



**UnB**



**UFPB**



**UFPE**



**UFRN**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA – UnB**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA – UFPB**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO – UFPE**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE - UFRN**

Programa Multiinstitucional e Inter-regional de  
Pós-Graduação em Ciências Contábeis

**MÁRCIA ATHAYDE MATIAS**

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DE PREÇOS DA *COMMODITY* COBRE: uma  
abordagem sob a ótica da teoria dos fractais**

Brasília  
2006

**MÁRCIA ATHAYDE MATIAS**

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DE PREÇOS DA *COMMODITY* COBRE: uma  
abordagem sob a ótica da teoria dos fractais**

Dissertação apresentada como requisito à obtenção do título de Mestre em Ciências Contábeis do Programa Multiinstitucional e Inter-regional de Pós-Graduação em Ciências Contábeis da Universidade de Brasília, Universidade Federal da Paraíba, Universidade Federal de Pernambuco e Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Orientador: Professor Doutor César Augusto Tibúrcio Silva

Brasília  
2006

**MÁRCIA ATHAYDE MATIAS**

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DE PREÇOS DA *COMMODITY* COBRE: uma  
abordagem sob a ótica da teoria dos fractais**

Dissertação aprovada como requisito à obtenção do título de Mestre em Ciências Contábeis do Programa Multiinstitucional e Inter-regional de Pós-Graduação em Ciências Contábeis da Universidade de Brasília (UnB), Universidade Federal da Paraíba (UFPB), Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) e Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), pela seguinte comissão examinadora:

---

**Prof. Dr. César Augusto Tibúrcio Silva**

Programa Multiinstitucional e Inter-regional de Pós-Graduação em Ciências Contábeis da UnB, UFPB, UFPE e UFRN – Orientador

---

**Prof. Dr. Paulo Roberto Barbosa Lustosa**

Programa Multiinstitucional e Inter-regional de Pós-Graduação em Ciências Contábeis da UnB, UFPB, UFPE e UFRN

---

**Prof. Dr. Hudson Fernandes Amaral**

Universidade Federal de Minas Gerais  
Faculdade de Ciências Econômicas  
Departamento de Ciências Administrativas

Brasília, 23 de agosto de 2006.

## FICHA CATALOGRÁFICA

Matias, Márcia Athayde

Análise do comportamento de preços da commodity cobre: uma abordagem sob a ótica da teoria dos fractais / Márcia Athayde Matias, Brasília: UnB, 2006.

Dissertação – Mestrado  
Bibliografia

1. Teoria dos fractais 2. Análise de comportamento de preços 3. Análise de investimentos 4. *Commodity* cobre.

A Maricina, que tão feliz ficou com a nova empreitada de sua filha mais especial, talvez a maior oportunidade de resgatar antigos créditos perdidos..., e que hoje me vê lá do alto. Meu amor por você é eterno e a saudade, um abismo em meu peito, porque te vejo a cada momento, em meus pensamentos e atitudes, e a cada dia que passa te compreendo melhor.

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus e a Nossa Senhora de Nazaré, por todas as coisas boas que me ocorreram nos últimos anos e que de alguma forma contribuíram para que eu pudesse realizar meu tão sonhado curso de mestrado.

Aos homens da minha vida: Quimico, meu querido marido Paulo Henrique (Pê), Emmanuel, Marcello, Dido, Léo Vieira e Léo Barcelos. Às minhas amigas Márcia Barcelos e Stela Matumato, grandes companheiras de Brasília. She-ra, Tati, Thaís, Tide e Mírian, sempre postas a me ajudar em tudo que precisei.

A todos os meus professores do curso: Prof. Otávio Ribeiro de Medeiros, PhD., Prof. Dr. José Francisco Ribeiro, Prof. Dr. José Matias Pereira, Prof. Dr. Paulo Roberto Barbosa Lustosa, Prof. Edwin Pinto de la Sota Silva, DsC. e Prof. Dr. José Dionísio Gomes da Silva.

Ao Prof. Dr. Jorge Katsumi Niyama, muito mais que um professor, um grande exemplo de dedicação e amor à vida acadêmica.

Agradeço especialmente ao Prof. Dr. César Augusto Tibúrcio Silva, por tanta paciência, desde os primeiros e-mails. Adorei tuas aulas, adorei a experiência de ter sido tua orientanda. A segurança que a tua orientação transmite, o rigor e o amor pela academia, estimula minha caminhada como pesquisadora e profissional.

Agradeço a concessão da minha Bolsa de Estudos CAPES, que muito contribuiu para a realização da pesquisa e conclusão deste curso.

Agradeço aos meus amigos da turma e a Fê: Maria José, Maria Celeste, Maria Lizete, Clésia, Ivone, Léo e C Léo, Ilírio, Moisés, Rubens e Paulo César, acima de qualquer coisa, sobrevivemos, e tenho todos em meu coração.

Aos demais amigos do Departamento e da FACE: Prof<sup>a</sup>. Msc. Beatriz, Luciane, Prof. Msc. Elivânio, Eugênio, Maria Luiza, Rosemary, Vera Lúcia, Simone e Prof. Msc. Cláudio Santana pela paciência e dedicação com que sempre me trataram. Também não poderia deixar de agradecer a Sonária e ao João, do PPGA.

Por último, agradeço a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho, embora não estejam aqui citados. Minha gratidão e amizade.

"O homem é essencialmente autodeterminante, ele se transformou no que fez de si mesmo".

*J. Hunter*

## RESUMO

Esta pesquisa versa sobre a inserção da teoria dos fractais no campo de pesquisa da contabilidade financeira. Busca-se a partir desta teoria verificar o quão eficiente pode ser a projeção de preços futuros de uma *commodity*, neste estudo o minério de cobre. A partir do trabalho seminal de Benoit Mandelbrot (1963) com séries temporais da commodity algodão, pesquisadores têm analisado e aplicado modelos matemáticos não lineares com propriedades fractais em séries temporais de ativos negociados no mercado financeiro. A teoria dos fractais abre um novo e polêmico campo de estudos na contabilidade financeira, que vai de encontro aos conceitos estabelecidos pela moderna teoria de finanças, sobretudo os preconizados pela Hipótese de Eficiência dos Mercados. Assim, resgata-se neste estudo a evolução dos conceitos e das ferramentas estatísticas aplicadas na identificação e projeção de preços, sob a ótica da moderna teoria das finanças e sob a ótica fractal, enriquecendo a literatura sobre comportamento de preços de *commodities*. Complementarmente ao estudo teórico, foi analisada uma série histórica de preços da *commodity* cobre com 32 anos de observações diárias do período entre 1974 – 2005, buscando verificar se o comportamento destes preços apresentou características fractais e se diante dessas características é possível projetar preços de forma consistente. Foram realizados testes para normalidade, linearidade, estacionaridade e fractalidade. Os resultados indicam que o comportamento dos preços da *commodity* estudada apresentou para o período um padrão não-linear de evolução, não-estacionário, com distribuição não-gaussiana das variáveis. Os resultados obtidos com os testes para fractalidade indicaram comportamento não persistente, com fracos indícios de fractalidade. Para projeção foi utilizado um modelo browniano fracionário unifractal. Conclui-se que, sem prejuízo da teoria em si, com base neste modelo adotado não convém estabelecer uma equação geral que possa ser utilizada na prática para projeções de preços em análise de projetos de mineração de cobre.

**Palavras-chave:** *Commodity* cobre. Teoria dos fractais. Projeções de preço.

## ABSTRACT

This research studies the insertion of fractals theory in financial accounting research. From this theory the author searches to verify the efficiency of forecasting copper commodity future prices. From the seminal work of Benoit Mandelbrot (1963) with secular series of commodity cotton, researchers have analyzed and applied nonlinear mathematical models with fractals properties in time series of assets negotiated in the financial market. The fractals theory opens a new and controversial field of studies in the financial accounting, which goes against the concepts established for the modern theory of finances, specially the Hypothesis of Markets Efficiency. Thus, the author rescues in this study the concepts evolution and statistical tools applied in the identification and prices forecasting, under the optics of modern theory of finances and fractal optics, enriching literature of commodity prices behavior. Complementarily to theoretical study, a 32 years old copper price time series was analyzed, witch covered the period between 1974 - 2005, searching to verify if the prices behavior presented fractals characteristics and if it is possible to predict prices in a consistent way. Tests for normality, linearity, stationarity and fractality had been realized. The results indicate that the commodity studied prices behavior presented a nonlinear evolution, nonstationarity and non-gaussian distribution. The results about fractality tests indicated non-persistent behavior, with weak fractality. To predict prices a brownian unifractal model was used. The author concludes that, without damage of the theory in itself, on the basis of this adopted model it is not possible to establish a general equation that can be used for prices forecasting in copper mining projects analysis.

**Key-Words:** Copper Commodity. Fractals theory. Prices forecasting.

## LISTA DE GRÁFICOS E QUADROS

Gráfico 1:	Saldo da Balança Comercial em Toneladas de Minério Exportado	58
Gráfico 2:	Saldo da Balança Comercial em US\$ milhares	58
Gráfico 3:	Preços da <i>Commodity</i> Cobre (amostra completa)	61
Gráfico 4:	Preços da <i>Commodity</i> Cobre (1974-2003)	66
Gráfico 5:	Retorno dos Preços da <i>Commodity</i> Cobre (1974-2003)	67
Gráfico 6:	Plotagem dos Incrementos	82
Gráfico 7:	Projeção de Preços de Minério de Cobre	82
Gráfico 8:	Preços Reais Ocorridos no Período 2004-2005	83
Quadro 1:	Resumo de Pesquisas Sobre Séries Temporais com Base em Teorias Tradicionais	35
Quadro 2:	Resumo das Pesquisas Sobre Séries Temporais com Base na Teoria dos Fractais e Teorias Afins	54
Quadro 3:	Estatística Descritiva da Série Temporal de Preços de Minério de Cobre	67
Quadro 4:	Resultados Esperados para os Testes Estatísticos	73
Quadro 5:	Resultado da Estatística BDS	78
Quadro 6:	Resumo dos Resultados dos Testes Estatísticos	80

## LISTA DE TABELAS E FIGURAS

Tabela 1:	Reservas Estimadas das Minas de Cobre no Estado do Pará	57
Tabela 2:	Resumo dos Parâmetros Estatísticos das Séries Temporais: Projetada e Real	84
Figura 1:	Curva de Koch, demonstrando as quatro primeiras iterações	38
Figura 2:	Carpete de Sierpinski	39
Figura 3:	Galhos de Árvores	39
Figura 4:	Séries de Retornos de Ações	40
Figura 5:	Borboleta de Lorenz	43
Figura 6:	Movimento completo de cinco ondas descrito por Elliott	45
Figura 7:	Característica fractal do comportamento dos preços	45
Figura 8:	Histograma dos Preços da <i>Commodity</i> Cobre	77
Figura 9:	Histograma dos Retornos dos Preços da <i>Commodity</i> Cobre	77
Figura 10:	Resultado da Estatística de Hurst	79
Figura 11:	Resultado da Estatística ADF	79
Figura 12:	Histograma da Série Temporal Projetada	84
Figura 13:	Histograma da Série Real Período 2004 - 2005	85
Figura 14:	Histograma dos Retornos da Série Temporal Projetada	85
Figura 15:	Histograma dos Retornos da Série Real Período 2004 – 2005	86

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAPM	<i>Capital Asset Pricing Model</i>
ARCH	<i>Autoregressive Conditional Heterocedasticity</i>
GARCH	<i>Generalized Autoregressive Conditional Heterocedasticity</i>
GBM	<i>Geometric Brownian Movement</i>
MRT	<i>Mean Reverting Tendency</i>
APT	<i>Arbitrage Price Theory</i>
ARIMA	<i>Autoregressive Integrated Moving Average</i>
AFRIMA	<i>Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average</i>
AR1	<i>First Order Auto-regressive</i>
ST-FRSR	<i>State Transition-fitted Residual Scale Ratio</i>
DNPM	Departamento Nacional de Produção Mineral
COMEX	<i>Commodity Exchange of New York</i>
LME	<i>London Metal Exchange</i>
ADF	<i>Augmented Dickey-Fuller</i>
BDS	<i>Brock, Dechert, Scheinkman and LeBaron</i>
IID	Independente e identicamente distribuídos
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	15
1.1 Justificativa .....	18
1.2 Objeto de Estudo .....	19
1.3 Delimitação do Estudo .....	20
1.4 Problema de Pesquisa .....	22
1.5 Objetivos de Pesquisa .....	23
1.5.1 Objetivo Geral .....	23
1.5.2 Objetivos Específicos .....	24
1.6 Caracterização da Pesquisa .....	24
1.7 Estrutura da Pesquisa .....	26
<b>2 ASPECTOS SOBRE A MODERNA TEORIA DE FINANÇAS</b> .....	28
2.1 Pressupostos da Moderna Teoria de Finanças .....	28
2.2 Padrões Estocásticos de Comportamento de Preços .....	29
2.3 Teorias Utilizadas em Análise de Séries Temporais com Base em Linhas Tradicionais da Contabilidade Financeira .....	31
<b>3 FRACTAIS E COBRE</b> .....	37
3.1 Teoria dos Fractais .....	37
3.1.1 Definição e Características .....	37
3.1.2 Análise Distintiva Entre Teoria dos Fractais, Caos, Complexidade e Não- linearidade .....	41
3.1.3 Levantamento de Evidências de Fractalidade em Informações Financeiras .....	44
3.2 <i>Commodity</i> Cobre .....	55
3.2.1 Aspectos Gerais .....	
3.2.2 Análise do Minério de Cobre no Contexto Mineral Brasileiro .....	
4.1 Técnica de Pesquisa .....	59
4.2 Os Dados .....	60
4.2.1 Análise do impacto da Inflação Norte-americana Sobre a Série de Preços .....	62

4.2.2 Análise Histórica de Eventos que Tenham Demonstrado Influência Sistemática Sobre a Determinação de Preços do Cobre .....	63
4.3 Estatística Descritiva da Série Temporal .....	65
4.4 Testes Estatísticos Aplicados para Detectar Evidências de Fractalidade .....	67
4.4.1 Normalidade .....	68
4.4.2 Linearidade .....	69
4.4.3 Persistência de Memória .....	70
4.4.4 Estacionaridade .....	72
4.4.5 Análise dos Resultados Esperados .....	72
4.5 Modelo Utilizado para Projeção de Preços .....	73
<b>5 RESULTADOS</b> .....	<b>76</b>
5.1 Resultados dos Testes Estatísticos .....	76
5.1.1 Normalidade .....	76
5.1.2 Linearidade .....	77
5.1.3 Persistência de Memória .....	78
5.1.4 Estacionaridade .....	79
5.1.5 Análise Geral dos Resultados .....	80
5.2 Resultado da Projeção de Preços com Base no Modelo Unifractal .....	81
5.2.1 Análise Comparativa Entre a Projeção e a Amostra .....	83
<b>6 CONCLUSÕES</b> .....	<b>87</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Tendo como base o argumento no qual a contabilidade possui como objetivos o reconhecimento, a mensuração e a evidenciação dos fatos que provocam alterações no patrimônio das entidades, incluindo a análise dos fenômenos ocorridos e do potencial uso dos impactos de decisões e antecipações de resultados futuros, é possível compreender a contabilidade em sua forma mais completa, na qual desperta para as inúmeras possibilidades de contribuição à sociedade e ao seu desenvolvimento.

A contabilidade, então, não apenas “olha pelo espelho retrovisor”, ela se fortifica, na medida em que aumenta sua capacidade preditiva, ou seja, de contribuir para decisões tomadas no presente, com base na antecipação de informações contábeis futuras.

Esta dissertação versa sobre o estudo do comportamento dos preços da *commodity* cobre, seus determinantes e impactos para a projeção de receitas e avaliação de investimentos com base na teoria dos fractais.

A questão de pesquisa de comportamento de preços de *commodities* é um assunto que vem sendo ostensivamente discutido pela comunidade acadêmica internacional desde a década de 1980 (WATKINS; MCALEER, 2004), tendo sido encontrados estudos desde a década de 60 (MANDELROT, 1963). Constata-se na literatura do assunto, que pesquisas realizadas nos últimos 25 anos alternaram-se entre análises empíricas que enfocam o risco e a volatilidade do comportamento dos preços dessas *commodities*.

Sob este enfoque (risco e volatilidade), desenvolveram-se uma diversidade de estudos no que tange aos aspectos teóricos nos quais as pesquisas empíricas foram embasadas, como por exemplo: a teoria dos estoques (FAMA; FRENCH, 1987), a análise da volatilidade de curto e longo prazo (MCMILLAN; SPEIGHT, 2001), testes para analisar a hipótese de eficiência dos mercados de *commodities* (CHOWDHURY, 1991) ou ainda sob a ótica do CAPM, modelo de precificação de ativos de capital, no trabalho de Chang *et al* (1990).

No Brasil, são poucas as pesquisas realizadas sobre comportamento de preços de *commodities*, e quase a totalidade dos estudos encontrados na revisão bibliográfica enfoca o estudo de *commodities* agrícolas. De fato, são raras as publicações que abordam o estudo de comportamento de preços de *commodities* minerais, como a realizada por Castro e Rossi Jr. (2000), na qual foi estudado o comportamento dos preços de exportação de *commodities* brasileiras, inclusive minério de alumínio e de ferro, a partir de modelos vetoriais auto-regressivos (VAR), sob a influência de variáveis exógenas como demanda e taxa LIBOR.

No centro deste cenário, duas observações fazem-se relevantes. Em primeiro lugar, a constatação de que existe uma lacuna de pesquisas no Brasil, voltadas para a análise e compreensão dos movimentos mundiais de preços de minérios. Nesse sentido, deve-se observar a necessidade deste tipo de estudo para a obtenção de maior precisão em projeção de receitas, aspecto fundamental para avaliação de viabilidade de projetos de investimento em mineração, na determinação do valor justo de ativos, no estudo da avaliação de uma empresa, entre outros aspectos. Em segundo lugar, mas não menos importante, analisando a literatura internacional sobre o assunto, constata-se que não existe uma abordagem ou única teoria que explique o movimento de preços de *commodities*. Cada uma das pesquisas

existentes sobre o assunto aborda uma face aproximativa da realidade, notadamente no que tange à delimitação da amostra e à expectativa de relevância teórica que explique a observação empírica realizada (DEMO, 1995).

Adicionalmente, percebe-se através da literatura analisada, que na medida em que teorias ou novas abordagens matemáticas foram desenvolvidas, estas foram utilizadas como referência para o desenvolvimento de novos estudos sobre comportamento de preços *commodities*, a exemplo do modelo GARCH que se tornou uma técnica dominante para modelagem de volatilidade em retorno de ativos (MCMILLAN; SPEIGHT, 2001).

Neste processo dinâmico, pode-se citar o desenvolvimento de teorias alternativas originalmente desenvolvidas por outras áreas da ciência, e posteriormente testadas em mercados financeiros, a exemplo da **teoria dos fractais**, abordagem aplicada nesta pesquisa, após ter sido aplicada com êxito em estudos envolvendo comportamento de preços de ações, conforme Mandelbrot e Hudson (2004, p.207) asseveram:

O grau de encaixe, como é chamado o resultado compatível com as expectativas de um modelo, varia – a exemplo do que geralmente ocorre em pesquisa estatística. As ações da Archer Daniel Midlands, Lockheed Motorola e UAL foram exemplos de multifractais típicos [...].

Sobre este assunto Hayashi (2002, p.7) argumenta:

A modelagem matemática através dos fractais produz resultados que acompanham as mudanças reais nos preços de uma maneira mais precisa e explica o comportamento do mercado nos momentos de maior volatilidade.

## 1.1 Justificativa

Duas foram as motivações para a confecção desta pesquisa.

Em primeiro lugar, a capacidade deste estudo se constituir em uma contribuição à discussão sobre a importância da utilização de premissas consistentes na valoração de investimentos. Acredita-se que na medida em que forem identificados mecanismos que possibilitem as projeções de preços futuros de *commodities* minerais e do entendimento do comportamento dos preços passados será possível avaliar com maior precisão e melhorar o processo decisório. Esse entendimento terá como consequência a minimização dos aspectos subjetivos que permeiam as projeções em análise de projetos de investimento e em avaliação de empresas, o que poderá contribuir para aumentar a credibilidade dos investimentos realizados no País, com consequente reflexo no desenvolvimento nacional.

