



**UnB**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**CADEIA DE SPIN XY DISSECADA: CONDIÇÕES DE  
CONTORNO E VARIEDADE DE VÁCUO**

**Manuela Carvalho de Almeida**

BRASÍLIA

- 2014 -



**UnB**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**CADEIA DE SPIN XY DISSECADA: CONDIÇÕES DE  
CONTORNO E VARIEDADE DE VÁCUO**

*Manuela Carvalho de Almeida*

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Amílcar Rabelo de Queiroz, apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

BRASÍLIA

- 2014 -

## Agradecimentos

Quero agradecer a todos que me apoiaram neste mestrado, principalmente à minha família espalhada por esse Brasil. Nunca estivemos tão longe um dos outros, porém tão unidos.

Em particular queria agradecer aos meus pais e minha irmã, pelo apoio financeiro e emocional, por acreditarem que meu lugar é na Física.

Ao Vítor, meu irmão de consideração, amigo para todas as horas, por receber de braços abertos esta retirante em Brasília.

À Rebecca, pelo apoio e amor incondicional, por me lembrar que nem tudo é tão sério quanto parece e que tudo tem solução por mais que não pareça. Por me puxar para cima quando tudo parecia me puxar para baixo.

À família da Rebecca, por me receber dentro do seu círculo com muito carinho.

Ao Sasha, Carol, Akira e Leonardo, pelas dores de cabeça com matérias, Journal Club e chá com física e risadas.

Ao Amílcar, por ter me orientado, ou desorientado, pelo café, conversas e puxões de orelha.

Ao Bruno Cunha, pois sem ele minha história na física talvez nem teria começado, com quem aprendi bastante e me espelhei como modelo de Físico.

Aos meus alunos, que me ensinaram que ensinar é aprender.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro.

*Freedom is the freedom to say that two plus  
two make four. If that is granted, all else  
follows.*

(1984, George Orwell)

## Resumo

Numa cadeia de spins XY fechada com um número  $N$  finito de sítios, condições de contorno desempenham um papel importante. Na literatura, os termos de fronteira são descartados. Além disto, existe uma correspondência entre teorias de gauge não-abeliana e cadeias de spin. O objetivo deste trabalho é prover um embasamento teórico sobre férmions e sistemas de spin para estudar esta correspondência no futuro e mostrar como teorias de gauge emergem de sistemas com número finito de graus de liberdade. Na cadeia de spin XY, focamos em discutir os termos de fronteira, pois eles tem uma importância fundamental para o entendimento do modelo XY, explicando o aparecimento de degenerescências, além de mostrar que o limite termodinâmico pode esconder sutilezas.

## Abstract

In a closed XY spin chain with finite number  $N$  of sites, boundary conditions play a crucial role. In the literature, these boundary terms are discarded. Furthermore, there is a correspondence between nonabelian gauge theories and spin chains. Therefore, there is a correspondence between non-abelian gauge theory and spin chains. Our goal in this work is to provide a theoretical basis on fermions and spin systems in order to study this correspondence in the future. In addition, to show how gauge theory can emerge from systems with a finite number of degrees of freedom. In spin chain XY, we focus on discussing the boundary terms, since they are fundamental to the understanding of the XY model, because they explain the degeneracies of the model. In addition, the thermodynamic limit can hide subtleties.

# Conteúdo

<b>Conteúdo</b>	<b>7</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>8</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>9</b>
<b>2 Álgebra de Clifford</b>	<b>13</b>
2.1 Introdução . . . . .	13
2.2 Álgebra de Clifford: Definição . . . . .	17
2.3 O operador de quiralidade . . . . .	21
2.4 $\text{Spin}^c(V)$ , $\text{Spin}(V)$ , $\text{SO}(V)$ . . . . .	22
2.5 Espaço de Fock e Representação . . . . .	31
2.6 Dimensões ímpares . . . . .	36
2.7 Exemplos . . . . .	37
2.8 Recapitulando . . . . .	42
2.9 Transformações na álgebra de Clifford . . . . .	44
2.10 Espinores irredutíveis . . . . .	47
<b>3 Teoria de Calibre emergente</b>	<b>53</b>
3.1 Introdução . . . . .	53
3.2 Teoria de calibre e geometria . . . . .	53
3.3 Um outro problema de mecânica quântica . . . . .	55
3.4 Resolvendo o problema . . . . .	56
3.5 A natureza do $(A_\mu)_{ab}$ . . . . .	59
3.6 O que é físico? . . . . .	60
3.7 Interpretação do Loop de Wilson . . . . .	62
<b>4 Cadeia de spin XY</b>	<b>65</b>
4.1 Introduzindo o Modelo XY . . . . .	65

4.2	Hamiltoniana XY e Operadores Escadas . . . . .	67
4.3	Transformação de Jordan-Wigner . . . . .	68
4.4	Conservação de 'Paridade' . . . . .	73
4.5	O Operador $T_N$ e a 'Paridade' . . . . .	74
4.6	Diagonalização da Hamiltoniana . . . . .	75
4.7	Operadores de Quasipartículas . . . . .	80
4.8	O Modo Zero . . . . .	81
4.9	Estado de Vácuo Dissecado . . . . .	83
4.10	Apêndice 1 - Matrizes de Toeplitz . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>97</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>99</b>

## Lista de Figuras

3.1	quadrado de Wilson . . . . .	61
4.1	Diagrama de fase da cadeia XY [7] . . . . .	66



# Capítulo 1

## Introdução

Teorias de calibre (ou gauge) baseadas em grupos não-abelianos foram primeiro desenvolvidas no ramo das partículas elementares para explicar as interações fundamentais, tendo um papel fundamental na construção do modelo padrão. Este modelo vem sendo testado já há algumas décadas e se tornou o mais aceito para explicar os constituintes da matéria. A teoria moderna de interações é uma teoria de gauge. Exemplos dessas teorias incluem

1. Teoria da gravitação de Einstein (1916) ,
2. Eletromagnetismo, formulado por Weyl (1919),
3. Campos de Yang-Mills (1954),
  - Eletrodinâmica quântica (interação eletrofraca) (1967)
  - Cromodinâmica quântica (interação forte)(1972)

Essas teorias estão baseadas na idéia de invariância de gauge local, em outras palavras, uma degenerescência local. Ela é implementada na teoria de campo através de um potencial de gauge, como por exemplo o potencial vetor  $\vec{A}$  do eletromagnetismo.

O campo de gauge é o *mediador* das interações. As partículas elementares mediadoras são

<b>Interação</b>	<b>Bóson</b>
Gravidade	Gráviton (teórico)
Eletromagnetismo	Fóton
Força fraca	Bósons W e Z
Força forte	Glúons

A cadeia de spin unidimensional XY com um campo magnético transversal é um dos modelos integráveis mais simples. Por causa disso, durante anos ele foi extensivamente estudado e usado para capturar comportamento universais de sistemas de baixa dimensão. Recentemente, reacendeu-se um interesse neste modelo.

De fato, o modelo XY sempre foi uma boa fonte de estudos. Apesar de sua aparente simplicidade, ele tem um rico diagrama de fase 2-dimensional caracterizado, à temperatura zero, por duas transições de fase: uma delas pertencente à classe de universalidade da cadeia de Heisenberg crítica (Modelo XX) e a outra à transição de fase do modelo de Ising unidimensional.

A cadeia de spin XY é um rico laboratório para testar conceitos e ferramentas relacionados a transições de fase. Um exemplo disso é o trabalho pioneiro de [12], onde eles descrevem o diagrama de fase da cadeia XY no limite termodinâmico.

Por outro lado, existe uma relação entre teorias de gauge e sistema de spins, dois temas aparentemente distintos, na tentativa de entender melhor teorias de gauge em regime de acoplamento forte, como QCD. Na literatura, foi observado que existem inúmeras similaridades em matéria condensada entre sistemas férmionicos na rede (particularmente certos sistemas de spin anti-ferromagnéticos) e sistema de teoria de gauge na rede, geralmente no regime de acoplamento forte. Por exemplo, é sabido que a cadeia de spin de Heisenberg anti-ferromagnético é equivalente ao regime de acoplamento forte de uma teoria de gauge  $U(1)$  na rede [11].

Esta dissertação foi pensada para ser um material didático para álgebra de Clifford e espinores em diversas dimensões de espaço-tempo, além de ter um tratamento pedagógico sobre teoria de gauge e cadeias de spin, para um aluno interessado em estudar a correspondência teoria de gauge/cadeia de spin. Além de ser um embasamento teórico para trabalhos futuros com o professor Amilcar sobre cadeia de spin XY e emaranhamento. Há nesta dissertação a semente de um trabalho original[17].

A emergência de um campo de gauge não-abeliano a partir da cadeia XY e a relação com o modelo de Kitaev[9] pode abrir uma nova maneira de se estudar modelos. Assim, esperamos desvendar novos aspectos físicos desses modelos a partir das condições de contorno.

O texto está dividido em 3 principais capítulos:

O capítulo 2 é uma introdução pedagógica à álgebra de Clifford e espinores, definição de álgebra e representações, rico em exemplos cuidadosamente escritos para serem auto-suficientes.

O capítulo 3 tem o objetivo de explicar o que é uma teoria de gauge e o conceito de loop de Wilson através de um exemplo onde a teoria de gauge emerge da mecânica quântica, i.e, um sistema com finitos graus de liberdade.

O capítulo 4 explora vários aspectos da cadeia de spin XY, especialmente a relevância das condições de contorno, como foi apresentado em [7], a natureza das degenerescências, além das funções de correlação e a termodinâmica do modelo XY.



# Capítulo 2

## Álgebra de Clifford

### 2.1 Introdução

Comecemos com um exemplo simples: funções complexas de variáveis reais, i.e,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ f(x, y) &= u(x, y) + iv(x, y). \end{aligned}$$

Uma função é holomórfica se e somente se ela satisfaz

$$\partial_{\bar{z}}f(z, \bar{z}) = 0, \text{ com } \partial_{\bar{z}} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{z}}. \quad (2.1)$$

Analogamente, uma função é antiholomórfica quando

$$\partial_z g(z, \bar{z}) = 0, \text{ com } \partial_z \equiv \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.2)$$

Podemos unificar essas duas equações em apenas uma usando o operador diferencial

$$\begin{aligned} P : C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2) &\longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2) \\ P \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} &= 2 \begin{pmatrix} \partial_z g \\ \partial_{\bar{z}} f \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Como

$$\begin{aligned} P \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_x g - i\partial_y g \\ \partial_x f + i\partial_y f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x g \\ \partial_x f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i\partial_y g \\ i\partial_y f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \partial_x \\ \partial_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i\partial_y \\ i\partial_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

então

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \partial_y \equiv \gamma_x \partial_x + \gamma_y \partial_y, \quad (2.5)$$

com

$$\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x} \text{ e } \partial_y \equiv \frac{\partial}{\partial y}, \quad (2.6)$$

e

$$\gamma_x^2 = \gamma_y^2 = 1, \quad (2.7)$$

$$\{\gamma_x, \gamma_y\} = 0. \quad (2.8)$$

Então o quadrado do operador  $P$  coincide com o laplaciano  $\Delta$  em  $\mathbb{R}^2$ ,

$$P^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 \equiv \Delta. \quad (2.9)$$

Observe que acima  $\gamma_x \equiv \sigma^1$  e  $\gamma_y \equiv \sigma^2$ , onde  $\sigma^i$ ,  $i = 1, 2$  são as matrizes de Pauli.

Assim, encontramos o operador raiz quadrada do operador laplaciano dentro da classe de operadores diferenciais de primeira ordem. O núcleo deste operador consiste das funções (anti-)holomórficas,

$$\ker P = \left\{ \psi = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \mid P\psi = 0 \right\} \equiv \begin{pmatrix} f(\bar{z}) \\ g(z) \end{pmatrix}.$$

Em mecânica quântica, a equação de Schrödinger

$$i\partial_t \psi(x, t) = H\psi(x, t), \quad H = \frac{p^2}{2m} + V, \quad (2.10)$$

não descreve partículas relativísticas, pois ela não é invariante sob transformações de Lorentz. Observe que a equação de Schrödinger pode ser vista como a realização do fato que  $E = H(p, q)$  se fizermos

$$E \longrightarrow i\partial_t, \quad (2.11)$$

$$p_i \longrightarrow -i\partial_i. \quad (2.12)$$

No caso relativístico  $E, \vec{p}$  formam um 4-vetor

$$p^\mu = (E, \vec{p}) \quad \text{tal que} \quad p^\mu p_\mu \equiv -E^2 + \vec{p}^2 = -m^2, \quad (2.13)$$

usando assinatura Lorentziana da métrica como  $(-, +, +, +)$ . Daqui temos

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \quad (\text{escolhendo } E > 0). \quad (2.14)$$

Então o análogo da equação de Schrödinger para o caso relativístico é

$$i\partial_t \psi = \sqrt{-\Delta + m^2} \psi. \quad (2.15)$$

Como a equação é de primeira ordem em  $\partial_t$ ,  $\rho = \psi^\dagger \psi$  é não-negativo definido, podendo assim ser interpretado como densidade de probabilidade, mas temos o problema em definir o que seria a raiz quadrada de operadores no lado direito.

Vamos voltar à relação de dispersão relativística (2.13). Consideremos  $E$  e  $\vec{p}$  operadores usando as regras (2.11) e (2.12). Temos

$$(\square + m^2)\psi = 0, \quad (2.16)$$

onde  $\square = -\partial_t^2 + \Delta$ . Esta é conhecida como a equação de Klein-Gordon. Podemos imediatamente ver que essa equação tem um problema: ela possui duas soluções, uma com  $+E$  e outra com  $-E$ . Outro problema é que  $\psi$  não tem interpretação de amplitude de probabilidade. De fato, basta calcular a corrente conservada

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu \psi = m^2 \psi, & \quad \bar{\psi} \partial_\mu \partial^\mu \psi - (\partial_\mu \partial^\mu \bar{\psi}) \psi = 0, \\ \partial_\mu \partial^\mu \bar{\psi} = m^2 \bar{\psi}, & \quad \partial_\mu (\bar{\psi} \partial^\mu \psi - (\partial^\mu \bar{\psi}) \psi) = 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

i.e,  $j^\mu = \frac{i}{2m} (\bar{\psi} \partial^\mu \psi - (\partial^\mu \bar{\psi}) \psi)$ . A parte espacial  $j^i$  é igual ao caso não-relativístico, logo espera-se que  $j^0$  tenha interpretação de densidade de probabilidade. Mas  $j^0$  não é positiva definida, devido à assinatura Lorentziana da métrica.

Resumindo, temos uma teoria com energias negativas e probabilidade mal definida. A pergunta de Dirac foi

*Podemos encontrar uma equação relativística que seja simples e de primeira ordem?*

Sua proposta foi encontrar uma equação do tipo

$$i\partial_t\psi = H_D\psi, \quad (2.18)$$

onde  $H_D$ , a hamiltoniana de Dirac, é obtida a partir da raiz quadrada da equação (2.16), ou seja, achar o operador raiz quadrada de  $\Delta$ , como foi feito no início desta introdução.

Vamos generalizar o problema da raiz quadrada de  $\Delta$  para o caso  $d$ -dimensional. Procuramos o operador  $P = \sqrt{\Delta}$  do laplaciano  $\Delta = \sum_{i=1}^d \partial_i^2$ . Considerando o ansatz

$$P = \sum_{i=1}^d \gamma^i \partial_i, \quad (2.19)$$

segue que

$$P^2 = \sum_{i,j=1}^d \gamma^i \gamma^j \partial_i \partial_j.$$

Todo produto de operadores tem uma parte simétrica e uma parte antissimétrica, assim

$$\gamma^i \gamma^j = \frac{1}{2}[\gamma^i, \gamma^j] + \frac{1}{2}\{\gamma^i, \gamma^j\}, \quad (2.20)$$

onde o primeiro termo é o comutador, antissimétrico  $[A, B] = -[B, A]$ , e o segundo termo é o anticomutador, simétrico  $\{A, B\} = \{B, A\}$ . Como as derivadas parciais comutam entre si, elas são simétricas por permutação de índices. A única parte da soma que é não nula envolve a parte simétrica do produto  $\gamma^i \gamma^j$ , isto é,

$$P^2 = \sum_{i,j=1}^d \frac{1}{2}\{\gamma^i, \gamma^j\} \partial_i \partial_j. \quad (2.21)$$

Comparando com o laplaciano  $\Delta = \sum_{i=1}^d \partial_i^2$ , temos que  $P^2 = \Delta$  se e somente se os coeficientes  $\gamma^i$  satisfizerem

$$\{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{ij}, \quad (2.22)$$

ou seja,

$$(\gamma^i)^2 = 1, \quad (2.23)$$

$$\gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i = 0, \quad i \neq j. \quad (2.24)$$



Uma álgebra que satisfaz a relação (2.22) é chamada de *álgebra de Clifford* de uma forma quadrática positiva definida,  $Cl(V, B)$ . A pergunta se existe  $P = \sqrt{\Delta}$ , uma raiz quadrada para o laplaciano, nos leva a estudar álgebra de Clifford  $Cl(V, B)$  e suas representações.

Representação linear de um objeto algébrico é estudar em quais espaços vetoriais ele age como operador linear, concretizando assim objetos abstratos (elementos de álgebras, grupos, etc.) em matrizes quadradas, promovendo suas operações à soma e multiplicação usuais de matrizes. Essencialmente, reduzimos nosso problema inicial a um problema de álgebra linear.

Neste capítulo vamos definir o que é uma álgebra de Clifford e classificá-la de acordo com a dimensão do espaço vetorial e a forma bilinear escolhida. Depois definiremos o que é um grupo  $Spin(V)$  de um espaço vetorial. Em seguida, falaremos da representação da álgebra de Clifford e explicitaremos os casos em 2 e 4 dimensões. Por fim, estudaremos as simetrias da álgebra de Clifford e classificaremos suas representações irredutíveis.

## 2.2 Álgebra de Clifford: Definição

Começamos com um espaço vetorial  $V$  real de dimensão  $d$ , munido de uma forma bilinear simétrica  $B$ . Toda forma bilinear sobre os reais tem uma forma canônica

$$B = \begin{pmatrix} 0_{r \times r} & & \\ & 1_{s \times s} & \\ & & -1_{t \times t} \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

onde  $d = r + s + t$ .

Uma álgebra é, antes de tudo, um *espaço vetorial* sobre  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , ou seja, satisfaz todos os oito axiomas de um espaço vetorial. Porém, uma álgebra  $\mathcal{A}$  é um pouco mais especial, porque além da soma entre  $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ , existe o *produto* entre estes elementos e essa operação é fechada. Em poucas palavras, se

$$a_1, a_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow a_1 \cdot a_2 = a_3 \in \mathcal{A}. \quad (2.26)$$

Dado um certo espaço vetorial  $V$  de dimensão  $d$  e uma certa base  $V = \text{span}\{a_1, \dots, a_d\}$ , podemos formar a álgebra  $\mathcal{A}_0$  dos polinômios livre-

mente gerados por esses elementos da base. Um elemento geral dessa álgebra de polinômios sobre  $V$  se escreve como

$$P(a_1, \dots, a_d) = \alpha_0 + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_d a_d + \dots \quad (2.27)$$

Podemos considerar relações de equivalência entre polinômios distintos. Em um exemplo simples, considere um espaço vetorial unidimensional,  $V = \{\theta\}$ , dotado de um produto entre vetores, com a propriedade

$$\theta \cdot \theta \equiv \theta^2 = 0. \quad (2.28)$$

Construindo um polinômio livremente gerado por  $\theta$ , temos

$$P(\theta) = \alpha_0 + \alpha_1 \theta + \alpha_2 \theta^2 + \dots + \alpha_n \theta^n + \dots \in \mathcal{A}_0, \quad (2.29)$$

mas por causa da propriedade  $\theta^2 = 0$ , a soma acima não é infinita e sim finita, pois todo monômio  $\theta^n = 0, n \geq 2$ . Assim, o termo mais geral possível desta álgebra é

$$P(\theta) = \alpha_0 + \alpha_1 \theta, \quad \alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}. \quad (2.30)$$

A álgebra exemplo foi a *álgebra de Grassmann*.

Para construir o exemplo acima, utilizamos alguns elementos básicos:

1. Um espaço vetorial  $V = \text{span}\{a_1, \dots, a_d\}$ . Os geradores da álgebra são associados aos elementos da base de  $V$ ;
2. Existência de um produto entre os elementos desse espaço, para poder construir um polinômio livremente gerado pelos elementos da base de  $V$ . Note que essa álgebra  $\mathcal{A}_0$  desses polinômios livremente gerados é infinito dimensional;
3. Uma *relação de equivalência* entre diferentes monômios do polinômio. Então monômios do polinômio geral, aparentemente diferentes, podem ser equivalentes, aglutinando-se num mesmo termo. O resultado dessa aglutinação é matematicamente representada por  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 / \sim$ , onde  $\sim$  representa a relação de equivalência definidora da álgebra.

Os elementos da álgebra são os polinômios reduzidos. Os monômios de grau 1 de  $\mathcal{A}$  são chamados de *geradores da álgebra*. Sinteticamente, podemos escrever

$$\mathcal{A} = \langle a_1, \dots, a_n ; a_i \sim a_j \Leftrightarrow \text{alguma relação é satisfeita} \rangle. \quad (2.31)$$

No caso de Grassmann

$$\mathcal{A} = \langle \theta ; \theta^2 = 0 \rangle. \quad (2.32)$$

Uma álgebra de Clifford  $Cl(V, B)$  pode ser obtida a partir de um espaço vetorial  $V$ . Escolhendo uma base nesse espaço,  $V = \text{span} \{e^1, \dots, e^d\}$  temos um mapa de cada  $e^i$  em um único  $\gamma^i \in Cl(V, B)$ ,  $i = 1, \dots, d$ , tal que os  $\gamma^i$ 's devem satisfazer

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = 2B(e^i, e^j), \quad (2.33)$$

onde  $B$  é a forma bilinear em (2.25). Note que por isso falamos *álgebra de Clifford associada a uma forma bilinear*, mudando a forma bilinear  $B$ , construiríamos *outra* álgebra de Clifford sobre o mesmo espaço vetorial  $V$ . Na forma de apresentação da álgebra (2.31), temos

$$Cl(V, B) = \langle \gamma^i, i = 1, \dots, d; \{\gamma^i, \gamma^j\} = 2B(e^i, e^j) \rangle. \quad (2.34)$$

Podemos ter os seguintes casos particulares para a forma bilinear

Caso Euclideano	$d = s$	$B(e_i, e_j) = \delta_{ij}$
Caso Lorentziano	$t = 1, s = d - 1$	$B(e_i, e_j) = \eta_{ij}$

Na tabela acima dizemos que o número  $s$  de 1's na forma bilinear representa o *número de direções espaciais* e o número de  $-1$ 's, *número de direções temporais*. Por isso, a partir de agora, quando conveniente, escreveremos  $Cl(s, t)$  no lugar de  $Cl(V, B)$  para explicitar quais e quantos tipos de direções temos.

**Observação:** Se  $B$  for degenerada,  $(\gamma^i)^2 = 0$  para  $i = 1, \dots, r$ , então a álgebra de Clifford se reduz à álgebra exterior de  $V$ ,  $\Lambda(V)$ , equivalente à álgebra de Grassmann. Dizemos que  $Cl(V, B)$  é uma 'quantização' de  $\Lambda(V)$ , porque a relação de anticomutação deixa de ser trivial.

