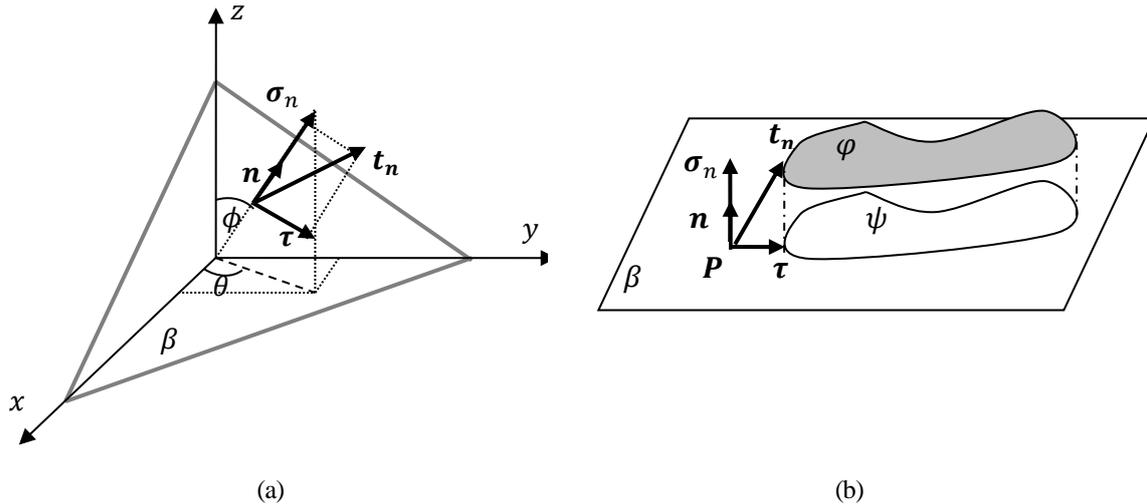


Figura 2.7- (a) Vetor tensão normal σ e a tensão cisalhante τ atuando em um plano material β ; (b) Evolução dessas quantidades de tensão atuando ao longo de β durante um carregamento complexo

Ao considerar um ponto material \mathbf{P} de um corpo submetido a um carregamento cíclico induzindo um tensor de tensões $\sigma(\mathbf{P}, t)$. O vetor tensão $\mathbf{t}_n(t)$ atuando sobre o plano β é a projeção do tensor σ na direção \mathbf{n} .

$$\mathbf{t}_n(t) = \sigma \cdot \mathbf{n} \quad (2.28)$$

O vetor tensão \mathbf{t} pode ser decomposto em dois vetores, um perpendicular ao plano β , que é o vetor tensão normal, σ_n , e um vetor tangencial ao plano, que é o vetor tensão cisalhante, τ . O vetor tensão normal, σ_n , é a projeção de \mathbf{t}_n sobre \mathbf{n} , Figura 2.7:

$$\sigma_n = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \quad (2.17)$$

Apesar de σ_n ser um vetor, mantendo-se o plano β fixo, a variação σ_n com o tempo ocorre apenas em módulo, ou seja, a variação de $\sigma_n(t) = \sigma(t)$, sendo uma grandeza escalar. Dessa maneira, a amplitude e o valor médio de $\sigma(t)$ são facilmente determinados:

$$\sigma_a = \frac{1}{2} (\max_{t \in P} (\mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{n}) - \min_{t \in P} (\mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{n})) \quad (2.18)$$

$$\sigma_m = \frac{1}{2} (\max_{t \in P} (\mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{n}) + \min_{t \in P} (\mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{n})) \quad (2.19)$$

A definição acima nos fornece que o vetor tensão cisalhante $\boldsymbol{\tau}$ é a projeção ortogonal do vetor tensão \mathbf{t} sobre o plano β , que é a o vetor tensão \mathbf{t} subtraído de sua componente normal, logo:

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \mathbf{t}(t) - (\mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \quad (2.20)$$

Durante carregamentos cíclicos complexos, a ponta do vetor tensão \mathbf{t} descreve uma curva fechada φ Figura 2.7 (b). Claramente, o vetor normal $\boldsymbol{\sigma}_n$ conserva a sua direção variando somente em magnitude. A ponta do vetor $\boldsymbol{\sigma}_n$ varia entre de uma linha cujos extremos são os mesmos da projeção da curva φ sobre \mathbf{n} . Dessa forma, durante um carregamento cíclico, o vetor $\boldsymbol{\sigma}_n$ atuando em β varia em magnitude, mas não em direção (Papadopoulos, 1998).

2.3.2. AMPLITUDE DA TENSÃO CISALHANTE EM FADIGA MULTIAXIAL

A situação é muito mais complexa quando se trata da definição da amplitude e do valor médio da tensão cisalhante. As complexidades surgem devido ao fato da tensão cisalhante mudar tanto em magnitude quanto em direção a cada ciclo em uma história de carregamento. Portanto, durante um ciclo de carregamento, a ponta do vetor tensão cisalhante descreve uma curva fechada Ψ sobre o plano β , a qual é uma projeção da curva φ descrita pela ponta do vetor \mathbf{t} , Figura 2.7. Dessa forma, o vetor tensão cisalhante $\boldsymbol{\tau}$ é uma função periódica do tempo.

A curva fechada Ψ , formada pela projeção do vetor tensão \mathbf{t} sobre o plano β passando pelo ponto \mathbf{P} , é diferente em cada plano de corte passando pelo ponto \mathbf{P} considerado. Assim pode-se concluir que a amplitude do vetor tensão cisalhante depende da orientação do plano em que atua, ou seja, depende do vetor unitário \mathbf{n} definido por suas coordenadas esféricas $\tau_a = \tau(\theta, \phi)$.

Para encontrar a máxima amplitude de tensão cisalhante, $\max \tau_a$, é necessário avaliar todos os planos que passam pelo ponto em consideração. Isso pode ser feito executando a procura do máximo valor de $\tau_a(\theta, \phi)$, em função dos ângulos θ e ϕ :

$$\max \tau_a = \max_{\theta, \phi} \{\tau_a(\theta, \phi)\} \quad (2.21)$$

Os ângulos denotados por (θ^*, ϕ^*) correspondem aos pares de ângulos que fornecem a solução maximização da equação (2.21). O par (θ^*, ϕ^*) define o plano crítico.

As primeiras tentativas para calcular a máxima amplitude da tensão cisalhante sob estado de tensão biaxial não-proporcional foram conduzidas por Little (1965,1966), e Little e Little (1965). Esses autores avaliaram a máxima amplitude da tensão cisalhante para carregamentos de flexão e torção totalmente alternados, síncronos e fora de fase usando uma combinação de procedimentos gráficos e analíticos, mas restritos à essas condições de carregamento.

Outras duas propostas foram formuladas no passado para calcular os valores da amplitude da tensão cisalhante e a tensão cisalhante média, τ_a e τ_m , respectivamente. A primeira delas foi proposta por Grubisic e Simbürger (1976), conhecida como o Método da Maior Projeção. Porém, há situações nas quais esse método conduz a resultados ambíguos (Papadopoulos, 1998).

A segunda proposta para resolver o problema é baseada no conceito da Maior Corda da curva ϕ , o qual constituiu um progresso em relação ao Método da Maior Projeção, Lamaitre e Chaboche (1990). No entanto, há situações em que o Método da Maior Corda é inconsistente, e novamente o problema surge no cálculo da tensão cisalhante média, onde há situações em que a Maior Corda não é única.

Na tentativa de resolver as inconsistências das duas propostas anteriores, Papadopoulos (1988) propôs o Método do Mínimo Círculo Circunscrito (MCC), no qual a tensão cisalhante média é o vetor que aponta para o centro do mínimo círculo que circunscribe a curva ϕ . E a amplitude da tensão cisalhante sobre o plano β é igual ao raio do círculo.

O método do mínimo elipsóide circunscrito foi inicialmente proposto por Bin Li et al. (2000) como alternativa ao método da mínima hipersfera. Para Bin Li et. al, o raio da menor hipersfera que contém o tensor desviador como medida equivalente para a amplitude da tensão cisalhante, não é suficiente para diferenciar histórias de tensões

proporcionais e não proporcionais, fato esse que explicaria os elevados índices de erro da hiperesfera para os casos não proporcionais

Um método desenvolvido mais recentemente por Araújo et al. (2010), do Grupo de Mecânica dos Materiais da Universidade de Brasília, que possui uma implementação numérica simplificada é chamado de Método do Maior Retângulo Circunscrito (MRC) e será utilizado nesse trabalho para o cálculo da amplitude da tensão cisalhante no plano crítico.

O MRC surge como uma alternativa capaz de calcular a amplitude da tensão cisalhante para diferentes tipos de carregamentos já que, conforme observado por Bin Li et al (2000) e Gonçalves et al. (2005), há carregamentos proporcionais e não-proporcionais que provocam diferentes níveis de danos nos materiais e para os quais os métodos relatados anteriormente nesse trabalho fornecem o mesmo valor de τ_a .

Um Envelope Convexo é a menor região convexa que contém um conjunto de pontos. Em um modelo multiaxial baseado no Plano Crítico, um envelope convexo é então o menor retângulo que contém a história da tensão cisalhante φ descrita em um plano material β , conforme mostrado na Figura 2.8. O embasamento mecânico para essa consideração é que não todos estados de $\tau(t)$, pertencentes a φ contribuem para o dano por fadiga. Dessa forma, é razoável considerar que somente as tensões cisalhantes sobre as bordas do Envelope Convexo afetam a integridade do material. Portanto, o Envelope Convexo (e sua característica geométrica) pode caracterizar de forma apropriada a severidade do carregamento cisalhante que eventualmente conduz à falha por fadiga. No entanto, os Envelopes Convexos são difíceis de serem determinados.

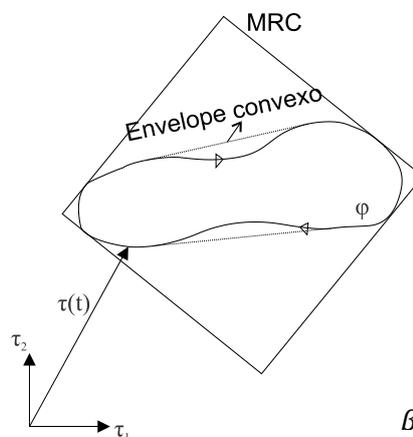


Figura 2.8- Envelope convexo da história do vetor tensão cisalhante φ no plano β e o Maior Retângulo Circunscrito (MRC) como uma alternativa do Envelope convexo.

Considere o retângulo ilustrado na Figura 2.9 com orientação arbitrária que circunscreve a história de tensões φ . O retângulo é tangente à história de tensões nos pontos, \mathbf{p}_i e \mathbf{q}_i , tais que:

$$\mathbf{p}_i(\varphi) = \mathbf{p}(t^*) \in \boldsymbol{\tau}; \arg(\max_t \tau_i(\varphi, t)), i = 1,2 \quad (2.22)$$

$$\mathbf{q}_i(\varphi) = \mathbf{q}(t^*) \in \boldsymbol{\tau}; \arg(\min_t \tau_i(\varphi, t)), i = 1,2 \quad (2.23)$$

são pertencentes ao contorno $\partial\boldsymbol{\tau}$, onde $\tau_i(\varphi, t), i = 1,2$ representam a i -ésima componente do vetor cisalhante $\boldsymbol{\tau}$ projetada no plano de corte no instante t , descrita em termos de uma base com orientação β (Fig. Figura 2.9).

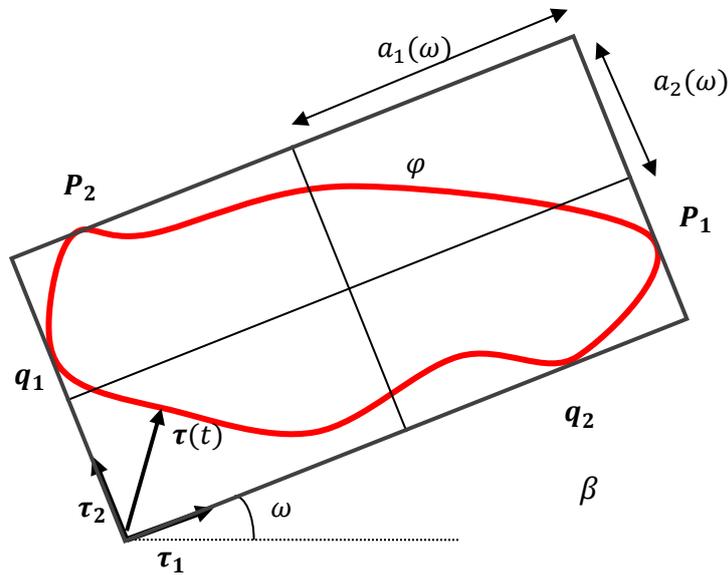


Figura 2.9 - Retângulo de lados $a_i, i=1,2$, circunscrevendo a projeção da história de tensões φ no plano β com as faces tangentes em \mathbf{p}_i e $\mathbf{q}_i, i=1,2$.

Considerando todas as possíveis orientações ω do retângulo, recupera-se por meio da identificação de todos os pontos $\mathbf{p}_i(\omega)$ e $\mathbf{q}_i(\omega)$ correspondentes, o contorno $\partial\boldsymbol{\tau}$ da curva poligonal de m vértices. Dessa forma, se estabelece uma relação direta entre a curva poligonal e os retângulos que a circunscrevem.

As metades dos lados de um retângulo com orientação β (com relação à τ_i) circunscrevendo a história da tensão cisalhante φ , pode ser definida como (Figura 2.10):

$$a_i(\omega) = \frac{1}{2} [\max_t \tau_i(\omega, t) - \min_t \tau_i(\omega, t)], i=1,2 \quad (2.24)$$

Para cada orientação ω do retângulo pode-se definir a amplitude da tensão cisalhante como:

$$\tau_a(\omega) = \sqrt{a_1^2(\omega) + a_2^2(\omega)} \quad (2.25)$$

Então, a amplitude da tensão cisalhante equivalente é aquela na qual a equação (2.25) atinge o seu valor máximo, conforme ilustrado na Figura 2.10:

$$\tau_a(\omega) = \max_{\beta} \sqrt{a_1^2(\omega) + a_2^2(\omega)} \quad (2.26)$$

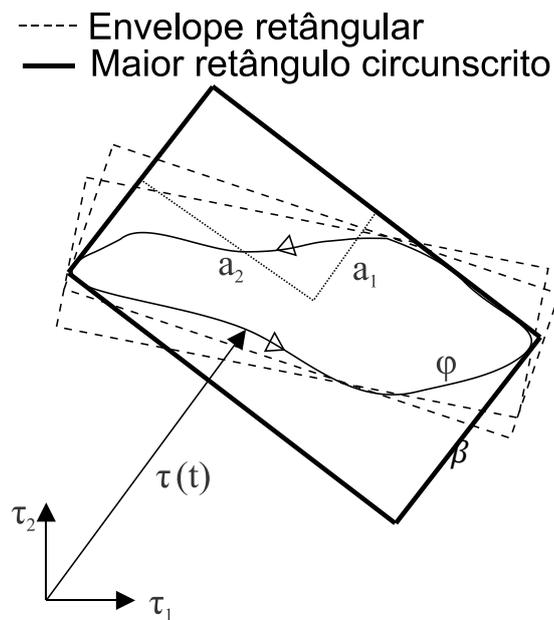


Figura 2.10-Maior Retângulo Circunscrito (MRC) para ϕ no plano β .

O algoritmo a seguir sintetiza o cálculo da amplitude da tensão cisalhante para um período de história de tensões, considerando os planos fornecidos por θ_i e ϕ_j e as orientações dos retângulos ω_i que circunscvem a história de tensões projetadas nos planos de corte.

InícioAlgoritmo

$\tau_a \leftarrow 0$ % Inicialização da amplitude da tensão cisalhante %

Para cada $\theta_i, \phi_j, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ **faça**

$\tau_k \leftarrow \tau(t_k, \theta_i, \phi_j), k = 1, \dots, n$ % Discrtização da história de tensões cisalhantes em um número finito de instantes do carregamento periódico %

$\tau_{ar} \leftarrow 0$ % Inicialização da amplitude da tensão cisalhante em cada plano de corte %

Para cada $\omega_i, i = 1, \dots, n_{rot}$ **faça**

$\tau_\omega \leftarrow \tau_k(\omega_i)$ % Descreve a história de tensão cisalhante na base de rotação %

Para $l = 1, 2$ **faça**

$p_l \leftarrow \max_l \tau_{\omega_i}$ % Valor máximo de τ_k %

$q_l \leftarrow \min_l \tau_{\omega_i}$ % Valor mínimo de τ_k %

$a_l \leftarrow \frac{1}{2} [p_l - q_l]$ % Calcula a amplitude de cada componente %

Até $l = 2$

$\tau_a \leftarrow \sqrt{\sum_{l=1}^2 a_l^2}$ % Calcula a amplitude da tensão cisalhante para as orientações ω_i %

Se $\tau_a > \tau_{ar}$

$\tau_{ar} \leftarrow \tau_a$ % Calcula a amplitude da tensão cisalhante no plano de corte %

Fim Se

Até avaliar todos os ângulos de rotação ω_i

Se $\tau_a > \tau_{ar}$

$\tau_a \leftarrow \tau_{ar}$ % Armazena o maior valor da amplitude de tensão cisalhante %

Fim Se

Até a avaliação de todos os planos de corte θ_i, ϕ_j

FimAlgoritmo

2.4. Teoria das Distancias Críticas

A Teoria das Distâncias Críticas é capaz de estimar com certa precisão o dano por fadiga em componentes contendo não somente trincas, mas também qualquer tipo de entalhe (*short, sharp e blunt*). Em outras palavras, essa teoria consegue descrever a transição de trincas/entalhes curtos para entalhes *blunt* (Susmel, 2008).

Antes de considerar com detalhes as diferentes formalizações da TDC é importante salientar que essa teoria estima o dano por fadiga diretamente pelo pós-processamento do campo de tensão linear-elástico agindo sobre a zona do processo de fadiga. Esse aspecto é muito importante porque a TDC permite que componentes reais sejam estudados sem a necessidade de análises elasto-plásticas.

A TDC tem como ideia inicial o fato de que o dano por fadiga na presença de concentradores de tensão pode ser estimado usando uma quantidade de tensão a qual é representativa de todo o campo de tensão linear-elástico na zona de fadiga. Em particular, os entalhes são assumidos na condição limite de fadiga quando a tensão efetiva, $\Delta\sigma_{ef}$, se iguala ao limite de fadiga, $\Delta\sigma_{-1}$, que é:

$$\Delta\sigma_{ef} = \Delta\sigma_{-1} \quad (2.27)$$

A tensão efetiva acima pode ser calculada simplesmente definindo uma distância crítica conveniente e um domínio de integração. Particularmente, independentemente da definição adotada para $\Delta\sigma_{ef}$, todas as modernas formalizações da distância crítica assumem que a mesma é uma propriedade do material que pode ser calculada como (Tanaka, 1983; Atzori et al., 1992; Lazzarin et al., 1997; Taylor, 1999):

$$L = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\Delta K_{th}}{\Delta\sigma_{-1}} \right)^2 \quad (2.28)$$

onde ΔK_{th} é a faixa do fator de intensidade de tensão threshold e $\Delta\sigma_{-1}$ é a faixa do limite de fadiga pleno, sendo ambas as propriedades determinadas para uma mesma razão de carregamento R .

De acordo com a equação (2.28), L depende de duas propriedades materiais, que variam de acordo com o material e com a razão de carregamento R .

A TDC pode ser formalizada de várias formas variando o domínio de integração utilizado para calcular a faixa da tensão efetiva. Em particular, se $\Delta\sigma_{ef}$ é calculada a uma determinada distância do ápice do concentrador de tensão, de acordo com o chamado

Método do Ponto (MP) um componente entalhado (ver Figura 2.11) está no seu limite de fadiga quando a seguinte condição é assegurada (Tanaka, 1983; Taylor, 1999):

$$\Delta\sigma_{ef} = \Delta\sigma_1 \left(\theta = 0, r = \frac{L}{2} \right) = \Delta\sigma_{-1} \quad (2.29)$$

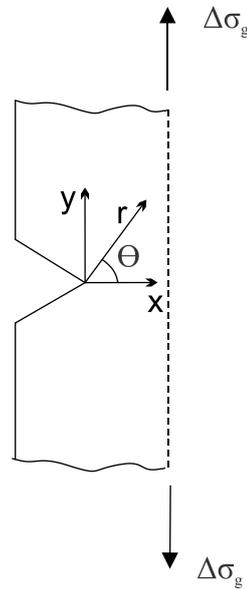


Figura 2.11- Corpo de prova entalhado submetido a carregamento uniaxial.

A Figura 2.12 (a) mostra a aplicação do Método do Ponto quando um componente entalhado é submetido à um carregamento uniaxial. De acordo com a ideia de Neuber, no lugar de determinar a $\Delta\sigma_{ef}$ a uma distância fixa da ponta do entalhe faz-se o cálculo da média da máxima tensão principal ao longo do entalhe bissector sobre uma distância de $2L$ (Tanaka, 1983; Lazzarin et al., 1997; Taylor, 1999). Em outras palavras, o Método da Linha (ML) postula que a condição limite de fadiga para um componente entalhado sob comportamento cíclico pode ser expresso como [Figura 2.12(b)]:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{ef} &= \frac{1}{2L} \int_0^{2L} \Delta\sigma_1 (\theta = 0, r) dr \\ &= \Delta\sigma_{-1} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Além disso, Taylor (1999) explicou que a faixa da tensão efetiva também pode ser calculada pela média de $\Delta\sigma_{ef}$ sobre uma área semicircular centrada na ponta do entalhe e tendo raio igual a L . Este método é conhecido como Método da Área (MA) [Figura 2.12(c)], e o mesmo postula que um componente entalhado está no seu limite de fadiga quando:

$$\Delta\sigma_{ef} = \frac{4}{\pi L^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^L \Delta\sigma_1(\theta, r) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cong \Delta\sigma_{-1} \quad (2.31)$$

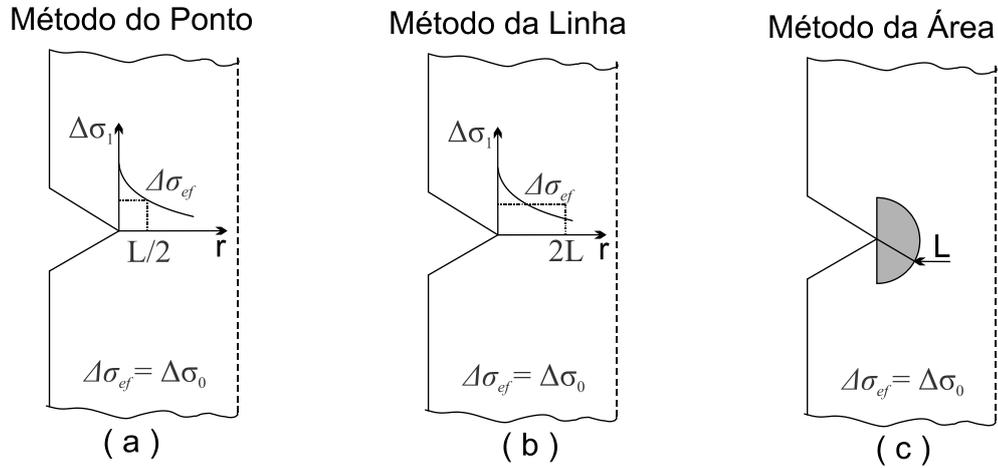


Figura 2.12 - Diferentes formalizações da Teoria das Distâncias Críticas: (a) Método do Ponto; (b) Método da Linha; (c) Método da Área.

É importante salientar que as diferentes formulações da TDC são capazes de fazer estimativas dentro de um intervalo de erro de $\pm 20\%$ independentemente do material e das características geométricas do mesmo (Taylor e Wang, 2000; Susmel e Taylor, 2003). É importante salientar que erros de $\pm 20\%$ são, em geral, considerados aceitáveis, devido à magnitude dos erros advindos do trabalho experimental e das análises de tensão numérica (Taylor e Wang, 2000).

3.MECÂNICA DO CONTATO ELÁSTICO

3.1. Aspectos gerais

Os estudos da mecânica do contato se iniciaram por volta de 1882 quando Heinrich Hertz publicou seu trabalho intitulado *On the contact of elastic solid*, Hertz (1882). Em seu trabalho Hertz propôs um modelo no qual a distribuição de pressão na zona de contato entre sólidos elásticos produzem deformações nos dois corpos onde a área de contato é aproximada por uma elipse. Porém, essa teoria é válida apenas para corpos perfeitamente elásticos e que não possuam atrito superficial.

Livros publicados por Galing (1953) e por Gladwell (1980) trouxeram novos avanços para a área de estudo, entretanto restritos a contato entre corpos perfeitamente elásticos e não tratam do problema de contato de rolamento. Johnson (1985) sintetizou vários trabalhos em *Contact Mechanics*, que fornece uma abordagem matematicamente menos sofisticada e voltada para o profissional de engenharia.

3.2. Conceitos fundamentais

3.2.1. Classificação dos tipos de contato

São duas as classificações dos tipos de contato e servem para dar uma ideia de como o problema de contato se comporta. A primeira trata da relação entre a carga aplicada e a extensão da zona de contato.

O contato incompleto se dá quando dois corpos são postos em contato ao longo de uma linha e ao serem submetidos a um carregamento se deformam e a linha de contato é ampliada para uma faixa de contato, assim a extensão da zona de contato varia de acordo com a carga aplicada (Figura 3.1a).

No contato completo a zona de contato é sempre a mesma não se alterando com as variações de carregamento. Por exemplo, quando um cubo é pressionado contra um plano, as duas superfícies em contato se tocam em toda a face inferior do cubo, portanto, a extensão do contato não depende da pressão aplicada (Figura 3.1b).

Existe ainda um tipo de contato misto, onde a pressão de contato possuirá um ponto de singularidade em um canto vivo, e decairá continuamente até zero na outra borda suave. Neste caso, a extensão do contato dependerá do carregamento imposto (Figura 3.1c).

Outro tipo de classificação que se baseia na conformidade do contato (Figura 3.1d). Quando a extensão do contato, para uma pequena carga aplicada, possuir uma dimensão muito menor do que uma extensão característica do corpo o contato é dito não conforme. Se a extensão do contato para pequena carga aplicada e da ordem da dimensão característica do corpo o contato é dito conforme.

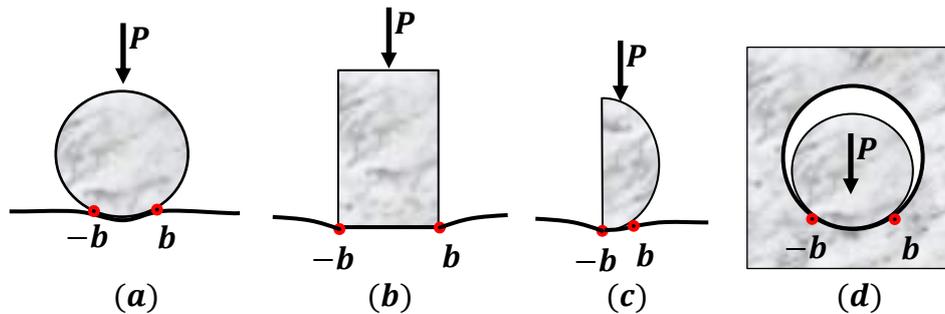


Figura 3.1- Modos de Contato.

3.2.2. Contato Hertziano Em Corpos Cilíndricos 2-D

Quando sólidos não conformes são postos em contato, eles inicialmente se tocam apenas em um ponto ou em uma linha. À medida que um carregamento é aplicado, a vizinhança do ponto inicial se deforma, e conseqüentemente o contato passa a ocorrer em uma área. A teoria da mecânica do contato tem por objetivo prever: *i*) a forma dessa área e como sua extensão varia com o incremento de carga; *ii*) a intensidade e a forma da distribuição de forças na superfície, bem como, *iii*) o campo de tensões gerado por essas forças.

Para solucionar o problema de contato entre superfícies Hertz utilizou algumas hipóteses simplificadoras, são elas:

As superfícies são contínuas e não conformes, ou seja, $a \ll R_s$;

As deformações são pequenas: $d \ll R_s$;

Cada sólido pode ser considerado um semi-plano elástico: $a \ll R_s$, $a \ll l$;

Os corpos são elasticamente similares: $E_1 = E_2$ e $\nu_1 = \nu_2$

A solução geométrica encontrada por Hertz, representada na Figura 3.2, que descreve as interações na zona de contato, é dada por:

$$\bar{h}_{y1} + \bar{h}_{y2} = \delta - Zx^2 - Hz^2 \quad (3.1)$$

Onde:

\bar{h}_{y1} e \bar{h}_{y2} correspondem aos deslocamentos verticais (interpenetração) das superfícies em relação ao eixo dos cilindros 1 e 2 respectivamente;

δ é a soma dos deslocamentos de pontos pertencentes eixo z que estão distantes da zona de contato.

Z e H são constantes reais que denotam o perfil elíptico da zona de contato que devem satisfazer o sistema:

$$(Z + H) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_1''} + \frac{1}{R_2'} + \frac{1}{R_2''} \right) \quad (3.2a)$$

$$(H - Z) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_1''} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_2''} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_1''} \right) \left(\frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_2''} \right) \cos(2\alpha) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.2b)$$

Em que R_i' e R_i'' são os raios de curvatura da superfície do corpo i com relação ao eixo x e ao z respectivamente, e α ângulo de inclinação relativo aos eixos principais entre os dois sólidos.

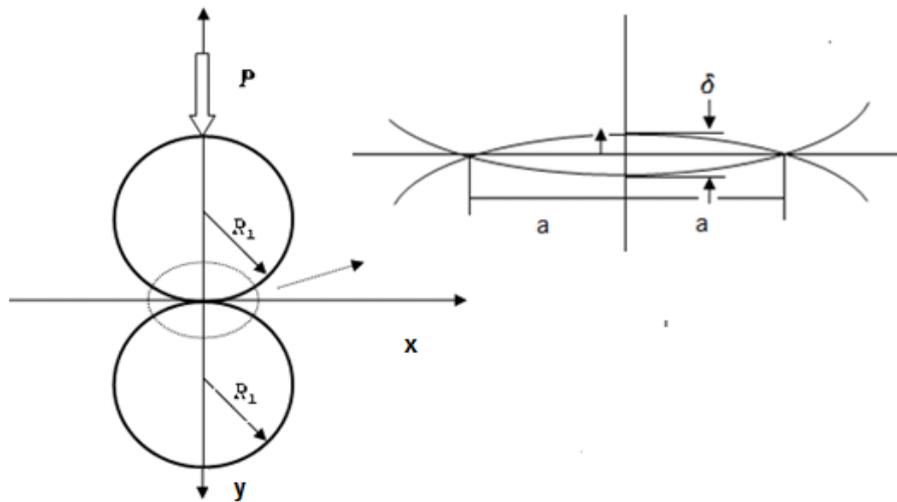


Figura 3.2- Contato entre cilindro com eixos paralelos.

Para o caso de dois cilindros de raios iguais com eixos paralelos ao eixo x (Figura 3.2), tem-se: $R_1' = R_2' = R_s$ e $R_1'' = R_2'' = \infty$. Assim, simplificando os termos é observado que $Z = 1/R$ e $H = 0$. A hipótese de raio de curvatura infinito na direção z faz com que a elipse se alongue nessa direção alcançando o caso limite onde a área de contato se torna uma faixa estreita de largura $2a$. Substituídos resultados de A e B na Equação 3.1, tem-se:

$$\bar{h}_{y1} + \bar{h}_{y2} = \frac{x^2}{R_S} \quad (3.3)$$

Pela simetria do sistema $\bar{h}_{y1} = \bar{h}_{y2}$ e de forma análoga $\delta = 2\bar{h}_{y1}$, portanto:

$$2\bar{h}_{y1} = \frac{x^2}{R_S} \quad (3.4)$$

Se $x = a$ é o último ponto no eixo x onde o contato corre, é possível definir a deformação de contato d como: $d = \bar{h}_{y1}(0) - \bar{h}_{y1}(a)$. Logo, escrevendo a Equação 3.4 de forma adimensional segue:

$$2\frac{d}{a} = \frac{a}{R_S} \quad (3.5)$$

É interessante observar que ao assumir-se que $a/R_S \ll 1$, implica que d/a também o seja. Essa condição deve ser satisfeita a hipótese do regime de pequenas deformações seja satisfeita.

Dada a descrição geométrica do problema agora é necessário relacionar as deformações experimentadas pelo sistema com uma carga P aplicada. A utilização da aproximação de Hertz parte da premissa que os deslocamentos $\bar{h}_{y1} = \bar{h}_{y2}$ podem ser obtidos assumindo cada corpo como um semi-plano elástico. Diferenciando a Equação 3.4 obtém-se a relação para os gradientes na superfície.

$$\frac{\partial \bar{h}_{y1}}{\partial x} = -\frac{x}{R_S} \quad (3.6)$$

Tendo em vista que o gradiente de deformação $\frac{\partial \bar{h}_y}{\partial x}$ para um semi-plano elástico submetido a uma distribuição de pressão normal $p(x)$ em uma faixa estreita ($-a < x < a$) é dado por:

$$\frac{\partial \bar{h}_y}{\partial x} = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-a}^a \frac{p(\xi)}{x-\xi} = -\frac{x}{R_S} \quad (3.7)$$

3.3. Formulação Para Contato Sob Condições De *Fretting*

Partindo-se da hipótese de contato não conforme entre corpos elasticamente similares:

A extensão a da zona de contato é muito menor que a dimensão principal dos corpos em contato (R_s no caso do cilindro), assim $R_s \gg a$;

As propriedades elásticas dos corpos em contato são as mesmas, $E_1 = E_2$ e $\nu_1 = \nu_2$.

Baseado na teoria de contato Hertziano, apresentada na seção anterior, o deslocamento normal entre pontos correspondentes dos copos em contato, $h(x)$, chamado de interpenetração, está relacionado com o carregamento normal distribuído $P(x)$ ao longo da extensão da zona de contato a pela equação 3.8:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{P(\xi)}{x - \xi} d\xi \quad (3.8)$$

Onde:

A é a constante material de flexibilidade composta, para o caso de contato plano entre cilindros dada por: $A = 4(1 - \nu^2)/E$;

ξ é a variável de integração do carregamento $P(\xi)$ ao longo da zona de contato.

Analogamente é possível mostra que o deslocamento tangencial relativo entre dois pontos correspondentes em contato, $g(x)$, se relaciona com a carga tangencial distribuída, $Q(x)$, por meio da equação 3.9:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{Q(\xi)}{x - \xi} d\xi \quad (3.9)$$

3.3.1. Particularização Para O Contato De Corpos Cilíndricos

As equações 3.8 e 3.9 são chamadas de Equações Integrais com Termo Singular de Cauchy de Primeira Ordem. A solução dessas equações pode ser obtida por meio da inversão da integral com o objetivo de isolar $P(x)$ ou $Q(x)$. A com inversão dessas equações obtém:

$$P(x) = -\frac{w(x)}{A\pi} \int_{-a}^a \frac{h'(\xi)}{w(\xi)(\xi - x)} d\xi + cw(x) \quad (3.10)$$

$$Q(x) = -\frac{w(x)}{A\pi} \int_{-a}^a \frac{g'(\xi)}{w(\xi)(\xi-x)} d\xi + cw(x) \quad (3.11)$$

A função $w(x)$ é chamada de função de forma e depende do comportamento de carregamento nas extremidades dos pontos de contato. Para o problema de contato entre corpos cilíndricos o carregamento tende à zero nas extremidades do contato, sendo, portanto, não singular nos dois pontos. Dessa maneira, $w(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ é a função que se adéqua ao problema.

