Universidade de Brasília
FACE – Faculdade de Administração, Contabilidade e Economia
Departamento de Economia – Programa de Pós-Graduação

Uma Demonstração Alternativa para a Representação de Preferências Variacionais

Aluno: Luiz Mário Martins Brotherhood

Orientador: Leandro Gonçalves do Nascimento, PhD

Brasília, 2014

Universidade de Brasília
FACE – Faculdade de Administração, Contabilidade e Economia
Departamento de Economia – Programa de Pós-Graduação

Uma Demonstração Alternativa para a Representação de Preferências Variacionais

Dissertação apresentada ao Departamento de Economia da Universidade de Brasília, sob a orientação do professor Dr. Leandro Nascimento, como requisito para obtenção do título de Mestre em Ciências Econômicas.

Aluno: Luiz Mário Martins Brotherhood

Orientador: Leandro Gonçalves do Nascimento, PhD

Brasília, 2014

“Uma Demonstração Alternativa para a Representação de Preferências Variacionais”

LUIZ MÁRIO MARTINS BROTHERHOOD

Dissertação apresentada como exigência do Curso de Mestrado em Economia da Universidade de Brasília.

Avaliação
BANCA EXAMINADORA

Professor Dr. Leandro Gonçalves do Nascimento
Orientador

Professor Dr. Gil Riella
Membro interno

Professor Dr. Luís Fernando Brands Barbosa
Membro externo

Brasília, DF. Janeiro de 2014

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço ao professor Gil Riella pela inesgotável paciência e disponibilidade. Sem seu inestimável auxílio, a redação desta dissertação não teria sido possível.

Também agradeço ao professor José Guilherme de Lara Resende pela atenção, correções e sugestões.

Por fim, agradeço ao professor Leandro Gonçalves do Nascimento por ter aceito a tarefa de ser meu orientador.

Resumo

Nós fornecemos uma demonstração alternativa de parte do principal resultado de Maccheroni, Marinacci e Rustichini (2006). Para isso, recorremos a um resultado de Faro (2012). Especificamente, utilizando o modelo de escolha sob incerteza baseado em Anscombe e Aumann (1968), caracterizamos as preferências para as quais existe uma função de utilidade u e um índice de ambiguidade c definido sobre o conjunto de probabilidades sobre os estados da natureza tais que, para todos os atos f e g,

$$f \succsim g \iff \min_{p} \left(\int u(f)dp + c(p) \right) \geq \min_{p} \left(\int u(g)dp + c(p) \right).$$

Como ilustração da motivação deste trabalho, também fornecemos uma demonstração alternativa do Teorema de Representação de Preferências Maxmin de Gilboa e Schmeidler (1989) utilizando um resultado de Bewley (1986).

Palavras-chave: Teoria da Decisão, Incerteza, Ambiguidade

Abstract

We develop an alternative demonstration of part of the main result of Maccheroni, Marinacci and Rustichini (2006). To achieve this, we use Faro's (2012) main result. Specifically, using the choice under uncertainty model based in Anscombe and Aumann (1968), we characterize the preferences for which there are a utility function u and an ambiguity index c on the set of probabilities on the states of the world such that, for all acts f and g

$$f \succsim g \iff \min_p \left(\int u(f)dp + c(p) \right) \geq \min_p \left(\int u(g)dp + c(p) \right).$$

As an illustration of the motivation that led to this work, we also provide an alternative demonstration of Gilboa and Schmeidler's (1989) Maxmin Preferences Representation Theorem. To achieve this, we use one of Bewley's (1986) results.

Keywords: Decision Theory, Uncertainty, Ambiguity

1 Introdução

Em seu trabalho seminal, Knight (1921) estabeleceu a distinção entre *risco* e *incerteza*. Segundo ele, uma situação de risco é aquela em que os resultados são imprecisos e, além disso, se conhece objetivamente a distribuição de probabilidade que os governa. O rolar de um dado perfeito é um exemplo de uma situação desse tipo. Por outro lado, uma situação de incerteza é aquela em que, além dos resultados serem incertos, não há maneira objetiva de se mensurar a distribuição de probabilidade que descreve os eventos. Um exemplo de uma situação desse tipo são as apostas sobre os resultados de jogos de futebol.

Savage (1954) e Anscombe e Aumann (1963) estudaram situações de incerteza em que um tomador de decisão age como se possuísse uma *crença* quanto à distribuição de probabilidade dos eventos. Nesse contexto, a ausência de um critério objetivo de mensuração da incerteza é substituída por um critério subjetivo. Em termos de Teoria da Decisão, em tais situações, o tomador de decisão age como se fosse um maximizador de utilidade esperada subjetiva.

Ellsberg (1961), por outro lado, demonstrou que há situações empíricas de incerteza em que não é possível haver uma única distribuição de probabilidade que descreva o comportamento do tomador de decisão. O seguinte experimento mental, que passou a ser conhecido por "Paradoxo de Ellsberg", foi por ele proposto.

Suponha que há duas urnas, cada uma contendo 100 bolas, e que cada bola possa ser vermelha ou preta. A urna A contém 50 bolas pretas e 50 bolas vermelhas, enquanto que não há informação adicional para a urna B. O agente deve ranquear as seguintes quatro apostas:

- Aposta AV: a bola retirada da urna A é vermelha.
- Aposta AP: a bola retirada da urna A é preta.
- Aposta BV: a bola retirada da urna B é vermelha.
- Aposta BP: a bola retirada da urna B é preta.

Caso o agente acerte sua aposta, ele recebe \$100 e, caso contrário, nada acontece. As seguintes preferências foram observadas empiricamente: $AP \sim AV \succ BP \sim BV$, onde $\sim$ indica indiferença e $\succ$ indica preferência estrita. Caso suponhamos que essas preferências tenham sido derivadas da maximização de uma utilidade esperada subjetiva, não há uma única medida de probabilidade que esteja de acordo com essas preferências. Para visualizar isso, denotemos por $p(X)$ a probabilidade que o agente atribui ao evento

$X \in \{AV, AP, BV, BP\}$. Assim, o seguinte deve ser verdade:

$$AP \sim AV$$
$$\iff$$
$$p(AP)u(100) + (1 - p(AP))u(0) = p(AV)u(100) + (1 - p(AV))u(0)$$
$$\iff$$
$$p(AP) = p(AV) = 0,5.$$

Similarmente, $BP \sim BV$ é verdade se, e somente se, $p(BP) = p(BV) = 0,5$. No entanto, caso o agente prefira mais dinheiro a menos, devemos ter:

$$AV \succ BP$$
$$\iff$$
$$p(AV)u(100) + (1 - p(AV))u(0) > p(BP)u(100) + (1 - p(BP))u(0)$$
$$\iff$$
$$0,5 = p(AV) > p(BP) = 0,5,$$

o que não é possível.

Visto isso, certas situações passaram a ser modeladas em Teoria da Decisão como se o agente possuísse *mais de uma crença* em relação às probabilidades dos eventos. Essas situações passaram a ser denominadas situações de *ambiguidade*. Pela constatação empírica descrita no Paradoxo de Ellsberg, fica claro também que as pessoas consultadas tendem a *evitar* situações de ambiguidade. Este fenômeno passou a ser conhecido como *aversão à ambiguidade*.

Utilizando a abordagem de múltiplas priors, Bewley (1986) introduziu uma representação que, na notação do modelo que utilizaremos nesse trabalho, é dada pela seguinte regra:

$$f \succsim g \iff \int u(f)dp \geq \int u(g)dp \;\; \forall p \in \Pi,$$

onde Π é um conjunto de medidas de probabilidades sobre o espaço de estados da natureza. Gilboa e Schmeidler (1989), por outro lado, definiram a representação *maxmin*:

$$f \succsim g \iff \min_{p \in \Pi} \int u(f)dp \geq \min_{p \in \Pi} \int u(g)dp.$$

Para a demonstração do teorema que caracteriza as preferências que possuem representação maxmin, os autores utilizaram técnicas padrões encontradas em artigos de Teoria da Decisão, como a aplicação de funcionais, extensões de funcionais e teoremas de separação de hiperplanos. No entanto, é sabido pelos estudiosos dessa área que é possível utilizar diretamente o resultado de Bewley (1986) para a demonstração da representação maxmin. Nós apresentaremos tal demonstração nesta dissertação.

Cerca de vinte anos após a publicação desses trabalhos, Maccheroni, Marinnaci e Rustichini (2006), doravante denotado por MMR, caracterizaram as preferências que possuem representação *variacional*:

$$f \succsim g \iff \min_{p\in\Delta}\left(\int u(f)dp + c(p)\right) \geq \min_{p\in\Delta}\left(\int u(g)dp + c(p)\right),$$

onde Δ é o conjunto de todas as medidas de probabilidade sobre os estados da natureza e c é uma função que assume valores em $[0,\infty]$. Essa representação pode ser considerada uma *generalização* da representação maxmin, uma vez que, se tivermos $c(p) = 0$ para todo $p \in \Pi$ e $c(p) = \infty$ caso contrário, voltamos à representação original de Gilboa e Schmeidler (1989).

Analogamente, Faro (2012) introduziu a representação *Bewley-variacional*:

$$f \succsim g \iff \int u(f)dp + c(p) \geq \int u(g)dp \ \ \forall p \in \Delta.$$

Pelo mesmo motivo que o anterior, essa representação pode ser considerada como uma generalização do resultado de Bewley (1986).

Com isso, naturalmente o seguinte questionamento surge: é possível utilizar o resultado de Faro (2012) para demonstrar o teorema de representação variacional de MMR? Respondemos a este questionamento de modo afirmativo nesta dissertação.

O seguinte diagrama esquematiza as ideias acima:

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{representação maxmin}} \arrow[r, "\text{generalizada para}"] & \boxed{\text{representação variacional}} \\ \boxed{\text{representação Bewley}} \arrow[u] \arrow[r, "\text{generalizada para}"] & \boxed{\text{representação Bewley-variacional}} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Esta dissertação é organizada da seguinte forma. Na seção 2, introduzimos o modelo de escolha sob incerteza com o qual trabalharemos. Na seção 3, descrevemos as representações maxmin e Bewley, e, como ilustração da motivação deste trabalho, demonstramos o Teorema de Representação Maxmin utilizando o Teorema de Representação Bewley. Na seção 4, descrevemos as representações variacional e Bewley-variacional, e, analogamente, demonstramos o Teorema de Representação Variacional aplicando o

Teorema de Representação Bewley-variacional. Na seção 5, tecemos comentários finais.

2 Modelo

O modelo seguinte, baseado em Anscombe e Aumann (1963), consiste na representação da situação de um tomador de decisão que enfrenta uma escolha cujos resultados são incertos. Determinados cenários (estados da natureza) são passíveis de ocorrer no futuro, e a decisão do agente consiste em escolher o que fazer em cada um desses cenários.