Seguem alguns exemplos de álgebras de Clifford

$d$	$(s, t)$	$\{\gamma^i, \gamma^j\}$	$Cl(s, t)$
0	(0, 0)	—	$\mathbb{R}$
1	(1, 0)	$\gamma^2 = 1$	$\mathbb{R}^2$
1	(0, 1)	$\gamma^2 = -1$	$\mathbb{C}$
2	(2, 0)	$2\delta_{ij}$	$M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$
2	(1, 1)	$2\eta_{ij}$	$M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$
2	(0, 2)	$-2\delta_{ij}$	$\mathbb{H}$

Poderíamos continuar a classificar na força bruta os diferentes casos, mas existe uma maneira mais elegante. Ao diagonalizar a forma bilinear  $B$  na forma canônica, estamos quebrando nosso espaço  $V$  em subespaços irredutíveis,

$$V = \underbrace{\mathbb{R}(0) \oplus \dots \oplus \mathbb{R}(0)}_r \oplus \underbrace{\mathbb{R}(+) \oplus \dots \oplus \mathbb{R}(+)}_s \oplus \underbrace{\mathbb{R}(-) \oplus \dots \oplus \mathbb{R}(-)}_t.$$

Agora, seja a seguinte pergunta:

*Como podemos escrever a álgebra de Clifford  $Cl(V \oplus W, B_V \oplus B_W)$ , uma vez conhecidas as álgebras  $Cl(V, B_V)$  e  $Cl(W, B_W)$ ?*

A resposta é a mais simples possível:

$$Cl(V \oplus W, B_V \oplus B_W) = Cl(V, B_V) \otimes Cl(W, B_W). \quad (2.35)$$

Então, a álgebra de Clifford de  $V$  é nada mais que o produto tensorial de álgebras de Clifford dos subespaços

$$Cl(V, B) = \Lambda(\mathbb{R}^r) \otimes \underbrace{Cl(1, 0) \otimes \dots \otimes Cl(1, 0)}_s \otimes \underbrace{Cl(0, 1) \otimes \dots \otimes Cl(0, 1)}_t.$$

### 2.2.1 Caso complexo

Em geral falaremos da álgebra de Clifford complexa. A forma de complexificar  $V$  mais usual é

$$V^{\mathbb{C}} = V \otimes \mathbb{C} = V \oplus iV. \quad (2.36)$$

Portanto, usando o resultado (2.35), a álgebra de Clifford induzida por esse espaço é

$$Cl(V^{\mathbb{C}}, B^{\mathbb{C}}) = Cl(V, B) \otimes \mathbb{C}. \quad (2.37)$$

A forma canônica de  $B$  fica mais simples nos complexos, pois só contém 0 e 1. O espaço  $V^{\mathbb{C}}$  é quebrado da seguinte forma,

$$V^{\mathbb{C}} = \underbrace{\mathbb{C}(0) \oplus \dots \oplus \mathbb{C}(0)}_r \oplus \underbrace{\mathbb{C}(+) \oplus \dots \oplus \mathbb{C}(+)}_n,$$

e a álgebra de Clifford induzida fica

$$\mathbf{Cl}(V, B) = \Lambda(\mathbb{C}^r) \otimes \underbrace{\mathbf{Cl}(+) \otimes \dots \otimes \mathbf{Cl}(+)}_n.$$

## 2.3 O operador de quiralidade

Seja  $\dim V = d$ ,  $d = 2m$  ou  $d = 2m + 1$ . Existe em  $\mathbf{Cl}(V)$  um elemento  $\gamma_*$  dado por

$$\gamma_* = (-i)^m \gamma^1 \dots \gamma^d, \quad (2.38)$$

ou seja, o produto de todos os geradores da álgebra. Observe que em  $d = 3 + 1$ , é usual escrever  $\gamma_* \equiv \gamma_5$ . Esse elemento satisfaz

$$(\gamma_*)^2 = 1, \quad (2.39)$$

$$\{\gamma^i, \gamma_*\} = 0, \text{ para } d = 2m, \forall \gamma^i \in \mathbf{Cl}(V), \quad (2.40)$$

$$[\gamma^i, \gamma_*] = 0, \text{ para } d = 2m + 1, \forall \gamma^i \in \mathbf{Cl}(V). \quad (2.41)$$

Observe

$$\begin{aligned} \{\gamma^i, \gamma_*\} &= \gamma^i \gamma_* + \gamma_* \gamma^i \\ &= \gamma^i \gamma_* + ((-i)^m \gamma^1 \dots \gamma^d) \gamma^i \\ &= \gamma^i \gamma_* + (-i)^m (-1)^{(d-1)} \gamma^i \gamma^1 \dots \gamma^d \\ &= \gamma^i \gamma_* + (-1)^{(d-1)} \gamma^i \gamma_* \\ &= [1 + (-1)^{(d-1)}] \gamma^i \gamma_*. \end{aligned}$$

Usando as relações (2.40) e (2.41), um elemento  $\Gamma_N = \gamma^{a_1} \dots \gamma^{a_N}$ ,  $N$  qualquer, da álgebra satisfaz

$$\gamma_* \Gamma_N \gamma_* = \Gamma_N, \text{ } N \text{ par}, \quad (2.42)$$

$$\gamma_* \Gamma_N \gamma_* = -\Gamma_N, \text{ } N \text{ ímpar}. \quad (2.43)$$

O  $\gamma_*$  é comumente chamado de *elemento de quiralidade da Álgebra de Clifford*.

Agora, existe um operador  $\chi$  que atua na álgebra de Clifford como

$$\chi(\gamma^{a_1} \dots \gamma^{a_k}) = (-1)^k \gamma^{a_1} \dots \gamma^{a_k} \text{ ou } \chi(\Gamma_k) = (-1)^k \Gamma_k. \quad (2.44)$$

Vemos que essa operação quebra a álgebra de Clifford em uma subálgebra  $Cl^+(V, B)$  e um subespaço  $Cl^-(V, B)$ ,

$$Cl(V, B) = Cl^+(V, B) \oplus Cl^-(V, B) \quad (2.45)$$

onde  $Cl^\pm(V, B)$  denota os autoespaços com autovalor  $\pm 1$  de  $\chi$ . Pela definição de  $\chi$ , vemos que  $Cl^+(V, B)$  é gerado pelos monômios de grau par, e  $Cl^-(V, B)$  pelos de grau ímpar. Podemos inferir que

$$\begin{aligned} \Gamma_N, \Gamma_M \in Cl^+(V, B) &\Rightarrow \Gamma_N \Gamma_M \in Cl^+(V, B), \\ \Gamma_N, \Gamma_M \in Cl^-(V, B) &\Rightarrow \Gamma_N \Gamma_M \in Cl^+(V, B), \\ \Gamma_N \in Cl^+(V, B), \Gamma^M \in Cl^-(V, B) &\Rightarrow \Gamma_N \Gamma_M \in Cl^-(V, B). \end{aligned}$$

Portanto,  $Cl^+(V, B)$  é uma subálgebra e  $Cl^-(V, B)$  é um  $Cl^+(V, B)$ -módulo<sup>1</sup> sobre essa álgebra. Olhando para as equações (2.42) e (2.43), podemos concluir finalmente que

$$\begin{aligned} \chi(\Gamma_A) &\equiv \gamma_* \Gamma_A \gamma_* = \Gamma_A, \text{ } A \text{ par,} \\ \chi(\Gamma_A) &\equiv \gamma_* \Gamma_A \gamma_* = -\Gamma_A, \text{ } A \text{ ímpar,} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\chi(\cdot) = \gamma_*(\cdot)\gamma_*$$

## 2.4 Grupos e álgebra de Clifford: $\text{Spin}^c(V)$ , $\text{Spin}(V)$ , $\text{SO}(V)$

O conjunto de elementos invertíveis da álgebra de Clifford, i.e, se  $v, v^{-1} \in Cl(V)$  tal que  $v \cdot v^{-1} = 1$ , forma um grupo. Este grupo contém uma série de subgrupos interessantes.

<sup>1</sup>Um  $\mathcal{A}$ -módulo  $\mathcal{B}$  sobre uma álgebra  $\mathcal{A}$  significa dizer: se  $b \in \mathcal{B}$ , então  $a \cdot b \in \mathcal{B}$  para qualquer  $a \in \mathcal{A}$ .

Seja  $v \in Cl(V)$  um elemento invertível. Podemos definir a conjugação de um elemento  $b \in V$  por  $v \in Cl(V)$  como

$$\begin{aligned} \phi(v) : V &\longrightarrow V \\ b &\mapsto \phi(v)b = \chi(v)bv^{-1}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Quando  $v$  é par,  $\chi(v) = v$ , vemos que  $\phi(v)$  é uma rotação de  $b \in V$ , e quando  $\chi(v) = -v$ ,  $v$  é ímpar,  $\phi(v)$  inverte  $b \in V$ . Rotações e inversões denotados por  $R$  são elementos do espaço de operadores de  $V$  ( $End(V)$ ) que preservam a forma bilinear, i.e,  $B(Ru, Rv) = B(u, v)$ . Eles formam um grupo  $O(V)$  chamado *grupo das transformações ortogonais de  $V$* . Se ademais  $\det R = 1$ , então  $R$  é uma rotação própria, preservando a orientação de  $V$ . O conjunto das rotações próprias forma o grupo  $SO(V)$ .

Um vetor unitário é definido por  $w^\dagger w = 1$  em  $V^C \subseteq Cl(V)$ , i.e,  $w^{-1} = w^\dagger$ . Quaisquer desses vetores unitários são da forma  $w = \lambda v$  onde  $B(v, v) = 1$ , logo  $|\lambda| = 1$ , e  $\phi(w) = \phi(v)$ . Sejam  $w_1, w_2 \in Cl(V)$  vetores unitários pares, então  $w_1 w_2$  é um elemento unitário em  $Cl(V)^+$ , definido em (2.45). O grupo gerado por todos os elementos pares unitários é chamado de  $Spin^c(V)$ .

Veja que para um  $x \in V$  e  $v = e^1 \dots e^r \in Cl(V)$  qualquer

$$\begin{aligned} \phi(v)x &= \phi(e^1 \dots e^r)x = (-1)^r (\gamma^1 \dots \gamma^r)x (\gamma^r \dots \gamma^1) \\ &= (-1)^{(r-1)} (\gamma^1 \dots \gamma^{r-1}) (\phi(e^r)x) (\gamma^{r-1} \dots \gamma^1) \\ &= \phi(e^1) \dots \phi(e^r)x. \end{aligned}$$

Então um elemento geral de  $O(V)$  é a composição de  $r$ -reflexões. As rotações são composições pares dessas reflexões (teorema de Cartan - Dieudonné). Ainda,  $\phi(e^i e^j)$  geram o  $SO(V)$ .

Para todo  $u \in Spin^c(V)$ , o mapa  $\phi(u)x = uxu^{-1}$  é uma rotação, então  $\phi(u) \in SO(V)$ . Portanto  $\phi$  é um homomorfismo de  $Spin^c(V)$  em  $SO(V)$ . O núcleo da aplicação  $\phi$  é definido por

$$\begin{aligned} \ker \phi &= \langle u \in Spin^c(V); \quad \phi(u) = e, e \in SO(V) \rangle, \\ \phi(u)x &= ex = uxu^{-1}, \forall x \in V \implies xu = ux. \end{aligned}$$

Então o núcleo de  $\phi$  é o centro da álgebra de Clifford, i.e, os elementos de  $Cl(V)$  que comutam com todos os outros. Como estamos falando do subgrupo par, eles são todos os múltiplos da unidade de módulo 1,  $u = \alpha \mathbb{1}, \alpha \in \mathbb{C}$  e  $|\alpha|^2 = 1$ . Resumidamente

$$\ker \phi = \langle u \in Spin^c(V) \mid u = \alpha \mathbb{1}, |\alpha|^2 = 1 \rangle, \quad (2.47)$$

ou seja, um círculo unitário  $S^1$ . Com isso, construímos a sequência exata, onde  $\iota$  é o mapa de inclusão de  $S^1$  em  $Spin^c(V)$ :

$$1 \rightarrow S^1 \xrightarrow{\iota} Spin^c(V) \xrightarrow{\phi} SO(V) \rightarrow e. \quad (2.48)$$

Considere agora a operação de *transposição*, definida por  $u^T = (w_1 \dots w_{2k})^T = w_{2k} \dots w_1$ . Seja  $u = w_1 \dots w_{2k}$  um elemento de  $Spin^c(V)$ , onde  $w_j = \lambda_j v_j$  são vetores unitários. O grupo  $Spin(V)$  é definido como

$$Spin(V) = \langle u \in Spin^c(V) \mid u^T u = 1 \rangle. \quad (2.49)$$

Logo  $u^* = u$ ,  $u$  é real. Portanto

$$u^T u = w_{2k} \dots w_1^2 \dots w_{2k} = \lambda_1^2 w_{2k} \dots w_2^2 \dots w_{2k} = \lambda_1^2 \dots \lambda_n^2 = 1, \quad (2.50)$$

e  $(\lambda_i)^* = \lambda_i$ , logo  $\lambda_i = \pm 1$ . Como conjugação complexa é igual à conjugação de carga em  $Cl^+(V)$ , concluímos que  $Spin(V)$  é um subgrupo invariante por conjugação de carga de  $Spin^c(V)$ . Como  $Spin(V) \hookrightarrow Spin^c(V)$ , temos também a seguinte sequência exata

$$1 \rightarrow \{\pm 1\} \xrightarrow{\iota} Spin(V) \xrightarrow{\phi} SO(V) \rightarrow e. \quad (2.51)$$

Observe que  $Spin(V)$  e  $SO(V)$  são grupos de Lie. Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável munida de uma estrutura de grupo, onde as operações

1.  $\cdot : G \times G \rightarrow G, (g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2,$
2.  $^{-1} : G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1},$



são diferenciáveis. O elemento neutro do grupo de Lie é denotado por  $e$ . Seus elementos conectados à identidade podem ser obtidos através de uma transformação contínua. Se todo o grupo não for gerado assim, existirá transformações discretas que cobrirão o restante do grupo. Por exemplo, o grupo de Lorentz.

Uma *álgebra de Lie* é um espaço vetorial  $\mathfrak{g}$  sobre  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$  munida de uma operação bilinear  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  chamado *colchete de Lie*, que satisfaz os seguintes axiomas

1. Bilinearidade:  $[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z]; a, b \in \mathbb{R}, \mathbb{C}; x, y, z \in \mathfrak{g}$ ,
2. Antissimetria:  $[x, x] = 0, \forall x \in \mathfrak{g}$ ,
3. Identidade de Jacobi:  $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$ .

Note que antissimetria e bilinearidade implicam em anticomutatividade  $[x, y] = -[y, x], \forall x, y \in \mathfrak{g}$ . O espaço tangente à identidade do grupo de Lie sempre tem a estrutura da álgebra de Lie. Exponenciando os geradores dessa álgebra, encontraremos a parte conectada à identidade do grupo. Para toda álgebra associativa  $\mathcal{A}$  dotada de um produto  $\cdot$  (como a álgebra de Clifford), podemos construir uma álgebra de Lie  $L(\mathcal{A})$ . Como espaço vetorial,  $L(\mathcal{A})$  e  $\mathcal{A}$  são iguais. O colchete de Lie de  $L(\mathcal{A})$  é definido como sendo o anticomutador em  $\mathcal{A}$ :

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a. \quad (2.52)$$

A associatividade do produto implica na identidade de Jacobi.

Os grupos  $Spin(V)$  e  $SO(V)$  não são isomorfos entre si, mas as respectivas álgebras de Lie são. O fato das álgebras serem isomorfas significa dizer que localmente esses grupos são isomorfos, mas globalmente não. Basta lembrar do exemplo da álgebra de Lie de momento angular em Mecânica Quântica. Temos os geradores de momento angular orbital  $L_i$  que satisfazem

$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk}L_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (2.53)$$

e os momentos de Spin  $S_i$  que satisfazem

$$[S_i, S_j] = i\varepsilon_{ijk}S_k, \quad S_i \equiv \frac{1}{2}\sigma_i, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (2.54)$$

com  $\sigma_i$  sendo as matrizes de Pauli. As equações (2.53) e (2.54) têm a mesma forma. Porém, quando exponenciamos estes geradores a partir da equação (2.53), obtemos

$$e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{L}}, \quad \text{mod } 2\pi, \quad (2.55)$$

e a partir da equação (2.54), obtemos

$$e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma}}, \quad \text{mod } 4\pi. \quad (2.56)$$

Conclusão: o período da equação (2.55) é duas vezes maior que o período da equação (2.56). Logo, um *espinor*, um objeto rodado pela equação (2.56), é um objeto que precisa de 'duas rotações por  $2\pi$ ' para voltar ao estado inicial, ao contrário de um objeto 'ordinário'.

### 2.4.1 Exemplos

#### 2.4.2 $\dim V = 2$

O espaço vetorial  $V$  é gerado pelos vetores  $\{e^1, e^2\}$ , no caso Euclideano, e  $\{e^0, e^1\}$ , no caso Lorentziano. Considerando as álgebras de Clifford, associamos cada vetor da base à um gerador da álgebra

$$e^i \longrightarrow \gamma^i, \quad \{\gamma^i, \gamma^j\} = 2\delta^{ij}, \quad i, j = 1, 2, \quad (2.57)$$

ou

$$e^i \longrightarrow \gamma^i, \quad \{\gamma^i, \gamma^j\} = 2\eta^{ij}, \quad i, j = 0, 1. \quad (2.58)$$

O  $Spin^c(2)$  é formado por polinômios  $u$  de grau par da álgebra de Clifford e unitários, i.e.,  $u^\dagger u = 1$ . Logo

$$u = e^{it}(\alpha\mathbb{1} + \beta\gamma^1\gamma^2), \quad \text{e } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (2.59)$$

O caso  $Spin^c(1,1)$  é feito por analogia. Como esses grupos são grupos de Lie, cada elemento desse grupo é obtido pela exponenciação a um parâmetro  $\theta$  dos geradores da álgebra de Lie. Podemos assim encontrar

os coeficientes  $\alpha, \beta$  em (2.59) em função de  $\theta$ . No geral, calculamos primeiro uma exponencial geral dos geradores de Clifford  $\gamma^i$ , fazendo  $\vec{n} = (n_1, \dots, n_d)$ ,  $|\vec{n}| = 1$  e  $\vec{\gamma} = (\gamma^1, \dots, \gamma^d)$ . Então

$$u = \exp(i\theta\vec{n} \cdot \vec{\gamma}), \quad (2.60)$$

onde

$$\begin{aligned} (\vec{n} \cdot \vec{\gamma})^2 &= n^i n^j \gamma^i \gamma^j, \\ &= \frac{1}{2} n^i n^j \{\gamma^i, \gamma^j\}, \\ &= |\vec{n}|^2 = 1. \end{aligned}$$

Usando a relação (2.57),

$$\begin{aligned} e^{i\theta\vec{n} \cdot \vec{\gamma}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta\vec{n} \cdot \vec{\gamma})^k}{k!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \theta^{2m} + i(\vec{n} \cdot \vec{\gamma}) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \theta^{2m+1} \\ &= \cos \theta + i(\vec{n} \cdot \vec{\gamma}) \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.61)$$

A álgebra de Lie  $\mathfrak{spin}^c(2)$  é gerada por apenas um elemento:

$$\Sigma^{12} = \frac{i}{4} [\gamma^1, \gamma^2] = \frac{i}{2} \gamma^1 \gamma^2. \quad (2.62)$$

Então  $u \in Spin^c(2)$  é obtido a partir de (2.61)

$$u(\theta) = e^{it} \left( \cos \frac{\theta}{2} - \gamma^1 \gamma^2 \sin \frac{\theta}{2} \right). \quad (2.63)$$

Agora, usando a relação (2.58), devemos ter cuidado porque

$$(\gamma^0)^2 = -1.$$

Então, calculando explicitamente,

$$\begin{aligned} (\gamma^0 \gamma^1)^2 &= \gamma^0 \gamma^1 \gamma^0 \gamma^1 = -\gamma^0 \underbrace{\gamma^1 \gamma^1}_{+1} \gamma^0 = -\underbrace{\gamma^0 \gamma^0}_{-1} = 1, \\ (\gamma^0 \gamma^1)^{2n} &= [(\gamma^0 \gamma^1)^2]^n = 1, \\ (\gamma^0 \gamma^1)^{2n+1} &= (\gamma^0 \gamma^1)^{2n} (\gamma^0 \gamma^1) = \gamma^0 \gamma^1, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{\theta}{2}\gamma^0\gamma^1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{2n} \frac{(\gamma^0\gamma^1)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{2n+1} \frac{(\gamma^0\gamma^1)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{2n} \frac{1}{(2n)!} - \gamma^0\gamma^1 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{2n+1} \frac{1}{(2n+1)!} \\
&= \cosh \frac{\theta}{2} - \gamma^0\gamma^1 \sinh \frac{\theta}{2}.
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Então um elemento em  $Spin^c(1,1)$  é da forma

$$u(\theta) = e^{it} \left( \cosh \frac{\theta}{2} - \gamma^0\gamma^1 \sinh \frac{\theta}{2} \right). \tag{2.65}$$

Quando fixamos  $t = 0$  ou  $t = \pi$ , obtemos o  $Spin(2)$  ( $Spin(1,1)$ ).

Vamos mostrar agora que  $\phi$  realmente é um homomorfismo de  $Spin(2)$  ( $Spin^c(2)$ ) para  $SO(2)$  ou  $Spin(1,1)$  ( $Spin^c(1,1)$ ) para  $SO(1,1)$ . Um elemento qualquer de  $V$  pode ser incluído na à algebra de Clifford pelo seguinte mapa

$$v \longrightarrow v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\gamma^1 + y\gamma^2, \tag{2.66}$$

e

$$\begin{aligned}
\gamma^i(\gamma^i)^\dagger &= 1, & \gamma^0(\gamma^0)^\dagger &= 1, \\
(\gamma^i)^2 = 1 &\implies (\gamma^i)^\dagger = \gamma^i, & (\gamma^0)^2 = -1 &\implies (\gamma^0)^\dagger = -\gamma^0, \\
u^\dagger &= \cos \frac{\theta}{2} + \gamma^1\gamma^2 \sin \frac{\theta}{2}, & u^\dagger &= \cosh \frac{\theta}{2} - \gamma^0\gamma^1 \sinh \frac{\theta}{2}.
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Então para o caso (2.63) ou  $u \in Spin^c(2)$ :

$$\begin{aligned}
\phi(u)v &= e^{it} \left[ \left( \cos \frac{\theta}{2} - \gamma^1 \gamma^2 \sin \frac{\theta}{2} \right) \right] (x\gamma^1 + y\gamma^2) \left[ e^{-it} \left( \cos \frac{\theta}{2} + \gamma^1 \gamma^2 \sin \frac{\theta}{2} \right) \right] \\
&= \left[ \cos \frac{\theta}{2} (x\gamma^1 + y\gamma^2) - \sin \frac{\theta}{2} (-x\gamma^2 + y\gamma^1) \right] \left( \cos \frac{\theta}{2} + \gamma^1 \gamma^2 \sin \frac{\theta}{2} \right) \\
&= \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) (x\gamma^1 + y\gamma^2) + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} (x\gamma^2 - y\gamma^1) \\
&= \cos \theta (x\gamma^1 + y\gamma^2) + \sin \theta (x\gamma^2 - y\gamma^1) \\
&= (x \cos \theta - y \sin \theta) \gamma^1 + (y \cos \theta + x \sin \theta) \gamma^2 \\
&= \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ y \cos \theta + x \sin \theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{2.68}
\end{aligned}$$

Para o caso (2.64) ou  $u \in Spin^c(1,1)$ :

$$\begin{aligned}
\phi(u)v &= e^{it} \left[ \left( \cosh \frac{\theta}{2} - \gamma^0 \gamma^1 \sinh \frac{\theta}{2} \right) \right] (x\gamma^0 + y\gamma^1) \left[ e^{-it} \left( \cosh \frac{\theta}{2} - \gamma^0 \gamma^1 \sinh \frac{\theta}{2} \right) \right] \\
&= \left( \cosh^2 \frac{\theta}{2} + \sinh^2 \frac{\theta}{2} \right) (x\gamma^0 + y\gamma^1) - 2 \sinh \frac{\theta}{2} \cosh \frac{\theta}{2} (x\gamma^1 + y\gamma^0) \\
&= \cosh \theta (x\gamma^0 + y\gamma^1) - \sinh \theta (x\gamma^1 + y\gamma^0) \\
&= (x \cosh \theta - y \sinh \theta) \gamma^0 + (y \cosh \theta - x \sinh \theta) \gamma^1 \\
&= \begin{pmatrix} x \cosh \theta - y \sinh \theta \\ y \cosh \theta - x \sinh \theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta \\ -\sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{2.69}
\end{aligned}$$

A matriz  $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  é ortogonal e seu determinante igual a 1. Portanto, para cada  $\theta$  temos um elemento do grupo  $SO(2)$ , representando uma rotação num plano  $x - y$ , onde  $\theta$  é o ângulo de rotação.

