



ARTHUR AKIRA MAMIYA

APLICAÇÕES DA GEOMETRIA ESPECTRAL A GRAVITAÇÃO
ANISOTRÓPICA

BRASILIA

2014



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

Instituto de Física

ARTHUR AKIRA MAMIYA

APLICAÇÕES DA GEOMETRIA ESPECTRAL A GRAVITAÇÃO
ANISOTRÓPICA

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da
Universidade de Brasília como parte dos requisi-
tos exigidos para a obtenção do título de Mestre
em Física.

Orientador: Aleksandr Nikolaievich Pinzul

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA
DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO ARTHUR AKIRA
MAMIYA, E ORIENTADA PELO PROF. DR. ALEKSANDR
NIKOLAIEVICH PINZUL.

Assinatura do Orientador

BRASÍLIA

2014

Abstract

Motivated by recent observations that quantum gravity should have spectral dimension two, in this dissertation we study the mathematical interplay between the Spectral Action Principle and anisotropic theories of gravity, such as Horava-Lifshitz. First, we review modern theories of anisotropic gravity, which are thought to lead to renormalizable quantum theories, at the cost of losing full diffeomorphism invariance. Then we review the Spectral Action Principle, which is a prescription to obtain physical actions in spectral geometries. Afterwards, we calculate heat kernels for anisotropic laplacians, and find an exact expression for the spectral dimension flow from the IR into the UV, for flat spacetimes. Next, we perform an ADM decomposition to construct the anisotropic Dirac operator, and indicate a procedure to calculate the corresponding Spectral Action. This leads us to a scheme to constraint the number of free parameters of anisotropic theories from the order of a hundred into only eleven.

Resumo

Com motivação nas recentes indicações de que gravidade quântica deve ter dimensão espectral dois, nesta dissertação estudou-se a interação entre o Princípio da Ação Espectral e teorias anisotrópicas de gravidade, como a Horava-Lifshitz. Primeiro revisam-se teorias modernas de gravitação anisotrópica, as quais acredita-se levar a teorias quânticas renormalizáveis, ao custo de perder invariância completa por difeomorfismo. Em seguida revisa-se o Princípio da Ação Espectral, o

qual é uma prescrição para o cálculo de ações físicas em geometrias espectrais. Posteriormente, calculam-se kernels de calor para laplacianos anisotrópicos e encontra-se uma expressão exata para o fluxo de dimensão espectral do IR para o UV, para espaço-tempos planos. Em seguida, executa-se a decomposição ADM para a construção de um operador de Dirac anisotrópico, e indica-se um procedimento para o cálculo da Ação Espectral correspondente. Como consequência, restringem-se os parâmetros livres da gravitação anisotrópica de um valor na ordem de uma centena para apenas onze.

Sumário

Dedicatória	viii
Agradecimentos	ix
1 Introdução	1
2 A Ação Espectral	6
2.1 O Triplo Espectral	6
2.2 O Princípio da Ação Espectral	9
2.3 A Ação Espectral para a Gravidade	10
2.3.1 O kernel de calor	11
2.3.2 A Transformada de Mellin e a Ação Espectral	11
2.3.3 Biescalares, bitensores e bispinores	14
2.3.4 Cálculo dos coeficientes do Kernel de Calor	17
2.3.5 A ação resultante	27
3 Introdução a gravitação anisotrópica	28
3.1 A decomposição ADM	28
3.2 Motivações para gravitação anisotrópica	31
3.3 Gravitação Horava-Lifshitz e a Extensão Saudável	32
3.4 Sobre projetabilidade e o modo escalar	36

3.5	Comentários no modelo RBEC de gravidade análoga	38
4	O kernel de calor plano anisotrópico e o fluxo de dimensão espectral	40
4.1	O cálculo mínimo	40
4.2	Kernel de calor interpolando UV-IR	43
4.3	Quais duas dimensões?	47
4.3.1	A equação de Wheeler-DeWitt fortemente acoplada	47
4.3.2	O universo Mixmaster	48
5	Aplicação do Princípio da Ação Espectral para Gravitação Anisotrópica	50
5.1	A decomposição ADM do operador de Dirac	50
5.2	Cálculo do kernel de calor anisotrópico em espaços curvos	55
6	Conclusões	57
A	A Função Ψ de Fox-Wright	59
B	$SL(2, \mathbb{C})$ and $SU(2)$	62
	Bibliography	69

Aos meus pais ...

Agradecimentos

Primeiramente eu gostaria de agradecer ao meu orientador, Prof. Aleksandr Pinzul, pela orientação firme e encorajamento dados ao longo do desenvolvimento desta Dissertação. À minha família, pelo seu inestimável apoio. Aos meus amigos por estarem lá, e pelos meus colegas pelo companheirismo em enfrentar desafios em comum.

Finalmente, eu gostaria de agradecer à CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro, sem o qual esta dissertação não seria possível. Gostaria de agradecer especialmente aos professores e colegas do International Institute of Physics em Natal, pelas oportunidades de comparecer a excelentes Encontros.

Capítulo 1

Introdução

Viver em quatro dimensões torna a vida especialmente difícil para a comunidade Física. Não apenas isso torna a teoria da gravitação de Einstein não-renormalizável, quatro não é o número natural para a descrição do mundo tanto segundo Teoria de Cordas[1] quanto por Kaluza-Klein[2]. Entretanto, a elegante consistência interna inerente a essas teorias tem motivado a comunidade a manter uma busca intensiva por mecanismos capazes de tornar essas teorias compatíveis com experimentos, como o mecanismo da compactificação de espaço. Essa busca repetitivamente nos leva a questionar como se mede experimentalmente a dimensão física do mundo em que se vive. Esse é um antigo problema em Física Estatística, e é tradicionalmente resolvido pelo estudo do comportamento do *caminhante aleatório* neste espaço.

O caminhante aleatório tradicional de livro-texto é uma partícula localizada em uma rede infinita, movendo-se em saltos discretos para pontos vizinhos, aleatoriamente escolhidos, apesar de com probabilidades fixas e independentes da história. Portanto, o caminhante aleatório pode ser pensado como uma sonda no número de graus de liberdade espaciais que podem ser suportados pelo espaço. Quantitativamente, isso pode ser medido pelo cálculo da probabilidade de que a partícula vai, em algum momento, retornar ao seu ponto de origem; isso é chamado de *probabilidade de retorno*. Caso a partícula tenha igual chance de saltar pra qualquer um dos seus vizinhos, então em

redes bidimensionais ele certamente voltará; entretanto, conforme aumenta-se a dimensão da rede, esta probabilidade é reduzida, pois ele terá mais graus espaciais de liberdade para explorar. Para a aplicação deste princípio na medida da dimensão de uma variedade, toma-se o limite contínuo da equação de diferenças finitas em d dimensões governando a probabilidade de retorno, e pode-se demonstrar[3] que, caso os saltos do caminhante sejam descritos por uma função de probabilidade isotrópica e homogênea, esta equação se reduz na equação de difusão,

$$\partial_\tau K(x, x'; \tau) = \Delta K(x, x'; \tau) \quad (1.0.1a)$$

$$K(x, x'; +0) = \delta^{(d)}(x - x'), \quad (1.0.1b)$$

onde $K(x, x'; \tau)$ pode ser interpretada como a densidade de probabilidade de que, começando em um ponto x' em tempo $\tau = 0$, o caminhante estará em x no instante τ . As hipóteses de isotropia e homogeneidade é traduzida no aparecimento do operador de Laplace, Δ .

No caso plano, a solução para este problema de valor de contorno é bem conhecida,

$$K(x, x'; \tau) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{d/2}} e^{-(x-x')^2/4\tau}. \quad (1.0.2)$$

Vê-se que a dimensão desta variedade coincide com d_S , o qual é definido pela expressão

$$d_S := -2 \frac{\partial}{\partial \ln \tau} \ln K((x - x') \rightarrow 0; \tau). \quad (1.0.3)$$

Chama-se d_S a *dimensão espectral* desta variedade com respeito à dinâmica induzida pelo problema de valor de contorno (1.0.1), e conseqüentemente, pela escolha de caminhante aleatório. A escolha específica de caminhante aleatório é crucial para este resultado; tivésse-se alterado a forma com a qual ele se move na rede, então o espaço seria visto de forma diferente, e d_S mediria um outro valor para a dimensão. Portanto, interpreta-se d_S como a medida da dimensão efetiva na qual a dinâmica da partícula realmente acontece, semelhante à definição de dimensão fractal. A vantagem de se trabalhar com a dimensão espectral está em sua capacidade de estender o conceito de dimensão de uma variedade para outros objetos matemáticos mais exóticos, como espaços não-comutativos e objetos fuzzy. Como espera-se que o espaço-tempo não deve ser representado por uma variedade

diferenciável na escala de Planck[4], este conceito é especialmente útil para caracterizar diferentes teorias de gravidade quântica.

Já foi dito que gravidade quântica em quatro dimensões é não-renormalizável. Entretanto, em duas dimensões, ela é. Portanto, é de se esperar o fato de que várias das teorias modernas para gravidade quântica possuem certos atributos em comum inerentes a teorias em duas dimensões. Steve Carlip[5] fornece uma bela revisão deste fenômeno. A primeira indicação é o resultado em Triangulações Dinâmicas Causais de que, quando a gravidade é quantizada restrita a uma estrutura causal preferencial, a dimensão espectral vai[6] de $d_S = 4.02 \pm 0.1$ em longas distâncias para $d_S = 1.80 \pm 0.25$ em curtas distâncias. A seguir vem uma indicação mais fraca da Gravidade Quântica em Loops, uma vez que a partir da análise das mudanças na lei de escala do espectro de área de pequenas áreas para grandes áreas pode-se argumentar que a dimensão efetiva vai de quatro para dois. A seguir, pode-se mencionar a relação de energia livre por unidade de volume $F/VT \sim T$ para cordas em altas temperaturas, e compará-la com a relação geral $F/VT \sim T^{d-1}$ para teorias de campo d -dimensionais, o que implica que $d = 2$ para cordas em altas temperaturas[7]. Mas talvez o argumento mais forte seja a análise[8] as equações de fluxo do Grupo de Renormalização para a constante de Newton G ,

$$\mu \frac{\partial(G\mu^{d-2})}{\partial\mu} = [d - 2 + \eta]G\mu^{d-2}; \quad (1.0.4)$$

para se satisfazer a demanda de que a teoria de gravitação seja assintoticamente segura, é necessário que $d - 2 + \eta = 0$. Portanto, se η é a dimensão anômala do campo, o propagador em momento do gráviton deve ser da forma p^{-d} , a qual em representação de espaço resulta em dependência logarítmica do propagador com respeito a distância, comportamento característico de teorias de campo em duas dimensões. É pensando neste requisito que Horava introduziu seu modelo anisotrópico de gravitação, o qual modifica a teoria de Einstein ao adicionar termos de curvatura espacial não invariantes por difeomorfismo, de ordens mais altas.

Todos esses exemplos convidam o estudo de uma perspectiva mais fracamente dependente na

dimensão do espaço-tempo, e melhor preparado para representar esse fluxo IR-UV. Este é o domínio da Geometria Espectral, a qual é elegantemente traduzida na Física no Princípio da Ação Espectral[9]. Abusando do fato de que observáveis físicas são de natureza espectral, a abordagem da Ação Espectral propõe desenvolver toda a Física a partir de considerações espectrais. Adicionalmente, ela propõe uma receita para gerar a geometria compatível com cada dinâmica. Nesta Dissertação, foca-se na investigação do fluxo da dimensão espectral como uma função do nível de energia da teoria, o qual é melhor visto no contexto de gravitação anisotrópica, Horava-Lifshitz sendo um exemplo particular. Portanto, os objetivos deste trabalho são:

- Encontrar uma formulação da gravidade anisotrópica no contexto de geometria espectral;
- Determinar se é possível encontrar uma estrutura matemática que claramente unifique a gravidade em quatro dimensões obtida da experiência cotidiana com a esperada dimensão espectral dois da gravidade quântica em altas energias;
- Descobrir se a ação espectral é capaz de produzir um critério para restringir o número de constantes de acoplamento independentes na gravidade anisotrópica;

É importante notar que todos este trabalho será feito a partir de considerações puramente clássicas, mesmo que possa ser discutido que todas as correções de ordem mais alta a serem usados são de natureza quântica.

Primeiramente, no capítulo dois, define-se o Triplo Espectral, introduz-se o Princípio da Ação Espectral, e segue-se para o cálculo da ação de Einstein-Hilbert a partir deste, juntamente de correções de ordem mais alta. Neste processo dedica-se um tempo considerável na revisão de diversas abordagens para o cálculo do kernel de calor para diferentes operadores, uma vez que será necessário calculá-lo para operadores anisotrópicos de ordem maior que dois.

Em segundo lugar, no capítulo três, revisam-se as teorias anisotrópicas de gravidade, focando no modelo Horava-Lifshitz e em sua "Extensão Saudável"(do inglês "Healthy Extension"[25]). Fechando o capítulo, brevemente revisam-se algumas propriedades chave de Condensados de Bose-

Einstein Relativísticos, uma vez que eles representam um modelo físico bem conhecido que exhibe Invariância de Lorentz em duas diferentes escalas de energia, se comportando não-invariantemente na escala intermediária. Ele é usado para motivar gravidade anisotrópica como um modelo efetivo para uma teoria fundamental com simetria de Lorentz deformada em altas energias.

A seguir, se introduzem algumas soluções clássicas para a pergunta “Se o espaço-tempo se torna bidimensional, quais dimensões ele escolhe?”. Ou seja, primeiramente se revisa a solução Mixmaster para a Relatividade Geral, e em seguida o argumento clássico seguindo o qual quantização leva em altas energias a pontos vizinhos de diferentes geodésicas se tornarem acoplados mas descorrelacionados, como indicado pelo regime de acoplamento forte da equação de Wheeler-de-Witt.

Depois, como ensaio para a resposta às perguntas I e III, responde-se à pergunta II, calculando-se o kernel de calor para laplacianos anisotrópicos em espaços planos, obtendo-se uma figura quantitativa de como a dimensão espectral flui.

Por último, tenta-se responder I e III, primeiramente propondo-se uma decomposição ADM para o operador de Dirac, e subsequente operador anisotrópico, para em seguida formalmente se encontrar a formulação de gravitação anisotrópica por Ação Espectral. Em princípio isto impõe restrições nos coeficientes, mas o problema computacional de se explorar as consequências experimentais destas restrições vai além do escopo deste trabalho.

Capítulo 2

A Ação Espectral

Neste capítulo definem-se as noções de Triplo Espectral (ST) e de Ação Espectral (AS), encontra-se o ST equivalente a variedades Riemannianas genéricas, e recupera-se a ação de Einstein-Hilbert pela escolha de um Operador de Dirac apropriado. A maioria do conteúdo desta revisão sobre Ação Espectral e Triplo Espectral foi obtido do artigo fundador de Connes[9] e do livro por Varilly[10], enquanto os cálculos de heat kernel são baseados nos livros por DeWitt[11], Fulling[12] e Vassilevich[13]. Deve ser observado que todo o trabalho feito usando a Ação Espectral deve ser realizado utilizando métrica Euclideana. Entretanto, para os propósitos desta Dissertação ignoram-se as consequências desta particularidade, uma vez que espera-se que a presença de uma direção preferencial para o tempo introduzida junto aos modelos anisotrópicos de gravidade permita posteriormente a definição sistemática de rotações de Wick que recuperem a métrica Lorentziana.

2.1 O Triplo Espectral

Um dos princípios guias por trás da Relatividade Geral é a idéia da Covariância Geral, isto é, o postulado segundo o qual a Física deve ser independente da escolha de sistema de coordenadas. Normalmente entende-se esse princípio como a exigência de que eventos físicos devam ser representados por pontos em uma variedade. Entretanto, também pode-se tomar uma perspectiva

mais drástica, assumindo que a Física deva ser representada por estruturas matemáticas livres do próprio conceito de sistemas de coordenadas. Claramente essas estruturas devem ser acompanhadas por uma prescrição para a recuperação de variedades métricas em certos limites de baixas energias, mas os princípios físicos fundamentais devem ser definidos nessas estruturas originais. Um exemplo de objeto que satisfaz esses requerimentos é o *triplo espectral*.

Define-se um *triplo espectral* (A, H, \mathcal{D}) como um conjunto contendo:

- um espaço de Hilbert H
- uma álgebra A , possivelmente não-comutativa, agindo em H
- um operador \mathcal{D} agindo em H
- se definível, uma graduação $\mathbb{Z}/2$, chamada γ e satisfazendo

$$\gamma = \gamma^*, \quad \gamma a = a\gamma, \quad \gamma D = -D\gamma, \quad (2.1.1)$$

onde a é um elemento da álgebra A . Espaços com tal graduação são ditos ter dimensão par.