Formalmente, considere um conjunto S de *estados da natureza*, uma σ-álgebra Σ de subconjuntos de S, e um conjunto X de *consequências*. Denotamos por $\mathcal{F}$ o conjunto de todos os *atos* simples: funções $f : S \to X$ que assumem um número finito de valores e que são Σ-mensuráveis.

Assumimos que X é um subconjunto convexo de um espaço vetorial. Por exemplo, esse é o caso se X é o conjunto de todas as loterias sobre um conjunto de prêmios, como acontece no modelo clássico de Anscombe e Aumann (1963). Usando a estrutura linear de X, podemos definir, para todo $f, g \in \mathcal{F}$ e $\alpha \in [0,1]$, o ato $\alpha f + (1-\alpha)g \in \mathcal{F}$, que, para cada $s \in S$, resulta em $\alpha f(s) + (1-\alpha)g(s) \in X$.

Dado qualquer $x \in X$, defina $x \in \mathcal{F}$ pelo ato constante tal que $x(s) = x$ para todo $s \in S$. Com o abuso de notação habitual, nós identificamos X com o subconjunto de atos constantes em $\mathcal{F}$.

Denotamos por $B_0(\Sigma)$ o conjunto de todas as funções reais simples Σ-mensuráveis. A norma em $B_0(\Sigma)$ é dada por $\|a\|_\infty = \sup_{s \in S} |a(s)|$ (chamada de *norma do supremo*). Também denotamos por Δ o conjunto de todas as medidas de probabilidades finitamente aditivas sobre Σ[1]. Considere que Δ seja dotado da topologia fraca*.

Nós modelamos as *preferências* do tomador de decisão sobre $\mathcal{F}$ por meio de uma relação binária $\succsim$. Como usual, $\succ$ e $\sim$ denotam respectivamente as partes assimétrica e simétrica de $\succsim$. Se $f \in \mathcal{F}$, um elemento $x_f \in X$ é um *equivalente de certeza para* f se $f \sim x_f$.

[1]Isto é, $\Delta = \Delta(\Sigma)$ é composto por todas as funções $p : \Sigma \to [0,1]$ tais que $p(\emptyset) = 0$, $p(S) = 1$ e $p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_2)$ para todo $A_1, A_2 \in \Sigma$ tais que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

3 Representações Maxmin e Bewley

3.1 Representação Maxmin

Os seguintes axiomas descrevem a estrutura das relações que possuem representação maxmin.

Axioma 1 (Completeza). *Se $f, g \in \mathcal{F}$, então $f \succsim g$ ou $g \succsim f$.*

Axioma 2 (Transitividade). *Para todo $f, g, h \in \mathcal{F}$, se $f \succsim g$ e $g \succsim h$, então $f \succsim h$.*

Axioma 3 (Certainty-Independence ou C-Independence). *Se $f, g \in \mathcal{F}$, $x \in X$ e $\alpha \in (0, 1)$,*

$$f \succsim g \iff \alpha f + (1-\alpha)x \succsim \alpha g + (1-\alpha)x.$$

Axioma 4 (Continuidade). *Se $f, g, h \in \mathcal{F}$, os conjuntos $\{\alpha \in [0,1] : \alpha f + (1-\alpha)g \succsim h\}$ e $\{\alpha \in [0,1] : h \succsim \alpha f + (1-\alpha)g\}$ são fechados.*

Axioma 5 (Monotonicidade). *Se $f, g \in \mathcal{F}$ e $f(s) \succsim g(s)$ para todo $s \in S$, então $f \succsim g$.*

Axioma 6 (Aversão à Incerteza). *Se $f, g \in \mathcal{F}$ e $\alpha \in (0, 1)$,*

$$f \sim g \implies \alpha f + (1-\alpha)g \succsim f.$$

Dados dois atos f e g, $f \succsim g$ lê-se: "f é pelo menos tão bom quanto g" ou "f é fracamente preferível a g". Desta forma, o axioma de completeza implica que o agente consegue comparar quaisquer dois atos, ou seja, não há indecisão. O axioma da transitividade, por outro lado, implica a noção de consistência das escolhas do tomador de decisão: intuitivamente, se maçã é preferível a banana e banana é preferível a melão, é de se esperar que maçã seja preferível a melão.

O axioma Certainty-Independence traduz a ideia de que, se o agente prefere f a g, então também preferirá uma loteria composta de f e qualquer outro ato constante x à loteria composta de g e x, dado que a probabilidade de receber f na primeira loteria seja igual à de receber g na segunda. Ou seja, dada uma preferência entre quaisquer dois elementos f e g, essa preferência é mantida independentemente do fato de que qualquer outro ato constante possa se "misturar" a f e g. A ideia contrária também é válida: caso o agente prefira uma mistura entre f e x a uma mistura entre g e x, onde f e g possuem os mesmos pesos em ambas, então o agente deve preferir f a g.

O axioma de continuidade representa a exigência de que não haja "saltos" nas preferências do agente. De forma intuitiva, se f é preferível a g, então elementos "próximos" de f também serão preferíveis a g.

Monotonicidade, por sua vez, implica que se, para todo estado da natureza, o agente prefere a consequência recebida pelo ato f à recebida pelo ato g, então o ato f é preferível ao ato g.

O axioma de Aversão à Incerteza implica que a "suavização" da escolha é desejável pelo tomador de decisão. Suponha que o agente seja indiferente entre dois elementos f e g *distintos*. Intuitivamente, a distinção entre os dois elementos implica que haja uma "distância" entre eles. Por outro lado, lembrando a ideia de combinação convexa, uma loteria entre os dois elementos está "entre" os dois elementos, o que torna a escolha do agente mais "suave".

Definição. Uma relação $\succsim$ em $\mathcal{F}$ é chamada de *GS* se satisfaz os axiomas 1-6.

Demonstraremos o seguinte teorema.

Teorema 1 (Gilboa e Schmeidler, 1989)**.** *Seja $\succsim$ uma relação binária sobre $\mathcal{F}$. As seguintes condições são equivalentes.*

(i) $\succsim$ *é GS;*

(ii) Existe uma função não constante e afim[2] $u : X \to \mathbb{R}$, *um subconjunto não vazio, fechado e convexo* $\Pi \subseteq \Delta$ *tais que, para todo* $f, g \in \mathcal{F}$,

$$f \succsim g \iff \min_{p \in \Pi} \int u(f)dp \geq \min_{p \in \Pi} \int u(g)dp.$$

Note que a multiplicidade de priors p reflete a situação de ambiguidade em que o agente se encontra. Várias interpretações podem ser dadas ao conjunto Π: por um lado, pode ser composto pelas priors que o agente subjetivamente elencou como possíveis ou, por outro lado, pode ser composto por opiniões de especialistas e de informações advindas da mídia. Além disso, o agente ranqueia cada alternativa de acordo com sua pior crença relativa às probabilidades dos estados da natureza. Nesse sentido, o agente pode ser visto como pessimista. Por fim, para cada ato f, $\int u(f)dp$ consiste na utilidade esperada de f de acordo com a prior p.

3.2 Representação Bewley

O resultado descrito nesta seção foi originalmente introduzido por Bewley (1986). No entanto, utilizaremos a versão de Gilboa, Maccheroni, Marinacci e Schmeidler (2010), que o adaptaram para o modelo com o qual trabalhamos.

Precisaremos dos seguintes axiomas adicionais.

[2] Ou seja, $u(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha u(x) + (1-\alpha)u(y)$ para todo $x, y \in X$ e $\alpha \in (0,1)$.

Axioma 7 (Reflexividade)**.** *Para todo* $f \in \mathcal{F}$*, é verdade que* $f \succsim f$*.*

Axioma 8 (C-completeza)**.** *Se* $x, y \in X$*, então* $x \succsim y$ *ou* $y \succsim x$*.*

Axioma 9 (Independência)**.** *Se* $f, g, h \in \mathcal{F}$ *e* $\alpha \in (0,1)$*, então*

$$f \succsim g \iff \alpha f + (1-\alpha)h \succsim \alpha g + (1-\alpha)h.$$

Os axiomas acima são tradicionais. O primeiro requer que todo ato seja tão bom quanto ele mesmo. O segundo exige completeza somente com respeito a atos constantes, permitindo indecisões para o caso de atos não constantes. Além disso, similarmente ao discutido na seção anterior, o axioma de independência requer que a preferência entre quaisquer dois elementos seja mantida independentemente do fato de que qualquer outro ato, que pode ser não constante, possa se "misturar" aos dois elementos originais.

Definição. Uma relação $\succsim$ em $\mathcal{F}$ é chamada de *Bewley* se satisfaz os axiomas 2 (Transitividade), 4-5 (Continuidade e Monotonicidade) e 7-9.

Utilizaremos o seguinte resultado.

Teorema 2 (Gilboa, Maccheroni, Marinacci e Schmeidler (2010))**.** *Seja* $\succsim$ *uma relação binária sobre* $\mathcal{F}$*. As seguintes condições são equivalentes.*

(i) $\succsim$ *é Bewley;*

(ii) Existe uma função afim $u : X \to \mathbb{R}$*, um subconjunto não vazio, fechado e convexo* $\Pi \subseteq \Delta$ *tais que, para todo* $f, g \in \mathcal{F}$*,*

$$f \succsim g \iff \int u(f)dp \geq \int u(g)dp \ \ \forall p \in \Pi.$$

Alguns componentes da representação maxmin se repetem acima, como a multiplicidade de priors de um conjunto Π e o termo de utilidade esperada. No entanto, a representação acima representa uma condição mais razoável segundo a qual o agente ranqueia suas alternativas: um ato f é preferível a outro ato g se a utilidade esperada de f é maior que a de g segundo *todas* as priors de Π. Essa condição é conhecida como "regra da unanimidade".

3.3 Demonstrações

Prova do Teorema 1 [3]

[3] *Agradeço ao professor Gil Riella por permitir que a demonstração a seguir seja reproduzida neste trabalho.*

Para demonstrar que *(i)* implica em *(ii)*, precisamos dos seguintes lemas.

