

**ANÁLISE DINÂMICA NÃO-LINEAR DE PÓRTICOS
ESPACIAIS UTILIZANDO A FORMULAÇÃO CORROTACIONAL**

**WELLINGTON ANDRADE DA SILVA
TESE DE DOUTORADO**

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ANÁLISE DINÂMICA NÃO-LINEAR DE PÓRTICOS
ESPACIAIS UTILIZANDO A FORMULAÇÃO
CORROTACIONAL**

WELLINGTON ANDRADE DA SILVA

ORIENTADOR: WILLIAM TAYLOR MATIAS SILVA

TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

**PUBLICAÇÃO: E.TD – 006A/13
BRASÍLIA/DF: DEZEMBRO – 2013**

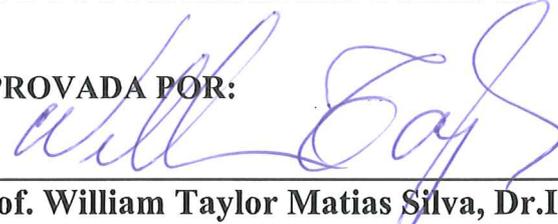
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

ANÁLISE DINÂMICA NÃO-LINEAR DE PÓRTICOS
ESPACIAIS UTILIZANDO A FORMULAÇÃO CORROTACIONAL

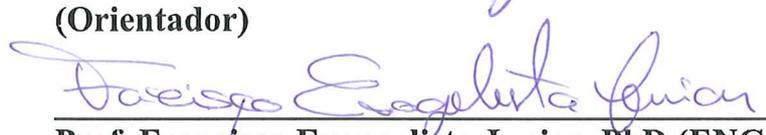
WELLINGTON ANDRADE DA SILVA

TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE
ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE
TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU
DE DOUTOR EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

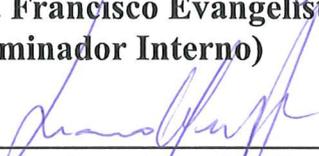
APROVADA POR:



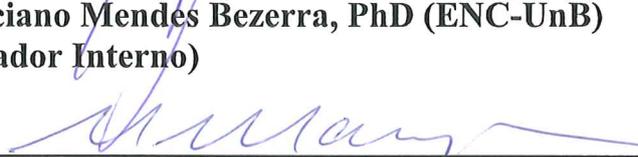
Prof. William Taylor Matias Silva, Dr.Ing (ENC-UnB)
(Orientador)



Prof. Francisco Evangelista Junior, PhD (ENC-UnB)
(Examinador Interno)



Prof. Luciano Mendes Bezerra, PhD (ENC-UnB)
(Examinador Interno)



Prof. Edgar Nobuo Mamiya, DSc (ENM-UnB)
(Examinador Externo)



Prof. Armando Miguel Awruch, DSc (DECIV-UFRGS)
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 06 DE DEZEMBRO DE 2013

FICHA CATALOGRÁFICA

DA SILVA, WELLINGTON ANDRADE

Análise Dinâmica Não-Linear de Pórticos Espaciais Utilizando a Formulação Corrotacional [Distrito Federal] 2013.

xx, 176p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Doutor, Estruturas e Construção Civil, 2013).

Tese de Doutorado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Formulação Corrotacional

2. Pórticos Espaciais

3. Dinâmica Não-Linear

4. Elementos Finitos

I. ENC/FT/UnB

II. Título (Série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

DA SILVA, W. A. (2013). Análise Dinâmica Não-Linear de Pórticos Espaciais Utilizando a Formulação Corrotacional. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.TD–A/11, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 176p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Wellington Andrade da Silva.

TÍTULO: Análise Dinâmica Não-Linear de Pórticos Espaciais Utilizando a Formulação Corrotacional.

GRAU: Doutor

ANO: 2013

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta tese de doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa tese de doutorado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.



Wellington Andrade da Silva

Av. Dr. Lamartine Pinto de Avelar, nº 1120, Setor Universitário, Campus UFG,
Departamento de Engenharia Civil.
75.704-020 Catalão – GO – Brasil.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por guiar-me e acompanhar-me em toda caminhada da vida, e por ser o principal suporte que tenho para alcançar os meus objetivos.

Ao professor William Taylor Matias Silva, orientador deste trabalho, pelos ensinamentos, dedicação e orientação consciente neste período de doutorado, o qual sempre será uma referência em minha vida profissional.

Ao corpo docente e técnico-administrativo do Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil (PECC) da Universidade de Brasília. Em especial, ao professor Luciano Mendes Bezerra, meu orientador de mestrado, pelos ensinamentos, amizade e incentivo durante esses anos vividos na UnB.

Ao professor Zenon Prado, da Escola de Engenharia Civil da Universidade Federal de Goiás, pelos esclarecimentos que foram essenciais para a conclusão desse trabalho.

A família que fiz em Brasília: Marcus Alexandre, Maurício Pina, Thais, Fabio Pessoa, Iviane, Luis Lara, Yamile, André Moreira, João Uchôa, “Lu”. Marcos Honorato, Cristina, Helder Pontes, Bernardo, Hermínio Leão, Fernanda Gouveia e Araão. Aos amigos Murilo Moura Barbosa, Marcelo D’Abadia, Rubens Villar, Kiria Nery, Flávia Martins e Zé Neto. A todos os colegas da UFG Campus Catalão e em especial aos colegas do departamento de Engenharia Civil. Ao meu grande amigo John Eloi e sua esposa Wendy. Ao meu cunhado Carlos Jr. que também contribuiu para a conclusão desse trabalho.

Aos meus pais José e Maria, a minha fonte de amor e carinho. Aos meus irmãos Gleyson e Robson, os meus grandes parceiros da vida. Aos meus tios Dinarte e Irene, os primeiros a me receberem a Brasília e a toda minha família.

A todos os que não foram mencionados, mas que de alguma forma contribuíram para a realização desse trabalho.

Em especial, quero agradecer ao grande amor da minha vida, minha esposa Karlla, pela compreensão e por sempre estar ao meu lado dando-me amor e confiança. Muito obrigado, você é muito especial.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

“Dedico esse trabalho as pessoas mais importantes da minha vida, Maria, José, Karlla, Robson e Gleyson”.

“A verdadeira medida de um homem não se vê na forma como se comporta em momentos de conforto e conveniência, mas em como se mantém em tempos de controvérsia e desafio”.

Martin Luther King

RESUMO

ANÁLISE DINÂMICA NÃO-LINEAR DE PÓRTICOS ESPACIAIS UTILIZANDO A FORMULAÇÃO CORROTACIONAL

Autor: Wellington Andrade da Silva

Orientador: William Taylor Matias Silva

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, dezembro de 2013

Neste trabalho utiliza-se a cinemática corrotacional de elementos de viga 3D de Euler-Bernoulli na análise não-linear dinâmica de pórticos espaciais. A cinemática corrotacional se baseia na separação do movimento em uma parte deformacional, e a outra, em movimento de corpo rígido. Admitem-se grandes translações e rotações de corpo rígido e deformações infinitesimais. Desta maneira, obtém-se uma matriz de rigidez tangente antissimétrica para o elemento de viga 3D. Para os casos estáticos, mostra-se por meio de exemplos numéricos que, de forma análoga ao que ocorre com estruturas solicitadas com forças não conservativas, exemplos envolvendo grandes não-linearidades geométricas também podem atingir uma configuração de equilíbrio sem que ocorra a simetrização da matriz de rigidez tangente global. Com base na metodologia proposta por Géraðin e Cardona, utiliza-se o procedimento de Newmark aplicado ao vetor de rotação incremental e as suas derivadas no tempo, para o tratamento dinâmico das rotações, velocidades e acelerações angulares. Nas soluções dos problemas dinâmicos é empregado o método de integração HHT- α em combinação com o método de *Newton-Raphson*, o qual é utilizado com a finalidade de se obter o equilíbrio das forças internas com os carregamentos externos em cada passo no tempo. Vários testes numéricos são apresentados, comparando-se os resultados da metodologia proposta com resultados de outros modelos apresentados por outros autores. Os resultados obtidos demonstram a eficiência e precisão da presente formulação na análise dinâmica, com e sem amortecimento de estruturas submetidas a grandes deslocamentos.

ABSTRACT

NONLINEAR DYNAMIC ANALYSIS OF SPACE FRAME USING COROTATIONAL FORMULATION

Author: Wellington Andrade da Silva

Supervisor: William Taylor Matias Silva

Postgraduate Program in Structures and Civil Construction Engineering

Brasília, December of 2013

The kinematic co-rotational theory of Euler-Bernoulli's beam in 3D space for nonlinear dynamic analysis of space frames is used in this work. In corotational kinematics the movement is decomposed in deformational and rigid body components. Large rigid body translations and rotations, and infinitesimal strains are adopted. In this way an anti-symmetric stiffness matrix is obtained for the beam element. For static analysis is shown that, in analogy to the case of structures loaded by non-conservative forces, structures with large geometric nonlinearity also can reach an equilibrium configuration without the occurrence of a global symmetric tangent stiffness matrix. Using the methodology proposed by Géradin and Cardona, the Newmark procedure applied to the incremental rotation vector and its time derivative for the dynamic analysis of rotations, angular velocities and accelerations is used. In the solutions of dynamic problems the HHT- α integration method combined with the Newton-Raphson's method (which is used for the purpose of obtaining internal forces equilibrium with the external loadings in each time step) is employed. Several numerical examples are analyzed comparing results of the proposed methodology with results from other models presented by other authors. Results demonstrate the efficiency, reliability and accuracy of this formulation in the dynamic analysis of structures undergoing large displacements.

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO	1
1.1 – HISTÓRICO GERAL.....	2
1.1.1 – Análise não-linear geométrica corrotacional	2
1.1.2 – Análise dinâmica não-linear com rotações finitas	6
1.2 – OBJETIVOS	8
1.3 – ESCOPO DO TRABALHO.....	9
2 – REPRESENTAÇÃO DE ROTAÇÕES FINITAS NA CINEMÁTICA ESPACIAL11	
2.1 – ROTAÇÕES FINITAS	12
2.2 – PEQUENAS ROTAÇÕES.....	17
2.3 – CAMPOS DE VELOCIDADES E ACELERAÇÕES DE UM CORPO RÍGIDO	18
2.4 – VELOCIDADES E ACELERAÇÕES ANGULARES EM TERMOS DO PSEUDO-VETOR DE ROTAÇÃO.....	21
3 – FORMULAÇÃO CORROTACIONAL	26
3.1 – EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO	31
3.2 – ATUALIZAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS	35
3.3 – MUDANÇA DA VARIÁVEL ITERATIVA DE ROTAÇÃO	36
3.4 – OPERADOR DE PROJEÇÃO.....	41
3.5 – VETOR DE FORÇAS INTERNAS E MATRIZ DE RIGIDEZ	48
3.5.1 – Simetrização da matriz de rigidez na configuração de equilíbrio.....	52
3.6 – ESFORÇOS RESULTANTES	56
4 – DINÂMICA NÃO-LINEAR.....	58
4.1 – FORÇA INERCIAL.....	58
4.2 – FORÇA DE AMORTECIMENTO.....	63
4.3 – MATRIZ TANGENTE DE INÉRCIA	65
4.4 – MATRIZ TANGENTE DE AMORTECIMENTO	68
4.5 – INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO NO TEMPO	70
4.5.1 – Atualização das variáveis translacionais pelo método de <i>Newmark</i>	71

4.5.2 – Atualização das variáveis rotacionais pelo método de <i>Newmark</i>	72
4.5.3 – Equação de equilíbrio para o método HHT- α	73
4.5.4 – Implementação da solução numérica	74
5 – EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	77
5.1 – PROBLEMAS ESTÁTICOS.....	77
5.1.1 – Exemplo 01: Viga engastada espacial com curvatura de 45 graus	78
5.1.2 – Exemplo 02: Pórtico em forma de L em balanço.....	83
5.1.3 – Exemplo 03: Viga em balanço com cargas concentradas em sua extremidade livre	89
5.1.4 – Exemplo 04: Viga em balanço com momentos concentrados em sua extremidade livre	94
5.1.5 – Exemplo 05: Pórtico em forma de L com apoios do tipo pino.....	99
5.2 – PROBLEMAS DINÂMICOS NÃO AMORTECIDOS	100
5.2.1 – Exemplo 06: Viga em balanço não amortecida.....	101
5.2.2 – Exemplo 07: Pórtico em L.....	103
5.2.3 – Exemplo 08: Viga engastada com curva de 45 graus	105
5.2.4 – Exemplo 09: Arco circular de grande altura	107
5.2.5 – Exemplo 10: Anel com rotações finitas.....	109
5.2.6 – Exemplo 11: Viga articulada flexível	111
5.3 – PROBLEMAS DINÂMICOS COM AMORTECIMENTO.....	113
5.3.1 – Exemplo 12: Viga em balanço com vibração amortecida	114
5.3.2 – Exemplo 13: Cúpula espacial com vibração amortecida	115
5.3.3 – Exemplo 14: Cobertura espacial hexagonal com vibração amortecida.....	118
5.3.4 – Exemplo 15: Cúpula em forma de estrela com vibração amortecida	123
6 – CONCLUSÕES	129
6.1 – SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	132
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	133
APÊNDICE A – IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	146
APÊNDICE B – MATRIZ DE RIGIDEZ ELÁSTICA.....	149

APÊNDICE C – ARQUIVOS DE ANÁLISE DO ANSYS	151
EXEMPLO 13	151
EXEMPLO 14-A	154
EXEMPLO 14-B	156
EXEMPLO 14-C	159
EXEMPLO 14-D	161
EXEMPLO 15-A	164
EXEMPLO 15-B	167
EXEMPLO 15-C	170
EXEMPLO 15-D	173

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Testes para avaliação da simetrização da matriz de rigidez tangente.....	77
Tabela 5.2 – Deslocamentos na extremidade livre da viga	80
Tabela 5.3 – Propriedades dos materiais.	101
Tabela 5.4 – Parâmetros dinâmicos para a viga em balanço não amortecida.	103
Tabela 5.5 – Avaliação dos deslocamentos w no topo da cobertura.	122
Tabela 5.6 – Avaliação dos deslocamentos w no nó central da cúpula.....	128

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Exemplificação do caráter não vetorial das rotações no espaço.	11
Figura 2.2 – Translação e rotação de um corpo rígido no espaço.	12
Figura 2.3 – Representação do movimento de um corpo rígido no espaço (Q' e O').	19
Figura 3.1 – Vetores unitários que definem os sistemas global, local e nodais de eixos. ...	26
Figura 3.2 – Translações e rotações generalizadas de um elemento de pórtico espacial. ...	28
Figura 3.3 – Deslocamentos generalizados u_i e θ_i de um elemento genérico.	29
Figura 3.4 – Natureza não conservativa de momentos sobre eixos fixos (Cole, 1990).	53
Figura 3.5 – Conversões de sinais e esforços resultantes.	57
Figura 5.1 – Viga circular em balanço com carga aplicada na extremidade.	78
Figura 5.2 – Deformadas da estrutura.	79
Figura 5.3 – Trajetórias de equilíbrio para a extremidade livre da viga para $-uR$, vR e $-wR$ usando 8 elementos finitos de viga.	79
Figura 5.4 – N_{fro} vs deslocamento v na extremidade livre da viga.	80
Figura 5.5 – C_{max} vs deslocamento v na extremidade livre da viga.	81
Figura 5.6 – N_{fro} vs graus de liberdade.	81
Figura 5.7 – C_{max} vs graus de liberdade.	82
Figura 5.8 – Evolução iterativa dos testes N_{fro} e C_{max} para carga de 50 N e malha com 8 elementos finitos de viga.	82
Figura 5.9 – Evolução iterativa dos testes N_{fro} e C_{max} para carga de 100 N e malha com 8 elementos finitos de viga.	83
Figura 5.10 – Pórtico em forma de L em balanço.	83
Figura 5.11 – Trajetória de equilíbrio secundário em função os deslocamento w	84
Figura 5.12 – Configurações deformadas para o pórtico em L.	85
Figura 5.13 – N_{fro} vs deslocamento w na extremidade livre do pórtico.	85
Figura 5.14 – C_{max} vs deslocamento w na extremidade livre do pórtico.	86
Figura 5.15 – N_{fro} vs graus de liberdade.	87
Figura 5.16 – C_{max} vs graus de liberdade.	87
Figura 5.17 – N_{fro} vs graus de liberdade.	88
Figura 5.18 – C_{max} vs graus de liberdade.	88
Figura 5.19 – Evolução iterativa de N_{fro} e C_{max} para carga de 0,7 N e malha com 40 elementos finitos de viga.	89

Figura 5.20 – Evolução iterativa de $Nfro$ e $Cmax$ para carga de 1,2 N e malha com 40 elementos finitos de viga.	89
Figura 5.21 – Viga em balanço com cargas concentradas na extremidade livre.	90
Figura 5.22 – Valores de $-u$, v e w na extremidade livre da viga.	90
Figura 5.23 – $Nfro$ vs deslocamento v na extremidade livre da viga.	91
Figura 5.24 – $Cmax$ vs deslocamento v na extremidade livre da viga.	91
Figura 5.25 – $Nfro$ vs graus de liberdade.	92
Figura 5.26 – $Cmax$ vs graus de liberdade.	92
Figura 5.27 – Evolução iterativa de $Nfro$ e $Cmax$ para carga de 0,5 N e malha com 20 elementos finitos de viga.	93
Figura 5.28 – Evolução iterativa de $Nfro$ e $Cmax$ para carga de 15,0 N e malha com 20 elementos finitos de viga.	93
Figura 5.29 – Configurações deformadas para a viga em balanço com cargas concentradas na extremidade.	94
Figura 5.30 – Viga em balanço com momentos concentrados na extremidade livre.	94
Figura 5.31 – Valores de $-u$, v e $-w$ na extremidade livre da viga.	95
Figura 5.32 – $Nfro$ vs deslocamento v na extremidade livre da viga.	95
Figura 5.33 – $Cmax$ vs deslocamento v na extremidade livre da viga.	96
Figura 5.34 – $Nfro$ vs graus de liberdade.	96
Figura 5.35 – $Cmax$ vs graus de liberdade.	97
Figura 5.36 – Evolução iterativa de $Nfro$ e $Cmax$ para carga de 10 Nmm e malha com 20 elementos finitos de viga.	97
Figura 5.37 – Evolução iterativa de $Nfro$ e $Cmax$ para carga de 50 Nmm e malha com 20 elementos finitos de viga.	98
Figura 5.38 – Configurações deformadas para a viga em balanço com momentos concentrados na extremidade.	98
Figura 5.39 – Pórtico em forma de L com apoios tipo pino.	99
Figura 5.40 – Deslocamento w no topo do pórtico.	100
Figura 5.41 – Viga em balanço não amortecida com carga transversal na extremidade.	101
Figura 5.42 – Deslocamento vertical v da extremidade livre.	102
Figura 5.43 – Pórtico em L não amortecido com força dinâmica aplicada fora de seu plano.	103

Figura 5.44 – Deslocamento fora do plano w , da extremidade livre e cotovelo do pórtico.	104
Figura 5.45 – Configurações deformadas do pórtico em L.....	105
Figura 5.46 – Viga engastada com curva de 45° com carga súbita na extremidade.....	105
Figura 5.47 – Histórico de deslocamentos para a viga engastada com curva de 45°	106
Figura 5.48 – Configurações deformadas da viga engastada com curva de 45°	107
Figura 5.49 – Arco circular de grande altura com carga rampa de duração infinita.	107
Figura 5.50 – Histórico de deslocamentos no ponto A do arco de grande altura.	108
Figura 5.51 – Configurações deformadas do arco circular.....	109
Figura 5.52 – Anel com rotações finitas.....	109
Figura 5.53 – Histórico de deslocamentos no ponto A do anel.	110
Figura 5.54 – Sequência de configurações deformadas do anel.....	111
Figura 5.55 – Viga articulada flexível.	111
Figura 5.56 – Histórico de deslocamentos w na extremidade livre da viga articulada.	112
Figura 5.57 – Histórico de deslocamentos v na extremidade livre da viga articulada.	113
Figura 5.58 – Histórico de deslocamentos v na extremidade livre da viga articulada.	113
Figura 5.59 – Viga em balanço com vibração amortecida.	114
Figura 5.60 – Histórico de deslocamentos v para a viga em balanço com vibração amortecida.	115
Figura 5.61 – Cúpula espacial com vibração amortecida.....	116
Figura 5.62 – Resposta dinâmica da cúpula espacial para o carregamento harmônico.....	117
Figura 5.63 – Configurações deformadas da cúpula espacial.	118
Figura 5.64 – Cobertura espacial hexagonal com vibração amortecida.	119
Figura 5.65 – Trajetória de equilíbrio para o nó central da cobertura espacial hexagonal.	119
Figura 5.66 – Resposta dinâmica da cobertura hexagonal espacial.	121
Figura 5.67 – Deslocamento w máximo obtido pelo programa <i>SIAE</i>	121
Figura 5.68 – Deslocamento w máximo obtido pelo programa <i>ANSYS</i>	122
Figura 5.69 – Configurações deformadas da cobertura hexagonal espacial.....	123
Figura 5.70 – Cúpula em forma de estrela com vibração amortecida.	124
Figura 5.71 – Trajetória de equilíbrio para o nó central da cúpula em forma de estrela...	125
Figura 5.72 – Resposta dinâmica da cúpula em forma de estrela.....	126
Figura 5.73 – Deslocamento w máximo obtido pelo programa <i>SIAE</i>	127

Figura 5.74 – Deslocamento w máximo obtido pelo programa <i>ANSYS</i>	127
Figura 5.75 – Configurações deformadas da cúpula em forma de estrela.....	128
Figura A.1 – Fluxograma simplificado do programa <i>SIAE</i>	147
Figura A.2 – Algoritmo de resolução do sistema de equações não-lineares do módulo <i>SFRAME_NLG</i> (Menin, 2006).	148

LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIACÕES

A	– Área da seção transversal do elemento de viga
A, B	– Sistemas nodais
A_0, B_0	– Sistemas nodais na configuração inicial.
b	– Parâmetro de ponderação do método de comprimento de arco.
B_d^c	– Relação deslocamento x deformação
C_{Dyn}	– Matriz tangente de amortecimento.
C_{gir}	– Matriz de amortecimento giroscópico.
C_{rel}	– Matriz de amortecimento relativo.
C_0	– Configuração inicial ou indeformada do elemento.
C_{0n}	– Configuração corrotacional do elemento.
C_n	– Configuração atual ou deformada do elemento.
C_{max}	– Máximo coeficiente absoluto
d^c	– Vetor de deslocamentos corrotacionais (translações + rotações).
e	– Direção unitária que define o eixo de rotação para rotações de corpo rígido.
E	– Módulo de elasticidade longitudinal.
f_a	– Vetor de força de amortecimento.
f_k	– Vetor de força inercial.
f_n	– Vetor de força interna.
F_{ext}	– Vetor de forças externas.
G	– Módulo de elasticidade transversal.
G	– Matriz de transformação do sistema global para local em vigas.
I_ρ	– Tensor de Inércia espacial diádico.
l_d	– Número de iterações desejadas no método de comprimento de arco.
I_x, I_y, I_z	– Momentos de inércia da seção transversal do elemento de viga.
L	– Comprimento do elemento de viga na configuração atual.
L_0	– Comprimento do elemento de viga na configuração inicial.
K_{Dyn}	– Matriz tangente de inércia.
K_k	– Matriz centrífuga.
K_t	– Matriz de rigidez tangente global estática.
K_{Total}	– Matriz tangente iterativa total.

\mathbf{K}^A	– Matriz de rigidez tangente global estática antissimétrica.
\mathbf{K}^S	– Matriz de rigidez tangente global estática simétrica.
\mathbf{M}	– Matriz de massa.
M_1, M_2	– Momentos fletores nas extremidades inicial e final do elemento de viga.
N	– Esforço normal no elemento de treliça ou viga na configuração atual.
N_{fro}	– Norma de Frobenius.
\mathbf{P}	– Operador de projeção em elementos de vigas (3D).
$\mathbf{r}(\mathbf{x})$	– Vetor de forças residuais.
\mathbf{R}_θ	– Matriz de rotação total no espaço.
\mathbf{R}_{or}	– Matriz de rotação de corpo rígido no espaço.
$\mathbf{R}_{\partial t}$	– Matriz de rotação deformacional no espaço.
\mathbf{S}_m	– Matriz antissimétrica associada ao vetor \mathbf{m} .
T	– Momento torçor
\mathbf{E}	– Sistema local corrotacional
\mathbf{E}_0	– Sistema local corrotacional na configuração inicial.
Tol	– Tolerância de convergência para o equilíbrio.
\mathbf{u}	– Vetor de deslocamento total no sistema global.
\mathbf{u}_o	– Vetor de deslocamento da origem do sistema de eixos no sistema global.
\mathbf{u}_D	– Vetor de deslocamento deformacional no sistema global.
\mathbf{u}_d^e	– Vetor de deslocamento deformacional no sistema local.
\mathbf{u}_i^c	– Vetor de deslocamento corrotacional.
\mathbf{u}	– Vetor deslocamentos translacionais.
$\dot{\mathbf{u}}$	– Vetor de velocidades translacionais.
$\ddot{\mathbf{u}}$	– Vetor de acelerações translacionais.
U	– Energia de deformação na configuração atual.
V_y, V_z	– Esforços cortantes nas direções y e z no elemento de viga (3D).
W_e	– Trabalho realizado pelas forças externas.
W_i	– Trabalho realizado pelas forças internas.
$\dot{\mathbf{W}}$	– Velocidade angular material.
$\ddot{\mathbf{W}}$	– Aceleração angular material.
$\dot{\mathbf{w}}$	– Velocidade angular espacial.
$\ddot{\mathbf{w}}$	– Aceleração angular espacial.

X	– Vetor posição na configuração inicial no sistema global.
X^e	– Vetor posição na configuração inicial no sistema local.
X^c	– Vetor posição em relação ao sistema corrotacional em C_0 .
x	– Vetor posição na configuração atual ou deformada no sistema global.
x^e	– Vetor posição na configuração atual ou deformada no sistema local.
x^c	– Vetor posição em relação ao sistema corrotacional em C .
δd	– Deslocamentos totais virtuais no sistema global.
δd_d	– Deslocamentos deformacionais virtuais no sistema global.
δd^c	– Deslocamentos corrotacionais virtuais no sistema local.
θ^c	– Vetor de rotações corrotacionais.
θ	– Vetor incremental de rotacional.
$\dot{\theta}$	– Vetor de velocidade incremental rotacional.
$\ddot{\theta}$	– Vetor de aceleração incremental rotacional.
ξ	– Razão de amortecimento.
ω	– Frequência natural de vibração.
<i>EICR</i>	– Element Independent Co-Rotational Formulation.
<i>MEF</i>	– Método dos Elementos Finitos.

1 – INTRODUÇÃO

Atualmente, um dos principais focos da engenharia estrutural é a procura por estruturas cada vez mais leves, o que implica na utilização de elementos ou sistemas estruturais com elevada esbeltez. Sabe-se que para a análise estrutural de estruturas com elevada esbeltez, é indispensável considerar os fenômenos que envolvem os conceitos de estabilidade de equilíbrio, bem como, em função do tipo e aplicação da estrutura, realizar uma adequada avaliação da possibilidade de considerar os efeitos dinâmicos. Nesse caso, se a frequência de excitação é muito próxima a das suas frequências naturais, geram-se vibrações de grande amplitude (o que é conhecido com o fenômeno de ressonância).

A avaliação dos efeitos de instabilidade de equilíbrio é de grande importância para o projeto ou avaliação de estruturas em diversas áreas da engenharia (civil, naval, oceânica, aeronáutica etc.) tais como: edificações em aço (hangares, pavilhões de feiras e de exposições, pavilhões industriais, coberturas de estádios, ginásios cobertos), estruturas para utilização como suportes de linhas de transmissão de energia elétrica, de antenas de TV e telecomunicações em geral, pontes, fuselagens de aviões, cascos de embarcações, plataformas *off-shore* e estruturas aeroespaciais (antenas, telescópios e painéis solares). No entanto, existem vários motivos para que essas estruturas, citadas anteriormente, estejam funcionando fora das especificações para as quais foram projetadas, tais como o surgimento de danos e desgastes na estrutura decorrentes de seu uso, gerando uma redução de sua resistência ou que as condições ambientais sejam diferentes daquelas consideradas no projeto ou acréscimos dos carregamentos operacionais considerados no projeto.

Por razões como essas, muitas vezes é necessário efetuar uma análise não linear da estrutura para a determinação da carga última de colapso do correspondente modo de deformação e de possíveis fenômenos de instabilidade dinâmica que possam ocorrer. Em casos onde efeitos de inércia tenham papel importante no desempenho e segurança da estrutura, o desconhecimento dos níveis e características da resposta dinâmica pode levar a falha do sistema.

A simulação numérica do comportamento não-linear estático e dinâmico de estruturas esbeltas, com uso da formulação corrotacional, trata-se de um tema atual (Almeida, 2012;

Le *et al.*, 2012; Almeida e Awruch, 2011; Alsafadie *et al.*, 2011; Le *et al.*, 2011; Schachter *et al.*, 2011; Tsai *et al.*, 2011; Alsafadie *et al.*, 2010; Gonçalves *et al.*, 2010; Li e Quoc, 2010; Lopez e La Sala, 2010; Hsiao *et al.*, 2009; Lanc *et al.*, 2009; Matias e Bezerra, 2009; Battini, 2008; Braun e Awruch, 2008; Caldas, 2008; Khosravi *et al.*, 2008; Madeo, 2008; Yaw, 2008; Battini, 2007; Battini, 2007; Li, 2007; Relvas e Suleman, 2007; Battini e Pacoste, 2006; Lopez, 2006; Relvas e Suleman, 2006; Menin, 2006; Felippa e Haugen, 2005; Urthaler e Reddy, 2005; Cortivo, 2004) e deve ser realizada com a utilização de métodos e técnicas que levem em conta, de maneira adequada, os efeitos de grandes deslocamentos (translações e rotações) bem como as velocidades e acelerações angulares para os casos em que as estruturas estejam submetidas a carregamentos dinâmicos. Portanto, o tema em discussão nesse trabalho, possui uma grande importância prática na engenharia e o seu valor dentro da comunidade científica é notório, sendo comprovado pela grande quantidade de trabalhos recentemente publicados.

1.1 – HISTÓRICO GERAL

1.1.1 – Análise não-linear geométrica corrotacional

A análise não-linear geométrica pelo Método dos Elementos Finitos (*MEF*) tem sido realizada através de três tipos de descrições cinemáticas (Felippa e Haugen, 2005):

- Descrição Lagrangeana total – as equações do *MEF* são formuladas em relação a uma configuração de referência fixa, em geral, a própria configuração inicial assumida pela estrutura;
- Descrição Lagrangeana atualizada – as equações do *MEF* são formuladas em relação à última configuração de equilíbrio, ou seja, a configuração de referência é mantida fixa durante o processo iterativo e, quando se atinge o equilíbrio, todas as tensões e deformações da estrutura passam a ser definidas em relação à nova configuração de equilíbrio;
- Descrição cinemática corrotacional – as equações do *MEF* para cada um dos elementos são formuladas baseando-se em dois sistemas distintos: uma configuração de base, que permanece fixa ao longo de toda a análise e uma configuração corrotacional que acompanha cada um dos elementos. É oportuno

salientar que no sistema corrotacional, pode ser empregada tanto a formulação Lagrangeana total quanto a atualizada (Hsiao *et al.*, 1987).

Um dos grandes desafios da análise não-linear geométrica de estruturas espaciais é o tratamento apropriado das rotações finitas e a separação adequada dos deslocamentos de corpo rígido daqueles que causam deformações. O tratamento de rotações dessa magnitude para os problemas não-lineares tridimensionais não é uma simples extensão de uma formulação bidimensional, visto que, na análise tridimensional, as grandes rotações não são verdadeiras grandezas vetoriais. Conforme Hsiao *et al.* (1987), a regra do paralelogramo, utilizada para a adição de dois vetores, não pode ser aplicada no tratamento de rotações finitas. Nesse caso, o resultado será em função da ordem pela qual as rotações são tomadas, caracterizando a invalidade da propriedade de comutatividade dos vetores (Argyris *et al.*, 1979).

A abordagem corrotacional tem raízes numa ideia muito antiga da mecânica do contínuo, a qual precede o método dos elementos finitos por mais de um século: a separação ou isolamento entre os movimentos deformacionais e de corpo rígido. Essa separação dos movimentos de corpo rígido, representados por translações e rotações, e dos movimentos puramente deformacionais é realizada por meio dos sistemas de configuração de base e corrotacional. O sistema de configuração de base é utilizado para medir os deslocamentos de corpo rígido. Já o sistema corrotacional tem o papel de obter os deslocamentos deformacionais, a partir dos quais são definidas as tensões e deformações da estrutura. Inicialmente, essa ideia surgiu em teorias de pequenas deformações superpostas por grandes movimentos de corpo rígido, sendo estudada primeiramente por Cauchy (1827). Ao final da década de 1930, Maurice Anthony Biot defendeu o uso de deformações incrementais, em um corpo inicialmente tensionado, utilizando uma decomposição polar truncada. Uma descrição rigorosa dessa teoria foi feita por Truesdell e Noll (1965); entretanto, estes autores não apresentaram exemplos de aplicação.

As primeiras aplicações tecnológicas dessa área surgiram após a Segunda Guerra Mundial na indústria aeroespacial. A ideia da decomposição em movimentos rígido e puramente deformacional para toda a estrutura foi originalmente usado por projetistas aeroespaciais nas décadas de 1950 e 1960, na investigação de problemas de dinâmica das estruturas,

controle de naves espaciais em órbita e estruturas de aeronaves. A principal motivação era traçar o movimento principal das estruturas.

Assim, por meio da definição de um sistema de eixos de coordenadas cartesianas e ortogonais único, que acompanhasse o movimento do corpo, era possível obter os deslocamentos, velocidades e acelerações unicamente deformacionais de um ponto material. Essa abordagem foi sistematizada por Fraeijs de Veubeke (1976), onde utilizando somente um sistema de eixos corrotacionais, propôs uma formulação para a análise dinâmica de estruturas, sendo denominada configuração fantasma. A determinação de um sistema de eixos único para a estrutura gerava uma enorme dificuldade ao *MEF*, e assim, Bergan e Horrigmoe (1976) e Horrigmoe (1977) levaram o conceito da configuração fantasma para o elemento, ou seja, um sistema de eixo individual para cada elemento.

De acordo com Felippa e Haugen (2005), o termo “corrotacional” foi aparentemente utilizado pela primeira vez em um título de um artigo sobre o *MEF*, por Belytschko e Hsieh (1979). Entretanto, Nour-Omid e Rankin (1991) atribuem o conceito original do procedimento corrotacional aplicado ao *MEF* para Wempner (1969) que aplicou esse conceito no estudo de cascas submetidas a pequenas deformações e grandes deslocamentos, e para Belytschko e Hsieh (1973) que estudaram vigas submetidas a grandes rotações, onde desenvolveram um método fundamentado em um sistema de coordenadas curvilíneas.

Uma importante contribuição ao *MEF* é conferida a Rankin e Brogan (1986), onde introduziram a formulação *EICR* (*Element Independent Corotational Formulation*), que foi em seguida melhorada por Rankin e Nour-Omid (1988) e por Nour-Omid e Rankin (1991), sendo esta a formulação implementada no programa *STAGS* (Rankin *et al.*, 1998). A formulação *EICR* não utiliza de forma explícita o método da configuração fantasma, e sim a utilização dos projetores. Nesse caso, a formulação corrotacional é utilizada diretamente na construção da matriz de rigidez tangente que, conseqüentemente, se torna consistente.

Outra contribuição importante é conferida a Haugen (1994), que desenvolveu elementos triangulares e quadrangulares que continham o grau de liberdade de rotação torcional, combinando a natureza invariável da formulação fantasma e o equilíbrio e a consistência da formulação de *EICR*. Outras contribuições são conferidas a Hsiao e Hou (1987) e Hsiao

et al. (1987), que apresentaram formulações simples e eficientes para a remoção da restrição de pequenas rotações entre dois passos de carga consecutivos, considerando a análise de segunda ordem elástica de pórticos planos e espaciais.

Cardona (1989) utilizou o conceito da formulação corrotacional para o estudo de mecanismos, fornecendo uma grande contribuição relacionada à parametrização de rotações finitas aplicadas a dinâmica não-linear de estruturas. Cole (1990), utilizando a formulação corrotacional, desenvolveu formulações consistentes para o estudo de vigas planas e espaciais, dando destaque especial aos distintos métodos para definição, atualização e parametrização de grandes rotações no espaço. Também realizou o estudo teórico e a implementação computacional de programas capazes de estudar problemas com cargas seguidoras.

Ainda podem ser destacadas as contribuições de Crisfield (1990) e Crisfield (1997), que desenvolveu o conceito de *formulação consistente* corrotacional, onde a matriz de rigidez tangente aparece como a variação da força interna. Peng e Crisfield (1992) aplicaram a formulação consistente corrotacional para o estudo de estruturas de cascas, utilizando uma combinação do elemento triangular de membrana, com deformações constantes e do elemento triangular de placa com curvatura constante. Uma nova aplicação é apresentada por Crisfield e Moita (1996), através de um procedimento teórico, inicialmente introduzido para o estudo de elementos finitos sólidos, sendo em seguida, alterado de modo a abordar também o estudo de vigas espaciais e cascas.

Mattiasson (1983), Mattiasson *et al.* (1984) e Mattiasson *et al.* (1986) utilizaram uma abordagem combinando as descrições Lagrangeana total, Lagrangeana atualizada e corrotacional para estudo envolvendo não-linearidade geométrica. Já Pacoste e Eriksson (1996) ocuparam-se em comparar a utilização das descrições Lagrangeana total e corrotacional para problemas de instabilidade envolvendo vigas planas e espaciais. Posteriormente, Pacoste (1998) fez estudos de instabilidade de estruturas com elementos triangulares de casca planos, fazendo uso dos projetores propostos por Nour-Omid e Rankin (1991).

É importante destacar as contribuições de Souza (2000), que utiliza a formulação corrotacional para a análise inelástica de pórticos planos e espaciais com grandes

deslocamentos. Nessa pesquisa, demonstra-se que, para a formulação proposta, é necessário apenas um elemento finito por elemento estrutural para analisar problemas com grandes rotações de corpo rígido e deformações moderadas. Battini (2002) implementou uma formulação corrotacional para analisar problemas de instabilidade elástica e plástica de vigas planas e espaciais, partindo das formulações de Crisfield (1990) e Pacoste e Eriksson (1996), sugerindo modificações na forma de parametrização das rotações finitas e incluindo um sétimo grau de liberdade para consideração de ligações rígidas.

1.1.2 – Análise dinâmica não-linear com rotações finitas

Os sistemas com comportamento dinâmico podem ser caracterizados como lineares e não-lineares. Para os lineares, prevalece em suas análises o princípio da superposição modal, com um grande desenvolvimento dos métodos matemáticos disponíveis para o seu estudo. Já os sistemas não-lineares, constituem ainda um assunto em aberto, principalmente com a consideração de ações aleatórias.

No caso de sistemas estruturais com comportamento não-linear, a *resposta estrutural* também é não-linear. Nesse caso, obtém-se a *resposta da estrutura* no intervalo temporal desejado, onde as técnicas de superposição modal e a resolução analítica não são comumente utilizadas na análise de tais sistemas. Consequentemente, o procedimento de aplicação geral para resolução desses problemas é dado pelos métodos de integração direta, classificados como métodos explícitos e implícitos, e a obtenção da resposta dinâmica não-linear é feita mesclando-se técnicas de integração temporal e um método incremental-iterativo.

Como na análise estática, uma questão importante no desenvolvimento de elementos de viga não-lineares dinâmicos é o tratamento das rotações finitas. O fato das rotações finitas serem não-comutativas e não-aditivas impossibilita a aplicação direta do método de integração de Newmark (1959) para rotações finitas. Portanto, esse método deve ser reformulado de acordo com a parametrização das rotações finitas.

Várias formas de parametrização de rotações finitas aplicadas a dinâmica não-linear podem ser encontradas na literatura. Um dos primeiros estudos importantes nesse campo foi desenvolvido por Simo e Vu-Quoc (1988), que utilizaram variáveis de rotação espaciais.

Esse mesmo formato de parametrização também foi utilizado por Crisfield *et al.* (1997), Jelenić e Crisfield (1998 e 1999) e Hsiao *et al.* (1999). Com mesmo grau de importância pode-se citar Cardona e Gérardin (1988), que apresentaram três formulações. Na primeira, foram utilizadas variáveis de rotação materiais. A segunda baseou-se no uso de vetores de rotação totais, tendo como principal vantagem o fato das variáveis rotacionais tornarem-se aditivas, porém, com o inconveniente dos ângulos de rotação ficarem restritos a 2π . Como solução para esse problema, Cardona e Gérardin introduziram o conceito de vetor incremental rotacional na terceira formulação. Nesse caso, a ideia das atualizações aditivas ainda é aplicada, mas apenas dentro de cada incremento. Os vetores incrementais rotacionais também foram adotados por Ibrahimbegović e Mikdad (1998). Mäkinen (2007) também apresentou um elemento de viga baseado no vetor de rotação total, porém, utilizando um processo de comutação para evitar as limitações dos ângulos de rotação. Outra possibilidade de parametrização de rotações finitas, baseada no vetor de rotação conformal, foi adotada por Iura e Atluri (1988) e Geradin e Cardona (1989).

Recentemente, Le *et al.* (2012) apresentaram quatro formulações para dinâmica não-linear de vigas espaciais. A primeira formulação é baseada no método apresentado por Simo e Vu-Quoc (1988), porém, com uma alteração do cálculo das quantidades de rotação nos pontos de Gauss, a fim de obter uma maior eficiência. A segunda é fundamentada no método proposto por Ibrahimbegović e Mikdad (1998) e a terceira é uma variação da formulação proposta por Cardona e Gérardin (1988), utilizando-se agora a forma espacial do vetor de rotação incremental em vez da material. Já a quarta formulação é uma nova proposta, baseada em uma abordagem introduzida por Battini (2008) para a análise estática de estruturas, onde se faz o emprego de três dos quatro parâmetros de Euler (quatérnios) como variáveis de rotação.

Quanto ao problema de integração no tempo para rotações finitas, a literatura técnica apresenta duas abordagens principais. Na primeira, proposta por Simo e Vu-Quoc (1988), as equações de Newmark são escritas usando o vetor de rotação incremental material e a velocidade e aceleração angular material. Essa metodologia foi utilizada nos trabalhos de Crisfield *et al.* (1997), Iura e Atluri (1988) e Jelenić e Crisfield (1998). Ibrahimbegović e Mikdad (1998) reformularam essa metodologia utilizando as formas espaciais da velocidade e aceleração angular. Na segunda metodologia, introduzida por Cardona e Gérardin (1988), o algoritmo de Newmark foi aplicado ao vetor de rotação incremental e as

suas derivadas no tempo. Consequentemente, o procedimento de atualização das quantidades de rotação assume uma forma semelhante à aplicada nos deslocamentos. No trabalho de Mäkinen (2007), essa metodologia foi adotada usando os vetores de rotação totais. Le *et al.* (2012) também apresentam em seu trabalho as duas metodologias citadas anteriormente.

1.2 – OBJETIVOS

Em linhas gerais, o objetivo desta pesquisa foi desenvolver uma ferramenta computacional, através do método dos elementos finitos em uma plataforma corrotacional, para o estudo numérico do comportamento dinâmico não-linear geométrico de pórticos espaciais sujeitos a grandes deslocamentos (translações e rotações) com e sem amortecimento. Para esse fim, foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolver em plataforma Matlab um programa de elementos finitos para análise estática e dinâmica não-linear geométrica de pórticos espaciais com o uso de elemento de viga 3D *Euler-Bernoulli* corrotacional, e validá-lo através de exemplos numéricos. Por ser objeto de um projeto de pesquisa da Universidade Federal de Goiás em parceria com a Universidade de Brasília, o programa foi nomeado como *SIAE* (Sistema Integrado de Análise Estrutural), o qual já possui outros inúmeros recursos que não são apresentados aqui, por não fazer parte dos objetivos desse trabalho;
- Implementar a formulação corrotacional *EICR* (*Element Independent Co-Rotational Formulation*), desenvolvida por Nour-Omid e Rankin (1991);
- Implementar o método do comprimento de arco cilíndrico em combinação com o método de Newton-Raphson, conforme metodologia apresentada por Crisfield (1997), para obtenção das trajetórias de equilíbrio dos problemas estáticos;
- Nos exemplos estáticos, desenvolver um estudo numérico para investigar a simetria da matriz de rigidez tangente global;
- Implementar o procedimento HHT- α (Hughes et al., 1978) em combinação com o método de Newton-Raphson para atualização das variáveis translacionais e rotacionais dos problemas dinâmicos;

- Empregar o procedimento de Newmark aplicado ao vetor de rotação (ou pseudo-vetor) incremental e as suas derivadas no tempo, com base na metodologia proposta por G eradin e Cardona (G eradin e Cardona, 2001; Cardona, 1989; Cardona e G eradin, 1988), para o tratamento din mico das rota es finitas, velocidades e acelera es angulares.

Como contribui es in ditas do presente trabalho, citam-se: o estudo num rico para avalia o da simetriza o da matriz de rigidez tangente, apresentado no cap tulo 5, considerando a formula o corrotacional *EICR*; o emprego da formula o *EICR* para a an lise din mica n o-linear geom trica de p rticos espaciais; e o desenvolvimento da matriz de amortecimento girosc pico C_{gir} , apresentada no cap tulo 4, sendo um elemento que contribui para melhoramento do desempenho incremental iterativo na solu o de problemas que envolvem processos dissipativos (amortecimento estrutural).

Cabe ressaltar que a verifica o de propriedades f sicas como a conserva o do momento linear, momenta angular, energia cin tica translacional e rotacional, energia potencial total, entre outras, n o fazem parte do escopo desse trabalho.

1.3 – ESCOPO DO TRABALHO

O cap tulo 2 se concentra no estudo de grandes rota es, onde   abordado o procedimento para a obten o da matriz de rota o, a qual descreve o movimento de corpo r gido no espa o. Por meio da  lgebra dos quat rnios, tamb m   mostrada a obten o do “*pseudovetor de rota o*” que   resultado da extra o das tr s componentes independentes da matriz de rota o, atrav s do algoritmo de Spurrier (1978). Em seguida, descrevem-se os campos de velocidade e acelera o de um corpo r gido, bem como a estrat gia de parametriza o das velocidades e acelera es angulares por interm dio do pseudo-vetor de rota o.

No cap tulo 3   apresentada a formula o corrotacional para elementos de p rticos espaciais (viga 3D) discretizados utilizando a teoria de *Euler-Bernoulli*, segundo os crit rios da formula o *EICR* proposta por Nour-Omid e Rankin (1991).

Já o capítulo 4 trata da formulação destinada à análise dinâmica não-linear geométrica de pórticos espaciais com grandes deslocamentos e pequenas deformações, com e sem a utilização do amortecimento. A solução das equações diferenciais é realizada com a utilização do procedimento $HHT-\alpha$.

No capítulo 5, encontram-se a análise de vários exemplos numéricos, elucidando a aproximação dos resultados aqui obtidos pelo programa *SIAE* aos de outros pesquisadores ou do programa comercial *ANSYS*, versão 14.

Por fim, o capítulo 6 trata-se das considerações finais sobre a pesquisa desenvolvida. No Apêndice A tem-se a descrição da implementação do programa *SIAE* destinada ao desenvolvimento desse trabalho, e nos Apêndices B e C, são apresentadas, respectivamente a matriz de rigidez do elemento de viga 3D de Euler-Bernoulli e a lista de comandos para a os três exemplos analisados no programa *ANSYS*.

2 – REPRESENTAÇÃO DE ROTAÇÕES FINITAS NA CINEMÁTICA ESPACIAL

A orientação de um corpo rígido no espaço tridimensional, quanto às translações em relação a uma origem conhecida, não é uma tarefa simples. A solução imediata para o problema envolve o uso do teorema das rotações de corpo rígido de *Euler*, onde (Felippa, 2001 e Goldstein,1980): *o movimento de um corpo rígido, fixado em um ponto, pode ser descrito por uma única rotação em torno de um eixo que passa por tal ponto.*

Uma das dificuldades nesse processo resume-se ao fato das operações de rotações, no espaço, não obedecerem às leis do cálculo vetorial, não sendo comutativas. Ou seja, a ordem que se executa as rotações de um corpo rígido pode alterar completamente a sua orientação final obtida. Portanto, ao descrever a orientação de um corpo rígido, além de fornecer os ângulos em torno dos eixos coordenados, deve ser especificada a ordem em que essas rotações devem ser executadas. Para elucidar o caráter não vetorial das rotações no espaço, será aplicada uma sequência de rotações de 90° aos planos (corpos rígidos) A_0 e B_0 , representados na Figura 2.1, e inicialmente contidos no plano xy .

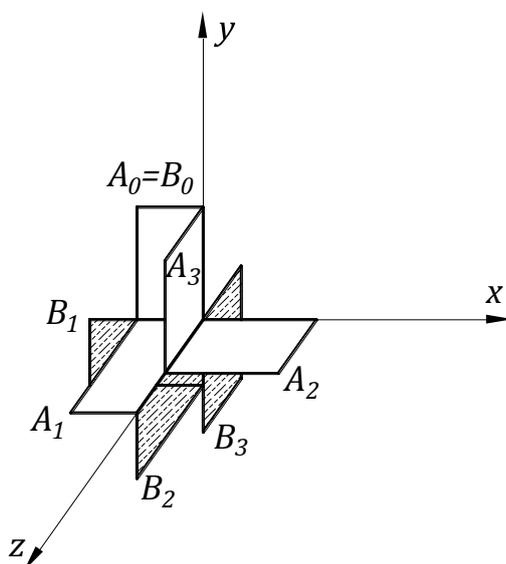


Figura 2.1 – Exemplificação do caráter não vetorial das rotações no espaço.

O plano A_0 sofre uma sequência de rotações em torno dos eixos x , y e z , levando-o para as posições A_1 , A_2 e A_3 , respectivamente. Já o movimento do plano B_0 , representa a sequência inversa das rotações aplicadas no plano A_0 . Ou seja, aplicam-se rotações de 90°

ao plano B_0 em torno dos eixos z , y e x , levando-o para as posições B_1 , B_2 e B_3 , respectivamente. Assim, a mudança da ordem da sequência de rotações levou a resultados completamente diferentes, comprovando a operação como não comutativa.

A seguir, é apresentado o procedimento para obtenção da matriz de rotação no espaço, o qual é norteado por Crisfield (1997). Esse procedimento também foi estudado por Menin (2006) e Monteiro (2004), entre outros autores.

2.1 – ROTAÇÕES FINITAS

O movimento completo de um corpo rígido pode ser separado em duas etapas. Analisando dois pontos P e Q quaisquer de um corpo rígido, indicados na Figura 2.2, inicialmente eles transladam da mesma quantidade \mathbf{d}_{trans} , se deslocando para P' e Q' , respectivamente. Em seguida, é imposta uma rotação θ no corpo rígido em torno de um eixo direcionado segundo o vetor unitário \mathbf{e} , que passa pelo ponto P' , fazendo com que Q' se mova para Q'' . Observando a Figura 2.2, podem-se definir os vetores:

$$\mathbf{r}_0 = P'Q' \quad (2.1)$$

$$\mathbf{r}_n = P'Q'' \quad (2.2)$$

$$\mathbf{d}_{rot} = Q'Q'' \quad (2.3)$$

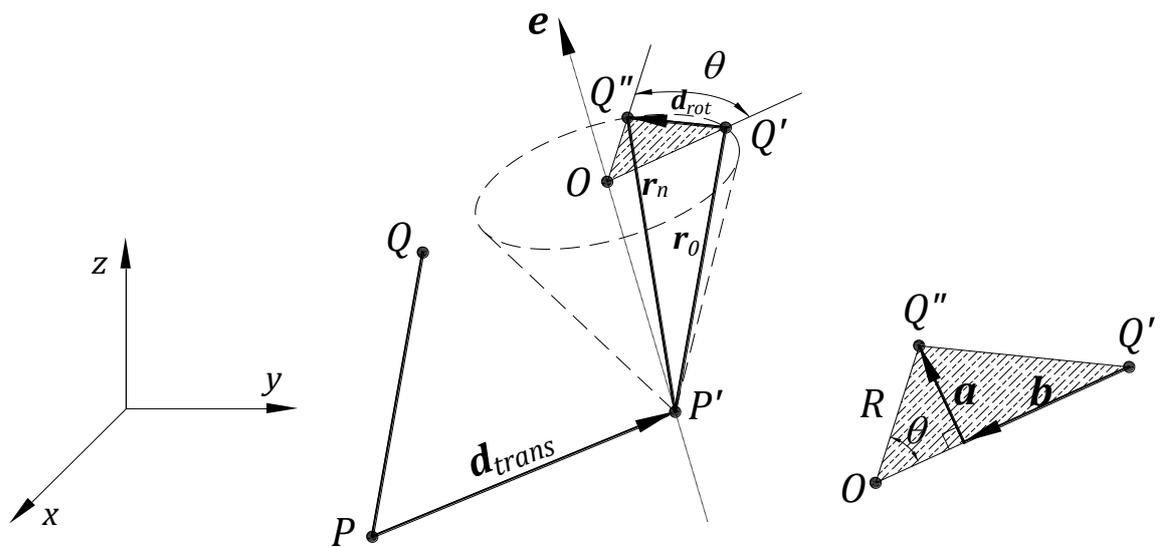


Figura 2.2 – Translação e rotação de um corpo rígido no espaço.

A matriz de rotação \mathbf{R}_θ é responsável por associar, no corpo rígido, um vetor em sua posição antes da rotação, a outro vetor em sua posição após a rotação. O vetor \mathbf{d}_{rot} (corresponde ao deslocamento do ponto Q decorrente da rotação) e a matriz de rotação \mathbf{R}_θ são definidos através das seguintes equações, respectivamente:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{R}_\theta \mathbf{r}_0 \quad (2.4)$$

$$\mathbf{d}_{rot} = Q'Q'' = P'Q'' - P'Q' = \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_0 \quad (2.5)$$

Compete também destacar que a operação com a matriz de rotação, descrita anteriormente, é uma transformação linear por desfrutar das propriedades:

$$\mathbf{R}_\theta(\mathbf{r}_{01} + \mathbf{r}_{02}) = \mathbf{R}_\theta \mathbf{r}_{01} + \mathbf{R}_\theta \mathbf{r}_{02} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{R}_\theta(\gamma \mathbf{r}_{01}) = (\gamma \mathbf{R}_\theta) \mathbf{r}_{01} \quad (2.7)$$

onde γ é um escalar qualquer e \mathbf{r}_{01} e \mathbf{r}_{02} são dois vetores arbitrários.

Por definição, o vetor \mathbf{r}_0 não sofre alterações do seu módulo com a rotação de corpo rígido, ou seja:

$$\mathbf{r}_0^T \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_n^T \mathbf{r}_n = (\mathbf{R}_\theta \mathbf{r}_0)^T (\mathbf{R}_\theta \mathbf{r}_0) = (\mathbf{r}_0^T \mathbf{R}_\theta^T) \mathbf{R}_\theta \mathbf{r}_0 \quad (2.8)$$

ou

$$\mathbf{r}_0^T (\mathbf{I} - \mathbf{R}_\theta^T \mathbf{R}_\theta) \mathbf{r}_0 = 0 \quad (2.9)$$

onde a validade para qualquer vetor \mathbf{r}_0 implica em:

$$\mathbf{R}_\theta^T \mathbf{R}_\theta = \mathbf{I} \quad (2.10)$$

A trajetória descrita pelo ponto Q entre as posições Q' e Q'' , ilustrada na Figura 2.2, por se tratar de um corpo rígido, define um arco de circunferência de raio R , que está contido no plano perpendicular ao eixo de rotação com centro localizado em O . Assim, com base na Equação (2.5), tem-se que:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_0 + \mathbf{d}_{rot} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad (2.11)$$

Os vetores ortogonais \mathbf{a} e \mathbf{b} , onde α corresponde ao ângulo definido entre o eixo de rotação \mathbf{e} e o vetor \mathbf{r}_0 , escrevem-se, respectivamente, na forma:

$$\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\| \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{e} \times \mathbf{r}_0\|} = \|\mathbf{a}\| \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r}_0\| \text{sen}\alpha} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{b} = \|\mathbf{b}\| \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{a}}{\|\mathbf{e} \times \mathbf{a}\|} = \|\mathbf{b}\| \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \quad (2.13)$$

Observando outra vez a Figura 2.2, podem-se obter as seguintes relações:

$$\|\mathbf{r}_0\| \text{sen}\alpha = R \quad \|\mathbf{a}\| = R \text{sen}\theta \quad \|\mathbf{b}\| = R(1 - \cos\theta) \quad (2.14)$$

Substituindo as relações definidas em (2.14) nas Equações (2.12) e (2.13), os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} tomam a forma:

$$\mathbf{a} = (\text{sen}\theta)\mathbf{e} \times \mathbf{r}_0 \quad \mathbf{b} = (1 - \cos\theta)\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{r}_0) \quad (2.15)$$

Inserido a Equação (2.15) em (2.11), e sabendo que o produto vetorial, entre dois vetores \mathbf{m} e \mathbf{n} , pode ser escrito através da transformação linear definida em Argyris (1982):

$$\mathbf{m} \times \mathbf{n} = \mathbf{S}_m \mathbf{n} \quad \mathbf{S}_m = \begin{bmatrix} 0 & -m_3 & m_2 \\ m_3 & 0 & -m_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

onde m_i são as componentes do vetor \mathbf{m} , obtém-se:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_0 + (\text{sen}\theta)\mathbf{e} \times \mathbf{r}_0 + (1 - \cos\theta)\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{r}_0) \quad (2.17)$$

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_0 + (\text{sen}\theta)\mathbf{S}_e \mathbf{r}_0 + (1 - \cos\theta)\mathbf{S}_e \mathbf{S}_e \mathbf{r}_0 \quad (2.18)$$

$$\mathbf{r}_n = (\mathbf{I} + (\text{sen}\theta)\mathbf{S}_e + (1 - \cos\theta)\mathbf{S}_e^2)\mathbf{r}_0 \quad (2.19)$$

Comparando as Equações (2.19) e (2.4), tem-se a chamada *fórmula de Rodrigues* (Rodrigues, 1815), equação que define a matriz de rotação no espaço:

$$\mathbf{R}_\theta = \mathbf{I} + (\text{sen}\theta)\mathbf{S}_e + (1 - \cos\theta)\mathbf{S}_e^2 \quad (2.20)$$

Analisando a Equação (2.10), pode-se afirmar que a matriz de rotação é ortogonal. Essa propriedade faz a matriz de rotação \mathbf{R}_θ ser caracterizada por apenas três componentes (θ_1 , θ_2 e θ_3) independentes, em vez de nove, conforme Cole (1990). A representação da matriz de rotação na forma de um vetor $\boldsymbol{\theta}$, comumente conhecido na bibliografia técnica por vetor rotação ou “*pseudo-vetor de rotação*” (Argyris, 1982) é dada por:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \theta \mathbf{e} \quad , \text{ com } \theta = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \quad (2.21)$$

o que permite reescrever a Equação (2.20) em função das componentes de rotação da seguinte forma:

$$\mathbf{R}_\theta = \mathbf{I} + \frac{\text{sen}\theta}{\theta} \mathbf{S}_\theta + \frac{1}{2} \frac{\text{sen}^2(\theta/2)}{(\theta/2)^2} \mathbf{S}_\theta^2 \quad (2.22)$$

Realizando o problema inverso, ou seja, obtendo-se os componentes de rotação $\boldsymbol{\theta}$ a partir da matriz \mathbf{R}_θ , simbolizado por:

$$\boldsymbol{\theta} = \text{rot}(\mathbf{R}_\theta) \quad (2.23)$$

pode ser efetuado em função da parte antissimétrica de \mathbf{R}_θ expressa por:

$$\frac{\mathbf{R}_\theta - \mathbf{R}_\theta^T}{2} = (\text{sen}\theta) \mathbf{S}_e \quad (2.24)$$

que assume a seguinte forma, depois de expandir as matrizes de rotação:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & R_{12} - R_{21} & R_{13} - R_{31} \\ R_{21} - R_{12} & 0 & R_{23} - R_{32} \\ R_{31} - R_{13} & R_{32} - R_{23} & 0 \end{bmatrix} = \text{sen}\theta \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

onde R_{ij} são as componentes da matriz de rotação \mathbf{R}_θ . Assim, de acordo com a Equação (2.25), pode-se dizer que:

$$(\text{sen}\theta)\mathbf{e} = \text{sen}\theta \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} R_{32} - R_{23} \\ R_{13} - R_{31} \\ R_{21} - R_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{r} \quad (2.26)$$

recordando que $\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{e}$, e que \mathbf{e} é um vetor unitário e $\theta \geq 0$, tem-se:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} & \text{se } \|\mathbf{r}\| = 0 \\ \boldsymbol{\theta} = \text{sen}^{-1}(\|\mathbf{r}\|) \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} & \text{se } \|\mathbf{r}\| \neq 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

Note que os valores de θ estão limitados ao intervalo $(0, \pi/2)$. No entanto, pode-se com facilidade ampliar os valores de θ para $(0, \pi)$ empregando-se o algoritmo de Spurrier (1978):

$$\text{tr}(\mathbf{R}_\theta) = R_{11} + R_{22} + R_{33} \quad (2.28)$$

$$m = \max(\text{tr}(\mathbf{R}_\theta), R_{11}, R_{22}, R_{33}) \quad (2.29)$$

$$n = \sqrt{1 + 2m - \text{tr}(\mathbf{R}_\theta)} \quad (2.30)$$

se $m = \text{tr}(\mathbf{R}_\theta)$

$$q = \frac{n}{2} \quad \mathbf{q} = \frac{1}{2n} [R_{32} - R_{23} \quad R_{13} - R_{31} \quad R_{21} - R_{12}]^T \quad (2.31)$$

se $m = R_{11}$

$$q = \frac{1}{2n} (R_{32} - R_{23}) \quad \mathbf{q} = \frac{1}{2n} [n^2 \quad R_{21} + R_{12} \quad R_{31} + R_{13}]^T \quad (2.32)$$

se $m = R_{22}$

$$q = \frac{1}{2n} (R_{13} - R_{31}) \quad \mathbf{q} = \frac{1}{2n} [R_{12} + R_{21} \quad n^2 \quad R_{32} + R_{23}]^T \quad (2.33)$$

se $m = R_{33}$

$$q = \frac{1}{2n} (R_{21} - R_{12}) \quad \mathbf{q} = \frac{1}{2n} [R_{13} + R_{31} \quad R_{23} + R_{32} \quad n^2]^T \quad (2.34)$$

O algoritmo de Spurrier (1978), descrito anteriormente, extrai da matriz de rotação o escalar q e o vetor \mathbf{q} empregados no cálculo do vetor $\boldsymbol{\omega}$ (Crisfield, 1997):

$$\boldsymbol{\omega} = 2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{e} = \frac{2\mathbf{q}}{q} \quad (2.35)$$

que define o pseudo-vetor de rotação por meio das condições:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} & \text{se } \|\boldsymbol{\omega}\| = 0 \\ \boldsymbol{\theta} = 2 \tan^{-1} \left(\frac{\|\boldsymbol{\omega}\|}{2} \right) \frac{\boldsymbol{\omega}}{\|\boldsymbol{\omega}\|} & \text{se } \|\boldsymbol{\omega}\| \neq 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

As quantidades q e \mathbf{q} são as principais componentes da *álgebra dos quatérnios*, usualmente utilizada no estudo de rotações finitas no espaço.

