

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DO GAMA/FACULDADE DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE  
MATERIAIS DA ENGENHARIA

O Método dos Elementos de Contorno Rápido com  
Expansão em Multipólos Aplicado a Problemas de  
Elasticidade Plana

AFONSO BARROS DIAS JÚNIOR

ORIENTADOR: ÉDER LIMA DE ALBUQUERQUE

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM  
INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA

PUBLICAÇÃO: FGA.DM - 015A/2014

BRASÍLIA-DF: JULHO - 2014



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DO GAMA/FACULDADE DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE  
MATERIAIS DA ENGENHARIA

O MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO  
RÁPIDO COM EXPANSÃO EM MULTIPOLÓES  
APLICADOS A PROBLEMAS DE ELASTICIDADE  
PLANA

AFONSO BARROS DIAS JÚNIOR

DISSERTAÇÃO DE SUBMETIDA AO PROGRMA DE PÓS GRA-  
DUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHA-  
RIA DA FACULDADE GAMA E FACULDADE DE TECNOLO-  
GIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE  
MESTRE EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHA-  
RIA.

APROVADA POR:

---

Prof. Éder Lima de Albuquerque, DSc. (ENM-UnB)  
(Orientador)

---

Prof. Luciano Mendes Bezerra, PhD. (ENC-UnB)  
(Examinador Externo)

---

Prof. Arthur Portela , PhD. (ENC-UnB)  
(Examinador Interno)

BRASÍLIA/DF, 25 DE JULHO DE 2014.

## FICHA CATALOGRÁFICA

JÚNIOR, AFONSO BARROS DIAS

O Método dos Elementos de Contorno Rápido com Expansão em Multipólos Aplicado a Problemas de Elasticidade Plana.

[Distrito Federal] 2014.

74p., 210 x 297 mm (FGA/FT/UnB, Mestre, Integridade de Materiais da Engenharia, 2014).

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília.

Faculdade do Gama/Faculdade de Tecnologia.

Programa de Pós-Graduação em Integridade de Materiais da Engenharia.

- |                                     |                           |
|-------------------------------------|---------------------------|
| 1. Método dos elementos de contorno | 2. Expansão em multipólos |
| 3. Séries de Taylor                 | 4. Elasticidade           |
| I. FGA/FT/UnB                       | II. GAMA                  |

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

DIAS JÚNIOR, AFONSO BARROS (2014). O Método dos Elementos de Contorno Rápido com Expansão em Multipólos Aplicado de Elasticidade Plana. Dissertação de Mestrado em Integridade de Materiais da Engenharia, Publicação ENM.DM - 015 A/2014, Programa de Pós-Graduação em Integridade de Materiais da Engenharia, Universidade de Brasília - Faculdade do Gama/Faculdade de Tecnologia Brasília, DF, 74p.

## CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Afonso Barros Dias Júnior.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: O Método dos Elementos de Contorno Rápido com Expansão em Multipólos Aplicado a Problemas de Elasticidade Plana.

GRAU / ANO: Mestre / 2014

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação, bem como emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. A autor reserva outros direitos de publicação, desse modo nenhuma parte desta dissertação pode ser reproduzida sem a autorização por escrito da autor.

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Afonso Barros Dias e Maria de Deus Gomes Santana Dias pelo apoio e incentivo.

Ao Prof. Éder Lima de Albuquerque pelo seu comprometimento, dedicação, paciência, cooperação durante a execução desse trabalho.

Aos Professores do Departamento de Integridade de Materiais da Engenharia pelo conhecimento transmitido, especialmente aos professores Jhon Goulart e a Carla Tatiana Mota Anflor pelo apoio.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Aos meus colegas pelo companheirismo.

## RESUMO

### O Método dos Elementos de Contorno Rápido com Expansão em Multipólos Aplicado a Problemas de Elasticidade Plana

**Autor:** Afonso Barros Dias Júnior

**Orientador:** Éder Lima de Albuquerque

**Programa de Pós-graduação em Integridade de Materiais da Engenharia**

**Brasília, Julho de 2014.**

Este trabalho apresenta o Método de Elementos de Contorno Rápido com Expansões em Multipólos (MECMP) para análise de problemas de elasticidade plana. Nessa abordagem, as soluções fundamentais são expandidas em série de Taylor. Utiliza-se a estrutura hierárquica de árvore para agrupar os elementos próximos e distantes do ponto fonte. Integração dos elementos próximos ao ponto fonte são tratadas de maneira convencional, aplicando o Método dos Elementos de Contorno (MEC), enquanto a expansão em série de Taylor são usadas para integração de elementos distantes do ponto fonte. São apresentados exemplos numéricos para estudar a precisão e a eficiência da formulação do MECMP. Estes resultados demonstram o potencial para resolver problemas elásticos em duas dimensões usando o MECMP.

*Palavras-chaves: Método de elementos de contorno; Expansão rápida em multipólos; Elasticidade;*

## ABSTRACT

### **The Fast Multipole Boundary Element Method with Fast Multipole Applied to Problems of Plane Elasticity**

**Author: Afonso Barros Dias Júnior**

**Supervisor: Éder Lima de Albuquerque**

**Postgraduate Program in Integrity of Engineering Materials**

**Brasília, July, 2014.**

This work presents a Fast Multipole Boundary Element Method (FMBEM) for large-scale analysis of plane elastic problems. Integral equations for plane elastic problems are written in a complex form. Fundamental solutions are expanded into Taylor series and the integration on far elements are written considering locations of element and expansion point. A hierarchical tree structure is assembled in order to group near and far elements do ponto fonte. Integration of near elements is treated by the direct application of the Boundary Element Method (BEM) while fast multipole expansion is used for integration of far element do ponto fonte. Numerical examples are presented to study the accuracy and efficiency of the fast multipole boundary element. These results demonstrate the potential of the fast multipole boundary element for solving large-scale plane elastic problems.

*Keywords: Boundary element method; Fast Multipole Method; Elaticity;*

# Lista de Símbolos

## Letras gregas

$\beta_{ij}$  = Constante elástica.

$\pi$  = Número pi.

$\delta$  = Delta de dirac.

$\delta_{ij}$  = Delta de Kronecker.

$\nabla^2$  = Operador laplaciano.

$\varepsilon_{ii}$  = Deformação longitudinal.

$\varepsilon_{ij}$  = Deformação angular.

$\lambda$  = Constante de Lamé.

$\mu$  = Módulo de cisalhamento.

$\nu$  = Coeficientes de Poisson

$\sigma_{ii}$  = Tensões normais.

$\sigma_{ij}$  = Tensões cisalhantes.

## Letras arábicas

$\log$  = Logaritmo neperiano.

$x$  = Ponto fonte.

$z_0$  = Ponto fonte em notação complexa.

$y$  = Ponto campo.

$z$  = Ponto campo em notação complexa.

$y_c$  = Ponto intermediário.

$f_i$  = Força de superfície.

$B_i$  = Matriz dos vetores conhecidos.

$b_i$  = Força de massa.

$r$  = Distância do ponto fonte para o ponto campo.

$M_k(z_c), N_k(z_c)$  = Momentos sobre  $z_c$ .

$M_k(z'_c), N_k(z'_c)$  = Translação Momento-para-momento sobre  $z'_c$ .

$L_l(z_L), K_l(z_L)$  = Translação Momento-para-Local sobre  $z_L$ .

$L_l(z'_L), K_l(z'_L)$  = Translação Local-para-local sobre  $z'_L$ .

$E$  = Módulo de Elasticidade.

$G_{ij}$  = Matriz G.

$H_{ij}$  = Matriz H.

$n$  = Vetor normal.

$t_i$  = Vetor de forças de superfície.

$u_{ij}, t_{ij}$  = Soluções fundamentais de deslocamentos e forças de superfície.

# Lista de Abreviações

MEC = Métodos dos elementos de contorno.

MECMP = Método dos elementos de contorno rápido com expansões em multipólos.

BEM = Boundary Element Method.

FMBEM = Fast Multipole Boundary Element Method.

MDF = Método das diferenças finitas.

MEF = Método dos elementos finitos.

MR = Método rápidos.

MRMP = Método rápido com expansões em multipólos.

ACA = Aproximação cruzada adaptativa.

M2M = Translação momento-para-momento.

M2L = Translação momento-para-local.

L2L = Translação local-para-local.

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	Métodos numéricos aplicados a problemas de engenharia . . . . .	1
1.2	Organização do trabalho . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Teoria da Elasticidade e Método dos Elementos de Contorno (MEC)</b>	<b>7</b>
2.1	Introdução . . . . .	7
2.2	Equação de equilíbrio . . . . .	7
2.3	Deformação . . . . .	9
2.4	Relação tensão deformação . . . . .	11
2.5	Equação de Navier-Cauchy . . . . .	13
2.6	Equação integral de contorno . . . . .	15
2.7	Solução fundamental . . . . .	20
2.8	Discretização da equação de contorno . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Método dos Elementos de Contorno Rápido com Expansão em Multipólos (MECMP)</b>	<b>27</b>
3.1	Introdução . . . . .	27
3.2	Princípios Básicos do (MECMP) . . . . .	27
3.3	Expansão rápida em multipólos para problemas lineares elásticos	30

3.3.1	Expansão em multipólos e Momentos . . . . .	34
3.3.2	Translação momento-para-momento (M2M) . . . . .	37
3.3.3	Expansão local e translação momento-para-local (M2L) . . . . .	38
3.3.4	Translação local-para-local (L2L) . . . . .	39
3.3.5	Algoritmo . . . . .	40
3.3.6	Matriz de pré condicionamento . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Resultados Numéricos</b>	<b>48</b>
4.1	Aproximação dos termos das integrais $D_u$ e $D_t$ usando a expansão em série de Taylor . . . . .	48
4.2	Uso da memória RAM no MEC e no MECMP . . . . .	51
4.3	Conclusões . . . . .	53
4.4	Trabalhos futuros . . . . .	54
4.5	Publicações . . . . .	55

# Lista de Tabelas

4.1	Comparação entre MECMP e MEC. . . . .	51
4.2	Comparação dos resultados entre MECMP e MEC. . . . .	52

# Lista de Figuras

2.1	Tensões atuantes em um paralelepípedo - fonte: [26] modificada	8
2.2	Deformação de um ponto $P$ - fonte:[26]	10
2.3	Contorno estendido	18
2.4	Elementos de contorno constantes (A), lineares (B) e quadráticos (C) - fonte:[6]	23
2.5	Relação entre os pontos fonte e campo - fonte:[31]	24
3.1	Complexidade de interações entre o MEC (A) o MECMP (B) - fonte: [6]	29
3.2	Expansão multipolar em torno do ponto $z_c$ - fonte:[5] modificada	35
3.3	Translação do ponto $z_c$ para o ponto $z'_c$ - fonte: [5]	38
3.4	Expansão em torno do ponto $z_L$ - fonte: [5]	39
3.5	Translação do ponto $z_L$ para o ponto $z'_L$ - fonte: [5]	40
3.6	Contorno discretizado por células - fonte: [5]	41
3.7	Relação entre as células - fonte:[33] modificada	42
3.8	Translação M2L	44
3.9	Translação M2L e L2L	45
3.10	Expansão Local e MEC	46
4.1	Elemento com número constante de nós	49
4.2	Malha dos elementos constantes	49

4.3	Células e número dos nós . . . . .	50
4.4	Placa com 100 furos. . . . .	51
4.5	Deslocamento dos furos das placa . . . . .	53

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 Métodos numéricos aplicados a problemas de engenharia

De acordo com [1], as soluções analíticas para os problemas de engenharia sempre foram desejadas, pois as mesmas representam a solução exata desses problemas. Contudo, existem vários problemas onde a solução analítica é muito difícil de encontrar. Logo, para se obter a resposta desses problemas, foram desenvolvidas, ao longo dos anos, métodos numéricos que encontraram soluções aproximadas para esses problemas. Tais métodos são capazes de criar, a partir de um modelo contínuo, um modelo discreto que simplifica o problema original. Portanto, utilizando as técnicas numéricas, conseguimos reduzir a complexidade de um problema, obtendo um mais simples, na qual as soluções encontradas são as soluções aproximadas do problema mais complexo. Atualmente, três métodos numéricos são amplamente utilizados:

- Método das Diferenças Finitas (MDF);
- Método dos Elementos Finitos (MEF);
- Método dos Elementos de Contorno (MEC);

O MDF pode ser classificado como um método numérico diferencial. Sendo assim, esse método trabalha com a resolução de equações diferenciais. Tais equações tem como base a aproximação das derivadas por diferenças finitas. Logo, ele transforma equações diferenciais em equações algébricas.

O MEF, segundo [2], transforma uma equação diferencial numa equação integral. Vale ressaltar que a equação que governa o problema físico é a equação diferencial e, a equação integral, é uma equação equivalente a do problema inicial. Essa equação irá trabalhar com as respostas desconhecidas do problema. De acordo com [3], a resposta de cada elemento é caracterizada em termos de um número finito de graus de liberdade. Esses graus de liberdade são representados como os valores das funções desconhecidas. A formulação do elemento é definida por equações algébricas obtidas de considerações matemáticas ou experimentais. A solução do sistema original é aproximada, pois um modelo discreto é construído pela conexão de todos os elementos.

Segundo [4], o MEF apresenta algumas vantagens sobre o MDF, pois o MEF permite uma melhor aplicação das condições de contorno do problema. Além disso, ele permite que a malha tenha um tamanho variável. Contudo, o método de MEF possui algumas desvantagens, como a utilização de um número muito grande de variáveis nas suas equações. Isso faz com que tenhamos um consumo de tempo computacional muito grande. Além disso, a entrada e saída de dados tornam-se muito trabalhosas quando o problema é complexo.

O outro método computacional largamente utilizado é o MEC. Esse método tem como base o método de resíduos ponderados. Ele pode ser utilizado em várias áreas da engenharia como mecânica dos fluidos, acústica, eletromagnetismo, mecânica da fratura e transferência de calor. Para solucionarmos os problemas encontrados nessas diversas áreas, o MEC transforma as equações diferenciais desses problemas em equações integrais. Para fazer essa transformação, são utilizados o teorema Gauss-Green e a solução fundamental das equações diferenciais. Vale considerar que a utilização das soluções fundamentais são importantes, pois elas são usadas como a função de ponderação. Essa função é usada para eliminar a integral de domínio que aparece quando utilizamos o teorema Gauss-Green. Por isso, uma das características do MEC é

trabalhar só com as integrais de contorno dos problemas. Isso faz com que a dimensão dos problemas seja reduzida em um.

Portanto, após para obtermos a equação integral que governa o problema, devemos discretizá-la. Quando essa discretização é realizada, um conjunto de equações algébricas é obtido. Assim, quando solucionamos essas equações, estaremos encontrando as incógnitas do contorno. Contudo, de acordo com [5], a aplicação do MEC só é vantajosa para problemas que possuem menos que alguns milhares de graus de liberdade. Os problemas que extrapolam esse valores são difíceis de serem abordados resolvidos, pois um computador pessoal pode não ter memória suficiente para armazenar os dados da solução de um problema com milhares de graus de liberdade. Isso ocorre pois as equações matriciais produzidas pelo MEC são cheias e não simétricas. Essa dificuldade está associada com dois fatores: a criação dos coeficientes das matrizes e a obtenção da solução das mesmas. Segundo [5], necessitamos de  $O(N^3)$  operações para solucionar um sistema linear com matriz cheia e não simétrica, sendo que  $N$  representa o número de graus de liberdade encontrado. Além disso, são necessários  $O(N^2)$  operações para criar os coeficientes do sistema linear que será resolvido. Portanto, esses dois fatores são responsáveis por tornar inviável a solução de problemas em larga escala.