- uma estrutura real J no espaço de Hilbert, a qual é uma isometria antilinear satisfazendo

$$J^2 = \epsilon, \quad JD = \epsilon' DJ, \quad J\gamma = \epsilon'' \gamma J, \quad (2.1.2)$$

onde $\epsilon, \epsilon', \epsilon''$ são -1 ou 1 .

Para defender a validade desta construção, primeiro se prescreve como recuperar desta estrutura o conceito de pontos em uma variedade. Para fazê-lo, recorda-se o Teorema de Gelfand-Naimark, o qual constrói dois cofuntores[10], um mapeando um espaço Hausdorff localmente compacto M em uma C^* -álgebra, outro mapeando-a em seus espaço de caracteres. Se o espaço M for uma variedade, então a C^* -álgebra correspondente é uma subálgebra da álgebra de funções suaves em M , e seu espaço de caracteres é aquele de mapas de funções em \mathbb{C} , o qual os caracteriza como distribuições. Adicionalmente, como são caracteres de uma C^* -álgebra e satisfazem $\mu(aa^*) = |\mu(a)|^2 \geq 0$, eles

definem uma medida, a qual permite a reconstrução da noção de pontos em M . A partir daqui, serão usadas as noções de ponto e caracter intercambiavelmente; para mais detalhes, consulte [10].

A fim de mostrar que a noção de distância também está contida no triplo espectral, se faz a proposição de que variedades riemánianas são equivalentes a triplos espectrais (A, H, \mathcal{D}) tais que:

- A é a álgebra comutativa de funções suaves em M
- H é o espaço de spinores L^2 em M
- \mathcal{D} é o operador de Dirac tradicional compatível com a métrica em L^2

Um dos preceitos da geometria espectral é aquele segundo o qual a noção de distância no espaço de caracteres é dada por

$$d(x, y) = \sup\{|a(x) - a(y)|; a \in A, \|[\mathcal{D}, a]\| \leq 1\}. \quad (2.1.3)$$

A norma $\|[\mathcal{D}, a]\|$ é dada pela norma de operador; por exemplo, se $a \in C^\infty$, então a norma é dada por $\|[\mathcal{D}, a]\| := \sup\{|\mathcal{D}a|(x), \forall x \in M\}$

Segundo Connes [14], mostra-se que tomando-se esta escolha de triplo espectral, esta expressão é igual à distância geodésica na variedade Riemanniana original.

Primeiro escolhe-se uma representação específica do operador de Dirac,

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}, a] &= -i\gamma^\mu \partial_\mu a, \\ \|[\mathcal{D}, a]\| &= |\nabla a|. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

$$\begin{aligned} |a(y) - a(x)| &= \left| \int_0^1 \partial_\mu a(\sigma(\tau)) \partial_\tau \sigma^\mu(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_0^1 |\nabla a| \cdot |\partial_\tau \sigma(\tau)| d\tau \\ &\leq \int_0^1 |\partial_\tau \sigma(\tau)| d\tau \leq L \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Caso imponha-se que o ponto y esteja em uma vizinhança suficientemente pequena de x tal que as geodésicas que partem de x não formem superfícies cóusticas, então pode-se localmente definir a função distância geodésica $a(y) = \int |\partial_\tau \sigma(\tau)| d\tau$ tal que $|a(y) - a(x)| = L$. Usando Coordenadas Riemannianas Normais, é imediato ver que o vínculo sobre a norma de operador é satisfeito por esta escolha,

$$\|[\mathcal{D}, L]\| = \|\gamma^\mu (\partial_\mu \sqrt{x^\nu x_\nu})\| = \left\| \frac{\gamma^\mu x_\mu}{\sqrt{x^\nu x_\nu}} \right\| \quad (2.1.6)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^\mu x_\mu}} \sqrt{\left\| \gamma^\nu x_\nu \right\| \cdot \left\| \gamma^\rho x_\rho \right\|} \quad (2.1.7)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^\mu x_\mu}} \sqrt{\left\| \gamma^\rho \gamma^\nu x_\nu x_\rho \right\|} \quad (2.1.8)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^\mu x_\mu}} \sqrt{\left\| x^\nu x_\nu \right\|} \quad (2.1.9)$$

$$= 1, \quad (2.1.10)$$

onde usa-se a propriedade $\|aa^*\| = \|a\| \cdot \|a^*\|$ de C^* -álgebras. Portanto, esta escolha de elemento de álgebra satura a condição imposta pelo vínculo sobre as funções, e estabelece o resultado desejado; a fórmula (2.1.3) é de fato igual à distância geodésica. A partir do conjunto de todas as geodésicas, pode-se então reconstruir a 2-forma métrica correspondente.

A motivação para se dar ao ST uma graduação e estrutura real vem da experiência comum com o operador de Dirac plano. A graduação não é nada além do operador de chiralidade, γ_5 , enquanto a estrutura real existe de forma a termos uma operação de involução.

2.2 O Princípio da Ação Espectral

O real interesse da Física na Geometria Espectral vem do fato de que sob suposições bastante gerais, como a dimensão K da teoria, é possível obter um modelo físico extremamente similar ao Modelo Padrão, compartilhando o grupo de simetria de calibre $U(1) \otimes SU(2) \otimes SU(3)$, e um Higgs

de massa razoavelmente similar[15].

Isto é feito postulando-se os Princípio da Ação Espectral [9]: O funcional de ação para um sistema físico descrito pelo triplo espectral (A, H, \mathcal{D}) é dado por

$$I = \text{Tr} \chi \left(\frac{\mathcal{D}^2}{m_0^2} \right) + \langle \Psi, \mathcal{D}\Psi \rangle, \quad (2.2.1)$$

onde χ é uma função de corte UV, m_0 é uma escala de massa, e Ψ é o conteúdo fermiônico da teoria. O traço de \mathcal{D}^2 produz a ação para os bósons da teoria, enquanto o termo $\langle \Psi, \mathcal{D}\Psi \rangle$ é uma representação esquemática para a ação relativa ao conteúdo fermiônico da teoria.

2.3 A Ação Espectral para a Gravidade

Para recuperar a ação de Einstein-Hilbert em uma variedade M usando a ação espectral, segue-se a fórmula prescrita; toma-se um triplo espectral equivalente a M , como encontrado em (2.1), e calcula-se (2.2.1).

Para a gravidade, somente deve-se preocupar com a parte bosônica da ação. Para fazê-lo, primeiro tem-se que definir a expressão $\chi(P)$, uma vez que P é um operador, e originalmente χ está definido no espaço real. Isso pode ser feito expandindo -se $\chi(x)$ em uma série de potências e substituindo-se $x \rightarrow P$, ou ao se fazer essa substituição na expansão de Fourier de χ . Para os presentes propósitos é mais interessante fazer essa substituição no contexto das transformadas de Mellin, a qual é a transformação conectando a função exponencial e a função Γ , já que isso vai mapear o problema de se calcular a Ação Espectral naquele de se calcular o kernel de calor para \mathcal{D}^2 , o qual é, para vários operadores de Dirac, um problema resolvido.

Primeiramente lembra-se da formulação precisa do problema de kernel de calor, para em seguida aplicar a técnica da transformada de Mellin.

2.3.1 O kernel de calor

Define-se o kernel de calor $K(x, x'; \tau)$ em uma variedade M com respeito ao operador H como o elemento de matriz do operador $e^{-\tau H}$ com respeito aos autoestados da posição.

$$K(x, x'; \tau) := \langle x | e^{-\tau H} | x' \rangle. \quad (2.3.1)$$

Isto implica que o kernel de calor é uma solução ao mesmo problema de valor de contorno

$$\partial_\tau K(x, x'; \tau) + HK(x, x'; \tau) = 0 \quad (2.3.2)$$

$$K(x, x'; +0) = \delta^{(4)}(x - x')I(x, x') \quad (2.3.3)$$

que a distribuição de probabilidade para o caminhante aleatório (1.0.2), generalizada para operadores H atuando em feixes spinoriais, onde $I(x, x')$ é o operador de transporte paralelo no feixe, a ser adequadamente definido posteriormente, na subseção 2.3.3.

Pode ser mostrado que

$$\text{Tr } e^{-\tau P} = \sum_{n \geq 0} \tau^{\frac{n-m}{d}} a_n(P) \quad (2.3.4)$$

onde m é a dimensão da variedade, e d é a ordem de P .

2.3.2 A Transformada de Mellin e a Ação Espectral

O par de transformadas de Mellin é definido por:

$$\phi(s) = \int_0^\infty p^{s-1} \chi(p) dp \quad (2.3.5)$$

$$\chi(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} p^{-s} \phi(s) ds, \quad (2.3.6)$$

onde c pertence à faixa fundamental, a qual é o intervalo (a_1, a_2) tal que:

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} \chi(p) = O(p^{a_1}), \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \chi(p) = O(p^{a_2}) \quad (2.3.7)$$

Então pode-se definir $\chi(P)$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr} \chi(P) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathrm{Tr} P^{-s} \phi(s) \, ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \zeta_P(s) \phi(s) \, ds\end{aligned}\tag{2.3.8}$$

$$\zeta_P(s) := \mathrm{Tr} P^{-s}\tag{2.3.9}$$

Nesta formulação é imediato ver que calcular $\mathrm{Tr} \chi(P)$ é equivalente a conhecer os pólos de $\zeta_P(s)$. Este é calculado comparando-se as expansões em séries de potência do kernel de calor com a expansão da transformada de Mellin:

$$\mathrm{Tr} e^{-\tau P} = \sum_{n \geq 0} \tau^{\frac{n-m}{d}} a_n(P)\tag{2.3.10}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tau^{-s} \Gamma(s) \zeta_P(s) \, ds,\tag{2.3.11}$$

Esta segunda igualdade pode ser lida do fato previamente mencionado de que e^{-p} e $\Gamma(s)$ são um par de transformadas de Mellin:

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty p^{s-1} e^{-p} \, dp \Rightarrow e^{-p} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} p^{-s} \Gamma(s) \, ds\tag{2.3.12}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Tr} e^{-\tau P} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tau^{-s} \mathrm{Tr} P^{-s} \Gamma(s) \, ds\tag{2.3.13}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tau^{-s} \zeta_P(s) \Gamma(s) \, ds\tag{2.3.14}$$

Comparando as expansões em séries de potências, se vê que $\zeta_P(s)\Gamma(s)$ deve ter pólos em

$$\frac{n-m}{d} = -s\tag{2.3.15}$$

Portando tem-se apenas que calcular seus resíduos para obter $a_n(P)$. Primeriamente nota-se que $\Gamma(s)$ tem pólos em $s = -\lambda$, $\lambda \in \mathbb{N}$, com resíduo $\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}$.

Toma-se como um exemplo o Laplaciano tradicional; um operador de ordem 2 agindo em uma variedade 4-dimensional, e considera-se que se está trabalhando em uma variedade sem fronteira,

a qual por sua vez implica $a_{2n+1} = 0$. Então restringe-se os possíveis valores para s ,

$$s = 2 - n. \quad (2.3.16)$$

Como conhecem-se os pólos de $\Gamma(s)$, então $\zeta_P(s)$ deve ter pólos somente em $s = 1, 2$. Portanto deve-se ter:

$$\Gamma(s) \operatorname{Res} \zeta_P(s)|_{s=2-n} = a_{2n}(P), \quad n = 0, 1. \quad (2.3.17)$$

$$\zeta_P(s)|_{s=2-n} = (-1)^s (-s)! \zeta_P(s)|_{s=2-n} a_{2n}, \quad n \geq 2. \quad (2.3.18)$$

Então pode-se retornar ao cálculo de $\operatorname{Tr} \chi(P)$. Agora precisa-se dos pólos e resíduos de $\phi(s)$. Escrevendo $\chi(p)$ como uma série de potências, obtém-se:

$$\phi(s) = \int_0^\infty p^{s-1} \sum_{n \geq 0} \frac{\chi^{(n)}(0)}{n!} p^n dp = \left[\sum_{n \geq 0} \frac{\chi^{(n)}(0)}{n!} \frac{p^{n+s}}{n+s} \right] \Big|_{p=0}^\infty \quad (2.3.19)$$

Esta expressão altamente formal também pode ser usada para escrever $\phi(s)$ como uma função com pólos em $s = -n$, onde o resíduo é $\frac{\chi^{(n)}(0)}{n!}$. Então pode-se escrever o resultado final usando integração de pólos,

$$\operatorname{Tr} \chi(P) = a_0(P)\phi(1) + a_2\phi(2) + \sum_{n \geq 2} (-1)^n \chi^{(n)}(0) a_{2n}(P), \quad (2.3.20)$$

e vê-se que com sucesso mapeou-se o problema naquele de se calcular os coeficientes a_n do kernel de calor.

Se P for um operador de ordem 2 agindo em uma variedade 4-dimensional, como no caso da gravidade de Einstein, obtém-se o resultado:

$$\operatorname{Tr} \chi(P) = a_0(P)\phi(1) + a_2(P)\phi(2) + \sum_{n \geq 2} (-1)^n \chi^{(n)}(0) a_{2(2+n)}(P) \quad (2.3.21)$$

O cálculo da ação então se reduz à determinação dos coeficientes a_n .

2.3.3 Biescalares, bitensores e bispinores

Faz-se aqui uma breve pausa no cálculo da Ação Espectral, e introduzir algumas quantidades matemáticas que serão necessárias para dar uma abordagem algorítmica aos próximos passos do cálculo. Sugere-se ao leitor as fontes, DeWitt[11] e Fulling[12], para maiores detalhes.

Escolha uma vizinhança geodesicamente convexa N . Então, fixando x' em N , para todo x também em N sempre existe uma geodésica única completamente nesta vizinhança conectando estes dois pontos. Portanto, seja $x(\tau)$ esta geodésica, tal que $x(0) = x'$, $x(1) = x$. Então pode-se unicamente definir uma função distância geodésica $s(x, x')$, por

$$s := \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}_\mu(\tau)}d\tau \quad (2.3.22)$$

Esta é uma função de dois pontos, e será chamada biescalar. Entretanto, ela mesma não será de muito uso; de maior utilidade é a chamada *função-mundo de Synge* $\sigma(x, x')$, definida por

$$\sigma(x, x') := \frac{1}{2}s^2, \quad (2.3.23)$$

isto é, ela é metade da distância geodésica ao quadrado. Suas derivadas $\nabla_\mu\sigma(x, x') = \sigma_\mu(x, x')$ também serão de grande uso. É fácil mostrar que $\sigma_\mu(x', x)$ é o vetor apontando de x para x' , com norma igual à distância geodésica; primeiramente calcula-se sua direção,

$$\begin{aligned} \sigma_\mu &= s s_\mu = s \nabla_\mu \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}_\mu(\tau)}d\tau \\ &= s \nabla_\mu \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^\nu(\tau)\dot{x}_\nu(\tau)} \frac{\dot{x}^\rho(\tau)\dot{x}_\rho(\tau)}{\dot{x}^\gamma(\tau)\dot{x}_\gamma(\tau)} d\tau \\ &= s \nabla_\mu \int_{x'}^x \frac{\dot{x}^\rho}{\sqrt{\dot{x}^\gamma\dot{x}_\gamma}} dx_\rho \\ &= s \frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}^\nu\dot{x}_\nu}}. \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

Como \dot{x}_μ é o vetor tangente à geodésica conectando os dois pontos, estabelece-se a direção.

Então a proposição referente à norma é trivial,

$$\begin{aligned}
\|\sigma_\mu\| &= \sqrt{\sigma_\mu \sigma^\mu} \\
&= \sqrt{s^2 \frac{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}{\dot{x}^\nu \dot{x}_\nu}} \\
&= |s|.
\end{aligned} \tag{2.3.25}$$

A partir destas proposições é imediato obter uma relação útil,

$$\sigma = \frac{1}{2} \sigma_\mu \sigma^\mu. \tag{2.3.26}$$

Entretanto, deve-se ter cuidado ao se trabalhar com tais objetos, uma vez que as derivadas podem ser tomadas com respeito a ambas as coordenadas, tornando-os tensores com respeito a um índice, mas mantendo-os escalares com respeito ao outro. Usa-se a convenção de usar apóstrofos para indicar que as derivadas devem ser tomadas com respeito ao segundo índice. As propriedades previamente definidas permitem-nos usar as componentes do vetor $\sigma_{\mu\nu}(x, x')$ para definir Coordenadas Riemannianas Normais em torno do ponto x' .

Pode-se também usar biescalares e bitensores para definir a noção de transporte paralelo. Define-se o operador biescalar transporte paralelo $I_x(x, x')$ ao exigir que ele transporte paralelamente escalares de x' em x ao longo de uma dada curva $x(\tau)$, isto é, se

$$\phi(x) = I_x(x, x') \phi(x'), \tag{2.3.27}$$

então $\dot{x}^\mu \nabla_\mu \phi(x) = 0$.