A interpenetração $h(x)$ pode ser obtida aproximando perfil do cilindro na região do contato por uma parábola. Assim:

$$h(x) = \Delta - \frac{K}{2}x^2; \quad h'(x) = -Kx \quad ; \quad K = \frac{1}{R_{S1}} + \frac{1}{R_{S2}} \quad (3.12)$$

3.3.2. Distribuição De Pressão Normal Para Cilindro

Conhecidos $h(x)$ e $w(x)$ torna-se possível solucionar a equação 3.1:

$$P(x) = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{A\pi} \int_{-a}^a \frac{-K\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}(x - \xi)} d\xi \quad (3.13)$$

Para normalizar a equação acima se substitui: $\zeta = \frac{\xi}{a}$ e $d\xi = ad\zeta$

$$P(x) = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{A\pi} K \int_{-1}^1 \frac{-\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}(\frac{x}{a} - \zeta)} d\zeta \quad (3.14)$$

Utilizando as soluções da Integral Singulares de Cauchy de Primeira Ordem têm-se:

$$\int_{-1}^1 \frac{-u}{\sqrt{1 - u^2}(s - u)} du = \pi \quad (3.15)$$

Logo:

$$P(x) = \frac{K}{A\pi} \sqrt{a^2 - x^2} \pi = \frac{K}{A} a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \quad (3.16)$$

Como o carregamento $P(x)$ deve equilibrar a força \mathbf{P} que causa o contato entre os corpos, nota-se que:

$$\mathbf{P} = \int_{-a}^a P(x) dx = \int_{-a}^a \frac{K}{A} \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \frac{\pi K}{2A} \quad (3.17)$$

Pelo resultado obtido pode-se inferir que o tamanho do contato é:

$$a^2 = \mathbf{P} \frac{2A}{\pi K} \quad (3.18)$$

É também possível reescrever $P(x)$ em função da pressão de pico P_0 atuando sobre o cilindro: $P(x) = P_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$, onde $P_0 = 2\mathbf{P}/\pi a$

3.3.3. Distribuição De Força Tangencial Para Contato Entre Cilindros Em Escorregamento Parcial

Para cilindros em contato sob ação de carga tangencial com variação monotônica o contato pode ser separado em duas regiões bem definidas: a zona de escorregamento total, e a zona de adesão. A zona de adesão se situa entre $|x| \leq c$, sendo o referencial de origem o ponto de simetria do contato. O escorregamento total ocorre entre $c \leq |x| \leq a$.

Assumindo a lei de atrito de Coulomb, ou seja, $|Q(x)| \leq -f|P(x)|$, onde f é o coeficiente de atrito entre os corpos. Para o caso de escorregamento total entre dois corpos, observa-se que $|Q(x)|$ atinge seu máximo e se iguala a $f|P(x)|$, portanto, em escorregamento total:

$$Q(x) = -f \frac{K}{A} a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad (3.19)$$

Para calcular a solução de $Q_a(x)$ na zona de adesão, $|x| \leq c$, é assumido como $Q(x)$ da zona de escorregamento total somado a uma perturbação $Q'(x)$:

$$Q_a(x) = Q(x) + Q'(x) \quad (3.21)$$

Como condição de contorno

$$\frac{\partial}{\partial x} g_a(x) = 0 \quad (3.22)$$

Substituindo 3.20 e 3.21 em 3.9 têm-se:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{Q(\xi) + Q'(\xi)}{x - \xi} d\xi = 0 \quad (3.23)$$

Então:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{Q(\xi) + Q'(\xi)}{x - \xi} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{-fP_0 \sqrt{1 - (\xi/a)^2}}{x - \xi} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{Q'(\xi)}{x - \xi} d\xi = 0 \quad (3.24)$$

Resolvendo o primeiro integrando invertendo a integral Singular de Cauchy de primeira ordem:

$$\frac{fP_0}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{x/a - \zeta} d\zeta = \frac{fP_0}{\pi} \pi \frac{x}{a} = fP_0 \frac{x}{a} \quad (3.25)$$

Para o segundo integrando Como $Q'(\xi)$ vale zero entre $-a \leq x \leq -c$ e entre $c \leq x \leq a$, então:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \frac{Q'(\xi)}{x - \xi} d\xi = fP_0 \frac{c}{a} \frac{x}{c} \quad (3.26)$$

Invertendo a equação integral, fazendo $\frac{x}{c} = t$ e realizando substituições análogas a 3.5, segue:

$$Q'(t) = -fP_0 \frac{c}{a} \frac{\sqrt{1 - (x/c)^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{c^2 - t^2}(x - t)} dt \quad (3.27)$$

Portanto:

$$Q'(t) = -fP_0 \frac{c}{a} \sqrt{1 - (x/c)^2} \quad \text{para } |x| \leq c \quad (3.28)$$

Como o carregamento $Q_a(x)$ deve equilibrar a força Q que atua sobre o corpo, nota-se que:

$$Q = \int_{-a}^a Q_a(x) dx = \frac{fP_0 \pi}{a} \frac{\pi}{2} (a^2 - c^2) \quad (3.39)$$

Logo:

$$c = a \sqrt{1 - \left| \frac{Q}{fP} \right|} \quad (3.30)$$

Como já mencionado, as expressões apresentadas até aqui são válidas para uma história da força tangencial monotônica e crescente. Porém, as aplicações práticas em fadiga sob condições de *fretting* exigem a variação da carga tangencial de forma oscilatória, ver Figura 3.3 .

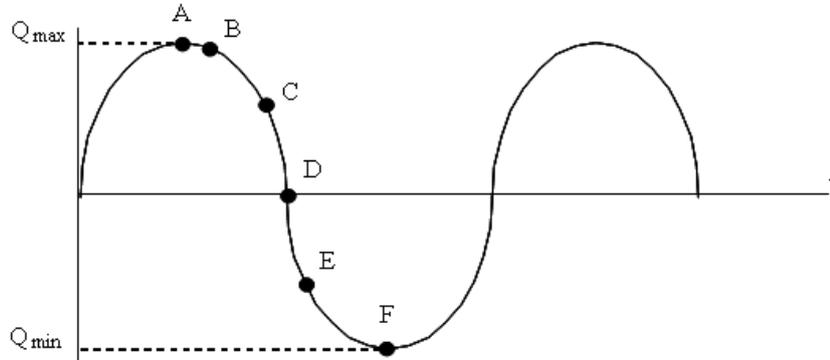


Figura 3.3- Variação da carga tangencial no tempo.

Quando o carregamento parte do zero até seu valor máximo, o ponto A da Figura 3.3, a equação 3.21 descreve bem a variação de $Q(t)$. Durante o descarregamento do ponto A para o ponto B, o deslocamento relativo muda de sinal provocando a adesão em toda região de contato. À medida que o descarregamento progride até o ponto C, verifica-se escorregamento reverso nas extremidades do contato. Dessa maneira, ocorre o surgimento de uma nova zona de escorregamento, $c' \leq x \leq a$, na qual as trações superficiais mudam de direção. Esse efeito pode ser traduzido por nova perturbação $Q''(x)$ a ser somada na equação 3.21:

$$Q''(x) = -2fP_0 \frac{c'}{a} \sqrt{1 - (x/c')^2} \quad \text{para: } c' \leq |x| \leq a \quad (3.31)$$

O fator de dois é necessário para cancelar o deslocamento relativo quando as trações tangenciais superficiais na zona de escorregamento mudam de sinal. Novamente, a partir da condição de equilíbrio das forças a extensão dessa nova zona de adesão pode ser obtida:

$$c(t)' = a \sqrt{1 - \frac{Q_{máx} - Q(t)}{2fP}} \quad (3.32)$$

A validade dos intervalos de aplicação de cada termo componente de $Q_a(x)$ é descrita na tabela 3.1, e a forma geral da distribuição de $Q_a(x)$ para os valores da carga $Q(t)$ em diversos instantes e pode ser visualizado na figura 3.4.

Tabela 3.1- Componentes de distribuição da carga tangencial de contato para entre cilindros sob regime de escorregamento parcial.

Componente da distribuição de carga tangencial $Q_a(x)$	Intervalo de Validade
$-fP_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a}}$	$c' \leq x \leq a$
$-fP_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a}} + 2fP_0 \frac{c'}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{c'}}$	$c \leq x \leq c'$
$fP_0 \left[-\sqrt{1 - \frac{x^2}{a}} + 2\frac{c'}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{c'}} + \frac{c'}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{c'}} \right]$	$ x \leq c$

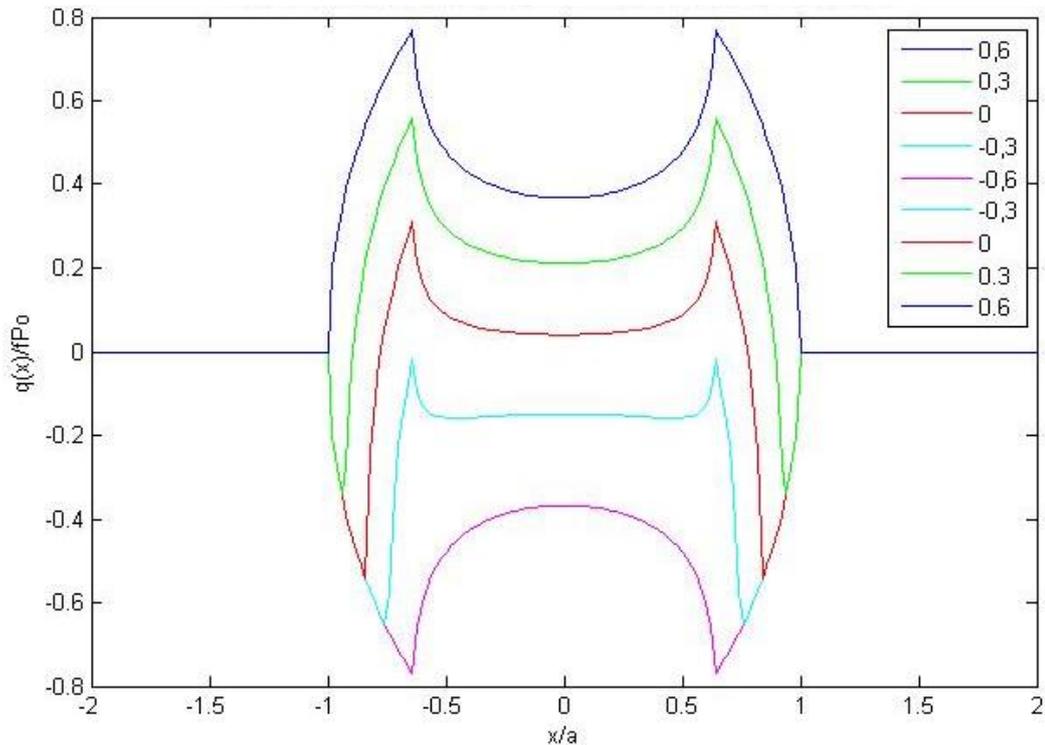


Figura 3.4 - Distribuição da carga $Q_a(x)$ sobre a superfície devido à Q em vários instantes de tempo.

Frequentemente, componentes mecânicos submetidos às condições de *fretting* sofrem também ação de carga de longitudinal variável, chamada de carga remota de fadiga ou “*bulk stress*”, ver figura Figura 3.5

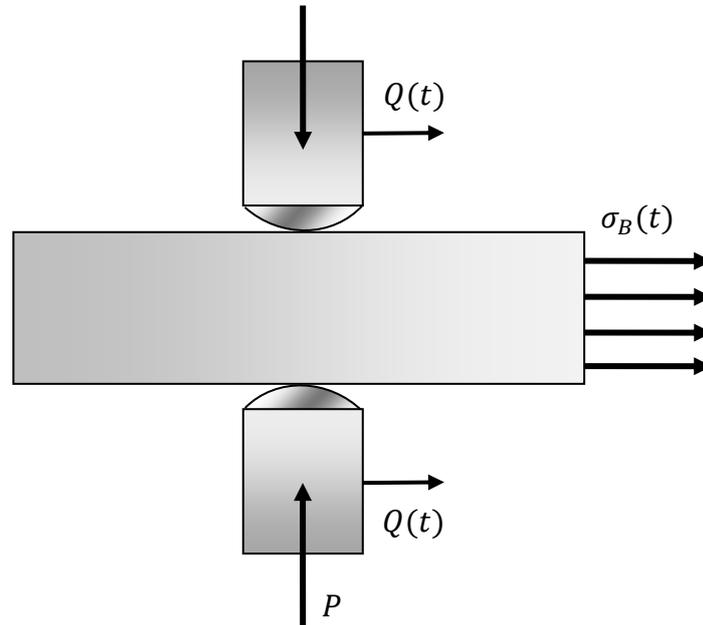


Figura 3.5- Configuração típica de aplicações de carga em fadiga por *fretting*

A aplicação da tensão remota fadiga σ_b é se dá, geralmente, em fase com a carga tangencial. Verifica-se como efeito desta aplicação um deslocamento da zona de adesão, e, nos pontos de pico e vale do carregamento, ou e' , durante o descarregamento ou recarregamento. As expressões para esses deslocamentos são mostradas a seguir

$$\frac{e}{a} = \frac{\sigma_{b\text{máx}}}{4fP_0} \quad (3.33)$$

$$\frac{e'(t)}{a} = \frac{\sigma_{b\text{máx}} - \sigma(t)}{8fP_0} \quad (3.34)$$

O deslocamento na zona de adesão resultante da aplicação da carga remota de fadiga pode ser visualizado na Figura 3.6. Nota-se que o deslocamento ocorre também nos intervalos de validade das expressões de $Q_a(x)$, onde a zona de adesão, para $Q = Q_{\text{máx}}$, passa ser $|x - e| \leq c$, na condição de carregamento ou descarregamento $|x - e'| \leq c$. Vale lembrar que esta solução é válida apenas para valores de σ_b limitados, pois deve ser garantido que não haja escorregamento reverso na zona de contato, ou seja, $e + c' \leq a$. Logo:

$$\sigma \leq 4fP_0 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{Q}{fP}} \right) \quad (3.35)$$

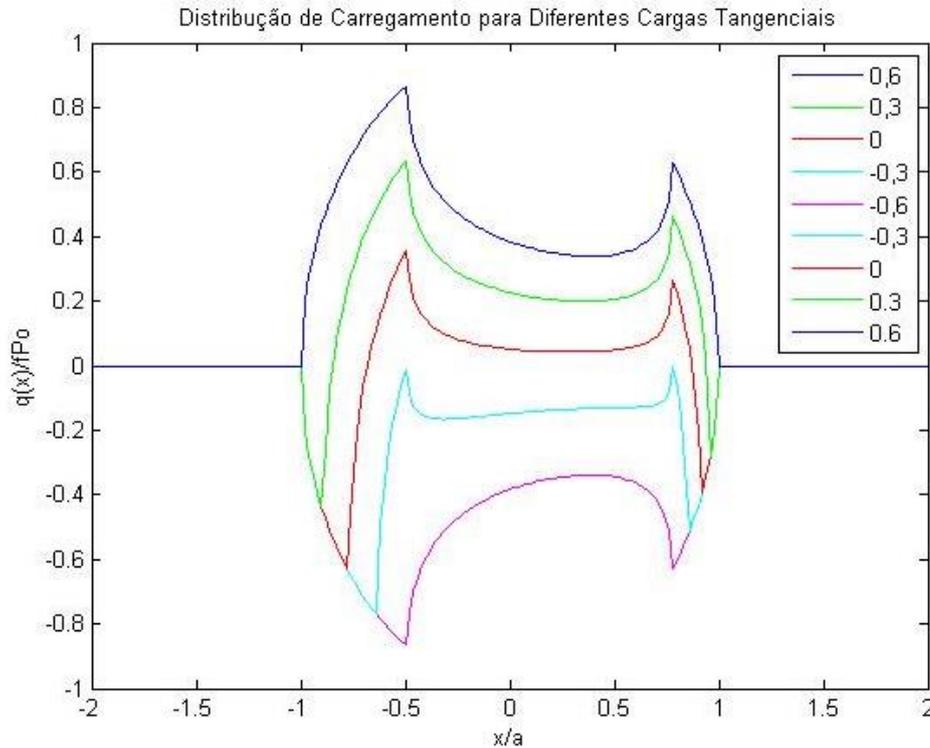


Figura 3.6 – Distribuição de carregamento para diferentes cargas tangenciais com atuação da carga remota de fadiga.

3.3.4. DISTRIBUIÇÃO TENSÕES NA REGIÃO DE CONTATO

A partir da hipótese de pequenas deformações, a distribuição de tensões deve garantir que não há escoamento no material. Assim, é garantido o contato em regime elástico e o campo de tensões pode ser obtido pela superposição dos campos de tensões provocados por $P(x)$ e $Q_a(x)$. Devem ser levados em consideração todas as tensões geradas pelos termos de $Q_a(x)$, ou seja, $Q(x)$ e as perturbações $Q'(x)$ e $Q''(x)$, separadamente. É necessário realizar as superposições de acordo com a distribuição de cargas superficiais nos diversos instantes de tempo. Dessa forma, o campos de tensões assumem características distintas em função da carga Q em quatro condições do carregamento: máximo, mínimo, descarregamento e recarregamento. Em resumo, as superposições devem feitas conforme a tabela 3.2

Tabela 3.2-Soma das componentes de tensão superpostas.

Condição de Q	Superposição
Máxima	$\sigma\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, t\right) = \sigma^n\left(\frac{x}{a}; \frac{y}{a}\right) + f\sigma^t\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) - f\frac{c}{a}\sigma^t\left(\frac{x}{c}, \frac{y}{c}\right) + \sigma_B$
Descarregamento	$\sigma\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, t\right) = \sigma^n\left(\frac{x}{a}; \frac{y}{a}\right) - f\sigma^t\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) + 2f\frac{c'}{a}\sigma^t\left(\frac{x}{c'}, \frac{y}{c'}\right) - f\frac{c}{a}\sigma^t\left(\frac{x}{c}, \frac{y}{c}\right) + \sigma_B$
Mínima	$\sigma\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, t\right) = \sigma^n\left(\frac{x}{a}; \frac{y}{a}\right) - f\sigma^t\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) + f\frac{c}{a}\sigma^t\left(\frac{x}{c}, \frac{y}{c}\right) + \sigma_B$
Recarregamento	$\sigma_b\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, t\right) = \sigma^n\left(\frac{x}{a}; \frac{y}{a}\right) + f\sigma^t\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) - 2f\frac{c'}{a}\sigma^t\left(\frac{x}{c'}, \frac{y}{c'}\right) + f\frac{c}{a}\sigma^t\left(\frac{x}{c}, \frac{y}{c}\right) + \sigma_B$

Os sobrescritos n e t referem-se aos tensores de tensão produzidos pelos carregamentos normal e tangencial, respectivamente.

4.MECÂNICA DA FRATURA

4.1. Aspectos Gerais

A presença de trincas ou defeitos internos em uma estrutura pode enfraquecê-la ao ponto de provocar uma falha catastrófica, mesmo que a tensão atuante esteja abaixo do limite de escoamento do material. O estudo da mecânica da fratura tem um papel importante em diversas áreas da engenharia, dado que trincas ou defeitos internos são frequentes devidos a técnicas de fabricação ou evolução do processo de fadiga.

Ao imaginar que componentes estruturais podem conter trincas mesmo antes de serem colocadas em operação, e que estas poderão evoluir à medida que inicie a vida serviço, surge a filosofia de projeto tolerante ao dano. Nesta abordagem, admite-se que as trincas podem existir e evoluir ao longo da vida do componente, até que um tamanho crítico seja alcançado, e então a peça seja retirada de operação. Instrumentos de diagnóstico adequados são fundamentais para que o tamanho crítico da trinca seja corretamente determinado e falhas catastróficas sejam evitadas. Assim, a Mecânica da Fratura Linear Elástica (LEFM) surge como principal ferramenta de análise, propiciando que ferramentas para controle da evolução de trincas sejam desenvolvidas.

4.2. Mecânica da Fratura Linear Elástica

Em um primeiro momento, as trincas podem ser imaginadas como concentradores de tensão, o que permitiria uso de fatores elásticos de concentração de tensão para descrever seu comportamento. Estes fornecem uma indicação do fator no qual a carga nominal deve ser amplificada para que a tensão induzida pelo concentrador seja estimada. Como exemplo, considerar um furo elíptico em uma placa como na Figura 4.1

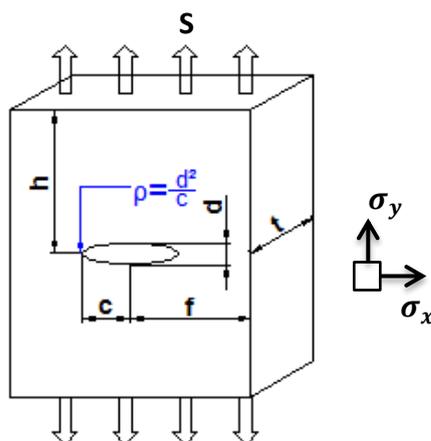


Figura 4.1- Furo elíptico em uma placa plana sobre tração uniforme

A tensão σ_y , paralela à tensão remota, é fortemente influenciada pela presença do furo elíptico. O valor máximo alcançado pelo fator de concentração de tensão depende das proporções da elipse e do raio da ponta como a seguir:

$$k_t = \frac{\sigma_y}{S} = \left(1 + 2\frac{c}{d}\right) = \left(1 + 2\sqrt{\frac{c}{\rho}}\right) \quad 4.1$$

Pela equação 4.1, à medida que a meia altura da elipse se aproxima de zero, a elipse torna-se cada vez mais aguda, ao passo que o seu raio também se aproxima de zero, o concentração de tensão se torna cada vez mais severa ao ponto de se tornar teoricamente infinita no caso de uma trinca idealmente aguda.

Obviamente, tensões infinitas são apenas abstrações e não podem existir em materiais reais. Mesmo nos casos onde se considere um raio finito, porém, suficientemente pequeno para se aproximar do comportamento de uma trinca, o gradiente de tensões se torna tão severo que deformações plásticas são inevitáveis da região próxima ao concentrador, tornando a abordagem inválida. Portanto, é necessário introduzir conceitos apropriados que caracterizem melhor o comportamento das trincas.

4.2.1. Fator Intensidade de Tensão

Embora a distribuição de tensões na região adjacente a ponta da trinca seja inerente a cada problema, a análise de situações mais simples pode trazer muitos esclarecimentos a respeito das características do comportamento esperado na ponta da trinca. A Figura 4.2

ilustra o a situação onde uma placa infinita sujeita a tensão biaxial uniforme, o problema foi estudado primeiramente por Westergard (1937). Detalhes da solução podem ser encontrados em Gdoutos (2005), e apenas a solução para o campo de tensões próximas a ponta da trinca são apresentados nas equações são funções tanto da distância radial r como do ângulo θ , de acordo como se segue:

$$\sigma_x = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \dots \quad (4.2a)$$

$$\sigma_x = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \dots \quad ((4.2b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} + \dots \quad (4.2c)$$

$$\sigma_z = 0 \text{ , estado plano de tensão} \quad (4.2d)$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \text{ , estado plano de deformação.} \quad (4.2e)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (4.2f)$$

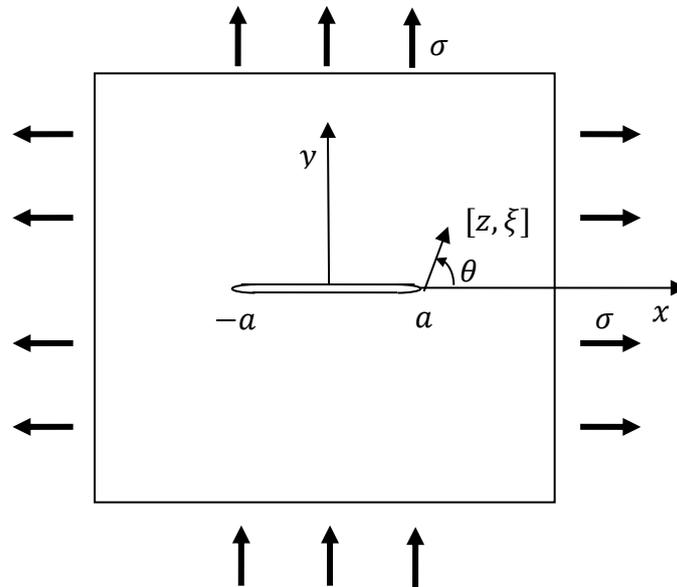


Figura 4.2- trinca em uma placa infinita sujeita a tensão biaxial .

Nota-se que todas as componentes de tensão que caracterizam o estado plano de tensões possuem uma singularidade do tipo $r^{-1/2}$, indicando que as tensões aumentam rapidamente nas proximidades da trinca. As componentes não-nulas nas equações 4.2 se aproximam de infinito na medida em que r se aproxima de zero. A quantidade $\sigma\sqrt{\pi a}$ é uma constante multiplicativa em todos os termos e fornece a magnitude do campo de

tensões e, desde que a trinca esteja submetida apenas a modo I de carregamento, pode ser substituído pelo fator intensidade de tensão (FIT), K_I . Note que os fatores restantes meramente são variações de seno e cosseno de θ , ou seja, se referem à como a geometria interfere na solução e não tem forte influência na magnitude das tensões. Assim, a intensidade do campo de tensões próximo à ponta da trinca pode ser caracterizada pelo valor do fator K_I cuja definição em um senso matemático formal é:

$$K_I = \lim_{r, \theta \rightarrow 0} (\sigma_y \sqrt{2\pi r}) \quad (4.3)$$

O fator intensidade de tensão K pode ser entendido como uma característica da severidade da presença da trinca em função tamanho da trinca, da tensão e da geometria. É mais conveniente definir um fator de forma, F , que contabilize o efeito introduzido por diferentes geometrias. Dessa forma a equação (4.3) pode ser reescrita como:

$$K_I = F \sigma \sqrt{\pi a} \quad (4.4)$$

4.2.2. Zona Plástica

Como visto na solução do campo de tensões para a região da ponta de trinca mostrada nas equações (4.2), matematicamente sempre existirá e uma singularidade nessa região. Obviamente, o valor da magnitude da tensão não pode atingir valores infinitos no material, e se trata apenas de uma abstração matemática. O que se observa na realidade é uma tendência de, quando submetidos a uma tensão acima da tensão de escoamento o material de fato escoa, provocando uma deformação plástica na região. Assim, sempre haverá uma região próxima da ponta da trinca onde o material se deformará plasticamente, portanto a tensão nunca alcançará o infinito. O caso de tensões infinitas na ponta da trinca é válido apenas do ponto de vista da teoria da elasticidade, pois a Lei de Hooke não impõe limitações para tensões e deformações (Broek, 1988).

Considerando o interior de uma geometria onde exista o caso de estado plano de deformação, sempre haverá o caso de estado plano de tensões em sua superfície. Com a existência do estado plano de deformações no interior da geometria, a tensão σ_3 aumentará gradualmente de zero, na superfície, até o valor do estado plano de deformações no interior (Dixon, 1965) como visto na Fig. (2.4). Conseqüentemente, a

zona plástica diminui gradualmente do tamanho do estado plano de tensões na superfície até o tamanho do estado plano de deformações no interior da geometria.

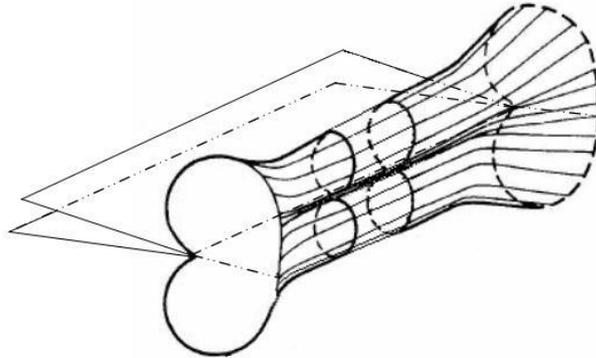


Figura 4.3- Esquema tridimensional da região da zona plástica. Adaptado de Broek (1982)

No caso de uma chapa grossa, onde a trinca atravessa toda a espessura da chapa, nas bordas dessa chapa existirá o estado plano de tensões. À medida que se avança em direção ao interior da chapa, passa a predominar o estado plano de deformações, uma vez que agora é a deformação na direção da espessura que é nula.

4.2.3. Tamanho da Zona Plástica

Para uma abordagem mais acurada a respeito do formato da zona de plastificação na ponta da trinca deve-se impor um critério de escoamento do material, podendo ser utilizado o critério de Von Mises ou de Tresca. Adotando-se o critério de Von Mises, tem-se:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_y^2 \quad (4.5)$$

Onde σ_y é a tensão de escoamento no caso uniaxial. No plano onde $\theta = 0^\circ$ as tensões principais σ_1 e σ_2 são iguais e atuam nas direções x e y . Assim, a fronteira que define a zona plástica como função de θ é obtida substituindo-se as equações que definem o campo de tensões na ponta da trinca de acordo com as Equações (4.6), para o estado plano de deformação, e a Eq. (4.7), para o estado plano de tensão.

$$\frac{K^2}{2\pi r} \left[\frac{3}{2} \sin^2 \theta + (1 - 2\nu)^2 (1 + \cos \theta) \right] = 2\sigma_y^2 \quad (4.6)$$

$$\frac{K^2}{2\pi r} \left[1 + \frac{3}{2} \sin^2 \theta \cos \theta \right] = 2\sigma_y^2 \quad (4.7)$$

Portanto, o raio da zona plástica em função de θ pode ser escrita como:

$$r_p(\theta) = \frac{K^2}{4\pi\sigma_y^2} \left[\frac{3}{2} \sin^2 \theta + (1 - 2\nu)^2 (1 + \cos \theta) \right] \quad (4.8)$$

$$r_p(\theta) = \frac{K^2}{4\pi\sigma_y^2} \left[1 + \frac{3}{2} \sin^2 \theta \cos \theta \right] \quad (4.9)$$

A relação entre o tamanho da zona plástica com a espessura é um importante fator para a condição do estado de tensões na ponta da trinca. O estado plano de tensões prevalecerá caso o tamanho da zona plástica seja da mesma ordem da espessura da geometria (Broek, 1982). A relação deve ser apreciavelmente menor que um para que o estado plano de deformações prevaleça por toda espessura da placa. Foi visto que a espessura afeta diretamente no estado de tensões na ponta da trinca, para manter o estado plano de deformações ao longo da maior parte da região da trinca a espessura da geometria deve ser suficientemente larga.

4.2.4. Campo de Validade da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE)

A Mecânica da Fratura Linear Elástica normalmente é utilizada em situações em que a fratura ocorre ainda no regime linear-elástico. Isto pode ocorrer para ligas de altíssima resistência mecânica ou mesmo em ligas com resistência moderada desde que empregadas em uma espessura de dimensão razoável. É a espessura que ditará se o regime é o estado plano de deformação (estado triaxial de tensões) em que a mecânica da fratura linear-elástica é aplicável ou o estado plano de tensão (biaxial de tensões) em que a mecânica da fratura elasto-plástica é aplicável.

A MFLE pode ser empregada com sucesso à medida que a zona plástica for pequena em relação ao tamanho da trinca e das dimensões da estrutura que a contém. O sucesso da MFLE em estabelecer um tamanho de trinca crítico, desenvolvido teoricamente e comprovado na prática, fica restrito para casos em que não há deformação plástica apreciável acompanhando a fratura.

Ao ocorrer à fratura de um corpo, para alguns tipos de materiais, sempre há uma região plastificada na ponta da fissura. Apesar disso, muitas vezes a existência dessa plastificação pode ser negligenciada, sem prejudicar a simulação do comportamento da fissura, quando esta tem dimensão pequena em relação à região K dominante. Nesses casos, é possível aplicar a mecânica da fratura linear elástica. Nos casos em que estas condições não se verificam, é preciso considerar a plastificação, aplicando-se então os conceitos da mecânica da fratura elasto-plástica.

4.2.5. Tenacidade à Fratura

A tenacidade à fratura, K_{Ic} , de um material pode ser considerada como uma propriedade que caracteriza sua resistência ao crescimento de uma trinca, ou seja, a quantidade de energia que o material pode absorver antes da falha. Esta propriedade é uma maneira quantitativa de expressar a resistência à fratura frágil de um material quando uma trinca está presente. Caso um material possua um baixo valor de tenacidade à fratura este terá características de material frágil. Um alto valor de tenacidade à fratura caracteriza um material dúctil.

O valor de K_{Ic} também é conhecido como tenacidade à fratura sob estado plano de deformações. O mesmo valor de K_{Ic} pode ser determinado testando corpos de prova do mesmo material, porém com diferentes geometrias e sob combinações críticas de tamanhos e formas de trinca.

4.3. Discordâncias

As discordâncias podem ser entendidas como uma linha de descontinuidade infinitesimal virtual, introduzida em um material contínuo. Então, são aplicadas tensões opostas às duas faces do corte, de tal maneira que um pequeno espaço de espessura constante seja aberto, ver figura Figura 4.4. Ao se preencher novamente o espaço aberto com uma fina camada do material, de forma que se obtenha um corpo contínuo novamente, haverá um estado de tensões residuais, Barber (1992).

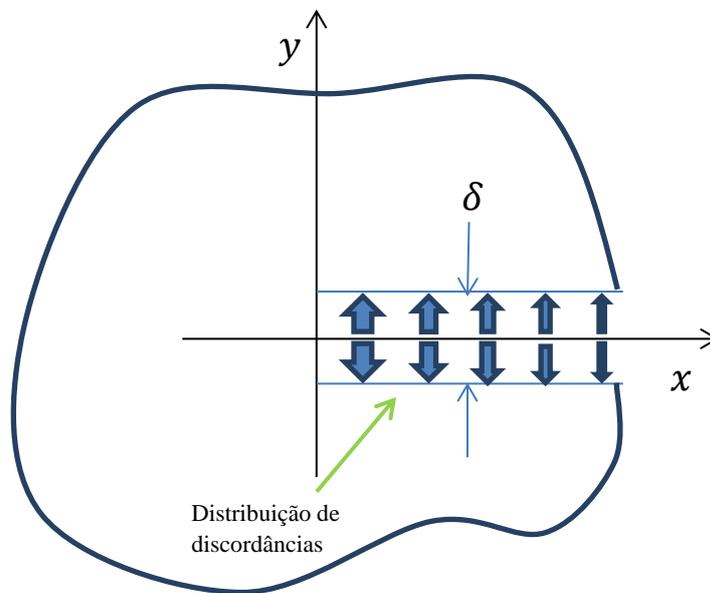


Figura 4.4- Distribuição de discordâncias em uma descontinuidade de espessura δ

O campo de tensões associado ao procedimento citado é chamado de solução de discordância. Este é obtido pela função tensão da equação 4.10:

$$\phi = C_1 r \theta \sin \theta + C_3 r \ln r \cos \theta \quad (4.10)$$

A resistência associada à discordância é definida pelo deslocamento u_θ , em $\theta = 0, 2\pi$, o qual também é a espessura do material que deve ser introduzido o material se torne contínuo novamente. Assim:

$$\delta = u_\theta(0) - u_\theta(2\pi) = -\frac{2\pi C_3}{\mu(1+\nu)} \quad (4.11)$$

Define-se, portanto, que uma discordância de resistência B_y é aquela capaz de produzir uma abertura $\delta = B_y$, logo:

$$C_3 = -\frac{2B_y\mu}{\pi(\kappa + 1)} \quad (4.12)$$

Assim, o campos de tensões o campos de tensões resultante é:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -\frac{2\mu B_y \cos \theta}{\pi r(\kappa + 1)} ; \sigma_{r,\theta} = 0 \quad (4.13)$$

Expressando as componentes de tensão em coordenadas retangular em $y = 0$, tem-se:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -\frac{2\mu B_y}{\pi x(\kappa + 1)} ; \sigma_{x,y} = 0 \quad (4.14)$$

Como a discordância acima causa uma abertura em $\theta = 0, 2\pi$ ela é chamada de *climb dislocation*. Para o caso de uma discordância que causa descontinuidade na componente de direção do vetor unitário \mathbf{r} , ou seja, um deslocamento infinitesimal tangencial $\delta = u_r(0) - u_r(2\pi)$, obtêm-se uma função tensão equivalente $\phi = r \ln r \sin \theta$. A este tipo discordância dá-se o nome de *glide dislocation*.

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -\frac{2\mu B_x \sin \theta}{\pi r(\kappa + 1)} ; \sigma_{r,\theta} = -\frac{2\mu B_x \cos \theta}{\pi r(+1)} \quad (4.15)$$

Em coordenadas retangulares, onde $y = 0$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = 0 ; \sigma_{r,\theta} = -\frac{2\mu B_x}{\pi r(\kappa + 1)} \quad (4.16)$$

As discordâncias B_x, B_y são componentes do chamado *vetor de Burger*.

4.3.1. Discordâncias Aplicadas Em Trincas

Uma das condições de contorno mais importantes em problemas envolvendo a determinação da influência de uma trinca no campo de tensões é que as faces da trinca sejam livres de tensões. A principal estratégia é introduzir uma distribuição de

discordâncias cujo campo de tensões resultante de sua integração anule as tensões ao longo da linha da trinca. Para tal, considera-se uma única discordância com um vetor de Burger infinitesimal $\delta b_y \equiv B_y(\xi)d\xi$, onde $B_y(\xi)$ é a densidade de discordância introduzida no ponto ξ sobre a linha da trinca.

Assim, a equação que representa o campo de tensão gerado por uma discordância unitária é dada por:

$$\sigma_{yy}(x, 0) = -\frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} \frac{\delta b_y(\xi)}{(x - \xi)} = -\frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} \frac{B_y(\xi)}{(x - \xi)} d\xi \quad (4.17)$$

Onde μ é o módulo de rigidez, $\kappa = 3 - 4\nu$, em estado plano de deformação e ν o coeficiente de Poisson.