Sendo assim, uma das formas usadas para resolver esse tipo de problema é acoplar o MEC com outros métodos numéricos, a fim de acelerar a solução dos problemas de larga escala. Esses métodos são conhecidos como *Métodos Rápidos (MR)*. Quando associados o MEC com os MR, somos capazes reduzir para a ordem  $O(N)$  tanto o número de operações usadas para solucionar o sistema linear do problema quanto o número de operações para criar os coeficientes do sistema linear. Isso acontece pois, de acordo com [6], alguns MR tem como base a aproximação explícita das soluções fundamentais. Tal aproximação é feita por uma soma finita de funções que são separáveis. Segundo [6], a soma finita de funções irá proporcionar a criação de blocos de matrizes. Tais blocos são utilizados para facilitar a solução de sistemas lineares, pois eles são armazenados de forma mais eficiente. Logo, os mesmos diminuem a quantidade de memória utilizada. Além disso, quando utilizamos métodos

iterativos, obtemos uma rápida multiplicação entre um vetor e os blocos de matrizes, proporcionando uma maior eficiência do método.

Atualmente, dois MR estão ganhando destaque para solucionar os problemas de larga escala : o *Método Rápido com Expansão em Multipólos (MRMP)* e a *Aproximação cruzada adaptativa (ACA)*. O MRMP aproxima os núcleos das equações integrais do MEC por uma soma finita de funções. Em contra partida, o ACA é um método que aproxima a matriz por blocos de baixo posto, sem ter a necessidade de fazer a expansão dos núcleos das equações integrais.

Assim como o MRMP, o ACA tem se estabelecido como uma técnica eficaz para resolver problemas de larga escala. Segundo [7], esse método decresce, significativamente, o custo computacional para montar as matrizes e resolver as operações que envolvem multiplicação entre uma matriz e um vetor. De acordo com [6], a solução do sistema linear é acelerada pelo cálculo de somente poucas entradas da matriz original. Sendo assim, podemos destacar a utilização do ACA em diversas áreas. Os trabalhos de [8, 9] utilizaram esse método para resolver problemas de acústica governados pela equação de Helmholtz. Podemos encontrar em [10, 11, 12] a solução de problemas para eletromagnetismo. Por fim, podemos encontrar em [13] e [14] a utilização do ACA para resolver problemas de elasticidade plana e mecânica da fratura respectivamente.

Em contra partida, de acordo com [5], o MRMP começou a se desenvolver nos meados dos anos 80. O primeiro trabalho de MRMP foi feito por [15]. Ele trabalhou com as equações de Laplace em duas dimensões. Nesse trabalho, [15] combinou MRMP com soluções iterativas para reduzir a complexidade do problema de ordem  $O(N^3)$  para  $O(N)$ . Além disso, ele utilizou a ideia de momentos multipolar para representar a distância entre grupos de partículas e, apresentou a expansão local em série de Taylor para calcular a contribuição das partículas distantes. Em seguida, os trabalhos de [16] e [17] foram responsáveis por aplicar os algoritmo de MRMP para problemas de  $N$  corpos que utilizam potencial de Coulomb para duas e três dimensões. De acordo com [5], esses trabalhos apresentaram a decomposição hierárquica do domínio, utilizando uma estrutura de árvores quaternárias para problema em duas dimensões e a estrutura de árvores octernárias para três dimensões. Esses procedimento fez

com que a complexidade da montagem das matrizes se reduzissem de  $O(N^2)$  para  $O(N)$ .

Nas últimas décadas o MRMP tem sido utilizado para diversas aplicações. Vale considerar que a utilização do MRMP para solucionar problemas de elasticidade tem tido grandes aplicações. Nos trabalhos de [18] e [19] encontramos o desenvolvimento de equações biharmônicas para elasticidade plana utilizando Método de elementos MECMP. De acordo com [6], eles resolveram a equação biharmônica utilizando variável complexa de Sherman. Após esse desenvolvimento, fizeram várias aplicações dos resultados obtidos para problemas de larga escala. No trabalho de [20] foi desenvolvido uma abordagem espectral de multipólos. Tal abordagem, segundo [5], apresentaram várias características semelhantes com o MECMP. Utilizando a mesma ideia de [20], [21] desenvolveram um método espectral utilizando as equações de deslocamento e tração na força de superfície. Vale considerar que essa abordagem utiliza um reticulado para fazer a expansão em série de Taylor. Isto é, nos pontos desse reticulado é feita uma expansão em séries de Taylor das integrais. Por fim, a interpolação desses valores irá fornecer os valores nos pontos de colocação.

No trabalho de [18] e [22], temos a utilização das variáveis complexas para as equações integrais e a utilização da expansão em multipólos. Além disso, [23] resolveu problemas de larga escala em elasticidade plana com mais de um milhão de graus de liberdade com um laptop de 1GBytes de memória. Nesse trabalho, [23] apresentou uma forma compacta para os momentos utilizados na elasticidade plana. Por fim, podemos encontrar a utilização de MECMP para mecânica da fratura em [24] e [25].

Sendo assim, tendo em vista essas duas possibilidades, essa dissertação irá associar o MRMP com o MEC, obtendo assim utilizar o MECMP a fim de resolver os problemas de larga escala da elasticidade plana. A finalidade desse trabalho é mostrar eficiência e a precisão desse método, analisando a redução de memória RAM quando comparamos o MECMP com o MEC.

De acordo com [5], iremos obter um ganho na redução de memória utilizada, pois o MECMP irá mudar a interação entre os elementos. Iremos substituir a interação nó-a-nó por uma interação célula-a-célula. Portanto, com

esse método, iremos interagir grupo de elementos. Tais grupos serão obtidos através da estrutura hierárquica conhecida como árvore. Assim, segundo [6], ao agruparmos os nós em grupos de elementos expandirmos as soluções fundamentais em séries multipolar, obtemos uma redução do custo computacional para resolver problemas de larga-escala.

## 1.2 Organização do trabalho

Este trabalho está dividido em 3 partes. No capítulo 2 apresentaremos algumas equações da teoria da elasticidade seguida das principais equações do MEC para problemas de elasticidade plana (equação integral e as soluções fundamentais). Também será feita a discretização das equações integrais de contorno, a fim de obter o sistema matricial desse método.

No capítulo 3 será apresentado o MECMP. Portanto, é feita a expansão das soluções fundamentais das equações integrais de contorno. Apresentaremos as principais operações utilizadas pelo MECMP, juntamente com a estrutura das árvores. Por fim, iremos apresentar a matriz de pré-condicionamento. Ela é utilizada para facilitar a convergência do sistema matricial que irá solucionar o nosso problema.

No capítulo 4 apresentaremos os resultados numéricos obtidos com o MECMP para solucionar os problemas de larga-escala encontrados pela teoria da elasticidade. Sendo assim, iremos mostrar a eficiência desse método através da comparação do consumo de memória RAM entre MECMP e MEC. Por fim, será apresentado as conclusões sobre esse trabalho e possíveis trabalhos futuros utilizando o MECMP.

## Capítulo 2

# Teoria da Elasticidade e Método dos Elementos de Contorno (MEC)

### 2.1 Introdução

O objetivo principal desse capítulo é apresentar as principais equações utilizadas pelo MEC para problemas de elasticidade plana. Primeiramente, serão apresentadas algumas equações da teoria da elasticidade (equação de equilíbrio, equação da deformação, relação tensão-deformação e a equação de Navier-Cauchy). Depois, será deduzida as equações integrais de contorno e as soluções fundamentais. Por fim, discretizaremos as equações de contorno obtidas e apresentaremos as soluções analíticas das integrais de contorno. Elas irão se encontrar no anexo A do trabalho.

### 2.2 Equação de equilíbrio

Considere, primeiramente, a Figura 2.1, onde estão representadas as tensões atuantes em cada face do paralelepípedo. Adotaremos o sinal positivo para as tensões que atuam no sentido dos eixos. Logo, as tensões que atuam

em sentido contrário terão sinal negativo. Considerando o equilíbrio de forças, temos as seguintes equações:

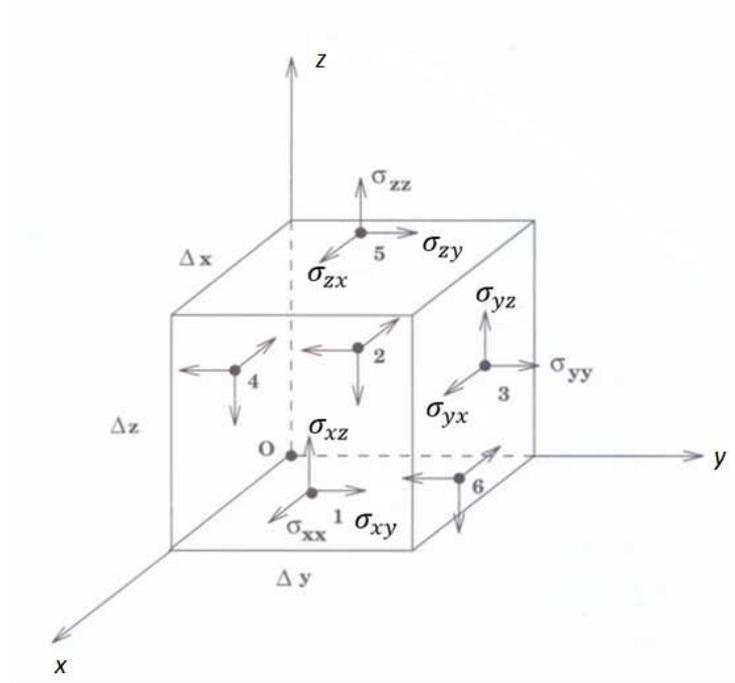


Figura 2.1: Tensões atuantes em um paralelepípedo - fonte: [26] modificada

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 \rightarrow & (\sigma_{xx})_1 \Delta y \Delta z - (\sigma_{xx})_2 \Delta y \Delta z + (\sigma_{xy})_3 \Delta x \Delta z - (\sigma_{xy})_4 \Delta x \Delta z \\ & + (\sigma_{xz})_5 \Delta x \Delta y - (\sigma_{xz})_6 \Delta x \Delta y = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 \rightarrow & (\sigma_{yy})_3 \Delta y \Delta z - (\sigma_{yy})_4 \Delta x \Delta z + (\sigma_{yx})_1 \Delta y \Delta z - (\sigma_{yx})_2 \Delta y \Delta z \\ & + (\sigma_{yz})_5 \Delta x \Delta y - (\sigma_{yz})_6 \Delta x \Delta y = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_z = 0 \rightarrow & (\sigma_{zz})_5 \Delta x \Delta y - (\sigma_{zz})_6 \Delta x \Delta y + (\sigma_{zx})_1 \Delta y \Delta z - (\sigma_{zx})_2 \Delta y \Delta z \\ & + (\sigma_{zy})_5 \Delta x \Delta z - (\sigma_{zy})_6 \Delta x \Delta z = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Considere que os índices de 1 a 6 se referem a face onde estão atuando as tensões. Dividindo as equações pelo volume  $\Delta x \Delta y \Delta z$  e aplicando o limite quando esse volume tende a zero, teremos os seguintes resultados:

$$\lim_{\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0} \left[ \frac{[(\sigma_{xx})_1 - (\sigma_{xx})_2]}{\Delta x} + \frac{[(\sigma_{xy})_3 - (\sigma_{xy})_4]}{\Delta y} + \frac{[(\sigma_{xz})_5 - (\sigma_{xz})_6]}{\Delta z} \right] = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

$$\lim_{\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0} \left[ \frac{[(\sigma_{yy})_3 - (\sigma_{yy})_4]}{\Delta y} + \frac{[(\sigma_{yx})_1 - (\sigma_{yx})_2]}{\Delta x} + \frac{[(\sigma_{yz})_5 - (\sigma_{yz})_6]}{\Delta z} \right] = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (2.5)$$

$$\lim_{\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0} \left[ \frac{[(\sigma_{zz})_5 - (\sigma_{zz})_6]}{\Delta z} + \frac{[(\sigma_{zx})_1 - (\sigma_{zx})_2]}{\Delta x} + \frac{[(\sigma_{zy})_3 - (\sigma_{zy})_4]}{\Delta y} \right] = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} = 0 \quad (2.6)$$

Escrevendo as equações (2.4),(2.5) e (2.6) em notação indicial:

$$\frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (2.7)$$

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (2.8)$$

## 2.3 Deformação

De acordo com [27], forças externas e internas são responsáveis por gerar deslocamentos lineares e angulares em um corpo deformável. Estes deslocamentos são definidos em termos de deformações. Sendo assim, podemos definiremos a deformação longitudinal como:

$$\epsilon = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{\delta L}{L} \quad (2.9)$$

Como exemplo, considere a deformação do ponto  $P$  da Figura 2.2 na direção  $x$ . Utilizando a equação (2.9), representaremos essa deformação como:

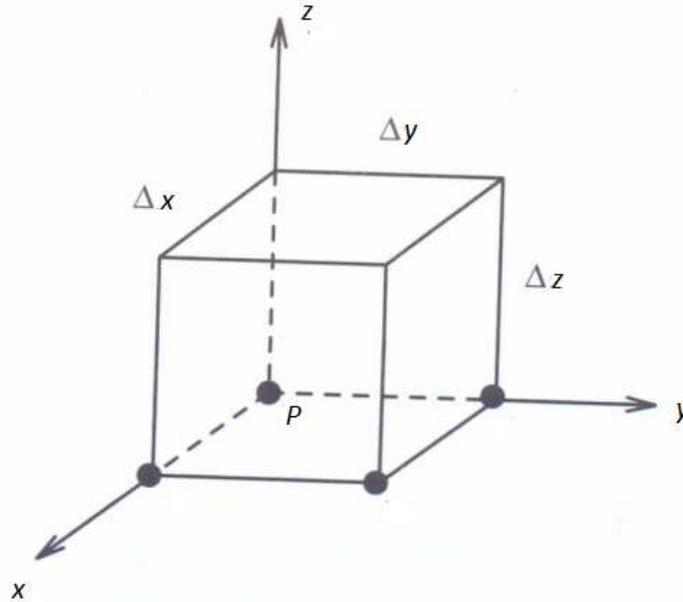


Figura 2.2: Deformação de um ponto  $P$  - fonte:[26]

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.10)$$

onde  $u$  representa o deslocamento do ponto  $P$  na direção  $x$ . Desta forma, se o mesmo ponto sofrer um deslocamento ao longo dos eixos  $y$  e  $z$ , temos, respectivamente, as seguintes deformações:

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.11)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.12)$$

Além das deformações longitudinais, temos as deformações angulares. Elas estão relacionadas com distorção dos ângulos associados com um determinado plano. Representaremos essas deformações com as seguintes equações:

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.13)$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.14)$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.15)$$

Essas deformações estão associadas com os planos  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$ , respectivamente. Ao considerarmos as deformações longitudinais e as deformações angulares, definimos o tensor das deformações. Ele pode ser representado da seguinte forma:

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Vale considerar que para essa dissertação adotamos a condição de pequenos deslocamentos.