A matriz  $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta \\ -\sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix}$  também é ortogonal com determinante igual a 1. Portanto, para cada  $\theta$  temos uma matriz do grupo

$SO(1,1)$ . Fisicamente, representa um 'boost' de Lorentz na direção  $x$ , ou uma mudança de referencial, onde  $\theta$  tem interpretação de parâmetro de rapidez  $\frac{v}{c}$ , com  $v$  a velocidade do novo referencial e  $c$  a velocidade da luz.

### 2.4.3 $\dim V = 4$ ou $2n$

Seja  $\dim V = 4$  ou  $2n$  qualquer. A álgebra de Lie  $\mathfrak{spin}^c(2n)$  é gerada por

$$\Sigma^{ij} = \frac{i}{4}[\gamma^i, \gamma^j] = \frac{i}{2}\gamma^i\gamma^j, \quad i \neq j. \quad (2.70)$$

Então o grupo  $Spin^c(2n)$  é obtido pela exponenciação desses geradores a um parâmetro

$$Spin^c(2n) \ni u = \exp\left(i \sum_i (t^i + \theta_j \Sigma^{ij})\right) = \prod_{i=1, i \neq j}^{2n} \exp(i(t^i + \theta_j \Sigma^{ij})), \quad (2.71)$$

e usando (2.61), temos que

$$e^{i\theta_j \Sigma^{ij}} = e^{-\frac{\theta_j}{2}\gamma^i\gamma^j} = \cos \frac{\theta_j}{2} - \gamma^i\gamma^j \sin \frac{\theta_j}{2} \in SU(2), \quad (2.72)$$

reduzindo o problema a várias cópias do caso 2-dimensional. Podemos concluir que

$$u \in Spin^c(2n) \implies u = \prod_{i=1, i \neq j}^{2n} e^{it^i} \left( \cos \frac{\theta_j}{2} - \gamma^i\gamma^j \sin \frac{\theta_j}{2} \right), \quad (2.73)$$

então o grupo  $Spin^c(2n) = \underbrace{Spin^c(2) \times \dots \times Spin^c(2)}_n$ . Para obter o  $Spin(2n)$ ,

basta fixar cada  $t_i = 0$  ou  $t_i = \pi$ .

Para  $Spin^c(4)$ , podemos escolher  $u \in Spin^c(4)$  como

$$u(\theta_1, \theta_3) = e^{it} \left( \cos \frac{\theta_1}{2} - \gamma^1\gamma^2 \sin \frac{\theta_1}{2} \right) \left( \cos \frac{\theta_3}{2} - \gamma^3\gamma^4 \sin \frac{\theta_3}{2} \right), \quad (2.74)$$

ou seja,  $u(\theta_1, \theta_3) = u_1 u_3$ , produto de duas rotações. Então

$$\begin{aligned} uvu^{-1} &= u_1 u_3 v u_3^\dagger u_1^\dagger \\ &= u_1 u_3 (x_1 \gamma^1 + x_2 \gamma^2 + x_3 \gamma^3 + x_4 \gamma^4) u_3^\dagger u_1^\dagger \\ &= u_1 x_1 (\gamma^1 + x_2 \gamma^2) u_1^\dagger + u_3 (x_3 \gamma^3 + x_4 \gamma^4) u_3^\dagger \\ &= \phi(u_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \phi(u_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e  $u_i(x_i \gamma^i + y_j \gamma^j) u_i^\dagger = \cos \theta_i (x_i \gamma^i + y_j \gamma^j) + \sin \theta_i (-y_j \gamma^i + x_i \gamma^j)$ , de forma que

$$uvu^\dagger = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 \\ 0 & 0 & \sin \theta_3 & \cos \theta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \quad (2.75)$$

## 2.5 Espaço de Fock e Representação da Álgebra de Clifford

Encontrar uma *representação linear* de um objeto algébrico é determinar em qual espaço ela atua como um operador linear, ou simplesmente, como podemos escrever esses objetos na forma de *matrizes*. A representação linear da álgebra de Clifford será dado por um espaço de Hilbert. Um *espaço de Hilbert* é um espaço vetorial complexo munido de um produto interno *sesquilinear* positivo definido, ou seja,

1.  $\langle av|bw \rangle = \bar{a}b \langle v|w \rangle, \forall a, b \in \mathbb{C}, |v\rangle, |w\rangle \in \mathcal{H},$

2.  $\langle v|v \rangle > 0, \text{ se } v \neq 0.$

Para começar a construir o espaço de Hilbert onde representaremos a álgebra de Clifford, partiremos de um espaço vetorial real de  $\dim V = 2m$ . Podemos torná-lo complexo através de uma *estrutura complexa ortogonal*, ou seja, um operador  $J \in O(V)$ ,  $B(Ju, Jv) = B(u, v)$ , que satisfaz

$$J^2 = -1 \text{ e } J^T J = 1 \implies J^T = -J. \quad (2.76)$$

Então o espaço vetorial inicial  $V$  se torna um espaço complexo  $V_J$  pela regra  $Jv \equiv iv$ . Munindo-o com um produto interno induzido da forma bilinear  $B$

$$\langle u|v \rangle = B(u, v) + iB(Ju, v), \quad (2.77)$$

o espaço  $V_J$  será  $m$ -dimensional complexo. Se  $\{|u_1\rangle, \dots, |u_m\rangle\}$  for uma base de  $V_J$ , então  $\{|u_1\rangle, J|u_1\rangle, \dots, |u_m\rangle, J|u_m\rangle\}$  é uma base de  $V$ .

Equivalentemente, podemos construir um espaço de Hilbert a partir de um espaço vetorial complexo  $V^{\mathbb{C}}$ , definido pela equação (2.36), e quebrá-lo em dois subespaços ortogonais definidos por

$$W_J = \{|v\rangle - iJ|v\rangle \in V^{\mathbb{C}}; |v\rangle \in V\}, \quad (2.78)$$

$$\overline{W}_J = \{|v\rangle + iJ|v\rangle \in V^{\mathbb{C}}; |v\rangle \in V\}, \quad (2.79)$$

com produto interno nesse espaço definido por

$$\langle\langle w|z \rangle\rangle = 2B(\overline{w}, z). \quad (2.80)$$

Os espaços  $W_J$  e  $\overline{W}_J$  são ortogonais entre si, pois se  $z \in W_J$  e  $\overline{w} \in \overline{W}_J$ , então

$$\begin{aligned} \langle\langle \overline{w}|z \rangle\rangle &= 2B(w, z) = 2B(w - iJw, v - iJv), \\ &= 2(B(w, v) - iB(Jw, v) - iB(w, Jv) - B(Jw, Jv)), \\ &= 2(B(w, v) + iB(w, Jv) - iB(w, Jv) - B(w, v)), \quad \text{pois } J^T = -J, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como  $J^2 = -1$ , a estrutura complexa  $J$  define um projetor em  $V^{\mathbb{C}}$

$$P_J = \frac{1}{2}(1 - iJ), \quad \overline{P}_J = \frac{1}{2}(1 + iJ). \quad (2.81)$$

Os subespaços  $W_J$  e  $\overline{W}_J$  são autoespaços de  $J$  porque

$$|w\rangle \in W_J \Rightarrow J|w\rangle = i|w\rangle, \quad (2.82)$$

$$|\overline{w}\rangle \in \overline{W}_J \Rightarrow J|\overline{w}\rangle = -i|\overline{w}\rangle. \quad (2.83)$$

Então,  $V^{\mathbb{C}}$  é decomposto em

$$V^{\mathbb{C}} = W_J \oplus \overline{W}_J, \quad (2.84)$$



chamada de *polarização de  $V^{\mathbb{C}}$* .

Essas duas abordagens são equivalentes e tem correspondência entre si, pois se  $|w\rangle \in W_J$

$$|w\rangle = |u\rangle - i|v\rangle, |u\rangle, |v\rangle \in V, \quad (2.85)$$

ou, definindo  $|v\rangle \equiv J|u\rangle$ , podemos construir o espaço  $W_J$  fazendo

$$W_J = \{|u\rangle - iJ|u\rangle; |u\rangle \in V\}, \quad (2.86)$$

mostrando assim que são equivalentes.

O *espaço de Fock* também é um espaço de Hilbert. Ele é o espaço que contém todos os possíveis produtos tensoriais de um mesmo espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , que representa o estado de uma partícula  $|\psi\rangle$ . Quando fazemos o produto tensorial  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ , construímos o estado de duas partículas,  $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \equiv |\psi_1\psi_2\rangle$ . Assim,

$$F_\nu(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_\nu \mathcal{H}^{\otimes n} = \mathbb{C} \oplus \mathcal{H} \oplus (S_\nu(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})) \oplus (S_\nu(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H})) \oplus \dots$$

Como estamos falando do *mesmo* espaço de Hilbert sendo copiado, precisamos falar de estatística de partículas idênticas. O  $S_\nu$  é o operador que simetriza ou antissimetriza o produto tensorial, dependendo se estamos descrevendo partículas que obedecem a estatística bosônica ( $\nu = +$ ) ou fermiônica ( $\nu = -$ ). O  $\mathbb{C}$  representa o estado com nenhuma partícula, o vácuo, representado por  $|0\rangle$ .

Um estado em  $F_\nu(\mathcal{H})$  é dado, por exemplo

$$|\Psi\rangle_\nu = |\Psi_0\rangle_\nu \oplus |\Psi_1\rangle_\nu \oplus |\Psi_2\rangle_\nu \oplus \dots = a_0 |0\rangle \oplus \sum_i |\psi_i\rangle \oplus \sum_{ij} |\psi_i\psi_j\rangle \otimes \dots,$$

onde

1.  $|0\rangle$  é o estado de vácuo e  $a_0 \in \mathbb{C}$  um coeficiente,
2.  $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}$  são estados de um partícula,
3.  $|\psi_i\psi_j\rangle = \frac{1}{2}(|\psi_i\rangle \otimes |\psi_j\rangle + (-1)^\nu |\psi_j\rangle \otimes |\psi_i\rangle) \in S_\nu(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$  é um estado simétrico ou antissimétrico, dependendo da estatística.

O caso de interesse no próximo capítulo será o fermiônico. O espaço de Fock então se reduz à álgebra exterior de  $\mathcal{H}$ ,  $\Lambda(\mathcal{H})$ . Podemos denotar um vetor nesse espaço como

$$|u_1 \dots u_k\rangle \equiv u_1 \wedge \dots \wedge u_k, \quad u_i \in \mathcal{H}, \quad (2.87)$$

lembrando que  $|\dots u_i u_j \dots\rangle = -|\dots u_j u_i \dots\rangle$  devido à antissimetria do produto exterior  $\wedge$ .

Podemos fazer duas abordagens,

1. Começamos com  $\mathcal{H} = V_J$ , então o espaço de Fock será  $F(V_J) = \Lambda(V_J)$ . O produto interno de  $F(V_J)$  será

$$\langle u_1 \dots u_k | v_1 \dots v_l \rangle_J = \delta_{kl} \det[\langle u_i | v_j \rangle_J], \quad (2.88)$$

2. Começamos com  $\mathcal{H} = W_J$  ou  $\overline{W}_J$ , então  $F(W_J) = \Lambda(W_J)$  ou  $\Lambda(\overline{W}_J)$ , ou *espaço de Fock polarizado*, com produto interno

$$\langle\langle z_1 \dots z_k | w_1 \dots w_l \rangle\rangle = \delta_{kl} \det[\langle\langle z_i | w_j \rangle\rangle]. \quad (2.89)$$

O espaço de Fock  $F(W_J)$  é *polarizado à direita* e o  $F(\overline{W}_J)$  é *polarizado à esquerda*. Os elementos de ambos espaços são chamados de *espinores puros*.

Como estamos tratando de álgebra exterior, existem duas operações naturais em  $\Lambda(V)$ ,

1. Produto exterior

$$\begin{aligned} e(u_0) : \bigwedge^k(V) &\longrightarrow \bigwedge^{k+1}(V) \\ |u_1 \dots u_k\rangle &\mapsto |u_0 u_1 \dots u_k\rangle \\ [e(u_0)]^2 |u_1 \dots u_k\rangle &= |u_0 u_0 u_1 \dots u_k\rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.90)$$

Ele será o equivalente ao operador de criação da teoria quântica de campos, então  $e(v) \equiv b(v)^\dagger$ .

2. Contração

$$\begin{aligned} i(\overline{v}) : \bigwedge^k(V) &\longrightarrow \bigwedge^{k-1}(V) \\ i(\overline{v}) |u_1 \dots u_k\rangle &= \sum_i^k (-1)^{j-1} \langle v | u_j \rangle |u_1 \dots \widehat{u}_j \dots u_k\rangle, \end{aligned} \quad (2.91)$$

onde o símbolo  $\hat{v}_j$  significa omissão desse vetor e  $[i(\bar{v})]^2 = 0$ . Esse operador é o equivalente ao operador de destruição, ou seja,  $i(\bar{v}) \equiv b(v)$ . O  $\bar{v}$  serve para indicar que  $i(\bar{v})$  é antilinear com respeito à entrada  $v$ .

A relação

$$e(v)i(v) + i(v)e(v) \equiv b^\dagger(v)b(v) + b(v)b^\dagger(v), \quad (2.92)$$

é equivalente à multiplicação por  $B(v, v)$ , pois

$$\begin{aligned} & (e(u_0)i(u_0) + i(u_0)e(u_0)) |u_1 \dots u_k\rangle \\ &= e(u_0) \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \langle u_0 | u_j \rangle |u_1 \dots \hat{u}_j \dots u_k\rangle \\ &+ i(u_0) |u_0 u_1 \dots u_k\rangle \\ &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \langle u_0 | u_j \rangle |u_0 u_1 \dots \hat{u}_j \dots u_k\rangle \\ &+ \sum_{j=1}^k (-1)^j \langle u_0 | u_j \rangle |u_0 u_1 \dots \hat{u}_j \dots u_k\rangle \\ &= \langle u_0 | u_0 \rangle |u_1 \dots u_k\rangle. \end{aligned}$$

A ação da álgebra de Clifford no espaço de Fock  $F(V_J)$  é obtida a partir da soma desses operadores  $\gamma(v) = e(v) + i(v)$ , pois  $\gamma(v)^2 = B(v, v)$  e  $e(v)i(u) + i(u)e(v) = B(u, v)$ , de forma que

$$\gamma(v)\gamma(u) + \gamma(u)\gamma(v) = 2B(u, v), \forall u, v \in V, \quad (2.93)$$

ou seja,  $\gamma(v)$  obedece a relação da álgebra de Clifford. O  $\gamma(v)$  representa a ação da álgebra de Clifford no espaço de Fock  $F(V_J)$ . Como no espaço de Fock polarizado  $|v\rangle = P_J |v\rangle + \bar{P}_J |v\rangle$ , vemos que  $\gamma(v)$  se reduz à

$$\gamma(v) = e(P_J v) + i(\bar{P}_J v). \quad (2.94)$$

Como os subespaços  $W_J$  e  $\bar{W}_J$  são ortogonais entre si, então  $\gamma(w) = e(w)$ , se  $|w\rangle \in W_J$  e  $\gamma(\bar{z}) = i(\bar{z})$ , se  $|\bar{z}\rangle \in \bar{W}_J$ . Na linguagem de operadores da teoria quântica de campos, sendo  $v = e^i, i = 1, \dots, d$ , vetores da base

$$\gamma(e^i) \equiv \gamma^i = b_i^\dagger + b_i \quad (2.95)$$

e eles satisfazem

$$\{b_i^\dagger, b_j\} = \langle e_i | e_j \rangle = \langle \langle P_j e_i | P_j e_j \rangle \rangle = \delta_{ij} \quad (2.96)$$

$$\{b_i^{(+)}, b_j^{(+)}\} = 0. \quad (2.97)$$

A ação de (2.95) no espaço de Fock é irredutível, ou seja, não há uma mudança de base em que o espaço se quebre em subespaços menores. Isso segue do lema de Schur<sup>2</sup>: para dimensões pares, o único elemento  $T$  da álgebra que comuta com todos os outros é um escalar. Suponha que  $T$ , promovido à operador, comute com cada  $e(w)$  e  $i(\bar{z})$ , para  $w, z \in W_J$ . Atuando no vácuo, temos  $i(\bar{z})T|0\rangle = T(i(\bar{z})|0\rangle) = 0$ , então  $T|0\rangle = t|0\rangle$  com  $t \in \mathbb{C}$ . Portanto, fazendo  $T$  atuar num vetor qualquer

$$\begin{aligned} T|w_1 \dots w_r\rangle &= T(e(w_1) \dots e(w_r))|0\rangle, \\ &= e(w_1) \dots e(w_r)(t|0\rangle), \\ &= t|w_1 \dots w_r\rangle, \end{aligned}$$

provando assim a afirmação.

## 2.6 Dimensões ímpares

Seja  $\dim V = 2m + 1$ ,  $V = \text{span}\{e_1, \dots, e_{2m+1}\}$  e  $B(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ . Seja  $U$  subespaço de  $V$  tal que  $U = \text{span}\{e_1, \dots, e_{2m}\}$ . Podemos então construir um espaço de Fock onde  $\text{Cl}(U)$  age irredutivelmente. Mas  $\text{Cl}(U) \equiv \text{Cl}(V)^+$ , portanto  $F(U_J)$  também é uma representação irredutível de  $\text{Cl}(V)^+$ . A álgebra  $\text{Cl}(V)$  é gerada por  $\text{Cl}(V)^+$  e agindo com o elemento  $\gamma_*$  em  $\text{Cl}(V)^+$ , teríamos  $\text{Cl}(V)^-$ . Assim, podemos tornar  $F(U_J)$  uma representação da álgebra completa fazendo  $\gamma_*$  agir em  $F(U_J)$ . Temos então duas representações  $2^m$ -dimensionais irredutíveis para a mesma álgebra de Clifford  $\text{Cl}(V)$  cujas restrições à parte par  $\text{Cl}(U)$  da álgebra coincidem.

<sup>2</sup>Seja  $M(g)$  a representação matricial de um elemento  $g$  de um grupo  $G$ . Qualquer matrix  $S$  que satisfaça

$$M(g)S = SM(g), \quad \forall g \in G,$$

deve ser proporcional à identidade: se  $|i\rangle$  é um autovetor de  $S$ , então  $M(g)|i\rangle$  também é autovetor de  $S$  com o *mesmo* autovalor, reduzindo assim  $S$  a um múltiplo da identidade.

## 2.7 Exemplos

### 2.7.1 $\dim V = 2$ , euclidiano

O espaço vetorial  $V$  é gerado por

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.98)$$

Um vetor geral nesse espaço tem a forma  $v = a_1 |e_1\rangle + a_2 |e_2\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ .

Uma estrutura complexa ortogonal possível é

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.99)$$

Note que  $J^T = -J$ . Aplicando  $J$  nos vetores da base de  $V$ ,

$$J |e_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |e_2\rangle, \quad (2.100)$$

$$J |e_2\rangle = J(J |e_1\rangle) = -|e_1\rangle, \quad (2.101)$$

então  $V_J = \{|e_1\rangle\}$ . Note que  $V = \{|e_1\rangle, |e_2\rangle\} = \{|e_1\rangle, J |e_1\rangle\}$ .

Diagonalizando  $J$ , encontramos que seus autovalores são  $\pm i$  e os autovetores são  $|e_{\pm}\rangle = |e_1\rangle \mp i |e_2\rangle = |e_1\rangle \mp i J |e_1\rangle$ , portanto

$$|e_1\rangle = \frac{|e_+\rangle + |e_-\rangle}{2}, \quad |e_2\rangle = \frac{i(|e_+\rangle - |e_-\rangle)}{2}. \quad (2.102)$$

Vemos que  $V = W_J \oplus \overline{W}_J$ , onde

$$W_J = \text{span}\{|e_+\rangle = |e_1\rangle - iJ |e_1\rangle\} \quad (2.103)$$

$$\overline{W}_J = \text{span}\{|e_-\rangle = |e_1\rangle + iJ |e_1\rangle\}. \quad (2.104)$$

O espaço de Fock poderá ser gerado a partir de  $V_J$  ou de  $W_J$ .