Configura-se neste trabalho uma perspectiva real de se agregar conteúdo ao conhecimento já divulgado, a partir da análise do comportamento de preços da *commodity* cobre sob a ótica da teoria dos fractais. Sobre a importância da teoria dos fractais em mercados financeiros, Hayashi (2002, p.63) define:

A importância da geometria dos fractais é que ela possibilita um modelo genérico o suficiente para reproduzir os padrões que caracterizam os mercados de baixa volatilidade da teoria do portfólio (uma alusão a Markovitz) assim como as situações tumultuadas de maior volatilidade, com quedas ou subidas rápidas e elevadas. Um método previamente descrito para se criar um modelo fractal de preços pode ser alterado para mostrar como a atividade dos mercados pode se tornar mais veloz ou mais lenta - a essência da volatilidade.

Acrescente-se a esta primeira motivação, a pouca quantidade de pesquisas publicadas no Brasil sobre o assunto e a perspectiva de discutir os principais estudos realizados em nível mundial, em suas várias abordagens teóricas e

estatísticas, o que permite a realização de uma análise comparativa, tendo como ponto principal a evolução das abordagens teórico-empíricas sobre o comportamento de preços ao longo dos anos.

Esta pesquisa, portanto, contribui para a área da contabilidade financeira, notadamente para pesquisadores e profissionais da área de avaliação de projetos, tanto de maneira teórica, fornecendo subsídios para novas pesquisas e discussões sobre o tema, como de maneira prática, com a possibilidade de aplicação direta dos resultados desta pesquisa na avaliação de novos projetos de investimento.

A segunda motivação relaciona-se com a perspectiva de novos negócios de mineração no país. Conforme as observações de Dall’Agnol (2005, p.1):

A expressiva contribuição do setor mineral para a economia do País, funcionando como grande gerador de divisas, com saldo para a balança de pagamentos, excetuando petróleo e gás, de US\$ 7,8 bilhões em 2003 e US\$ 10,4 bilhões em 2004, e o reconhecimento de sua importância para sustentar o crescimento econômico, voltou a colocá-lo em destaque, depois de anos de relativo esquecimento pelo governo. O setor mineral foi considerado prioritário pelo PPA para o período de 2004-2007 e dirigentes do Ministério de Minas e Energia têm sinalizado no sentido de uma mudança de rumos, enfatizando a importância de criar condições para o fortalecimento do setor mineral e para a viabilização de novo ciclo de geração de jazidas e projetos de mineração.

É possível perceber a importância de se acompanhar a tendência de crescimento que se configura no País, através dos suportes teórico e prático fornecidos pela pesquisa acadêmica, uma vez que os recursos minerais não são recursos renováveis e o “[...] aproveitamento econômico dos minérios deve ser precedido de avaliação criteriosa de sua viabilidade e importância para a sociedade como um todo” (DALL’AGNOL, 2005, p.2).

## **1.2 Objeto de Estudo**

Com base nas considerações anteriores, o objeto deste estudo são os preços da *commodity* minério de cobre, observados por meio de séries históricas e analisados sob a ótica da teoria dos fractais. Estes preços não são definidos ou negociados no Brasil, são padrões mundiais ditados pela *London Metal Exchange - LME*, pela *Commodity Exchange of New York - COMEX* e pela *Shanghai Stock Exchange - SSE*. Juntas, as três instituições são responsáveis pela totalidade de transações de contratos futuros de cobre negociados no mundo (WATKINS; MCALEER, 2004).

Na seção 3 dessa dissertação será feita uma análise mais aprofundada sobre o produto utilizado nessa dissertação.

### **1.3 Delimitação do Estudo**

Têm-se neste estudo duas delimitações. A primeira, refere-se a escolha da abordagem teórica. A segunda diz respeito a escolha do objeto de análise, que será a oscilação dos preços da *commodity* cobre no mercado mundial. Sobre a primeira, a escolha decorreu de uma pesquisa exploratória prévia realizada (MATIAS; SILVA; VIEIRA, 2005), na qual o comportamento de uma série com 808 observações diárias do período compreendido entre setembro de 2001 e dezembro de 2004 de preços de minério de cobre assumiu as seguintes características: a série não se mostrou estacionária; os preços correntes se mostraram influenciados por preços passados; a distribuição não assumiu um padrão de distribuição normal; e algumas evidências de não-linearidade.

Estas características vão de encontro às premissas assumidas nos principais tipos de movimento de *commodities*, seja o movimento na forma de passeio aleatório ou browniano, assumindo um comportamento geométrico ou de tendência de reversão à média (DIXYT; PINDYCK, 1993). As premissas, de que as séries temporais atendem a propriedade de Markov<sup>1</sup> e assumem uma curva de distribuição normal das variáveis, não foram observadas. Chowdhury (1991) observou em seu trabalho que as séries de preços utilizadas não se mostraram estacionárias, portanto, os procedimentos estatísticos convencionais não são adequados para explicar o comportamento dos preços. Estes fatos estimulam a utilização de teorias alternativas para explicar o comportamento de preços, como é o caso da teoria dos fractais, objeto deste estudo.

Com respeito à delimitação do objeto do estudo, a partir das séries históricas de preços do cobre, isso não desmerece a pesquisa. Entende-se que a análise do comportamento dos preços de um ativo é importante, sob o ponto de vista de sua utilidade para a previsão de receitas futuras, análise do comportamento passado de uma série de preços e estudo do preço histórico de um produto. Nesse sentido a pesquisa é inovadora, pois vai além da análise de risco e volatilidade, enfoques geralmente utilizados em pesquisas realizadas sobre o tema.

Adicionalmente, faz-se mister delimitar objetivamente o estudo. A escolha por este metal se deu em função de três aspectos: 1) da possibilidade de expansão da pesquisa exploratória já realizada pela autora; 2) do relevante crescimento da importância do minério de cobre para a economia mineral brasileira; e, 3) da

---

<sup>1</sup> Esta propriedade assume que a probabilidade de distribuição para  $x_{t+1}$  depende exclusivamente de  $x_t$  e não do que aconteceu anteriormente à  $x_t$ , ou seja, somente o valor presente é relevante para prever o futuro. A propriedade de Markov é importante pois simplifica a análise de um processo estocástico.

disponibilidade dos dados para estudo, uma vez que este metal é negociado em bolsa.

Com relação à frequência e o número de observações a serem utilizadas, a literatura já publicada sobre o tema não apresenta consenso, sendo observadas frequências que variam de observações intradiárias a anuais, com número de observações entre 50 e 10.000. Entretanto, aparentemente o trabalho pioneiro de Mandelbrot (1963) estabeleceu um parâmetro de que as séries históricas devem ser longas o suficiente para permitir captar a existência de fractalidade, objeto desse estudo. Por essa razão, para este estudo foi utilizada uma série histórica com 32 anos de observações diárias de preços *spot* do período compreendido entre 1974 e 2005, razoável para a série incorporar as mudanças ocorridas no cenário mundial da indústria de mineração de cobre. Isso significa dizer que esse trabalho utilizou quase oito mil observações de preços do cobre.

#### **1.4 Problema de Pesquisa**

As informações para o processo decisório em avaliação de projetos de investimento, notadamente os que se baseiam em fluxo de caixa descontado, devem ser analisadas de forma crítica em relação à definição das premissas básicas que suportarão a projeção dos resultados. Sobre este aspecto, Perez e Famá (2002, p.7) analisam que “por trabalhar com expectativas futuras, naturalmente, observa-se que a grande dificuldade deste método (fluxo de caixa descontado) está em prever com exatidão e antecedência, o comportamento futuro destas (sic) relevantes variáveis”.

Neste sentido, definir a receita futura é uma etapa importante e delicada do processo. De acordo com Dolabela (2005), entre os fatores que afetam a receita, podem ser citados a demanda do mercado e previsão de vendas; a capacidade instalada; o retorno financeiro planejado e esperado do negócio; e o preço de venda.

Logo, a receita como uma função do preço de venda, é, em maior ou menor grau, dependente de fatores exógenos à empresa, e esta dependência se agrava se o principal produto dessa empresa for uma *commodity*. Assim, a questão básica que motiva esta pesquisa é:

É possível projetar preços futuros de determinado ativo *commodity*, com base na teoria dos fractais, de forma a verificar se esta projeção responde com precisão, sob a ótica da semelhança estatística, no que diz respeito à consistência das projeções?

## **1.5 Objetivos de Pesquisa**

### **1.5.1 Objetivo Geral**

Analisar com qual precisão podem ser projetados no futuro preços da *commodity* cobre, identificando o padrão de comportamento do movimento destes preços ao longo do tempo, determinando, com fundamento na teoria dos fractais, uma equação que explique este movimento.

### 1.5.2 Objetivos Específicos

- Descrever as características dos estudos realizados sobre comportamento de preços no mercado financeiro, avaliando se existe uma predominância de metodologia;

- Analisar a *commodity* cobre com o objetivo de identificar se existe um conjunto de eventos, que, ao longo dos últimos anos, tenham demonstrado influência sistemática sobre a precificação destes ativos;

- Identificar, através da literatura existente, os testes estatísticos adequados para de detecção de propriedades fractais em séries financeiras.

### 1.6 Caracterização da Pesquisa

A abordagem metodológica desta pesquisa é positivista, na medida em que está orientada para a descoberta de leis da realidade (DEMO, 1995, p.159).

Fundamenta-se no pensamento de Popper (1999, p.30), de que:

[...] tudo quanto pode ser possivelmente 'positivo' em nosso conhecimento científico, só é positivo até onde certas teorias, em certos momentos do tempo, sejam preferidas a outras, à luz da discussão crítica, que consiste em refutações tentadas, inclusive testes empíricos [...].

Ainda, seguindo a linha de pensamento de Popper de que a teoria científica será sempre conjectural e provisória, esta pesquisa poderá ter o status de apresentar uma nova abordagem para o tema estudado, enquanto ainda não

contrariada pelos fatos, a exemplo das pesquisas anteriores realizadas sobre o tema. Mas, sobretudo, corre-se o risco de que durante este processo de análise entre a teoria e as observações realizadas, fique comprovada a falsidade da teoria, pois conforme Popper (1999, p.23) declara “só a ‘**experiência**’ pode nos ajudar a decidir sobre a verdade ou falsidade de asserções factuais” (grifo no original).

Este é um estudo empírico com caráter eminentemente quantitativo e objetivamente incrementalista, na medida em que busca relações entre variáveis com a finalidade de permitir a modelagem de uma equação capaz de explicar uma observação empírica, no caso, a oscilação de preços da *commodity* cobre, a partir da aplicação de uma nova teoria.

Está suportado em pesquisas bibliográfica e exploratória. A importância da revisão bibliográfica consiste no fato de que todo enunciado observacional, conforme Popper (1965) *apud* Demo (1995, p. 153), deve ser sempre interpretado “[...] à luz de teorias [...]”.

A pesquisa exploratória constituiu-se em um elemento-chave para este trabalho, uma vez que proporcionou maiores informações sobre o tema e serviu como uma etapa preliminar para a motivação da realização da pesquisa. Segundo Andrade (2005), a pesquisa exploratória complementada pela bibliográfica é aquela que visa descobrir novas idéias e dar um novo enfoque para o trabalho pesquisado. Tem a finalidade de definir os objetivos de um trabalho, facilitar a delimitação de um tema e se constitui em uma fase preparatória para outro tipo de pesquisa.

Ainda, de acordo com os objetivos propostos para esta pesquisa, percebe-se seu caráter explicativo, a qual tem por finalidade “[...] aprofundar o conhecimento da realidade, procurando a razão, o ‘**porque**’ das coisas [...]” (ANDRADE, 2005, p.125) (grifo no original).

Neste trabalho, portanto, a pesquisa exploratória realizada inicialmente motivou o aprofundamento na pesquisa sobre o tema. Quando completada pela revisão bibliográfica, subsidia a realização da análise empírica dos dados, a partir do que, é possível alcançar os objetivos geral e específicos propostos inicialmente.

## **1.7 Estrutura da Pesquisa**

Esta pesquisa está estruturada em seis seções, conforme se pode observar no detalhamento que segue.

A seção 1 descreve a justificativa, o objeto de estudo, os parâmetros considerados no trabalho, o problema de pesquisa, os objetivos geral e específicos, os aspectos metodológicos e a estrutura desta pesquisa.

As seções 2 e 3 tratam da revisão de literatura, abordando as teorias e metodologias utilizadas para análise de séries temporais, com aprofundamento maior ao estudo da teoria dos fractais. Nesta etapa do trabalho, quando possível, é dada ênfase para as pesquisas que utilizaram séries temporais de *commodities* minerais, notadamente minério de cobre.

A seção 2 tem como objetivo resgatar os principais aspectos da moderna teoria de finanças, e está subdividido em três seções: 1) pressupostos da moderna teoria de finanças; 2) padrões estocásticos de comportamento de preços, os quais tem em comum o fato de assumirem que o comportamento de séries temporais de ativos financeiros segue padrão aleatório; e, 3) breve resgate de trabalhos desenvolvidos em linhas tradicionais da contabilidade financeira, embasados em

teorias como, por exemplo: a teoria dos estoques, a hipótese de eficiência dos mercados e o CAPM.

A seção 3 é destinada ao objeto desta pesquisa: preços do minério de cobre e estudo da teoria dos fractais. Na primeira subseção é estudada a teoria dos fractais, sua definição e principais características; a análise distintiva entre os conceitos da teoria dos fractais e da teoria do caos, as quais freqüentemente se confundem; e as evidências teórico-empíricas geradas em pesquisas sobre a presença de fractalidade em séries temporais de preços de ativos.

A segunda subseção é destinada a uma análise do minério de cobre, no contexto mineral brasileiro.

A seção 4 aborda a técnica e os dados, descreve os eventos que influenciaram no preço do minério, os testes estatísticos utilizados para detecção de fractalidade e o modelo identificado para a projeção de valores, tendo como base a série temporal em estudo.

As seções 5 e 6 são destinadas para a discussão dos resultados da pesquisa e conclusões, respectivamente.

## **2 ASPECTOS SOBRE A MODERNA TEORIA DE FINANÇAS**

A importância da seção 2 para esta pesquisa consiste no fato de que para entender melhor a teoria dos fractais é imprescindível formar uma idéia geral das teorias financeiras tradicionais e os impactos destas linhas de pensamento na análise do comportamento de preços de ativos financeiros.

### **2.1 Pressupostos da Moderna Teoria de Finanças**

Uma das possíveis explicações para o aparente baixo número de pesquisas na área fractal (MANDELBROT; HUDSON, 2004, p.242) é a contradição que a teoria dos fractais faz com a Hipótese de Eficiência dos Mercados – EMH. Assim, torna-se importante para esta pesquisa retomar as principais características da EMH.

A EMH está calcada em alguns dos seguintes pressupostos (vide, por exemplo: FAMA, 1970 [texto original], CARDOSO; MARTINS, 2004):

- os preços atuais são independentes dos preços de ontem, pois toda informação disponível já foi processada e incorporada a estes preços;
- os investidores são considerados indivíduos racionais que estão sempre em busca da maximização de retornos, a partir do conhecimento de toda informação pública disponível;
- os negociadores estão a par das mudanças que ocorrem no ambiente;
- os preços são justos;

- o mercado tende a permanecer em equilíbrio, na medida em que sempre existirão vendedores e compradores; e,

- toda nova informação impacta diretamente e de mesma maneira o mercado e seus participantes.

Sobre o comportamento de preços de ativos financeiros para a EMH, são do tipo passeio aleatório, o qual assume um padrão de saltos de crescimento e decrescimento constantes de mesma probabilidade.

Outro fato particularmente importante em análise de séries temporais é a pressuposição de que as variáveis assumem um padrão de distribuição normal. Esta hipótese afeta diretamente o componente “risco”, uma vez que na distribuição gaussiana a probabilidade de ocorrência de picos de preços acima ou abaixo de três desvios padrões é de 0,5%, quando na realidade, esse percentual pode ser bem maior. Peters (1994, p.26), analisando uma série temporal do índice Dow Jones com 103 anos, atestou que a parcela de picos de preços que ultrapassavam três desvios padrões no período foi de 2,4%.

## **2.2 Padrões Estocásticos de Comportamento de Preços**

Na seqüência desta análise, faz-se interessante realizar o detalhamento das principais formas estocásticas de comportamento de preços.

Conforme Dixit e Pindyck (1993) os processos estocásticos podem assumir um comportamento estacionário, quando as propriedades estatísticas média e variância da variável  $x$  se mantêm constantes no tempo, ou não estacionário,

quando o valor esperado da variável  $x$  crescer sem limites, e a variância aumentar com  $t$ .

São exemplos de processo estocástico:

1) comportamento tipo “passeio aleatório” (*random walk*), estacionário, ou não, em tempo discreto ou contínuo, no qual a variável  $x$  assume um padrão de saltos de crescimento e decrescimento constantes de mesma probabilidade;

2) se este comportamento apresentar uma tendência, será classificado como “passeio aleatório com tendência” (*random walk with drift*);

3) outro exemplo de processo estocástico é o processo auto-regressivo de primeira ordem, denominado AR(1). Este processo é adicionalmente referido como um processo de reversão à média (*mean reverse*), pois no longo-prazo  $x_t$  tende a um valor constante.

Os comportamentos acima descritos, de passeio aleatório, em tempo discreto ou contínuo, com ou sem tendência e o processo AR(1) satisfazem a propriedade de Markov, e em função disto também são chamados Processos de Markov.

4) movimento browniano ou Processo de Wiener, é um processo estocástico em tempo contínuo não estacionário, que assume três importantes propriedades: a) é um processo de Markov; b) possui incrementos independentes de mudança ao longo do intervalo de tempo; e c) mudanças no processo em qualquer momento de um intervalo finito assumem uma distribuição normal, no qual a variância cresce linearmente com o tempo. Dixit e Pindyck (1993) asseveram que estas condições são restritivas e sugerem que muito poucas variáveis no mundo-real podem realmente ser modeladas com base no movimento browniano, a menos que se façam adaptações no modelo.

5) adaptando o modelo browniano original, é possível descrever o movimento browniano com tendência e o movimento browniano generalizado.

Ainda segundo Dixit e Pindyck (1993), derivam-se dois casos particulares de comportamento a partir do conceito de movimento browniano: a) Movimento Browniano Geométrico - GBM; e b) Tendência de Reversão à Média - MRT.

No GBM, assume-se uma distribuição lognormal. Enquanto no GBM os preços tendem para longe do ponto de partida, no MRT, ainda que os preços subam e desçam aleatoriamente, no longo prazo, tendem a voltar para o custo marginal de produção. O processo simples de reversão à média também é denominado Processo de *Ornstein-Uhlenbeck*.

Estes são os principais tipos de padrões de comportamento de preços observados em séries financeiras, nos quais estão embasadas as pesquisas que tem como base linhas tradicionais da contabilidade financeira.

### **2.3 Teorias Utilizadas em Análise de Séries Temporais com Base em Linhas Tradicionais da Contabilidade Financeira**

Esta seção é destinada a um breve resgate de trabalhos desenvolvidos em linhas tradicionais da contabilidade financeira. Sobre a revisão bibliográfica do tema, vale ressaltar que os estudos realizados sobre o assunto evoluíram com o tempo. Teorias e ferramentas estatísticas abordadas na década de 80 diferem de abordagens da década de 90 e década atual. Assim, estão descritas pesquisas recentes e nem tão recentes sobre o objeto de estudo deste trabalho, todas importantes para o entendimento geral do assunto.

Fama e French (1987) embasados na teoria do estoque desenvolveram uma pesquisa com 21 *commodities*, entre as quais, cobre, ouro, platina e prata, a fim de identificar alguns elementos que influenciavam nos preços futuros. Em um primeiro momento do estudo, os autores determinaram uma equação linear na qual a dependente “preços futuros” era função dos “preços à vista”, da “taxa de juros” e de uma variável *dummy*, para identificar se o produto possuía sazonalidade. O modelo mostrou baixa capacidade de previsão para os metais analisados. No segundo momento do estudo, foi estabelecida uma nova equação linear cuja dependente “preços de contratos futuros” era função dos “preços à vista” mais um “prêmio pela expectativa de variação no tempo”. O modelo demonstrou evidências da influência das expectativas de prêmio, mas não se mostrou estatisticamente significativo quando testado para o cobre, ouro e platina, e se mostrou “confuso” para o minério de prata.

Utilizando a abordagem do CAPM, Chang e *al* (1990), analisaram se investidores em contratos futuros de três metais (cobre, platina e prata) receberam, durante o período analisado (1964-1983), uma recompensa média proporcional ao risco do contrato. Neste estudo, foram comparados o risco e o retorno dos ativos *commodities* com o retorno do mercado de ações e títulos sem risco. Como resultado, os autores observaram que os contratos futuros eram consistentemente mais arriscados do que o mercado de ações e os títulos do governo, e que estes contratos, como regra geral, não tinham sido bem compensados pelo mercado. Adicionalmente, observaram que existe uma relação negativa entre o beta e o tempo de maturidade do contrato, comprovando que o risco sistemático de um ativo com vida limitada é uma função da vida remanescente deste ativo.