## 2.4 Relação tensão deformação

De acordo com [26], podemos relacionar tensões e deformações nos pontos de um corpo elásticos com as seguintes equações:

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})] \quad (2.17)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})] \quad (2.18)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E}[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})] \quad (2.19)$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\mu} \quad (2.20)$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{\mu} \quad (2.21)$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{\mu} \quad (2.22)$$

Escrevendo as equações de (2.17) a (2.22) acima em notação indicial:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{ij}\epsilon_{ij} \quad (2.23)$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $\mu$  é o módulo de cisalhamento e  $E$  é o módulo de elasticidade. A relação entre o módulo de cisalhamento e o módulo de elasticidade para materiais isotrópicos é dado por  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ . Se utilizarmos a constante de Lamé  $\lambda = \frac{2\nu\mu}{1-2\nu}$ , escreveremos uma outra relação entre tensão e deformação, dada por:

$$\sigma_{xx} = \lambda e + 2\mu\epsilon_{xx} \quad (2.24)$$

$$\sigma_{yy} = \lambda e + 2\mu\epsilon_{yy} \quad (2.25)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda e + 2\mu\epsilon_{zz} \quad (2.26)$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu\epsilon_{xy} \quad (2.27)$$

$$\sigma_{yz} = 2\mu\epsilon_{yz} \quad (2.28)$$

$$\sigma_{zx} = 2\mu\epsilon_{xz} \quad (2.29)$$

Onde  $e$  é a deformação volumétrica dada por:

$$e = (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \quad (2.30)$$

Escrevendo as relações (2.24) a (2.29) em notação indicial, teremos uma só equação:

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} + 2\mu\epsilon_{ij} \quad (2.31)$$

## 2.5 Equação de Navier-Cauchy

A equação de Navier-Cauchy é a equação de equilíbrio escrita em termos dos deslocamentos. Se substituirmos as equações (2.27), (2.28) e (2.29) na equação (2.4), teremos:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\lambda e + 2\mu\epsilon_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(2\mu\epsilon_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z}(2\mu\epsilon_{xz}) = 0 \quad (2.32)$$

O que pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\lambda e) + \frac{\partial}{\partial x}(2\mu\epsilon_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(2\mu\epsilon_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z}(2\mu\epsilon_{xz}) = 0 \quad (2.33)$$

Considerando que  $\lambda$  e  $\mu$  são constantes, obtemos o seguinte resultado:

$$\lambda\frac{\partial e}{\partial x} + 2\mu\frac{\partial\epsilon_{xx}}{\partial x} + 2\mu\frac{\partial\epsilon_{xy}}{\partial y} + 2\mu\frac{\partial\epsilon_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (2.34)$$

Substituindo as relações dadas pelas equações (2.10), (2.13) e (2.14) na equação (2.34), tem-se:

$$\lambda \frac{\partial e}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 2\mu \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + 2\mu \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] = 0 \quad (2.35)$$

Desenvolvendo a equação (2.35):

$$\lambda \frac{\partial e}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] = 0 \quad (2.36)$$

$$\lambda \frac{\partial e}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} = 0 \quad (2.37)$$

Podemos reorganizar a equação (2.37) como:

$$\lambda \frac{\partial e}{\partial x} + \left[ 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \mu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \right] = 0 \quad (2.38)$$

$$\lambda \frac{\partial e}{\partial x} + \left[ \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] = 0 \quad (2.39)$$

$$\lambda \frac{\partial e}{\partial x} + \left[ \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right] + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] = 0 \quad (2.40)$$

Reagrupando a equação (2.40):

$$\lambda \frac{\partial e}{\partial x} + \left[ \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] = 0 \quad (2.41)$$

Considerando as relações dada por (2.10), (2.13) e (2.14), tem-se:

$$\lambda \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \mu \frac{\partial}{\partial x} [\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}] = 0 \quad (2.42)$$

Utilizando a identidade da equação (2.30):

$$\lambda \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \mu \frac{\partial e}{\partial x} = 0 \quad (2.43)$$

$$\lambda \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial e}{\partial x} [\lambda + \mu] + \mu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (2.45)$$

Por fim, reescreveremos a equação (2.45) como:

$$\frac{\partial e}{\partial x} (\lambda + \mu) + \mu \nabla^2 u_x = 0 \quad (2.46)$$

Se fizermos os mesmos procedimentos para as equações (2.5) e (2.6), utilizando as relações de deformação e deslocamento apropriadas, iremos obter que:

$$\frac{\partial e}{\partial y} (\lambda + \mu) + \mu \nabla^2 u_y = 0 \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial e}{\partial z} (\lambda + \mu) + \mu \nabla^2 u_z = 0 \quad (2.48)$$

Escrevendo em notação indicial as equações (2.46), (2.47) e (2.48) tem-se:

$$u_{j,ji} (\lambda + \mu) + \mu u_{i,jj} = 0 \quad (2.49)$$

## 2.6 Equação integral de contorno

Para obtermos a equação integral de contorno para problemas elásticos, considere uma força de campo  $b_i$  na equação de equilíbrio dada por (2.8). Além disso, teremos dois estados de equilíbrio distintos, dados por  $(u_i, t_i)$  e  $(u_i^*, t_i^*)$ ,

sendo que  $(u_i, u_i^*)$  são os deslocamentos,  $(t_i, t_i^*)$  são as forças de superfície. Então, considere a integral abaixo:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = 0 \quad (2.50)$$

Aplicando o teorema de Gauss-Green na primeira integral do lado esquerdo da equação (2.50), tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} u_i^* \sigma_{ij} n_j dS - \int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{i,j}^* d\Omega \quad (2.51)$$

Substituindo a equação (2.51) na equação (2.50), tem-se:

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j u_i^* dS - \int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{i,j}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = 0 \quad (2.52)$$

Considerando a lei de Hooke:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)} \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} u_{k,k} + \left( \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} \right) \right] \quad (2.53)$$

E a equação de Cauchy, dada por:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2.54)$$

A equação (2.52) pode ser escrita como:

$$\int_{\Gamma} t_i u_i^* dS - \int_{\Omega} \left\{ \frac{E}{(1+\nu)} \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} u_{k,k} + \left( \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} \right) \right] \right\} u_{i,j}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = 0 \quad (2.55)$$

Conforme mostrada por [28], a partir da (2.55), podemos chegar ao seguinte resultado:

$$\int_{\Gamma} t_i u_i^* dS - \int_{\Gamma} u_i t_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} u_i \sigma_{ij,j}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = 0 \quad (2.56)$$

A equação (2.56) representa o teorema recíproco de Betti. De acordo com [30], esse teorema expressa a igualdade do trabalho recíproco feito por dois estados de equilíbrio quaisquer. Sendo assim, consideraremos que um dos dois estados é conhecido e, o outro, desconhecido. O estado conhecido será chamado de estado fundamental. De acordo com [29], o estado fundamental corresponde a resposta de um corpo infinito a uma carga concentrada unitária em um ponto  $y$ . Representaremos a carga unitária como um delta de Dirac. Além disso, considere que as forças de massa são nulas ( $b_i = 0$ ). Logo, reescreveremos a equação (2.56) como:

$$\int_{\Gamma} t_i(x) u_i^*(x) dS - \int_{\Gamma} u_i(x) t_i^*(x) d\Gamma + \int_{\Omega} u_i(y) \sigma_{ij,j}^* d\Omega = 0 \quad (2.57)$$

Sendo que  $(x)$  representa um ponto no contorno e  $(y)$  um ponto no domínio. Além disso, de acordo com [27], podemos reescrever alguns termos da equação (2.57) como  $u_i^* = u_{ij}^*(x, y) e_i$  e  $t_i^* = t_{ij}^*(x, y) e_i$ . Então:

$$\int_{\Gamma} t_i(x) u_{ij}^*(x, y) e_i dS - \int_{\Gamma} u_i(x) t_{ij}^*(x, y) e_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_i(y) \sigma_{ij,j}^* d\Omega = 0 \quad (2.58)$$

Escrevendo  $\sigma_{ij,j}^* = -\delta(y, x) \delta_{ij} e_i$ , sendo  $\delta(y, x)$  o delta de Dirac, temos que:

$$\int_{\Omega} u_i(y) (-\delta(y, x) \delta_{ij} e_i) d\Omega = 0 \rightarrow \int_{\Omega} u_j(y) (-\delta(y, x) e_i) d\Omega = 0 \quad (2.59)$$

Utilizando a propriedade do delta de Dirac:

$$\int_{\Omega} u_j(y) (-\delta(y, x) e_i) d\Omega = -u_j e_i \quad (2.60)$$

Substituindo esse resultado na equação (2.58), tem-se:

$$\int_{\Gamma} t_i(x) u_{ij}^*(x, y) e_i dS - \int_{\Gamma} u_i(x) t_{ij}^*(x, y) e_i d\Gamma - u_j e_i = 0 \quad (2.61)$$

Por fim:

$$u_j(x) = \int_{\Gamma} t_j u_{ij}^*(x, y) dS - \int_{\Gamma} u_j t_{ij}^*(x, y) dS \quad (2.62)$$

De acordo com [30], a equação (2.62) representa a identidade de Somigliana. A partir desta identidade, é possível saber os deslocamentos no interior do domínio a partir do conhecimento dos deslocamentos e forças de superfície na fronteira do mesmo. Contudo, em certos problemas, só sabemos uma dessas duas quantidades. Isto é, ou se conhece o deslocamento no contorno ou se conhece as forças de superfície. Desta forma, essa identidade se torna insuficiente para resolver problemas que possuem apenas uma dessas quantidades. Logo, é necessário aplicar o delta de Dirac no contorno do problema. Sendo assim, considere a Figura 2.3. A partir dela, podemos aplicar a seguinte identidade de Somigliana:

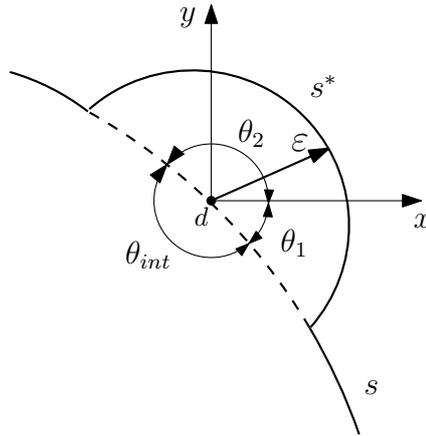


Figura 2.3: Contorno estendido

$$u_j(x) = \int_{\Gamma - \Gamma_1 + \Gamma_2} t_i(x) u_{ij}^*(x, y) dS - \int_{\Gamma - \Gamma_1 + \Gamma_2} u_j(x) t_{ij}^*(x, y) d\Gamma \quad (2.63)$$

Considerando o limite quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , reescreveremos a segunda integral do lado direito da equação como:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_1 + \Gamma_2} u_i(x) t_{ij}^*(x, y) d\Gamma &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_2} u_i(x) t_{ij}^*(x, y) d\Gamma \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_1} u_i(x) t_{ij}^*(x, y) d\Gamma & \end{aligned} \quad (2.64)$$

De acordo com [29], essa integral apresenta uma singularidade forte, devido a solução fundamental. Para evitar esse problema, faremos uma expansão, em série de Taylor, em torno do ponto fonte. Logo, obteremos que:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_1 + \Gamma_2} u_i(x) t_{ij}^*(x, y) d\Gamma &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_2} [u_i(x) - u_i(y)] t_{ij}^*(x, y) d\Gamma \\ + u_j(x) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_1} t_{ij}^*(x, y) d\Gamma & \end{aligned} \quad (2.65)$$

Na equação (2.65), o primeiro termo do lado esquerdo desaparece, pois quando o limite de  $\epsilon \rightarrow 0$  os deslocamentos serão iguais. Além disso, a segunda integral da equação (2.65) pode ser escrita como:

$$u_j(x) \left\{ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_1} t_{ij}^*(x, y) d\Gamma \right\} = u_j(x) \beta_{ij}(x) \quad (2.66)$$

De acordo com [30],  $\beta_{ij}(x)$  representa uma constante que depende das propriedades elásticas do problema e da geometria local. A segunda integral da equação (2.64) é chamada de valor principal de Cauchy. Essa integral é fortemente singular no contorno, tornando-se imprópria. Logo, no limite quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , temos o seguinte resultado:

$$c_{ij}(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} [u_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j(\mathbf{y}) - t_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_j(\mathbf{y})] d\Gamma \quad (2.67)$$

Onde:

$$c_{ij} = \delta_{ij} + \beta_{ij}(x) \quad (2.68)$$

Sendo o valor de  $\beta_{ij}$  igual  $-\frac{1}{2}\delta_{ij}$  para um contorno suave.

## 2.7 Solução fundamental

Nessa seção demonstraremos a solução fundamental para a equação de equilíbrio de Navier-Chauchy. Sendo assim, considere a equação de equilíbrio:

$$\mu u_{i,j}^* + \frac{\mu}{1-2\nu} u_{j,i}^* + \delta(y-x)e_i = 0 \quad (2.69)$$

Na equação (2.69), consideramos a presença de uma força concentrada aplicada sobre o corpo em um ponto  $x$ . De acordo com [27], as soluções fundamentais estão relacionadas com a solução das equações diferenciais quando o delta de Dirac está agindo como força de corpo. Assim, uma das maneiras de se obter a solução dessas equações é utilizando o vetor de Garlekin. Portanto, podemos expressar o deslocamento em termos do vetor de Garlekin:

$$u^*(x, y)_{ij} = \delta_{ij} \nabla^2 G - \frac{1}{2(1-\nu)} \partial_i \partial_j G = 0 \quad (2.70)$$

Sendo que:

$$G = \frac{1}{8\pi\nu} r^2 \log\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \quad (2.71)$$

Fazendo as derivadas acima, encontraremos que:

$$\nabla^2 G = -\frac{1}{2\pi\nu} + \frac{\log(\frac{1}{r})}{2\pi\nu} \quad (2.72)$$

$$\partial_i \partial_j G = -\frac{1}{8\pi\nu} - \frac{1}{4\pi\nu} r_{,x}^2 + \frac{\log(\frac{1}{r})}{4\pi\nu} \quad (2.73)$$

Para  $i = j$ . Quando  $i \neq j$ , temos:

$$\partial_i \partial_j (G) = -\frac{1}{4\pi\nu} r_{,x} r_{,y}^2 \quad (2.74)$$

Para  $i \neq j$ . Sendo assim, se substituirmos as equações (2.72) a (2.74) na equação (2.70), encontraremos que:

$$u_{ij}^* = \left[ \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \right] \left[ \begin{array}{cc} (3-4\nu)\ln(r) + r_{,x}^2 + \frac{7-8\nu}{2} & 2r_{,x}r_{,y} \\ 2r_{,y}r_{,x} & (3-4\nu)\log(r) + r_{,y}^2 + \frac{7-8\nu}{2} \end{array} \right] \quad (2.75)$$

Sendo que a equação acima pode ser escrita como:

$$u_{ij}^*(x, y) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} [(3-4\nu)\log(r)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}] \quad (2.76)$$

Sendo que a notação  $\log$  representa o logaritmo neperiano. Assim, na equação (2.75) o termo  $(\frac{7-8\nu}{2})$  pode ser desprezado, pois de acordo com [31], esse termo não tem influência nas tensões e deformações. Por fim, a solução fundamental para a força de superfície pode ser obtida como:

$$t_{ki}^*(x, y) = \sigma_{kij}(x, y)n_j \quad (2.77)$$

De acordo com [32], o primeiro índice dos termos  $t_{ki}^*$  e  $\sigma_{kij}$  representam a direção do carregamento no ponto fonte. Assim, temos:

$$\sigma_{kij}(x, y) = \frac{E}{(1+\nu)} \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} u_{k\omega}^*(x, y)\delta_{ij} + \frac{u_{ki,j}^*(x, y) + u_{kj,i}^*(x, y)}{2} \right] \quad (2.78)$$