Se começarmos com  $V_J$ , temos

$$F(V_J) = \mathbb{C} \oplus V_J,$$

e um elemento desse espaço de Fock é

$$|\Psi\rangle_J = a_0 |0\rangle + a_1 |e_1\rangle. \quad (2.105)$$

Se começarmos com  $W_J$ , vemos que o espaço de Fock obtido é

$$F(W_J) = \mathbb{C} \oplus W_J. \quad (2.106)$$

Um elemento desse espaço de Fock pode ser entendido como um espinor em duas dimensões. Podemos dar também a interpretação de segunda quantização, onde  $|0\rangle$  é o estado de vácuo,  $|e_+\rangle \equiv |1\rangle$  é o estado de uma partícula. Esses estados de vácuo e de uma partícula formam uma base para o espaço de Fock. Podemos identificar os operadores

$$e(e_+) \mapsto b^\dagger, \quad i(e_-) \equiv i(\bar{e}_+) \mapsto b, \quad (2.107)$$

que agem nos vetores da base, usando (2.90) e (2.91), como

$$\begin{aligned} b|0\rangle &= 0, & b|1\rangle &= |0\rangle, \\ b^\dagger|0\rangle &= |1\rangle, & b^\dagger|1\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (2.108)$$

As matrizes que representam esses operadores são

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad b^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.109)$$

De acordo com a equação (2.95) e usando (2.102), as matrizes de Clifford são

$$\begin{aligned} \gamma^i &= e(P_J e^i) + i(P_- e^i), \\ \gamma^1 &= e(e_+) + i(e_-) \longrightarrow \gamma^1 = b^\dagger + b, \\ \gamma^2 &= i(e(e_+) - i(e_-)) \longrightarrow \gamma^2 = i(b^\dagger - b), \end{aligned}$$

matricialmente

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.110)$$

### 2.7.2 $\dim V = 4$ , euclidiano

O espaço vetorial  $V$  é gerado por

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |e_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |e_4\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Uma estrutura complexa ortogonal possível é

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1_{2 \times 2} \\ 1_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix},$$

Aplicando  $J$  nos vetores da base, temos

$$\begin{aligned} J|e_1\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & -1_{2 \times 2} \\ 1_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |e_3\rangle, \\ J|e_2\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & -1_{2 \times 2} \\ 1_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |e_4\rangle, \\ J|e_3\rangle &= J(Je_1) = -|e_1\rangle, \\ J|e_4\rangle &= J(Je_2) = -|e_2\rangle. \end{aligned}$$

Então  $V_J = \{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ . Note que  $V = \{|e_1\rangle, |e_2\rangle, J|e_1\rangle, J|e_2\rangle\}$

Como  $J^2 = -1$ , seus autovalores são  $\pm i$ , mas desta vez os autoespaços são degenerados. Diagonalizando  $J$ , encontramos que os autovetores são

$$\begin{aligned} |e_{\pm}\rangle_1 &= |e_1\rangle \mp i|e_3\rangle = |e_1\rangle \mp iJ|e_1\rangle, \\ |e_{\pm}\rangle_2 &= |e_2\rangle \mp i|e_4\rangle = |e_2\rangle \mp iJ|e_2\rangle, \end{aligned} \tag{2.111}$$

onde índice  $k$ ,  $k = 1, 2$  em  $|e_{\pm}\rangle_k$  serve para indicar qual dos vetores do subespaço  $V_J$  estamos falando e  $\pm$  serve para identificar qual o sinal do autovalor dele. Finalmente

$$\begin{aligned} |e_1\rangle &= \frac{|e_+\rangle_1 + |e_-\rangle_1}{2}, & |e_3\rangle &= \frac{|e_+\rangle_2 + |e_-\rangle_2}{2}, \\ |e_2\rangle &= \frac{i(|e_+\rangle_1 - |e_-\rangle_1)}{2}, & |e_4\rangle &= \frac{i(|e_+\rangle_2 - |e_-\rangle_2)}{2}, \end{aligned} \tag{2.112}$$

e

$$W_J = \{|e_+\rangle_1 = |e_1\rangle - iJ|e_1\rangle, |e_+\rangle_2 = |e_2\rangle - iJ|e_2\rangle\}, \tag{2.113}$$

$$\bar{W}_J = \{|e_-\rangle_1 = |e_1\rangle + iJ|e_1\rangle, |e_-\rangle_2 = |e_2\rangle + iJ|e_2\rangle\}. \tag{2.114}$$

O espaço de Fock pode ser gerado tanto a partir de  $V_J$  quanto a partir de  $W_J$ . Fazendo o procedimento a partir do subespaço  $W_J$ , temos

$$F(W_J) = \mathbb{C} \oplus W_J \oplus \bigwedge^2(W_J), \quad (2.115)$$

onde um elemento de  $F(W_J)$ ,

$$|\Psi\rangle = a_1 + a_2 |e_+\rangle_1 + a_3 |e_+\rangle_2 + a_4 |e_+^1 e_+^2\rangle \quad (2.116)$$

pode ser entendido como um espinor em quatro dimensões. Podemos dar novamente a interpretação de número de partículas, onde  $|0\rangle = 1$  é o estado de vácuo,  $|1,0\rangle = |e_+\rangle_1$  é o estado de uma partícula do tipo 1,  $|0,1\rangle = |e_+\rangle_2$  é o estado de uma partícula do tipo 2,  $|1,1\rangle = |e_+^1 e_+^2\rangle$  é o estado antissimétrico composto de uma partícula do tipo 1 e uma do tipo 2. Esses quatro vetores formam uma base para o espaço de Fock. Podemos identificar os operadores

$$e(|e_+\rangle_k) \equiv e(e_+^k) \mapsto b_k^\dagger, \quad i(|e_-\rangle_k) = i(\overline{|e_+\rangle_k}) \equiv i(\bar{e}_+^k) \mapsto b_k, \quad (2.117)$$

onde  $b_k^\dagger$  cria uma partícula do tipo  $k$  e  $b_k$  destrói uma partícula do tipo  $k$ . Esses operadores agem nos vetores da base, usando (2.90) e (2.91), da forma

$$\begin{aligned} b_k |0\rangle &= 0, \quad k = 1, 2, & b_k^\dagger |1, 1\rangle &= 0, \quad k = 1, 2, \\ b_1 |1, 1\rangle &= |0, 1\rangle, & b_1^\dagger |0\rangle &= |1, 0\rangle, \\ b_2 |1, 1\rangle &= |1, 0\rangle, & b_2^\dagger |0\rangle &= |0, 1\rangle, \\ b_1 |1, 0\rangle &= |0\rangle, & b_1^\dagger |0, 1\rangle &= |1, 1\rangle, \\ b_2 |1, 0\rangle &= 0, & b_2^\dagger |0, 1\rangle &= 0, \\ b_2 |0, 1\rangle &= |0\rangle, & b_1^\dagger |1, 0\rangle &= 0, \\ b_1 |0, 1\rangle &= 0, & b_2^\dagger |1, 0\rangle &= |1, 1\rangle. \end{aligned} \quad (2.118)$$



A representação matricial destes operadores é

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad b_1^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.119)$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad b_2^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De acordo com a equação (2.95) e usando (2.102), as matrizes de Clifford são

$$\gamma^k = \gamma(e^k) = e(P_+ e^k) + i(P_- e^k), \quad k = 1, \dots, 4, \quad (2.120)$$

$$\gamma^1 = \gamma(e^1) = e(e_+^1) + i(e_-^1) = b_1^\dagger + b_1 \quad (2.121)$$

$$\gamma^2 = \gamma(e^2) = i(e(e_+^2) - i(e_-^2)) = i(b_1^\dagger - b_1), \quad (2.122)$$

$$\gamma^3 = \gamma(e^3) = e(e_+^3) + i(e_-^3) = b_2^\dagger + b_2, \quad (2.123)$$

$$\gamma^4 = \gamma(e^4) = i(e(e_+^4) - i(e_-^4)) = i(b_2^\dagger - b_2). \quad (2.124)$$

Matricialmente

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.125)$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

### 2.7.3 $\dim V = 4$ , Lorentziano (1,3)

A única diferença do caso anterior é que devemos escolher uma das quatro matrizes e multiplicá-la por  $i$  tal que  $(\gamma^0)^2 = -1$  e manter as

outras  $(\gamma^i)^2 = 1$ , com  $i = 1, 2, 3$ . Então

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ & & & (2.126) \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Note que  $\gamma^0 \equiv i(b_1^\dagger + b_1)$ .

## 2.8 Recapitulando

Quando começamos a falar de representação, precisamos tomar cuidado com o que chamamos de *dimensão*. Estamos lidando com três diferentes dimensões ao longo do texto:

1. **Dimensão do conjunto de geradores:** número de geradores, igual a  $\dim V = d$  sobre o qual construímos a álgebra de Clifford  $Cl(V, B)$ .
2. **Dimensão da álgebra:** quantos monômios diferentes e irredutíveis existem no polinômio geral. ( $\dim \mathcal{A} = 2^{\dim V} = 2^d$ )
3. **Dimensão da representação:** tamanho da matriz que usamos para representar o elemento abstrato da álgebra. A representação *irredutível* de  $Cl(V)$  tem dimensão  $2^{\lfloor d/2 \rfloor}$ .

### 2.8.1 Exemplos

- $\dim V = 2$

1. Geradores =  $\{\gamma^1, \gamma^2\}$
2. Elemento geral da álgebra de Clifford:

$$P(\gamma^1, \gamma^2) = a_0 + a_1\gamma^1 + a_2\gamma^2 + a_{12}\gamma^1\gamma^2 \in Cl(V) = Cl(2)$$

## 3. Representação irredutível

$$\left. \begin{aligned} \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \dim \text{rep} = 2^{[1]} = 2,$$

•  $\dim V = 3$ 

1. Geradores =  $\{\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\}$ .
2. Elemento geral da álgebra de Clifford:

$$P(\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) = a_0 + \sum_{i=1}^3 a_i \gamma^i + \sum_{i,j=1}^3 a_{[ij]} \gamma^i \gamma^j + a_{123} \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \in Cl(3)$$

## 3. Representação irredutível

$$\left. \begin{aligned} \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \dim \text{rep} = 2^{[3/2]} = 2,$$

•  $\dim V = 4$ 

1. Geradores =  $\{\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4\}$ .
2. Elemento geral da álgebra de Clifford:

$$\begin{aligned} P(\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4) &= a_0 + \sum_{i=1}^4 a_i \gamma^i + \sum_{i,j=1}^4 a^{[ij]} \gamma^i \gamma^j \\ &\quad + \sum_{i,j,k=1}^4 a_{[ijk]} \gamma^i \gamma^j \gamma^k + a_{1234} \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4 \end{aligned}$$

## 3. Representação irredutível

$$\begin{aligned} \gamma^1 &= \sigma_1 \otimes 1 = \left( \begin{array}{cc} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{cc} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{array}} \right\} \dim \text{rep} = 2^{[2]} = 4, \\ \gamma^2 &= \sigma_2 \otimes 1 = \left( \begin{array}{cc} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{array} \right), \\ \gamma^3 &= \sigma_3 \otimes \sigma_1 = \left( \begin{array}{cc} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{array} \right), \\ \gamma^4 &= \sigma_3 \otimes \sigma_2 = \left( \begin{array}{cc} 0 & -i\sigma_3 \\ i\sigma_3 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Na verdade, basta se preocupar com as dimensões pares e nas ímpares incluir explicitamente nos geradores da álgebra o  $\gamma_*$ , como no exemplo de  $\dim V = 3$ .

## 2.9 Transformações na álgebra de Clifford

Uma das representações da álgebra de Clifford para uma assinatura euclideana  $(t, s) = (0, d)$  em termos das matrizes de Pauli  $\sigma$  é

$$\begin{aligned} \gamma^1 &= \sigma_1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \dots \\ \gamma^2 &= \sigma_2 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \dots \\ \gamma^3 &= \sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes 1 \otimes \dots \\ \gamma^4 &= \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes 1 \otimes \dots \\ \gamma^5 &= \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes \dots \end{aligned}$$

onde  $1 \equiv 1_{2 \times 2}$ . A propriedade  $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k$  é válida. Para dimensões pares, a dimensão da representação é  $2^{d/2}$  e para dimensões ímpares  $2^{(d-1)/2}$ .

Se quisermos inserir direções do tipo tempo, só precisamos fazer uma multiplicação por  $i$  nas  $t$  primeiras matrizes  $\gamma$ , exemplo,

$$\gamma^0 \equiv i\gamma^1 = i\sigma_1 \otimes 1 \dots \quad (2.127)$$

A álgebra de Clifford possui a seguinte propriedade universal:

Sejam  $\gamma^i$ ,  $i = 1, \dots, d$  geradores da álgebra de Clifford satisfazendo a relação

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = 2B(e^i, e^j).$$

Agora, escolha outra álgebra gerada por  $\hat{\gamma}^i$ , com  $i = 1, \dots, d$  que satisfaz a mesma relação

$$\{\hat{\gamma}^i, \hat{\gamma}^j\} = 2B(e^i, e^j).$$

Então existe uma transformação  $S$  invertível (ou seja  $\det S \neq 0$ ) única a menos de um isomorfismo tal que

$$\gamma^i = S\hat{\gamma}^iS^{-1}. \quad (2.128)$$

Se  $\gamma^i, \hat{\gamma}^i$  forem unitárias, então  $S$  também é unitária.

Existem vários tipos de transformações  $S$ , basta que a álgebra tenha a mesma relação. As mais importantes

1.  $(\gamma^i)^\dagger$ , hermitiano conjugado;
2.  $(\gamma^i)^T$ , transposição;
3.  $(\gamma^i)^*$ , conjugação complexa;

serão discutidas ao longo desta sessão.

### 2.9.1 Hermitiano conjugado

Os geradores da álgebra de Clifford tipo tempo e tipo espaço obedecem

$$(\gamma^t)^\dagger = -\gamma^t, \quad (\gamma^s)^\dagger = \gamma^s, \quad (2.129)$$

uma vez que as matrizes de Pauli são hermitianas, logo as matrizes  $\gamma^i$  definidas acima são hermitianas, e apenas as direções temporais são antihermitianas por estarem multiplicadas por  $i$ , como na equação (2.127). As matrizes  $(\gamma^i)^\dagger \equiv (\gamma^i)^{-1}$  satisfazem a mesma relação de Clifford, existe uma transformação  $A$  tal que

$$\gamma^i = A(\gamma^i)^\dagger A^{-1},$$

e a única forma de satisfazer (2.129) é fazendo

$$A = \gamma^1 \dots \gamma^t, \quad (2.130)$$

então

$$(\gamma^i)^\dagger = (-1)^t A^{-1} \gamma^i A. \quad (2.131)$$

### 2.9.2 Transposição

Uma vez que  $(\gamma^i)^\dagger$  satisfaz a relação de Clifford, é de se esperar que  $(\gamma^i)^T$  também satisfaça. Logo existe uma transformação unitária  $\mathcal{C}$ , tal que

$$(\gamma^i)^T = -\eta \mathcal{C} \gamma^i \mathcal{C}^{-1}, \quad \mathcal{C}^T = -\epsilon \mathcal{C} \quad (2.132)$$

para  $\eta = \pm 1$  e  $\epsilon = \pm 1$ , caso contrário, a operação de transposição induziria uma transformação de escala na matriz. Há duas possíveis representações para  $\mathcal{C}$

$$\mathcal{C}_+ = \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \dots, \quad \eta = +1, \quad (2.133)$$

$$\mathcal{C}_- = \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \dots, \quad \eta = -1, \quad (2.134)$$

satisfazendo a condição de unitariedade. Para dimensões ímpares, veremos que apenas uma das duas pode ser usada. Vamos agora deduzir os sinais permitidos para  $\epsilon$  e  $\eta$  de acordo com o valor de  $s$  e  $t$ . Seja

$$\Gamma^{(n)} = \gamma^{a_1} \dots \gamma^{a_n} \quad (2.135)$$

um elemento geral da álgebra de Clifford  $Cl(s, t)$ , então

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}\Gamma^{(n)})^T &= \mathcal{C}(\gamma^{a_1} \mathcal{C}^{-1} \dots \mathcal{C} \gamma^{a_n} \mathcal{C}^{-1} \mathcal{C}), \\ &= (-\eta)^n (\gamma^{a_1})^T \dots (\gamma^{a_n})^T \mathcal{C}, \\ &= (-\eta)^n \mathcal{C}^T ((\gamma^{a_1})^T \dots (\gamma^{a_n})^T)^T, \\ &= -\epsilon (-\eta)^n (-1)^{n(n-1)/2} (\mathcal{C}\Gamma^{(n)}). \end{aligned} \quad (2.136)$$

Uma matriz pode ser simétrica ou antissimétrica. Portanto

$$-\epsilon (-\eta)^n (-1)^{n(n-1)/2} = \pm 1. \quad (2.137)$$

### 2.9.3 Conjugação complexa

Uma vez que  $(\gamma^i)^\dagger$  satisfaz a relação de Clifford e sabendo que  $[(\gamma^i)^*]^\dagger = [\gamma^i]^T$ , temos

$$[(\gamma^i)^*]^\dagger (\gamma^i)^* = (\gamma^i)^T (\gamma^i)^* = [(\gamma^i)^\dagger \gamma^i]^* = 1, \quad (2.138)$$

ou seja,  $(\gamma^i)^*$  também é unitária. Claramente

$$\{(\gamma^i)^*, (\gamma^j)^*\} = 2B(e^i, e^j),$$

então existe uma transformação unitária  $B$  tal que  $(\gamma^i)^* = B\gamma^i B^{-1}$ .

Juntando (2.129) e (2.132), pois  $(\gamma^i)^\dagger = [(\gamma^i)^T]^* = [(\gamma^i)^*]^T$ , então

$$\begin{aligned} (-1)^t A \gamma^i A^{-1} &= -\eta \mathcal{C} (\gamma^i)^* \mathcal{C}^{-1} \\ -\eta (-1)^t \underbrace{\mathcal{C}^{-1} A}_B \gamma^i \underbrace{A^{-1} \mathcal{C}}_{B^{-1}} &= (\gamma^i)^*. \end{aligned}$$

Assim,

$$(\gamma^i)^* = -\eta (-1)^t B \gamma^i B^{-1}. \quad (2.139)$$

Para calcular  $B^* B$ , sabemos que  $B^* = (B^\dagger)^T$ , então

$$\begin{aligned} B^* &= (-1)^t (A B A^{-1})^T, \\ &= (-1)^t (A \mathcal{C}^{-1} A A^{-1})^T, \\ &= (-1)^t (A \mathcal{C})^T, \text{ pois } \mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}, \\ &= \epsilon (-1)^t \mathcal{C} A^T, \text{ pois } \mathcal{C}^T = -\epsilon \mathcal{C}, \end{aligned} \quad (2.140)$$

mas

$$\begin{aligned} A^T &= (\gamma^t)^T \dots (\gamma^1)^T, \\ &= (-\eta)^t \mathcal{C} \gamma^t \dots \gamma^1 \mathcal{C}^{-1}, \\ &= \eta^t (-1)^{t(t+1)/2} \mathcal{C} A \mathcal{C}^{-1}, \\ &= \eta^t (-1)^{t(t+1)/2} \mathcal{C} B^{-1}. \end{aligned} \quad (2.141)$$

Substituindo (2.141) em (2.140), temos que

$$B^* B = -\epsilon \eta^t (-1)^{t(t+1)/2}. \quad (2.142)$$

## 2.10 Espinores irredutíveis

Existem dois tipos principais de representação no espaço dos espinores. A primeira se aplica apenas para dimensão par, porque  $\gamma_*$  não é um gerador da álgebra. Já foi visto que podemos classificar os espinores pela sua quiralidade: esquerda ou direita. Essa representação é chamada de *representação quiral* ou *representação de Weyl*. Se  $\psi$  é um espinor, então

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma_*)\psi, \text{ espinor esquerdo} \quad (2.143)$$

$$\psi_R = \frac{1}{2}(1 - \gamma_*)\psi, \text{ espinor direito.} \quad (2.144)$$

A segunda representação leva em conta a condição de realidade, chamada de *real* ou *Majorana*. O complexo conjugado de um espinor  $\psi$  é obtido por uma transformação

$$\psi^* = \tilde{B}\psi. \quad (2.145)$$

Queremos que  $\tilde{B}$  tenha consistência com as transformações de Lorentz, ou seja, se fizermos

$$\tilde{\psi} = U(\Lambda)\psi, \quad (2.146)$$

onde  $\Lambda$  é uma transformação de Lorentz finita, temos que obter

$$(\tilde{\psi})^* = \tilde{B}\tilde{\psi}, \quad (2.147)$$

então

$$\begin{aligned} (U(\Lambda)\psi)^* &= \tilde{B}(U(\Lambda)\psi), \\ (-\eta(-1)^t)^2 BU(\Lambda)B^{-1}\tilde{B}\psi &= \tilde{B}U(\Lambda)\psi, \\ \implies BU(\Lambda)B^{-1}\tilde{B} &= \tilde{B}U(\Lambda), \end{aligned}$$

A última igualdade só é satisfeita se  $\tilde{B} = \alpha B$ . Por consistência

$$\psi^{**} = (\tilde{B}\psi)^* = \tilde{B}^*\psi^* = \tilde{B}^*\tilde{B}\psi = \psi,$$

então

$$1 = \tilde{B}^*\tilde{B} = |\alpha| B^*B,$$

logo  $|\alpha| = 1$  e usando (2.142), encontramos

$$-\epsilon\eta^t(-1)^{t(t+1)/2} = 1. \quad (2.148)$$

A equação acima é satisfeita para

$$s - t = 0, 1, 7 \pmod{8}, \quad (2.149)$$

$$s - t = 2 \pmod{8} \text{ com } \eta(-1)^{d/2} = +1, \quad (2.150)$$

$$s - t = 6 \pmod{8} \text{ com } \eta(-1)^{d/2} = -1. \quad (2.151)$$

Esses são os casos onde há existência de espinores do tipo Majorana. Outro jeito de expressar a condição de realidade é dizer que o 'Majorana conjugado' é igual ao 'Dirac conjugado'. Eles são respectivamente



$$\psi^M \equiv \bar{\psi} = \psi^T C; \quad \psi^D \equiv \bar{\psi}^C = \psi^\dagger A \alpha^{-1}. \quad (2.152)$$

Espinores de Majorana podem ser vistos como  $\psi_1 + i\psi_2$ , onde  $\psi_1$  e  $\psi_2$  têm componentes reais e estão relacionados pela condições  $\psi^M = \psi^D$ .

Considere agora que  $B^*B = -1$ . Podemos então definir a *condição de Majorana simplética*,

$$\psi_i^* = (\psi_i)^* = B\Omega_{ij}\psi^j, \quad (2.153)$$

onde  $\Omega$  é uma matriz antissimétrica com  $\Omega\Omega^* = -1$ .

Temos agora duas possíveis representações irredutíveis, ou Weyl ou Majorana. A pergunta que fica é:

*Um espinor pode ser quiral (Weyl) e real (Majorana) ao mesmo tempo?*

Como  $(\gamma_*)^* = (-1)^{d/2+t}B\gamma_*B^{-1}$ , a condição é que  $d/2 + t = 0 \pmod{2}$ , ou seja

$$\text{Espinor MW} : s - t = 0 \pmod{4}.$$

Há um jeito simples de saber quando o espinor é Majorana simplético. Ele ocorre quando  $s - t = 0 \pmod{4}$ , mas a condição de Majorana não pode ser satisfeita. Por exemplo,  $d = 4$  e  $t = 0$ ,  $s = 4$  e  $s - t = 4 = 0 \pmod{4}$ , em princípio poderia ser Majorana-Weyl. Mas  $s - t = 4$  não se encaixa nas condições de Majorana descritas em (2.151), portanto, em 4 dimensões com assinatura euclidiana temos espinores do tipo Majorana Weyl simplético (SMW).

A tabela a seguir resume todas as possibilidades de espinores, e há um resumo na legenda.

d/t	0		1		2		3	
1	M	1	M	1				
2	M <sup>-</sup>	2	MW	1	M <sup>+</sup>	2		
3		4	M	2	M	2		4
4	SMW	4	M <sup>+</sup>	4	MW	2	M <sup>-</sup>	4
5		8		8	M	4	M	4
6	M <sup>+</sup>	8	SMW	8	M <sup>-</sup>	8	MW	4
7	M	8		16		16	M	8
8	MW	8	M <sup>-</sup>	16	SMW	16	M <sup>+</sup>	16
9	M	16	M	16		32		32
10	M <sup>-</sup>	32	MW	16	M <sup>+</sup>	32	SMW	32
11		64	M	32	M	32		64
12	SMW	64	M <sup>+</sup>	64	MW	32	M <sup>-</sup>	64

Fonte: [2]

Possibilidades de espinores para várias dimensões, e para diversos números de direções temporais (mod 4).  $M$  significa espinores de Majorana. Para dimensões pares,  $M^\pm$  indica qual sinal de  $\eta$  deve ser usado.  $MW$  indica possibilidade de espinores Majorana-Weyl. Para dimensões pares, sempre existem espinores de Weyl. Espinores simplético de Majorana sempre existem quando a condição Majorana não puder ser satisfeita. Esta condição está indicada por  $SMW$ . Os números indicam a dimensão real do espinor mínimo.

### 2.10.1 Exemplo dim $V = 4$

Como exemplo, tomemos o espaço de Minkowski em quatro dimensões. Para ter espinores de Majorana, escolheremos  $\eta = 1$  e  $\epsilon = 1$ . Existe então uma representação de Majorana onde as matrizes  $\gamma^\mu$  são reais

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \\ -\mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}, \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^1 \\ i\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz de conjugação de carga é proporcional à  $\gamma^0$ , digamos  $\mathcal{C} = z\gamma^0$ , com  $|z| = 1$ . Como  $A = \gamma^0$ , a condição de Majorana é  $\psi^* = z\alpha\psi$ . Então

com uma escolha apropriada de sinais,  $z\alpha = 1$ , os espinores de Majorana são puramente reais nesta base.

Em outra representação,  $\gamma_5$  é diagonal. Esta base é útil para manifestar espinores quiral. Eles são espinores que possuem apenas duas componentes denotadas  $\chi^A$ , enquanto o antiquiral tem duas componentes denotada por  $\chi_{\dot{A}}$  (onde  $A$  e  $\dot{A}$  podem ser 1 ou 2). A realização explícita é

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & i\mathbb{1}_{2 \times 2} \\ i\mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^i \\ i\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}$$

e com essa escolha

$$C = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}, \text{ com } \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essa base facilmente pode ser relacionada com o formalismo de duas componentes. Nesta formulação, os índices são levantados e abaixados com  $\varepsilon^{AB}$  ( $\varepsilon^{12} = 1 = -\varepsilon^{21}$ ) na convenção NW-SE (Noroeste - Sudeste)

$$\chi^A = \varepsilon^{AB} \chi_B, \quad \chi_A = \chi^B \varepsilon_{BA},$$

que implica em  $\varepsilon^{AB} \varepsilon_{BC} = -\delta^A_C$ , e a condição de Majorana para um espinor  $(\chi^A, \chi_{\dot{A}})$  é

$$\chi_A = (\chi_{\dot{A}})^*.$$

Uma terceira representação comumente usada tem  $\gamma^0$  diagonal.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} i\mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -i\mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^i \\ i\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \\ -\mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz de conjugação de carga é  $C = \gamma^0 \gamma^2$ .