2.2 – PEQUENAS ROTAÇÕES

Considerando que o corpo rígido, apresentado na Figura 2.2, gire de um pequeno ângulo $\Delta\theta$ em torno do eixo de rotação \mathbf{e} , tem-se que o comprimento de arco descrito pela trajetória de Q , entre as posições Q' e Q'' , pode ser aproximado pela corda $Q'Q''$. Dessa forma:

$$R\Delta\theta \cong \|\mathbf{d}_{rot}\| \quad (2.37)$$

Visto que o deslocamento \mathbf{d}_{rot} pode ser considerado perpendicular ao plano formado entre o eixo de rotação \mathbf{e} e \mathbf{r}_0 , tem-se:

$$\mathbf{d}_{rot} = \|\mathbf{d}_{rot}\| \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{e} \times \mathbf{r}_0\|} = \frac{\|\mathbf{d}_{rot}\|}{R} \mathbf{e} \times \mathbf{r}_0 \quad (2.38)$$

Fazendo a substituição da Equação (2.37) na Equação (2.38), pode-se dizer que:

$$\mathbf{d}_{rot} = \Delta\theta \mathbf{e} \times \mathbf{r}_0 = \Delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_0 \quad (2.39)$$

Desse modo, para se obter a matriz de rotação no caso de pequenas rotações, basta substituir a Equação (2.39) na Equação (2.11):

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_0 + \Delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{S}_{\Delta\boldsymbol{\theta}} \mathbf{r}_0 = (\mathbf{I} + \mathbf{S}_{\Delta\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{r}_0 = \mathbf{R}_{\Delta\boldsymbol{\theta}} \mathbf{r}_0 \quad (2.40)$$

$$\mathbf{R}_{\Delta\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{I} + \mathbf{S}_{\Delta\boldsymbol{\theta}} \quad (2.41)$$

que representa a linearização da *fórmula de Rodrigues*. Desse modo, pequenas rotações podem ser tratadas vetorialmente. Se um corpo sofre uma rotação $\Delta\theta_1$, seguida de outra rotação $\Delta\theta_2$, sabe-se que:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{R}_{\Delta\theta_2}\mathbf{R}_{\Delta\theta_1}\mathbf{r}_0 = \mathbf{R}_{\Delta\theta_{12}}\mathbf{r}_0 \quad (2.42)$$

A matriz de rotação resultante

$$\mathbf{R}_{\Delta\theta_{12}} = (\mathbf{I} + \mathbf{S}_{\Delta\theta_2})(\mathbf{I} + \mathbf{S}_{\Delta\theta_1}) = \mathbf{I} + \mathbf{S}_{\Delta\theta_1} + \mathbf{S}_{\Delta\theta_2} + \mathbf{S}_{\Delta\theta_1}\mathbf{S}_{\Delta\theta_2} \quad (2.43)$$

$$\mathbf{R}_{\Delta\theta_{12}} = \mathbf{I} + \mathbf{S}_{\Delta\theta_1} + \mathbf{S}_{\Delta\theta_2} \quad (2.44)$$

onde a parcela $\mathbf{S}_{\Delta\theta_1}\mathbf{S}_{\Delta\theta_2}$ é desprezada por se tratar de um infinitésimo de ordem superior. Conseqüentemente, $\mathbf{R}_{\Delta\theta_{12}} = \mathbf{R}_{\Delta\theta_{21}}$ e, logo, $\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 = \Delta\theta_2 + \Delta\theta_1$, ou seja, é válida a propriedade comutativa. A seguir, seções 2.3 e 2.4, com base nos trabalhos de Trindade (1996) e G eradin e Cardona (2001), s o apresentados os procedimentos para parametriza o de velocidades e acelera es angulares.

2.3 – CAMPOS DE VELOCIDADES E ACELERA ES DE UM CORPO R GIDO

Considere um corpo r gido se movendo no espa o, como representado na Figura 2.3. Seja O a origem do referencial inercial, representado pela base \mathbf{E} . Sejam \mathbf{X} e \mathbf{x}_q os vetores-posi o de um ponto arbitr rio Q do corpo. Suponha que o movimento do corpo seja a composi o dos movimentos de transla o pura e rota o pura. No primeiro movimento, todos os pontos do corpo assumem o mesmo deslocamento, que ser o representados pelo deslocamento \mathbf{x}_o do ponto O . J  no segundo movimento, o corpo r gido gira em volta de um eixo que passa pelo ponto O' . Portanto, ap s o movimento, o vetor-posi o do ponto Q assume a forma:

$$\mathbf{x}_q = \mathbf{x}_o + \mathbf{x} \quad (2.45)$$

onde

$$\mathbf{x}_q = OQ' \quad (2.46)$$

$$\mathbf{x}_o = OO' \quad (2.47)$$

$$\mathbf{x} = O'Q' \quad (2.48)$$

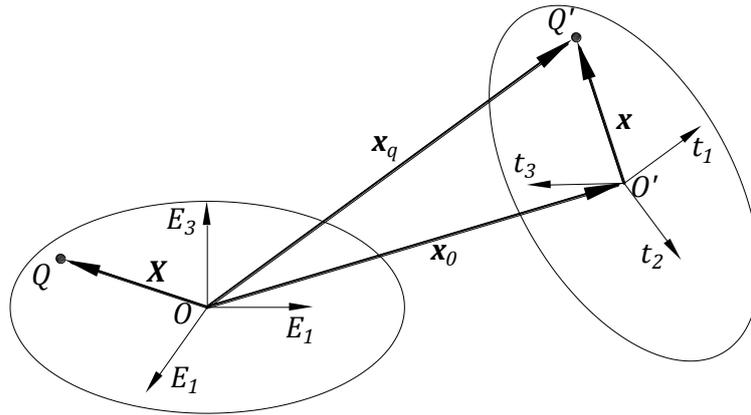


Figura 2.3 – Representação do movimento de um corpo rígido no espaço (Q' e O').

Visto que o segundo movimento trata-se de uma rotação pura, representada pela matriz de rotação \mathbf{R}_θ , o vetor \mathbf{x}_q adquire a forma:

$$\mathbf{x}_q = \mathbf{x}_0 + \mathbf{R}_\theta \mathbf{X} \quad (2.49)$$

Para se obter o vetor velocidade do ponto Q , basta fazer a diferenciação da Equação (2.49) em relação ao tempo no referencial inercial. Assim

$$\dot{\mathbf{x}}_q = \dot{\mathbf{x}}_0 + \dot{\mathbf{R}}_\theta \mathbf{X} + \mathbf{R}_\theta \dot{\mathbf{X}} \quad (2.50)$$

Levando em consideração que o ponto material é fixo em relação à base material, tem-se que $\dot{\mathbf{X}} = 0$. Portanto, a equação anterior se reduz a:

$$\dot{\mathbf{x}}_q = \dot{\mathbf{x}}_0 + \dot{\mathbf{R}}_\theta \mathbf{X} \quad (2.51)$$

Invertendo a Equação (2.49), tem-se:

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}_\theta^T (\mathbf{x}_q - \mathbf{x}_0) \quad (2.52)$$

A forma final do vetor velocidade no ponto Q é obtida substituindo a Equação (2.52) na Equação (2.51):

$$\dot{\mathbf{x}}_q = \dot{\mathbf{x}}_0 + \dot{\mathbf{R}}_\theta \mathbf{R}_\theta^T (\mathbf{x}_q - \mathbf{x}_0) \quad (2.53)$$

onde $\dot{\mathbf{R}}_\theta \mathbf{R}_\theta^T$ é um operador antissimétrico, uma vez que

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\theta^T) = \dot{\mathbf{R}}_\theta \mathbf{R}_\theta^T + \mathbf{R}_\theta \dot{\mathbf{R}}_\theta^T = \dot{\mathbf{R}}_\theta \mathbf{R}_\theta^T + (\dot{\mathbf{R}}_\theta \mathbf{R}_\theta^T)^T = \mathbf{0} \quad (2.54)$$

Dessa forma, utilizando a relação definida na Equação (2.16), é possível definir o operador antissimétrico como $\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{w}}} = \dot{\mathbf{R}}_\theta \mathbf{R}_\theta^T$, onde $\dot{\mathbf{w}}$ é o vetor velocidade angular em coordenadas espaciais. Portanto, a velocidade $\dot{\mathbf{x}}_q$ pode ser escrita como:

$$\dot{\mathbf{x}}_q = \dot{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{w}}} (\mathbf{x}_q - \mathbf{x}_0) \quad (2.55)$$

A velocidade angular também pode ser expressa na configuração material. As quantidades espacial e material são conectadas pela relação:

$$\dot{\mathbf{W}} = \mathbf{R}_\theta^T \dot{\mathbf{w}} \quad (2.56)$$

onde $\dot{\mathbf{W}}$ é vetor de velocidade angular em coordenadas materiais. A velocidade angular material também pode ser escrita na forma

$$\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{W}}} = \mathbf{R}_\theta^T \dot{\mathbf{R}}_\theta \quad (2.57)$$

Por outro lado, analisando as acelerações envolvidas em um movimento geral de um corpo rígido, o vetor aceleração do ponto Q pode ser obtido por meio da diferenciação da Equação (2.51), resultando na seguinte equação:

$$\ddot{\mathbf{x}}_q = \ddot{\mathbf{x}}_0 + \ddot{\mathbf{R}}_\theta \mathbf{X} \quad (2.58)$$

Substituindo a Equação (2.52) em (2.58), tem-se:

$$\ddot{\mathbf{x}}_q = \ddot{\mathbf{x}}_0 + \ddot{\mathbf{R}}_\theta \mathbf{R}_\theta^T (\mathbf{x}_q - \mathbf{x}_0) \quad (2.59)$$

O operador $\ddot{\mathbf{R}}_\theta \mathbf{R}_\theta^T$ pode ser representado em termos da Equação (2.57) associada à velocidade angular espacial, assumindo forma:

$$\ddot{\mathbf{R}}_\theta \mathbf{R}_\theta^T = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{R}}_\theta \mathbf{R}_\theta^T) - \dot{\mathbf{R}}_\theta \dot{\mathbf{R}}_\theta^T = \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{w}}} + \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{w}}} \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{w}}} \quad (2.60)$$

onde o primeiro termo (antissimétrico) da Equação (2.60) representa a variação da velocidade angular e o segundo termo (simétrico) representa a aceleração centrífuga. Portanto, a substituição da Equação (2.60) em (2.59) fornece o campo de acelerações de um corpo rígido:

$$\ddot{\mathbf{x}}_q = \ddot{\mathbf{x}}_0 + (\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{w}}} + \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{w}}}^2)(\mathbf{x}_q - \mathbf{x}_0) \quad (2.61)$$

De forma análoga a Equação (2.56), a aceleração angular também pode ser expressa em relação às coordenadas materiais, conforme relação a seguir:

$$\ddot{\mathbf{W}} = \mathbf{R}_\theta^T \ddot{\mathbf{w}} \quad (2.62)$$

2.4 – VELOCIDADES E ACELERAÇÕES ANGULARES EM TERMOS DO PSEUDO-VETOR DE ROTAÇÃO

Para representar a velocidade angular espacial $\dot{\mathbf{w}}$ e material $\dot{\mathbf{W}}$ em termos do vetor de rotação ou pseudo-vetor de rotação $\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{e}$, é necessário relembrar as seguintes propriedades de invariância da matriz de rotação:

$$\mathbf{R}_\theta \mathbf{e} = \mathbf{e} \qquad \mathbf{R}_\theta^T \mathbf{e} = \mathbf{e} \quad (2.63)$$

Derivando as expressões anteriores

$$(\mathbf{R}_\theta - \mathbf{I})\dot{\mathbf{e}} = -\dot{\mathbf{R}}_\theta \mathbf{e} \qquad (\mathbf{R}_\theta^T - \mathbf{I})\dot{\mathbf{e}} = -\dot{\mathbf{R}}_\theta^T \mathbf{e} \quad (2.64)$$

e pré-multiplicando a primeira por \mathbf{R}_θ^T e a segunda \mathbf{R}_θ , obtém-se respectivamente:

$$(\mathbf{R}_\theta^T - \mathbf{I})\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{R}_\theta^T \dot{\mathbf{R}}_\theta \mathbf{e} = \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{w}}} \mathbf{e} \qquad (\mathbf{I} - \mathbf{R}_\theta)\dot{\mathbf{e}} = -\mathbf{R}_\theta \dot{\mathbf{R}}_\theta^T \mathbf{e} = \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{w}}} \mathbf{e} \quad (2.65)$$

Consequentemente, tem-se:

$$(I - R_\theta^T)\dot{e} = S_e \dot{W} \qquad (R_\theta - I)\dot{e} = S_e \dot{w} \qquad (2.66)$$

Entretanto, as equações anteriores não podem ser resolvidas, uma vez que os operadores $(I - R_\theta^T)$ e $(R_\theta - I)$ não são inversíveis, pois

$$(I - R_\theta^T)e = \mathbf{0} \qquad (R_\theta - I)e = \mathbf{0} \qquad (2.67)$$

Contudo, em razão do vetor e ser unitário, a seguinte relação pode ser expressa:

$$\frac{d}{dt}(e^T e) = 2e^T \dot{e} = 0 \qquad (2.68)$$

onde \dot{e} é solução dos seguintes sistemas

$$\begin{bmatrix} I - R_\theta^T \\ e^T \end{bmatrix} \dot{e} = \begin{bmatrix} S_e \dot{W} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} R_\theta - I \\ e^T \end{bmatrix} \dot{e} = \begin{bmatrix} S_e \dot{w} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad (2.69)$$

De acordo com Trindade (1996), as expressões apresentadas em (2.69) representam um sistema formalmente sobredeterminado de quatro equações e três incógnitas. Entretanto, essa sobredeterminação é apenas formal, visto que as três primeiras equações não são linearmente independentes. Para solucionar esse sistema é necessário pré-multiplicá-lo pela inversa de Moore-Penrose (Campbell e Meyer, 1979):

$$[2I - (R_\theta + R_\theta^T) + ee^T]\dot{e} = (I - R_\theta)S_e \dot{W} \qquad (2.70)$$

$$[2I - (R_\theta + R_\theta^T) + ee^T]\dot{e} = (R_\theta^T - I)S_e \dot{w} \qquad (2.71)$$

E agora observando a Equação (2.20), pode-se verificar que:

$$[2I - (R_\theta + R_\theta^T) + ee^T]\dot{e} = 2(1 - \cos\theta)\dot{e} \qquad (2.72)$$

e

$$(I - R_\theta)S_e = (1 - \cos\theta)S_e - \sin\theta S_e^2 \qquad (2.73)$$

$$(\mathbf{R}_\theta^T - \mathbf{I})\mathbf{S}_e = -(1 - \cos\theta)\mathbf{S}_e - (\sin\theta)\mathbf{S}_e^2 \quad (2.74)$$

Assim, é possível obter as seguintes relações:

$$\mathbf{N}\dot{\mathbf{W}} = \dot{\mathbf{e}} \quad \mathbf{N}^T\dot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{e}} \quad (2.75)$$

em que

$$\mathbf{N} = \left[\frac{1}{2}\mathbf{S}_e + \frac{\sin\theta}{2(1 - \cos\theta)}(\mathbf{I} - \mathbf{e}\mathbf{e}^T) \right] \quad (2.76)$$

Contudo as relações apresentadas em (2.75) não podem ser resolvidas, pois a matriz \mathbf{N} não possui posto máximo. Dessa forma, são necessárias as seguintes relações entre as velocidades angulares $\dot{\mathbf{w}}$ e $\dot{\mathbf{W}}$ e a derivada do ângulo de rotação $\dot{\theta}$:

$$\text{tr}(\dot{\mathbf{R}}_\theta) = \text{tr}(\mathbf{R}_\theta\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{W}}}) = \text{tr}(\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{w}}}\mathbf{R}_\theta) = \frac{d}{dt}(\text{tr}(\mathbf{R}_\theta)) = -2\dot{\theta}\sin\theta \quad (2.77)$$

Decompondo a matriz de rotação \mathbf{R}_θ em suas partes simétrica e antissimétrica, tem-se:

$$\mathbf{R}_\theta = \mathbf{M} + \mathbf{S}_a \quad \mathbf{a} = \mathbf{e}\sin\theta \quad (2.78)$$

É possível ainda verificar duas propriedades válidas para quaisquer \mathbf{a} , \mathbf{u} e \mathbf{M} (simétrica):

$$\text{tr}(\mathbf{M}\mathbf{S}_u) = \text{tr}(\mathbf{S}_u\mathbf{M}) = 0 \quad (2.79)$$

$$\text{tr}(\mathbf{S}_a\mathbf{S}_u) = \text{tr}(\mathbf{S}_u\mathbf{S}_a) = -2\mathbf{a}^T\mathbf{u} \quad (2.80)$$

de onde se pode obter

$$\text{tr}(\mathbf{R}_\theta\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{W}}}) = -2\dot{\theta}\sin\theta = -2\mathbf{e}^T\dot{\mathbf{W}}\sin\theta \quad (2.81)$$

$$\text{tr}(\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{w}}}\mathbf{R}_\theta) = -2\dot{\theta}\sin\theta = -2\mathbf{e}^T\dot{\mathbf{w}}\sin\theta \quad (2.82)$$

Com as relações definidas anteriormente, é possível obter os vetores $\dot{\mathbf{W}}$ e $\dot{\mathbf{w}}$ resolvendo os sistemas a seguir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{e}^T \end{bmatrix} \dot{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{N}^T \\ \mathbf{e}^T \end{bmatrix} \dot{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

cujas soluções assumem a forma:

$$\dot{W} = Z^{-1} \begin{bmatrix} N^T & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad \dot{w} = Z^{-1} \begin{bmatrix} N & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

$$Z = N^T N + e e^T \quad (2.85)$$

$$Z^{-1} = [2(1 - \cos\theta)(I - e e^T) + e e^T] \quad (2.86)$$

Consequentemente, é possível escrever as expressões de \dot{w} e \dot{W} em função dos invariantes e e θ e suas derivadas

$$\dot{w} = V^T \dot{e} + e \dot{\theta} \quad (2.87)$$

$$\dot{W} = V \dot{e} + e \dot{\theta} \quad (2.88)$$

onde

$$V = \text{sen}\theta I - (1 - \cos\theta) S_e \quad (2.89)$$

Para determinar as expressões de velocidade angular em termos do pseudo-vetor de rotação $\theta = \theta e$ e de sua derivada temporal, é importante definir as seguintes relações:

$$\dot{\theta} = \dot{e}\theta + e\dot{\theta} \quad e^T \dot{e} = 0 \quad (2.90)$$

Invertendo o sistema anterior, tem-se:

$$\dot{\theta} = e^T \dot{\theta} = \frac{1}{\|\theta\|} \theta^T \dot{\theta} \quad (2.91)$$

$$\dot{e} = (I - e e^T) \frac{\dot{\theta}}{\theta} = -\frac{S_\theta S_\theta}{\|\theta\|^3} \dot{\theta} \quad (2.92)$$

Substituindo as Equações (2.91) e (2.92) em (2.87) e (2.88), as velocidades angulares assumem a forma:

$$\dot{W} = T_\theta \dot{\theta} \quad \dot{w} = T_\theta^T \dot{\theta} \quad (2.93)$$

onde

$$T_\theta = I + \frac{\cos\theta - 1}{\theta^2} S_\theta + \frac{\theta - \text{sen}\theta}{\theta^3} S_\theta^2 \quad (2.94)$$

As acelerações angulares podem ser obtidas derivando as Equações em (2.93):

$$\dot{\mathbf{W}} = \mathbf{T}_\theta \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\mathbf{T}}_\theta \dot{\boldsymbol{\theta}} \qquad \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{T}_\theta^T \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\mathbf{T}}_\theta^T \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.95)$$

onde, de acordo com Cardona (1989):

$$\dot{\mathbf{T}}_\theta \dot{\boldsymbol{\theta}} = c_1 \boldsymbol{\theta} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \dot{\boldsymbol{\theta}} + [c_2 (\boldsymbol{\theta} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T)^2 + c_3] \boldsymbol{\theta} + c_4 \boldsymbol{\theta} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{S}_\theta \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.96)$$

e

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{\theta^2} \left(1 + \cos\theta - \frac{2\text{sen}\theta}{\theta} \right) & c_2 &= \frac{1}{\theta^2} \left(\frac{3\text{sen}\theta}{\theta} - \cos\theta - 2 \right) \\ c_3 &= \frac{\dot{\theta}^2}{\theta^2} \left(1 - \frac{\text{sen}\theta}{\theta} \right) & c_4 &= \frac{1}{\theta^2} \left(\left(\frac{\text{sen}\theta/2}{\theta/2} \right)^2 - \frac{\text{sen}\theta}{\theta} \right) \end{aligned} \quad (2.97)$$

3 – FORMULAÇÃO CORROTACIONAL

O desenvolvimento teórico da formulação corrotacional apresentado na atual seção é fundamentado de acordo com a formulação *EICR* (*Element Independent Corrotacional Formulation*), desenvolvida por Nour-Omid e Rankin (1991), a qual se baseia no princípio da separação dos movimentos de corpo rígido da parcela deformacional do movimento total. Essa separação só é possível em razão da utilização de um sistema local de eixos fixo ao elemento, onde o movimento do elemento em relação a esse sistema descreve somente a deformação do elemento. Desse modo, a energia de deformação do elemento depende somente desse movimento em relação ao sistema local, independente da parcela originária do movimento de corpo rígido. Cabe ressaltar um importante trabalho no cenário nacional desenvolvido no Instituto Tecnológico da Aeronáutica por Monteiro (2004), o qual reproduz a formulação *EIRC* desenvolvida por Nour-Omid e Rankin (1991) e que também norteia a presente seção.

O movimento do elemento de pórtico espacial, contemplado na Figura 3.1, parte da configuração inicial ou de equilíbrio inicial C_0 até a configuração atual ou de equilíbrio corrente C_n , onde se empregam os seguintes sistemas de eixos ortogonais, como é empregado por Rankin e Brogan (1986):

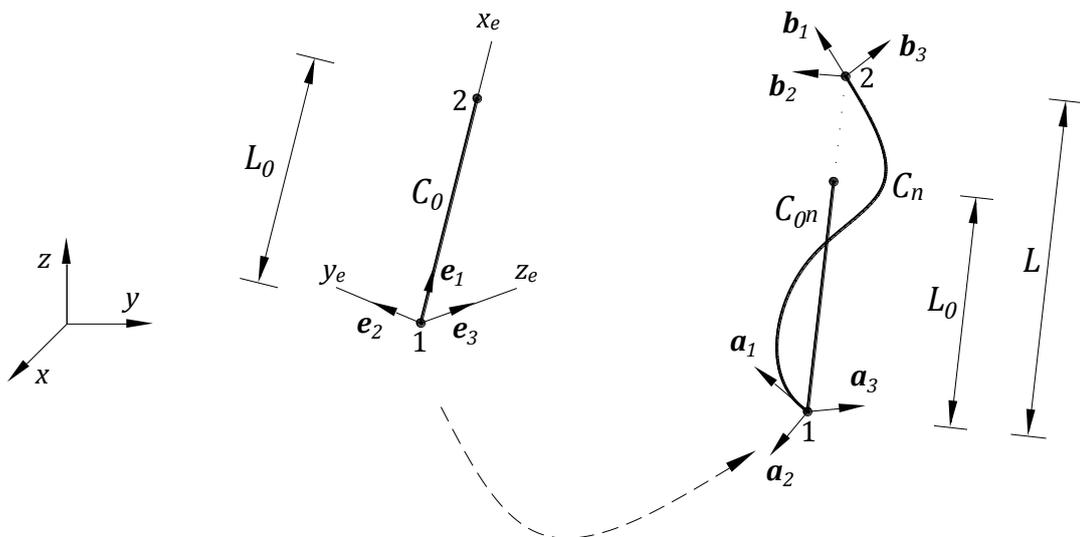


Figura 3.1 – Vetores unitários que definem os sistemas global, local e nodais de eixos.

- *Sistema global xyz* que define a conectividade entre os elementos;

- *Sistema local* $x^e y^e z^e$ que sofre translações e giros continuamente com o elemento, o que sugere a denominação de *sistema corrotacional*, empregado para medir o deslocamento que ocorre entre as configurações indeformada C_{0n} e deformada C_n . O sistema local tem origem no nó 1 e os vetores unitários de sua base são agrupados na matriz $\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3]$;
- Sistemas nodais acoplados ao nó inicial 1 e nó final 2 de cada elemento, onde suas bases são agrupadas nas matrizes $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3]$ e $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3]$, respectivamente.

Na configuração inicial C_0 , o sistema local \mathbf{E}_0 é definido como:

$$\mathbf{E}_0 = [\mathbf{e}_{1_0} \ \mathbf{e}_{2_0} \ \mathbf{e}_{3_0}] \quad (3.1)$$

$$\mathbf{e}_{1_0} = \frac{\mathbf{X}_{21}}{\|\mathbf{X}_{21}\|} \quad \mathbf{e}_{3_0} = \frac{\mathbf{e}_{1_0} \times \mathbf{v}}{\|\mathbf{e}_{1_0} \times \mathbf{v}\|} \quad \mathbf{e}_{2_0} = \mathbf{e}_{3_0} \times \mathbf{e}_{1_0} \quad (3.2)$$

onde $\mathbf{X}_{21} = \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1$, tal que \mathbf{X}_i representa a posição inicial do nó i no sistema global e \mathbf{v} é um vetor contido no plano local $x^e y^e$ do elemento, para auxiliar na definição dos eixos y^e e z^e . Conforme está ilustrado na Figura 3.1, o eixo x^e está localizado na direção longitudinal do elemento, apontando no sentido do nó 1 para o nó 2, e os eixos y^e e z^e têm o posicionamento coincidente com as direções principais de inércia do elemento.

A orientação inicial dos sistemas nodais, na configuração C_0 , é escolhida igual a do sistema local:

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{B}_0 = \mathbf{E}_0 \quad (3.3)$$

O movimento do elemento de pórtico espacial entre as configurações inicial C_0 e atual C_n , como está representado na Figura 3.2, pode ser ilustrado em duas etapas:

1. Os nós 1 e 2 sofrem translações representadas por \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 , deformando axialmente.
2. Os sistemas nodais \mathbf{A} e \mathbf{B} sofrem rotações $\boldsymbol{\theta}_1$ e $\boldsymbol{\theta}_2$ com relação a \mathbf{E}_0 , gerando curvaturas no elemento.

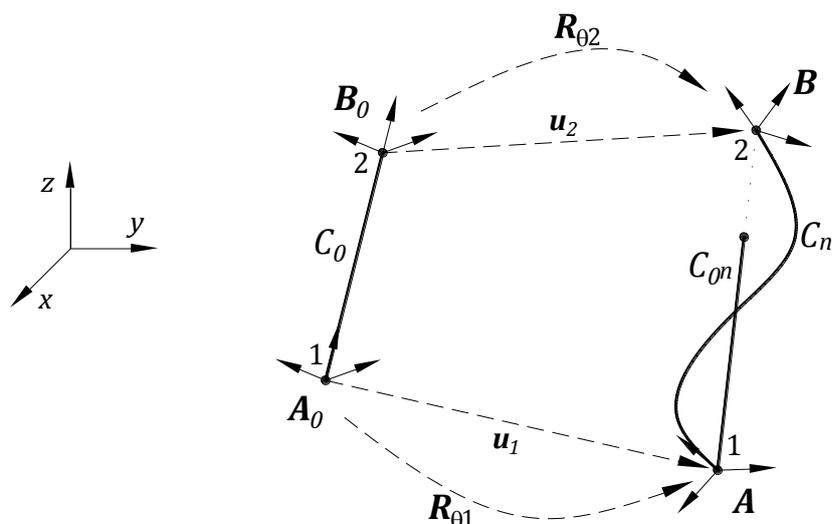


Figura 3.2 – Translações e rotações generalizadas de um elemento de pórtico espacial.

A posição final dos nós em C_n e a orientação dos eixos nodais podem ser expressas por, respectivamente:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{X}_i + \mathbf{u}_i \quad (3.4)$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3] = \mathbf{R}_{\theta_1} \mathbf{A}_0 \quad \mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3] = \mathbf{R}_{\theta_2} \mathbf{B}_0 \quad (3.5)$$

Segundo Rankin e Nour-Omid (1988), o sistema corrotacional \mathbf{E} na configuração C_{0n} , por sua vez, pode ser definido como:

$$\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3] \quad (3.6)$$

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{x}_{21}}{\|\mathbf{x}_{21}\|} \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{a}_2\|} \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 \quad (3.7)$$

onde o eixo \mathbf{e}_1 está direcionado ao longo do eixo longitudinal do elemento, apontando do nó 1 para o nó 2, definido de modo que seja garantido que as rotações em torno do eixo da viga permaneçam na mesma ordem de grandeza das rotações que produzem torção. Utiliza-se o vetor \mathbf{a}_2 na definição dos demais eixos, onde a sua definição pode ser observada em (3.110). Após ter definido o sistema de eixos corrotacionais, é importante estabelecer a mudança de coordenadas entre o sistema global xyz e o local $x^e y^e z^e$, por meio das operações:

$$\mathbf{x}^e = \mathbf{E}^T \mathbf{x} \qquad \mathbf{X}^e = \mathbf{E}^T \mathbf{X} \mathbf{E} \qquad (3.8)$$

onde \mathbf{x} e \mathbf{X} são quantidades tensoriais de primeira e segunda ordem, respectivamente.

Para um elemento finito genérico, representado pelo elemento de pórtico espacial ilustrado na Figura 3.3, os deslocamentos \mathbf{u}_i^c e as rotações θ_i^c do i -ésimo nó medidos entre as configurações C_{0n} e C_n são definidos conforme as expressões indicadas abaixo, nas expressões (3.9) e (3.10). Nelas, a posição inicial \mathbf{X}_i^c e corrente \mathbf{x}_i^c de cada nó em relação ao nó 1 no sistema local possuem as respectivas formas:

$$\mathbf{X}_i^c = \mathbf{E}_0^T (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_1) = \mathbf{E}_0^T \mathbf{X}_{i1} \qquad (3.9)$$

$$\mathbf{x}_i^c = \mathbf{E}^T (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1) = \mathbf{E}^T \mathbf{x}_{i1} \qquad (3.10)$$

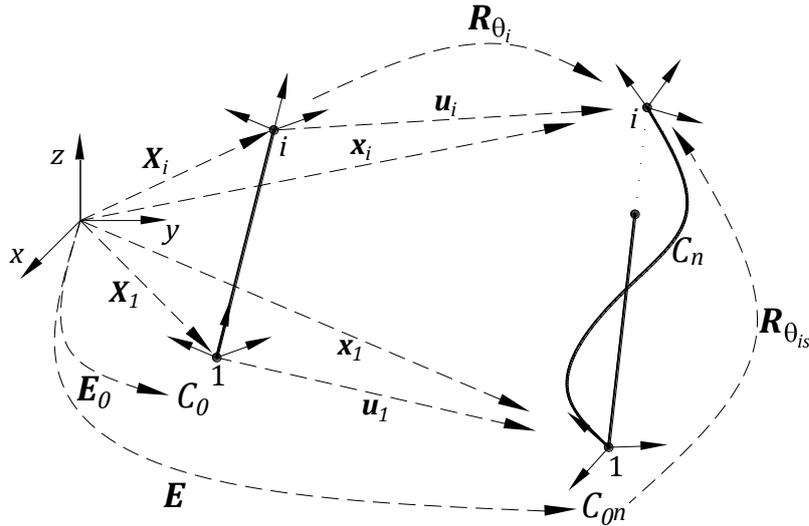


Figura 3.3 – Deslocamentos generalizados \mathbf{u}_i e θ_i de um elemento genérico.

Portanto, o deslocamento corrotacional \mathbf{u}_i^c é alcançado escrevendo-se a relação definida na Equação (3.4) localmente, e substituindo o valor de \mathbf{x}_i^c definido anteriormente na Equação (3.10):

$$\mathbf{u}_i^c = \mathbf{x}_i^c - \mathbf{X}_i^c = \mathbf{E}^T \mathbf{x}_{i1} - \mathbf{X}_i^c \qquad (3.11)$$

$$\mathbf{u}_i^c = \mathbf{E}^T (\mathbf{X}_{i1} + \mathbf{u}_{i1}) - \mathbf{X}_i^c \qquad (3.12)$$

A rotação corrente θ_i é constituída de uma primeira parcela θ_p , referente aos deslocamentos de corpo rígido do elemento que ocorre entre as configurações C_0 e C_{0n} , seguida de uma parcela deformacional θ_{is} que ocorre entre as configurações C_{0n} e C_n . Sabendo que rotação de corpo rígido do elemento nada mais é, por definição, que a rotação entre os eixos E_0 e E , tem-se:

$$\mathbf{R}_{\theta_i} = \mathbf{R}_{\theta_{is}} \mathbf{R}_{\theta_p} = \mathbf{R}_{\theta_{is}} \mathbf{E} \mathbf{E}_0^T \quad (3.13)$$

Portanto:

$$\mathbf{R}_{\theta_{is}} = \mathbf{R}_{\theta_i} \mathbf{R}_{\theta_p}^T = \mathbf{R}_{\theta_i} (\mathbf{E} \mathbf{E}_0^T)^T \quad (3.14)$$

$$\mathbf{R}_{\theta_{is}} = \mathbf{R}_{\theta_i} \mathbf{E}_0 \mathbf{E}^T \quad (3.15)$$

Com auxílio da Equação (3.8), a rotação corrotacional θ_i^c pode ser obtida fazendo a mudança de coordenadas:

$$\mathbf{R}_{\theta_i^c} = \mathbf{E}^T \mathbf{R}_{\theta_{is}} \mathbf{E} = \mathbf{E}^T \mathbf{R}_{\theta_i} \mathbf{E}_0 \quad (3.16)$$

$$\theta_i^c = \text{rot}(\mathbf{R}_{\theta_i^c}) \quad (3.17)$$

Os deslocamentos corrotacionais nodais generalizados tomam a forma:

$$\mathbf{d}^c = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1^c \\ \mathbf{d}_2^c \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

onde, utilizando as Equações (3.3) e (3.5), têm-se:

$$\mathbf{d}_1^c = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^c \\ \theta_1^c \end{Bmatrix} \quad \mathbf{u}_1^c = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \theta_1^c = \text{rot}(\mathbf{E}^T \mathbf{A}) \quad (3.19)$$

$$\mathbf{d}_2^c = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_2^c \\ \theta_2^c \end{Bmatrix} \quad \mathbf{u}_2^c = \begin{Bmatrix} L - L_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \theta_2^c = \text{rot}(\mathbf{E}^T \mathbf{B}) \quad (3.20)$$

Os comprimentos inicial e final do elemento são definidos, respectivamente por:

$$L_0 = \|\mathbf{X}_{21}\| \qquad L = \|\mathbf{x}_{21}\| \qquad (3.21)$$

3.1 – EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

O trabalho virtual provocado pelas forças nodais generalizadas externas \mathbf{F}_{ext} , numa configuração de equilíbrio, é dado por:

$$\delta W_e = \delta \mathbf{D}^T \mathbf{F}_{ext} \qquad (3.22)$$

onde $\delta \mathbf{D}$ representa os deslocamentos virtuais nodais globais generalizados de toda estrutura. O trabalho virtual δW_i realizado pelas forças internas resulta do somatório do trabalho virtual realizado pela distribuição de tensão que atua nos elementos. Dessa forma:

$$\delta W_i = - \sum \int_{V_0} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}) dV_0 \qquad (3.23)$$

Em razão do princípio de invariância de energia interna para os movimentos de corpo rígido, o trabalho produzido pelas forças internas para os deslocamentos virtuais de corpo rígido será nulo. Logo, esse trabalho decorre somente de $\delta \mathbf{d}_d$, que é a parcela deformacional de $\delta \mathbf{d}$. Por ser uma quantidade escalar, os trabalhos virtuais internos originários dos deslocamentos deformacionais obtidos nos sistemas global e local precisam ser idênticos e, desse modo:

$$\delta W_i(\delta \mathbf{d}) = \delta W_i(\delta \mathbf{d}_d) = \delta W_i(\delta \mathbf{d}^c) \qquad (3.24)$$

em que $\delta \mathbf{d}^c$ representa os deslocamentos corrotacionais, em nível do elemento, generalizados, onde os deslocamentos deformacionais de $\delta \mathbf{d}$, estão escritos no sistema local.

Supondo que a relação deformação-deslocamento local seja linear, é plausível escrever as seguintes expressões para o campo de deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$ em função dos deslocamentos corrotacionais \mathbf{d}^c :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_d^c \mathbf{d}^c \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(x^e \quad y^e \quad z^e) \qquad (3.25)$$

onde nesse caso \mathbf{B}_d^c independe de \mathbf{d}^c . Portanto:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \left[\frac{\delta \boldsymbol{\varepsilon}}{\delta \mathbf{d}^c} \right] \delta \mathbf{d}^c = \mathbf{B}_d^c \delta \mathbf{d}^c \qquad (3.26)$$

Utilizando a Equação (3.23) tem-se o trabalho virtual interno:

$$\delta W_i = \sum \int_{V_0} (\delta \mathbf{d}^c)^T (\mathbf{B}_d^c)^T \boldsymbol{\sigma} dV_0 = - \sum (\delta \mathbf{d}^c)^T \mathbf{f}^c \qquad (3.27)$$

onde \mathbf{f}^c é a força corrotacional generalizada do elemento que realiza trabalho com os deslocamentos virtuais $\delta \mathbf{d}^c$, sendo:

$$\mathbf{f}^c = \int_{V_0} (\mathbf{B}_d^c)^T \boldsymbol{\sigma} dV_0 \qquad , \text{ sendo } \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(x^e \quad y^e \quad z^e) \qquad (3.28)$$

Considerando o equilíbrio, tem-se:

$$\delta W_i + \delta W_e = 0 \qquad (3.29)$$

Surge agora a necessidade de estabelecer a relação entre os deslocamentos corrotacionais generalizados do elemento $\delta \mathbf{d}^c$ e a parcela dos deslocamentos nodais generalizados no sistema global $\delta \mathbf{d}$. Assim, tem-se que:

$$\delta \mathbf{d}^c = \mathbf{P} \delta \mathbf{d}^e \qquad (3.30)$$

onde, $\delta \mathbf{d}^e$ é a parcela dos deslocamentos nodais generalizados do elemento escrita no sistema local, definida como:

$$\delta \mathbf{d}^e = \mathbf{G}^T \delta \mathbf{d} \qquad (3.31)$$

com

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Substituindo a Equação (3.30) na Equação (3.29), tem-se:

$$\delta \mathbf{d}^c = \mathbf{P} \mathbf{G}^T \delta \mathbf{d} \quad (3.33)$$

Os deslocamentos $\delta \mathbf{d}^c$ e $\delta \mathbf{d}^e$ são ambos relativos ao sistema local, todavia o primeiro refere-se aos nós na configuração indeformada C_{0n} e o segundo aos nós da configuração deformada atual C_n .

É oportuno destacar que se a configuração C_{0n} for a ideal, ou seja, se for decorrente do movimento completo de corpo rígido do elemento em relação à configuração C_0 , a matriz \mathbf{P} dada em (3.30), atuará como um filtro para os deslocamentos deformacionais. Portanto, quando \mathbf{P} é aplicado sobre o vetor de deslocamentos virtuais nodais $\delta \mathbf{d}^e$, resulta-se apenas a parte deformacional $\delta \mathbf{d}^c$.

Consequentemente, se \mathbf{P} elimina o deslocamento rígido de $\delta \mathbf{d}^e$, ao se aplicar \mathbf{P} sobre a sua parcela deformacional, resultará nela mesma:

$$\delta \mathbf{d}^c = \mathbf{P} \delta \mathbf{d}^c = \mathbf{P} \mathbf{P} \delta \mathbf{d}^e = \mathbf{P}^2 \delta \mathbf{d}^e \quad (3.34)$$

e, portanto:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^2 \quad (3.35)$$

onde \mathbf{P} caracteriza-se como um operador de projeção. De acordo com Rankin e Nour-Omid (1988), o projetor \mathbf{P} apresenta as seguintes propriedades:

- Ao se multiplicar o vetor de forças pela transposta da matriz de projeção, é possível converter o vetor de forças internas desequilibrado em um vetor de forças auto-equilibrado;
- A parcela de corpo rígido de um vetor de deslocamentos incrementais pode ser totalmente eliminada ao se multiplicar pelo projetor \mathbf{P} ;
- Ele é capaz de transformar a matriz de rigidez de um elemento numa matriz sem modos espúrios de corpo rígidos, e caso essa matriz de rigidez já possua os seus modos de energia nulos, a aplicação do projetor \mathbf{P} não produzirá nenhum efeito sobre a matriz de rigidez.

Fazendo a substituição da Equação (3.33) na Equação (3.27), obtém-se:

$$\delta W_i = - \sum \delta \mathbf{d}^T \mathbf{G} \mathbf{P}^T \mathbf{f}^c = - \delta \mathbf{D}^T \mathbf{F} \quad (3.36)$$

onde \mathbf{F} , representado no sistema local por \mathbf{f}^e , é o vetor de forças nodais generalizadas internas de toda estrutura, calculado a partir da contribuição \mathbf{f} de todos os elementos:

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{G} \mathbf{P}^T \mathbf{f}^c = \sum \mathbf{G} \mathbf{f}^e = \sum \mathbf{f} \quad \mathbf{f}^e = \mathbf{P}^T \mathbf{f}^c \quad (3.37)$$

As forças \mathbf{f}^c e \mathbf{f}^e são representadas no sistema local, referindo-se aos nós na configuração C_{0n} e aos nós na configuração C_n , respectivamente. Substituindo as Equações (3.22), (3.34) em (3.29), e levando em consideração a arbitrariedade de $\delta \mathbf{D}$, obtém-se o seguinte sistema de equações não-lineares:

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F} = 0 \quad (3.38)$$

onde a solução é alcançada através do método de *Newton-Raphson*.

Para uma carga externa \mathbf{F}_{ext_k} e uma solução estimativa \mathbf{D}_k , as correções são feitas na seguinte forma:

$$\boldsymbol{\psi}_k + \Delta \boldsymbol{\psi}_k = \mathbf{F}_{ext_k} - \mathbf{F}_k + \Delta \mathbf{F}_{ext_k} + \Delta \mathbf{F}_k = 0 \quad (3.39)$$

Se a direção e magnitude da carga não dependem do movimento da estrutura (cargas conservativas), então:

$$\mathbf{F}_{ext_k} = \mathbf{F}_{ext} \quad (3.40)$$

$$\Delta \mathbf{F}_{ext_k} = 0 \quad (3.41)$$

e admitindo a aproximação:

$$\Delta \mathbf{F}_k = \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{D}} \right]_k \Delta \mathbf{D}_k = \mathbf{K}_{t_k} \Delta \mathbf{D}_k \quad (3.42)$$

através do procedimento de *Newton-Raphson*, tem-se:

$$\mathbf{K}_{t_k} \Delta \mathbf{D}_k = \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_k \quad (3.43)$$

A matriz de rigidez tangente \mathbf{K}_t da estrutura é obtida através contribuição da rigidez tangente \mathbf{k}_t de cada elemento:

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{D}} = \sum \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{d}} = \sum \mathbf{k}_t \quad (3.44)$$

3.2 – ATUALIZAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS

Considerando o procedimento de *Newton-Raphson*, os deslocamentos nodais generalizados são atualizados na forma:

$$\mathbf{D}_{k+1} = \mathbf{D}_k + \Delta \mathbf{D}_k \quad (3.45)$$

que é incoerente para rotações, ou seja, é somente uma estimativa arbitrária para a posição de equilíbrio sem possuir qualquer sentido físico. Assim, se obtém uma nova estimativa para a translação \mathbf{u}_i com base seu valor atual, acrescentado a ele a translação iterativa $\delta \mathbf{u}_i$:

$$\mathbf{u}_i^{k+1} = \mathbf{u}_i^k + \delta \mathbf{u}_i^k \quad (3.46)$$

Ao se atualizar a matriz de rotação, logo, a rotação nodal também será atualizada. A estimativa inconsistente da rotação, utilizando o método de *Newton-Raphson*, tem a forma:

$$\boldsymbol{\theta}_i^{k+1} = \boldsymbol{\theta}_i^k + \delta\boldsymbol{\theta}_i^k \quad (3.47)$$

Por conseguinte, a matriz de rotação associada ao deslocamento rotacional $\boldsymbol{\theta}_i$ pode ser atualizada, de forma consistente, utilizando a seguinte equação:

$$\mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_i}^{k+1} = \mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_i}^k + \delta\mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_i}^k + \dots \quad (3.48)$$

que representa a expansão de $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_i}$ em série de *Taylor*.

Levando em consideração a expressão:

$$\mathbf{S}_e \mathbf{R}_\theta = \mathbf{R}_\theta \mathbf{S}_e = (\cos\theta)\mathbf{S}_e + \sin\theta(\mathbf{S}_e)^2 \quad (3.49)$$

a variação $\delta\mathbf{R}_\theta$ é obtida diferenciando a matriz de rotação definida pela *fórmula de Rodrigues* (Rodrigues, 1815), apresentada anteriormente na Equação (2.20):

$$\delta\mathbf{R}_\theta = \mathbf{S}_e \mathbf{R}_\theta \delta\theta + (\sin\theta)\delta\mathbf{S}_e + (1 - \cos\theta)(\delta\mathbf{S}_e \mathbf{S}_e + \mathbf{S}_e \delta\mathbf{S}_e) \quad (3.50)$$

3.3 – MUDANÇA DA VARIÁVEL ITERATIVA DE ROTAÇÃO

É importante diferenciar o deslocamento virtual de rotação $\delta\boldsymbol{\theta}_i$ da rotação do sistema nodal $\delta\bar{\boldsymbol{\theta}}_i$, visto que a rotação do sistema nodal está relacionada apenas com o giro instantâneo da tríade nodal (eixos nodais), não se relacionando com a variação do campo de deslocamento de rotação do elemento (Nour-Omid e Rankin, 1991). Por conseguinte, será aplicada a rotação do eixo nodal $\delta\bar{\boldsymbol{\theta}}_i$ como variável iterativa de rotação em substituição ao virtual $\delta\boldsymbol{\theta}_i$, fazendo que a variável de rotação se torne $\bar{\boldsymbol{\theta}}$, sendo associada ao mesmo estado de rotação de $\boldsymbol{\theta}$:

$$\mathbf{R}_{\bar{\boldsymbol{\theta}}} = \mathbf{R}_\theta \quad (3.51)$$

onde matriz de rotação é atualizada como:

$$\mathbf{R}_{\bar{\theta}_i}^{k+1} = \mathbf{R}_{\delta\bar{\theta}_i}^k \mathbf{R}_{\bar{\theta}_i}^k \quad (3.52)$$

Todavia, cabe ressaltar que $\delta\bar{\theta} \neq \delta\theta$. Portanto, a equação (3.38) que representa um sistema não-linear, pode ser reescrita na forma:

$$\bar{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{F}_{ext} - \bar{\mathbf{F}} = 0 \quad (3.53)$$

onde $\bar{\boldsymbol{\psi}}$ e $\bar{\mathbf{F}}$ são dependentes da variável $\bar{\boldsymbol{\theta}}$.

Tomando a Equação (3.51) e substituindo a matriz de rotação linearizada, determinada em (2.41), na Equação (3.52), obtém-se:

$$\mathbf{R}_{\bar{\theta}_i}^{k+1} = \mathbf{R}_{\delta\bar{\theta}_i}^k \mathbf{R}_{\bar{\theta}_i}^k = (\mathbf{I} + \mathbf{S}_{\delta\bar{\theta}_i}^k) \mathbf{R}_{\bar{\theta}_i}^k = \mathbf{R}_{\bar{\theta}_i}^k + \mathbf{S}_{\delta\bar{\theta}_i}^k \mathbf{R}_{\bar{\theta}_i}^k \quad (3.54)$$

que, quando comparada a Equação (3.48), institui a relação entre a rotação $\delta\bar{\boldsymbol{\theta}}$ (associada a \mathbf{R}_{θ}) dos eixos cartesianos, e a variação consistente da matriz de rotação $\delta\mathbf{R}_{\theta}$ no sistema global de coordenadas, por meio da expressão:

$$\mathbf{S}_{\delta\bar{\boldsymbol{\theta}}} = \delta\mathbf{R}_{\theta} \mathbf{R}_{\theta}^T \quad (3.55)$$

Substituindo as Equações (3.50) e (2.20) em (3.55), obtém-se:

$$\mathbf{S}_{\delta\bar{\boldsymbol{\theta}}} = \frac{\theta - \text{sen}\theta}{\theta^3} \boldsymbol{\theta}^T \delta\boldsymbol{\theta} \mathbf{S}_{\theta} + \frac{\text{sen}\theta}{\theta} \delta\mathbf{S}_{\theta} + \frac{1 - \text{cos}\theta}{\theta^2} (\mathbf{S}_{\theta} \delta\mathbf{S}_{\theta} - \delta\mathbf{S}_{\theta} \mathbf{S}_{\theta}) \quad (3.56)$$

onde obtém-se a relação:

$$\delta\bar{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\Lambda}_{\theta}^{-1} \delta\boldsymbol{\theta} \quad (3.57)$$

em que:

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\theta}^{-1} = \frac{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}}{\partial\boldsymbol{\theta}} = \frac{\text{sen}\theta}{\theta} \mathbf{I} + \frac{1 - \text{cos}\theta}{\theta^2} \mathbf{S}_{\theta} + \frac{\theta - \text{sen}\theta}{\theta^3} \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}^T \quad (3.58)$$

Fazendo a relação inversa, tem-se:

$$\delta\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Lambda}_\theta \delta\bar{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.59)$$

sendo

$$\boldsymbol{\Lambda}_\theta = \frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}} = \mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{S}_\theta + \xi\mathbf{S}_\theta^2 \quad (3.60)$$

$$\xi = \frac{2\text{sen}\theta - \theta(1 + \text{coss}\theta)}{2\theta^2\text{sen}\theta} \quad (3.61)$$

Uma vez atualizados os deslocamentos \mathbf{u}_i através de (3.46), (3.47) e da matriz de rotação por meio da Equação (3.52), obtém-se os deslocamentos corrotacionais generalizados para o elemento através das Equações (3.12), (3.16) e (3.17). Assim, utilizando o vetor de deslocamentos corrotacionais \mathbf{d}^c e a matriz de rigidez constitutiva \mathbf{k}^c do elemento, se determina o vetor de forças corrotacionais \mathbf{f}^c :

$$\mathbf{f}^c = \mathbf{k}^c \mathbf{d}^c \quad \mathbf{f}^c = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1^c \\ \mathbf{f}_2^c \end{Bmatrix} \quad \mathbf{f}_i^c = \begin{Bmatrix} \mathbf{n}_i^c \\ \mathbf{m}_i^c \end{Bmatrix} \quad (3.62)$$

Entretanto, como foi realizada a mudança de variável de rotação, é indispensável determinar as variáveis $\bar{\mathbf{f}}^c$ e $\bar{\mathbf{k}}^c$ do elemento, onde as forças $\bar{\mathbf{f}}^c$ são calculadas a partir de \mathbf{f}^c através da regra da cadeia aplicada sobre a energia potencial (ϕ) do elemento:

$$\bar{\mathbf{f}}^c = \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial\bar{\mathbf{d}}^c} \right\}^T = \left[\frac{\partial\mathbf{d}^c}{\partial\bar{\mathbf{d}}^c} \right]^T \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{d}^c} \right\}^T = [\mathbf{H}^c]^T \mathbf{f}^c \quad (3.63)$$

onde \mathbf{H}^c tem ordem 12×12 , sendo definida por:

$$\mathbf{H}^c = \left[\frac{\partial\mathbf{d}^c}{\partial\bar{\mathbf{d}}^c} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}^c & \mathbf{H}_{12}^c \\ \mathbf{H}_{21}^c & \mathbf{H}_{22}^c \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

e \mathbf{H}_{ij}^c são submatrizes quadradas 6×6 definidas por:

$$\mathbf{H}_{ij}^c = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}_i^c}{\partial \mathbf{u}_j^c} & \frac{\partial \mathbf{u}_i^c}{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_j^c} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_i^c}{\partial \mathbf{u}_j^c} & \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_i^c}{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_j^c} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Os índices i e j variam de 1 a 2, visto que o elemento de pórtico espacial tem apenas dois nós. Considerando as expressões (3.60) e (3.61):

$$\mathbf{H}_{ij}^c = \begin{bmatrix} \delta_{ij} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \delta_{ij} \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_i^c}{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_i^c} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_j^c}{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_j^c} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

onde δ_{ij} é o delta de *Kronecker*, com:

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 1 \text{ se } i = j \\ \delta_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j \end{cases} \quad (3.67)$$

e $\mathbf{0}$ são matrizes de ordem 3×3 nulas. Levando-se em consideração a invariância do trabalho virtual:

$$(\delta \bar{\mathbf{d}}^c)^T \bar{\mathbf{f}}^c = \delta \mathbf{d}^c \mathbf{f}^c = \delta \mathbf{d}^c (\mathbf{H}^c)^T \quad (3.68)$$

obté-m-se:

$$\bar{\mathbf{f}}^c = (\mathbf{H}^c)^T \mathbf{f}^c = \begin{Bmatrix} \mathbf{n}_1^c \\ (\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\theta}_1^c})^T \mathbf{m}_1^c \\ \mathbf{n}_2^c \\ (\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\theta}_2^c})^T \mathbf{m}_2^c \end{Bmatrix} \quad (3.69)$$

A matriz de rigidez tangente do elemento tem a forma:

$$\bar{\mathbf{k}}^c = \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{f}}^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \right] = \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} [(\mathbf{H}^c)^T \mathbf{f}^c] \quad (3.70)$$

que é calculada na forma:

$$\bar{\mathbf{k}}^c = (\mathbf{H}^c)^T \left[\frac{\partial \mathbf{f}^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \right] + \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} [(\mathbf{H}^c)^T \mathbf{f}^c] = \bar{\mathbf{k}}_1^c + \bar{\mathbf{k}}_2^c \quad (3.71)$$

onde a matriz de rigidez constitutiva $\bar{\mathbf{k}}^c$ é não-simétrica, em razão de ser calculada em função dos deslocamentos corrotacionais \mathbf{d}^c , e não em relação aos deslocamentos $\bar{\mathbf{d}}^c$ que dependem das variáveis ligadas à rotação da tríade nodal (Nour-Omid e Rankin, 1991).

As parcelas simétrica $\bar{\mathbf{k}}_1^c$ e não simétrica $\bar{\mathbf{k}}_2^c$ da matriz de rigidez são escritas como:

$$\bar{\mathbf{k}}_1^c = (\mathbf{H}^c)^T \left[\frac{\partial \mathbf{f}^c}{\partial \mathbf{d}^c} \right] \left[\frac{\partial \mathbf{d}^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \right] = (\mathbf{H}^c)^T \mathbf{k}^c \mathbf{H}^c \quad (3.72)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_2^c = \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} ((\mathbf{H}^c)^T \mathbf{f}^c) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}^c} ((\mathbf{H}^c)^T \mathbf{f}^c) \left[\frac{\partial \mathbf{d}^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \right] \quad (3.73)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_2^c = \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}^c} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{n}_1^c \\ (\Lambda_{\theta_1^c})^T \mathbf{m}_1^c \\ \mathbf{n}_2^c \\ (\Lambda_{\theta_2^c})^T \mathbf{m}_2^c \end{array} \right\} (\mathbf{H}^c)^T \quad (3.74)$$

Sabendo que o vetor \mathbf{f}^c é constante em $\bar{\mathbf{k}}_2^c$, tem-se que:

$$\left[\frac{\partial \mathbf{n}_1^c}{\partial \mathbf{d}^c} \right] = \left[\frac{\partial \mathbf{n}_2^c}{\partial \mathbf{d}^c} \right] = \mathbf{0}_{3 \times 12} \quad (3.75)$$

as demais submatrizes são expressas como:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{d}^c} ((\Lambda_{\theta_1^c})^T \mathbf{m}_1^c) = [\mathbf{0} \quad \Omega_1^c \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}] \quad \Omega_1^c = \frac{\partial}{\partial \theta_1^c} ((\Lambda_{\theta_1^c})^T \mathbf{m}_1^c) \quad (3.76)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{d}^c} ((\Lambda_{\theta_2^c})^T \mathbf{m}_2^c) = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \Omega_2^c] \quad \Omega_2^c = \frac{\partial}{\partial \theta_2^c} ((\Lambda_{\theta_2^c})^T \mathbf{m}_2^c) \quad (3.77)$$

onde $\mathbf{0}$ são matrizes de ordem 3×3 nulas.

Conforme demonstrado por Monteiro (2004) e Nour-Omid e Rankin (1991), as derivadas presentes nas expressões (3.76) e (3.77), tomam a forma:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} ((\Lambda_\theta)^T \mathbf{m}) = -\frac{1}{2} \mathbf{S}_m + \xi (\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{m} \mathbf{I} + \boldsymbol{\theta} \mathbf{m}^T - 2 \mathbf{m} \boldsymbol{\theta}^T) + \mu \mathbf{S}_\theta^2 \mathbf{m} \boldsymbol{\theta}^T \quad (3.78)$$

$$\mu = \frac{1}{\theta} \frac{d\xi}{d\theta} = \frac{\theta (\text{sen} \theta + \theta) - 8 \text{sen}^2(\theta/2)}{4\theta^4 \text{sen}^2(\theta/2)} \quad (3.79)$$

Por fim, substituindo as expressões dadas em (3.75), (3.76) e (3.77) na Equação (3.74), obtém-se:

$$\bar{\mathbf{k}}_2^c = \boldsymbol{\Omega}^c \mathbf{H}^c \quad \boldsymbol{\Omega}^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Omega}_1^c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{\Omega}_2^c \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

Segundo Nour-Omid e Rankin (1991) a influência de $\bar{\mathbf{k}}_2^c$ é desprezível quando as rotações corrotacionais são moderadas ou quando a malha é refinada, em que a matriz $\bar{\mathbf{k}}^c$ do elemento é simétrica.