Lema 1. *Se $\succsim$ é uma relação completa e contínua em $\mathcal{F}$, então, para todo ato f, existe um equivalente de certeza x_f.*

Demonstração. [4] Seja $f \in \mathcal{F}$. Como todo ato assume somente um número finito de valores, é possível tomar $x, y \in X$ tais que $x \succsim f(s) \succsim y$ para todo $s \in S$. Por monotonicidade, $x \succsim f \succsim y$. Por continuidade, os conjuntos $\{\alpha \in [0,1] : \alpha x + (1-\alpha)y \succsim f\}$ e $\{\alpha \in [0,1] : f \succsim \alpha x + (1-\alpha)y\}$ são fechados. Também são não vazios, já que 1 pertence ao primeiro e 0 pertence ao segundo. Além disso, por completeza, sua união é igual a $[0,1]$. Como $[0,1]$ é conexo (ou seja, não pode ser escrito como uma união disjunta de dois conjuntos fechados não vazios), a intersecção dos dois conjuntos é não vazia. Assim, existe $\beta \in [0,1]$ tal que $f \sim \beta x + (1-\beta)y =: x_f$. □

Lema 2. *A relação GS $\succsim$ satisfaz Negative Certainty Independence (NCI). Isto é, se $f \succsim x$ para algum $f \in X$ e $x \in X$, então $\alpha f + (1-\alpha)h \succsim \alpha x + (1-\alpha)h$ para todo $h \in \mathcal{F}$ e $\alpha \in (0,1)$.*

Demonstração. Sejam $f \in \mathcal{F}$ e $x \in X$ tais que $x_f \sim f \succsim x$. Por c-independence e monotonicidade, $\alpha x_f + (1-\alpha)h \succsim \alpha x + (1-\alpha)h$ para todo $\alpha \in (0,1)$ e $h \in \mathcal{F}$. A seguir demonstramos que $\alpha f + (1-\alpha)h \succsim \alpha x_f + (1-\alpha)h$ para todo α e h. Fixe qualquer $\alpha \in (0,1)$.

Suponha que $h \sim f \sim x_f$. Por c-independence, isso implica que $x_f = \alpha x_f + (1-\alpha)x_f \sim \alpha x_f + (1-\alpha)h$. Aversão à incerteza implica que $\alpha f + (1-\alpha)h \succsim f \sim x_f \sim \alpha x_f + (1-\alpha)h$.

Suponha agora que não seja verdade que $h \sim f$. Tome qualquer $\beta \in (0, \frac{1}{2})$ e defina a consequência $y := \left(\frac{\beta}{1-\beta}\right) x_h + \left(\frac{1-2\beta}{1-\beta}\right) x_f$. Note que

$$
\begin{aligned}
\beta x_f + (1-\beta)y &= \beta x_f + (1-\beta)\left(\left(\frac{\beta}{1-\beta}\right) x_h + \left(\frac{1-2\beta}{1-2\beta}\right) x_f\right) \\
&= \beta x_f + \beta x_h + (1-2\beta)x_f \\
&= \beta x_h + (1-\beta)x_f \\
&\sim \beta h + (1-\beta)x_f,
\end{aligned}
$$

onde utilizamos c-independence na última linha. Além disso, note que, novamente por c-independence,

$$\beta f + (1-\beta)y \sim \beta x_f + (1-\beta)y \sim \beta h + (1-\beta)x_f.$$

[4] A demonstração a seguir é baseada na prova do Lema 28 de MMR.

Pelo que aprendemos no segundo parágrafo, obtemos

$$\alpha\left(\beta f+(1-\beta) y\right)+(1-\alpha)\left(\beta h+(1-\beta) x_f\right) \succsim \alpha\left(\beta x_f+(1-\beta) y\right)+(1-\alpha)\left(\beta h+(1-\beta) x_f\right).$$

A expressão acima é equivalente a

$$\beta\left(\alpha f+(1-\alpha) h\right)+(1-\beta)\left(\alpha y+(1-\alpha) x_f\right) \succsim \beta\left(\alpha x_f+(1-\alpha) h\right)+(1-\beta)\left(\alpha y+(1-\alpha) x_f\right).$$

Por c-independence, $\alpha f+(1-\alpha) h \succsim \alpha x_f+(1-\alpha) h$.

Passamos a saber que $\alpha f+(1-\alpha) h \succsim \alpha x_f+(1-\alpha) h$ para todo $\alpha \in(0,1)$ e $h \in \mathcal{F}$. Pelo que aprendemos no primeiro parágrafo, concluímos que $\alpha f+(1-\alpha) h \succsim \alpha x+(1-\alpha) h$ para todo $\alpha \in(0,1)$, $h \in \mathcal{F}$ e $x \in X$ tal que $f \succsim x$. □

Lema 3. *Se $\succsim$ é uma relação completa e contínua em $\mathcal{F}$, então, para todo $f, g, h \in \mathcal{F}$, o conjunto $\{\alpha \in[0,1]: \alpha f+(1-\alpha) h \succsim \alpha g+(1-\alpha) h\}$ é fechado.*

Demonstração. Seja $\succsim$ uma relação completa e contínua em $\mathcal{F}$. Assim, note que, para todo $f, g, h \in \mathcal{F}$, os conjuntos $\{\alpha \in[0,1]: \alpha f+(1-\alpha) g \succ h\}$ e $\{\alpha \in[0,1]: h \succ \alpha f+(1-\alpha) g\}$ são abertos. Fixe atos f, g e h e tome $\alpha \in[0,1]$ tal que $\alpha f+(1-\alpha) h \succ \alpha g+(1-\alpha) h$. Suponha que exista $\hat{h} \in \mathcal{F}$ tal que $\alpha f+(1-\alpha) h \succ \hat{h} \succ \alpha g+(1-\alpha) h$. Por continuidade de $\succsim$, existem vizinhanças de α, V_α e V_α'[5], tais que $\alpha' f+(1-\alpha') h \succ \hat{h}$ para todo $\alpha' \in V_\alpha$ e $\hat{h} \succ \alpha' g+(1-\alpha') h$ para todo $\alpha' \in V_\alpha'$. Mas então $\alpha' f+(1-\alpha') h \succ \alpha' g+(1-\alpha') h$ para todo $\alpha' \in V_\alpha \cap V_\alpha'$. Agora suponha que não exista $\hat{h} \in \mathcal{F}$ tal que $\alpha f+(1-\alpha) h \succ \hat{h} \succ \alpha g+(1-\alpha) h$. Por continuidade de $\succsim$, existem vizinhanças de α, V_α e V_α', tais que $\alpha' f+(1-\alpha') h \succ \alpha g+(1-\alpha) h$ para todo $\alpha' \in V_\alpha$ e $\alpha f+(1-\alpha) h \succ \alpha' g+(1-\alpha') h$ para todo $\alpha' \in V_\alpha'$. Mas então $\alpha' f+(1-\alpha') h \succsim \alpha f+(1-\alpha) h \succ \alpha g+(1-\alpha) h \succsim \alpha' g+(1-\alpha') h$ para todo $\alpha' \in V_\alpha \cap V_\alpha'$. Concluímos que, para todo $f, g, h \in \mathcal{F}$, o conjunto $\{\alpha \in[0,1]: \alpha f+(1-\alpha) h \succ \alpha g+(1-\alpha) h\}$ é aberto. Por completeza de $\succsim$, concluímos que o conjunto $\{\alpha \in[0,1]: \alpha f+(1-\alpha) h \succsim \alpha g+(1-\alpha) h\}$ é fechado para todo $f, g, h \in \mathcal{F}$. □

Definição. Seja $\succsim$ uma preferência GS. Defina a relação $\hat{\succsim}$ sobre $\mathcal{F}$ por $f \hat{\succsim} g$ se, e somente se, $\alpha f+(1-\alpha) h \succsim \alpha g+(1-\alpha) h$ para todo $h \in \mathcal{F}$ e $\alpha \in(0,1)$.

Sempre que escrevermos $\hat{\succsim}$, também estaremos considerando a preferência GS $\succsim$ a partir da qual $\hat{\succsim}$ foi definida.

Afirmação 1. *A relação $\hat{\succsim}$ é Bewley.*

Demonstração. (Reflexividade, transitividade e monotonicidade) Seguem, respectivamente, por reflexividade, transitividade e monotonicidade de $\succsim$.

[5] Isto é, $V_\alpha=(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ e $V_\alpha'=(\alpha-\varepsilon', \alpha+\varepsilon')$ para $\varepsilon, \varepsilon'>0$.

(C-completeza) Segue por completeza de $\succsim$ e pelo Lema 2.

(Continuidade) Fixe $f, g, h \in \mathcal{F}$ e note que

$$\begin{gathered}\left\{\alpha \in [0,1] : \alpha f + (1-\alpha) g \hat{\succsim} h\right\} \\ = \\ \{\alpha \in [0,1] : \beta\left(\alpha f + (1-\alpha)g\right) + (1-\beta)h' \succsim \beta h + (1-\beta)h' \;\; \forall \beta \in (0,1) \text{ e } h' \in \mathcal{F}\} \\ = \\ \{\alpha \in [0,1] : \beta\left(\alpha f + (1-\alpha)g\right) + (1-\beta)\left(\alpha h' + (1-\alpha)h'\right) \succsim \beta h + (1-\beta)h' \;\; \forall \beta \in (0,1) \text{ e } h' \in \mathcal{F}\} \\ = \\ \{\alpha \in [0,1] : \alpha\left(\beta f + (1-\beta)h'\right) + (1-\alpha)\left(\beta g + (1-\beta)h'\right) \succsim \beta h + (1-\beta)h' \;\; \forall \beta \in (0,1) \text{ e } h' \in \mathcal{F}\} \\ = \\ \bigcap_{\beta \in (0,1), h' \in \mathcal{F}} \{\alpha \in [0,1] : \alpha\left(\beta f + (1-\beta)h'\right) + (1-\alpha)\left(\beta g + (1-\beta)h'\right) \succsim \beta h + (1-\beta)h'\}.\end{gathered}$$

Ou seja, $\{\alpha \in [0,1] : \alpha f + (1-\alpha) g \hat{\succsim} h\}$ é uma interseção de conjuntos fechados e, portanto, é um conjunto fechado. A demonstração para o outro conjunto é similar.

(Independência) Sejam $f, g \in \mathcal{F}$ tais que $f \hat{\succsim} g$. Isso implica que, para todo $\alpha, \beta \in (0,1)$ e $h, h' \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned} \alpha\left(\beta f + (1-\beta)h\right) + (1-\alpha)h' &= \alpha\beta f + (1-\alpha\beta)\left(\frac{\alpha(1-\beta)}{1-\alpha\beta}h + \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}h'\right) \\ &\succsim \alpha\beta g + (1-\alpha\beta)\left(\frac{\alpha(1-\beta)}{1-\alpha\beta}h + \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}h'\right) \\ &= \alpha\left(\beta g + (1-\beta)h\right) + (1-\alpha)h'. \end{aligned}$$

Concluímos que $\beta f + (1-\beta)h \hat{\succsim} \beta g + (1-\beta)h$ para todo $h \in \mathcal{F}$ e $\beta \in (0,1)$.