Como o caso especial $x = x'$ é frequentemente aquele do qual se extraem os resultados físicos, então este será chamado de *limite de coincidência*, e usa-se a notação $[T] := T(x, x' = x)$. Então o último resultado implica que $I(x, x')$ se reduz ao operador identidade no limite de coincidência, $I(x', x') = 1$.

Em vizinhanças geodesicamente convexas, existe uma parametrização especialmente útil para $I(x, x')$. Se escolher-se que o transporte paralelo seja feito apenas entre geodésicas conectando os

dois pontos do argumento, então em tais vizinhanças $I(x, x')$ é unicamente definido em todos os pontos, e é imediato de sua definição que sua derivada covariante é zero ao longo dessa geodésicas.,

$$\sigma^\mu I_\mu = 0. \quad (2.3.28)$$

Usando a regra da cadeia no limite de coincidência pode-se imediatamente obter o Teorema de Synge: seja T um tensor com índices omitidos, então

$$[T]_{;\mu} = [T_{;\mu}] + [T_{;\mu'}]. \quad (2.3.29)$$

Particularmente úteis para o cálculo do kernel de calor são os limites de coincidência das derivadas do escalar-mundo de Synge e do operador de transporte paralelo. Portanto, agora derivam-se os primeiros termos, e se fornece uma prescrição para se calcular os seguintes.

Os primeiros resultados são $[\sigma] = [\sigma_\mu] = 0$, imediatos a partir de (2.3.24) e (2.3.23). Resultados seguintes vêm da diferenciação da relação (2.3.26), e da aplicação da definição de curvatura [16] em um feixe sem torção,

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]f_{\mu_1 \dots \mu_n} = \sum_{i=1}^n f_{\mu_1 \dots \mu_{i-1} \lambda \mu_i \dots \mu_n} R_{\mu\nu\mu_i}{}^\lambda + \omega_{\mu\nu} f_{\mu_1 \dots \mu_n}, \quad (2.3.30)$$

onde $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ é a curvatura com respeito aos índices de espaçotempo, e $\omega_{\mu\nu} = (\omega_\alpha^\beta)_{\mu\nu}$ é a curvatura no feixe com respeito aos graus internos de liberdade.

Por exemplo, como σ é conectado somente aos graus de liberdade do espaçotempo, pode-se mais facilmente calcular seus primeiros limites de coincidência; por exemplo, a derivada

$$\sigma_{\nu\rho} = \sigma_{\mu\nu\rho}\sigma^\mu + \sigma_{\mu\nu}\sigma^\mu{}_\rho \quad (2.3.31)$$

implica no limite de coincidência a recuperação da métrica, $[\sigma_{\mu\nu}] = g_{\mu\nu}$. Este processo pode ser feito iterativamente, produzindo:

$$[\sigma_{\mu\nu\rho}] = 0 \quad (2.3.32)$$

$$[\sigma_{\mu\nu\rho\delta}] = \frac{1}{3}(R_{\rho\mu\nu\delta} + R_{\delta\mu\nu\rho}) \quad (2.3.33)$$

Para obter os limites das derivadas do operador transporte paralelo, somente tem-se que aplicar o mesmo processo, agora agindo com a derivada em (2.3.28), lembrando-se que I executa o transporte paralelo no feixe, e portanto deve conter os graus de liberdade interiores correspondentes. Os primeiros resultados são

$$[I_\mu] = 0 \tag{2.3.34}$$

$$[I_{\mu\nu}] = \frac{1}{2}w_{\mu\nu}. \tag{2.3.35}$$

Cálculo dos limites seguintes é exaustivo mas direto, e os resultados podem ser encontrados nas referências previamente mencionadas.

2.3.4 Cálculo dos coeficientes do Kernel de Calor

Há muitas formas de se calcular kernels de calor, cada uma mais ou menos problemática dependendo das características do operador considerado, como ordem, anisotropia, e quais soluções particulares já são conhecidas. Revisam-se alguns dos métodos mais utilizados; começa-se com os ansätze de Fulling e de DeWitt, ambos desenhados especificamente para o cálculo dos coeficientes do kernel de calor para o operador Laplaciano, utilizando um ansatz e uma relação de recursão; em seguida vê-se o método de operadores pseudodiferenciais de Gusynin, o mais geral dos revisados, capaz de tratar operadores de ordem arbitrariamente alta, apesar com custo computacional de rápido crescimento; por último revisa-se o método de exaustão de coeficientes de Gilkey, o qual é bastante eficiente, mas depende de propriedades específicas de transformação do operador com respeito ao produto tensorial de variedades, e requer a existência de uma base de soluções suficientemente grande. Faz-se um abuso de notação ao nos referir tanto a $a_n(x, x')$ como a $a_n = \int \sqrt{-g}a_n(x, x)dx$ como os coeficientes do kernel de calor, mas acredita-se que o contexto tornará a diferença clara, enquanto a conexão entre ambos é imediata.

O ansatz de Fulling

Após definir as estruturas biescalares, bitensoriais e biespinoriais relevantes e encontrar seus limites de coincidência, utilizar os métodos de ansatz se torna razoavelmente imediato. Isso é feito ao supor que $K(x, x'; \tau)$ seja o produto de uma série de potência em τ com a solução “covariantizada” em espaço plano, obtida ao substituir $(x - x')^2/2$ pela função-mundo de Synge $\sigma(x, x')$. Então o ansatz se torna

$$K(x, x'; \tau) = (4\pi\tau)^{-d/2} e^{-\sigma(x, x')/2\tau} \sum_0^{\infty} a_n(x, x') \tau^n. \quad (2.3.36)$$

Este ansatz é adequado para lidar com o operador

$$H = -\nabla^\mu \nabla_\mu + E, \quad (2.3.37)$$

onde E é um endomorfismo de feixe, e a derivada covariante é da forma $\nabla_\mu = \nabla_\mu^R + w_\mu$; ela é a soma da derivada covariante compatível com a métrica ∇_μ^R com a conexão de calibre do feixe w_μ , como o potencial vetorial eletromagnético. No caso de interesse desta dissertação, a conexão de calibre utilizada será a conexão de spin, a qual é manifestada nos outros métodos no operador de transporte paralelo $I(x, x')$.

Inserindo-se o ansatz no problema de valor de contorno (2.3.2), obtém-se a seguinte relação de recursão[12],

$$\sigma^\mu a_{n+1; \mu} + \left(n + 1 + \frac{\sigma^\mu{}_\mu - d}{2} \right) a_{n+1} = a_{n; \mu}{}^\mu - E a_n, \quad (2.3.38)$$

onde definiu-se $a_n = 0, n < 0$. Isto produz imediatamente o primeiro coeficiente; se escolhe-se $n = -1$, esta equação se torna

$$\sigma^\mu a_{0; \mu} = 0, \quad (2.3.39)$$

a qual é idêntica a (2.3.28), e juntamente com a condição de contorno implica $a_0 = I$

Apesar do fato de que (2.3.38) é diferencial, interessa-se apenas no limite de coincidência, que

se torna algébrico:

$$[a_{n+1}] = \frac{1}{n+1} [a_{n; \mu}^{\mu}] - E[a_n] \quad (2.3.40)$$

Portanto, tem-se que calcular o limite de coincidência da divergência $a_{n; \mu}^{\mu}$. Como conhece-se a_0 , pode-se iterativamente aplicar derivadas a (2.3.38), tomando o limite de coincidência, e geram-se os coeficientes seguintes. Por exemplo, encontra-se a_1 . Tomando uma divergência, obtém-se

$$(n+3)[a_{n+1; \mu}^{\mu}] - \frac{R}{3}[a_{n+1}] = [a_{n; \mu}^{\mu \nu}] - E_{\mu}^{\mu}[a_n] - 2E^{\mu}[a_{n; \mu}] - E[a_{n; \mu}^{\mu}]. \quad (2.3.41)$$

Escolhendo $n = -1$, esta equação se reduz ao termo desejado,

$$[a_{0; \mu}^{\mu}] = \frac{R}{6}[a_0] = \frac{R}{6}, \quad (2.3.42)$$

uma vez que as condições de contorno implicam $a_0 = 1$. Portanto $[a_1] = -E + \frac{1}{6}R$. Repetindo esse procedimento, podem-se obter os coeficientes seguintes,

$$[a_0] = 1 \quad (2.3.43)$$

$$[a_1] = -E + \frac{1}{6}R \quad (2.3.44)$$

$$[a_2] = \frac{1}{2}E^2 - \frac{1}{6}\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}E + \frac{1}{12}\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} - \frac{1}{6}RE + \frac{1}{72}R^2 - \frac{1}{180}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \frac{1}{180}R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{1}{30}\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}R. \quad (2.3.45)$$

É importante notar quão rapidamente esses coeficientes se multiplicam; a_3 possui 46 constantes independentes, das quais 43 são não-nulas. Adicionalmente, é possível observar que a origem dos termos $\omega_{\mu\nu}$ está nas derivadas de ordem mais alta do operador transporte paralelo $I(x, x')$, o qual gera os termos de curvatura com respeito às conexões de spin e calibre, como definido em (2.3.30).

O ansatz de DeWitt

Este ansatz mais antigo é dado por

$$K(x, x'; \tau) = (4\pi\tau)^{-d/2} D^{1/2} e^{-\sigma(x, x')/2\tau} \sum_0^{\infty} a_n(x, x') \tau^n, \quad (2.3.46)$$

diferindo do ansatz de Fulling ao incluir o determinante de Van-Vleck-Morette, um biescalar definido por

$$D := \det(\sigma_{\mu\nu'}) \quad (2.3.47)$$

A equação diferencial à qual isto leva é

$$D^{1/2}\sigma^\mu a_{n+1;\mu} + D^{1/2}\left(\frac{1}{2}D^{-1}\sigma^\mu D_\mu + n + 1 + \frac{\sigma^\mu{}_\mu - d}{2}\right)a_{n+1} = (D^{1/2}a_n)^\mu{}_\mu - ED^{1/2}a_n \quad (2.3.48)$$

Entretanto, o determinante de Van-Vleck-Morette obedece

$$d = \sigma^\mu\sigma_\mu + \frac{1}{D}\sigma^\mu\nabla_\mu D. \quad (2.3.49)$$

Isso pode ser mostrado ao se tomar a derivada da expressão (2.3.26), lembrando-se que $D_{\mu\nu'} = \nabla_\mu\nabla_{\nu'}D$,

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu\rho}\sigma^\mu{}_{\nu'} + \sigma_\mu\sigma^\mu{}_{\nu'\rho} &= \sigma_{\rho\nu'} \\ \sigma^\mu{}_\rho D_{\mu\nu'}D^{-1\rho\nu'} + \sigma_\mu D^\mu{}_{\nu';\rho}D^{-1\rho\nu'} &= D_{\rho\nu'}(D^{-1})^{\rho\nu'}, \end{aligned}$$

o que leva à expressão (2.3.49) pela aplicação da relação traço-determinante, $\det e^M = e^{\text{Tr} M}$, em forma diferencial, $\text{Tr}(\partial \log M) = \partial \log \det M$.

Usando essa identidade, a equação diferencial para os coeficientes de kernel de calor no ansatz de DeWitt sofre alguns cancelamentos interessantes, e se torna

$$D^{1/2}\sigma^\mu a_{n+1;\mu} + D^{1/2}(n + 1)a_{n+1} = (D^{1/2}a_n)^\mu{}_\mu - ED^{1/2}a_n. \quad (2.3.50)$$

Como pode-se ver, o termo que elimina-se ao inserir o determinante de Van-vleck-morette é precisamente $\frac{\sigma^\mu{}_\mu - d}{2}$, o qual já havia desaparecido por si só no ansatz de Fulling ao se tomar o limite de coincidência. Portanto, atualmente a perspectiva de Fulling é mais popular, devido às equações ligeiramente mais simples; entretanto, mostra-se aqui o anstaz de DeWitt por razões históricas. Deve-se ressaltar que esses ansätze são adequados apenas para se lidar especificamente com Laplacianos, isto é, operadores de ordem dois cujos kernels de calor vão para (1.0.2) em

espaços planos. Para operadores de ordem maior, é necessária uma abordagem mais geral.

O método de Gusynin para operadores pseudodiferenciais

A fim de se trabalhar com operadores consideravelmente diferentes do laplaciano tradicional, como operadores de ordem maior que dois, métodos menos baseados em ansätze são necessários. Um deles, por exemplo, foi criado por Gusynin[16] ao final da década de 80. Mais cedo nessa década Widom[17] propôs o uso de transformadas de Fourier generalizadas para espaços curvos, usando como fase, ao invés do produto tradicional $k_\mu(x - x')^\mu$, uma função mais geral $l(x, x', k)$ tal que:

$$\{\nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_n} l(x, x', k)\} = \begin{cases} k_\mu, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases} \quad (2.3.51)$$

Então, a fim de se calcular o kernel de calor, pode-se escrevê-lo como a integral de um resolvente,

$$e^{-\tau H} = \int_C \frac{id\lambda}{2\pi} e^{-\tau\lambda} (H - \lambda)^{-1}. \quad (2.3.52)$$

Entretanto, precisa-se apenas de seu limite de coincidência, logo o que realmente precisa-se calcular é:

$$\langle x | e^{-\tau H} | x \rangle = \int_C \frac{id\lambda}{2\pi} e^{-\tau\lambda} \langle x | (H - \lambda)^{-1} | x \rangle. \quad (2.3.53)$$

Portanto, além de integrais tabuladas, é necessária somente a representação matricial do resolvente. Para calculá-la, Gusynin propõe que aplica-se a decomposição de Fourier de Widom,

$$\langle x | (H - \lambda)^{-1} | x' \rangle = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n \sqrt{g}} e^{il(x, x', k)} \xi(x, x', k; \lambda), \quad (2.3.54)$$

a qual por definição deve satisfazer a equação do resolvente, a qual em termos da função de fase é escrita como

$$\{H(x, \nabla_\mu + i\nabla_\mu l) - \lambda\} \xi(x, x', k; \lambda) = I(x, x'), \quad (2.3.55)$$

onde $I(x, x')$ é semelhante, apesar de não necessariamente idêntico, ao operador de transporte

paralelo que havia-se previamente definido [17]; ele é tal que

$$[I_{\alpha\beta}] = \delta_{\alpha\beta} \quad (2.3.56)$$

$$[\{\nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_n}\}_\alpha^\gamma I_{\gamma\beta}] = 0, n \geq 1 \quad (2.3.57)$$

Portanto quer-se calcular

$$\langle x | e^{-\tau H} | x \rangle = \int_C \frac{id\lambda}{2\pi} e^{-\tau\lambda} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n \sqrt{g}} \xi(x, x, k; \lambda). \quad (2.3.58)$$

como uma série de potência com respeito a τ . Para fazê-lo, pode-se executar a mudança de variáveis $\lambda \rightarrow \lambda/\tau$, e exigir que $[\xi]$ tenha uma expansão em termos funções homogêneas de λ . Entretanto, a equação diferencial que eles satisfazem, (2.3.55), não é homogênea em λ , então precisa-se de uma deformação desta idéia; como há também uma integral com respeito a k , então pode-se ao invés requerir que $[\xi_n]$ seja uma função homogênea de λ e k simultaneamente, $[\xi_n(x, x, \tau k, \tau^\alpha \lambda)] = \tau^n [\xi_n(x, x, k, \lambda)]$, o coeficiente α ainda a ser determinado; em linguagem matemática, escreve-se

$$[\xi] = \sum_i [\xi_n(x, x, k, \lambda)] \quad (2.3.59)$$

os limites da soma ainda a serem determinados.

Gusynin trabalhou com operadores relativamente bem-comportados, os quais tinham expansão

$$H(x, \nabla_\mu + i\nabla_\mu l) = \sum_{n=0}^z H_n(x, \nabla_\mu, \nabla_\mu l), \quad (2.3.60)$$

onde z é o grau do operador H , e H_n são operadores homogêneos de grau n em k .

Inserindo essas expressões na equação (2.3.55) e rescalando $\{k, \lambda\} \rightarrow \{\tau k, \tau^\alpha \lambda\}$, obtém-se a relação de recorrência necessária,

$$\sum_{j=0}^z H_j \xi_{i-j} - \lambda \xi_{i-\alpha} = I \delta_{i,0} \quad (2.3.61)$$

Agora tudo que nos resta é a escolher α e os índices não nulos da expansão de ξ . A escolha mais simples é $\alpha = z$, e $\xi_i; i \in \{-z, -z-1, \dots\}$, a qual é consistente com o autovalor escalando como o símbolo líder do operador; isto é, isto se torna uma expansão em altos momentos da solução. Isto

é, entretanto, apenas uma escolha da base utilizada para a expansão, e não corresponde a um real requisito físico.