3.4 – OPERADOR DE PROJEÇÃO

Realizada a mudança da variável de rotação, a Equação (3.30) toma forma:

$$\delta \bar{\mathbf{d}}^c = \bar{\mathbf{P}} \delta \bar{\mathbf{d}}^e \quad (3.81)$$

onde:

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_{11} & \bar{\mathbf{P}}_{12} \\ \bar{\mathbf{P}}_{21} & \bar{\mathbf{P}}_{22} \end{bmatrix}_{12 \times 12} \quad \bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}_i^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}_j^e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial \mathbf{u}_i^c}{\partial \mathbf{u}_j^e} \right] & \left[\frac{\partial \boldsymbol{\theta}_i^c}{\partial \boldsymbol{\theta}_j^e} \right] \\ \left[\frac{\partial \boldsymbol{\theta}_i^c}{\partial \mathbf{u}_j^e} \right] & \left[\frac{\partial \boldsymbol{\theta}_j^c}{\partial \boldsymbol{\theta}_j^e} \right] \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (3.82)$$

A variação do deslocamento corrotacional \mathbf{u}_i^c , determinado anteriormente em (3.12), pode ser escrita como:

$$\delta \mathbf{u}_i^c = \delta \mathbf{E}^T \mathbf{X}_{i1} + \delta \mathbf{E}^T \mathbf{u}_{i1} + \mathbf{E}^T \delta \mathbf{u}_{i1} = \delta \mathbf{E}^T \mathbf{x}_{i1} + \mathbf{E}^T \delta \mathbf{u}_{i1} \quad (3.83)$$

Sabendo que $\mathbf{E} = \mathbf{R}_{\theta_E}$, ao se aplicar a propriedade fundada na Equação (3.55) à tríade local do elemento e realizando a alteração do sistema de coordenadas sugerido na Equação (3.8), obtém-se:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_i^c &= \mathbf{E}^T (\mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_E})^T \mathbf{x}_{i1} + \mathbf{E}^T \delta \mathbf{u}_{i1} \\ &= -\mathbf{E}^T \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_E} \mathbf{E} \mathbf{E}^T \mathbf{x}_{i1} + \mathbf{E}^T \delta \mathbf{u}_{i1} \\ &= -\mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_E} (\mathbf{x}_i^e - \mathbf{x}_1^e) + (\delta \mathbf{u}_i^e - \delta \mathbf{u}_1^e) \end{aligned} \quad (3.84)$$

Admitindo que não existam modos espúrios de corpo rígido associados à translação da origem do sistema local, conforme foi observado por Nour-Omid e Rankin (1991), e lembrado que o nó inicial 1 foi definido como origem do sistema local, têm-se que a sua posição e seus deslocamentos locais são nulos e, portanto:

$$\delta \mathbf{u}_i^c = -\mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_E} \mathbf{x}_i^c + \delta \mathbf{u}_i^e = -\mathbf{S}_{\mathbf{x}_i^c} \delta \bar{\theta}_E^e + \delta \mathbf{u}_i^e \quad (3.85)$$

Analogamente se determina a variação da matriz de rotação associada ao deslocamento corrotacional θ_i^c , definida anteriormente nas Equações (3.16) e (3.17). Levando em consideração a Equação (3.55), tem-se:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{R}_{\theta_i^c} &= (\delta \mathbf{E}^T \mathbf{R}_{\theta_i} + \mathbf{E}^T \delta \mathbf{R}_{\theta_i}) \mathbf{E}_0 \\ &= (\mathbf{E}^T \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_E} + \mathbf{E}^T \mathbf{S}_{\delta \theta_i}) \mathbf{R}_{\theta_i} \mathbf{E}_0 \\ &= (-\mathbf{E}^T \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_E} \mathbf{E} + \mathbf{E}^T \mathbf{S}_{\delta \theta_i} \mathbf{E}) \mathbf{E}^T \mathbf{R}_{\theta_i} \mathbf{E}_0 \\ &= (\mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_i^e} - \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_E^e}) \mathbf{R}_{\theta_i^c} \\ &= (\mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_i^e - \delta \bar{\theta}_E^e}) \mathbf{R}_{\theta_i^c} \end{aligned} \quad (3.86)$$

isolando o termo entre parênteses da equação anterior:

$$(\mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_i^e - \delta \bar{\theta}_E^e}) = \delta \mathbf{R}_{\theta_i^c} \mathbf{R}_{\theta_i^c}^T = \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_i^c} \quad (3.87)$$

A igualdade das respectivas componentes das matrizes $\mathbf{S}_{\delta\bar{\theta}_i^e - \delta\bar{\theta}_E^e}$ e $\mathbf{S}_{\delta\bar{\theta}_i^c}$ permite escrever:

$$\delta\bar{\theta}_i^c = \delta\bar{\theta}_i^e - \delta\bar{\theta}_E^e \quad (3.88)$$

Com base nas Equações (3.85) e (3.88), podem ser definidas as derivadas dos deslocamentos corrotacionais \mathbf{u}_i^c e $\bar{\theta}_i^c$ em relação aos deslocamentos \mathbf{u}_i^e e $\bar{\theta}_i^e$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathbf{u}_i^c}{\partial \mathbf{u}_j^e} \right] &= \mathbf{S}_{x_i^c} \left[\frac{\partial \bar{\theta}_E^e}{\partial \mathbf{u}_j^e} \right] + \left[\frac{\partial \mathbf{u}_i^e}{\partial \mathbf{u}_j^e} \right] = \mathbf{S}_{x_i^c} \left[\frac{\partial \bar{\theta}_E^e}{\partial \mathbf{u}_j^e} \right] + \delta_{ij} \mathbf{I} \\ \left[\frac{\partial \mathbf{u}_i^c}{\partial \bar{\theta}_j^e} \right] &= \mathbf{S}_{x_i^c} \left[\frac{\partial \bar{\theta}_E^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \right] + \left[\frac{\partial \mathbf{u}_i^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \right] = \mathbf{S}_{x_i^c} \left[\frac{\partial \bar{\theta}_E^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \right] \\ \left[\frac{\partial \bar{\theta}_i^c}{\partial \mathbf{u}_j^e} \right] &= \left[\frac{\partial \bar{\theta}_i^e}{\partial \mathbf{u}_j^e} \right] - \left[\frac{\partial \bar{\theta}_E^e}{\partial \mathbf{u}_j^e} \right] = - \left[\frac{\partial \bar{\theta}_E^e}{\partial \mathbf{u}_j^e} \right] \\ \left[\frac{\partial \bar{\theta}_i^c}{\partial \bar{\theta}_j^e} \right] &= \left[\frac{\partial \bar{\theta}_i^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \right] - \left[\frac{\partial \bar{\theta}_E^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \right] = \delta_{ij} \mathbf{I} - \left[\frac{\partial \bar{\theta}_E^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \right] \end{aligned} \quad (3.89)$$

Substituindo as derivadas de (3.89) em (3.82), tem-se as seguintes equações para o projetor na forma compacta e expandida, respectivamente:

$$\bar{\mathbf{P}}_{ij} = \delta_{ij} \mathbf{I} - \boldsymbol{\Psi}_i \boldsymbol{\Gamma}_j^T \quad (3.90)$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{ij} = \delta_{ij} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{x_i^c} \left[\frac{\partial \bar{\theta}_E^e}{\partial \mathbf{u}_j^e} \right] & \mathbf{S}_{x_i^c} \left[\frac{\partial \bar{\theta}_E^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \right] \\ - \left[\frac{\partial \bar{\theta}_E^e}{\partial \mathbf{u}_j^e} \right] & - \left[\frac{\partial \bar{\theta}_E^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \right] \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (3.91)$$

onde:

$$\boldsymbol{\Psi}_i = \begin{bmatrix} -\mathbf{S}_{x_i^c} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = [-\mathbf{S}_{x_i^c} \quad \mathbf{I}]^T \quad (3.92)$$

$$\mathbf{\Gamma}_j = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_E^e}{\partial \mathbf{u}_j^e} \right] & \left[\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_E^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}_j^e} \right]^T \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_E^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}_j^e} \right]^T \quad (3.93)$$

Desse modo, o projetor assume a seguinte forma expandida:

$$\bar{\mathbf{P}}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}_{12 \times 12} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_1 \mathbf{\Gamma}_1^T & \boldsymbol{\Psi}_1 \mathbf{\Gamma}_2^T \\ \boldsymbol{\Psi}_2 \mathbf{\Gamma}_1^T & \boldsymbol{\Psi}_2 \mathbf{\Gamma}_2^T \end{bmatrix}_{12 \times 12} \quad (3.94)$$

ou compacta:

$$\bar{\mathbf{P}}_{ij} = \mathbf{I} - \boldsymbol{\Psi} \mathbf{\Gamma}^T \quad (3.95)$$

sendo

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_1 \\ \boldsymbol{\Psi}_2 \end{bmatrix}_{12 \times 3} = [\mathbf{S}_{x_1^c} \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{S}_{x_2^c} \quad \mathbf{I}]^T \quad (3.96)$$

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L \\ 0 & L & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T \quad (3.97)$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_1 \\ \mathbf{\Gamma}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_E^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}_1^e} \right] & \left[\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_E^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}_2^e} \right]^T \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_E^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}^e} \right]^T \quad (3.98)$$

O cálculo de $\mathbf{\Gamma}$ depende da configuração atual do elemento e da orientação dos eixos locais. Primeiramente, a propriedade (3.55) é aplicada na a tríade local \mathbf{E} , e posteriormente é realizada a mudança de coordenadas, conforme Equação (3.8), tal que:

$$\mathbf{S}_{\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_E} = \delta \mathbf{E} \mathbf{E}^T \quad (3.99)$$

$$\mathbf{E}^T \mathbf{S}_{\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_E} \mathbf{E} = \mathbf{E}^T (\delta \mathbf{E} \mathbf{E}^T) \mathbf{E} \quad (3.100)$$

$$\mathbf{S}_{\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_E^e} = \mathbf{E}^T \delta \mathbf{E} \quad (3.101)$$

onde ao ser expandida fornece no sistema local de coordenadas:

$$\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_E^e = \begin{Bmatrix} -(\mathbf{e}_2^e)^T \delta \mathbf{e}_3^e \\ -(\mathbf{e}_3^e)^T \delta \mathbf{e}_1^e \\ +(\mathbf{e}_2^e)^T \delta \mathbf{e}_1^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -[0 \quad 1 \quad 0] \delta \mathbf{e}_3^e \\ -[0 \quad 0 \quad 1] \delta \mathbf{e}_1^e \\ +[0 \quad 1 \quad 0] \delta \mathbf{e}_1^e \end{Bmatrix} \quad (3.102)$$

Utilizando as relações (3.7) e (3.21), tem-se:

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{e}_1 &= \frac{1}{L} \delta \mathbf{x}_{21} - \frac{1}{L^2} \delta L \mathbf{x}_{21} \\
&= \frac{1}{L} \delta \mathbf{x}_{21} - \frac{1}{L^2} \delta \left(\sqrt{\mathbf{x}_{21}^T \mathbf{x}_{21}} \right) \mathbf{x}_{21} \\
&= \frac{1}{L} \delta \mathbf{x}_{21} - \frac{1}{L^3} \mathbf{x}_{21}^T \delta \mathbf{x}_{21} \mathbf{x}_{21} \\
&= \frac{1}{L} \delta \mathbf{x}_{21} - \frac{1}{L^3} \mathbf{x}_{21} \mathbf{x}_{21}^T \mathbf{x}_{21} \\
&= \frac{1}{L} (\mathbf{I} - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T) \delta \mathbf{u}_{21}
\end{aligned} \tag{3.103}$$

que localmente se expressa na forma:

$$\delta \mathbf{e}_1^e = \frac{1}{L} (\mathbf{I} - \mathbf{e}_1^e \mathbf{e}_1^{eT}) \delta \mathbf{u}_{21}^e = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}_{21}^e \tag{3.104}$$

A variação $\delta \mathbf{e}_3^e$ também é obtida em função de (3.7):

$$\delta \mathbf{e}_3^e = \frac{1}{\|\mathbf{e}_1^e \times \mathbf{a}_2^e\|} \delta(\mathbf{e}_1^e \times \mathbf{a}_2^e) - \frac{1}{\|\mathbf{e}_1^e \times \mathbf{a}_2^e\|} \delta(\|\mathbf{e}_1^e \times \mathbf{a}_2^e\|) \mathbf{e}_3^e \tag{3.105}$$

Admitindo que:

$$\mathbf{a}_2^e = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \tag{3.106}$$

tem-se da definição (3.7) que os vetores \mathbf{e}_3 e \mathbf{a}_2 são ortogonais, portanto:

$$q_3 = 0 \tag{3.107}$$

$$\mathbf{e}_1^e \times \mathbf{a}_2^e = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_2 \end{Bmatrix} \tag{3.108}$$

Portanto:

$$\delta \mathbf{e}_3^e = \frac{1}{q_2} (\delta \mathbf{e}_1^e \times \mathbf{a}_2^e + \mathbf{e}_1^e \times \delta \mathbf{a}_2^e) - \frac{\delta q_2}{q_2} \mathbf{e}_3^e \quad (3.109)$$

Com o auxílio das expressões (3.3) e (3.5) têm-se:

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{R}_{\theta_1} \mathbf{E}_0 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.110)$$

cuja variação, considerando a Equação (3.55), é:

$$\delta \mathbf{a}_2 = \delta \mathbf{R}_{\theta_1} \mathbf{E}_0 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_1} \mathbf{R}_{\theta_1} \mathbf{E}_0 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_1} \mathbf{a}_2 \quad (3.111)$$

que localmente escreve-se:

$$\delta \mathbf{a}_2^e = \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_1^e} \mathbf{a}_2^e = -\mathbf{S}_{\mathbf{a}_2^e} \delta \bar{\theta}_1^e \quad (3.112)$$

Definindo

$$\bar{\theta}_1^e = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad (3.113)$$

e calculando $\delta \mathbf{a}_2^e$ a partir da Equação (3.112), tem-se:

$$\delta q_2 = q_1 \delta \alpha_3 \quad (3.114)$$

Substituindo-se (3.104), (3.111) e (3.114) na Equação (3.109) e definindo $\eta = q_1/q_2$, tem-se a variação $\delta \mathbf{e}_3^e$:

$$\delta \mathbf{e}_3^e = \frac{1}{q_2} (-\mathbf{a}_2^e \times \delta \mathbf{e}_1^e + \mathbf{e}_1^e \times \delta \mathbf{a}_2^e) - \frac{q_1 \delta \alpha_3}{q_2} \mathbf{e}_3^e \quad (3.115)$$

$$\delta \mathbf{e}_3^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \eta \\ 0 & -\eta & 0 \end{bmatrix} \frac{\delta \mathbf{u}_{21}^e}{L} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{bmatrix} \delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_1^e - \eta \delta \alpha_3 \mathbf{e}_3^e \quad (3.116)$$

Utilizando as relações (3.104) e (3.116), pode-se então calcular as componentes de $\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_E^e$ definida em (3.102):

$$\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_E^e = \begin{Bmatrix} \delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_{i1}^e \\ \delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_{i2}^e \\ \delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_{i3}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\eta \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\delta \mathbf{u}_{21}^e}{L} + \begin{bmatrix} 0 & -\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_1^e \quad (3.117)$$

Com base em (3.98) e (3.117), enfim obtém-se $\boldsymbol{\Gamma}$ como:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \left[\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_E^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}^e} \right]^T = \frac{1}{L} \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & \eta \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & -\eta L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\eta \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right]^T \quad (3.118)$$

que é decomposta em:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 \boldsymbol{\Xi} \quad (3.119)$$

sendo:

$$\mathbf{Y}_1 = \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right]^T \quad (3.120)$$

$$\mathbf{Y}_2 = \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right]^T \quad (3.121)$$

$$\boldsymbol{\Xi} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \eta L & \eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (3.122)$$

3.5 – VETOR DE FORÇAS INTERNAS E MATRIZ DE RIGIDEZ

Realizada a alteração da variável iterativa de rotação, e tomando como base as Equações (3.37) e (3.44), o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente podem ser expressos, respectivamente, na forma:

$$\bar{\mathbf{F}} = \sum \mathbf{G}\bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{f}}^c = \sum \mathbf{G}\bar{\mathbf{f}}^e = \sum \bar{\mathbf{f}} \quad (3.123)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_t = \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial \bar{\mathbf{D}}} = \sum \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial \bar{\mathbf{d}}} = \sum \bar{\mathbf{k}}_t \quad (3.124)$$

onde o vetor de forças internas do elemento $\bar{\mathbf{f}}$ é definido no sistema global por:

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{G}\bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{f}}^c \quad (3.125)$$

A matriz de rigidez tangente de elemento $\bar{\mathbf{k}}_t$ é composta por três parcelas:

$$\delta \bar{\mathbf{f}} = \delta(\mathbf{G}\bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{f}}^c) = \delta \bar{\mathbf{f}}_1 + \delta \bar{\mathbf{f}}_2 + \delta \bar{\mathbf{f}}_3 \quad (3.126)$$

onde:

$$\begin{aligned} \delta \bar{\mathbf{f}}_1 &= \mathbf{G}\bar{\mathbf{P}}^T \delta \bar{\mathbf{f}}^c \\ \delta \bar{\mathbf{f}}_2 &= \mathbf{G}\delta \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{f}}^c \\ \delta \bar{\mathbf{f}}_3 &= \delta \mathbf{G}\bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{f}}^c \end{aligned} \quad (3.127)$$

Utilizando as expressões (3.31), (3.33) e (3.70), tem-se a variação das forças corrotacionais $\delta \bar{\mathbf{f}}^c$:

$$\delta \bar{\mathbf{f}}^c = \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{f}}^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \right] \delta \bar{\mathbf{d}}^c = \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{f}}^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^c} \right] \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{d}}^c}{\partial \bar{\mathbf{d}}^e} \right] \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{d}}^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \right] \delta \bar{\mathbf{d}} \quad (3.128)$$

$$\delta \bar{\mathbf{f}}^c = \bar{\mathbf{k}}^c \bar{\mathbf{P}} \mathbf{G}^T \delta \bar{\mathbf{d}} \quad (3.129)$$

Substituindo (3.129) na primeira parcela de (3.127):

$$\delta \bar{\mathbf{f}}_1 = \mathbf{G} \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{k}}^c \bar{\mathbf{P}} \mathbf{G}^T \delta \bar{\mathbf{d}} = \mathbf{G} \bar{\mathbf{k}}_{t_1}^e \mathbf{G}^T \delta \bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{k}}_{t_1} \delta \bar{\mathbf{d}} \quad (3.130)$$

onde

$$\bar{\mathbf{k}}_{t_1}^e = \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{k}}^c \bar{\mathbf{P}} \quad \bar{\mathbf{k}}_{t_1} = \mathbf{G} \bar{\mathbf{k}}_{t_1}^e \mathbf{G}^T \quad (3.131)$$

Nas equações apresentadas anteriormente em (3.131), a matriz $\bar{\mathbf{k}}^c$ que se refere aos nós na configuração C_{0n} , é transformada na matriz $\bar{\mathbf{k}}_{t_1}^e$ que se refere aos nós na configuração C_n . Essas duas matrizes são representadas no mesmo sistema de eixos. Na segunda equação, ocorre a transformação da matriz $\bar{\mathbf{k}}_{t_1}^e$ para o sistema global.

A variação do projetor $\delta \bar{\mathbf{P}}^T$ é obtida partir da determinação da variação do operador $\bar{\mathbf{P}}$ determinado em (3.95), onde as componentes \mathbf{Y}_1 e \mathbf{Y}_2 definidas em (3.120) e (3.121) são constantes. Assim:

$$\delta \bar{\mathbf{P}}^T = -\delta \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Gamma}^T - \boldsymbol{\Psi} \delta \boldsymbol{\Xi}^T \mathbf{Y}_2^T \quad (3.132)$$

Sabendo-se que as matrizes $\boldsymbol{\Psi}$ e $\boldsymbol{\Gamma}$ são bi-ortonormais ($\boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{I}$) e considerando (3.119), tem-se:

$$\boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{Y}_1 + \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{Y}_2 \boldsymbol{\Xi} = \mathbf{I} \quad (3.133)$$

Diferenciando a Equação (3.133):

$$\delta \boldsymbol{\Xi} = -(\boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{Y}_2)^{-1} \delta \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Gamma} \quad (3.134)$$

Portanto, a variação do operador de projeção assume a forma:

$$\begin{aligned} \delta \bar{\mathbf{P}}^T &= -\delta \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Gamma}^T + \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Gamma}^T \delta \boldsymbol{\Psi} ((\boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{Y}_2)^{-1})^T \mathbf{Y}_2^T \\ &= -\delta \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Gamma}^T + \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Gamma}^T \delta \boldsymbol{\Psi} ((\boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{Y}_2)^T)^{-1} \mathbf{Y}_2^T \\ &= -\delta \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Gamma}^T + \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Gamma}^T \delta \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Psi}^{-1} \end{aligned} \quad (3.135)$$

Levando em consideração a Equação (3.95) mais a condição de bi-ortogonalidade, obtém-se:

$$\begin{aligned}\delta \bar{\mathbf{P}}^T &= -\delta \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Gamma}^T + \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Gamma}^T \delta \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Psi}^{-1} (\boldsymbol{\Gamma}^{-T} \boldsymbol{\Gamma}^T) \\ &= -(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Gamma}^T) \delta \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Gamma}^T = -\bar{\mathbf{P}} \delta \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Gamma}^T\end{aligned}\quad (3.136)$$

Substituindo-se a expressão (3.136) em (3.126), tem-se:

$$\begin{aligned}\delta \bar{\mathbf{f}}_2 &= \mathbf{G} (-\bar{\mathbf{P}}^T \delta \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Gamma}^T)^T \bar{\mathbf{f}}^c \\ &= -\mathbf{G} \boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\Psi}^T \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{f}}^c \\ &= -\mathbf{G} \boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\Psi}^T \bar{\mathbf{f}}^e\end{aligned}\quad (3.137)$$

e considerando a derivada das Equações (3.96) e (3.12):

$$\begin{aligned}\delta \bar{\mathbf{f}}_2 &= \mathbf{G} \boldsymbol{\Gamma} (\mathbf{S}_{\bar{n}_1^e} \delta \mathbf{x}_1^c + \mathbf{S}_{\bar{n}_2^e} \delta \mathbf{x}_2^c) \\ &= \mathbf{G} \boldsymbol{\Gamma} (\mathbf{S}_{\bar{n}_1^e} \delta \mathbf{u}_1^c + \mathbf{S}_{\bar{n}_2^e} \delta \mathbf{u}_2^c)\end{aligned}\quad (3.138)$$

a qual possui a seguinte forma compacta:

$$\delta \bar{\mathbf{f}}_2 = -\mathbf{G} \boldsymbol{\Gamma} \tilde{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{f}}^c \quad \tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\bar{n}_1^e} \\ 0 \\ \mathbf{S}_{\bar{n}_2^e} \\ 0 \end{bmatrix}\quad (3.139)$$

Assim, a segunda parcela de (3.127) é obtida como:

$$\begin{aligned}\delta \bar{\mathbf{f}}_2 &= -\mathbf{G} \boldsymbol{\Gamma} \tilde{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{f}}^c \\ &= -\mathbf{G} \boldsymbol{\Gamma} \tilde{\mathbf{F}}^T \begin{bmatrix} \partial \bar{\mathbf{d}}^c \\ \partial \bar{\mathbf{d}}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial \bar{\mathbf{d}}^e \\ \partial \bar{\mathbf{d}} \end{bmatrix} \delta \bar{\mathbf{d}} \\ &= -\mathbf{G} \boldsymbol{\Gamma} \tilde{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{G}^T \delta \bar{\mathbf{d}} = \mathbf{G} \bar{\mathbf{k}}_{t_2}^e \mathbf{G}^T \delta \bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{k}}_{t_2} \delta \bar{\mathbf{d}}\end{aligned}\quad (3.140)$$

onde:

$$\bar{\mathbf{k}}_{t_2} = \begin{bmatrix} \partial \bar{\mathbf{f}}_2 \\ \partial \bar{\mathbf{d}} \end{bmatrix} = \mathbf{G} \bar{\mathbf{k}}_{t_2}^e \mathbf{G}^T \quad \bar{\mathbf{k}}_{t_2}^e = -\boldsymbol{\Gamma} \tilde{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{P}}\quad (3.141)$$

Finalmente, com auxílio da Equação (3.101), pode-se determinar a parcela $\delta \bar{\mathbf{f}}_3$:

$$\begin{aligned}\delta \bar{\mathbf{f}}_3 &= \delta \mathbf{G} \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{f}}^c = \delta \mathbf{G} \bar{\mathbf{f}}^e \\ &= \mathbf{G} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_E^e} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_E^e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_E^e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_E^e} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}^e \\ &= -\mathbf{G} \tilde{\mathbf{H}} \delta \bar{\theta}_E^e\end{aligned}\quad (3.142)$$

onde:

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\bar{n}_1^e} \\ \mathbf{S}_{\bar{m}_1^e} \\ \mathbf{S}_{\bar{n}_2^e} \\ \mathbf{S}_{\bar{m}_2^e} \end{bmatrix}\quad (3.143)$$

Considerando a relação

$$\delta \bar{\theta}_E^e = \left[\frac{\partial \bar{\theta}_E^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}^e} \right] \delta \bar{\mathbf{d}}^e = \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{G}^T \delta \bar{\mathbf{d}}\quad (3.144)$$

a equação (3.142) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\delta \bar{\mathbf{f}}_3 = -\mathbf{G} \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{G}^T \delta \bar{\mathbf{d}} = \mathbf{G} \bar{\mathbf{k}}_{t_3}^e \mathbf{G}^T \delta \bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{k}}_{t_3} \delta \bar{\mathbf{d}}\quad (3.145)$$

sendo:

$$\bar{\mathbf{k}}_{t_3}^e = -\tilde{\mathbf{H}} \mathbf{\Gamma}^T \quad \bar{\mathbf{k}}_{t_3} = \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_3}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \right] = \mathbf{G} \bar{\mathbf{k}}_{t_3}^e \mathbf{G}^T\quad (3.146)$$

Enfim, unificando as expressões (3.131), (3.141) e (3.146), têm-se a matriz de rigidez tangente do elemento para o sistema global de eixos:

$$\bar{\mathbf{k}}_t = \bar{\mathbf{k}}_{t_1} + \bar{\mathbf{k}}_{t_2} + \bar{\mathbf{k}}_{t_3} = \mathbf{G} \bar{\mathbf{k}}_t^e \mathbf{G}^T\quad (3.147)$$

onde a matriz de rigidez do elemento de pórtico espacial no sistema local é definida por:

$$\bar{\mathbf{k}}_t^e = \bar{\mathbf{k}}_{t_1}^e + \bar{\mathbf{k}}_{t_2}^e + \bar{\mathbf{k}}_{t_3}^e = \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{k}}^c \bar{\mathbf{P}} - \mathbf{\Gamma} \tilde{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{P}} - \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{\Gamma}^T\quad (3.148)$$

A parcela $\bar{\mathbf{k}}_{t_1}^e$ é conhecida por rigidez material ou constitutiva, obtida assumindo pequenos deslocamentos e, conseqüentemente, se torna uma parcela simétrica. Já as parcelas $\bar{\mathbf{k}}_{t_2}^e$ e $\bar{\mathbf{k}}_{t_3}^e$ formam a rigidez geométrica do elemento, onde correspondem a termos antissimétricos e, portanto, a matriz de rigidez tangente também é antissimétrica.

3.5.1 – Simetrização da matriz de rigidez na configuração de equilíbrio

Como resultado da utilização de uma abordagem corrotacional consistente, uma matriz de rigidez tangente antissimétrica é montada para o elemento de pórtico espacial. Alguns trabalhos clássicos da literatura (Crisfield, 1990; Cole, 1990 e Simo e Vu-Quoc, 1986) afirmam que a matriz de rigidez tangente simetriza numa configuração de equilíbrio se o carregamento aplicado é conservativo e, logo, não simetriza se o carregamento consiste em uma carga não conservativa. Contudo, de acordo com Rankin e Nour-Omid (1991), a matriz de rigidez, dada em (3.148), possui propriedades incomuns na presença de grandes deslocamentos, levando-a a não simetrização numa condição de equilíbrio. Portanto, mesmo que o critério do carregamento conservativo seja atendido, tal simetrização ocorre somente em situações onde a estrutura possui rotações infinitesimais e pequenas translações.

Um exemplo de natureza não conservativa de um carregamento é a aplicação de momentos em eixos fixos, em uma análise tridimensional. De acordo com Ziegler (1977), um momento concentrado atuando sobre um eixo fixo no espaço, é não-conservativo. Isso pode ser explicado considerando-se um momento M constante atuando sobre o eixo fixo X , como é mostrado na Figura 3.4. Dessa forma, uma rotação de 180° (π) em torno de X produzirá o trabalho positivo $W = M\pi$. No entanto, duas rotações sucessivas de 180° (π) em torno dos eixos fixos Y e Z , respectivamente, levam a mesma posição final do corpo, porém dessa vez com trabalho $W = 0$. Portanto, o trabalho depende da trajetória e o momento é não conservativo.

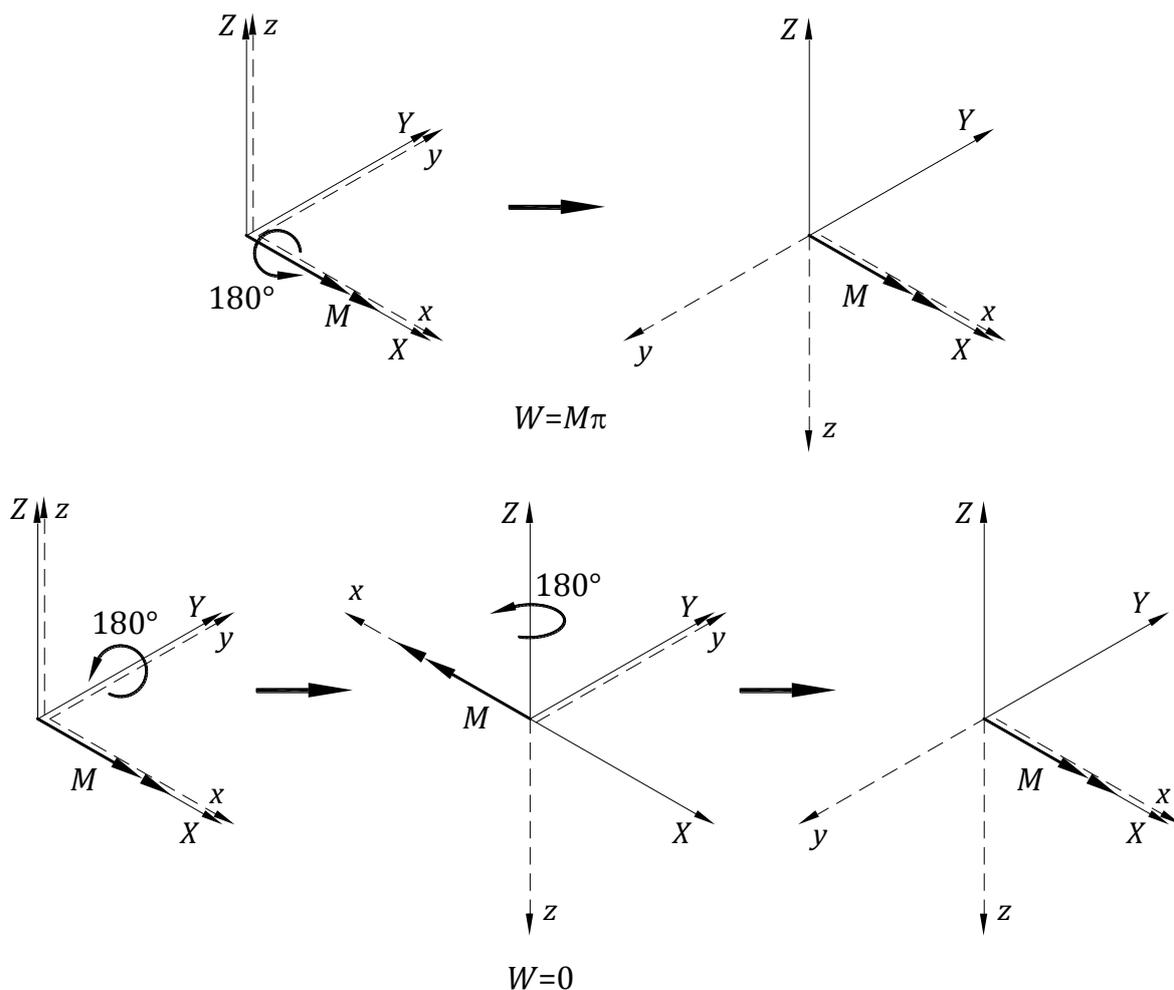


Figura 3.4 – Natureza não conservativa de momentos sobre eixos fixos (Cole, 1990).

Considerando o regime de rotações da estrutura ainda como infinitesimais e pequenas translações, Nour-Omid e Rankin (1991) provam conceitualmente que é possível obter uma taxa de convergência quadrática, para o método Newton-Raphson, utilizando somente a parte simétrica da matriz de rigidez. Segundo os autores, para tal situação, o termo antissimétrico torna-se igual zero quando o sistema está em equilíbrio. Ou seja:

$$\|\bar{\mathbf{k}}_t - \bar{\mathbf{k}}_t^T\| \rightarrow \mathbf{0} \Leftrightarrow \|\mathbf{r}\| \rightarrow \mathbf{0} \quad (3.149)$$

onde \mathbf{r} é o resíduo. De acordo com Nour-Omid e Rankin (1991), essa é a condição suficiente para uma taxa de convergência quadrática em uma iteração do tipo *Newton-Raphson*, como mostrado no teorema a seguir.

Considere um algoritmo do tipo *Newton-Raphson*, onde em cada passo se resolve um sistema de equações lineares do tipo:

$$\bar{\mathbf{k}}_t^S \Delta \mathbf{d}_i = -\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{d}_i) \quad (3.150)$$

onde $\bar{\mathbf{K}}_t^S$ e $\bar{\mathbf{K}}_t^A$ são as partes simétrica e antissimétrica da matriz de rigidez tangente, definidas por:

$$\bar{\mathbf{k}}_t^S = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{k}}_t + \bar{\mathbf{k}}_t^T) \quad \bar{\mathbf{k}}_t^A = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{k}}_t - \bar{\mathbf{k}}_t^T) \quad (3.151)$$

Teorema (Nour-Omid e Rankin, 1991):

“Ignorando a parte antissimétrica da matriz de rigidez tangente, ao se resolver o sistema de equações lineares em um algoritmo do tipo *Newton-Raphson*, os resultados terão uma taxa de convergência quadrática se”

$$\|\bar{\mathbf{k}}_t^A\| \leq \alpha \|\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{d}_i)\| \quad (3.152)$$

onde α é uma constante.

Prova (Nour-Omid e Rankin, 1991):

Expandindo em série de Taylor, tem-se

$$\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{d}_i) = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{d}_{i-1}) + \bar{\mathbf{k}}_{t_{i-1}} \Delta \mathbf{d}_{i-1} + \mathbf{r}(\Delta \mathbf{d}_{i-1}) \quad (3.153)$$

onde \mathbf{r} é o resíduo, que depende de $\Delta \mathbf{d}_{i-1}$ e

$$\|\mathbf{r}(\Delta \mathbf{d}_{i-1})\| \leq \beta \|\Delta \mathbf{d}_{i-1}\|^2 \quad (3.154)$$

com β sendo outra constante. Escrevendo $\bar{\mathbf{k}}_{t_{i-1}}$ em termos de sua parte simétrica e antissimétrica, tem-se:

$$\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{d}_i) = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{d}_{i-1}) + \bar{\mathbf{k}}_{t_{i-1}}^S \Delta \mathbf{d}_{i-1} + \bar{\mathbf{k}}_{t_{i-1}}^A \Delta \mathbf{d}_{i-1} + \mathbf{r}(\Delta \mathbf{d}_{i-1}) \quad (3.155)$$

Substituindo a Equação (3.150) para a iteração $(i - 1)$ em (3.155), os dois primeiros termos após a igualdade desaparecem, resultando em um vetor de forças desequilibradas em termos da parte antissimétrica de $\bar{\mathbf{k}}_t$ e do resíduo \mathbf{r} , assumindo a forma:

$$\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{d}_i) = \bar{\mathbf{k}}_{t\ i-1}^A \Delta \mathbf{d}_{i-1} + \mathbf{r}(\Delta \mathbf{d}_{i-1}) \quad (3.156)$$

Assim, substituindo a Equação (3.156) em (3.150), obtém-se:

$$\Delta \mathbf{d}_i = -(\bar{\mathbf{k}}_{t\ i-1}^S)^{-1} \{ \bar{\mathbf{k}}_{t\ i-1}^A \Delta \mathbf{d}_{i-1} + \mathbf{r}(\Delta \mathbf{d}_{i-1}) \} \quad (3.157)$$

com as normas

$$\|\Delta \mathbf{d}_i\| \leq \|(\bar{\mathbf{k}}_{t\ i-1}^S)^{-1}\| \{ \|\bar{\mathbf{k}}_{t\ i-1}^A\| \|\Delta \mathbf{d}_{i-1}\| + \|\mathbf{r}(\Delta \mathbf{d}_{i-1})\| \} \quad (3.158)$$

Utilizando a hipótese original (3.152) e tomando a Equação (3.150) para a iteração $(i - 1)$, chega-se às seguintes desigualdades:

$$\|\bar{\mathbf{k}}_{t\ i-1}^A\| \leq \alpha \|\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{d}_{i-1})\| \leq \alpha \|\bar{\mathbf{k}}_{t\ i-1}^S\| \|\Delta \mathbf{d}_{i-1}\| \quad (3.159)$$

Substituindo (3.159) em (3.158), como o objetivo de eliminar a parte antissimétrica de $\bar{\mathbf{k}}_t$, obtém-se:

$$\|\Delta \mathbf{d}_i\| \leq \|(\bar{\mathbf{k}}_{t\ i-1}^S)^{-1}\| \{ \alpha \|\bar{\mathbf{k}}_{t\ i-1}^S\| \|\Delta \mathbf{d}_{i-1}\|^2 + \beta \|\Delta \mathbf{d}_{i-1}\|^2 \} \quad (3.160)$$

ou

$$\|\mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{d}_i\| \leq \gamma_i \|\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_{i-1}\|^2 \quad (3.161)$$

onde

$$\gamma_i = \|(\bar{\mathbf{k}}_{t\ i}^S)^{-1}\| (\alpha \|\bar{\mathbf{k}}_{t\ i-1}^S\| + \beta) \quad (3.162)$$

Dessa forma, segundo Nour-Omid e Rankin (1991), se a parte antissimétrica da matriz de rigidez desaparece na mesma taxa que o resíduo, então a convergência é quadrática se a matriz de rigidez simetrizada ou não-simetrizada é utilizada, com validade somente para o regime de rotações infinitesimais e pequenas translações.

3.6 – ESFORÇOS RESULTANTES

Os elementos de pórtico espacial estão submetidos a seis esforços resultantes em cada uma dos nós, representados na configuração atual por:

- Esforço normal N , cortantes V_y e V_z e o momento torçor T , que são constantes ao longo de todo elemento;
- Momentos fletores $M_y = M_y(x^e)$ e $M_z = M_z(x^e)$ que variam linearmente ao longo do elemento, admitindo-se tratar de um modelo hermitiano.

Esses esforços, apresentados a seguir na figura 3.5, com as respectivas convenções de sinais, podem ser obtidos a partir das referentes deformações de acordo com as seguintes equações apresentadas por Harrison (1973):

$$N = EA_0 \varepsilon = \frac{EA_0}{L_0} d \qquad T = \frac{GI_x}{L} \theta_x^c \qquad (3.163)$$

$$M_{1y} = \frac{2EI_y}{L_0} (2\theta_{1y}^c + \theta_{2y}^c) \qquad M_{2y} = \frac{2EI_y}{L_0} (\theta_{1y}^c + 2\theta_{2y}^c) \qquad (3.164)$$

$$M_{1z} = \frac{2EI_z}{L_0} (2\theta_{1z}^c + \theta_{2z}^c) \qquad M_{2z} = \frac{2EI_z}{L_0} (\theta_{1z}^c + 2\theta_{2z}^c) \qquad (3.165)$$

$$V_{1y} = \frac{M_{1z} + M_{2z}}{L} \qquad V_{2y} = -\frac{M_{1z} + M_{2z}}{L} \qquad (3.166)$$

$$V_{1z} = \frac{M_{1y} + M_{2y}}{L} \qquad V_{2z} = \frac{M_{1y} + M_{2y}}{L} \qquad (3.167)$$

onde:

- E e G são os módulos de elasticidade longitudinal e transversal, respectivamente;
- A_0 é área da seção transversal;
- I_x é o momento de inércia associado à torção de Saint Venant e I_y e I_z os momentos de inércia associados à flexão nas direções y e z ;
- ε é a deformação de engenharia;
- $(\theta_{1x}^c, \theta_{1y}^c, \theta_{1z}^c)$ e $(\theta_{2x}^c, \theta_{2y}^c, \theta_{2z}^c)$ são os ângulos de rotação, definidos pelas relações (3.19) e (3.20).

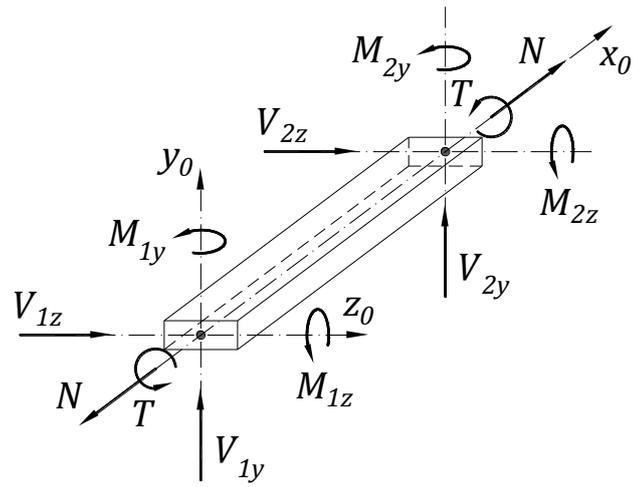


Figura 3.5 – Conversões de sinais e esforços resultantes.

4 – DINÂMICA NÃO-LINEAR

Apesar da abordagem corrotacional ter uma ampla aplicação na análise estática não-linear geométrica de estruturas, a sua aplicação para a análise dinâmica não-linear geométrica oferece algumas limitações, principalmente para vigas espaciais (Le *et al.*, 2012). Isso se deve ao fato da decomposição do movimento do elemento em parcelas deformacional e de corpo rígido conduzir a expressões muito complexas para os termos dinâmicos. Uma solução para tal limitação, a qual é adotada nessa tese e em outros trabalhos (Le *et al.*, 2012; Géradin e Cardona, 2001; Cardona, 1989; Cardona e Géradin, 1988), é a utilização do método corrotacional para desenvolver as expressões das forças internas e da matriz de rigidez tangente, enquanto os termos dinâmicos são formulados em um contexto Lagrangeano total.

Em relação ao tratamento dinâmico das rotações finitas, velocidades e acelerações angulares, com base na metodologia proposta por Géradin e Cardona (Géradin e Cardona, 2001; Cardona, 1989; Cardona e Géradin, 1988), emprega-se nesse capítulo o procedimento de Newmark aplicado ao vetor de rotação incremental e as suas derivadas no tempo.

De acordo com o desenvolvimento teórico apresentado nos capítulos anteriores, são tomadas as seguintes suposições para o elemento finito de viga espacial:

- A validade da teoria de *Euler-Bernoulli* para o elemento de pórtico espacial, onde se considera que as seções se mantêm planas e normais ao eixo da barra após a deformação. A deformação por distorção da seção transversal também não é considerada;
- Assumem-se pequenas deformações, porém os deslocamentos e rotações podem ser arbitrariamente grandes;
- Admite-se que o material permanece elástico durante a variação de carga.

4.1 – FORÇA INERCIAL

Usando centro de massa da seção transversal como ponto de referência, a energia cinética de um elemento de viga espacial é obtida como:

$$K_c = \frac{1}{2} \int_0^l (\dot{\mathbf{u}}^T A \rho \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{W}}^T \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{W}}) dx \quad (4.1)$$

onde l é o comprimento inicial do elemento de viga espacial e \mathbf{I}_ρ é o tensor de inércia espacial diádico, definido como:

$$\mathbf{I}_\rho = \rho \begin{pmatrix} I_z + I_y & 0 & 0 \\ 0 & I_z & 0 \\ 0 & 0 & I_y \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

sendo I_z e I_y os momentos principais de inércia da seção transversal e ρ a densidade de massa.

De acordo com Géradin e Cardona (2001), a variação da energia cinética pode ser expressa como:

$$\delta K_c = \int_0^l (\delta \mathbf{u}^T A \rho \dot{\mathbf{u}} + \delta \boldsymbol{\theta}^T (\mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{W}} + \mathbf{S}_W \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{W}})) dx \quad (4.3)$$

onde $\delta \boldsymbol{\theta}$ é a variação do vetor incremental rotacional em coordenadas materiais, e está relacionada com a variação do pseudo-vetor de rotação através da relação:

$$\delta \boldsymbol{\theta} = \mathbf{T}_\theta \delta \boldsymbol{\theta} \quad (4.4)$$

A expressão para obtenção de \mathbf{T}_θ pode observada na Equação (2.94). Utilizando a relação da Equação (4.4), a variação da energia cinética em termos do vetor incremental de rotação espacial assume a forma:

$$\delta K_c = \int_0^l (\delta \mathbf{u}^T A \rho \dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{T}_\theta)^T \delta \boldsymbol{\theta}^T (\mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{W}} + \mathbf{S}_W \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{W}})) dx \quad (4.5)$$

Dessa forma, o vetor de força inercial é derivado da seguinte relação:

$$\delta K_c = \mathbf{f}_k \delta \mathbf{q}^T \quad (4.6)$$

onde o vetor de deslocamentos e rotação espacial incremental $\delta \mathbf{q}^T$ é dado por:

$$\delta \mathbf{q}^T = (\delta \mathbf{u}_1^T \quad \delta \boldsymbol{\theta}_1^T \quad \delta \mathbf{u}_2^T \quad \delta \boldsymbol{\theta}_2^T) \quad (4.7)$$

Os vetores de deslocamentos e rotação espacial incremental são linearmente interpolados, respectivamente, levando em consideração que o elemento de viga possui dois nós, através das expressões:

$$\delta \mathbf{u} = N_1 \delta \mathbf{u}_1 + N_2 \delta \mathbf{u}_2 \quad (4.8)$$

$$\delta \boldsymbol{\theta} = N_1 \delta \boldsymbol{\theta}_1 + N_2 \delta \boldsymbol{\theta}_2 \quad (4.9)$$

com

$$N_1 = (l - x)/l \quad (4.10)$$

$$N_2 = x/l \quad (4.11)$$

Inserindo as Equações (4.8) e (4.9) em (4.5), a força inercial é obtida como:

$$\mathbf{f}_k = \int_0^l \mathbf{P}(x)^T \left((\mathbf{T}_\theta)^T (I_\rho \ddot{\mathbf{W}} + \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{W}}} I_\rho \dot{\mathbf{W}}) \right) dx \quad (4.12)$$

onde:

$$\mathbf{P}(x) = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

A velocidade e aceleração angular material $\dot{\mathbf{W}}$ e $\ddot{\mathbf{W}}$ são calculadas a partir de $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ e $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$, utilizando as relações (2.93) e (2.95). Resolvendo as integrais da Equação (4.12), a força inercial assume a forma:

$$\mathbf{f}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{kt1} \\ \mathbf{f}_{kr1} \\ \mathbf{f}_{kt2} \\ \mathbf{f}_{kr2} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

onde:

$$\mathbf{f}_{kt1} = \frac{A\rho l}{6} (2\ddot{\mathbf{u}}_1 + \ddot{\mathbf{u}}_2) \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{kr1} = \frac{l}{12}(\mathbf{T}_{\theta_1})^T (4\mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{W}}_1 + 2\mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{W}}_2 + 3\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{W}}_1} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{W}}_1 + \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{W}}_1} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{W}}_2 \\ + \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{W}}_2} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{W}}_1 + \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{W}}_2} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{W}}_2) \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\mathbf{f}_{kt2} = \frac{A\rho l}{6}(\ddot{\mathbf{u}}_1 + 2\ddot{\mathbf{u}}_2) \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{kr2} = \frac{l}{12}(\mathbf{T}_{\theta_2})^T (2\mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{W}}_1 + 4\mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{W}}_2 + \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{W}}_1} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{W}}_1 + \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{W}}_1} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{W}}_2 \\ + \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{W}}_2} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{W}}_1 + 3\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{W}}_2} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{W}}_2) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Realizando mais algumas manipulações algébricas, tem-se o seguinte formato para vetor de força inercial:

$$\mathbf{f}_k = \mathbf{T}_e \left(\mathbf{M} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_1 \\ \ddot{\mathbf{w}}_1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_2 \\ \ddot{\mathbf{w}}_2 \end{pmatrix} + \frac{l}{12} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 3\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{w}}_1} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}}_1 + \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{w}}_1} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}}_2 + \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{w}}_2} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}}_1 + \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{w}}_2} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{w}}_1} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}}_1 + \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{w}}_1} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}}_2 + \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{w}}_2} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}}_1 + 3\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{w}}_2} \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{w}}_2 \end{pmatrix} \right) \quad (4.19)$$

onde

$$\mathbf{T}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{T}_{\theta_1})^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{T}_{\theta_2})^T \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

e \mathbf{M} é a matriz de massa consistente decorrente da formulação isoparamétrica linear de um elemento de viga espacial com dois nós, utilizando função de forma linear, definida por:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2\mathbf{M}_t & \mathbf{0} & \mathbf{M}_t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{M}_r & \mathbf{0} & \mathbf{M}_r \\ \mathbf{M}_t & \mathbf{0} & 2\mathbf{M}_t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_r & \mathbf{0} & 2\mathbf{M}_r \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

com

$$\mathbf{M}_t = \begin{pmatrix} \frac{A\rho l}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A\rho l}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A\rho l}{6} \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_r = \frac{l}{6} \mathbf{I}_\rho \quad (4.22)$$

sendo A a área da seção transversal do elemento de viga. Desse modo, o vetor de forças inerciais do elemento no sistema global $\bar{\mathbf{f}}_k$ é definido por:

$$\bar{\mathbf{f}}_k = \mathbf{G}\mathbf{f}_k \quad (4.23)$$

De acordo com Géradin e Cardona (2001), o vetor de força inercial também pode ser obtido dividindo a Equação (4.12) em duas parcelas:

$$\mathbf{f}_k = \mathbf{f}_{rel} + \mathbf{f}_{gir} \quad (4.24)$$

onde \mathbf{f}_{rel} é o vetor de força inercial relativa e \mathbf{f}_{gir} o vetor de força inercial giroscópica. O vetor de força inercial relativa é calculado de acordo com a segunda lei de Newton, porém, utilizando-se as acelerações angulares em coordenadas materiais:

$$\mathbf{f}_{rel} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} \quad (4.25)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}^T = (\ddot{\mathbf{u}}_1^T \quad \dot{\mathbf{W}}_1^T \quad \ddot{\mathbf{u}}_2^T \quad \dot{\mathbf{W}}_2^T) \quad \mathbf{M} = \int_0^l \mathbf{P}(x)^T \begin{pmatrix} A\rho\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_\rho \end{pmatrix} dx \quad (4.26)$$

onde:

$$\mathbf{J}_\rho = (\mathbf{T}_\theta)^T \mathbf{I}_\rho \mathbf{T}_\theta \quad (4.27)$$

A solução para a integral da matriz de massa \mathbf{M} exibida na Equação (4.26) foi apresentada anteriormente nas Equações (4.21) e (4.22). Assim, o vetor de força inercial relativa $\bar{\mathbf{f}}_{rel}$ e a matriz de massa $\bar{\mathbf{M}}$, ambos no sistema global, são escritos, respectivamente, como:

$$\bar{\mathbf{f}}_{rel} = \mathbf{G}\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}} \quad \bar{\mathbf{M}} = \mathbf{G}\mathbf{M}\mathbf{G}^T \quad (4.28)$$

Já o vetor de força inercial giroscópica, de acordo com Géradin e Cardona (2001), pode ser escrito como:

$$\mathbf{f}_{gir} = \int_0^l \mathbf{P}(x)^T \left((\mathbf{T}_\theta)^T (\mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{T}}_\theta + \mathbf{S}_{\dot{W}} \mathbf{I}_\rho \mathbf{T}_\theta) \dot{\boldsymbol{\theta}} \right) dx \quad (4.29)$$

Solucionando as integrais da Equação (4.29), tem-se:

$$\mathbf{f}_{gir} = \frac{l}{12} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{gir1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{gir2} \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{gir1} = (\mathbf{T}_{\theta_1})^T & (4\mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{T}}_{\theta_1} \dot{\theta}_1 + 2\mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{T}}_{\theta_2} \dot{\theta}_2 + 3\mathbf{S}_{W_1} \mathbf{I}_\rho \mathbf{T}_{\theta_1} \dot{\theta}_1 + \mathbf{S}_{W_1} \mathbf{I}_\rho \mathbf{T}_{\theta_2} \dot{\theta}_2 \\ & + \mathbf{S}_{W_2} \mathbf{I}_\rho \mathbf{T}_{\theta_1} \dot{\theta}_1 + \mathbf{S}_{W_2} \mathbf{I}_\rho \mathbf{T}_{\theta_2} \dot{\theta}_2) \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{gir2} = (\mathbf{T}_{\theta_2})^T & (2\mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{T}}_{\theta_1} \dot{\theta}_1 + 4\mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{T}}_{\theta_2} \dot{\theta}_2 + \mathbf{S}_{W_1} \mathbf{I}_\rho \mathbf{T}_{\theta_1} \dot{\theta}_1 + \mathbf{S}_{W_1} \mathbf{I}_\rho \mathbf{T}_{\theta_2} \dot{\theta}_2 \\ & + \mathbf{S}_{W_2} \mathbf{I}_\rho \mathbf{T}_{\theta_1} \dot{\theta}_1 + 3\mathbf{S}_{W_2} \mathbf{I}_\rho \mathbf{T}_{\theta_2} \dot{\theta}_2) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Logo, o vetor de força inercial giroscópica em coordenadas globais pode ser escrito como:

$$\bar{\mathbf{f}}_{gir} = \mathbf{G} \mathbf{f}_{gir} \quad (4.33)$$

Já a força inercial total em coordenadas globais pode ser expressa nas formas:

$$\bar{\mathbf{f}}_k = \mathbf{G}(\mathbf{f}_{rel} + \mathbf{f}_{gir}) \quad (4.34)$$

ou

$$\bar{\mathbf{f}}_k = \bar{\mathbf{f}}_{rel} + \bar{\mathbf{f}}_{gir} \quad (4.35)$$

É importante ressaltar que as duas metodologias apresentadas para cálculo vetor de força inercial, ou seja, o cálculo direto do vetor de força inercial total ou a sua separação em vetores de força inercial relativa e força inercial giroscópica, levam aos mesmos resultados numéricos.

4.2 – FORÇA DE AMORTECIMENTO

Os mecanismos dissipativos, com força viscosa proporcional as velocidades translacionais e angulares, podem ser facilmente incorporados à formulação apresentada. Contudo, ressalta-se que a força de amortecimento definida nessa seção será proporcional à massa da

estrutura. Dessa forma, baseando-se em Simo e Vu-Quoc (1986), a variação da energia devido ao amortecimento pode ser escrita na forma:

$$\delta K_a = \int_0^l (\delta \mathbf{u}^T \mu A \rho \dot{\mathbf{u}} + \delta \boldsymbol{\theta}^T \mu \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{W}}) dx \quad (4.36)$$

onde μ é o coeficiente de amortecimento. Ao inserir a Equação (4.4) em (4.36), é possível obter a variação da energia de amortecimento em termos do vetor incremental de rotação:

$$\delta K_a = \int_0^l (\delta \mathbf{u}^T \mu A \rho \dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{T}_\theta)^T \delta \boldsymbol{\theta}^T \mu \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{W}}) dx \quad (4.37)$$

Assim, vetor de força de amortecimento é obtido a partir da relação:

$$\delta K_a = \mathbf{f}_a \delta \mathbf{q}^T \quad (4.38)$$

Inserindo as Equações (4.8) e (4.9) em (4.38), e utilizando as funções lineares de interpolação (4.10) e (4.11), obtém-se a força de amortecimento:

$$\mathbf{f}_a = \int_0^l \mathbf{P}(x)^T \begin{pmatrix} \mu A \rho \dot{\mathbf{u}} \\ (\mathbf{T}_\theta)^T \mu \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{W}} \end{pmatrix} dx \quad (4.39)$$

onde a velocidade angular material $\dot{\mathbf{W}}$ é obtida a partir de $\dot{\boldsymbol{\theta}}$, utilizando a relação (2.93). A solução das integrais da Equação (4.39) fornece a seguinte expressão para força de amortecimento:

$$\mathbf{f}_a = \begin{pmatrix} \frac{\mu A \rho l}{6} (2\dot{\mathbf{u}}_1 + \dot{\mathbf{u}}_2) \\ \frac{\mu l}{12} (\mathbf{T}_{\theta_1})^T (4\mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{W}}_1 + 2\mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{W}}_2) \\ \frac{\mu A \rho l}{6} (\dot{\mathbf{u}}_1 + 2\dot{\mathbf{u}}_2) \\ \frac{\mu l}{12} (\mathbf{T}_{\theta_2})^T (2\mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{W}}_1 + 4\mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{W}}_2) \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

Com algumas manipulações algébricas, o vetor de força de amortecimento pode ser escrito na seguinte forma compacta:

$$\mathbf{f}_a = \mathbf{T}_e \mu \mathbf{M} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (4.41)$$

onde

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T = (\dot{\mathbf{u}}_1^T \quad \dot{\mathbf{W}}_1^T \quad \dot{\mathbf{u}}_2^T \quad \dot{\mathbf{W}}_2^T) \quad (4.42)$$

Consequentemente, aplicando-se a matriz de transformação \mathbf{G} , obtém-se o vetor de força de amortecimento em coordenadas globais $\bar{\mathbf{f}}_a$:

$$\bar{\mathbf{f}}_a = \mathbf{G} \mathbf{f}_a \quad (4.43)$$

4.3 – MATRIZ TANGENTE DE INÉRCIA

Para a solução da equação de equilíbrio não-linear é necessário linearizar o vetor de força inercial. Tomando a Equação (4.3), e excluindo os termos translacionais, obtém-se a variação da energia cinética de rotação:

$$\Pi_{c,Rot} = \delta K_{c,Rot} = \int_0^l (\delta \boldsymbol{\theta}^T (\mathbf{I}_\rho \ddot{\mathbf{W}} + \mathbf{S}_W \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{W}})) dx \quad (4.44)$$

Linearizando a Equação (4.44), tem-se:

$$\Delta \Pi_{c,Rot} = \int_0^l (\delta \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{I}_\rho \Delta \ddot{\mathbf{W}}) dx + \int_0^l (\delta \boldsymbol{\theta}^T (\mathbf{S}_W \mathbf{I}_\rho - \mathbf{S}_{I_\rho W}) \Delta \dot{\mathbf{W}}) dx \quad (4.45)$$

De acordo com Géradin e Cardona (2001), a velocidade e aceleração angulares incrementais podem ser escritas, respectivamente, como:

$$\Delta \dot{\mathbf{W}} = \Delta \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{S}_W \Delta \boldsymbol{\theta} \quad (4.46)$$

$$\Delta \ddot{\mathbf{W}} = \Delta \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{S}_W \Delta \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\mathbf{S}}_W \Delta \boldsymbol{\theta} \quad (4.47)$$

Substituindo as relações das Equações (4.46) e (4.47) em (4.45), tem-se:

$$\begin{aligned}
\Delta \Pi_{c, Rot} &= \int_0^l (\delta \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{I}_\rho \Delta \ddot{\boldsymbol{\theta}}) dx \\
&+ \int_0^l (\delta \boldsymbol{\theta}^T (\mathbf{I}_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}} + \mathbf{S}_{\dot{W}} \mathbf{I}_\rho - \mathbf{S}_{I_\rho \dot{W}}) \Delta \dot{\boldsymbol{\theta}}) dx \\
&+ \int_0^l (\delta \boldsymbol{\theta}^T (\mathbf{I}_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}} + \mathbf{S}_{\dot{W}} \mathbf{I}_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}} - \mathbf{S}_{I_\rho \dot{W}} \mathbf{S}_{\dot{W}}) \Delta \boldsymbol{\theta}) dx
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Substituindo as relações

$$\Delta \dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta \boldsymbol{\theta} \tag{4.49}$$

$$\Delta \ddot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta \boldsymbol{\theta} \tag{4.50}$$

na Equação (4.48), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\Delta \Pi_{c, Rot} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} \int_0^l (\delta \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{I}_\rho \Delta \boldsymbol{\theta}) dx \\
&+ \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \int_0^l (\delta \boldsymbol{\theta}^T (\mathbf{I}_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}} + \mathbf{S}_{\dot{W}} \mathbf{I}_\rho - \mathbf{S}_{I_\rho \dot{W}}) \Delta \boldsymbol{\theta}) dx \\
&+ \int_0^l (\delta \boldsymbol{\theta}^T (\mathbf{I}_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}} + \mathbf{S}_{\dot{W}} \mathbf{I}_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}} - \mathbf{S}_{I_\rho \dot{W}} \mathbf{S}_{\dot{W}}) \Delta \boldsymbol{\theta}) dx
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Consequentemente, a matriz tangente de inércia, incluindo os termos de translação, é explicitada como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{Dyn} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} \int_0^l \mathbf{P}(x)^T \begin{pmatrix} A\rho \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_\rho \end{pmatrix} \mathbf{P}(x) dx \\
&+ \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \int_0^l \mathbf{P}(x)^T \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}} + \mathbf{S}_{\dot{W}} \mathbf{I}_\rho - \mathbf{S}_{I_\rho \dot{W}} \end{pmatrix} \mathbf{P}(x) dx \\
&+ \int_0^l \mathbf{P}(x)^T \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}} + \mathbf{S}_{\dot{W}} \mathbf{I}_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}} - \mathbf{S}_{I_\rho \dot{W}} \mathbf{S}_{\dot{W}} \end{pmatrix} \mathbf{P}(x) dx
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Avaliando a Equação (4.52), conclui-se que a matriz tangente de inércia representa a soma da matriz de massa \mathbf{M} , matriz giroscópica \mathbf{C}_k e matriz centrífuga \mathbf{K}_k :

$$\mathbf{K}_{Dyn} = \frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{C}_k + \mathbf{K}_k \quad (4.53)$$

Em coordenadas globais, a matriz tangente de inércia pode ser escrita nas formas:

$$\bar{\mathbf{K}}_{Dyn} = \mathbf{G}\mathbf{K}_{Dyn}\mathbf{G}^T \quad (4.54)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{Dyn} = \frac{1}{\beta\Delta t^2} \bar{\mathbf{M}} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \bar{\mathbf{C}}_k + \bar{\mathbf{K}}_k \quad (4.55)$$

onde

$$\bar{\mathbf{C}}_k = \mathbf{G}\mathbf{C}_k\mathbf{G}^T \quad \bar{\mathbf{K}}_k = \mathbf{G}\mathbf{K}_k\mathbf{G}^T \quad (4.56)$$

Resolvendo as integrais que compõem a matriz giroscópica

$$\mathbf{C}_k = \int_0^l \mathbf{P}(x)^T \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}} + \mathbf{S}_{\dot{W}} I_\rho - \mathbf{S}_{I_\rho \dot{W}} \end{pmatrix} \mathbf{P}(x) dx \quad (4.57)$$

obtem-se

$$\mathbf{C}_k = \frac{l}{12} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{k,11} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{k,12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{k,12} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{k,22} \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

onde:

$$\mathbf{C}_{k,11} = \left(3I_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}_1} + I_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}_2} - 3\mathbf{S}_{I_\rho \dot{W}_1} - \mathbf{S}_{I_\rho \dot{W}_2} + 3\mathbf{S}_{\dot{W}_1} I_\rho + \mathbf{S}_{\dot{W}_2} I_\rho \right) \quad (4.59)$$

$$\mathbf{C}_{k,12} = \left(I_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}_1} + I_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}_2} - \mathbf{S}_{I_\rho \dot{W}_1} - \mathbf{S}_{I_\rho \dot{W}_2} + \mathbf{S}_{\dot{W}_1} I_\rho + \mathbf{S}_{\dot{W}_2} I_\rho \right) \quad (4.60)$$

$$\mathbf{C}_{k,22} = \left(I_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}_1} + 3I_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}_2} - \mathbf{S}_{I_\rho \dot{W}_1} - 3\mathbf{S}_{I_\rho \dot{W}_2} + \mathbf{S}_{\dot{W}_1} I_\rho + 3\mathbf{S}_{\dot{W}_2} I_\rho \right) \quad (4.61)$$

Já a solução das integrais que compõem a matriz centrífuga

$$\mathbf{K}_k = \int_0^l \mathbf{P}(x)^T \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}} + \mathbf{S}_{\dot{W}} I_\rho - \mathbf{S}_{I_\rho \dot{W}} \end{pmatrix} \mathbf{P}(x) dx \quad (4.62)$$

fornece

$$\mathbf{K}_k = \frac{l}{60} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{k,11} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{k,12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{k,12} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{k,22} \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{k,11} = & \left(15\mathbf{I}_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}_1} + 5\mathbf{I}_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}_2} - 12\mathbf{S}_{I_\rho \dot{W}_1} \mathbf{S}_{\dot{W}_1} - 3\mathbf{S}_{I_\rho \dot{W}_1} \mathbf{S}_{\dot{W}_2} - 3\mathbf{S}_{I_\rho \dot{W}_2} \mathbf{S}_{\dot{W}_1} \right. \\ & - 2\mathbf{S}_{I_\rho \dot{W}_2} \mathbf{S}_{\dot{W}_2} + 12\mathbf{S}_{\dot{W}_1} \mathbf{I}_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}_1} + 3\mathbf{S}_{\dot{W}_2} \mathbf{I}_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}_1} + 3\mathbf{S}_{\dot{W}_1} \mathbf{I}_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}_2} \\ & \left. + 2\mathbf{S}_{\dot{W}_2} \mathbf{I}_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}_2} \right) \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{k,12} = & \left(5\mathbf{I}_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}_1} + 5\mathbf{I}_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}_2} - 3\mathbf{S}_{I_\rho \dot{W}_1} \mathbf{S}_{\dot{W}_1} - 2\mathbf{S}_{I_\rho \dot{W}_1} \mathbf{S}_{\dot{W}_2} - 2\mathbf{S}_{I_\rho \dot{W}_2} \mathbf{S}_{\dot{W}_1} \right. \\ & - 3\mathbf{S}_{I_\rho \dot{W}_2} \mathbf{S}_{\dot{W}_2} + 3\mathbf{S}_{\dot{W}_1} \mathbf{I}_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}_1} + 2\mathbf{S}_{\dot{W}_2} \mathbf{I}_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}_1} + 2\mathbf{S}_{\dot{W}_1} \mathbf{I}_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}_2} \\ & \left. + 3\mathbf{S}_{\dot{W}_2} \mathbf{I}_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}_2} \right) \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{k,22} = & \left(5\mathbf{I}_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}_1} + 15\mathbf{I}_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}_2} - 2\mathbf{S}_{I_\rho \dot{W}_1} \mathbf{S}_{\dot{W}_1} - 3\mathbf{S}_{I_\rho \dot{W}_1} \mathbf{S}_{\dot{W}_2} - 3\mathbf{S}_{I_\rho \dot{W}_2} \mathbf{S}_{\dot{W}_1} \right. \\ & - 12\mathbf{S}_{I_\rho \dot{W}_2} \mathbf{S}_{\dot{W}_2} + 2\mathbf{S}_{\dot{W}_1} \mathbf{I}_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}_1} + 3\mathbf{S}_{\dot{W}_2} \mathbf{I}_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}_1} + 3\mathbf{S}_{\dot{W}_1} \mathbf{I}_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}_2} \\ & \left. + 12\mathbf{S}_{\dot{W}_2} \mathbf{I}_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}_2} \right) \end{aligned} \quad (4.66)$$

4.4 – MATRIZ TANGENTE DE AMORTECIMENTO

De forma análoga ao procedimento realizado para o vetor de força inercial, também é necessário linearizar o vetor de força de amortecimento para a solução da equação de equilíbrio não-linear. Portanto, excluindo-se os termos translacionais da Equação (4.36), tem-se a variação da energia de amortecimento de rotação:

$$\Pi_{a,Rot} = \delta K_{a,Rot} = \int_0^l (\delta \boldsymbol{\theta}^T \mu \mathbf{I}_\rho \dot{\mathbf{W}}) dx \quad (4.67)$$

Linearizando a Equação (4.67), tem-se:

$$\Delta\Pi_{a,Rot} = \int_0^l (\delta\boldsymbol{\theta}^T \mu \mathbf{I}_\rho \Delta\dot{\boldsymbol{W}}) dx \quad (4.68)$$

Substituindo a variação da velocidade angular material, dada na Equação (4.46), na Equação (4.68):

$$\Delta\Pi_{a,Rot} = \int_0^l (\delta\boldsymbol{\theta}^T \mu \mathbf{I}_\rho \Delta\dot{\boldsymbol{\theta}}) dx + \int_0^l (\delta\boldsymbol{\theta}^T \mu \mathbf{I}_\rho \mathbf{S}_{\dot{\boldsymbol{W}}} \Delta\boldsymbol{\theta}) dx \quad (4.69)$$

e inserindo a relação (4.49) na Equação (4.69), obtém-se:

$$\Delta\Pi_{a,Rot} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \int_0^l (\delta\boldsymbol{\theta}^T \mu \mathbf{I}_\rho \Delta\boldsymbol{\theta}) dx + \int_0^l (\delta\boldsymbol{\theta}^T \mu \mathbf{I}_\rho \mathbf{S}_{\dot{\boldsymbol{W}}} \Delta\boldsymbol{\theta}) dx \quad (4.70)$$

Logo, a matriz tangente de amortecimento, incluindo os termos de translação, pode ser escrita como:

$$\mathbf{C}_{Dyn} = \frac{\mu\gamma}{\beta\Delta t} \int_0^l \mathbf{P}(x)^T \begin{pmatrix} A\rho\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_\rho \end{pmatrix} \mathbf{P}(x) dx + \mu \int_0^l \mathbf{P}(x)^T \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_\rho \mathbf{S}_{\dot{\boldsymbol{W}}} \end{pmatrix} \mathbf{P}(x) dx \quad (4.71)$$

Analisando a Equação (4.71), observa-se que a matriz tangente de amortecimento será composta por duas parcelas. A primeira refere-se ao amortecimento do movimento relativo \mathbf{C}_{rel} , que é proporcional a matriz de massa da estrutura \mathbf{M} . A segunda parcela resulta do amortecimento do movimento giroscópico da estrutura \mathbf{C}_{gir} . Assim, tem-se:

$$\mathbf{C}_{Dyn} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{C}_{rel} + \mathbf{C}_{gir} \quad (4.72)$$

Aplicando a matriz de transformação \mathbf{G} , tem-se a matriz tangente de amortecimento em coordenadas globais:

$$\bar{\mathbf{C}}_{Dyn} = \mathbf{G}\mathbf{C}_{Dyn}\mathbf{G}^T \quad (4.73)$$

Resolvendo as integrais da matriz de amortecimento relativo, obtém-se de forma compacta:

$$\mathbf{C}_{rel} = \mu \mathbf{M} \quad (4.74)$$

Já a solução das integrais que compõem a matriz de amortecimento giroscópico

$$\mathbf{C}_{gir} = \mu \int_0^l \mathbf{P}(x)^T \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_\rho \mathbf{S}_{\dot{W}} \end{pmatrix} \mathbf{P}(x) dx \quad (4.75)$$

fornece

$$\mathbf{C}_{gir} = \frac{l}{12} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{gir,11} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{gir,12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{gir,12} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{gir,22} \end{pmatrix} \quad (4.76)$$

onde:

$$\mathbf{C}_{gir,11} = (3I_\rho \mathbf{S}_{W_1} + I_\rho \mathbf{S}_{W_2}) \quad (4.77)$$

$$\mathbf{C}_{gir,12} = (I_\rho \mathbf{S}_{W_1} + I_\rho \mathbf{S}_{W_2}) \quad (4.78)$$

$$\mathbf{C}_{gir,22} = (I_\rho \mathbf{S}_{W_1} + 3I_\rho \mathbf{S}_{W_2}) \quad (4.79)$$

4.5 – INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO NO TEMPO

A resposta do sistema dinâmico, para o problema em estudo, é obtida através da integração no tempo de um sistema de equações diferenciais não-lineares de segunda ordem. Sabe-se que os métodos de integração implícitos, quando aplicados a problemas não-lineares, requerem habitualmente a solução de um sistema de equações não-lineares em cada passo de tempo. Nesse caso, a solução do problema é alcançada por meio de sucessivas soluções de sistemas de equações algébricas, em cada instante de tempo, usando algoritmos iterativos, como o método de *Newton-Raphson*, o qual é utilizado no presente trabalho. Contudo, em razão das rotações finitas serem não-comutativas e não-aditivas, impossibilita-se a aplicação direta dos métodos de integração da família *Newmark* para as rotações finitas e seus derivados, ou seja, velocidades e acelerações angulares.