Agora suponha que existam atos f, g e h e $\alpha \in (0,1)$ tais que $\alpha f + (1-\alpha)h \hat{\succsim} \alpha g + (1-\alpha)h$[6]. Tome $\bar{\alpha} = \max\{\alpha \in [0,1] : \alpha f + (1-\alpha)h \hat{\succsim} \alpha g + (1-\alpha)h\}$. Um argumento similar ao utilizado na demonstração da continuidade de $\hat{\succsim}$, baseado no Lema 3, mostra que o conjunto $\{\alpha \in [0,1] : \alpha f + (1-\alpha)h \hat{\succsim} \alpha g + (1-\alpha)h\}$ é fechado e, portanto, $\bar{\alpha}$ está bem definido. Defina $\beta := \frac{1}{1+\bar{\alpha}}$. Pelo que demonstramos no parágrafo anterior,

$$\begin{aligned} \beta\left(\bar{\alpha} f + (1-\bar{\alpha})h\right) + (1-\beta)f &\hat{\succsim} \beta\left(\bar{\alpha} g + (1-\bar{\alpha})h\right) + (1-\beta)f \\ &= \beta\left(\bar{\alpha} f + (1-\bar{\alpha})h\right) + (1-\beta)g \\ &\hat{\succsim} \beta\left(\bar{\alpha} g + (1-\bar{\alpha})h\right) + (1-\beta)g. \end{aligned}$$

[6] O argumento a seguir é baseado na demonstração do Lema 1 de Dubra, Maccheroni e Ok (2004).

Assim,
$$\frac{2\bar{\alpha}}{1+\bar{\alpha}}f+\frac{1-\bar{\alpha}}{1+\bar{\alpha}}h\hat{\succsim}\frac{2\bar{\alpha}}{1+\bar{\alpha}}g+\frac{1-\bar{\alpha}}{1+\bar{\alpha}}h.$$
Por definição de $\bar{\alpha}$, $\bar{\alpha} \geq \frac{2\bar{\alpha}}{1+\bar{\alpha}}$, o que é equivalente a $\bar{\alpha}(\bar{\alpha}-1) \geq 0$. Assim, $\bar{\alpha}=1$, e a equação em destaque acima implica que $f\hat{\succsim}g$. $\square$

Pelo Teorema 2, existe uma função afim $u: X \to \mathbb{R}$, um subconjunto não vazio, fechado e convexo $\Pi \subseteq \Delta$ tais que, para todo $f, g \in \mathcal{F}$,

$$f\hat{\succsim}g \iff \int u(f)dp \geq \int u(g)dp \ \ \forall p \in \Pi.$$

Por definição, $\hat{\succsim} \subseteq \succsim$ e, portanto, o Lema 2 implica que as relações $\succsim$ e $\hat{\succsim}$ coincidem para atos constantes. Ou seja, para todo par de atos constantes x e y,

$$x \succsim y \iff x\hat{\succsim}y \iff u(x) = \int u(x)dp \geq \int u(y)dp = u(y) \ \forall p \in \Pi.$$

Além disso, note que, para todos atos f e g,

$$f \succsim g \iff x_f \succsim x_g \iff u(x_f) \geq u(x_g).$$

NCI implica que $f\hat{\succsim}x_f$ e, consequentemente,

$$\int u(f)dp \geq \int u(x_f)dp = u(x_f)$$

para todo $p \in \Pi$. Isso é equivalente a $\min_{p\in\Pi} \int u(f)dp \geq u(x_f)$. Suponha que $\min_{p\in\Pi} \int u(f)dp > u(x_f)$. Isto implica que existe $x \in X$ com $\min_{p\in\Pi} \int u(f)dp > u(x) > u(x_f)$. Isto agora implica que $x \succ x_f \sim f$ e, consequentemente, não é verdade que $f\hat{\succsim}x$. Mas então $u(x) > \min_{p\in\Pi} \int u(f)dp$, o que é uma contradição. Concluímos que, para todo $f \in \mathcal{F}$, $\min_{p\in\Pi} \int u(f)dp = u(x_f)$. Portanto, para todos atos f e g,

$$f \succsim g \iff \min_{p\in\Pi} \int u(f)dp = u(x_f) \geq u(x_g) = \min_{p\in\Pi} \int u(g)dp.$$

Em seguida demonstraremos que *(ii)* implica em *(i)*.

(Completeza e transitividade) Seguem, respectivamente, por completeza e transitividade de $\geq$.

(Certainty-Independence) Para qualquer $f, g, \in \mathcal{F}$, $x \in X$ e $\alpha \in (0,1)$,

$$f \succsim g$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\min_{p \in \Pi} \int u(f) dp \geq \min_{p \in \Pi} \int u(g) dp$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\alpha \min_{p \in \Pi} \left(\int u(f) dp \right) + (1-\alpha) u(x) \geq \alpha \min_{p \in \Pi} \left(\int u(g) dp \right) + (1-\alpha) u(x)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\min_{p \in \Pi} \left(\int u \left(\alpha f + (1-\alpha) x \right) dp \right) \geq \min_{p \in \Pi} \left(\int u \left(\alpha g + (1-\alpha) x \right) dp \right)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\alpha f + (1-\alpha) x \succsim \alpha g + (1-\alpha) x.$$

(Continuidade) Sejam $f, g, h \in \mathcal{F}$ e tome sequência α^m em $[0,1]$ tal que $\alpha^m \to \bar{\alpha}$. Suponha que $\alpha^m f + (1-\alpha^m) g \succsim h$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Note que, para todo m,

$$\min_{p \in \Pi} \left(\int u \left(\alpha^m f + (1-\alpha^m) g \right) dp \right) \geq \min_{p' \in \Pi} \left(\int u(h) dp' \right) := k$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\int u \left(\alpha^m f + (1-\alpha^m) g \right) dp \geq k \ \ \forall p \in \Delta$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\alpha^m \int u(f) dp + (1-\alpha^m) \int u(g) dp \geq k \ \ \forall p \in \Delta$$

$$\Longrightarrow$$

$$\bar{\alpha} \int u(f) dp + (1-\bar{\alpha}) \int u(g) dp \geq k \ \ \forall p \in \Delta$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\min_{p \in \Pi} \left(\int u \left(\bar{\alpha} f + (1-\bar{\alpha}) g \right) dp \right) \geq \min_{p \in \Pi} \left(\int u(h) dp \right).$$

Concluímos que $\bar{\alpha} f + (1-\bar{\alpha}) g \succsim h$. Agora suponha que $h \succsim \alpha^m f + (1-\alpha^m) g$ para todo $m \in \mathbb{N}$, isto é,

$$\min_{p \in \Delta} \left(\alpha^m \int u(f) dp + (1-\alpha^m) \int u(g) dp \right) \leq \min_{p' \in \Delta} \left(\int u(h) dp' \right) =: k$$

para todo m. Suponha por contradição que $\min_{p\in\Delta}(\bar{\alpha}\int u(f)dp + (1-\bar{\alpha})\int u(g)dp) > k$. Defina $\delta := \min_{p\in\Pi}(\bar{\alpha}\int u(f)dp + (1-\bar{\alpha})\int u(g)dp) - k > 0$. Note que $\alpha^m u(f(s)) + (1-\alpha^m)u(g(s)) \to \bar{\alpha}u(f(s)) + (1-\bar{\alpha})u(g(s))$ para todo $s \in S$. Como os atos f e g são simples, existe $\bar{m} \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m \geq \bar{m}$ e $s \in S$,

$$|\alpha^m u(f(s)) + (1-\alpha^m)u(g(s)) - (\bar{\alpha}u(f(s)) + (1-\bar{\alpha})u(g(s)))| < \frac{\delta}{2}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\left|\alpha^m \int u(f)dp + (1-\alpha^m)\int u(g)dp - \left(\bar{\alpha}\int u(f)dp + (1-\bar{\alpha})\int u(g)dp\right)\right| < \frac{\delta}{2} \;\; \forall p \in \Pi$$

$$\Longrightarrow$$

$$\alpha^m \int u(f)dp + (1-\alpha^m)\int u(g)dp - \left(\bar{\alpha}\int u(f)dp + (1-\bar{\alpha})\int u(g)dp\right) > -\frac{\delta}{2} \;\; \forall p \in \Pi$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\alpha^m \int u(f)dp + (1-\alpha^m)\int u(g)dp > k + \frac{\delta}{2} \;\; \forall p \in \Pi.$$

Mas então $\min_{p\in\Delta}(\alpha^m \int u(f)dp + (1-\alpha^m)\int u(g)dp) > k + \frac{\delta}{2}$, o que é uma contradição. Concluímos que $\min_{p\in\Delta}(\bar{\alpha}\int u(f)dp + (1-\bar{\alpha})\int u(g)dp) \leq k$. Portanto, para qualquer $f, g, h \in \mathcal{F}$, os conjuntos $\{\alpha \in [0,1]\alpha f + (1-\alpha)g \succsim h\}$ e $\{\alpha \in [0,1]h \succsim \alpha f + (1-\alpha)g\}$ são fechados.

(Monotonicidade) Tome $f, g \in \mathcal{F}$ tais que $f(s) \succsim g(s)$ para todo $s \in S$. Isto é, $u(f(s)) \geq u(g(s))$ para todo $s \in S$. Isso implica que $\int u(f)dp \geq \int u(g)dp$ para todo $p \in \Delta$. Por sua vez, isso implica que $\int u(f)dp \geq \min_{p\in\Delta}(\int u(g)dp)$ para todo $p \in \Delta$ e, finalmente, $\min_{p\in\Delta}(\int u(f)dp) \geq \min_{p\in\Delta}(\int u(g)dp)$. Portanto, $f \succsim g$.

(Aversão à Incerteza) Tome atos f e g tais que $f \sim g$, isto é, $\min_{p\in\Delta}(\int u(f)dp) = \min_{p\in\Delta}(\int u(g)dp)$. Fixe $\alpha \in (0,1)$ e tome $\hat{p} \in \arg\min_{p\in\Delta}(\int u(\alpha f + (1-\alpha)g)dp)$. Note que

$$\begin{aligned}
\int u\left(\alpha f + (1-\alpha)g\right)d\hat{p} &= \alpha\left(\int u(f)d\hat{p}\right) + (1-\alpha)\left(\int u(g)d\hat{p}\right) \\
&\geq \alpha \min_{p\in\Delta}\left(\int u(f)dp\right) + (1-\alpha)\min_{p\in\Delta}\left(\int u(g)dp\right) \\
&= \min_{p\in\Delta}\left(\int u(f)dp\right).
\end{aligned}$$

Concluímos que, para qualquer $\alpha \in (0,1)$, $\alpha f + (1-\alpha)g \succsim f$.

4 Representações Variacional e Bewley-variacional

4.1 Representação Variacional

Utilizaremos os seguintes axiomas adicionais.