Chowdhury (1991) examinou a hipótese de eficiência dos mercados para quatro metais não-ferrosos (cobre, chumbo, estanho e zinco) a partir da teoria da cointegração. O autor assevera que os procedimentos estatísticos convencionais não são apropriados para testes de eficiência, pois as séries financeiras de preços geralmente não são estacionárias, provocando viés nos resultados estatísticos. A revisão de literatura realizada no estudo conduzido por Chowdhury (1991) indicou que os estudos prévios realizados sobre o tema não demonstraram consistência, alternando os resultados entre os que suportaram, ou não, a hipótese de eficiência para os mercados de metais. Não foram observados nestes estudos prévios, testes para estacionaridade das séries de preços. A abordagem do estudo de Chowdhury (1991) foi analisada sob duas formas diferentes. Primeiramente, foi determinado se ambos os preços futuro e *spot* do mercado de uma *commodity*, são cointegrados com os mesmos preços futuro e *spot* de mercados de outras *commodities*. Neste caso, a cointegração entre dois ativos diferentes em dois mercados diferentes indica que um mercado é influenciado por outro, demonstrando ineficiência. Em um segundo momento, testes para cointegração foram conduzidos entre preços *spot* e futuro de cada um dos quatro mercados analisados. Assim, considerando que a hipótese de eficiência de mercado pressupõe que ambos os preços, *spot* e futuro, devem seguir a mesma tendência, variando na mesma direção, os preços *spot* e futuro devem ser cointegrados quando analisado um único mercado. Os resultados encontrados pelo autor sugeriram a não rejeição da hipótese nula de que há cointegração entre os diferentes mercados analisados, e adicionalmente, de que não há um vetor de cointegração envolvendo os preços *spot* e futuro de um mesmo mercado, ou seja, a rejeição da hipótese de eficiência para o mercado das quatro *commodities*.

McMillan e Speight (2001) analisaram a volatilidade de preços diários de seis metais não-ferrosos no período compreendido entre 1971-2000, desmembrando a volatilidade em curto e longo prazos. Sob esta abordagem, objetivaram isolar alguns fatores que contribuem para a volatilidade de curto prazo, como movimentos especulativos, chegada de novas informações e posições de *hedge*, e fatores fundamentais, que contribuem para a volatilidade no longo prazo, como a disponibilidade física dos produtos e as leis de demanda e oferta. Esta decomposição em curto e longo prazo foi possível com a utilização de um modelo GARCH modificado, chamado *component-GARCH* ou CGARCH. Os resultados demonstraram que, a meia vida de choques de volatilidade de curto prazo direcionada pelo mercado, tipicamente, não se estende além de oito dias, enquanto a meia vida média de choques de volatilidade de longo prazo, provocados por fatores fundamentais, é de cerca de 190 dias, tal que a volatilidade do preço dos metais é apenas lentamente revertida à média. Encontraram-se evidências de que existe um vínculo entre a volatilidade dos metais, uma tendência dirigida em primeiro momento pelos preços do alumínio e em um segundo momento pelos preços do cobre. Mais especificamente, a volatilidade dos preços de longo-prazo, enquanto exibe uma memória de longo-prazo, de fato é estacionário e possui tendência de reversão à média.

Considerando a analogia existente entre o comportamento de séries históricas de preços de *commodities* e o comportamento de outros ativos financeiros, destacam-se as pesquisas sobre risco e volatilidade de séries históricas desenvolvidas de Alexander (1998; 1999). Em trabalho publicado, Alexander (1998) faz uma retrospectiva das metodologias utilizadas para análise do risco e volatilidade de comportamento de preços, no qual avalia os métodos de estimação por

correlação entre séries, particularmente os métodos *equally weighted historic method* e *exponentially moving average method*, e metodologia de modelagem com base em modelos GARCH. Alexander (1999) publicou um artigo, no qual apresenta as bases teórica e matemática sobre o uso da teoria da cointegração para precificação, hedge e negociação de portfólios de ativos financeiros. Apresenta a metodologia como poderosa ferramenta de modelagem econométrica de séries temporais multivariadas, a qual provê a capacidade de captação e modelagem de dinâmicas de curto e longo prazo. A teoria da cointegração já tinha sido aplicada (conforme observado nesta revisão bibliográfica) para testar a hipótese de eficiência de mercados (CHOWDHURY, 1991) e a hipótese de expectativas não tendenciosas (*unbiased expectations hypotheses*), a qual prevê que o preço de contratos futuros é igual às expectativas do preço *spot* previsto para a data da entrega do ativo, e que estas expectativas são formadas racionalmente (KREHBIEL; ADKINS, 1993). Apesar disto, Alexander (1999) inovou utilizando a cointegração diretamente em séries temporais não-estacionárias, o que possibilitou, por exemplo, seu uso em séries temporais de preços de *commodities*.

O levantamento de pesquisas realizado nesta seção pode ser resumido conforme quadro 1.

<b>Autor</b>	<b>Embasamento Teórico</b>	<b>Objetivo da Pesquisa</b>	<b>Ferramenta Estatística</b>	<b>Resultados</b>
Fama e French (1987)	Teoria dos Estoques	Identificar elementos que influenciam em preços futuros de 21 <i>commodities</i> .	Equações Lineares	Baixa capacidade de previsão, tendo sido alguns resultados "confusos" e outros não-significantes.
Chang e al (1990)	CAPM	Verificar se investidores em contratos futuros de cobre, platina e prata receberam recompensa média proporcional ao risco do contrato.	Comparação entre risco e retorno de <i>commodities</i> , ações e títulos livres de risco.	Concluíram que contratos futuros de <i>commodities</i> são mais arriscados que ações e, na média, não foram adequadamente remunerados.

Chowdhury (1991)	Hipótese da Eficiência dos Mercados	Examinar a eficiência dos mercados para quatro metais não-ferrosos: cobre, chumbo, estanho e zinco.	Fundamentado na cointegração	Comprovou a existência de cointegração entre os mercados, indicativo de não-eficiência.
Alexander (1998)	-	Realizar uma retrospectiva de metodologias utilizadas para análise de risco e volatilidade de ativos financeiros.	Várias, com introdução dos modelos GARCH	Constatou que os modelos GARCH são melhores para predição.
Alexander (1999)	-	Apresentar a teoria da cointegração como ferramenta para modelagem de séries multivariadas.	Cointegração	Concluiu que a ferramenta possui capacidade de captação e modelagem de dinâmicas de curto e longo prazo em séries não-estacionárias.
McMillan e Speight (2001)	-	Isolar fatores que contribuam para a volatilidade de curto e longo prazo de seis metais não-ferrosos.	GARCH	Detectaram evidências de que existe um vínculo entre a volatilidade dos metais. Que as séries são de fato, estacionárias e possuem tendência de reversão à média no longo-prazo.

Quadro 1: Resumo de Pesquisas Sobre Séries Temporais com Base em Teorias Tradicionais  
Fonte: Elaboração própria.

### 3 FRACTAIS E COBRE

Esta seção está dividida em duas seções secundárias. Na primeira é abordada a teoria dos fractais: definição, características, distinção entre os conceitos da teoria dos fractais, caos, complexidade e não linearidade, e, por último, revisão bibliográfica de pesquisas sobre a presença de fractalidade em séries temporais de preços de ativos. Na segunda são abordados aspectos do minério de cobre.

#### 3.1 Teoria dos Fractais

##### 3.1.1 Definição e Características

A definição original de Mandelbrot (1982, p. 15) é: “um fractal é, por definição, um conjunto para o qual a dimensão de Hausdorff Besicovitch<sup>2</sup> excede a dimensão topológica. Todo conjunto com dimensão fracionária é um fractal<sup>3</sup>”. Segundo Karas e Serra (1997, p.5), *apud* Hayashi (2002) fractais são figuras com propriedades e características peculiares que os diferenciam das figuras geométricas habituais. São estruturas matemáticas, que se repetem infinitamente quando vistas numa escala cada vez menor.

Uma definição simples de fractal encontra-se na *Wikipedia*:

---

<sup>2</sup> Félix Hausdorff, matemático alemão (1868-1942). Em 1918 publicou trabalhos em que apresentou a possibilidade de as dimensões poderem ser números não inteiros. Por volta de 1930, o trabalho de Hausdorff foi complementado pelo de Abram Samoilovitch Besicovitch, matemático russo (1891-1970), o qual formalizou a equação matemática utilizada hoje (O Amor a Matemática, 2005).

<sup>3</sup> Tradução livre do original “*A fractal is by definition a set for which the Hausdorff Besicovitch dimension strictly exceeds the topological dimension. Every set with a noninteger  $D$  is a fractal*”.

Fractais (do latim *fractus*, fração, quebrado) é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhante ao objeto original. Os fractais têm infinitos detalhes, são geralmente auto-similares e independem de escala. Em muitos casos, um fractal pode ser gerado por um padrão repetido, tipicamente um processo recorrente ou iterativo.

Em Houaiss (2001) tem-se que “fractal é uma estrutura geométrica complexa cujas propriedades, em geral, se repetem em qualquer escala. A palavra tem origem latina em *frangó, is, frégí, fráctum, frangère*, que significa quebrar, fraturar”.

As primeiras figuras com dimensão fractal foram identificadas no início do século XX, a exemplo da Curva de Koch, gerada em 1905 pelo matemático Helge Von Koch, mas foi Benoit Mandelbrot que identificou os modelos matemáticos representativos destas figuras e criou o termo *fractal* para identificá-las (LORENZ, 1996, p.204).

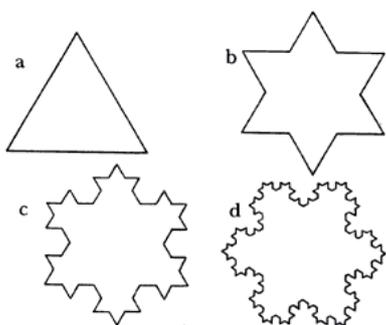


Figura 1 – Curva de Koch, demonstrando as quatro primeiras iterações.  
Fonte: Disponível em <<http://omega.ilce.edu>>

Mandelbrot e Hudson (2004, p.130) descrevem a Curva de Koch:

A Curva de Koch corresponde a um terço do floco de neve. [...] começa com uma linha reta – como o lado horizontal do triângulo do alto (a). [...] vamos puxá-lo para formar uma tenda intermediária sobre a seção do meio (b). Assim, o gerador Koch é uma linha quebrada composta de vários intervalos. O fractal é formado com base na regra simples de substituir cada uma das linhas cada vez mais curtas, por versões cada vez menores do gerador de tenda (c; d). Cada iteração acrescenta mais tendas [...] (numeração acrescida).

Uma propriedade comum em fractais é a *auto-semelhança* ou similaridade de escala. Este termo descreve a propriedade que muitos sistemas possuem, na qual

as partes, quando ampliadas, demonstrarão ser idênticas ao sistema como um todo (LORENZ, 1996, p.205). Um exemplo clássico deste tipo de fractal é o Carpete de Sierpinski, nele, percebe-se claramente a regra de formação: um quadrado original cercado de oito quadrados menores, em que cada lado possui  $1/3$  do tamanho do quadrado original. Cada um dos quadrados menores pode ser dividido da mesma forma, e assim, sucessivamente, num processo infinito (GRABBE, 1999).

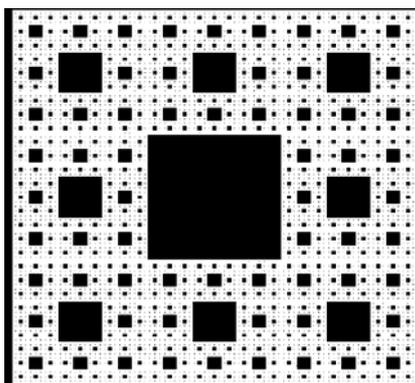


Figura 2 – Carpete de Sierpinski

Fonte: *Web site* de Clint Sprott. Disponível em <<http://sprott.physycs.wisc.edu>>

Outros fractais são apenas estatisticamente auto-similares, ou seja, as partes pequenas, se ampliadas, não se apresentarão idênticas ao sistema como um todo, mas equivalentes, com o mesmo tipo geral de aparência. Encontram-se na natureza alguns exemplos desta categoria de fractais, como os galhos de árvores.



Figura 3 – Galhos de árvores

Fonte: *Web site* de Clint Sprott. Disponível em <<http://sprott.physycs.wisc.edu>>

De forma similar, a partir de uma equação simplificada de processo fractal, é possível obter um gráfico fractal que simula a oscilação de preços de ações no

mercado. A fim de que se possa observar a maneira como o gráfico construído se assemelha a uma série real de retornos de ações, a seguir foi demonstrada uma série de retornos da empresa IBM.

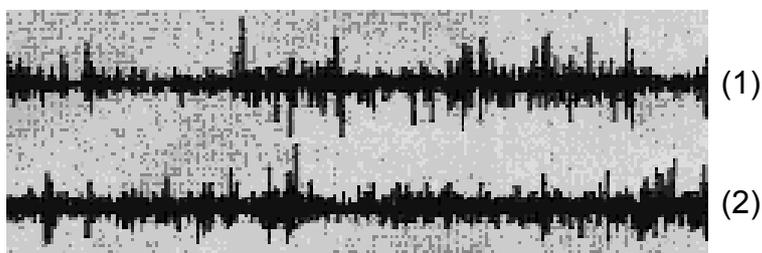


Figura 4 – Séries de Retornos de Ações: 1) simulada com fractais; 2) retornos reais da empresa IBM (sem a informação indicativa de período).

Fonte: Web site da Universidade de Yale. Disponível em <<http://classes.yale.edu>>

Matematicamente, a característica mais distintiva da formação fractal é o fato de sua dimensão assumir valores diferentes das dimensões topológicas. Considerando que um ponto possui dimensão zero; uma linha reta possui uma dimensão; uma superfície plana possui duas dimensões; e, um sólido possui três dimensões, os fractais possuem dimensões diferentes e próprias de cada fenômeno. A dimensão fractal também é chamada de dimensão Hausdorff (representada pela letra  $D$ ), e sua fórmula mais simples para cálculo é:

$$N = r^D$$

Onde  $N$  é o número de objetos similares obtidos a partir de um fator de escala (geração de padrões similares), fator “ $r$ ”. O fator de escala é uma função da lei de potência determinante de sua formação. Esta, por último, é invariante por escala, entre o objeto e suas  $N$  partes.

Mandelbrot e Hudson (2004, p.196) resgatam o conceito para fractais, afirmando: “um padrão ou objeto, cujas partes ecoam do todo, mudando de escala para cima ou para baixo, com base numa razão ou potência constante”.

Peters (1994) argumenta que a dimensão fractal caracterizada como um objeto ocupa o espaço no qual está inserido. Em uma série temporal fractal, o *tempo* assume a dimensão fractal, a qual é determinada pelo comportamento dos preços: o tempo fractal se expande em períodos de inatividade do mercado financeiro, e se contrai durante o período de atividade. Séries financeiras possuem um *tempo intrínseco*, determinado mais pela própria série temporal do que pelo “tempo do relógio” (MÜLLER *et al*, 1993).

Grabbe (1999b, p.6)<sup>4</sup> questiona: se o tempo assume a forma fractal, o qual se move em ritmo desassociado do tempo real, “qual deverá ser a correta dimensão fractal do tempo em mercados especulativos? <sup>5</sup>”.

### 3.1.2 Análise Distintiva Entre Teoria dos Fractais, Caos, Complexidade e Não-linearidade

Para Hsieh (1991) caos é um processo não linear determinístico que “parece” aleatório. Lorenz (1996, p.21), descreve o caos como: “um comportamento que é determinístico, ou quase, [...] possuindo uma pequena aleatoriedade, mas que *não aparenta* ser determinístico” (grifo no original). Prigogine (2002), associa o caos à instabilidade dos fenômenos da natureza. As leis da natureza, diante da teoria do caos, se tornam essencialmente probabilísticas, eliminando a necessidade de tentar associá-las invariavelmente a um sistema determinista. Essa seria a razão para que o estudo do caos seja interessante: a possibilidade de identificar, e explicar,

---

<sup>4</sup> No ano de 1999, Grabbe escreveu um grande trabalho sobre fractais, o qual foi desmembrado em várias edições de um mesmo periódico. Nesta pesquisa os trabalhos foram diferenciados em GRABBE 1999 e GRABBE 1999b, indicando que a publicação se deu em edições diferentes.

flutuações nos mercados que parecem ser randômicos, mas em sua essência não os são.

Como exemplos de fenômenos caóticos pode-se citar o movimento de uma onda, a evolução populacional de uma espécie e as oscilações do clima terrestre.

A aparente aleatoriedade de os sistemas caóticos pode ser atribuída à dependência sensível que possuem de seus estados iniciais. Isto significa que pequenas variações nos estados iniciais de um sistema caótico podem provocar enormes variações em seus estados seguintes, como nos estudos sobre a trajetória de esquis na neve, no qual Lorenz descreve grandes diferenças de trajetórias de esquis que partiram de pontos com apenas um milímetro de distância entre eles. A descoberta da dependência sensível às condições iniciais deu origem a célebre questão de Lorenz de 1972: “o bater de asas de uma borboleta no Brasil desencadeia um tornado no Texas?”.

Outra característica de sistemas caóticos é a presença de atratores estranhos. Lorenz (1996, p.57), os define como “os estados de qualquer sistema que freqüentemente se repitam, ou que freqüentemente sejam atingidos com precisão cada vez maior [...]”. A expressão “estranhos” é devida a aparência que estes atratores podem assumir. Alguns atratores estranhos possuem estrutura fractal. A seguir um exemplo clássico criado por Lorenz na década de 60.

---

<sup>5</sup> Tradução livre para “*what is the correct fractal dimension for time in speculative markets?*”

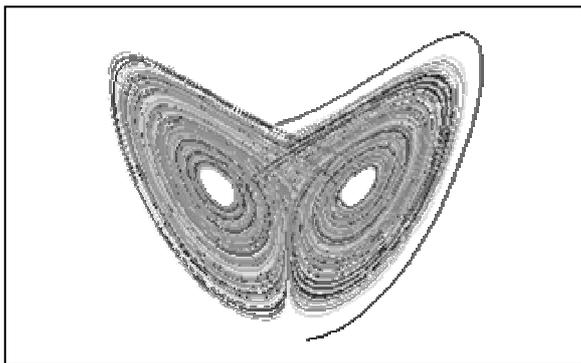


Figura 5 – Borboleta de Lorenz.

Fonte: Web site de Allrite Mathematical Sciences & I.T. Disponível em: <<http://www.allrite.com>>

Complexidade e não-linearidade são fenômenos associados ao caos. Lorenz (1996), no entanto, afirma que apesar de os sistemas caóticos pressuporem a não-linearidade e em sua maioria lidarem com a complexidade, a presença de não-linearidade ou complexidade por si só, não significa o caos. Gleiser (2002) argumenta que caos e complexidade são fenômenos interconectados, porém distintos. Hayashi (2002, p.11) defende que os dois fenômenos são complementares, e afirma:

A teoria da complexidade é o estudo de como um sistema de equações muito complicadas, pode gerar padrões de comportamento bastante simples e ordenados para certos valores dos parâmetros destas equações. Já a teoria do caos estuda como equações não-lineares simples geram comportamentos complicados.

Lorenz (1996, p.209) argumenta que os fractais têm muito pouco a ver com a teoria do caos, sob o ponto de vista da aleatoriedade: “Alguns fractais chegam a quase ser classificados como caos por serem produzidos mediante regras descomplicadas, embora parecendo altamente complexas, e não apenas por aparentar estruturas não-convencionais”. Por outro lado, a geometria fractal foi amplamente adotada como ferramenta matemática pela teoria do caos a partir da década de 80 (MANDELBROT; HUDSON, 2004, p.5).

Gleiser (2002) afirma que sistemas dinâmicos não-lineares com comportamento caótico determinístico geram figuras fractais e que o fenômeno da auto-similaridade é um importante aspecto da teoria do caos.

Percebe-se então uma forte associação entre os conceitos de fractalidade, de caos, de complexidade e de não-linearidade. Diante de uma série temporal de preços, pode-se evidenciar, portanto, padrões não-lineares de comportamento com características fractais, na qual a identificação de atratores estranhos (razões diferentes de mudanças de escalas no tempo) é necessária para a compreensão do padrão fractal e para a realização de projeções, as quais poderão ser modeladas a partir da geração de equações matemáticas complexas.