Sendo:

$$u_{k\omega}^*(x, y) = -\frac{1}{4\pi\mu(1-\nu)r} [(1-2\nu)r_{,k}] \quad (2.79)$$

$$\frac{u_{ki,j}^*(x, y) + u_{kj,i}^*(x, y)}{2} = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)r} [-2r_{,i}r_{,j}r_{,i} + r_{,i}\delta_{ij} - 1 - 2\nu(r_{,i}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ii})] \quad (2.80)$$

Substituindo as equações (2.79), (2.80) na equação (2.78), encontraremos que:

$$\sigma_{kij}(x, y) = \frac{-1}{(4G\pi(1-\nu)r)} [-(1-2\nu)r_{,k}\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}(x, y) + (1-2\nu)(r_{,i}\delta_{kj} + r_{,j}\delta_{ki})] \quad (2.81)$$

Por fim, substituindo esse resultado na equação (2.77), temos:

$$t_{ki}^*(x, y) = \frac{-1}{4\pi\mu(1-\nu)r} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ki} + 2r_{,i}r_{,k}] - (1-2\nu)(r_{,i}n_k - r_{,k}n_i) \right] \quad (2.82)$$

## 2.8 Discretização da equação de contorno

Segundo [29], a essência do MEC consiste em transformar equações diferenciais em equações integrais. Tais integrais podem ser resolvidas analiticamente ou numericamente. Nessa dissertação iremos trabalhar com a solução analítica dessa integrais. Quando trabalhamos com as equações integrais, apenas o contorno do problema necessita ser discretizado. Portanto, de acordo com [29], quando obtemos a integral de contorno do problema, devemos discretizar a mesma. Escrevemos essa integral como um somatório das partes que subdividem o contorno. Tal discretização é feita aproximando o contorno do problema em *elementos de contorno*. De acordo [29], as condições de contorno do problema são utilizadas nos pontos nodais que pertencem aos elementos de contorno. Para discretizarmos o contorno, podemos utilizar vários tipos de elementos. Entretanto, os mais comuns são: elementos constantes, elementos lineares e elementos quadráticos.

Quando utilizamos elementos constantes, o contorno do problema é aproximado por vários segmentos retos. Nesses elementos, temos a presença de um ponto nodal no ponto médio do segmento. O valor da condição de contorno e da variável desconhecida é considerada constante ao longo desse elemento. Para os elementos lineares, de acordo com [29], o contorno do problema é aproximado por um polinômio de primeiro grau. Nesse tipo de elemento são necessários dois pontos nodais (um no início do elemento e outro no final do elemento). A condição de contorno e a variável desconhecida assumem uma variação linear entre esses pontos. Por fim, os elementos quadráticos aproximam a geometria, as variáveis desconhecidas e as condições de contorno do problema através de funções quadráticas. Nesse tipo de elemento temos três

pontos nodais, sendo dois localizados nos extremos e um localizado no meio deles. A Figura 2.4 ilustra os três tipos de elementos apresentados.

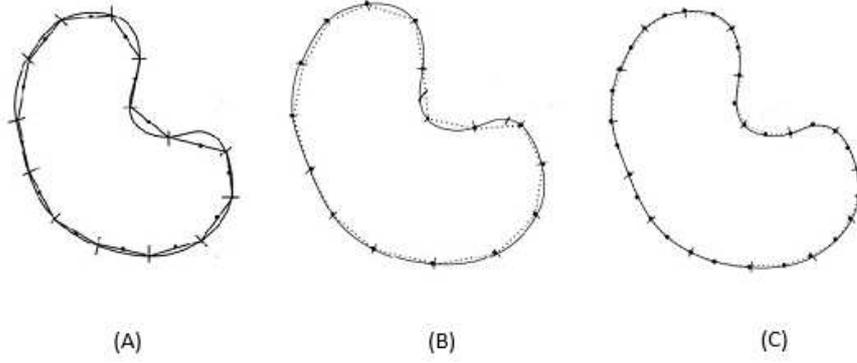


Figura 2.4: Elementos de contorno constantes (A), lineares (B) e quadráticos (C) - fonte:[6]

Nessa dissertação serão utilizados elementos constantes a fim de facilitar a implementação computacional do programa. Assim, utilizando os elementos de contorno constantes, podemos discretizar a nossa equação integral para um determinado ponto  $p_i$  que pertence ao contorno da seguinte forma:

$$\frac{1}{2}u_i(p) = \sum_j^N \left[ \int_{\Gamma_j} t_j u_{ij}^*(p, q) dS \right] - \sum_i^N \left[ \int_{\Gamma_j} u_j t_{ij}^*(p, q) dS \right] \quad (2.83)$$

Na equação (2.83),  $\Gamma_j$  é um segmento (elemento) onde está localizado o nó  $j$ , sendo que  $p_i$  é um ponto nodal de um elemento  $i$ . Portanto, a equação Figura 2.5 representa a relação entre os nós  $p_i$  e  $p_j$ . Considerando o nosso contorno como suave, reescreveremos a (2.83) da seguinte forma:

$$\frac{1}{2}u_i(p) + \sum_i^N \left[ \int_{\Gamma_j} t_{ij}^*(p, q) dS \right] u_j = \sum_j^N \left[ \int_{\Gamma_j} u_{ij}^*(p, q) dS \right] t_j \quad (2.84)$$

A equação (2.84) pode ser reescrita como:

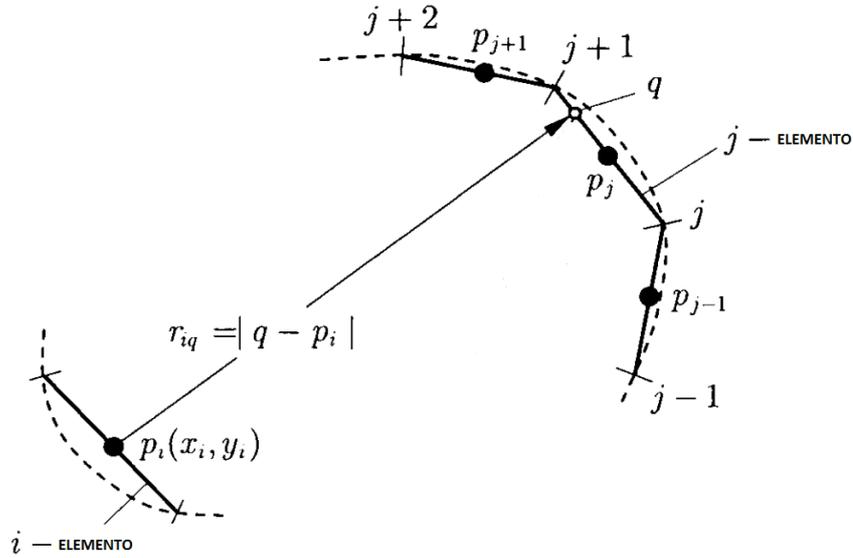


Figura 2.5: Relação entre os pontos fonte e campo - fonte:[31]

$$\frac{1}{2}u_i(x) + \sum_i^N [H_{ij}^*] u_j = \sum_j^N [G_{ij}] t_j \quad (2.85)$$

Sendo que:

$$H_{ij}^* = \int_{\Gamma_j} t_{ij}^*(p, q) dS \quad (2.86)$$

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} u_{ij}^*(p, q) dS \quad (2.87)$$

Na equação (2.85), consideraremos que o ponto  $p$  será nosso ponto de referência. Logo, ele será considerado fixo. O ponto  $q$  irá percorrer todo o elemento  $j$ . Contudo, ainda podemos utilizar o resultado abaixo para reescrever a equação (2.85):

$$H_{ij} = H_{ij}^* + \frac{1}{2}u_i(p) \quad (2.88)$$

Então:

$$\sum_i^N H_{ij}u_j = \sum_j^N G_{ij}t_j \quad (2.89)$$

De acordo com [5], podemos montar o seguinte sistema linear a partir da equação (2.89):

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1N} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{N1} & H_{N2} & \dots & H_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1N} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{N1} & G_{N2} & \dots & G_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_N \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

Na equação (2.90), temos que  $u_i$  e  $t_i$  são os deslocamentos e as forças de superfície que atuam nos nós  $i$  do contorno. Eles irão representar as condições de contorno do nosso problema.  $G_{ij}$  e  $H_{ij}$  são as matrizes que foram obtidas pela integração dos núcleos  $u_{ij}^*$  e  $t_{ij}^*$  das integrais (2.86) e (2.87). Esses cálculos foram feitos analiticamente e seus resultados encontram-se no anexo A da dissertação. Essa integrais foram calculadas para todos os elementos no nó  $j$  quando o ponto fonte está no nó  $i$ . Se aplicarmos as condições de contorno para cada nó, montaremos o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_N \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Na equação (2.91),  $\lambda$  são os vetores desconhecidos. A matriz formada por  $B_i$  são os vetores conhecidos. De acordo com [5], para construirmos a matriz  $\mathbf{A}$  é necessário  $O(N^2)$  operações e, para armazená-la, é necessário  $O(N^2)$  de memória RAM. Para solucionarmos a equação (2.91), utilizando eliminação de Gauss, são necessários  $O(N^3)$  operações. Todo esse trabalho computacional acontece, pois a matrix  $\mathbf{A}$  é uma matriz cheia e não simétrica.

Sendo assim, segundo [5], o MEC é limitado para situações em que temos problemas com alguns milhares de incógnitas. Por isso, apresentaremos, no próximo capítulo, o MECMP. Esse método nos auxiliará na multiplicação entre a matriz  $\mathbf{A}$  e a matriz formada pelos vetores desconhecidos  $\lambda$ . Logo, tal situação irá permitir o uso MEC para problemas em larga escala.

## Capítulo 3

# Método dos Elementos de Contorno Rápido com Expansão em Multipólos (MECMP)

### 3.1 Introdução

Nesse capítulo será apresentado o Método dos elementos de contorno rápido com expansão em multipólos (MECMP) para problemas elásticos. Sendo assim, apresentaremos as principais operações desenvolvidas por esse método, além de apresentar a estrutura das árvores. Essa estrutura é necessária para hierarquizar os elementos que estão perto e distantes do ponto fonte. Por fim, apresentaremos a matriz de pré-condicionamento. Ela é utilizada para melhorar o condicionamento do sistema linear e facilitar a convergência do método iterativo.

### 3.2 Princípios Básicos do (MECMP)

Como apresentado anteriormente, o MEC apresenta limitações quando é utilizado para solucionar problemas em larga escala. As principais causas que

limitam o MEC está ligada com a falta de memória que um computador pessoal pode ter para armazenar e resolver os dados do sistema linear da equação (2.91). Isso acontece pois a matriz  $\mathbf{A}$  é cheia e não simétrica. Ela é cheia, pois o ponto fonte precisa percorrer todos os elementos do contorno para construir as matrizes  $H_{ij}$  e  $G_{ij}$  da equação (2.89). Assim, quando o ponto fonte muda de nó, ele precisa interagir, novamente, com os outros pontos nodais existentes (pontos campos). Essa interação faz com que a matriz  $\mathbf{A}$  adquira as características citadas.

Portanto, é necessário mudar a relação existente entre o ponto fonte e o ponto campo pois, de acordo com [5], a complexidade da solução da equação (2.91) aumenta quando aumentamos o número de graus de liberdade do problema (devido ao aumento do número de incógnitas). Em tais situações, o consumo da memória RAM é da ordem de  $O(N^2)$  para armazenar a matriz  $\mathbf{A}$  e de  $O(N^3)$  operações para solucionar o sistema linear dado pela equação (2.91). Esse dois fatores podem tornar inviável a solução desse tipo de problema em um computador pessoal. Logo, faz-se necessário buscar uma nova solução a fim de diminuir a interação entre o ponto fonte e o ponto campo.

Sendo assim, utilizaremos o MRMP para diminuir a memória RAM utilizada e o número de operações calculadas. Sendo assim, trabalharemos com a notação complexa das equações integrais. Utilizando essa representação, foi possível fazer uma expansão dos núcleos das equações integrais usando séries de Taylor. Tais expansões podem ser exemplificadas da seguinte forma:

$$K(x, y) = \sum_{i=1} K_i^x(x, y_c) K_i^y(y, y_c) \quad (3.1)$$

Sendo que  $K(x, y)$  é considerado como um núcleo de uma equação integral. O ponto  $(y_c)$  é um ponto intermediário entre o ponto fonte e o ponto campo. Esse ponto intermediário será o responsável por desassociar a relação entre o ponto fonte  $(x)$  e o ponto campo  $(y)$ . Sendo assim, considere a integral abaixo. Se utilizarmos a equação (3.1), teremos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
\int_S K(x, y)q(y)dS(y) &= \int_S \left[ \sum_{i=1} K_i^x(x, y_c)K_i^y(y, y_c) \right] q(y)dS(y) \\
&= \sum_{i=1} K_i^x(x, y_c) \int_{S_c} K_i^y(y, y_c)q(y)dS(y)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

onde  $S_c$  representa um subconjunto do contorno  $S$ . Esse subconjunto está associado ao conjunto de elementos que estão distantes do ponto fonte. Esse resultado é importante, pois mostra que a posição do ponto fonte ( $x$ ) não está dentro da integral acima. Logo, poderemos alterar sua posição sem a necessidade de calcular a integral da equação (3.2). Isso se deve a expansão de  $K(x, y)$  em torno de  $(y_c)$ . A Figura 3.1 compara a forma de interação entre o MEC e o MECMP. A partir dela, podemos perceber que o MECMP diminui o número de interações entre os elementos. Logo, diminuimos o custo computacional do problema.

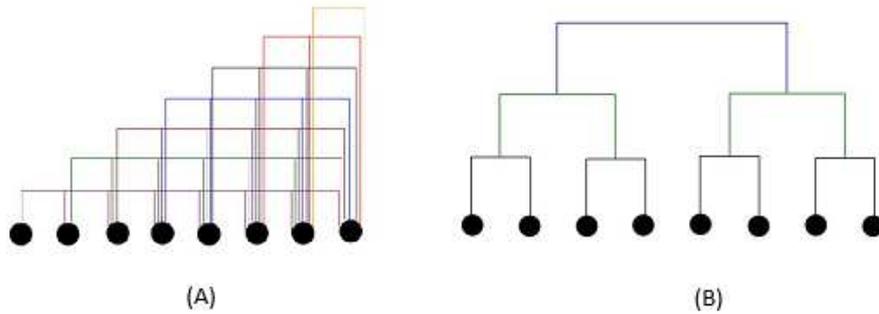


Figura 3.1: Complexidade de interações entre o MEC (A) o MECMP (B) - fonte: [6]

Desta maneira, utilizando a expansão rápida em multipólos, reduziremos o custo computacional para a ordem  $O(N)$ , diminuindo a memória usada. Esta redução fará com que os problemas de larga escala sejam resolvidos sem grandes custos computacionais. Para demonstrarmos a eficiência da expansão rápida em multipólos, iremos, primeiramente, fazer uma expansão das soluções fundamentais, pois as mesmas são os núcleos da equação (2.67).