Axioma 10 (Weak Certainty-Independence)**.** *Se $f, g \in \mathcal{F}$, $x, y \in X$ e $\alpha \in (0,1)$,*

$$\alpha f + (1-\alpha)x \succsim \alpha g + (1-\alpha)x \implies \alpha f + (1-\alpha)y \succsim \alpha g + (1-\alpha)y.$$

Axioma 11 (Unboundedness)**.** *Existem $x, y \in X$ tais que, para cada $\alpha \in (0,1)$, existem $z, \hat{z} \in X$ com*

$$\alpha z + (1-\alpha)y \succ x \succ y \succ \alpha \hat{z} + (1-\alpha)x.$$

Note que o axioma Weak Certainty-Independence é mais fraco que ambos os axiomas de independência anteriores. Agora só há a exigência de independência para atos que são misturas entre atos constantes e não constantes, dado que o peso da mistura é mantido constante.

O axioma Unboundedness é uma hipótese técnica que implica a riqueza do conjunto de consequências. Ele garante que haja elementos com utilidades tão alta e tão baixa quanto arbitrariamente desejarmos. Para visualizar isso intuitivamente, tome os elementos $x \succ y$ descritos no axioma. Note que, quanto maior for o peso dado a y, maior deve ser a utilidade do elemento z para que a mistura entre y e z seja estritamente preferível a x.

Definição. Uma relação $\succsim$ em $\mathcal{F}$ é chamada de *variacional ilimitada* se satisfaz os axiomas 2 (Transitividade), 4-7 (Continuidade, Monotonicidade, Aversão à Incerteza e Reflexividade), e 10-11.

A demonstração do seguinte teorema é o nosso resultado principal.

Teorema 3 (MMR)**.** *Seja $\succsim$ uma relação binária em $\mathcal{F}$. As seguintes condições são equivalentes.*

(i) $\succsim$ é variacional ilimitada;

(ii) existe uma função afim $u : X \to \mathbb{R}$, com $u(X) = \mathbb{R}$, e uma única função grounded[7], convexa e semicontínua inferior $c : \Delta \to [0, \infty]$ tais que, para todo $f, g \in \mathcal{F}$,

$$f \succsim g \iff \min_{p \in \Delta} \left(\int u(f) dp + c(p) \right) \geq \min_{p \in \Delta} \left(\int u(g) dp + c(p) \right). \tag{1}$$

[7] Isto é, seu valor ínfimo é zero.

Pelo teorema acima, uma preferência variacional ilimitada é representada por um par (u, c). Doravante, quando considerarmos uma preferência desse tipo, iremos escrever u e c para nos referirmos aos elementos desse par.

Novamente, a multiplicidade de priors p reflete a situação de ambiguidade em que o agente se encontra. Desta vez, o tomador de decisão considera *todas* as possíveis priors ao ordenar suas alternativas. Além disso, similar à representação maxmin, o agente ranqueia cada alternativa de acordo com sua pior crença relativa às probabilidades dos estados da natureza. Por fim, a função c reflete o grau de aversão à ambiguidade que caracteriza o tomador de decisão. Para discutirmos sobre a função c, considere a seguinte definição introduzida por MMR.

Definição. Dadas duas preferências $\succsim_1$ e $\succsim_2$, dizemos que $\succsim_1$ é *mais avessa à ambiguidade que* $\succsim_2$ se, para todo $f \in \mathcal{F}$ e $x \in X$, $f \succsim_1 x$ implicar que $f \succsim_2 x$.

A definição acima é análoga à seguinte consideração intuitiva feita por Ghirardato e Marinacci (2002): se um agente prefere um ato ambíguo a um ato isento de ambiguidade, então outro agente menos avesso à ambiguidade fará o mesmo.

Agora considere a seguinte proposição adaptada de MMR.

Proposição (MMR)**.** *Dadas duas preferências variacionais ilimitadas $\succsim_1$ e $\succsim_2$, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\succsim_1$ é mais avessa à ambiguidade do que $\succsim_2$,

(ii) $u_1 \approx u_2$[8] e $c_1 \leq c_2$ (dado que $u_1 = u_2$).

Dado que $u_1 \approx u_2$, a hipótese $u_1 = u_2$ é somente uma normalização dos dois índices de utilidade. Portanto, a proposição acima diz que relações de preferências mais avessas à ambiguidade são caracterizadas, após uma normalização, por funções c menores. Dessa forma, a função c pode ser interpretada como um *índice de aversão à ambiguidade*.

O nosso teorema é levemente diferente do enunciado originalmente em MMR. O resultado desses autores não depende do axioma Unboundedness. Ao invés disso, somente a seguinte condição mais fraca é imposta.

Axioma 12 (Não degeneração)**.** *Existem atos f e g tais que $f \succ g$.*

Os autores trabalham, assim, com a seguinte relação.

Definição. Uma relação $\succsim$ em $\mathcal{F}$ é chamada *variacional* se satisfaz os axiomas 2 (Transitividade), 4-7 (Continuidade, Monotonicidade, Aversão à Incerteza e Reflexividade), 10 (Weak Certainty-Independence) e 12.

[8] $u_1 \approx u_2$ denota que existe $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $u_2 = \alpha u_1 + \beta$.

Note que a única diferença entre as preferências variacional e GS consiste no axioma relativo à independência. Como há menos exigências para a preferência variacional, podemos considerá-la como uma generalização da preferência GS.

O teorema original enunciado por MMR pode ser escrito da seguinte forma.

Teorema 4 (MMR). *Seja $\succsim$ uma relação binária em $\mathcal{F}$. As seguintes condições são equivalentes.*

(i) $\succsim$ é variacional;

(ii) existe uma função não constante afim $u : X \to \mathbb{R}$ e uma função grounded, convexa e semicontínua inferior $c : \Delta \to [0, \infty]$ tal que, para todo $f, g \in \mathcal{F}$

$$f \succsim g \iff \min_{p \in \Delta} \left(\int u(f) dp + c(p) \right) \geq \min_{p \in \Delta} \left(\int u(g) dp + c(p) \right). \tag{2}$$

Além disto, para cada u existe uma função minimal[9] $c^* : \Delta \to [0, \infty]$ satisfazendo a representação acima, dada por

$$c^*(p) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \left(u(x_f) - \int u(f) dp \right).$$

Observe as diferenças entre os teoremas 3 e 4. Além da distinção no primeiro item, note que não há garantia de unicidade da função c e de sobrejetividade da função u no Teorema 4. A seguinte versão mais fraca do axioma Unboundedness é utilizada pelos autores para demonstrar a unicidade da função c e a ilimitação da imagem de u.

Axioma (Unboundedness MMR). *Existem $x \succ y$ em X tais que, para todo $\alpha \in (0, 1)$, existe $z \in X$ que satisfaz $y \succ \alpha z + (1 - \alpha)x$ ou $\alpha z + (1 - \alpha) \succ x$.*

4.2 Representação Bewley-variacional

Considere os seguintes axiomas adicionais.

Axioma 13 (Transitividade Inequívoca). *Suponha que $f \succsim g$. Se $h(s) \succsim f(s)$ para todo s, então $h \succsim g$. Também, se $g(s) \succsim h(s)$ para todo s, então $f \succsim h$.*

Axioma 14 (Independência Dominante). *Para todo $f, g, h_1, h_2 \in \mathcal{F}$ e $\alpha \in (0, 1)$, se $f \succsim g$ e $h_1 \succsim h_2$, então $\alpha f + (1 - \alpha) h_1 \succsim \alpha g + (1 - \alpha) h_2$.*

Para visualizar o axioma de transitividade inequívoca intuitivamente, suponha que $f \succsim g$. Isso implica que, apesar da situação de ambiguidade, o agente consegue afirmar

[9] Isto é, se c satisfaz (2), então não pode acontecer $c < c^*$.

que f é preferível a g. Além disso, suponha que $g(s) \succsim h(s)$ para todo $s \in S$, isto é, o ato g domina o ato h além da incerteza e, assim, as consequências recebidas pelo ato g são preferíveis às recebidas pelo ato h em função somente dos *gostos* do agente. Assim, esse axioma indica transitividade no seguinte sentido: se $f \succsim g$ e g é preferível a h independentemente da incerteza envolvida na situação, então $f \succsim h$.

Pelo axioma de independência dominante, caso haja preferências entre dois pares de alternativas, então a mistura dos elementos preferidos é melhor que a mistura dos elementos restantes. Este axioma é equivalente a dizer que a preferência $\succsim$ é um subconjunto convexo de $\mathcal{F}^2$, isto é, para todo $\alpha \in (0,1)$,

$$\text{se } (f,g) \in \succsim \text{ e } (h_1,h_2) \in \succsim, \text{ então } \alpha(f,g) + (1-\alpha)(h_1,h_2) \in \succsim.$$

Definição. Uma relação $\succsim$ em $\mathcal{F}$ é chamada de Bewley-variacional se satisfaz os axiomas 4 (Continuidade), 7-8 (Reflexividade e C-completeza), 11 (Unboundedness) e 13-14.

Teorema 5 (Faro, 2012)**.** *Seja $\succsim$ uma relação binária sobre $\mathcal{F}$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *$\succsim$ é Bewley-variacional;*

(ii) *existe uma função afim $u : X \to \mathbb{R}$, com $u(X) = \mathbb{R}$, e uma única função grounded, convexa e semicontínua inferior $c : \Delta \to [0,\infty]$ tais que, para todo $f, g \in \mathcal{F}$,*

$$f \succsim g \iff \int u(f)dp + c(p) \geq \int u(g)dp \;\; \forall p \in \Delta.$$

A representação acima é muito similar à representação Bewley, uma vez que também conta com a regra da unanimidade. Além disso, assim como na representação variacional, o agente considera todas as priors possíveis ao ranquear suas alternativas. Por fim, um novo componente é introduzido: a função c, que, diferentemente do índice de ambiguidade na representação anterior, só se encontra de um lado da desigualdade.

O valor $c(p)$ representa a *importância que o agente atribui à prior p*. Se $c(p) \leq c(q)$, então o agente atribui mais importância à prior p que a q. Para visualizar isso mais facilmente, suponha que $0 > \int (u(f) - u(g))dp \geq -c(p)$ para um par de atos f e g e uma prior p. Dada a representação descrita no teorema, a condição anterior indica que, considerando-se a prior p, apesar da escolha f gerar perda de utilidade esperada quando comparada à escolha g, ainda assim essa perda de utilidade esperada não é menor do que o valor $-c(p)$. Assim, de acordo com a prior p, f é preferível a g. Note que, à medida que o valor de $c(p)$ aumenta (isto é, à medida que o agente atribui menos valor à prior p), o tomador de decisão exige que a perda de utilidade esperada da escolha de f em relação a g seja maior para que deixe de considerar f preferível a g segundo a prior p. Por fim, é verdade que $\int(u(f) - u(g))dp \geq -\infty$ para todos atos f e g, de forma que priors que assumem valor infinito sob c podem ser interpretadas como se fossem descartadas pelo agente. Por outro lado, priors que assumem valor 0 sob c são interpretadas como aquelas que o agente considera mais plausíveis.