Ao se integrar a equação 4.17 é possível obter o campo de tensões gerado pela distribuição contínua de vetores de Burger ao longo da linha da trinca. Considerando-se uma trinca entre $-b < x < b$, tem-se:

$$\sigma_{yy}(x, 0) = -\frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} \int_{-b}^b \frac{B_y(\xi)}{(x - \xi)} d\xi \quad (4.18)$$

4.3.2. Trincas perpendiculares à superfície

Considere um problema como o mostrado na Figura 4.5, um semi plano ($x > 0$) é sujeito a um carregamento $\sigma_T(x)$ arbitrário, mas que apenas gere modo I de abertura. O primeiro passo a ser realizado para resolver o problema é encontrar a solução do campo de tensão $\sigma_T(x)$ ao longo da trinca ($y = 0, 0 \leq x \leq b$), na sua ausência. Pelo teorema de Bueckner é introduzida uma distribuição de discordâncias $b_y(\xi)$ ao longo da trinca, tal que as tensões σ_T nas faces da trinca sejam canceladas. Feito isso, é necessário calcular o campo de tensões induzido pelas discordâncias utilizando os resultados de Dundurs e Mura (1964) onde, uma discordância introduzida no ponto $(\xi, 0)$ gera uma tensão igual a:

$$\sigma_{yy}(x, 0) = -\frac{\mu b_y(\xi)}{\pi(\kappa + 1)} K(x, \xi) ; \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0 \quad (4.19)$$

Onde

$$K(x, \xi) = 2 \left\{ \frac{1}{x - \xi} - \frac{1}{x + \xi} - \frac{2\xi}{(x + \xi)^2} + \frac{4\xi^2}{(x + c)^3} \right\} \quad (4.20)$$

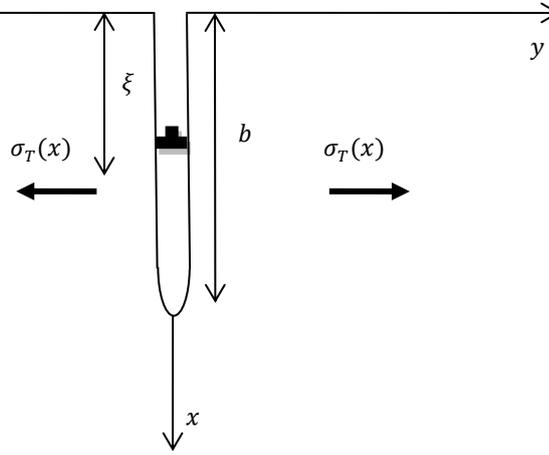


Figura 4.5- Discordâncias em trinca perpendicular a superfície.

A equação 4.19 se refere à tensão causada por um única discordância, devendo-se introduzir uma distribuição $B_y(\xi) = \frac{db_y}{dx}(\xi)$ em $x[0, b]$. Com todas as componentes tensões atuando em cada ponto da trinca conhecidas é possível integrar a distribuição de tensões e achar a força resultante $N(x)$ normal à face da trinca

$$N(x) = \sigma_T(x) + \frac{\mu}{\pi(\kappa + 1)} \int_0^b B_y(\xi) K(x, \xi) d\xi \quad (4.21)$$

Pela condição de contorno de que a face da trinca deve ser livre de trações $N(x) = 0$; em $0 \leq x \leq b$

A equação integral (4.21) não possui solução analítica, portanto, é realizada uma integração numérica descrita em detalhes em Nowell e Hills (1994), utilizando a técnica da quadratura de Gauss Jacobi. Primeiramente é necessário normalizá-la realizando as substituições equações 4.22 e 4.23

$$r = 2\xi/b - 1 \quad (4.22)$$

$$s = 2x/b - 1 \quad (4.23)$$

Introduzindo a substituição na integral:

$$-\sigma_T(s) = \frac{\mu}{\pi(\kappa + 1)} \int_{-1}^1 B_y(r) K(s, r) dr \quad -1 \leq s \leq 1 \quad (4.24)$$

A discordância $B_y(r)$ tem como significado físico o ângulo entre as faces da trinca, onde o deslocamento da face da trinca próximo a ponta da trinca é da forma $u_\theta \propto K_I = I \sqrt{x - b}$, assim, a variação do ângulo entre as faces da trinca possui variação da forma:

$$\frac{du_\theta}{dx} \propto \frac{K_I}{\sqrt{b - x}} \quad (4.25)$$

então quando $x \rightarrow 0$ as faces são praticamente paralelas e $B_y(r)$ pode ser aproximado por

$$B_y(r) = \phi(r) \sqrt{\frac{1+r}{1-r}} \quad (4.26)$$

A quadratura de Gauss-Jacobi pode ser aplicada e a discretização leva à

$$\frac{\mu}{\pi(\gamma + 1)} \sum_{i=1}^n \frac{2\pi(1+r_i)}{2n+1} K(s_k, r_i) \phi(r_i) = -\sigma_T(s_k) \quad (4.27)$$

Onde

$$r_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n+1}\pi\right) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.28)$$

$$s_k = \cos\left(\frac{2k}{2n+1}\pi\right) \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4.29)$$

A equação 4.29 representa os pontos de integração, onde para cada $s_k(x)$ a somatória dos pontos de colocação $r_i(\xi)$ computa influência da distribuição de discordâncias introduzida nos pontos ξ_i . Assim, e construído um sistema de n equações algébricas simultâneas para cada $\phi(r_i)$ a ser determinado. Depois de conhecidos os valores de $\phi(r_i)$, a forma da trinca pode ser determinada em cada ponto analisado, pela equação 4.26, que relaciona a variação do ângulo de abertura da trinca ao valor de K_I , o FIT na ponta da trinca pode ser determinado e é proporcional à $\phi(1)$, Logo:

$$K_I = 2\sqrt{2}\sqrt{\pi b} \frac{\mu}{(\kappa + 1)} \phi(1) \quad (4.30)$$

Como se trata de uma solução numérica, o valor da função ϕ é somente conhecido nos pontos de integração, r_i , e a determinação do valor em outros pontos dever ser realizada por meio de interpolações polinomiais. Krenk (1975) deduziu uma formula para aplicação da formulação em qualquer ponto e mostrou que:

$$\phi(1) = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=1}^n \cot\left(\frac{2i-1}{2n+1} \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n}{2n+1} (2i-1)\pi\right) \phi(r_i) \quad (4.31)$$

A dedução acima é valida também para calcular o fator intensidade de tensão para o modo II em trincas sob atuação de carga cisalhante, porém, as discordâncias do tipo “*Climb*”, $b_y(\xi)$, devem ser substituídas pelas “*glide*”, $b_x(\xi)$, assim, as tensões induzidas se tornam:

$$\tau_{xy}(x, 0) = -\frac{\mu b_x(\xi)}{\pi(\kappa + 1)} K(x, \xi) \quad ; \quad \sigma_{yy}(x, 0) = 0 \quad (4.32)$$

Onde o valor de K continua a ser calculado assim como na equação. A equação integral para a densidade de discordâncias passa a ser:

$$-\tau_T(s) = \frac{\mu}{\pi(\kappa + 1)} \int_{-1}^1 B_x(r) K(s, r) dr \quad -1 \leq s \leq 1 \quad (4.33)$$

O restante do procedimento permanece o mesmo, sendo necessário apenas substituir K_I por K_{II} .

4.3.3. Trincas inclinadas à superfície

Geralmente as trincas se iniciam não perpendiculares à superfície, crescendo inicialmente sobre ação do modo II, Considerando o problema de uma trinca localizada nas vizinhanças de uma superfície livre de um semipleno, sujeita a esforços arbitrários, tais que, a trinca seja aberta em todos os pontos de sua extensão. O estado de tensões causados por discordâncias com componentes dos vetores de Burguer b_x e b_y , localizadas em uma posição $(\xi, 0)$ e expresso por:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}(x, y) &= \frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} \{b_x(\xi)G_{xxx}(x, y, \xi) + b_y(\xi)G_{yxx}(x, y, \xi)\} \\
 \sigma_{yy}(x, y) &= \frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} \{b_x(\xi)G_{xyy}(x, y, \xi) + b_y(\xi)G_{yyy}(x, y, \xi)\} \\
 \sigma_{xy}(x, y) &= \frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} \{b_x(\xi)G_{xxy}(x, y, \xi) + b_y(\xi)G_{yyx}(x, y, \xi)\}
 \end{aligned}
 \tag{4.34}$$

As funções de influência, apesar de extensas, são funções algébricas explícitas e possuem formas simples, ver Anexo I.

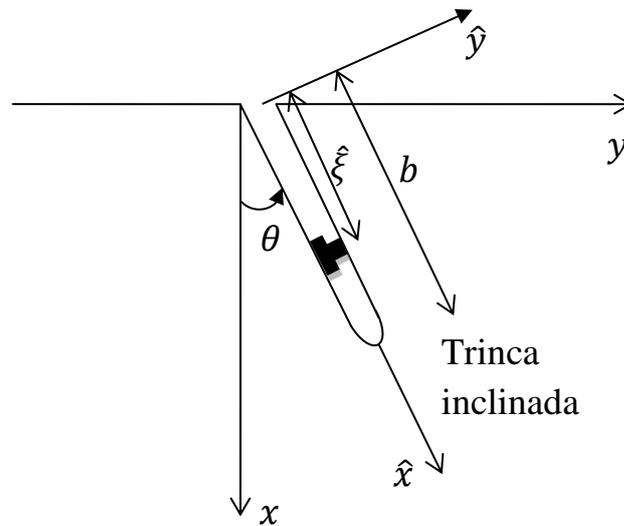


Figura 4.6- Trinca inclinada à superfície

A geometria do problema de trincas inclinadas é mostrada na

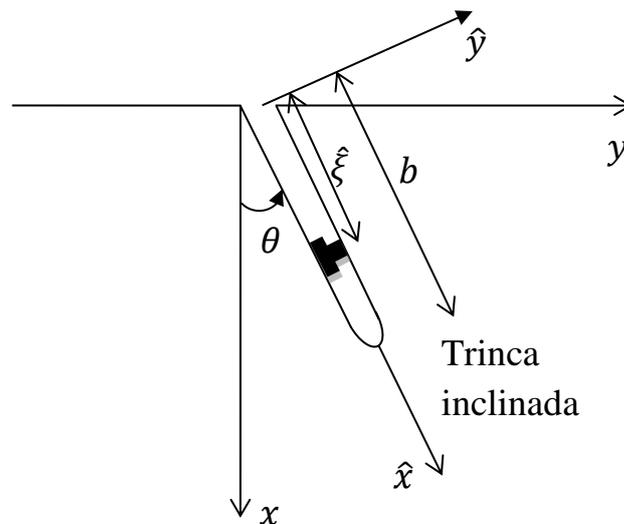


Figura 4.6, onde é definido um sistema local (\hat{x}, \hat{y}) , orientado a um ângulo θ do sistema global e sobre a mesma origem. Ao se trabalhar no sistema local à trinca, simplificações importantes são introduzidas. Primeiramente, é necessário transformar o estado de tensões do sistema global para o local à trinca. Isso pode facilmente ser realizado por meio de uma transformação de Mohr:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\hat{x}\hat{x}} \\ \sigma_{\hat{y}\hat{y}} \\ \tau_{\hat{x}\hat{y}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin 2\theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

Assim como as componentes de tensões os vetores de Burger podem ser transformadas para o sistema local pela equação 4.36.

$$\begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_{\hat{x}} \\ b_{\hat{y}} \end{Bmatrix} \quad (4.36)$$

Se a equação for substituída na equação 4.36 e 4.35 forem substituídas na equação 4.34, fazendo ainda, $x = \hat{x} \cos \theta$; $y = \hat{y} \sin \theta$ e $\xi = \hat{\xi} \cos \theta$, tem-se;

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\hat{y}\hat{y}}(\hat{x}, \hat{y}) \\ \tau_{\hat{x}\hat{y}}(\hat{x}, \hat{y}) \end{Bmatrix} = \frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} \begin{bmatrix} G_{\hat{x}\hat{y}\hat{y}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\xi}) & G_{\hat{y}\hat{y}\hat{y}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\xi}) \\ G_{\hat{x}\hat{x}\hat{y}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\xi}) & G_{\hat{y}\hat{x}\hat{y}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\xi}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_{\hat{x}}(\hat{\xi}) \\ b_{\hat{y}}(\hat{\xi}) \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

É importante notar que um novo conjunto de funções de influencia $G_{ij\hat{k}}$, as quais relacionem as componentes de tensão no novo sistema de coordenadas (\hat{x}, \hat{y}) devem ser definidos. A transformação de coordenadas das funções G_{ijk} em $G_{ij\hat{k}}$ apresentada no Anexo II. Como as discordâncias são distribuídas em cima da face da trinca tem-se que $\hat{y} = 0$, logo:

$$\sigma_T(\hat{x}) = \sigma_{\hat{y}\hat{y}}(\hat{x}, \hat{y}) + \frac{\mu}{\pi(\kappa + 1)} \left[\int_0^b B_{\hat{x}}(\hat{\xi}) G_{\hat{x}\hat{y}\hat{y}}(\hat{x}, \hat{\xi}) d\hat{\xi} + \int_0^b B_{\hat{y}}(\hat{\xi}) G_{\hat{y}\hat{y}\hat{y}}(\hat{x}, \hat{\xi}) d\hat{\xi} \right] \quad (4.38)$$

$$\sigma_S(\hat{x}) = \tau_{\hat{x}\hat{y}}(\hat{x}, \hat{y}) + \frac{\mu}{\pi(\kappa + 1)} \left[\int_0^b B_{\hat{x}}(\hat{\xi}) G_{\hat{x}\hat{x}\hat{y}}(\hat{x}, \hat{\xi}) d\hat{\xi} + \int_0^b B_{\hat{y}}(\hat{\xi}) G_{\hat{y}\hat{x}\hat{y}}(\hat{x}, \hat{\xi}) d\hat{\xi} \right] \quad (4.39)$$

As equações 4.38 e 4.39 são inteiramente análogas equação 4.24, porém notasse que tanto as discordâncias $B_{\hat{x}}(\hat{\xi})$ quanto $B_{\hat{y}}(\hat{\xi})$ exercem influencia sobre as duas componentes de trações superficiais a serem anuladas, normal e tangencial.

Novamente é necessário aplicar a condição de contorno de faces livres de tensão para a trinca, assim $\sigma_T(\hat{x}) = \sigma_S(\hat{x}) = 0$.

Agora as equações 4.38 e 4.39 podem ser normalizadas analogamente ao procedimento realizado para trinca perpendicular:

$$r_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n+1}\pi\right) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.40)$$

$$s_k = \cos\left(\frac{2k}{2n+1}\pi\right) \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4.41)$$

As funções de forma fundamentais assume a mesma forma da apresentada pela equação 4.26

$$B_i(r) = \phi_i(r) \sqrt{\frac{1+r}{1-r}} \quad ; \quad i = x \text{ ou } y \quad (4.42)$$

Agora é possível realizar o processo de discretização da mesma maneira que o realizado para equação 4.24, porém, para n pontos de integração serão encontradas 2n equações em 2n $\phi_{\hat{y}}(r_i)$ e $\phi_{\hat{x}}(r_i)$

$$\frac{\mu}{\pi(\kappa+1)} \sum_{i=1}^n \frac{2\pi(1+r_i)}{2n+1} \{G_{\hat{x}\hat{y}\hat{y}}(s_k, r_i)\phi_{\hat{x}}(r_i) + G_{\hat{y}\hat{y}\hat{y}}(s_k, r_i)\phi_{\hat{y}}(r_i)\} = -\sigma_{\hat{y}\hat{y}}(\hat{x}, \hat{y}) \quad (4.43)$$

$$\frac{\mu}{\pi(\kappa+1)} \sum_{i=1}^n \frac{2\pi(1+r_i)}{2n+1} \{G_{\hat{x}\hat{x}\hat{y}}(s_k, r_i)\phi_{\hat{x}}(r_i) + G_{\hat{y}\hat{x}\hat{y}}(s_k, r_i)\phi_{\hat{y}}(r_i)\} = -\tau_{\hat{x}\hat{y}}(\hat{x}, \hat{y}) \quad (4.44)$$

Determinados os valores de $\phi_{\hat{y}}(r_i)$ e $\phi_{\hat{x}}(r_i)$ e realizar a interpolação de do Polinômio de Jacobi para se determinar os valore de $\phi_y(1)$ e $\phi_x(1)$

$$\phi_y(1) = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=1}^n \cot\left(\frac{2i-1}{2n+1}\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n}{2n+1}(2i-1)\pi\right) \phi_y(r_i) \quad (4.45)$$

$$\phi_x(1) = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=1}^n \cot\left(\frac{2i-1}{2n+1}\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n}{2n+1}(2i-1)\pi\right) \phi_x(r_i) \quad (4.46)$$

Por fim os valores de

$$K_I = 2\sqrt{2}\sqrt{\pi b} \frac{\mu}{(\kappa + 1)} \phi_y(1) \quad (4.47)$$

$$K_{II} = 2\sqrt{2}\sqrt{\pi b} \frac{\mu}{(\kappa + 1)} \phi_x(1) \quad (4.48)$$

4.4. Crescimento de Trincas

Taxa de crescimento da trinca pode ser entendida como a razão entre a variação no tamanho da trinca e o número de ciclos completados para que essa variação seja medida. Em laboratório, é possível medir a taxa de crescimento da trinca seja opticamente por meio de um microscópio ou através de resistências elétricas. É possível fazer uma associação entre a taxa de crescimento da trinca ($\frac{da}{dN}$) e a faixa do fator de intensidade de tensões (ΔK). De um modo geral, a faixa do FIT pode ser obtido pela equação seguinte:

$$\Delta K = F(\sigma_{max} - \sigma_{min})\sqrt{\pi a} \quad (4.49)$$

Na equação anterior, σ_{max} e σ_{min} são, respectivamente, as tensões máxima e mínima de uma carregamento cíclico sobre a trinca. A razão entre os carregamentos é dada por:

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \quad (4.50)$$

Ou

$$R = \frac{K_{min}}{K_{max}} \quad (4.51)$$

Como para o modo I, de abertura da trinca as tensões de compressão produzem fechamento da trinca, no qual, apenas tensões de contato são transmitidas entre as faces, se a abertura da trinca, $\Delta K_I > 0$, responsável pela propagação da trinca. Logo

$$\begin{cases} \Delta K_I = \Delta K_{max} - \Delta K_{min} & ; \quad \Delta K_{max} \text{ e } \Delta K_{min} > 0 \\ \Delta K_I = \Delta K_{max} - 0 & ; \quad \Delta K_{max} > 0 \text{ e } \Delta K_{min} < 0 \end{cases} \quad (4.52)$$

O valor da faixa de FIT efetivo é calculada pela equação

$$\Delta K_{eff} = (\Delta K_I^2 + \Delta K_{II}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.53)$$

4.4.1. Curva da/dN versus ΔK

Uma relação geral para o comportamento de crescimento de trincas foi proposta por Paris et al.(1961) e Paris e Erdogan (1963), baseada em experimentos se mostra conveniente ao aproximar o comportamento da evolução das trincas por meio de um lei de potência dada por:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (4.54)$$

Está é a chamada lei de Paris. Onde C é uma constante multiplicativa e m é um expoente que, em um gráfico do tipo log-log, determina uma inclinação. Esta relação é interessante para uma determinada região do gráfico, denominada região (b), onde os resultados se encaixam melhor nesta aproximação.

A curva log-log da figura seguinte mostra três fases distintas:

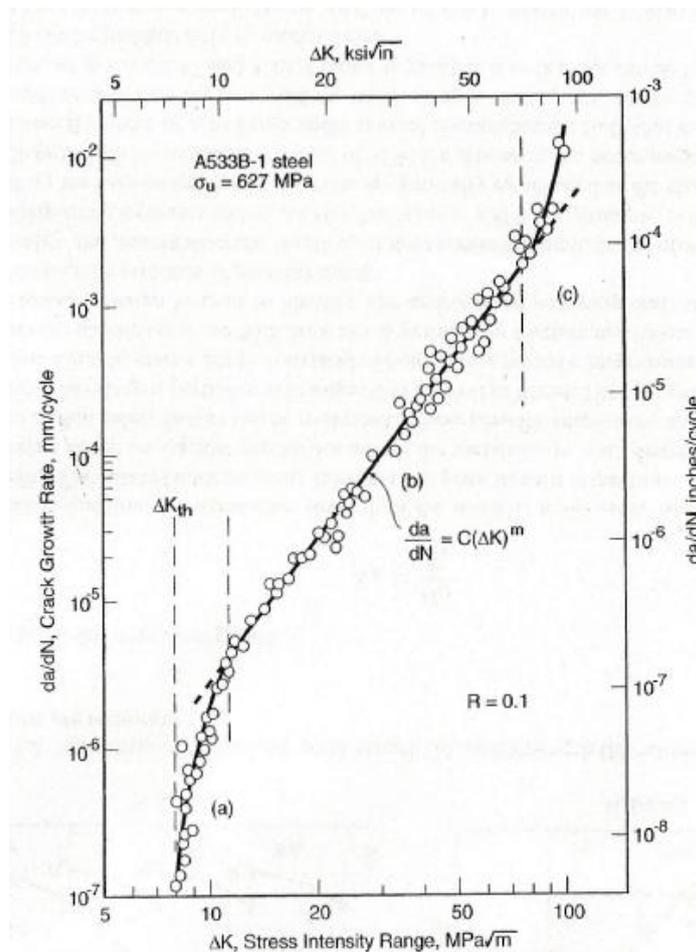


Figura 2.6 – curva da/dN versus ΔK em escala log-log para um aço específico
Adaptado de (Dowling, 1998)

A fase (a) é a fase de lento crescimento da trinca. A fase (b) mostra a região cujos pontos são normalmente aproximados pela equação anterior para estudo de crescimento de trinca. Esta é a fase que importa neste trabalho. A fase (c) é a fase de alto crescimento de trinca, onde a trinca é considerada instável e material tende a sofrer fratura.

Já o aumento da razão de tensão (R) tende a aumentar a taxa de crescimento de trinca, em um efeito parecido com o que há nas curvas S-N de fadiga de materiais.

Alguns modelos para a influência da razão de tensão na curva de propagação de trincas já forma propostos. Um dos modelos mais populares é o modelo que se baseia na equação de Walker, a seguir:

$$\overline{\Delta K} = K_{max}(1 - R)^\gamma \quad (4.55)$$

Na equação precedente, $\overline{\Delta K}$ seria uma variação de fator de intensidade de tensões de R=0 que causaria o mesmo crescimento de trinca que K_{max} causaria, com outro valor para R. Neste caso, pode-se escrever $\Delta K = K_{max}(1 - R)$ através da definição de razão de tensão. Agrupando-se essas informações, denomina-se de C_0 uma constante para um material sujeito a R=0 e pode-se escrever:

$$\frac{da}{dN} = C_0 \left[\frac{\Delta K}{(1 - R)^\gamma} \right]^m \quad (4.56)$$

Com alguma manipulação, chega-se a:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C_0}{(1 - R)^{m(1-\gamma)}} (\Delta K)^m \quad (4.57)$$

Comparando-se a equação precedente com a equação geral da curva, observa-se que C é uma função de R e pode ser obtida pela relação:

$$C = \frac{C_0}{(1 - R)^{m(1-\gamma)}} \quad (4.58)$$

A equação colabora bastante, entretanto é necessário admitir que cargas compressivas não possuem efeito sob a propagação das trincas. Neste caso, $\gamma = 0$ e $\overline{\Delta K} = K_{max}$.

Comparando-se as variadas classes de metais, com ligas de aço, alumínio titânio, entre outros, pode-se notar que há grandes variações de comportamento em relação à curva

$\frac{da}{dN}$ versus ΔK . Entretanto, esta zona de variação parece ficar mais estreita ao comparar os dados de $\frac{da}{dN}$ versus $\frac{\Delta K}{E}$, sendo E o módulo de elasticidade do material.

Outro comportamento notável é que o coeficiente m costuma ser maior para materiais de comportamento mais frágil, com valores típicos entre 2 e 4, ou ainda mais elevados, no caso de alguns materiais compósitos e cerâmicos.

O aumento de temperatura tipicamente afeta o crescimento da trinca. Temperaturas elevadas costumam acelerar a propagação das trincas. Entretanto, o efeito pode ser inverso para alguns ferros e aços, por exemplo, devido à mudança de fase austenítica-martensítica.

Um ambiente hostil quimicamente pode afetar o crescimento de trincas. Neste caso, envolve a interação específica entre o material e a composição química do meio, isto é, ambientes com uma composição que aceleram consideravelmente o crescimento de trinca de um material pode não afetar significativamente outro material com trinca sob as mesmas condições. Geralmente o efeito de ambientes quimicamente hostis no crescimento de trinca é mais sentido quando há frequências menores de carregamento, deixando mais tempo para o material interagir com o ambiente. Um exemplo de meio hostil a um material é o emprego de aço AISI 4340 submerso na água do mar.

4.5. Comportamento de Trincas Curtas

De acordo com a lei de Paris, (Paris et al., 1961; Paris e Erdogan, 1963), trincas submetidas a amplitudes do FIT menores que o limiar de propagação, ΔK_{th} , não devem ser propagadas. No entanto, observações mostram que pequenas trincas de fadiga propagam-se mesmo sujeitas a condição de $\Delta K < \Delta K_{th}$. Tais trincas apresentam comportamento anômalo ao de trincas longas que podem ser modeladas pela taxa de crescimento convencional. O uso de teoria de trincas longas para explicar o comportamento de trincas curtas é inapropriado e leva a resultados insatisfatórios. O problema torna-se ainda mais acentuado no contexto de *fretting*, onde as trincas curtas tem sua taxa acelerada por influencia da fricção na zona de micro escorregamento.

Segundo Pearson (1975), trincas curtas superficiais, na ordem de 6 a 50 micrometros de extensão, crescem a uma taxa até 100 vezes maior comparativamente a defeitos

maiores, com décimos de milímetro, quando sujeitos à mesma amplitude do FIT. Smith et al. (1996) estudou o comportamento de trincas curtas em um liga a base de níquel de aplicação aeronáutica. O autor reportou acelerações e retardos sucessivos na taxa de crescimento das trincas até que o tamanho de trinca longa fosse alcançado. Além Smith, Morris (1979, 980), Tanaka e Nakai (1981) relataram observar o mesmo fenômeno para ligas de alumínio e aço de médio carbono, respectivamente, e levantaram a hipótese de que, ao encontrar o contorno de grãos micro estruturais, a trinca sofre desacelerações em sua taxa de propagação. A Figura 4.7 apresenta o comportamento descrito.

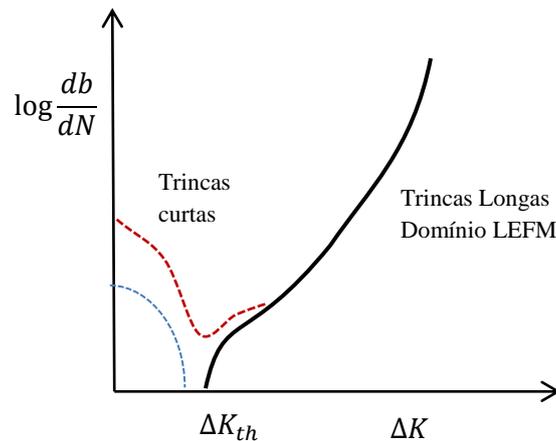


Figura 4.7- Comportamento Anômalo de trincas curtas

4.5.1. Os Diagramas de Kitagawa-Takahashi e El Haddad

Kitagawa e Takahashi (1976) observaram que muitos materiais exibem um limiar de propagação de trincas longas $\Delta K = \Delta K_0$ independente do comprimento da trinca. Entretanto, se o campo de tensões for grande o suficiente, Trincas curtas pode se propagar mesmo em casos onde em $\Delta K < \Delta K_0$. Entende-se que este fato ocorrerá se o valor da amplitude de tensão aplicada à trinca, $\Delta\sigma$, for superior ao valor do limite de fadiga do material, σ_1 . O comprimento da trinca, b_0 , na transição entre os dois regimes pode ser encontrado igualando-se as duas condições, isto é, para um trinca superficial sobre tensão uniforme, têm-se:

$$\Delta K_0 = 1,12\sigma_1\sqrt{\pi b_0} \quad (4.59)$$

Na equação 4.59, qualquer par das três quantidades relacionadas pode ser considerado como propriedade material. Como geralmente os valores ΔK_0 e σ_1 são conhecidos determina-se o tamanho crítico de trinca como $b_0 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\Delta K_0}{\sigma_{fl}} \right)^2$.

O diagrama de K-T deriva da aplicação das seguintes condições:

$$\begin{cases} \Delta K_{th} = \Delta K_0 \sqrt{b/b_0} & , b \leq b_0 \\ \Delta K_{th} = \Delta K_0 & , b > b_0 \end{cases} \quad (4.60)$$

Para exemplificar como o diagrama de K-T pode ser aplicado na previsão do comportamento de trincas curtas, dois casos de propagação sob um campo de tensão uniforme são considerados. Primeiramente, o processo de crescimento de uma trinca pode ser imaginado como uma curva descrita nesse diagrama. No caso de um corpo de prova submetido a uma amplitude de tensão superior ao limite de fadiga, $\Delta\sigma > \sigma_0$, uma curva do tipo A é produzida (Figura 4.8- Diagrama esquemático de K-T mostrando o comportamento e propagação de trincas em termos de ΔK .), esta curva estará sempre acima do limite de fadiga e a trinca irá evoluir, qualquer que seja o tamanho do defeito pré-existente. Para o caso onde o espécime é sujeito a uma amplitude de tensão inferior ao limite de fadiga, $\Delta\sigma < \sigma_0$, (Figura 4.8, curva B), a curva da trinca estará sempre abaixo do limiar e não irá se propagar a, a menos que o tamanho da trinca inicial seja superior à b_1 . Em situações onde defeitos iniciais de tamanho significativos estejam ausentes, se a condição de carregamento garantir que $\Delta\sigma > \sigma_0$ a trinca irá se iniciar e propagar. Porém, para ocasiões onde $\Delta\sigma < \sigma_0$ o processo de nucleação pode ser interrompido por barreiras micro estruturais ou nem chegar a ocorrer (Miller, 1993).

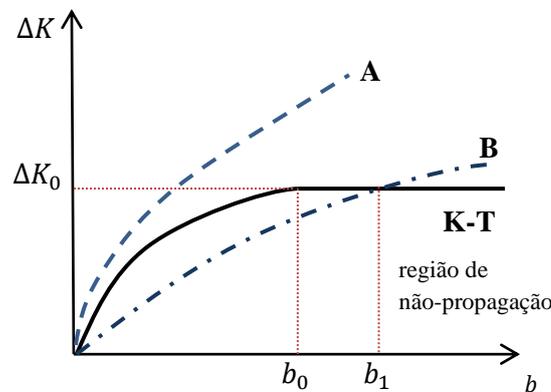


Figura 4.8- Diagrama esquemático de K-T mostrando o comportamento e propagação de trincas em termos de ΔK .

Kitagawa et al.(1976) e Tanaka et al. (1981), mostraram haver boa congruência entre essa abordagem e dados experimentais, entretanto, uma transição aguda entre os dois regimes de propagação não é interessante do ponto de vista físico e pode levar a resultados não conservativos. Para contornar o problema de transição entre os regimes de trincas longas e curtas, El Haddad et. al. (1979) propuseram o uso de um tamanho fictício trinca, b_l , somado ao tamanho crítico b_0 , mantendo inalterado o valor do limiar ΔK_0 . Assim,

$$\Delta K_{th} = \Delta K_0 \sqrt{\frac{b}{b + b_0}} \quad (4.61)$$

Estas curvas podem ser utilizadas para prever crescimento ou parada de propagação de trincas curtas ou longas, onde ambas se baseiam em dados experimentais, onde ΔK_0 é o limiar de propagação para trincas longas.

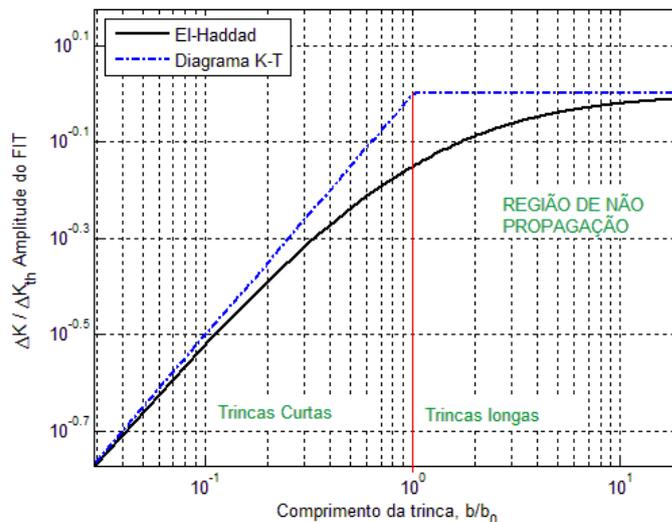


Figura 4.9: Diagramas K-T e El-Haddad de forma esquemática

4.6. Formulações De Parada De Trincas Curtas Na Fadiga Por *Fretting*

Devido à natureza complexa da distribuição de tensões e da geometria do problema, o calculo do fator de intensidade de tensão em problemas de *fretting* não possui solução analítica. Técnicas baseadas em métodos numéricos tem se tornado populares, em particular, como o método de elementos finitos, deve ser atentar para o uso de

elementos especiais nas vizinhanças da ponta da trinca. No entanto, o método da distribuição de discordâncias se mostra uma ferramenta numérica poderosa na solução deste problema.

Araújo e Nowell (1999) realizaram um trabalho pioneiro ao comparar o valor de ΔK ao diagrama de limiar de propagação de trincas curtas de Kitagawa-Takahashi para determinar o tamanho crítico de contato, tamanho a partir do qual espécimes sujeitos a condições *fretting* transitam de vidas muito longas, $> 10^7$ ciclos, para vidas curtas, ordem de 10^5 ciclos. Em trabalho semelhante posteriormente publicado, Dini et al. (2006) propuseram a comparação do uso do diagramas Kitagawa-Takahashi e da curva de El-Haddad, para a mesma bateria de ensaios, com objetivo de verificar qual modelo de limiar de propagação para trincas curtas era mais indicado a situações de *fretting*.

Até então, em ambos os estudos mencionados, foi considerado o cálculo de ΔK apenas para o modo I de propagação, com trincas assumidas perpendiculares à superfície da região de contato e desprezando-se a contribuição de ΔK_{II} . Neste contexto, Fouvry et al. (2007) desenvolveram trabalho experimental para avaliar o tamanho de parada de trincas sob condições de *fretting* e comparação dos resultados com o tamanho previsto pelo diagrama de K-T. Para tal, foi medido o ângulo de crescimento das trincas e utilizado o valor de ΔK_{eff} para comparação, permitindo que as trincas fossem analisadas em modo misto de propagação.

4.6.1. Metodologia de Araújo e Nowell (1999)

Até o trabalho realizado por Araújo e Nowell (1999), pouca atenção tinha sido dada a aplicação de modelos de parada de trincas curtas a elementos sujeitos a condições de *fretting*. Em seus estudos os autores utilizaram dados experimentais fornecidos por Nowell (1988). Com o objetivo de avaliar a existência do tamanho crítico de contato, Nowell (1988) explorou uma característica marcante do contato hertziano entre cilindros, a de que o tamanho da região do contato pode ser alterado enquanto o pico de pressão é mantido constante. Isto é possível uma vez que a pressão normal, P_0 , é proporcional à $\sqrt{P/R_s}$, enquanto a semi-largura do contato, a , é proporcional à $\sqrt{PR_s}$. Como consequência dessa observação a extensão do campo de tensão induzido pelo contato pode variar embora sua amplitude seja mantida constante. Bramhall e Nowell (1988) mostraram isso em seus experimentos. Ambos constataram que tamanhos de contato maiores, as vidas em *fretting* são curtas (da ordem de 10^5 ciclos). No entanto,

abaixo de um tamanho de contato crítico, a_0 , ocorreu uma transição abrupta em regime de vidas de fadiga tornou-se muito longo ($>10^7$). Nos experimentos de Nowell (1988), tanto as sapatadas quanto os espécimes foram fabricados em liga de alumínio 2024 (4 % cobre) de aplicação aeronáutica.

Araújo e Nowell sugeriram utilizar o método de parada de trincas curtas para explicar a existência do tamanho crítico de contato onde a transição aguda entre os regimes de vidas longas para curtas ocorre. Para isso, foi necessário o cálculo do fator intensidade de tensão para as condições *fretting*, obtido aplicando método de distribuição de discordâncias, Nowell e Hills (1987).