Consequentemente, de acordo com a literatura técnica referente ao *MEF* aplicado a problemas dinâmicos não-lineares envolvendo grandes rotações no espaço (Le *et al.*, 2012; Lens e Cardona, 2008; Mäkinen, 2007; Géradin e Cardona, 2001; Mäkinen, 2000; Hsiao *et*

al., 1999; Ibrahimbegović e Mikdad, 1998; Crisfield *et al.*, 1997; Cardona, 1989; Cardona e Géradin, 1988), o sistema de equações diferenciais deve ser dividido em dois subsistemas: um referente aos graus de liberdade translacionais e um segundo decorrente dos graus de liberdade rotacionais.

4.5.1 – Atualização das variáveis translacionais pelo método de *Newmark*

O método de *Newmark* refere-se a uma família de processos implícitos e explícitos de solução da equação de movimento de um sistema. Sua concepção é baseada na variação linear da aceleração ao longo do intervalo de integração. Como já foi observado, o procedimento clássico de *Newmark* é utilizado somente para os deslocamentos, velocidades e acelerações translacionais, e não apresenta qualquer dificuldade em particular. As relações padrões para velocidade e deslocamento translacional no passo de tempo $n + 1$, se descrevem como:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t^2 \left(\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{u}}_n + \beta \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \right) \quad (4.80)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t \left((1 - \gamma) \ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \right) \quad (4.81)$$

A partir das Equações (4.80) e (4.81), define-se a predição da velocidade e do deslocamento translacional no passo de tempo $n + 1$, em função das variáveis conhecidas no passo de tempo anterior n , como:

$$\mathbf{u}_{n+1}^* = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (4.82)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^* = \dot{\mathbf{u}}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (4.83)$$

Utilizando as variáveis preditas $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^*$ e \mathbf{u}_{n+1}^* , a velocidade e o deslocamento no passo tempo $n + 1$ se reescrevem como:

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^* + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (4.84)$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1}^* + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (4.85)$$

A aceleração e a velocidade, no passo tempo $n + 1$, podem ser expressas em função dos deslocamentos \mathbf{u}_{n+1}^* e \mathbf{u}_{n+1} , assumindo a forma:

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^* + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}^*) \quad (4.86)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \frac{1}{\beta\Delta t^2} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}^*) \quad (4.87)$$

Portanto, as quantidades iterativas para o deslocamento, a velocidade e aceleração na iteração $k + 1$, em função da correção $\Delta\mathbf{u}^k$, levando em consideração as Equações (4.86) e (4.87), são definidas como:

$$\mathbf{u}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{u}_{n+1}^k + \Delta\mathbf{u}^k \quad (4.88)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{k+1} = \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^k + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \Delta\mathbf{u}^k \quad (4.89)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{k+1} = \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^k + \frac{1}{\beta\Delta t^2} \Delta\mathbf{u}^k \quad (4.90)$$

4.5.2 – Atualização das variáveis rotacionais pelo método de *Newmark*

O grande sucesso da metodologia proposta por G eradin e Cardona (G eradin e Cardona, 2001; Cardona, 1989; Cardona e G eradin, 1988) est  relacionado   propriedade aditiva do vetor incremental rotacional, a qual permite a utiliza o do procedimento cl ssico de Newmark para a atualiza o das vari veis nodais de rota o $\boldsymbol{\theta}_{n+1}^k$, $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{n+1}^k$ e $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{n+1}^k$. De acordo com Cardona (1989), s o adotados os seguintes crit rios para se inicializar o processo de integra o:

$$\boldsymbol{\theta}_n = \mathbf{0} \quad (4.91)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_n = \dot{\mathbf{W}}_n \quad (4.92)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}}_n = \ddot{\mathbf{W}}_n \quad (4.93)$$

Portanto, as rela es para predi o da rota o e velocidade do vetor incremental rotacional no passo de tempo $n + 1$, se descrevem como:

$$\boldsymbol{\theta}_{n+1} = \Delta t \dot{\boldsymbol{\theta}}_n + \Delta t^2 \left(\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\boldsymbol{\theta}}_n + \beta \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{n+1} \right) \quad (4.94)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{n+1} = \dot{\boldsymbol{\theta}}_n + \Delta t \left((1 - \gamma) \ddot{\boldsymbol{\theta}}_n + \gamma \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{n+1} \right) \quad (4.95)$$

Em relação à fase corretora, as quantidades iterativas para a rotação, a velocidade e aceleração do vetor incremental rotacional na iteração $k + 1$, em função da correção $\Delta\theta^k$, são escritas como:

$$\theta_{n+1}^{k+1} = \theta_{n+1}^k + \Delta\theta^k \quad (4.96)$$

$$\dot{\theta}_{n+1}^{k+1} = \dot{\theta}_{n+1}^k + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \Delta\theta^k \quad (4.97)$$

$$\ddot{\theta}_{n+1}^{k+1} = \ddot{\theta}_{n+1}^k + \frac{1}{\beta\Delta t^2} \Delta\theta^k \quad (4.98)$$

Onde a velocidade e aceleração angular material são definidas em função do vetor incremental rotacional conforme as relações (2.93) e (2.95), apresentadas anteriormente no capítulo 2. Desse modo, pode-se escrever que:

$$\dot{W}_{n+1}^{k+1} = T_{\theta_{n+1}^{k+1}} \dot{\theta}_{n+1}^{k+1} \quad (4.99)$$

$$\ddot{W}_{n+1}^{k+1} = T_{\theta_{n+1}^{k+1}} \ddot{\theta}_{n+1}^{k+1} + \dot{T}_{\theta_{n+1}^{k+1}} \dot{\theta}_{n+1}^{k+1} \quad (4.100)$$

4.5.3 – Equação de equilíbrio para o método HHT- α

No presente trabalho, os problemas dinâmicos são resolvidos utilizando o método HHT- α (Hughes *et al.*, 1978), que pode ser considerado como uma variação do método de *Newmark*, uma vez que faz uso das funções de interpolação de *Newmark*. Baseando-se em Le *et al.* (2012) e Crisfield *et al.* (1997), e incluindo as forças de amortecimento ao método HHT- α , se escrevem as forças desequilibradas, ou residuais, no equilíbrio dinâmico como:

$$\mathbf{r}_{n+1} = (1 + \alpha)\bar{\mathbf{f}}_{e_{n+1}} - (1 + \alpha)\bar{\mathbf{f}}_{n+1} - \bar{\mathbf{f}}_{k_{n+1}} - \bar{\mathbf{f}}_{a_{n+1}} + \alpha(\bar{\mathbf{f}}_n - \bar{\mathbf{f}}_{e_n}) = \mathbf{0} \quad (4.101)$$

onde $\bar{\mathbf{f}}_e$ é vetor de forças externas, $\bar{\mathbf{f}}$ é o vetor de forças internas, $\bar{\mathbf{f}}_k$ o vetor de forças inerciais e $\bar{\mathbf{f}}_a$ o vetor de forças de amortecimento em coordenadas globais. Logo, a norma euclidiana empregada para se determinar a convergência nas iterações de equilíbrio pode ser escrita como:

$$\frac{\|\mathbf{r}_{n+1}\|}{\|\mathbf{f}_{n+1}\|} < Tol \quad (4.102)$$

onde Tol é um valor prescrito de tolerância do erro.

Derivando os vetores de forças internas, inerciais e de amortecimento, pelo método HHT- α :

$$(1 + \alpha)\delta\bar{\mathbf{f}}_{n+1} + \delta\bar{\mathbf{f}}_{k_{n+1}} + \delta\bar{\mathbf{f}}_{a_{n+1}} = \bar{\mathbf{K}}_{total,n+1}\delta\mathbf{q} \quad (4.103)$$

obtem-se a matriz tangente iterativa total $\bar{\mathbf{K}}_{total}$:

$$\bar{\mathbf{K}}_{total,n+1} = (1 + \alpha)\bar{\mathbf{K}}_{t,n+1} + \bar{\mathbf{K}}_{Dyn,n+1} + \bar{\mathbf{C}}_{Dyn,n+1} \quad (4.104)$$

onde $\bar{\mathbf{K}}_t$ é a matriz de rigidez tangente estática, $\bar{\mathbf{K}}_{Dyn}$ é a matriz tangente de inércia e $\bar{\mathbf{C}}_{Dyn}$ a matriz tangente de amortecimento.

Os parâmetros de integração no tempo γ e β , já mencionados nesse capítulo, de acordo com Crisfield *et al.* (1997), são obtidos segundo as relações:

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha \quad (4.105)$$

$$\beta = \frac{1}{4}(1 - \alpha)^2 \quad (4.106)$$

4.5.4 – Implementação da solução numérica

Nessa seção, apresentam-se a metodologia para a solução numérica da Equação (4.101), na qual se utiliza um procedimento incremental-iterativo baseado no método de integração direta HHT- α em combinação com o método de *Newton-Raphson*. Assume-se que a configuração de equilíbrio dinâmico é conhecida no instante t_n . Admite-se que existe uma variação do tempo entre os instantes t_n e t_{n+1} , onde Δt representa o passo de tempo. A seguir, apresenta-se o procedimento incremental-iterativo utilizado para a solução dos problemas dinâmicos não-lineares estudados no presente trabalho.

1. INICIALIZAÇÃO:

- a) Definir os dados iniciais: $\bar{\mathbf{M}}, \bar{\mathbf{f}}_{e_0}, \bar{\mathbf{f}}_0, \bar{\mathbf{f}}_{a_0}, \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0, \Delta t, \gamma, \beta$ e α
- b) Calcular o vetor de aceleração inicial: $\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{M}^{-1}(\bar{\mathbf{f}}_{e_0} - \bar{\mathbf{f}}_{a_0} - \bar{\mathbf{f}}_0)$

2. PROCESSO DE INCREMENTO DE TEMPO:

- a) Determinar o incremento de tempo: $t_{n+1} = t_n + \Delta t$
- b) Calcular o vetor de forças externas $\bar{\mathbf{f}}_{e_{n+1}}$
- c) Predição das variáveis translacionais:
 - i. $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t^2 \left(\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{u}}_n + \beta \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \right)$, Eq. (4.80)
 - ii. $\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t \left((1 - \gamma) \ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \right)$, Eq. (4.81)
 - iii. $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \mathbf{0}$
- d) Predição das variáveis rotacionais decorrentes do vetor incremental rotacional:
 - i. $\boldsymbol{\theta}_{n+1} = \Delta t \dot{\boldsymbol{\theta}}_n + \Delta t^2 \left(\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\boldsymbol{\theta}}_n + \beta \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{n+1} \right)$, Eq. (4.94)
 - ii. $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{n+1} = \dot{\boldsymbol{\theta}}_n + \Delta t \left((1 - \gamma) \ddot{\boldsymbol{\theta}}_n + \gamma \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{n+1} \right)$, Eq. (4.95)
 - iii. $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{n+1} = \mathbf{0}$
- e) Montar os vetores $\mathbf{q} = [\mathbf{u}^T, \boldsymbol{\theta}^T]$, $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{\mathbf{u}}^T, \dot{\boldsymbol{\theta}}^T]$ e $\ddot{\mathbf{q}} = [\ddot{\mathbf{u}}^T, \ddot{\boldsymbol{\theta}}^T]$, onde $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{n+1}$ e $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{n+1} = \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{n+1}$
- f) Atualizar a matriz de rotação: $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_{n+1}} = \mathbf{R}_{\Delta\boldsymbol{\theta}} \mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_n}$ com a Eq. (3.52).
- g) Corrigir as variáveis utilizando o método iterativo de *Newton-Raphson*:
 - i. Calcular a matriz de rigidez tangente estática $\bar{\mathbf{K}}_{t,n+1}$ com a Eq. (3.124).
 - ii. Calcular a matriz de massa $\bar{\mathbf{M}}_{n+1}$ com a Eq. (4.21)
 - iii. Calcular a matriz giroscópica $\bar{\mathbf{C}}_{k,n+1}$ com a Eq. (4.58)
 - iv. Calcular a matriz centrífuga $\bar{\mathbf{K}}_{k,n+1}$ com a Eq. (4.63)
 - v. Calcular a matriz tangente de inércia $\bar{\mathbf{K}}_{Dyn,n+1}$ com a Eq. (4.53)
 - vi. Calcular a matriz de amortecimento relativo $\bar{\mathbf{C}}_{rel,n+1}$ com a Eq. (4.74)
 - vii. Calcular a matriz de amortecimento giroscópico $\bar{\mathbf{C}}_{gir,n+1}$ com a Eq. (4.76)
 - viii. Calcular a matriz tangente de amortecimento $\bar{\mathbf{C}}_{Dyn,n+1}$ com a Eq. (4.72)
 - ix. Calcular a matriz tangente iterativa total $\bar{\mathbf{K}}_{total,n+1}$ com a Eq. (4.104)
 - x. Calcular o vetor de força interna $\bar{\mathbf{f}}_{n+1}$ com a Eq. (3.125)
 - xi. Calcular o vetor de força inercial $\bar{\mathbf{f}}_{k,n+1}$ com a Eq. (4.23)

- xii. Calcular o vetor de força de amortecimento $\bar{\mathbf{f}}_{a_{n+1}}$ com a Eq. (4.43)
- xiii. Calcular o vetor de força residual (método HHT- α):
- A. $\mathbf{r}_{n+1} = (1 + \alpha)\bar{\mathbf{f}}_{e_{n+1}} - (1 + \alpha)\bar{\mathbf{f}}_{n+1} - \bar{\mathbf{f}}_{k_{n+1}} - \bar{\mathbf{f}}_{a_{n+1}} + \alpha(\bar{\mathbf{f}}_n - \bar{\mathbf{f}}_{e_n})$
- xiv. Calcular o incremento de deslocamento: $\bar{\mathbf{K}}_{total_{n+1}}\Delta\mathbf{q} = -\mathbf{r}_{n+1}$, onde $\Delta\mathbf{q} = [\Delta\mathbf{u}^T, \Delta\boldsymbol{\theta}^T]$
- xv. Calcular a correção das variáveis translacionais:
- A. $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1} + \Delta\mathbf{u}$, Eq. (4.88)
- B. $\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\Delta\mathbf{u}$, Eq. (4.89)
- C. $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\Delta\mathbf{u}$, Eq. (4.90)
- xvi. Calcular a correção das variáveis rotacionais decorrentes do vetor incremental rotacional:
- A. $\boldsymbol{\theta}_{n+1} = \boldsymbol{\theta}_{n+1} + \Delta\boldsymbol{\theta}$, Eq. (4.96)
- B. $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{n+1} = \dot{\boldsymbol{\theta}}_{n+1} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\Delta\boldsymbol{\theta}$, Eq. (4.97)
- C. $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{n+1} = \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{n+1} + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\Delta\boldsymbol{\theta}$, Eq. (4.98)
- xvii. Calcular as velocidades e acelerações angulares em coordenadas materiais:
- A. $\dot{\mathbf{W}}_{n+1} = \mathbf{T}_{\boldsymbol{\theta}_{n+1}}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{n+1}$, Eq. (4.99)
Para o cálculo de $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\theta}_{n+1}}$, utilizar a Eq. (2.94)
- B. $\ddot{\mathbf{W}}_{n+1} = \mathbf{T}_{\boldsymbol{\theta}_{n+1}}\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{n+1} + \dot{\mathbf{T}}_{\boldsymbol{\theta}_{n+1}}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{n+1}$, Eq. (4.100)
Para o cálculo de $\dot{\mathbf{T}}_{\boldsymbol{\theta}_{n+1}}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{n+1}$, utilizar a Eq. (2.96)
- xviii. Atualizar a matriz de rotação: $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_{n+1}} = \mathbf{R}_{\Delta\boldsymbol{\theta}}\mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_{n+1}}$ com a Eq. (3.52)
- xix. Se $\frac{\|\mathbf{r}_{n+1}\|}{\|\bar{\mathbf{f}}_{n+1}\|} < Tol$, assumir a convergência, se não, voltar ao passo g.
-

5 – EXEMPLOS NUMÉRICOS

Com a finalidade de ilustrar e validar a implementação das formulações exibidas nos capítulos anteriores, nessa seção são apresentadas simulações numéricas de problemas geometricamente não-lineares estáticos e dinâmicos, nos quais empregam-se os recursos disponibilizados pelo programa *SIAE (Sistema Integrado de Análise Estrutural)*, desenvolvido na plataforma *Matlab* pelo presente autor.

5.1 – PROBLEMAS ESTÁTICOS

Na atual seção são apresentados cinco exemplos numéricos de estruturas constituídas por elementos finitos de viga de *Euler-Bernoulli* 3D corrotacional, conforme a descrição cinemática corrotacional apresentada no Capítulo 3. Compete também destacar, que os objetivos das análises dessa seção é validar a formulação corrotacional para problemas estáticos além de avaliar a simetrização da matriz de rigidez tangente global, que será realizado nos Exemplos 01, 02, 03 e 04. A fim de confirmar se há ou não a simetrização da matriz de rigidez tangente global quando o sistema está em equilíbrio, propõem-se em realizar dois testes, que podem ser observados na Tabela 5.1, que correspondem a *Norma de Frobenius* (N_{fro}) e *Máximo Coeficiente Absoluto* (C_{max}) da matriz de coeficientes resultantes da diferença entre matriz de rigidez tangente global e sua transposta.

Tabela 5.1 – Testes para avaliação da simetrização da matriz de rigidez tangente.

TESTES DE SIMETRIZAÇÃO	OPERAÇÕES
<i>Norma de Frobenius</i>	$N_{fro} = \ \mathbf{K}^A - (\mathbf{K}^A)^T\ \rightarrow 0$
<i>Máximo Coeficiente Absoluto</i>	$C_{max} = \max(\text{abs}(\mathbf{K}^A - (\mathbf{K}^A)^T)) \rightarrow 0$

onde os termos *max* e *abs* equivalem a obtenção do coeficiente de valor máximo e absoluto, e \mathbf{K}^A corresponde a matriz de rigidez tangente global antissimétrica. Para o cálculo da norma matricial, adota-se a norma de *Frobenius*, definida pela equação:

$$\|\mathbf{K}\| = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |K_{ij}|^2 \right)^{1/2} \quad (5.1)$$

Nos exemplos que se seguem, haverá a indicação K^S nas trajetórias de equilíbrio, a qual refere-se à utilização da matriz de rigidez tangente global simétrica nas análises, a qual é obtida a partir da matriz de rigidez tangente do elemento \bar{k}_t simétrica, a qual é calculada como:

$$\bar{k}_t = \frac{1}{2}(\bar{k}_t + \bar{k}_t^T) \quad (5.2)$$

Para todos os exemplos apresentados nessa seção, é adotada uma tolerância de convergência para o equilíbrio igual a 10^{-5} .

5.1.1 – Exemplo 01: Viga engastada espacial com curvatura de 45 graus

Na Figura 5.1, observa-se a viga circular engastada e livre, inicialmente curva e com seção transversal quadrada, com uma carga P aplicada em sua extremidade livre. As propriedades geométricas e mecânicas são: $R = 100 \text{ m}$, $A = 1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$, $I_x = 1,667 \times 10^{-1} \text{ m}^4$, $I_y = I_z = 8,333 \times 10^{-2} \text{ m}^4$, $E = 1,0 \times 10^7 \text{ Pa}$ e $\nu = 0$. Dentre os autores que são utilizados para o estudo desse exemplo, Surana e Sorem (1989) analisaram o referente problema utilizando elementos de viga 3D usando a formulação Lagrangeana total, e os resultados obtidos servem de referência para pesquisas correlacionadas.

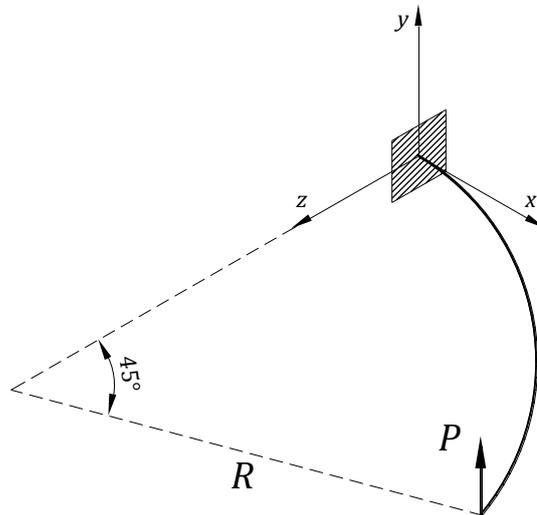


Figura 5.1 – Viga circular em balanço com carga aplicada na extremidade.

Para efeito de comparação com outros trabalhos, a estrutura foi discretizada utilizando-se 8 elementos finitos de viga de igual comprimento. Contudo, a fim de verificar a influência do refinamento da malha na simetrização da matriz de rigidez tangente global, utilizaram-se

também modelos discretizados com 20 e 50 elementos finitos de viga de igual comprimento. A seguir, na Figura 5.2, têm-se as deformadas da estrutura para as cargas $P_1 = 300$ e $P_2 = 600$, considerando a malha com 8 elementos finitos de viga.

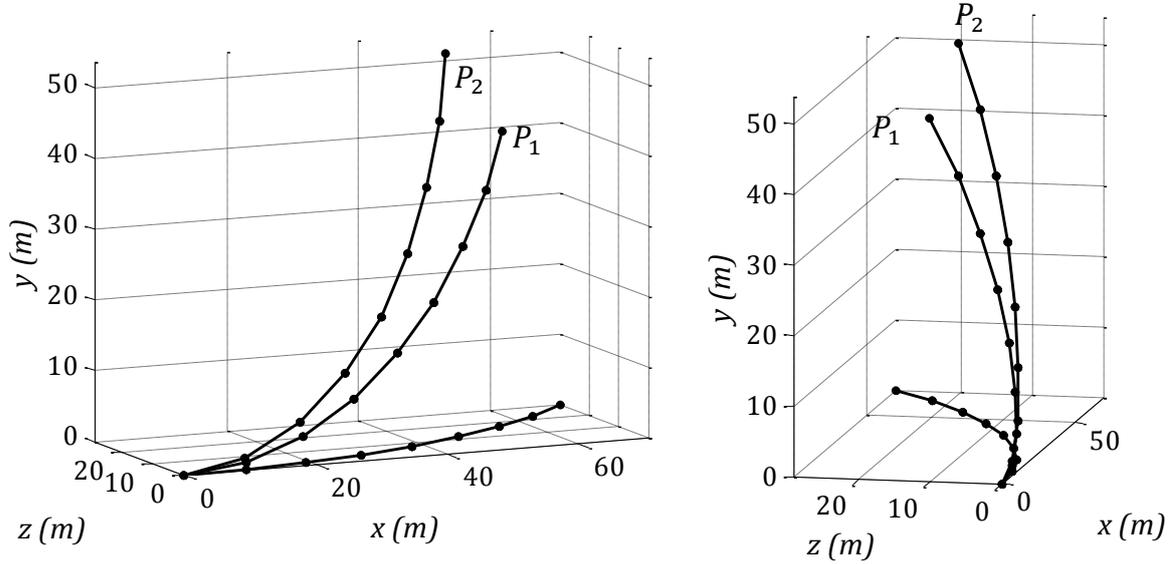


Figura 5.2 – Deformadas da estrutura.

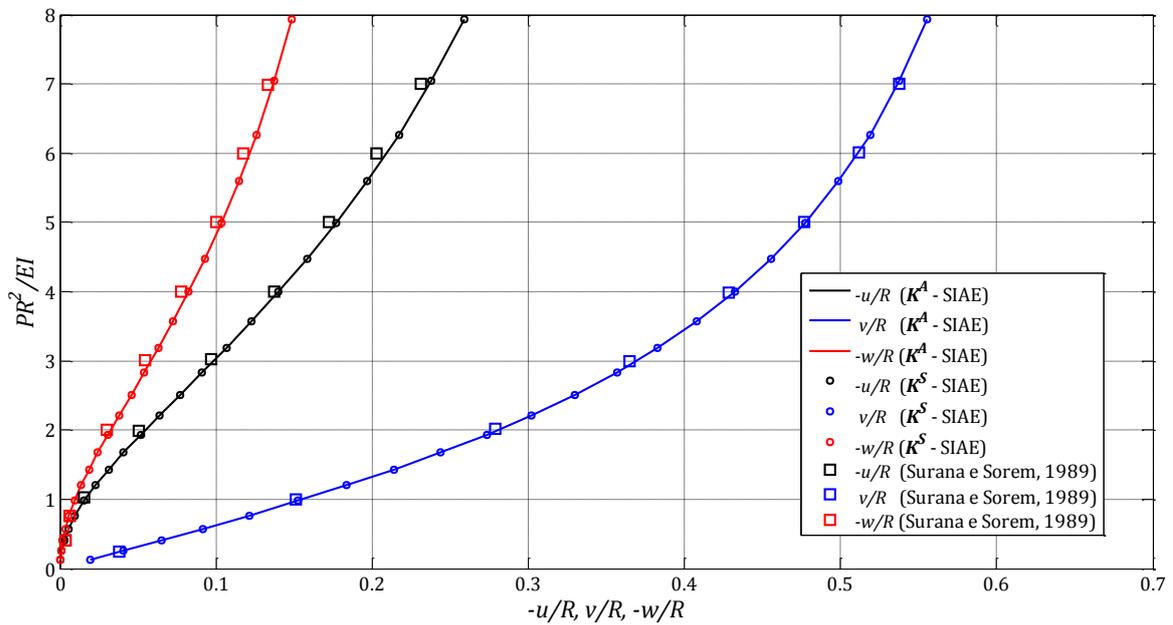


Figura 5.3 – Trajetórias de equilíbrio para a extremidade livre da viga para $-u/R$, v/R e $-w/R$ usando 8 elementos finitos de viga.

As trajetórias de equilíbrio para os deslocamentos $-u/R$, v/R e $-w/R$, na extremidade livre da viga, podem ser observadas na Figura 5.3. Os deslocamentos obtidos para u , v e w

peelo programa *SIAE* (considerando K^A) na extremidade livre da viga, são comparados na Tabela 5.2 com valores obtidos na literatura técnica, podendo-se perceber uma ótima concordância nos resultados apresentados.

Tabela 5.2 – Deslocamentos na extremidade livre da viga

Autores	$P = 300$			$P = 450$			$P = 600$		
	u	w	v	u	w	v	u	w	v
<i>SIAE</i>	-12,20	-7,20	40,80	-18,70	-10,50	48,80	-23,80	-13,70	53,80
Menin (2006)	-11,90	-7,02	40,19	-18,43	-10,74	48,53	-23,52	-13,56	53,50
Simo e Vu-Quoc (1986)	-11,87	-6,96	40,08	-18,39	-10,67	48,39	-23,48	-13,50	53,37
Cole (1990)	-11,95	-7,01	40,25	-18,50	-10,73	48,58	-23,61	-13,55	53,58
Bathe e Bolourchi (1979)	-11,51	-6,79	39,50	-	-	-	-23,50	-13,39	53,40
Cardona e Geradin (1988)	-12,07	-7,15	40,35	-18,60	-10,91	48,59	-23,67	-13,74	53,50
Crisfield (1990)	-12,18	-7,13	40,53	-18,78	-10,86	48,79	-23,87	-13,68	53,71
Monteiro (2004)	-12,14	-7,14	40,47	-18,70	-10,88	48,72	-23,78	-13,70	53,65

A seguir, nas Figuras 5.4 e 5.5, têm-se a evolução de N_{fro} (*Norma de Frobenius*) e C_{max} (*Máximo Coeficiente Absoluto*), indicados anteriormente na Tabela 5.1, em função do deslocamento v na extremidade livre da viga, considerando a matriz de rigidez tangente na iteração de equilíbrio da estrutura. A análise das referidas figuras indica que para os primeiros incrementos de carga, ou seja, no intervalo com pequenos deslocamentos na extremidade livre da viga, há uma tendência de simetrização da matriz de rigidez tangente da estrutura. Porém, à medida que os deslocamentos se maximizam, a matriz de rigidez tangente mantém-se antissimétrica mesmo na situação de equilíbrio.

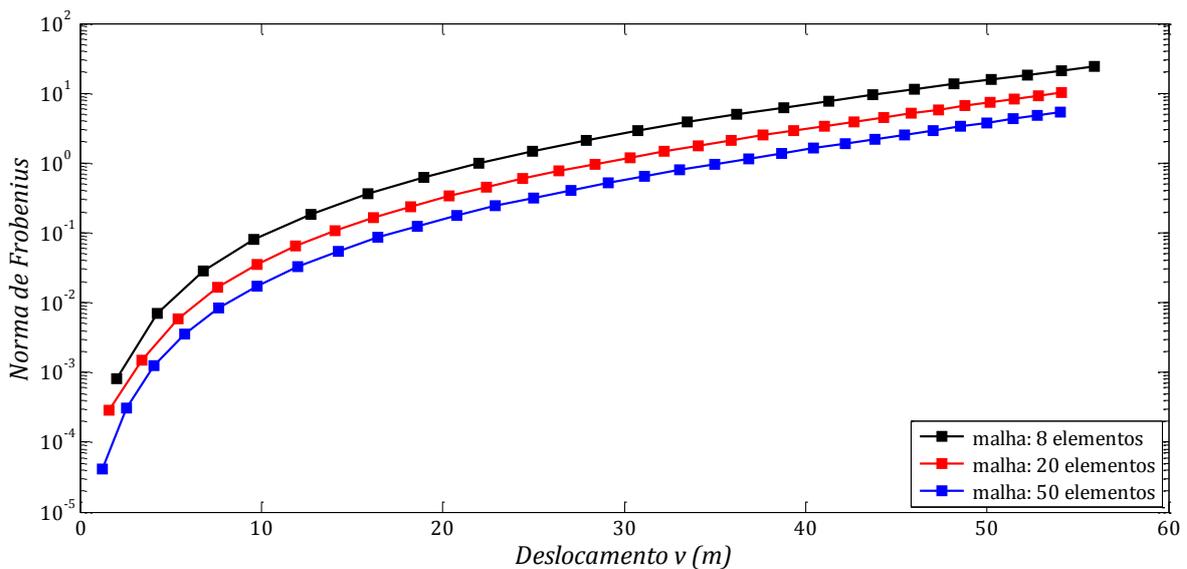


Figura 5.4 – N_{fro} vs deslocamento v na extremidade livre da viga.

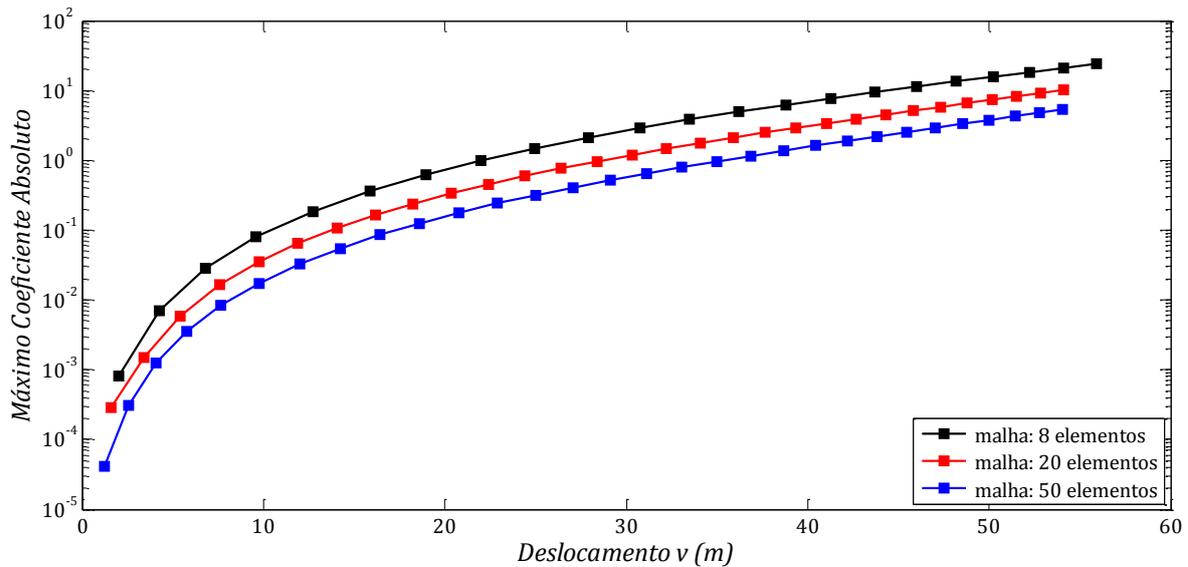


Figura 5.5 – C_{max} vs deslocamento v na extremidade livre da viga.

Avaliando-se individualmente os níveis de carga 50 N , 100 N , 300 N e 600 N (aplicadas somente em um passo de carga), através das Figuras 5.6 e 5.7, onde são apresentados os testes N_{fro} e C_{max} (numa configuração de equilíbrio da estrutura) em função dos graus de liberdade da estrutura (considerando as três malhas estudadas), é possível observar duas situações importantes: a não-simetrização da matriz de rigidez tangente à medida que se eleva o nível de carga na estrutura; e a influência do refinamento da malha na simetrização da matriz de rigidez tangente, indicando uma redução de N_{fro} e C_{max} à medida que se aumenta a quantidade de elementos e, conseqüentemente, o número de graus de liberdade.

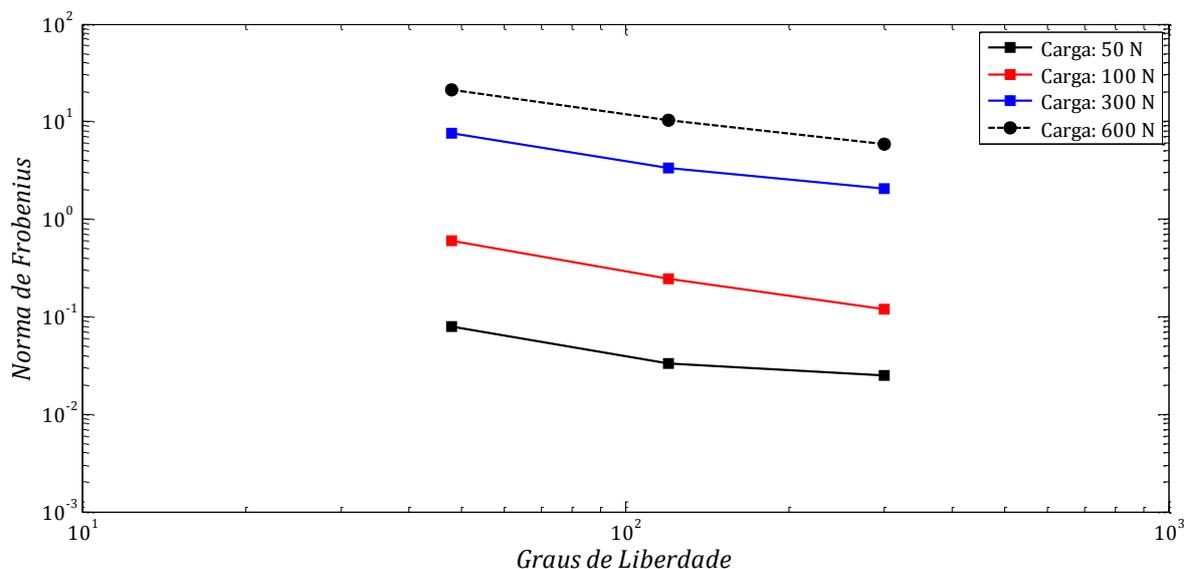


Figura 5.6 – N_{fro} vs graus de liberdade.

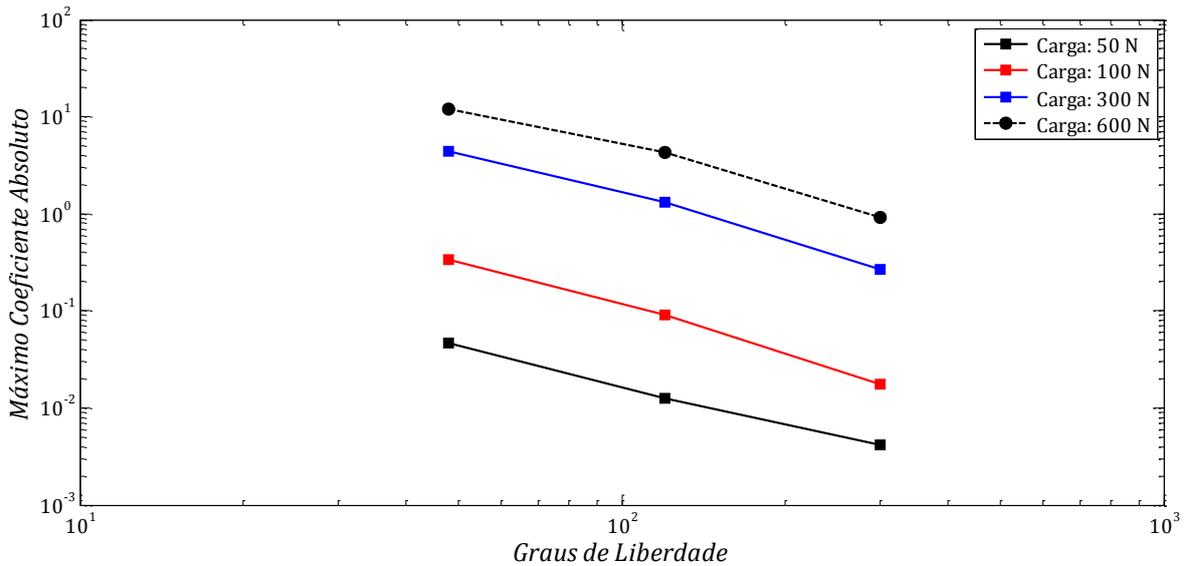


Figura 5.7 – C_{max} vs graus de liberdade.

O desenvolvimento de N_{fro} e C_{max} durante o processo iterativo até a configuração de equilíbrio, a título de exemplificação para os níveis de carga 50 N e 100 N considerando a estrutura discretizada com 8 elementos finitos de viga, são apresentados a seguir, nas Figuras 5.8 e 5.9. Ambos os gráficos indicam o decréscimo das normas entre a primeira e a última iteração, o que já era esperado, visto que existe a tendência dos termos não-simétricos (termos geométricos) se anularem na configuração de equilíbrio.

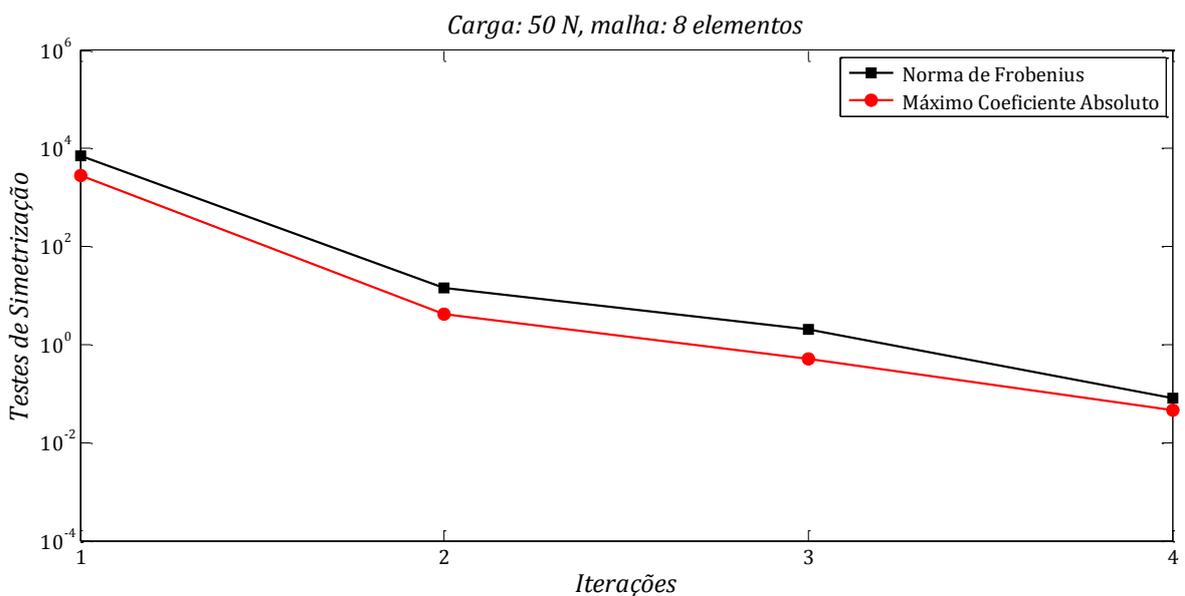


Figura 5.8 – Evolução iterativa dos testes N_{fro} e C_{max} para carga de 50 N e malha com 8 elementos finitos de viga.

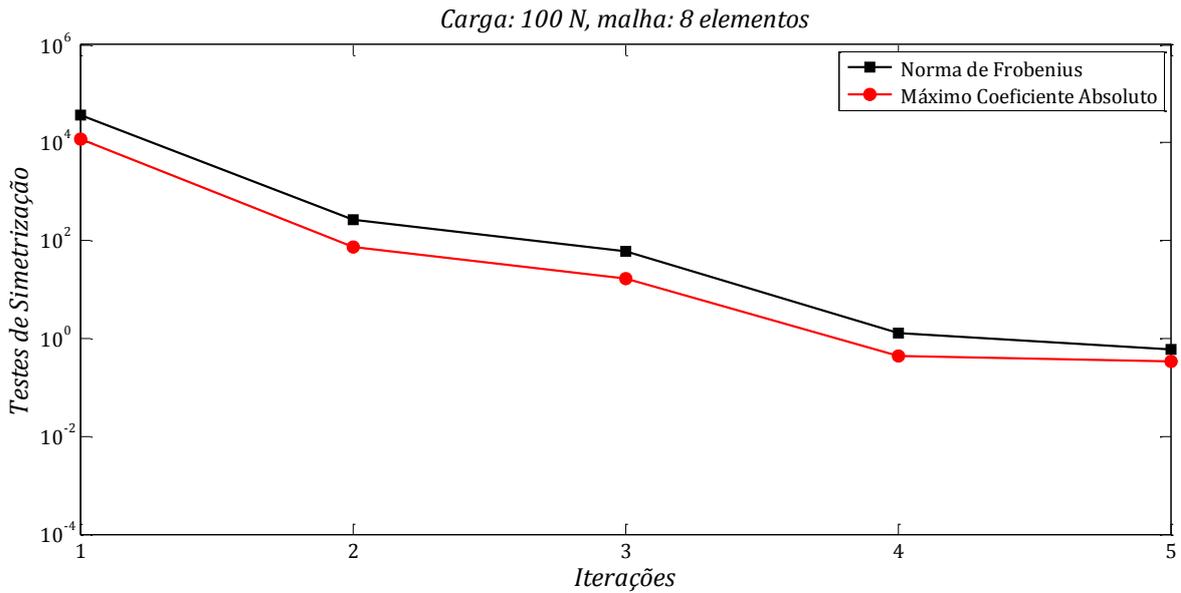


Figura 5.9 – Evolução iterativa dos testes N_{fro} e C_{max} para carga de 100 N e malha com 8 elementos finitos de viga.

5.1.2 – Exemplo 02: Pórtico em forma de L em balanço

Considerando o pórtico em forma de L em balanço, apresentado na Figura 5.10, com o aumento da carga P a partir de zero, ele permanece no plano até o valor $P = P_{cr}$. A partir desse ponto, é possível ocorrer uma flambagem lateral no pórtico.

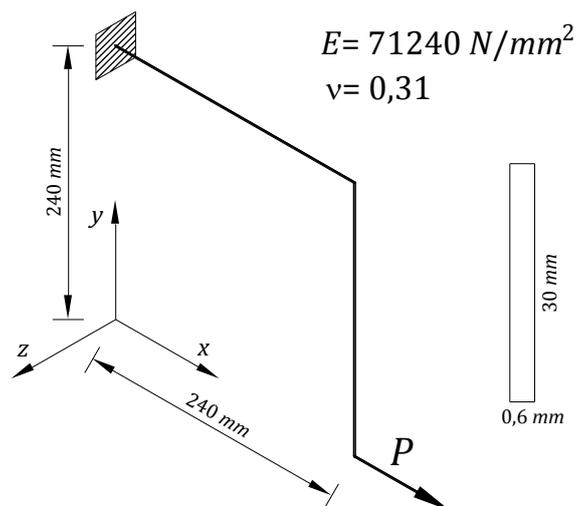


Figura 5.10 – Pórtico em forma de L em balanço.

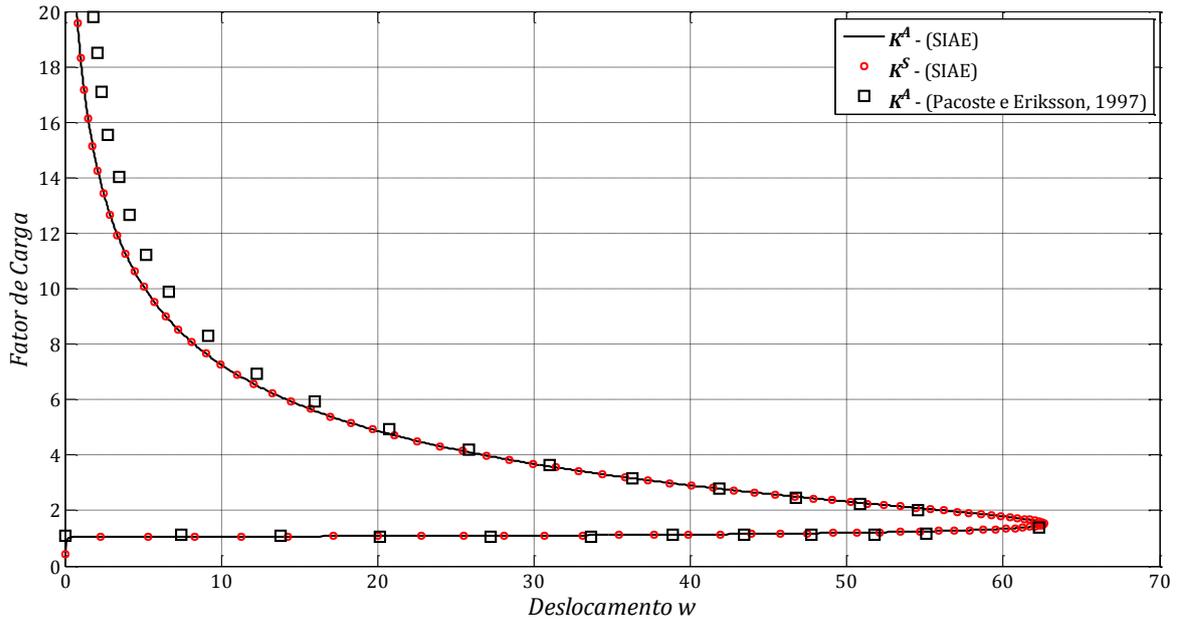


Figura 5.11 – Trajetória de equilíbrio secundário em função do deslocamento w .

Com o objetivo de se obter a trajetória secundária para o pórtico em forma de L , foi aplicada uma pequena carga $P_z = 2 \times 10^{-4} N$ na direção z , a qual foi mantida na extremidade livre do pórtico para simular uma pequena imperfeição até a carga P atingir um valor de aproximadamente $P_{cr} = 1,080N$. Uma vez alcançada a carga crítica, a estrutura sofre flambagem lateral.

Vale ressaltar que a carga de perturbação P_z é a mesma recomendada por Crisfield (1990), a qual funcionou com exatidão na presente análise. A trajetória secundária do deslocamento w na direção z , para o pórtico modelado com 5 elementos de igual comprimento por barra, com um total de 10 elementos finitos de viga, é apresentada na Figura 5.11 em conjunto com os resultados de Pacoste e Eriksson (1997), que também fazem uso da cinemática corrotacional associada ao elemento de viga 3D de Euler-Bernoulli. As configurações deformadas para os carregamentos $P_1 = 2,0N$ e $P_2 = 8,0N$, podem ser observadas a seguir, na Figura 5.12.

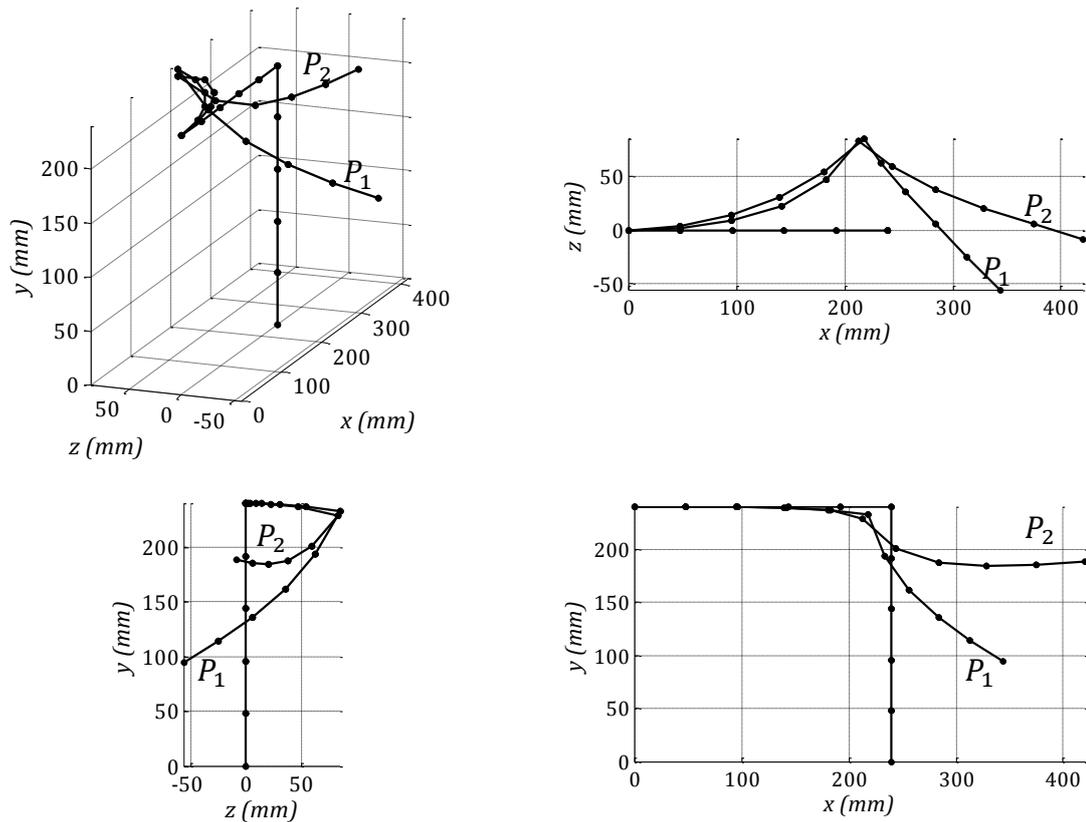


Figura 5.12 – Configurações deformadas para o pórtico em L .

A seguir, nas Figuras 5.13 e 5.14, têm-se o desenvolvimento dos testes N_{fro} e C_{max} em função do deslocamento w na extremidade livre da viga, considerando a matriz de rigidez tangente da iteração de equilíbrio da estrutura para malhas de 10, 20 e 40 elementos finitos de viga.

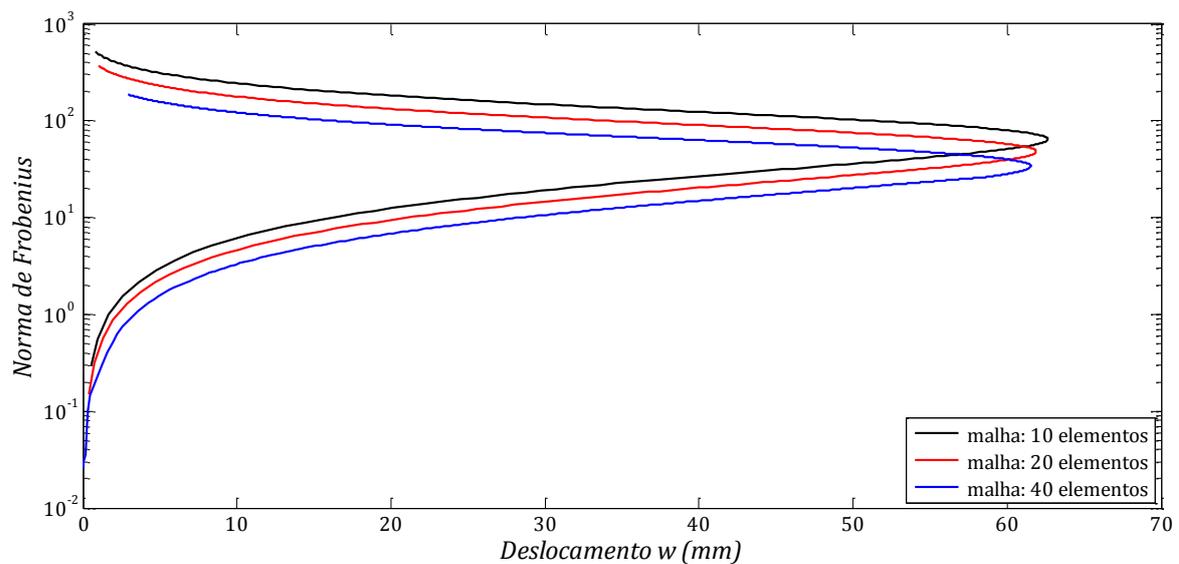


Figura 5.13 – N_{fro} vs deslocamento w na extremidade livre do pórtico.

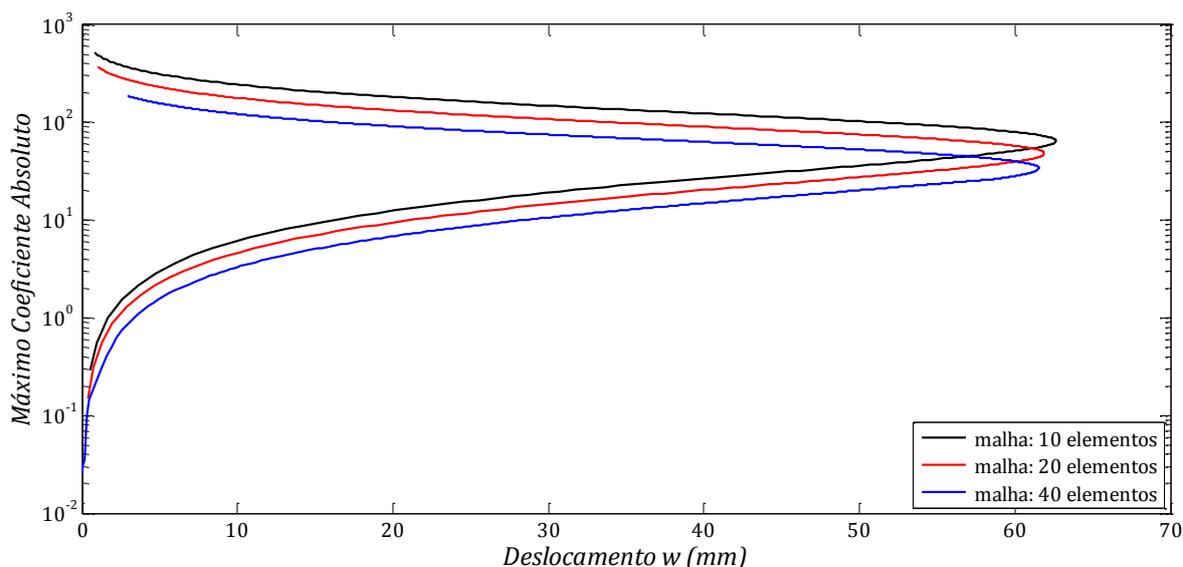


Figura 5.14 – C_{max} vs deslocamento w na extremidade livre do pórtico.

Ao se observar os gráficos apresentados anteriormente nas Figuras 5.12 e 5.13, percebe-se que há simetrização da matriz rigidez tangente global apenas no intervalo com deslocamentos infinitesimais na extremidade livre do pórtico, ou seja, somente para um baixo nível de intensidade de carga. Isso permite dizer que no intervalo de trajetória primária, considerando a Figura 5.11, ocorre simetrização da matriz de rigidez tangente. Já para o trecho de trajetória secundária, os resultados das normas indicam que não há simetrização da matriz de rigidez tangente, visto que nesse trecho ocorrem deslocamentos de ordem finita.

Desse modo, são escolhidos três níveis de carregamento em cada trajetória (primária e secundária), para construção dos gráficos de N_{fro} e C_{max} na configuração de equilíbrio em função dos graus de liberdade da estrutura (considerando as três malhas estudadas). Considerando as Figuras 5.15 e 5.16, que possuem normas para carregamentos pertencentes à trajetória primária, onde as intensidades de carga são $0,1 N$, $0,4 N$ e $1,0 N$ (aplicados somente em um passo de carga), observa-se pequenos valores de N_{fro} e C_{max} , indicando uma tendência de simetrização. Já para as intensidades de carga $1,2 N$, $2,0 N$ e $4,0 N$ (aplicados mais de um passo de carga), pertencentes a trajetória secundária, verifica-se valores elevados para as normas que podem ser observados nas Figuras 5.17 e 5.18. Tal observação confirma a não-simetrização da matriz de rigidez tangente para trecho da trajetória secundária.

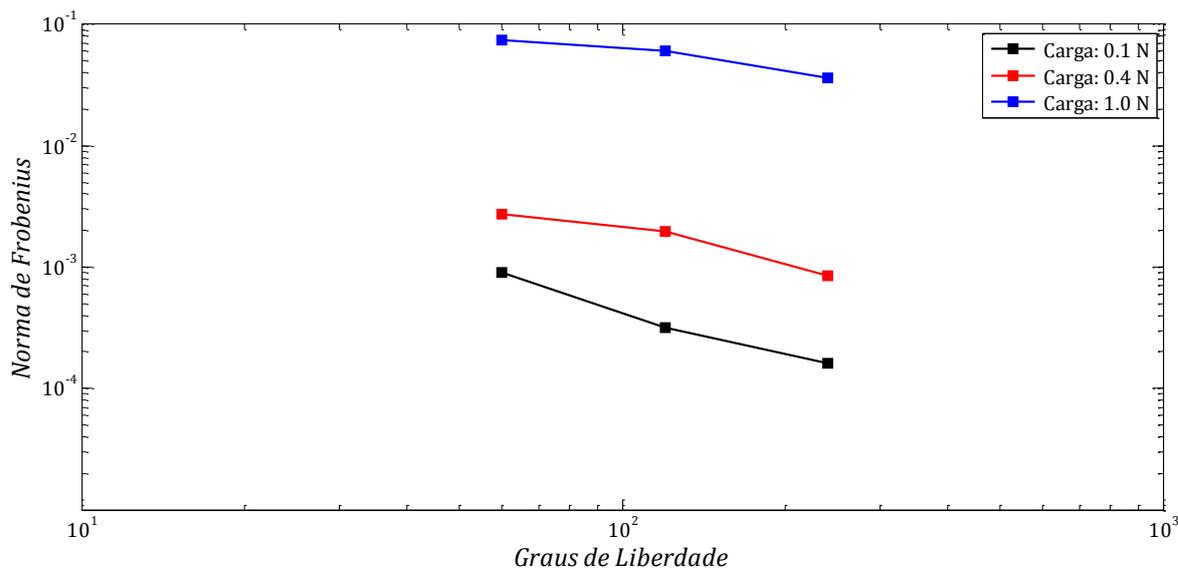


Figura 5.15 – N_{fro} vs graus de liberdade.

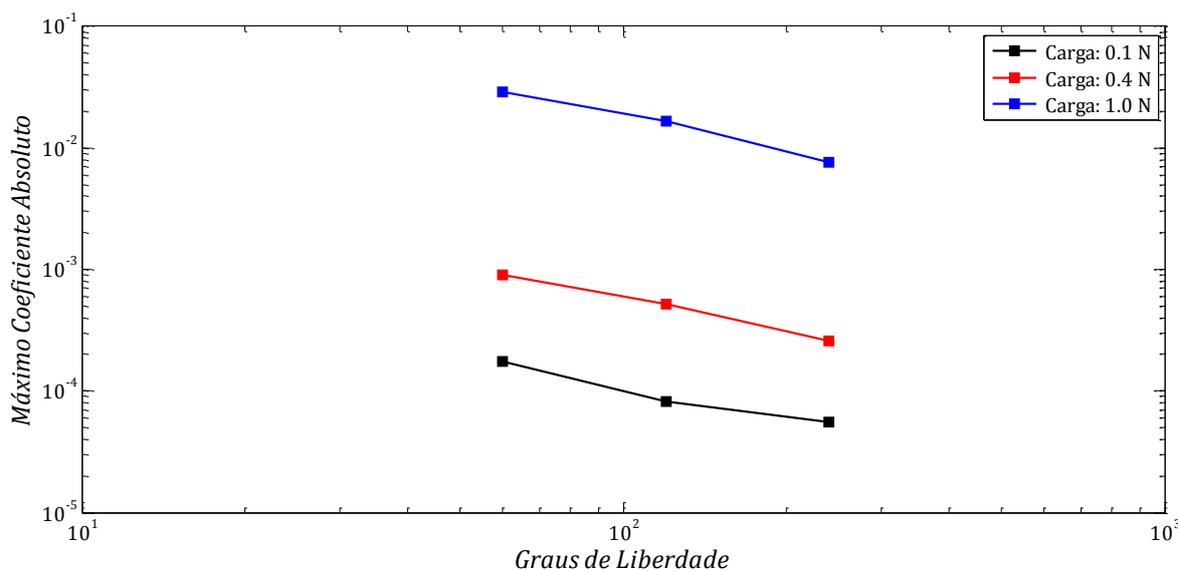


Figura 5.16 – C_{max} vs graus de liberdade.

Cabe enfatizar, que como no exemplo anterior, os gráficos ilustrados nas Figuras 5.15, 5.16, 5.17 e 5.18 também comprovam a redução da magnitude de N_{fro} e C_{max} com o aumento do número de graus de liberdade, ou seja, com o refinamento da malha de elementos.