# Capítulo 3

## Teoria de Calibre emergente

### 3.1 Introdução

Campos de calibre, tanto abeliano como não-abeliano, são figuras proeminentes nas teorias modernas que tentam explicar as forças da natureza. Elas também emergem naturalmente em vários contextos geométricos e em sistemas de matéria condensada. A proposta deste capítulo é mostrar um contexto em que campos de calibre aparecem fora do contexto de teoria de campos e seus infinitos de graus de liberdade: um sistema em mecânica quântica de dimensão finita.

### 3.2 Teoria de calibre e geometria

Vamos começar com a teoria de calibre  $U(1)$  como ilustração dessa estrutura geométrica. O objetivo é formular uma mecânica quântica tal que possamos ajustar a fase global da função de onda independentemente do ponto no espaço-tempo, ou seja,

$$\psi(\mathbf{x}, t) \longrightarrow e^{i\chi(\mathbf{x}, t)}\psi(\mathbf{x}, t). \quad (3.1)$$

Essa construção, junto algumas condições de consistência, nos levarão a uma teoria eletromagnética.

A simetria dada por (3.1) é razoável porque a densidade de probabilidade, a informação física, é simétrica sob essa transformação, i.e.

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}, t)^\dagger \psi(\mathbf{x}, t). \quad (3.2)$$

Entretanto, a equação de Schrödinger não é invariante sob (3.1). Para torná-la invariante, devemos encontrar uma definição para as derivadas que incorpore esta simetria.

Uma vez que a simetria não muda o módulo da função de onda, se fizermos uma transformação infinitesimal de um ponto  $(\mathbf{x}, t)$  até um ponto  $(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}, t + \delta t)$ , é esperado que

$$|\psi(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}, t + \delta t)| = |\psi(\mathbf{x}, t)|. \quad (3.3)$$

Queremos manter a noção que a fase é apenas uma escolha, podendo ser redefinida.

Para isso, temos que introduzir um novo grau de liberdade, o campo vetorial  $A_\mu(\mathbf{x}, t)$ , tal que  $\psi$  tenha módulo constante se

$$\arg \psi(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}, t + \delta t) = \arg \psi(\mathbf{x}, t) + \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \cdot \delta\mathbf{x} + A_0(\mathbf{x}, t)\delta t. \quad (3.4)$$

Quando a fase é redefinida de acordo com a equação (3.1), a relação (3.4) deve ficar invariante. Entretanto,

$$\begin{aligned} \arg \psi(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}, t + \delta t) &= \arg \psi(\mathbf{x}, t) + \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \cdot \delta\mathbf{x} + A_0(\mathbf{x}, t)\delta t + \chi(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}, t + \delta t) - \chi(\mathbf{x}, t) \\ &= \arg \psi(\mathbf{x}, t) + \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \cdot \delta\mathbf{x} + A_0(\mathbf{x}, t)\delta t + \delta\mathbf{x} \cdot \nabla\chi(\mathbf{x}, t) + \delta t \partial_t \chi(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

Esta equação é invariante, i.e.,  $\arg \psi(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}, t + \delta t) = \arg \psi(\mathbf{x}, t)$  se o potencial vetor  $A_\mu$  se transformar da seguinte forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \longrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - \nabla\chi(\mathbf{x}, t), \quad A_0(\mathbf{x}, t) \longrightarrow A_0(\mathbf{x}, t) - \partial_t\chi(\mathbf{x}, t). \quad (3.5)$$

A combinação da transformação (3.1) e a regra de transformação (3.5) é chamada de *transformação de calibre* e  $A_\mu$  um *campo de calibre*.

Uma vez definido o campo de gauge  $A_\mu(\mathbf{x}, t)$  e um modo de comparar funções em pontos do espaço-tempo próximos, podemos definir derivadas. Tomando a diferença de uma função de onda definida em dois pontos vizinhos, levando em conta a diferença de fase, a derivada é definida por

$$dx^\mu \partial_\mu \psi(x) \rightarrow dx^\mu D_\mu \psi(x) \quad dx^\mu D_\mu \psi(x) = \lim_{\delta\mathbf{x}, \delta t \rightarrow 0} \psi(x^\mu + dx^\mu) - e^{i dx^\mu A_\mu(\mathbf{x}, t)} \psi(\mathbf{x}, t) \quad (3.6)$$

$$= dx^\mu (\partial_\mu - i A_\mu(x)) \psi(x). \quad (3.7)$$

Esta derivada se transforma covariantemente sob uma transformação de gauge (3.1) e (3.5)

$$D_\mu \psi(x) \rightarrow e^{i\chi(x)} D_\mu \psi(x). \quad (3.8)$$

Ela pode ser usada para formular uma equação de Schrödinger invariante localmente por  $U(1)$ .

Para completar a teoria, não basta definir uma derivada covariante, temos que dar dinâmica ao campo  $A_\mu(x)$ . Esta dinâmica pode ser a eletrodinâmica de Maxwell onde, por exemplo, a corrente é a corrente de probabilidade de uma partícula.

Uma pergunta: o que seria uma função constante com respeito à derivada  $D_\mu$ ? Uma função de onda constante deve satisfazer algo como

$$D_\mu \psi(x) = 0. \quad (3.9)$$

A condição para a existência desse tipo de função é que o comutador dessas derivadas aplicado na função seja zero, i.é.,

$$[D_\mu, D_\nu] \psi(x) = -F_{\mu\nu}(x) \psi(x) = 0, \quad (3.10)$$

onde o tensor  $F_{\mu\nu}$  é

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (3.11)$$

que coincide com o tensor de Faraday.

### 3.3 Um outro problema de mecânica quântica

Quase todo problema em mecânica quântica começa com uma equação de Schrödinger para se resolver, i.e.,

$$i\partial_t |\Psi(t)\rangle = H(\vec{\lambda}(t)) |\Psi(t)\rangle, \quad (3.12)$$

onde uma família de hamiltonianas  $H(\vec{\lambda}(t))$  depende continuamente de certos parâmetros  $\vec{\lambda}$ , que variam em geral com o tempo  $t$ . Por exemplo, um sistema de spin sob influência de um campo magnético externo  $B$ . No caso do modelo XY, tópico do próximo capítulo, teríamos os parâmetros  $\gamma$  e  $h$ . Agora, suponha que todas as hamiltonianas dessa família tem um conjunto de  $n$  níveis degenerados com energia  $E(t)$ . Em

outras palavras, existem  $n$  soluções distintas, i.e., autovetores distintos  $|\psi_a(t)\rangle$ ,  $a = 1, \dots, n$ , para a equação

$$H(\vec{\lambda}(t)) |\psi(t)\rangle = E(t) |\psi(t)\rangle. \quad (3.13)$$

Note que a energia  $E(t)$  *pode* variar com o tempo: estamos assumindo que a degenerescência não acontece acidentalmente durante a evolução temporal. Por uma simples renormalização das energias, podemos supor que esses níveis estão em  $E = 0$ . Tais degenerescências ocorrem quando para um valor fixo de  $\vec{\lambda}$ , existe uma simetria não quebrada, ou seja, uma simetria da Hamiltoniana que é também simetria desse estado de  $E = 0$ . Por exemplo, um problema de simetria de rotação em torno de um eixo na direção  $\vec{\lambda}$ .

Considere uma mudança adiabática dos parâmetros de um valor inicial  $\lambda_i$  para algum valor final  $\lambda_f$  durante um intervalo de tempo  $T$ . Desta forma, essa variação não provoca mudança brusca de nível de energia. Dado um espaço de níveis degenerados que não se cruzam entre si, então as soluções da equação

$$H(\lambda_i) |\psi(t)\rangle = 0 \quad (3.14)$$

são levadas nas soluções da equação

$$H(\lambda_f) |\psi(t)\rangle = 0 \quad (3.15)$$

pela solução da equação (3.12) com as condições de contorno  $\lambda(0) = \lambda_i$  e  $\lambda(T) = \lambda_f$ .

Se  $\lambda_i = \lambda_f$ , tal que a hamiltoniana inicial e final sejam idênticas, então será possível formular a seguinte pergunta:

*Existe uma evolução adiabática não-trivial que mapeia  $n$  níveis degenerados entre si?*

Veremos que a resposta é *sim* e para podermos descrever tal transformação, é necessário introduzir um campo de calibre.

### 3.4 Resolvendo o problema

Considere um conjunto  $\{|\psi_a(t)\rangle, a = 1, \dots, n\}$ , onde

$$H(\vec{\lambda}(t)) |\psi_a(t)\rangle = 0, \quad (3.16)$$



ou seja, esses autovetores  $|\psi_a(t)\rangle$  degenerados estão no nível de energia  $E(t) = 0$ . Este conjunto é ortonormal entre si e permanecerá ortonormal durante a evolução temporal, i.e.,

$$\langle \psi_b(t) | \psi_a(t) \rangle = \delta_{ba}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.17)$$

Se  $H(\vec{\lambda}(t)) |\Psi(t)\rangle = 0$ , então  $|\Psi(t)\rangle$  pertence ao subespaço gerado pelos vetores acima. Numa evolução adiabática,  $|\Psi(t)\rangle$  continuará neste subespaço, pois não haverá mudança brusca de nível de energia. Podemos assim expandi-lo da seguinte forma,

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{a=1}^n c_a(t) |\psi_a(t)\rangle. \quad (3.18)$$

A probabilidade definida por  $|\langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle|^2$  é invariante sob uma transformação  $U \in U(n)$ , pois

$$\left| \langle \tilde{\Psi}(t) | \tilde{\Psi}(t) \rangle \right|^2 = \left| \langle \Psi(t) | U^\dagger U | \Psi(t) \rangle \right|^2 \stackrel{U^\dagger U = 1}{=} |\langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle|^2. \quad (3.19)$$

Substituindo (3.18) na equação (3.12), obtemos

$$\begin{aligned} H |\Psi(t)\rangle &= i \partial_t |\Psi(t)\rangle \\ &= i \sum_a [\dot{c}_a |\psi_a(t)\rangle + c_a(t) |\dot{\psi}_a(t)\rangle] = 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde  $\partial_t |\psi_a(t)\rangle \equiv |\dot{\psi}_a(t)\rangle$  e  $\partial_t f(t) \equiv \dot{f}(t)$ . Tomando o produto escalar da equação (3.20) com  $|\psi_b(t)\rangle$  e usando a condição de ortonormalidade (3.17), temos

$$\sum_a \dot{c}_a \underbrace{\langle \psi_b(t) | \psi_a(t) \rangle}_{\delta_{ba}} + \langle \psi_b | \dot{\psi}_a \rangle c_a(t) = 0, \quad (3.21)$$

$$\implies \dot{c}_b = - \sum_a \langle \psi_b | \dot{\psi}_a \rangle c_a(t) \equiv A_{ab}(t) c_a(t), \quad (3.22)$$

onde a matriz  $n \times n$   $A(\tau)$  é antihermitiana com elementos de matriz definidos por

$$(A(\tau))_{ab} \equiv \langle \psi_b | \dot{\psi}_a \rangle. \quad (3.23)$$

Formalmente, a solução para a equação diferencial (3.22) é

$$c_a(t) = [W_L(t, 0)]^b{}_a c_b(0), \quad \text{onde}$$

$$W_L(t, 0) = P \exp \left( \int_0^t A(\tau) d\tau \right) \quad (3.24)$$

e  $P$  representa o operador de ordenamento temporal ou do caminho de integração, pois a diferença entre eles é apenas uma mudança de variável na integral em (3.24). Uma vez que a hamiltoniana depende do parâmetro  $\lambda$  (ou uma porção deles  $\lambda^\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, d$ ), podemos fazer a mudança de variáveis

$$dt = \partial_\mu t d\lambda^\mu, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda^\mu} \equiv \partial_\mu. \quad (3.25)$$

Então

$$\langle \psi_b | \dot{\psi}_a \rangle = \langle \psi_b | \partial_\mu \psi_a \rangle \frac{d\lambda^\mu}{dt} \equiv (A_\mu)_{ab} \frac{d\lambda^\mu}{dt}. \quad (3.26)$$

Logo (3.24) pode ser escrita como

$$[W_L(\lambda_f, \lambda_i)]^b{}_a = P \exp \left( \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} (A_\mu)^b{}_a d\lambda^\mu \right). \quad (3.27)$$

O  $(A_\mu)_{ab}$  tem interpretação de *potencial vetor*. Uma vez que matrizes em instantes de tempo diferentes não comutam entre si, nós precisamos desse operador ordenador  $P$ . Quebramos o caminho em segmentos infinitesimais e multiplicamos todas as contribuições  $e^{A_\mu \Delta \lambda^\mu}$  de cada segmento, ordenando-os ao longo do caminho. Em particular, se o caminho for fechado, i.e.,  $\lambda_i = \lambda_f$ , a função de onda adquirirá uma fase não-abeliana vinda da equação (3.27), i.e.,

$$[W_C]^b{}_a = P \exp \left( \oint_C (A_\mu)^b{}_a d\lambda^\mu \right) \quad (3.28)$$

O traço da equação acima é conhecida como *loop de Wilson*, a versão não-abeliana da fase de Berry. Para obter esta fase, tudo que fizemos foi montar um sistema quântico com degenerescência *não quebrada*, descrita na equação (3.19), e variar lentamente algum parâmetro externo. O exemplo do efeito Aharonov-Bohm é não degenerado, por isso sua fase é abeliana.

### 3.5 A natureza do $(A_\mu)_{ab}$

A equação (3.19) descreve nada mais que uma mudança de base  $|\psi'_a(t)\rangle = U_{ac}(t)|\psi_c(t)\rangle$ , onde  $U_{ac}$  é uma transformação unitária em  $U(n)$ . Agora vamos obter a lei de transformação do potencial vetor  $A(t)$  descrito em (3.26) sob uma mudança de base. Então

$$A'_{ab} \equiv \langle \psi'_b | \dot{\psi}'_a \rangle. \quad (3.29)$$

Diferenciando  $|\psi'_a(t)\rangle$  em relação a  $\partial_t$  para obter

$$\partial_t |\psi'_a(t)\rangle = U_{ac}(t) |\dot{\psi}_c\rangle + \dot{U}_{ac} |\psi_c(t)\rangle, \quad (3.30)$$

e tomando o produto interno com  $\langle \psi'_b(t) | = \langle \psi_d(t) | U_{db}^\dagger(t)$  temos

$$\begin{aligned} A'_{ab} &= \langle \psi'_b(t) | \dot{\psi}'_a(t) \rangle \\ &= \langle \psi_d(t) | U_{db}^\dagger(t) U_{ac}(t) |\dot{\psi}_c(t)\rangle + \langle \psi_d(t) | U_{db}^\dagger(t) \dot{U}_{ac} |\psi_c(t)\rangle, \\ &= U_{db}^\dagger(t) \langle \psi_d(t) | \dot{\psi}_c(t) \rangle U_{ac}(t) + U_{db}^\dagger(t) \langle \psi_d(t) | \psi_c(t) \rangle \dot{U}_{ac}, \\ &= U_{db}^\dagger A_{cd} U_{ac}(t) + U_{cb}^\dagger(t) \dot{U}_{ac}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Na forma matricial, temos

$$A' = UAU^\dagger + \dot{U}U^\dagger, \quad (3.32)$$

ou espaço de parâmetros,

$$A'_\mu = UA_\mu U^\dagger + (\partial_\mu U) U^\dagger. \quad (3.33)$$

A lei de transformação em (3.33) mostra que  $A$  se transforma como uma conexão, pois a transformação é inhomogênea, devido ao termo  $(\partial_\mu U) U^\dagger$ . Apenas olhando a equação (3.26), vemos que  $A$  depende da escolha de uma base. Uma vez que  $U \in U(n)$ , um grupo não abeliano, esta conexão é não-abeliana com valores na álgebra de Lie  $\mathfrak{u}(n)$  e carrega um índice de grupo,  $A = A^a t^a$ , com  $a = 1, \dots, n$ , onde  $t^a \in \mathfrak{u}(n)$  formada pelos os geradores de  $U(n)$ .

### 3.6 O que é físico?

Como  $A$  depende da escolha de uma base, espera-se que ele não seja uma quantidade física mensurável em laboratório. Precisamos então encontrar quantidades que sejam invariantes de gauge, ou simplesmente, invariantes sob mudança de base.

Uma quantidade invariante de gauge é o *loop de Wilson*. Para mostrar isso, pegue uma *linha de Wilson*, ou operador de transporte paralelo, definida por

$$W(\lambda + \epsilon, \lambda) \equiv e^{A_\mu \epsilon^\mu}, \quad (3.34)$$

onde  $\epsilon^\mu \equiv \Delta\lambda^\mu$ , uma diferença infinitesimal entre o ponto  $\lambda^\mu$  e  $\lambda^\mu + \epsilon^\mu$  no espaço de parâmetros.

Uma vez que  $\epsilon^\mu$  é infinitesimal, temos

$$W(\lambda + \epsilon, \lambda) = 1 + A_\mu \epsilon^\mu + O(\epsilon^2). \quad (3.35)$$

Vamos agora determinar como a linha de Wilson se transforma sob uma mudança de base, no caso, nossa transformação de gauge. Usando (3.33), temos

$$W(\lambda + \epsilon, \lambda) \longrightarrow 1 + \epsilon^\mu U A_\mu U^\dagger + \epsilon^\mu (\partial_\mu U) U^\dagger. \quad (3.36)$$

Lembrando que  $UU^\dagger = 1$ , então

$$W(\lambda + \epsilon, \lambda) \longrightarrow UU^\dagger + \epsilon^\mu U A_\mu U^\dagger + \epsilon^\mu (\partial_\mu U) U^\dagger, \quad (3.37)$$

$$\longrightarrow [(1 + \epsilon^\mu \partial_\mu) U] U^\dagger + \epsilon^\mu U A_\mu U^\dagger. \quad \longrightarrow [(1 + \epsilon^\mu \partial_\mu) U] U^\dagger + \epsilon^\mu U A_\mu U^\dagger. \quad (3.38)$$

Usando que

$$U(\lambda + \epsilon) = U(\lambda) + \epsilon^\mu \partial_\mu U + O(\epsilon^2), \quad (3.39)$$

então podemos escrever  $(1 + \epsilon^\mu \partial_\mu) U(\lambda) = U(\lambda + \epsilon)$ . Substituindo em (3.38), temos

$$W(\lambda + \epsilon, \lambda) \longrightarrow U(\lambda + \epsilon) (1 + \epsilon^\mu A_\mu) U(\lambda)^\dagger, \quad (3.40)$$

pois  $\epsilon^\mu U A_\mu$  é de ordem  $\epsilon$ , então podemos fazer  $U(\lambda) \longrightarrow U(\lambda + \epsilon)$  com um erro de ordem  $O(\epsilon^2)$ . A equação (3.40) é a versão infinitesimal de

$$W(\lambda + \epsilon, \lambda) \longrightarrow U(\lambda + \epsilon) W(\lambda + \epsilon, \lambda) U(\lambda)^\dagger. \quad (3.41)$$

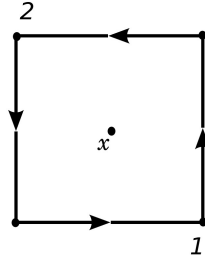


Figura 3.1: quadrado de Wilson

Agora considere uma linha de Wilson finita, onde tomamos a soma de  $N$  linhas em sequência como na equação (3.34), a partir do ponto  $\lambda_i$  até o ponto  $\lambda_f = \epsilon_1 + \dots + \epsilon_N$ . A linha de Wilson total para este caminho é

$$W(\lambda_f, \lambda_i) = W(\lambda_f, \lambda_f - \epsilon_N) \cdots W(\lambda_i + \epsilon_1 + \epsilon_2, \lambda_i + \epsilon_1) W(\lambda_i + \epsilon_1, \lambda_i).$$

Então, compondo várias transformações de gauge para os segmentos infinitesimais, temos que a linha de Wilson finita se transforma homogeneamente como

$$W(\lambda_f, \lambda_i) \longrightarrow U(\lambda_f) W(\lambda_f, \lambda_i) U(\lambda_i)^\dagger. \quad (3.42)$$

Se fecharmos o caminho, ou seja  $\lambda_f = \lambda_i$ , vemos que o loop de Wilson  $W_C = \text{Tr} W(x, y)$  é *invariante de gauge*

$$W_C \longrightarrow W_C, \quad (3.43)$$

devido à propriedade cíclica do traço.

Outra quantidade invariante de gauge que podemos definir é a *curvatura*  $F_{\mu\nu}$  do espaço de parâmetro. Considere um loop de Wilson infinitesimal, percorrido no caminho da figura abaixo

Sejam  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  os vetores infinitesimais nas direções 1 e 2. Seja  $x$  o ponto central deste quadrado que será usado como argumento para o campo de calibre. Começando a multiplicar os caminhos de Wilson em (3.34) no sentido anti-horário a partir do canto esquerdo do quadrado como ponto de partida

$$W_\square = \text{Tr} \left( e^{-iaA_2(x-\epsilon_1/2)} e^{-iaA_1(x+\epsilon_2/2)} e^{+iaA_2(x+\epsilon_1/2)} e^{+iaA_1(x-\epsilon_2/2)} \right).$$

Tratando o campo de calibre como contínuo ao longo do caminho e expandindo em termos de  $a$ , obtemos

$$W_{\square} = \text{Tr} \left[ e^{-iaA_2 + ia^2\partial_1 A_2(x)/2 + O(\epsilon^2)} \right] \quad (3.44)$$

$$\times e^{-iaA_1 - ia^2\partial_2 A_1(x)/2 + O(\epsilon^2)} \quad (3.45)$$

$$\times e^{+iaA_2 + ia^2\partial_1 A_2(x)/2 + O(\epsilon^2)} \quad (3.46)$$

$$\times e^{+iaA_1 - ia^2\partial_2 A_1(x)/2 + O(\epsilon^2)} \quad (3.47)$$

Usando a fórmula de BCH  $e^A e^B = e^{A+B+[A,B]/2+\dots}$  para combinar as exponenciais de (3.44) com (3.45) e (3.46) com (3.47). Usando a fórmula de BCH novamente para combinar os resultados, obtemos

$$W_{\square} = \text{Tr} e^{+ia^2(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 - i[A_1, A_2]) + \dots} = \text{Tr} e^{ia^2 F_{12} + \dots}, \quad (3.48)$$

onde todos os campos são calculados em  $x$ . Em resumo, obtivemos que a curvatura é dada pelo campo de força

$$F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 - i[A_1, A_2], \quad (3.49)$$

ou em geral

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} - i[A_{\mu}, A_{\nu}]. \quad (3.50)$$

Note que o campo é não-abeliano por causa do comutador entre os (3.26).

### 3.7 Interpretação do Loop de Wilson

O loop Wilson é um *parâmetro de ordem para confinamento*, relevante para cromodinâmica quântica (QCD), uma teoria de calibre não-abeliana que descreve a força forte. O argumento é simples.

Seja um quadrado com dois lados paralelos à direção espacial  $x$  de tamanho  $a$  e dois lados paralelos à direção temporal  $\tau$ , o mesmo quadrado acima infinitesimal usado para achar  $F_{\mu\nu}$ . Defina  $W_{\square}$ , um loop de Wilson neste caminho. Para  $\tau \rightarrow \infty$ , o valor esperado do loop de Wilson escreve-se como

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle W_{\square} \rangle = \exp(-V(a)\tau), \quad (3.51)$$

onde  $V(a)$  é um potencial efetivo entre possíveis férmions de massas infinitas localizados nos vértices do quadrado. Se o comportamento assintótico do potencial  $V(a)$ , i.e., quando  $a \rightarrow \infty$ , for proporcional a  $a$ , i.e.,  $V(a) \propto a$ , então o valor esperado do loop de Wilson é proporcional à exponencial da área  $a\tau$  do quadrado neste limite. O potencial  $V(a)$  ser proporcional a  $a$  é indicativo de confinamento. Conclusão: se o loop de Wilson escala com a exponencial da área, então a teoria é confinante.