Entretanto, uma vez que se tem tal expansão, pode-se obter uma fórmula para a expansão do kernel de calor ao fazer a mudança de variáveis $\{\lambda, k\} \rightarrow \{\lambda/\tau, k/\tau^{1/\alpha}\}$,

$$\langle x|e^{-\tau H}|x\rangle = \sum_j \frac{1}{\tau^{1+(n+j)/\alpha}} \int_C \frac{id\lambda}{2\pi} e^{-\tau\lambda} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n \sqrt{g}} [\xi_j] \quad (2.3.62)$$

Para a real solução deste sistema e consequente integração sobre os momentos refere-se o leitor ao artigo original. Por agora, nota-se que o atributo mais interessante desta abordagem é o fato de ser quase livre de ansatz, sendo capaz de lidar com operadores de ordem maior do que dois, tornando explícito o fato de que os coeficientes do kernel de calor para operadores de ordem alta é dependente da dimensão de forma não trivial, contrastando com a dependência trivial $(4\pi)^{-n/2}$ observada no laplaciano.

Abordagem de Gilkey de exaustão dos coeficientes

Agora, apresenta-se a abordagem de Gilkey para o cálculo dos coeficientes de kernel de calor, seguindo [13]. Trabalhar-se-á com variedades compactas sem contorno.

Mais do que a abordagem de DeWitt, o método de Gilkey é especificamente desenhado para trabalhar com o operador de Laplace tradicional, contendo uma parte de calibre extra; isto é, novamente trabalhar-se-á com o operador (2.3.37). Adicionalmente, calcular-se-ão os kernels de calor usando a definição mais geral,

$$K(f, H, \tau) = \text{Tr}(f e^{-\tau H}), \quad (2.3.63)$$

que difere dos anteriores ao incluir a função geral f e por tomar o traço sobre as coordenadas espaçotemporais, na forma da integral do limite de coincidência sobre todo o espaço.

A primeira consideração a ser feita é puramente dimensional. Como se quer calcular $e^{-\tau H}$ e a exponencial requer um argumento adimensional, então τ e H devem ter dimensões inversas, $[\tau] = [H]^{-1}$. Para simplificar a análise, é feita a escolha não padrão $[\tau] = 1$. Portanto, como

$[H] = [\nabla_\mu \nabla^\mu]$, pode-se inferir que a dimensão da derivada covariante deve ser $[\nabla_\mu] = -1/2$, de onde pode-se deduzir a dimensão de todos os outros tensores, como tensor de Riemann, o qual possui dimensão $[R_{\mu\nu\rho\sigma}] = -1$. Também pode-se mostrar que o kernel de calor deve ser computável pela integração de invariantes locais sobre o espaço; usando ambas as considerações, pode-se concluir que os coeficientes do kernel de calor devem ser da forma:

$$a_0 = \int \sqrt{g} \operatorname{Tr}(\alpha_0 f) \quad (2.3.64)$$

$$a_2 = \int \sqrt{g} \operatorname{Tr}(f(\alpha_1 E + \alpha_2 R)) \quad (2.3.65)$$

$$a_4 = \int \sqrt{g} \operatorname{Tr}(f(\alpha_3 E_{;\mu}{}^\mu + \alpha_4 ER + \alpha_5 E^2 + \alpha_6 R_{;\mu}{}^\mu + \alpha_7 R^2 + \alpha_8 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \alpha_9 R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} + \alpha_{10} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu})) \quad (2.3.66)$$

A razão para a ausência dos coeficientes de índice ímpar está no fato de que em variedades compactas sem contorno, invariantes devem ser construídas pela contração de derivadas covariantes umas com as outras, o que implica a ausência de invariantes com dimensão ímpar.

Agora segue-se para a análise de uma série de coeficientes de kernel de calor já conhecidos, obtidos pelo cálculo explícito do traço, e aplica-se a universalidade dos coeficientes de forma a fixar seus valores. A primeira questão a se resolver é quanto a se os coeficientes α_i dependem na dimensão da variedade. Para fazê-lo, usa-se o fato de que o kernel de calor para o círculo já é conhecido, e que se b_n, c_n são os coeficientes para as variedades M_b, M_c , então os coeficientes a_n para $M_a = M_b \otimes M_c$ devem ser

$$a_n = \sum_i b_{n-i} c_i \quad (2.3.67)$$

Em seguida, para a questão em si. Escolha uma variedade M e denote seus coeficientes por α_i^M . Faça o produto tensorial por um círculo parametrizado por algum t , e calcule os coeficientes para o novo Laplaciano $H \otimes (-\partial_t)$ on $M \otimes S^1$. Como o kernel de calor do círculo é somente $K = (4\pi)^{-1/2} \tau^{-1/2}$ e o produto tensorial mantém constantes as outras invariantes, como a curvatura e torsão, então conclui-se que a dimensão da variedade é apenas absorvida por esse coeficiente

comum. Portanto, pode-se reescalar o α_i de forma a ser independente da dimensão, e obter

$$a_0 = (4\pi)^{-d/2} \int \sqrt{-g} \text{Tr}(\alpha_0 f) \quad (2.3.68)$$

$$a_2 = (4\pi)^{-d/2} \int \sqrt{-g} \text{Tr}(f(\alpha_1 E + \alpha_2 R)) \quad (2.3.69)$$

$$a_4 = (4\pi)^{-d/2} \int \sqrt{-g} \text{Tr}(f(\alpha_3 E_{;\mu}{}^\mu + \alpha_4 ER + \alpha_5 E^2 + \alpha_6 R_{;\mu}{}^\mu + \alpha_7 R^2 + \alpha_8 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \alpha_9 R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} + \alpha_{10} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu})) \quad (2.3.70)$$

Para o próximo passo, deve-se primeiro listar alguns casos específicos de kernels de calor resolvidos. Usam-se as esferas S^2, S^3 , as quais têm expansão de calor [13]

$$K_{S^2} \approx \frac{1}{\tau} + \frac{1}{3} + \frac{\tau}{15} + O(\tau^2) \quad (2.3.71)$$

$$K_{S^3} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{1}{\tau^{3/2}} + \frac{1}{\tau^{1/2}} + \frac{\tau^{1/2}}{2} \right) + O(e^{-1/\tau}) \quad (2.3.72)$$

Como sabe-se que a curvatura de esferas unitárias S^n obedece

$$R = n(n-1), R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} = 2n(n-1), R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = n(n-1)^2, \quad (2.3.73)$$

e que suas áreas são

$$A_{S^2} = 4\pi, A_{S^3} = 2\pi^2, \quad (2.3.74)$$

então pode-se comparar expressões (2.3.71) e (2.3.68) para obter não apenas o próximo coeficiente, $\alpha_2 = 1/6$, mas também duas funções lineares de três outros coeficientes,

$$2\alpha_7 + \alpha_8 + 2\alpha_9 = 12/360 \quad (2.3.75)$$

$$3\alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9 = 15/360 \quad (2.3.76)$$

De forma a obter este sistema, aplica-se a fórmula (2.3.67) a um produto geral, e investiga-se a consistência do coeficiente do termo $R_a^2 = (R_b + R_c)^2$. Isto leva a $\alpha_7 = 5/360$, o que permite-nos resolver (2.3.75) e obter $\alpha_8 = -\alpha_9 = 2/360$.

A seguir encontram-se os coeficientes de calibre e potencial; os termos não-derivativos podem ser facilmente obtidos pela observação de que $K_{-\nabla_\mu \nabla^\mu + E} = e^{\tau E} K_{-\nabla_\mu \nabla^\mu}$, o qual por comparação do

coeficientes fornece $\alpha_1 = -1$, $\alpha_4 = -1/6$, $\alpha_5 = 1/2$. Os termos derivativos podem ser encontrados usando-se um método similar do de Gusynin; toma-se o traço do operador em um toro T_n usando-se a base discreta de ondas planas $\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}^d$;

$$K = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int_{T_n} \frac{d^n x}{(2\pi)^d} e^{-ikx} e^{-\tau H[\nabla_\mu]} e^{ikx} \quad (2.3.77)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int_{T_n} \frac{d^n x}{(2\pi)^d} e^{-\tau H[\nabla_\mu + ik_\mu]} \quad (2.3.78)$$

A seguir, quer-se fatorar a exponencial do termo adimensional, $e^{-\tau k^2}$. Para fazê-lo, usar-se-á a bem-conhecida expansão de Zassenhaus, a qual é uma fórmula para a fatoração da exponencial de uma soma de operadores não-comutativos[18],

$$e^{A+B} = e^A \left\{ 1 + B + \frac{1}{2}([B, A] + B^2) + \right. \quad (2.3.79)$$

$$\left. + \frac{1}{6}([[[B, A], A] + [B, [B, A]] + 3[B, A]B + B^3) + \dots \right\}, \quad (2.3.80)$$

Aplica-se a fórmula, seguindo com a soma sobre k , obtendo-se

$$K = (4\pi)^{-n/2} \int_{T_n} d^n x \left\{ 1 - \tau E + \tau^2 \left(\frac{1}{2} E^2 - \frac{1}{6} E_{;\mu}{}^\mu + \frac{1}{12} \Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} \right) \right\}, \quad (2.3.81)$$

o que leva a mais dois coeficientes, $\alpha_3 = -1/6$, $\alpha_{10} = 1/12$.

O último coeficiente deve ser calculado aplicando-se o chamado “Método de transformações conformes”. Não elaborar-se-á sobre ele, remetendo o leitor às referências, mas apenas mencionare-se que ao se executar a transformação conforme $g_{\mu\nu} \rightarrow e^{-2\sigma} g_{\mu\nu}$, a qual por consistência requer que a parte de calibre se transforme como

$$w_\mu = \frac{1}{2}(2-n)\sigma_{;\mu}, \quad \delta E = -2E\sigma + \frac{1}{2}(n-2)\sigma_{;\mu}{}^\mu \quad (2.3.82)$$

Através da comparação dos coeficientes do termo $R_{;\mu}{}^\mu$ o resultado final, $\alpha_6 = 1/30$.

2.3.5 A ação resultante

O último passo que deve-se dar neste cálculo é conectar \mathbb{D}^2 com o operador $-\nabla_\mu \nabla^\mu + E$ para o qual calcula-se o kernel de calor. A relação é facilmente obtida, e é a chamada Fórmula de Lichnerowicz:

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}^2 \Psi &= -\gamma^\mu \nabla_\mu \gamma^\nu \nabla_\nu \Psi \\
&= -\gamma^\mu \gamma^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu \Psi \\
&= -\nabla^\mu \nabla_\mu \Psi - \frac{1}{2} \gamma^{\mu\nu} [\nabla_\mu, \nabla_\nu] \Psi \\
&= -\nabla^\mu \nabla_\mu \Psi - \gamma^{\mu\nu} \frac{R_{\mu\nu}{}^{ab} \gamma_{ab}}{8} \Psi \\
&= -\nabla^\mu \nabla_\mu \Psi + \frac{R}{4} \Psi
\end{aligned} \tag{2.3.83}$$

a qual significa que deve-se tomar nas fórmulas anteriores $E = R/4$.

Agora têm-se todos os elementos necessários para calcular a Ação Espectral para a Gravitação de Einstei-Hilbert, que revela-se ser

$$S = \frac{1}{16\pi^2} \int \sqrt{-g} \left\{ 4\phi(0) - \frac{1}{12} \phi(1) R + \frac{1}{360} \chi^{(2)}(0) \left[5R^2 - 7R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 12R_{,\mu}{}^\mu - 8R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \right] \right\}, \tag{2.3.84}$$

onde os sinais do termo linear em R diferem na literatura dependendo da convenção utilizada para se definir H .

Pode-se ver imediatamente que os termos de menor ordem correspondem à ação de Einstein-Hilbert com uma constante cosmológica, o que é meramente consequência do fato de que essas são as únicas invariantes disponíveis da dimensão correta. Entretanto, pode-se ver que os coeficientes relativos dos termos de maior ordem tornam-se vinculados com respeito um ao outro, e que é esta a propriedade que convida-nos a aplicar esta técnica para gravitação Horava. Os coeficientes gerais ainda são determinados por uma função de corte arbitrária, o que nos permite jogar as correções de ordem mais alta na escala de Planck.

Capítulo 3

Introdução a gravitação anisotrópica

Neste capítulo introduz-se mais formalmente dois modelos de gravidade anisotrópica; o modelo Horava-Lifshitz, e sua extensão “saudável”. Para tanto, primeiro se faz uma breve revisão da decomposição ADM da métrica de Einstein-Hilbert, de forma a fixar a notação.

3.1 A decomposição ADM

A ação Einstein-Hilbert (EH) é dada pela ação mais geral que pode ser construída em 4 dimensões utilizando-se a métrica, que é invariante com respeito à ação do grupo de difeomorfismos no espaçotempo (Diff), e leva tanto a equações de movimento de segunda ordem, e ao se adicionar matéria, permite a existência de um tensor energia-momento conservado sem impôr restrições não-físicas, como a exigência da constância do traço [19]. Sendo isso dito, ela é dada por

$$\int_M \sqrt{g} R \, dx \tag{3.1.1}$$

Chama-se um espaço-tempo *foliado* se existe uma função $t : M \rightarrow \mathbb{R}$ cujo gradiente é em todo ponto um vetor tipo tempo.

O processo de se realizar a decomposição ADM consiste em escolher uma foliação espacial do espaço-tempo, e usá-la para separar tanto a métrica e a ação em partes “espacial” e “temporal”,

como em

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ij}(dx^i + N^i dt)((dx^j + N^j dt)), \quad (3.1.2)$$

isto é, escrever a teoria n -dimensional em $(n - 1) + 1$ dimensões.

Aqui N é conhecida como função lapso, N_i como o 3-vetor shift, e h_{ij} é a métrica induzida nas superfícies de tempo constante, podendo ser escrita covariantemente por meio de

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \eta_\mu \eta_\nu. \quad (3.1.3)$$

Isto é facilmente verificado checando-se que isto é uma projeção, e que contrações com η_μ , a qual é a 1-forma unitária normal às superfícies da foliação definida por

$$\eta := \frac{dt}{\sqrt{-g(dt, dt)}}, \quad (3.1.4)$$

retorna zero.

A partir de agora, usar-se-ão os índices $\{i, j, k\}$ para nos referir a índices nas hipersuperfícies. Como h_{ij} é uma métrica, então ele induz uma derivada covariante ${}^3\nabla_i$ em tensores T_i definidos na hipersuperfície M_t . Além disso, usando (3.1.3) pode-se relacionar esta derivada à ação da derivada ∇_i em um tensor T_μ do espaço completo M pela fórmula

$${}^3\nabla_i T_j = h_i^\mu h_j^\nu \nabla_\mu T_\nu. \quad (3.1.5)$$

onde T_μ coincide com T_i em sua ação nos vetores de M_t [20].

Como quer-se escrever a ação de Einstein-Hilbert em forma 3+1, precisa-se decompôr o escalar de curvatura R . Para fazê-lo, primeiro define-se o 3-tensor curvatura extrínseca K_{ij} e um projetor sobre a foliação h_i^μ por:

$$K_{ij} := -h_i^\mu h_j^\nu \nabla_\mu \eta_\nu \quad (3.1.6)$$

$$h_i^\mu := \delta_i^\mu + \eta_i \eta^\mu \quad (3.1.7)$$

A curvatura extrínseca registra como as hipersuperfícies formam ângulos com respeito uma à

outra, enquanto o projetor de foliação é simplesmente o tensor com a útil propriedade de mapear n -vetores em suas projeções, $(n - 1)$ -vetores. A curvatura extrínseca também pode ser usada para reescrever a relação (3.1.5), permitindo-nos também a interpretá-la como a diferença entre a derivada covariante completa, e a derivada covariante compatível com a 3-métrica, o que pode ser mostrado imediatamente,

$$\begin{aligned}
{}^3\nabla_V T_j &= V^i h_i^\mu (\delta_j^\nu + \eta_j \eta^\nu) \nabla_\mu T_\nu \\
&= V^i h_i^\mu (\nabla_j T_\nu - \eta_j T_\nu \nabla_\mu \eta^\nu) \\
&= \nabla_V T_\nu + \eta_j V_i T_l K^{il},
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

onde $T_i, V_j \in TM_t$, e usa-se $T_\mu \eta^\mu = 0$.