### 3.1.3 Levantamento de Evidências de Fractalidade em Informações Financeiras

Em 1934, Ralph Elliott apresentou estudos baseados na percepção de que nos processos sócio-econômicos, é possível distinguir alguns padrões de comportamento que se repetem similar e constantemente como em ondas (PRECHTER, 1990). Elliot direcionou seus estudos para o mercado de capitais com o objetivo de compreender o comportamento dos preços para predizê-los no futuro. Publicou em 1938 um ensaio denominado "*The Wave Principle*" (O Princípio da Onda), no qual destacava que o comportamento de preços das ações se dava em grandes ciclos atrelados ao tempo, nos quais era possível distinguir cinco movimentos básicos (figura 6). Identificou que, no transcorrer de um ciclo, os cinco padrões principais se repetiam em escalas cada vez menores (figura 7),

apresentando padrões de auto-similaridade característicos das figuras fractais (GLEISER, 2002).

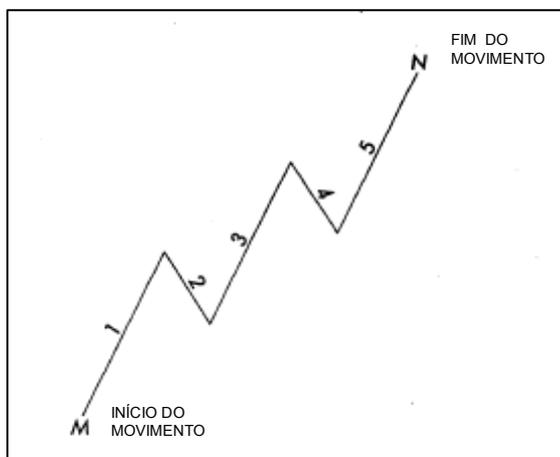


Figura 6 – Movimento completo de cinco ondas descrito por Elliott.

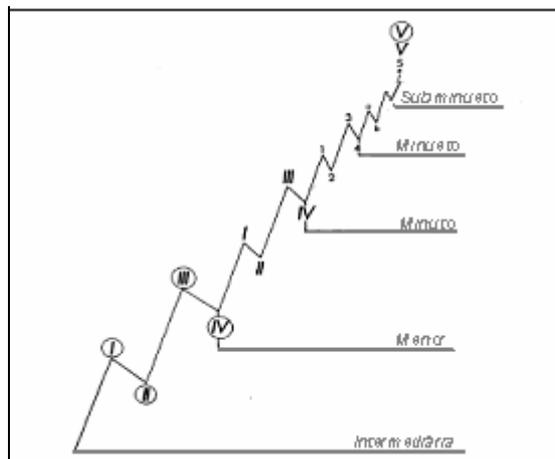


Figura 7 – Característica fractal do comportamento de preços.

Fonte: PRECHTER, R. R. *The major works of R. N. Elliott*. 1990.

É importante destacar que Mandelbrot (1997), apesar de reconhecer que Elliott identificou em seu trabalho geradores de padrões auto-similares qualitativamente semelhantes aos fractais, afirma que o trabalho de Elliott não deve ser confundido com fractais, pois o mesmo se limitou a realizar previsões a partir da interpretação dos gráficos.

Ainda sem ter desenvolvido sua teoria sobre os fractais, Mandelbrot (1963), em um estudo cujo objetivo era apresentar e testar um novo modelo representativo do comportamento dos preços em mercados especulativos, analisou graficamente diferentes conjuntos de séries temporais diárias e mensais de preços do algodão, no período compreendido entre 1816 e 1950. Percebeu que, apesar de os preços não seguirem uma distribuição gaussiana, as séries temporais eram estatisticamente estacionárias e os gráficos tinham a mesma aparência. Esta importante característica mais tarde se mostrou fundamental para o desenvolvimento de sua

teoria sobre fractais. Sobre o resultado de suas pesquisas, Mandelbrot (1963, p. 12)

afirma:

Eu suponho, portanto, que, desde 1816, o processo de geração dos preços do algodão, tem mudado somente em sua escala, com possível exceção na Guerra Civil [...]. Longas séries de mudanças mensais de preços poderiam, portanto, ser representadas por combinações da Lei de Pareto estável<sup>6</sup>.

É interessante notar que segundo Mehrling (2005) o trabalho de Mandelbrot de 1963 foi fundamental para o posterior desenvolvimento das Hipóteses de Eficiência dos Mercados de Fama. Mandelbrot (1982, p. 337) retoma seu trabalho original de 1963 e apresenta uma fórmula simplificada para o que chamou de “princípio da escala de mudanças de preço<sup>7</sup>”. Comprovou que as séries temporais do algodão utilizadas em seu trabalho original eram estacionárias e demonstravam um processo estável não-gaussiano de distribuição dos preços, o qual preservava o mesmo aspecto, mudando apenas na escala.

Peters (1989) utilizou a técnica R/S de Hurst<sup>8</sup>, para avaliar a persistência de memória em séries de retornos mensais de ações do ranking S&P 500, títulos do tesouro norte-americano, e o retorno relativo entre as duas séries no período de 1950 a 1988, num total de 463 observações mensais. Utilizou a seguinte fórmula:

$$H = \frac{\log(R/S)}{\log(N)}$$

---

<sup>6</sup> Tradução livre de “*I conjecture therefore, that, since 1816, the process generating cotton prices, has changed only in its scale, with the possible exception of the Civil War [...]. Long series of monthly prices changes should therefore be represented by mixtures of Stable Paretian laws*”.

<sup>7</sup> Tradução livre de “*scaling principle of price change*”.

<sup>8</sup> Harold Edwin Hurst, hidrólogo que desenvolveu uma fórmula denominada *rescaled range analysis*, baseada em uma lei de potência para calcular o tamanho de reservatórios de água para o rio Nilo na década de 50. Posteriormente verificou-se que sua fórmula se aplica em diversos fenômenos da natureza. Essa técnica foi refinada em trabalhos posteriores, segundo Barkoulas e Baum (1996) por Mandelbrot (em 1972 e 1975), Mandelbrot e Wallis (em 1969) e Lo (1991). A técnica R/S de Hurst tem sido um dos testes mais utilizados para verificar se existe dinâmica fractal numa série.

Onde:  $R/S$  é a divisão da amplitude entre a maior e a menor ocorrência registrada ( $R$ ), pelo desvio padrão encontrado na série ( $S$ );  $N$  é o número de observações; e,  $H$  é o fator da lei de potência que originalmente foi objeto de estudo de Hurst, nesta fórmula chamada de Expoente de *Hurst*, variando entre zero e um, com as seguintes implicações para séries temporais:  $H = 0,5$  implica em comportamento puramente aleatório;  $H$  entre zero e  $0,5$  implica em comportamento não persistente, no qual uma tendência positiva no passado é mais provável de se converter em tendência negativa e vice-versa; e  $H$  maior que  $0,5$  ( $0,5 < H \leq 1$ ) implica em comportamento persistente, no qual uma tendência positiva no passado é mais provável de continuar positiva e vice-versa, e o nível desta persistência é medido quão maior for o resultado de  $0,5$ . Para Corazza e *al.* (1997), o processo fractal é uma generalização do passeio aleatório (*random walk*).

Os resultados obtidos por Peters (1989) foram:  $H$  de  $0,61$  para as ações,  $0,64$  para os títulos e  $0,66$  quando avaliada a relação entre ações/títulos. Peters atestou que, de fato, o comportamento do mercado evidenciou uma persistência de memória, característica do comportamento browniano fractal, mas não tão significativa que permitisse a projeção de resultados além de um curto período. O fator aleatório se mostrou muito mais presente. Concluiu que os resultados demonstram que o modelo “passeio aleatório puro” não se aplica aos mercados de capitais, conforme prega a hipótese dos mercados eficientes.

Larrain (1991) trabalhou com os conceitos de fractais, caos, não-linearidade e complexidade. Utilizou para análise informações trimestrais das taxas de juros dos T-Bills, no período entre 1962 e 1989. Definiu uma equação que capturasse não só o efeito dos preços passados sobre os preços atuais, mas este fato combinado com alguns fatores econômicos e financeiros, como renda, suprimento nominal de moeda

e a inflação, que também influenciam no comportamento das taxas de juros. Atestou a influência de ambos os fatores no comportamento das taxas. Na medida em que as características não-lineares se sobrepõem sobre a influência dos fatores fundamentais, a estrutura dinâmica fica mais predisposta a oscilações e mudanças abruptas de preços. Concluiu pela existência de não-linearidades, e que esses fatores são necessários, porém não suficientes para afirmar que a estrutura seja caótica ou fractal.

Muller *et al* (1993) encontraram propriedades fractais em séries temporais de taxas de câmbio, inclusive identificando o fator de escala (lei de potência) seguido pelos preços, a partir da análise dos intervalos de tempo desde poucos minutos até um ano com base em um modelo estatístico denominado  $\mathcal{G}$  - *model* desenvolvido pelos próprios autores (vide DACOROGNA *et al*, 1993). Utilizaram amostras diárias e intra-diárias do período compreendido entre junho de 1973 e junho de 1993. Os autores verificaram que as mudanças no comportamento dos preços se assemelham mais ao modelo fractal, em detrimento do processo GARCH. Além disso, a volatilidade é positivamente correlacionada com a atividade do mercado e o volume de transações, um indicativo de que o mercado é heterogêneo, onde os diferentes participantes analisam eventos passados e novos com diferentes horizontes de tempo e diferentes expectativas em negociações, o que cria volatilidade.

Corazza *et al* (1997) pesquisaram preços de futuros de commodities no período de 1981 a 1991 da bolsa de Chicago. Os autores aplicaram quatro testes, inclusive a técnica de Hurst e a técnica de Hurst refinada por Lo (1991). O resultado encontrado indica que a série histórica corresponde às propriedades fractais.

Barkoulas *et al* (1997) analisaram séries temporais mensais do período entre 1960 e 1994 de 21 *commodities*, em busca de evidências de dependência e

memória de longo-prazo, utilizando para isso uma abordagem diferente da utilizada por Peters (1989). Ao contrário de utilizar a técnica de *rescaled range* (RS), os autores trabalharam com um modelo AFRIMA (p,d,q), (sendo o parâmetro *d* interpretado como parâmetro de longa-memória). Assumindo que:  $-1/2 < d < 1/2$ , o processo AFRIMA exibe memória de longo-prazo para  $0 < d < 1/2$ ; memória de curto-prazo para  $d = 0$ ; e, memória intermediária para  $-1/2 < d < 0$ . Seis, entre as 21 commodities estudadas apresentaram evidências em favor de uma ordem fracional de integração: cobre, ouro, soja em grão, chá, lã e o índice UCAM<sup>9</sup>. Após a retirada de *outliers* ( $0,25 < \text{retornos} < -0,25$ ), foram realizados novos testes e verificada uma queda na evidência de fractalidade na série de lã, e o desaparecimento de indícios de fractalidade na série de cobre. Os autores concluíram que a presença de fractalidade nas séries temporais confirma a probabilidade de reversões no preço à vista, indicativas de processos não lineares, caracterizadas como flutuações cíclicas irregulares com dependência de longo-termo. Estas evidências sugerem o debate sobre a eficiência dos preços e a racionalidade do mercado.

Anteriormente Barkoulas e Baum (1996) analisaram a dependência dos retornos das ações no mercado norte-americano analisando índices setoriais e séries de empresas para avaliar os efeitos da agregação. Utilizando também o modelo AFRIMA, os autores não conseguiram detectar indícios de fractalidade nos preços das ações. Entretanto, os autores verificaram a presença em algumas séries de empresas.

Lo (1991) modificou a estatística R/S e aplicou nos dados do mercado acionário entre 1962 e 1987, com 6.409 observações. Lo encontrou pouca evidência de memória na história desse mercado.

---

<sup>9</sup> Índice UCAM, media ponderada de preços de exportação de 50 *commodities* primárias de países

Panas (2002) utilizou dados do fechamento diário das *commodities* cobre, alumínio, zinco, níquel, estanho e chumbo, do período entre janeiro de 1989 e dezembro de 2000 (num total de 2.987 observações), para atestar a presença de memória de longo-prazo e do caos no mercado de *commodities* minerais. Após a realização de testes estatísticos observou que todas as séries temporais possuíam distribuição não-normal, com exceção do cobre e do alumínio, apresentaram-se fortemente estacionárias. Além disso, apresentaram resultados indicativos de autocorrelação (30 *lags*). Para atestar a presença de memória de longo-prazo utilizou primeiramente a estatística R/S de Hurst, a qual apresentou resultados acima de 0,5 para todas as séries. No entanto, considerando que a estatística R/S apresenta viés nos resultados na presença de heterogeneidades, o autor realizou novamente os testes a partir da estatística R/S modificada por Lo (1991) chamada estatística Z(n). Desta vez os resultados para memória de longo-prazo foram positivos somente para alumínio. Na seqüência, testou a presença de memória com base no modelo AFRIMA, o qual indicou o alumínio e o cobre como apresentando dependência de longo-prazo, enquanto o níquel e o chumbo apresentaram dependência de curto-prazo, e os metais zinco e estanho apresentaram indícios de não-persistência de memória.

Após definir o modelo AFRIMA, os testes para detecção de comportamento caótico foram realizados a partir dos resíduos do modelo, com aplicação dos testes de Eckmann-Ruelle, Teorema de Brocks e verificação da sensibilidade do sistema a mudanças nas condições iniciais com base no expoente de Lyapunov. O resultado apontou para as *commodities* estanho e zinco, que apresentaram forte indicação de

comportamento caótico. Em contraste com a memória de longo-prazo, o caos representa um comportamento aleatório gerado por um modelo determinista.

Richards (2000) pesquisou a presença de fractalidade em séries temporais de taxas de câmbio diárias de 18 moedas correntes e, adicionalmente, de três índices compostos norte-americanos, todas com aproximadamente 30 anos de observações. Partiu da premissa de que as características estatísticas dos fractais são a não-homogeneidade e a intermitência. Conceituou a co-dimensão fractal como a diferença entre a dimensão fractal do espaço que abrange a série  $D$ , e a dimensão fractal intrínseca da série  $d$ .

$$C = D - d$$

Sendo que a série é homogênea quando  $C = 0$ , e não-homogênea ou fractal, quando  $C \neq 0$ . Os resultados indicaram que todas as taxas de câmbio apresentaram fortes evidências de não-homogeneidade, enquanto que os índices do governo norte-americano apresentaram fracas evidências de não-homogeneidade. O autor utilizou os métodos *state transition*, *AR1* e *GARCH*, para captar a volatilidade e irregularidade de períodos. Adicionalmente usou o Filtro de Kalman (vide KALMAN, 1960) para garantir a aplicabilidade dos métodos. O autor concluiu que existe uma modalidade de fractalidade estocástica, a qual possui um forte componente aleatório. Criticou o uso de modelos *ARIMA* e *ARCH*, alegando que, ainda que estes modelos captem algumas características das séries financeiras, não geram intermitência.

Na seqüência de suas pesquisas sobre a utilização do método *state transition* para realizar projeções de resultado de taxas de câmbio, Richards (2004) realizou análises comparando o método *ST-FRSR* (*state transition-fitted residual scale ratio*) com métodos da família *ARCH*: *GARCH* (vide BOLLERSLEV, 1986) e o *EGARCH*

(vide NELSON, 1991), em observações intra-diárias de quatro séries temporais com aproximadamente 30 anos de variações de taxas de câmbio. Os testes iniciais para detecção de fractalidade (não-homogeneidade) e simetria de escala apresentaram indícios de presença fractal, de moderada a fraca. Em relação aos modelos utilizados para projeções, o modelo ST- FRSR apresentou os melhores resultados para modelagem e projeção de alta volatilidade intra-diária, enquanto o modelo EGARCH apresentou os melhores resultados para séries diárias. O autor concluiu que as séries temporais analisadas seguiram um padrão de volatilidade estocástica difusa, com maior componente aleatório do que fractal, o que permitiu a projeção com base no modelo EGARCH.

Di Matteo *et al* (2005) estudaram empiricamente as propriedades de escala de 29 taxas de câmbio diárias, 32 índices do mercado financeiro e 28 instrumentos de renda fixa, pelo período aproximado de 10 anos. Partindo de estudos prévios que pressupõem a heterogeneidade dos mercados financeiros, os autores analisaram o grau de fractalidade de mercados desenvolvidos e emergentes para atestar se estes mercados apresentam diferenças. A análise estatística foi realizada através da abordagem geral de Hurst. Após testar os dados, os resultados indicaram a clara diferença entre os coeficientes de Hurst de acordo com o mercado atuante, sendo que todos os índices de mercados em desenvolvimento apresentaram  $H > 0,5$  e todos os índices dos mercados desenvolvidos apresentaram  $H < 0,5$ . O Brasil situou-se na categoria de resultados maiores que 0,5. Os autores testaram a validade do coeficiente de Hurst a partir da aplicação dos testes em 100 séries puramente aleatórias criadas em computador com o mesmo número de observações das séries utilizadas na pesquisa. Os resultados indicaram  $H = 0,5$  para todos os casos.

Os autores concluíram que todos os mercados financeiros mundiais apresentam simetria de escala, com características fractais que os distinguem, e que os métodos usualmente utilizados para controlar risco, com base no desvio padrão ou no índice de Sharpe, não são capazes de prover uma boa classificação como a realizada em sua pesquisa.

<b>Autor</b>	<b>Embasamento Teórico</b>	<b>Objetivo da Pesquisa</b>	<b>Ferramenta Estatística</b>	<b>Resultados</b>
Ralph Elliott (1934)	Comportamental	Compreender o comportamento dos mercados financeiros para predizê-los no futuro.	-	Percebeu que o comportamento dos preços das ações se dava em grandes ciclos atrelados ao tempo, em cinco principais movimentos que se repetiam em escalas menores.
Mandelbrot (1963)	Conceitos de Bachelier e curva de Gauss	Apresentar e testar um novo modelo representativo do comportamento dos preços em mercados especulativos.	Leis de Pareto Estável	Percebeu que, apesar de as séries temporais estudadas apresentarem comportamento não-gaussiano, estas eram estatisticamente e continham a mesma aparência, mudando apenas na escala.
Peters (1989)	Fractais	Avaliar a persistência de memória em séries de retornos mensais de ações e títulos do tesouro norte-americano.	Técnica de Hurst (R/S)	Evidenciou alguma persistência de memória nos mercados estudados, assim como também a presença de fator aleatório. Concluiu que o modelo "passeio aleatório puro" não se aplica ao mercado de capitais.
Larrain (1991)	Fractais, caos, não-linearidade e complexidade	Detectar indícios de fractalidade e caos no comportamento das taxas de juros de T-Bills	Os autores deduziram uma equação logística a partir de um modelo para testar mercados eficientes.	Concluíram pela existência de não-linearidade nas séries. Este fato é necessário, porém não suficiente para comprovar que a estrutura é fractal ou caótica.
Muller <i>et al</i> (1993)	Fractais	Identificar propriedades fractais em taxas de câmbio.	$\vartheta$ – <i>model</i> , baseado no tempo intrínseco $\vartheta$ – <i>time</i> , desenvolvido pelos próprios autores.	Encontraram propriedade fractais, inclusive identificando um fator de escala representativo do comportamento das séries estudadas.

Corazza <i>et al</i> (1997)	Fractais	Identificar propriedades fractais em preços futuros de <i>commodities</i> negociadas na bolsa de Chicago.	Técnica de Hurst (R/S)	Foram encontradas propriedades fractais nas séries estudadas.
Barkoulas e Baum (1996)	Fractais	Identificar dependência nos retornos das ações no mercado financeiro norte-americano.	AFRIMA	Não conseguiram detectar fractalidade de um modo sistemático, apenas em algumas séries.
Barkoulas <i>et al</i> (1997)	Fractais	Buscar evidências de dependência e memória de longo-prazo.	AFRIMA	Os autores confirmaram a presença de fractalidade nas séries temporais e a indicação de processos não lineares, caracterizadas como flutuações cíclicas irregulares com dependência de longo-termo.
Lo (1991)	Fractais	Buscar evidências de memória de longo-prazo.	Técnica de Hurst (R/S)	Pouca evidência de memória de longo-prazo na amostra utilizada.
Panas (2002)	Caos e fractais	Atestar evidências de memória de longo-prazo e comportamento caótico em <i>commodities</i> minerais.	Para detectar fractalidade: Técnica de Hurst (R/S) AFRIMA; Para detectar evidências de caos: Eckmann-Ruelle Teorema de Brocks e Índice de Lyapunov.	Chegou aos seguintes resultados: Os testes detectaram memória de longo-prazo em Alumínio e Cobre; curto-prazo em níquel e chumbo, Estanho e zinco não apresentaram indícios de persistência, mas apresentaram de comportamento caótico.
Richards (2000; 2004)	Fractais (não-homogeneidade; intermitência).	Detectar presença de fractalidade em taxas de câmbio e índices norte-americanos.	GARCH AR1 Variações de modelos <i>State Transition</i>	Concluiu que existe uma modalidade de fractalidade estocástica, com maior componente aleatório do que fractal, o que permitiu projeção com base em modelo GARCH.
Di Matteo <i>et al</i> (2005)	Fractais	Analisar o grau de fractalidade de mercados desenvolvidos e emergentes para atestar se estes mercados apresentam diferenças.	Técnica de Hurst (R/S)	Concluíram que todos os mercados financeiros mundiais apresentam simetria de escala, com características fractais que os distinguem.