# Capítulo 4

## Cadeia de spin XY

### 4.1 Introduzindo o Modelo XY

A cadeia de spin XY, doravante chamada de modelo ou cadeia XY, descreve uma cadeia de  $N$  sítios ocupados por spins, com  $a$  sendo a distância entre os sítios e  $L = Na$  o comprimento da cadeia. Discutiremos neste capítulo possíveis condições de contorno para o caso de uma cadeia fechada, i.e.,  $N + j \equiv j$ , onde  $j = 1, \dots, N$  são os rótulos dos sítios.

A hamiltoniana de uma cadeia XY fechada sob um campo externo  $h$  é dada por

$$H(\lambda, \gamma) = \frac{J}{2} \sum_{j=1}^N \left[ \left( \frac{1+\gamma}{2} \right) \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \left( \frac{1-\gamma}{2} \right) \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + h \sigma_j^z \right], \quad (4.1)$$

onde  $\sigma_j^a$ ,  $a = x, y, z$ , são as matrizes de Pauli no  $j$ -ésimo sítio. Para sítios distintos, i.e.,  $j \neq k$ , essas matrizes satisfazem

$$[\sigma_j^a, \sigma_k^b] = 0, \quad (4.2)$$

enquanto para um mesmo sítio,  $j = k$ , elas satisfazem

$$\{\sigma_j^a, \sigma_j^b\} = 2\delta^{ab}. \quad (4.3)$$

Unindo as equações (4.2) e (4.3) em apenas uma equação, temos

$$[\sigma_j^a, \sigma_k^b] = 2i\delta_{jk}\epsilon^{abc}\sigma_k^c. \quad (4.4)$$

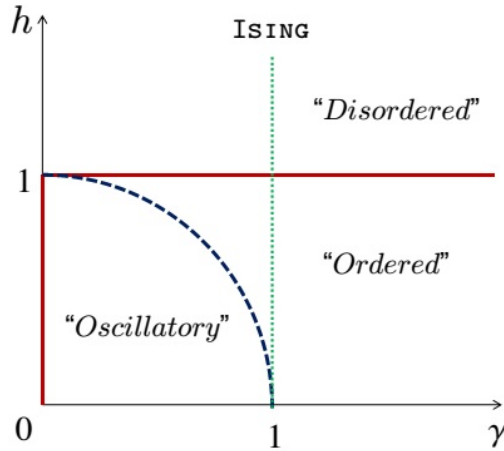


Figura 4.1: Diagrama de fase da cadeia XY [7]

Fixaremos a condição de contorno periódica<sup>1</sup> para os operadores de spin, i.e.,  $\sigma_{N+1}^a = \sigma_1^a$ . O parâmetro  $J$  é uma constante de acoplamento global que divide a teoria em ferromagnética,  $J = -1$ , ou antiferromagnética,  $J = 1$ . Quando  $J = -1$ , o vácuo, configuração de menor energia, possui todos os spins alinhados,

$$|GS, J = -1\rangle = |\uparrow\uparrow \dots \uparrow\uparrow\rangle, \quad (4.5)$$

portanto, a magnetização média  $\langle M \rangle \neq 0$ . Já no caso antiferromagnético, no estado de vácuo os spins se antialinham em relação aos seus primeiros vizinhos,

$$|GS, J = +1\rangle = |\uparrow\downarrow \dots \uparrow\downarrow\rangle, \quad (4.6)$$

resultando em uma magnetização média  $\langle M \rangle = 0$ .

O  $\gamma$  é o parâmetro de anisotropia nas direções  $x, y$ , como um campo elétrico interno nessas direções e  $h$  é a intensidade de um campo magnético externo. O modelo XY é relevante porque engloba outros modelos famosos como o modelo XX, quando  $\gamma = 0$ , e o modelo de Ising, quando  $\gamma = 1$ . O diagrama de fase do modelo está ilustrado em (4.1)

Efeitos de borda em geral são descartados no modelo XY, baseado no argumento que eles são irrelevantes no limite termodinâmico, onde

<sup>1</sup>Note que poderíamos ter escolhido uma condição de contorno quasiperiódica.

$N \rightarrow \infty$ ,  $L \rightarrow \infty$  com  $N/L$  fixo. Existe também o *limite do contínuo*, onde  $N \rightarrow \infty$ ,  $a \rightarrow 0$  e  $L = Na$  fixo. Neste limite, os efeitos de borda são cruciais. Um dos objetivos deste capítulo é estudar as diferentes condições de contorno que aparecem para um número finito de sítios, ou seja  $N < \infty$ , para em futuros trabalhos podermos tratar do limite contínuo.

## 4.2 Hamiltoniana XY e Operadores Escadas

Os estados  $|\pm, j\rangle$ , ou seja,  $|\uparrow\rangle$  ou  $|\downarrow\rangle$  no  $j$ -ésimo sítio, são autoestados do operador  $\sigma_j^z$ ,

$$\sigma_j^z |\pm, j\rangle = \pm |\pm, j\rangle. \quad (4.7)$$

Podemos definir os operadores escadas  $\sigma_j^\pm$  como

$$\sigma_j^\pm \equiv \frac{\sigma_j^x \pm i\sigma_j^y}{2}. \quad (4.8)$$

Esses operadores escadas agem nos vetores  $|\pm, j\rangle$  como

$$\begin{aligned} \sigma_j^+ |-, j\rangle &= |+, j\rangle, & \sigma_j^- |+, j\rangle &= |-, j\rangle, \\ \sigma_j^+ |+, j\rangle &= 0, & \sigma_j^- |-, j\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Então

$$(\sigma_j^\pm)^2 = 0, \quad \forall |\pm, j\rangle. \quad (4.10)$$

Vamos escrever a hamiltoniana (4.1) em termo dos operadores escadas. Invertendo a relação (4.8), temos

$$\sigma_j^x = \sigma_j^+ + \sigma_j^-, \quad (4.11)$$

$$\sigma_j^y = -i(\sigma_j^+ - \sigma_j^-), \quad (4.12)$$

então

$$\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x = \sigma_j^+ \sigma_{j+1}^+ + \sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+ + \sigma_j^- \sigma_{j+1}^-, \quad (4.13)$$

$$\sigma_j^y \sigma_{j+1}^y = -(\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^+ - \sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- - \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+ + \sigma_j^- \sigma_{j+1}^-). \quad (4.14)$$

A hamiltoniana resultante terá uma parte com termos de fronteira  $H_F$  e termos de 'bulk'  $H_B$ , tal que

$$H = H_B + H_F, \quad \text{com} \quad (4.15)$$

$$H_B = \frac{J}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \left[ (\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+) + \gamma (\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^+ + \sigma_j^- \sigma_{j+1}^-) \right] + \frac{Jh}{2} \sum_{j=1}^N \sigma_j^z,$$

$$H_F = \frac{J}{2} [\sigma_N^+ \sigma_1^- + \sigma_N^- \sigma_1^+ + \gamma (\sigma_N^+ \sigma_1^+ + \sigma_N^- \sigma_1^-)], \quad (4.16)$$

onde foi usado que os sítios são independentes, de forma que

$$[\sigma_i^-, \sigma_j^+] = 0. \quad (4.17)$$

Para um mesmo sítio, temos as relações

$$\{\sigma_i^-, \sigma_i^+\} = 1, \quad (4.18)$$

$$(\sigma_i^\pm)^2 = 0. \quad (4.19)$$

### 4.3 Transformação de Jordan-Wigner

Os operadores (4.8) agem no espectro de energia de um sítio. Queremos analisar o problema do modelo XY do ponto de vista do preenchimento dos sítios, portanto, em termos do espectro de número de partículas. A base será descrita pelo número de ocupação dos sítios, autoestados do operador número  $N_j$ . O estado  $|0, j\rangle$  representa o  $j$ -ésimo sítio desocupado, e  $|1, j\rangle$  representa o  $j$ -ésimo sítio ocupado por um férmion. Precisamos então de uma hamiltoniana escrita em termos de operadores fermiônicos que satisfaçam

$$\{\psi_j, \psi_k^+\} = \delta_{jk}, \quad \{\psi_j^+, \psi_k^+\} = \{\psi_j, \psi_k\} = 0. \quad (4.20)$$

O problema continua o mesmo, sendo portanto uma questão de abordagem. Atacar o problema com técnicas de segunda quantização é mais eficiente, principalmente na hora de diagonalizar a hamiltoniana (4.1).

Para reescrever a hamiltoniana (4.15) em termos de operadores que satisfaçam (4.20), precisaremos da *transformação de Jordan-Wigner*. Esta

transformação relaciona os operadores de spin  $\sigma_j^\pm$  com operadores fermiônicos sem spin  $\psi_j, \psi_j^\dagger$  via

$$\sigma_j^- = e^{i\pi \sum_{l=1}^{j-1} \psi_l^\dagger \psi_l} \psi_j, \quad \sigma_j^+ = \psi_j^\dagger e^{i\pi \sum_{l=1}^{j-1} \psi_l^\dagger \psi_l}. \quad (4.21)$$

O operador número no  $j$ -ésimo sítio pode ser escrito como

$$N_j = \psi_j^\dagger \psi_j \quad (4.22)$$

$$N_j |0, j\rangle = 0, \quad (4.23)$$

$$N_j |1, j\rangle = |1, j\rangle. \quad (4.24)$$

A ação dos operadores  $\psi_j^\dagger$  e  $\psi_j$  na base de autoestados do operador número é dada por

$$\begin{aligned} \psi_j^\dagger |0, j\rangle &= |1, j\rangle, & \psi_j |1, j\rangle &= |0, j\rangle, \\ \psi_j^\dagger |1, j\rangle &= 0, & \psi_j |0, j\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

O  $|0, j\rangle$  é aniquilado pelo operador  $\psi_j$ , portanto é o *estado de vácuo* do  $j$ -ésimo sítio. O operador  $\psi_j^\dagger$  *cria* uma excitação (ou partícula) no  $j$ -ésimo sítio a partir do vácuo. Como dois férmions não podem ocupar um mesmo estado, não podemos tentar criar novamente um férmion num sítio já ocupado, logo  $\psi_j^\dagger$  aniquila  $|1, j\rangle$ .

Como  $[N_i, N_j] = 0$ , podemos fazer

$$e^{i\pi \sum_{l=1}^{j-1} \psi_l^\dagger \psi_l} = \prod_{l=1}^{j-1} e^{i\pi \psi_l^\dagger \psi_l}. \quad (4.26)$$

Expandindo em série a exponencial,

$$e^{i\pi \psi_l^\dagger \psi_l} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\pi)^n (\psi_l^\dagger \psi_l)^n}{n!}, \quad (4.27)$$

e usando as relações de anticomutação em (4.20), temos

$$\psi_l^\dagger \psi_l \psi_l^\dagger \psi_l = \psi_l^\dagger (1 - \psi_l^\dagger \psi_l) \psi_l = \psi_l^\dagger \psi_l \quad \Rightarrow \quad (\psi_l^\dagger \psi_l)^n = \psi_l^\dagger \psi_l, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, a exponencial (4.27) fica

$$\begin{aligned}
 e^{i\pi\psi_l^\dagger\psi_l} &= 1 + \psi_l^\dagger\psi_l \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\pi)^n}{n!}, \\
 &= 1 + \psi_l^\dagger\psi_l(e^{i\pi} - 1), \\
 &= 1 - 2\psi_l^\dagger\psi_l.
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Os elementos de matriz do operador (4.28) nesta base são

$$(1 - 2\psi_l^\dagger\psi_l)_{ab} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \sigma_l^z. \tag{4.29}$$

A transformação de Jordan-Wigner fica então mais clara,

$$\sigma_j^z = e^{i\pi\psi_j^\dagger\psi_j} = 1 - 2\psi_j^\dagger\psi_j, \tag{4.30}$$

$$\sigma_j^- = e^{i\pi\sum_{l=1}^{j-1}\psi_l^\dagger\psi_l}\psi_j, = \left(\prod_{l=1}^{j-1}\sigma_l^z\right)\psi_j, \tag{4.31}$$

$$\sigma_j^+ = e^{i\pi\sum_{l=1}^{j-1}\psi_l^\dagger\psi_l}\psi_j^\dagger, = \psi_j^\dagger\left(\prod_{l=1}^{j-1}\sigma_l^z\right) = \left(\prod_{l=1}^{j-1}\sigma_l^z\right)\psi_j^\dagger. \tag{4.32}$$

Substituimos agora as expressões acima na hamiltoniana (4.15). Por

exemplo, um dos termos fica

$$\begin{aligned}
\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^+ &= \left[ \left( \prod_{l=1}^{j-1} \sigma_l^z \right) \psi_j^\dagger \right] \left[ \left( \prod_{m=1}^j \sigma_m^z \right) \psi_{j+1}^\dagger \right] \\
&= \psi_j^\dagger \left[ \left( \prod_{l=1}^{j-1} \sigma_l^z \right) \left( \prod_{m=1}^j \sigma_m^z \right) \right] \psi_{j+1}^\dagger \\
&= \psi_j^\dagger \sigma_j^z \psi_{j+1}^\dagger, \quad \text{para} \quad (\sigma_j^z)^2 = 1, \quad i < j \\
&= \psi_j^\dagger (1 - 2\psi_j^\dagger \psi_j) \psi_{j+1}^\dagger \\
&= \psi_j^\dagger \psi_{j+1}^\dagger.
\end{aligned}$$

Repetindo o procedimento acima para os outros termos da hamiltoniana  $H_B$ , encontramos

$$\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^+ = \psi_j^\dagger \psi_{j+1}^\dagger, \quad (4.33)$$

$$\sigma_j^- \sigma_{j+1}^- = \psi_{j+1} \psi_j, \quad (4.34)$$

$$\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- = \psi_j^\dagger \psi_{j+1}, \quad (4.35)$$

$$\sigma_j^- \sigma_{j+1}^+ = \psi_{j+1}^\dagger \psi_j. \quad (4.36)$$

A parte de bulk da hamiltoniana (4.15) fica

$$\begin{aligned}
H_B &= \frac{J}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \left[ (\psi_j^\dagger \psi_{j+1} + \psi_{j+1}^\dagger \psi_j) + \gamma (\psi_j^\dagger \psi_{j+1}^\dagger + \psi_{j+1} \psi_j) \right] \\
&\quad + \frac{JhN}{2} - Jh \sum_{j=1}^N \psi_j^\dagger \psi_j. \quad (4.37)
\end{aligned}$$

Para os termos de fronteira, lembrando que as condições de contorno são periódicas  $\sigma_{N+1} = \sigma_1$ , e definindo

$$T_N = \prod_{l=1}^N \sigma_l^z = e^{i\pi \sum_{l=1}^N \psi_l^\dagger \psi_l} \equiv e^{i\pi Q_N}, \quad Q_N = \sum_{l=1}^N \psi_l^\dagger \psi_l, \quad (4.38)$$

temos

$$\begin{aligned} \sigma_N^+ \sigma_{N+1}^+ &= \sigma_N^+ \sigma_1^+ \\ &= \left( \prod_{l=1}^{N-1} \sigma_l^z \right) \psi_N^\dagger \psi_1^\dagger \\ &= \left( \prod_{l=1}^N \sigma_l^z \right) \sigma_N^z \psi_N^\dagger \psi_1^\dagger \\ &= T_N \sigma_N^z \psi_N^\dagger \psi_1^\dagger \\ &= T_N (1 - 2\psi_N^\dagger \psi_N) \psi_N^\dagger \psi_1^\dagger \\ &= T_N \psi_N^\dagger \psi_1^\dagger. \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \sigma_N^- \sigma_{N+1}^- &= \sigma_N^- \sigma_1^- \\ &= \left( \prod_{l=1}^{N-1} \sigma_l^z \right) \psi_N \psi_1 \\ &= \left( \prod_{l=1}^N \sigma_l^z \right) \sigma_N^z \psi_N \psi_1 \\ &= T_N \sigma_N^z \psi_N \psi_1 \\ &= T_N (1 - 2\psi_N^\dagger \psi_N) \psi_N \psi_1 \\ &= -T_N \psi_1 \psi_N. \end{aligned} \quad (4.40)$$



$$\begin{aligned}\sigma_N^+ \sigma_{N+1}^- &= T_N \sigma_N^z \psi_N^\dagger \psi_1 \\ &= -T_N \psi_N^\dagger \psi_1.\end{aligned}\quad (4.41)$$

$$\begin{aligned}\sigma_N^- \sigma_{N+1}^+ &= T_N \sigma_N^z \psi_N \psi_1^\dagger \\ &= -T_N \psi_1^\dagger \psi_N.\end{aligned}\quad (4.42)$$

A parte de fronteira da hamiltoniana (4.15) fica

$$H_F = -\frac{J}{2} T_N \left[ \left( \psi_N^\dagger \psi_1 + \psi_1^\dagger \psi_N \right) + \gamma \left( \psi_N^\dagger \psi_1^\dagger + \psi_1 \psi_N \right) \right] \quad (4.43)$$

Estamos interessados em estudar a expressão (4.43). Usualmente na literatura, este termo é descartado.

## 4.4 Conservação de 'Paridade'

Quando  $\gamma \neq 0$ , a hamiltoniana total

$$H = H_B + H_F \quad (4.44)$$

não comuta com  $\sigma^z$ , i.e.,

$$[H, \sigma^z] \neq 0, \quad (4.45)$$

ou seja, o número total de férmions não é conservado, porque  $\sigma_j^z$  e o operador  $N_j$  estão relacionados pela equação (4.30), logo

$$[H, N_j] \neq 0 \quad \text{ou} \quad [H, Q_N] \neq 0. \quad (4.46)$$

Porém, como os férmions são criados em pares de partícula e antipartícula, o que é conservado é a 'paridade' do número de excitações (número par ou número ímpar). Quem conta esta paridade é o operador  $T_N$  definido em (4.38). Logo, ele comuta com a hamiltoniana total

$$[H, T_N] = 0. \quad (4.47)$$

## 4.5 O Operador $T_N$ e a 'Paridade'

Lembrando que  $T_N = \prod_{j=1}^N T_j$ , onde  $T_j \equiv (1 - 2\psi_j^\dagger \psi_j)$ , a ação deste operador na base é

$$(1 - 2\psi_j^\dagger \psi_j) |0, j\rangle = |0, j\rangle, \quad (4.48)$$

$$(1 - 2\psi_j^\dagger \psi_j) |1, j\rangle = -|1, j\rangle. \quad (4.49)$$

Então, quando

1. o autovalor de  $T_j$  for 1, o sítio está desocupado;
2. o autovalor de  $T_j$  for  $-1$ , o sítio está ocupado.

O operador  $Q_N$  pode ser chamado de *número de férmions*. Podemos então escrever o operador  $T_N$  como

$$T_N = (-1)^{Q_N}. \quad (4.50)$$

Quando

$$Q_N \text{ par} \quad \Rightarrow \quad T_N = +1;$$

$$Q_N \text{ ímpar} \quad \Rightarrow \quad T_N = -1.$$

Queremos escrever a hamiltoniana (4.44) de uma maneira mais simples, mas  $T_N$  contribui com um sinal  $\pm$  na hamiltoniana (4.43) a depender da 'paridade' de  $Q_N$ . Assim, impomos condições de contorno apropriadas para os operadores fermiônicos  $\psi_j$  e  $\psi_j^\dagger$ ,

$$T_N = +1 \quad \Rightarrow \quad \psi_{j+N} = -\psi_j, \quad (4.51)$$

$$T_N = -1 \quad \Rightarrow \quad \psi_{j+N} = \psi_j. \quad (4.52)$$

Para tratar dos termos de fronteira em (4.43), basta usar as condições de contorno em (4.51) ou (4.52). A hamiltoniana (4.44) pode ser escrita numa forma mais simples,

$$H = \frac{J}{2} \sum_{j=1}^N \left[ (\psi_j^\dagger \psi_{j+1} + \psi_{j+1}^\dagger \psi_j) + \gamma (\psi_j^\dagger \psi_{j+1}^\dagger + \psi_{j+1} \psi_j) - 2h \psi_j^\dagger \psi_j \right] + \frac{JhN}{2}, \quad (4.53)$$

com as condições de contorno (4.51) ou (4.52).

Uma vez que  $T_N^2 = 1$ , podemos construir projetores e separar a teoria em dois setores,

$$H = \frac{1 + T_N}{2} H^+ + \frac{1 - T_N}{2} H^-, \quad (4.54)$$

onde  $H = H_B + H_F$ . O  $H^+$  é a hamiltoniana do setor par e o  $H^-$  é a hamiltoniana do setor ímpar. Note que a existência de  $T_N$  *independe* da condição periódica inicial para os operadores de spin.

## 4.6 Diagonalização da Hamiltoniana

Agora vamos diagonalizar a hamiltoniana (4.53). A cadeia de spin tem tamanho fixo  $L$ ,  $N$  sítios e o espaçamento entre eles tem tamanho  $a$ , logo  $L = Na$ . A teoria quântica de campos é construída no limite do contínuo,  $N \rightarrow \infty, a \rightarrow 0, L = Na = \text{constante}^2$ . Podemos expandir os campos em ondas planas

$$\psi(x) = \int_0^L \frac{dp}{2\pi} e^{ipx} b_p, \quad (4.55)$$

onde  $b_p$  são modos ferminônicos, ou seja, destroem uma excitação fermiônica com momento  $p$ . A função delta de Dirac é escrita como

$$\delta(x - y) = \int_0^L \frac{dp}{2\pi} e^{ip(x-y)}. \quad (4.56)$$

Uma pergunta:

*Como escrever os operadores  $\psi_i, \psi_i^\dagger$  em expansão de modos, num espaço discreto como uma cadeia?*

Simple: basta falar em somatórios ao invés de integrais. Assim,

Caso contínuo	Caso discreto
$\psi(x), x \in [0, L]$	$\psi(x_i) \equiv \psi_i, \quad i = 1, \dots, N$
$\int_0^L \frac{dp}{2\pi}$	$\frac{1}{\sqrt{aN}} \sum_{k=1}^N$

<sup>2</sup>Não confundir com o limite termodinâmico,  $N \rightarrow \infty, L \rightarrow \infty, L/N = \text{constante}$ .

Expandindo os operadores em modos normais usando a regra da tabela acima, temos<sup>3</sup>

$$\psi_j = \frac{1}{\sqrt{aN}} \sum_n e^{ik_nja} b_{k_n}, \quad -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2} \quad (4.57)$$

$$\psi_j^\dagger = \frac{1}{\sqrt{aN}} \sum_n e^{-ik_nja} b_{k_n}^\dagger. \quad (4.58)$$

A transformação inversa é

$$b_n \equiv b_{k_n} = \sqrt{\frac{a}{N}} \sum_{j=1}^N e^{-ik_nja} \psi_j, \quad (4.59)$$

$$b_n^\dagger \equiv b_{k_n}^\dagger = \sqrt{\frac{a}{N}} \sum_{j=1}^N e^{ik_nja} \psi_j^\dagger. \quad (4.60)$$

onde  $k_n$  é obtido utilizando as condições de contorno corretas para cada setor.