4.3 Demonstrações

Prova do Teorema 3

Para demonstrar que *(i)* implica em *(ii)*, utilizaremos os seguintes lemas.

Lema 4. *Suponha que $\succsim$ seja completa, transitiva, contínua e satisfaça aversão à incerteza. Para quaisquer $f, g, h \in \mathcal{F}$ tais que $f \succsim h$ e $g \succsim h$, é verdade que $\alpha f + (1-\alpha)g \succsim h$ para todo $\alpha \in (0, 1)$.*

Demonstração. [10] Sejam $f, g, h \in \mathcal{F}$ tais que $f \succsim h$ e $g \succsim h$. Por completeza de $\succsim$, ou $f \succsim g$ ou $g \succsim f$. Caso ambos ocorram, temos que $\alpha f + (1 - \alpha)g \succsim h$ para todo $\alpha \in (0, 1)$ pelo axioma de Aversão à Incerteza. Assim, sem perda de generalidade, é suficiente demonstrar que $f \succ g$ implica que $\alpha f + (1 - \alpha)g \succsim g$ para todo $\alpha \in (0, 1)$. Suponha por contradição que $f \succ g$ e existe $\bar{\alpha} \in (0, 1)$ tal que $\bar{\alpha} f + (1 - \bar{\alpha})g \prec g$. Então $\bar{\alpha} \in \{\alpha \in [0, 1] : g \succsim \alpha f + (1 - \alpha)g\} \neq \emptyset$ e, por continuidade de $\succsim$, esse conjunto é compacto. Assim, tome $\beta = \max(\{\alpha \in [0, 1] : g \succsim \alpha f + (1 - \alpha)g\})$ e defina $f_\beta := \beta f + (1 - \beta)g$.

Queremos mostrar que $f_\beta \sim g$. Se $\beta = 1$, segue que $g \succsim f$, uma contradição. Portanto, devemos ter $\beta < 1$. Suponha que $f_\beta \not\sim g$, isso é, $g \succ f_\beta$. O conjunto $\{\alpha \in [0, 1] : g \succ \alpha f + (1 - \alpha)g\}$ é aberto, já que seu complemento é fechado por continuidade de $\succsim$. Assim, existe um conjunto aberto V em $[0, 1]$ que contém β e está contido em $\{\alpha \in [0, 1] : g \succ \alpha f + (1 - \alpha)g\}$. Como $\beta < 1$, podemos tomar $\beta' > \beta$ em V de forma que $g \succ \beta' f + (1 - \beta')g$, o que contradiz a maximalidade de β. Concluímos que $f_\beta \sim g$.

Pelo parágrafo acima e pelo axioma de Aversão à Incerteza, temos que $\lambda f_\beta + (1 - \lambda)g \succsim g$ para todo $\lambda \in (0, 1)$. Como $0 < \bar{\alpha} < \beta$, é verdade que $\frac{\bar{\alpha}}{\beta} \in (0, 1)$. Assim, $g \precsim \frac{\bar{\alpha}}{\beta}(\beta f + (1 - \beta)g) + (1 - \frac{\bar{\alpha}}{\beta})g = \bar{\alpha} f + \frac{\bar{\alpha}}{\beta} g - \bar{\alpha} g + g - \frac{\bar{\alpha}}{\beta} g = \bar{\alpha} f + (1 - \bar{\alpha})g \prec g$, uma contradição. Concluímos que $\alpha f + (1 - \alpha)g \succsim g$ para todo $\alpha \in (0, 1)$. □

Corolário 1. *A preferência $\succsim$ variacional ilimitada é convexa. Isto é, para todos atos f e g tais que $f \succsim g$, é verdade que $\alpha f + (1 - \alpha)g \succsim g$ para todo $\alpha \in (0, 1)$.*

[10] A demonstração a seguir é baseada na prova do Lema 56 de Cerreia-Vioglio, Maccheroni, Marinnaci e Montrucchio (2011).

Lema 5. *Seja* $\succsim$ *uma preferência variacional ilimitada. Para todo* $f \in \mathcal{F}$ *e* $x \in X$ *tais que* $f \succsim x$*, temos que* $\alpha f + (1-\alpha)y \succsim \alpha x + (1-\alpha)y$ *para todo* $\alpha \in (0,1)$ *e ato constante* y*.*

Demonstração. Tome f e x tais que $f \succsim x$. Pelo Corolário 1, temos que $\alpha f + (1-\alpha)x \succsim x = \alpha x + (1-\alpha)x$ para todo $\alpha \in (0,1)$. Por Weak Certainty-Independence, $\alpha f + (1-\alpha)y \succsim \alpha x + (1-\alpha)y$ para todo $\alpha \in (0,1)$ e ato constante y. $\square$

O Lema 5 implica que a preferência variacional ilimitada $\succsim$ restrita ao espaço de consequências, denotada por $\succsim|_{X\times X}$, satisfaz a seguinte versão de independência: para todo $x, y \in X$ tal que $x \succsim y$, temos $\alpha x + (1-\alpha)z \succsim \alpha y + (1-\alpha)z$ para todo $z \in X$ e $\alpha \in (0,1)$. Além disso, $\succsim|_{X\times X}$ claramente satisfaz completude, transitividade e continuidade. Assim, pelo Teorema de von Neumann-Morgenstern (1944), existe $u : X \to \mathbb{R}$ afim que representa $\succsim|_{X\times X}$.

Lema 6. *Se* $\succsim$ *é uma preferência variacional ilimitada e* $u : X \to \mathbb{R}$ *é uma função afim que representa* $\succsim|_{X\times X}$*, então* $u(X) = \mathbb{R}$*.*

Demonstração. Sejam $x \succ y$ descritos no axioma de Unboundedness. Tome $r \in \mathbb{R}$ qualquer. Suponha que $u(x) < r$. Tome a sequência real $(\frac{1}{m})_{m\in\mathbb{N}}$ e note que, por Unboundedness, para todo m, existe $z_m \in X$ tal que $\frac{1}{m}u(z_m) + (1-\frac{1}{m})u(y) > u(x)$. Mas isso implica que $u(z_m) > m(u(x) - u(y)) + u(y)$ para todo m. Como $u(x) > u(y)$, concluímos que $u(z_m) \to \infty$. Assim, existe $\bar{m} \in \mathbb{N}$ tal que $u(z_{\bar{m}}) > r$. Agora note que existe $\alpha \in (0,1)$ tal que $r = \alpha u(z_{\bar{m}}) + (1-\alpha)u(x) = u(\alpha z_{\bar{m}} + (1-\alpha)x)$, onde usamos a afinidade de u na última igualdade. Como X é convexo, $\alpha z_{\bar{m}} + (1-\alpha)x \in X$. Por outro lado, caso $u(y) < r < u(x)$, existe $\alpha \in (0,1)$ tal que $r = \alpha u(x) + (1-\alpha)u(y) = u(\alpha x + (1-\alpha)y)$. Novamente, $\alpha x + (1-\alpha)y \in X$. Por fim, caso $r < u(x)$, um argumento simétrico ao utilizado no primeiro caso garante que existe $z \in X$ tal que $u(z) = r$. $\square$

A relação definida a seguir será de grande utilidade.

Definição. Seja $\succsim$ uma preferência variacional ilimitada. Defina $\succsim^*$ em $\mathcal{F}$ por $f \succsim^* g$ se, e somente se, existem $h \in \mathcal{F}$ e $x \in X$ tais que $h \succsim x$ e $\frac{1}{2}f(s) + \frac{1}{2}x \sim \frac{1}{2}g(s) + \frac{1}{2}h(s)$ para todo $s \in S$.

Sempre que escrevermos $\succsim^*$, também estaremos considerando a preferência variacional ilimitada $\succsim$ a partir da qual $\succsim^*$ foi definida.

Afirmação 2. *Sejam* f *e* g *atos tais que* $f \succsim^* g$*. Se* $\bar{h} \in \mathcal{F}$ *e* $\bar{x} \in X$ *são tais que* $\alpha f(s) + (1-\alpha)\bar{x} \sim \alpha g(s) + (1-\alpha)\bar{h}(s)$ *para todo* $s \in S$ *e algum* $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$*, então* $\bar{h} \succsim \bar{x}$*.*

Demonstração. Sejam $f, g \in \mathcal{F}$ tais que $f \succsim^* g$. Assim, existem $h \in \mathcal{F}$ e $x \in X$ tais que $h \succsim x$ e $\frac{1}{2}f(s) + \frac{1}{2}x \sim \frac{1}{2}g(s) + \frac{1}{2}h(s)$ para todo $s \in S$. Além disso, fixe $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ e sejam $\bar{h} \in \mathcal{F}$ e $\bar{x} \in X$ tais que $\alpha f(s) + (1-\alpha)\bar{x} \sim \alpha g(s) + (1-\alpha)\bar{h}(s)$ para todo $s \in S$. Pelo Lema 6, existe $z \in X$ tal que $\frac{\alpha}{1-\alpha}x + \left(1 - \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)z \sim \bar{x}$. Pelo Lema 5, $h \succsim x$ implica que $\frac{\alpha}{1-\alpha}h + \left(1 - \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)z \succsim \frac{\alpha}{1-\alpha}x + \left(1 - \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)z$. Note que, pela representação de $\succsim|_{X\times X}$, para todo $s \in S$,

$$\frac{1}{2}f(s) + \frac{1}{2}x \sim \frac{1}{2}g(s) + \frac{1}{2}h(s)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$2\alpha\left(\frac{1}{2}f(s) + \frac{1}{2}x\right) + (1-2\alpha)z \sim 2\alpha\left(\frac{1}{2}g(s) + \frac{1}{2}h(s)\right) + (1-2\alpha)z$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\alpha f(s) + (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}x + \left(1 - \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)z\right) \sim \alpha g(s) + (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}h(s) + \left(1 - \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)z\right).$$

Como $\frac{\alpha}{1-\alpha}x + \left(1 - \frac{\alpha}{1-\alpha}z\right) \sim \bar{x}$, a última linha implica que, para todo $s \in S$,

$$\alpha g(s) + (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}h(s) + \left(1 - \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)z\right) \sim \alpha f(s) + (1-\alpha)\bar{x} \sim \alpha g(s) + (1-\alpha)\bar{h}(s).$$

Pela representação de $\succsim|_{X\times X}$, temos que

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}h(s) + \left(1 - \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)z \sim \bar{h}(s).$$