Começam-se os cálculos por primeiro obtendo a relação de Gauss; começa-se escrevendo a segunda derivada espacial de algum vetor espacial v_i , e aplica-se relação (3.1.5),

$${}^3\nabla_i {}^3\nabla_j v^k = -K_{ij} \eta^\gamma h^\rho_\delta \nabla_\gamma v^\delta + K^k_i K_{jl} v^l + h_j^\gamma h^k_\delta h_i^\mu \nabla_\mu \nabla_\gamma v^\delta. \tag{3.1.9}$$

Agora calcula-se o comutador da derivada espacial, por definição obtendo o tensor de Riemann espacial, o que leva à relação de Gauss,

$${}^3R_{ij}{}^k{}_l = K^k_i K_{jl} - K^k_j K_{il} + h_j^\gamma h^k_\delta h_i^\mu R_{\mu\gamma}{}^\delta{}_l. \tag{3.1.10}$$

Entretanto, a ação de Einstein-Hilbert é uma função do escalar de curvatura R ; para obtê-lo, simplesmente contraem-se os índices não-antissimétricos, e obtém-se

$$R = {}^3R + K^2 - K_{ij} K^{ij} - 2R_{\mu\nu} \eta^\mu \eta^\nu \tag{3.1.11}$$

Como pode-se mostrar [20] que o termo $R_{\mu\nu} \eta^\mu \eta^\nu$ é uma divergência, então se a variedade M não tem contorno, então a ação de Einstein-Hilbert em forma ADM decomposta toma a forma

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{\Sigma_t} ({}^3R - K_{ij} K^{ij} + K^2) N \sqrt{h} d^3x \right\} dt. \tag{3.1.12}$$

Apesar desta separação, esses coeficientes específicos da ação a mantém invariante sob o grupo

de difeomorfismo completo.

3.2 Motivações para gravitação anisotrópica

Neste capítulo apresentam-se as motivações para trabalhar com gravitação anisotrópica. A abordagem foi primeiro desenvolvida por Horava em seu artigo de 2009[21] para o caso tridimensional, e no mesmo ano estendida para quatro dimensões [22]. Seguindo a idéia usada por Lifshitz [23] para explicar transições de fase, Horava propôs que um modelo renormalizável da gravidade poderia ser construído utilizando-se termos anisotrópicos de maior ordem na ação.

Não-renormalizabilidade da gravitação pode ser facilmente entendida ao olhar-se para o propagador de graviton, que tem a forma (3.2.1). Como isto leva a dimensão de massa negativa para a constante de acoplamento gravitacional, $[G] = -2$, a teoria quântica correspondente é não-renormalizável, e portanto não-preditiva.

$$\frac{1}{k^2} \tag{3.2.1}$$

Pode-se tentar construir uma teoria renormalizável ao melhorar as propriedades de convergência do propagador, feita pela adição de termos de curvatura de maior ordem, por exemplo pela forma

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) + aR^2 + bC_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} \right\}. \tag{3.2.2}$$

Esta modificação leva a um propagador da forma

$$\frac{m^2}{k^2(k^2 + m^2)}, \tag{3.2.3}$$

e portanto corresponde a uma teoria renormalizável em quatro dimensões.

Entretanto, esses termos induzem o aparecimento de fantasmas no propagador, como pode ser visto pelo fato de que

$$\frac{m^2}{k^2(k^2 + m^2)} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 + m^2}, \tag{3.2.4}$$

isto é, existe uma partícula com propagador $-\frac{1}{k^2+m^2}$, o qual possui o sinal errado, levando a estados

de norma negativa, e portanto violando unitariedade. Isto é, portanto, um fantasma, o que por sua vez torna tais teorias não-físicas [24].

A teoria anisotrópica de Horava, entretanto, possui uma forma de evitar esses problemas. Ela será definida mais formalmente na próxima seção, mas por agora declara-se que ela pode ser esquematicamente descrita pelo propagador

$$\frac{1}{w^2 - c^2 \mathbf{k}^2 - F(\mathbf{k}^2)^z} = \frac{1}{w^2 - \mathbf{k}^2} + \frac{1}{w^2 - \mathbf{k}^2} F(\mathbf{k}^2)^z \frac{1}{w^2 - \mathbf{k}^2} + \dots, \quad (3.2.5)$$

então vê-se imediatamente que termos anisotrópicos de maior curvatura não vão gerar fantasmas, mas a teoria vai novamente ser renormalizável por contagem de potências para um expoente crítico dinâmico adequado, uma vez que no regime UV o propagador vai como

$$\frac{1}{w^2 - c^2 \mathbf{k}^2 - F(\mathbf{k}^2)^z} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{w^2 - \alpha \mathbf{k}^{2z}}. \quad (3.2.6)$$

Por exemplo, renormalizabilidade por contagem de potências da gravidade pode ser obtida ao escolher-se $z = 3$.

3.3 Gravitação Horava-Lifshitz e a Extensão Saudável

Em contraste com a Relatividade Geral, teorias anisotrópicas da gravidade não são invariantes sob o grupo Diff completo; elas possuem graus extras de liberdade e uma direção temporal preferencial. Diz-se que uma teoria possui *escala anisotrópica* ultravioleta com *expoente dinâmico crítico* z se ela apresenta um ponto fixo ultravioleta no qual a teoria é invariante sob escala anisotrópica de espaço e tempo dada por

$$x \rightarrow \lambda^{-1}x, \quad t \rightarrow \lambda^{-z}t \quad (3.3.1a)$$

$$\Leftrightarrow [x] = -1, \quad [t] = -z, \quad (3.3.1b)$$

onde a notação $[T]$ significa “dimensão de escala de T ”. Nesta dissertação preocupa-se com gravidade em quatro dimensões, então essencialmente trabalhar-se-á com teorias de $z = 3$, o qual é o

expoente necessário para renormalizabilidade.

Uma vez que a escala de coordenada é escolhida, é fácil derivar as dimensões de escala das outras quantidades geométricas; em particular precisa-se das seguintes

$$[N] = 0, \quad [N_i] = z - 1, \quad [h_{ij}] = 0, \quad (3.3.2)$$

$$[K] = z, \quad [a_i] = 1, \quad , \quad (3.3.3)$$

onde define-se o 3-vetor a_i por

$$a_i := \frac{\partial_i N}{N}, \quad (3.3.4)$$

o qual será necessário mais tarde.

Existem diversas formas de se relaxar o grupo Diff de forma se obter uma ação com esta propriedade. Entretanto, cada relaxamento implica um novo grau de liberdade, e portanto novas partículas, o que normalmente leva a comportamento não-físico. Nesta dissertação, trabalhar-se-á com o grupo de Difeomorfismos-Preservadores-de-Foliação (FPD), o qual possui apenas uma partícula extra, um escalar de spin zero. Este grupo corresponde a transformações de coordenada para as quais transformações de tempo são independentes do espaço, com geradores

$$\delta x^i = \zeta^i(t, x), \quad \delta t = f(t). \quad (3.3.5)$$

Nesta dissertação, trabalhar-se-á com a ação mais geral que pode ser construída consistente com FPD e escala anisotrópica. Esta é a chamada “Extensão Saudável”. A parte cinética é dada por

$$S_T = \int \sqrt{h} N (K_{ij} K^{ij} - \lambda K^2) dt d^3x, \quad (3.3.6)$$

enquanto o potencial mais geral é [25], usando-se de agora em diante R para a curvatura na hiper-

superfície,

$$\begin{aligned}
S_U = \int \left\{ & b_0 R + c_0 a_i a^i + \frac{1}{M_*^2} \left(b_1 R^2 + b_2 R^{ij} R_{ij} \right. \right. \\
& + \dots + c_1 a_i \Delta a^i + c_2 (a_i a^i)^2 + c_3 a_i a_j R^{ij} + \dots \left. \right. \\
& + \frac{1}{M_*^4} \left(B_1 R \Delta R + B_2 R_{ij} R^{jk} R_k^i + \dots \right. \\
& \left. \left. + C_1 a_i \Delta^2 a^i + C_2 (a_i a^i)^3 + C_3 a_i a^i a_j a_k R^{jk} + \dots \right) \right\} N \sqrt{h} dt d^3x \quad (3.3.7)
\end{aligned}$$

Um caso particular desta ação é a gravitação de Horava-Lifshitz original, postulada a ser a teoria invariante sob o grupo FPG, com ponto fixo ultravioleta caracterizado por $z = 3$, e que satisfaz as condições de Projetabilidade e Balanço Detalhado. Seguindo [22], construir-se-á uma ação para tal classe de teorias.

Projetabilidade significa que a função lapso é independente do espaço(3.3.8),

$$N = N(t) \quad (3.3.8)$$

enquanto Balanço Detalhado requer a existência de um pré-potencial [22]; isto é, o termo de interação deve ser da forma (3.3.9).

$$S_V \sim \int dt d^3x \sqrt{h} N E^{ij} G_{ijkl} E^{kl} \quad (3.3.9)$$

O pré-potencial $W[h_{ij}]$ é definido por

$$\sqrt{h} E^{ij} = \frac{\delta W}{\delta g_{ij}}, \quad (3.3.10)$$

enquanto o tensor G_{ijkl} é a “métrica no espaço das métricas” de DeWitt, dada por

$$G^{ijkl} := \frac{1}{2} (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) - \lambda g^{ij} g^{kl} \quad (3.3.11)$$

Fiel à proposição de escrever uma teoria anisotrópica efetiva da gravidade no ultravioleta, a

escolha original de Horava de ação tem como termo cinético a expressão

$$S_K = \int dt d^3x \sqrt{h} N \left\{ \frac{2}{k^2} (K_{ij} K^{ij} - \lambda K^2) \right\}, \quad (3.3.12)$$

k uma constante de acoplamento. Esta expressão contém as derivadas temporais normalmente contidas no escalar de curvatura, mas elimina o termo infravermelho 3R (neste sentido anisotrópico), enquanto adiciona uma nova constante de acoplamento λ para além parametrizar a quebra da simetria Diff completa.

A escolha de Horava para o termo potencial, que corresponde a termos de maior curvatura espacial, consiste em escolher como prepotencial um termo gravitacional de Chern-Simons,

$$W \sim \int_{M_t} w_3(\Gamma), \quad (3.3.13)$$

onde Γ é a 1-forma de conexão, e w_3 é definida como

$$w_3(\Gamma) = \text{Tr} \left(\Gamma \wedge \Gamma + \frac{2}{3} \Gamma \wedge \Gamma \wedge \Gamma \right) \quad (3.3.14)$$

Isto leva pela condição de balanço detalhado para o potencial de ação

$$S_V \sim \int dt d^3x \sqrt{h} N \left\{ C_{ij} C^{ij} \right\}, \quad (3.3.15)$$

onde C_{ij} é o tensor de Cotton, um tensor espacial de terceira ordem nas derivadas espaciais definido por

$$C^{ij} = \epsilon^{ikl} \nabla_k \left(R_l^j - \frac{1}{4} R \delta_l^j \right), \quad (3.3.16)$$

que possui as propriedades de ser simétrico, de traço zero, conservado covariantemente, ($\nabla_i C^{ij} = 0$), e a interessante propriedade de possuir peso conforme $-5/2$, isto é, ele sofre uma reescala sob transformações locais de Weyl,

$$h_{ij} \rightarrow e^{2\Omega(x)} h_{ij} \quad (3.3.17)$$

$$C^{ij} \rightarrow e^{-5\Omega(x)} C^{ij}. \quad (3.3.18)$$

O principal uso para o tensor de Cotton está no fato de que é uma versão de menor dimensão do

tensor de Weyl. Como este desaparece em variedades tri-dimensionais, em tais espaços a condição de achatamento conforme é dada pelo desaparecimento do tensor de Cotton.

Somando os termos cinético e de potencial, cuja força relativa é fixada por uma constante de acoplamento ω , obtém-se a ação para a Gravitação Horava-Lifshitz,

$$\begin{aligned}
S &= \int dt d^3 \mathbf{x} \sqrt{g} N \left\{ \frac{2}{\kappa^2} (K_{ij} K^{ij} - \lambda K^2) - \frac{\kappa^2}{2w^4} C_{ij} C^{ij} \right\} \\
&= \int dt d^3 \mathbf{x} \sqrt{g} N \left\{ \frac{2}{\kappa^2} (K_{ij} K^{ij} - \lambda K^2) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\kappa^2}{2w^4} \left(\nabla_i R_{jk} \nabla^i R^{jk} - \nabla_i R_{jk} \nabla^j R^{ik} - \frac{1}{8} \nabla_i R \nabla^i R \right) \right\} \tag{3.3.19}
\end{aligned}$$

Os primeiros resultados com respeito à dimensão espectral em gravidade Horava-Lifshitz foram obtidos[26] considerando-se o limite de coincidência do kernel de calor para o operador $H = \partial_t^2 + (-1)^{z+1} \Delta^z$ em um espaço d -dimensional, o que levou ao resultado

$$d_S = 1 + \frac{d-1}{z}. \tag{3.3.20}$$

Posteriormente, Pinzul[27] recalculou esta expressão aplicando o teorema de Weyl ao espectro de um operador de Dirac anisotrópico agindo em toros d -dimensionais, confirmando este resultado como o limite ultravioleta da dimensão espectral, mas recuperando as d dimensões usuais no limite infravermelho.

3.4 Sobre projetabilidade e o modo escalar

Brevemente revisam-se os argumentos que levam à “Extensão Saudável”, por meio do estudo das implicações físicas da imposição de projetabilidade originalmente imposta por Horava. Esta seção será baseada no artigo [25] por Blas et al.

Como gravitação Horava-Lifshitz possui um grupo de simetria reduzido, ela possui um grau extra de liberdade, que se manifesta na existência de um modo escalar. Se este for fracamente acoplado no regime de baixas energias, então a teoria poderia talvez ser adequada para descrever

a realidade. Há fortes indicações de que esta condição é suficiente para eliminar projetabilidade, como será visto.

A primeira observação a fazer é uma nota de cuidado; como mencionado em [28], o modo escalar extra somente será propagante em fundos não-homogêneos dependentes do tempo, com uma relação de dispersão que se torna singular conforme o fundo se torna plano, e portanto métodos perturbativos em torno de espaço-tempos de Minkowski levam a conclusões errôneas.

Em segundo lugar, o modo escalar não é o grau de liberdade tradicional ao qual se está acostumado; apesar de aparentemente obedecer a equações de até ordem quatro em derivadas temporais, se usa-se o referencial preferencial dado pela foliação no espaçotempo, então pode-se mostrar[25] por análise perturbativa das equações de movimento em torno de fundos gerais que o modo escalar obedece uma equação de primeira ordem no tempo, e portanto o problema de Cauchy correspondente tem apenas um grau de liberdade, ao invés do mais comum par coordenada-momento.

Por si só esses não constituiriam problemas, mas pode ser demonstrado que gravidade anisotrópica leva a um propagado tachiônico; se aceito, então o fato de que o Universo ainda não desenvolveu instabilidades implica que sua escala de tempo é da ordem da idade do Universo, o que implica $\sqrt{|\lambda - 1|}M_* < H_0$, onde H_0 é a constante de Hubble, e M_* é a escala das correções de maior ordem. Como os testes de pequenas distâncias da lei de Newton dão o limite $M_* \geq 0.1\text{eV}$ para a escala das correções, chega-se à conclusão de que a anisotropia do termo cinético deve ser extremamente pequena, $|\lambda - 1| \leq 10^{-61}$. Usando esse limite, pode ser mostrado por análise da escala da ação que este modo escalar se torna fortemente acoplado em distâncias da ordem de 10^{13}cm , logo a teoria não é adequada para descrever o mundo em que se vive.

A “Extensão Saudável”, por outro lado, não requer projetabilidade, e portanto possui constantes de acoplamento extra devido à presença de termos a_i , o que faz a teoria consideravelmente mais flexível em lidar com suas inerentes instabilidades. De fato, o vínculo sobre λ imposto pela existência de instabilidades apenas é então relaxado em $|1 - \lambda| > 0$, apesar de implicar restrições nos novos parâmetros. Apesar disso, é suficiente para permitir-nos ajustar a escala das correções

de forma que o acoplamento forte seja evitado[25].

3.5 Comentários no modelo RBEC de gravidade análoga

Motiva-se o estudo de gravitação Horava-Lifshitz como uma teoria efetiva ao convidar o leitor a abordá-la com a perspectiva de que é perfeitamente compatível esperar que, apesar de explicitamente quebrar a Invariância de Lorentz, ela pode ser apenas um passo intermediário em direção a uma teoria mais robusta que recupere alguma forma de Simetria de Lorentz deformada no limite de energias muito altas.

Para ilustrar esta idéia, brevemente mostram-se alguns resultados chave com respeito ao modelo de Condensado de Bose-Einstein Relativístico como análogo à gravidade, principalmente seguindo [29]. Apesar de apenas mostrar-se como com aumento do momento a relação de dispersão vai de relativística com velocidade da luz efetiva para uma relação não relativística, recuperando em maiores momentos a forma relativística, com respeito à velocidade da luz correta, é importante notar que este modelo pode ser posto na linguagem da dinâmica relativística em espaçotempos curvos efetivos.