Usando as relações de anticomutação dos  $\psi$ 's, inferimos que os  $b$ 's também são operadores fermiônicos, i.e.,

$$\{b_n, b_m\} = \{b_n^\dagger, b_m^\dagger\} = 0, \quad (4.61)$$

$$\{b_n, b_m^\dagger\} = a \delta_{n,m}. \quad (4.62)$$

### 4.6.1 Setor Par

No caso par temos  $T_N = -1$ , a condição de contorno é antiperiódica,

$$\psi_{N+j} = -\psi_j = e^{i\pi} \psi_j. \quad (4.63)$$

Então

$$\psi_{N+j} = \frac{1}{\sqrt{aN}} \sum_n e^{ik_n(j+N)a} b_{k_n} = \frac{1}{\sqrt{aN}} \sum_n e^{ik_nja} e^{ik_nNa} b_{k_n} = e^{i\pi} \psi_j. \quad (4.64)$$

Para que a relação acima seja satisfeita,  $e^{ik_nNa}$  deve ser igual a  $e^{i\pi}$ , então

$$k_nNa = \pi + 2n\pi \quad \Rightarrow \quad k_n = \frac{2\pi}{L} \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (4.65)$$

<sup>3</sup>Supomos sem perda de generalidade que  $N$  é um número ímpar.

### 4.6.2 Setor Ímpar

No caso ímpar temos  $T_N = 1$ , a condição de contorno é periódica,

$$\psi_{N+j} = \psi_j. \quad (4.66)$$

$$\psi_{N+j} = \frac{1}{\sqrt{aN}} \sum_n e^{ik_n(j+N)a} b_{k_n} = \frac{1}{\sqrt{aN}} \sum_n e^{ik_nja} e^{ik_nNa} b_{k_n} = \psi_j. \quad (4.67)$$

Para que a relação acima seja satisfeita,  $e^{ik_nNa}$  deve ser igual a 1, então

$$k_nNa = 2n\pi \quad \Rightarrow \quad k_n = \frac{2\pi n}{L}. \quad (4.68)$$

Resumindo os dois setores numa única equação

$$k_n = \frac{2\pi}{L} \left( n + \frac{P}{2} \right), \quad (4.69)$$

onde

$$\begin{aligned} P &= 1, \text{ se a condição de contorno é antiperiódica,} \\ P &= 0, \text{ se a condição de contorno é periódica.} \end{aligned}$$

A partir da relação de completeza dos estados, podemos escrever a delta de Kronecker como

$$\sum_j e^{i(k_n - k_m)ja} = N\delta_{k_n, k_m}, \quad \text{com} \quad k_n = \frac{2\pi}{L} \left( n + \frac{P}{2} \right). \quad (4.70)$$

Usando as expansões acima, podemos reescrever a hamiltoniana (4.53) em termos dos operadores  $b_n, b_n^\dagger$ . Assim, o termo de Hopping e do campo

magnético externo ficam

$$\begin{aligned}
\sum_j (\psi_j^\dagger \psi_{j+1} + \psi_{j+1}^\dagger \psi_j - 2h \psi_j^\dagger \psi_j) &= \frac{1}{aN} \sum_j \sum_{n,m} \left[ e^{-ik_n ja} e^{ik_m(j+1)a} b_n^\dagger b_m \right. \\
&\quad \left. + e^{-ik_n(j+1)a} e^{ik_m ja} b_n^\dagger b_m - 2h e^{-ik_n ja} e^{ik_m ja} b_n^\dagger b_m \right] \\
&= \frac{1}{aN} \sum_{n,m} \sum_j \left[ e^{-i(k_n - k_m)ja} e^{ik_m a} b_n^\dagger b_m \right. \\
&\quad \left. + e^{-i(k_n - k_m)ja} e^{-ik_n a} b_n^\dagger b_m - 2h e^{-i(k_n - k_m)ja} b_n^\dagger b_m \right] \\
&= \frac{1}{a} \sum_{n,m} \left[ \delta_{k_m, k_n} e^{ik_m a} b_n^\dagger b_m + \delta_{k_m, k_n} e^{-ik_n a} b_n^\dagger b_m - 2h \delta_{k_m, k_n} b_n^\dagger b_m \right] \\
&= \frac{1}{a} \sum_n \left( e^{ik_n a} + e^{-ik_n a} - 2h \right) b_n^\dagger b_n \\
&= \frac{2}{a} \sum_{n=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{(N-1)}{2}} (\cos(k_n a) - h) b_n^\dagger b_n \\
&= \frac{1}{a} (\cos(k_0 a) - h) (b_{k_0}^\dagger b_{k_0} + b_{-k_0}^\dagger b_{-k_0}) \\
&\quad + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\frac{(N-1)}{2}} (\cos(k_n a) - h) (b_n^\dagger b_n + b_{-n}^\dagger b_{-n}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_j (\psi_j^\dagger \psi_{j+1}^\dagger + \psi_{j+1} \psi_j) &= \frac{1}{aN} \sum_j \sum_{n,m} \left[ e^{-ik_n j a} e^{-ik_m (j+1)a} b_n^\dagger b_m^\dagger \right. \\
&\quad \left. + e^{ik_n (j+1)a} e^{ik_m j a} b_n b_m \right] \\
&= \frac{1}{aN} \sum_{n,m} \sum_j \left[ e^{-i(k_n+k_m)ja} e^{-ik_m a} b_n^\dagger b_m^\dagger \right. \\
&\quad \left. + e^{i(k_n+k_m)ja} e^{ik_n a} b_n b_m \right] \\
&= \frac{1}{a} \sum_{n,m} \left[ \delta_{k_m, -k_n} e^{-ik_m a} b_n^\dagger b_m^\dagger + \delta_{k_m, -k_n} e^{ik_n a} b_n b_m \right] \\
&= \frac{1}{a} \sum_n \left( e^{ik_n a} b_n^\dagger b_{-n}^\dagger + e^{ik_n a} b_n b_{-n} \right) \\
&= \frac{1}{a} \sum_{n=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{(N-1)}{2}} e^{ik_n a} (b_n^\dagger b_{-n}^\dagger + b_n b_{-n}) \\
&= \frac{1}{a} e^{ik_0 a} (b_{k_0}^\dagger b_{-k_0}^\dagger + b_{k_0} b_{-k_0}) \\
&\quad + \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\frac{(N-1)}{2}} e^{ik_n a} (b_n^\dagger b_{-n}^\dagger + b_n b_{-n}) + e^{-ik_n a} (b_{-n}^\dagger b_n^\dagger + b_{-n} b_n) \\
&= \frac{i}{a} \sin(k_0 a) (b_{k_0}^\dagger b_{-k_0}^\dagger + b_{k_0} b_{-k_0}) + \frac{2i}{a} \sum_{n=0}^{\frac{(N-1)}{2}} \sin(k_n a) (b_n^\dagger b_{-n}^\dagger + b_n b_{-n}).
\end{aligned}$$

Quando  $k_0 \equiv 0$ ,  $b_{k_0}^\dagger$ ,  $b_{-k_0}^\dagger$  criam o mesmo estado e  $b_{k_0}$ ,  $b_{-k_0}$  destroem o mesmo estado, logo

$$\sin(k_0 a) (b_{k_0}^\dagger b_{k_0}^\dagger + b_{-k_0} b_{-k_0}) = 0.$$

Quando  $k_0 \neq 0$ , temos que  $b_{k_0}^\dagger, b_{-k_0}^\dagger$  não criam o mesmo estado e  $b_{k_0}, b_{-k_0}$  não destroem o mesmo estado, logo

$$\sin(k_0 a)(b_{k_0}^\dagger b_{-k_0}^\dagger + b_{k_0} b_{-k_0}) \neq 0.$$

Definindo  $b_{-n} \equiv d_n^\dagger, b_{-n}^\dagger \equiv d_n$  nas equações acima<sup>4</sup>, obtemos

$$\begin{aligned} H = & \frac{JhN}{2} + \frac{J}{2a} \left[ (\cos(k_0 a) - h)(b_{k_0}^\dagger b_{k_0} + d_{k_0}^\dagger d_{k_0}) + i\gamma \sin(k_0 a)(b_{k_0}^\dagger d_{k_0} + b_{k_0} d_{k_0}^\dagger) \right] \\ & + \frac{J}{a} \sum_{n=1}^{\frac{(N-1)}{2}} \left[ (\cos(k_n a) - h)(b_n^\dagger b_n + d_n d_n^\dagger) + i\gamma \sin(k_n a)(b_n^\dagger d_n + b_n d_n^\dagger) \right] \end{aligned}$$

Resumindo, a hamiltoniana é a soma de 3 termos

$$H = \mu N + H_{k_0} + \tilde{H}. \quad (4.71)$$

O termo  $\mu N \equiv JhN/2$  funciona como um potencial químico, já sendo diagonal. A  $H_{k_0}$  é um termo especial que será tratado mais adiante, chamado de *hamiltoniana do modo zero*. A expansão em modos diagonalizou parcialmente a hamiltoniana  $\tilde{H}$ . Note que o fato de  $\gamma \neq 0$ , faz aparecer um termo que mistura operadores  $b$ 's e  $d$ 's. Para diagonalizar este termo, temos que introduzir novos operadores de férmion que são combinações lineares dos operadores  $b$ 's e  $d$ 's. São chamados de operadores de *quasipartícula*.

## 4.7 Operadores de Quasipartículas

Colocando  $\tilde{H}$  na ordem normal,

$$\tilde{H} = \frac{J}{a} \sum_{n=1}^{\frac{(N-1)}{2}} \left[ (\cos(k_n a) - h)(b_n^\dagger b_n - d_n^\dagger d_n + a) + i\gamma \sin(k_n a)(b_n^\dagger d_n - d_n^\dagger b_n) \right].$$

<sup>4</sup>O operador  $b_{-n}^\dagger$  cria uma partícula com momento negativo, equivalente a destruir uma antipartícula com momento positivo. Analogamente,  $b_{-n}$  destrói uma partícula com momento negativo, equivalente a criar uma antipartícula com momento positivo. Por isso,  $d_n$  e  $d_n^\dagger$  significam operadores de destruição e criação de antipartícula, respectivamente.



Podemos definir  $\Psi_n^\dagger = (b_n^\dagger \ d_n^\dagger)$ , tal que

$$\tilde{H} = \frac{J}{a} \sum_{n=1}^{\frac{(N-1)}{2}} \Psi_n^\dagger \mathcal{H}_n \Psi_n, \quad (4.72)$$

com a matrix  $\mathcal{H}_n$  do  $n$ -ésimo modo definida por

$$\mathcal{H}_n = \begin{pmatrix} \cos(k_n a) - h & i\gamma \sin(k_n a) \\ -i\gamma \sin(k_n a) & -(\cos(k_n a) - h) \end{pmatrix}. \quad (4.73)$$

Nosso trabalho agora é diagonalizar uma matrix  $2 \times 2$ ! Os autovalores da hamiltoniana  $\mathcal{H}_n$  são

$$\epsilon(k_n) = J \sqrt{(h - \cos(k_n a))^2 + \gamma^2 \sin^2(k_n a)}. \quad (4.74)$$

A transformação que leva  $\Psi_n$ , vetor original, em  $\Phi_n^\dagger = (\chi_n^\dagger \ \eta_n^\dagger)$ <sup>5</sup>, autovetores de  $\mathcal{H}_n$ , é a famosa *transformação de Bogoliubov*

$$\begin{pmatrix} b_n \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \nu_n & i \sin \nu_n \\ -i \sin \nu_n & \cos \nu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_n \\ \eta_n \end{pmatrix}, \quad (4.75)$$

com o ângulo de rotação  $\nu_n$  dado por

$$\tan 2\nu_n = \frac{\gamma \sin(k_n a)}{h - \cos(k_n a)}. \quad (4.76)$$

A hamiltoniana fica então escrita como

$$H = \frac{1}{2a} \left( E^+(k_0) \chi_{k_0}^\dagger \chi_{k_0} + E^-(k_0) \eta_{k_0}^\dagger \eta_{k_0} \right) + \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} \left\{ E^+(k_n) \chi_n^\dagger \chi_n + E^-(k_n) \eta_n^\dagger \eta_n \right\}.$$

## 4.8 O Modo Zero

### 4.8.1 Setor Par ( $k_0 \neq 0$ )

A hamiltoniana do setor par diagonalizada tem a forma

$$H^+ = \frac{\epsilon(k_0)}{2a} (\chi_{k_0}^\dagger \chi_{k_0} - \eta_{k_0}^\dagger \eta_{k_0}) + \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} \epsilon(k_n) \left\{ \chi_n^\dagger \chi_n - \eta_n^\dagger \eta_n \right\}, \quad (4.77)$$

<sup>5</sup>No mesmo espírito,  $\chi_{-n} \equiv \eta_n^\dagger$  e  $\chi_{-n}^\dagger \equiv \eta_n$

com  $P = 1$  em (4.69). O operador  $\chi_n^\dagger$  cria um estado de *quasipartícula* e o operador  $\eta_n^\dagger$  cria um estado de *quasiantipartícula*. No caso par, não existe *modo zero*, um estado que possui momento  $k_0 = 0$ . Isso acontece por causa do  $P = 1$ , tal que

$$k_0 = \frac{2\pi}{L} \left( 0 + \frac{1}{2} \right) \neq 0. \quad (4.78)$$

O estado de vácuo é vazio de quasipartículas. Ele é aniquilado por todos  $\chi_n$  e  $\eta_n^\dagger$ , i.e.,

$$\chi_n |GS\rangle_+ = 0, \quad \eta_n^\dagger |GS\rangle_+ = 0, \quad n = 0, \dots, (N-1)/2, \quad (4.79)$$

ou seja, é um estado em que não se pode destruir quasipartículas e não se pode criar mais quasi-antipartículas.

#### 4.8.2 Setor Ímpar ( $k_0 = 0$ )

Comparado com o caso anterior, podemos notar aqui uma diferença crucial. Não existe componente  $n = 0$  no termo multiplicado por  $\gamma$  da hamiltoniana. Então vamos separar esta componente

$$H^- = \frac{J}{a}(1-h)b_0^\dagger b_0 + \frac{J}{a} \sum_{n=1}^{\frac{(N-1)}{2}} \epsilon(k_n) \left\{ \chi_n^\dagger \chi_n - \eta_n^\dagger \eta_n \right\}, \quad (4.80)$$

com  $P = 0$  em (4.69). Quando  $n = 0$ ,  $H^-$  possui um modo zero! Basta ver a partir de (4.69),

$$k_0 = \frac{2\pi \cdot 0}{L} = 0. \quad (4.81)$$

Portanto, existe um estado com momento  $k_0 = 0$ .

O ângulo de rotação da transformação de Bogoliubov é dado por (4.76)

$$\tan 2v_n = \frac{\sin k_n a}{h - \cos k_n a}. \quad (4.82)$$

Quando  $n = 0$ ,  $v_n = 0$ , ou seja, o modo zero é invariante sob a transformação de Bogoliubov,

$$\chi_0 = b_0. \quad (4.83)$$

Temos agora que dividir em dois casos:

1. Quando  $h < 1$ , campo externo fraco

$$J(1 - h) = \epsilon(0), \quad (4.84)$$

$$H^- = \frac{1}{a}\epsilon(0)\chi_0^\dagger\chi_0 + \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{(N-1)/2}\epsilon(k_n)\{\chi_n^\dagger\chi_n - \eta_n^\dagger\eta_n\}, \quad (4.85)$$

2. Quando  $h > 1$ , campo externo forte

$$J(1 - h) = -\epsilon(0), \quad (4.86)$$

$$H^- = -\frac{1}{a}\epsilon(0)\chi_0^\dagger\chi_0 + \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{(N-1)/2}\epsilon(k_n)\{\chi_n^\dagger\chi_n - \eta_n^\dagger\eta_n\}. \quad (4.87)$$

O estado de vácuo de quasipartículas deveria ser aquele estado aniquilado por todos  $\chi_n$  e  $\eta_n^\dagger$ , i.e.,

$$\chi_n |GS'\rangle_- = 0 \quad \eta_n^\dagger |GS'\rangle_- = 0, \quad n = 1, \dots, (N-1)/2. \quad (4.88)$$

Porém, esse estado não é permitido porque o setor impõe número ímpar de excitações. Então o verdadeiro vácuo desse setor é

$$|GS\rangle_- = \chi_0^\dagger |GS'\rangle_- = b_0^\dagger |GS'\rangle_-. \quad (4.89)$$

Note então que o modo zero é necessário para que haja consistência.

## 4.9 Estado de Vácuo Dissecado

### 4.9.1 Energia do Estado de Vácuo

A energia do vácuo é dada por

$$H^\pm |GS\rangle_\pm = E_0^\pm |GS\rangle_\pm. \quad (4.90)$$

No caso par, temos que a energia do vácuo é

$$E_0^+ = \sum_{n=0}^{(N-1)/2}\epsilon\left[\frac{2\pi}{N}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right] \quad (4.91)$$

No caso ímpar, temos que a energia do vácuo quando  $h < 1$

$$E_0^- = J(1 - h) + \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \epsilon(k_n) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \epsilon\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \quad (4.92)$$

No limite termodinâmico,  $E_0^+ = E_0^-$  para  $h < 1$ , i.e., o estado de vácuo é degenerado. Vamos investigar como a diferença entre estes dois vácuos se comporta quando  $N \rightarrow \infty$ . Expandimos a diferença das energias em potências de  $1/N$ ,

$$\begin{aligned} E_0^+ - E_0^- &= \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \left\{ \epsilon\left[\frac{2\pi}{N}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right] - \epsilon\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \right\} \\ &= \frac{\pi}{N} \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \left. \frac{d}{dx} \epsilon\left[\frac{2\pi}{N}(n+x)\right] \right|_{x=0} \\ &\quad + \frac{\pi^2}{N^2} \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \left. \frac{d^2}{dx^2} \epsilon\left[\frac{2\pi}{N}(n+x)\right] \right|_{x=0} + \dots \\ &= O\left(\frac{1}{N}\right), \end{aligned} \quad (4.93)$$

uma vez que

$$\sum_{n=0}^{(N-1)/2} \left. \frac{d}{dx} \epsilon\left[\frac{2\pi}{N}(n+x)\right] \right|_{x=0} = 0. \quad (4.94)$$

Isso significa dizer que a diferença entre as duas energias decai mais rápido que a excitação de 1-partícula e constitui uma degenerescência de origem termodinâmica. Claramente, quando  $h > 1$  esta degenerescência desaparece. Então a transição de fase  $h = 1$  é a transição de Ising entre um vácuo  $\mathbb{Z}_2$  quebrado espontaneamente e um simétrico.

### 4.9.2 Níveis de Energia

Vimos que o vácuo é degenerado no limite termodinâmico. Vamos agora mostrar que cada nível de energia permitido pelo sistema é degenerado para  $h < 1$ .

Para isso, vamos escrever as possíveis energias do sistema, o espectro da teoria, começando pelos possíveis estados do espaço de Fock.

$$\begin{aligned}
|0\rangle &= |GS\rangle & |k_0\rangle &= \chi_0^\dagger |GS\rangle \\
|k\rangle &= \chi_k^\dagger |GS\rangle & |k_0k\rangle &= \chi_0^\dagger \chi_k^\dagger |GS\rangle \\
|k_1k_2\rangle &= \chi_{k_1}^\dagger \chi_{k_2}^\dagger |GS\rangle & |k_0k_1k_2\rangle &= \chi_0^\dagger \chi_{k_1}^\dagger \chi_{k_2}^\dagger |GS\rangle \\
&\vdots & & \vdots
\end{aligned} \tag{4.95}$$

Essas são todas as combinações possíveis. Temos que verificar quais delas são físicas. Para isso, devemos lembrar que a hamiltoniana do problema inicial tinha uma simetria,

$$[H, T_N] = 0, \tag{4.96}$$

ou seja, conservação da 'paridade' do número de excitações. O espectro então fica dividido em autovetores com autovalor  $\pm 1$  em relação a  $T_N$ ,

1.  $|k_1 \cdots k_{2l+1}\rangle$  tem autovalor  $+$  porque  $2l + 1$  é ímpar,
2.  $|k_1 \cdots k_{2l}\rangle$  tem autovalor  $-$  porque  $2l$  é par.

Alguns estados não são físicos. Lembrando que o modo zero é considerada uma excitação de partícula, temos

Estado	$T_N$	Setor	Tipo de estado
$ GS\rangle$	+1	Par	Permitido
$\chi_0^\dagger  GS\rangle$	-1	Ímpar	Permitido
$\chi_k^\dagger  GS\rangle$	-1	Ímpar	Permitido
$\chi_0^\dagger \chi_k^\dagger  GS\rangle$	+1	Par	Não Permitido
$\chi_{k_1}^\dagger \chi_{k_2}^\dagger  GS\rangle$	+1	Par	Permitido
$\chi_0^\dagger \chi_{k_1}^\dagger \chi_{k_2}^\dagger  GS\rangle$	-1	Ímpar	Permitido

O estados criados a partir do modo zero com autovalor de  $T_N$  igual a  $+1$  não são permitidos, pois  $\chi_0^\dagger$  não faz parte do espectro de  $H^+$ . Os estados físicos dos setores e suas respectivas energias são

Setor par	
Estados	Energia
$ GS\rangle_+$	$E_0^+$
$\chi_q^\dagger \chi_{q'}^\dagger  GS\rangle_+$	$E_0^+ + \epsilon \left[ \frac{2\pi}{N} \left( q + \frac{1}{2} \right) \right] + \epsilon \left[ \frac{2\pi}{N} \left( q' + \frac{1}{2} \right) \right]$

Setor ímpar ( $h < 1$ )	
Estados	Energia
$ GS\rangle_- = \chi_0^\dagger  GS'\rangle_-$	$E_0^-$
$\chi_q^\dagger  GS'\rangle_-$	$E_0^- + \epsilon(0) + \epsilon \left[ \frac{2\pi}{N} q \right]$
$\chi_0^\dagger \chi_q^\dagger \chi_{q'}^\dagger  GS'\rangle_+$	$E_0^- + \epsilon(0) + \epsilon \left[ \frac{2\pi}{N} q \right] + \epsilon \left[ \frac{2\pi}{N} q' \right]$

Setor ímpar ( $h > 1$ )	
Estados	Energia
$ GS\rangle_- = \chi_0^\dagger  GS'\rangle_-$	$E_0^- + \epsilon(0)$
$\chi_q^\dagger  GS'\rangle_-$	$E_0^- + \epsilon \left[ \frac{2\pi}{N} q \right]$
$\chi_q^\dagger \chi_{q'}^\dagger \chi_{q''}^\dagger  GS'\rangle_+$	$E_0^- + \epsilon \left[ \frac{2\pi}{N} q \right] + \epsilon \left[ \frac{2\pi}{N} q' \right] + \epsilon \left[ \frac{2\pi}{N} q'' \right]$

Concluindo, vemos que para  $h < 1$  os níveis do espectro de energia sempre aparecem em pares. No limite termodinâmico, todo nível de energia permitido é degenerado com uma contribuição de cada setor.

### 4.9.3 Função de Partição do Modelo XY

Vamos escrever agora a função de partição do modelo. O  $Q_N$  é o número de estados de quasipartículas (logo, de férmions) da cadeia. A função de partição canônica é

$$Z_{Q_N} = \text{Tr} e^{-\beta H_{Q_N}}, \quad (4.97)$$

onde

$$H_{Q_N} = \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon(k_n) n(k_n), \quad (4.98)$$

$$Q_N = \text{Tr} n(k) = \sum_{n=0}^{N-1} n(k_n), \quad (4.99)$$

sendo  $n(k)$  o número de partículas com momento  $k$ . O traço é tomado na base de quasipartículas, de tal forma que as hamiltonianas  $H_{Q_N}^\pm$

$$H_{Q_N}^+ = \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon \left[ \frac{2\pi}{N} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right] n(k_n) \quad (4.100)$$

$$H_{Q_N}^- = \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon \left( \frac{2\pi}{N} n \right) n(k_n), \quad h > 1 \quad (4.101)$$

$$H_{Q_N}^- = -\epsilon(0)n(0) + \sum_{k=1}^{N-1} \epsilon \left( \frac{2\pi}{N} n \right) n(k_n), \quad h < 1 \quad (4.102)$$

O conjunto  $\{n(k_n)\}_{Q_N}$  é o conjunto de todas as possíveis configurações do estado  $|n(k_n|Q_N)\rangle \equiv |n(k_1), \dots, n(k_N)\rangle$  sujeito a  $\sum_{i=0}^{N-1} n(k_i) = Q_N$ . Equivalentemente, dado um  $Q_N$  fixo,  $\{n(k_i)\}_{Q_N}$  é o conjunto de todas as possíveis *partições* de  $Q_N$ , ou seja, uma sequência finita de inteiros  $n(k_i)$  tal que  $\sum_{i=0}^{N-1} n(k_i) = Q_N$ .