Por fim, por monotonicidade de $\succsim$,

$$\begin{aligned} \bar{h} &\sim \frac{\alpha}{1-\alpha}h + \left(1 - \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)z \\ &\succsim \frac{\alpha}{1-\alpha}x + \left(1 - \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)z \\ &\sim \bar{x}. \end{aligned}$$

□

Lema 7. *Para quaisquer atos f e g, $f \succsim^* g$ implica que $h \succsim x$ para todo $h \in \mathcal{F}$ e $x \in X$ tais que $\frac{1}{2}f(s) + \frac{1}{2}x \sim \frac{1}{2}g(s) + \frac{1}{2}h(s)$ para todo $s \in S$.*

Demonstração. Sejam f e g atos tais que $f \succsim^* g$. Tome $h \in \mathcal{F}$ e $x \in X$ tais que $\frac{1}{2}f(s) + \frac{1}{2}x \sim \frac{1}{2}g(s) + \frac{1}{2}h(s)$ para todo $s \in S$. Note que, pela representação de $\succsim$ restrita a atos constantes, para todo $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ e $s \in S$,

$$\frac{1}{2}f(s) + \frac{1}{2}x \sim \frac{1}{2}g(s) + \frac{1}{2}h(s)$$
$$\iff$$
$$\alpha f(s) + \alpha x + (1-2\alpha)x \sim \alpha g(s) + \alpha h(s) + (1-2\alpha)x$$
$$\iff$$
$$\alpha f(s) + (1-\alpha)x \sim \alpha g(s) + (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}h(s) + \left(1 - \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)x\right).$$

Pela afirmação anterior, temos que $\frac{\alpha}{1-\alpha}h + \left(1 - \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)x \succsim x$ para todo $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$. Por continuidade de $\succsim$, concluímos que $h \succsim x$. □

Afirmação 3. *Para todo $f \in \mathcal{F}$ e $x \in X$, $f \succsim^* x$ se, e somente se, $f \succsim x$.*

Demonstração. Fixe $f \in \mathcal{F}$ e $x \in X$. Como $\frac{1}{2}f(s) + \frac{1}{2}x \sim \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}f(s)$ para todo $s \in S$, pela definição de $\succsim^*$, é claro que $f \succsim x$ implica que $f \succsim^* x$. Por outro lado, se $f \succsim^* x$, então, pelo Lema 7, $f \succsim x$. □

Afirmação 4. *A preferência $\succsim^*$ é Bewley-variacional.*

Demonstração. (Reflexividade) Tome qualquer $x \in X$ e note que $x \succsim x$ e, para todo $f \in \mathcal{F}$, $\frac{1}{2}f(s) + \frac{1}{2}x \sim \frac{1}{2}f(s) + \frac{1}{2}x$ para todo $s \in S$. Concluímos que $f \succsim^* f$ para todo $f \in \mathcal{F}$.

(C-completeza) Tome $x, y \in X$. Por completeza de $\succsim$, temos que $x \succsim y$ ou $y \succsim x$. Como $\succsim^*$ e $\succsim$ coincidem para atos constantes, concluímos que $x \succsim^* y$ ou $y \succsim^* x$.

(Transitividade Inequívoca) Sejam $f, g, h \in \mathcal{F}$ tais que $f \succsim^* g$ e $h(s) \succsim^* f(s)$ para todo $s \in S$. Como as duas relações concordam para atos constantes, $h(s) \succsim f(s)$ para todo $s \in S$. Por independência de $\succsim|_{X\times X}$, $\frac{1}{2}h(s) + \frac{1}{2}x \succsim \frac{1}{2}f(s) + \frac{1}{2}x$ para todo $s \in S$. Além disso, por definição, existem $\xi \in \mathcal{F}$ e $x \in X$ tais que $\xi \succsim x$ e $\frac{1}{2}f(s) + \frac{1}{2}x \sim \frac{1}{2}g(s) + \frac{1}{2}\xi(s)$ para todo $s \in S$. Utilizando o Lema 6, tome $\hat{\xi} \in \mathcal{F}$ tal que $\frac{1}{2}h(s) + \frac{1}{2}x \sim \frac{1}{2}g(s) + \frac{1}{2}\hat{\xi}(s)$ para todo $s \in S$. Por transitividade de $\succsim$, sabemos que $\frac{1}{2}g(s) + \frac{1}{2}\hat{\xi}(s) \succsim \frac{1}{2}g(s) + \frac{1}{2}\xi(s)$ para todo $s \in S$. Pela representação de $\succsim|_{X\times X}$, temos que $\hat{\xi}(s) \succsim \xi(s)$ para todo $s \in S$. Por monotonicidade de $\succsim$, é verdade que $\hat{\xi} \succsim \xi \succsim x$. Concluímos que $h \succsim^* g$. A demonstração para o caso em que $f \succsim^* g$ e $g(s) \succsim^* h(s)$ para todo $s \in S$ é similar.

(Independência Dominante) Tome $f, g, h_1, h_2 \in \mathcal{F}$ tais que $f \succsim^* g$ e $h_1 \succsim^* h_2$. Assim, existem $\xi_1 \in \mathcal{F}$ e $x \in X$ tais que $\xi_1 \succsim x$ e $\frac{1}{2}f(s) + \frac{1}{2}x \sim \frac{1}{2}g(s) + \frac{1}{2}\xi_1(s)$ para todo $s \in S$. Utilizando o Lema 6, tome $\xi_2 \in \mathcal{F}$ tal que $\frac{1}{2}h_1(s) + \frac{1}{2}x \sim \frac{1}{2}h_2(s) + \frac{1}{2}\xi_2(s)$ para todo $s \in S$. Pelo Lema 7, temos que $\xi_2 \succsim x$. Pela representação de $\succsim$ restrita ao espaço de atos constantes, isto implica que, para qualquer $\alpha \in (0,1)$,

$$\frac{1}{2}\left(\alpha f(s) + (1-\alpha)h_1(s)\right) + \frac{1}{2}x \sim \frac{1}{2}\left(\alpha g(s) + (1-\alpha)h_2(s)\right) + \frac{1}{2}\left(\alpha \xi_1(s) + (1-\alpha)\xi_2(s)\right)$$

para todo $s \in S$. Além disto, como $\succsim$ satisfaz convexidade, temos que $\alpha\xi_1 + (1-\alpha)\xi_2 \succsim \xi_1, \xi_2 \succsim x$. Concluímos que $\alpha f + (1-\alpha)h_1 \succsim^* \alpha g + (1-\alpha)h_2$ para todo $\alpha \in (0,1)$.

(Continuidade) Sejam $f, g, h \in \mathcal{F}$ e sequência α^m em $[0,1]$ tal que $\alpha^m \to \bar{\alpha}$ e $\alpha^m f + (1-\alpha^m)g \succsim^* h$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Fixe $x \in X$ e, utilizando o Lema 6, tome atos $\hat{f}$ e $\hat{g}$ tais que

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}f(s) + \frac{1}{2}x \sim \frac{1}{2}h(s) + \frac{1}{2}\hat{f}(s) \text{ para todo } s \in S \\ \text{e} \\ \frac{1}{2}g(s) + \frac{1}{2}x \sim \frac{1}{2}h(s) + \frac{1}{2}\hat{g}(s) \text{ para todo } s \in S. \end{gathered} \tag{3}$$

Pela representação de $\succsim|_{X \times X}$, isto implica que

$$\frac{1}{2}\left(\alpha^m f(s) + (1-\alpha^m)g(s)\right) + \frac{1}{2}x \sim \frac{1}{2}h(s) + \frac{1}{2}\left(\alpha^m \hat{f}(s) + (1-\alpha^m)\hat{g}(s)\right)$$

para todo $s \in S$ e $m \in \mathbb{N}$. Como $\alpha^m f + (1-\alpha^m)g \succsim^* h$ para todo $m \in \mathbb{N}$, pelo Lema 7 temos que

$$\alpha^m \hat{f} + (1-\alpha^m)\hat{g} \succsim x \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Por continuidade de $\succsim$, isto implica que

$$\bar{\alpha}\hat{f} + (1-\bar{\alpha})\hat{g} \succsim x.$$

Novamente, por (3) e pela representação de $\succsim|_{X \times X}$, sabemos que

$$\frac{1}{2}\left(\bar{\alpha} f(s) + (1-\bar{\alpha})g(s)\right) + \frac{1}{2}x \sim \frac{1}{2}h(s) + \frac{1}{2}\left(\bar{\alpha}\hat{f}(s) + (1-\bar{\alpha})\hat{g}(s)\right)$$

para todo $s \in S$. Mas, por definição, isto quer dizer exatamente que $\bar{\alpha} f + (1-\bar{\alpha})g \succsim^* h$. A demonstração para o outro conjunto é similar.

(Unboundedness) Segue de Unboundedness de $\succsim$ e pelo fato de que as duas preferências coincidem para atos constantes. $\square$

Pelo Teorema 5, sabemos que existe uma função afim, $u : X \to \mathbb{R}$, com $u(X) = \mathbb{R}$, e uma função grounded, convexa e semicontínua inferior $c : \Delta \to [0, \infty]$ tais que, para todo $f, g \in \mathcal{F}$,

$$f \succsim^* g \iff \int u(f)dp + c(p) \geq \int u(g)dp \;\; \forall p \in \Delta.$$

Pela Afirmação 3, $\succsim$ e $\succsim^*$ coincidem para atos constantes, portanto,

$$x \succsim y \iff x \succsim^* y \iff u(x) + c(p) \geq u(y) \;\; \forall p \in \Delta \iff u(x) \geq u(y),$$

onde utilizamos groundedness de c na terceira implicação dupla. Pelo Lema 1, todo ato f possui um equivalente de certeza x_f tal que $f \sim x_f$. Assim, para todos atos f e g,

$$f \succsim g \iff x_f \succsim x_g \iff u(x_f) \geq u(x_g).$$

Novamente pela Afirmação 3, $f \succsim^* x_f$. Assim,

$$\int u(f)dp + c(p) \geq u(x_f) \;\; \forall p \in \Delta \iff \min_{p \in \Delta} u(f)dp + c(p) \geq u(x_f).$$

Suponha que $\min_{p\in\Delta} u(f)dp + c(p) > u(x_f)$. Como $u(X) = \mathbb{R}$, tome $y \in X$ tal que $\min_{p\in\Delta} u(f)dp + c(p) > u(y) > u(x_f)$. Mas isso implica que $y \succ x_f$ e $f \succsim^* y$. Pela Afirmação 3 e por transitividade de $\succsim$, $f \succ x_f$, uma contradição. Concluímos que $u(x_f) = \min_{p\in\Delta} u(f)dp + c(p)$. Portanto,

$$f \succsim g \iff \min_{p \in \Delta} \int u(f)dp + c(p) \geq \min_{p \in \Delta} \int u(g)dp + c(p)$$

para todos os atos f e g.