### 3.3 Expansão rápida em multipólos para problemas lineares elásticos

A equação integral de contorno para problemas de elasticidade é dada por:

$$c_{ij}(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} [u_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})t_j(\mathbf{y}) - t_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})u_j(\mathbf{y})d\Gamma] \quad (3.3)$$

Onde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Gamma$  e  $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \Gamma$  são os pontos fonte e campo, respectivamente,  $u_{ij}^*$  e  $t_{ij}^*$  são as soluções fundamentais para deslocamento e forças de superfície:

$$u_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu)\delta_{ij} \log\left(\frac{1}{r}\right) + r_{,i}r_{,j} - \frac{1}{2}\delta_{ij} \right] \quad (3.4)$$

$$t_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] - (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right\} \quad (3.5)$$

Onde  $r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

A equação (3.3) pode ser escrita em variável complexa fazendo  $u(z) = u_1 + u_2i$ . Então, considerando que o ponto fonte encontra-se em um contorno suave, tem-se:

$$\frac{1}{2}(u_1 + iu_2) + \int_{\Gamma} [(t_{11}^*u_1 + t_{12}^*u_2) + i(t_{21}^*u_1 + t_{22}^*u_2)]d\Gamma = \int_{\Gamma} [(u_{11}^*t_1 + u_{12}^*t_2) + i(u_{21}^*t_1 + u_{22}^*t_2)]d\Gamma \quad (3.6)$$

Que pode ser rescrita como:

$$\frac{1}{2}u(z) + D_u = D_t \quad (3.7)$$

Onde:

$$D_t = \int_{\Gamma} [(u_{11}^* t_1 + u_{12}^* t_2) + i(u_{21}^* t_1 + u_{22}^* t_2)] d\Gamma \quad (3.8)$$

$$D_u = \int_{\Gamma} [(t_{11}^* u_1 + t_{12}^* u_2) + i(t_{21}^* u_1 + t_{22}^* u_2)] d\Gamma \quad (3.9)$$

Primeiramente, considere a integral  $D_t$ . Substituindo a equação (3.4) na equação (3.8), iremos obter a seguinte equação:

$$D_t = \int_{\Gamma} \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \log\left(\frac{1}{r}\right) + r_{,1}^2 - \frac{1}{2} \right] t_1 + it_2 \left[ (3-4\nu) \log\left(\frac{1}{r}\right) + r_{,2}^2 - \frac{1}{2} \right] + r_{,1}r_{,2}i(t_1i + t_2) d\Gamma \quad (3.10)$$

Rearranjando a equação (3.10):

$$D_t = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \int_{\Gamma} \left\{ \left[ (3-4\nu) \log\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{2} \right] (t_1 + it_2) + r_{,1}^2 t_1 + ir_{,2}^2 t_2 + r_{,1}r_{,2}(t_1i + t_2) \right\} d\Gamma \quad (3.11)$$

Considerando  $t = t_1 + it_2$  e  $(t_1i + t_2) = i\bar{t}$ . Pode-se rescrever a equação (3.11) como:

$$D_t = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \int_{\Gamma} \left\{ \left[ (3-4\nu) \log\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{2} \right] t + r_{,1}^2 t_1 + ir_{,2}^2 t_2 + r_{,1}r_{,2}i\bar{t} \right\} d\Gamma \quad (3.12)$$

Agora, considere as seguintes identidades:

$$k = 3 - 4\nu \quad (3.13)$$

$$r_1^2 = \left[ \frac{\text{Re}(z_0 - z)}{|z_0 - z|} \right]^2 \quad (3.14)$$

$$r_2^2 = \left[ \frac{\text{Im}(z_0 - z)}{|z_0 - z|} \right]^2 \quad (3.15)$$

$$r_1 r_2 = \left[ \frac{Re(z_0 - z)Im(z_0 - z)}{|(z_0 - z)|^2} \right] \quad (3.16)$$

$$\log(r) = \frac{\log(z_0 - z) + \overline{\log(z_0 - z)}}{2} \quad (3.17)$$

Sendo que  $Re$  e  $Im$  representam a parte real e imaginária do número complexo. Representaremos todos os termos que foram conjugados com uma barra em cima dele. Por fim,  $z_0 = x_1 + ix_2$  representa o ponto fonte e  $z = y_1 + iy_2$  o ponto campo, ambos em variáveis complexas. Substituindo as equações (3.14) a (3.17) na equação (3.12), tem-se:

$$\begin{aligned} D_t = & \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \int_{\Gamma} \left\{ \kappa \left[ \frac{-\log(z_0 - z) - \overline{\log(z_0 - z)}}{2} \right] t - \frac{1}{2}t + \left[ \frac{Re(z_0 - z)}{|(z_0 - z)|} \right]^2 t_1 \right. \\ & \left. + i \left[ \frac{Im(z_0 - z)}{|(z_0 - z)|} \right]^2 t_2 + i \left[ \frac{Re(z_0 - z)Im(z_0 - z)}{|(z_0 - z)|^2} \right] (t_1 - it_2) \right\} d\Gamma, \quad (3.18) \end{aligned}$$

Reescrevendo a equação (3.18):

$$\begin{aligned} D_t = & \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \int_{\Gamma} \left\{ \kappa \left[ \frac{-\log(z_0 - z) - \overline{\log(z_0 - z)}}{2} \right] t - \frac{1}{2}t + t_1 \frac{Re(z_0 - z)}{|(z_0 - z)|^2} [Re(z_0 - z) \right. \\ & \left. + Im(z_0 - z)i] + t_2 \frac{Im(z_0 - z)}{|(z_0 - z)|^2} [Re(z_0 - z) + Im(z_0 - z)i] \right\} d\Gamma, \quad (3.19) \end{aligned}$$

Considere que  $z_0 - z = Re(z_0 - z) + Im(z_0 - z)i$ . Então:

$$\begin{aligned} D_t = & \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \int_{\Gamma} \left\{ \kappa \left[ \frac{-\log(z_0 - z) - \overline{\log(z_0 - z)}}{2} \right] t - \frac{1}{2}t + t_1 \frac{Re(z_0 - z)}{|(z_0 - z)|^2} [(z_0 - z)] \right. \\ & \left. + t_2 \frac{Im(z_0 - z)}{|(z_0 - z)|^2} [(z_0 - z)] \right\} \Gamma \quad (3.20) \end{aligned}$$

$$D_t = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \int_{\Gamma} \left\{ \kappa \left[ \frac{-\log(z_0 - z) - \overline{\log(z_0 - z)}}{2} \right] - \frac{1}{2}t + \frac{(z_0 - z)}{|(z_0 - z)|^2} [t_1 \operatorname{Re}(z_0 - z) + t_2 \operatorname{Im}(z_0 - z)] \right\} d\Gamma \quad (3.21)$$

Agrupando os dois últimos termos da equação (3.21), iremos obter que:

$$D_t = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \int_{\Gamma} \left\{ \kappa \left[ \frac{-\log(z_0 - z) - \overline{\log(z_0 - z)}}{2} \right] t - \frac{t |(z_0 - z)|^2 + 2(z_0 - z) [t_1 \operatorname{Re}(z_0 - z) + t_2 \operatorname{Im}(z_0 - z)]}{2 |(z_0 - z)|^2} \right\} d\Gamma \quad (3.22)$$

Fazendo:

$$|(z_0 - z)|^2 = (z_0 - z) \overline{(z_0 - z)}$$

Tem-se:

$$D_t = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \int_{\Gamma} \left\{ \kappa \left[ \frac{-\log(z_0 - z) - \overline{\log(z_0 - z)}}{2} \right] t - \frac{t(z_0 - z) \overline{(z_0 - z)} + 2(z_0 - z) [t_1 \operatorname{Re}(z_0 - z) + t_2 \operatorname{Im}(z_0 - z)]}{2 |(z_0 - z)|^2} \right\} d\Gamma \quad (3.23)$$

Desenvolvendo essa equação, iremos encontrar que:

$$D_t = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \int_{\Gamma} \left\{ -\kappa \left[ \frac{\log(z_0 - z) + \overline{\log(z_0 - z)}}{2} \right] t + \frac{\bar{t}}{2} \frac{(z_0 - z)}{|(z_0 - z)|} \right\} d\Gamma \quad (3.24)$$

Escrevendo:

$$G(z_0, z) = \frac{-1}{2\pi} \log(z_0 - z) \rightarrow \log(z_0 - z) = -2\pi G(z_0, z); \quad (3.25)$$

$$G'(z_0, z) = \frac{dG}{dz} = \frac{1}{2\pi(z_0 - z)} \rightarrow \frac{1}{(z_0 - z)} = 2\pi G'(z_0, z) \quad (3.26)$$

Tem-se:

$$D_t(z_0) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \int_S \left\{ -\kappa \left[ \frac{-2\pi G(z_0, z)t(z) - \overline{2\pi G(z_0, z)t(z)}}{2} \right] \right. \\ \left. + (z_0 - z) \frac{\bar{t}}{2} (2\pi G'(\bar{z}_0, z)) \right\} dS(z) \quad (3.27)$$

Simplificando a equação (3.27), encontraremos que:

$$D_t(z_0) = \frac{1}{2\mu(1-\kappa)} \int_S \left\{ \kappa [G(z_0, z)t(z) + \overline{G(z_0, z)t(z)}] \right. \\ \left. - (z_0 - z) \bar{t} G'(\bar{z}_0, z) \right\} dS(z) \quad (3.28)$$

Se fizermos o mesmo procedimento para equação (3.9), encontraremos o seguinte resultado:

$$D_u(z_0) = \frac{1}{1+\kappa} \int_S \left\{ \kappa (G'(z_0, z)) n(z) u(z) - (z_0 - z) \overline{G''(z_0, z) n(z) u(z)} \right. \\ \left. + G'(\bar{z}_0, z) [n_z \bar{u}_z + n(z) \bar{u}(z)] \right\} dS(z) \quad (3.29)$$

Agora, faremos a expansão em multipolos das equações (3.28) e (3.29) a fim de introduzir o ponto intermediário. Sendo assim, começaremos pela equação (3.28).

### 3.3.1 Expansão em multipólos e Momentos

Na Figura 3.2, considerar que o ponto  $z_c$  está próximo de  $z$ . Então, iremos considere que a distância  $|z - z_c|$  seja muito menor que a distância  $|z_0 - z_c|$ . Logo,  $|z - z_c| \ll |z_0 - z_c|$ . Utilizando as funções auxiliares  $I_k(z)$  e  $O_k(z)$  dadas pelas equações (3.30) e (3.31), temos que:

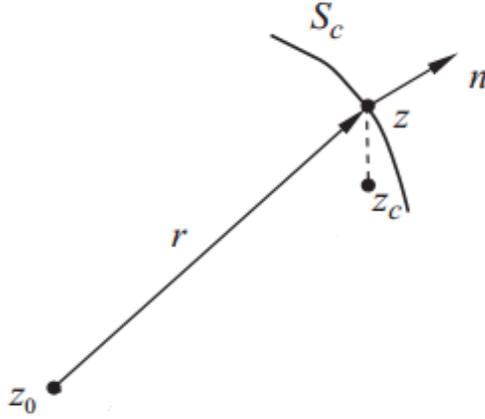


Figura 3.2: Expansão multipolar em torno do ponto  $z_c$  - fonte:[5] modificada

$$I_k(z) = \frac{z^k}{k!}, \text{ para } k \geq 0; \quad (3.30)$$

$$O_k(z) = \frac{(k-1)!}{z^k}, \text{ para } k \geq 1; \quad (3.31)$$

Além disso, considere as equações (3.32) e (3.33):

$$G(z_0, z) = \frac{-1}{2\pi} \log(z_0 - z) = \frac{-1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) I_k(z - z_c) \quad (3.32)$$

$$G'(z_0, z) = \frac{\partial G}{\partial n} = n(z_0) \frac{\partial G}{\partial z_0} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) I_{k-1}(z - z_c). \quad (3.33)$$

Então, a expansão multipolar para  $D_t(z_0)$  é escrita como:

$$\begin{aligned}
D_t(z_o) = & \frac{1}{2\mu(1+\kappa)} \int_S \left\{ \frac{1}{2\pi} \kappa \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_o - z_c) I_k(z - z_c) t(z) \right. \\
& + (z_o - z) \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \overline{O_k(z_o - z_c) I_{k-1}(z - z_c) t(z)} + \\
& \left. + \frac{1}{2\pi} \kappa \sum_{k=0}^{\infty} \overline{O_k(z_o - z_c) I_k(z - z_c) t(z)} \right\} dS(z), \quad (3.34)
\end{aligned}$$

De outra maneira:

$$\begin{aligned}
D_t(z_o) = & \frac{1}{4\pi\mu(1+\kappa)} \left\{ \kappa \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_o - z_c) \int_S I_k(z - z_c) t(z) dS(z) \right. \\
& + z_o \sum_{k=1}^{\infty} \overline{O_k(z_o - z_c)} \int_S \overline{I_{k-1}(z - z_c) t(z)} dS(z) \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \overline{O_k(z_o - z_c)} \int_S z \overline{I_{k-1}(z - z_c) t(z)} dS(z) \\
& \left. + \kappa \sum_{k=0}^{\infty} \overline{O_k(z_o - z_c)} \int_S \overline{I_k(z - z_c) t(z)} dS(z) \right\} \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Chamando:

$$M_k(z_c) = \int_{S_c} I_k(z - z_c) t(z) dS(z), \quad \text{para } k \geq 0, \quad (3.36)$$

$$N_k(z_c) = \int_{S_c} \left[ \kappa \overline{I_k(z - z_c) t(z)} - \overline{I_{k-1}(z - z_c) z t(z)} \right] dS(z) \quad \text{para } k \geq 1 \quad (3.37)$$

Tem-se que:

$$\begin{aligned}
D_t(z_o) = & \frac{1}{4\pi\mu(1+\kappa)} \left\{ \kappa \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_o - z_c) M_k(z_c) \right. \\
& \left. + z_o \sum_{k=0}^{\infty} \overline{O_{k+1}(z_o - z_c) M_k(z_c)} + \sum_{k=0}^{\infty} \overline{O_k(z_o - z_c) N_k(z_c)} \right\}; \quad (3.38)
\end{aligned}$$

$M_k(z_c)$  e  $N_k(z_c)$  são chamados de *momentos* sobre  $z_c$ , que são independentes do ponto fonte  $z_o$  e precisam ser calculados apenas uma vez. Vale considerar que  $S_c$  é um subdomínio de  $S$ . Fazendo os mesmos cálculos para a equação (3.29), encontraremos o seguinte resultado:

$$D_u(z_o) = \frac{1}{4\pi\mu(1+\kappa)} \left\{ \kappa \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_o - z_c) \tilde{M}_k(z_c) + z_o \sum_{k=0}^{\infty} \overline{O_{k+1}(z_o - z_c)} \overline{\tilde{M}_k(z_c)} + \sum_{k=0}^{\infty} \overline{O_k(z_o - z_c)} \tilde{N}_k(z_c) \right\}; \quad (3.39)$$

Onde:

$$\tilde{M}_k(z_c) = \int_{S_c} I_{k-1}(z - z_c) n(z) u(z) dS(z), \quad \text{for } k \geq 1; \quad (3.40)$$

$$\tilde{N}_1 = \int_{S_c} \left[ n(z) \overline{u(z)} + \overline{n(z)} u(z) \right] dS(z); \quad (3.41)$$

$$\tilde{N}_k(z_c) = \int_{S_c} \left\{ \overline{I_{k-1}(z - z_c)} \left[ n(z) \overline{u(z)} + \overline{n(z)} u(z) \right] - \overline{I_{k-2}(z - z_c)} \overline{zn(z)u(z)} \right\} dS(z), \quad (3.42)$$

Vale considerar que as integrais das equações (3.36), (3.37), (3.40) e (3.42) foram calculadas analiticamente e, seus resultados, estão no anexo B da dissertação.