A função de partição agora pode ser calculada

$$Z_{Q_N} = \text{Tr} e^{-\beta H_N} = \sum_{k_1, \dots, k_N} e^{-\beta E(k_1, \dots, k_N)}, \quad (4.103)$$

com

$$E(k_1, \dots, k_N) = \sum_{i=1}^N \epsilon(k_i) n(k_i), \quad (4.104)$$

onde mudamos o índice para facilitar a contagem, explicitando os sítios e não os momentos.

A função de partição do ensemble grande canônico consiste em retirar o vínculo de número fixo de partícula. Iremos somar sobre todos os números possíveis de  $Q_N$ . Como estamos lidando com férmions, então o número máximo  $Q_N = N$ , a cadeia toda ocupada. Então consideraremos a soma ponderada

$$Z = \sum_{Q_N=0}^N z^{Q_N} Z_{Q_N}, \quad (4.105)$$

onde  $z = e^{\beta\mu}$  é a fugacidade e  $\mu$  é o potencial químico (a superfície de Fermi ou energia do vácuo), logo  $z^{Q_N}$  são os pesos apropriados para cada  $Q_N$  fixo. Abrindo a soma, substituindo  $Z_{Q_N}$ , obtemos

$$Z = \sum_{Q_N} \sum_{\{n(k)\}_{Q_N}} e^{\beta\mu \sum_i n(k_i)} e^{-\beta \sum_i n(k_i) \epsilon(k_i)} = \sum_{Q_N} \sum_{\{n(k)\}_{Q_N}} \prod_{i=1}^N \left( e^{-\beta(\epsilon(k_i) - \mu)} \right)^{n(k_i)}.$$

Note que

$$\sum_{Q_N=0}^N \sum_{\{n(k)\}_{Q_N}} = \sum_{\{n(k)\}}, \quad (4.106)$$

onde no lado direito da equação, consideramos todas as configurações sem restrições (lembrando que o número máximo possível de excitações é  $N$ ). Portanto

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\{n(k)\}} \prod_{i=1}^N e^{-\beta(\epsilon(k_i) - \mu)n(k_i)} \\ &= \sum_{n(k_1)} \sum_{n(k_2)} \dots e^{-\beta(\epsilon(k_1) - \mu)n(k_1)} e^{-\beta(\epsilon(k_2) - \mu)n(k_2)} \dots e^{-\beta(\epsilon(k_N) - \mu)n(k_N)} \\ &= \sum_{n(k_1)} e^{-\beta(\epsilon(k_1) - \mu)n(k_1)} \sum_{n(k_2)} e^{-\beta(\epsilon(k_2) - \mu)n(k_2)} \dots \sum_{n(k_N)} e^{-\beta(\epsilon(k_N) - \mu)n(k_N)} \\ &= \prod_{i=1}^N \sum_{n(k_i)} e^{-\beta(\epsilon(k_i) - \mu)n(k_i)}. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Resumindo

$$Z = \prod_{i=1}^N \sum_{n(k_i)} e^{-\beta(\epsilon(k_i) - \mu)n(k_i)}. \quad (4.108)$$

O número  $n(k_i)$  para férmions só pode assumir dois valores: ou 0, i.e., sítio desocupado; ou 1, i.e., ou sítio ocupado. Portanto

$$\sum_{n(k_i)} e^{-\beta(\epsilon(k_i) - \mu)n(k_i)} = 1 + e^{-\beta(\epsilon(k_i) - \mu)}. \quad (4.109)$$

A função de partição fica

$$Z = \prod_{i=1}^N (1 + e^{-\beta(\epsilon(k_i) - \mu)}). \quad (4.110)$$

Em nenhum momento da construção acima fizemos menção ao fato que o modelo XY tem dois setores. A função de partição  $Z$  não discrimina número par e ímpar de férmions. Assim, definimos a função de



partição do setor par como

$$\begin{aligned}
 Z^+ &= \sum e^{-\beta E_i^+} & (4.111) \\
 &= e^{-\beta E_0^+} + e^{-\beta(E_0^+ + \epsilon(k_{n_1}) + \epsilon(k_{n_2}))} + e^{-\beta(E_0^+ + \epsilon(k_{n_1}) + \epsilon(k_{n_2}) + \epsilon(k_{n_3}) + \epsilon(k_{n_4}))} + \dots \\
 &= e^{-\beta E_0^+} \left[ 1 + \prod_{i=1}^2 e^{-\beta \epsilon(k_{n_i})} + \prod_{i=1}^4 e^{-\beta \epsilon(k_{n_i})} + \dots \right]
 \end{aligned}$$

ou seja, são produtórios com número par de termos. No setor ímpar, temos

$$Z^- = \sum e^{-\beta E_i^-} \quad (4.112)$$

$$= e^{-\beta E_0^-} + e^{-\beta(E_0^- + \epsilon(k_{n_1}))} + e^{-\beta(E_0^- + \epsilon(k_{n_1}) + \epsilon(k_{n_2}) + \epsilon(k_{n_3}))} + \dots \quad (4.113)$$

$$= e^{-\beta E_0^-} \left[ e^{-\beta \epsilon(k_{n_1})} + \prod_{i=1}^3 e^{-\beta \epsilon(k_{n_i})} + \dots \right], \quad (4.114)$$

ou seja, são produtórios com número ímpar de termos.

Para levar esse fato em conta, basta notar que

$$(1+a)(1+b) + (1-a)(1-b) = 2(1+ab), \quad (4.115)$$

$$(1+a)(1+b) - (1-a)(1-b) = 2(a+b), \quad (4.116)$$

ou mais geral,

$$\prod_{i=1}^N (1+a_i) + \prod_{i=1}^N (1-a_i) = 2(\text{monômios de grau par})$$

$$\prod_{i=1}^N (1+a_i) - \prod_{i=1}^N (1-a_i) = 2(\text{monômios de grau ímpar}).$$

Então a função de partição total, para  $h < 1$ , é

$$\begin{aligned}
Z &= Z^+ + Z^- \\
&= \frac{1}{2} e^{-\beta E_0^+} \left[ \prod_{n=1}^N (1 + e^{-\beta \epsilon [\frac{2\pi}{N} (n + \frac{1}{2})]}) + \prod_{n=1}^N (1 - e^{-\beta \epsilon [\frac{2\pi}{N} (n + \frac{1}{2})]}) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} e^{-\beta E_0^-} \left[ \prod_{n=1}^N (1 + e^{-\beta \epsilon [\frac{2\pi n}{N}]}) - \prod_{n=1}^N (1 - e^{-\beta \epsilon [\frac{2\pi n}{N}]}) \right] \\
&= 2^{N-1} \left\{ \prod_{n=1}^N \cosh \left( \frac{\beta}{2} \epsilon \left[ \frac{2\pi}{N} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right] \right) + \prod_{n=1}^N \sinh \left( \frac{\beta}{2} \epsilon \left[ \frac{2\pi}{N} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right] \right) \right\} \\
&\quad + 2^{N-1} \left\{ \prod_{n=1}^N \cosh \left( \frac{\beta}{2} \epsilon \left[ \frac{2\pi n}{N} \right] \right) - \prod_{n=1}^N \sinh \left( \frac{\beta}{2} \epsilon \left[ \frac{2\pi n}{N} \right] \right) \right\}. \quad (4.117)
\end{aligned}$$

O caso  $h > 1$  é direto.

#### 4.9.4 Funções de Correlação

O estado de vácuo  $|GS\rangle_+ = |0\rangle$  dos estados de quasipartículas é definido por

$$\chi_n |0\rangle = 0 \quad \eta_n^\dagger |0\rangle = 0, \quad (4.118)$$

i.e., o vácuo convencional. As correlações dessa teoria são facilmente encontradas,

$$\langle 0 | \chi_n \chi_m^\dagger | 0 \rangle = \delta_{n,m}, \quad (4.119)$$

$$\langle 0 | \chi_n^\dagger \chi_m | 0 \rangle = 0, \quad (4.120)$$

$$\langle 0 | \chi_n \chi_m | 0 \rangle = 0, \quad (4.121)$$

$$\langle 0 | \chi_n^\dagger \chi_m^\dagger | 0 \rangle = 0. \quad (4.122)$$

Equivalentemente para os  $\eta$ 's.

Quando fazemos a transformação inversa, podemos achar as funções de correlação em termo dos operadores de férmions, tendo

$$b_n = \cos \nu_n \chi_n + \sin \nu_n \eta_n. \quad (4.123)$$

As funções de correlação ficam

$$\langle 0 | \psi_n^\dagger \psi_m | 0 \rangle = \sin^2(\nu_n) \delta_{n,m}, \quad (4.124)$$

$$\langle 0 | \psi_n \psi_m^\dagger | 0 \rangle = \cos^2(\nu_n), \quad (4.125)$$

$$\langle 0 | \psi_n \psi_m | 0 \rangle = -\cos(\nu_n) \sin(\nu_n) \delta_{-n,m}, \quad (4.126)$$

$$\langle 0 | \psi_n^\dagger \psi_m^\dagger | 0 \rangle = \cos(\nu_n) \sin(\nu_n) \delta_{-n,m}. \quad (4.127)$$

Próximo passo é calcular estas funções de correlação para a cadeia de spin original

$$\rho_{lm}^v \equiv \langle 0 | \sigma_l^a \sigma_m^a | 0 \rangle \quad a = x, y, z. \quad (4.128)$$

Expressando essas correlações em termo dos operadores escada

$$\rho_{lm}^x = \langle 0 | (\sigma_l^+ + \sigma_l^-) (\sigma_m^+ + \sigma_m^-) | 0 \rangle, \quad (4.129)$$

$$\rho_{lm}^y = -\langle 0 | (\sigma_l^+ - \sigma_l^-) (\sigma_m^+ - \sigma_m^-) | 0 \rangle, \quad (4.130)$$

$$\rho_{lm}^z = \langle 0 | (1 - 2\sigma_l^+ \sigma_l^-) (1 - 2\sigma_m^+ \sigma_m^-) | 0 \rangle. \quad (4.131)$$

Não sabemos como os operadores de spin  $\sigma_j^a$  agem no estado  $|0\rangle$ , mas sabemos como os operadores fermiônicos  $\psi_j$  agem. Usando a transformação de Jordan-Wigner para escrever as funções de correlação em função dos operadores fermiônicos, temos

$$\rho_{lm}^x = \langle 0 | (\sigma_l^+ + \sigma_l^-) (\sigma_m^+ + \sigma_m^-) | 0 \rangle, \quad (4.132)$$

$$= \langle 0 | (\psi_l^\dagger + \psi_l) \prod_{i=l}^{m-1} (\sigma_i^z) (\psi_m^\dagger + \psi_m) | 0 \rangle, \quad (4.133)$$

$$= \langle 0 | (\psi_l^\dagger + \psi_l) \prod_{i=l}^{m-1} (1 - 2\psi_i^\dagger \psi_i) (\psi_m^\dagger + \psi_m) | 0 \rangle. \quad (4.134)$$

Porém

$$1 - 2\psi_i^\dagger \psi_i = (\psi_i^\dagger + \psi_i) (\psi_i^\dagger - \psi_i) = -(\psi_i^\dagger - \psi_i) (\psi_i^\dagger + \psi_i), \quad (4.135)$$

então

$$\rho_{lm}^x = \langle 0 | (\psi_l^\dagger - \psi_l) \prod_{i=l+1}^{m-1} (\psi_i^\dagger + \psi_i) (\psi_i^\dagger - \psi_i) (\psi_m^\dagger + \psi_m) | 0 \rangle \quad (4.136)$$

Agora defina os operadores

$$A_i = \psi_i^\dagger + \psi_i, \quad (4.137)$$

$$B_i = \psi_i^\dagger - \psi_i. \quad (4.138)$$

Podemos escrever as funções de correlação como

$$\rho_{lm}^x = \langle 0 | B_l \left( \prod_{i=l+1}^{m-1} A_i B_i \right) A_m | 0 \rangle, \quad (4.139)$$

$$\rho_{lm}^y = (-1)^{m-1} \langle 0 | A_l \left( \prod_{i=l+1}^{m-1} A_i B_i \right) B_m | 0 \rangle, \quad (4.140)$$

$$\rho_{lm}^z = \langle 0 | A_l B_l A_m B_m | 0 \rangle. \quad (4.141)$$

Podemos usar o teorema de Wick para expandir esses valores esperados em termo de funções de correlação de 2-pontos. Notando que

$$\langle 0 | A_l A_m | 0 \rangle = \langle 0 | B_l B_m | 0 \rangle = 0, \quad (4.142)$$

podemos escrever  $\rho_{lm}^z$  como

$$\rho_{lm}^z = \langle 0 | A_l B_l | 0 \rangle \langle 0 | A_m B_m | 0 \rangle - \langle 0 | A_l B_m | 0 \rangle \langle 0 | A_m B_l | 0 \rangle \quad (4.143)$$

$$= H^2(0) - H(l-m)H(m-l) \quad (4.144)$$

onde

$$H(m-l) \equiv \langle 0 | B_l A_m | 0 \rangle = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{dq}{2\pi} e^{ivq} e^{iq(m-l)}. \quad (4.145)$$

A integral é a transformada de Fourier das funções de correlação (4.127). A lição aqui é que podemos escrever as correlações entre os spins como determinantes de matrizes  $m-l \times m-l$

$$\rho_{lm}^x = \det |H(i-j)|_{j=l+1, \dots, m}^{j=l+1, \dots, m} \quad (4.146)$$

$$\rho_{lm}^y = \det |H(i-j)|_{j=l+1, \dots, m}^{j=l, \dots, m-1} \quad (4.147)$$

Estas matrizes são especiais. Suas entradas dependem apenas da diferença entre os índices da linha e da coluna, tal que tenham o mesmo

elemento na diagonal. Portanto,

$$\rho_{lm}^x = \rho^x(n) = \begin{pmatrix} H(-1) & H(-2) & \cdots & H(-n) \\ H(0) & H(-1) & \cdots & H(1-n) \\ H(1) & H(0) & \cdots & H(2-n) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ H(n-2) & H(n-3) & \cdots & H(-1) \end{pmatrix} \quad (4.148)$$

$$\rho_{lm}^y = \rho^y(n) = \begin{pmatrix} H(1) & H(0) & H(-1) & \cdots & H(2-n) \\ H(2) & H(1) & H(0) & \cdots & H(3-n) \\ H(3) & H(2) & H(1) & \cdots & H(4-n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ H(n) & H(n-1) & H(n-2) & \cdots & H(1) \end{pmatrix} \quad (4.149)$$

onde  $n = m - l$ . Matrizes como (4.148) e (4.149) são conhecidas como *matrizes de Toeplitz*. Existe uma vasta literatura dedicada ao estudo do comportamento assintótico dos *determinantes de Toeplitz*. Para o Modelo XY, é relevante entender que o comportamento assintótico para funções de 2-pontos  $H(m - l)$  a temperatura zero depende do parâmetro

$$\lambda_{\pm} = \frac{h \pm \sqrt{\gamma^2 + h^2 - 1}}{1 + \gamma}. \quad (4.150)$$

Destes resultados, podemos extrair uma melhor interpretação das diferentes fases do modelo.

1. Para  $h > 1$ , temos uma *fase desordenada*, uma vez que não existe magnetização ao longo da direção x. Nesta região, os  $\lambda$ 's são reais.
2. Para  $|h| < 1$ , o modelo está numa *fase ordenada*, com uma magnetização  $m_x$ . Os  $\lambda$ 's continuam reais.
3. Para  $h^2 + \gamma^2 < 1$ , ambos  $\lambda_{\pm}$  adquirem uma parte imaginária e se tornam complexos conjugados um do outro. A função de correlação então adquire um caráter periódico. Esta fase é chamada de *oscilatória*.

## 4.10 Apêndice 1 - Matrizes de Toeplitz

As matrizes de Toeplitz são matrizes  $n \times n$

$$T_n = \langle t_{k,j}; k, j = 0, 1, \dots, n-1 | t_{k,j} = t_{k-j} \rangle, \quad (4.151)$$

i.e., da forma

$$T_n = \begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & & \\ t_2 & t_1 & t_0 & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ t_{n-1} & & & \cdots & t_0 \end{pmatrix}. \quad (4.152)$$

O resultado mais famoso das matrizes de Toeplitz, e relevante para o problema do modelo XY, é o teorema de Szegö para sequências de matrizes de Toeplitz  $\{T_n\}$ . O teorema é sobre o *comportamento assintótico* dos autovalores  $\{\tau_i; i = 0, 1, 2, \dots, n-1\}$ , com  $n \rightarrow \infty$ . Este teorema requer uma série de condições a serem satisfeitas, incluindo a existência da série de Fourier de uma função  $f$  com coeficientes  $t_k$ , relacionados por

$$f(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tau_k e^{ik\lambda}, \quad \lambda \in [0, 2\pi], \quad (4.153)$$

$$\tau_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda) e^{-ik\lambda} d\lambda. \quad (4.154)$$

Portanto, a sequência  $\{t_n\}$  determina a função  $f$  e vice-versa, logo a sequência de matrizes é usualmente denotada por  $T_n(f)$ . Sobre certas condições, o teorema de Szegö afirma que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F(\tau_k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(f(\lambda)) d\lambda \quad (4.155)$$

para qualquer função contínua  $F$  na imagem de  $f$ . Exemplo, escolha  $F(x) = x$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tau_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda) d\lambda, \quad (4.156)$$

Assim, a média aritmética dos autovalores de  $T_n(f)$  converge para uma integral de  $f$ . Porém, o traço de uma matriz  $A$  qualquer é a soma dos seus autovalores, então a equação (4.156) implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \operatorname{Tr} T_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda) d\lambda. \quad (4.157)$$

Analogamente, para  $F(x) = x^s$ , temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tau_k^s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda)^s d\lambda. \quad (4.158)$$

Se  $f$  for real, tal que os autovalores  $\tau_k \geq m > 0$ ,  $\forall n, k$ , então  $F(x) = \ln x$  é uma função contínua em  $[m, \infty)$  e o teorema de Szegö pode ser aplicado para mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \tau_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln f(\lambda) d\lambda. \quad (4.159)$$

O determinante de uma matriz é o produto de seus autovalores

$$\det(T_n(f)) = \prod_{i=0}^{n-1} \tau_i, \quad (4.160)$$

tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \det(T_n(f))^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \tau_k \quad (4.161)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln f(\lambda) d\lambda. \quad (4.162)$$





# Capítulo 5

## Conclusão

No capítulo 3, vimos que a teoria de calibre pode emergir de um sistema bem simples. Tentamos entender o que é fisicamente uma teoria de gauge e concluímos que se um sistema possui uma degenerescência foi preservada, temos uma descrição redundante do sistema, no caso uma fase que depende da escolha de base. A existência dessa redundância define a simetria de gauge. Uma medida não pode estar em função da base, por isso devemos procurar quantidades físicas. Elas são definidas como invariante sob uma transformação de calibre, e.g, o traço do loop de Wilson e a curvatura  $F_{\mu\nu}$ .

Destrinchamos tudo sobre cadeia de spin XY. A transformação de Jordan-Wigner se mostrou uma ferramenta poderosa em um sistema 1-dimensional, pois a partir dela pudemos diagonalizar a hamiltoniana XY usando uma teoria de férmions e as funções de correlação ficam mais fáceis de serem derivadas.

Além de tudo, mostramos que as condições de contorno são essências. Alguns fenômenos físicos dependem diretamente das condições de contorno, inclusive no limite termodinâmico.

O modelo XY é equivalente a duas cópias de uma teoria de férmions: uma com número de férmions par com condição de contorno anti-periódica, outra com número de férmions ímpar com condição de contorno periódica. Quando  $N \rightarrow \infty$  e  $h < 1$ , não há como distinguir esses dois setores, porque não faz sentido falar em infinito par e infinito ímpar, dando a impressão que temos uma degenerescência no modelo. Porém, ela é de origem termodinâmica. Quando  $h > 1$ , ela desaparece. Então,  $h = 1$  é um ponto de quebra espontânea de simetria: começamos

com uma teoria simétrica por  $\mathbb{Z}_2$  que se quebra espontaneamente. Poderíamos entender melhor esta degenerescência usando teoria de calibre não-abeliana? Emaranhamento seria um meio de 'medir' esta degenerescência?

Outro ponto importante é o aparecimento do modo zero no setor ímpar. Seria interessante explorá-lo como foi feito no exemplo em [16], propondo vácuo do estado ímpar tem um grau de liberdade interno e estudar fracionalização da 'carga', neste caso, número de férmions  $Q_N$ .

A partir da função de correlação podemos entender melhor as diferentes fases do modelo XY. Próximo passo seria estudar o que acontece quando  $\gamma^2 + h^2 = 1$ , o semicírculo do diagram de fase. Poderia ser um level crossing ou um avoid-crossing entre níveis de energia?

São perguntas em aberto deixadas por este trabalho.

# Bibliografia

## Álgebra de Clifford

- [1] J.M.Gracia-Bondía, J.C. Várilly, H. Figueroa *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser, Berlin.
- [2] A. Van Proeyen, *Tools for supersymmetry*, 1999 [arXiv:hep-th/9910030].
- [3] J. Figueroa-O'Farrill, *Spin Geometry*, Lecture Notes, 2010.
- [4] T. Friedrich, *Dirac Operators in Riemannian geometry*, Graduate studies in mathematics, ISSN 1065-7339; v. 25 (1949).

## Teoria de Gauge

- [5] M. Srednicki, *"Quantum Field Theory"*, Cambridge University Press, UK (2007).
- [6] F. Wilczek, A. Zee, *"Appearance of Gauge Structure in Simple Dynamical Systems"*, Phys. Rev. Lett. **51**, 2111 (1984).

## Cadeia XY

- [7] F. Franchini, *Notes on Bethe Ansatz Techniques*, Trieste, Italy, 2011.
- [8] Parkinson, J.B., Farnell, D.J.J., *An Introduction to Quantum Spin Systems*, Springer, Berlin Heidelberg 2010.

- [9] A. Kitaev, *Unpaired majorana fermions in quantum wires*, cond-mat/0010440.
- [10] DeGottardi, W.; Thakurathi, M.; Vishveshwara, S. & Sen, D. *Majorana fermions in superconducting wires: Effects of long-range hopping, broken time-reversal symmetry, and potential landscapes*, Phys. Rev. B, American Physical Society, 2013, **88**, 165111.
- [11] G. Semenoff, G. Grignani, *Introduction to some common topics in gauge theory and spin systems*.
- [12] E. Lieb, T. Schultz, and D. Mattis, *Two soluble models of an antiferromagnetic chain*, *Annals of Physics* **16** (1961), no. 3 407 - 466.
- [13] R.M. Gray, *Toeplitz and Circulant Matrices: A Review*, Standford University.
- [14] Semenoff, G. W. & Sodano, P. *Stretching the electron as far as it will go*, *Electron.J.Theor.Phys.*, 2006, **10**, 157-190.
- [15] Semenoff, Gordon W., and Pasquale Sodano. *Teleportation by a majorana medium*, arXiv preprint cond-mat/0601261 (2006).
- [16] Semenoff, Gordon W. and Niemi, A. J.. *Fermion Number Fractionization in Quantum Field Theory*. PHYSICS REPORTS (Review Section of Physics Letters), **135**,3, 99-193. North-Holland, Amsterdam (1986)
- [17] A. Queiroz, A. Reyes-Lega, M.Carvalho, *Em preparação*