Em seguida demonstraremos que *(ii)* implica em *(i)*.

(Reflexividade e transitividade) Seguem por reflexividade e transitividade de $\geq$.

(Weak Certainty-Independence) Sejam $f, g, \in \mathcal{F}$, $x \in X$ e $\alpha \in (0,1)$ tais que $\alpha f + (1-\alpha)x \succsim \alpha g + (1-\alpha)x$. Tome $\hat{p} \in \arg\min_{p\in\Delta}(\int \alpha u(f) + (1-\alpha)u(x)dp + c(p))$ e

$\tilde{p} \in \arg\min_{p\in\Delta}(\int \alpha u(g) + (1-\alpha)u(x)dp + c(p))$. Assim, por afinidade de u,

$$\alpha \int u(f)d\hat{p} + (1-\alpha)u(x) + c(\hat{p}) \geq \alpha \int u(g)d\tilde{p} + (1-\alpha)u(x) + c(\tilde{p})$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\alpha \int u(f)d\hat{p} + (1-\alpha)u(y) + c(\hat{p}) \geq \alpha \int u(g)d\tilde{p} + (1-\alpha)u(y) + c(\tilde{p})$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\min_{p\in\Delta}\left(\int \alpha u(f) + (1-\alpha)u(y)dp + c(p)\right) \geq \min_{p\in\Delta}\left(\int \alpha u(g) + (1-\alpha)u(y)dp + c(p)\right)$$

para qualquer $y \in X$. Concluímos que $\alpha f + (1-\alpha)y \succsim \alpha g + (1-\alpha)y$ para qualquer ato constante y.

(Continuidade) Sejam $f, g, h \in \mathcal{F}$. Tome sequência α^m em $[0,1]$ tal que $\alpha^m \to \bar{\alpha}$ e $\alpha^m f + (1-\alpha^m)g \succsim h$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Assim, para todo m,

$$\min_{p\in\Delta}\left(\alpha^m \int u(f)dp + (1-\alpha^m)\int u(g)dp + c(p)\right) \geq \min_{p'\in\Delta}\left(\int u(h)dp' + c(p')\right) =: k$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\alpha^m \int u(f)dp + (1-\alpha^m)\int u(g)dp + c(p) \geq k \ \ \forall p \in \Delta$$

$$\Longrightarrow$$

$$\bar{\alpha}\int u(f)dp + (1-\bar{\alpha})\int u(g)dp + c(p) \geq k \ \ \forall p \in \Delta.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\min_{p\in\Delta}\left(\int \left(u(\bar{\alpha}f + (1-\bar{\alpha})h\right)dp + c(p)\right) \geq \min_{p\in\Delta}\left(\int u(h)dp + c(p)\right).$$

Portanto, $\bar{\alpha}f + (1-\bar{\alpha})g \succsim h$. Concluímos que o conjunto $\{\alpha \in [0,1] : \alpha f + (1-\alpha)g \succsim h\}$ é fechado. Agora suponha que $\alpha^m f + (1-\alpha^m)g \precsim h$ para todo $m \in \mathbb{N}$, isto é,

$$\min_{p\in\Delta}\left(\alpha^m \int u(f)dp + (1-\alpha^m)\int u(g)dp + c(p)\right) \leq \min_{p\in\Delta}\left(\int u(h)dp + c(p)\right) =: k$$

para todo m. Suponha por contradição que $\min_{p\in\Delta}(\bar{\alpha}\int u(f)dp + (1-\bar{\alpha})\int u(g)dp + c(p)) > k$. Defina $\delta := \min_{p\in\Delta}(\bar{\alpha}\int u(f)dp + (1-\bar{\alpha})\int u(g)dp + c(p)) - k > 0$. Note que $\alpha^m u(f(s)) + (1-\alpha^m)u(g(s)) \to \bar{\alpha}u(f(s)) + (1-\bar{\alpha})u(g(s))$ para todo $s \in S$. Como os atos f e g são simples, existe $\bar{m} \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m \geq \bar{m}$ e $s \in S$,

$$|\alpha^m u(f(s)) + (1-\alpha^m)u(g(s)) - (\bar{\alpha}u(f(s)) + (1-\bar{\alpha})u(g(s)))| < \frac{\delta}{2}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\left|\alpha^m \int u(f)dp + (1-\alpha^m)\int u(g)dp - \left(\bar{\alpha}\int u(f)dp + (1-\bar{\alpha})\int u(g)dp\right)\right| < \frac{\delta}{2} \ \ \forall p \in \Delta$$

$$\Longrightarrow$$

$$\alpha^m \int u(f)dp + (1-\alpha^m)\int u(g)dp - \left(\bar{\alpha}\int u(f)dp + (1-\bar{\alpha})\int u(g)dp\right) > -\frac{\delta}{2} \ \ \forall p \in \Delta$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\alpha^m \int u(f)dp + (1-\alpha^m)\int u(g)dp + c(p) > k + \frac{\delta}{2} \ \ \forall p \in \Delta.$$

Mas então $\min_{p\in\Delta}(\alpha^m \int u(f)dp + (1-\alpha^m)\int u(g)dp + c(p)) > k + \frac{\delta}{2}$, o que é uma contradição. Concluímos que $\min_{p\in\Delta}(\bar{\alpha}\int u(f)dp + (1-\bar{\alpha})\int u(g)dp + c(p)) \leq k$. Portanto, o conjunto $\{\alpha \in [0,1] : h \succsim \alpha f + (1-\alpha)g\}$ é fechado.

(Monotonicidade) Sejam f e g atos tais que $f(s) \succsim g(s)$ para todo $s \in S$. Isso implica que $u(f(s)) \geq u(g(s))$ para todo s. Assim, $\int u(f)dp \geq \int u(g)dp$ para todo $p \in \Delta$. Finalmente, isto implica que $\min_{p\in\Delta}(\int u(f)dp + c(p)) \geq \min_{p\in\Delta}(\int u(g)dp + c(p))$, isto é, $f \succsim g$.

(Aversão à Incerteza) Tome atos f e g tais que $f \sim g$, isto é, $\min_{p\in\Delta}(\int u(f)dp + c(p)) = \min_{p\in\Delta}(\int u(g)dp + c(p))$. Tome $\hat{p} \in \arg\min_{p\in\Delta}(\int u(\alpha f + (1-\alpha)g dp + c(p))$ e note que, para todo $\alpha \in (0,1)$,

$$\begin{aligned}
\int (u(\alpha f + (1-\alpha)g)\, d\hat{p} + c(\hat{p}) &= \alpha\left(\int u(f)d\hat{p} + c(\hat{p})\right) + (1-\alpha)\left(\int u(g)d\hat{p} + c(\hat{p})\right) \\
&\geq \alpha \min_{p\in\Delta}\left(\int u(f)dp + c(p)\right) + (1-\alpha)\min_{p\in\Delta}\left(\int u(g) + c(p)\right) \\
&= \min_{p\in\Delta}\left(\int u(f)dp + c(p)\right).
\end{aligned}$$

Concluímos que $\alpha f + (1-\alpha)g \succsim f$ para todo $\alpha \in (0,1)$.

(Unboundedness) Segue por $u(X) = \mathbb{R}$.

5 Conclusão

Nesta dissertação desenvolvemos uma demonstração alternativa de parte do Teorema de Representação de Preferências Variacionais de Maccheroni, Marinacci e Rustichini (2006). Para isso, utilizamos a representação das preferências Bewley-variacionais, resultado obtido por Faro (2012). Analogamente, demonstramos o Teorema de Representação de Preferências Maxmin, de Gilboa e Schmeidler (1989), aplicando a representação de preferências Bewley, resultado obtido por Bewley (1986). Desta forma, além de contribuir com duas novas demonstrações, esta dissertação formaliza duas relações: a relação entre as preferências variacionais e as Bewley-variacionais e, por outro lado, a relação entre as preferências maxmin e as Bewley.

No entanto, demonstramos somente parte do principal resultado de Maccheroni, Marinacci e Rustichini (2006) ao nos utilizarmos de uma versão mais forte de um de seus axiomas. A razão disso se dá uma vez que a ferramenta que utilizamos, o Teorema de Representação de Preferências Bewley-variacionais, requer a validade de tal axioma.

Dessa forma, uma extensão deste trabalho é a investigação acerca da demonstração alternativa completa do Teorema de Representação de Preferências Variacionais, ainda utilizando sua relação com as preferências Bewley-variacionais. Uma possível opção seria buscar produzir um Teorema de Representação de Preferências Bewley-variacionais modificado, substituindo o axioma de Unboundedness por outro axioma que a relação induzida definida a partir da preferência Variacional respeite.

Referências

ANSCOMBE, F. J. e AUMANN, R. J. A Definition of Subjective Probability. Annals of Mathematical Statistics, vol. 34, 199-205, 1963.

BEWLEY, T. Knightian Decision Theory: Part I. Decisions Econom. Finance, 25, 79-110, 2002. (Primeira versão: 1986).

DUBRA, J., MACCHERONI, F., OK, E. A. Expected Utility Theory Without the Completeness Axiom. Journal of Economic Theory, vol. 115, 118-133, 2004.

CERREIA-VIOGLIO, S., MACCHERONI, F., MARINACCI, M. e MONTRUCCHIO, L. Uncertainty Averse Preferences. Journal of Economic Theory, vol. 146(4), 1275-1330, 2011.

ELLSBERG, D. Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms. The Quaterly Journal of Economics, vol. 75(4), 643-669, 1961.

FARO, J. H. Variational Bewley Preferences. *mimeo*, Insper, 2012.

GHIRARDATO, P. e MARINACCI, M. Ambiguity Made Precise: A Comparative Foundation. Journal of Economic Theory, vol. 102(2), 251-289, 2002.

GILBOA, I., MACCHERONI, F., MARINACCI, M. e SCHMEIDLER, D. Objective and Subjective Rationality in a Multiple Prior Model. Econometrica, 78, 755-770.

GILBOA, I. e SCHMEIDLER, D. Maxmin Expected Utility with Non-Unique Prior. Journal of Mathematical Economics, vol. 18(2), 141-153, 1989.

KNIGHT, F. H. Risk, Uncertainty, and Profit. Boston, MA: Hart, Schaffner & Marx; Houghton Mifflin Company, 1921.

MACCHERONI, F., MARINACCI, M. e RUSTICHINI, A. Ambiguity Aversion, Robustness, and the Variational Representation of Preferences. Econometrica, Econometric Society, vol. 74(6), 1447-1498, 2006.

SAVAGE, L. J. The Foundations of Statistics. New York: Wiley, 1954.

VON NEUMANN, J. e MORGENSTERN, O. Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press, 1944.