Quadro 2: Resumo das Pesquisas Sobre Séries Temporais com Base na Teoria dos Fractais e Teorias Afins

Fonte: Elaboração própria

## 3.2 *Commodity* Cobre

Esta seção é dedicada ao estudo do minério de cobre: história da utilização pelo homem e alguns aspectos de sua comercialização e uma avaliação de sua participação no contexto mineral brasileiro.

### 3.2.1 Aspectos Gerais

*Commodity* é uma palavra em inglês que possui um significado genérico de “um artigo de comércio<sup>10</sup>”. De acordo com o Novo Dicionário de Economia, é “*um tipo particular de mercadoria em estado bruto ou produto primário de importância comercial, como é o caso do café, algodão, estanho, cobre, entre outros*”. Na prática, o conceito de *commodity* foi consuetudinariamente associado a um produto não especializado, ou de tecnologia amplamente difundida, produzido e transportado em grandes volumes.

O minério de cobre é utilizado pelo homem há mais de 7.000 mil anos e seu uso combinado com o estanho, formando o bronze, tem registros de utilização de mais de 5.000 anos. Até meados do século XIX, o comércio de cobre foi controlado pela Grã-Bretanha, que possuía maior tecnologia para tratamento do minério. Entretanto, ainda naquele século, foram descobertas novas minas nos Estados Unidos, Chile e Austrália. Este fato, aliado ao desenvolvimento de novas tecnologias de concentração, que permitiram o aproveitamento de minérios de baixo teor,

resultou na expansão global do mercado de minério de cobre no século XX (NYMEX, 2005).

Entre suas utilizações, destaca-se a produção de fios e cabos elétricos, ligas especiais, tubos, laminados e extrudados. O cobre metálico é excelente condutor de eletricidade e calor, tendo vasta aplicação em diversos setores industriais, com destaque para os de construção civil, telecomunicações, eletroeletrônica, transmissão e distribuição de energia (ANDRADE *et al*, 2001).

Os preços da commodity cobre são ditados pela *London Metal Exchange - LME* e pela *Commodity Exchange of New York - COMEX*, sendo a forma mais usual de transação através de contratos de operações futuras. Os preços são cotados em US\$ cents/libra<sup>11</sup> (centavos de dólar por libra-peso) de cobre contido em concentrado.

De modo geral, o comércio mundial de minérios está em alta, notadamente com a expansão de mercados como China e Índia. Neste aspecto, desde 2002 a produção mundial de minério de cobre não supera a sua demanda, o que provocou uma alta acumulada de 61% no período de 2002 a 2004, e 58% somente no ano de 2005 (VALOR, 2006).

### 3.2.2 Análise do Minério de Cobre no Contexto Mineral Brasileiro

No Brasil, em 1874, foi descoberta a primeira mina de cobre no sertão da Bahia. Setenta anos depois, foram iniciados trabalhos de sondagem para verificar seu potencial tendo sido fundada em 1969 o primeiro empreendimento para

---

<sup>10</sup> Tradução livre de “*an article of commerce*”.

exploração do minério em Jaguarari – BA (PARANAPANEMA, 2005). As minas de cobre do Complexo Minerador de Carajás no Pará foram descobertas na década de 90, a partir da identificação de anomalias magnéticas que revelaram a existência de calcopirita, o principal minério de cobre (CVRD, 2005).

No entanto, o Brasil, até 2003, não possuía produção expressiva de minério de cobre com cerca de 32 mil toneladas frente a uma necessidade de 300 mil, importando cobre contido em concentrado do Chile, Argentina, Peru, Portugal e Indonésia, para abastecer as empresas produtoras de catodo e de semi-acabados de cobre no País (UDESC, 2005). A partir de 2004 começou a exploração em larga escala no Brasil com o início da abertura das minas de cobre no estado do Pará. No total as reservas estão estimadas em 1,09 bilhões de toneladas de cobre com teor entre 0,7% e 1%, divididas em cinco minas.

Tabela 1 – Reservas Estimadas das Minas de Cobre no Estado do Pará

Mina	Reserva Estimada – milhões de ton.
Sossego	250
Alvo 118	78
Salobo	302
Alemão	200
Cristalino	261

Fonte: Companhia Vale do Rio Doce. Disponível em: <<http://www.cvrd.com.br/>>.

A Companhia Vale do Rio Doce (2006), empresa que está realizando investimentos na região, exportou em 2004 e em 2005, respectivamente 269 e 398 mil toneladas de concentrado de cobre a 30%, contendo aproximadamente 81 e 119 mil toneladas de minério contido. De acordo com dados do DNPM (2005), o destino da produção de cobre de 2004 foi em 67,33% para atender o mercado externo e

<sup>11</sup> A relação entre libra e quilograma é de 1 lb = 0,453 kg.

32,68% para atender o mercado interno. Apesar do percentual expressivo de exportação, este ainda não foi suficiente para gerar saldo positivo na balança comercial deste minério, que apresentou déficit na balança comercial de 312,11 mil toneladas, representando US\$ 292.46 mil.

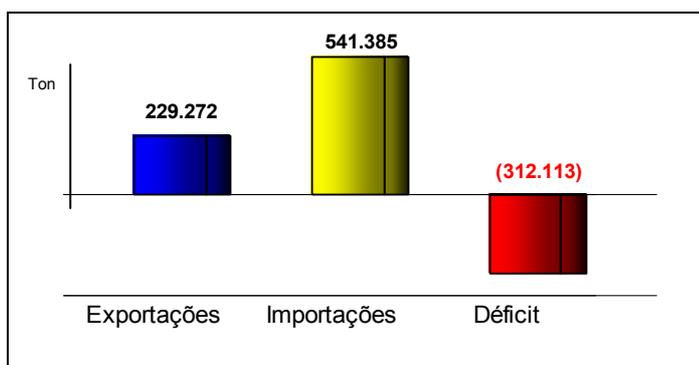


Gráfico 1 – Saldo da Balança Comercial em Toneladas de Minério Exportado (2004).  
Fonte: DNPM. Disponível em: <[www.dnpm.gov.br](http://www.dnpm.gov.br)>

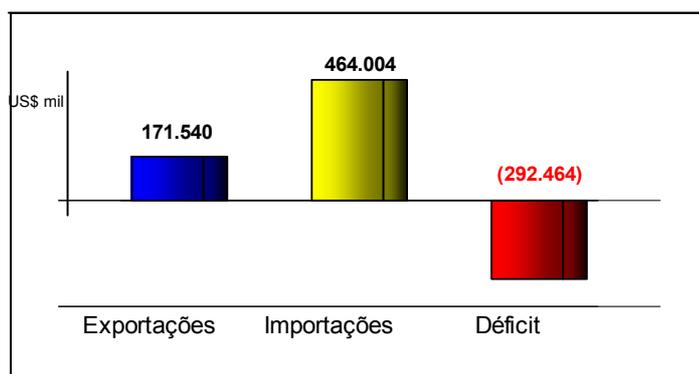


Gráfico 2 – Saldo da Balança Comercial em US\$ milhares (2004).  
Fonte: DNPM. Disponível em: <[www.dnpm.gov.br](http://www.dnpm.gov.br)>

Com a implantação de novos projetos e abertura de novas minas, a produção nacional deverá chegar a 650 mil t/ano de cobre contido em concentrado até o ano de 2010, o que colocará o Brasil entre os cinco maiores exportadores do mundo (ROSA, 2003), gerando quantidade suficiente para abastecer o mercado interno e favorecer a balança comercial do País.

Além do estado do Pará e da Bahia, o Brasil possui reservas de cobre nos estados da Goiás e Paraná, ainda sem quantificação.

## 4 PESQUISA EMPÍRICA

### 4.1 Técnica de Pesquisa

Tendo em vista os objetivos desta pesquisa, a série deverá ser dividida em dois momentos no tempo.

O primeiro momento é utilizado com duas funções: 1) para identificar se o comportamento das séries temporais de preços assume alguma forma de comportamento fractal; e, 2) analisar se as variáveis identificadas como prováveis provocadoras da oscilação dos preços exerceram influência significativa sobre este comportamento no período estudado.

O que se chama “primeiro momento” neste trabalho corresponde a 94% das observações contidas na amostra. Este conjunto de informações será a base para a identificação do fator de escala e, respectivamente, a equação matemática representativa deste movimento.

O segundo momento, ainda no tempo passado e pertencente a amostra obtida, será utilizado para testar a precisão da equação definida. Neste ponto reside importante aspecto em se modelar com base na teoria dos fractais, que a difere das demais técnicas de projeção e cria valor específico para a metodologia em questão: a projeção de preços com base em padrões fractais não busca “adivinhar preços futuros”, tal qual Lorenz (1996, p.99), em seus estudos sobre a teoria do caos, questiona “[...] por que deveríamos ser capazes de fazer qualquer tipo de previsão? Por que, efetivamente, deveríamos esperar ver o futuro, ou uma pequena parte dele?”.

Com base em fractais é possível definir padrões de comportamentos que se assemelhem com a realidade na questão da amplitude de oscilação ao redor da média, em uma espécie de semelhança estatística. Em oposição a metodologias que assumem padrões de distribuição normal de preços e variância constante, a modelagem fractal permite captar a oscilação de valores real, fato crítico para análise financeira de novos investimentos quando são questionados aspectos como: até que nível de preços, e, por conseguinte nível de faturamento, o negócio mantém-se em equilíbrio? Qual a probabilidade histórica de ocorrência destes “picos” de alta e baixa de preços?

Portanto, a fim de comprovar a semelhança estatística entre a série projetada e os dados reais, serão comparados: os picos máximo e mínimo de preços, média, desvio padrão e normalidade. A priori, resultados compatíveis indicam a eficiência do modelo, ou seja: se a oscilação de preços e o risco se mostram compatíveis, determinado projeto de viabilidade financeira está calcado em bases sólidas de projeção.

Na seqüência do trabalho, uma vez obtido êxito nas projeções, a amostra será unificada e ter-se-á um novo conjunto de informações, os quais servirão de base para a identificação e modelagem da equação matemática final que poderá ser utilizada em projeções de preços em análise de projetos de mineração de cobre.

## **4.2 Os Dados**

Os preços diários de minério de cobre utilizados nesta pesquisa foram disponibilizados pela COMEX em duas fontes: 1) para o período entre 05/06/1974 e

31/08/2001, as informações foram compradas de um banco de dados privado norte-americano; e, 2) para o período a partir de 04/09/2001, a partir do qual as informações passaram a ser publicamente disponibilizadas, até 30/12/2005 as informações foram coletadas diretamente do sítio da COMEX. No total são 7.922 observações diárias em 379 meses, sendo que o primeiro período (94%) contém 7.423 observações e o segundo período (para comparação, 6%) contém 499.

Explica-se o percentual utilizado na primeira amostra em função da necessidade do maior número possível de observações para detectar evidências de fractalidade que capturem a tendência de alta iniciada a partir do ano de 2003, conforme se observa no gráfico de preços da amostra completa. Estes aspectos são importantes na determinação do fator de escala que definirá o padrão de projeção de preços.

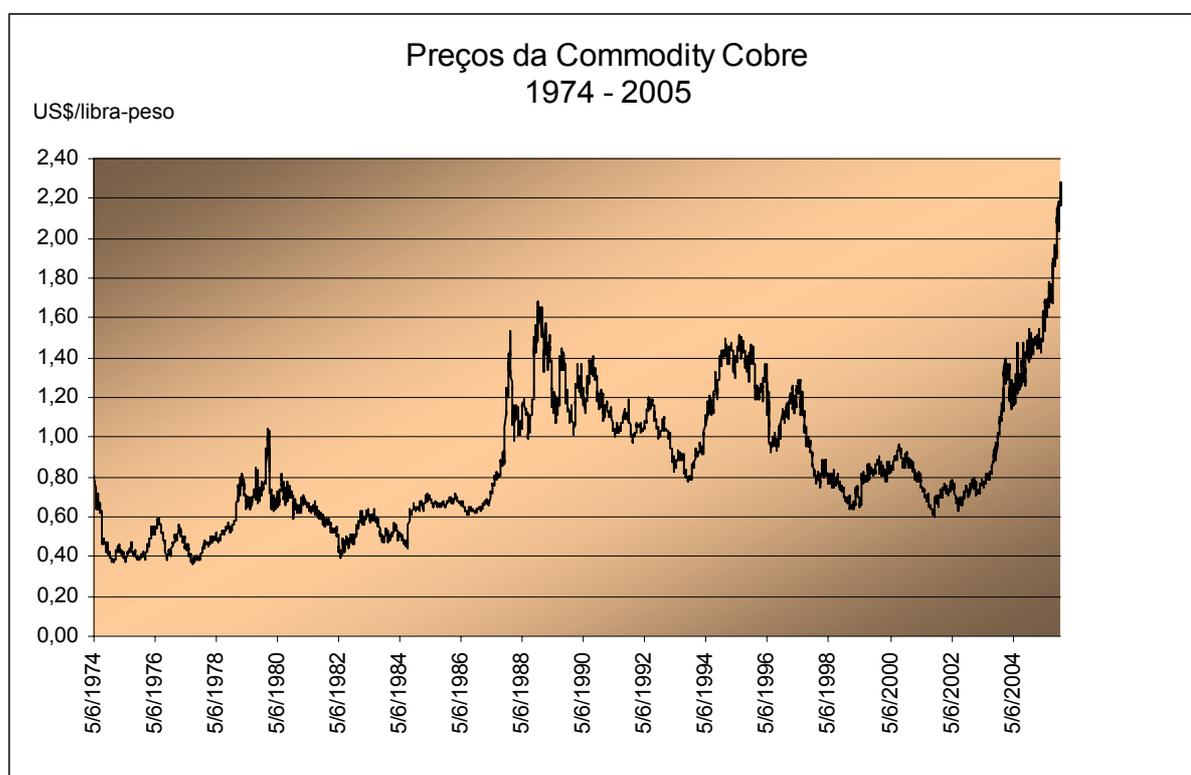


Gráfico 3 – Preços da *Commodity* Cobre (amostra completa) em US\$/libra-peso.  
Fonte: elaboração própria.

#### 4.2.1 Análise do impacto da Inflação Norte-americana Sobre a Série de Preços

A série utilizada neste estudo não foi deflacionada. A principal razão para não deflacionar reside no fato de que, *a priori*, os preços negociados na COMEX refletem o resultado de negociações entre produtores e compradores, sofrendo forte influência de fatores como variações de estoque e demanda em nível mundial e crises especulativas a que a bolsa de *commodities* está sujeita.

O levantamento da inflação acumulada norte-americana para o período total da análise, de acordo com o Índice de Preços ao Consumidor, fornecido pelo *U.S. Department of Labor, Bureau of Labor Statistics*, indicou uma inflação acumulada para o período de 1974 a 2005 de 316%, tendo ocorrido grande alta de preços nas décadas de 70 e 80. Esta análise vai de encontro ao aumento de preços observados na série histórica de preços do cobre, a qual apresentou variação total no período de 177,1%, sendo que durante as décadas de 70 e 80, foi observada forte retração nos preços, chegando a -43,6% em 1984. Em contraste, entre 2001 e 2005 foi observada alta nos preços de cobre de 154,5%, enquanto a inflação acumulada norte-americana ficou na ordem de 14%.

Adicionalmente foi observado durante a revisão bibliográfica que pesquisas publicadas sobre comportamento de preços não tiveram suas séries temporais deflacionadas.

#### 4.2.2 Análise Histórica de Eventos que Tenham Demonstrado Influência Sistemática Sobre a Determinação de Preços do Cobre

Ao longo do tempo, a maior influência exercida sobre os preços mundiais do minério de cobre pode ser atribuída à relação existente entre a produção mundial do minério e sua demanda. De acordo com Edelstein (1999) podem-se realizar as correlações que se seguem entre o cenário econômico mundial e os preços do cobre.

No final dos anos 60 e início dos anos 70, a demanda pelo produto estava alta, em função da guerra do Vietnã e do desenvolvimento acelerado que o mundo vivia, na chamada era de ouro do desenvolvimento mundial. Entre 1964 e 1974 a produção esteve ajustada à demanda e os preços mantiveram-se equilibrados com tendência de crescimento anual;

O período que se seguiu entre 1975 e 1986 foi marcado por um excedente de produção em relação à demanda pelo minério, provocando queda mundial e baixa volatilidade dos preços. Neste período fez-se uma exceção durante alguns meses do ano de 1980, nos quais houve alto volume de transações comerciais, associado a baixos níveis de estoques Governamentais, o que provocou uma elevação de preços, mas a recessão mundial enfrentada durante os anos de 1981 a 1986 novamente voltaram a deprimir os preços do minério;

Durante o período de recessão associado com altos estoques e preços baixos, a indústria da mineração de cobre esteve estagnada, sem novos investimentos, com fechamento de minas ou paradas programadas de produção. Como conseqüência, no período que se seguiu a partir de 1987 foi marcado por

baixos estoques e reaquecimento dos preços, chegando em dezembro de 1988 a US\$ 1,6613/lb, sua cotação máxima superada apenas 17 anos depois em junho de 2005.

Num padrão histórico de comportamento, a indústria voltou a investir e os estoques voltaram a crescer no início da década de 90, provocando queda dos preços a partir de 1992, chegando em seu menor nível em novembro de 1993 desde 1987.

A partir de 1994 os preços voltaram a subir devido ao aumento real de demanda provocado principalmente pelo desenvolvimento dos países asiáticos e em 1995 por operações de *corner*<sup>12</sup> que elevaram os preços do cobre, conduzidas pelo banco japonês Sumitomo. Com a descoberta da manipulação por parte do banco os preços voltaram a cair e não se recuperaram, pois em 1997 iniciou-se a crise asiática.

À época da crise, os países do sudeste asiático eram responsáveis por 40% das importações mundiais de cobre refinado e 54,6% das importações de cobre contido em concentrado (ANDRADE, 1998). O valor da libra-peso do cobre contido que chegou a US\$ 1,2850 em junho de 1997, caiu para US\$ 0,639 em março de 1999.

Nos anos que sucederam a crise asiática, ainda que a utilização do minério de cobre tenha se intensificado no setor de eletroeletrônico e em novas áreas de tecnologia, como sistemas de aquecimento e equipamentos médicos, a recuperação dos preços se deu a partir de 2002, com o intenso crescimento da China, que

---

<sup>12</sup> Fazer um *corner* em um mercado é tomar o controle desse mercado através da compra de tantos títulos que pouco desses títulos restam. Assim, esse indivíduo ou grupo acaba definindo o preço do ativo acima de qualquer preço considerando a relação entre a oferta e a procura (Think Finance, 2006).

provocou uma forte descompensação entre a demanda e a capacidade de produção mundial, fato que acarretou no período entre 2002 e 2005 aumento superior a 200% nos preços mundiais do minério. Adicionalmente, Prates (2003) afirma que a desvalorização do dólar frente ao euro e ao iene resulta em preços mais baixos para os países europeus e para o Japão, fomentando a demanda por estes bens, a demanda também tem sido fomentada pela expectativa confiante de retomada de crescimento dos países centrais e pelas compras especulativas por parte de fundos de hedge, estes fatos se contrapondo a lenta resposta dos produtores mundiais de minérios.

De acordo com as estimativas do *International Copper Study Group* (apud CVRD, 2005) houve déficit de 705 mil toneladas de cobre em 2004, o que se seguiu a um desequilíbrio entre demanda e produção de 386 mil toneladas em 2003, e os estoques conhecidos de cobre estão em seu menor nível dos últimos 18 anos.