Ao aplicar a metodologia de parada de trincas curtas à situação *fretting* Araújo e Nowell traçaram a curva de ΔK vs. b observaram um comportamento diferente daquele esperado para carregamento uniforme uniaxial, Figura 4.8, principalmente em função do gradiente de tensões causado pelas cargas de contato. Mostrou-se que para casos onde o tamanho do contato é inferior ao tamanho crítico, $a > a_0$, as curvas apresentam de ΔK apresentam o comportamento análogo ao da curva C, Figura 4.10. Inicialmente, o valor de ΔK é superior ao limiar de propagação, induzindo a trinca a crescer. Porém, à medida que esta cresce, o intenso gradiente de tensão induzido pelo pequeno tamanho de contato decai rapidamente, fazendo com que haja uma diminuição no valor de ΔK e, caso este se torne menor que o valor limiar, o crescimento cessa com comprimento $b = b_2$.

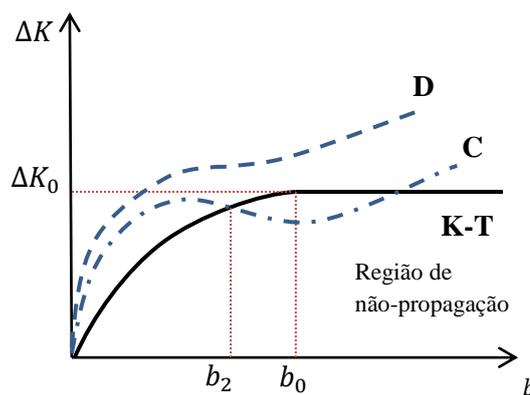


Figura 4.10- Comportamento do FIT no Diagrama K-T em fadiga por *fretting*.

O comportamento descrito pela curva D, Figura 4.10, representa os casos onde o valor de ΔK é sempre superior ao valor limiar, o que pode explicar o comportamento

observado para os testes que levaram a vidas curtas. O tamanho crítico de contato, a_c , representa uma condição onde o valor de recai na zona de transição entre os dois casos notados.

Uma das limitações dessa abordagem reside no fato de se ter assumido puramente modo I para propagação da trinca, enquanto é bem sabido que para qualquer situação *fretting* o modo misto é o mais provável de ocorrer. No entanto, os autores propõem que a magnitude de ΔK_{II} é pequena quando comparado a ΔK_I , uma vez que a intensidade da componente de tensão σ_{yy} é muito superior a τ_{xy} sob as condições de carregamento analisadas. Como em fadiga por *fretting* a relação das tensões principais e a sua direção não são constantes, o modo misto também varia ao longo do ciclo e não é de todo claro como a trinca irá comportar. Além disso, experimentos realizados com esta liga de alumínio, Nowell (1987), têm mostrado evidências de trincas propagando-se perpendicular à superfície ou em ângulos muito próximos a 90° justificando a aplicabilidade de seu modelo.

4.6.2. MODELO DINI ET AL., (2006)

Dini et al., (2006), ampliaram a análise de Araújo e Nowell utilizando a abordagem de parada de trincas curtas comparando o limiares de propagação do diagrama K-T e de El-Haddad. Além disso, um modelo de analogia entelhe foi aplicado na tentativa de prever o limite de fadiga por *fretting*. Foi avaliada a influência do tamanho crítico de contato, a_c , para sapatas planas e cilíndricas, fabricadas em ligas de titânio-alumínio, Ti6Al4V, e alumínio-cobre, Al4%Cu.

Em seu trabalho, Dini et al. aplicaram a teoria das distâncias críticas sugerida por Taylor (1999) e Lazzarin et al. (1997), amplamente utilizada para estimar a vida de componentes entalhados. Como mostrado na seção 2.4, essa teoria se fundamenta na hipótese de que a falha do material somente ocorrerá se a tensão média atuando sobre uma região crítica representativa nas vizinhanças do concentrador deve exceder o limite de fadiga do material. Para simplificar a análise, foi utilizado o método do ponto, calculando-se a distribuição da componente de tensão σ_{xx} , a uma profundidade $L/2$ da na extremidade anterior do contato. Então foi determinado o valor da carga remota σ_B necessária para igualar o valor amplitude de tensão total ao limite de fadiga. Repetidas iterações foram realizadas para computar o efeito de σ_B na distribuição de tensões.

Na aplicação do método de parada de trincas curtas, foi seguida a mesma metodologia utilizada por Araújo e Nowell (1999), mas, adicionado à análise a curva do limiar de propagação de El-Haddad. Foi feito uso do método de distribuição de discordâncias considerando trincas perpendiculares à superfície e somente modo I de propagação.

Foi observado que em alguns casos onde o diagrama de Kitagawa-Takahashi previa vida infinita e a falha ocorreria, a curva de El Haddad acusou falha do componente, Figura 4.11, fornecendo um resultado mais coerente em relação ao resultado experimental. Isso mostra um comportamento mais conservativo da curva de El Haddad em relação ao diagrama K-T

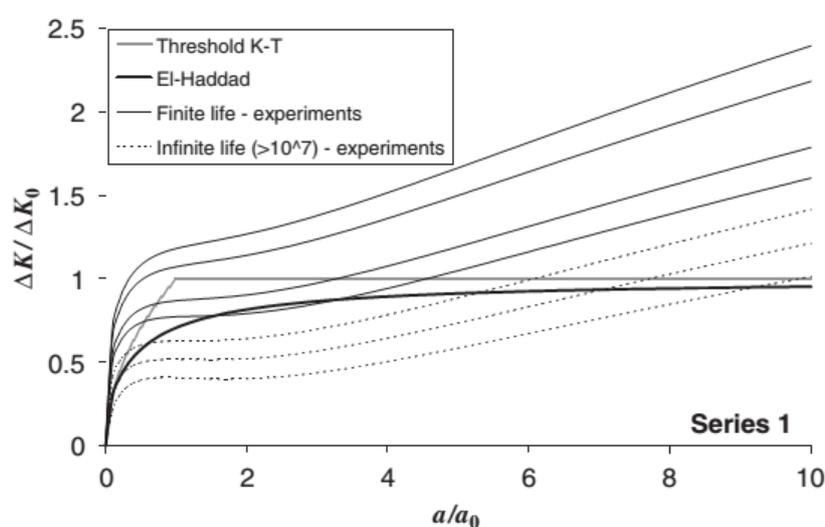


Figura 4.11 – Exemplo de resultado comparativo entre o diagrama K-T e a curva de E-H para prever regime de vidas longas ou curtas. Adaptado de Dini et al., (2006)

O fato da melhor acurácia da curva de El Haddad para os casos avaliados por Dini pode estar associado à suavização introduzida na zona de transição entre os regimes, aproximando melhor o comportamento real do material.

4.6.3. Metodologia Fouvry et al., (2007)

Com o objetivo de avaliar a acurácia do modelo de parada de trincas curtas em fadiga por *fretting*, Fouvry et al., (2007) realizou experimentos de *fretting* bem definidos, registrando a localização, orientação e o máximo tamanho de trincas paradas. Dessa forma, a técnica anteriormente aplicada apenas para prever vida finita ou infinita sob determinada condição de carregamento, pôde ser aplicada para previsão da máxima extensão alcançada por trincas sob a região de contato.

O experimentos utilizaram a geometria de contato cilindro-plano 2D, sob carga puramente alternada. Isso permitiu simplificar a análise de tensão pela ausência da carga remota de fadiga, assim, os efeitos *fretting* puderam ser avaliados isoladamente. Avaliou-se a ação da pressão normal baixa, regime elástico, e alta, induzindo um regime de caráter eslatoplástico.

Os métodos experimentais e os dados e detalhes sobre as condições de ensaios e matérias utilizados são descritos detalhadamente na seção 5.1. Fouvry avaliou a evolução da trinca calculando o fator intensidade de tensão via método de distribuição de discordâncias, em modo misto, e realizou a previsão do tamanho das trincas paradas por meio do diagrama K-T, comparando os resultados com os valores obtidos em seus experimentos. A metodologia utilizada pode ser sintetizada pelo diagrama na Figura 4.12. A curva pontilhada representa o limiar de propagação de trincas curtas ΔK_{th} e linha vermelha a evolução da faixa do FIT, ΔK_{eff} , calculada como uma função do comprimento da trinca. O ponto $\Delta K_{eff,exp}$ representa o valor da faixa do FIT para o comprimento da trinca parada experimental. O ponto de interseção das duas curvas representa o valor onde $\Delta K_{eff} = \Delta K_{th}$, ou seja, o tamanho de trinca esperado ao aplicar a metodologia.

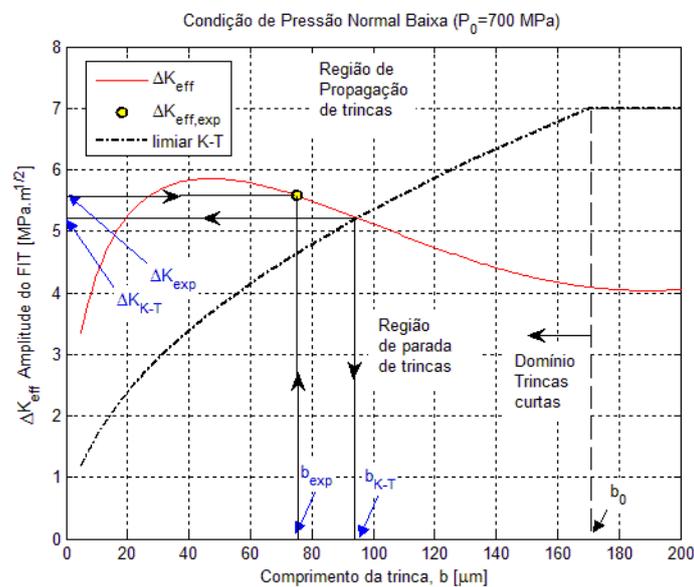


Figura 4.12- Ilustração da metodologia de trincas curtas paradas em *fretting* considerando o tamanho medido experimentalmente para comparação.

Os comprimentos de trinca previstos pela abordagem de trincas curtas de paradas foram razoavelmente próximos dos observados experimentalmente. A tabela resumando os

resultados encontrados por Fouvry et al. (2007) é apresentada na seção 5.1. A Figura 4.13 exibe os comprimentos de trincas experimentais contra a faixa do FIT calculada. .

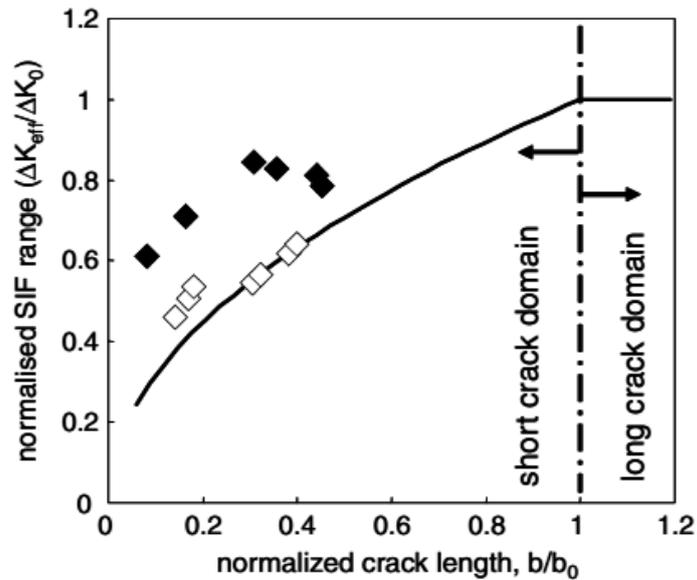


Figura 4.13- Fator Intensidade de Tensão (FIT) contra tamanho de trinca normalizado, adaptado de Fouvry et al. (2007).

Duas distribuições bem distintas podem ser observadas no gráfico acima, os pontos representados pelo marcador branco, \diamond , representam os dados experimentais para a condição de pressão normal mais baixa, enquanto o marcador preto, \blacklozenge , representa os dados experimentais para condição de pressão normal mais elevada. Nota-se claramente uma forte dependência da acurácia da metodologia em relação à pressão normal.

Segundo Fouvry, os ensaios conduzidos a uma pressão menor possuem melhor correlação, apresentaram certa discrepância para as trincas mais curtas e ótima correlação para trincas maiores que $50\mu m$. Estudos anteriores baseados na comparação de tamanho contato concluíram que a plasticidade é limitada ao domínio das zonas de micro escorregamento, o que justifica a hipótese Hertz-Mindlin, baseada em preceitos elásticos, para descrever a distribuição no campo de tensões aplicado. Ao comparar a tensão de Von Mises no ponto de nucleação da trinca, $(-a, 0)$, e na ponta da trinca, $(b \sin \theta - a, b \cos \theta)$, (Tabela 5.2), com a tensão de escoamento do material, verificou-

se que no ponto de nucleação a trinca vai experimentar um considerável grau de plasticidade, entretanto, devido à queda acentuada do campo de tensões abaixo da superfície, a ponta da trinca está localizado em uma região nominalmente elástica.

Ao avaliar a condição de pressão normal mais alta, notou-se uma discrepância significativa para quaisquer comprimentos de trincas paradas. Esta discrepância está diretamente ligada às acomodações plásticas não apenas na extensão da área de contato, mas também na distribuição de campo de tensão ao longo das vizinhanças da trinca, as quais não são consideradas, já que a metodologia de obtenção do FIT reside sobre fundamentos da elasticidade. Assim, resultados muito conservativos foram gerados na estimativa do campo de tensão ao longo do caminho das trincas, e conseqüentemente uma proporcional superestimação no valor de ΔK .

Para Fouvry et al. (2007), a discrepância nos resultados para pressão mais alta não está intimamente ligada ao diagrama K-T, mas sim à metodologia utilizada para calcular o campo de tensões e os valores de ΔK experimentais. Apesar de todos os casos para pressão de pico mais alta não possuírem boa correlação, quanto maior a trinca parada há menor efeito plástico e a melhor congruência dos resultados. No entanto, o impacto da plasticidade se mostrou intenso, ao ponto de, mesmo para as trincas mais longas, o erro de predição com o modelo K - T é superior de 30 % .

4.7. Metodologia Proposta no Presente Trabalho

O presente trabalho tem por objetivo estimar o comprimento de trincas curtas paradas sob a ação de *fretting*, utilizando dois métodos distintos para se determinar o limiar de propagação para trincas curtas, sejam eles, as curvas limiares de Kitagawa-Takahashi e de El Haddad. Deseja-se ainda, sugerir um método capaz de predizer o ângulo onde a evolução do comprimento da trinca deve ser avaliada (direção de propagação). Para validação dos métodos propostos, serão utilizados dados experimentais da literatura, Fouvry et. al. (2007), descritos em detalhes na seção 5.1.

Para calcular a evolução do Fator intensidade de tensão (FIT) na ponta da trinca foi utilizado o método de distribuição de discordâncias, descrito com mais detalhes na seção 4.3. A técnica parte do princípio de Bueckner (1958), o qual prevê que o campo de tensão resultante devido ação de fatores distintos pode ser determinado pela superposição do campo gerado induzido por cada fator separadamente, desde que o material tenha comportamento linear elástico. Ao analisar a Figura 4.14 o problema

original pode ser considerado ao equivalente obtido pela superposição de (a) e (b). Dessa forma, a resultante de tensões em um corpo submetido à de cargas de contato, e que contenha uma trinca, pode ser obtido pela soma dos campos de tensões de um corpo sob a ação de *fretting*, sem trinca, e o de outro corpo trincado sob a ação apenas das tensões geradas pela distribuição de discordâncias. Como condição de contorno do problema, a distribuição de discordâncias na face da trinca, representada pela parcela (b), deve gerar uma distribuição de tensões igual e oposta aquela gerada pelas cargas de contato, parcela (a), fazendo com que quaisquer trações na face da trinca sejam anuladas.

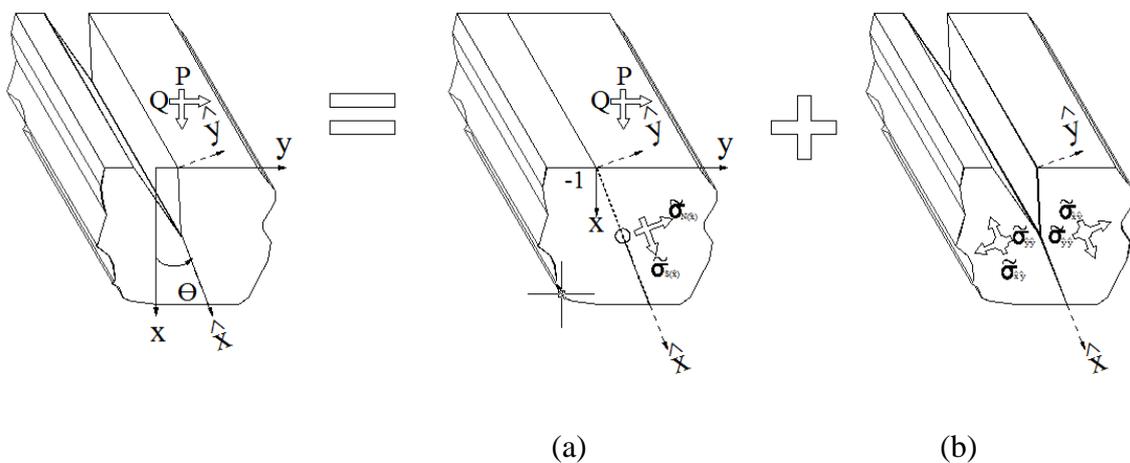


Figura 4.14- Princípio de Bueckner para o caso analisado. (a) representa o corpo sem trinca submetido às cargas de contato (b) representa um corpo desprovido de cargas externas, mas com trações na face da trinca iguais e opostas aos componentes de tensão em (a), de modo que, após a superposição as faces da trinca sejam livre de tensões.

A distribuição de tensões devido à ação de *fretting* foi computada utilizando a teoria apresentada no capítulo 3 para contato entre cilindro e plano sob regime de escorregamento parcial, resumida pelas equações expressas na Tabela 3.2. O ponto de nucleação da trinca é extremidade anterior do contato, $x/a = -1$ e $y/a = 0$. A evolução da trinca foi calculada partindo de 5 microns até $b_0/2$ em 300 incrementos igualmente espaçados.

Para cada situação de carregamento analisada foram realizadas previsões do tamanho das trincas paradas por cada uma das curvas limiaries de K-T e E-H. É proposto o cálculo do fator intensidade de tensão para comparação primeiramente considerando uma propagação hipotética a 90° da superfície, em modo I, onde o cálculo da faixa do FIT, ΔK , pelo método de distribuição de discordâncias se simplifica muito. A segunda

análise considera a presença de uma trinca inclinada, crescendo em modo misto (Modos I e II). Nesta análise, utilizou-se inicialmente o ângulo de propagação verificado experimentalmente para o cálculo de ΔK_I e ΔK_{II} e determinou-se a faixa do FIT efetivo. Entretanto, para servir como metodologia preditiva de vida segura, o ângulo de propagação da trinca deve ser estimado *a priori*. Para isto, utilizou-se uma metodologia de plano crítico.

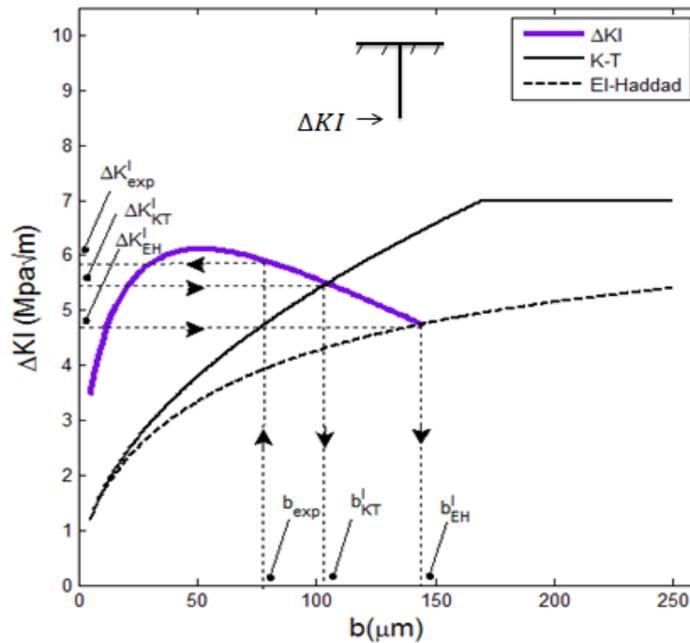


Figura 4.15: Esquema da metodologia utilizada na estimativa do comprimento da trinca em propagação perpendicular a superfície.

Após realizar a determinação da curva de evolução do fator intensidade de tensão para os diferentes métodos, será verificado o cruzamento deste com as curvas de Kitagawa-Takahashi e El-Haddad, Figuras Figura 4.15, onde se considera a trinca perpendicular, e Figura 4.16, trinca com inclinação θ , onde θ é o ângulo entre o vetor normal unitário que caracteriza o plano da trinca e o eixo x (positivo no sentido anti-horário). Assim, será possível estimar o comprimento da trinca para cada um dos limiares em estudo. Os valores obtidos para b_{est} (tamanho estimado de parada da trinca) são comparados aos valores de b_{exp} (tamanho da trinca parada medida experimentalmente). Outro tipo de comparação pode ser realizado a partir da associação da faixa do FIT calculado correspondente ao tamanho da trinca verificado/medido experimentalmente, aqui denominado de ΔK_{exp} (Figs Figura 4.15 e Figura 4.16). Deve-se notar que o tamanho da

trinca neste trabalho é sempre medido ao longo do plano da trinca, não sendo utilizados tamanhos projetados em nenhum momento.

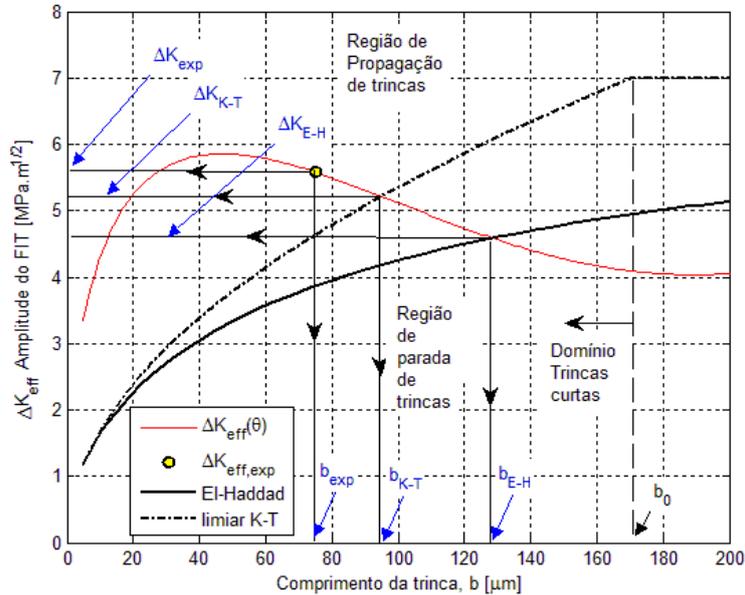


Figura 4.16: Esquema da metodologia utilizada na estimativa do comprimento da trinca, utilizando ΔK_{eff} para trinca inclinada ($\theta = 30^\circ$).

Para estimar o ângulo de propagação das trincas inclinadas no qual deve ser calculado o valor de ΔK_{eff} , utilizou-se o conceito de plano crítico, que representa o plano onde a máxima amplitude da tensão cisalhante, τ_a , é desenvolvida, plano este o mais suscetível ao processo de iniciação e propagação inicial de trincas (McDiarmid, 1987, 1991, 1994). Como o estado de tensões é uma característica pontual, tanto a direção do plano crítico quanto amplitude de τ_a pode variar bastante ao longo do caminho da trinca. Com base no conceito de distância crítica, amplamente aplicada a corpos entalhados, o ponto $L = b_o/2$ é o local representativo da zona de processo, portanto, a análise será realizada sobre uma linha, percorrendo o eixo perpendicular à superfície, desde o ponto de nucleação até a distância crítica determinada pelo método do ponto em 10 pontos equidistantes. A amplitude da tensão cisalhante será calculada pelo método do máximo retângulo circunscrito, MRC, descrito na seção 2.3.2. Para busca do plano crítico o vetor normal unitário ao plano terá sua angulação variada em 1° , onde os ângulos que determinam sua direção (θ, ϕ), serão avaliados no intervalo de entre $[0, \pi]$ e $[0, \pi/2]$, ver. Figura 8.3

5.RESULTADOS E DISCUSSÕES

5.1. Dados Experimentais Utilizados Para Avaliação

Em seus experimentos, Fouvry et al. (2007) utilizaram uma configuração de contato entre cilindro e plano, sob regime de escorregamento parcial. A carga normal estática, F_n foi aplicada, então se estabeleceu um deslocamento tangencial de amplitude constante, δ , para gerar a força tangencial, F_t , na superfície de contato. O cilindro foi fabricado com aço 52100, com raio de 40 mm e comprimento $L = 5mm$. Duas diferentes cargas normais foram consideradas no programa experimental, $P = f_n/L = 227N/mm$, e $P = 540N/mm$. A Carga normal menor introduziu uma pressão de pico, $p_0 = 450MPa$ e semi-largura do contato $a = 321\mu m$, enquanto carga normal maior induziu uma pressão de pico $p_0 = 700MPa$ e $a = 500\mu m$. O material utilizado para o corpo de prova plano foi um aço baixo carbono AISI 1034 tratado termicamente e com propriedades mostradas na Tabela 5.1- Propriedades Mecânicas dos Materiais

Tabela 5.1- Propriedades Mecânicas dos Materiais

Propriedades Mecânicas dos Materiais						
Material	E [GPa]	ν	σ_y [MPa] (0.2%)	σ_{UTS} [MPa]	$\Delta\sigma$ [MPa] $R = -1, 10^7$	ΔK_0 [MPa \sqrt{m}] $R = -1$
AISI 1034 Plano	200	0.3	350	600	270 ± 10	7 ± 1
52100 Cilindro	210	0.3	1700	200	-	-

Para todos os ensaios o ângulo de propagação das trincas foi cuidadosamente medido, e concluiu-se que as trincas surgiam na extremidade anterior do contato e possuíam ângulo de propagação médio, θ_{exp} , entre $30 \pm 3^\circ$. Ao avaliar a morfologia interna da trinca, também foi observado que esta possui forma praticamente plana, justificando o uso de um modelo 2D para estudo do problema. A Figura 5.1 exibe a forma de uma trinca experimental observada nos ensaios e os valores medidos para tamanho e para o ângulo de propagação. .

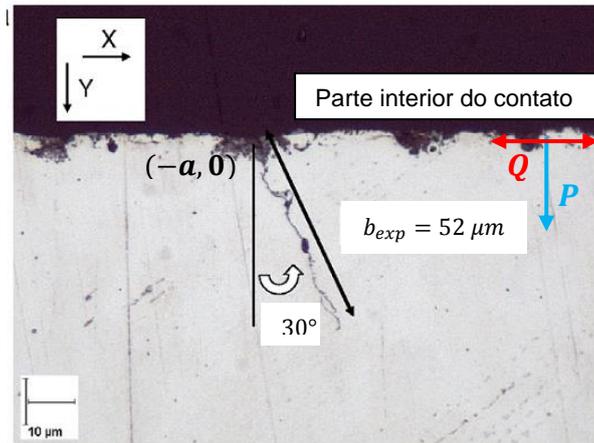


Figura 5.1- Morfologia da trinca de *fretting*, secção transversal ao longo do plano xy, trinca estudada ($P = 540 \text{ N/mm}$, $Q = 282 \text{ N/mm}$, 10^6 cycles); b_{exp} = máximo comprimento experimental da trinca; Adaptado de Fouvry et. al (2007).

Tabela 5.2 - Parâmetros de fretting utilizados e resultados obtidos pelos nos experimentos de Fouvry et al. (2007)

Parâmetros Experimentais e Resultados Fouvry et al.(2007)								
Carga Normal Baixa 227 N/mm ($f=0,9$ e $N_f=10^6$ ciclos)								
Q	P/Q	$\sigma_{VM;nt}$	$\sigma_{VM;pt}$	b_{exp}	$\Delta K_{eff_{exp}}$	b_{est}	$\Delta K_{eff_{est}'}$	$\frac{b_{est} - b_{exp}}{b_{exp}}$
N/mm	[-]	MPa	MPa	μm	MPa. $\sqrt{\text{m}}$	μm	MPa. $\sqrt{\text{m}}$	[%]
90	0,40	467	-	0	-	-	-	-
98	0,43	488	-	0	-	-	-	-
126	0,56	555	288	24	3,22	36	3,26	0,50
137	0,60	579	290	29	3,55	44	3,57	0,52
144	0,63	594	297	31	3,75	49	3,76	0,58
146	0,64	598	232	52	3,81	50	3,82	-0,04
151	0,67	608	234	55	3,96	53	3,96	-0,04
164	0,72	634	238	65	4,33	65	4,33	0,00
169	0,74	644	241	68	4,46	69	4,48	0,01
Parâmetros Experimentais e Resultados Fouvry et al.(2007)								
Carga Normal Alta 540 N/mm ($f=0,9$ e $N_f=10^6$ ciclos)								
Q	Q/P	$S_{VM;nt}$	$S_{VM;pt}$	b_{exp}	$DK_{eff_{exp}}$	b_{est}	$DK_{eff_{est}'}$	$\frac{b_{est} - b_{exp}}{b_{exp}}$
N/mm	[-]	MPa	MPa	μm	MPa. $\sqrt{\text{m}}$	μm	MPa. $\sqrt{\text{m}}$	[%]
206	0,381	729	-	0	-	-	-	-
242	0,448	790	442	14	4,28	54,0	3,94	2,86
243	0,450	847	285	28	4,98	72,0	4,62	1,57
278	0,515	850	285	77	5,49	93,0	5,18	0,21
280	0,519	850	338	61	5,80	94,0	5,26	0,54
282	0,522	853	376	52	5,92	95,0	5,28	0,83
283	0,524	854	298	75	5,68	96,0	5,30	0,28

A tabela 5.2 resume os resultados obtidos pelos experimentos realizando nas condições descritas, onde $\frac{P}{Q}$ denota a razão de cargas de *fretting*, $\sigma_{VM,nt}$ e $\sigma_{VM;pt}$ são os valores registrados para tensão de Von Mises no ponto de nucleação e na ponta da trinca, respectivamente; b_{exp} o tamanho experimental medido, compreende a distância da raiz da trinca até a sua ponta na direção de propagação; ΔK_{eff} se refere à faixa do FIT para o tamanho de trinca experimentalmente medido; b_{est} é o tamanho da trinca no ponto de intersecção da curva de ΔK_{eff} com a curva limiar de K-T, e $\Delta K_{eff,est}$ representa o valor estimado da faixa de FIT correspondente a b_{est} . Os resultados descritos serão utilizados para comparação.

5.2. Resultados para previsão de para de trincas curtas considerando modo I e Trinca Perpendicular à Superfície

Apesar do ângulo de propagação das trincas ser previamente conhecido para os casos aqui estudados, em muitas situações de projeto nem sempre é possível realizar testes para determinar a priori a direção de crescimento das trincas. Araújo e Nowell (1999) indicaram que o modo de cisalhamento, devido a sua menor magnitude em relação à ΔK_I , possui menor influência no processo de propagação, justificando o uso da amplitude do fator intensidade de tensão em modo I como uma representação do processo. Baseado nesta hipótese, a evolução de ΔK_I para trinca perpendicular foi determinada e cruzada com os valores do limiar de propagação de K-T e E-H. Os resultados para os dois níveis de pressão normal são expressos nas tabelas Tabela 5.3 e Tabela 5.4

5.2.1. Pressão Normal baixa

Ao se comparar os resultados exibidos na Tabela 5.3 pelos dois limiares de propagação, uma melhor adequação da curva K-T é percebida, cujos erros percentuais relativos se mostraram muito inferiores ao apresentado pelas estimativas da curva limiar de E-H. De um modo geral, o diagrama limiar de El-Haddad é intrinsecamente mais conservador que o diagrama K-T, principalmente na região onde o tamanho da trinca b se aproxima do tamanho crítico b_0 , ver Figura 5.2. Nos casos iniciais, onde a carga Q aplicada é menor, observaram-se valores de comprimento de trinca experimental inferiores a 50 microns e maior erro na previsão realizada pelos dois diagramas limiares. O diagrama de K-T indicou erros na ordem de 60%, enquanto o erro pelo uso da curva de E-H

ultrapassou a casa dos 100%. Para os ensaios onde a carga tangencial foi um pouco mais elevada, houve uma ótima correlação entre o tamanho previsto pelo diagrama K-T e o tamanho medido da trinca parada, cuja diferença foi inferior a 10%. Nestes mesmos casos, uso da curva limiar de E-H forneceu valores mais próximos que nas situações onde as trincas foram menores, porém, os erros ainda ultrapassaram a casa dos 50%.

Tabela 5.3- Resultados Trinca Perpendicular a Superfície e ΔK_I ($P_o = 450 \text{ MPa}$)

<i>Resultados Trinca Perpendicular a Superfície e ΔK_I</i>								
<i>Pressão Normal Baixa 450MPa</i>								
Q	b_{exp}	b_{EH}	b_{KT}	$\Delta K_{I,exp}$	$\Delta K_{I,EH}$	$\Delta K_{I,KT}$	$erro_{EH}$	$erro_{KT}$
N/mm	μm			$MPa\sqrt{m}$			$\%$	
90	-	-	-	-	-	-	-	-
98	-	-	-	-	-	-	-	-
126	24	49	39	3,26	3,31	3,36	104	61
137	29	60	47	3,60	3,59	3,67	107	61
144	31	69	52	3,81	3,75	3,87	123	68
146	52	71	53	3,93	3,80	3,93	37	3
151	55	78	58	4,08	3,91	4,07	42	5
164	65	96	69	4,46	4,21	4,44	48	6
169	68	104	74	4,61	4,32	4,58	53	8

A discrepância notada para as trincas mais curtas e a ótima correlação para trincas maiores que $50\mu m$ pode estar associada à plasticidade na região adjacente ao ponto de nucleação da trinca. Baseado na observação de que a tensão de Von Mises calculada na extremidade anterior do contato indica uma forte tendência a plastificação neste local mesmo na ausência de trincas, Fouvry et al. (2007), nota-se uma significativa influência deste fator no comportamento das trincas mais curtas, ao passo que a queda acentuada do campo de tensões abaixo da superfície sugere que a ponta das trincas mais longas se localiza em uma zona nominalmente elástica. Outro fator de influência é a própria micro estrutura do material. Os grãos que compõem o material podem se comportar como barreiras à formação de bandas de cisalhamento e provocar retardos na propagação da trinca.

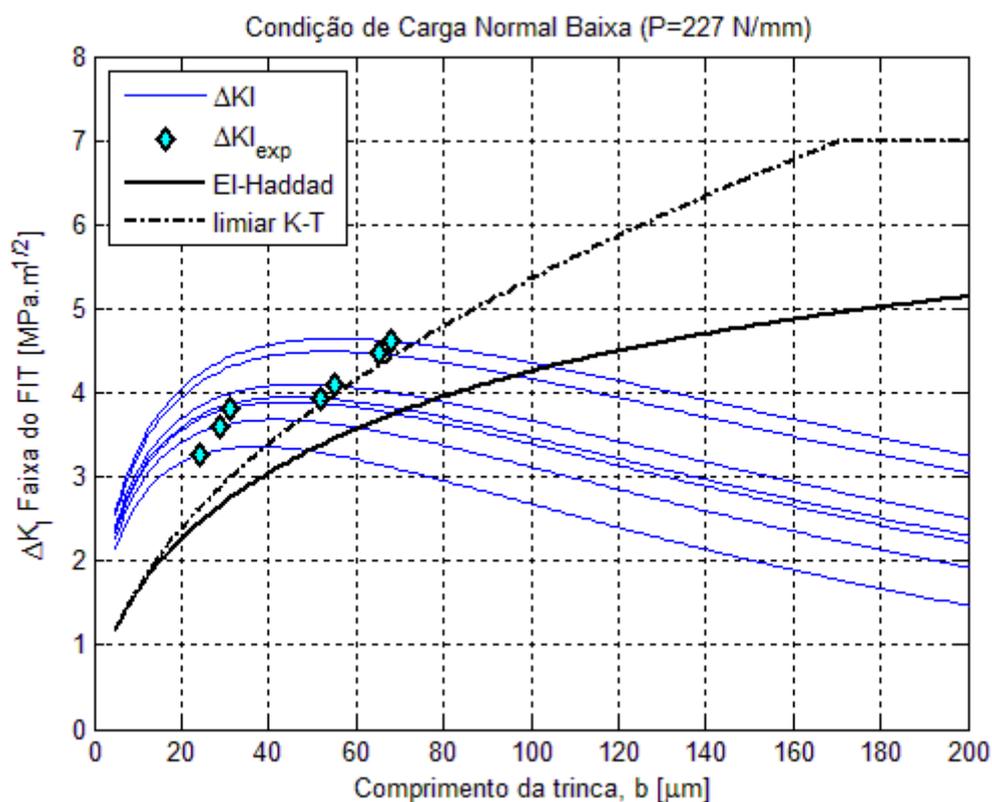


Figura 5.2 - Faixa de FIT ΔK_I contra o diagrama K-T e a curva Limiar de El-Haddad ($P = 227 \text{ N/mm}$)

Ao analisar a Figura 5.2 pode ser observado que os valores para estimativa do tamanho das trincas paradas utilizando o limiar de K-T apresentam boa correlação entre os dados experimentais indicando que estimativas razoavelmente podem ser realizadas se apenas o valor de ΔKI for contabilizado e utilizado como grandeza dominante do processo. Como mostrado na seção 4.3, o cálculo da distribuição de discordâncias considerando apenas o modo I traz uma série de simplificações ao modelo, tornando a implementação computacional do método muito mais fácil e rápida em comparação modelo para trincas inclinadas.