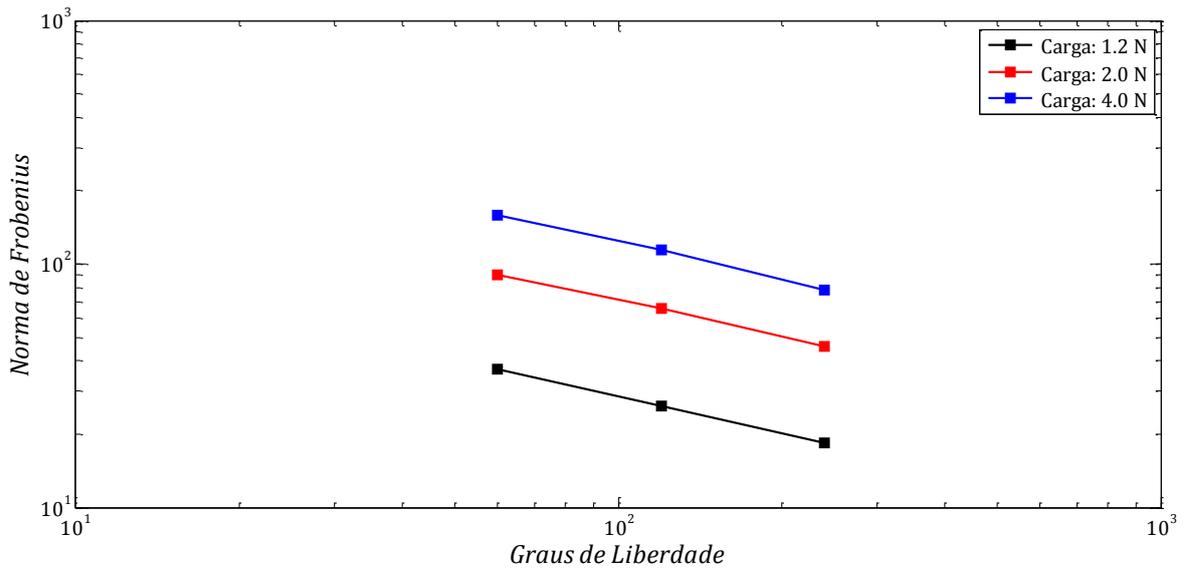


Figura 5.17 – N_{fro} vs graus de liberdade.

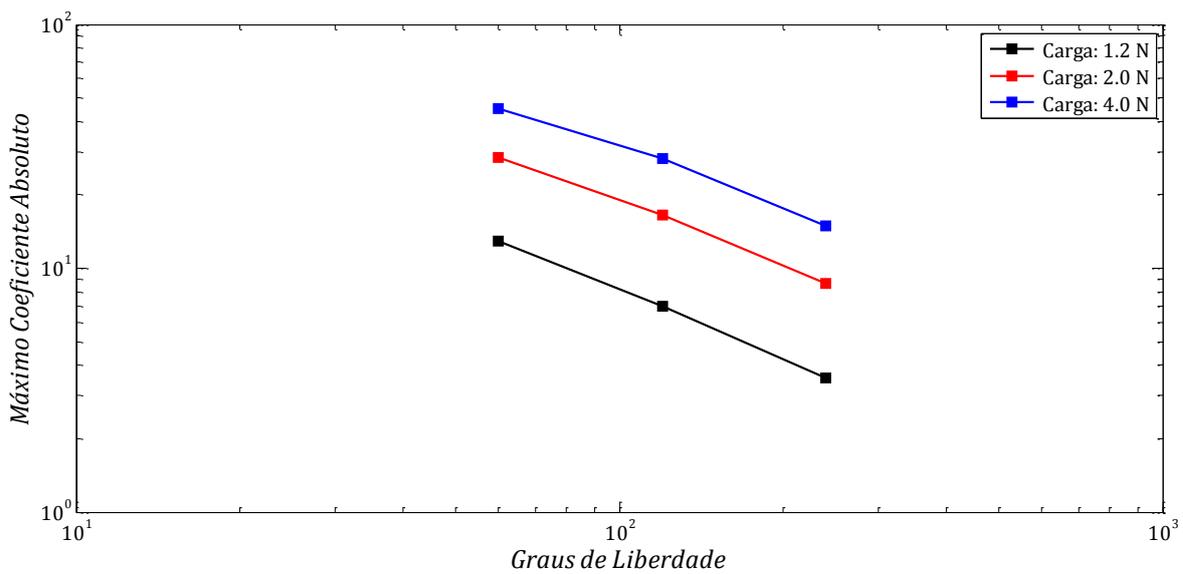


Figura 5.18 – C_{max} vs graus de liberdade.

A seguir, a título de exemplificação nas Figuras 5.19 e 5.20, tem-se a evolução da magnitude de N_{fro} e C_{max} durante o processo iterativo até a configuração de equilíbrio para os níveis de carga $0,4 N$ e $1,2 N$, considerando a estrutura discretizada com 40 elementos finitos de viga. Como já era esperado, nos dois gráficos se observa o decréscimo das normas entre a primeira e a última iteração, uma vez que existe a tendência dos termos geométricos, indicados em (3.148), se extinguirem.

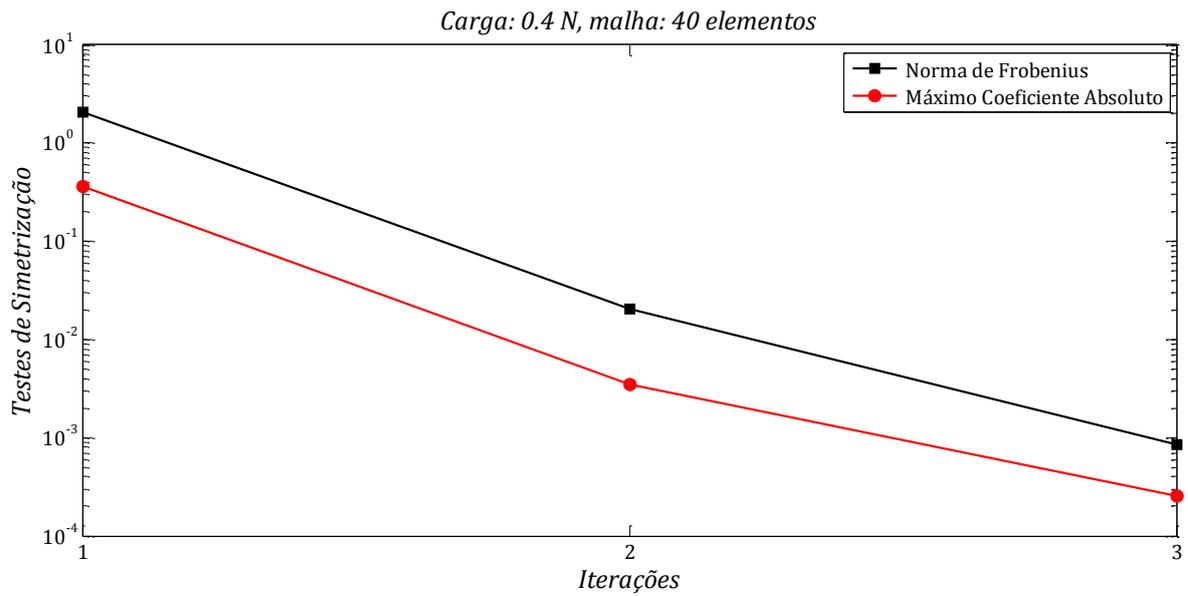


Figura 5.19 – Evolução iterativa de N_{fro} e C_{max} para carga de 0,7 N e malha com 40 elementos finitos de viga.

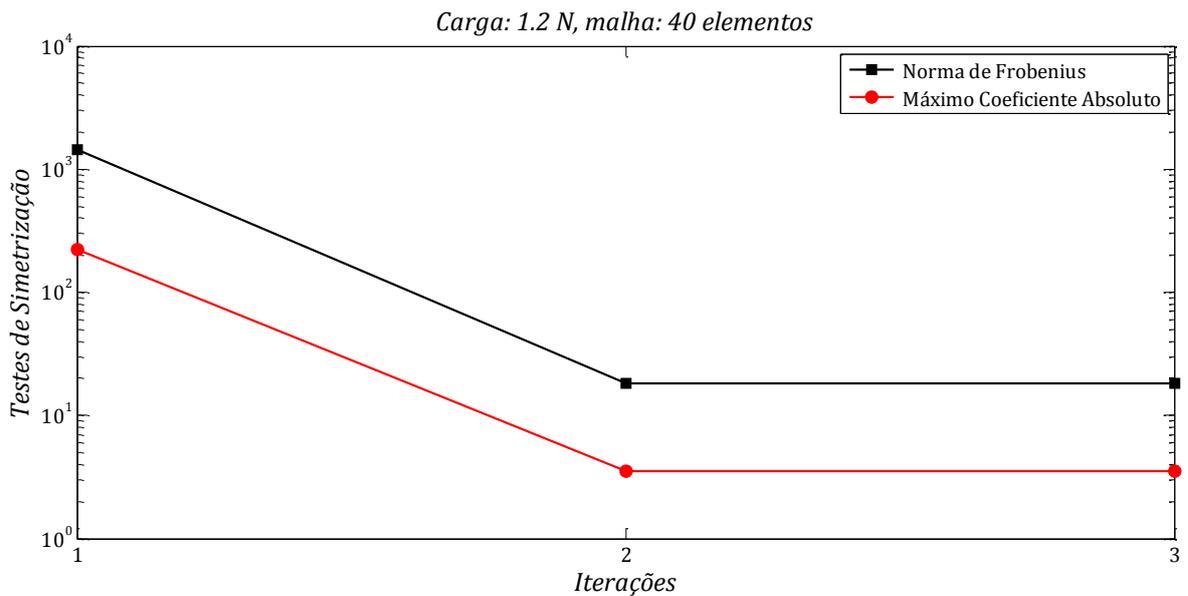


Figura 5.20 – Evolução iterativa de N_{fro} e C_{max} para carga de 1,2 N e malha com 40 elementos finitos de viga.

5.1.3 – Exemplo 03: Viga em balanço com cargas concentradas em sua extremidade livre

A viga em balanço com cargas concentradas nas direções x , y e z em sua extremidade livre, como pode ser observada na Figura 5.21, trata-se de um exemplo proposto no

presente trabalho com o objetivo de gerar uma comparação com essa mesma viga quando, solicitada por um carregamento não-conservativo, que será apresentada no Exemplo 04.

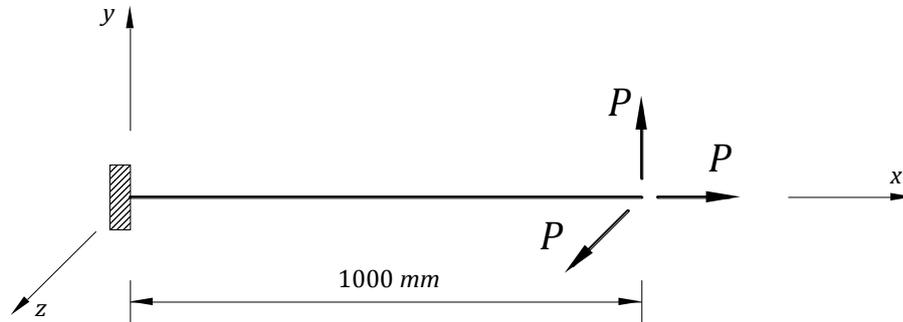


Figura 5.21 – Viga em balanço com cargas concentradas na extremidade livre.

A estrutura, com comprimento $l = 1000 \text{ mm}$, foi discretizada utilizando-se 10, 20 e 50 elementos finitos de viga de mesmo comprimento e seção transversal quadrada, onde as propriedades mecânicas e geométricas são expressas por: $E = 30 \times 10^6 \text{ N/mm}^2$, $A = 1,0 \text{ mm}^2$, $I_y = I_z = 8,333 \times 10^{-2} \text{ mm}^4$ e $I_x = 1,667 \times 10^{-1} \text{ mm}^4$. As trajetórias de equilíbrio para os deslocamentos $-u$, v e w na extremidade livre da viga em balanço, considerando o modelo discretizado com 10 elementos finitos de viga, podem ser observadas na Figura 5.22.

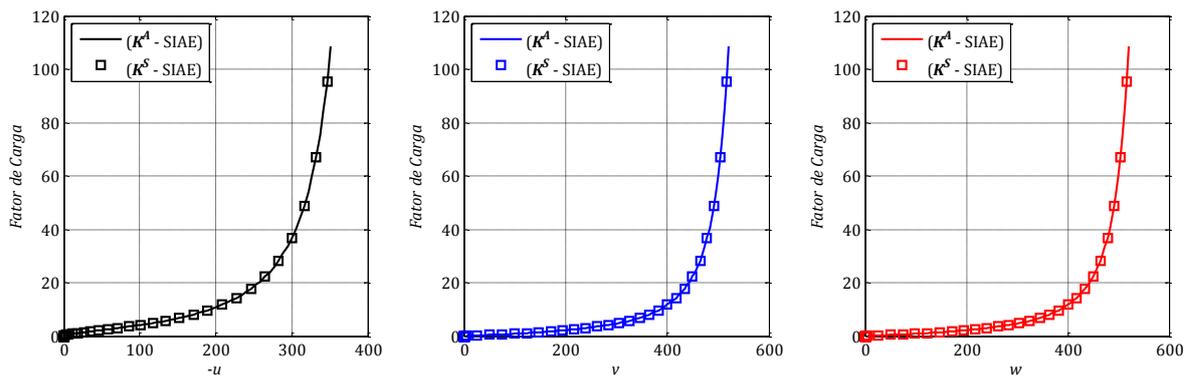


Figura 5.22 – Valores de $-u$, v e w na extremidade livre da viga.

As magnitudes de N_{fro} e C_{max} em função do deslocamento v na extremidade livre da viga, considerando a matriz de rigidez tangente da iteração de equilíbrio da estrutura, apresentou o comportamento esperado, indicando o aumento da norma em função da amplificação dos deslocamentos na viga, bem como uma redução da norma com o refinamento da malha de

elementos finitos de viga. Tais observações podem ser comprovadas através das Figuras 5.23 e 5.24, apresentadas a seguir.

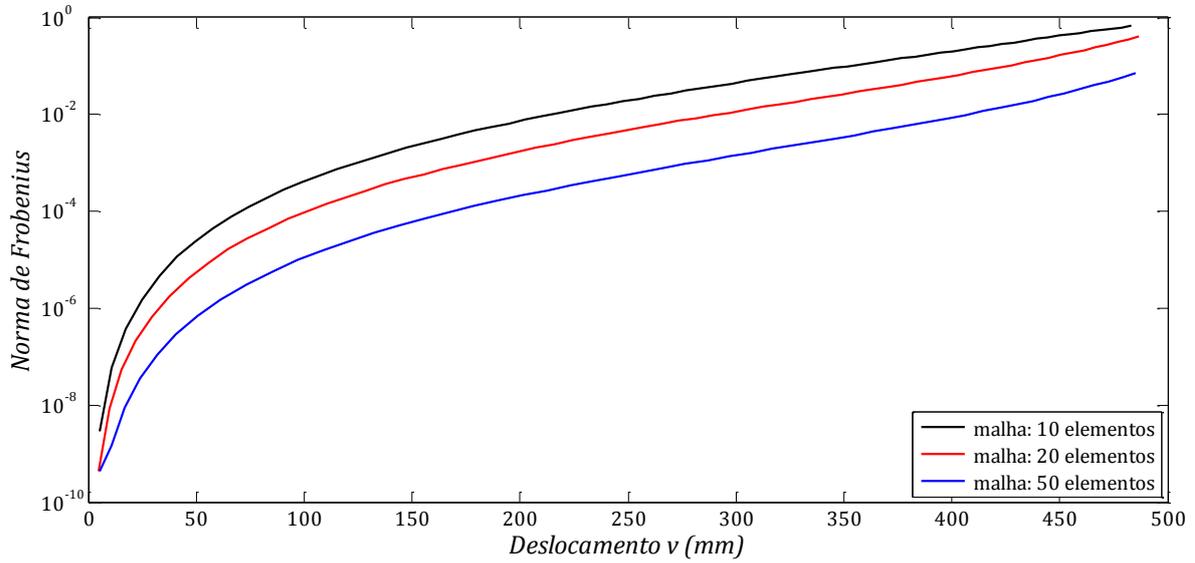


Figura 5.23 – N_{fro} vs deslocamento v na extremidade livre da viga.

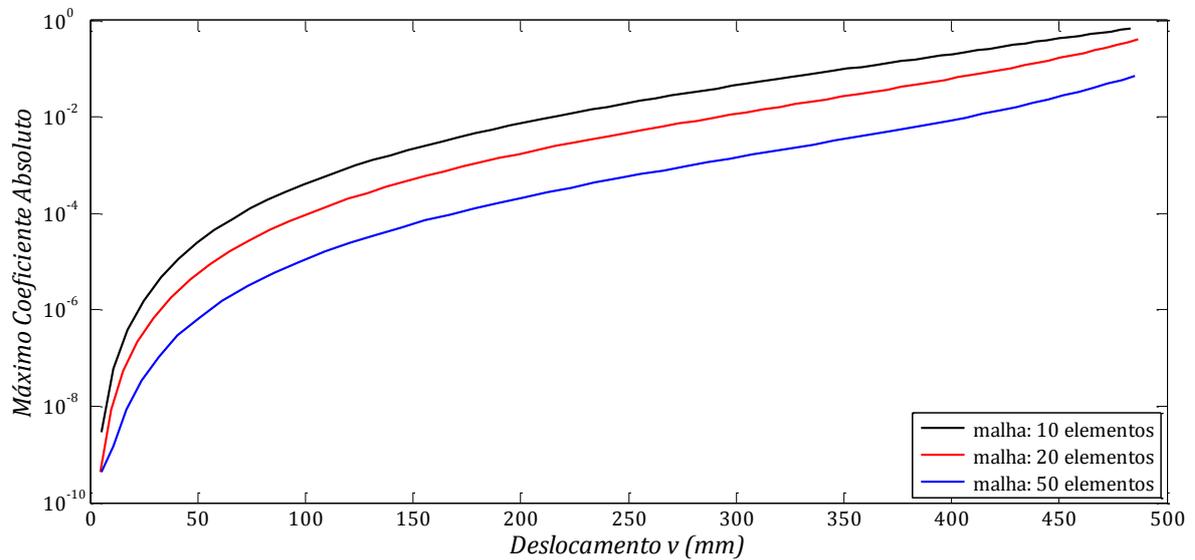


Figura 5.24 – C_{max} vs deslocamento v na extremidade livre da viga.

Avaliando níveis de carga de forma individual para $0,5 N$, $5,0 N$ e $15,0 N$ (aplicados somente em um passo de carga), através das Figuras 5.25 e 5.26, como também foi realizado nos exemplos anteriores, comprova-se a redução de N_{fro} e C_{max} quando se

aumenta o número de graus de liberdade, ou seja, quando se refina a malha de elementos finitos de viga.

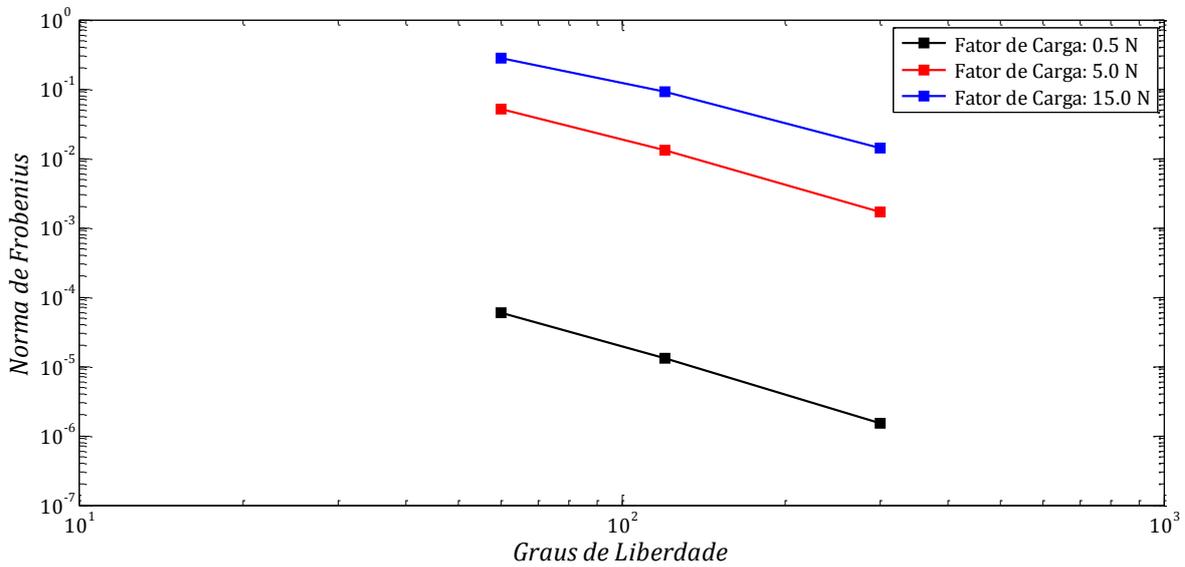


Figura 5.25 – N_{fro} vs graus de liberdade.

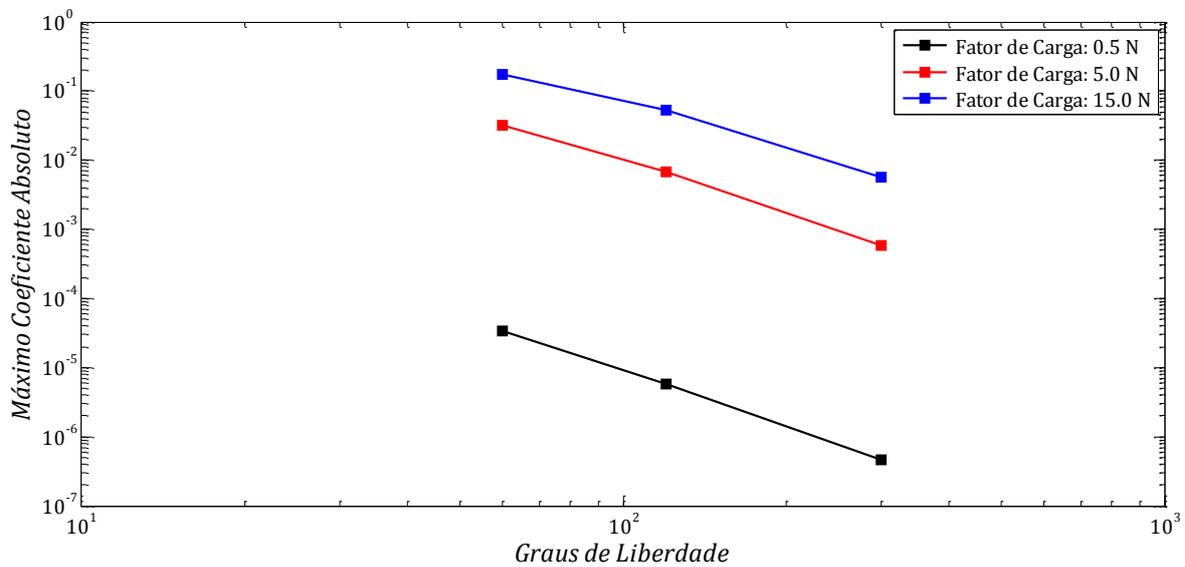


Figura 5.26 – C_{max} vs graus de liberdade.

Quanto à evolução das magnitudes de N_{fro} e C_{max} durante o processo iterativo até a configuração de equilíbrio, a seguir nas Figuras 5.27 e 5.28, a título de exemplificação, têm-se os gráficos para os níveis de carga 0,5 N e 15,0 N, considerando a estrutura discretizada com 20 elementos finitos de viga. Como já era esperado, nos dois gráficos se

observa o decréscimo das normas entre a primeira e a última iteração, uma vez que existe a tendência dos termos não-simétricos da matriz de rigidez tangente se anularem.

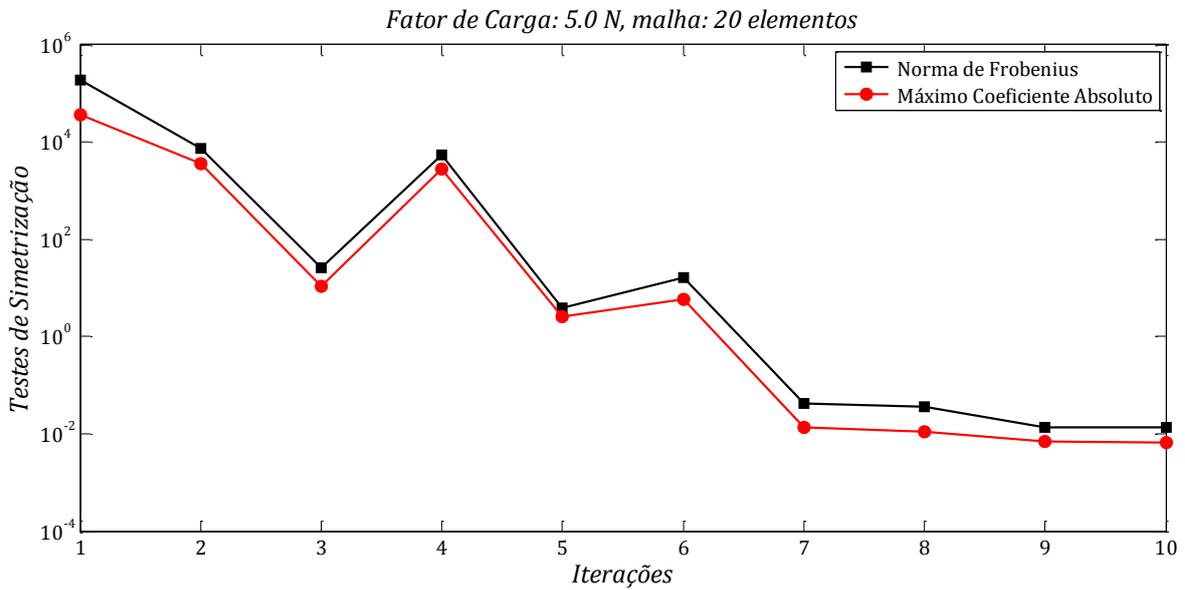


Figura 5.27 – Evolução iterativa de N_{fro} e C_{max} para carga de 0,5 N e malha com 20 elementos finitos de viga.

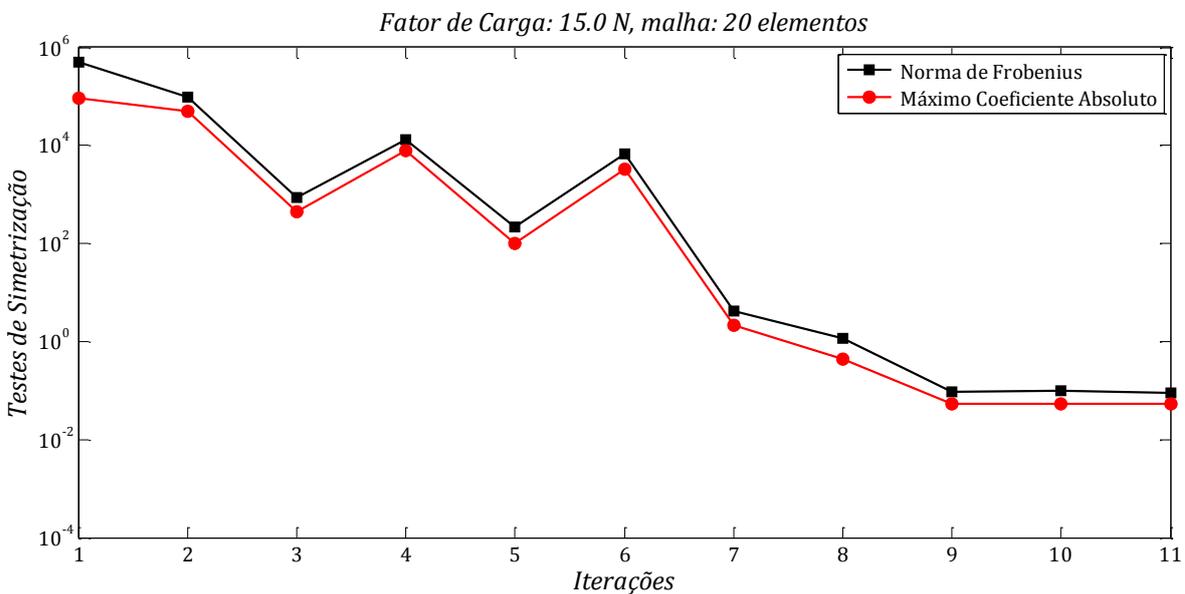


Figura 5.28 – Evolução iterativa de N_{fro} e C_{max} para carga de 15,0 N e malha com 20 elementos finitos de viga.

Com a finalidade de ilustrar o comportamento estrutural da viga em balanço, na Figura 5.29, pode-se observar as configurações deformadas da viga para os fatores de carga 0,5 N (F_1) e 15,0 N (F_2).

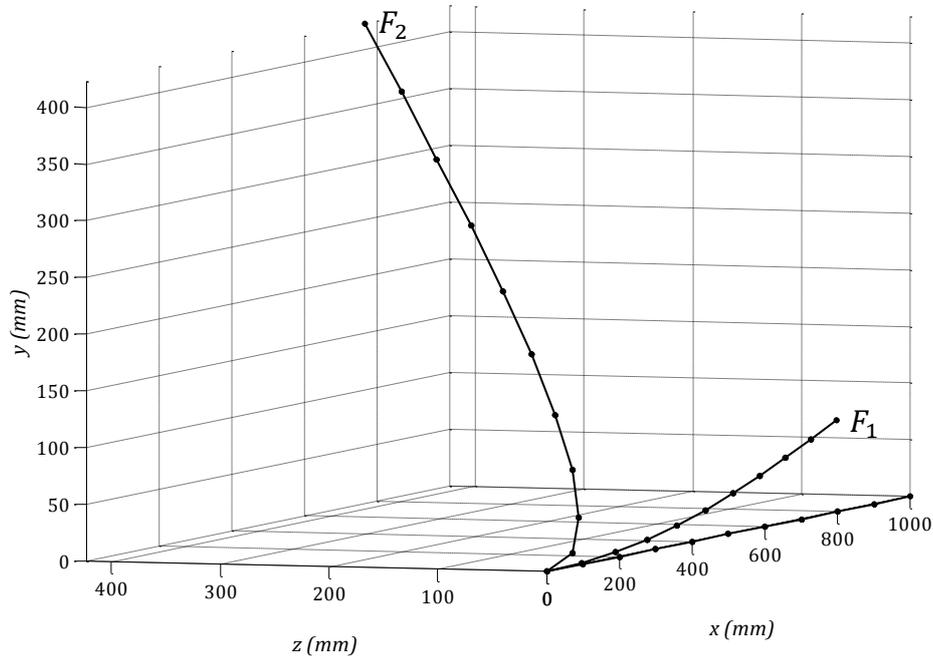


Figura 5.29 – Configurações deformadas para a viga em balanço com cargas concentradas na extremidade.

5.1.4 – Exemplo 04: Viga em balanço com momentos concentrados em sua extremidade livre

Nesse exemplo, a viga em balanço com as mesmas características mecânicas e geométricas do Exemplo 03, receberá agora momentos concentrados nas direções x , y e z em sua extremidade livre, conforme está ilustrado na Figura 5.30. Nesse caso, as cargas aplicadas correspondem a um carregamento não-conservativo.

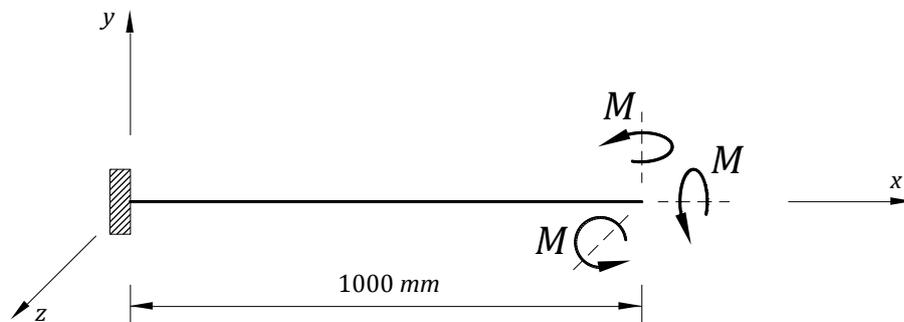


Figura 5.30 – Viga em balanço com momentos concentrados na extremidade livre.

A seguir, na Figura 5.31, têm-se as trajetórias de equilíbrio para os deslocamentos $-u$, v e $-w$ na extremidade livre da viga em balanço, considerando o modelo discretizado com 10 elementos finitos de viga.

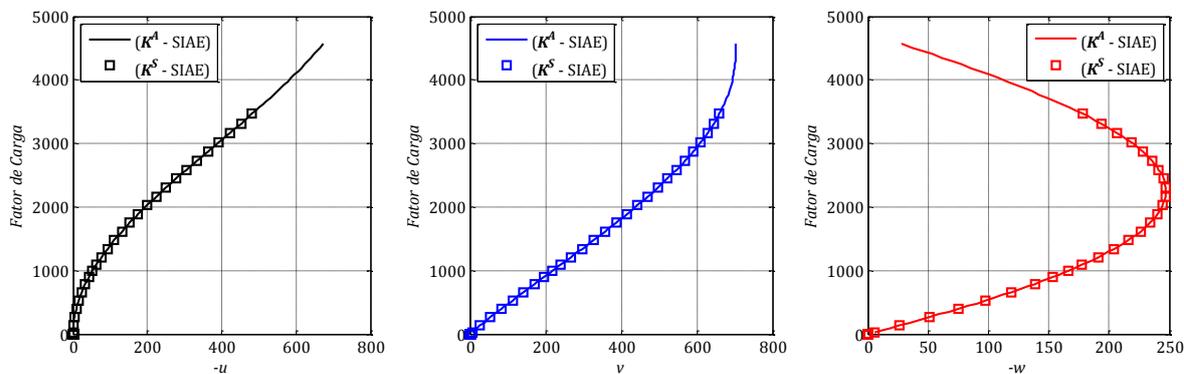


Figura 5.31 – Valores de $-u$, v e $-w$ na extremidade livre da viga.

A evolução das magnitudes de N_{fro} e C_{max} em função do deslocamento v na extremidade livre da viga, considerando a matriz de rigidez tangente da iteração de equilíbrio da estrutura, pode ser observada nos gráficos das Figuras 5.32 e 5.33.

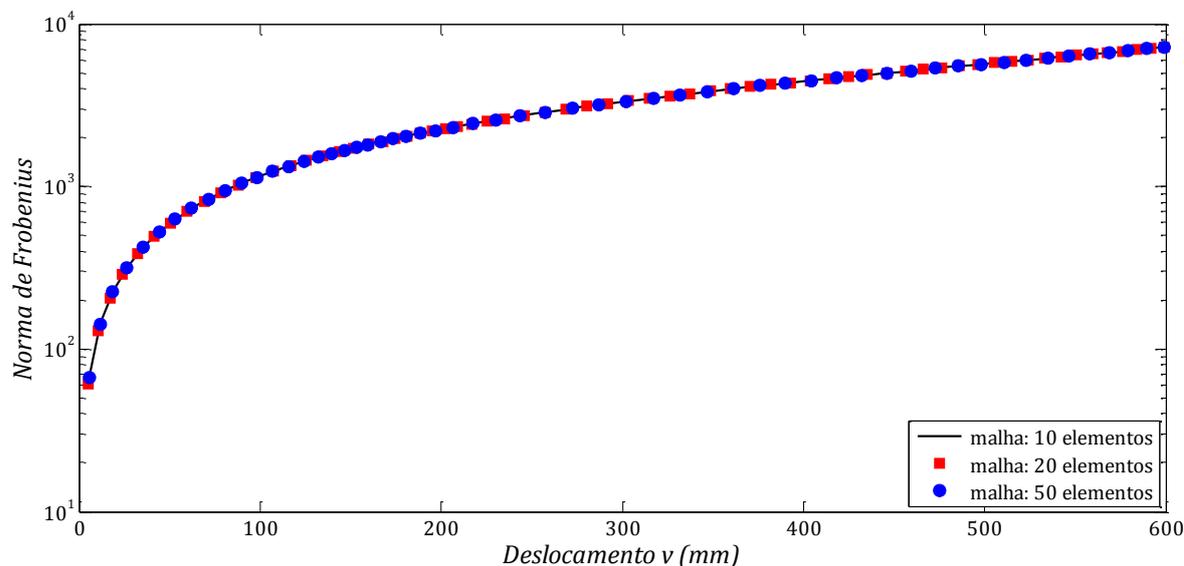


Figura 5.32 – N_{fro} vs deslocamento v na extremidade livre da viga.

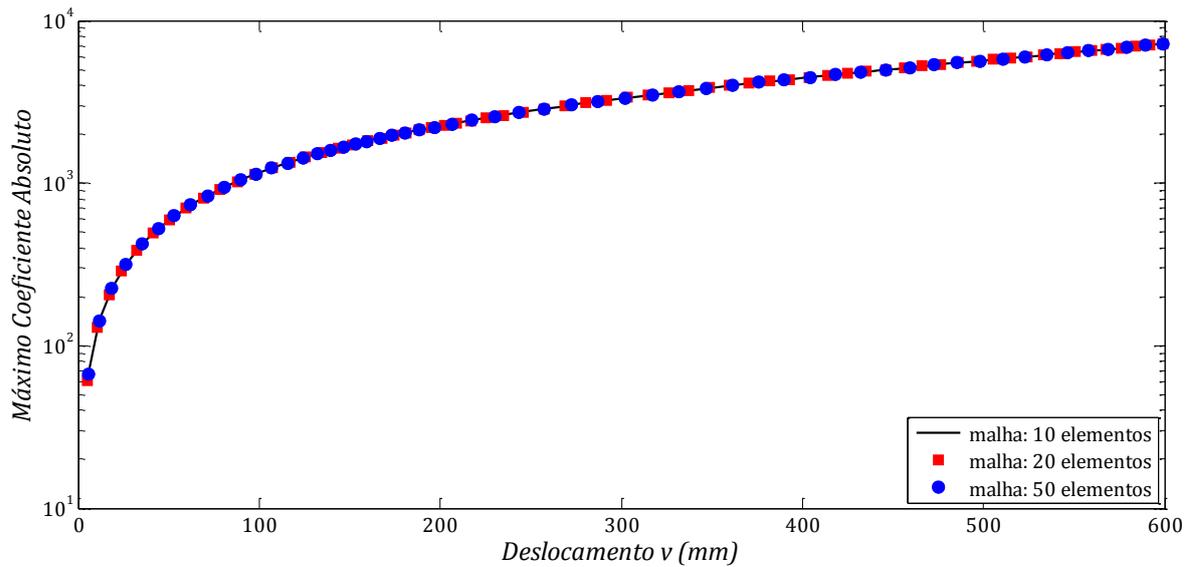


Figura 5.33 – C_{max} vs deslocamento v na extremidade livre da viga.

Por se tratar de um problema com carregamento não-conservativo, através dos gráficos supracitados é possível observar que a matriz de rigidez tangente não simetriza em nenhum incremento de carga, ou seja, mesmo para deslocamentos infinitesimais não há simetrização. Outra observação importante é que em função da não-simetrização estar ligada ao fato do carregamento ser não-conservativo, conseqüentemente, o refinamento da malha de elementos finitos não causará nenhuma influência nas magnitudes de N_{fro} e C_{max} . Portanto, as curvas para as malhas com 10, 20 e 50 elementos se sobrepõem.

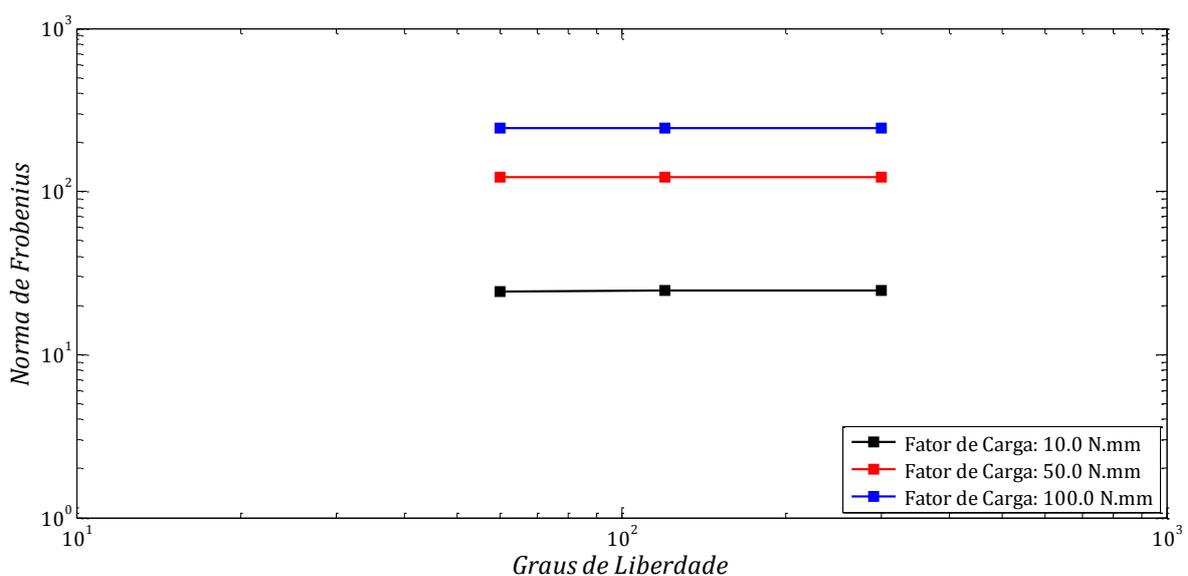


Figura 5.34 – N_{fro} vs grau de liberdade.

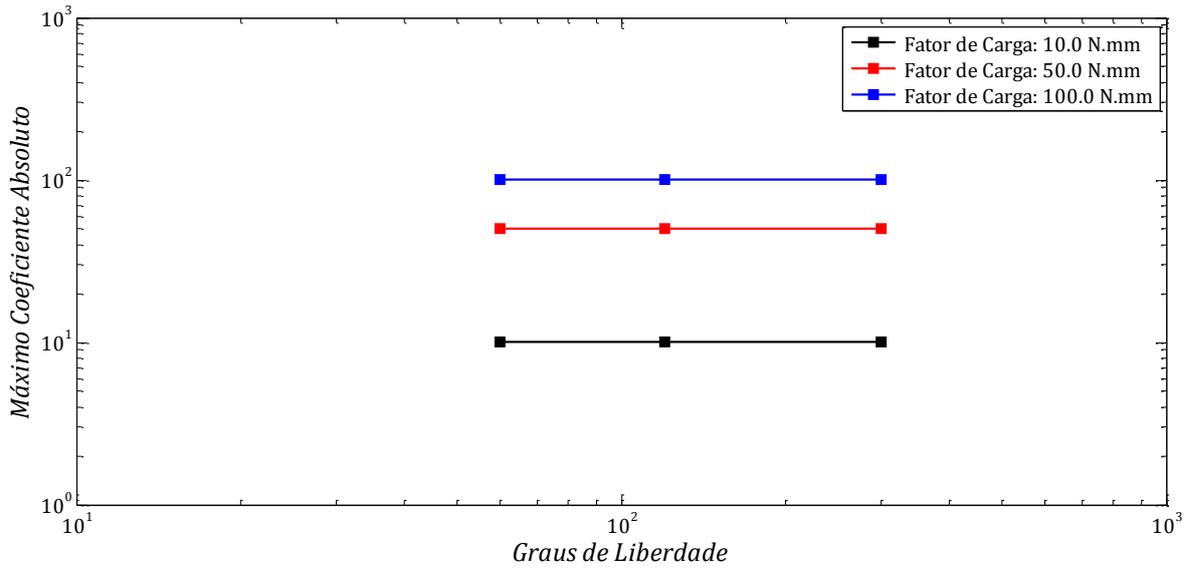


Figura 5.35 – C_{max} vs graus de liberdade.

A não influência do refinamento da malha de elementos em relação as magnitudes de N_{fro} e C_{max} também é comprovada quando se observa os níveis de carga de forma individual, a título de exemplificação para 10 *Nmm*, 50 *Nmm* e 100 *Nmm* (aplicados somente em um passo de carga), através das Figuras 5.34 e 5.35, onde se obtém os mesmos valores de normas independente da quantidade de graus de liberdade da estrutura.

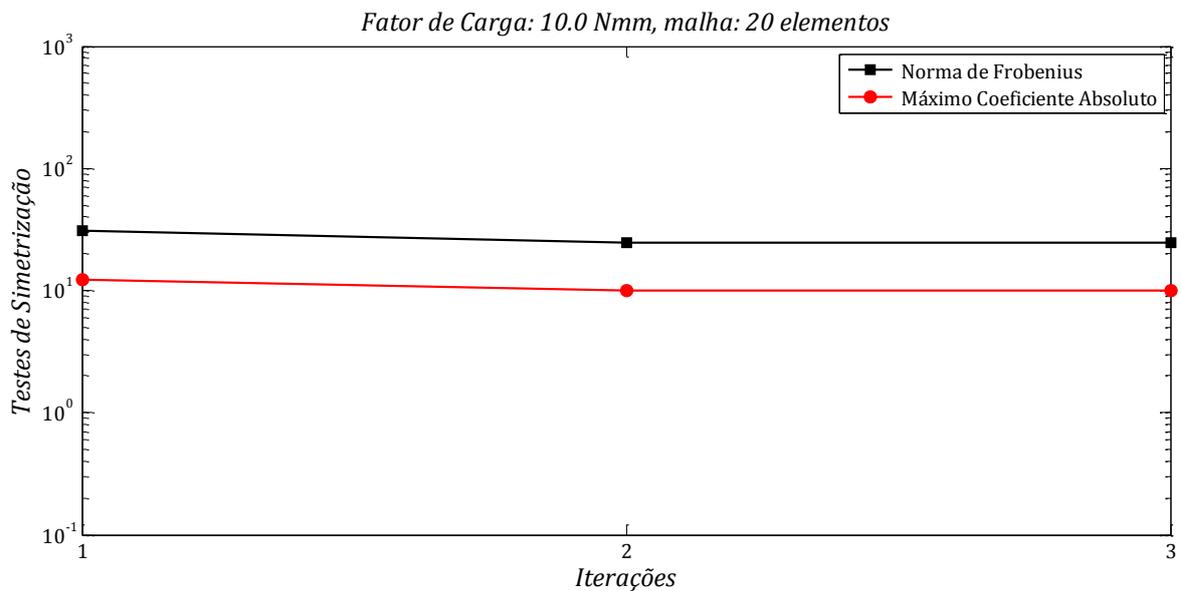


Figura 5.36 – Evolução iterativa de N_{fro} e C_{max} para carga de 10 *Nmm* e malha com 20 elementos finitos de viga.

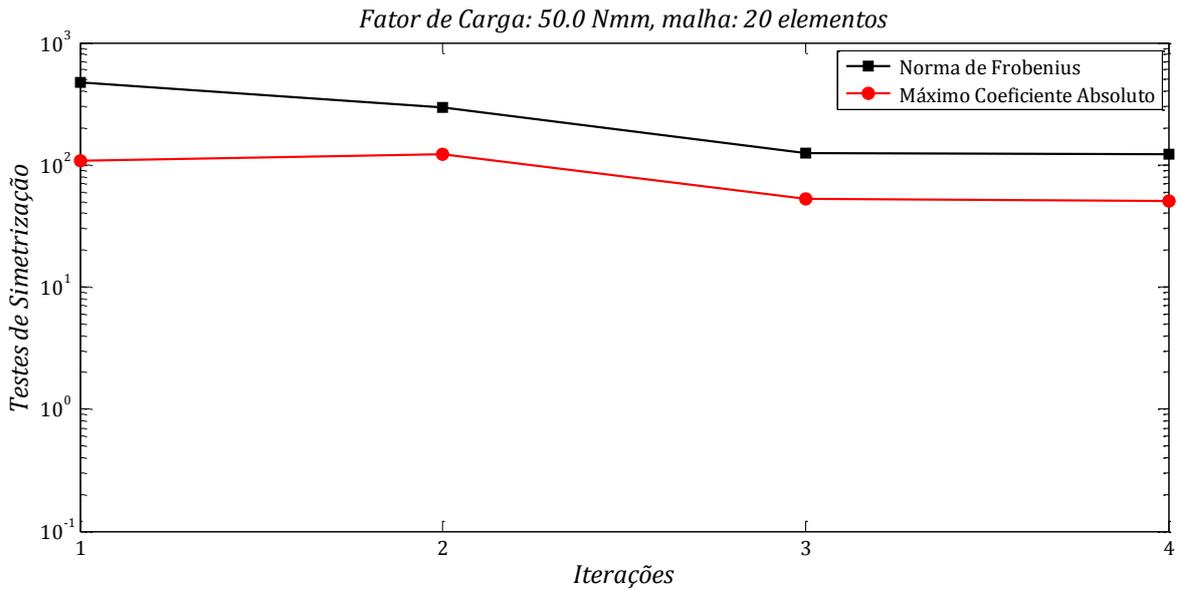


Figura 5.37 – Evolução iterativa de N_{fro} e C_{max} para carga de 50 Nmm e malha com 20 elementos finitos de viga.

Em relação à evolução das magnitudes de N_{fro} e C_{max} durante o processo iterativo até a configuração de equilíbrio, nas Figuras 5.36 e 5.37, a título de exemplificação têm-se os gráficos para os níveis de carga 10 Nmm e 50 Nmm, considerando a viga discretizada com 20 elementos finitos de viga. Em ambos os gráficos, ocorre uma redução dos valores das normas entre a primeira e última iteração, porém reduções não significativas. A seguir, na Figura 5.38, têm-se as configurações deformadas, considerando o modelo com 10 elementos, para os fatores de carga 100 Nmm (F_1) e 1000 Nmm (F_2).

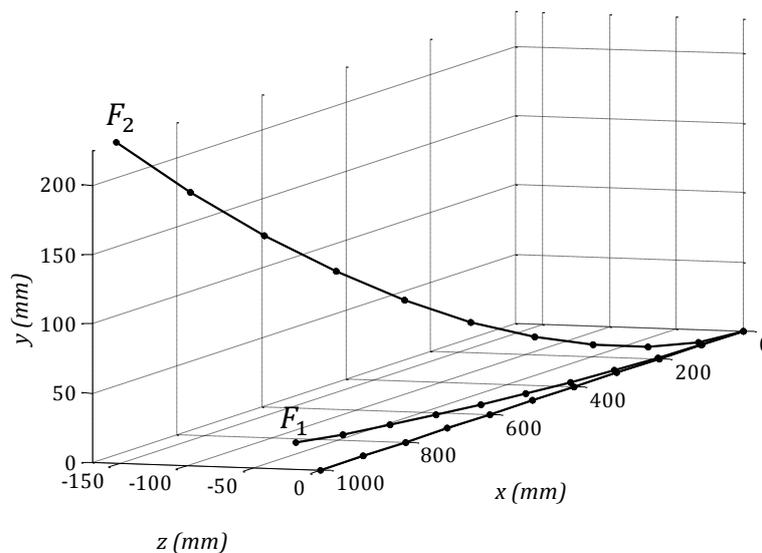


Figura 5.38 – Configurações deformadas para a viga em balanço com momentos concentrados na extremidade.

finitas em sua formulação. Tais resultados possuem ótima concordância com o programa *SIAE*.

Utilizou-se uma força de perturbação igual a $P_z = 2 \times 10^{-4}N$, aplicada na direção z , a qual foi retirada logo após se atingir o momento crítico $M_{cr} = 621,4$. A fase mais crítica desse exemplo é processo de descarregamento, ou seja, a variação do momento de M_{cr} a zero, onde se faz necessário utilizar novamente uma carga fictícia para forçar o retorno da estrutura à sua configuração original, devido à existência de outros pontos de bifurcação.

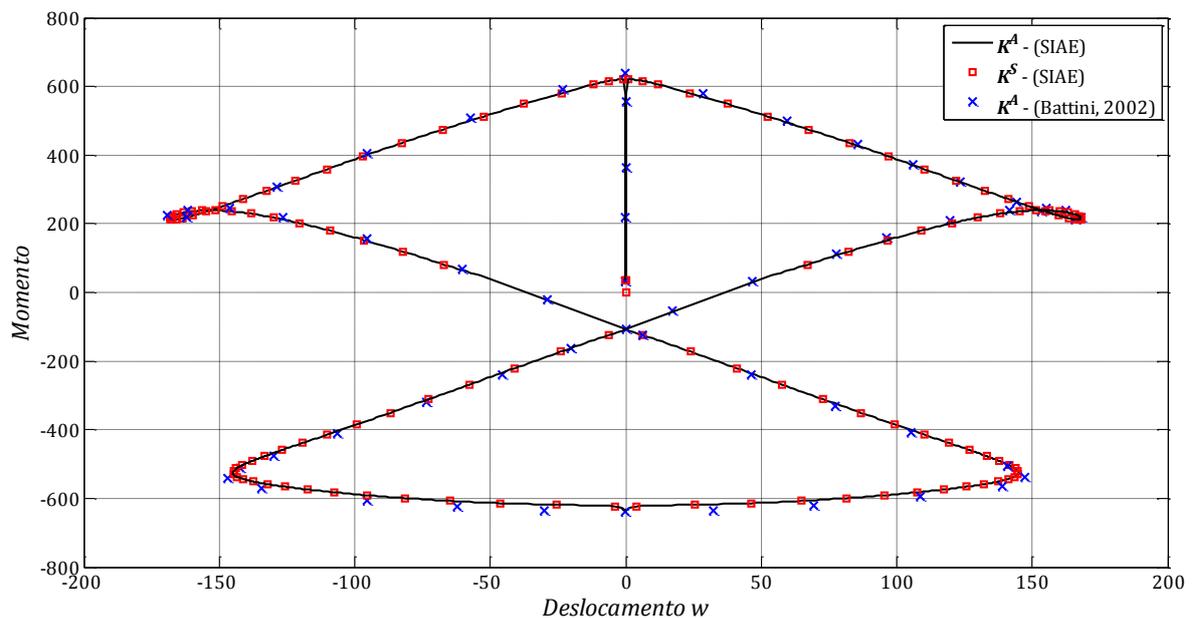


Figura 5.40 – Deslocamento w no topo do pórtico.

5.2 – PROBLEMAS DINÂMICOS NÃO AMORTECIDOS

Nessa seção, estuda-se o comportamento não-linear de estruturas não amortecidas submetidas a carregamentos dinâmicos, nas quais são empregados os recursos disponibilizados no programa *SIAE*. O objetivo principal da presente seção é demonstrar a capacidade da formulação proposta em resolver problemas dinâmicos com grandes deslocamentos, ou seja, grandes translações e rotações. Nas soluções desses problemas emprega-se o método de integração HHT- α em combinação com o método de *Newton-Raphson*, o qual é utilizado com a finalidade de se obter o equilíbrio das forças internas com os carregamentos externos em cada passo no tempo.

Excetuando-se os exemplos 06 e 11, para os demais exemplos, adotaram-se os seguintes valores para o tensor de inércia espacial diádico I_ρ e para a massa por unidade de comprimento:

$$I_\rho = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$A\rho = 1 \quad (5.4)$$

Do mesmo modo, excluindo-se os exemplos 06 e 11, na Tabela 5.3, têm-se as propriedades mecânicas para os demais exemplos. Para a solução dos exemplos da presente seção, adotou-se uma tolerância de convergência para o equilíbrio igual a 10^{-5} e o coeficiente α igual a $-0,01$ (Le *et al.*, 2012).

Tabela 5.3 – Propriedades dos materiais.

Exemplos	$EA = GA$	$EI = GJ$
07 e 08	10^6	10^3
09 e 10	10^4	500

5.2.1 – Exemplo 06: Viga em balanço não amortecida

O Exemplo 06 trata-se de um problema bidimensional apresentado por Behdinan *et al.* (1998), onde uma viga em balanço não amortecida é submetida a uma carga rampa de duração infinita, como pode ser observado na Figura 5.41.

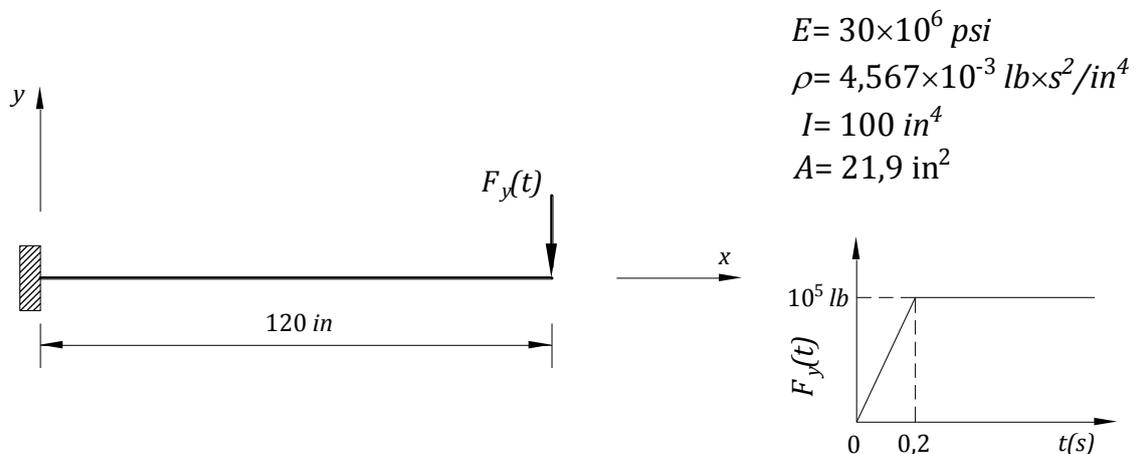


Figura 5.41 – Viga em balanço não amortecida com carga transversal na extremidade.

Para a discretização da malha foram utilizados 4 elementos de mesmo comprimento e a análise dinâmica não-linear foi efetuada com um passo de tempo $\Delta t = 0,01 s$, sendo os mesmos dados utilizados pelos autores supracitados. A viga possui comprimento total de 120 polegadas, área da seção transversal $A = 21,9 in^2$, densidade $\rho = 4,567 \times 10^{-3} lb \times s^2/in^4$, módulo de elasticidade $E = 30 \times 10^6 psi$ e momento de inércia $I = 100 in^4$.

É oportuno ressaltar, que as unidades foram empregadas no sistema inglês com o objetivo de se fazer uma comparação mais precisa dos resultados do programa *SIAE* em relação à resposta apresentada por Behdinan *et al.* (1999), que utilizam elementos de viga plana *Euler-Bernoulli* descritos pela cinemática corrotacional.

A seguir, na Figura 5.42, têm-se a resposta no tempo obtida pelo programa *SIAE* e os resultados de Behdinan *et al.* (1999), para o deslocamento v na extremidade livre da viga.

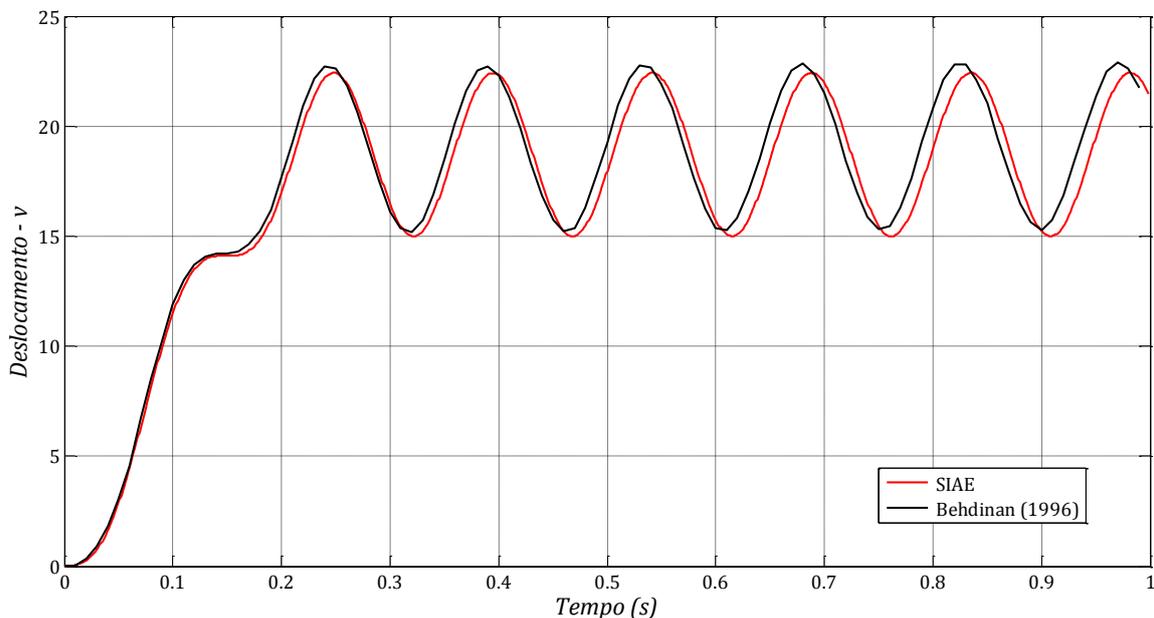


Figura 5.42 – Deslocamento vertical v da extremidade livre.

Apesar da análise do histórico de deslocamentos no tempo, ilustrado na Figura 5.42, indicar uma pequena defasagem de 0,01 s entre os resultados do programa *SIAE* e a resposta apresentada por Behdinan *et al.* (1999), percebe-se uma boa concordância entre as duas respostas, indicando um bom desempenho da formulação proposta na presente tese. A

seguir, na Tabela 5.4, pode-se observar a amplitude máxima v e a frequência de vibração para o exemplo em questão.

Tabela 5.4 – Parâmetros dinâmicos para a viga em balanço não amortecida.

	Amplitude Máxima v (in)	Frequência (Hz)
<i>SIAE</i>	22,29	6,67
Behdinan <i>et al.</i> (1999)	22,71	6,67

5.2.2 – Exemplo 07: Pórtico em L

Apresentado inicialmente por Simo e Vu-Quoc (1988), por décadas esse exemplo tem sido utilizado por muitos pesquisadores com o objetivo de verificar o desempenho de diversas formulações dinâmicas não-lineares em resolver problemas envolvendo grandes deslocamentos (Le *et. al.*, 2012; Lens e Cardona, 2008; Mäkinen, 2007; Hsiao *et al.*, 1999; Jelenić e Crisfield, 1999; Ibrahimbegović e Mikdad, 1998; Crisfield *et al.*, 1997; Cardona, 1989; Iura e Atluri, 1988). No referente problema, efetua-se uma análise transiente de um pórtico em forma de L, situado no plano xy , com o carregamento aplicado na união das duas barras (cotovelo) na direção z , como está definido na Figura 5.43. A amplitude do carregamento é definida, ao longo do tempo, por uma função triangular. O pórtico foi modelado com um total de 8 elementos de mesmo comprimento (4 elementos por barra) e as análises foram realizadas para uma variação de tempo $\Delta t = 0,15$ s.

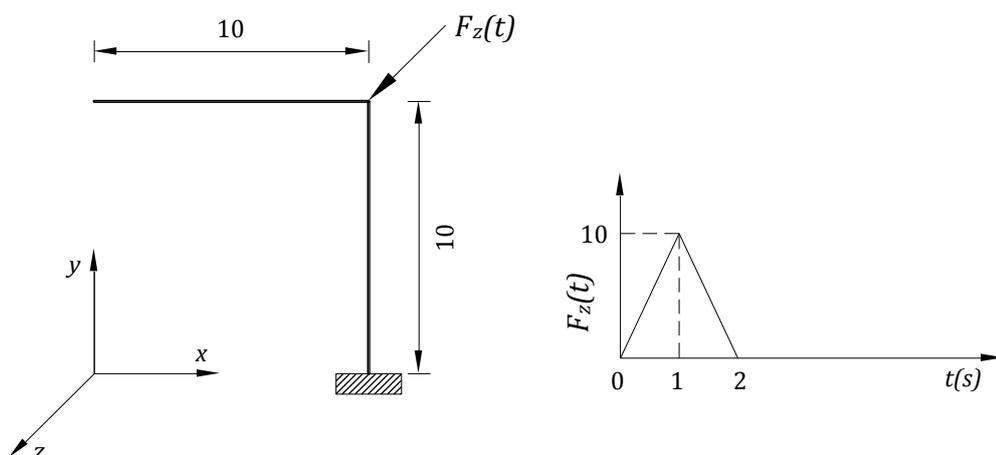


Figura 5.43 – Pórtico em L não amortecido com força dinâmica aplicada fora de seu plano.