Começando com o lagrangiano bosônico geral,

$$L = \partial_\mu \hat{\phi}^\dagger \partial^\mu \hat{\phi} - \left(\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + V(x) \right) \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi} - U(\hat{\phi}^\dagger \hat{\phi}; \lambda_i), \quad (3.5.1)$$

pode-se calcular a equação de movimento, e expandi-la no regime de pequenas perturbações, $\hat{\phi} = \phi(1 + \hat{\Psi})$, onde ϕ é a solução para as equações de movimento clássicas. Após algumas manipulações, se obtém a equação

$$\left[[i\hbar(\partial_t + u_i \nabla^i) + T_{\rho NR}] \frac{1}{c_0} [-i\hbar(\partial_t + u_i \nabla^i) + T_{\rho NR}] - \frac{\hbar^2}{\rho} \nabla_{i\rho} \nabla^i \right] \hat{\Psi} = 0, \quad (3.5.2)$$

onde foram feitas as definições:

$$T_{\rho NR} := -\frac{\hbar^2}{2m\rho}\nabla_i\rho\nabla^i \quad (3.5.3)$$

$$\phi := \sqrt{\rho}e^{i\theta} \quad (3.5.4)$$

$$c_0 := \frac{\hbar^2}{2m^2}\rho U''(\rho, \lambda_i) \quad (3.5.5)$$

$$u^\mu := \frac{\hbar}{m}\partial^\mu\theta \quad (3.5.6)$$

Como se está trabalhando com perturbações, assume-se que as variáveis u, μ, ρ, c_0 são constantes. Então, usando o ansatz de ondas planas para o operador $\hat{\Psi}$, obtém-se a seguinte relação de dispersão, onde w representa o a frequência, e k o número de onda:

$$w_\pm^2 = c^2 \left[k^2 + 2 \left(\frac{mu^0}{\hbar} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{c_0}{u} \right)^2 \right] \pm 2 \left(\frac{mu^0}{\hbar} \right) \sqrt{ k^2 + \left(\frac{mu^0}{\hbar} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{c_0}{u^0} \right)^2 \right]^2 } \right]. \quad (3.5.7)$$

Focando-se no modo w_- , pode-se imediatamente observar o fenômeno previamente mencionado. No limite de baixos momentos, $|k| \ll \frac{mu^0}{\hbar} \left[1 + \left(\frac{c_0}{u^0} \right)^2 \right]$, esta relação de dispersão é aquela de uma partícula não-relativística de massa zero:

$$w_-^2 \approx c^2 \left[k^2 \left(1 - \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{c_0}{u^0} \right)^2 \right]} \right) + \frac{k^4}{4 \left(\frac{mu^0}{\hbar} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{c_0}{u^0} \right)^2 \right]} \right]. \quad (3.5.8)$$

Se o momento for ainda mais reduzido, obtém-se uma relação relativística de dispersão, com velocidade da luz efetiva $c_s = c^2 \left(1 - \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{c_0}{u^0} \right)^2 \right]} \right)$,

$$w_-^2 \approx c_s^2 k^2. \quad (3.5.9)$$

Por outro lado, no limite de grandes momentos, $|k| \gg \frac{mu^0}{\hbar} \left[1 + \left(\frac{c_0}{u^0} \right)^2 \right]$, a relação de dispersão é novamente relativística, desta vez com respeito à real velocidade da luz c ,

$$w_-^2 \approx c^2 k^2. \quad (3.5.10)$$

Capítulo 4

O kernel de calor plano anisotrópico e o fluxo de dimensão espectral

Procurando-se uma resposta para a questão de se é possível ver exatamente a dimensão espectral fluindo de quatro para dois em um modelo anisotrópico, escolhe-se neste capítulo olhar para soluções de kernels de calor para laplacianos anisotrópicos com coeficientes constantes, em espaço-tempo plano. Se verá que, apesar de envolver uma função especial não ortodoxa, este fluxo pode ser resolvido exatamente. Estes resultados também podem ser encontrados em nosso artigo [30]. Posteriormente, faz-se uma breve discussão sobre um modelo diferente, para o qual se possui uma figura mais clara sobre como fluxos dimensionais podem acontecer, e brevemente rever a relação entre a equação de Wheeler-DeWitt fortemente acoplada e o universo Mixmaster.

4.1 O cálculo mínimo

Sabe-se que o kernel de calor tradicional em espaço plano é dado pela gaussiana

$$K_0(x, x'; \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{4\tau}\right) \quad (4.1.1)$$

Agora, quer-se calcular o kernel de calor anisotrópico em espaço plano, correspondente ao

operador

$$H = \partial_t^2 + (-1)^{z+1} \gamma_z (\partial_i \partial_i)^z, \quad (4.1.2)$$

onde γ_z é um coeficiente constante.

Isso pode ser feito por integração direta, uma vez que as equações (4.1.2) e (2.3.2) juntas implicam

$$K(x, x'; \tau) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p dq e^{ip(x-x')-iq\tau} \delta\left(iq - \left(p_0^2 + \gamma_z (p_i p_i)^z\right)\right) \quad (4.1.3)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{ip(x-x')-\tau(p_0^2 + \gamma_z (p_i p_i)^z)} \\ &= \frac{1}{2\pi^2 |\vec{x} - \vec{x}'|} K_0(t - t'; \tau) \int_0^\infty dp p \sin(p|\vec{x} - \vec{x}'|) e^{-\tau \gamma_z (p_i p_i)^z}. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Então o problema é reduzido ao cálculo da integral

$$I = \int_0^\infty dp p \sin(\alpha p) e^{-\beta p^{2z}}. \quad (4.1.5)$$

Calcula-se pela expansão do termo seno,

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \alpha^{2k+1} \int_0^\infty dp p^{2k+2} e^{-\beta p^{2z}} = \\ &= \frac{1}{2z\alpha^2} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{\Gamma(2k+2)} \left(\frac{\alpha}{\beta^{1/2z}}\right)^{2k+1} \int_0^\infty dp p^{\frac{2k+3}{2z}-1} e^{-p} = \\ &= \frac{1}{2z\alpha^2} \left(\frac{\alpha}{\beta^{1/2z}}\right)^3 \sum_{k=0}^\infty \left(-\frac{\alpha^2}{\beta^{1/z}}\right)^k \frac{\Gamma\left(\frac{k+3/2}{z}\right)}{\Gamma(2k+2)}. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Agora, lembra-se uma propriedade das funções gama,

$$\Gamma(2k+2) = \frac{2^{2k+3/2}}{\sqrt{2\pi}} \Gamma(k+1) \Gamma(k+3/2). \quad (4.1.7)$$

Aplicando-a, pode-se pôr a integral na forma

$$I = \frac{1}{2z\alpha^2} \left(\frac{\alpha}{\beta^{1/2z}}\right)^3 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=0}^\infty \left(-\frac{\alpha^2}{4\beta^{1/z}}\right)^k \frac{1}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+3/2}{z}\right)}{\Gamma(k+3/2)}, \quad (4.1.8)$$

a qual pode então ser reconhecida como uma função especial não muito conhecida, a função Ψ de Fox-Wright. Ela é obscura o bastante para não estar presente na tabela de Gradshteyn [31], mas

pode-se ver que é uma generalização natural da função hipergeométrica, com uma definição bem simples em termos de integrais de contorno e pólos. Sua definição e propriedades são revisadas no apêndice.

Reconhecendo os coeficientes corretos para função Ψ , chega-se à simples expressão para a integral,

$$I = \frac{1}{2z\alpha^2} \left(\frac{\alpha}{\beta^{1/2z}} \right)^3 \frac{\sqrt{\pi}}{2} {}_1\Psi_1 \left[(3/2z, 1/z); (3/2, 1); -\frac{\alpha^2}{4\beta^{1/z}} \right]. \quad (4.1.9)$$

Inserindo esta expressão de volta em (4.1.4), recebe-se a solução compacta para o kernel de calor,

$$K(x - x'; \tau) = \frac{1}{z(4\pi)^2 \tau^{\frac{1}{2}(1+3/z)}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4\tau}} {}_1\Psi_1 \left[(3/2z, 1/z); (3/2, 1); -\frac{|\vec{x} - \vec{x}'|^2}{4\tau^{1/z}} \right]. \quad (4.1.10)$$

A primeira verificação de consistência deve-se fazer é tomar $z = 1$, quando deve-se recuperar a solução clássica:

$$K(x - x'; \tau) = \frac{1}{(4\pi\tau)^2} e^{-\frac{(x-x')^2}{4\tau}}. \quad (4.1.11)$$

O próximo teste diz respeito ao comportamento ultravioleta; checa-se se a dimensão espectral é de fato determinada por z na forma que se espera, equação (3.3.20). Esta é calculada tomando-se o limite de coincidência $x \rightarrow x'$, e obtém-se:

$$K(0; \tau) = \frac{1}{z} \frac{\Gamma(3/2z)}{\Gamma(3/2)} \frac{1}{(4\pi)^2 \tau^{\frac{1}{2}(1+3/z)}} \quad (4.1.12)$$

$$\sim \frac{1}{\tau^{\frac{d_S}{2}}}. \quad (4.1.13)$$

Então aplica-se este resultado à fórmula (1.0.3), obtendo-se a dimensão espectral, a qual é novamente

$$d_S = 1 + \frac{3}{z}. \quad (4.1.14)$$

e portanto é consistente com os resultados esperados de [26, 27].

Em termos de funções mais familiares, a expressão (4.1.10) pode ser escrita como função da

Hipergeométrica e da Meyer-G, ambas definidas no apêndice.

Na representação Hipergeométrica, este kernel de calor se torna:

$$K(x - x'; \tau) = \frac{1}{z(4\pi)^2 \tau^{\frac{1}{2}(1+3/z)}} e^{-\frac{(t-t')^2}{4\tau}} \left(\frac{\Gamma(\frac{3}{2z})}{\Gamma(\frac{3}{2})} + \sum_{s=1}^z \frac{\Gamma(\frac{3+2s}{2z})}{\Gamma(\frac{3+2s}{2})} \left(-\frac{|\vec{x} - \vec{x}'|^2}{4\tau^{1/z}} \right)^s \frac{1}{s!} \times \right. \\ \left. \times {}_1F_{2z-1} \left[1; \frac{2s+5}{2z}, \dots, \frac{2s+3+2(z-1)}{2z}, \frac{s+1}{z}, \dots, \frac{s+z}{z}; (-1)^z \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|^{2z}}{(2z)^{2z}\tau} \right] \right). \quad (4.1.15)$$

enquanto na representação em função da Meijer G , pode ser expressado como

$$K(x - x'; \tau) = \frac{2}{(4\pi)^2 \tau^{\frac{1}{2}(1+3/z)}} \left(\frac{\pi}{z} \right)^z e^{-\frac{(t-t')^2}{4\tau}} \times \\ \times G_{12z}^{z1} \left(\frac{|\vec{x} - \vec{x}'|^{2z}}{(2z)^{2z}\tau} \middle| \begin{matrix} 1 - \frac{3}{2z} \\ 0, \frac{1}{z}, \dots, \frac{z-1}{z}, \frac{2z-3}{2z}, \dots, \frac{2z-(3+2(z-1))}{2z} \end{matrix} \right). \quad (4.1.16)$$

4.2 Kernel de calor interpolando UV-IR

A seguir trabalha-se com o operador mais geral

$$H = \partial_t^2 + \sum_{k=0}^z \gamma_k (\partial_i \partial^i)^k, \quad (4.2.1)$$

γ_k constantes. Este H interpola o laplaciano IR tradicional com o laplaciano anisotrópico UV anterior, e é mais semelhante com o tipo de construção que espera-se que apareça ao se calcular a ação espectral.

A solução pode ser encontrada diretamente por integração dos modos de Fourier,

$$K(x, x'; \tau) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p dq e^{ip(x-x') - iq\tau} \delta \left(iq - \left(p_0^2 + \sum_{k=0}^z \gamma_k (p_i p_i)^k \right) \right) \\ = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{ip(x-x') - \tau(p_0^2 + \sum_{k=0}^z \gamma_k (p_i p_i)^k)} \\ = \frac{1}{2\pi^2 |\vec{x} - \vec{x}'|} K_0(t - t'; \tau) \times \\ \times \int_0^\infty dp p \sin(p|\vec{x} - \vec{x}'|) e^{-\tau \sum_{k=0}^z \gamma_k (p_i p_i)^k}. \quad (4.2.2)$$

Desta vez, a integral que deve-se calcular é mais complexa,

$$I = \int_0^{\infty} dp p \sin(\alpha p) e^{-\sum_{k=0}^z \beta_k p^{2k}}$$

Ela pode ser calculada de forma semelhante àquela usada no cálculo anterior, (4.1.5), mas agora as exponenciais de ordem menor também devem ser expandidas em uma série.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} dp p e^{-\beta_z p^{2z}} \left[\prod_{k=0}^{z-1} \sum_{j_k=0}^{\infty} \frac{1}{j_k!} (-\beta_k p^{2k})^{j_k} \right] \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} (\alpha p)^{2l+1} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi^2 \alpha} \sum_{\{j_k\}=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} \alpha^{2l+1} \left(\prod_{k=0}^{z-1} \frac{(-\beta_k)^{j_k}}{j_k!} \right) \int_0^{\infty} p^{(2+2l+\sum_k k j_k)/z} e^{-\beta_z p^{2z}} dp \\ &= \frac{1}{4\pi^2 z} \sum_{\{j_k\}=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\prod_{k=0}^{z-1} \frac{(-\beta_k)^{j_k}}{j_k!} \right) \frac{\beta_z^{-(3/2+\sum_k k j_k)/z}}{(2l+1)!} (-\alpha^2 \beta_z^{-1/z})^l \Gamma\left(\frac{3/2+l+\sum_k k j_k}{z}\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{8\pi^2 z} \sum_{\{j_k\}=0}^{\infty} \left(\prod_{k=0}^{z-1} \frac{(-\beta_k)^{j_k}}{j_k!} \right) \beta_z^{-(3/2+\sum_k k j_k)/z} {}_1\Psi_1 \left[\left(\frac{3/2+\sum_k k j_k}{z}, 1/z \right); (3/2, 1); -\frac{\alpha^2}{4\beta_z^{1/z}} \right], \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Inserindo esta expressão de volta no kernel de calor, obtém-se o resultado final:

$$\begin{aligned} K(x, x'; \tau) &= \frac{\sqrt{\pi} K_0}{8\pi^2 z} \sum_{j_0, \dots, j_{z-1}=0}^{\infty} \left(\prod_{k=0}^{z-1} \frac{(-\tau \gamma_k)^{j_k}}{j_k!} \right) (\tau \gamma_z)^{-(3/2+\sum_k k j_k)/z} \times \\ &\quad \times {}_1\Psi_1 \left[\left(\left(\frac{3/2+\sum_k k j_k}{z}, 1/z \right), \left(3/2, 1 \right), \left(-\frac{|\vec{x} - \vec{x}'|^2}{4(\tau \gamma_z)^{1/z}} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Quer-se analisar suas propriedades de interpolação, então restringe-se o operador a apenas duas constantes de acoplamento não-nulas,

$$H = \partial_t^2 + (-1)^{z+1} \gamma_z (\partial_i \partial_i)^z + (-1)^{k+1} \gamma (\partial_i \partial_i)^k, \quad (4.2.5)$$

o que implica o kernel de calor:

$$K(x - x'; \tau) = \frac{1}{z(4\pi)^2 \tau^{\frac{1}{2}(1+3/z)}} e^{-\frac{(t-t')^2}{4\tau}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} [-\gamma \tau^{1-k/z}]^j \times \\ \times {}_1\Psi_1 \left[\left((3/2 + kj)/z, 1/z \right); (3/2, 1); -\frac{|\vec{x} - \vec{x}'|^2}{4\tau^{1/z}} \right] \quad (4.2.6)$$

$$= \frac{2}{z \gamma_z^{\frac{3}{2z}} \sqrt{\pi} (4\pi)^2 \tau^{\frac{1}{2}(1+\frac{3}{z})}} e^{-\frac{(t-t')^2}{4\tau}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-|\vec{x} - \vec{x}'|^2 (\tau \gamma_z)^{-\frac{1}{z}})^l}{(2l+1)!} \times \\ \times {}_1\Psi_0 \left[\left(\frac{3+2l}{2z}, \frac{k}{z} \right); -\gamma \gamma_z^{-\frac{k}{z}} \tau^{1-\frac{k}{z}} \right]. \quad (4.2.7)$$

uma vez que pode-se somar tanto a série em $|x - x'|$ quanto a série em τ .