5.2.2. Pressão Normal alta

Ao avaliar os resultados onde a carga normal foi de 540 N/mm é percebido que tanto o uso do diagrama de Kitagawa-Takahashi, quanto limiar de El-Haddad produziram resultados insatisfatórios, onde o último se mostrou ainda mais discrepante, exibindo erros superiores a 100%.

Tabela 5.4- Resultados Trinca Perpendicular a Superfície e ΔK_I ($P = 540N/mm$)

<i>Resultados Trinca Perpendicular a Superfície e ΔK_I</i>								
<i>Carga Normal Alta 540 N/mm</i>								
Q	b_{exp}	b_{EH}	b_{KT}	$\Delta K_{I_{Exp}}$	$\Delta K_{I_{EH}}$	$\Delta K_{I_{KT}}$	$erro_{EH}$	$erro_{KT}$
N/mm	μm			$MPa\sqrt{m}$			$\%$	
206	-	-	-	-	-	-	-	-
242	14	102	242	4,29	4,27	4,72	626	458
243	28	103	243	4,95	4,28	4,75	267	179
278	77	139	278	5,74	4,70	5,39	80	31
280	61	141	280	5,94	4,72	5,43	131	67
282	52	144	282	6,02	4,73	5,45	178	100
283	75	146	283	5,90	4,74	5,48	94	39

Como relatado por Fouvry et al. (2007), a discrepância nos resultados para pressão mais alta não está intimamente ligada ao diagrama K-T, mas sim na metodologia utilizada para calcular o campo de tensões e os valores de ΔK experimentais fundamentada num comportamento elástico do material. Embora os erros apresentados na simplificação ao se utilizar puramente o modo I de propagação e supor um crescimento perpendicular da trinca tenham sido elevados, os resultados foram muito próximos ao obtidos ao se utilizar o modo misto de propagação (ΔK_{eff}) e considerar a inclinação experimental.

A Figura 5.3 exhibe graficamente o comportamento relatado na análise da Tabela 5.4. Os pontos em amarelo indicam o valor da faixa do FIT no ponto equivalente ao comprimento medido de trincas paradas.

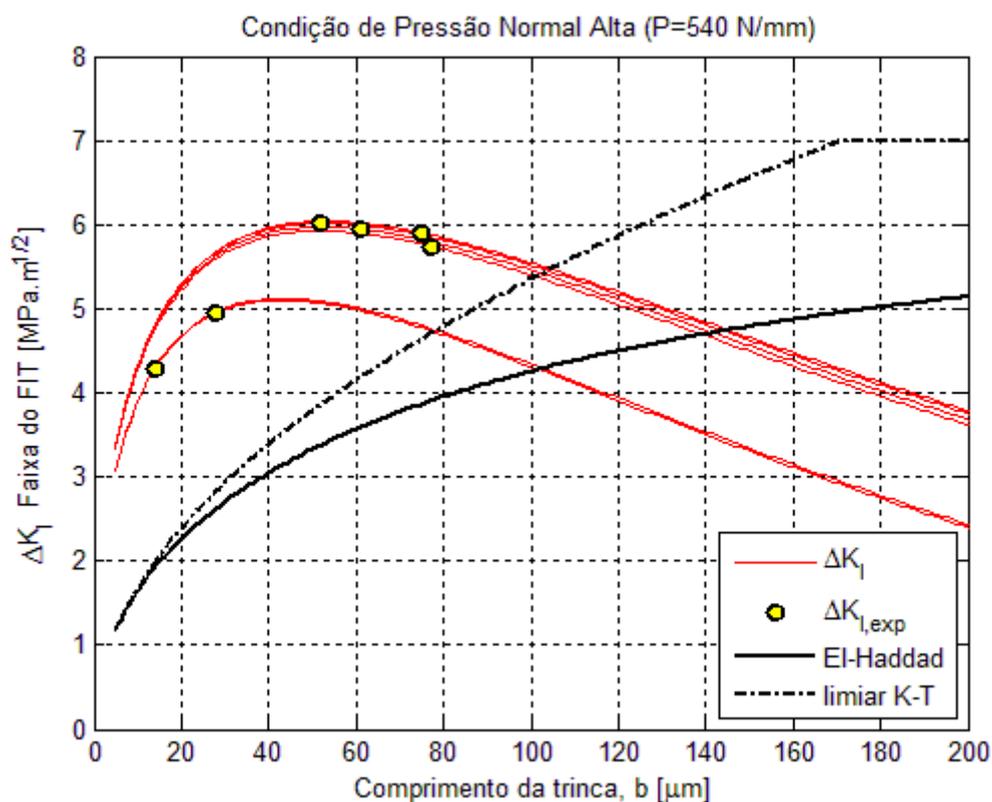


Figura 5.3-Amplitude de FIT ΔKI contra a diagrama K-T e a curva Limiar de El-Haddad ($P = 540 \text{ N/mm}$)

Nota-se que os resultados para cargas tangenciais elevadas, onde as trincas param com tamanhos maiores, há uma pequena redução nos efeitos de plasticidade na ponta da trinca. No entanto, o impacto da plasticidade se mostrou tão generalizado que, mesmo nestes casos, erros exibidos são sempre superiores a 30%. Assim, a aplicação de modelos elasto-plásticos podem trazer ganhos significativos na previsão do tamanho de trincas paradas em condições de carga mais severas, porém, a dificuldade de se trabalhar com modelos complexos, cujas propriedades materiais são de difícil obtenção, e o custo computacional envolvido podem não tornar essa alternativa tão atrativa.

Um resumo dos resultados para as duas condições de carga normal é obtido confrontando os resultados dos valores de $\Delta K_{I,exp}$ contra as duas curvas limiares de propagação exibidas na Figura 5.4. Os subscritos LP e HP se referem aos ensaios sobre carga normal mais baixa e mais elevada, respectivamente. Nesse gráfico a diferença de adequação da metodologia aos resultados experimentais obtidos para os casos de pressão normal mais alta e mais baixa pode ser visualizada.

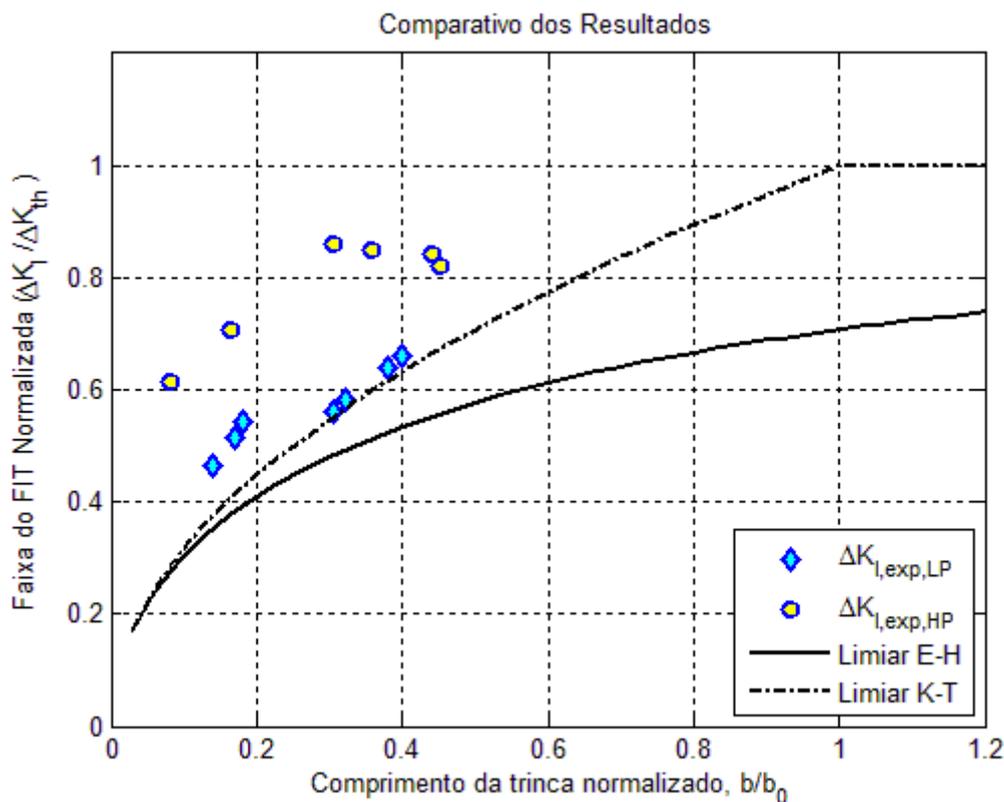


Figura 5.4- Diagrama comparativo normalizado $\Delta K_{I,exp} \times b$, incluindo todas as condições de carga

5.3. Resultados para previsão de parada de trincas curtas considerando modo misto e 30°

Nos experimentos realizados por Fouvry, et. al (2007), não apenas os comprimentos em que as trincas pararam de crescer foram medidos, mas também o ângulo preferencial de propagação foi determinado. Assim, é possível avaliar a evolução da faixa do FIT efetivo, ΔK_{eff} , considerando os modos I e II de abertura da trinca na direção propagação. Esse procedimento permite uma avaliação mais realista do comportamento trinca, pois, ao se utilizar o método de distribuição de discordâncias, o campo de tensões a ser anulado na face da trinca é mais próximo do valor real experimentado. Os resultados exibidos nas tabelas Tabela 5.5 e 5.6 obtidas pela avaliação da evolução de ΔK_{eff} calculado para trincas se propagando a uma angulação $\theta = 30^\circ$, e traçado contra as curvas limiariares de K-T e de E-H.

5.3.1. Pressão Normal Baixa

Os resultados para a angulação $\theta = 30^\circ$, Tabela 5.5, mostram comportamento muito similar àquele observado ao considerar trinca perpendicular em modo I. Os erros percentuais observados foram apenas ligeiramente menores que no caso anteriormente estudado, isso indica que o uso da trinca perpendicular à superfície em modo I de abertura realmente se torna uma boa estimativa do comportamento de trincas curtas submetidas ao *fretting*, onde a direção de propagação não é previamente conhecida.

Tabela 5.5- Resultados Trinca oblíqua a 30° e modo misto ($P = 227N/mm$)

<i>Resultados Trinca a 30° do eixo perpendicular a superfície e ΔK_{eff}</i>								
<i>Carga Normal Baixa $P= 227 N/mm$</i>								
Q	b_{exp}	b_{EH}	b_{KT}	$\Delta K_{eff,exp}$	$\Delta K_{eff,EH}$	$\Delta K_{eff,KT}$	<i>erro_{EH}</i>	<i>erro_{KT}</i>
<i>N/mm</i>	<i>μm</i>			<i>$MPa\sqrt{m}$</i>			<i>%</i>	
90	0	-	-	-	-	-	-	-
98	0	-	-	-	-	-	-	-
126	24	44	36	3,20	3,20	3,25	85	52
137	29	56	44	3,53	3,46	3,55	92	53
144	31	62	49	3,73	3,63	3,74	101	58
146	52	65	50	3,79	3,68	3,80	24	-4
151	55	71	54	3,94	3,80	3,94	30	-1
164	65	90	65	4,31	4,12	4,31	39	-1
169	68	99	69	4,47	4,25	4,46	46	2

Na Tabela 5.5 pode ser notado tanto nos ensaios onde a carga Q aplicada é menor, quanto nos ensaios onde a carga tangencial foi elevada uma melhor correlação entre o tamanho previsto pelo limiar K-T e o tamanho experimental da trinca parada, onde o erro relativo se mostrou inferior a 4%. Nestes mesmos casos, uso da curva limiar de E-H, de um modo geral, sofreu uma queda no erro relativo, mas os erros ainda se situam entre 24 e 46%. Para as situações de cargas tangenciais menores, onde as trincas são muito pequenas, erros superiores a 50% são observado ao aplicar ambos os limiares.

A Figura 5.5 ilustra o comportamento conservador para as trincas que pararam em tamanhos inferiores a $35\mu m$. Uma correlação quase perfeita é observada para trincas paradas em tamanhos superiores a $50\mu m$. A proximidade entre as estimativas geradas

pelas duas abordagens, uma considerando apenas a faixa ΔK_I e trinca perpendicular e a outra utilizando ΔK_{eff} e angulação $\theta = 30^\circ$ corrobora a ideia de dominância do modo I de propagação da trinca, indicando ser esta uma boa aproximação para o comportamento da propagação de trincas curtas sob condições de *fretting*.

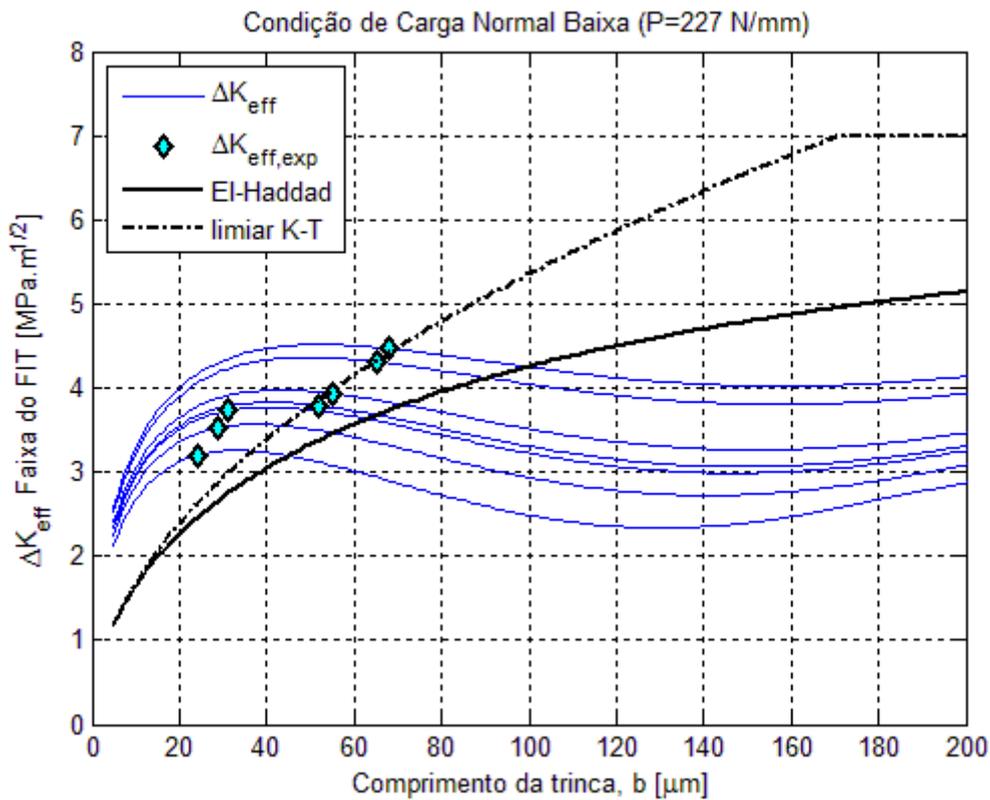


Figura 5.5 Amplitude de FIT ΔK_{eff} contra a diagrama K-T e a curva Limiar de El-Haddad, para trinca a 30° do eixo perpendicular à superfície ($P = 227N/mm$)

5.3.2. Pressão Normal alta

Como evidenciado na Tabela 5.6 o uso da faixa do FIT efetivo para um ângulo de 30° na condição de carga normal mais elevada forneceu erros relativamente inferiores aos obtidos anteriormente, onde se considerou a trinca perpendicular à superfície. Entretanto, não há uma melhora significativa na correlação entre os valores de b_{est} e de b_{exp} , onde os erros encontrados ao aplicar as curvas limiaries se situam acima dos 25%.

Tabela 5.6-Resultados Trinca oblíqua a 30° do eixo perpendicular à Superfície e ΔK_{eff} ($P=540N/mm$)

Resultados Trinca a 30° do eixo perpendicular a superfície e ΔK_{eff}								
Carga Normal Alta 540 N/mm								
Q	b_{exp}	b_{EH}	b_{KT}	$\Delta K_{eff,exp}$	$\Delta K_{eff,EH}$	$\Delta K_{eff,KT}$	$erro_{EH}$	$erro_{KT}$
N/mm	μm			$MPa\sqrt{m}$			%	
206	0	-	-	-	-	-	-	-
242	14	88	70	4,26	4,10	4,51	530	401
243	28	89	71	4,87	4,10	4,51	219	155
278	77	123	92	5,41	4,52	5,13	60	19
280	61	125	93	5,70	4,55	5,17	105	52
282	52	128	94	5,82	4,57	5,21	145	80
283	75	129	95	5,59	4,58	5,22	72	27

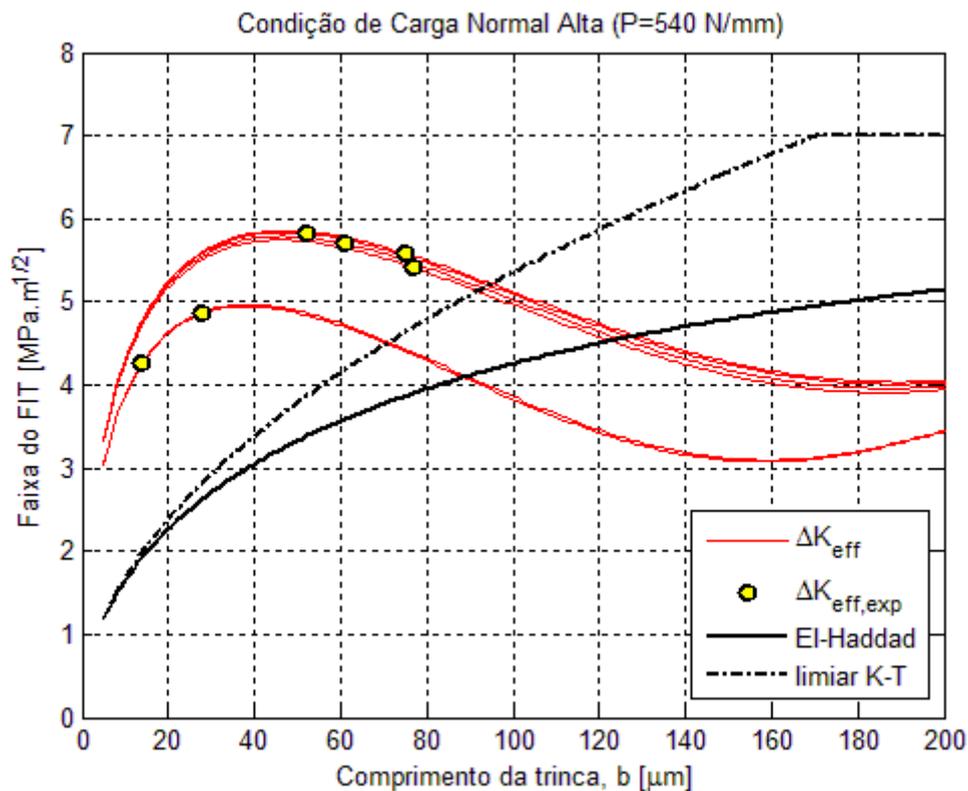


Figura 5.6- Amplitude de FIT ΔK_{eff} contra a diagrama K-T e a curva Limiar de El-Haddad ($P = 540 N/mm$)

É interessante observar que as cargas tangenciais escolhidas para os testes poderiam ser mais bem distribuídas, realizando-se incrementos de igual magnitude, bem como um maior número de ensaios. Os experimentos realizados com carga de normal elevada foram realizados dois grupos, um primeiro com $Q=242$ e 243 N/mm, e segundo com

quatro ensaios com carga Q entre 278 e 282N/mm. Dessa maneira, os valores calculados da faixa do FIT em função da evolução do comprimento da trinca revelam dois conjuntos de curvas muito próximas, logo, condições de carga tangencial a em regimes intermediários, por exemplo, $Q=265$ N/mm poderiam ser exploradas afim de avaliar melhor o comportamento da metodologia.

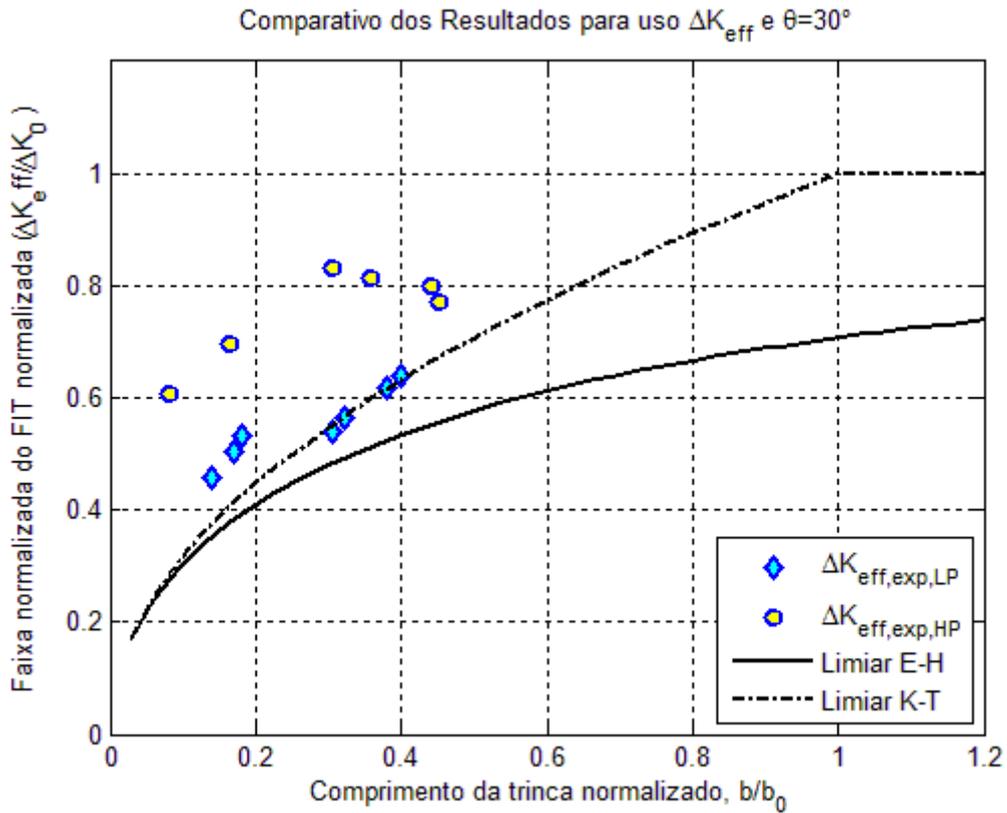


Figura 5.7- Diagrama comparativo normalizado $\Delta K_{eff,exp} \times b$, incluindo todos os casos

5.4. Resultados para previsão dos ângulos de nucleação e propagação das trincas utilizando o modelo de plano crítico

Para validar a metodologia proposta no presente trabalho foram utilizados dados experimentais extraídos da literatura, Fouvry et. al (2007), nos quais o ângulo de propagação das trincas foi medido e apresentou o valor de $\theta = 30^\circ \pm 3^\circ$.

Entretanto, em outras condições de carregamento a angulação do plano preferencial pelo qual a trinca irá se propagar é desconhecido, principalmente quando há presença da carga remota de fadiga. Assim, nem sempre é possível realizar testes para mensurar a direção de crescimento das trincas previamente, tornando muito valoroso para aplicação da metodologia de predição do tamanho de parada de trincas curtas que se utilize alguma técnica capaz de realizar uma estimativa do ângulo médio do plano de propagação onde o valor de ΔK deve ser avaliado.

A aplicação da metodologia descrita na seção 4.7 para predição do ângulo de crescimento foi realizada para cada uma das condições de carregamento em dez pontos equidistantes no eixo y , desde a raiz da extremidade anterior do contato até a distância crítica, $L = b_0/2$. Os dados são apresentados nas tabelas Tabela 5.7 e Tabela 5.10. A primeira exhibe os resultados para a condição de força normal mais baixa, $270 N/mm$, a segunda para a condição de força normal mais alta, $540 N/mm$. Em cada um dos casos são avaliadas todas as condições de carga tangencial.

O ângulo ϕ , que representa a inclinação entre o vetor normal ao plano crítico e o eixo z , resultou sempre em 90° , dado que o problema ocorre sob estado plano de deformação. Na tabela acima, θ_c representa ângulo, no plano xy , entre o vetor unitário perpendicular ao plano da máxima tensão cisalhante e o eixo x . Observa-se que o ângulo θ do plano crítico é de 45° na extremidade anterior do contato, onde se inicia o processo de nucleação da trinca. Isso se justifica pela presença apenas da componente de tensão σ_{xx} neste ponto, caracterizando um estado de tensão uniaxial cuja amplitude da tensão cisalhante é igual à máxima tensão normal atuante, ou seja, $\tau_a = \sigma_{n,máx}$.

Tabela 5.7- Ângulo do vetor normal ao plano crítico em função da profundidade y , a partir da extremidade anterior do contato $x = -a$ e da carga tangencial de *fretting*.

Ângulo θ_c entre o vetor normal ao plano crítico e o eixo x ($P=227N/mm$)							
Q [N/mm]	126	137	144	146	151	164	169
y [mm]	$theta_c1$ [graus]						
0	45	45	45	45	45	45	45
8,5	36	36	36	36	36	37	37
17,1	32	32	33	33	32	34	33
25,6	29	30	30	29	30	30	30
34,1	27	27	28	28	28	28	28
42,6	25	25	26	26	26	27	27
51,2	23	23	24	24	24	24	24
59,7	21	22	22	22	23	23	23
68,2	19	21	21	21	21	22	22
76,8	19	19	20	19	19	21	21
85,3	17	17	18	19	19	19	20
Média de θ	26,6	27,0	27,5	27,5	27,5	28,2	28,2

A partir do ponto de nucleação, para todas as amplitudes de carga tangencial aplicadas, nota-se uma redução gradativa na angulação entre plano crítico. Esta redução é mais acentuada na região próxima a superfície de contato. Em $y = b_0/2$, que é a distância crítica definida pelo método do ponto, a inclinação do plano crítico é de aproximadamente 20° . A partir dos valores expressos na Tabela 5.7 construiu-se o gráfico apresentado na Figura 5.8 onde são traçados os resultados do ângulo θ_c contra a profundidade y em relação à superfície, para a carga $P = 227N/mm$ e para os diferentes valores de carga tangencial Q .

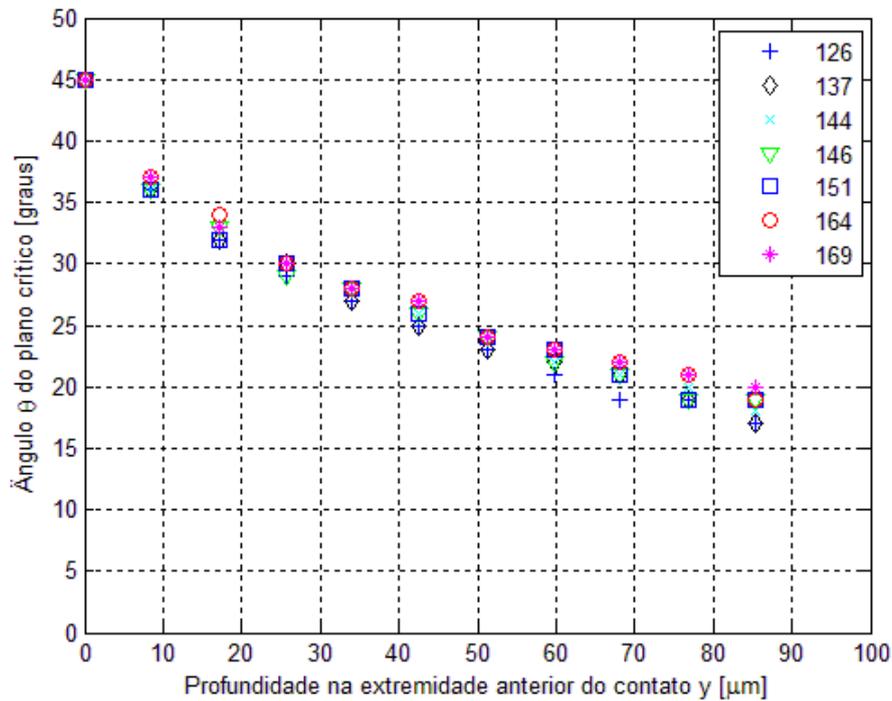


Figura 5.8- Variação do ângulo θ_c do vetor normal ao plano crítico em função da profundidade $y = [0, b_0/2]$ para cada uma das cargas tangenciais e $P = 227 N/mm$

Os valores dos parâmetros que definem o plano crítico, amplitude da tensão cisalhante e da máxima tensão normal, são expressos na Tabela 5.8. É possível observar que a amplitude da tensão cisalhante no plano crítico cai em aproximadamente um terço na distância crítica em relação ao valor na extremidade anterior do contato, e que os acréscimos na carga tangencial provocam aumentos praticamente proporcionais na amplitude da tensão cisalhante. A máxima tensão normal atuando sobre o plano crítico sofre uma queda ainda mais significativa quando comparamos o valor experimentado na distância crítica com o encontrado em $(-a, 0)$, sofrendo redução em até oito vezes quando $Q = 126 N/mm$.

Tabela 5.8- Máxima Amplitude da tensão cisalhante e Tensão normal máxima atuando sobre o plano crítico na condição de carga normal baixa (P=227N/mm)

<i>Máxima Amplitude da Tensão Cisalhante tensão normal máxima atuando no plano crítico (P=227N/mm)</i>														
Q [N/mm]	126		137		144		146		151		164		169	
y [μ m]	τ_a	$\sigma_{n,máx}$												
	MPa		MPa		MPa		MPa		MPa		MPa		MPa	
0	322	321	336	335	344	344	347	346	353	352	368	367	373	372
8,5	235	218	248	235	257	245	259	248	265	256	279	266	285	272
17,1	205	178	218	196	226	201	229	204	234	217	248	223	254	237
25,6	184	149	197	162	205	173	207	181	213	183	227	202	232	210
34,1	168	124	180	141	188	148	190	151	196	158	210	177	215	184
42,6	154	104	167	121	174	128	177	131	182	138	196	153	201	160
51,2	143	88	155	104	163	112	165	115	170	122	183	141	188	148
59,7	133	74	145	88	152	98	154	101	160	105	173	123	178	130
68,2	125	62	136	75	143	84	145	87	150	94	163	109	168	115
76,8	117	50	128	64	135	72	137	77	142	83	155	96	160	102
85,3	111	41	121	55	128	63	130	64	135	71	147	87	152	91

Considerando que o fenômeno da fadiga não é controlado pelo estado de tensão em um único ponto, mas sim pela solicitação em uma zona de processo, propõe-se aqui avaliar o ângulo θ_c médio a partir dos ângulos calculados na superfície da extremidade anterior do contato e L . A Tabela 5.9. relata o valor de $\bar{\theta}_c$ para cada condição de carga.

Tabela 5.9- Resultados para média aritmética dos ângulos entre $y = 0$ a $y = b_0/2$, para cada condição de carga tangencial

<i>Ângulo entre o vetor normal ao plano crítico e o eixo X (P=227N/mm)</i>							
Q [N/mm]	126	137	144	146	151	164	169
<i>Média de θ_c</i>	26,6	27,0	27,5	27,5	27,5	28,2	28,2

Baseado na observação de que a distância crítica representa um comportamento médio do material na zona de processo, não é incorreto esperar que a média aritmética dos ângulos dos vetores normais aos planos críticos, calculados entre o ponto de nucleação até a distância crítica, represente a indicação da orientação de um “plano preferencial” propício à propagação da trinca, e que este seja próximo ao observado experimentalmente. De fato, o que se observa é uma boa correlação entre o ângulo de propagação medido experimentalmente e o ângulo fictício proposto, $\bar{\theta}_c$, considerado como uma representação média do plano crítico na zona de processo. Observa-se que os valores $\bar{\theta}_c$ estão praticamente inseridos da faixa de $30 \pm 3^\circ$, representando a variação média dos dados experimentais, e fornecem uma boa estimativa para orientação do plano de propagação.

Os mesmo procedimentos anteriores foram realizados para os ensaios conduzidos com carga normal mais alta e sumarizados na Tabela 5.10.

Tabela 5.10-Ângulo do vetor normal ao plano crítico em função da profundidade y , a partir da extremidade anterior do contato $x=-a$ e da carga tangencial de fretting

<i>Ângulo entre o vetor normal ao plano crítico e o eixo X (P=540N/mm)</i>						
<i>Q</i> <i>[N/mm]</i>	242	243	278	280	282	283
<i>y[mm]</i>						
0	45	45	45	45	45	44
8,5	37	36	37	37	37	37
17,1	33	33	34	34	34	34
25,6	31	31	32	31	32	32
34,1	28	29	30	29	29	30
42,6	27	27	28	28	28	28
51,2	24	25	26	26	26	26
59,7	24	23	25	24	24	24
68,2	23	23	24	23	24	24
76,8	21	22	23	23	23	22
85,3	20	21	22	22	22	22

O que se nota, é um comportamento completamente análogo ao exibido para carga normal mais baixa, porém, devido a maior magnitude das cargas aplicadas, é possível

verifica-se que o gradiente do campo de tensões menos intenso, ver Tabela 5.11, onde, tanto as cargas, quanto os ângulo do plano crítico possuem variação menor do que os observados para a carga $P = 227N/mm$, nos mesmos pontos analisados.

Tabela 5.11- Máxima Amplitude da tensão cisalhante e Tensão normal máxima atuando sobre o plano crítico na condição de carga normal baixa ($P=540N/mm$)

<i>Máxima Amplitude da Tensão Cisalhante Atuando no plano crítico ($P=227N/mm$)</i>												
Q N/mm	242		243		278		280		282		283	
$y[mm]$	τ_a	$\sigma_{n,máx}$										
	MPa	MPa										
0	446	445	447	446	478	477	480	479	482	481	482	498
8,5	337	315	337	326	368	354	370	356	371	358	372	359
17,1	298	267	299	268	329	299	330	301	332	303	333	304
25,6	271	223	271	224	301	256	302	266	304	261	305	262
34,1	249	196	250	192	279	225	280	234	282	236	283	230
42,6	231	165	232	166	260	199	262	201	264	204	264	205
51,2	215	147	216	144	244	178	246	180	248	182	248	183
59,7	202	121	203	125	231	155	232	162	233	164	234	165
68,2	190	102	191	103	218	136	220	142	221	140	222	141
76,8	180	88	181	87	207	119	209	121	210	123	211	127
85,3	171	73	171	73	197	104	199	106	200	108	201	109

Para os ensaios conduzidos sobre pressão normal elevada foi calculada a média dos ângulos ao longo da linha entre a superfície da extremidade anterior do contato e a distância crítica, mostrada na Tabela 5.12.

Tabela 5.12 - Resultados para média aritmética dos ângulos entre $y = 0$ a $y = b_0/2$, para cada condição de carga tangencial

<i>Ângulo entre o vetor normal ao plano crítico e o eixo X ($P=540N/mm$)</i>						
$Q [N/mm]$	242	243	278	280	282	283
<i>Média de θ_c</i>	28,5	28,6	29,6	29,3	29,5	29,4

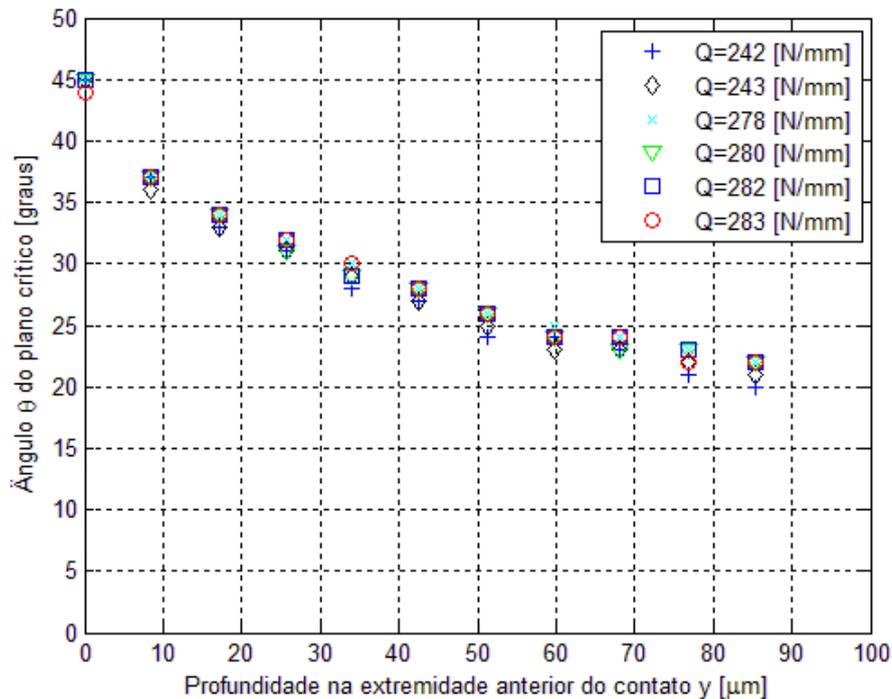


Figura 5.9- Variação do ângulo θ_c do vetor normal ao plano crítico em função da profundidade $y = [0, b_0/2]$ para cada uma das cargas tangenciais e $P=227$ N/mm

Baseado na análise acima são propostas mais três avaliações do tamanho das trincas curtas paradas em três ângulos previamente definidos:

- i. $\theta = 45^\circ$. – Ângulo que representa o plano crítico no ponto de nucleação da trinca (extremidade anterior do contato).
- ii. $\theta = \theta_c(-a, L)$ – Ângulo do plano crítico na distância crítica a partir da extremidade anterior do contato.
- iii. $\theta = \bar{\theta}_c$ – Ângulo médio representativo do plano crítico na zona de processo.