### 3.3.2 Translação momento-para-momento (M2M)

Considere que o ponto  $z_c$  seja deslocado para uma nova posição  $z'_c$ . Então, de acordo com [5], podemos considerar as seguintes equações:

$$M_k(z'_c) = \sum_{l=0}^k I_{k-l}(z_c - z'_c) M_l(z_c) \quad (3.43)$$

$$N_k(z'_c) = \sum_{l=0}^k \overline{I_{k-l}(z_c - z'_c)} N_l(z_c) \quad (3.44)$$

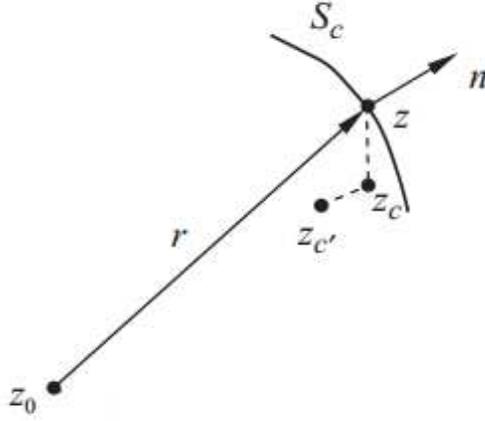


Figura 3.3: Translação do ponto  $z_c$  para o ponto  $z'_c$  - fonte: [5]

### 3.3.3 Expansão local e translação momento-para-local (M2L)

Agora, considere um ponto  $z_L$  perto do ponto fonte  $z_0$ . Considerando que a distância  $|z_0 - z_L|$  seja muito maior que a distância  $|z - z_L|$ . Logo ( $|z_0 - z_L| \ll |z - z_L|$ ). Então, considerando uma expansão multipolar em torno de  $z_L$  temos a seguinte equação para expansão local:

$$D_t(z_0) = \frac{1}{4\pi\mu(1+\kappa)} \left\{ \kappa \sum_{l=0}^{\infty} L_l(z_L) I_l(z_0 - z_L) + z_0 \sum_{l=0}^{\infty} \overline{L_{k+1}(z_L) I_{l-1}(z_0 - z_L)} + \sum_{l=0}^{\infty} K_l(z_L) \overline{I_l(z_0 - z_L)} \right\}; \quad (3.45)$$

Sendo que:

$$L_l(z_L) = (-1)^l \sum_{k=0}^{\infty} O_{l+k}(z_L - z_c) M_k(z_c), \quad \text{para } l \geq 0 \quad (3.46)$$

$$K_l(z_L) = (-1)^l \sum_{k=0}^{\infty} \overline{O_{l+k}(z_L - z_c) N_k(z_c)}, \quad \text{para } l \geq 0 \quad (3.47)$$

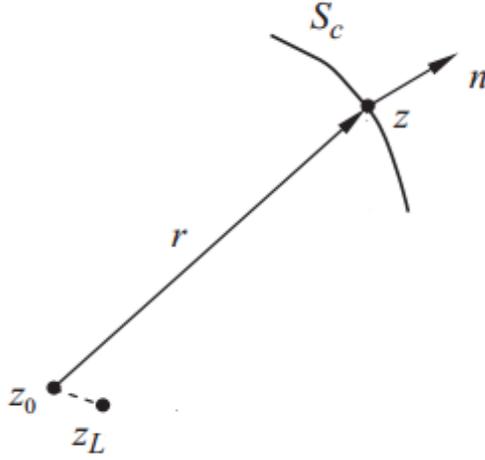


Figura 3.4: Expansão em torno do ponto  $z_L$  - fonte: [5]

São conhecidos como translação  $M2L$ . Para a integral  $D_u$ , encontramos a seguinte equação para expansão local:

$$D_u(z_0) = \frac{1}{2\pi\mu(1+\kappa)} \left\{ \kappa \sum_{l=0}^{\infty} L_l(z_L) I_l(z_0 - z_L) + z_0 \sum_{l=0}^{\infty} \overline{L_{k+1}(z_L) I_{l-1}(z_0 - z_L)} + \sum_{l=0}^{\infty} K_l(z_L) \overline{I_l(z_0 - z_L)} \right\}; \quad (3.48)$$

Sendo que os valores de  $L_l(z_L)$  e  $K_l(z_L)$  são os mesmos das equações (3.46) e (3.47.)

### 3.3.4 Translação local-para-local (L2L)

Considerando que o ponto  $z_L$  seja deslocado para uma nova posição  $z'_L$ . De acordo com [5], consideraremos as seguintes equações:

$$L_l(z'_L) = \sum_{m=l}^{\infty} I_{m-l}(z'_L - z_L) L_m(z_L), \quad \text{para } l \geq 0 \quad (3.49)$$

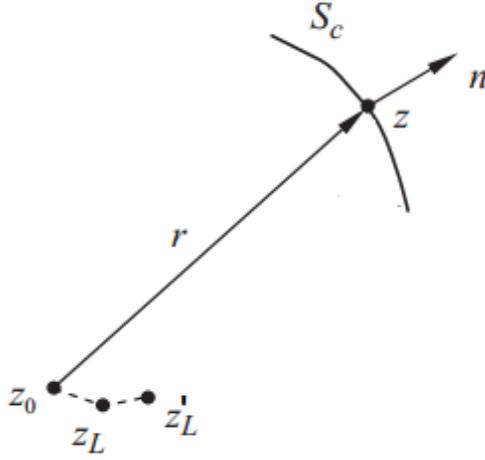


Figura 3.5: Translação do ponto  $z_L$  para o ponto  $z'_L$  - fonte: [5]

$$K_l(z'_L) = \sum_{m=l}^{\infty} \overline{I_{m-l}(z'_L - z_L)} K_m(z_L), \text{ para } l \geq 0 \quad (3.50)$$

### 3.3.5 Algoritmo

Nessa seção, apresentaremos o algoritmo utilizado pelo MECMP. Sendo assim, primeiramente, discretizaremos o contorno. Nesse trabalho, discretizaremos os nossos problemas utilizando elementos constantes. Depois, circunscreveremos o nosso contorno por um quadrado. Essa etapa será conhecida como nível zero. Depois, dividiremos esse quadrado em 4 partes iguais. Logo, criaremos 4 novos quadrados a partir do quadrado que circunscreve o nosso domínio. Cada quadrado criado será conhecido como célula. Essa etapa é conhecida como nível 1. Portanto, ao criarmos esses dois níveis, construiremos uma interdependência entre o nível zero e o nível 1. O quadrado do nível 0 será considerado a célula pai dos 4 quadrados do nível 1. Em seguida, continuaremos a subdivisão de cada um dos quadrados em 4 novos quadrados até um determinado nível. O processo acima será interrompido quando o número de nós em cada célula não exceda um número previamente determinado. Neste

trabalho, adotaremos um nó por célula. Chamaremos de célula folha as células que não são mais divididas. Logo, elas são as células que possuem só um nó. A Figura 3.6 ilustra o que foi descrito.

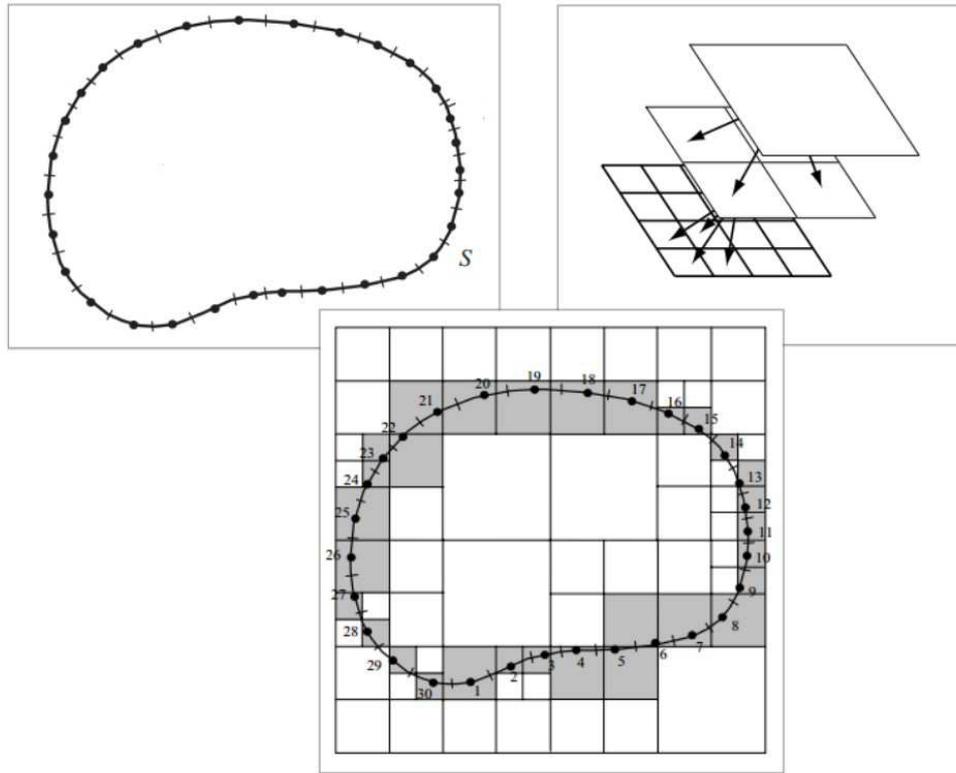


Figura 3.6: Contorno discretizado por células - fonte: [5]

Depois, utilizaremos as operações apresentadas na seção anterior. Sendo assim, para os quadrados conhecidos como célula folha, criaremos um centro. Utilizaremos a expansão multipolar para transferir a posição do nó para o centroide da célula folha. Depois, iremos transferir a posição desse centroide para o centroide da sua célula pai. Para esse etapa, utilizaremos a operação translação  $M2M$ . Continuaremos esse processo até alcançarmos o nível 2, transferindo a posição desses centroides com a operação  $M2M$ . O processo descrito é conhecido como *upward*.

Depois que o nível 2 for alcançado, utilizaremos as translações  $M2L$  e  $L2L$  e a expansão local. Essa etapa é conhecida como *downward*. Primeiramente, devemos utilizar a hierarquia das árvores para agrupar os elementos que estão

perto, bem separadas e distantes da célula folha que contém o ponto fonte. De acordo com [5], as células perto da célula folha que contém o ponto fonte são aquelas que tiverem pelo menos um vértice em comum com essa célula. Para uma célula ser considerada bem separada, devemos olhar a relação entre a sua célula pai e a célula pai que deu origem a célula folha que possui o ponto fonte. Se as células pais forem adjacentes, a célula filha será considerada bem separada da célula que tem o ponto fonte. Por fim, uma célula será considerada distante da célula folha que possui o ponto fonte se elas não tiverem células pais adjacentes. A figura 3.7 ilustra o que foi descrito acima. Nelas, as células que contém o  $n$  são consideradas bem próximas da célula folha que contém o ponto fonte. Elas foram consideradas bem próximas devido a sua relação de adjacência com o quadrado marcado de laranja. As células que contém os  $i$  são as células consideradas bem separadas da célula folha que contém o ponto fonte. Elas foram consideradas bem separadas devido a sua relação de adjacência com o quadrado marcado de vermelho. Vale ressaltar que o quadrado marcado de vermelho é a célula pai do quadrado marcado de laranja. Por fim, as células restantes são consideradas distantes da célula folha que contém o ponto fonte.

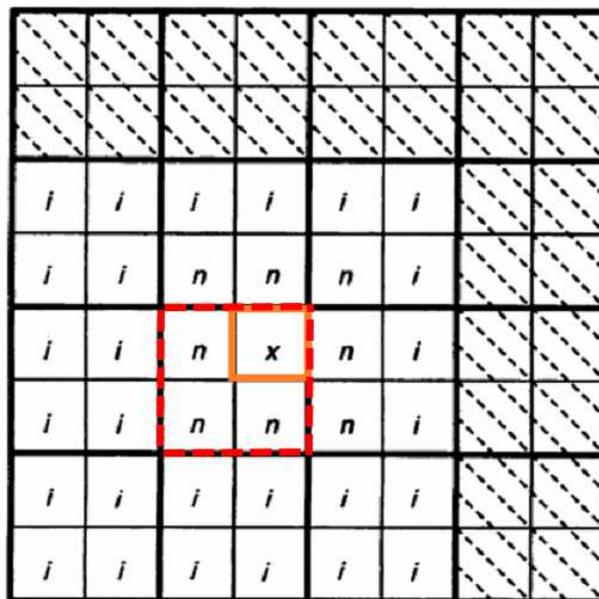


Figura 3.7: Relação entre as células - fonte:[33] modificada

Então, depois dessa classificação, utilizaremos a translação  $M2L$  para transferir a posição do centroide das células bem separadas e adjacentes da célula folha que possui o ponto fonte para o centroide da célula avô da célula folha que tem o ponto fonte. Depois, iremos transferir a posição do centroide da célula avô para o centroide da sua célula filha, utilizando a translação  $L2L$ . Em seguida, utilizaremos, novamente, a translação  $L2L$  para transferir a posição do centroide da célula pai para o centroide da célula folha que possui o ponto fonte. Por fim, usaremos a expansão local para transferir a posição do centroide da célula folha para o ponto fonte.

Sendo assim, após todo esse procedimento, vamos apresentar algumas diferenças entre a expansão multipolar e  $M2M$  das translações  $M2L$  e  $L2L$ . Primeiramente, a expansão multipolar e a translação  $M2M$  serão realizadas todas as vezes que o ponto fonte percorrer o contorno. Porém, as expansões  $M2L$  e  $L2L$  só serão realizadas para as células que estiverem distantes e bem separadas da célula que possui o ponto fonte. Portanto, toda vez que o ponto fonte percorrer o contorno, apenas algumas células sofreram essas translações  $M2L$  e  $L2L$ . As Figuras 3.8, 3.9 e 3.10 ilustram o que foi apresentado.

Por fim, ao fazermos todos esses procedimentos, devemos utilizar um método iterativo para calcular o vetor desconhecido. Portanto, podemos resumir o que foi apresentado da seguinte forma:

- *Primeira etapa*

Discretizar o contorno do seu problema, através de elementos constantes, lineares ou quadráticos.