Para ver como isso interpola o comportamento IR-UV, pode-se olhar para o fluxo de dimensão espectral clássico. Para tanto, precisa-se do limite de coincidência $x \rightarrow x'$, para o qual a expressão (4.2.7) é especialmente conveniente, e leva ao resultado:

$$K((x - x') \rightarrow 0; \tau) = \frac{\gamma_z^{-3/2z}}{(4\pi^2)^{5/2} z} \tau^{-1/2-3/2z} {}_1\Psi_0 \left[(3/2z, k/z); -\tau^{1-k/z} \gamma_k \gamma_z^{-k/z} \right]. \quad (4.2.8)$$

Então tem-se uma expressão exata para a função dimensão espectral,

$$d_S = \left(1 + \frac{3}{z} \right) + 2 \left(1 - \frac{k}{z} \right) \tau^{1-k/z} \gamma_k \gamma_z^{-k/z} \times \\ \times \frac{{}_1\Psi_0 \left[\left((3+2k)/2z, k/z \right); -\tau^{1-k/z} \gamma_k \gamma_z^{-k/z} \right]}{{}_1\Psi_0 \left[(3/2z, k/z); -\tau^{1-k/z} \gamma_k \gamma_z^{-k/z} \right]}. \quad (4.2.9)$$

Ela está plotada na Figura 4.1. Os limites de pequenos tempos e longos tempos podem ser obtidos trivialmente da fórmula (A.14) para o limite assintótico da função ${}_1\Psi_0$:

$$d_S \xrightarrow{|\tau^{1-k/z} \gamma_k \gamma_z^{-k/z}| \rightarrow 0} 1 + \frac{3}{z} \quad (4.2.10)$$

$$d_S \xrightarrow{|\tau^{1-k/z} \gamma_k \gamma_z^{-k/z}| \rightarrow \infty} 1 + \frac{3}{k} \quad (4.2.11)$$

Como esperava-se, a dimensão espectral no limite de curtos tempos, correspondente a altas energias, é aquela esperada para um operador de grau z , enquanto na região de longos tempos o kernel de calor se comporta como uma função de um operador de grau k . Portanto, este pode ser visto como um mecanismo para reduzir a dimensão efetiva do espaço no regime de altas energias.

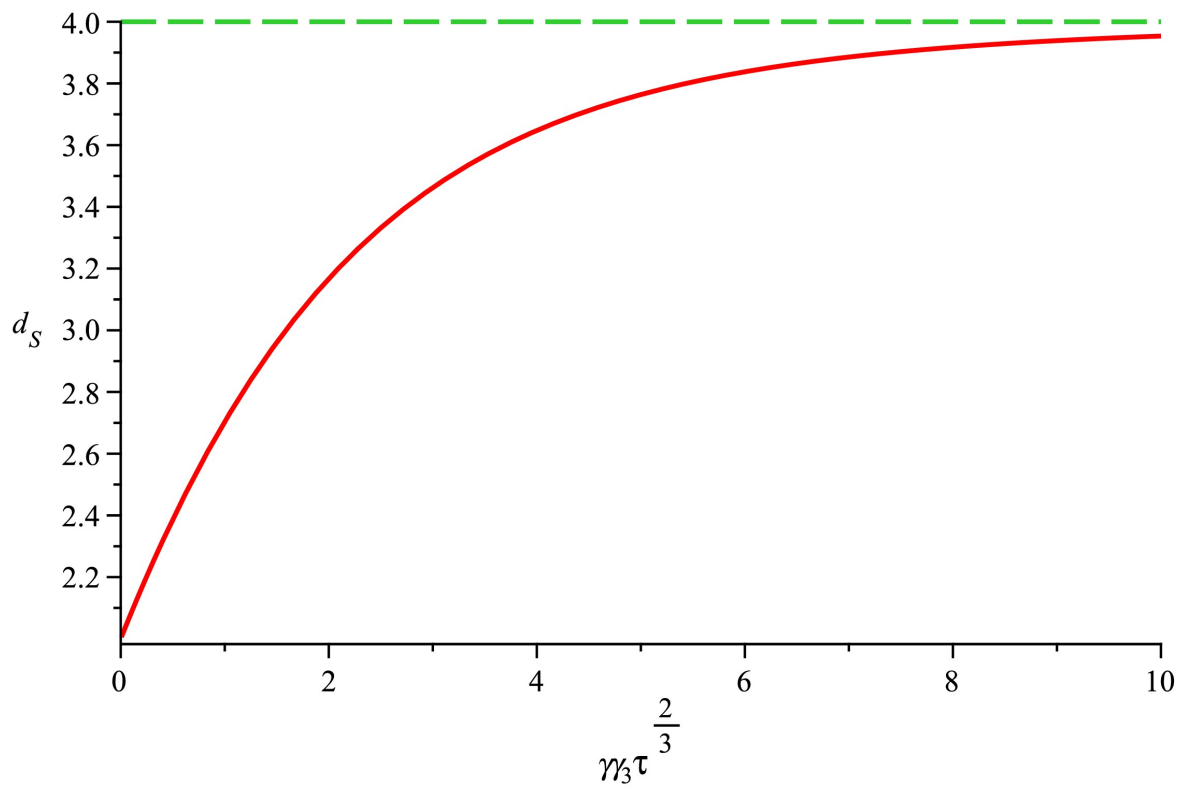


Figura 4.1: Plot of formula (4.2.9) for $z = 3$ and $k = 2$.

4.3 Quais duas dimensões?

Ao longo desta dissertação tem-se apoiado a hipótese de que teorias de gravidade que fluem para dimensão espectral dois são de interesse da comunidade. Entretanto, mesmo que concorde-se com isso, a primeira questão a se perguntar é então “Quais duas dimensões devem ser escolhidas?”[5]. Espera-se que mais estudos da dimensão espectral induzida por gravidade anisotrópica vão fornecer a resposta para esta pergunta; entretanto, há diversos casos para os quais este fenômeno é bem conhecido, por exemplo o universo Mixmaster, o qual é uma solução das equações de campo de Einstein para a qual o universo é efetivamente bidimensional, mas de tempos em tempos, a dimensão espacial preferencial altera-se de uma direção para outra.

Nesta seção, seguindo [5], revisa-se a equação de Wheeler-DeWitt fortemente acoplada, a qual é um exemplo de como uma teoria intuitiva de gravidade quântica pode obter, ao ser quantizada, o desacoplamento de pontos característico de redução dimensional. Em seguida conecta-se essa idéia à solução Universo Mixmaster, que, como dito, mostra um mecanismo clássico para tal redução, e oferece uma solução para o problema de escolha de uma dimensão especial.

4.3.1 A equação de Wheeler-DeWitt fortemente acoplada

Uma das tentativas mais óbvias de se produzir uma teoria quântica da gravidade é a equação de Wheeler-DeWitt. Apesar do fato de que ela não é bem definida, ela permanece um padrão contra o qual comparar outras teorias, e uma sonda para efeitos esperados. Que ela tenha posição tão notável vem do fato de que ela é similar à quantização de Schroedinger das equações de Einstein, no sentido de ser obtida da conversão, no vínculo hamiltoniano, dos momentos em operadores de derivação. A motivação é que a Relatividade Geral no vácuo pode ser descrita pelo anulamento das componentes espaciais do tensor de Einstein $G_{ij} = 0$, complementado por quatro vínculos, dos quais lapso e shift são multiplicadores de Lagrange. Entretanto, como a Relatividade Geral não é uma teoria dinâmica, pode-se usar o vínculo do lapso para propagar as condições iniciais

através do tempo. Tendo isso em mente, escreve-se a equação de Wheeler-DeWitt, a qual é a versão primeiro-quantizada do vínculo de lapso,

$$\left\{ 16\pi l_P^2 G_{ijkl} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \frac{\delta}{\delta h_{kl}} - \frac{1}{16\pi l_P^2} \sqrt{h} {}^3R \right\} \Psi[h] = 0, \quad (4.3.1)$$

onde h_{ij} é a métrica espacial, e G_{ijkl} é a métrica no superspaço.

A surpresa sobre esta equação está em que no limite de acoplamento forte, $l_P \rightarrow \infty$, pontos vizinhos desacoplam. Isto é uma indicação de redução dimensional, uma vez que a dinâmica se torna restrita a apenas uma dimensão espacial. Mesmo que tenha-se já apresentado outras indicações de redução dimensional, este exemplo específico traz uma idéia de como responder a pergunta de como a dimensão restante é escolhida, e o que acontece com os outros graus de liberdade. Isso acontece porque o fenômeno de desacoplamento é semelhante ao silêncio assintótico, o qual é o desacoplamento induzido pelo encolhimento de cones de luz próximo a singularidades. Entretanto, o limite próximo a singularidade da GR já foi bastante estudado[32], e levou ao entendimento do universo Mixmaster, onde a redução dimensional é devido aos saltos aleatórios da dimensão preferencial.

4.3.2 O universo Mixmaster

Como concisamente revisado em [33, 34], o universo Mixmaster consiste em soluções espacialmente anisotrópicas das Equações de Einstein, no sentido de que dimensões espaciais não são equivalentes entre si somente na solução, ao contrário da teoria de Horava, a qual é derivada de princípios não invariantes sob difeomorfismo.

A solução apresenta o aspecto interessante de ser bem aproximada por uma sequência de “Eras de Kasner”, cada uma dividida em ciclos. Mais precisamente, a métrica de Kasner é

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2p_1} dx^2 + t^{2p_2} dy^2 + t^{2p_3} dz^2 \quad (4.3.2)$$

onde os coeficientes são limitados pelas relações $\sum_i p_i = \sum_i p_i^2 = 1$. Um aspecto particularmente

interessante desta formulação é que, como notado em [35], apesar de o elemento de volume estar em expansão constante, $\sqrt{-g} = t$, sempre haverá uma dimensão sob contração; se $p_2, p_3 \geq 0$, então $-\frac{1}{3} \leq p_1 \leq 0$. Note que apesar de esta solução ser espacialmente anisotrópica, ela inda será espacialmente homogênea, uma vez que os coeficientes p_i são constantes.

Ao se abandonar homogeneidade espacial, então um comportamento mais interessante pode acontecer. Os coeficientes de Kasner podem ser parametrizados por um único parâmetro u , de acordo com a relação

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{-u}{1+u+u^2} \\ p_2 &= \frac{1+u}{1+u+u^2} \\ p_3 &= \frac{u(1+u)}{1+u+u^2}. \end{aligned}$$

No universo Mixmaster, começa-se em uma era de Kasner caracterizada por u_n . Dentro de cada era, com a passagem do tempo atravessa-se uma sequência de ciclos, cada um deles caracterizado por um $u = u_n - k$, k algum inteiro, começando em 0. Entretanto, sempre que $u_n - k < 1$, começa-se outra era de Kasner, com novo valor de u , $u_{n+1} = \frac{1}{u_n - [u_n]}$, onde $[u_n]$ é a parte inteira de u_n . A peculiaridade da solução Mixmaster é que a nova era de Kasner será caracterizada por um ricochete em p_i , que exhibe propriedades caóticas. Há uma interessante discussão por Marcolli em [36], onde aplica-se uma generalização do teorema de Gauss-Kuzmin theorem para mostrar que não haverá direção preferida em tal modelo, no sentido de que cada uma será responsável por contrações em um terço das eras de Kasner. Este é o tipo de comportamento que gostaria-se de ver na redução da dimensão espectral da gravitação Horava-Lifshitz; apesar de as equações serem isotrópicas e na grande figura as preferências desaparecerem, em pequenas escalas de tempo, como no limite de curto tempo do kernel de calor ou em fenômenos UV, a dinâmica verá um espaço-tempo preferencialmente bidimensional.

Capítulo 5

Aplicação do Princípio da Ação

Espectral para Gravitação Anisotrópica

Neste capítulo realiza-se a decomposição ADM do operador de Dirac, aproveitando a relação entre a notação de Penrose para spinors, e aquela de matrizes γ . Isto leva ao operador de Dirac anisotrópico, para o qual indica-se um método para cálculo dos coeficientes de kernel de calor necessários para a ação espectral.

5.1 A decomposição ADM do operador de Dirac

A fim de se obter uma teoria anisotrópica a partir do Princípio da Ação Espectral, precisa-se realizar a decomposição ADM do Operador de Dirac, e em seguida fazê-lo anisotrópico. Como se quer que a teoria resultante seja renormalizável, precisa-se fazê-lo pela inserção de operadores de maior ordem.

Primeiramente, escreve-se o operador de Dirac no espaço curvo. Ele pode ser obtido a partir do operador tradicional em espaço plano ao se postular o Princípio da Equivalência; somente

promovem-se índices planos para índices curvos:

$$\mathcal{D} := \gamma^\mu \nabla_\mu \quad (5.1.1)$$

Na notação espinorial, esta equação traduz-se[37] tanto no par

$$\nabla^A{}_{A'} \phi_A = \xi_{A'} \quad (5.1.2a)$$

$$\nabla_A{}^{A'} \xi_{A'} = \phi_A, \quad (5.1.2b)$$

quanto na equação matricial

$$\mathcal{D} \begin{pmatrix} \phi_A \\ \xi_{A'} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{PA} \epsilon_{P'}{}^{B'} \\ \epsilon_{P'}{}^{A'} \epsilon_P{}^B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla^{PP'} \phi_B \\ \nabla^{PP'} \xi_{B'} \end{pmatrix} \quad (5.1.3)$$

onde usa-se o fato, como provado no apêndice, de que as matrizes (B.15) em (5.1.3) são matrizes γ e formam uma álgebra de Clifford.

A notação de Penrose mais imediatamente empresta-se à separação 3+1 do operador de Dirac, uma vez que não tem-se que lidar diretamente com as conexões, e pode-se dar um significado físico simples à decomposição. Entretanto, cálculos no contexto de geometria espectral são tradicionalmente feitos utilizando-se matrizes γ , portanto deve-se primeiro desenvolver a decomposição ADM na notação de Penrose, e em seguida fazer a conversão usando as ferramentas desenvolvidas no Apêndice.

Primeiro, faz-se a decomposição ADM da derivada covariante espinorial.

A notação para spinores $SU(2)$, acompanhada de sua relação a espinores $SL(2, \mathbb{C})$, está estabelecida no Apêndice. Agora, segue-se a prescrição de Sommers[38] para a separação da derivada covariante em partes espacial e temporal, a derivada espacial correspondendo a (5.1.4), e a derivada temporal a (5.1.5), ambos sendo extendidos a espinores de ordem maior pela regra de Leibnitz.

$$D_{AB} \phi_C = \sqrt{2} \eta_{(B}{}^{A'} \nabla_{A')A} \phi_C + \frac{1}{\sqrt{2}} K_{ABCD} \phi^D, \quad (5.1.4)$$

$$D_\eta \phi_A = \eta^{CC'} \nabla_{CC'} \phi_A + \frac{1}{\sqrt{2}} a_{AB} \phi^B, \quad (5.1.5)$$

onde a_i é como definido em (3.3.4), e K_{ABCD} é a curvatura extrínseca na notação sem apóstrofos, dada por

$$K_{ABCD} = 2\eta_{(B}{}^{A'}[\nabla_{A)A'}\eta_{C'}]_{(C)}\eta_{D)}{}^{C'}. \quad (5.1.6)$$

A motivação para tomar (5.1.4) como a derivada espacial é o fato de que ela é por definição uma derivação, e reproduz a 3-derivada atuando em tensores $T_a = T_{(AB)}, T_a \in TM_t$. Para verificar esta afirmação, mapeia-se a 3-derivada ${}^3\nabla_a T_b$ no espaço sem apóstrofos, obtendo-se $\eta_B{}^{A'}\eta_D{}^{B'}h_{AA'}{}^{EE'}h_{CC'}{}^{FF'}\nabla_{EE'}T_{FF'}$. Seguindo Sen[39], explicitamente mostra-se esta equivalência, mostrando os detalhes da conta a fim de desenvolver familiaridade com a notação:

$$\begin{aligned} {}^3\nabla_{AB}T_{CD} &= \\ &= 2\eta_B{}^{A'}\eta_D{}^{C'}h_{AA'}{}^{EE'}h_{CC'}{}^{FF'}\nabla_{EE'}T_{FF'} \\ &= 2h_{AB}{}^{EE'}h_{CD}{}^{FG'}\eta_{G'}^G\eta_G{}^{F'}\nabla_{EE'}T_{FF'} \\ &= \sqrt{2}h_{AB}{}^{EE'}h_{CD}{}^{FG}\{\nabla_{EE'}[\eta_G{}^{F'}T_{FF'}] - T_{FF'}\nabla_{EE'}\eta_G{}^{F'}\} \\ &= h_{AB}{}^{EH}h_{CD}{}^{FG}\{\nabla_{EH}T_{FG} - 2T_F{}^L[\nabla_{(EH)}\eta_{(G}{}^{F')}]_{\eta_{L)F'}}\} \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

$$= h_{AB}{}^{EH}h_{CD}{}^{FG}\{\nabla_{EH}T_{FG} + \sqrt{2}T_F{}^L K_{EHGL}\} \quad (5.1.8)$$

$$= D_{AB}T_{CD}, \quad (5.1.9)$$

onde em (5.1.7) utiliza-se a condição de normalização (B.6), e em (5.1.8) tanto o fato de que $T, h_{\mu\nu}$ são espaciais, portanto suas versões sem apóstrofo são simétricas, quanto a equação (5.1.6).