Assim, será possível avaliar como os resultados se comportam para cada tipo de predição do ângulo de propagação e avaliar a aplicabilidade de cada conceito.

5.4.1. Resultados para previsão do tamanho de parada de trincas curtas utilizando os ângulos de propagação indicados pelo Plano Crítico

A partir da análise de plano crítico, a faixa do fator intensidade foi recalculada considerando os ângulos propostos e novas estimativas foram realizadas para cada condição de carregamento. A apresentação dos resultados é realizada nas tabelas Tabela 5.13 e Tabela 5.14.

Tabela 5.13- Resultados para estimativas do tamanho das trincas paradas e utilizando os ângulos sugeridos pela análise de plano crítico e condição de carga normal baixa ($P = 227N/m$).

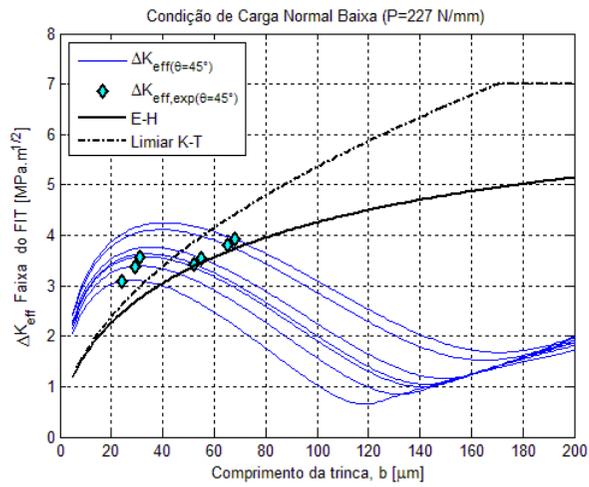
<i>Resultados Carga Normal Baixa 227 N/mm</i>								
<i>$\theta = 45^\circ$ – Ângulo que representa o plano crítico no ponto de nucleação da trinca</i>								
<i>Q</i>	<i>b_{exp}</i>	<i>b_{EH}</i>	<i>b_{KT}</i>	<i>ΔKI_{Exp}</i>	<i>ΔKI_{EH}</i>	<i>ΔKI_{KT}</i>	<i>erro_{EH}</i>	<i>erro_{KT}</i>
<i>N/mm</i>	<i>μm</i>			<i>$MPa\sqrt{m}$</i>			<i>%</i>	
126	24	39	33	3,09	3,02	3,08	61	38
137	29	47	39	3,39	3,23	3,35	61	34
144	31	51	43	3,57	3,38	3,51	65	39
146	52	53	44	3,43	3,40	3,56	3	-15
151	55	57	47	3,55	3,51	3,68	3	-15
164	65	68	56	3,81	3,73	3,97	5	-14
169	68	72	58	3,92	3,82	4,10	7	-15
<i>$\theta = \theta_c (-a, L)$ – Ângulo do plano crítico na distância crítica a partir da extremidade anterior do contato</i>								
<i>Q</i>	<i>b_{exp}</i>	<i>b_{EH}</i>	<i>b_{KT}</i>	<i>ΔKI_{Exp}</i>	<i>ΔKI_{EH}</i>	<i>ΔKI_{KT}</i>	<i>erro_{EH}</i>	<i>erro_{KT}</i>
<i>N/mm</i>	<i>μm</i>			<i>$MPa\sqrt{m}$</i>			<i>%</i>	
126	24	60	44	3,33	3,58	3,56	150	85
137	29	80	54	3,70	3,96	3,94	177	88
144	31	93	60	3,90	4,16	4,15	199	94
146	52	94	60	4,15	4,17	4,17	80	16
151	55	108	66	4,32	4,36	4,35	97	19
164	65	186	81	4,78	5,06	4,84	186	25
169	68	258	86	4,92	5,47	4,97	279	26
<i>$\theta = \bar{\theta}_c$ – Ângulo médio representativo do plano crítico na zona de processo.</i>								
<i>Q</i>	<i>b_{exp}</i>	<i>b_{EH}</i>	<i>b_{KT}</i>	<i>ΔKI_{Exp}</i>	<i>ΔKI_{EH}</i>	<i>ΔKI_{KT}</i>	<i>erro_{EH}</i>	<i>erro_{KT}</i>
<i>N/mm</i>	<i>μm</i>			<i>$MPa\sqrt{m}$</i>			<i>%</i>	
126	24	48	38	3,23	3,26	3,31	99	57
137	29	59	45	3,56	3,54	3,62	103	57
144	31	67	50	3,76	3,70	3,81	116	61
146	52	69	52	3,86	3,76	3,86	33	0
151	55	76	56	4,02	3,89	4,01	38	1
164	65	96	67	4,39	4,21	4,38	48	3
169	68	107	71	4,55	4,35	4,53	58	5

Ao calcular os valores de b_{est} e $\Delta K_{eff,est}$ utilizado os ângulos de propagação da análise de plano crítico e comparar àqueles computados utilizando o ângulo de propagação medido experimentalmente, verifica-se que a utilização de $\theta_c = 45^\circ$, ângulo do vetor normal ao plano crítico na extremidade anterior do contato, fornece resultados não conservadores, subestimando tanto a extensão das trincas paradas, quanto o valor da faixa do FIT efetivo atuando na ponta da trinca. Apesar do processo de iniciação da trinca ocorrer neste local, há um rápido decaimento no valor da angulação do plano crítico à medida que a trinca evolui para o interior da região de contato, ver Figura 5.8. Dessa maneira este ângulo não se mostra muito representativo ao processo em análise.

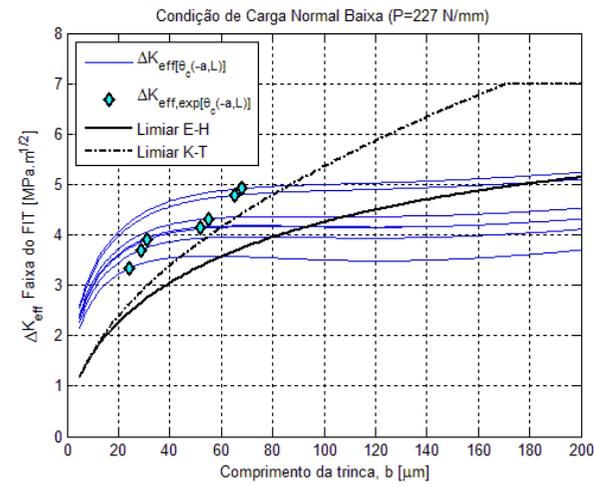
Ao se avaliar os resultados obtidos utilizando ângulo do plano crítico distância crítica, ponto $(-a, L)$, é notado um conservadorismo elevado, principalmente no que se refere às estimativas para as trincas com menos de $50\mu m$ de extensão. Os erros envolvidos na estimativa do tamanho das trincas paradas para as trincas com extensões maiores que $50\mu m$, que para $\theta = 30^\circ$ eram inferiores a 5%, chegaram a 26%, indicando esse método de prever a direção de propagação da trinca é inadequado.

Um cenário bem mais promissor é apresentado pelas previsões realizadas utilizando o ângulo $\bar{\theta}_c$, o qual representa um comportamento médio na zona de processo. Como a variação entre $\bar{\theta}_c$ se mostrou muito próxima ao valor da inclinação do plano de propagação experimentalmente medido, as estimativas realizadas por esta abordagem foram praticamente às mesmas observadas para $\theta = 30^\circ$.

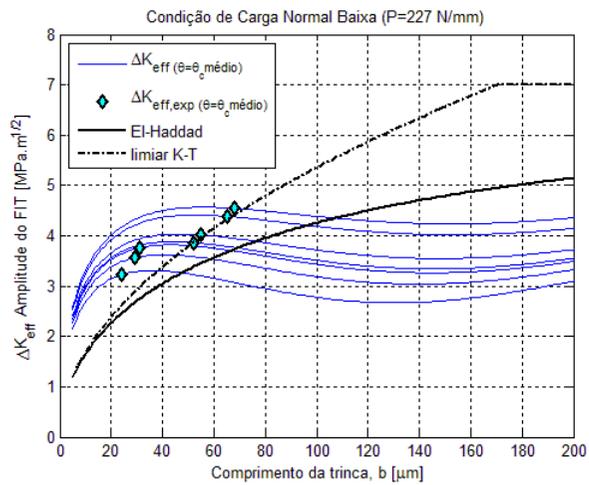
A Figura 5.10 (d) mostra um comparativo geral entre os valores da faixa de FIT experimental, ΔK_{exp} , fornecidas por cada um dos métodos desenvolvidos para a condição de carga normal $P = 227N/mm$. Nota-se que as metodologias utilizando a faixa do FIT calculada em modo I e trinca perpendicular, FIT efetivo e inclinação $\theta = 30^\circ$ e $\theta = \bar{\theta}_c$ forneceram resultados muito próximos, onde o primeiro se mostrou um pouco mais conservador. Para os casos onde o ângulo de inclinação $\theta = 45^\circ$ tanto a faixa do FIT efetivo experimental quanto o tamanho da trinca parada foram subestimados. Em contraponto, os resultados para $\theta = \theta_c(-a, L)$ superestimaram os valores de $\Delta K_{eff,exp}$ para os tamanhos das trincas paradas medidos experimentalmente.



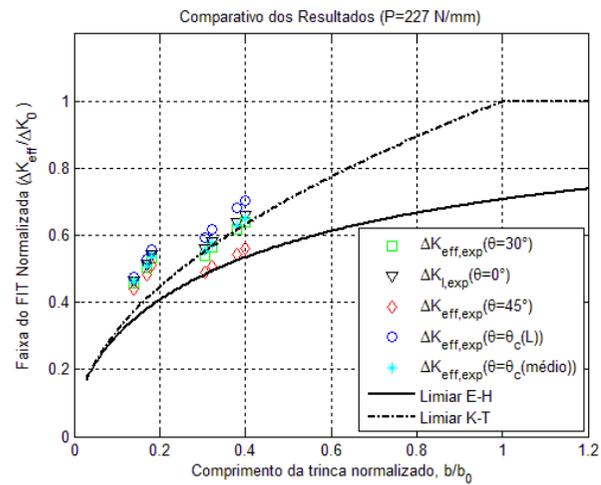
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.10 – Resultados das avaliações para carga normal baixa ($P = 227 \text{ N/mm}$) do tamanho das trincas curtas paradas para os três ângulos sugeridos na análise do plano crítico.

- (a) Evolução de $\Delta K_{eff} \times b$ para $\theta = 45^\circ$;
- (b) Evolução de $\Delta K_{eff} \times b$ para $\theta = \theta_c(-a, L)$, ângulo do plano crítico em $y = b_0/2$;
- (c) Evolução de $\Delta K_{eff} \times b$ para $\theta = \bar{\theta}_c$, médias dos ângulos de plano crítico ente $y = 0$ $y = b_0/2$;
- (d) Gráfico comparativo com os resultados fornecidos pelas diferentes abordagens utilizadas no cálculo do fator intensidade de tensão na ponta da trinca.

Ao se comparar os resultados das três diferentes formas de se estimar a direção preferencial de propagação das trincas, a utilização do ângulo $\bar{\theta}_c$ forneceu resultados mais coerentes apresentando erros inferiores na ordem de 5% para os ensaios utilizando carga normal inferior.

Para condição de carga normal superior $P = 540N/mm$ as estimativas de b_{est} e $\Delta K_{eff,est}$ calculadas utilizando os ângulos de propagação da análise de plano crítico com o ângulo $\theta_c = 45^\circ$, subestimou tanto a extensão das trincas paradas, quanto o valor da faixa do FIT efetivo atuando na ponta da trinca em relação aos resultados obtidos aplicando o ângulo experimentalmente medido.

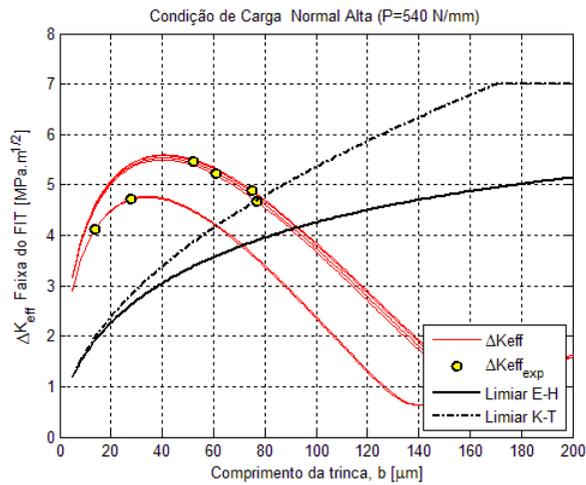
Os resultados obtidos utilizando $\theta_c(-a, L)$ para determinação do ΔK_{eff} se mostrou muito conservador dos métodos, onde os erros observados foram praticamente duas vezes maiores que os apresentados pelas estimativas realizadas com $\theta = 30^\circ$

As previsões realizadas utilizando o ângulo $\bar{\theta}_c$ apresentaram resultados muito parecidos aos obtidos considerando o ângulo experimental, $\theta_{exp}=30^\circ$. Como os dois ângulos, $\bar{\theta}_c$ e θ_{exp} , possuem valores muito próximos, os mesmo problemas de adequação da metodologia e divergência nos resultados para região sob ação de plasticidade observados utilizando apresentados nos resultados aplicando θ_{exp} ocorrem ao se utilizar $\theta = \bar{\theta}_c$.

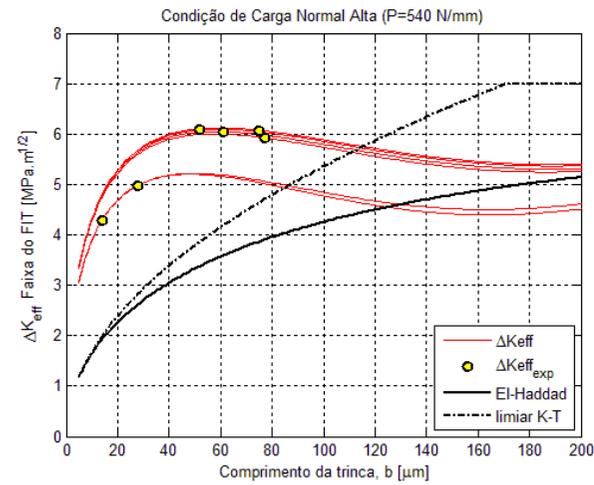
A Figura 5.11– Resultados das avaliações para carga normal alta ($P = 540 N/mm$) do tamanho das trincas curtas paradas para os três ângulos sugeridos na análise do plano crítico.(d) mostra um comparativo geral entre os métodos de determinação da faixa de FIT experimental, ΔK_{exp} . Nota-se que as metodologias utilizando a faixa do FIT calculada considerando modo I e trinca perpendicular, FIT efetivo e inclinação $\theta = 30^\circ$ e $\theta = \bar{\theta}_c$ forneceram resultados muito próximos, onde o primeiro se mostrou um pouco mais conservador. Para os casos onde o ângulo de inclinação foi considerado $\theta = 45^\circ$ e $\theta = \theta_c(-a, L)$, tanto a faixa do FIT efetivo experimental quanto o tamanho da trinca parada foram apresentaram erros elevados, sendo que a primeira subestimou os valores da faixa do FIT, enquanto o seguido os superestimou demasiadamente. Isso sugere que essas estimativas para o ângulo de propagação não são adequadas .

Tabela 5.14-- Resultados para estimativas do tamanho das trincas paradas e utilizando os ângulos sugeridos pela análise de plano crítico e condição de carga normal baixa ($P = 540N/m$).

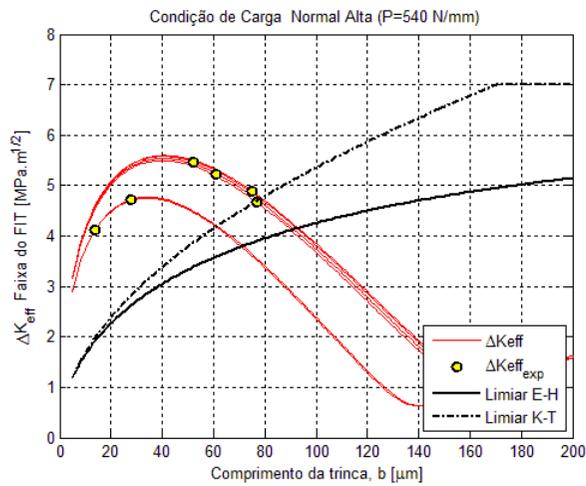
<i>Resultados Carga Normal Alta 540 N/mm</i>								
<i>$\theta = 45^\circ$. – Ângulo que representa o plano crítico no ponto de nucleação da trinca</i>								
<i>Q</i>	<i>b_{exp}</i>	<i>b_{EH}</i>	<i>b_{KT}</i>	<i>ΔKI_{Exp}</i>	<i>ΔKI_{EH}</i>	<i>ΔKI_{KT}</i>	<i>erro_{EH}</i>	<i>erro_{KT}</i>
<i>N/mm</i>	<i>μm</i>			<i>$MPa\sqrt{m}$</i>			<i>%</i>	
242	14	71	61	4,12	3,77	4,17	409	337
243	28	71	61	4,72	3,80	4,20	155	119
278	77	90	76	4,66	4,11	4,71	17	-2
280	61	92	77	5,23	4,13	4,72	50	26
282	52	93	78	5,48	4,15	4,74	78	50
283	75	93	78	4,90	4,18	4,77	24	4
<i>$R\theta = \theta_c(-a, L)$ – Ângulo do plano crítico na distância crítica a partir da extremidade anterior do contato</i>								
<i>Q</i>	<i>b_{exp}</i>	<i>b_{EH}</i>	<i>b_{KT}</i>	<i>ΔKI_{Exp}</i>	<i>ΔKI_{EH}</i>	<i>ΔKI_{KT}</i>	<i>erro_{EH}</i>	<i>erro_{KT}</i>
<i>N/mm</i>	<i>μm</i>			<i>$MPa\sqrt{m}$</i>			<i>%</i>	
242	14	130	86	4,29	4,61	4,98	827	514
243	28	124	85	4,97	4,55	4,94	343	203
278	77	222	111	5,93	5,33	5,64	188	44
280	61	223	113	6,05	5,39	5,68	266	85
282	52	223	114	6,09	5,44	5,73	329	119
283	75	224	115	6,07	5,47	5,75	199	54
<i>$\theta = \bar{\theta}_c$ – Ângulo médio representativo do plano crítico na zona de processo.</i>								
<i>Q</i>	<i>b_{exp}</i>	<i>b_{EH}</i>	<i>b_{KT}</i>	<i>ΔKI_{Exp}</i>	<i>ΔKI_{EH}</i>	<i>ΔKI_{KT}</i>	<i>erro_{EH}</i>	<i>erro_{KT}</i>
<i>N/mm</i>	<i>μm</i>			<i>$MPa\sqrt{m}$</i>			<i>%</i>	
242	14	92	72	4,26	4,15	4,55	554	417
243	28	93	72	4,88	4,15	4,57	231	159
278	77	124	93	5,43	4,55	5,14	61	20
280	61	129	94	5,72	4,58	5,21	111	54
282	52	130	95	5,84	4,60	5,23	150	83
283	75	132	96	5,62	4,61	5,25	76	28



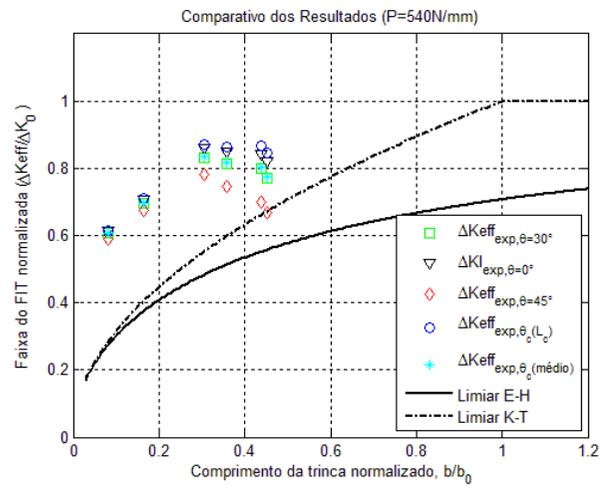
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.11– Resultados das avaliações para carga normal alta ($P = 540 \text{ N/mm}$) do tamanho das trincas curtas paradas para os três ângulos sugeridos na análise do plano crítico.

- (a) Evolução de $\Delta K_{eff} \times b$ para $\theta = 45^\circ$;
- (b) Evolução de $\Delta K_{eff} \times b$ para $\theta = \theta_c(-a, L)$, ângulo do plano crítico em $y = b_0/2$;
- (c) Evolução de $\Delta K_{eff} \times b$ para $\theta = \bar{\theta}_c$, médias dos ângulos de plano crítico ente $y = 0$ $y = b_0/2$;
- (d) Gráfico comparativo com os resultados fornecidos pelas diferentes abordagens utilizadas no cálculo do fator intensidade de tensão na ponta da trinca.

5.5. Fator de Bazant

Em todos os casos avaliados notou-se uma boa adequação da curva limiar de Kitagawa-Takahashi aos dados experimentais, enquanto que o limiar de El-Haddad para crescimento de trincas curtas levou a resultados extremamente conservadores. Essa observação poderia sugerir erroneamente que em condições de *fretting* o uso da curva limiar de K-T é sempre mais indicado. Porém, como mostrado na sessão 4.6.2, Dini e Nowell (2006) mostraram o maior adequação ao introduzir a curva limiar de E-H para avaliar os mesmos conjuntos de dados utilizados por Araújo e Nowell (1999), onde as previsões foram realizadas utilizando o diagrama K-T como limiar de propagação. Cabe ressaltar que os ensaios avaliados por Dini foram conduzidos com espécimes fabricados em ligas de alumínio e de titânio, Al 4%Cu e Ti6Al4V, respectivamente, enquanto os ensaios aqui analisados foram realizados utilizando uma liga aço baixo carbono e com baixa resistência no caso do corpo de prova plano.

A aparente dicotomia entre os resultados evidenciados nos dois trabalhos esta intimamente ligada ao comportamento de trincas curtas no material empregado em cada caso. A curva limiar de El-Haddad pode ser entendida como um ajuste à zona de transição entre os regimes de trincas curtas e trincas longas, e sua forma foi proposta para melhor acomodar os dados experimentais nos quais sua pesquisa se baseou. Entretanto, esta é apenas uma das curvas possíveis para realizar o ajuste, indicando que uma forma mais geral poderia ajustar o grau de “sensibilidade” do material à transição de regime de crescimento de trincas. Bazant (1977) propôs o uso de um fator de ajuste γ aplicado à equação de E-H, tido como uma propriedade do material, o qual introduz uma flexibilidade do comportamento na zona de transição

$$\Delta K_{th}(b) = \Delta K_0 \left[1 + (b_0/b)^2 \right]^{-1/\gamma} \quad (5.1)$$

nota-se que quando $\gamma = 2$ a equação se resume àquela proposta por El-Haddad.

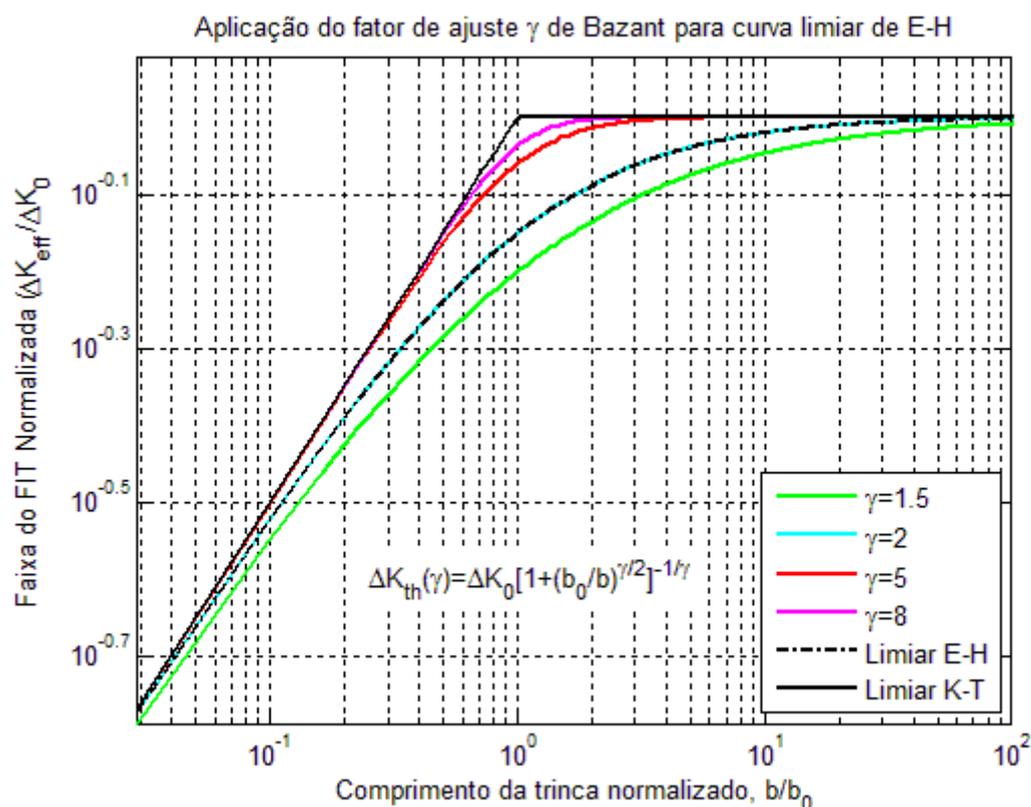


Figura 5.12- Transição entre o regime de transição entre os limiares de propagação de trincas curtas e longas em função da razão $\left(\frac{b_0}{b}\right)$ e do fator de ajuste γ

Pela equação 5.1 à medida que o fator γ aumenta o material torna-se mais sensível a transição, tendendo a se assumir comportamento próximo à curva limiar de K-T. Entretanto, um fator gama inferior a dois, indica que o material possui uma transição suave entre os dois regimes de propagação de trincas. A Figura 5.12 exemplifica alguns casos de como o fator de ajuste altera o comportamento do limiar de propagação em relação às curvas limiares de K-T e de E-H.

Como o fator de Bazant do aço utilizado por Fouvry et al. (2007) não é conhecido, os diagramas das figuras Figura 5.10 (d) e Figura 5.11(d) foram plotados novamente, apenas a título de comparação, introduzindo uma curva limiar com fator de Bazant $\gamma = 4$. Nota-se uma grande aproximação da curva limiar modificada à curva de K-T na zona onde os resultados experimentais se concentram, sem, no entanto, que uma transição muito aguda seja introduzida para trincas maiores. Assim, o modelo de limiar de propagação de trincas curtas mais indicado à fadiga por *fretting* é aquele que melhor corresponder às características do material.

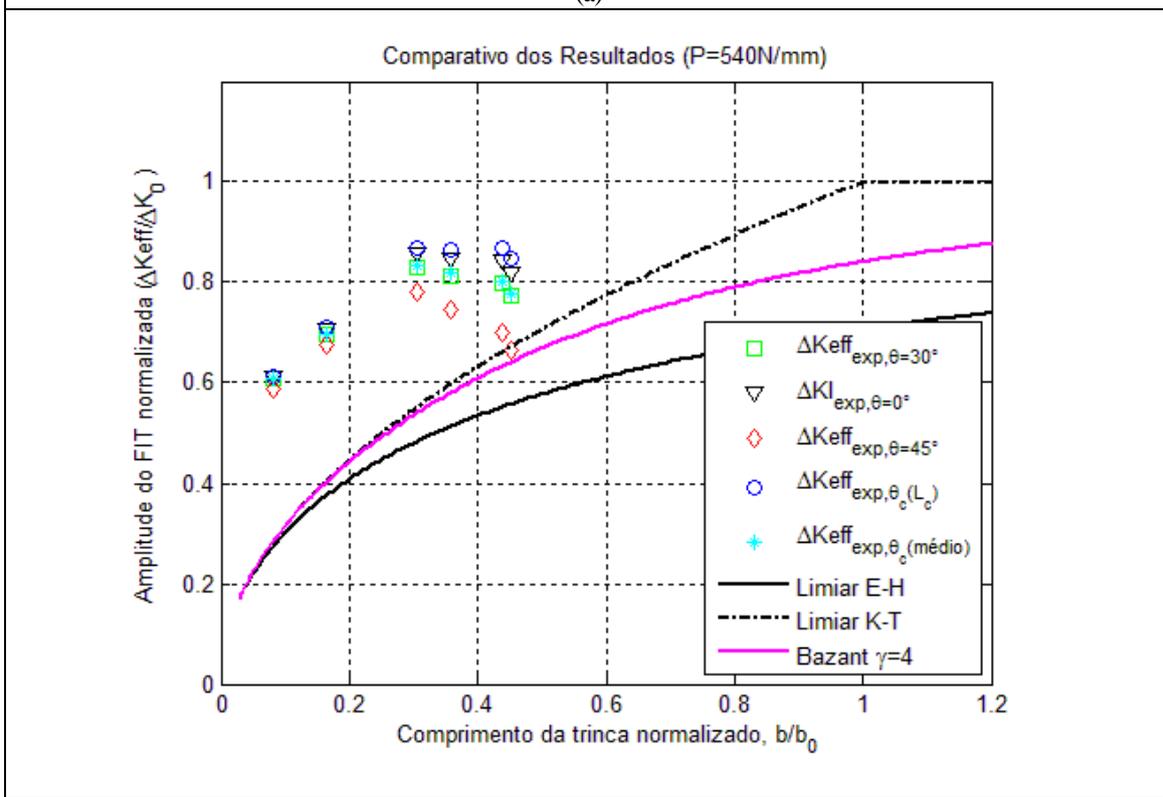
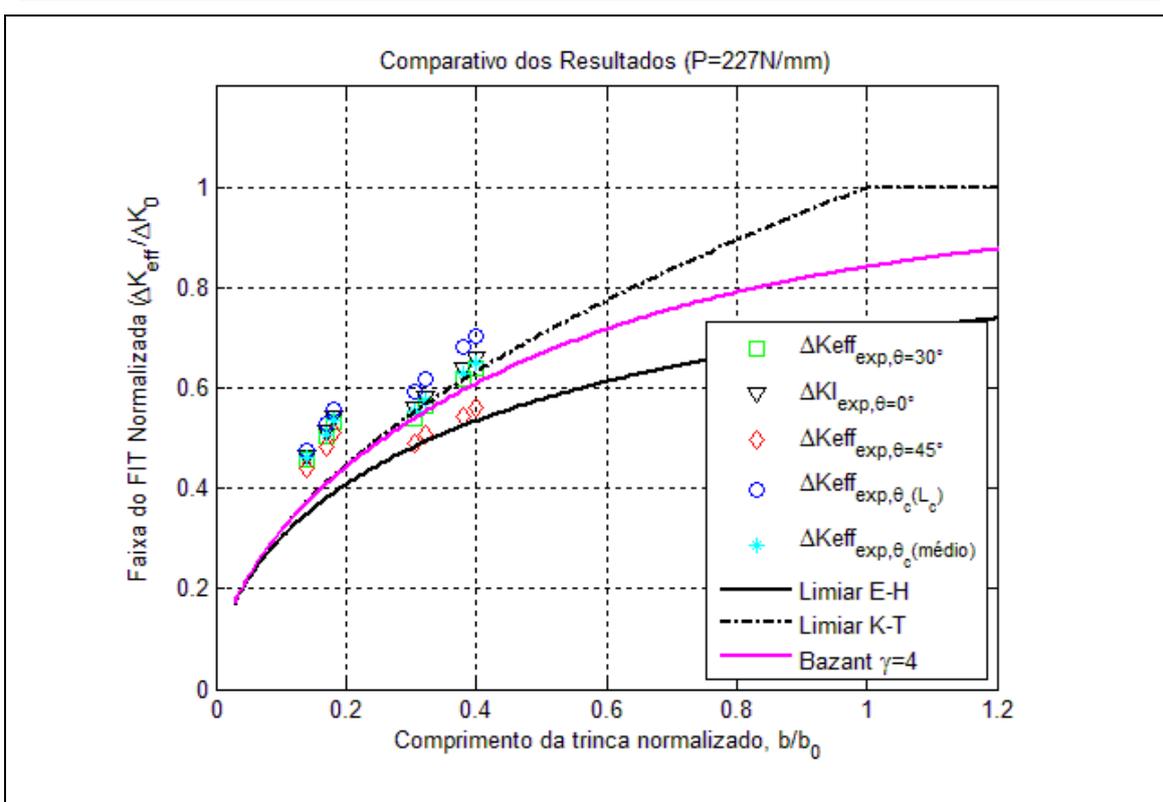


Figura 5.13- Introdução do fator de Bazant $\gamma = 4$ à curva de E-H; (a) Resultados para carga $P = 227N/mm$; (b) Resultados para carga $P = 540 N/mm$

6. CONCLUSÕES

Ao avaliar os resultados obtidos pelas diferentes metodologias propostas e analisadas no presente trabalho é possível verificar certos aspectos relevantes à aplicação da metodologia de trincas curtas paradas ao problema de *fretting*.

Primeiramente, foi possível observar que a simplificação introduzida ao considerar propagação perpendicular da trinca a superfície e contabilizar o efeito da faixa de FIT em modo I pode fornecer bons resultados quando não se sabe a priori o ângulo de propagação a se considerar.

Uma alternativa ainda mais precisa foi evidenciada ao se utilizar previsões considerando modo misto e ângulo de propagação igual à média dos ângulos para planos críticos calculados entre a superfície da extremidade anterior do contato e a distância crítica L . Onde resultados muito próximos aos obtidos pelo ângulo medido experimentalmente foram gerados.

Estimativas de tamanho de trincas paradas considerando os ângulos de propagação iguais ao do vetor normal ao plano crítico calculado na superfície ou na distância crítica da extremidade anterior do contato não forneceu bons resultados, onde os valores da faixa do FIT foram subestimados no primeiro caso, e superestimados para o segundo.

A análise comparativa entre as curvas limiaries de propagação de trincas curtas de Kitagawa-Takahashi e de El Haddad indicou uma melhor adequação da primeira aos dados experimentais, resultado oposto ao indicado por Dini et al. (2006) ao avaliar testes com alumínio. Isso indica que o comportamento do material em estudo pode exercer forte influência sobre qual modelo utilizar. Entretanto, o fator de correção de Bazant aplicado sobre a curva limiar de El Haddad se mostra uma importante ferramenta, para qual o comportamento de diversos tipos de materiais mais menos sensíveis a zona de transição de regime de trincas curvas pode ser ajustado. Um inconveniente para o uso do ajuste de Bazant, é que se torna necessário conhecer previamente mais uma propriedade material.

Foi observado também que a plastificação próxima a zona de nucleação tem papel crucial na aplicabilidade do modelo utilizado de determinação do fator intensidade de tensão na ponta da trinca, onde tanto a solução hertziana do campo de tensões de cilindros em regime de escorregamento parcial, quanto o método de distribuição de

discordâncias são construídos sobre os fundamentos da elasticidade. Esse fato introduz inadequações do modelo ao tentar prever a parada de trincas curtas quando as cargas se tornam elevadas e um alto nível de plasticidade é esperado.