- *Segunda etapa*

Nessa etapa, devemos criar a estrutura da árvore. Sendo assim, o nosso contorno é circunscrito por um quadrado que será subdividido em vários quadrados até que tenhamos o número máximo de elementos em cada célula. Esse número não deve ser superior a um número previamente determinado. Como apresentado anteriormente, o quadrado que não é mais dividido é chamado de célula folha. Além disso, vale considerar que

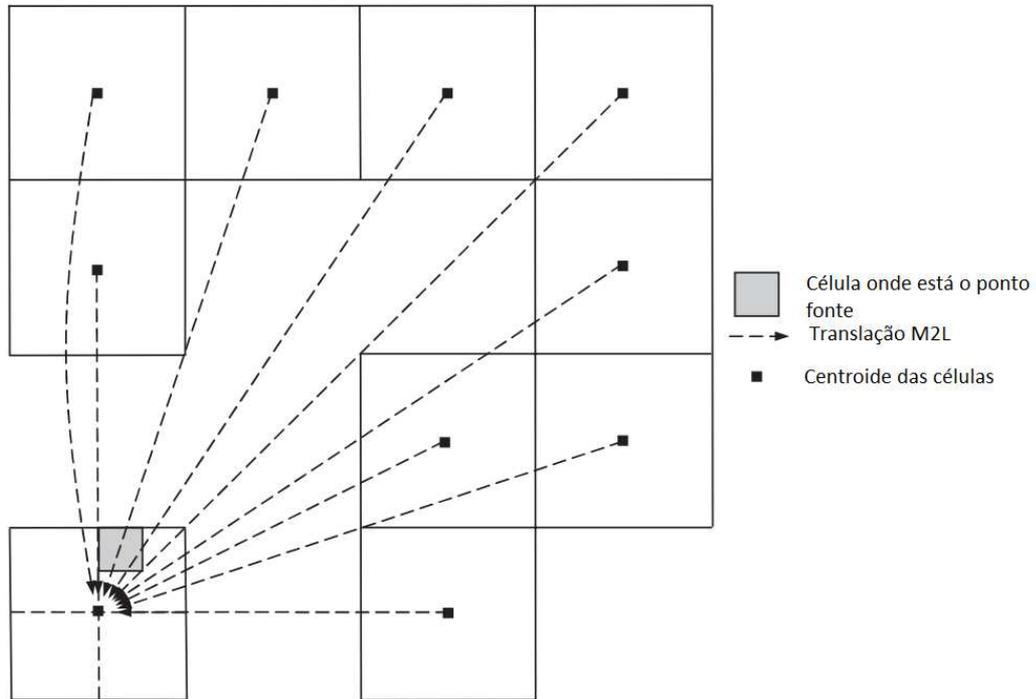


Figura 3.8: Translação M2L

cada célula possui uma célula pai. As células pais estão sempre no nível anterior ao das células filhas.

- *Terceira etapa*

Em seguida, devemos utilizar as operações expansão em multipólos e a translação momento para momento ( $M2M$ ). A operação expansão multipolar será utilizada para transferir a posição do nó para o centroide da célula folha. O ponto  $z_c$  é o centróide da célula folha. Depois, iremos utilizar a operação  $M2M$ , sendo que o ponto  $z'_c$  está no centroide da célula pai que está no nível anterior ao da célula que sofreu a expansão multipólos. A operação translação  $M2M$  será realizada de um nível 'x' até que o nível 2 seja alcançado.

- *Quarta etapa*

Após atingirmos o nível 2, iremos efetuar as operações translação momento para local ( $M2L$ ) e translação local para local ( $L2L$ ) e expansão

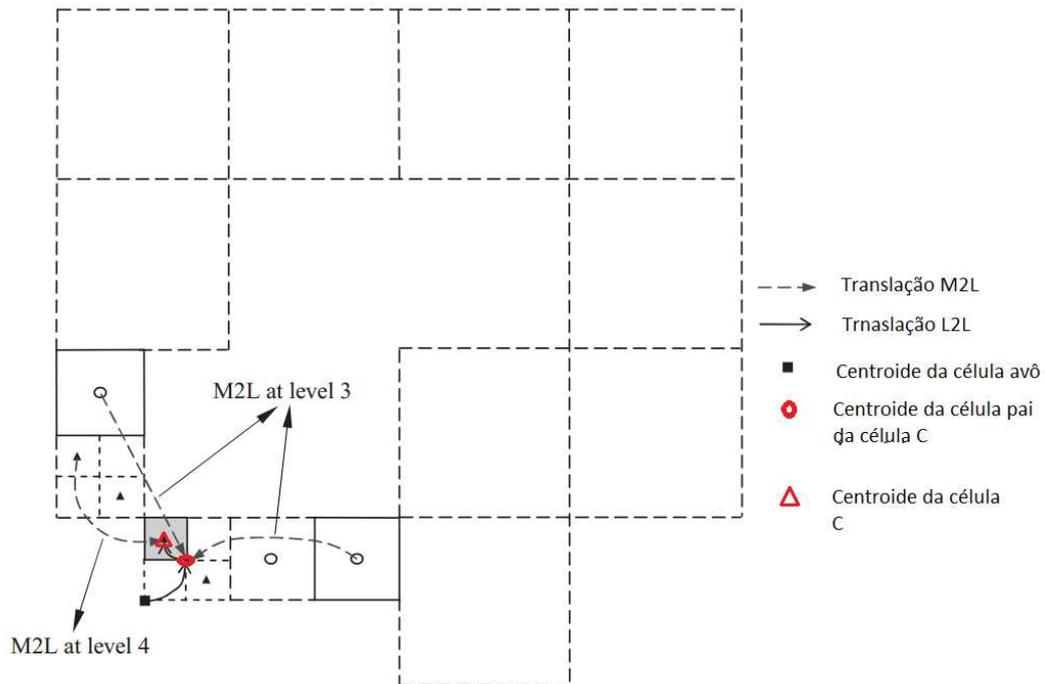


Figura 3.9: Translação M2L e L2L

local. Essas operações serão utilizadas de acordo com o que foi explicado acima. Por fim, para as células que estiverem perto da célula folha, será efetuada as operações do MEC padrão.

- *Quinta etapa*

Aplica-se as condições de contorno do problema. O sistema da equação (2.91) será solucionado utilizando um processo iterativo. A cada processo que não houver convergência, será feita um novo processo iterativo. Ele irá começar da etapa 3 até a etapa 6. Contudo, para obtermos um processo iterativo mais eficiente, será necessário criar uma matriz de pré-condicionamento.

### 3.3.6 Matriz de pré condicionamento

De acordo com [6], a aplicação de um pré-condicionador para resolver problemas que necessitam de convergência são de extrema relevância, pois sua

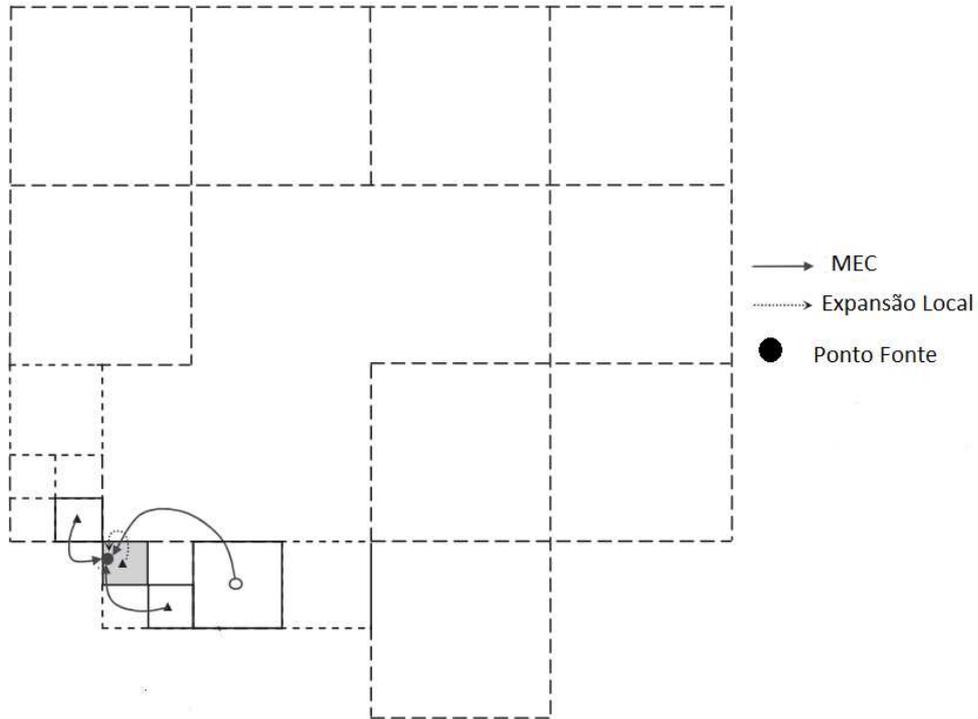


Figura 3.10: Expansão Local e MEC

aplicação pode diminuir o número de iterações do seu problema. Portanto, de acordo com [5], podemos introduzir uma matriz  $[M]$  na equação (2.91). Logo, obtemos as seguintes equações:

$$([M]^{-1}[A])x = [M]^{-1}b \quad (3.51)$$

Ou

$$([A][M]^{-1})[M]x = b \quad (3.52)$$

Sendo que a equação (3.52) é conhecida condicionamento à esquerda e a equação (3.53) é conhecida como condicionamento à direita. Segundo [6], a matriz de condicionamento  $[M]$  deveria ser a matriz  $[A]$ , pois o produto  $[M]^{-1}[A]$  resultaria em uma matriz identidade. Esse procedimento iria resultar em um condicionamento igual a 1. Desta forma, iríamos ter uma convergência

com apenas uma iteração. Porém, obter a inversa da matriz  $[A]$  iria requerer um custo computacional muito alto, segundo [6]. Portanto, será necessário escolher uma matriz  $[M]$  que seja facilmente inversível e ao mesmo tempo se pareça com  $[A]$ .

De acordo com [6], as matrizes diagonais ou bloco de matrizes seriam as matrizes ideais para essa situação. Sendo assim, nesse caso obtou-se por uma matriz bloco diagonal dada por:

$$\begin{bmatrix} [A]_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & [A]_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & [0] & \vdots & [A]_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Sendo que  $[A]_i$  são as submatrizes da matriz  $[A]$ . De acordo com [5], os coeficiente de  $[A]_i$  são formados pelos pontos fontes e elementos de uma folha, sendo que as integrais são calculadas por avaliação direta MEC.

# Capítulo 4

## Resultados Numéricos

Nesse capítulo iremos mostrar a eficiência do MECMP para resolvermos problemas de elasticidade plana com alguns graus de liberdade. Sendo assim, iremos comparar a quantidade de memória utilizada pelo MECMP e pelo MEC para resolver um problema com vários graus de liberdade. Além disso, iremos validar o método MECMP comparando os resultados de alguns elementos das integrais  $[D_u]$  e  $[D_t]$  com os resultados das matrizes  $H_{ij}$  e  $G_{ij}$  usando MEC.

### 4.1 Aproximação dos termos das integrais $D_u$ e $D_t$ usando a expansão em série de Taylor

Esta seção tem como objetivo demonstrar as operações do MECMP do cálculo das integrais  $D_u$  e  $D_t$  utilizando vários termos na expansão da série de Taylor. Esse resultado irá servir para validar o método do MECMP. Sendo assim, considere os elementos 15 e 16 da malha mostrada na Figura 4.1. Considere como pontos fontes os nós 2 e 3. A Figura 4.2 mostra a numeração das células. Para este problema, foi considerado cada folha contendo um elemento. A Figura 4.3 mostra a numeração dos nós, juntamente com as células.

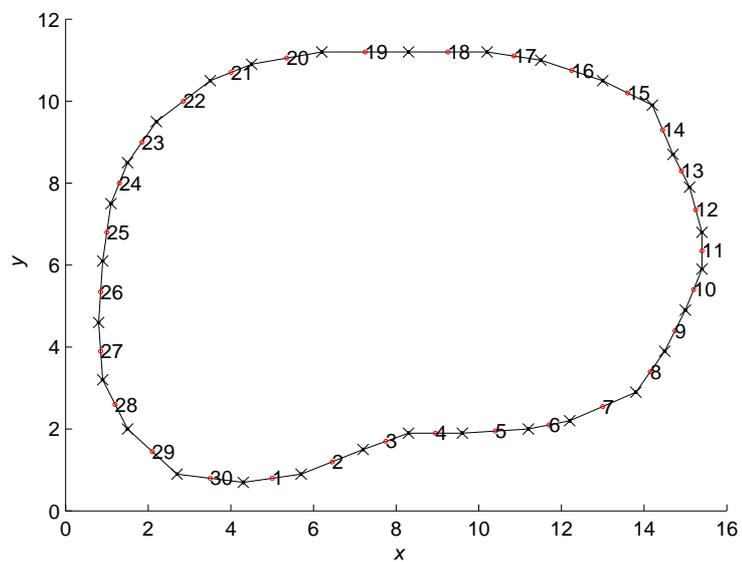


Figura 4.1: Elemento com número constante de nós

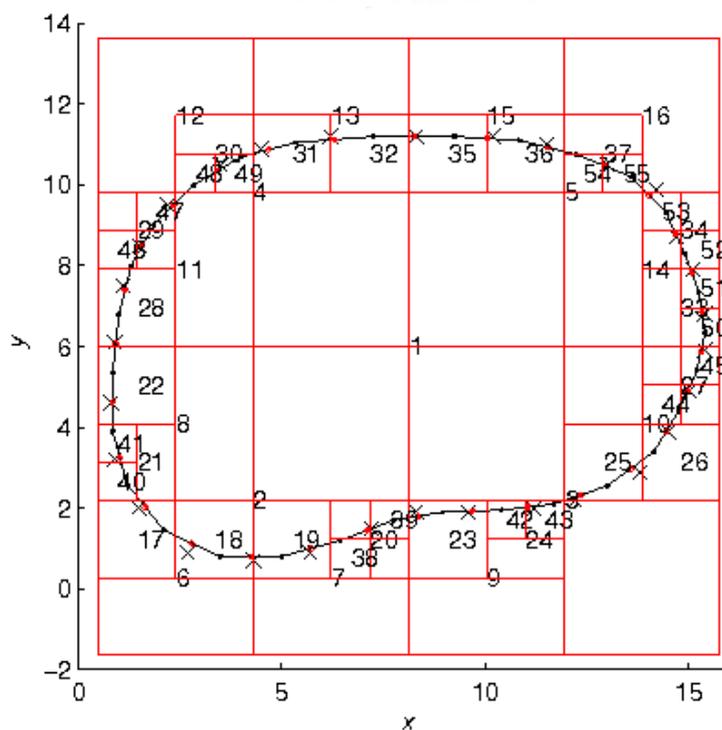


Figura 4.2: Malha dos elementos constantes

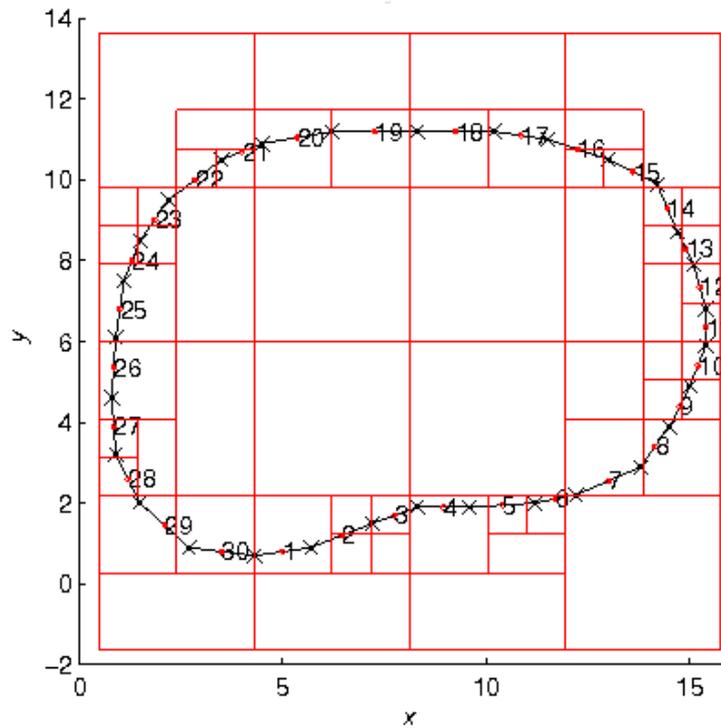


Figura 4.3: Células e número dos nós

Primeiramente, calculamos os momentos dos elementos 15 e 16 em relação ao centro das células 54 e 55. Em seguida, usando operações M2M, faz a translação para o centro da célula 37 (esta célula é a célula pai das células 54 e 55). Depois, soma-se os dois momentos, pois eles são calculados em relação ao mesmo ponto. Em seguida, utilizando M2L, calculamos a translação para o centro da célula 20 a partir do momento do centro da célula 37. Vale considerar que a célula 20 é a célula-pai das células 38 e 39. As células 38 e 39, por sua vez, contém os pontos fontes (os nós 2 e 3). Depois, utilizamos a translação  $L2L$  da célula 20 para os centros das células 38 e 39. Por fim, utilizando a operação expansão local, calculamos as integrais  $D_u$  e  $D_t$ . Finalmente, comparamos os resultados com as integrais calculadas pelo MEC. A tabela 4.1 mostra uma comparação dos resultados do MECMP para 5 diferentes números de termos da expansão da série de Taylor.