De acordo com a Figura 5.44, observa-se que após os dois primeiros segundos, o pórtico sofre vibrações livres de grande escala, com a presença combinada de modos de flexão e de torção, tendo amplitudes de vibração na mesma ordem de grandeza que as dimensões da estrutura. Os resultados do programa *SIAE* são comparados as respostas obtidas por *Le et al. (2012)*, demonstrando uma excelente performance.

Cabe enfatizar, que os referidos autores também fazem uso de um elemento de viga corrotacional, conforme formulação apresentada por Battini (2002). Contudo, na discretização da estrutura, *Le et al. (2012)* utilizam um modelo com 20 elementos (10 elementos por barra), o que reforça o excelente desempenho da formulação proposta nesse trabalho.

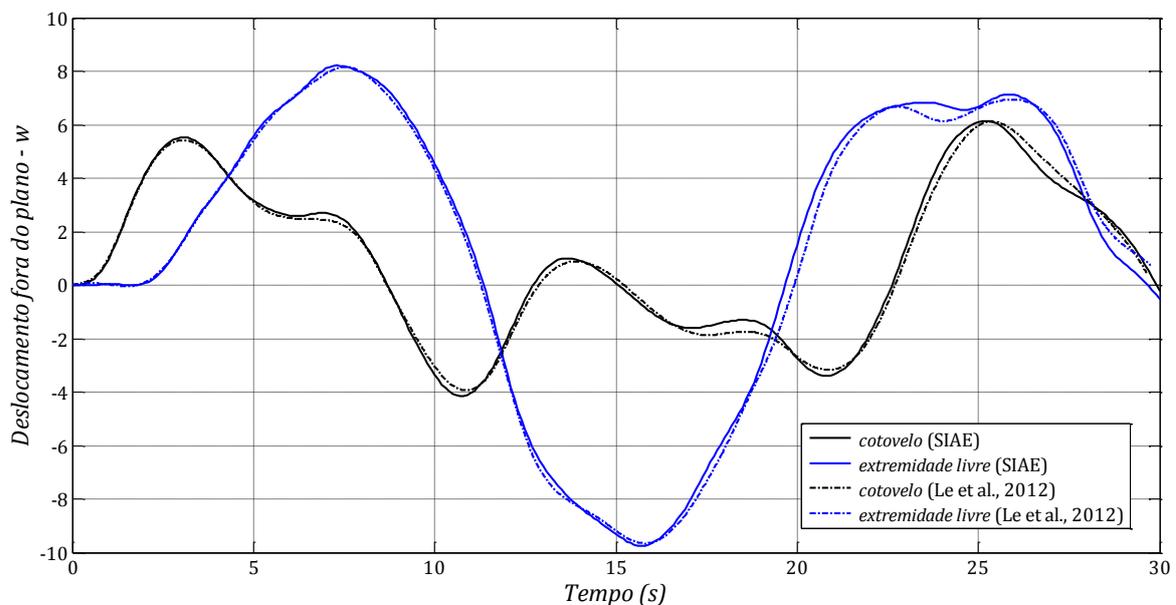


Figura 5.44 – Deslocamento fora do plano w , da extremidade livre e cotovelo do pórtico.

Com o objetivo de se compreender o comportamento deformacional da estrutura analisada nessa seção, são apresentadas na Figura 5.45 um conjunto de configurações deformadas da estrutura referentes a um intervalo de tempo de 5 s.

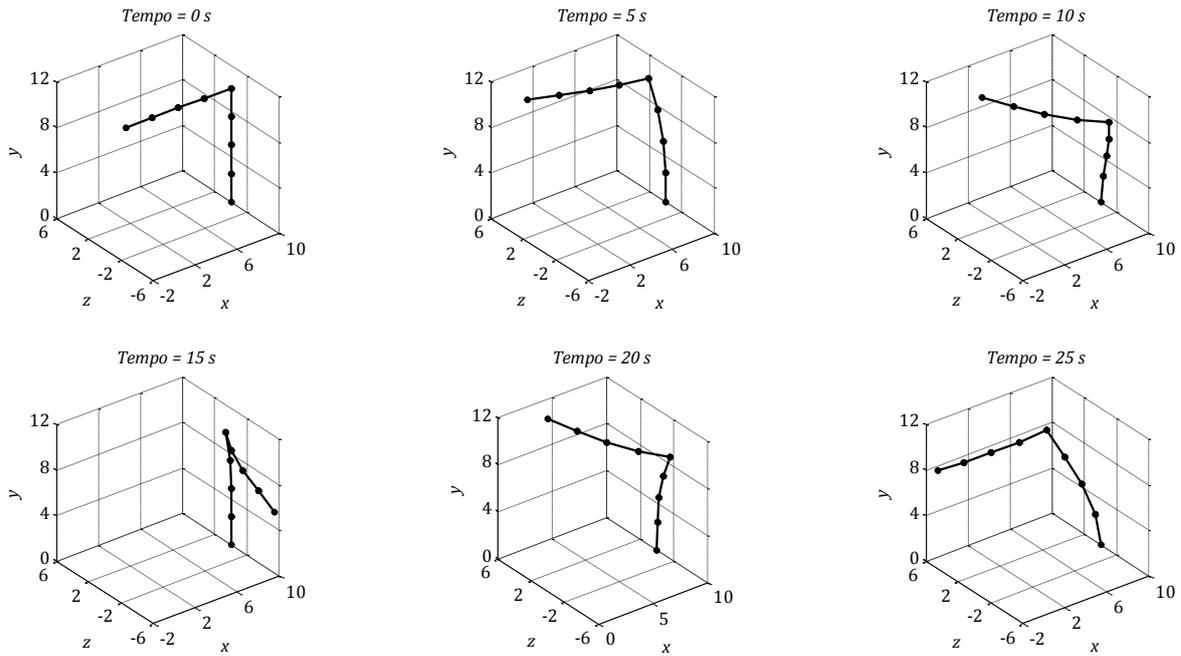


Figura 5.45 – Configurações deformadas do pórtico em L.

5.2.3 – Exemplo 08: Viga engastada com curva de 45 graus

A estrutura aqui considerada, trata-se de um exemplo proposto por Le *et al.* (2012), onde uma viga em balanço com curvatura de 45°, situada no plano xy e engastada na extremidade esquerda, é submetida a uma carga súbita aplicada na direção z em sua extremidade livre, como está definido na Figura 5.46. A viga foi discretizada com 10 elementos de mesmo comprimento, onde as análises foram realizadas utilizando-se o passo de tempo $\Delta t = 0,04 s$ e um raio $R = 15$.

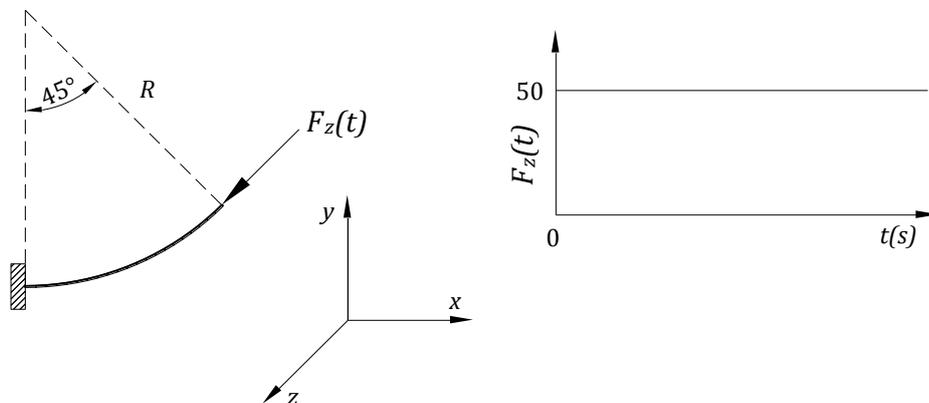


Figura 5.46 – Viga engastada com curva de 45° com carga súbita na extremidade.

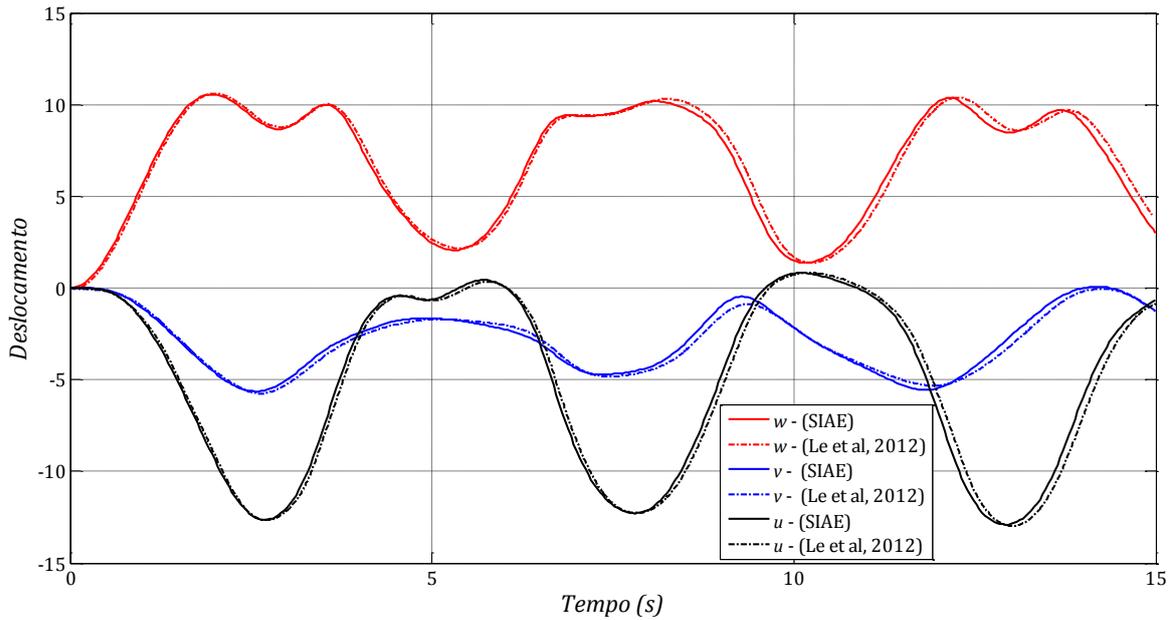


Figura 5.47 – Histórico de deslocamentos para a viga engastada com curva de 45°.

O gráfico apresentado na Figura 5.47, ilustra uma comparação entre o histórico de deslocamentos u , v , e w na extremidade livre da viga curva de 45°, resultantes do programa *SIAE* e os resultados obtidos por *Le et al (2012)*. Observa-se que a viga apresenta vibrações de grande escala, com modos de flexão combinados com torção e amplitudes na mesma ordem de grandeza que as dimensões da estrutura.

Ao analisar a Figura 5.47, nota-se claramente a excelente concordância entre os deslocamentos u , v , e w obtidos entre as duas respostas. Ressalta-se que *Le et al. (2012)* utilizam a mesma discretização de elementos adotada nessa seção, contudo, trabalham com uma variação de tempo $\Delta t = 0,10$ s.

A seguir, na Figura 5.48, é apresentada uma sequência de deformadas da viga engastada com intervalos de tempo de 2,5 s.

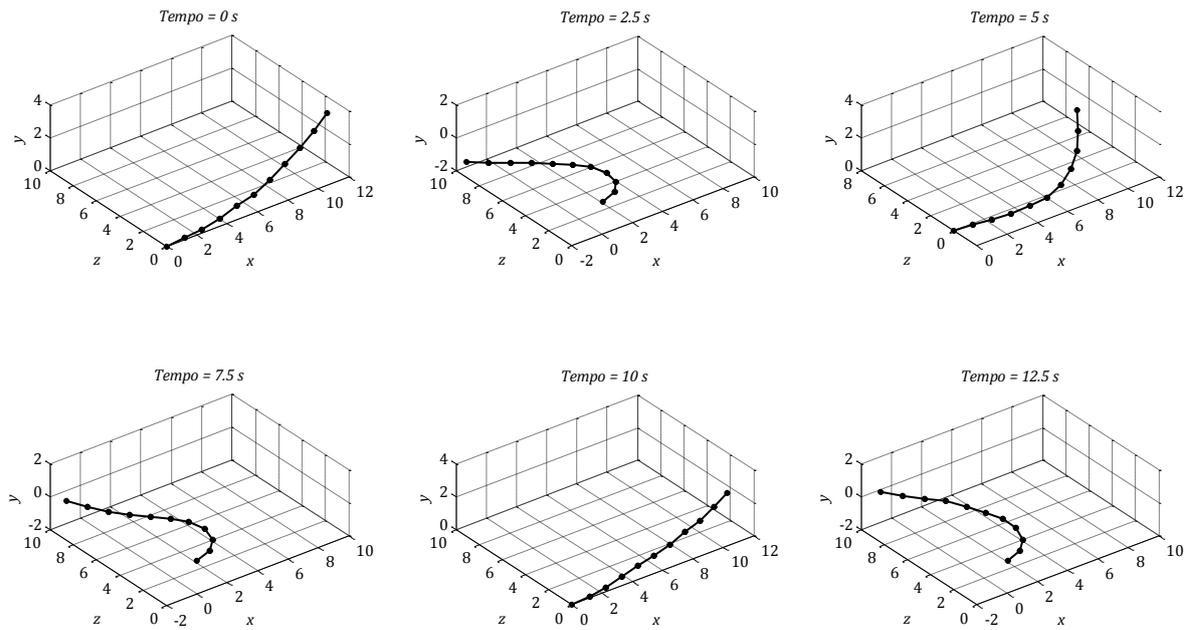


Figura 5.48 – Configurações deformadas da viga engastada com curva de 45° .

5.2.4 – Exemplo 09: Arco circular de grande altura

Nesse exemplo, proposto por Le *et al.* (2012), o comportamento de dinâmico não-linear de uma arco de grande altura submetido a duas cargas rampa de duração infinita é analisado.

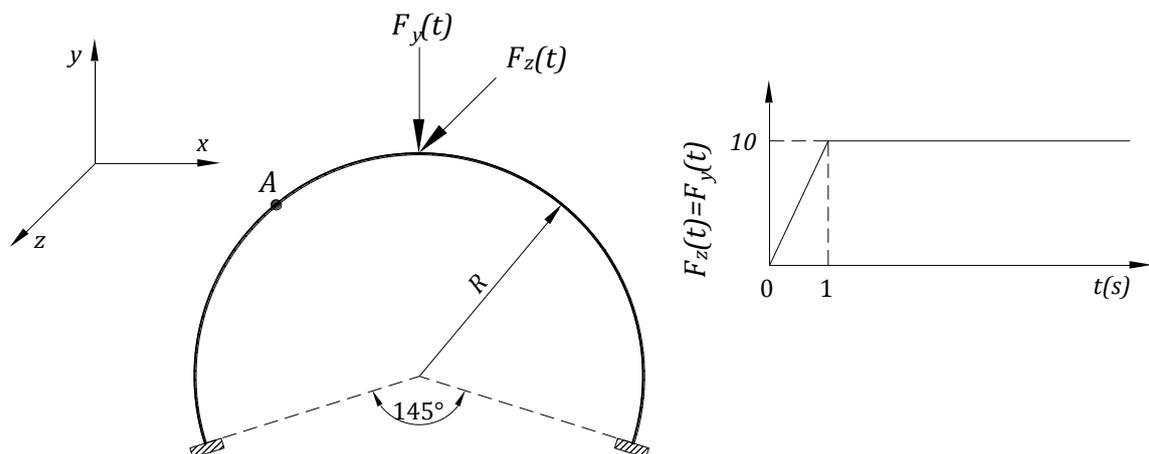


Figura 5.49 – Arco circular de grande altura com carga rampa de duração infinita.

De acordo com a Figura 5.49, o arco está engastado nas duas extremidades com seu plano principal situado no plano xy , tendo duas forças dinâmicas aplicadas em seu centro, uma na direção y e outra na direção z . Os cálculos são realizados para o arco discretizado com

12 elementos de viga, passo de tempo $\Delta t = 0,1 \text{ s}$ e raio $R = 10$, sendo os mesmos critérios adotados por Le *et al.* (2012).

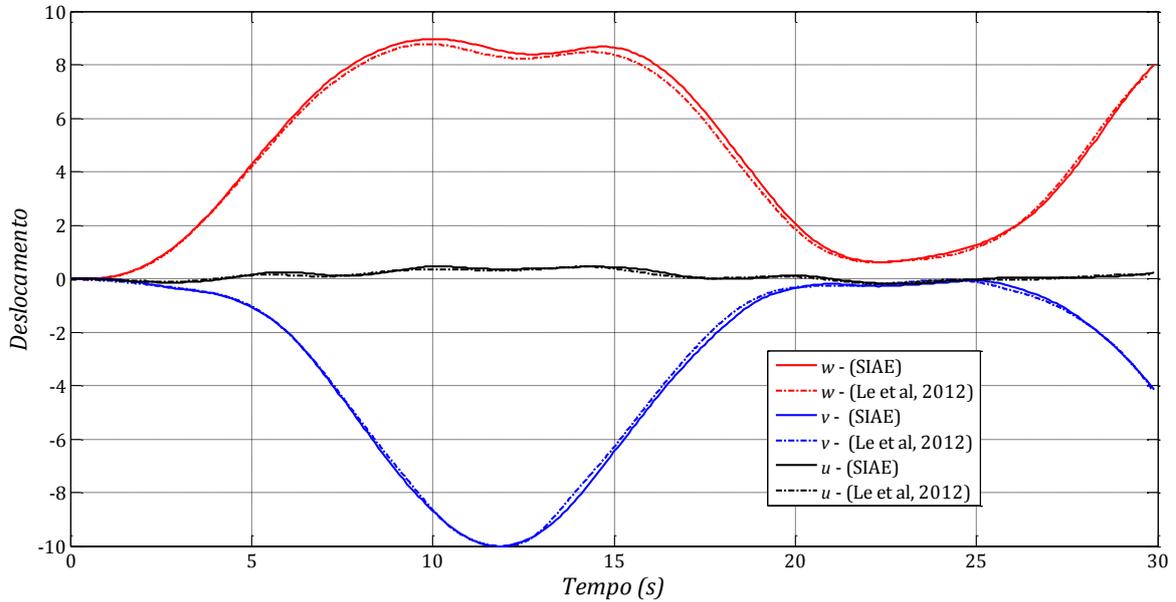


Figura 5.50 – Histórico de deslocamentos no ponto A do arco de grande altura.

Após o primeiro segundo de análise observa-se, através do gráfico ilustrado na Figura 5.50, grandes deslocamentos w e v com modos de flexão combinados a modos de torção, e intensidades na mesma ordem de grandeza que as dimensões da estrutura. Ao analisar o gráfico supracitado, percebe-se uma excelente aproximação entre as respostas do programa *SIAE* e de Le *et al* (2012).

Com a finalidade de ilustrar o comportamento estrutural do arco, na Figura 5.51, pode-se observar um grupo de configurações deformadas do arco decorrentes de um intervalo de tempo de 5 s.

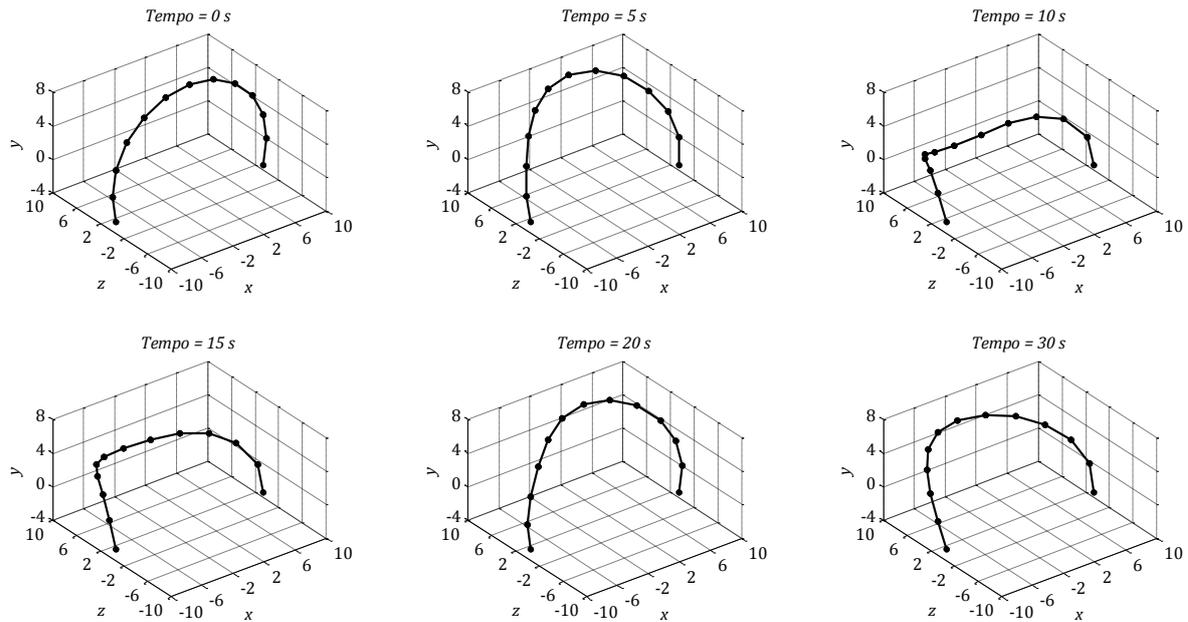


Figura 5.51 – Configurações deformadas do arco circular.

5.2.5 – Exemplo 10: Anel com rotações finitas

Proposto por Mikdad (1998), o Exemplo 10 apresenta a resposta dinâmica não-linear dos deslocamentos em função do tempo de um anel submetido a duas cargas dinâmicas. Esse problema tem como finalidade principal, demonstrar a capacidade da metodologia proposta em lidar com grandes translações e rotações livres, utilizando um longo intervalo de tempo de integração. A configuração inicial e a história dos carregamentos são dadas na Figura 5.52.

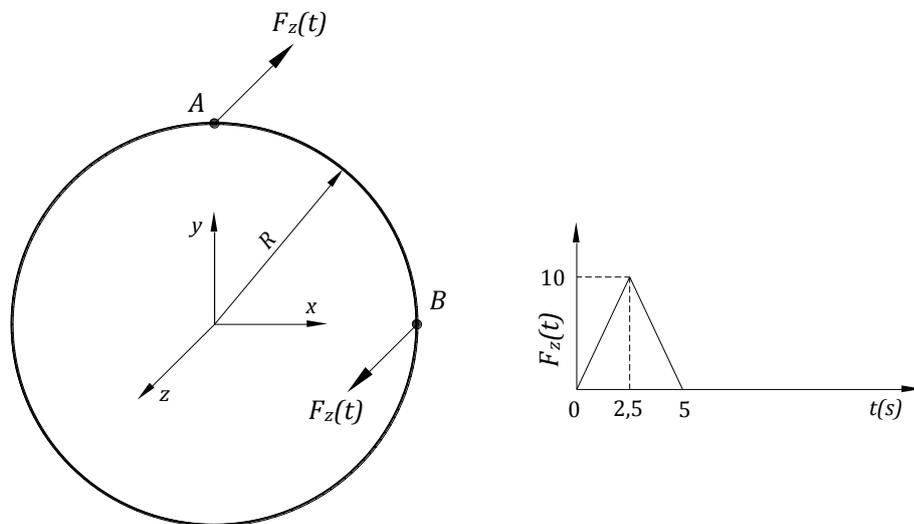


Figura 5.52 – Anel com rotações finitas.

Não há condições de contorno estáticas ou cinemáticas para o atual problema, ou seja, o anel é livre para mover-se no espaço 3D de acordo com as leis de dinâmica. Duas cargas dinâmicas são aplicadas na direção z nos pontos A e B do anel. A análise é realizada com 16 elementos de viga de igual comprimento, utilizando um passo de tempo $\Delta t = 0,1 \text{ s}$ e um raio $R = 10$, sendo os mesmos dados adotados por Le *et al.* (2012).

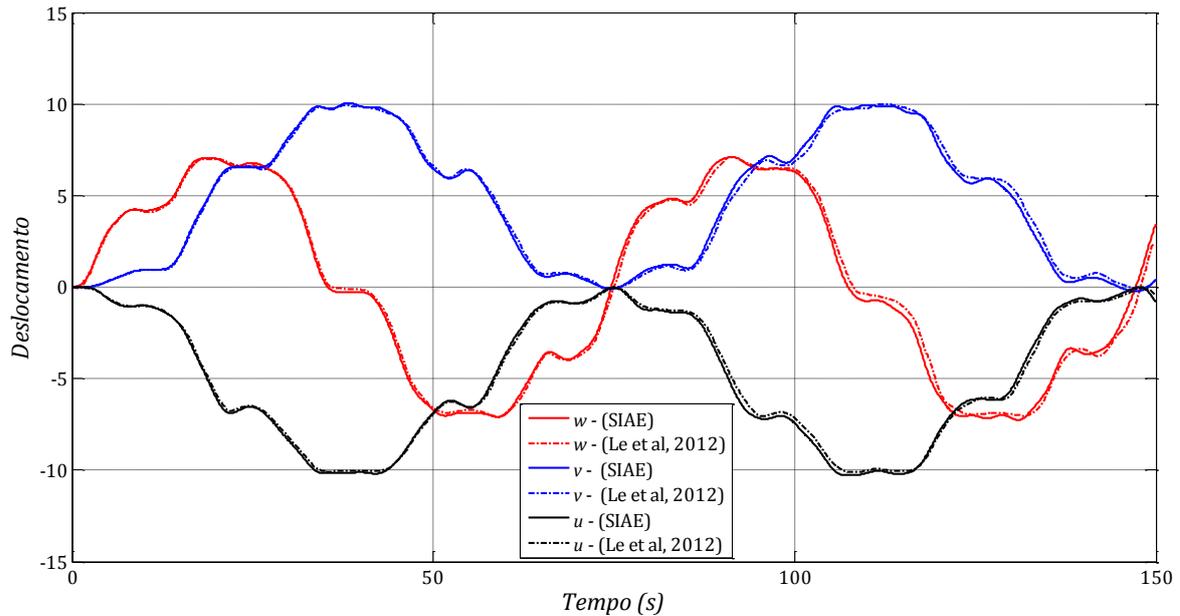


Figura 5.53 – Histórico de deslocamentos no ponto A do anel.

Na Figura 5.53, observa-se os componentes de deslocamentos translacionais em cada direção para o ponto A do anel durante a integração do problema, obtidos pelo programa *SIAE*. Na mesma figura, também são incluídos os deslocamentos obtidos por Le *et al.* (2012), comprovando a excelente concordância entre as duas respostas. Finalmente, o movimento livre do anel, representado pela sua posição e deformação, é ilustrado na Figura 5.54.

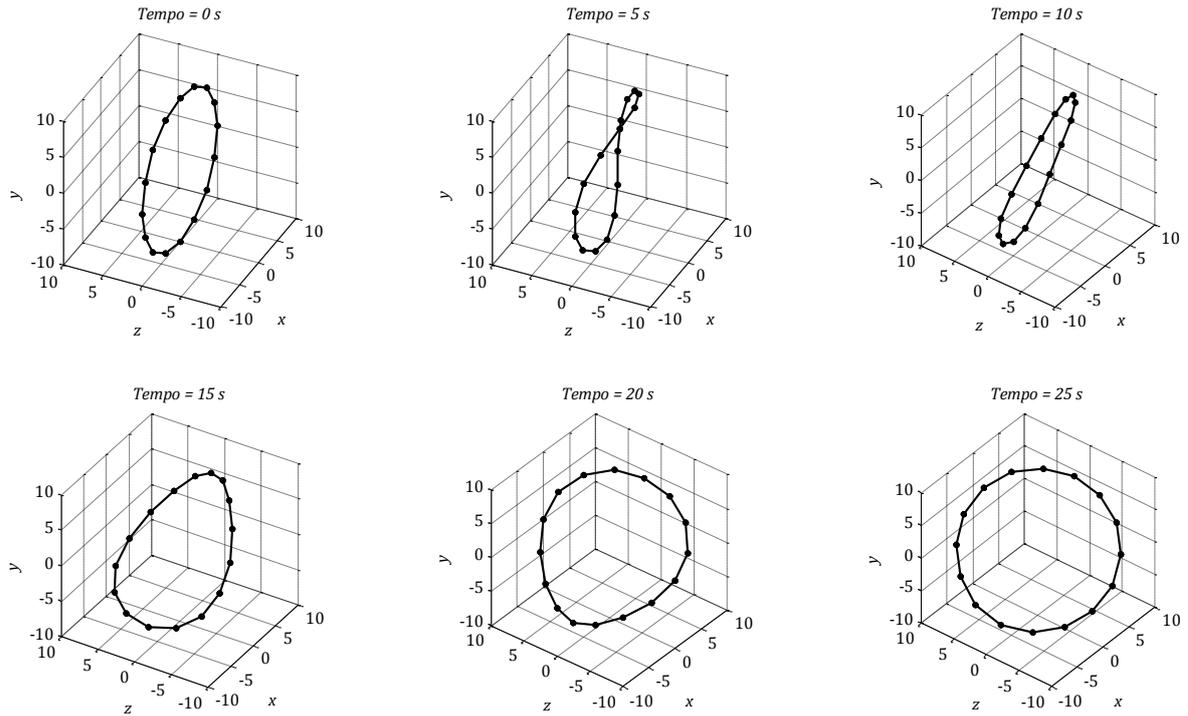


Figura 5.54 – Sequência de configurações deformadas do anel.

5.2.6 – Exemplo 11: Viga articulada flexível

Esse exemplo considera uma viga articulada flexível submetida a duas cargas de impacto sobre sua extremidade livre, como está ilustrado na Figura 5.55.

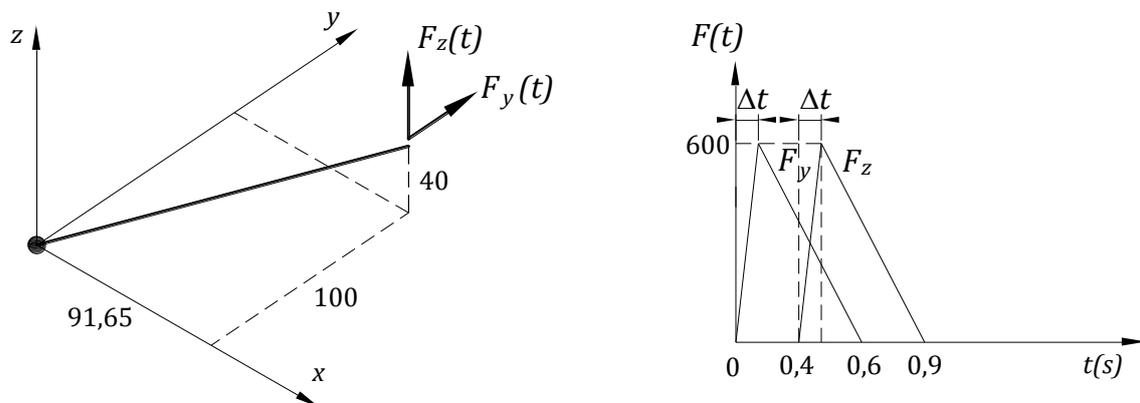


Figura 5.55 – Viga articulada flexível.

Baseando-se em Jelenić e Crisfield (2001) e Hsiao *et al.* (1999), são adotadas as seguintes propriedades mecânicas e geométricas para a solução do problema: área da seção transversal $A = 9$, momentos de inércia dos eixos principais $I_z = I_y = 6,75$, momento polar de inércia $I_x = 13,5$, densidade $\rho = 0,0078$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e módulos de elasticidade $E_1 = 2,1 \times 10^6$, $E_2 = 2,1 \times 10^9$ e $E_3 = 6,3 \times 10^6$. A viga é discretizada com 5 elementos de igual comprimento e a análise é realizada com um passo de tempo $\Delta t = 0,001$ s, sendo os mesmos critérios adotados por Hsiao (1999). Jelenić e Crisfield (2001) adotam uma variação de tempo $\Delta t = 0,025$ s.

A seguir, nas Figuras 5.56, 5.57 e 5.58, observa-se os componentes de deslocamentos translacionais w e v na extremidade livre da viga obtidos pelo programa *SIAE*, considerando os três módulos de elasticidade apresentados anteriormente. Ao analisar os gráficos supracitados, que também apresentam as respostas obtidas Jelenić e Crisfield (2001) e Hsiao *et al.* (1999), percebe-se uma excelente aproximação entre as respectivas respostas e o programa *SIAE*. É importante ressaltar que Hsiao *et al.* (1999) também fazem uso da descrição cinemática corrotacional, enquanto Jelenić e Crisfield (2001) utilizam a descrição *Lagrangeana* total.

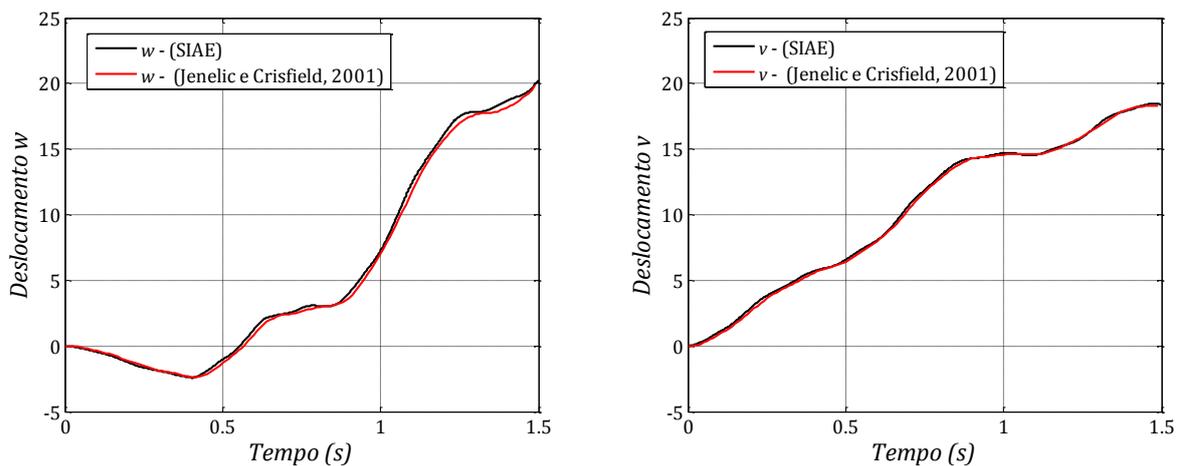


Figura 5.56 – Histórico de deslocamentos w na extremidade livre da viga articulada.

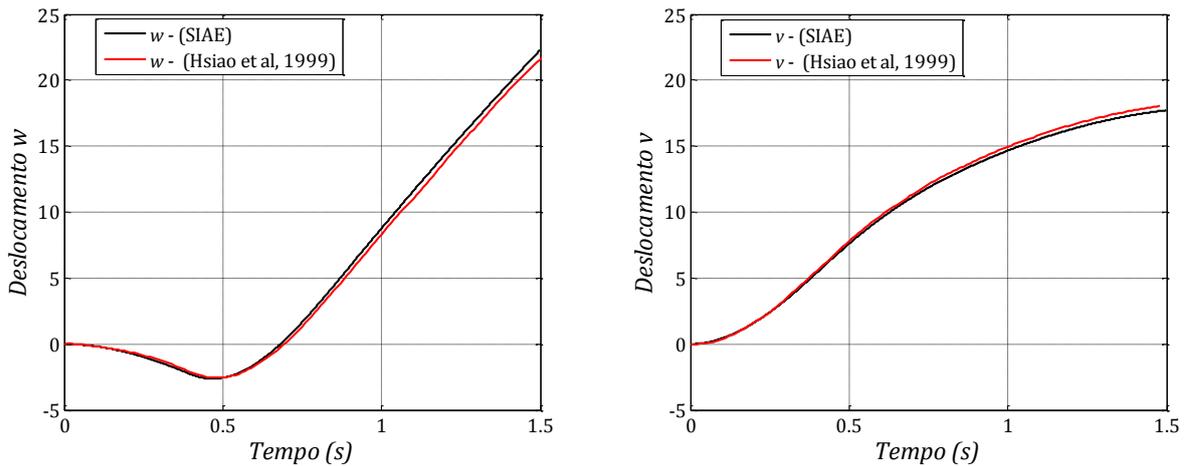


Figura 5.57 – Histórico de deslocamentos v na extremidade livre da viga articulada.

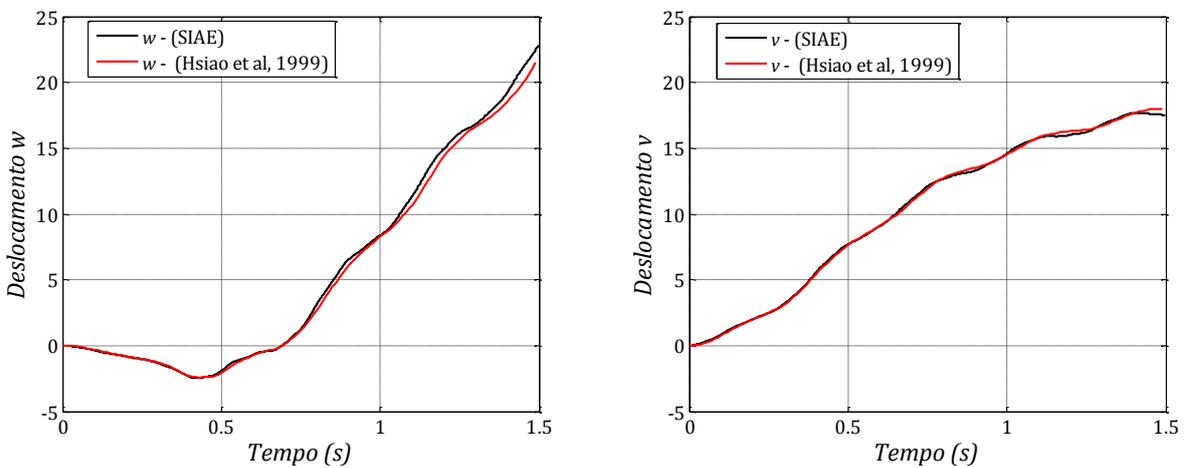


Figura 5.58 – Histórico de deslocamentos v na extremidade livre da viga articulada.

5.3 – PROBLEMAS DINÂMICOS COM AMORTECIMENTO

Essa seção ocupa-se da análise dinâmica não-linear de estruturas submetidas a grandes deslocamentos, porém, em um movimento amortecido. Além do estudo de uma viga em balanço no plano (Exemplo 12), também são analisadas três estruturas (Exemplos 13, 14 e 15) espaciais submetidas à ação de cargas harmônicas, segundo os critérios utilizados por Remseth (1979), Chan (1996) e Xue e Meek (2001), no quais a matriz de amortecimento é determinada de forma proporcional a matriz de massa, considerando 5% de amortecimento crítico. Cabe observar que estudo relacionado à malha ideal de elementos finitos para a análise dinâmica não-linear geométrica dos exemplos supracitados não é objeto de estudo dessa seção.

Para os estudos dos Exemplos 13, 14 e 15, utiliza-se o programa comercial de análise estrutural *ANSYS*, versão 14.0, como ferramenta para cálculo dos modos de vibração das estruturas e como fonte de comparação aos resultados do programa *SIAE*.

As análises realizadas no programa *ANSYS* são efetuadas por meio do elemento finito de viga 3D *BEAM 188*, que possui 2 nós com 6 graus de liberdade por nó (3 translações e 3 rotações nos eixos x , y e z) e considera a teoria de flexão de *Euler Bernoulli*. De acordo com os manuais de apresentação e especificação técnica do *ANSYS*, esse elemento baseia-se nos trabalhos de Simo e Vu-Quoc (1986) e Ibrahimbegović (1995), e possui a capacidade de realizar análise estática e dinâmica envolvendo grandes deslocamentos (translações e rotações finitas). As listas de comandos para análise dos Exemplos 14, 15 e 16 no *ANSYS* são apresentadas no Apêndice C. Nas soluções dos problemas dessa seção, em ambos os programas *SIAE* e *ANSYS*, emprega-se o método de integração HHT- α em combinação com o método de *Newton-Raphson*, utilizando-se uma tolerância de convergência para o equilíbrio igual a 10^{-5} e o coeficiente α igual a $-0,01$ (Le *et al.*, 2012).

5.3.1 – Exemplo 12: Viga em balanço com vibração amortecida

Nesse exemplo, proposto por Simo e Vu-Quoc (1986), uma viga em balanço é inicialmente sujeita a uma carga concentrada em sua extremidade, que em seguida é removida e, a partir desse instante, a viga sofre vibração livre amortecida. As características geométricas da viga e do carregamento são apresentadas na Figura 5.59. As propriedades mecânicas são as mesmas utilizadas nos Exemplos 07 e 08. Em concordância com os estudos realizados por Hsiao e Jang (1989), a viga foi discretizada com 10 elementos de mesmo comprimento, e as análises foram efetuadas com um passo de tempo $\Delta t = 0,01$ s.

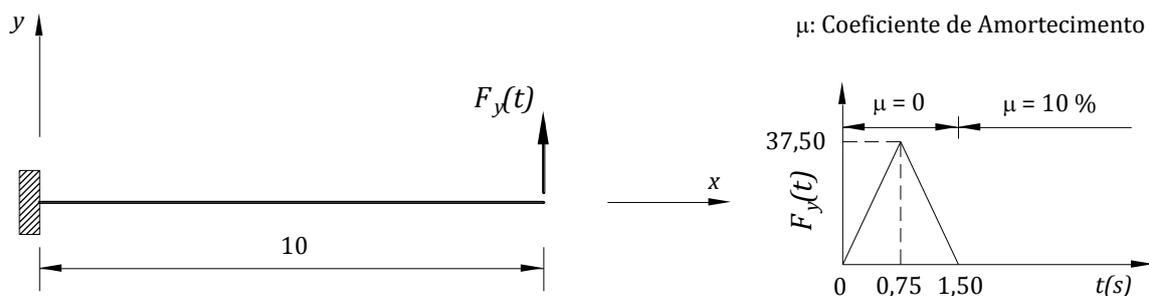


Figura 5.59 – Viga em balanço com vibração amortecida.

Através da Figura 5.60, observa-se a ótima concordância entre histórico de deslocamentos v na extremidade da viga fornecido pelo programa *SIAE* e os resultados obtidos por Hsiao e Jang (1989). Os resultados da análise indicam que a viga sofre grandes deslocamentos em um movimento amortecido durante um longo período de tempo, demonstrando a excelente aplicabilidade da formulação proposta na presente tese para problemas similares.

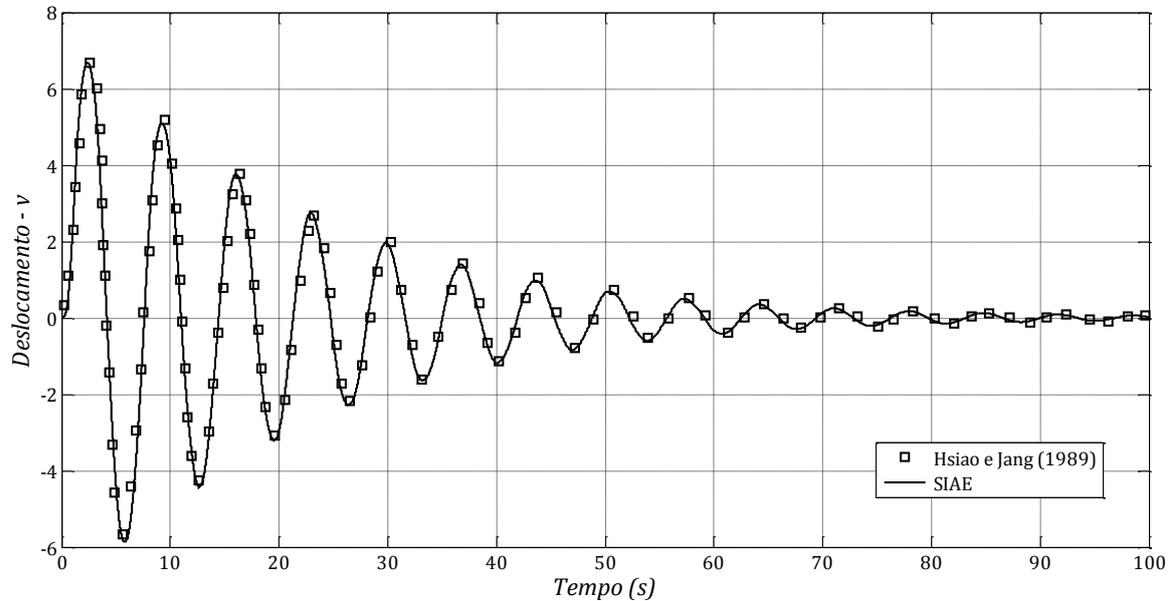


Figura 5.60 – Histórico de deslocamentos v para a viga em balanço com vibração amortecida.

5.3.2 – Exemplo 13: Cúpula espacial com vibração amortecida

Nessa seção realiza-se a análise dinâmica não linear de uma cúpula espacial com vibração amortecida, ilustrada na Figura 5.61, a qual também foi estudada por Xue e Meek (2001), Chan (1996) e Remseth (1979). Tendo como base os estudos de Chan (1996), a cúpula foi discretizada com dois elementos para cada barra da cúpula espacial, com um total de 31 nós e 36 elementos, e assumindo-se $E = 20690 \text{ MN}/\text{m}^2$, $G = 8830 \text{ MN}/\text{m}^2$ e $\rho = 2400 \text{ kg}/\text{m}^3$.

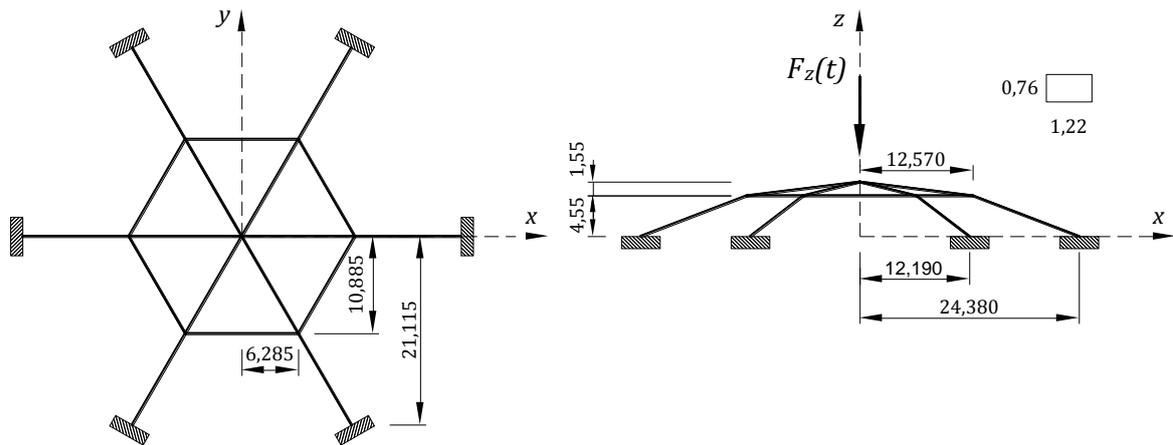


Figura 5.61 – Cúpula espacial com vibração amortecida.

De acordo com a análise modal realizada no programa *ANSYS*, as frequências naturais para o primeiro e quarto modo de vibração da estrutura foram iguais a 2,058 Hz e 5,405 Hz, respectivamente. Chan (1996) obteve em suas análises, para o primeiro modo de vibração, uma frequência natural igual a 2,012 Hz. A fim de comparar os resultados obtidos nessa seção com os obtidos por Chan (1996) e Remseth (1979), assumiu-se que o amortecimento é unicamente proporcional à massa, sendo calculado com base na quarta frequência circular, considerando a razão de amortecimento $\xi = 0,05$. Consequentemente, a matriz de amortecimento pode ser obtida a partir da relação:

$$\mathbf{C} = \mu \mathbf{M} \quad (5.5)$$

onde o coeficiente de amortecimento μ tem a forma:

$$\mu = 2\xi\omega_n \quad (5.6)$$

Desse modo, aplicando a frequência circular para o quarto modo de vibração da cúpula em (5.6), obtém-se o seguinte coeficiente de amortecimento:

$$\omega_4 = 2\pi f_4 = 2\pi \times 5,405 = 33,961 \text{ rad/s} \quad (5.7)$$

$$\mu = 2\xi\omega_4 = 3,40 \text{ rad/s} \quad (5.8)$$

Portanto, substituindo (5.8) em (5.5), tem-se a equação para o cálculo da matriz de amortecimento em função da matriz de massa:

$$C = 3,40M \quad (5.9)$$

A estrutura foi submetida a um carregamento harmônico $F_z(t)$ com período de vibração de 0,15 s e amplitude igual a 34,4 MN, que corresponde a 55% da carga crítica para a análise estática, sendo os mesmos critérios adotados por Chan (1996) e Remseth (1979). Portanto, definida a frequência circular do carregamento, obtém-se a expressão para o carregamento harmônico no topo da estrutura:

$$\omega_{F_z} = \frac{2\pi}{0,15} = 41,89 \text{ rad/s} \quad (5.10)$$

$$F_z(t) = 34,4 \text{sen}(41,89t) \quad (5.11)$$

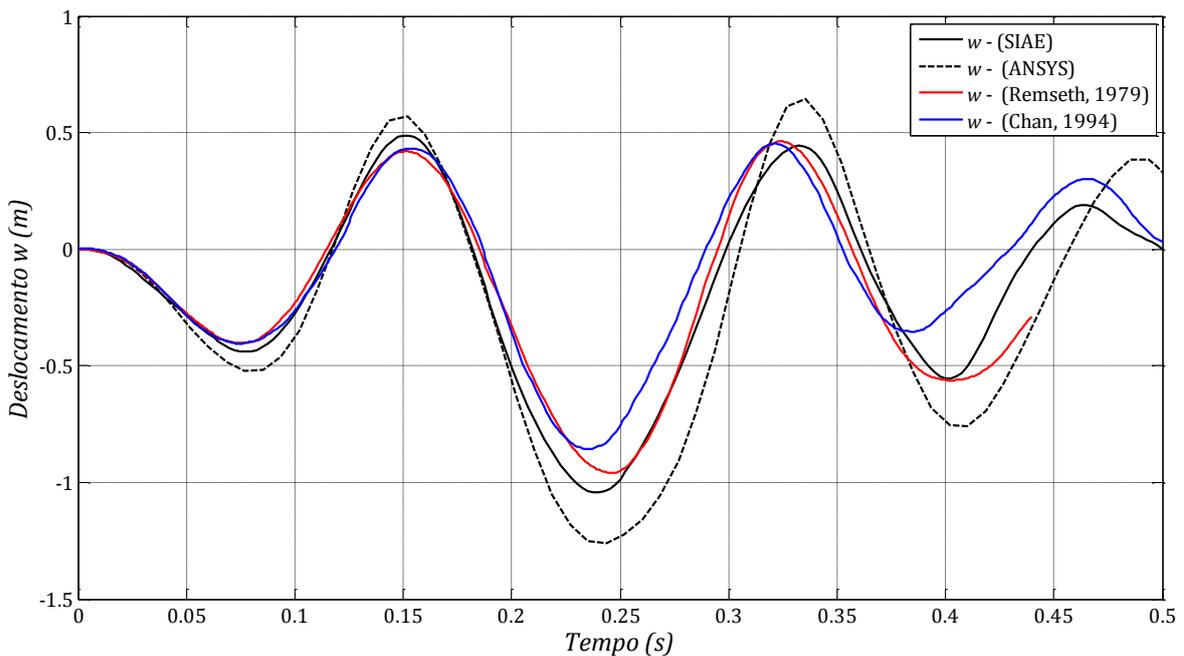


Figura 5.62 – Resposta dinâmica da cúpula espacial para o carregamento harmônico.

Na Figura 5.62, apresentada anteriormente, tem-se o histórico de deslocamentos w em função do tempo, obtidos no topo da estrutura através das análises realizados no programa *SIAE* e *ANSYS*. Na mesma figura, também são apresentados os históricos obtidos por Chan (1996) e Remseth (1979). A interpretação do gráfico ilustrado na Figura 5.62 permite concluir que há discrepâncias entre os resultados ilustrados na figura supracitada. O autor

acredita que tais discrepâncias podem está relacionadas à densidade da malha de elementos finitos utilizada para a análise da cúpula espacial. Como o propósito do exemplo foi comparar a resposta das formulações dos programas SIAE e ANSYS às formulações propostas por Remseth (1979) e Chan (1994), mantendo a mesma malha de elementos finitos, não será apresentado na presente seção nenhum estudo relacionado à malha ideal para a análise da cúpula espacial supracitada.

É importante observar que objetivo principal da presente análise, idealizado pelo pesquisador Remseth (1979), é induzir uma situação de instabilidade dinâmica na cúpula espacial, quando um carregamento harmônico é aplicado em seu topo. Para que ocorra tal instabilidade, a frequência de vibração do carregamento deve ser próxima a uma das frequências naturais da estrutura, onde para a atual análise foi adotada a quarta frequência natural, ou frequência natural para o quarto modo de vibração. Com base no gráfico ilustrado na Figura 5.62, observa-se que para uma amplitude de carregamento com intensidade igual a 55% da carga crítica estática, a cúpula apresenta deslocamentos em seu topo na ordem de 1 m. A fim de se observar e entender o comportamento deformacional da cúpula, a seguir na Figura 5.63, tem-se as deformadas da estrutura, geradas pelo programa SIAE, para os instantes de tempo 0,15 s e 0,25 s.

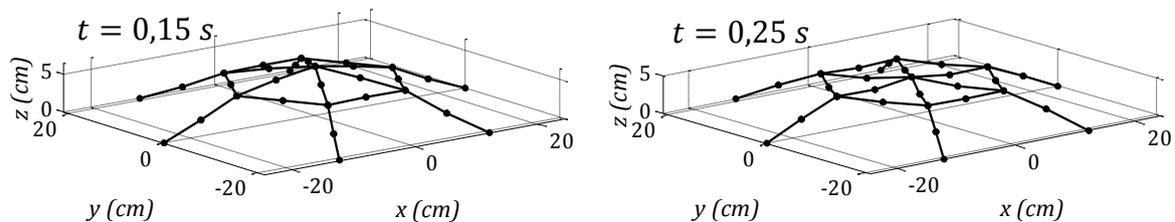


Figura 5.63 – Configurações deformadas da cúpula espacial.

5.3.3 – Exemplo 14: Cobertura espacial hexagonal com vibração amortecida

Essa seção ocupa-se da análise dinâmica não linear de uma cúpula espacial hexagonal com vibração amortecida, a qual está ilustrada na Figura 5.64. Tal estrutura foi alvo de análises estáticas geometricamente não-lineares realizadas por Chan (2004), Hsiao *et al.* (1987) e Meek e Tan (1984). Para as análises dessa seção, adotou-se uma malha com 2 elementos para cada barra que compõe a cobertura hexagonal, totalizando 19 nós e 24 elementos. Em relação as propriedades geométricas e mecânicas, assume-se os seguintes valores: $A =$

$0,494 \text{ in}^2$, $I_y = 0,02 \text{ in}^4$, $I_z = 0,02 \text{ in}^4$, $I_x = 0,0331 \text{ in}^4$, $E = 439800 \text{ lb/in}^2$, $G = 159000 \text{ lb/in}^2$ e $\rho = 0,097551 \text{ lb/in}^3$.

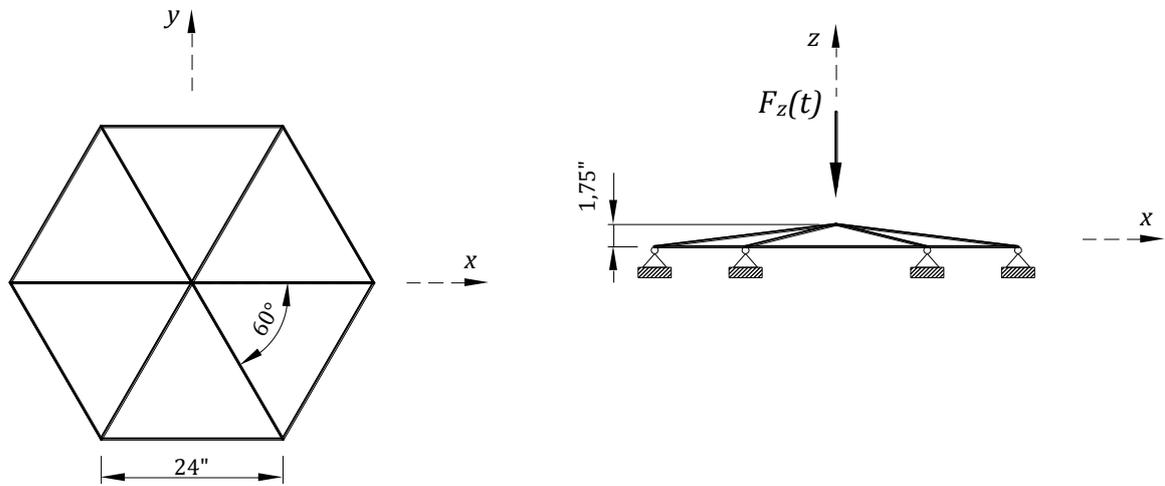


Figura 5.64 – Cobertura espacial hexagonal com vibração amortecida.

Tendo como finalidade a identificação da carga estática crítica da cobertura espacial para ocorrência de uma instabilidade geométrica, a seguir na Figura 5.65 tem-se, em conjunto com os resultados de Chan (2004), a trajetória primária de equilíbrio, para o deslocamento w do nó central, obtida pelo programa *SIAE*.

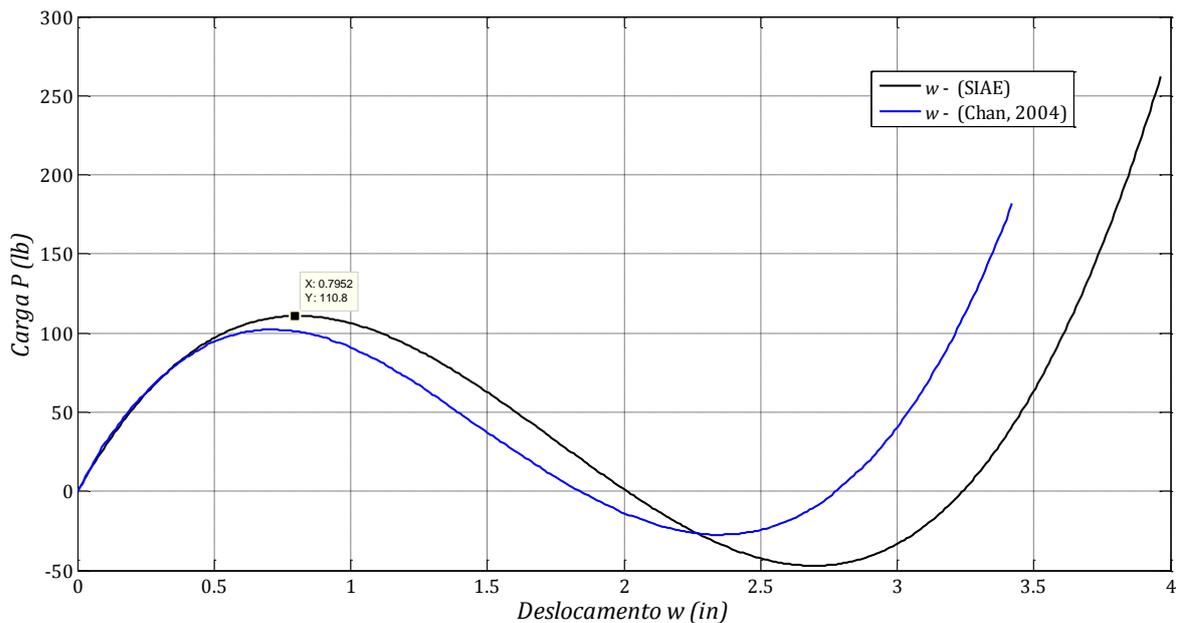


Figura 5.65 – Trajetória de equilíbrio para o nó central da cobertura espacial hexagonal.

De acordo com os resultados do programa *SIAE* para análise estática, ilustrados na Figura 5.65, a cobertura hexagonal possui uma carga crítica $P_{cr} = 110,8 \text{ lb}$. Para a análise modal efetuada no programa *ANSYS*, a cobertura possui, para o primeiro modo de vibração, uma frequência natural igual a $1,228 \text{ Hz}$, a qual corresponde a seguinte frequência natural circular:

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi \times 1,228 = 7,716 \text{ rad/s} \quad (5.12)$$

Conseqüentemente, considerando as Equações (5.5) e (5.6) e uma razão de amortecimento $\xi = 0,05$, obtém-se a seguinte expressão para a matriz de amortecimento da cobertura espacial hexagonal:

$$\mathbf{C} = 0,772\mathbf{M} \quad (5.13)$$

Para a realização dos estudos, a cobertura hexagonal foi submetida a quatro carregamentos harmônicos $F_z(t)$, adotando-se uma frequência de vibração para os carregamentos igual a $1,0 \text{ Hz}$ e amplitudes de carregamento iguais a $27,7 \text{ lb}$, $54,4 \text{ lb}$, $83,1 \text{ lb}$ e $110,8 \text{ lb}$, que correspondem, respectivamente, a 25%, 50%, 75% e 100% da carga crítica para a análise estática. Portanto, sabendo a frequência circular de vibração do carregamento, obtém-se as quatro expressões para os carregamentos harmônicos no topo da cobertura hexagonal espacial:

$$\omega_{F_z} = 2\pi \times 1,0 = 6,283 \text{ rad/s} \quad (5.14)$$

$$F_z(t) = P_0 \text{sen}(6,283t) \quad (5.15)$$

onde P_0 assume os valores de $27,7 \text{ lb}$, $54,4 \text{ lb}$, $83,1 \text{ lb}$ e $110,8 \text{ lb}$.

A seguir, na Figura 5.66, têm-se o histórico de deslocamentos w em função do tempo, no topo da cobertura hexagonal espacial, obtidos pelos programas *SIAE* e *ANSYS*.

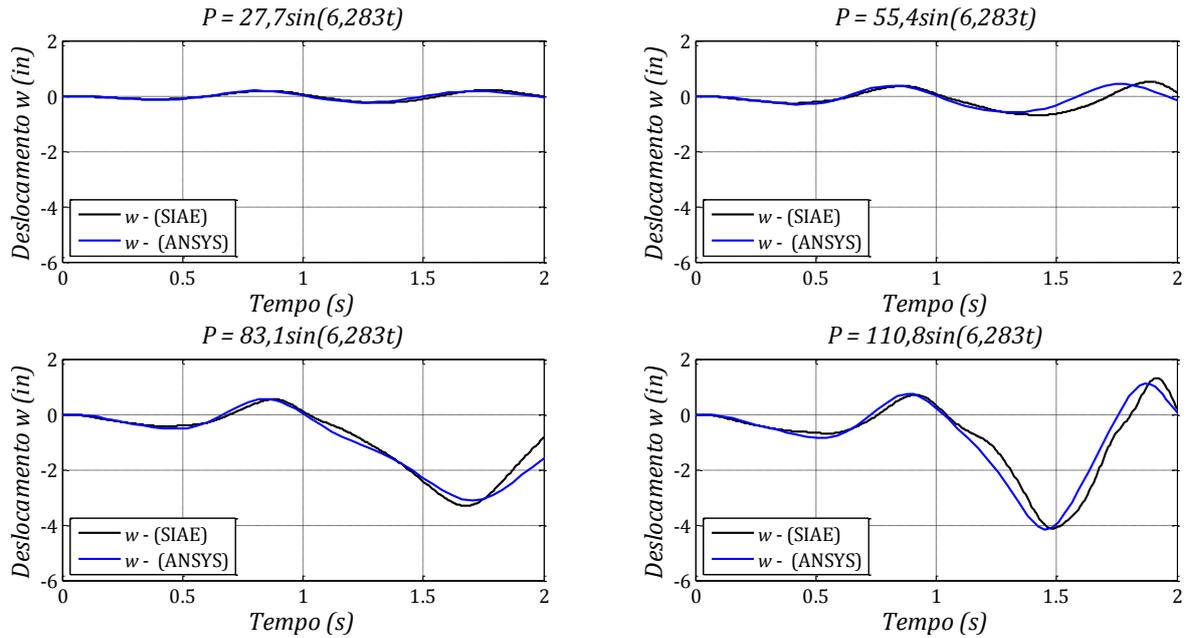


Figura 5.66 – Resposta dinâmica da cobertura hexagonal espacial.