7.SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

Como forma de aprofundar os conhecimentos no tema em questão e melhor avaliar a aplicabilidade do método de parada de trincas curtas na previsão de falha em fadiga por *fretting*, é indicada a ampliação do programa experimental, introduzindo um maior número de testes para caracterizar o comportamento do método em diferentes regimes de carga. Além disso, ao ampliar o espaço amostral maior confiabilidade é introduzida aos resultados.

Avaliar o comportamento da metodologia em testes cujas cargas minimizem o efeito da plasticidade na região do contato. Isso pode trazer esclarecer melhor a acomodação dos resultados experimentais às previsões realizadas nos testes com carga normal mais baixa. Sugere-se ainda o uso de testes com e sem aplicação da carga remota de fadiga, de forma a possibilitar uma análise quantitativa sua influência no processo de evolução das trincas.

A introdução de conceitos de plasticidade a análise sob regimes de carga mais elevado, talvez via Método de Elementos Finitos, cuja aplicação tem se tornado mais acessível com o avanço dos computadores. Avaliações comparativas entre os métodos podem esclarecer algumas das inadequações observadas ao se utilizar o método de parada de trincas curtas nos casos de carga normal elevada.

Novas investigações utilizando diferentes tipos de materiais, possibilitando um melhor entendimento do comportamento das trincas curtas em relação aos diagramas limiaries de Kitagawa-Takahashi e de El Haddad, bem como a adequação do coeficiente de Bazant para ajustar o comportamento destes matérias.

Outra possibilidade de continuidade desse trabalho é adotar outras formulações da TDC, tais como: o Método da Linha e o Método da Área, com o objetivo de verificar qual das mesmas oferece melhor acurácia e eficiência nos dados estimados em relação aos dados experimentais para obtenção do plano preferencial de propagação das trincas. Ao utilizar a média dos ângulos de propagação ao longo da distancia crítica L para determinar a direção de crescimento das trincas bons resultados foram obtidos. Porém, análises mais detalhadas e numa maior variedade de condições de carregamento devem ser realizadas para corroborar o uso deste método.

8.REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALBERT, W. A. J. (1838) Über Treibseile am Harz, Archive für Mineralogie Geognosie Bergbau und Hüttenkunde, vol. 10, pp 215-34.

ARAÚJO JA, NOWELL D. (1999) Analysis of pad size effects in fretting fatigue using short crack arrest methodology. *Int J Fatigue* 21:947–56.

ARAÚJO, J. A. (2000) On the Initiation and Arrest of Fretting Fatigue Crack. D. Phil. Thesis, University of Oxford.

ARAÚJO, J. A.; DANTAS, A. P.; CASTRO, F. C.; MAMIYA, E. N.; FERREIRA, J. L. A. (2010) On the characterization of the critical plane with simple and fast alternative measure of the shear stress amplitude in multiaxial fatigue, *Internation Journal of Fatigue* 33, p. 1092-1100.

ARAÚJO, J. A.; SUSMEL, L.; TAYLOR, D.; FERRO, J. C. T.; MAMIYA, E. N. (2007) On the use of the Theory of Critical Distances and the Modified Wohler Curve Method to estimate fretting fatigue strength of cylindrical contacts, *Internation Journal of Fatigue* 29, p. 95-107 .

ASM HANDBOOK. (1996) Fatigue and Fracture, ASM International – The Materials Information Society, vol. 12.

ATZORI, B.; LAZZARIN, P.; TOVO, R. (1992) Evaluation of the fatigue strength of a deep drawing steel . *Österreichische Ingenieur-und Architekten-Zeitschrift (ÖIAZ)* 137, 11/92, p. 556-561.

BARBER, J. R. (1992) Elasticity, Solid mechanics and its applications. Kluwer Academic Publishers. Vol 107, 2º Ed.

BAZANT, Z. P. (1977) Scaling of quasibrittle fracture: asymptotic analysis. *Int J Fract*, 83:19–40.

BIN LI, SANTOS, J. L. FREITAS M. (2000) A unified numerical approach for multiaxial fatigue limit evaluation, *Fatigue Fract Engng Mater Struct*, 24:165-177.

BRAMHALL, R. (1973) Studies in fretting fatigue. D.PHIL Thesis, Oxford University

BROEK, D. (1982) Elementary engineering fracture mechanics, Martinus Nijhoff Publishers.

BROWN, M. W.; MILLER, K.J. (1973) A Theory for Fatigue Failure under Multiaxial Stress-Strain Conditions, *Proc. IMechE*, Vol. 187, pp. 745-755.

BROWN, M.W.; MILLER, K.J. (1973) A theory for fatigue failure under multiaxial stress strain condition, Proc Inst Mech Engrs, 187:745-755

BUECKNER, H. F. (1958) The propagation of cracks and the energy of elastic deformation, Trans ASME, 80, 1225-1230.

CASTRO, J. T. P; et al. (2012) Prediction of fatigue crack initiation lives at elongated notch roots using short crack concepts, International Journal of Fatigue, Vol. 42, pp 172–182

CHAN, K. S.; LEE, Y-D.; DAVIDSON, D. L.; HUDAK Jr., S.J. (2001) A fracture mechanics approach to high cycle fretting fatigue based on the worst case fret concept – I. Model development, International Journal of Fracture, Vol. 112, Issue 4, pp 299-330.

DANTAS, A. P. (2009) Proposta alternativa para amplitude da tensão cisalhante e uso de algoritmos genéticos para determinação do plano crítico em fadiga multiaxial, Tese (Doutorado em Ciências Mecânicas) – Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia, p. 10.

DINI, D.; NOWELL, D.; DYSON, I. N. "The use of notch and short crack approaches to fretting fatigue threshold prediction: Theory and experimental validation." Tribology International, Vol 39, 2006, pp 1158–1165

DOWLING, M. E. (1998) Mechanical Behavior of Materials-Engineering methods for Deformation, Fracture and Fatigue, 2º ed., Prentice Hall, New Jersey.

DUNDURS, J. (1969) Elastic interaction of dislocations with inhomogeneities in Mathematical Theory of Dislocations, Ed. T. Mura, ASME Pub., New York, 70-115 [32,3]

DUNDURS, J.; MURA, T. (1964) Interaction between an edge dislocation and a circular inclusion, Jnl. Mech. Phys. Solids, 36 , 177-189

ÉDEN, E. M.; ROSE, W. N.; CUNNINGHAM, F. L. (1911) Endurance of Metals, Proceedings of Institute of Mechanical Engineers, Vol.4 p. 839-974, .

EL HADDAD, M. H.; SMITH K.N.; TOPPER, T.H. (1979) Fatigue crack propagation of short cracks. J Engng Mater Technol., 101:42–6.

FATEMI, A.; SOCIE, D. F. (1988) A Critical Plane Approach to Multiaxial Fatigue Damage Including Out-of-Phase Loading, Fatigue & Fracture Engng. Mat. Struct., vol. 11, pp. 149-165.

FATEMI, A.; SOCIE, D. F. (1988) A Critical Plane Approach to Multiaxial Fatigue Damage Including Out-of-Phase Loading, *Fatigue & Fracture Engng. Mat. Struct.*, vol. 11, pp. 149-165.

FENNER, A. J.; FIELD, J.E. (1958) *Rev. Metallurgie*, Vol .55, N° 57, pg 1

FOUVRY, S.; NOWELL, D.; KUBIAK, K.; HILLS , D.A. (1976) Prediction of fretting crack propagation based on a short crack methodology. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 75, 2007, pp 1605–1622

GALING, L.A (1953) *Contact Problems in the Theory of Elasticity* , Moscow. Tradução para o ingles por H. Moss, North Carolina State College, Department of Mathematics, 1961. .

GDOUTOS, E. E. (2005) *Fracture Mechanics - An introduction*, Solid Mechanics and its Applications, Vol 123, Springer .

GERBER, W. (1874) Bestimmung der zulässigen Spannungen in Eisen-konstruktionen. *Zeitschrift des Bayerischen Architekten und Ingenieur-Vereins*, 6: 101–110. ,

GLADWELL, G.M. L. (1980) *Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity*, Alphen aan den Rijn.

GONÇALVES, C.; ARAÚJO, J. A.; MAMIYA, E. (2005) Multiaxial fatigue: a stress based criterion for hard metals, *International Journal of Fatigue*, 27:177-187.

GOODMAN, J. (1899) *Mechanics Applied to Engineering* . Longmans-Green, London.

GRIFFITH, A. A. (1920) The Phenomena of Rupture and Flow in Solids, *Philosophical Transactions*, Series A, Vol. 221,pp. 163–198.

GRUBISIC, V.; SIMBURGUER, A. (1976) Fatigue under combined out-of-phase multiaxial stress, *Int. Conf. Fatigue Testing and Design*, Society of Environmental Engineers, 27.1-27.8. Londres.

HERTZ, H. (1896) *On the contact of elastic solid*, Eds. Jones and Schott, London: Macmillan.

JOHNSON, K. L. (1955) Surface interaction between elastically loaded bodies under tangential forces, *Proceedings of the Royal Society of London*, v. 230 A, n. 1183, p. 531-548.

JOHNSON, K.L. (1984) *Contact Mechanics*. Cambridge University Press;

KITAGAWA H, TAKAHASHI S. (1976) Applicability of fracture mechanics to very small cracks or cracks in the early stage. In: Proceedings of second international conference on mechanical behaviour of materials, ASM. . p. 627–31.

KRENK, S. (1975) On the use of interpolation polynomials for solutions in singular integral equations. *Q. Appl. Maths*, 32 , 479-484

LAZZARIN, P.; TOVO, R.; MENEGHETTI, G. (1997) Fatigue crack initiation and propagation phases near notches in metals with low notch sensitivity. *Int J Fatigue* ;19:647–57.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J. L. (1990) *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge University Press, Cambridge.

LITTLE, R.E. (1965) A simplified method for determining fatigue stress using Mohr's circle, *Machine Design* 37, p. 143-148.

LITTLE, R.E. (1966) Fatigue stress from complex loadings, *Machine Design* 38, p. 145-149, .

LITTLE, R.E.; LITTLE, R. W. (1965) Analysis of two-dimensional cyclic stresses, In: *Proc. 9th Midwester Mechanics Conference*, vol. 3, John Wiley, New York, p. 307-312,.

MAMIYA, E. N., & ARAÚJO, J. A. (2002) Fatigue limit under muliaxial loading: on the definition of the equivalent shear stress, *Mechanics Research Communications*, 29, pp. 141-151.

MAMIYA, E.; ARAÚJO, J.; CASTRO, F. C. (2009) Prismatic hull: A new measure of shear stress amplitude in multiaxial high cycle fatigue. *International Journal Fatigue*, vol. 31, p. 1144-1153.

MATAKE T. (1977) An explanation on fatigue limit under combined stress, *Bull, JSME* 20:257-263.

McDIARMID, D.L., (1991), A General Criterion for High Cycle Multiaxial Fatigue Failure, *Fatigue & Fracture Engng. Mat. Struct.*, vol. 14, pp. 429-453.

McDOWELL, J. R. (1953) Fretting Corrosion Tendencies of Several Combinations of Materials. *Symposium on Fretting Corrosion*, STP 144, ASTM, Philadelphia,pg. 219-240

MILNE, I (1994) *The Importance of the Management of Structural Integrity*, Engineering Failure Analisys.

MINDLIN, R. D.; DERESCIWICZ, H. (1953) Elastic spheres in contact under varying oblique forces. *J Appl Mech*, 75:327–44.

MINER, M. A. (1945) Cumulative damage in fatigue, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 67, pp. A159–A164.

NEU, R. W.; PAPE, J. A.; SWALLA-MICHAUD, D. R. (2000) Methodologies for linking nucleation, and propagation approaches for predicting life under fretting fatigue. *Fretting Fatigue Current Technology And practices*, ASTM STP 1367, D. W. Hoepfner, V. Chandrasekaran, e C. B. Elliotts, Editors., ASTM.

NEUBER H. (1937) Kerbspannungslehre, Grundlage für eine genaue Spannungsrechnung (Theory of notch stresses: principles for exact stress calculation), Berlin: Springer-Verlag .

NEUBER, H. (1936) *Forschg.Ing.-Wes.* 7, 271–281.

NEUBER, H. (1946) *Theory of Notch Stress*, J.W. Edwards, Ann Arbor, MI.

NEUBER, H. (1958) *Theory of notch stresses: Principles for exact calculation of strength with reference to structural form and material*. Springer Verlag, Berlin.

NISHIOKA, K. ; NISHIMURA, S.; HIRAKAWA, K. (1968) Fundamental Investigations of Fretting fatigue (parte 1). On the relative slip amplitude, *Bull. JSME*, Vol. 11, N° 45, pp 437-445.

NISHIOKA, K. e HIRAKAWA, K. (1969c) Fundamental Investigations of Fretting fatigue (parte 4) The effect of mean stress. *Bull. JSME*, Vol. 12, N° 52, pp 408-414

NISHIOKA, K. e HIRAKAWA, K. (1969a) Fundamental Investigations of Fretting fatigue (parte 2), Fretting fatigue test machine and some results." *Bull. JSME*, Vol. 12, N° 50, pp 180-187

NISHIOKA, K. e HIRAKAWA, K. (1969b) Fundamental Investigations of Fretting fatigue (parte 3) Some phenomena and mechanisms of surface crack, *Bull. JSME*, Vol. 12, N° 51, pp 397-407

NISHIOKA, K. e HIRAKAWA, K. (1969d) Fundamental Investigations of Fretting fatigue (parte 5) The effect of relative slip amplitude. *Bull. JSME*, Vol. 12, N° 52, pp 692-697

NISHIOKA, K. e HIRAKAWA, K. (1972) Fundamental Investigations of Fretting fatigue (parte 6), *Bull. JSME*, Vol. 15, N° 80, pp 135-144

NOWELL D.; HILLS, D. A. (1987) Open cracks at or near free edges. *J Strain Analysis* 22:177–85.

NOWELL, D. (1988) An Analysis of fretting fatigue. D. Phil. Thesis, University of Oxford.

NOWELL, D.; DINI, D.; HILLS, D. A. (2005) Recent Developments in the understanding of fretting fatigue." *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 73, I2, Pages 207-222

PALMGREN, A. (1924) Die Lebensdauer von Kugellagern, *Zeitschrift des Vereinesdeutscher Ingenierure*, Vol. 68, No. 14, pp. 339–341.

PAPADOPOULOS, I. V. (1998) Critical Plane Approaches in High-Cycle Fatigue: On the definition of the amplitude and the mean value of the shear, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 21:269-285.

PARIS, P. C., AND ERDOGAN F. (1963) A critical analysis of crack propagation laws, *Journal of Basic Engineering*, Vol. 85, pp. 528–534.

PARIS, P.C. AND ERDOGAN, F. (1960) A Critical Analysis of Crack Propagation Laws, *Journal of Basic Engineering*, Vol. 85, pp. 528–534.

PEARSON, S. (1975) Initiation of fatigue cracks in commercial aluminium alloys and the subsequent propagation of very short cracks, *Engineering Fracture Mechanics* Volume 7, Issue 2, , Pages 235–240

PETERSON, R. E. (1959) Notch-sensitivity. In: Sines G, Waisman JJ, editors, *Metal fatigue*, New York: McGraw Hill, p. 323–35.

PETERSON, R.E. (1938) Methods of correlating data from fatigue tests of stress specimens. In *Stephen Timoshenko Anniversary Volume*, pp. 179. Macmillan, New York.

PIRES, M. S. T., (2012) Estimativa de vida em fadiga multiaxial sob condições de fretting na liga Al 4%Cu (HE 15-TF) usando o Método das Curvas de Wöhler Modificadas associado com a Teoria das Distâncias Críticas. Dissertação de mestrado, Publicação ENM-FT, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, DF.

POOK, L. P.; SMITH, R. A. (1979) Theoretical background to elastic fracture mechanics. In: Smith RA (Ed) *Fracture Mechanics. Current Status, Future Prospects*. Pergamon Press, Oxford, pp. 26–67

POOK, L. "Metal Fatigue - What It Is Why It Matters". *Solid Mechanics and Its Applications*, Ed. Springer Vol 145. 2007 pp 27

REED, R. P.; SMITH, J. H.; CHRIST, B. W. (1983) The Economic Effects of Fracture in United States, U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, Special Publications 647, Março .

SHIGLEY, J. E.; MISCHEKE, C. R.; BUDYNAS, R. G. (2005) Mechanical Engineering Design. McGraw-Hill, 7th edition, 2005.

SMITH, K.N., WATSON, P.; TOPPER, T.H. (1970) A Stress-Strain Function for the Fatigue of Metals, *J. Mater.*, Vol. 5, No. 4, pp. 767-778.

SOCIE, D. F., (1987) Multiaxial Fatigue Damage Models, *J. of Engineering Materials and Technology*, ASME, Vol. 109, Oct. pp. 293-298.

SOCIE, D. F.; MARQUIS, G. B. (2000) Multiaxial fatigue, Society of Automotive Engineers, Warrendale, PA .

SODERBERG, C. R. (1930) Fatigue of safety and working stress, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers* Vol. 52 (Part APM-52-2), pp.13–28.

SUSMEL, L., & LAZZARIN, P. (2002) A bi-parametric Wöhler curve for high cycle multiaxial fatigue assessment, *Fatigue and Fract Engng Mater. Struct.*, 25, pp. 66-78.

SUSMEL, L.; TAYLOR, D. (2003) Fatigue design in the presence of stress concentrations, *International Journal of Strain Analysis for Engineering Components* 38 (5), p. 443-452, DOI: 10.1243/03093240360713496.

SUSMEL, L.; TAYLOR, D. (2008) The Modified Wohler Curve Method applied along with the Theory of Critical Distances to estimate finite life of notched components subjected to complex multiaxial loading path". *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, p. 1047-1063.

TANAKA K, NAKAI Y, YAMASHITA M. (1981) Fatigue growth threshold of small cracks. *Int J Fract* , 17:519.

TANAKA, K. (1983) Engineering formulae for fatigue strength reduction due to crack-like notches. *International Journal of Fracture* 22, R39–R45.

TAYLOR D. (1999) Geometrical effects in fatigue: a unifying theoretical model. *Int J Fatigue*, 21:413–20.

TAYLOR, D. (1999) Geometrical effects in fatigue: A unifying theoretical model. *International Journal of Fatigue* 21, 413–420.

TAYLOR, D. (2007) *The theory of Critical Distances*. Oxford: Elsevier Science, p. 1696-1704.

TAYLOR, D. AND CORNETTI, P. (2005) Finite fracture mechanics and the theory of critical distances. In *Advances in Fracture and Damage Mechanics IV* (Edited by Aliabadi, M.H.) pp. 565–570. EC, Eastleigh UK.

TAYLOR, D. AND WANG, G. (2000) The validation of some methods of notch fatigue analysis. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 23, 387–394.

TAYLOR, D., CORNETTI, P., AND PUGNO, N. (2005) The fracture mechanics of finite crack extension. *Engineering Fracture Mechanics* 72, 1021–1038.

TOMLINSON, G. A.; THORPE, P. L.; GOUGH, H.J. (1939) *Proc I Mech E*, 141:223-49

WARLOW-DAVIES, F. J. (1941) Fretting Corrosion and Fatigue Strength, *Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers*, Vol. 146, pg. 32

WESTERGAARD, H. M. (1934) Stresses at a crack, size of the crack and the bending of reinforced concrete, *Proceedings of the American Concrete Institute* 30:93-102.

WESTERGAARD, H. M. (1937) Bearing pressures and cracks, *Journal of Applied Mechanics*, Trans. ASME 6, A.49-A.53.

ZOUAIN, N.; MAMIYA, E. & CASTRO, F. C. (2006) Using enclosing ellipsoids in multiaxial fatigue strength criteria, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 25:51-71.

Anexo I

A.1 Definição de Vetor e Tensor Tensão

Considera-se o corpo material Ω em equilíbrio submetido a forças externas, é possível tomar o plano de corte O , que divide o divide em duas seções. Ao analisar a seção I, Figura 8.1 é verificada a existência de forças entre as partículas do próprio corpo para que as forças externas sejam equilibradas, estas são chamadas forças internas. Assumindo que as partículas que compõem o material são suficientemente pequenas ao passo que seja possível considerá-lo um meio contínuo, é tomado o sobre o ponto P elemento de área ΔA , que pertence à superfície $\beta \subset O$, com normal unitária \mathbf{n} . A força interna $\Delta \mathbf{F}$ atua sobre o ponto P em todo o elemento de área ΔA .

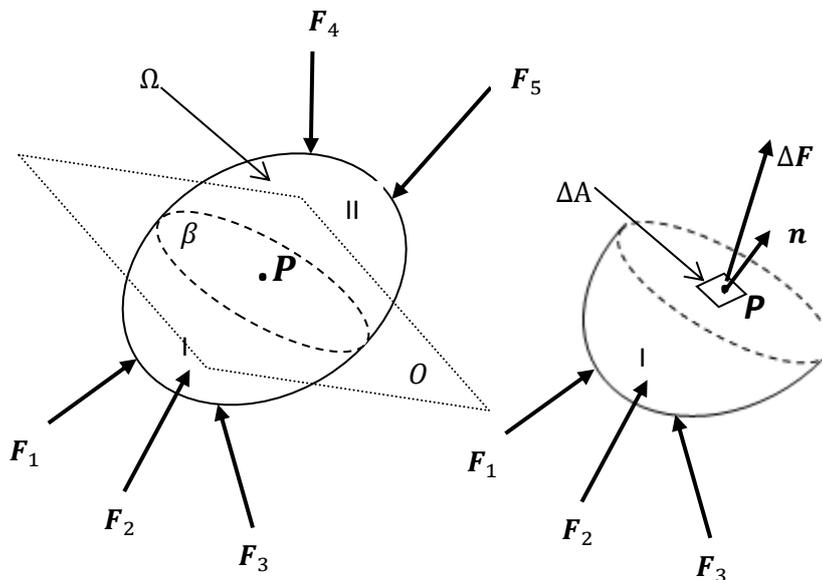


Figura 8.1- Forças externas atuando sobre um corpo material e um plano S passando pelo ponto P

Como consequência das hipóteses anteriores, fazendo-se ΔA infinitesimalmente pequeno, ou seja, $\Delta A \rightarrow 0$, é possível definir o vetor tensão \mathbf{t} , como:

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A} \quad (8.1)$$

A magnitude do vetor \mathbf{t} depende tanto da posição do elemento de área, quanto da orientação do plano de corte, portanto,

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{P}, \mathbf{n}) \quad (8.2)$$

Baseado na equação (8.2), se o vetor posição \mathbf{P} é dado, \mathbf{t} depende unicamente de \mathbf{n} , assim é definida a transformação linear \mathbf{T} tal que:

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{T}\mathbf{n} \quad (8.3)$$

Tome agora um tetraedro infinitesimal separado do corpo no ponto \mathbf{P} como mostrado na Figura 8.2. O vetor normal à face PAB aponta na direção negativa do eixo x , ou seja, $\mathbf{n}(\Delta A_x) = -\mathbf{n}_x$, dessa forma esta face é denominada uma face x negativa. O vetor tensão atuante sobre esta área é denotado por \mathbf{t}_{-x} e a força por ele provocada é dada por: $\mathbf{F} = \mathbf{t}_{-x}\Delta A_x$

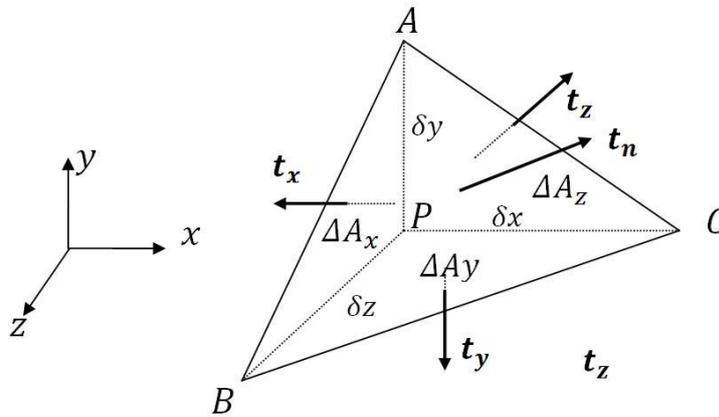


Figura 8.2- Tetraedro infinitesimal sob a ação dos vetores tensão

De maneira análoga, as forças resultantes da atuação dos outros vetores tensão nas outras faces podem ser determinadas. Para satisfazer a condição de equilíbrio, o somatório de todas as focas deve ter resultante nula, assim:

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{t}_n \Delta A_n + \mathbf{t}_{-x} \Delta A_x + \mathbf{t}_{-y} \Delta A_y + \mathbf{t}_{-z} \Delta A_z = 0 \quad (8.4)$$

Tomando o vetor unitário normal a face ABC , $\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}$, as áreas infinitesimais ΔA_x , ΔA_y e ΔA_z se relacionam com ΔA_n pela equação $\Delta A_i = n_i \Delta A_n$, além disso $\mathbf{t}_{-i} = -\mathbf{t}_i$, logo:

$$\mathbf{t}_n = n_x \mathbf{t}_x + n_y \mathbf{t}_y + n_z \mathbf{t}_z \quad (8.5)$$

Lembrando que cada vetor na equação(8.5) possui uma componente em cada direção dos eixos coordenados, podemos explicitar todas as componentes do vetor \mathbf{t}_n

$$\begin{aligned}
 t_{nx} &= n_x t_{xx} + n_y t_{yx} + n_z t_{zx} \\
 t_{ny} &= n_x t_{xy} + n_y t_{yy} + n_z t_{zy} \\
 t_{nz} &= n_x t_{xz} + n_y t_{yz} + n_z t_{zz}
 \end{aligned}
 \tag{8.6}$$

Deve ser recordada a definição matemática de que um tensor \mathbf{T} é uma transformação linear que transforma um vetor em outro. Tomados os vetores unitários $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ como os vetores unitários nas direções x, y e z , sobre a atuação de \mathbf{T} eles se tornam:

$$\mathbf{T}\mathbf{e}_i = T_{1i}\mathbf{e}_1 + T_{2i}\mathbf{e}_2 + T_{3i}\mathbf{e}_3 = T_{ji}\mathbf{e}_j
 \tag{8.7}$$

Logo,

$$T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_j
 \tag{8.8}$$

Portanto, aplicadas às equações (8.6 em (8.8, renomeando o tensor \mathbf{T} como $\boldsymbol{\sigma}$ e suas componentes T_{ij} como σ_{ij} , segue:

$$\mathbf{t}_n = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}
 \tag{8.9}$$

A equação acima representa o teorema de Cauchy, e o tensor $\boldsymbol{\sigma}$ é chamado Tensor Tensão de Cauchy. Nota-se que cada componente de $\boldsymbol{\sigma}$ possui dois subíndices, o primeiro indica o plano de atuação da tensão, e o segundo a direção da componente de tensão. Como mostrado na equação (8.5) o vetor tensão \mathbf{t}_n é formado por três componentes, uma na direção normal a superfície de atuação e duas na direção tangencial, ver Figura 8.3.

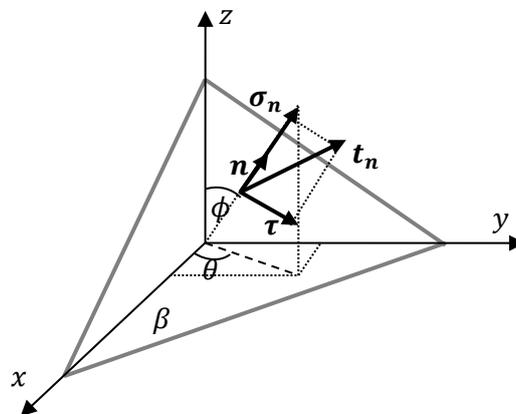


Figura 8.3- Vetor unitário \mathbf{n} referenciado em um sistema de coordenadas $Oxyz$ e pela suas coordenadas esféricas θ e ϕ .

A componente normal à superfície $\boldsymbol{\sigma}_n$ pode ser obtida projetando o vetor \boldsymbol{t}_n na direção \boldsymbol{n} , equação (8.10). A componente tangencial $\boldsymbol{\tau}$ é encontrada ao subtrair $\boldsymbol{\sigma}_n$ de \boldsymbol{t}_n , equação(8.11).

$$\boldsymbol{\sigma}_n = (\boldsymbol{t}_n \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n} \quad (8.10)$$

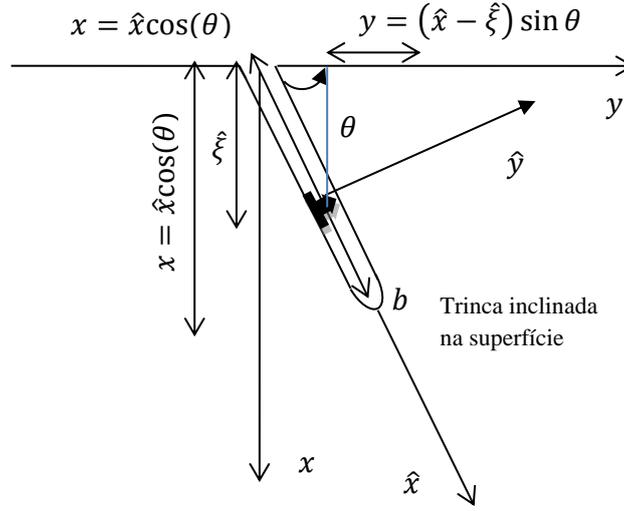
$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{t}_n - \boldsymbol{\sigma}_n \quad (8.11)$$

Para que o elemento de tensão permaneça em equilíbrio os momentos das componentes de tensão cisalhantes devem se cancelar, assim, demonstra-se que $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$; $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$; $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$. Devido à simetria de $\boldsymbol{\sigma}$, é possível caracterizar um estado de tensão completamente por meio de seis componentes independentes.

Anexo II

A.2 Regras de transformação para Discordâncias

Para se calcular o valor das funções de influência, $G_{ij\hat{k}}(s_k, r_i)$, no sistema (\hat{x}, \hat{y}) orientado na direção da trinca e necessário seguir uma sequência de transformações de coordenadas.



Primeiramente, para se calcular $G_{ij\hat{k}}(s_k, r_i)$ é necessário determinar-se o valor de $G_{yxx}(x, y; \xi)$, no sistema coordenado global, portanto é necessário que a para cada (s_k, r_i) os valores de $(x_i, y_i; \xi_i)$ no sistema global. Assim:

$$\hat{\xi} = \frac{(r_i + 1)b}{2} \quad (\text{A.1})$$

$$\hat{x} = \frac{(s + 1)b}{2} \quad (\text{A.2})$$

Conhecidos o ponto de $(\hat{x}, \hat{\xi})$ e de integração pode ser calculadas coordenadas no sistema global (x, y, ξ) e seus valores introduzindo nas equações da tabela A.1 onde serão calculados os núcleos de discordâncias $G_{yxx}(x, y; \xi)$

$$x = (\hat{x}) \cos \theta ; y = (\hat{x} - \hat{\xi}) \sin \theta ; \xi = \hat{\xi} \cos \theta \quad (\text{A.3})$$

Por fim, é necessário apenas realizar transformação linear dada pela equação (A.4). e Segundo essa sequência de transformações e todos os valores de $G_{i\hat{j}\hat{k}}(s_k, r_i)$ poderão ser determinados

$$\begin{bmatrix} G_{\hat{x}\hat{y}\hat{y}} \\ G_{\hat{y}\hat{y}\hat{y}} \\ G_{\hat{x}\hat{x}\hat{y}} \\ G_{\hat{y}\hat{x}\hat{y}} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} G_{xxx} \\ G_{xyy} \\ G_{xxy} \\ G_{yxx} \\ G_{yyy} \\ G_{yxy} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

onde \mathbf{A} é uma matriz transformação de terceira ordem dada por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} +\sin^2 \theta \cos \theta & +\cos^3 \theta & -\cos \theta \sin 2\theta & \sin^3 \theta & \sin \theta \cos^2 \theta & -\sin \theta \sin 2\theta \\ -\sin^3 \theta & -\sin \theta \cos^2 \theta & +\sin \theta \sin 2\theta & +\sin^2 \theta \cos \theta & \cos^3 \theta & -\cos \theta \sin 2\theta \\ -\sin \theta \cos^2 \theta & +\sin \theta \cos^2 \theta & +\cos \theta \cos 2\theta & -\sin^2 \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \cos \theta & +\sin \theta \cos 2\theta \\ +\sin^2 \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos 2\theta & -\sin \theta \cos^2 \theta & \sin \theta \cos^2 \theta & +\cos \theta \cos 2\theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Tabela A.1 - Núcleos de discordâncias e um semi-plano

$G_{xxx} = y \left\{ -\frac{2}{r_1^2} - \frac{4(x-\xi)^2}{r_1^4} + \frac{2}{r_2^2} + \frac{4(x+\xi)^2}{r_2^4} - \frac{8\xi(x+\xi)}{r_2^4} + \frac{32\xi(x+\xi)^3}{r_2^6} + \frac{8\xi^2}{r_2^4} - \frac{32\xi^2(x+\xi)^2}{r_2^6} \right\}$	(A.6)
$G_{xyy} = y \left\{ -\frac{2}{r_1^2} - \frac{4(x-\xi)^2}{r_1^4} + \frac{2}{r_2^2} - \frac{4(x+\xi)^2}{r_2^4} + \frac{24\xi(x+\xi)}{r_2^4} - \frac{32\xi(x+\xi)^3}{r_2^6} - \frac{8\xi^2}{r_2^4} + \frac{32\xi^2(x+\xi)^2}{r_2^6} \right\}$	(A.7)
$G_{xxy} = \left\{ -\frac{2(x-\xi)}{r_1^2} + \frac{4(x-\xi)^3}{r_1^4} + \frac{2(x+\xi)}{r_2^2} - \frac{4(x+\xi)^3}{r_2^4} - \frac{4\xi}{r_2^2} + \frac{32\xi(x+\xi)^2}{r_2^4} - \frac{32\xi(x+\xi)^4}{r_2^6} - \frac{24\xi^2(x+\xi)}{r_2^4} + \frac{32\xi^2(x+\xi)^3}{r_2^6} \right\}$	(A.8)
$G_{yxx} = \left\{ -\frac{2(x-\xi)}{r_1^2} + \frac{4(x-\xi)^3}{r_1^4} + \frac{2(x+\xi)}{r_2^2} - \frac{4(x+\xi)^3}{r_2^4} - \frac{4\xi}{r_2^2} - \frac{16\xi(x+\xi)^2}{r_2^4} + \frac{32\xi(x+\xi)^4}{r_2^6} + \frac{24\xi^2(x+\xi)}{r_2^4} - \frac{32\xi^2(x+\xi)^3}{r_2^6} \right\}$	(A.9)
$G_{yyy} = \left\{ \frac{6(x-\xi)}{r_1^2} - \frac{4(x-\xi)^3}{r_1^4} - \frac{6(x-\xi)}{r_2^2} + \frac{4(x+\xi)^3}{r_2^4} - \frac{4\xi}{r_2^2} + \frac{32\xi(x+\xi)^2}{r_2^4} - \frac{32\xi(x+\xi)^4}{r_2^6} - \frac{24\xi^2(x+\xi)}{r_2^4} + \frac{32\xi^2(x+\xi)^3}{r_2^6} \right\}$	(A.10)
$G_{yxy} = y \left\{ -\frac{2}{r_1^2} + \frac{4(x-\xi)^2}{r_1^4} + \frac{2}{r_2^2} - \frac{4(x+\xi)^2}{r_2^4} - \frac{8\xi(x+\xi)}{r_2^4} + \frac{32\xi(x+\xi)^3}{r_2^6} + \frac{8\xi^2}{r_2^4} - \frac{32\xi^2(x+\xi)^2}{r_2^6} \right\}$	(A.11)
<p>Onde : $r_1^2 = (x-\xi)^2 + y^2$ $r_2^2 = (x+\xi)^2 + y^2$</p>	(A.12)

Anexo III

A.3 Programas computacionais utilizados nos cálculos do fator intensidade de tensão