Sobre o comportamento dos preços futuros, os analistas se dividem em duas tendências: 1) a tendência de alta persiste com o processo de industrialização da Índia, ou seja, após o *boom* de desenvolvimento e crescimento da China, com subsequente acomodação da produção anual, o desenvolvimento da Índia continuará criando uma defasagem nos estoques em relação à demanda mundial (ELLIOT, 2006); 2) como em toda a história dos preços de cobre, ciclos de altos preços e baixos estoques são seguidos por ciclos de altos estoques e baixos preços (VALOR, 2006).

#### **4.3 Estatística Descritiva da Série Temporal**

A série temporal de preços diários de minério de cobre na qual os testes para presença de fractalidade foram aplicados compreende o período entre 05/06/1974 e 31/12/2003, em um total de 7.423 observações, conforme Gráfico 4.

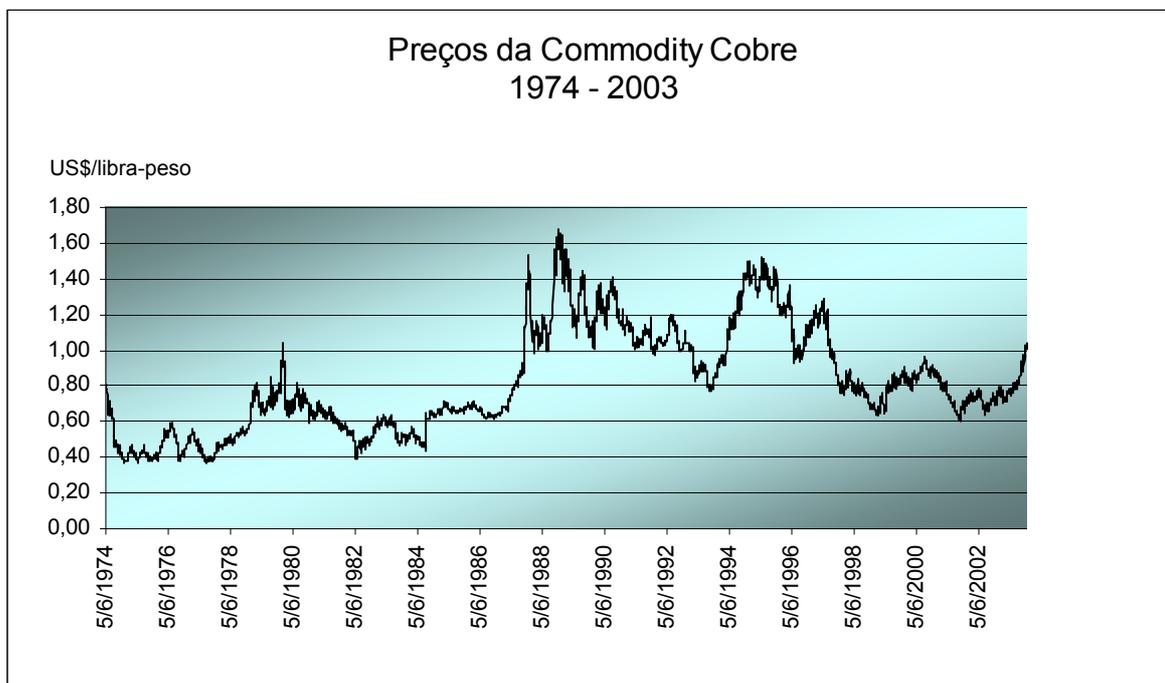


Gráfico 4 – Preços da Commodity Cobre (1974 - 2003)  
Fonte: elaboração própria

O gráfico 4 revela o padrão de crescimento e decréscimo dos preços ao longo do tempo, com picos de oscilação periódicos. Os preços saíram do patamar de US\$ 0,78/lb em junho de 1974 para alcançar US\$ 1,043/lb no final de dezembro de 2003, após ciclos de preços altos e baixos. Maiores valores alcançados em fevereiro de 1980: US\$ 1,035/lb; dezembro de 1988: US\$ 1,661/lb; agosto de 1995: US\$ 1,485/lb. A média dos preços no período US\$ 0,75/lb com desvio padrão de 0,2902.

O retorno dos preços, apresentado no gráfico 5, foi calculado através do logaritmo natural do quociente entre os preços de dois dias consecutivos. O retorno médio foi de 0,004% por dia, tendo sido observado a pior variação -14,39 e a maior variação de 15,85% em um só dia. Para o período total da amostra a variação foi de 33,72%. Esses dados são melhor visualizados no Quadro 3.

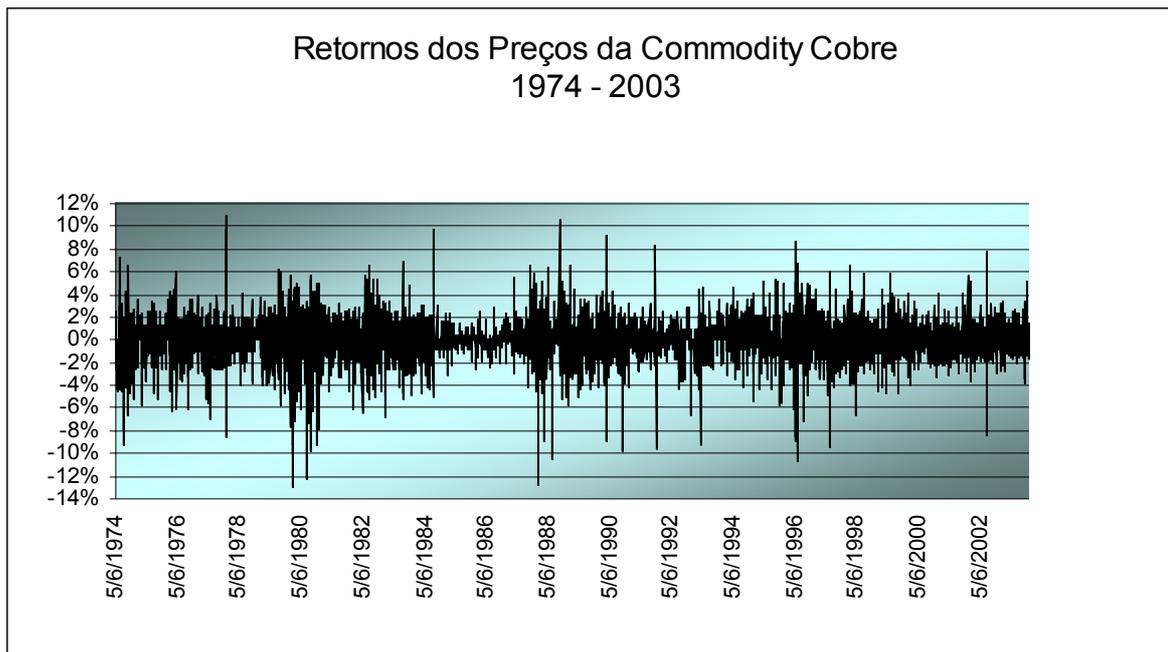


Gráfico 5 – Retornos dos Preços da Commodity Cobre (1974 - 2003)  
Fonte: elaboração própria

De acordo com as informações já descritas, abaixo segue um quadro-resumo com os principais itens da estatística descritiva:

<b>Preços - US\$/lb</b>	
Mínimo	0,780
Máximo	1,043
Média	0,750
Desvio padrão	0,290
<b>Retornos - %</b>	
Mínimo	-14,39
Máximo	15,85
Média	0,004
Desvio padrão	33,72

Quadro 3: Estatística Descritiva da Série Temporal de Preços de Minério de Cobre  
Fonte: Elaboração própria

#### 4.4 Testes Estatísticos Aplicados para Detectar Evidências de Fractalidade

Considerando como o conjunto de evidências que caracteriza a presença de fractalidade em séries temporais a distribuição não-gaussiana dos retornos diários

em relação à média, a não-linearidade da série temporal e a persistência de memória de curto e longo prazo. A fim de verificar se existem na série temporal estudada, serão aplicados testes estatísticos específicos que permitirão identificar o grau de fractalidade que a série apresenta. Adicionalmente será realizado teste para estacionaridade.

#### 4.4.1 Normalidade

A teoria dos fractais tem como premissa a distribuição não-normal das variáveis no tempo. Brooks (2002) apresenta o teste de normalidade de Bera-Jarque como o mais utilizado. Este teste permite analisar a distribuição das variáveis sob dois pontos: assimetria e curtose. O primeiro permite medir a extensão a qual a distribuição possui simetria em relação à própria média da série. O segundo compara a distribuição de frequências da amostra com a distribuição normal (LAPONNI, 2000). Neste sentido, a distribuição normal é simétrica e mesocúrtica.

O teste de Bera-Jarque é realizado a partir dos resultados de assimetria e curtose. Considera-se a tabela do  $\chi^2$ , com dois graus de liberdade e significância de 5%. O teste é dado pela seguinte equação:

$$W = N \left[ \frac{\text{ass}^2}{6} + \frac{(\text{curt} - 3)^2}{24} \right]$$

Onde: N é o tamanho da amostra. As hipóteses levantadas são:

$H_0$ :  $W < 5,991$ ; distribuição normal.

$H_1$ :  $W \geq 5,991$ ; distribuição não-normal.

Os cálculos de assimetria, curtose e a estatística de Bera-Jarque são realizados pelo software *Eviews* versão 5.0, a partir da série histórica dos preços e dos retornos dos preços do minério de cobre.

#### 4.4.2 Linearidade

Considerando a propriedade não-linear das séries temporais com características fractais, é necessária a aplicação de um teste para identificar se as variáveis que compõem a série são, ou não, independentes e identicamente distribuídas – IID. O teste aplicado é o BDS - Brock, Dechert, Scheinkman and LeBaron, que pode detectar várias situações em que as variáveis não são IID, tais como não-estacionariedade, não-linearidade e caos determinístico.

O teste utiliza os resíduos da série e se baseia no conceito de integral de correlação  $C_m(\varepsilon)$ , cujo cálculo é dado pela expressão:

$$C_m(\varepsilon) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(T-m)(T-m+1)} \sum_{i,j=1}^T I(|x_i^m - x_j^m| < \varepsilon), \quad i \neq j.$$

O teste BDS é dado por:

$$BDS_m = \sqrt{T} \frac{[C_m(\varepsilon) - (C_1(\varepsilon))^m]}{V_m^{1/2}} \sim N(0, 1).$$

Onde  $C_m(\varepsilon)$  é a integral de correlação,  $\varepsilon$  é a distância entre os vetores (dada em desvios-padrão),  $m$  é a dimensão de encaixamento,  $T$  é o tamanho da amostra;  $x$  é o vetor de resíduos e  $V_m$  é a variância da integral de correlação.

O teste consiste na análise da distância de um ponto qualquer escolhido ( $\varepsilon$ ) e uma seqüência de pares pontos formados a partir da amostra  $(i, j)$ , ( $i$ : valor,  $j$ : tempo). Se as observações forem IID, a probabilidade de a distância entre qualquer par de pontos ser menor ou igual a  $(\varepsilon)$  é constante. Esta probabilidade é denotada por  $C_m(\varepsilon)$ . Os cálculos são realizados pelo software *Eviews* versão 5.0, a partir da série histórica dos preços do minério de cobre, com  $(\varepsilon)$  definido em 0,5; 1; 1,5 e 2,0 desvios-padrão<sup>13</sup> para dimensões de 2 a 6.

O valor crítico para rejeição da hipótese nula no nível de significância de 5%, é igual ou maior a 1,96 (distribuição bicaudal - valor absoluto). As hipóteses levantadas são:

$H_0$ : a série histórica possui variáveis IID indicando que o modelo possui características lineares;

$H_1$ : a série histórica não possui variáveis IID indicando que o modelo possui características de não-linearidade.

#### 4.4.3 Persistência de Memória

Nesta pesquisa é utilizada a técnica *rescaled range* (R/S) de Hurst apresentada por Peters (1989) para avaliar a persistência de memória na série de preços diários do cobre. A escolha por este teste é fruto da observação de sua aplicação com êxito em outras pesquisas envolvendo séries temporais de preços.

---

<sup>13</sup> A escolha por esses níveis de desvio-padrão está em função da literatura. Testes para detecção de linearidade em séries temporais têm utilizado esses parâmetros com êxito (vide, por exemplo, CHÁVEZ e FERNANDES, 2004).

O resultado, representado pela letra H, é o fator da lei de potência que representa a série, chamado de *Expoente de Hurst*, variando entre zero e um, com as seguintes implicações para séries temporais:

H = 0,5 implica em comportamento puramente aleatório;

H entre zero e 0,5 implica em comportamento não persistente, no qual uma tendência positiva no passado é mais provável de se converter em tendência negativa e vice-versa; e,

H maior que 0,5 ( $0,5 < H \leq 1$ ) implica em comportamento persistente, no qual uma tendência positiva no passado é mais provável de continuar positiva e vice-versa, e o nível desta persistência é medido quão maior for o resultado de 0,5.

Encontra-se H a partir da regressão:

$$\text{Log}(R/S) = \alpha + \beta \text{Log}(N)$$

Para a qual são calculados valores de  $x$  e  $y$  de acordo com o número de observações da amostra, sendo (R/S) a divisão da amplitude entre a maior e a menor ocorrência registrada (R), pelo desvio padrão encontrado na série (S) e  $N$  é o número de observações. Assim,  $H = \beta$ .

Através da ferramenta *Excel*, são calculados os valores de  $x$  ( $\text{Log}(N)$ ) e  $y$  ( $\text{Log}(R/S)$ ), tendo sido definidos tantos valores quanto o número de observações da amostra, ou seja, para cada nova observação (incremento de tempo) são calculados novos valores para  $x$  e  $y$ . Na seqüência, para a realização da regressão linear, também é utilizada a ferramenta *Excel*.

#### 4.4.4 Estacionaridade

Mandelbrot (1997) define a estacionaridade como uma das características básicas do comportamento de séries temporais fractais. De acordo com Brooks (2002), um processo é considerado estacionário se suas média, variância e autocovariância se mantêm constantes ao longo do tempo. Estatisticamente, a presença de uma ou mais raízes unitárias indica não-estacionaridade no comportamento de uma série histórica, este fenômeno pode ser detectado através do teste Dickey-Fuller Aumentado (ADF). Dada uma equação estocástica:

$$X_t = \mu + \phi_1 X_{t-1} + u_t$$

Para a qual se têm:  $\phi \geq 1$ : comportamento não-estacionário; e,  $\phi < 1$ : comportamento estacionário.

O valor crítico para observação do resultado do teste ADF é de -2,86 para o nível de significância de 5%, sendo rejeitada a hipótese nula em favor da estacionaridade para resultados mais negativos do que o valor crítico. Os cálculos são realizados pelo software *Eviews* versão 5.0. As hipóteses levantadas são:

$H_0$ : existem raízes unitárias, comportamento não-estacionário;

$H_1$ : não existem raízes unitárias, comportamento estacionário.

#### 4.4.5 Análise dos Resultados Esperados

O quadro (4) apresenta os resultados esperados para os testes estatísticos. Estes resultados sugerem que a série temporal apresenta características fractais, permitindo a projeção de preços com base no modelo browniano fractal.

Teste Estatístico	Resultado	Interpretação
Bera-Jarque – preços	$W \geq 5,991$	Distribuição não-normal
Bera-Jarque – retornos	$W \geq 5,991$	Distribuição não-normal
BDS	$P\text{-value} \leq 0,05$	Não-linearidade
Rescaled range (R/S)	$0,5 < H \leq 1$	Fractalidade

Quadro 4: Resultados Esperados para os Testes Estatísticos.  
Fonte: Elaboração própria.

#### 4.5 Modelo Utilizado para Projeção de Preços

O modelo pretendido, desenvolvido por Benoit Mandelbrot em 1965 é o FBM - *Fractional Brownian Motion*, modelo browniano fracionário. Tem como base um significativo parâmetro: o expoente de Hurst satisfaz a condição  $0 < H < 1$ .

A fractalidade de séries financeiras encontra-se no fator “tempo”, para o qual Mandelbrot utiliza a expressão *trading time*, ou tempo de negociação. Considerando uma variação de preço  $\Delta x$  sobre um incremento de tempo  $\Delta t$ , assumido como mínimo, trata-se de um comportamento onde:

$$\Delta x \sim \Delta t^H$$

Onde o expoente H é invariante no tempo e  $\neq \frac{1}{2}$ . Modelos com essa característica, que possuem um único fator de escala, são chamados de unifractais.

Falconer (2004, p. 267) define o modelo browniano fractal de um índice  $\alpha$  (hurst),  $0 < \alpha < 1$ , como um processo no qual  $X: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , que satisfaça as seguintes condições:

(i) com probabilidade 1,  $X(t)$  é contínuo e  $X(0) = 0$ ;

(ii) para todo  $t \geq 0$  e  $h > 0$  os incrementos  $X(t+h) - X(t)$  são estacionários, têm distribuição normal com média zero e variância  $h^{2\alpha}$ :

$$P(X(t+h) - X(t) \leq x) = (2\pi)^{-1/2} h^{-\alpha} \int_{-\infty}^x \exp(-u^2/2h^{2\alpha}) du$$

Onde:

$P$  é uma medida da probabilidade de que os incrementos projetados pelo modelo situam-se dentro de um limite finito ( $x$ );

$X$  é uma função da amostra, sendo que  $t \rightarrow X(\omega, t)$  para cada ponto  $\omega$  em um espaço de amostra  $\Omega$ ; e

$\alpha$  é o expoente de Hurst; e,

$h$  representa o incremento de tempo, dado pela variância da série temporal.

Desde a sua concepção, em 1965, o modelo matemático desenvolvido por Mandelbrot vem sofrendo melhoras e ajustes. Em 1997 Mandelbrot apresentou os fundamentos matemáticos de modelos multifractais, chamados de movimentos brownianos em tempo multifractal - BMMT<sup>14</sup>, os quais pressupõem em uma mesma série temporal financeira a existência de múltiplos expoentes de Hurst e diferentes leis de potência. Certamente os novos modelos capturam melhor os movimentos fractais, tendo por consequência melhor capacidade de predição, mas como próprio Mandelbrot (2001, p.427) admite:

---

<sup>14</sup> Tradução livre de Brownian motions in multifractal time – BMMT.

[...] Entretanto, BMMT é novo, delicado e difícil de ser assimilado. Sem o domínio de muitas fórmulas e diagramas adicionais, as contribuições a respeito dos fractais não podem ser inteiramente compreendidas e apreciadas. Uma extensiva base matemática existe para os fractais [...]. Infelizmente, a maioria é complexa<sup>15</sup>.

Assim, a opção desta pesquisa é utilizar um modelo com uma base matemática de razoável compreensão, que permita a vinculação da teoria aos resultados empíricos, sem perda de substância ou de seu próprio foco.

---

<sup>15</sup> Tradução livre de: “However, BMMT is new, delicate, and hard to grasp fully. Without mastering many additional formulae and diagrams, the claims and contributions concerning multifractals cannot be fully understood and appreciated. An extensive mathematical basis already exists for multifractals [...]. Unfortunately, most are complex”.

## 5 RESULTADOS

### 5.1 Resultados dos Testes Estatísticos

#### 5.1.1 Normalidade

Os resultados encontrados com a aplicação do teste de Bera-Jarque estão dentro dos parâmetros esperados, notadamente para os retornos, os quais apresentaram as características descritas na literatura (PETERS, 1994; MANDELBROT, 1997; 2004) de padrões leptocúrticos.

Dessa forma, a hipótese nula, que previa um padrão de distribuição normal foi rejeitada em favor da hipótese alternativa, em ambos os casos, preços e retornos, conforme demonstram os resultados para a série preços, de 504,18 e série retornos, de 16.775,06. A figura 8 representa o *output* do *software* para a distribuição dos preços, a qual se mostrou platicúrtica com assimetria positiva (à direita). A figura 9 representa o *output* do *software* para a distribuição dos retornos dos preços, a qual se mostrou leptocúrtica com assimetria negativa (à esquerda).