Ressalta-se que os históricos fornecidos pelos referidos programas apresentam comportamentos similares para todas as amplitudes de carregamento. A seguir, nas Figuras 5.67 e 5.68, têm-se os picos máximos de deslocamento w para os quatro casos de análise obtidos pelos programas *SIAE* e *ANSYS*, respectivamente.

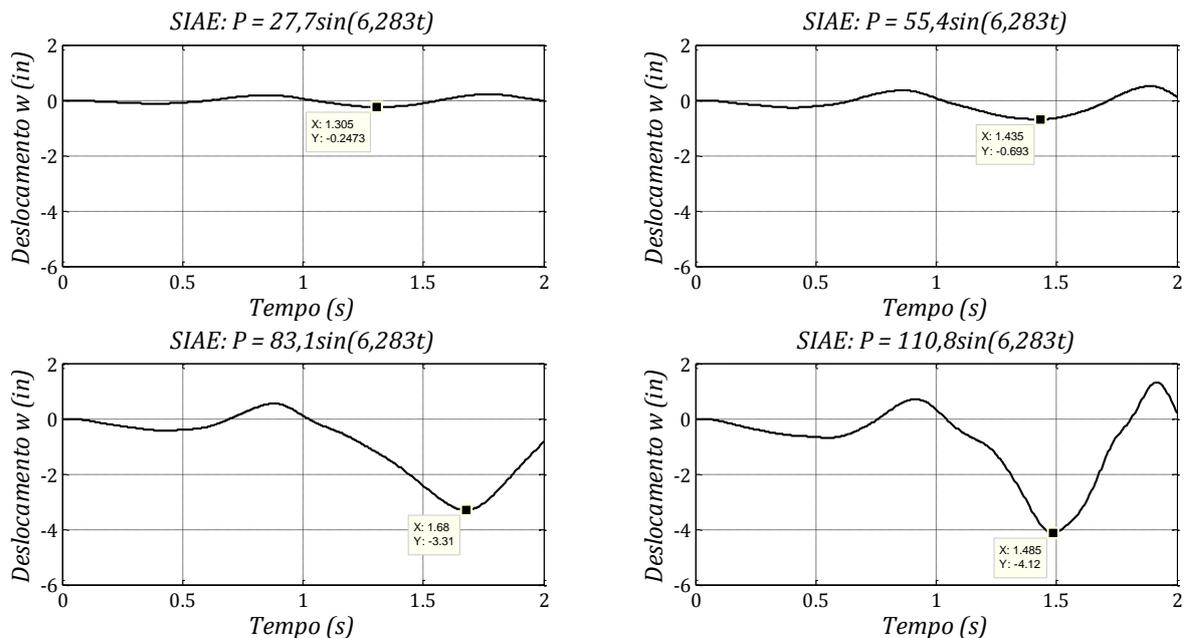


Figura 5.67 – Deslocamento w máximo obtido pelo programa *SIAE*.

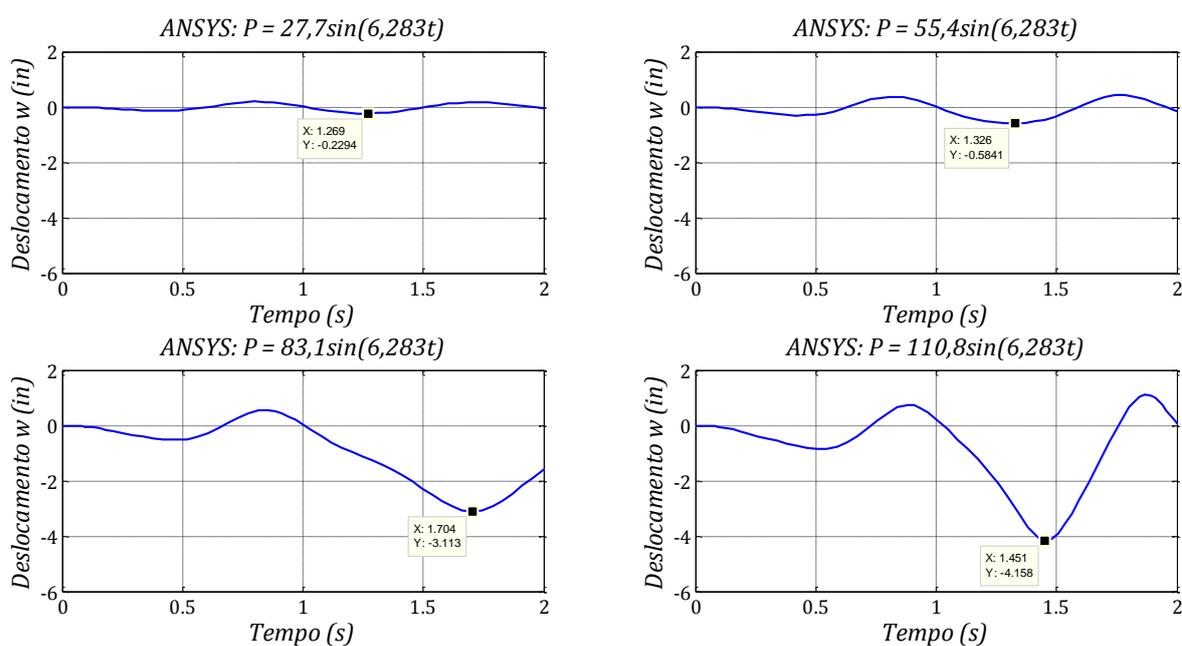


Figura 5.68 – Deslocamento w máximo obtido pelo programa ANSYS.

Mais adiante, na Tabela 5.5, tem-se um comparativo, em termos de porcentagem, entre os deslocamentos w máximos de cada análise dinâmica, deslocamento $w_{crit} = 0,7952 \text{ in}$ referente a carga $P_{cr} = 110,8 \text{ lb}$ da análise estática e altura da cúpula $h = 1,75 \text{ in}$.

Tabela 5.5 – Avaliação dos deslocamentos w no topo da cobertura.

$P_0 \text{ (lb)}$	Programa	Deslocamento $w \text{ (in)}$	% em relação ao $w_{cr} \text{ (0,7952 in)}$	% em relação ao $h \text{ (1,75 in)}$
27,7	SIAE	0,2473	31,10	14,13
	ANSYS	0,2294	28,85	13,11
55,4	SIAE	0,6930	87,15	39,60
	ANSYS	0,5841	73,45	33,38
83,1	SIAE	3,3100	416,25	189,14
	ANSYS	3,1130	391,47	177,89
110,8	SIAE	4,1200	518,11	235,43
	ANSYS	4,1560	522,64	237,49

A avaliação da Tabela 5.5 traz à tona a importância de se analisar os fenômenos de instabilidade dinâmica que podem ocorrer em uma estrutura esbelta. Intencionalmente, utilizou-se uma frequência de vibração do carregamento harmônico (1,0 Hz) com uma intensidade bem próxima a primeira frequência natural de vibração da cobertura

(1,228 Hz), sabendo que essa proximidade entre as referidas frequências podem levar a um fenômeno de ressonância. Conseqüentemente, os dados da Tabela 5.5, comprovam a amplificação dos deslocamentos no topo da cobertura para um carregamento harmônico quando comparado a aplicação de um carregamento estático. Essa afirmação é fácil de ser comprovada ao se observar os resultados para uma amplitude de carregamento $P_0 = 55,4 \text{ lb}$ (corresponde a 50% da carga crítica estática), onde se obtém deslocamentos no topo da cúpula com intensidade na ordem de 87,15% e 73,45%, considerando os programas *SIAE* e *ANSYS*, respectivamente, quando comparados ao deslocamento w_{cr} obtido para a carga crítica estática.

Com o objetivo de observar o comportamento deformacional da cobertura hexagonal para os quatro carregamentos harmônicos, a seguir na Figura 5.69, estão ilustradas as configurações deformadas, geradas pelo programa *SIAE*, referentes ao instante de tempo de 1,5 s para os quatro carregamentos harmônicos.

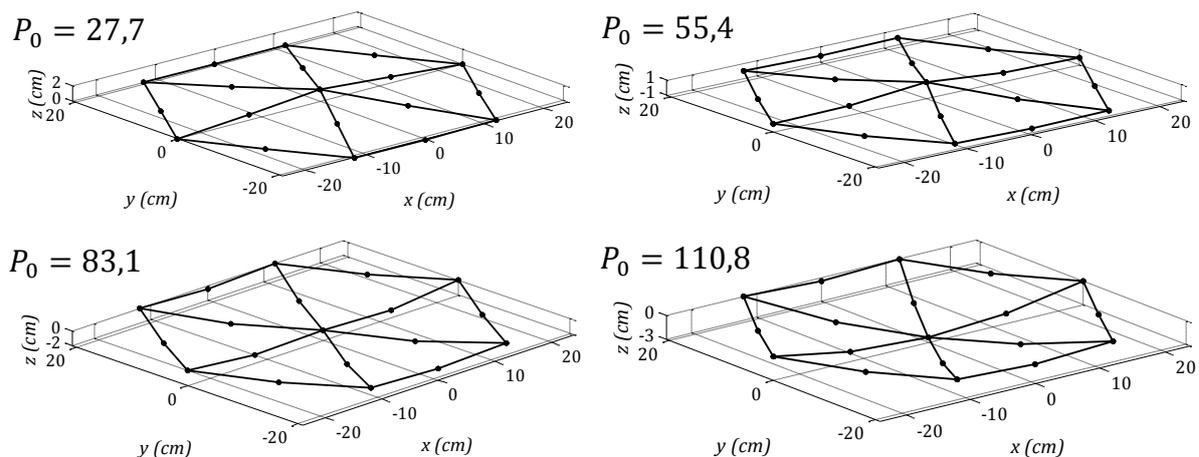


Figura 5.69 – Configurações deformadas da cobertura hexagonal espacial.

5.3.4 – Exemplo 15: Cúpula em forma de estrela com vibração amortecida

Com a finalidade de avaliar o desempenho de formulações numéricas destinadas a análise estática não-linear geométrica de estruturas espaciais, por décadas, a cúpula em forma de estrela, ilustrada na Figura 5.70, vem sendo utilizada por diversos pesquisadores (Wang *et al.*, 2006; Hsiao *et al.*, 1987; Meek e Tan, 1984; Papadrakakis, 1981). Por essa razão de apresentar comportamento não-linear geométrico, a atual seção propõe-se em analisar a

referida estrutura quando submetida a carregamentos harmônicos, tendo como objetivo a avaliação de possíveis instabilidades dinâmicas.

Para as análises, a estrutura foi discretizada com 2 elementos para cada barra da cúpula, com um total de 37 nós e 48 elementos de mesma seção transversal. Os apoios foram considerados rotulados, isto é, com restrição apenas nos graus de liberdade translacionais. Como características geométricas e mecânicas foram adotadas: $A = 3,17\text{cm}^2$, $I_y = 0,295\text{cm}^4$, $I_z = 2,377\text{cm}^4$, $I_x = 0,918\text{cm}^4$, $E = 3,03 \times 10^5\text{N/cm}^2$, $\nu = 0,3823$ e $\rho = 0,0078\text{kg/cm}^3$.

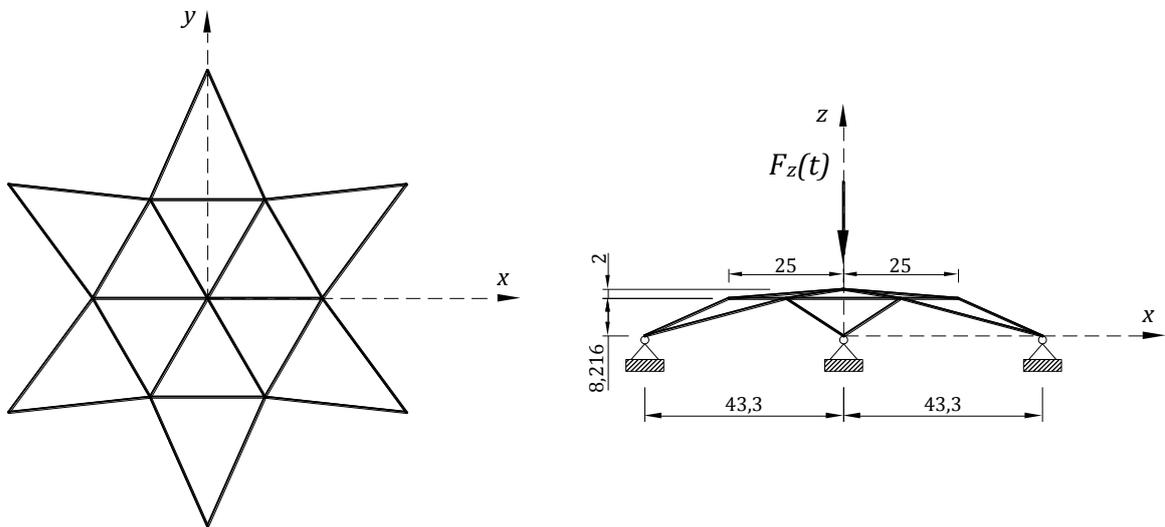


Figura 5.70 – Cúpula em forma de estrela com vibração amortecida.

Com a finalidade de se determinar a carga estática crítica da cúpula para ocorrência de uma instabilidade geométrica, a seguir na Figura 5.71 tem-se, em conjunto com os resultados de Meek e Tan (1984), a trajetória de equilíbrio para o deslocamento w do nó central da cúpula obtida pelo programa *SIAE*.

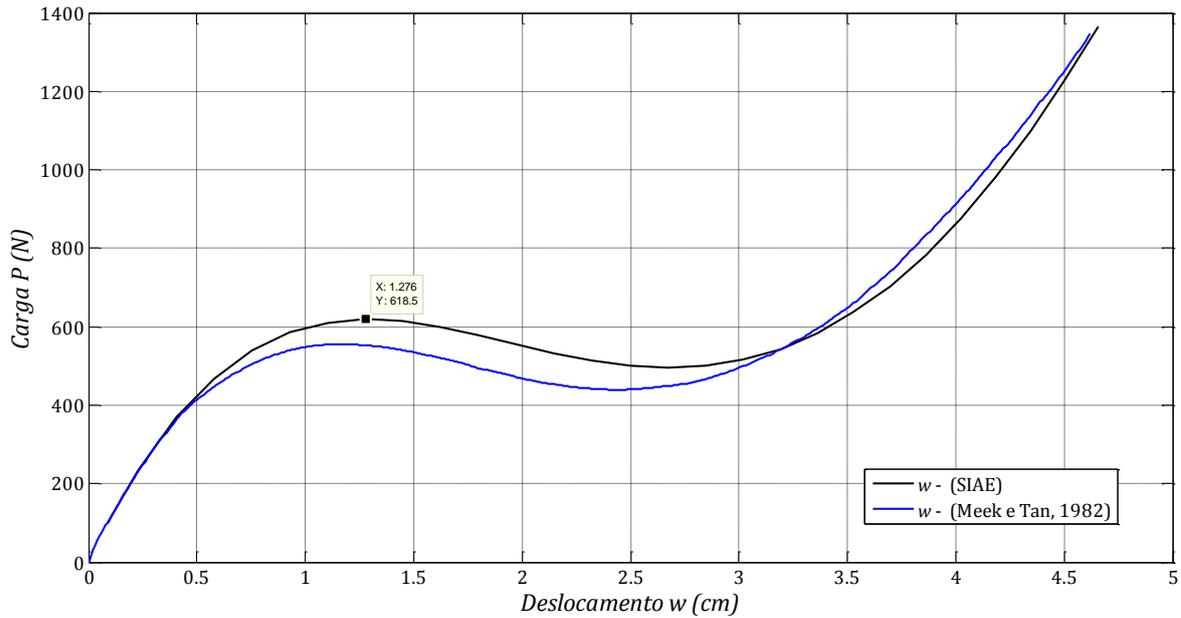


Figura 5.71 – Trajetória de equilíbrio para o nó central da cúpula em forma de estrela.

Através do gráfico apresentado anteriormente na Figura 5.71, identifica-se por meio dos resultados do programa *SIAE* para análise estática, que a cúpula em forma de estrela possui uma carga crítica $P_{cr} = 618,5 N$. Em relação à análise modal efetuada no programa *ANSYS*, a cúpula apresentou, para o primeiro modo de vibração, uma frequência natural igual a $3,478 Hz$, que ao ser transformada para a frequência natural circular, assume a forma:

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi \times 3,478 = 21,853 \text{ rad/s} \quad (5.16)$$

Utilizando as Equações (5.5) e (5.6) e mantendo a mesma razão de amortecimento do exemplo anterior, ou seja, $\xi = 0,05$, obtém-se a seguinte expressão para a matriz de amortecimento da cúpula em forma de estrela:

$$\mathbf{C} = 2,185\mathbf{M} \quad (5.17)$$

As análises foram efetuadas adotando-se a mesma metodologia do exemplo anterior. Nesse caso, a cúpula foi submetida a quatro carregamentos harmônicos $F_z(t)$, utilizando a frequência de vibração do carregamento igual a $3,2 Hz$ e amplitudes de carregamento iguais a $154,625 N$, $309,250 N$, $463,875 N$ e $618,500 N$, que correspondem, respectivamente, a 25%, 50%, 75% e 100% da carga crítica para a análise estática.

Conseqüentemente, definida a frequência circular de vibração do carregamento, obtêm-se as quatro expressões para os carregamentos harmônicos no nó central da cúpula em forma de estrela:

$$\omega_{F_z} = 2\pi \times 3,2 = 20,106 \text{ rad/s} \quad (5.18)$$

$$F_z(t) = P_0 \text{sen}(20,106t) \quad (5.19)$$

onde P_0 assume os valores de 154,625 N, 309,250 N, 463,875 N e 618,500 N.

Com base nos critérios e parâmetros definidos anteriormente, a seguir, na Figura 5.72, ilustra-se os históricos de deslocamentos w em função do tempo, no nó central da cúpula, obtidos pelos programas *SIAE* e *ANSYS*.

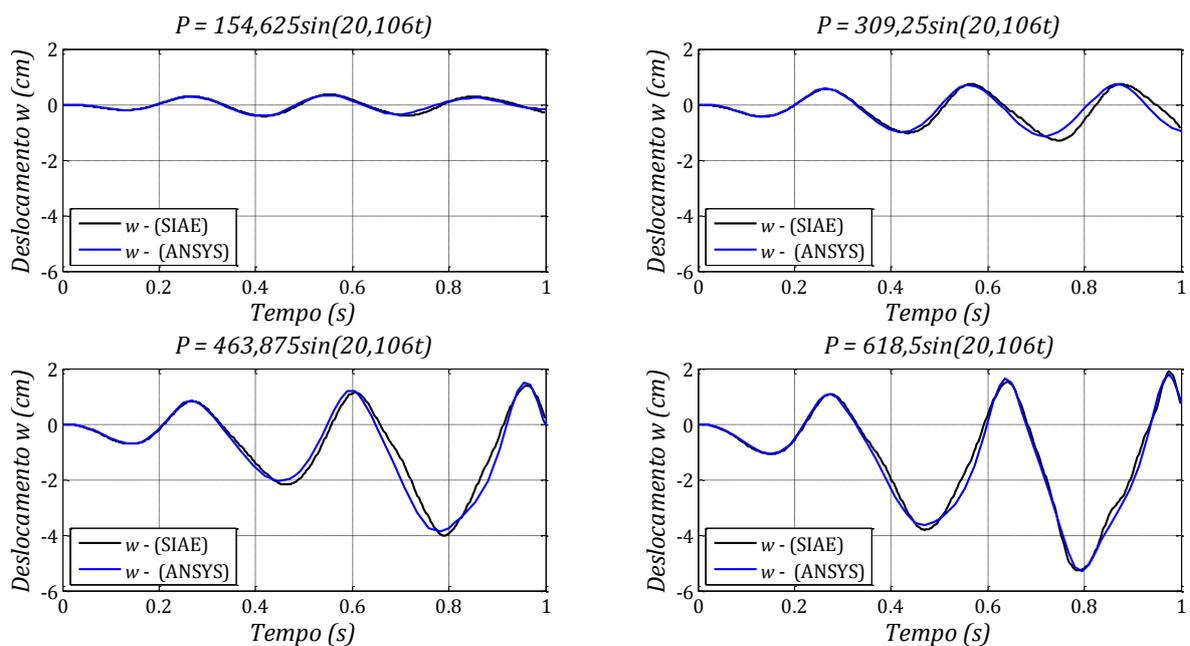


Figura 5.72 – Resposta dinâmica da cúpula em forma de estrela.

Avaliando os históricos de deslocamentos apresentados anteriormente na Figura 5.72, observa-se comportamentos análogos entre as respostas dos programas *SIAE* e *ANSYS* para todas as amplitudes de carregamento. A seguir, nas Figuras 5.73 e 5.74, têm-se os valores para os picos máximos de deslocamento w , no nó central da cúpula, para os quatro casos de análise obtidos pelos programas *SIAE* e *ANSYS*, respectivamente.

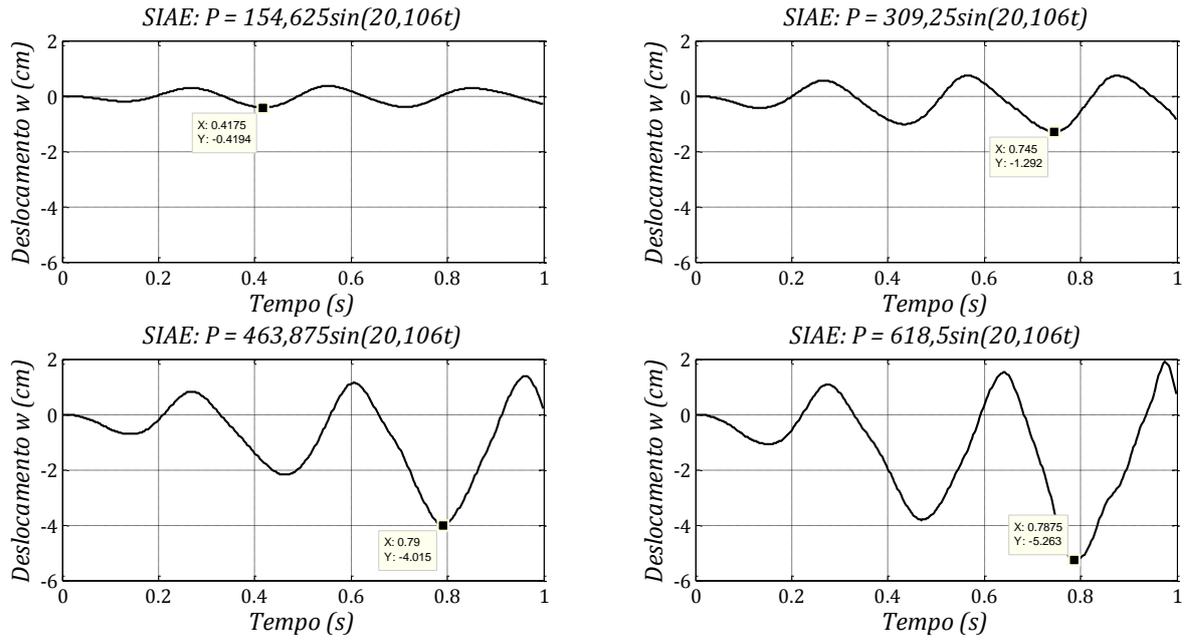


Figura 5.73 – Deslocamento w máximo obtido pelo programa SIAE.

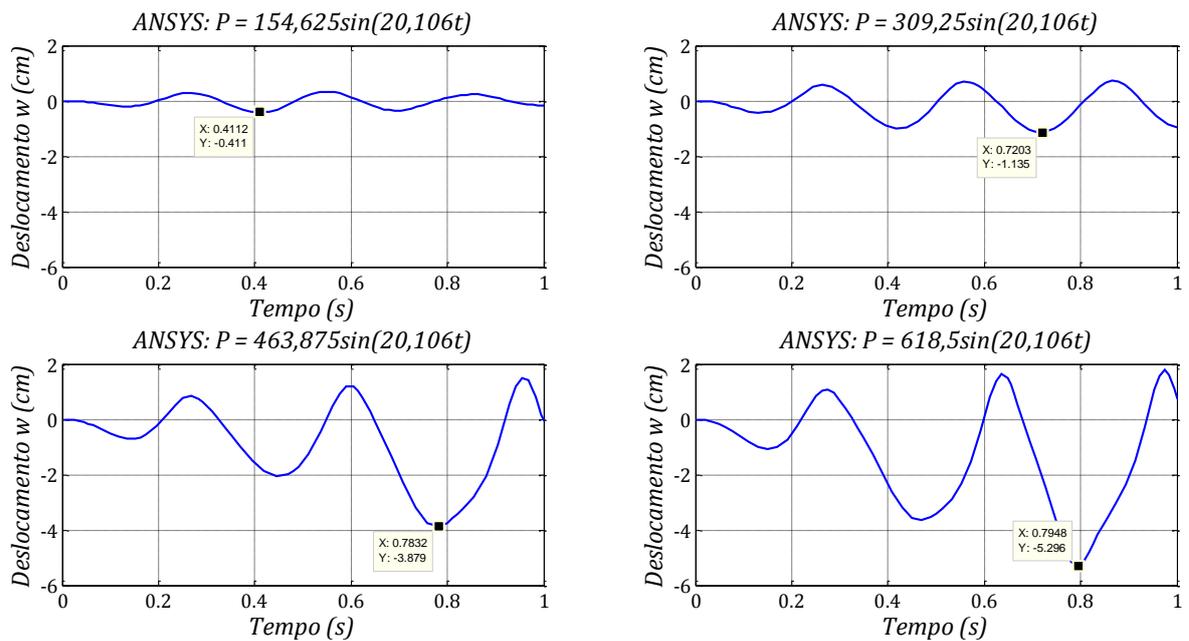


Figura 5.74 – Deslocamento w máximo obtido pelo programa ANSYS.

Novamente, como no exemplo anterior, por intermédio da Tabela 5.6, verifica-se a presença do fenômeno de instabilidade dinâmica na cúpula para os carregamentos aplicados, visto que se utilizou uma frequência de vibração do carregamento harmônico

(3,2 Hz) com uma intensidade bem próxima a primeira frequência natural de vibração da cúpula (3,478 Hz), induzindo a estrutura a um possível fenômeno de ressonância.

Considerando, por exemplo, a atuação do carregamento harmônico com amplitude de carregamento $P_0 = 309,25\text{ N}$, que corresponde a 50% da carga crítica estática, obteve-se deslocamentos no nó central da cúpula com intensidades na ordem de 88,95% (ANSYS) e 101,25% (SIAE) em relação ao deslocamento obtido para a carga crítica estática ($w_{crit} = 10,216\text{ cm}$). O comportamento deformacional da cúpula em forma de estrela, referente ao instante de tempo de 0,8 s para os quatro carregamentos harmônicos, com as deformadas geradas pelo programa SIAE, pode ser observado a seguir na Figura 5.75.

Tabela 5.6 – Avaliação dos deslocamentos w no nó central da cúpula.

P_0 (N)	Programa	Deslocamento w (cm)	% em relação ao w_{cr} (1,276 cm)	% em relação ao h (10,216 cm)
154,625	SIAE	0,4194	32,87	4,11
	ANSYS	0,4110	32,21	4,02
309,250	SIAE	1,2920	101,25	12,65
	ANSYS	1,1350	88,95	11,11
463,875	SIAE	4,0150	314,66	39,30
	ANSYS	3,8790	304,00	37,97
618,500	SIAE	5,2630	412,46	51,52
	ANSYS	5,0296	394,17	49,23

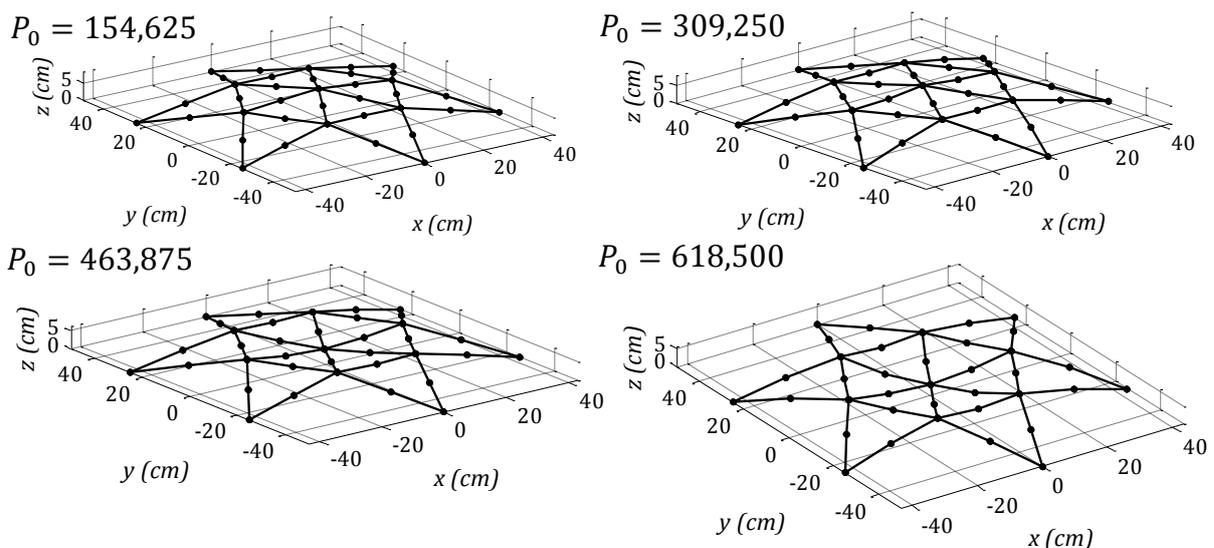


Figura 5.75 – Configurações deformadas da cúpula em forma de estrela.

6 – CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentada uma formulação do método dos elementos finitos para o estudo do comportamento dinâmico, incluindo não-linearidade geométrica, de estruturas de pórticos espaciais. No método dos elementos finitos adotou-se para o elemento de viga 3D a formulação corrotacional *EICR* desenvolvida por Nour-Omid e Rankin (1991) associada à teoria de flexão de *Euler-Bernoulli*, que permitem estudar uma grande variedade de tipologias estruturais, tais como: barras, pórticos, cúpulas e arcos. Cabe ressaltar que a avaliação do comportamento não-linear geométrico de tais tipologias estruturais, permite o estudo da capacidade portante destas estruturas após a perda de equilíbrio.

Os deslocamentos deformacionais das estruturas foram calculados com operadores de projeção, advindos da formulação *EICR*, que possuem a característica de serem utilizados em programas computacionais de elementos finitos, sem a necessidade de se realizar alterações internas nas rotinas de elementos finitos lineares pré-existentes, garantindo assim grande poder de implementação da formulação.

De forma geral, conclui-se que a formulação corrotacional e a sua implementação computacional no programa *SIAE* (Sistema Integrado de Análise Estrutural) para as análises realizadas nesse trabalho, apresentou resultados concordantes em relação aos obtidos por outros autores. Pode-se afirmar que ocorreram apenas pequenas discrepâncias em regiões próximas de pontos críticos ou de fortes não-linearidades geométricas.

Os testes de simetria propostos na Tabela 5.1, referentes à N_{fro} (*Norma de Frobenius*) e C_{max} (*Máximo Coeficiente Absoluto*) para a matriz de coeficientes resultantes da diferença entre matriz de rigidez tangente global e sua transposta, demonstraram-se coerentes com as observações realizadas por Nour-Omid e Rankin (1991). Em função da grande aproximação (mesma ordem de grandeza) apresentada entre as magnitudes dos testes N_{fro} e C_{max} , acredita-se que somente um coeficiente da matriz de rigidez tangente não simetriza. Contudo, tal afirmação precisa de mais testes para ser comprovada.

Nos Exemplos 01, 02 e 03, caracterizados por estruturas submetidas a carregamentos conservativos, observou-se que a matriz de rigidez tangente na presença de grandes

deslocamentos não simetriza numa condição de equilíbrio da estrutura. Outra observação importante é em relação ao refinamento da malha, onde os termos que formam a rigidez geométrica do elemento, indicados em (3.148), adquirem uma menor ordem de grandeza quando comparados aos termos provenientes de malhas menos refinadas. A explicação para tal situação está relacionada à diminuição das dimensões do elemento em razão do refinamento da malha, que por sua vez, acabam obtendo menores deslocamentos (rotações e translações) quando comparados aos elementos com maiores dimensões de uma malha menos refinada. Consequentemente, o aumento do número de graus de liberdade da malha elementos finitos (aumento da quantidade de elementos finitos) induz a uma redução da magnitude de N_{fro} (*Norma de Frobenius*) e C_{max} (*Máximo Coeficiente Absoluto*), indicando uma tendência de simetrização proporcional ao refinamento da malha. Já para o Exemplo 04, onde uma viga em balanço está submetida a momentos concentrados em sua extremidade, ou seja, uma situação de carregamento não-conservativo, os resultados dos testes N_{fro} e C_{max} comprovaram que a matriz de rigidez tangente não tem tendência a simetrização para cargas não-conservativas, além do refinamento da malha não proporcionar qualquer influência nas magnitudes de N_{fro} e C_{max} .

Em relação aos exemplos de dinâmica não-linear, todos os casos analisados tratam-se de exemplos com grandes não-linearidades, onde as amplitudes de deslocamentos são na mesma ordem de grandeza das dimensões geométricas das estruturas. De acordo com a literatura técnica, esses exemplos são elaborados com a finalidade de testar a capacidade de análise dos algoritmos diante de severas não-linearidades.

Considerando os resultados do programa *SIAE* para os exemplos dinâmicos não amortecidos, conclui-se que a formulação desenvolvida no presente trabalho apresentou excelentes resultados, e excetuando-se o Exemplo 06, nos demais exemplos não amortecidos ocorrem vibrações fora do plano principal da estrutura, com grandes amplitudes. Isso demonstra que a metodologia adotada para o tratamento dinâmico das rotações finitas, velocidades e acelerações angulares, através do emprego do procedimento de Newmark aplicado ao vetor de rotação incremental e as suas derivadas no tempo, proposto por Géradin e Cardona (Géradin e Cardona, 2001; Cardona, 1989; Cardona e Géradin, 1988), possui uma excelente aplicabilidade para exemplos dinâmicos não-lineares envolvendo grandes deslocamentos.

Avaliando os exemplos dinâmicos com amortecimento, observa-se ótimas respostas, considerando que se tratam de problemas altamente não-lineares.

As coberturas espaciais analisadas nos Exemplos 13, 14 e 15, trouxeram à tona a importância de se analisar os fenômenos de instabilidade dinâmica que podem ocorrer em uma estrutura esbelta, visto que em ambos os exemplos, ao se amplificar a amplitude P_0 do carregamento harmônico, para situações onde a frequência do carregamento está próxima de uma das frequências naturais da estrutura, ocorrem grandes deslocamentos nas regiões de aplicação das cargas. Os resultados obtidos nesses exemplos demonstraram uma boa aproximação entre a formulação proposta no presente trabalho e os resultados obtidos pelo programa ANSYS com a utilização do elemento viga 3D *BEAM* 188.

Ressalta-se ainda que o procedimento HHT- α (Hughes et al., 1978) em combinação com o método de Newton-Raphson para atualização das variáveis translacionais e rotacionais dos problemas dinâmicos, demonstrou um ótimo desempenho para todos os exemplos dinâmicos analisados.

Observou-se que as duas metodologias apresentadas para cálculo vetor de força inercial, ou seja, o cálculo direto do vetor de força inercial total (\mathbf{f}_k) ou a sua separação em vetores de força inercial relativa (\mathbf{f}_{rel}) e força inercial giroscópica (\mathbf{f}_{gir}), levam aos mesmos resultados numéricos. Já as matrizes inerciais giroscópica (\mathbf{C}_k) e centrífuga (\mathbf{K}_k), que surgem no processo de dedução da matriz tangente de inércia (\mathbf{K}_{Dyn}), possuem a propriedade de poderem ser suprimidas da formulação sem afetar a resposta final das análises dinâmicas. Contudo, as suas utilizações implicam no melhoramento do desempenho incremental iterativo dos algoritmos.

A matriz de amortecimento giroscópico \mathbf{C}_{gir} , desenvolvida no presente trabalho, apresentou as mesmas propriedades das matrizes inerciais giroscópica e centrífuga, ou seja, não alterou a resposta numérica quando suprimida, mas contribuiu para melhoramento do desempenho incremental iterativo na solução dos problemas que envolveram processos dissipativos (amortecimento estrutural).

De uma forma geral, pode-se dizer que o objetivo principal desta tese foi atingido, visto que as rotinas numéricas foram implementadas na plataforma Matlab com êxito, sendo validadas por uma série de resultados numéricos de outros pesquisadores e pelo programa ANSYS. Dessa forma, observa-se que o programa *SIAE* pode ser perfeitamente empregado em problemas em que os grandes deslocamentos alteram basicamente a forma da estrutura considerando materiais com comportamento elástico linear.

6.1 – SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A seguir, apresentam-se algumas sugestões para futuras linhas de investigação, a fim de abordar aspectos não estudados no presente trabalho:

- Repetir o estudo realizado considerando os efeitos da não-linearidade física do material (plasticidade);
- Efetuar a análise dinâmica não-linear geométrica de placas, cascas e elementos sólidos com o uso da descrição cinemática corrotacional desenvolvida no presente trabalho;
- Utilização de diferentes formas de parametrização como os ângulos de Euler, ângulos de Bryant, parâmetros de Euler, parâmetros de Rodrigues, quatérnios e vetor rotação para análise dinâmica não-linear de elementos tridimensionais (pórtico espacial, placas, cascas e sólidos) considerando a cinemática corrotacional;
- Aplicar a metodologia apresentada na presente tese para a análise estrutural de estruturas offshore como os risers e plataformas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Almeida, F.S. (2012). “*Desenvolvimento de ferramentas computacionais para análise de interação fluido-estrutura incluindo não linearidade geométrica*”. Tese de Doutorado em Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- Almeida, F.S. e Awruch, A.M. (2011). “Corotational nonlinear dynamic analysis of laminated composite shells”. In: *Finite Elements in Analysis and Design*, 47, 1131-1145.
- Alsafadie, R.; Battini, J.M.; Somja, H. e Hjiáj, M. (2011). “Local formulation for elastoplastic corotational thin-walled beams based on higher-order curvature terms”. In: *Finite Elements in Analysis and Design*, 47, 119-128.
- Alsafadie, R.; Hjiáj, M. e Battini, J.M. (2010). “Corotational mixed finite element formulation for thin-walled beams with generic cross-section”. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199, 3197-3212.
- Alsafadie, R.; Hjiáj, M. e Battini, J.M. (2011). “Three-dimensional formulation of a mixed corotational thin-walled beam element incorporating shear and warping deformation”. In: *Thin-Walled Structures*, 49, 523-533.
- Argyris, J.H. (1982). “An excursion into large rotations”. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32, 85-155.
- Argyris, J.H.; Balmer, H.; Doltsinis, J.St. (1979). “Finite Element Method - The Natural Approach”. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17/18, 1-106.
- Bathe, K.J. e Bolourchi, S. (1979). “Large displacement analysis of three dimensional beam structures”. In: *Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14, 961-986.

- Battini, J.M. (2008). "Large rotations and nodal moments in corotational elements". in: *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 33(1), 1-15.
- Battini, J.M. (2007). "A modified corotational framework for triangular shell elements". In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196, 1905-1914.
- Battini, J.M. (2007). "A rotation-free corotational plane beam element for non-linear analyses". In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75, 672-689.
- Battini, J.M. (2008). "A non-linear corotational 4-node plane element". In: *Mechanics Research Communications*, 35, 408-413.
- Battini, J.M. e Pacoste, C. (2002). "Co-rotational beam elements with warping effects in instability problems". In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, 1755-1790.
- Battini, J.M. e Pacoste, C. (2006). "On the choice of the linear element for corotational triangular shells". In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195, 6362-6377.
- Battini, J.M., (2002). *Co-rotational beam elements in instability problems*. Ph.D Thesis, Royal Institute of Technology - Department of Mechanics, Stockholm / Sweden.
- Behdinan, K.; Stylianoub, M.C. e Tabarrok, B. (1998). "Co-rotational dynamic analysis of flexible beams" In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 154, 151-161.
- Belytschko, T. e Schwer, L. (1977). "Large deflection, transient analysis of three-dimensional beam structures". In: *Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11, 65-84.
- Belytschko, T. e Hsieh, B.J. (1973). "Non-linear transient finite element analysis with convected co-coordinates". In: *Journal Numerical Methods in Engineering*, 7, 255-271.

- Belytschko, T. e Schoeberle, D.F. (1975). “On the unconditional stability of an implicit algorithm for nonlinear structural dynamics”. In: “*Journal of Applied Mechanics*”. ASME, 42, 865-869.
- Bergan, P.G. e Horrigmoe, G. (1976). “Incremental variational principles and finite element models for nonlinear problems”. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 7, 201-217.
- Biot, M.A., (1965). “The mechanics of incremental deformations”. McGraw-Hill, New York, USA.
- Braun, A.L. e Awruch, A.M. (2008). “Geometrically non-linear analysis in elastodynamics using the eight-node Finite Element with one-point quadrature and the generalized- α method”, In: *Latin American Journal of Solids and Structures*, 5, 17-45.
- Caldas, R.B. (2008). *Análise numérica de estruturas de aço, concreto e mistas em situação de incêndio*, Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- Campbell, S.L. e Meyer Jr., C.D. (1979). “*Generalized Inverses of Linear Transformations*”, Pitman, London.
- Cardona, A. (1989), *An integrated approach to mechanism analysis*, Ph.D thesis, University of Liege, Belgium.
- Cardona, A. e Geradin, M. (1988). “A beam finite element non-linear theory with finite rotations”. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26, 2403-2438.
- Cauchy, A.L. (1827). “*De la pression ou tension dans un corps solide*”. Exercices de Mathématiques, Volume 2, 42-56, Paris.

- Chan, S.L. (1996). "Large deflection dynamic analysis of space frames". In: *Computers & Structures*, 58(2), 381-38.
- Cole, G. (1990). *Consistent co-rotational formulation for geometrically nonlinear beam elements with special reference to large rotations*, Ph.D thesis, School of Civil Engineering – Kingston Polytechnic, UK.
- Cortivo, N., (2004). *Análise de estruturas de cascas finas utilizando-se uma formulação co-rotacional, um modelo plástico por camadas e o elemento finito ANDES*, Tese de Doutorado em Estruturas de Construção Civil, Universidade de Brasília, Brasília.
- Crisfield, M.A. e Moita, G.F., (1996), "A unified co-rotational framework for solids, shells and beams". In: *International Journal of Solids and Structures*, 33, 2969-2992.
- Crisfield, M.A. (1990). "A consistent co-rotational formulation for non-linear three-dimensional beam elements". In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 81, 131-150.
- Crisfield, M.A. (1997), "*Non-linear finite element analysis of solids and structures*". Volume 1: Essential, John Wiley & Sons, Chichester, UK.
- Crisfield, M.A. (1997), "*Non-linear finite element analysis of solids and structures*". Volume 2: Advanced Topics, John Wiley & Sons, Chichester, UK.
- Crisfield, M.A.; Galvanetto, U. e Jelenic, G. (1997). "Dynamics of 3-D co-rotational beams". In: *Computational Mechanics*, 20, 507-519.
- Felippa, C.A. e Haugen, B. (2005) "A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. Theory". In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, 2285-2336.
- Felippa, C.A., (2001), "Non-linear finite element methods / NFEM", Lecture notes for the course non-linear finite element methods, Center for Aerospace Structures, University of Colorado, Boulder/USA.

- Fraeijs de Veubeke, B.M. (1976). "The dynamics of flexible bodies". In: *International Journal of Engineering Science*, 14, 895-913.
- Geradin , M. e Cardona, A. (2001). "*Flexible multibody dynamics – A finite element approach*". Wiley, New York.
- Geradin , M. e Cardona, A. (1989). "Kinematics and dynamics of rigid and flexible mechanisms using finite elements and quaternion algebra". In: *Computational Mechanics*, 4, 115-135.
- Géradin, M. e Rixen, D. (1997). "*Mechanical vibrations*". Second Edition, John Wiley & Sons.
- Goldstein, H. (1980). "*Classical Mechanics*". Addison-Wesley, Reading.
- Gonçalves, R.; Corrêa, M.R. e Camotim, D. (2010). "A large displacement and finite rotation thin-walled beam formulation including cross-section deformation". In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199, 1627-1643.
- Harrison, H.B. (1973). "*Computer methods in structural analysis*". Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA.
- Haugen, B. (1994). *Buckling and Stability Problems for Thin Shell Structures Using High Performance Finite Elements*, Ph.D Thesis, University of Colorado, USA.
- Horrigmoe, G. (1977). "*Finite element instability analysis of free-form shells*". Dr. Ing. Thesis, Div. of Structural Mechanics, Norwegian Institute of Technology, Trondheim, Norway.
- Hsiao, K.M. e Hou, F.Y. (1987). "Nonlinear Finite Element Analysis of Elastic Frames". In: *Computers & Structures*, 26, 693-701.

- Hsiao, K.M. e Yang, R.T. (1995). "Nonlinear dynamic analysis of elastic frames". In: *Computational Structures*, 54(6), 1091-1097.
- Hsiao, K.M. e Jang, J.Y. (1989). "A co-rotational formulation for nonlinear dynamic analysis of curved Euler beam". In: *Computers & Structures*, 33(4), 1057-1063.
- Hsiao, K.M.; Jann, H. e Chen, Y.R. (1987). "A corotational procedure that handles large rotations of spacial beam structures". In: *Computers & Structures*, 27, 769-781.
- Hsiao, K.M.; Lin, J.Y. e Lin, W.Y. (1999). "A consistent co-rotational finite element formulation for geometrically nonlinear dynamic analysis of 3-D beams". In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 169, 1-18.
- Hsiao, K.M.; Lin, W.Y. e Chen, R.H. (2009). "Geometrically non-linear dynamic analysis of thin-walled beams". In: *Proceedings of the World Congress on Engineering*, London, U.K., Vol II.
- Hughes T.J.R.; Caughey T.K.; Liu W.K. (1978). "Finite element methods for on linear elastodynamics which conserve energy". In: "*Journal of Applied Mechanics*". Transactions of the ASME, 45, 366-370.
- Ibrahimbegovic, A. e Mikdad, M.A. (1998). "Finite rotations in dynamics of beams and implicit time-stepping schemes". In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41, 781-814.
- Ibrahimbegovic, A. (1995). "On Finite Element Implementation of Geometrically Nonlinear Reissner's Beam Theory: Three-dimensional Curved Beam Elements". In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 122, 11-26.
- Iura M. e Atluri, S.N. (1988). "Dynamic analysis of finitely stretched and rotated three-dimensional space-curved beams". In: *Computers & Structures*, 29, 875-889.

- Jelenić, G. e Crisfield, M.A. (1998). “Interpolation of rotational variables in nonlinear dynamics of 3D beams”. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43, 1193-1222.
- Jelenić, G. e Crisfield, M.A. (1999). “ Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain-invariant element for statics and dynamics”. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 171, 141-171.
- Jelenić, G. e Crisfield, M.A. (2001). “ Geometrically analysis 3D beam joints in presence of large rotations”. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, 4195-4230.
- Khosravi, P.; Ganesan, R. e Sedaghati, R. (2008). “An efficient facet shell element for corotational nonlinear analysis of thin and moderately thick laminated composite structures”. In: *Computers & Structures*, 86, 850-858.
- Lanc, D.; Turkalj, G. e Brnic, J. (2009). “Large-displacement analysis of beam-type structures considering elastic-plastic material behavior”. In: *Materials Science and Engineering A*, 499, 142-146.
- Le, T.N.; Battini, J.M. e Hjiat M. (2011). “Efficient formulation for dynamics of corotational 2D beams” In: *Computational Mechanics*, 48, 153-161.
- Le, T.N.; Battini, J.M. e Hjiat M. (2012). “Dynamics of 3D beam elements in a corotational context: A comparative study of established and new formulations” In: *Finite Elements in Analysis and Design*, 61, 97-111.
- Lens, E.V. e Cardona, A. (2008). “A nonlinear beam element formulation in the framework of an energy preserving time integration scheme for constrained multibody systems dynamics”. In: *Computers and Structures*, 86, 47-63.
- Li, Z.X. (2007). “A co-rotational formulation for 3D beam element using vectorial rotational variables”. In: *Computational Mechanics*, 39, 309-322.

- Li, Z.X. e Vu-Quoc (2010). “A mixed co-rotational 3d beam element formulation for arbitrarily large rotations”. In: *Advanced Steel Construction*, 6(2), 767-787.
- Lopez, S. (2006). “Changing the representation and improving stability in time-stepping analysis of structural non-linear dynamics”. In: *Nonlinear Dynamics*, 46, 337-348.
- Lopez, S. e La Sala, G. (2010). “A finite element approach to statical and dynamical analysis of geometrically nonlinear structures”. In: *Finite Elements in Analysis and Design*, 46, 1093-1105.
- Madeo, A. (2008). *The implicit corotational method: general theory and FEM implementation*, Tesi di Dottorato, Modellistica per l'Ingegneria, Università della Calabria, Cosenza.
- Makinen, J. (2007). “Total Lagrangian Reissner’s geometrically exact beam element without singularities”. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 70, 1009-1048.
- Makinen, J. (2001). “Critical Study of Newmark-scheme on manifold a finite rotations”. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, 817-828.
- Matias, W.T. e Bezerra, L.M. (2009). “Uma abordagem unificada da formulação corrotacional para elementos de treliça 2D, treliça 3D e viga 2D”. In: *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño em Ingeniería*, 25(2), 163-190.
- Mattiasson, K. (1981). “Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals”. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17, 145-153.
- Mattiasson, K. (1983). “On the corotational finite element formulation for large deformation problems”. Dr. Ing. Thesis, Department of Structural Mechanics, Chalmers University of Technology, Goteborg.

- Mattiasson, K. e Samuelsson, A. (1984). "Total and updated Lagrangian forms of the co-rotational finite element formulation in geometrically and materially nonlinear analysis". In: *C. Taylor, E. Hinton, D.R.J. Owen (Eds.), Numerical Methods for Nonlinear Problems II*, Pineridge Press, Swansea, 134-151.
- Mattiasson, K.; Bengston, A., . Samuelsson, A. (1986). "On the accuracy and efficiency of numerical algorithms for geometrically nonlinear structural analysis". In: *P.G. Bergan, K.J. Bathe, W. Wunderlich (Eds.), Finite Element Methods for Nonlinear Problems*, Springer-Verlag, Berlin, 3-23.
- Meek, J.L. e Tan, H.S. (1984). "Geometrically nonlinear analysis of space frames by an incremental iterative technique", In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 47, 261-282.
- Menin, R.C.G. (2006). *Aplicação da descrição cinemática corrotacional na análise não-linear geométrica de estruturas discretizadas por elementos finitos de treliças, vigas e cascas*, Tese de Doutorado em Estruturas de Construção Civil, Universidade de Brasília, Brasília.
- Monteiro, F.A.C. (2004). *Estudo de uma Formulação Corrotacional Geral: Aplicação a Pórticos Espaciais*, Dissertação de Mestrado, ITA, São José dos Campos / SP.
- Newmark, N.M. (1959). "A Method of Computation for Structural Dynamics". In: *Journal of Engineering Mechanics Division*, 85. No EM3.
- Nour-Omid, B. e Rankin, C.C. (1991). "Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors". In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 93, 353-384.
- Pacoste, C. e Eriksson, A., (1997). "Beam element in instability problems". In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 144, 163-197.
- Pacoste, C., (1998). "Co-rotational flat facet triangular elements for shell instability analyses". In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 156, 75-110.

- Papadrakakis, M. (1981). "Post-buckling analysis of spatial structures by vector iteration methods". In: *Computers & Structures*, 14, 393-402.
- Peng, X. e Crisfield, M.A., (1992). "A consistent co-rotational formulation for shells using the constant stress / constant moment triangle". In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35, 1829-1847.
- Rankin, C.C. e Brogan, F.A. (1986). "An element independent corotational procedure for the treatment of large rotations". In: *Journal Pressure Vessel Technology*, ASME, 108, 165-174.
- Rankin, C.C. e Nour-Omid, B. (1988). "The use of projectors to improve finite element performance". In: *Computers & Structures*, 30, 257-267.
- Rankin, C.C.; Brogan, F.A.; Loden, W.A; Cabiness, H. (1998). "*STAGS User Manual*". LMMS P032594, Version 3.0, January.
- Relvas, A. e Suleman, A. (2006). "Fluid–structure interaction modelling of nonlinear aeroelastic structures using the finite element corotational theory". In: *Journal of Fluids and Structures*, 22, 59-75.
- Relvas, A. e Suleman, A. (2007). "Application of the corotational structural kinematics and Euler flow to two-dimensional nonlinear aeroelasticity". In: *Computers & Structures*, 85, 1372-1381.
- Remseth S.N. (1979). "Nonlinear static and dynamic analysis of framed structures". In: *Computers & Structures*, 10, 879-897.
- Rodrigues, O. (1816). *De l'attraction des spheroids*, Correspondence sur l'École Impériale Polytechnique, Thesis for the Faculty of Science of the University of Paris, 3(3), 361-385.

- Schachter, M. e Reinhorn, A.M. (2011). “Dynamic Analysis of Three-Dimensional Frames with Material and Geometric Nonlinearities”. In: *Journal of Structural Engineering*, 137(2), 207-219.
- Simo, J.C. e Vu-Quoc, L. (1988). “On the dynamics in space of rods undergoing large motions-a geometrically exact approach”. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66, 125-161.
- Simo, J.C. e Vu-Quoc, L. (1986). “A Three Dimensional Finite Strain Rod Model. Part II: Computational Aspects”, In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58, 79-116.
- Souza, R.M. (2000). *Force-based finite element for large displacement inelastic analysis of frames*, Doctor of Philosophy Thesis, Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley.
- Spurrer, R.A. (1978). “A comment on singularity-free extraction of a quaternion from a direction cosine matrix”. In: *Journal Spacecrafts & Rockets*, 15, 255.
- Surana, K.S. e Sorem, R. (1989). “Geometrically non-linear formulation for three dimensional curved beam elements with large rotations”. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28, 43-73.
- Trindade, M.A. (1996). *Uma Introdução à Dinâmica de Sistemas de Multicorpos*, Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- Truesdell, C. e Noll, W. (1965). “The Nonlinear Field theories of Mechanics”. S. Flügge, *Handbuch der Physik*, Vol. III/3, Springer-Verlag.
- Tsai, M.H.; Zhou, Y.C. e Hsiao, K.M. (2011). “Investigation on steady state deformation and free vibration of a rotating inclined Euler beam” In: *International Journal of Mechanical Sciences*, 53, 1050-1068.

- Urthaler, Y. e Reddy, J.N. (2005). “A corotational finite element formulation for the analysis of planar beams” In: *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 21, 553-570.
- Wang, C.Y.; Wang, R.Z.; Chuang, C.C. e Wu , T.Y. (2006). “Nonlinear Dynamic Analysis of Reticulated Space Truss Structures”. In: *Journal of Mechanics*, 22(03), 199-212.
- Wempner, G.A., (1969), “Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells”. In: *International Journal of Solids and Structures*, 5, 117-153.
- Xue, Q. e Meek, J. L. (2001). “Dynamic response and instability of frame structures”. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, 5233-5242.
- Yaw, L.L. (2008). *Co-rotational meshfree formulation for large deformation inelastic analysis of two-dimensional structural systems*, Doctor of Philosophy Thesis, Civil and Environmental Engineering, University of California, Davis.

APÊNDICES

APÊNDICE A – IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Conforme o fluxograma apresentado na Figura 6.1, o algoritmo principal do programa *SIAE* é composto por oito módulos principais:

- **INPUT_NLG** e **INPUT_NLD**: são os módulos de entrada de dados para as análises estática e dinâmica não-lineares, respectivamente. Inicialmente são realizadas as leituras dos parâmetros que definem o modelo de elementos finitos adotado para o sistema estrutural. Em seguida são definidos os parâmetros que controlam a estratégia de solução não-linear. Na passagem por esses módulos, um conjunto de matrizes e vetores é pré-estabelecido para armazenar coordenadas nodais, conectividades dos elementos, propriedades dos materiais, forças nodais, etc.;
- **PRE_STRUCT**: é o módulo de pré-processamento responsável pela visualização da geometria e condições de contorno da estrutura. Esse módulo elabora o desenho esquemático da malha cobrindo o domínio do sistema estrutural a ser analisado, incluindo numeração de nós e elementos;
- **SFRAME_NLG**: é o módulo destinado a análise estática não-linear geométrica de pórticos espaciais. Nesse módulo, para cada incremento de carga, é resolvido o sistema de equações não-lineares definido na Equação (3.38);
- **SFRAME_NLD**: é o módulo responsável pela análise dinâmica não-linear geométrica de pórticos espaciais, onde é encontrada a resposta no tempo do sistema estrutural através da solução da equação de equilíbrio dinâmico não-linear;
- **OUTPUT_NLG** e **OUTPUT_NLD**: esses módulos realizam a impressão de relatórios dos resultados das análises estática e dinâmica efetuadas, respectivamente;
- **POS_STRUCT**: é o módulo de pós-processamento responsável pela visualização de deformadas da estrutura e saídas gráficas de trajetórias de equilíbrio e resposta no tempo dos sistemas estruturais analisados.

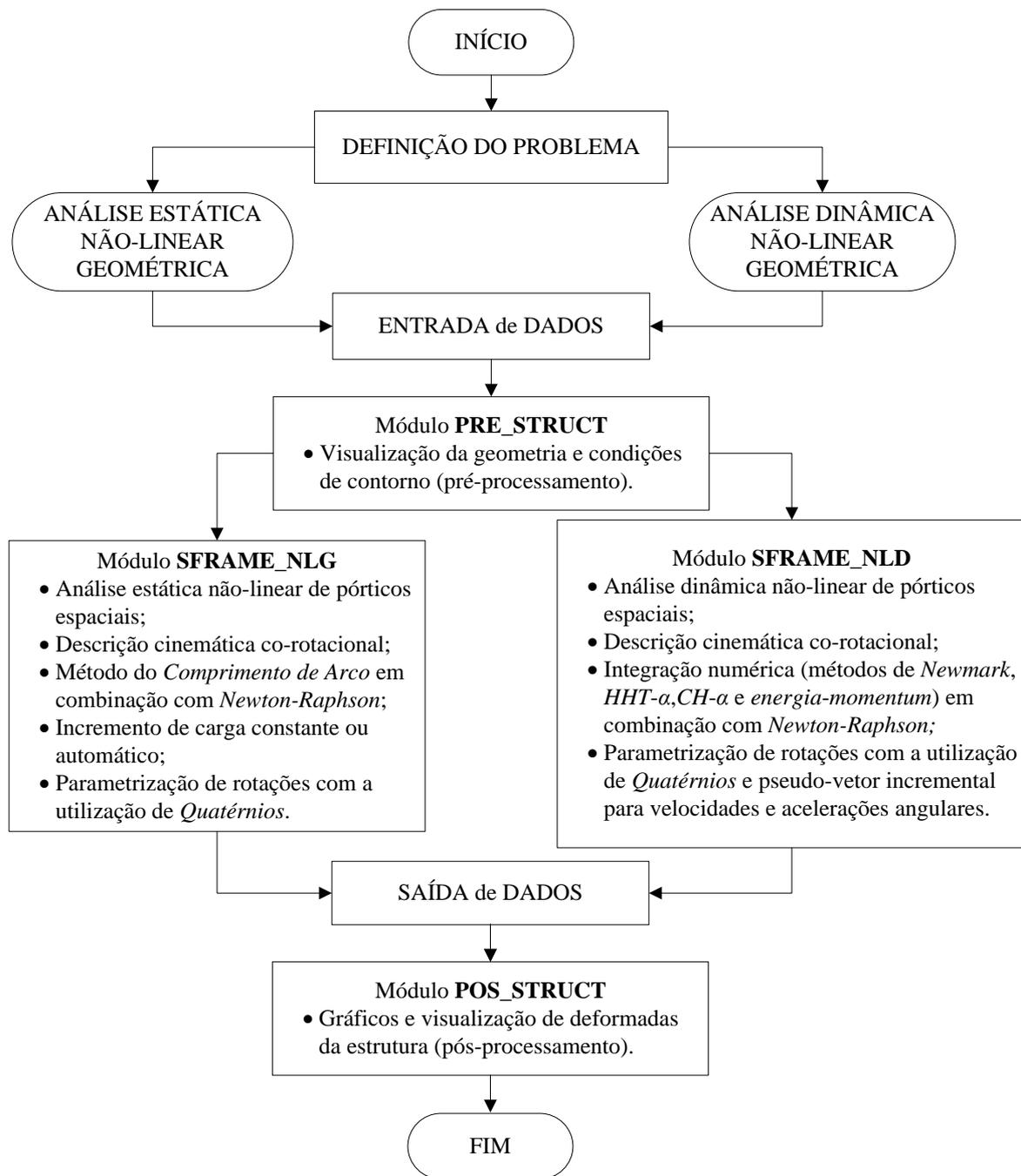


Figura A.1 – Fluxograma simplificado do programa SIAE.

As trajetórias de equilíbrio, para os problemas estáticos estudados nesse trabalho, são obtidas através do método do *comprimento de arco cilíndrico* em combinação com o método de *Newton-Raphson* completo, conforme o fluxograma apresentado na Figura A.2, o qual constitui a espinha dorsal do módulo de análise estática não-linear geométrica de pórticos espaciais *SFRAME_NLG*.

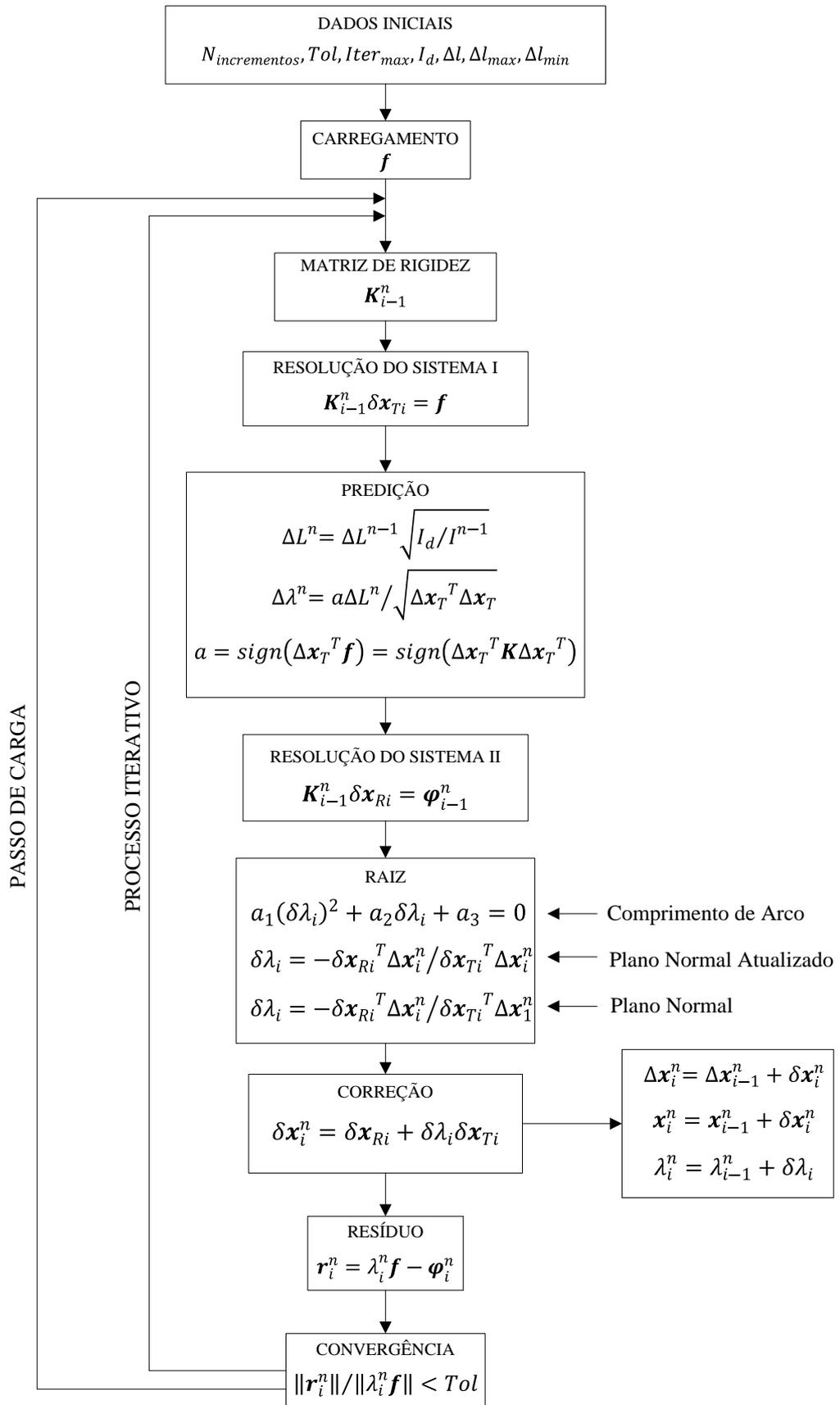


Figura A.2 – Algoritmo de resolução do sistema de equações não-lineares do módulo *SFRAME_NLG* (Menin, 2006).