Rotina para entrada e saída de dados e gráficos

```
#####  
#####  
%# This Program Gives the structure of the data input and the body  
#  
%#           of the steps calculation for dislocation  
#  
#####  
#####  
clear all;  
close all;  
clc;  
  
disp('*****')  
disp('* Cálculo dos Fatores de Intensidade de Tensão em Modo I  *')  
disp('* e Modo II na Superfície Contato Cilindro-Plano em Regime *')  
disp('* Escorregamento Parcial                               *')  
disp('*                                                                 *')  
disp('* Metodologia Método de Distribuição de Discordâncias   *')  
disp('*                                                                 *')  
disp('* (c) Campos, E.R. - Universidade de Brasília - UnB     *')  
disp('* Última versão: 25/10/2013                             *')  
disp('*****')  
disp('  ')  
  
%Input Constantes do Material  
E   =200000;           %Yorg Modulus           [Mpa]  
DKth=7;               %DKThreshold           [MPa.m^1/2]  
v   =0.3;             %Poisson           [--]  
%  
-----  
  
%Input Numerical discretization parameters  
nt=2;                 %Number of time steps           [--]  
nb=300;               %Number of crack increments     [--]  
N =40;                %DKThreshold           [--]  
%  
-----  
  
%Fretting input Independent Parameters  
P1 =[227 227 227 227 227 227 227 227 227 227 540 540 540 540 540 540  
540];  
Q1 =[ 90  98 126 137 144 146 151 164 169 206 242 243 278 280 282  
283];  
Q_P1=Q1./P1;  
b_exp= [ 0  0 24 29 31 52 55 65 68  0 14 28 77 61 52  
75]*1e-3;
```

```

for m=3:length(P1)

Q_P=Q_P1(m);           %Tangencial adms for P
SBm=0;                %Bulk Stress           [MPa]
SBa=0;
R =40;                %Par radius           [mm]
A=4*(1-v^2)/E;        %Elastic Constant
K=1/R;                %Equivalent Radius
a=sqrt(2*P1(m)*A/(pi*K)); %Semi-Width of the
contact
Po = 2*P1(m)/(pi*a);  %Pick Pressure           [MPa]
f =0.9;                %Friction Coefficient    [--]
O = (30)*pi/180;      %Angulação da Trinca    [graus]
%
%
P=pi*K*a^2/(2*A);     %Normal Load in Pad
%
%
%Step time calculation (sinusoidal ciclic load [rad])
t_i=0;                %Initial Time           [rad]
t_f=2*pi;             %Final Time             [rad]
dt = (t_f-t_i)/(nt-1); %Length of Time Step    [rad]
tl=[pi/2 3*pi/2];%t_i:dt:t_f;[pi/2 3*pi/2]% %Time array
(1) index            [rad]
%
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% parâmetros materiais
sY = 350; % tensão de escoamento (MPa)
s_1 = 270; % limite de fadiga axial R = -1 (MPa)

% limiar de propagação R = -1 (MPa m^1/2) - estimado como 2x
% o valor de DKth_01 (ref. livro do Anderson e Kujawski 2001 IJF)
DKth = 7;

% comprimento de transição do regime de trincas curtas para o de
trincas
% longas
b0 = (1/pi) * (DKth/(s_1*1.12))^2 * 10^3; % (mm)
% cálculo do comprimento de transição do regime de trincas curtas para
% o de trincas longas adimensionalizado
b0_a = b0/a;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Crack increment calculation
b_i= 5e-3;            %Initial Crack Length    [mm]
b_f= 2*b0;            %Final Crack Length      [mm]
db = (b_f-b_i)/(nb-1); %Crack Increment Length  [mm]
bk= (b_i:db:b_f);    %Crack Legth array      [mm]
%
%
%Method Implementation
KI=zeros(nb,nt);     %Allocation memory Matrix
KII=zeros(nb,nt);    %Allocation memory Matrix

```

```

KIminimo=zeros(1,nb);           %Allocation memory Matrix
KImaximo=zeros(1,nb);          %Allocation memory Matrix
KImin=zeros(1,nb);             %Allocation memory Matrix
KImax=zeros(1,nb);             %Allocation memory Matrix

for k=1:length(bk);
    b=bk(k);
    for l=1:length(tl);
        t=tl(l);
        [KIi,KIii] = sif(N,b,O,R,E,v,Po,SBm,SBa,Q_P,f,t);

        KI(k,l)=KIi;
        KII(k,l)=KIii;

    end
    %Storage the value of Kmin and Kmax for each crack increase

    KIminimo(k)=min(KI(k,:));
    KImaximo(k)=max(KI(k,:));

    KImin(k)=min(KI(k,:));
    KImax(k)=max(KI(k,:));

    KIImin(k)=min(KII(k,:));
    KIImax(k)=max(KII(k,:));

    %Test close condition for crack KI mode

    if KIminimo(k) < 0
        KImin(k) = 0;

    else
        KImin(k)=KIminimo(k);
    end

    if KImaximo(k) < 0
        KImax(k) = 0;

    else
        KImax(k)=KImaximo(k);
    end

end
% DK range calculation for each mode
DKI = (KImax-KImin);
DKII = (KIImax-KIImin);
% DK effective for mode I and II combination
DKeff= ((DKI.*DKI)+(DKII.*DKII)).^(0.5);

b_KT=linspace(b_i,b_f,nb);
KT=zeros(1,length(b_KT));
EH=zeros(1,length(b_KT));
for ii=1:length(b_KT)
    EH(ii)=DKth*sqrt(b_KT(ii)/(b_KT(ii)+b0));
    if b_KT(ii)<=b0;

```

```

        KT(ii)=DKth*sqrt(b_KT(ii)/b0) ;
    else
        KT(ii)=DKth;
    end
end

Erro_EH=(DKeff-EH)/max(EH);
Erro_KT=(DKeff-KT)/max(KT);
k1=1;
while abs(Erro_EH(k1))>1.01*min(abs(Erro_EH))
    k1=k1+1;
end
k11(m)=k1;
b_eh(m)=bk(k1);

DKI_eh(m) = DKI(k1);
DKII_eh(m) = DKII(k1);
DKeff_eh(m) = DKeff(k1);

k2=1;
while abs(Erro_KT(k2))>1.01*min(abs(Erro_KT))
    k2=k2+1;
end
k22(m)=k2;
b_kt(m)=bk(k2);

DKI_kt(m) = DKI(k2);
DKII_kt(m) = DKII(k2);
DKeff_kt(m) = DKeff(k2);

Erro_bexp=(bk-b_exp(m))/b_exp(m);
k3=1;
while abs(Erro_bexp(k3))>1.01*min(abs(Erro_bexp))
    k3=k3+1;
end
k33(m)=k3;
DKI_exp(m) = DKI(k3);
DKII_exp(m) = DKII(k3);
DKeff_exp(m) = DKeff(k3);

if m<=9

    b_exp_LP(m-2)=b_exp(m);
    DKI_exp_LP(m-2)=DKI_exp(m);
    DKII_exp_LP(m-2)=DKII_exp(m);
    DKeff_exp_LP(m-2)=DKeff_exp(m);

    figure(1)
    plot(bk*1e3,DKeff,'-b','lineWidth',1)
    hold on
    plot(b_KT*1e3,EH,'-k','lineWidth',1.5)
    hold on
    plot(b_KT*1e3,KT,'-.k','lineWidth',1.5)
    hold on
    grid on
    axis([0 200 0 8])
    title('Condição de Pressão Normal Baixa (P_0=450 MPa)')
    ylabel('\DeltaKeff Amplitude do FIT [MPa.m^{1/2}]')
    xlabel(' Comprimento da trinca, b [\mum]')

```

```

    legend('\DeltaKeff','El-Haddad','limiar K-
T','Location','NorthWest')

    figure(2)
    plot(bk*1e3,DKeff,'-b','lineWidth',1.0)
    hold on

plot(b_exp_LP*1e3,DKeff_exp_LP,'dc','lineWidth',1.5,'MarkerEdgeColor',
'k','MarkerFaceColor','c')
    hold on
    plot(b_KT*1e3,EH,'-k','lineWidth',1.5)
    hold on
    plot(b_KT*1e3,KT,'-.k','lineWidth',1.5)
    hold on
    grid on
    axis([0 200 0 8])
    title('Condição de Pressão Normal Baixa (P_0=450 MPa)')
    ylabel('\DeltaKeff Amplitude do FIT [MPa.m^{1/2}]')
    xlabel(' Comprimento da trinca, b [\mum]')
    legend('\DeltaKeff','\DeltaKeff_{exp}','Limiar E-H','Limiar K-
T','Location','NorthWest')

    figure(3)

plot(b_exp_LP*1e3,DKeff_exp_LP,'dc','lineWidth',1.0,'MarkerEdgeColor',
'k','MarkerFaceColor','c')
    hold on
    plot(b_KT*1e3,EH,'-k','lineWidth',1.5)
    hold on
    plot(b_KT*1e3,KT,'-.k','lineWidth',1.5)
    hold on
    grid on
    axis([0 200 0 8])
    title('Condição de Pressão Normal Baixa (P_0=450 MPa)')
    ylabel('\DeltaKeff Amplitude do FIT [MPa.m^{1/2}]')
    xlabel(' Comprimento da trinca, b [\mum]')
    legend('\DeltaKeff_{exp}','Limiar E-H','Limiar K-
T','Location','NorthWest')

    figure(10)
    plot(bk*1e3,DKeff,'-r','lineWidth',1)
    hold on
    plot(bk*1e3,DKI,'-g','lineWidth',1)
    hold on
    plot(bk*1e3,DKII,'-b','lineWidth',1)
    hold on
    plot(b_KT*1e3,EH,'-k','lineWidth',1.5)
    hold on
    plot(b_KT*1e3,KT,'-.k','lineWidth',1.5)

plot(b_exp_LP*1e3,DKeff_exp_LP,'dc','lineWidth',1.5,'MarkerEdgeColor',
'k','MarkerFaceColor','c')
    axis([0 200 0 8])
    title('Condição de Pressão Normal Baixa (P_0=450 MPa)')
    ylabel('\DeltaKeff Amplitude do FIT [MPa.m^{1/2}]')
    xlabel(' Comprimento da trinca, b [\mum]')
    legend('\DeltaKeff','\DeltaKI','\DeltaKII','Limiar E-H','Limiar K-
T','\DeltaKeffexp','Location','NorthWest')

```

```

elseif m>=11

    b_exp_HP(m-10)=b_exp(m);
    DKI_exp_HP(m-10)=DKI_exp(m);
    DKII_exp_HP(m-10)=DKII_exp(m);
    DKeff_exp_HP(m-10)=DKeff_exp(m);

figure(4)
plot(bk*1e3,DKeff,'-r','lineWidth',1)
hold on
plot(b_KT*1e3,EH,'-k','lineWidth',1.5)
hold on
plot(b_KT*1e3,KT,'-.k','lineWidth',1.5)
hold on
grid on
axis([0 200 0 8])
title('Condição de Pressão Normal Baixa (P_0=700 MPa)')
ylabel('\DeltaKeff Amplitude do FIT [MPa.m^{1/2}]')
xlabel(' Comprimento da trinca, b [\mum]')
legend('\DeltaKeff','Limiar E-H','Limiar K-
T','Location','NorthWest')

figure(5)
plot(bk*1e3,DKeff,'-r','lineWidth',1)
hold on

plot(b_exp_HP*1e3,DKeff_exp_HP,'om','lineWidth',1.5,'MarkerEdgeColor',
'k','MarkerFaceColor','y')
hold on
plot(b_KT*1e3,EH,'-k','lineWidth',1.5)
hold on
plot(b_KT*1e3,KT,'-.k','lineWidth',1.5)
hold on
grid on
axis([0 200 0 8])
title('Condição de Pressão Normal Baixa (P_0=700 MPa)')
ylabel('\DeltaKeff Amplitude do FIT [MPa.m^{1/2}]')
xlabel(' Comprimento da trinca, b [\mum]')
legend('\DeltaKeff','\DeltaKeff_{exp}','Limiar E-H','Limiar K-
T','Location','SouthEast')

figure(6)

plot(b_exp_HP*1e3,DKeff_exp_HP,'om','lineWidth',1.5,'MarkerEdgeColor',
'k','MarkerFaceColor','y')
hold on
plot(b_KT*1e3,EH,'-k','lineWidth',1.5)
hold on
plot(b_KT*1e3,KT,'-.k','lineWidth',1.5)
hold on
grid on
axis([0 200 0 8])
title('Condição de Pressão Normal Baixa (P_0=700 MPa)')
ylabel('Amplitude do FIT normalizada(\DeltaK_{eff} / \DeltaK_{th}
)')
xlabel(' Comprimento da trinca normalizado, b/b_0')
legend('\DeltaKeff_{HP}','Limiar E-H','Limiar K-
T','Location','SouthEast')

```

```

figure(11)
plot(bk*1e3,DKeff,'-r','lineWidth',1)
hold on
plot(bk*1e3,DKI,'-g','lineWidth',1)
hold on
plot(bk*1e3,DKII,'-b','lineWidth',1)
hold on
plot(b_KT*1e3,EH,'-k','lineWidth',1.5)
hold on
plot(b_KT*1e3,KT,'-.k','lineWidth',1.5)

plot(b_exp_HP*1e3,DKeff_exp_HP,'om','lineWidth',1.5,'MarkerEdgeColor',
'k','MarkerFaceColor','y')
axis([0 200 0 8])
title('Condição de Pressão Normal Baixa (P_0=450 MPa)')
ylabel('\DeltaKeff Amplitude do FIT [MPa.m^{1/2}]')
xlabel(' Comprimento da trinca, b [\mum]')
legend('\DeltaKeff','\DeltaKI','\DeltaKII','Limiar E-H','Limiar K-
T','\DeltaKeffexp','Location','NorthWest')
end

end

b_KT=linspace(b_i,5*b_f,nb);
KT=zeros(1,length(b_KT));
EH=zeros(1,length(b_KT));
for ii=1:length(b_KT)
    EH(ii)=DKth*sqrt(b_KT(ii)/(b_KT(ii)+b0));
    if b_KT(ii)<=b0;
        KT(ii)=DKth*sqrt(b_KT(ii)/b0) ;
    else
        KT(ii)=DKth;
    end
end

Erro_EH=(DKeff-EH)/max(EH);
Erro_KT=(DKeff-KT)/max(KT);
k1=1;
figure(7)

plot(b_exp_LP/b0,DKeff_exp_LP/DKth,'dc','lineWidth',1.5,'MarkerEdgeCol
or','b','MarkerFaceColor','c')
hold on

plot(b_exp_HP/b0,DKeff_exp_HP/DKth,'om','lineWidth',1.5,'MarkerEdgeCol
or','b','MarkerFaceColor','y')
hold on
plot(b_KT/b0,EH/DKth,'-k','lineWidth',1.5)
hold on
plot(b_KT/b0,KT/DKth,'-.k','lineWidth',1.5)
hold on
grid on
axis([0 1.2 0 1.2])
title('Comparativo dos Resultados para uso \Delta]k_{eff} e
\theta=30°')
ylabel('Amplitude do FIT normalizada (\DeltaKeff/\DeltaK_0)')
xlabel(' Comprimento da trinca normalizado, b/b_0')
legend('\DeltaKeff_{exp,LP}','\DeltaKeff_{exp,HP}','Limiar E-
H','Limiar K-T','Location','SouthEast')

```

```

Resultados1 =['      b_exp ' '      b_eh ' '      b_kt ' '      DKI_exp' '
DKI_eh' '      DKI_kt' '      DKII_exp' '      DKII_eh ' '      DKII_kt ' '
DKeff_exp ' 'DKeff_eh' ' 'DKeff_kt'];
Resultados11=[1e3*b_exp' 1e3*b_eh' 1e3*b_kt' DKI_exp' DKI_eh' DKI_kt'
DKII_exp' DKII_eh' DKII_kt' DKeff_exp' DKeff_eh' DKeff_kt' ];

disp('Resultados')
disp(Resultados1)
disp(Resultados11)

Erro_eh=(b_eh-b_exp)./b_exp;
Erro_kt=(b_kt-b_exp)./b_exp;
Resultados2 =['      Q(N/mm) ' '      b_exp ' '      DKeff_exp' '      b_kt ' '
DKeff_kt' '      Erro_KT'];
Resultados22=[Q1' 1e3*b_exp' DKeff_exp' 1e3*b_kt' DKeff_kt' Erro_kt'
];
Resutados_erros_30_1=['      Erro_KT' '      Erro_EH'];
Resutados_erros_30_11=100*[Erro_kt' Erro_eh'];
disp('Resultados Comparação Tabela do Fouvry')
disp(Resultados2)
disp(Resultados22)
disp('Resutados_erros_30')
disp(Resutados_erros_30_1)
disp(Resutados_erros_30_11)

```

Subrotina para o cálculo dos fatores intensidade de tensão

```
#####  
###  
%# Subrotin for calculus of KI and KII for Slant Cracks using the  
#  
%# Distribution Dislocation Method  
#  
#####  
###  
  
function [KII,KIII,sxx_y,syy_y,txy_y] =  
sif(N,b,O,R,E,nu,Po,SBm,SBa,Q_P,f,t)  
SN=zeros(N,1);  
ST=zeros(N,1);  
phix=zeros(N,1);  
phiy=zeros(N,1);  
S=zeros(2*N,1);  
k =(3-4*nu);  
mi =E/(2*(1+nu));  
  
A=zeros(2*N,2*N); %Allocation memory fo A  
  
for kk=1:N  
  
    v(kk)=cos(pi*2*kk/(2*N+1)); %Normalized Integration point  
    for jj=1:N  
        u(jj)=cos(pi*(2*jj-1)/(2*N+1));%Normalized Integration point  
  
        xl(kk)=(v(kk)+1)*b/2; % Coordinate x of the  
Dislocation Burger Vector  
        cl(jj)=(u(jj)+1)*b/2; % Coordinate c of the  
Dislocation Burger Vector  
  
        %Green's Functions para trinca inclinada  
        [G_xxx,G_xyy,G_xxy,G_yxx,G_yyy,G_yxy] =  
greenf(xl(kk),cl(jj),O);  
  
        %Matriz mudança de coordenadas da G  
        B=[ sin(O)^2*cos(O) cos(O)^3 -cos(O)*sin(2*O)  
sin(O)^3 sin(O)*cos(O)^2 -sin(O)*sin(2*O)  
-sin(O)^3 -sin(O)*cos(O)^2 +sin(O)*sin(2*O)  
+sin(O)^2*cos(O) cos(O)^3 -cos(O)*sin(2*O)  
-sin(O)*cos(O)^2 sin(O)*cos(O)^2 +cos(O)*cos(2*O) -  
sin(O)^2*cos(O) sin(O)^2*cos(O) sin(O)*cos(2*O)  
sin(O)^2*cos(O) -sin(O)^2*cos(O) -sin(O)*cos(2*O) -  
sin(O)*cos(O)^2 sin(O)*cos(O)^2 cos(O)*cos(2*O)];  
  
        G=[G_xxx;G_xyy;G_xxy;G_yxx;G_yyy;G_yxy];  
        G1=B*G;  
  
        G_xyy1=G1(1);  
        G_yyy1=G1(2);  
        G_xxy1=G1(3);  
        G_yxy1=G1(4);  
  
        K_xN=G_xyy1;  
        K_yN=G_yyy1;
```

```

K_xS=G_xxy1;
K_yS=G_yxy1;

A(kk,jj) =mi/(pi*(k+1))*2*pi*(1+u(jj))/(2*N+1)*K_xN*b/2;
A(kk,N+jj) =mi/(pi*(k+1))*2*pi*(1+u(jj))/(2*N+1)*K_yN*b/2;
A(N+kk,jj) =mi/(pi*(k+1))*2*pi*(1+u(jj))/(2*N+1)*K_xS*b/2;
A(N+kk,N+jj)=mi/(pi*(k+1))*2*pi*(1+u(jj))/(2*N+1)*K_yS*b/2;

end

[Sf] = fretting_sfield( R,E,nu,Po,SBm,SBa,Q_P,f,xl(kk),O,t);
sxx_y(kk)=-Sf(2,2);
syy_y(kk)=-Sf(1,1);
txy_y(kk)=-Sf(1,2);

sxx=-Sf(2,2);
syy=-Sf(1,1);
txy=-Sf(1,2);

SN(kk,1)=sxx*sin(O)^2+syy*(cos(O))^2-txy*sin(2*O);
ST(kk,1)=(syy-sxx)*sin(O)*cos(O)+txy*cos(2*O);
S(kk,1)=SN(kk,1);
S(N+kk,1)=ST(kk,1);

end

%Cáculo do KI
phis=A\S;

for kk=1:N
    phix(kk)=phis(kk);
    phiy(kk)=phis(N+kk);
end

phix1=0;
phiy1=0;
for ii=1:N
    phix1=2/(2*N+1)*cot((pi/2)*(2*ii-1)/(2*N+1))*sin(N/(2*N+1)*(2*ii-1)*pi)*phix(ii)+phix1;
    phiy1=2/(2*N+1)*cot((pi/2)*(2*ii-1)/(2*N+1))*sin(N/(2*N+1)*(2*ii-1)*pi)*phiy(ii)+phiy1;
end

KII=2*sqrt(2*pi*b*1e-3)*mi/(k+1)*phiy1;
KIII=2*sqrt(2*pi*b*1e-3)*mi/(k+1)*phix1;

```

Subrotina para o cálculo das funções de Influência (Núcleos de Discordâncias)

```
function [G_xxx, G_xyy,G_xxy,G_yxx,G_yyy,G_yxy] = greenf(xl,cl,O);

x=(xl)*cos(O);
y=(xl-cl)*sin(O);
c=cl*cos(O);

K=2*(1/(x-c)-1/(x+c)-2*c/((x+c)^2)+4*c^2/((x+c)^3));

r_1=sqrt((x-c)^2+y^2);
r_2=sqrt((x+c)^2+y^2);

G_xxx= y*((-2/r_1^2)-(4*(x-c)^2/r_1^4)+(2/r_2^2)+(4*(x+c)^2/r_2^4)-
(8*c*(x+c)/r_2^4)+(32*c*(x+c)^3/r_2^6)+(8*c^2/r_2^4)-
(32*c^2*(x+c)^2/r_2^6));
G_xyy= y*((-2/r_1^2)+(4*(x-c)^2/r_1^4)+(2/r_2^2)-
(4*(x+c)^2/r_2^4)+(24*c*(x+c)/r_2^4)-(32*c*(x+c)^3/r_2^6)-
(8*c^2/r_2^4)+(32*c^2*(x+c)^2/r_2^6));
G_xxy= ((-2*(x-c)/r_1^2)+(4*(x-c)^3/r_1^4)+(2*(x+c)/r_2^2)-
(4*(x+c)^3/r_2^4)-(4*c/r_2^2)+(32*c*(x+c)^2/r_2^4)-
(32*c*(x+c)^4/r_2^6)-(24*c^2*(x+c)/r_2^4)+(32*c^2*(x+c)^3/r_2^6));
G_yxx= ((-2*(x-c)/r_1^2)+(4*(x-c)^3/r_1^4)+(2*(x+c)/r_2^2)-
(4*(x+c)^3/r_2^4)-(4*c/r_2^2)-
(16*c*(x+c)^2/r_2^4)+(32*c*(x+c)^4/r_2^6)+(24*c^2*(x+c)/r_2^4)-
(32*c^2*(x+c)^3/r_2^6));
G_yyy= ((6*(x-c)/r_1^2)-(4*(x-c)^3/r_1^4)-
(6*(x+c)/r_2^2)+(4*(x+c)^3/r_2^4)-(4*c/r_2^2)+(32*c*(x+c)^2/r_2^4)-
(32*c*(x+c)^4/r_2^6)-(24*c^2*(x+c)/r_2^4)+(32*c^2*(x+c)^3/r_2^6));
G_yxy= y*((-2/r_1^2)+(4*(x-c)^2/r_1^4)+(2/r_2^2)-(4*(x+c)^2/r_2^4)-
(8*c*(x+c)/r_2^4)+(32*c*(x+c)^3/r_2^6)+(8*c^2/r_2^4)-
(32*c^2*(x+c)^2/r_2^6));
```

```

%   if SBmax/(f*Po)<=(4*(1-sqrt(1-Q_P/f)));
%       disp('Escorregamento Reverso Acontecendo');
%   else

        x_a=x/a;
        y_a=y/a;

        [S_n] = sigman(x_a,y_a,v);
        [S_ta] = sigmat(x_a,y_a,v);

        x_cl=(x-et)/cl;
        y_cl=y/cl;

        [S_tcl] = sigmat(x_cl,y_cl,v);

        x_c=(x-e)/c;
        y_c=y/c;
        [S_tc] = sigmat(x_c,y_c,v);

%soma das tensões
%fator Multiplic: Sn St_a St_c St_cl      Condição
%Carregamento    [+1  +1  +1  -1 ]      Q'(t)>0
%Máximo           [+1  +1  -1  0 ]      Q'(t)=0 & Q''(t)<0
%Descarregamento [+1  -1  -1  +1 ]      Q'(t)>0
%Mínimo           [+1  -1  +1  0 ]      Q'(t)=0 & Q''(t)>0

if abs(dQ_dt)<1e-6
    if 1*sign(d2Q_dt2)<0
        S=Po*(S_n+f*S_ta-f*(c/a)*S_tc-0*f*(cl/a)*S_tcl+SB_Po);
    else
        S=Po*(S_n-f*S_ta+f*(c/a)*S_tc-0*f*(cl/a)*S_tcl+SB_Po);
    end
else
    if 1*sign(dQ_dt)>0
        S=Po*(S_n+f*S_ta+f*(c/a)*S_tc-2*f*(cl/a)*S_tcl+SB_Po);
    else
        S=Po*(S_n-f*S_ta-f*(c/a)*S_tc+2*f*(cl/a)*S_tcl+SB_Po);
    end
end
end

```

Subrotina para o calculo componente de tenção devido a carga normal

```
%
%+++++
% SUBPROGRAMA PARA CÁCULO DAS TENSÕES NORMAIS
% (c)2011-2011 ESTARLE CAMPOS, Grupo de Fadiga, Fratura e Materiais
% Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília
% versão 1: Contato cilindro paralelo no plano,
% última modificação em: 15 de novembro de 2011
%+++++

function [S_nreal] = sigman(x,y,v);
%TENSÕES DEVIDO A PRESSÃO NORMAL

    if abs(y)<(10^-6);
        y=10^-6;
    end
    s=sqrt((1/2)*(-(1^2-x^2-y^2)+sqrt((1^2-x^2-(y^2))^2 +
4*y^2)));
    if abs(s)< 10^(-6);
        s= 10^(-6);
    end

    SigxxN = 1*y/1*(2 - s/sqrt(1^2+s^2)-((sqrt(1^2+s^2))/s)-
(x^2*s^3*1^2)/(((1^2 + s^2)^(3/2))*(s^4+(1^2)*y^2)));
    SigyyN = 1*(-y^3*1*(sqrt(1^2+ (s^2)))/(s*(s^4+(1^2)*y^2)));
    SigzzN = -1*2*y*(v/1)*(sqrt(1^2+s^2))/(s)-1);
    TauxyN = -1*((x)*y^2*s*1)/(sqrt(1^2+s^2)*(s^4 + (1^2)*y^2));
    TauyzN = 0;
    TauzxN = 0;

S_nreal=[SigxxN,TauxyN,TauzxN
        TauxyN,SigyyN,TauyzN
        TauzxN,TauyzN,SigzzN];
end
```

Subrotina para o cálculo componente de tensão devido a carga Tangencial

```
%
%+++++
% SUBPROGRAMA PARA CÁLCULO DAS TENSÕES TANGENCIAIS
% (c)2011-2011 ESTARLE CAMPOS, Grupo de Fadiga, Fratura e Materiais
% Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília
% versão 1: Contato cilindro paralelo no plano,
% última modificação em: 15 de novembro de 2011
%+++++

function [S_treal] = sigmat(x,y,v);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    if abs(y)<(10^-6);
        y=10^-6;
    end
    s=sqrt((1/2)*(-(1^2-x^2-y^2)+sqrt((1^2-x^2-(y^2))^2 +
4*y^2)));
    if abs(s)< 10^(-6)
        s= 10^(-6);
    end

    SigxxTa = 1*(-(2*x/1*(1-
s/(sqrt(1^2+s^2))))+(x*y^2*s^1)/(sqrt(1^2+s^2))*(s^4+(1^2)*y^2));
    SigyyTa = -1*(x*y^2*s^1)/(sqrt(1^2+s^2))*(s^4+(1^2)*y^2);
    SigzzTa = -1*2*x*(v/1)*(1-(s)/(sqrt(1^2+s^2)));
    TauxyTa = 1*y/1*(2 - s/sqrt(1^2+(s)^2)-((sqrt(1^2+s^2))/s)-
(x^2*s^3*1^2)/(((1^2 + s^2)^(3/2))*(s^4+(1^2)*y^2)));
    TauyzTa = 0;
    TauzxTa = 0;

    S_treal=[SigxxTa,TauxyTa,TauzxTa
            TauxyTa,SigyyTa,TauyzTa
            TauzxTa,TauyzTa,SigzzTa];

end
```

Programa principal para avaliação do Plano Crítico

```
#####
#####
%# This Program Gives the structure of the dada input and the body
#
%#   of the steps calculation critical plain in fretting Fatigue
#
#####
#####
clear all;
%close all;
clc;

disp('*****')
disp('* Cálculo dos Fatores de Intensidade de Tensão em Modo I   *')
disp('* e Modo II na Superfície Contato Cilindro-Plano em Regime *')
disp('* Escorregamento Parcial                                   *')
disp('*                                                           *')
disp('* Metodologia Método de Distribuição de Discordâncias       *')
disp('*                                                           *')
disp('* (c) Campos, E.R. - Universidade de Brasília - UnB        *')
disp('* Última versão: 25/05/2013                                 *')
disp('*****')
disp(' ')

%Input Constantes do Material
E   =210000;           %Yorg Modulus           [Mpa]
KIC =1;               %Fracture Toughness       [MPa.m1/2]
DKth=1;              %DKThreshold             [MPa.m1/2]
v   =0.3;             %Poisson                  [--]
%
-----

%Input Numerical discretization parameters
nt=32;                %Number of time steps    [--]
nb=200;               %Number of crack increments [--]
N =40;                %DKThreshold             [--]
%
-----

%Fretting input Independent Parameters
P1 =[227 227 227 227 227 227 227 227 227 227 540 540 540 540 540 540
540];
Q1 =[ 90  98 126 137 144 146 151 164 169 206 242 243 278 280 282
283];
Q_P1=Q1./P1;
b_exp= [ 0  0 24 29 31 52 55 65 68  0 14 28 77 61 52
75]*1e-3;

for m=3:length(P1)

Q_P=Q_P1(m);          %Tangencial adms for P
SBm=0;                %Bulk Stress             [MPa]
SBa=0;
R   =40;               %Par radius              [mm]
A=4*(1-v2)/E;         %Elastic Constant

```

```

K=1/R;                                     %Equivalent Radius
a=sqrt(2*P1(m)*A/(pi*K));                  %Semi-Width of the
contact
Po = 2*P1(m)/(pi*a);                      %Pick Pressure [MPa]
f =0.9;                                   %Friction Coefficient [--]
O = (0)*pi/180;                           %Angulação da Trinca [graus]
%
%
%
P=pi*K*a^2/(2*A);                          %Normal Load in Pad
%
%
%Step time calculation (sinusoidal ciclic load [rad])
t_i=0;                                     %Initial Time [rad]
t_f=2*pi;                                  %Final Time [rad]
dt = (t_f-t_i)/(nt-1);                    %Length of Time Step [rad]
tl=[pi/2 3*pi/2]; %t_i:dt:t_f;[pi/2 3*pi/2] %Time array
(1) index [rad]
%
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% parâmetros materiais
sY = 350; % tensão de escoamento (MPa)
s_1 = 270; % limite de fadiga axial R = -1 (MPa)

% limiar de propagação R = -1 (MPa m^1/2) - estimado como 2x
% o valor de DKth_01 (ref. livro do Anderson e Kujawski 2001 IJF)
DKth = 7;

% comprimento de transição do regime de trincas curtas para o de
trincas
% longas
b0 = (1/pi) * (DKth/(s_1*1.12))^2 * 10^3; % (mm)
% cálculo do comprimento de transição do regime de trincas curtas para
% o de trincas longas adimensionalizado
b0_a = b0/a;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%Crack increment calculation
b_i= 5e-3;                                %Initial Crack Length [mm]
b_f= 2*b0;                                %Final Crack Length [mm]
db = (b_f-b_i)/(nb-1);                    %Crack Increment Length [mm]
bk= (b_i:db:b_f);                         %Crack Legth array [mm]
%
%
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%MultiAxial Analysis

[theta_c1,phi_c1,w_c1,Tau_a1,Sign_max1,theta_c2,phi_c2,w_c2,Tau_a2,Sign_max2,y_p] = multiaxial_analysis_1(R,E,v,Po,SBm,SBa,Q_P,f,O,b0);

Resultados1=[' y_p' 'theta_c1' 'phi_c1' 'w_c1' 'Tau_a1'
'Sign_max1'];
Resultados11=[y_p' theta_c1' phi_c1' w_c1' Tau_a1' Sign_max1'];

```

```

Resultados2=['      y_p' 'theta_c2' 'phi_c2' 'w_c2' 'Tau_a2'
'Sign_max2'];
Resultados22=[y_p' theta_c2' phi_c2' w_c2' Tau_a2' Sign_max2'];

dados=[m,P,Q1(m),Q_P];
disp('Entradas')
disp('Ensaio Carga P carga Q      Q_P')
disp(dados)
disp('_____')
disp('Resultados')
disp(Resultados1)
disp(Resultados11)
disp('_____')
disp('Resultados2')
disp(Resultados2)
disp(Resultados22)
end
%
```

Subrotina para busca do Plano Crítico

Obs: O campo de Tensão de *Fretting* foi determinado pela mesma subrotina utilizada no calculo do FIT

```
%+++++
% SUBPROGRAMA PARA CÁLCULO DAS TENSÕES NO PLANO CRITICO E ANÁLISE DE
%FALHA PARA FADIGA MUILTIAXIAL
% (c)2011-2011 ESTARLE CAMPOS, Grupo de Fadiga, Fratura e Materiais
% Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília
% versão 1: Contato cilindro paralelos no plano,
% última modificação em: 15 de novembro de 2011
%+++++

function
[theta_c11,phi_c11,w_c11,Tau_a1,Sign_max_c1,theta_c22,phi_c22,w_c22,Ta
u_a2,Sign_max_c2,y_p] =
multiaxial_analysis_1(R,E,v,Po,SBm,SBa,Q_P,f,O,b0)

y_p=[0:(b0)/10:b0/2];

for m=1:length(y_p)

yp=y_p(m);

dd=90; %Numero de Subdivisões dos angulos no espaço

theta=[0:(pi/(2*dd)):pi];
phi   =[0:(pi/dd):(pi)];
w     =[0:(pi/dd):pi/2];

lambda_w     =0;
lambda_phi   =0;
lambda_theta1=0;
lambda_theta2=0;
lambda1      =0;
t1=[0:pi/16:2*pi];

for ii=1:length(theta)
    for jj=1:length(phi)

nb=[sin(phi(jj))*cos(theta(ii));sin(phi(jj))*sin(theta(ii));cos(phi(jj)
)]; %n=(nx,ny,nz)
lb=[-sin(theta(ii)),cos(theta(ii)),0];
%l=(lx,ly,lz)
rb=[-cos(theta(ii))*cos(phi(jj)), -
sin(theta(ii))*cos(phi(jj)),sin(phi(jj))]; %r=(rx,ry,rz)

for nn=1:length(t1)
t=t1(nn);
[S] = fretting_sfield_m( R,E,v,Po,SBm,SBa,Q_P,f,yp,O,t);

Tn=S*nb;
sig_n(nn)=nb'*Tn;
taul(nn)=lb*Tn;
```

```

    taur(nn)=rb*Tn;
end
Sign_max1=max(sig_n);
%base [l,r,n]

    for k=1:length(w);
        e1=[cos(w(k));sin(w(k))];
        e2=[-sin(w(k));cos(w(k))];

        for ll=1:length(t1)
            tau_e1(ll)=[taul(ll),taur(ll)]*e1;
            tau_e2(ll)=[taul(ll),taur(ll)]*e2;
        end

        a_1=max(tau_e1)-min(tau_e1);
        a_2=max(tau_e2)-min(tau_e2);

        tau_a=sqrt((a_1/2)^2+(a_2/2)^2);

        if tau_a>lambda_w
            lambda_w=tau_a;
            w_c=w(k);
            Sign_max=Sign_max1;
        end
    end
    if lambda_w>lambda_phi
        lambda_phi=lambda_w;
        phi_c=phi(jj);
    end
end

if lambda_phi>1.001*lambda_theta2
    lambda_theta2=lambda_phi;
    theta_c2=theta(ii);
    Sign_max22=Sign_max;
    w_c2=w_c;
    phi_c2=phi_c;
end

if lambda_phi>lambda_theta1
    lambda_theta1=lambda_phi;
    theta_c1=theta(ii);
    Sign_max11=Sign_max;
    w_c1=w_c;
    phi_c1=phi_c;
end

end

lambda1=lambda_theta1;
Tau_a1(m)=lambda1;
w_c11(m)=(w_c2/pi)*180;
theta_c11(m)=(theta_c1/pi)*180;
phi_c11(m)=(phi_c/pi)*180;
Sign_max_c1(m)=Sign_max11;

```

```
lambda2=lambda_theta2;  
Tau_a2(m)=lambda2;  
w_c22(m)=(w_c1/pi)*180;  
theta_c22(m)=(theta_c2/pi)*180;  
phi_c22(m)=(phi_c/pi)*180;  
Sign_max_c2(m)=Sign_max22;
```

```
end  
end
```