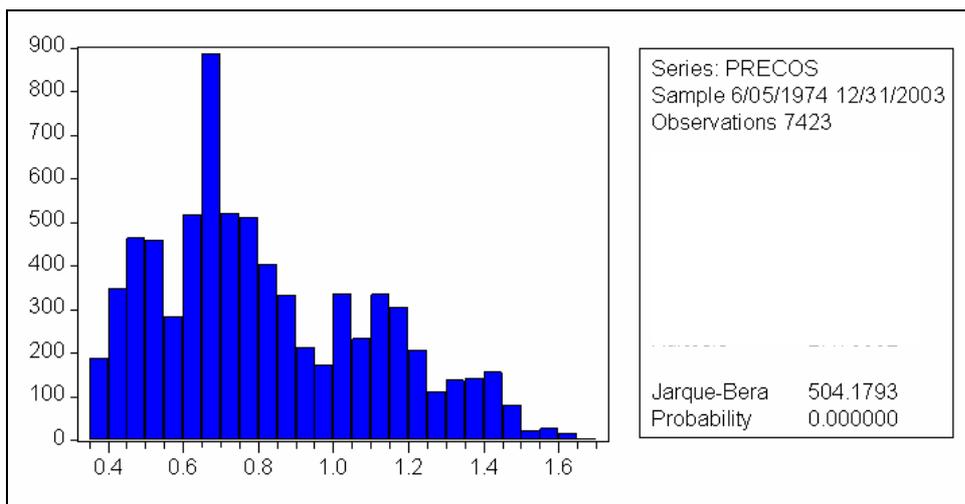


Figura 8 – Histograma dos Preços da *Commodity* Cobre  
Fonte: Elaboração própria

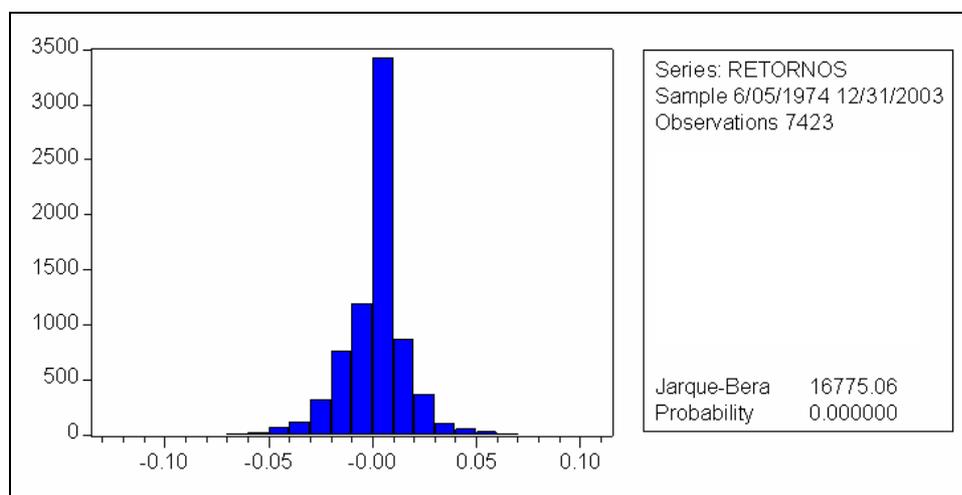


Figura 9 – Histograma dos Retornos dos Preços da *Commodity* Cobre  
Fonte: Elaboração própria

### 5.1.2 Linearidade

Foi realizada uma seqüência de testes para os quais foram delimitadas as dimensões de 2 a 6, e distâncias ( $\varepsilon$ ) entre 0,5 e 2 desvios-padrão, a exemplo de trabalhos acadêmicos desenvolvidos (CHÁVEZ; FERNANDES, 2004). Concluiu-se pela rejeição da hipótese nula em favor de  $H_1$ , para qualquer simulação de ( $\delta$ ) utilizada, baseado na análise do *p-value*, cujos resultados mostraram valores

menores do que 0,05 para todas as dimensões e valores de ( $\varepsilon$ ) testados. A não-normalidade da distribuição dos preços é um indicativo de que a série também não segue um padrão linear, característica que foi confirmada com a realização do teste BDS, conforme resultados apresentados no Quadro 5.

Teste BDS para PREÇOS		
Data: 22/04/06 Hora: 21:19		
Amostra: 05/06/1974 30/12/2003		
Observações incluídas: 7715		
Dimensão	( $\varepsilon$ )	p-valor
2	0,5	0.0000
	1	0.0000
	1,5	0.0000
	2	0.0000
3	0,5	0.0000
	1	0.0000
	1,5	0.0000
	2	0.0000
4	0,5	0.0000
	1	0.0000
	1,5	0.0000
	2	0.0000
5	0,5	0.0000
	1	0.0000
	1,5	0.0000
	2	0.0000
6	0,5	0.0000
	1	0.0000
	1,5	0.0000
	2	0.0000

Quadro 5 – Resultados da Estatística BDS  
Fonte: Elaboração Própria.

### 5.1.3 Persistência de Memória

O resultado obtido com a realização do teste de Hurst foi de  $H = 0,30$  para a série temporal de minério de cobre, o que implica em comportamento não persistente, de curto prazo, com tendência de reversão, indicando a presença de fator aleatório com fracos indícios de fractalidade, conforme resultados apresentados na Figura 10.

<i>Estatística de regressão</i>				
R múltiplo		0,4530		
R-Quadrado		0,2052		
R-quadrado ajustado		0,2051		
Erro padrão		0,6034		
Observações		7422		

	<i>Coeficientes</i>	<i>Erro padrão</i>	<i>Stat t</i>	<i>valor-P</i>
Interseção	-1,8598	0,0562	-33,0680	8E-224
Variável X 1	0,3086	0,0071	43,7692	0,0000

Figura 10 – Resultado do Teste R/S

Fonte: *Elaboração própria.*

#### 5.1.4 Estacionaridade

Os resultados da aplicação do teste ADF na série de preços indicam para a existência de uma raiz unitária, implicando em não rejeição da hipótese nula de que existem raízes unitárias e comportamento da série é não-estacionário. Realizado novamente o teste a partir da primeira diferença da série, aceitou-se a hipótese alternativa para não existência de raízes unitárias. Mandelbrot (1997, p. 372) argumenta que séries temporais, de fato, não “parecem” estacionárias, assumindo que as séries podem apresentar diferentes variâncias em diferentes momentos do tempo, necessitando de um modelo estatístico preciso que capture as mudanças de preços. Admite, porém (MANDELBROT, 1997, p. 404), que a predição de preços somente é possível a partir de uma amostra estacionária. Os resultados deste teste são apresentados na Figura 11.

Hipótese Nula: PREÇOS possuem uma raiz unitária				
Exógeno: Constante				
Defasagens: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=35)				
			t-estatístico	Prob.*
Teste estatístico Dickey-Fuller Aumentado			<b>-2.049.023</b>	0.2659
Teste para valores críticos:	nível 1%		-3.431.054	
	nível 5%		-2.861.736	
	nível 10%		-2.566.916	

Figura 11 – Resultado do Teste ADF  
 Fonte: Elaboração própria

### 5.1.5 Análise Geral dos Resultados

Os resultados obtidos com os testes sugerem que os preços não são estatisticamente independentes e identicamente distribuídos - IID, tampouco a distribuição assumiu a forma de curva normal. Estas primeiras características induzem a acreditar que se está diante de um comportamento fractal. No entanto, a estatística de Hurst demonstra que a série possui dependência de seus preços passados num padrão de memória curta, com tendência de reversão. Por fim, os testes para raízes unitárias não foram rejeitados, implicando em comportamento não-estacionário.

No conjunto, estas evidências são suficientes para se afirmar que a série temporal apresentou, durante o período analisado, um padrão fractal de comportamento. Uma vez que o expoente de Hurst se mostrou diferente de 0,5, é possível realizar uma projeção de preços futuros com base no modelo apresentado e analisar o grau de semelhança estatística entre as séries projetada e real. O Quadro 6 apresenta o resumo dos resultados dos testes estatísticos.

Teste Estatístico	Resultado	Interpretação
Bera-Jarque - preços	504,18	Distribuição não-normal
Bera-Jarque - retornos	16.775,06	Distribuição não-normal
BDS	0,0000	Não linearidade
Rescaled range (R/S)	0,3086	Fracos indícios de fractalidade
Estacionaridade	- 2,049	Não-estacionário

Quadro 6: Resumo dos Resultados dos Testes Estatísticos.  
 Fonte: Elaboração própria.

## 5.2 Resultado da Projeção de Preços com Base no Modelo Unifractal

Os parâmetros utilizados na projeção foram de 0,084 para  $h$  e de 0,3086 para  $\alpha$ . Através do software Minitab foi possível projetar os preços, a partir da geração dos incrementos de acordo com o modelo browniano fractal, indicado pela fórmula abaixo:

$$P (X (t+h) - X(t) \leq x ) = (2\pi)^{-1/2} h^{-\alpha} \int_{-\infty}^x \exp(-u^2/2h^{2\alpha}) du$$

Onde:

**P** é uma medida da probabilidade de que os incrementos projetados pelo modelo situam-se dentro de um limite finito ( $x$ );

**X** é uma função da amostra, sendo que  $t \rightarrow X(\omega, t)$  para cada ponto  $\omega$  em um espaço de amostra  $\Omega$ ;

$\alpha$  é o expoente de Hurst; e,

**h** representa o incremento de tempo, dado pela variância da série temporal.

Os gráficos 6 a 8 apresentam o resultado da plotagem dos incrementos, da projeção de preços de minério de cobre com 500 observações e na seqüência os preços reais ocorridos no período.

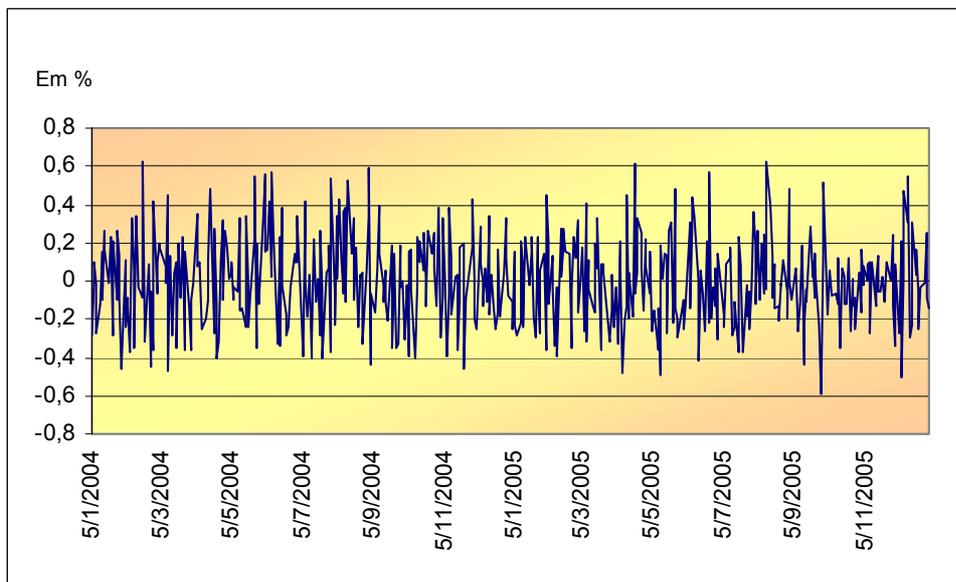


Gráfico 6 – Plotagem dos Incrementos. Eixo das abscissas representa o tempo e o eixo das ordenadas representa valores em %.

Fonte: elaboração própria

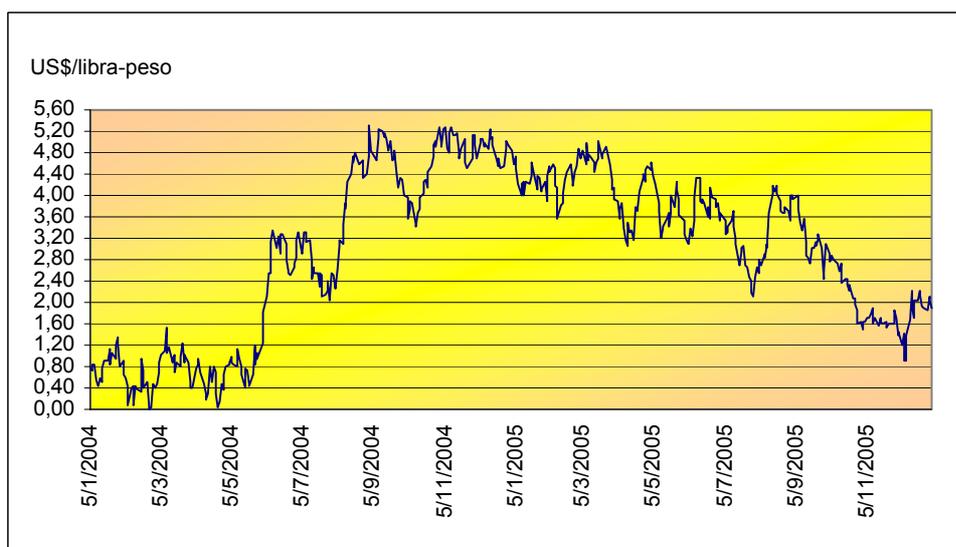


Gráfico 7 – Projeção de Preços de Minério de Cobre. Eixo das abscissas representa o tempo e o eixo das ordenadas representa valores em US\$/libra-peso.

Fonte: elaboração própria

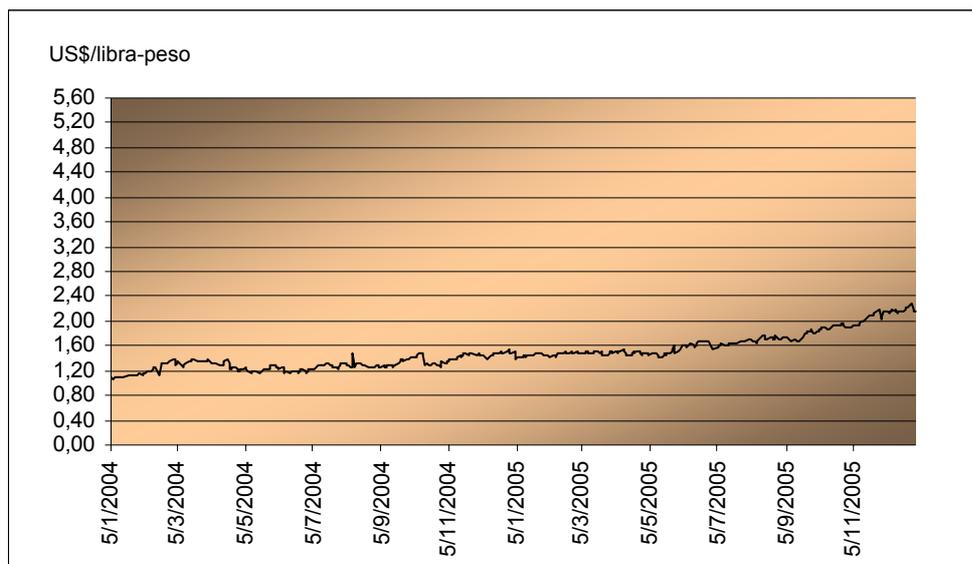


Gráfico 8 – Preços Reais Ocorridos no Período 2004 – 2005. Eixo das abscissas representa o tempo e o eixo das ordenadas representa valores em US\$/libra-peso.

Fonte: elaboração própria

### 5.2.1 Análise Comparativa Entre a Projeção e a Amostra

Visualmente percebe-se que não há semelhança entre os preços projetados e os preços ocorridos no período entre 2004-2005, a série projetada apresentou-se muito mais turbulenta do que realmente ocorreu. No entanto, faz-se mister observar que a projeção fractal possui semelhança visual com a amostra completa (Gráfico 3, p.59), apresentando padrões de crescimento de preços com tendência de queda na seqüência temporal, em uma espécie de efeito “espelho”. Esse fenômeno é interpretado na teoria fractal como o fator de escala e capturado através do expoente de Hurst.

A fim de verificar a semelhança estatística entre a série projetada e a amostra são comparados os picos máximo e mínimo de preços, a média, o desvio padrão e o grau de normalidade (vide Tabela 2)

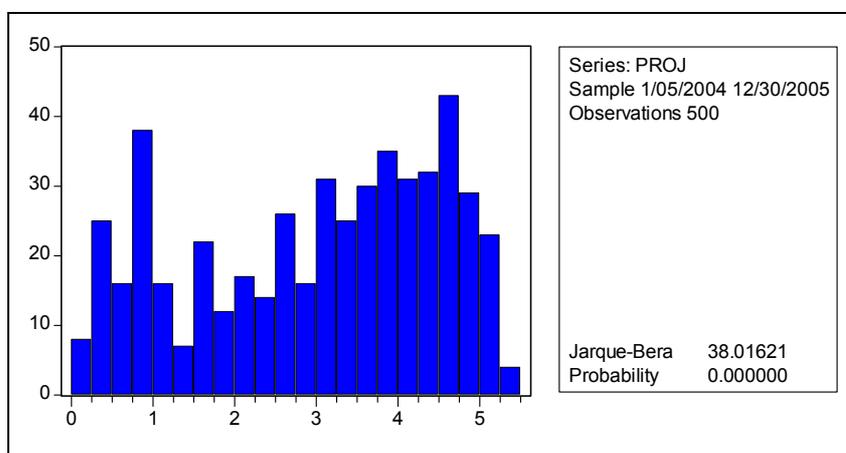
A estatística descritiva das séries demonstra que a série projetada extrapolou em quatro vezes a amplitude real de preços ocorrida no período entre 2004-2005 (Intervalo: 5,3053; 1,2175). Quando comparada com a amplitude da série completa, a relação cai para 2,7 vezes. O limite máximo de preço projetado foi de US\$ 5,3215 por libra-peso, enquanto o preço máximo ocorrido no período foi de US\$ 2,28 por libra-peso, mesmo quando analisada a série completa.

Tabela 2: Resumo dos Parâmetros Estatísticos Séries Temporais: Projetada e Real

Itens	Projeção	Real 2004-2005
Média	2,9952	1,48738
Mediana	3,2692	1,45100
Desvio padrão	1,5077	0,2648
Intervalo	5,3053	1,2175
Mínimo	0,0162	1,0625
Máximo	5,3215	2,2800

Fonte: Elaboração própria.

Foram gerados os histogramas das séries e realizado o cálculo para normalidade de Bera-Jarque. A série projetada se mostrou platicúrtica e um pouco assimétrica à esquerda. Conforme esperado, o resultado do teste Bera-Jarque indica para a não-normalidade da série (figura 12).



12: Histograma da Série Temporal Projetada  
Fonte: Elaboração própria

Quando analisado o histograma da amostra, percebe-se assimetria à direita, semelhantemente ao restante da série (período 1974-2003) e um padrão fracamente leptocúrtico de distribuição. Neste período 2004-2005, visualmente a distribuição da série se apresentou quase-normal (Figura 13), mas o teste de Bera-Jarque também indicou a não-normalidade da série.

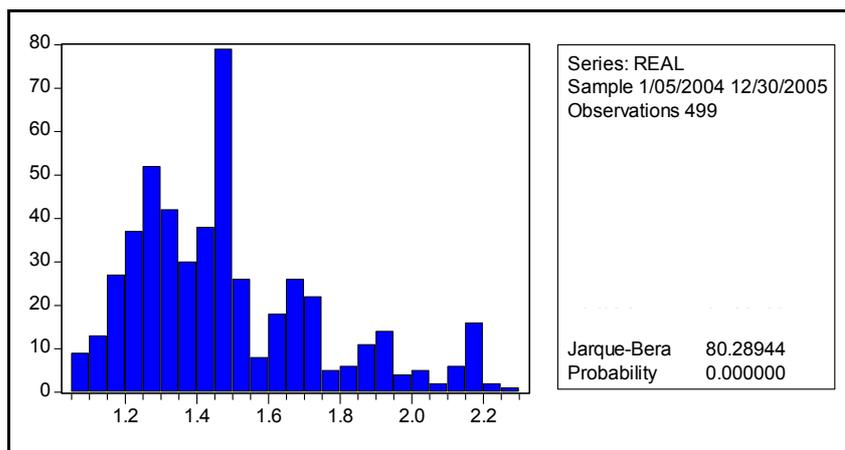


Figura 13: Histograma da Série Real Período 2004-2005

Fonte: Elaboração própria

Os histogramas dos retornos também foram gerados no *software Eviews*, ambos mostraram alta leptocurtose e simetria nas distribuições. Os testes para normalidade foram altamente rejeitados.