Pode-se notar na Tabela 4.1 que a solução por série de Taylor torna-se

Tabela 4.1: Comparação entre MECMP e MEC.

N. de termos	$[D_t]$ nó 2	$[D_u]$ nó 2	$[D_t]$ nó 3	$[D_u]$ nó 3
1	$-1.64 - 1.56i$	$-0.039 - 0.060i$	$-1.526 - 1.41i$	$-0.0447 - 0.067i$
2	$-1.76 - 1.61i$	$-0.052 - 0.078i$	$-1.713 - 1.5i$	$-0.055 - 0.091i$
4	$-1.76 - 1.61i$	$-0.053 - 0.079i$	$-1.727 - 1.51i$	$-0.055 - 0.090i$
6	$-1.76 - 1.61i$	$-0.053 - 0.079i$	$-1.727 - 1.51i$	$-0.055 - 0.090i$
8	$-1.76 - 1.61i$	$-0.053 - 0.079i$	$-1.727 - 1.51i$	$-0.055 - 0.090i$
MEC	$-1.76 - 1.61i$	$-0.053 - 0.079i$	$-1.727 - 1.51i$	$-0.055 - 0.090i$

mais próxima do MEC com o aumento do número de termos na série de Taylor. A convergência é ligeiramente mais rápida para a integral  $D_t$  do que para a integral  $D_u$ . A aproximação mais rápida é devido à singularidade da integral  $D_t$  que é fracamente singular enquanto a integral  $D_u$  é fortemente singular.

## 4.2 Uso da memória RAM no MEC e no MECMP

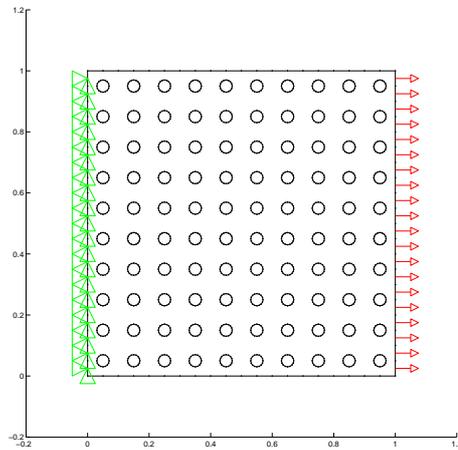


Figura 4.4: Placa com 100 furos.

O objetivo desta seção é comparar a memória RAM utilizada pelo MECMP e pelo MEC para resolver um problema de elasticidade plana com vários graus de liberdade. O problema será uma placa quadrada com 100, 121 e 144 furos.

Uma das borda foi fixada enquanto a outra está sob tensão. A tensão utilizada foi de  $1 N/m^2$ . O modulo de elasticidade utilizada foi de  $1 N/m^2$  e o  $\nu$  foi igual a 0,3. A Figura 4.4 ilustra a placa com 100 furos com as condições de contorno do problema. O número de elementos em cada borda é 20 elementos constantes. Para cada furo foi utilizado 16 elementos constantes. A área dos furos é 12,47% da área da placa. A área da placa é de  $1 m^2$ . O número máximo do elementos por folha foi de 15. O número de termos na série de Taylor utilizado foi de 15. Na tabela abaixo encontramos o número de graus de liberdade, a quantidade de memória utilizada e o percentual de memória utilizada. Vale ressaltar que o valor referente ao percentual apresentado na tabela abaixo relaciona quanto de memória RAM o MEC consumiu a mais que a memória utilizada pelo MECMP.

Tabela 4.2: Comparação dos resultados entre MECMP e MEC.

N. de furos	MEC	MECMP	N. Graus de Liberdade	Percentual
100	838 Mbytes	520 Mbytes	1680	61,15 %
121	1011 Mbytes	546 Mbytes	2384	85,16 %
143	1428 Mbytes	552 Mbytes	3216	158,7 %

Assim, podemos perceber que o MEC apresentou, sempre, um maior consumo de memória para resolver o mesmo problema quando aumentamos o número de graus de liberdade do problema. Isso já era esperado, pois ao aumentarmos o número de incógnitas, estaremos aumentando o tamanho das matrizes da equação (2.91). Logo, o custo computacional para resolvê-la e, para gerar os elementos da matriz aumenta. Logo, o aumento do número de incógnitas refletiu na memória utilizada pelo computador para encontrar a solução do problema. Em contrapartida, percebemos que o MECMP apresentou, sempre, um consumo muito menor de memória, pois esse método diminui o número de interações entre os elementos. Logo, diminuimos a complexidade do problema, fazendo com que tenhamos uma menor quantidade de memória RAM consumida.

Portanto, esses resultados mostram a eficiência que o método MECMP apresenta em relação ao método MEC para resolver problemas com um grande

número de graus de liberdade, pois o mesmo consome muito menos memória que o método MEC.

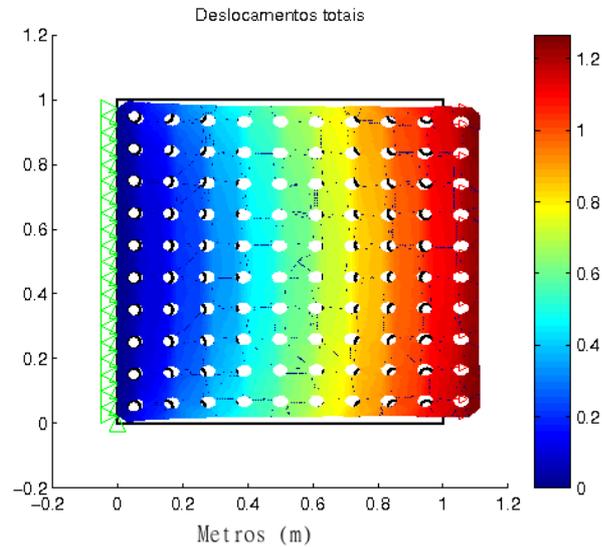


Figura 4.5: Deslocamento dos furos das placa

### 4.3 Conclusões

Este trabalho apresentou o MECMP para problemas de elasticidade plana. As equações integrais foram transformadas em equações integrais complexas e as soluções fundamentais foram expandidas em séries de Taylor. Com base nesta expansão, as integrais obtidas não tem influência do ponto fonte, o que permite que elas sejam calculadas apenas uma vez para cada elemento. Além disso, algumas operações algébricas foram implementadas permitindo mudar o ponto de expansão sem a necessidade de se calcular as integrais novamente. Foi utilizada uma estrutura de árvore quaternária para que fosse possível separar os elementos distantes dos elementos próximos do ponto fonte. Quando os elementos estão distantes as integrais são calculadas utilizando expansão em série de Taylor e as operações de translação da expansão. Quando os elementos estão próximos, as integrais são calculadas da mesma forma que no MEC padrão. Ou seja, sem a expansão da solução fundamental em série de Taylor.

Os resultados mostram que um pequeno número de termos na série comprovam e convergência dos resultados. Contudo, vale ressaltar que a aproximação da solução fundamental com singularidade forte é ligeiramente mais lenta que a com singularidade forte.

Por fim, vale ressaltar o MECMP é um método bem mais eficiente que o MEC padrão, pois ele consome menos memória RAM para encontrar a solução do problema. Logo, na análise de um problema com muitos graus de liberdade fica bastante evidente a eficiência do MECMP para economizar memória RAM quando comparado ao MEC padrão. Isso ocorre devido a diminuição do número de interações entre os elementos, proporcionada pela introdução de um ponto intermediário entre o ponto fonte e o ponto campo. Tal ponto é introduzido com as operações expansão multipolar e expansão local. Vale ressaltar que tais alterações são possíveis devido a possibilidade de expansão dos núcleos das equações integrais. Assim, todas essas alterações proporcionam uma redução do custo computacional para resolver problemas de grandes escala, tornando-os viáveis computacionalmente.

## 4.4 Trabalhos futuros

Como sugestão, essa dissertação irá apresentar alguns tópicos para serem desenvolvidos no futuro:

- Estender a formulação de MECMP para problemas 2D e 3D anisotrópico;
- Investigar variações do modelo MECMP;
- Investigar novos métodos capazes de expandir as soluções fundamentais utilizando outro tipos de séries;
- Comparar o MECMP com outros métodos rápidos a fim de testar a sua eficiência;

## 4.5 Publicações

Este trabalho foi capaz de originar duas publicações:

- DIAS JÚNIOR, A. B. ; ALBUQUERQUE, E. L. ; Analysis of elastic problems by the fast multipole boundary element method. In: International Conference on Boundary Element and Meshless Techniques, 2014, Firenze;
- DIAS JÚNIOR, A. B. ; ALBUQUERQUE, E. L. ; ANFLOR, C. T. M. ; REIS, A. ;The fast multipole boundary element method for plane elastic problems. In: CILAMCE - XXXIV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2013, Pirenópolis - GO;

## Referências Bibliográficas

- [1] A. B. D. Júnior. *Análise numérica em bombeamento de poço de petróleo - Universidade de Brasília - Projeto de Graduação*. Universidade de Brasília, 2011.
- [2] J. H. Kane. *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*. Prentice Hall, 1994.
- [3] C. A. Felippa. *Finite Element Discretization and the Direct Stiffness Method*. 2011.
- [4] C. A. C. Azevedo. *Formulação alternativa para análise de domínios não homogêneos e inclusões anisotrópicas via MEC*. Dissertação de mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, 2007.
- [5] Y. Liu *Fast Multipole boundary element method - Theory and Applications in Engineering*. Cambridge, 2009.
- [6] L. M. Braga *O Método de Elementos de Contorno Rápido com Expansão em Multipólos Aplicado a Problemas de Condução de Calor - Dissertação de Mestrado*. Universidade de Brasília, 2012.
- [7] M.Bebendorf e S.Rjasanow. *Adaptive low-rank approximation of collocation matrices*. Computing, 70:1-24, 2003.
- [8] M.Stolper O. Von Estorff, S.Rjasanow e O.Zalesk *Two efficient methods for a multifrequency solution of the helmholtz equation*. Computing and Visualization in Science, 167:8-159, 2005.

- [9] M.H. Aliabadi, A. Brancanti, e I.Benedetti *Hierarchical adaptive cross approximation GMRES technique for solution of acoustic problems using the boundary element method.* CMES Computer Modeling in Engineering and Sciences, 45:149-172, 2009.
- [10] O.Rain S. Kurz e S. Rjasanow *The adaptive cross approximation technique for the 3-D boundary element method.* Transactions on Magnetics, 38:421-424, 2002.
- [11] M.N. Vouvakis, K.Zhao e J.F. Lee *The adaptive cross approximation algorithm for accelerated method of moments computation of emc problems.* IEEE Transaction on Electromagnetic Compatibility, 47:763-773, 2005.
- [12] M.Bebendorf, B.Craganu-Cretuand, J.Ostrowski, Z. Andjelic e J. Smajic *Fast BEM-Solution of laplace problems with hmatrices and ACA.* IEEE Transaction on Magnetics, 42:627-630, 2006.
- [13] M.Bebendorf e R. Grzhibovskis *Accelerating Garlekin BEM of Linear elasticity using ACA.* Mathematical Methods in the Applied Science, 29:1721-1747, 2006.
- [14] M.H. Aliabadi, I.Benedetti e G.Daví *A fast 3D dual Boundary Element Method based on hierarchical matrices.* International Journal of Solids and Structures, 45:2355-2376, 2008.
- [15] V. Rokhlin *Rapid Solution of integral equations os classical potential theory.* J.Comput.Phys, 60,187-207, 1985.
- [16] L.F. Greengard *The rapid evolution of potencial fields in particle systems.* MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1988.
- [17] L.F. Greengard e V. Rokhlin *A fast algorithm for particle simulations..* J.Comp Phys.,73:325-348, 1987.
- [18] L.F. Greengard, M. C. Kropinski, e A. Mayo *Integral equation methods for Stoke flow and isotropic elasticity in the plane.* J. Comput, Phys.,125:403-414, 1996.

- [19] L.F. Greengard e J. Helsing *On the numerical evaluation os elastostatic fields in locally isotropic two-dimensional composites.* J. Mech. Phys. Solids.,46:1441-1462, 1998.
- [20] A. P. Peirce. e J.A.L. Napier *A spectral multipole method for efficient solution of large-scale boundary element models in elastostatics.* Int. J. Numer. Methods. Eng.,38:409-434, 1995.
- [21] J. D. Richardson, L. J. Gray, T. Kaplan and J. A. Napier *Regularized spectralmultipole BEM for plane elasticity.* Engineering Analysis with Boundary Element.,25:297-311, 2001.
- [22] Y. Liu, N. Nishimura *The fast multipole boundary element method for potencial problems: A tutorial.* Elsevier 1994.
- [23] Y. Liu *A new fast mutipole boundary element method for solving large-scale two-dimensional elastostatic problems.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 65:863-881, 2005.
- [24] P. Wang, e Z. Yao *Fast multipole DBEM analysis of fatigue crack growth.* Comput. Mech, 38,223-233, 2006.
- [25] T. Fukui, T Mochida, e K. Inoue *Crack extension analysis in system of growing cracks by fast multipole boundary element method.* Proceedings of the Seventh BEM Technology Conference, (JASCMOE, Tokyo, 1997), pp.25-30
- [26] M. L. Bittencourt *Análise Computacional de Estruturas.* Editora Unicamp - 2010.
- [27] M. H. Aliabadi *The boundary element method - Aplicacion in Solid Structures - Volume 2.* Wiley, 2002.
- [28] Y. F. Rashed *Tutorial 3: More Examples on the derivations of the direct integral forms.* Boundary Element Communications, 13(1), 2002.
- [29] E. L. Albuquerque *Introdução ao Método dos Elementos de Contorno - Notas de aula, Universidade de Brasília, 2012.*

- [30] X. W. Gao and Trevor G Davies *Boundary Element Programming in Mechanics*. Cambridge University Press, 2002.
- [31] J. T. Katsikadelis. *Boundary Elements*. Elsevier, 2002.
- [32] Y. F. Rashed *Tutorial 4: More Examples on the derivations of the direct integral forms*. Boundary Element Communications, 13(1), 2002.
- [33] L. Greengar *Fast algorithms for Classical Physics*. Science VOL.265.