APÊNDICE B – MATRIZ DE RIGIDEZ ELÁSTICA

A seguir, na Equação (A.1), é apresentada a matriz de rigidez elástica do elemento de pórtico espacial, baseada na teoria de *Euler-Bernoulli*.

Onde:

- A é a área da seção transversal do elemento;
- E é o módulo de elasticidade;
- G é o módulo de elasticidade transversal;
- I_y e I_z são os momentos de inércia da seção transversal em relação aos eixos y e z , respectivamente;
- J_x , é o momento polar de inércia da seção transversal.

APÊNDICE C – ARQUIVOS DE ANÁLISE DO ANSYS

EXEMPLO 13

```

!PRE-PROCESSADOR
/PREP7
/TITLE, FRAMED DOME
ET, 1, BEAM188
KEYOPT,1,1,1
KEYOPT,1,2,1
KEYOPT,1,3,0
KEYOPT,1,4,1
KEYOPT,1,6,0
KEYOPT,1,7,0
KEYOPT,1,8,0
KEYOPT,1,9,0
KEYOPT,1,10,0
KEYOPT,1,11,0
KEYOPT,1,12,0          ! Tipo de Elemento
SECTYPE, 1, BEAM, RECT, , 0
SECOFFSET, CENT
SECDATA,1.22,0.70,0,0,0,0,0,0,0
NLGEOM,ON
R, 1, A, Izz, Iyy, B, H, 0, 0, Ixx ! Área, Iz, Iy, base, altura e Ix
EX, 1, 20690.0e+06          ! Módulo de Elasticidade
MP, PRXY, 1, 0.172         ! Coeficiente de Poisson
MP, DENS, 1, 2400.0        ! Densidade

! Coordenadas Nodais
N      ,      1      ,      24.38      ,      0      ,      0
N      ,      2      ,      12.19      ,      21.115      ,      0
N      ,      3      ,      -12.19      ,      21.115      ,      0
N      ,      4      ,      -24.38      ,      0      ,      0
N      ,      5      ,      -12.19      ,      -21.115      ,      0
N      ,      6      ,      12.19      ,      -21.115      ,      0
N      ,      7      ,      18.475      ,      0      ,      2.275
N      ,      8      ,      9.2375      ,      16      ,      2.275
N      ,      9      ,      -9.2375      ,      16      ,      2.275
N      ,      10      ,      -18.475      ,      0      ,      2.275
N      ,      11      ,      -9.2375      ,      16      ,      2.275
N      ,      12      ,      9.2375      ,      -16      ,      2.275
N      ,      13      ,      12.57      ,      0      ,      4.55
N      ,      14      ,      9.4275      ,      5.4425      ,      4.55
N      ,      15      ,      6.285      ,      10.885      ,      4.55
N      ,      16      ,      0      ,      10.885      ,      4.55
N      ,      17      ,      -6.285      ,      10.885      ,      4.55
N      ,      18      ,      -9.4275      ,      5.4425      ,      4.55
N      ,      19      ,      -12.57      ,      0      ,      4.55
N      ,      20      ,      -9.4275      ,      -5.4425      ,      4.55
N      ,      21      ,      -6.285      ,      -10.885      ,      4.55
N      ,      22      ,      0      ,      -10.885      ,      4.55
N      ,      23      ,      6.285      ,      -10.885      ,      4.55
N      ,      24      ,      9.4275      ,      -5.4425      ,      4.55
N      ,      25      ,      6.285      ,      0      ,      5.325
N      ,      26      ,      3.1425      ,      5.4425      ,      5.325
N      ,      27      ,      -3.1425      ,      5.4425      ,      5.325
N      ,      28      ,      -6.285      ,      0      ,      5.325

```

```

N      ,      29      ,      -3.1425,      -5.4425,      5.325
N      ,      30      ,      3.1425 ,      -5.4425,      5.325
N      ,      31      ,      0      ,      0      ,      6.1
N PLOT      ! Plotar os nós

```

```
! Elementos
```

```

E      ,      1      ,      7
E      ,      2      ,      8
E      ,      3      ,      9
E      ,      4      ,      10
E      ,      5      ,      11
E      ,      6      ,      12
E      ,      7      ,      13
E      ,      8      ,      15
E      ,      9      ,      17
E      ,      10     ,      19
E      ,      11     ,      21
E      ,      12     ,      23
E      ,      13     ,      14
E      ,      14     ,      15
E      ,      15     ,      16
E      ,      16     ,      17
E      ,      17     ,      18
E      ,      18     ,      19
E      ,      19     ,      20
E      ,      20     ,      21
E      ,      21     ,      22
E      ,      22     ,      23
E      ,      23     ,      24
E      ,      24     ,      13
E      ,      13     ,      25
E      ,      15     ,      26
E      ,      17     ,      27
E      ,      19     ,      28
E      ,      21     ,      29
E      ,      23     ,      30
E      ,      25     ,      31
E      ,      26     ,      31
E      ,      27     ,      31
E      ,      28     ,      31
E      ,      29     ,      31
E      ,      30     ,      31

```

```

E PLOT      ! Plotar os elementos e número dos nós
/PNUM,NODE,1
/PNUM,ELEM,0
/REPLOT

```

```

D, 1, ALL, 0      ! Engastamento do nó 1
D, 2, ALL, 0      ! Engastamento do nó 2
D, 3, ALL, 0      ! Engastamento do nó 3
D, 4, ALL, 0      ! Engastamento do nó 4
D, 5, ALL, 0      ! Engastamento do nó 5
D, 6, ALL, 0      ! Engastamento do nó 6
/PBC, ALL, 1      ! Mostra as condições de contorno

```

```

!*
FINISH
/SOL
!*

```

```

ANTYPE,4          ! Análise Transiente
!*
TRNOPT,FULL
LUMPM,0
!*
*DEL,_FNCNAME
*DEL,_FNCMTID
*DEL,_FNCCSYS
*SET,_FNCNAME,'Carga01'
*SET,_FNCCSYS,0
! /INPUT,funcao01.func,,1 ! Definição da função de carregamento
*DIM,%_FNCNAME%,TABLE,6,6,1,,,,,%_FNCCSYS%
!
! Begin of equation: -34400000*sin(41.89*{TIME})
*SET,%_FNCNAME%(0,0,1), 0.0, -999
*SET,%_FNCNAME%(2,0,1), 0.0
*SET,%_FNCNAME%(3,0,1), 0.0
*SET,%_FNCNAME%(4,0,1), 0.0
*SET,%_FNCNAME%(5,0,1), 0.0
*SET,%_FNCNAME%(6,0,1), 0.0
*SET,%_FNCNAME%(0,1,1), 1.0, -1, 0, 41.89, 0, 0, 1
*SET,%_FNCNAME%(0,2,1), 0.0, -2, 0, 1, -1, 3, 1
*SET,%_FNCNAME%(0,3,1), 0, -1, 9, 1, -2, 0, 0
*SET,%_FNCNAME%(0,4,1), 0.0, -2, 0, -34400000, 0, 0, -1
*SET,%_FNCNAME%(0,5,1), 0.0, -3, 0, 1, -2, 3, -1
*SET,%_FNCNAME%(0,6,1), 0.0, 99, 0, 1, -3, 0, 0
! End of equation: -34400000*sin(41.89*{TIME})
!-->
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,31      ! Aplicação do carregamento no nó
!*
!*
/GO
F,P51X,FZ, %CARGA01%
NSUBST,600,0,0 ! Número de passos de carga
OUTRES,ERASE
OUTRES,ALL,ALL
ALPHAD,3.40    ! Coeficiente de amortecimento
BETAD,0.0
TIME,0.5      ! Tempo de Análise
TRNOPT,,,,,HHT ! Método de integração
TINTP,0.01
/STATUS,SOLU
SOLVE

/POST26       ! Pós-Processamento - Histórico de Deslocamentos
/UI,COLL,1
NUMVAR,200
SOLU,191,NCMIT
STORE,MERGE
FILLDATA,191,,,,1,1
REALVAR,191,191
!*
NSOL,2,31,U,Z, UZ_2 ! Nó 31 na Direção z
STORE,MERGE
XVAR,1
PLVAR,2,

```

EXEMPLO 14-A

```

!PRE-PROCESSADOR
/PREP7
/TITLE, HEXAGONAL FRAME
ET, 1, BEAM188
KEYOPT,1,1,1
KEYOPT,1,2,1
KEYOPT,1,3,0
KEYOPT,1,4,1
KEYOPT,1,6,0
KEYOPT,1,7,0
KEYOPT,1,8,0
KEYOPT,1,9,0
KEYOPT,1,10,0
KEYOPT,1,11,0
KEYOPT,1,12,0          ! Tipo de Elemento
SECTYPE, 1, BEAM, RECT, , 0
SECOFFSET, CENT
SECDATA,0.703,0.703,0,0,0,0,0,0,0
NLGEOM,ON
EX, 1, 439800          ! Módulo de Elasticidade
MP, PRXY, 1, 0.383    ! Coeficiente de Poisson
MP, DENS, 1, 0.097551 ! Densidade

! Coordenadas Nodais
N   , 1   , 0.000 , 0.000 , 1.750
N   , 2   , -12.000, 0.000 , 0.875
N   , 3   , -6.000 , -10.392, 0.875
N   , 4   , 6.000  , -10.392, 0.875
N   , 5   , 12.000 , 0.000  , 0.875
N   , 6   , 6.000  , 10.392 , 0.875
N   , 7   , -6.000 , 10.392 , 0.875
N   , 8   , -24.000, 0.000  , 0.000
N   , 9   , -18.000, -10.392, 0.000
N   , 10  , -12.000, -20.785, 0.000
N   , 11  , 0.000  , -20.785, 0.000
N   , 12  , 12.000 , -20.785, 0.000
N   , 13  , 18.000 , -10.392, 0.000
N   , 14  , 24.000 , 0.000  , 0.000
N   , 15  , 18.000 , 10.392 , 0.000
N   , 16  , 12.000 , 20.785 , 0.000
N   , 17  , 0.000  , 20.785 , 0.000
N   , 18  , -12.000, 20.785 , 0.000
N   , 19  , -18.000, 10.392 , 0.000
NPLLOT          ! Plotar os nós

! Elementos
E   , 1   , 2
E   , 1   , 3
E   , 1   , 4
E   , 1   , 5
E   , 1   , 6
E   , 1   , 7
E   , 2   , 8
E   , 3   , 10
E   , 4   , 12
E   , 5   , 14
E   , 6   , 16

```

```

E      ,      7      ,      18
E      ,      8      ,      9
E      ,      9      ,      10
E      ,      10     ,      11
E      ,      11     ,      12
E      ,      12     ,      13
E      ,      13     ,      14
E      ,      14     ,      15
E      ,      15     ,      16
E      ,      16     ,      17
E      ,      17     ,      18
E      ,      18     ,      19
E      ,      19     ,      8

```

```

EPlot      ! Plotar os elementos e número dos nós
/PLNUM,NODE,1
/PLNUM,ELEM,0
/REPlot

```

```

D, 8, UX,0,,,,UY,Uz      ! Determinação dos apoios nodais
D,10, UX,0,,,,UY,Uz
D,12, UX,0,,,,UY,Uz
D,14, UX,0,,,,UY,Uz
D,16, UX,0,,,,UY,Uz
D,18, UX,0,,,,UY,Uz

```

```

/PBC, ALL, 1      ! Mostra as condições de contorno
!*
!*

```

```

FINISH
/SOL

```

```

!*
ANTYPE,4      ! Análise Transiente
!*

```

```

TRNOPT,FULL
LUMPM,0
!*

```

```

*DEL,_FNCNAME

```

```

*DEL,_FNCMTID

```

```

*DEL,_FNCCSYS

```

```

*SET,_FNCNAME,'Carga01'

```

```

*SET,_FNCCSYS,0

```

```

!/INPUT,funcao01.func,,,1 ! Definição da função de carregamento

```

```

*DIM,%_FNCNAME%,TABLE,6,6,1,,,,_%FNCCSYS%

```

```

!
```

```

! Begin of equation: -27.7*sin(6.283*{TIME})

```

```

*SET,%_FNCNAME%(0,0,1), 0.0, -999

```

```

*SET,%_FNCNAME%(2,0,1), 0.0

```

```

*SET,%_FNCNAME%(3,0,1), 0.0

```

```

*SET,%_FNCNAME%(4,0,1), 0.0

```

```

*SET,%_FNCNAME%(5,0,1), 0.0

```

```

*SET,%_FNCNAME%(6,0,1), 0.0

```

```

*SET,%_FNCNAME%(0,1,1), 1.0, -1, 0, 6.283, 0, 0, 1

```

```

*SET,%_FNCNAME%(0,2,1), 0.0, -2, 0, 1, -1, 3, 1

```

```

*SET,%_FNCNAME%(0,3,1), 0, -1, 9, 1, -2, 0, 0

```

```

*SET,%_FNCNAME%(0,4,1), 0.0, -2, 0, -27.7, 0, 0, -1

```

```

*SET,%_FNCNAME%(0,5,1), 0.0, -3, 0, 1, -2, 3, -1

```

```

*SET,%_FNCNAME%(0,6,1), 0.0, 99, 0, 1, -3, 0, 0

```

```

! End of equation: -27.7*sin(6.283*{TIME})

```

```

!-->

```

```

FLST,2,1,1,ORDE,1

```

```

FITEM,2,1          ! Aplicação do carregamento no nó
!*
!*
/GO
F,P51X,FZ, %CARGA01%
NSUBST,600,0,0    ! Número de passos de carga
OUTRES,ERASE
OUTRES,ALL,ALL
ALPHAD,0.772      ! Coeficiente de amortecimento
BETAD,0.00
TIME,2.5          ! Tempo de Análise
TRNOPT,,,,,HHT    ! Método de integração
TINTP,0.01
/STATUS,SOLU
SOLVE

/POST26           ! Pós-Processamento - Histórico de Deslocamentos
/UI,COLL,1
NUMVAR,200
SOLU,191,NCMIT
STORE,MERGE
FILLDATA,191,,,,1,1
REALVAR,191,191
!*
NSOL,2,1,U,Z, UZ_2 ! Nó 1 na Direção z
STORE,MERGE
XVAR,1
PLVAR,2,

```

EXEMPLO 14-B

```

!PRE-PROCESSADOR
/PREP7
/TITLE, HEXAGONAL FRAME
ET, 1, BEAM188
KEYOPT,1,1,1
KEYOPT,1,2,1
KEYOPT,1,3,0
KEYOPT,1,4,1
KEYOPT,1,6,0
KEYOPT,1,7,0
KEYOPT,1,8,0
KEYOPT,1,9,0
KEYOPT,1,10,0
KEYOPT,1,11,0
KEYOPT,1,12,0    ! Tipo de Elemento
SECTYPE, 1, BEAM, RECT, , 0
SECOFFSET, CENT
SECDATA,0.703,0.703,0,0,0,0,0,0,0
NLGEOM,ON
EX, 1, 439800     ! Módulo de Elasticidade
MP, PRXY, 1, 0.383 ! Coeficiente de Poisson
MP, DENS, 1, 0.097551 ! Densidade

! Coordenadas Nodais
N      ,      1      ,      0.000      ,      0.000      ,      1.750
N      ,      2      ,     -12.000,      0.000      ,      0.875
N      ,      3      ,     -6.000      ,     -10.392,      0.875
N      ,      4      ,      6.000      ,     -10.392,      0.875

```

N	,	5	,	12.000	,	0.000	,	0.875
N	,	6	,	6.000	,	10.392	,	0.875
N	,	7	,	-6.000	,	10.392	,	0.875
N	,	8	,	-24.000,	0.000	,	0.000	
N	,	9	,	-18.000,	-10.392,	0.000		
N	,	10	,	-12.000,	-20.785,	0.000		
N	,	11	,	0.000	-20.785,	0.000		
N	,	12	,	12.000	-20.785,	0.000		
N	,	13	,	18.000	-10.392,	0.000		
N	,	14	,	24.000	0.000	,	0.000	
N	,	15	,	18.000	10.392	,	0.000	
N	,	16	,	12.000	20.785	,	0.000	
N	,	17	,	0.000	20.785	,	0.000	
N	,	18	,	-12.000,	20.785	,	0.000	
N	,	19	,	-18.000,	10.392	,	0.000	

NPLOT ! Plotar os nós

! Elementos

E	,	1	,	2
E	,	1	,	3
E	,	1	,	4
E	,	1	,	5
E	,	1	,	6
E	,	1	,	7
E	,	2	,	8
E	,	3	,	10
E	,	4	,	12
E	,	5	,	14
E	,	6	,	16
E	,	7	,	18
E	,	8	,	9
E	,	9	,	10
E	,	10	,	11
E	,	11	,	12
E	,	12	,	13
E	,	13	,	14
E	,	14	,	15
E	,	15	,	16
E	,	16	,	17
E	,	17	,	18
E	,	18	,	19
E	,	19	,	8

EPLOT ! Plotar os elementos e número dos nós

/PNUM,NODE,1
/PNUM,ELEM,0
/REPLOT

D, 8, UX,0,,UY,Uz ! Determinação dos apoios nodais

D,10, UX,0,,UY,Uz
D,12, UX,0,,UY,Uz
D,14, UX,0,,UY,Uz
D,16, UX,0,,UY,Uz
D,18, UX,0,,UY,Uz

/PBC, ALL, 1 ! Mostra as condições de contorno

!*
!*

FINISH

/SOL

!*

```

ANTYPE,4          ! Análise Transiente
!*
TRNOPT,FULL
LUMPM,0
!*
*DEL,_FNCNAME
*DEL,_FNCMTID
*DEL,_FNCCSYS
*SET,_FNCNAME,'Carga01'
*SET,_FNCCSYS,0
! /INPUT,funcao01.func,,1 ! Definição da função de carregamento
*DIM,%_FNCNAME%,TABLE,6,6,1,,,,,%_FNCCSYS%
!
! Begin of equation: -55.4*sin(6.283*{TIME})
*SET,%_FNCNAME%(0,0,1), 0.0, -999
*SET,%_FNCNAME%(2,0,1), 0.0
*SET,%_FNCNAME%(3,0,1), 0.0
*SET,%_FNCNAME%(4,0,1), 0.0
*SET,%_FNCNAME%(5,0,1), 0.0
*SET,%_FNCNAME%(6,0,1), 0.0
*SET,%_FNCNAME%(0,1,1), 1.0, -1, 0, 6.283, 0, 0, 1
*SET,%_FNCNAME%(0,2,1), 0.0, -2, 0, 1, -1, 3, 1
*SET,%_FNCNAME%(0,3,1), 0, -1, 9, 1, -2, 0, 0
*SET,%_FNCNAME%(0,4,1), 0.0, -2, 0, -55.4, 0, 0, -1
*SET,%_FNCNAME%(0,5,1), 0.0, -3, 0, 1, -2, 3, -1
*SET,%_FNCNAME%(0,6,1), 0.0, 99, 0, 1, -3, 0, 0
! End of equation: -55.4*sin(6.283*{TIME})
!-->
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,1          ! Aplicação do carregamento no nó
!*
!*
/GO
F,P51X,FZ, %CARGA01%
NSUBST,600,0,0     ! Número de passos de carga
OUTRES,ERASE
OUTRES,ALL,ALL
ALPHAD,0.772       ! Coeficiente de amortecimento
BETAD,0.00
TIME,2.5           ! Tempo de Análise
TRNOPT,,,,,HHT    ! Método de integração
TINTP,0.01
/STATUS,SOLU
SOLVE

/POST26           ! Pós-Processamento - Histórico de Deslocamentos
/UI,COLL,1
NUMVAR,200
SOLU,191,NCMIT
STORE,MERGE
FILLDATA,191,,,,1,1
REALVAR,191,191
!*
NSOL,2,1,U,Z, UZ_2 ! Nó 1 na Direção z
STORE,MERGE
XVAR,1
PLVAR,2,

```

EXEMPLO 14-C

```
!PRE-PROCESSADOR
/PREP7
/TITLE, HEXAGONAL FRAME
ET, 1, BEAM188
KEYOPT,1,1,1
KEYOPT,1,2,1
KEYOPT,1,3,0
KEYOPT,1,4,1
KEYOPT,1,6,0
KEYOPT,1,7,0
KEYOPT,1,8,0
KEYOPT,1,9,0
KEYOPT,1,10,0
KEYOPT,1,11,0
KEYOPT,1,12,0          ! Tipo de Elemento
SECTYPE, 1, BEAM, RECT, , 0
SECOFFSET, CENT
SECDATA,0.703,0.703,0,0,0,0,0,0,0
NLGEOM,ON
EX, 1, 439800          ! Módulo de Elasticidade
MP, PRXY, 1, 0.383    ! Coeficiente de Poisson
MP, DENS, 1, 0.097551 ! Densidade

! Coordenadas Nodais
N      ,      1      ,      0.000      ,      0.000      ,      1.750
N      ,      2      ,     -12.000,      0.000      ,      0.875
N      ,      3      ,     -6.000      ,     -10.392,      0.875
N      ,      4      ,      6.000      ,     -10.392,      0.875
N      ,      5      ,     12.000      ,      0.000      ,      0.875
N      ,      6      ,      6.000      ,     10.392      ,      0.875
N      ,      7      ,     -6.000      ,     10.392      ,      0.875
N      ,      8      ,    -24.000,      0.000      ,      0.000
N      ,      9      ,    -18.000,     -10.392,      0.000
N      ,     10      ,    -12.000,     -20.785,      0.000
N      ,     11      ,      0.000      ,     -20.785,      0.000
N      ,     12      ,     12.000      ,     -20.785,      0.000
N      ,     13      ,     18.000      ,     -10.392,      0.000
N      ,     14      ,     24.000      ,      0.000      ,      0.000
N      ,     15      ,     18.000      ,     10.392      ,      0.000
N      ,     16      ,     12.000      ,     20.785      ,      0.000
N      ,     17      ,      0.000      ,     20.785      ,      0.000
N      ,     18      ,    -12.000,     20.785      ,      0.000
N      ,     19      ,    -18.000,     10.392      ,      0.000
NPLLOT          ! Plotar os nós

! Elementos
E      ,      1      ,      2
E      ,      1      ,      3
E      ,      1      ,      4
E      ,      1      ,      5
E      ,      1      ,      6
E      ,      1      ,      7
E      ,      2      ,      8
E      ,      3      ,     10
E      ,      4      ,     12
E      ,      5      ,     14
E      ,      6      ,     16
E      ,      7      ,     18
E      ,      8      ,      9
```

```

E      ,      9      ,      10
E      ,      10     ,      11
E      ,      11     ,      12
E      ,      12     ,      13
E      ,      13     ,      14
E      ,      14     ,      15
E      ,      15     ,      16
E      ,      16     ,      17
E      ,      17     ,      18
E      ,      18     ,      19
E      ,      19     ,      8

```

```

EPLLOT          ! Plotar os elementos e número dos nós
/PNUM,NODE,1
/PNUM,ELEM,0
/REPLOT

```

```

D, 8, UX,0,,UY,Uz      ! Determinação dos apoios nodais
D,10, UX,0,,UY,Uz
D,12, UX,0,,UY,Uz
D,14, UX,0,,UY,Uz
D,16, UX,0,,UY,Uz
D,18, UX,0,,UY,Uz

```

```

/PBC, ALL, 1          ! Mostra as condições de contorno

```

```

!*

```

```

!*

```

```

FINISH

```

```

/SOL

```

```

!*

```

```

ANTYPE,4          ! Análise Transiente

```

```

!*

```

```

TRNOPT,FULL

```

```

LUMPM,0

```

```

!*

```

```

*DEL,_FNCNAME

```

```

*DEL,_FNCMTID

```

```

*DEL,_FNCCSYS

```

```

*SET,_FNCNAME,'Carga01'

```

```

*SET,_FNCCSYS,0

```

```

!/INPUT,funcao01.func,,1 ! Definição da função de carregamento

```

```

*DIM,%_FNCNAME%,TABLE,6,6,1,,,%_FNCCSYS%

```

```

!

```

```

! Begin of equation: -83.1*sin(6.283*{TIME})

```

```

*SET,%_FNCNAME%(0,0,1), 0.0, -999

```

```

*SET,%_FNCNAME%(2,0,1), 0.0

```

```

*SET,%_FNCNAME%(3,0,1), 0.0

```

```

*SET,%_FNCNAME%(4,0,1), 0.0

```

```

*SET,%_FNCNAME%(5,0,1), 0.0

```

```

*SET,%_FNCNAME%(6,0,1), 0.0

```

```

*SET,%_FNCNAME%(0,1,1), 1.0, -1, 0, 6.283, 0, 0, 1

```

```

*SET,%_FNCNAME%(0,2,1), 0.0, -2, 0, 1, -1, 3, 1

```

```

*SET,%_FNCNAME%(0,3,1), 0, -1, 9, 1, -2, 0, 0

```

```

*SET,%_FNCNAME%(0,4,1), 0.0, -2, 0, -83.1, 0, 0, -1

```

```

*SET,%_FNCNAME%(0,5,1), 0.0, -3, 0, 1, -2, 3, -1

```

```

*SET,%_FNCNAME%(0,6,1), 0.0, 99, 0, 1, -3, 0, 0

```

```

! End of equation: -83.1*sin(6.283*{TIME})

```

```

!-->

```

```

FLST,2,1,1,ORDE,1

```

```

FITEM,2,1          ! Aplicação do carregamento no nó

```

```

!*

```

```

!*
/GO
F,P51X,FZ, %CARGA01%
NSUBST,600,0,0      ! Número de passos de carga
OUTRES,ERASE
OUTRES,ALL,ALL
ALPHAD,0.772      ! Coeficiente de amortecimento
BETAD,0.000
TIME,2.5          ! Tempo de Análise
TRNOPT,,,,,HHT    ! Método de integração
TINTP,0.01
/STATUS,SOLU
SOLVE

/POST26          ! Pós-Processamento - Histórico de Deslocamentos
/UI,COLL,1
NUMVAR,200
SOLU,191,NCMIT
STORE,MERGE
FILLDATA,191,,,,1,1
REALVAR,191,191
!*
NSOL,2,1,U,Z, UZ_2    ! Nó 1 na Direção z
STORE,MERGE
XVAR,1
PLVAR,2,

```

EXEMPLO 14-D

```

!PRE-PROCESSADOR
/PREP7
/TITLE, HEXAGONAL FRAME
ET, 1, BEAM188
KEYOPT,1,1,1
KEYOPT,1,2,1
KEYOPT,1,3,0
KEYOPT,1,4,1
KEYOPT,1,6,0
KEYOPT,1,7,0
KEYOPT,1,8,0
KEYOPT,1,9,0
KEYOPT,1,10,0
KEYOPT,1,11,0
KEYOPT,1,12,0      ! Tipo de Elemento
SECTYPE, 1, BEAM, RECT, , 0
SECOFFSET, CENT
SECDATA,0.703,0.703,0,0,0,0,0,0,0
NLGEOM,ON
EX, 1, 439800      ! Módulo de Elasticidade
MP, PRXY, 1, 0.383      ! Coeficiente de Poisson
MP, DENS, 1, 0.097551    ! Densidade

! Coordenadas Nodais
N      ,      1      ,      0.000      ,      0.000      ,      1.750
N      ,      2      ,     -12.000,      0.000      ,      0.875
N      ,      3      ,     -6.000  ,     -10.392,      0.875
N      ,      4      ,      6.000  ,     -10.392,      0.875
N      ,      5      ,     12.000 ,      0.000  ,      0.875
N      ,      6      ,      6.000  ,     10.392 ,      0.875

```

N	,	7	,	-6.000	,	10.392	,	0.875
N	,	8	,	-24.000,		0.000	,	0.000
N	,	9	,	-18.000,		-10.392,		0.000
N	,	10	,	-12.000,		-20.785,		0.000
N	,	11	,	0.000	,	-20.785,		0.000
N	,	12	,	12.000	,	-20.785,		0.000
N	,	13	,	18.000	,	-10.392,		0.000
N	,	14	,	24.000	,	0.000	,	0.000
N	,	15	,	18.000	,	10.392	,	0.000
N	,	16	,	12.000	,	20.785	,	0.000
N	,	17	,	0.000	,	20.785	,	0.000
N	,	18	,	-12.000,		20.785	,	0.000
N	,	19	,	-18.000,		10.392	,	0.000

NPLOT ! Plotar os nós

! Elementos

E	,	1	,	2
E	,	1	,	3
E	,	1	,	4
E	,	1	,	5
E	,	1	,	6
E	,	1	,	7
E	,	2	,	8
E	,	3	,	10
E	,	4	,	12
E	,	5	,	14
E	,	6	,	16
E	,	7	,	18
E	,	8	,	9
E	,	9	,	10
E	,	10	,	11
E	,	11	,	12
E	,	12	,	13
E	,	13	,	14
E	,	14	,	15
E	,	15	,	16
E	,	16	,	17
E	,	17	,	18
E	,	18	,	19
E	,	19	,	8

EPLOT ! Plotar os elementos e número dos nós
/PNUM,NODE,1
/PNUM,ELEM,0
/REPLOT

D, 8, UX,0,,UY,Uz ! Determinação dos apoios nodais
D,10, UX,0,,UY,Uz
D,12, UX,0,,UY,Uz
D,14, UX,0,,UY,Uz
D,16, UX,0,,UY,Uz
D,18, UX,0,,UY,Uz

/PBC, ALL, 1 ! Mostra as condições de contorno
!*
!*

FINISH
/SOL
!*

ANTYPE,4 ! Análise Transiente
!*

```

TRNOPT,FULL
LUMPM,0
!*
*DEL,_FNCNAME
*DEL,_FNCMTID
*DEL,_FNCCSYS
*SET,_FNCNAME,'Carga01'
*SET,_FNCCSYS,0
!/INPUT,funcao01.func,,,1 ! Definição da função de carregamento
*DIM,%_FNCNAME%,TABLE,6,6,1,,,,,%_FNCCSYS%
!
! Begin of equation: -110.8*sin(6.283*{TIME})
*SET,%_FNCNAME%(0,0,1), 0.0, -999
*SET,%_FNCNAME%(2,0,1), 0.0
*SET,%_FNCNAME%(3,0,1), 0.0
*SET,%_FNCNAME%(4,0,1), 0.0
*SET,%_FNCNAME%(5,0,1), 0.0
*SET,%_FNCNAME%(6,0,1), 0.0
*SET,%_FNCNAME%(0,1,1), 1.0, -1, 0, 6.283, 0, 0, 1
*SET,%_FNCNAME%(0,2,1), 0.0, -2, 0, 1, -1, 3, 1
*SET,%_FNCNAME%(0,3,1), 0, -1, 9, 1, -2, 0, 0
*SET,%_FNCNAME%(0,4,1), 0.0, -2, 0, -110.8, 0, 0, -1
*SET,%_FNCNAME%(0,5,1), 0.0, -3, 0, 1, -2, 3, -1
*SET,%_FNCNAME%(0,6,1), 0.0, 99, 0, 1, -3, 0, 0
! End of equation: -110.8*sin(6.283*{TIME})
!-->
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,1 ! Aplicação do carregamento no nó
!*
!*
/GO
F,P51X,FZ, %CARGA01%
NSUBST,600,0,0 ! Número de passos de carga
OUTRES,ERASE
OUTRES,ALL,ALL
ALPHAD,0.772 ! Coeficiente de amortecimento
BETAD,0.00
TIME,2.5 ! Tempo de Análise
TRNOPT,,,,,HHT ! Método de integração
TINTP,0.01
/STATUS,SOLU
SOLVE

/POST26 ! Pós-Processamento - Histórico de Deslocamentos
/UI,COLL,1
NUMVAR,200
SOLU,191,NCMIT
STORE,MERGE
FILLDATA,191,,,,1,1
REALVAR,191,191
!*
NSOL,2,1,U,Z, UZ_2 ! Nó 1 na Direção z
STORE,MERGE
XVAR,1
PLVAR,2,

```

EXEMPLO 15-A

```

!PRE-PROCESSADOR
/PREP7
/TITLE, GEODESIC DOME
ET, 1, BEAM188
KEYOPT,1,1,1
KEYOPT,1,2,1
KEYOPT,1,3,0
KEYOPT,1,4,1
KEYOPT,1,6,0
KEYOPT,1,7,0
KEYOPT,1,8,0
KEYOPT,1,9,0
KEYOPT,1,10,0
KEYOPT,1,11,0
KEYOPT,1,12,0          ! Tipo de Elemento
SECTYPE, 1, BEAM, RECT, , 0
SECOFFSET, CENT
SECDATA,2.99,1.06,0,0,0,0,0,0,0
NLGEOM,ON
EX, 1, 3.03e+05        ! Módulo de Elasticidade
MP, PRXY, 1, 0.3823    ! Coeficiente de Poisson
MP, DENS, 1, 7800.0e-06 ! Densidade

! Coordenadas Nodais
N      ,      1      ,      0.000 ,      0.000 ,      8.220
N      ,      2      ,     -12.500,      0.000 ,      7.220
N      ,      3      ,     -6.250 ,     -10.825,      7.220
N      ,      4      ,      6.250 ,     -10.825,      7.220
N      ,      5      ,     12.500 ,      0.000 ,      7.220
N      ,      6      ,      6.250 ,     10.825 ,      7.220
N      ,      7      ,     -6.250 ,     10.825 ,      7.220
N      ,      8      ,    -25.000,      0.000 ,      6.220
N      ,      9      ,    -18.750,     -10.825,      6.220
N      ,     10      ,    -12.500,     -21.650,      6.220
N      ,     11      ,      0.000 ,     -21.650,      6.220
N      ,     12      ,     12.500 ,     -21.650,      6.220
N      ,     13      ,     18.750 ,     -10.825,      6.220
N      ,     14      ,     25.000 ,      0.000 ,      6.220
N      ,     15      ,     18.750 ,     10.825 ,      6.220
N      ,     16      ,     12.500 ,     21.650 ,      6.220
N      ,     17      ,      0.000 ,     21.650 ,      6.220
N      ,     18      ,    -12.500,     21.650 ,      6.220
N      ,     19      ,    -18.750,     10.825 ,      6.220
N      ,     20      ,    -34.150,     -12.500,      3.110
N      ,     21      ,    -27.900,     -23.325,      3.110
N      ,     22      ,     -6.250 ,     -35.824,      3.110
N      ,     23      ,      6.250 ,     -35.824,      3.110
N      ,     24      ,     27.900 ,     -23.325,      3.110
N      ,     25      ,     34.150 ,     -12.500,      3.110
N      ,     26      ,     34.150 ,     12.500 ,      3.110
N      ,     27      ,     27.900 ,     23.325 ,      3.110
N      ,     28      ,      6.250 ,     35.824 ,      3.110
N      ,     29      ,     -6.250 ,     35.824 ,      3.110
N      ,     30      ,    -27.900,     23.325 ,      3.110
N      ,     31      ,    -34.150,     12.500 ,      3.110
N      ,     32      ,    -43.300,     -24.999,      0.000
N      ,     33      ,      0.000 ,     -49.999,      0.000
N      ,     34      ,     43.300 ,     -24.999,      0.000

```

```

N      ,      35      ,      43.300 ,      24.999 ,      0.000
N      ,      36      ,      0.000  ,      49.999 ,      0.000
N      ,      37      ,     -43.300,      24.999 ,      0.000
NPLLOT      ! Plotar os nós

```

```
! Elementos
```

```

E      ,      1      ,      2
E      ,      1      ,      3
E      ,      1      ,      4
E      ,      1      ,      5
E      ,      1      ,      6
E      ,      1      ,      7
E      ,      2      ,      8
E      ,      3      ,     10
E      ,      4      ,     12
E      ,      5      ,     14
E      ,      6      ,     16
E      ,      7      ,     18
E      ,      8      ,      9
E      ,      9      ,     10
E      ,     10      ,     11
E      ,     11      ,     12
E      ,     12      ,     13
E      ,     13      ,     14
E      ,     14      ,     15
E      ,     15      ,     16
E      ,     16      ,     17
E      ,     17      ,     18
E      ,     18      ,     19
E      ,     19      ,      8
E      ,      8      ,     20
E      ,     20      ,     32
E      ,     10      ,     21
E      ,     21      ,     32
E      ,     10      ,     22
E      ,     22      ,     33
E      ,     12      ,     23
E      ,     23      ,     33
E      ,     12      ,     24
E      ,     24      ,     34
E      ,     14      ,     25
E      ,     25      ,     34
E      ,     14      ,     26
E      ,     26      ,     35
E      ,     16      ,     27
E      ,     27      ,     35
E      ,     16      ,     28
E      ,     28      ,     36
E      ,     18      ,     29
E      ,     29      ,     36
E      ,     18      ,     30
E      ,     30      ,     37
E      ,      8      ,     31
E      ,     31      ,     37

```

```

EPLLOT      ! Plotar os elementos e número dos nós
/PNUM,NODE,1
/PNUM,ELEM,0
/REPLLOT

```

```

D,32, UX,0,,,,UY,Uz      ! Determinação dos apoios nodais
D,33, UX,0,,,,UY,Uz
D,34, UX,0,,,,UY,Uz
D,35, UX,0,,,,UY,Uz
D,36, UX,0,,,,UY,Uz
D,37, UX,0,,,,UY,Uz
/PBC, ALL, 1             ! Mostra as condições de contorno
!
!
FINISH
/SOL
!*
ANTYPE,4                 ! Análise Transiente
!*
TRNOPT,FULL
LUMPM,0
!*
*DEL,_FNCNAME
*DEL,_FNCMTID
*DEL,_FNCCSYS
*SET,_FNCNAME,'Carga01'
*SET,_FNCCSYS,0
!/INPUT,funcao01.func,,,1 ! Definição da função de carregamento
*DIM,%_FNCNAME%,TABLE,6,6,1,,,,%_FNCCSYS%
!
! Begin of equation: -154.625*sin(20.106*{TIME})
*SET,%_FNCNAME%(0,0,1), 0.0, -999
*SET,%_FNCNAME%(2,0,1), 0.0
*SET,%_FNCNAME%(3,0,1), 0.0
*SET,%_FNCNAME%(4,0,1), 0.0
*SET,%_FNCNAME%(5,0,1), 0.0
*SET,%_FNCNAME%(6,0,1), 0.0
*SET,%_FNCNAME%(0,1,1), 1.0, -1, 0, 20.106, 0, 0, 1
*SET,%_FNCNAME%(0,2,1), 0.0, -2, 0, 1, -1, 3, 1
*SET,%_FNCNAME%(0,3,1), 0, -1, 9, 1, -2, 0, 0
*SET,%_FNCNAME%(0,4,1), 0.0, -2, 0, -154.625, 0, 0, -1
*SET,%_FNCNAME%(0,5,1), 0.0, -3, 0, 1, -2, 3, -1
*SET,%_FNCNAME%(0,6,1), 0.0, 99, 0, 1, -3, 0, 0
! End of equation: -154.625*sin(20.106*{TIME})
!-->
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,1                ! Aplicação do carregamento no nó
!*
!*
/GO
F,P51X,FZ, %CARGA01%
NSUBST,400,0,0           ! Número de passos de carga
OUTRES,ERASE
OUTRES,ALL,ALL
ALPHAD,2.185             ! Coeficiente de amortecimento
BETAD,0.00
TIME,1.0                 ! Tempo de Análise
TRNOPT,,,,,HHT          ! Método de integração
TINTP,0.01
/STATUS,SOLU
SOLVE

/POST26                  ! Pós-Processamento - Histórico de Deslocamentos
/UI,COLL,1
NUMVAR,200

```

```

SOLU,191,NCMIT
STORE,MERGE
FILLDATA,191,,,,1,1
REALVAR,191,191
!*
NSOL,2,1,U,Z, UZ_2      ! Nó 1 na Direção z
STORE,MERGE
XVAR,1
PLVAR,2,

```

EXEMPLO 15-B

```

!PRE-PROCESSADOR
/PREP7
/TITLE, GEODESIC DOME
ET, 1, BEAM188
KEYOPT,1,1,1
KEYOPT,1,2,1
KEYOPT,1,3,0
KEYOPT,1,4,1
KEYOPT,1,6,0
KEYOPT,1,7,0
KEYOPT,1,8,0
KEYOPT,1,9,0
KEYOPT,1,10,0
KEYOPT,1,11,0
KEYOPT,1,12,0          ! Tipo de Elemento
SECTYPE, 1, BEAM, RECT, , 0
SECOFFSET, CENT
SECDATA,2.99,1.06,0,0,0,0,0,0,0
NLGEOM,ON
EX, 1, 3.03e+05        ! Módulo de Elasticidade
MP, PRXY, 1, 0.3823    ! Coeficiente de Poisson
MP, DENS, 1, 7800.0e-06 ! Densidade

```

! Coordenadas Nodais

N	,	1	,	0.000	,	0.000	,	8.220
N	,	2	,	-12.500,	0.000	,	7.220	
N	,	3	,	-6.250	,	-10.825,	7.220	
N	,	4	,	6.250	,	-10.825,	7.220	
N	,	5	,	12.500	,	0.000	,	7.220
N	,	6	,	6.250	,	10.825	,	7.220
N	,	7	,	-6.250	,	10.825	,	7.220
N	,	8	,	-25.000,	0.000	,	6.220	
N	,	9	,	-18.750,	-10.825,	,	6.220	
N	,	10	,	-12.500,	-21.650,	,	6.220	
N	,	11	,	0.000	,	-21.650,	6.220	
N	,	12	,	12.500	,	-21.650,	6.220	
N	,	13	,	18.750	,	-10.825,	6.220	
N	,	14	,	25.000	,	0.000	,	6.220
N	,	15	,	18.750	,	10.825	,	6.220
N	,	16	,	12.500	,	21.650	,	6.220
N	,	17	,	0.000	,	21.650	,	6.220
N	,	18	,	-12.500,	21.650	,	6.220	
N	,	19	,	-18.750,	10.825	,	6.220	
N	,	20	,	-34.150,	-12.500,	,	3.110	
N	,	21	,	-27.900,	-23.325,	,	3.110	
N	,	22	,	-6.250	,	-35.824,	3.110	

N	,	23	,	6.250	,	-35.824,	3.110
N	,	24	,	27.900	,	-23.325,	3.110
N	,	25	,	34.150	,	-12.500,	3.110
N	,	26	,	34.150	,	12.500	, 3.110
N	,	27	,	27.900	,	23.325	, 3.110
N	,	28	,	6.250	,	35.824	, 3.110
N	,	29	,	-6.250	,	35.824	, 3.110
N	,	30	,	-27.900,		23.325	, 3.110
N	,	31	,	-34.150,		12.500	, 3.110
N	,	32	,	-43.300,		-24.999,	0.000
N	,	33	,	0.000	,	-49.999,	0.000
N	,	34	,	43.300	,	-24.999,	0.000
N	,	35	,	43.300	,	24.999	, 0.000
N	,	36	,	0.000	,	49.999	, 0.000
N	,	37	,	-43.300,		24.999	, 0.000

NPLOT ! Plotar os nós

! Elementos

E	,	1	,	2
E	,	1	,	3
E	,	1	,	4
E	,	1	,	5
E	,	1	,	6
E	,	1	,	7
E	,	2	,	8
E	,	3	,	10
E	,	4	,	12
E	,	5	,	14
E	,	6	,	16
E	,	7	,	18
E	,	8	,	9
E	,	9	,	10
E	,	10	,	11
E	,	11	,	12
E	,	12	,	13
E	,	13	,	14
E	,	14	,	15
E	,	15	,	16
E	,	16	,	17
E	,	17	,	18
E	,	18	,	19
E	,	19	,	8
E	,	8	,	20
E	,	20	,	32
E	,	10	,	21
E	,	21	,	32
E	,	10	,	22
E	,	22	,	33
E	,	12	,	23
E	,	23	,	33
E	,	12	,	24
E	,	24	,	34
E	,	14	,	25
E	,	25	,	34
E	,	14	,	26
E	,	26	,	35
E	,	16	,	27
E	,	27	,	35
E	,	16	,	28
E	,	28	,	36

```

E      ,      18      ,      29
E      ,      29      ,      36
E      ,      18      ,      30
E      ,      30      ,      37
E      ,      8       ,      31
E      ,      31      ,      37

```

```

EPLOT          ! Plotar os elementos e número dos nós
/PNUM,NODE,1
/PNUM,ELEM,0
/REPLOT

```

```

D,32, UX,0,,UY,Uz      ! Determinação dos apoios nodais
D,33, UX,0,,UY,Uz
D,34, UX,0,,UY,Uz
D,35, UX,0,,UY,Uz
D,36, UX,0,,UY,Uz
D,37, UX,0,,UY,Uz

```

```

/PBC, ALL, 1          ! Mostra as condições de contorno

```

```

!
```

```

!
```

```

!*

```

```

FINISH

```

```

/SOL

```

```

!*

```

```

ANTYPE,4          ! Análise Transiente

```

```

!*

```

```

TRNOPT,FULL

```

```

LUMPM,0

```

```

!*

```

```

*DEL,_FNCNAME

```

```

*DEL,_FNCMTID

```

```

*DEL,_FNCCSYS

```

```

*SET,_FNCNAME,'Carga01'

```

```

*SET,_FNCCSYS,0

```

```

!/INPUT,funcao01.func,,1 ! Definição da função de carregamento

```

```

*DIM,%_FNCNAME%,TABLE,6,6,1,,,%_FNCCSYS%

```

```

!
```

```

! Begin of equation: -309.25*sin(20.106*{TIME})

```

```

*SET,%_FNCNAME%(0,0,1), 0.0, -999

```

```

*SET,%_FNCNAME%(2,0,1), 0.0

```

```

*SET,%_FNCNAME%(3,0,1), 0.0

```

```

*SET,%_FNCNAME%(4,0,1), 0.0

```

```

*SET,%_FNCNAME%(5,0,1), 0.0

```

```

*SET,%_FNCNAME%(6,0,1), 0.0

```

```

*SET,%_FNCNAME%(0,1,1), 1.0, -1, 0, 20.106, 0, 0, 1

```

```

*SET,%_FNCNAME%(0,2,1), 0.0, -2, 0, 1, -1, 3, 1

```

```

*SET,%_FNCNAME%(0,3,1), 0, -1, 9, 1, -2, 0, 0

```

```

*SET,%_FNCNAME%(0,4,1), 0.0, -2, 0, -309.25, 0, 0, -1

```

```

*SET,%_FNCNAME%(0,5,1), 0.0, -3, 0, 1, -2, 3, -1

```

```

*SET,%_FNCNAME%(0,6,1), 0.0, 99, 0, 1, -3, 0, 0

```

```

! End of equation: -309.25*sin(20.106*{TIME})

```

```

!-->

```

```

FLST,2,1,1,ORDE,1

```

```

FITEM,2,1          ! Aplicação do carregamento no nó

```

```

!*

```

```

!*

```

```

/GO

```

```

F,P51X,FZ, %CARGA01%

```

```

NSUBST,400,0,0    ! Número de passos de carga

```

```

OUTRES,ERASE
OUTRES,ALL,ALL
ALPHAD,2.185      ! Coeficiente de amortecimento
BETAD,0.00
TIME,1.0          ! Tempo de Análise
TRNOPT,,,,,HHT   ! Método de integração
TINTP,0.01
/STATUS,SOLU
SOLVE

/POST26          ! Pós-Processamento - Histórico de Deslocamentos
/UI,COLL,1
NUMVAR,200
SOLU,191,NCMIT
STORE,MERGE
FILLDATA,191,,,,1,1
REALVAR,191,191
!*
NSOL,2,1,U,Z, UZ_2    ! Nó 1 na Direção z
STORE,MERGE
XVAR,1
PLVAR,2,

```

EXEMPLO 15-C

```

!PRE-PROCESSADOR
/PREP7
/TITLE, GEODESIC DOME
ET, 1, BEAM188
KEYOPT,1,1,1
KEYOPT,1,2,1
KEYOPT,1,3,0
KEYOPT,1,4,1
KEYOPT,1,6,0
KEYOPT,1,7,0
KEYOPT,1,8,0
KEYOPT,1,9,0
KEYOPT,1,10,0
KEYOPT,1,11,0
KEYOPT,1,12,0      ! Tipo de Elemento
SECTYPE, 1, BEAM, RECT, , 0
SECOFFSET, CENT
SECDATA,2.99,1.06,0,0,0,0,0,0,0,0
NLGEOM,ON
EX, 1, 3.03e+05     ! Módulo de Elasticidade
MP, PRXY, 1, 0.3823 ! Coeficiente de Poisson
MP, DENS, 1, 7800.0e-06 ! Densidade

! Coordenadas Nodais
N      ,      1      ,      0.000      ,      0.000      ,      8.220
N      ,      2      ,     -12.500      ,      0.000      ,      7.220
N      ,      3      ,     -6.250      ,     -10.825      ,      7.220
N      ,      4      ,      6.250      ,     -10.825      ,      7.220
N      ,      5      ,     12.500      ,      0.000      ,      7.220
N      ,      6      ,      6.250      ,     10.825      ,      7.220
N      ,      7      ,     -6.250      ,     10.825      ,      7.220
N      ,      8      ,    -25.000      ,      0.000      ,      6.220
N      ,      9      ,    -18.750      ,     -10.825      ,      6.220
N      ,     10      ,    -12.500      ,    -21.650      ,      6.220

```

N	,	11	,	0.000	,	-21.650,	6.220
N	,	12	,	12.500	,	-21.650,	6.220
N	,	13	,	18.750	,	-10.825,	6.220
N	,	14	,	25.000	,	0.000	, 6.220
N	,	15	,	18.750	,	10.825	, 6.220
N	,	16	,	12.500	,	21.650	, 6.220
N	,	17	,	0.000	,	21.650	, 6.220
N	,	18	,	-12.500,	21.650	,	6.220
N	,	19	,	-18.750,	10.825	,	6.220
N	,	20	,	-34.150,	-12.500,		3.110
N	,	21	,	-27.900,	-23.325,		3.110
N	,	22	,	-6.250	,	-35.824,	3.110
N	,	23	,	6.250	,	-35.824,	3.110
N	,	24	,	27.900	,	-23.325,	3.110
N	,	25	,	34.150	,	-12.500,	3.110
N	,	26	,	34.150	,	12.500	, 3.110
N	,	27	,	27.900	,	23.325	, 3.110
N	,	28	,	6.250	,	35.824	, 3.110
N	,	29	,	-6.250	,	35.824	, 3.110
N	,	30	,	-27.900,	23.325	,	3.110
N	,	31	,	-34.150,	12.500	,	3.110
N	,	32	,	-43.300,	-24.999,		0.000
N	,	33	,	0.000	,	-49.999,	0.000
N	,	34	,	43.300	,	-24.999,	0.000
N	,	35	,	43.300	,	24.999	, 0.000
N	,	36	,	0.000	,	49.999	, 0.000
N	,	37	,	-43.300,	24.999	,	0.000

NPLOT

! Plotar os nós

! Elementos

E	,	1	,	2
E	,	1	,	3
E	,	1	,	4
E	,	1	,	5
E	,	1	,	6
E	,	1	,	7
E	,	2	,	8
E	,	3	,	10
E	,	4	,	12
E	,	5	,	14
E	,	6	,	16
E	,	7	,	18
E	,	8	,	9
E	,	9	,	10
E	,	10	,	11
E	,	11	,	12
E	,	12	,	13
E	,	13	,	14
E	,	14	,	15
E	,	15	,	16
E	,	16	,	17
E	,	17	,	18
E	,	18	,	19
E	,	19	,	8
E	,	8	,	20
E	,	20	,	32
E	,	10	,	21
E	,	21	,	32
E	,	10	,	22
E	,	22	,	33

```

E      ,      12      ,      23
E      ,      23      ,      33
E      ,      12      ,      24
E      ,      24      ,      34
E      ,      14      ,      25
E      ,      25      ,      34
E      ,      14      ,      26
E      ,      26      ,      35
E      ,      16      ,      27
E      ,      27      ,      35
E      ,      16      ,      28
E      ,      28      ,      36
E      ,      18      ,      29
E      ,      29      ,      36
E      ,      18      ,      30
E      ,      30      ,      37
E      ,      8       ,      31
E      ,      31      ,      37

```

```

EPlot      ! Plotar os elementos e número dos nós
/PNUM,NODE,1
/PNUM,ELEM,0
/REPLOT

```

```

D,32, UX,0,,,,UY,Uz      ! Determinação dos apoios nodais
D,33, UX,0,,,,UY,Uz
D,34, UX,0,,,,UY,Uz
D,35, UX,0,,,,UY,Uz
D,36, UX,0,,,,UY,Uz
D,37, UX,0,,,,UY,Uz

```

```

/PBC, ALL, 1      ! Mostra as condições de contorno

```

```

!

```

```

!

```

```

!*

```

```

FINISH

```

```

/SOL

```

```

!*

```

```

ANTYPE,4      ! Análise Transiente

```

```

!*

```

```

TRNOPT,FULL

```

```

LUMPM,0

```

```

!*

```

```

*DEL,_FNCNAME

```

```

*DEL,_FNCMTID

```

```

*DEL,_FNCCSYS

```

```

*SET,_FNCNAME,'Carga01'

```

```

*SET,_FNCCSYS,0

```

```

! /INPUT,funcao01.func,,1 ! Definição da função de carregamento

```

```

*DIM,%_FNCNAME%,TABLE,6,6,1,,,,_%FNCCSYS%

```

```

!

```

```

! Begin of equation: -463.875*sin(20.106*{TIME})

```

```

*SET,%_FNCNAME%(0,0,1), 0.0, -999

```

```

*SET,%_FNCNAME%(2,0,1), 0.0

```

```

*SET,%_FNCNAME%(3,0,1), 0.0

```

```

*SET,%_FNCNAME%(4,0,1), 0.0

```

```

*SET,%_FNCNAME%(5,0,1), 0.0

```

```

*SET,%_FNCNAME%(6,0,1), 0.0

```

```

*SET,%_FNCNAME%(0,1,1), 1.0, -1, 0, 20.106, 0, 0, 1

```

```

*SET,%_FNCNAME%(0,2,1), 0.0, -2, 0, 1, -1, 3, 1

```

```

*SET,%_FNCNAME%(0,3,1), 0, -1, 9, 1, -2, 0, 0

```

```

*SET,%_FNCNAME%(0,4,1), 0.0, -2, 0, -463.875, 0, 0, -1
*SET,%_FNCNAME%(0,5,1), 0.0, -3, 0, 1, -2, 3, -1
*SET,%_FNCNAME%(0,6,1), 0.0, 99, 0, 1, -3, 0, 0
! End of equation: -463.875*sin(20.106*{TIME})
!-->
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,1          ! Aplicação do carregamento no nó
!*
!*
/GO
F,P51X,FZ, %CARGA01%
NSUBST,400,0,0     ! Número de passos de carga
OUTRES,ERASE
OUTRES,ALL,ALL
ALPHAD,2.185      ! Coeficiente de amortecimento
BETAD,0.00
TIME,1.0          ! Tempo de Análise
TRNOPT,,,,,HHT    ! Método de integração
TINTP,0.01
/STATUS,SOLU
SOLVE

/POST26           ! Pós-Processamento - Histórico de Deslocamentos
/UI,COLL,1
NUMVAR,200
SOLU,191,NCMIT
STORE,MERGE
FILLDATA,191,,,,1,1
REALVAR,191,191
!*
NSOL,2,1,U,Z, UZ_2 ! Nó 1 na Direção z
STORE,MERGE
XVAR,1
PLVAR,2,

```

EXEMPLO 15-D

```

!PRE-PROCESSADOR
/PREP7
/TITLE, GEODESIC DOME
ET, 1, BEAM188
KEYOPT,1,1,1
KEYOPT,1,2,1
KEYOPT,1,3,0
KEYOPT,1,4,1
KEYOPT,1,6,0
KEYOPT,1,7,0
KEYOPT,1,8,0
KEYOPT,1,9,0
KEYOPT,1,10,0
KEYOPT,1,11,0
KEYOPT,1,12,0     ! Tipo de Elemento
SECTYPE, 1, BEAM, RECT, , 0
SECOFFSET, CENT
SECDATA,2.99,1.06,0,0,0,0,0,0,0,0
NLGEOM,ON
EX, 1, 3.03e+05    ! Módulo de Elasticidade
MP, PRXY, 1, 0.3823 ! Coeficiente de Poisson
MP, DENS, 1, 7800.0e-06 ! Densidade

```

! Coordenadas Nodais

N	,	1	,	0.000	,	0.000	,	8.220
N	,	2	,	-12.500,	0.000	,	7.220	
N	,	3	,	-6.250	,	-10.825,	7.220	
N	,	4	,	6.250	,	-10.825,	7.220	
N	,	5	,	12.500	,	0.000	,	7.220
N	,	6	,	6.250	,	10.825	,	7.220
N	,	7	,	-6.250	,	10.825	,	7.220
N	,	8	,	-25.000,	0.000	,	6.220	
N	,	9	,	-18.750,	-10.825,	6.220		
N	,	10	,	-12.500,	-21.650,	6.220		
N	,	11	,	0.000	,	-21.650,	6.220	
N	,	12	,	12.500	,	-21.650,	6.220	
N	,	13	,	18.750	,	-10.825,	6.220	
N	,	14	,	25.000	,	0.000	,	6.220
N	,	15	,	18.750	,	10.825	,	6.220
N	,	16	,	12.500	,	21.650	,	6.220
N	,	17	,	0.000	,	21.650	,	6.220
N	,	18	,	-12.500,	21.650	,	6.220	
N	,	19	,	-18.750,	10.825	,	6.220	
N	,	20	,	-34.150,	-12.500,	3.110		
N	,	21	,	-27.900,	-23.325,	3.110		
N	,	22	,	-6.250	,	-35.824,	3.110	
N	,	23	,	6.250	,	-35.824,	3.110	
N	,	24	,	27.900	,	-23.325,	3.110	
N	,	25	,	34.150	,	-12.500,	3.110	
N	,	26	,	34.150	,	12.500	,	3.110
N	,	27	,	27.900	,	23.325	,	3.110
N	,	28	,	6.250	,	35.824	,	3.110
N	,	29	,	-6.250	,	35.824	,	3.110
N	,	30	,	-27.900,	23.325	,	3.110	
N	,	31	,	-34.150,	12.500	,	3.110	
N	,	32	,	-43.300,	-24.999,	0.000		
N	,	33	,	0.000	,	-49.999,	0.000	
N	,	34	,	43.300	,	-24.999,	0.000	
N	,	35	,	43.300	,	24.999	,	0.000
N	,	36	,	0.000	,	49.999	,	0.000
N	,	37	,	-43.300,	24.999	,	0.000	

NPLOT

! Plotar os nós

! Elementos

E	,	1	,	2
E	,	1	,	3
E	,	1	,	4
E	,	1	,	5
E	,	1	,	6
E	,	1	,	7
E	,	2	,	8
E	,	3	,	10
E	,	4	,	12
E	,	5	,	14
E	,	6	,	16
E	,	7	,	18
E	,	8	,	9
E	,	9	,	10
E	,	10	,	11
E	,	11	,	12
E	,	12	,	13
E	,	13	,	14
E	,	14	,	15

```

E      ,      15      ,      16
E      ,      16      ,      17
E      ,      17      ,      18
E      ,      18      ,      19
E      ,      19      ,      8
E      ,      8       ,      20
E      ,      20      ,      32
E      ,      10      ,      21
E      ,      21      ,      32
E      ,      10      ,      22
E      ,      22      ,      33
E      ,      12      ,      23
E      ,      23      ,      33
E      ,      12      ,      24
E      ,      24      ,      34
E      ,      14      ,      25
E      ,      25      ,      34
E      ,      14      ,      26
E      ,      26      ,      35
E      ,      16      ,      27
E      ,      27      ,      35
E      ,      16      ,      28
E      ,      28      ,      36
E      ,      18      ,      29
E      ,      29      ,      36
E      ,      18      ,      30
E      ,      30      ,      37
E      ,      8       ,      31
E      ,      31      ,      37

```

```

EPLOT          ! Plotar os elementos e número dos nós
/PNUM,NODE,1
/PNUM,ELEM,0
/REPLOT

```

```

D,32, UX,0,,UY,Uz      ! Determinação dos apoios nodais
D,33, UX,0,,UY,Uz
D,34, UX,0,,UY,Uz
D,35, UX,0,,UY,Uz
D,36, UX,0,,UY,Uz
D,37, UX,0,,UY,Uz

```

```

/PBC, ALL, 1          ! Mostra as condições de contorno
!
!
!*

```

```

FINISH

```

```

/SOL

```

```

!*

```

```

ANTYPE,4            ! Análise Transiente

```

```

!*

```

```

TRNOPT,FULL

```

```

LUMPM,0

```

```

!*

```

```

*DEL,_FNCNAME

```

```

*DEL,_FNCMTID

```

```

*DEL,_FNCCSYS

```

```

*SET,_FNCNAME,'Carga01'

```

```

*SET,_FNCCSYS,0

```

```

!/INPUT,funcao01.func,,1 ! Definição da função de carregamento

```

```

*DIM,%_FNCNAME%,TABLE,6,6,1,,,%_FNCCSYS%

```

```

!
! Begin of equation: -618.5*sin(20.106*{TIME})
*SET,%_FNCNAME%(0,0,1), 0.0, -999
*SET,%_FNCNAME%(2,0,1), 0.0
*SET,%_FNCNAME%(3,0,1), 0.0
*SET,%_FNCNAME%(4,0,1), 0.0
*SET,%_FNCNAME%(5,0,1), 0.0
*SET,%_FNCNAME%(6,0,1), 0.0
*SET,%_FNCNAME%(0,1,1), 1.0, -1, 0, 20.106, 0, 0, 1
*SET,%_FNCNAME%(0,2,1), 0.0, -2, 0, 1, -1, 3, 1
*SET,%_FNCNAME%(0,3,1), 0, -1, 9, 1, -2, 0, 0
*SET,%_FNCNAME%(0,4,1), 0.0, -2, 0, -618.5, 0, 0, -1
*SET,%_FNCNAME%(0,5,1), 0.0, -3, 0, 1, -2, 3, -1
*SET,%_FNCNAME%(0,6,1), 0.0, 99, 0, 1, -3, 0, 0
! End of equation: -618.5*sin(20.106*{TIME})
!-->
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,1      ! Aplicação do carregamento no nó
!*
!*
/GO
F,P51X,FZ, %CARGA01%
NSUBST,500,0,0      ! Número de passos de carga
OUTRES,ERASE
OUTRES,ALL,ALL
ALPHAD,2.185      ! Coeficiente de amortecimento
BETAD,0.00
TIME,1.0      ! Tempo de Análise
TRNOPT,,,,,HHT      ! Método de integração
TINTP,0.01
/STATUS,SOLU
SOLVE

/POST26      ! Pós-Processamento - Histórico de Deslocamentos
/UI,COLL,1
NUMVAR,200
SOLU,191,NCMIT
STORE,MERGE
FILLDATA,191,,,,1,1
REALVAR,191,191
!*
NSOL,2,1,U,Z, UZ_2      ! Nó 1 na Direção z
STORE,MERGE
XVAR,1
PLVAR,2,

```