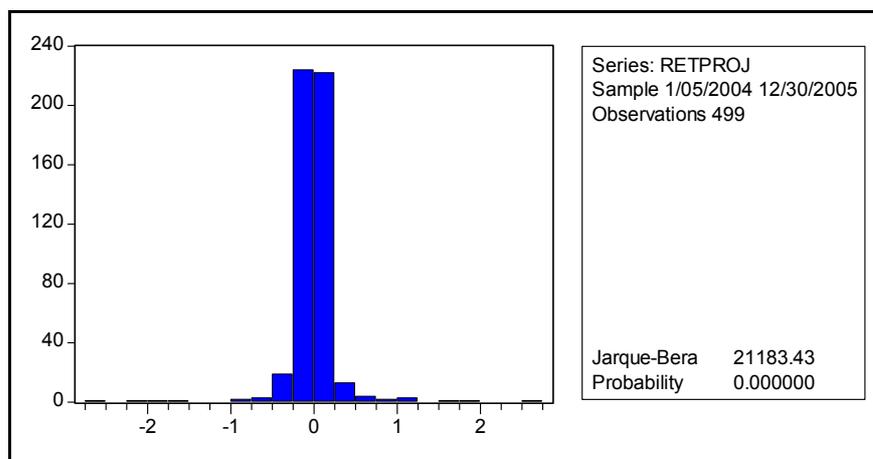


Figura 14: Histograma dos Retornos da Série Projetada

Fonte: Elaboração própria

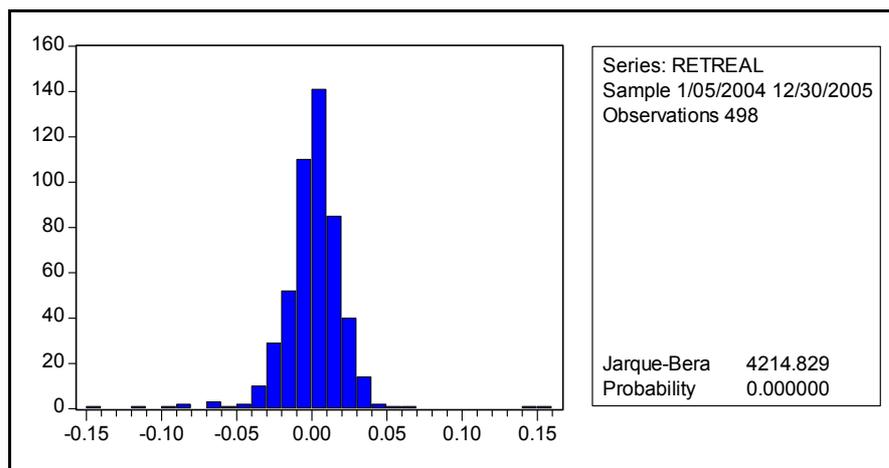


Figura 15: Histograma dos Retornos da Série Real Período 2004-2005  
Fonte: Elaboração própria

A análise do resultado empírico indica, dentro do período estudado, para a não-eficiência do modelo como estimador de parâmetros razoáveis para utilização em análise de investimentos. Entre as razões destacam-se o alto desvio-padrão encontrado na série projetada, o qual induz a uma percepção de risco maior do que realmente ocorreu nos 32 anos de preços analisados. Outro indicador da não-eficiência da série é a própria amplitude de preços encontrada, não pelo valor mínimo, o qual quando comparado com a série completa se mostra satisfatório, mas pelo valor máximo, o qual pode induzir uma sensação de otimismo irreal, gerando receitas de vendas que não possuem perspectivas de se concretizar na prática.

Dessa forma, sem prejuízo da teoria em si, mas com base neste modelo adotado, não convém estabelecer uma equação geral que possa ser utilizada na prática para projeções de preços em análise de projetos de mineração de cobre.

## 6 CONCLUSÕES

O objetivo deste estudo foi de analisar a teoria dos fractais sob a ótica da precificação de ativos, identificando um modelo matemático capaz de testar a eficiência desta teoria. Foram buscados na literatura acadêmica estudos, com o objetivo de subsidiar a análise empírica realizada, notadamente para a *commodity* escolhida neste trabalho, o minério de cobre.

Para este estudo foi utilizada uma amostra contendo 7.922 observações diárias de preços de minério de cobre, compreendendo o período de 1974 a 2005, dividida em duas séries: a primeira com 30 anos de observações, utilizada para realização dos testes estatísticos e definição dos parâmetros necessários para realizar a projeção de preços, e a segunda, com dois anos de observações, utilizada para testar a eficiência do modelo.

Foram realizados testes para normalidade, linearidade, estacionaridade e fractalidade, com o objetivo de identificar se a série apresentou comportamento fractal durante o período analisado. A partir do resultado positivo para presença de fractalidade, e da identificação do parâmetro fractal (Hurst) correspondente à série, foi identificado um modelo para projeção de preços baseado no movimento browniano fractal, a partir do qual foi possível projetar preços para dois anos e compará-los com a amostra real.

Dentro dos parâmetros estimados e do modelo matemático, e considerando a janela de tempo utilizada para comparação entre a série projetada e a série real ocorrida no período, a projeção não se mostrou satisfatória como um estimador consistente de preços para projetos de investimento. No entanto, apesar de sua não-

eficiência como estimador, não se pode rechaçar o problema base desta pesquisa, em função de fatores que certamente exigiriam novas pesquisas. O primeiro fator é a complexidade do modelo matemático: existem registros (MANDELBROT, 1997; RICHARDS, 2004) de modelos matemáticos mais complexos e mais eficientes para projeções de preços com base em análise multifractal, que não foram abordados neste trabalho.

O segundo fator é a própria série temporal: testar novas séries temporais, em diferentes categorias de ativos, com diferente número de observações ou mesmo com informações intradiárias poderia ocasionar resultados diferentes dos encontrados neste trabalho, possivelmente úteis mesmo se utilizado um modelo matemático unifractal.

O terceiro e último fator a ser considerado é a janela de tempo utilizada. A definição de períodos diferentes para análise e projeção de dados poderia ocasionar resultados consideravelmente diferentes, uma janela temporal maior poderia ajustar melhor os ciclos de alta e baixa de preços percebidos ao longo dos 32 anos analisados.

Dessa forma, considerando os três fatores fundamentais que exerceram influência sobre os resultados obtidos neste estudo, entende-se que os objetivos foram parcialmente cumpridos: a teoria analisada, o modelo identificado, as projeções realizadas, mas os resultados encontrados não confirmaram a expectativa de êxito nas projeções.

Nesse contexto de fatores analisados, cabe ressaltar que os resultados deste estudo são específicos da avaliação realizada com a *commodity* minério de cobre, dentro de um modelo browniano unifractal, não devendo estes resultados, positivos ou negativos, serem generalizados. No entanto, e notadamente, a fundamentação

teórica deste estudo poderá servir de base para novos estudos envolvendo outros modelos matemáticos e/ou outros ativos. Continua-se, portanto, acreditando que a utilização da teoria dos fractais, a exemplo do que vem ocorrendo em outros campos da ciência, é útil também para a contabilidade financeira, e novas pesquisas, a exemplo desta, certamente contribuirão para nortear a utilização das ferramentas fractais seja para a análise da volatilidade de séries temporais de preços, seja para a própria precificação de ativos.

Para pesquisas futuras sugere-se a utilização de outras séries temporais financeiras, envolvendo preços de outras *commodities* e índices, inclusive buscando um parâmetro estritamente brasileiro que possa ser analisado. Sugere-se ainda a utilização de modelos multifractais, com o objetivo de verificar se os mesmos experimentam maior precisão na projeção de preços, que capaz de ser utilizada com eficiência e segurança em análise de projetos de investimento.

## REFERÊNCIAS

ALEXANDER, C. **Risk Management and Analysis: measuring and modeling financial risk**. v. 1, Chapter 4. London: Ed. Alexander Carol, 1998. Disponível em: <<http://janroman.net.dhis.org/finance/Volatility%20Models/Volatility%20and%20correlations.pdf>>.

\_\_\_\_\_. *Optimal Hedging Using Cointegration*. **The Royal Society London**. v. 357, 1999, p. 2039-2058.

ANDRADE, M. L. **Informe Setorial Mineração e Metalurgia**. BNDES: Rio de Janeiro, n. 16, jun. 1998.

\_\_\_\_\_.; CUNHA, L. M. S.; GANDRA, G. T. O Cobre Brasileiro em Ascensão no Cenário Mundial. **BNDES Setorial**, Rio de Janeiro, n. 13, p. 65-94, mar. 2001.

ANDRADE, M. M. **Introdução a Metodologia do Trabalho Científico**. 7 ed. São Paulo: Atlas, 2005.

BARKOULAS, J.; BAUM, C. *Long term dependence in stock returns*. **Journal of Empirical Finance**. v. 3, n. 4, p. 393-417, dez., 1996.

\_\_\_\_\_.; LABYS, W. C.; ONOCHIE, J. *Fractional Dynamics In International Commodity Prices*. **Journal of Futures Markets**. v. 17, n. 2, p.161, abr. 1997.

BESSADA, O. **O Mercado Futuro e de Opções: os fundamentos teóricos operacionais para a montagem de estratégias de investimento nos mercados derivativos**. 2ª ed. Rio de Janeiro: Record, 1995.

BOLLERSLEV, T. *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*. **Journal of Econometrics**. v. 31, 1986, p. 307-327.

BROOKS, C. **Introductory Econometrics for Finance**. Cambridge University Press. United Kingdom: 2002.

CARDOSO, R. L.; MARTINS, V. A. **Teoria avançada da contabilidade**. Org. IUDÍCIBUS, S.; LOPES, A. B São Paulo: Atlas, 2004.

CASTRO, A. S.; ROSSI JR., J. L. Modelos de Previsão para a Exportação das Principais Commodities Brasileiras. **Texto para Discussão**. Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada. nº 716, abr. 2000.

CHANG, E. C.; CHEN, C.; CHEN, S. *Risk and Return in Copper, Platinum, and Silver Futures*. **The Journal of Futures Markets**. v. 1, nº 1, fev. 1990, p.29-39.

CHÁVEZ, C. G.; FERNANDES, C. Uma avaliação de métodos adaptativos para a seleção do índice de cauda das distribuições GEV na estimação do valor em risco condicional. *IV Encuentro Internacional de Finanzas*, 2004, Santiago, Chile. **Anais...** Santiago, 2004.

**Companhia Vale do Rio Doce**. Rio de Janeiro, Brasil. Disponível em: <<http://www.cvrld.com.br>>. Acesso em 03/11/2005.

CORAZZA, M. ET AL. *Searching for fractal structure in agricultural futures markets. The Journal of Futures Markets*. v. 17, n. 4, p. 433-473, jun. 1997.

CHOWDHURY, A. R. *Futures Market Efficiency: Evidence for Cointegration Tests. The Journal of Futures Markets*. v. 11, n° 5, out. 1991, p.577-589.

DACOROGNA, M. M.; MULLER, U. A.; NAGLER, R. J.; OLSEN, R. B.; PICTET, O. V. *A geographical model for the daily and weekly seasonal volatility in the FX market. Journal of International Money and Finance*. v. 12, n. 4, 1993, p. 413-438.

DALL'AGNOL, R. Recursos Minerais e sua Contribuição ao Desenvolvimento do País: desafios em ciência, tecnologia e inovação. Seminários temáticos para a 3ª Conferência Nacional de Ciência, Tecnologia e Inovação. **Revista Parcerias Estratégicas**. v. 20, jun. 2005.

DEMO, P. **Metodologia Científica em Ciências Sociais**. São Paulo: Atlas, 1995.

Di MATTEO, T.; ASTE, T.; DACOROGNA, M. M. *Long-term memories of developed and emerging markets: Using the scaling analysis to characterize their stage of development. Journal of Banking & Finance*. n. 29, p. 827-851, 2005.

DIXIT, A. K.; PINDYCK, R. S. *Investment under uncertainty*. New Jersey, USA: Princeton University Press, 1993.

DNPM. **Anuário Mineral Brasileiro 2005**. Disponível em: <[http://www.dnpm.gov.br/assets/galeriaDocumento/AMB2005/2\\_Parte\\_I%202005%20Brasil.pdf](http://www.dnpm.gov.br/assets/galeriaDocumento/AMB2005/2_Parte_I%202005%20Brasil.pdf)>.

DOLABELA, F. Plano de Negócios. **In Iniciativa Jovem**, Downloads. Disponível em: <<http://iniciativajovem.org.br/pdfs/default.asp>>, acesso em 20/07/2005.

EDELSTEIN, Daniel. *Metal prices in the United States through 1998 – Copper. USGS Minerals Information Team. Special Publication*, 1999.

ELLIOT, G. *Strong commodity markets and the supply side response. Rio Tinto Presentation. Citigroup Conference*. March, 2006. Disponível em: <<http://www.riotinto.com>>.

FALCONER, K. **Fractal geometry: mathematical foundations and applications. Second Edition**. West Sussex, England: John Wiley & Sons Ltd, 2005.

FAMA, E. *Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. Journal of Finance*. v. 48, mar. 1970, p. 383-417.

\_\_\_\_\_.; FRENCH, K. R. *Commodities Future Price: Some Evidence of Forecast Power, Premiums and Theory of Storage. The Journal of Business*. v. 60, n° 1, jan.1987.

GLEISER, I. **Caos e complexidade: a evolução do pensamento econômico**. Rio de Janeiro: Campus, 2002.

GRABBE, J. O. *Chaos and fractals in financial markets - Part 1. The Laissez Faire City Times*. v. 3, n 22, mai. 1999.

\_\_\_\_\_. *Chaos and fractals in financial markets - Part 2. The Laissez Faire City Times*. v. 3, n. 24, jun. 1999.

HAYASHI, A. D. **Aplicação dos Fractais ao Mercado de Capitais Utilizando-se as Elliott Waves**. Santa Catarina, 2002. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de Santa Catarina.

HOUAISS, A. **Dicionário Eletrônico Houaiss**. São Paulo: Objetiva, 2001.

HSIEH, David. *Chaos and nonlinear dynamics application to financial markets. The Journal of Finance*. v. XLVI, no. 5, dez. 1991, p. 1839-1877.

KALMAN, R. E. *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. Journal of Basic Engineering*. v. 82, 1960, p. 35-45.

KREHBIEL, T.; ADKINS, L. C. *Cointegration Tests of the Unbiased Expectations Hypotesis in Metal Markets. Journal of Futures Markets*. v. 13, nº 7, out. 1993, p.753-763.

LAPPONI, J. C. **Estatística Usando Excel**. Laponi Treinamento e Editora Ltda. São Paulo: 2000.

LORENZ, E. N. **A Essência do caos**. Tradução de Cláudia Bentes David. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1996.

LARRAIN, M. *Testing chaos and nonlinearities in T-Bill rates. Financial Analysts Journal*. v. 47, n.5, p.51, set/out. 1991.

LO, A. *Long-term memory in stock market prices. Econométrica*. v. 59, p. 1279-1313, 1991.

MANDELBROT, B. B. *The variation of certain speculative prices. The Journal of Business*. v. 36, n. 4, p. 394, out. 1963.

\_\_\_\_\_. **The fractal geometry of nature: updated and Augmented**. New York: W. H. Freeman and Company, 1982.

\_\_\_\_\_. **Fractals and scale in finance: discontinuity, concentration, risk**. New York: Springer, 1997.

\_\_\_\_\_.; FISCHER, A.; CALVET, Laurent. *A Multifractal Model of Asset Return. Cowles Foundation Discussion Paper*. n. 1164, Set/1997.

\_\_\_\_\_. *Scaling in financial prices: III. Cartoon Brownian motions in multifractal time. Quantitative Finance*. v. 1, p.427-440, 2001.

\_\_\_\_\_.; HUDSON, R. **Mercados financeiros fora de controle: a teoria dos fractais explicando o comportamento dos mercados**. Tradução de Afonso Celso da Cunha Serra. Rio de Janeiro: Elsevier, 2004.

MEHRLING, P. **Fischer Black and the revolutionary idea of finance**. Hoboken: Wiley, 2005.

MÜLLER, U. A. et al. *Fractals and intrinsic time: a challenge to econometricians*. In *XXXIXth International Conference of the Applied Econometrics Association (AEA)*, 1993, Luxembourg. **Anais...** Luxemburg, 1993.

MATIAS, M. A.; SILVA, C. A. T.; VIEIRA, L. Análise Estatística do Comportamento de Preços da Commodity Cobre. In 5º Congresso USP de Controladoria e Contabilidade, 2005, São Paulo - SP. **Anais...** São Paulo, 2005.

MCMILLAN, D. G.; SPEIGHT, A. E. H. *Non-ferrous Metals Price Volatility: a component analysis*. **Resource Policy**. v. 27, 2001, p.199-207.

NELSON, D.B. *Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach*. **Econometrica**. v. 52, 1991, p. 347-370.

**New York Mercantile Exchange - Nymex**. USA. Disponível em: <<http://www.nymex.com>>. Acesso em 10/02/2005.

PANAS, E. *Long memory and chaotic models of prices on the London Metal Exchange*. **Resources Policy**. v. 27, p.235-246, 2002.

PARANAPANEMA S.A. **Mineração Caraíba**. Bahia, Brasil. Disponível em: <<http://www.paranapanema.com.br/caraiba/default.asp>>. Acesso em 03/11/2005.

PEREZ, M. M.; FAMÁ, R. Métodos de Avaliação de Empresas e a Avaliação Judicial de Sociedades: uma análise crítica. In 2º Seminário USP de Contabilidade, 2002, São Paulo - SP. **Anais...** São Paulo, 2002.

PETERS, E. E. *Fractal Structure in the Capital Markets*. **Financial Analysts Journal**. v.45, n.4, p.32, jul/ago. 1989.

\_\_\_\_\_. E. E. **Fractal market analysis: applying chaos theory to investment and economics**. New York, USA: John Wiley & Sons, 1994.

POPPER, K. R. **The Logic of Scientific Discovery**. Hutchinson of London: London, 1965 apud DEMO, P. Metodologia Científica em Ciências Sociais. São Paulo: Atlas, 1995.

\_\_\_\_\_. **Conhecimento objetivo: uma abordagem evolucionária**. Tradução de Milton Amado. Belo Horizonte: Editora Itatiaia, 1999.

PRATES, D. M. Determinantes do Saldo Comercial. **Política Econômica em Foco**. Suplemento 5 do boletim quadrimestral do Centro de Estudos de Conjuntura e Política Econômica da Unicamp, n. 1, out, 2003.

PRECHTER, R. R. **The major works of R. N. Elliott**. Second Edition. Georgia, USA: New Classics Library, 1990.

PRIGONINE, I. **As leis do caos**. Tradução Roberto Leal Ferreira. São Paulo: Editora UNESP, 2002.

RICHARDS, G. R. *The fractal structure of exchange rates: measurement and forecasting*. **Journal of International Financial Markets, Institutions & Money**. v.10, p. 163-180, 2000.

\_\_\_\_\_. *A Fractal forecasting model for financial time series*. **Journal of Forecasting**. n. 23, p.587-602, 2004.

ROSA, M. E. Os Minerais e o Brasil. **Revista Ciênciaonline**. Ano II, n.06, mar-mai. 2003. Disponível em: <[http://www.cienciaonline.org/revista/02\\_06/geologia/](http://www.cienciaonline.org/revista/02_06/geologia/)>.

ROSS, S.; WESTERFIELD, R.; JAFFE, J. **Administração Financeira: Corporate Finance**. São Paulo: Atlas, 2002.

SANDRONI, P. **Novo dicionário de Economia**. Ed. Best Seller. Disponível em: <<http://www.ens.ufsc.br/dicionario.htm>>.

SILVA NETO, L. A. **Derivativos: definições emprego e risco**. 4ª ed. São Paulo: Atlas, 2002.

**THINK FINANCE**. Disponível em: <[www.thinkfn.com/content/view/109/ - 35k](http://www.thinkfn.com/content/view/109/-35k)>. Acesso em 18/03/2006.

Universidade do Estado de Santa Catarina, UDESC. **Dicionário**. Santa Catarina, Brasil. Disponível em: <<http://www.mundofisico.joinville.udesc.br/>>. Acesso em 30/01/2006.

U.S. Department of Labor, Bureau of Labor Statistics. **Consumer Price Index – All Urban Consumers**. Disponível em: <<http://www.bls.gov/cpi/>>.

**VALOR ECONÔMICO S/A**. São Paulo: Globo, ano 6, n. 1452, fev, 2006.

WATKINS, C.; MCALEER, M. *Econometric Modeling of Non-ferrous Metal Prices*. **Journal of Economic Surveys**. v.18, nº 5, 2004.

**Wikipédia – Enciclopédia Livre**. Conceito de fractal. Disponível em <<http://pt.wikipedia.org/wiki/Fractal#Fontes>>. Acesso em 07/11/2005.

WERON, A.; WERON, R. *Fractal markets hypothesis and two power-laws*. **Chaos, Solitons & Fractals**. v. 11, p. 289-296, 2000.