As motivações para escolher (5.1.5) como derivada temporal são suas propriedades de aniquilar a métrica espinorial, $D_\eta\epsilon_{AB} = 0$, e agir em vetores espaciais como a projeção espacial da derivada na direção η , $D_\eta T_a = h_a{}^b\nabla_\eta T_b$.

Combinando essas derivadas, obtém-se a separação da derivada covariante completa em derivadas somadas a termos do tipo K_{ij} e a_i , como espera-se que apareça na ação anisotrópica:

$$\nabla_{AB}\phi_C = D_{AB}\phi_C + \frac{1}{\sqrt{2}}K_{ABCD}\phi^D + \epsilon_{AB}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}D_\eta\phi_C + \frac{1}{2}a_{CD}\phi^D\right) \quad (5.1.10)$$

Traduzindo para a notação tensorial, obtém-se

$$\nabla_\mu \phi = D_\mu \phi + \frac{1}{2} K_{\mu\nu} \gamma^\nu \eta_\rho \gamma^\rho \phi - \eta_\mu \left(D_\eta \phi + \frac{1}{2} a_i \gamma^i \eta_\nu \gamma^\nu \phi \right) \quad (5.1.11)$$

Agora, realiza-se a decomposição 3+1 das matrizes γ . Para fazê-lo, nota-se inicialmente que as matrizes de Dirac espaciais para espaços planos correspondem às matrizes de Pauli, σ_i , e que sua generalização curvada deve produzir a álgebra de Clifford compatível com a métrica induzida na hipersuperfície. As tetradas para essas variedades $d-1$ -dimensionais podem ser obtidas facilmente. Tome a tetrada temporal como

$$e_\mu^{\bar{0}} = \eta_\mu, \quad (5.1.12)$$

então $e_\mu^{\bar{i}}$ são tetradas para a métrica espacial, como pode ser visto comparando-se com (3.1.3) a expressão

$$g_{\mu\nu} = \eta^{ab} e_\mu^a e_\nu^b \quad (5.1.13)$$

$$= -\eta_\mu \eta_\nu + e_\mu^{\bar{i}} e_{\nu\bar{i}} \quad (5.1.14)$$

$$\Rightarrow h_{\mu\nu} = e_\mu^{\bar{i}} e_{\nu\bar{i}} \quad (5.1.15)$$

Daqui é imediato definir a matriz de Dirac temporal γ_η , e um conjunto de matrizes de Dirac espaciais γ_i :

$$\gamma_\eta := \eta_\mu \gamma^\mu \quad (5.1.16)$$

$$\gamma_i := e_i^{\bar{j}} \gamma_{\bar{j}}. \quad (5.1.17)$$

Precisa-se dessas tetradas a fim de ver explicitamente como cada termo no operador de Dirac separado se transforma sob escala anisotrópica. Para fazê-lo, primeiro escreve-se explicitamente o operador de Dirac em uma base coordenada,

$$\mathcal{D}\phi = -i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{1}{4} w_{\mu}^a{}^b \gamma_a \gamma_b \right) \phi \quad (5.1.18)$$

Agora, explicitamente escreve-se os coeficientes de conexão de spin como funções das tetradas,

$$w_{\bar{0}0\bar{0}} = 0 \quad (5.1.19)$$

$$w_{\bar{0}0\bar{i}} = -e_{\bar{i}}^j \partial_j e_0^{\bar{0}} \quad (5.1.20)$$

$$w_{\bar{i}0\bar{j}} = e_{\bar{i}}^m \partial_0 e_{\bar{j}]m} \quad (5.1.21)$$

$$w_{\bar{0}i\bar{0}} = 0 \quad (5.1.22)$$

$$w_{\bar{0}i\bar{j}} = -\frac{1}{2} e_0^0 e_j^m \partial_0 g_{im} \quad (5.1.23)$$

$$w_{\bar{k}i\bar{j}} = {}^3 w_{\bar{k}i\bar{j}} \quad (5.1.24)$$

Então vê-se que de fato a decomposição deve ser consistente. Dos componentes na direção temporal, w_{a0b} , o único coeficiente que não escala como uma derivada temporal ∂_t é $-e_{\bar{i}}^j \partial_j e_0^{\bar{0}} \sim a_i$, o qual foi separado, enquanto as componentes espaciais todas escalam como ∂_i , exceto $-\frac{1}{2} e_0^0 e_j^m \partial_0 g_{im} \sim K_{ij}$, o qual também está separado.

Com o aspecto da escala resolvido, pode-se então observar que a decomposição da derivada covariante automaticamente projeta as matrizes γ em suas partes decompostas adequadas, então pode-se realizar a contração com γ^μ para se obter a o operador de Dirac 3+1 decomposto em notação de matrizes γ ,

$$i\mathcal{D}\phi = \gamma^\mu D_\mu \phi + \frac{1}{2} K \eta_\mu \gamma^\mu \phi - \eta_\mu \gamma^\mu D_\eta \phi - \frac{1}{2} a_i \gamma^i \phi. \quad (5.1.25)$$

Portanto, o operador de Dirac anisotrópico deve ser da forma

$$\mathcal{D}\phi = P_3[(\gamma^\mu D_\mu), (a_i \gamma^i)]\phi + \alpha K \eta_\mu \gamma^\mu \phi + \beta \eta_\mu \gamma^\mu D_\eta \phi, \quad (5.1.26)$$

onde $P_3(a, b)$ é algum polinômio de ordem três nas variáveis não-comutativas a, b ; isso implica que este operador de Dirac anisotrópico tem apenas onze coeficientes livres.

5.2 Cálculo do kernel de calor anisotrópico em espaços curvos

Generaliza-se o cálculo para operadores em espaços curvos. Toma-se um operador de Dirac anisotrópico covariante sob difeomorfismos que preservam a foliação. Então pode-se novamente utilizar integração explícita para se obter a fórmula para o kernel de calor,

$$\begin{aligned}
K &= e^{-\tau H} \langle x, |x' \rangle \\
&= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-\tau H} e^{ik_\mu \sigma^\mu} I(x, x') \\
&= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left[e^{-\tau \mathcal{D}^2[\nabla_\mu \rightarrow \nabla_\mu + ik_\nu \sigma^\nu_\mu]} I(x, x') \right].
\end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Utilizando novamente a Fórmula de Zassenhaus (2.3.79), pode-se aplicar o mesmo argumento feito durante o método de Gilkey, e usar a dimensionalidade para separar o operador em uma exponencial adimensional “livre” A , e uma correção B ,

$$A := \mathbb{D}^2[\nabla_\mu \rightarrow ik_\nu \sigma^\nu_\mu] \tag{5.2.2}$$

$$B := H[\nabla_\mu \rightarrow \nabla_\mu + ik_\nu \sigma^\nu_\mu] - A, \tag{5.2.3}$$

que fornece uma expansão em série de potência para os coeficientes de kernel de calor,

$$K = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left[e^{-\tau A} \left\{ 1 - \tau B + \frac{\tau^2}{2} ([B, A] + B^2) - \dots \right\} I(x, x') \right]. \tag{5.2.4}$$

Concordando-se que os termos de maior ordem vão dominar em altas energias, sendo efetivamente irrelevantes no domínio infravermelho, então vê-se que esta construção imediatamente fornece o limite de dimensão espectral correto, uma vez que no limite UV (pequeno τ) pode-se fazer a mudança anisotrópica de variáveis

$$\eta_\mu ik_\nu \sigma^{\nu\mu} \rightarrow \tau^{-1/2} \eta_\mu ik_\nu \sigma^{\nu\mu} \tag{5.2.5}$$

$$e^{\bar{i}}_\mu h_\nu^\mu ik_\rho \sigma^{\rho\nu} \rightarrow \tau^{-1/2z} e^{\bar{i}}_\mu h_\nu^\mu ik_\rho \sigma^{\rho\nu}, \tag{5.2.6}$$

onde z é o expoente dinâmico crítico para a teoria. Neste caso, o fator exponencial torna-se independente de τ e as integrais podem, em princípio, ser calculadas. O resultado é um kernel de calor da forma

$$K = \frac{1}{(2\pi)^{d\tau^{\frac{1}{2}(1+\frac{d-1}{z})}}} \int d^d k \left[e^{-A} \left\{ 1 - \tau \bar{B} + \frac{\tau^2}{2} ([\bar{B}, \tau^{-1} A] + \bar{B}^2) - \dots \right\} I(x, x') \right], \quad (5.2.7)$$

onde \bar{B} é o operador perturbação B , reescalado de acordo com (5.2.5). Vê-se imediatamente que o termo dominante implica o limite para a dimensão espectral correto; usando $d = 4$, tem-se o resultado desejado,

$$d_S = 1 + \frac{3}{z}. \quad (5.2.8)$$

Um dos resultados mais benéficos desta construção é que ela agrupa os vários termos invariantes sob FDiff em grupos sob iguais potências de τ , isto é, em coeficientes de kernel de calor. Quando recolocados no Princípio da Ação Espectral, como proposto mais cedo, isso implica vínculos entre os coeficientes relativos desses invariantes, o que reduz dramaticamente as centenas de parâmetros livres permitidos pela Gravitação Anisotrópica no número potencialmente mais tratável de apenas onze. Entretanto, tanto a fórmula de Zassenhaus quando as expressões analíticas para as fórmulas dos limites de coincidência são cálculos intratáveis nesta ordem, de forma que auxílio computacional se torna necessário para realização do catálogo dos vínculos e comparação contra as evidências experimentais que deve ser feitas em seguida. Entretanto, isto vai além do escopo deste trabalho.

Capítulo 6

Conclusões

Os modelos não-relativísticos anisotrópicos da gravidade como Horava-Lifshitz, sendo renormalizáveis por contagem de potências, são bons candidatos para ponto inicial em direção a uma teoria quântica da gravidade completa. Como mostrado pelo exemplo dos Condensados de Bose-Einstein Relativísticos, se tomada como uma teoria efetiva, gravitação anisotrópica não é necessariamente uma separação permanente do princípio de Covariância Geral, e pode ser consistente com a recuperação de uma forma deformada de Invariância de Lorentz em energias muito altas.

Por outro lado, espera-se que na escala de Planck a estrutura de variedade do espaçotempo falhe, sendo substituída por outra estrutura, como espumas de spin ou espaços não-comutativos. Um modo natural de se introduzir gravitação em tais estruturas é através da abordagem de Geometria Espectral do Princípio da Ação Espectral. Geometria espectral substitui a noção de variedade por aquela de uma C^* -álgebra equipada de um operador de Dirac, e mostrou-se [15] que o Modelo Padrão pode ser recuperado neste contexto usando suposições bastante gerais, fazendo-o o lugar natural para se procurar por formas consistentes de se estender as teorias existentes.

Nesta Dissertação, tomaram-se passos na direção de conciliar gravidade anisotrópica e geometria espectral. Como um passo inicial, calculou-se o kernel de calor para Laplacianos anisotrópicos em um espaçotempo plano, o qual descobriu-se pode ser resolvido exatamente, apesar de ser neces-

sário o uso da função especial Ψ de Fox-Wright. Com o kernel de calor exato em mãos, foi-se capaz de calcular a dimensão espectral de teoria como uma função da escala de energia, melhorando-se sobre o resultado de Horava ao mostrar quantitativamente que a dimensão espectral para gravitação anisotrópica flui suavemente de quatro no IR para dois no UV. Enquanto a aplicação da métrica espectral (2.1.3) talvez dê um significado geométrico mais claro para este fluxo, foi-se brevemente revisado um mecanismo de ricochete caótico no universo Mixmaster para se ilustrar uma possível forma de se atingir redução da dimensão espectral.

Em seguida, a menos da dependência na estrutura natural de foliação inerente a gravitação anisotrópica, definiu-se uma decomposição ADM invariante de calibre do operador de Dirac em tanto a notação de Penrose como na notação de matrizes γ . A partir daí, construiu-se o operador de Dirac anisotrópico, e propôs-se um método direto para cálculo da Ação Espectral correspondente. Como consequência, obteve-se uma prescrição para se reduzir as centenas de parâmetros livres inerentes a gravitação anisotrópica para apenas onze constantes de acoplamento. Esta é ainda outra motivação para se aplicar o Princípio da Ação Espectral para outras teorias físicas.

Trabalhos seguintes devem desenvolver o código computacional necessário para se escrever explicitamente os vínculos sobre os parâmetros de gravidade anisotrópica, permitindo a verificação contra experimentos. Adicionalmente, pode-se explorar o acoplamento imposto pela Ação Espectral entre matéria e gravidade, o qual é ainda um problema em aberto em gravitação Horava-lifshitz, onde não se tem a Covariância Geral para servir de guia. Adicionalmente, pode-se mostrar frutífero explorar a geometria induzida no triplo espectral pelo operador de Dirac anisotrópico, o que pode desvendar adequadamente o significado físico do fluxo de dimensão espectral.

Apêndice A

A Função Ψ de Fox-Wright

Começa-se seguindo Kilbas [40], definindo-se a função Ψ de Fox-Wright pela expressão

$${}_p\Psi_q \left[\begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_i, \beta_i)_{1,q} \end{matrix} \middle| z \right] := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{n=1}^p \Gamma(a_n + \alpha_n k)}{\prod_{n=1}^q \Gamma(b_n + \beta_n k)} \frac{z^k}{k!} \quad (\text{A.1})$$
$$\{(\alpha_i)_{1,p}, (\beta_j)_{1,q}\} \subset \mathbb{R}^+,$$

e a função Fox-H por

$$H_{p,q}^{m,n} \left[z \middle| \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_i, \beta_i)_{1,q} \end{matrix} ; z \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + \beta_j s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - \alpha_j s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - \beta_j s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + \alpha_j s)} z^{-s} ds, \quad (\text{A.2})$$

onde a não-coincidência dos pólos das funções Γ do numerador, condição

$$\frac{-u - b_j}{\beta_j} \neq \frac{1 + v - a_k}{\alpha_k}, \quad u, v \in \mathbb{N}, k \in [0, \dots, n], j \in [0, \dots, m], \quad (\text{A.3})$$

é necessária, e o contorno C ao longo do qual esta integral é tomada é a curva que separa os pólos de $\{\Gamma(1 - a_j - \alpha_j s)\}$ e $\{\Gamma(b_k + \beta_k s)\}$.

Usar-se-á também as definições de Gradshteyn[31] para função Hipergeométrica Generalizada

$${}_pF_q[(\alpha_i)_{1,p}, (\beta_i)_{1,p}; z] := \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i \in [1, \dots, p]} \frac{\Gamma(\alpha_i + n)}{\Gamma(\alpha_i)} \frac{\Gamma(\beta_i)}{\Gamma(\beta_i + n)} \frac{z^n}{n!}, \quad (\text{A.4})$$

e para a função Meyjer-G

$$G_{p,q}^{m,n} \left(z \left| \begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_i)_{1,q} \end{matrix} \right. \right) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s)} z^s ds \quad (\text{A.5})$$

$$0 \leq m \leq q, 0 \leq n \leq p, ,$$

novamente impondo a condição (A.3).

A primeira propriedade que observa-se para função Ψ é que sua derivada é trivialmente outra função Ψ de mesma ordem,

$$\frac{\partial}{\partial z} {}_p\Psi_q \left[\begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_i, \beta_i)_{1,q} \end{matrix} \middle| z \right] = {}_p\Psi_q \left[\begin{matrix} (a_i + \alpha_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_i + \beta_i, \beta_i)_{1,q} \end{matrix} \middle| z \right] \quad (\text{A.6})$$

Pode-se então usar integração de polos para se mostrar que a função Ψ é um caso especial da função H , de acordo com a equação:

$${}_p\Psi_q \left[\begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_i, \beta_i)_{1,q} \end{matrix} \middle| z \right] = H_{p,q+1}^{1,p} \left[-z \middle| \begin{matrix} (1 - a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (0, 1), (1 - b_i, \beta_i)_{1,q} \end{matrix} \right] \quad (\text{A.7})$$

Primeiro expande-se o lado direito de acordo com a definição;

$$H_{p,q+1}^{1,p} \left[-z \middle| \begin{matrix} (1 - a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (0, 1), (1 - b_i, \beta_i)_{1,q} \end{matrix} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Gamma(-s) \prod_{i=1}^p \Gamma(a_i + \alpha_i s)}{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j + \beta_j s)} (-z)^s ds. \quad (\text{A.8})$$

Como todos os polos de $\Gamma(a_i + \alpha_i s)$ estão no semi-plado negativo, enquanto aquelas de $\Gamma(-s)$ estão no semi-plano positivo, o contorno C a ser tomado deve contornar apenas polos $s \in \mathbb{N}$, o que prova expressão (A.7).

Escolhendo $\alpha_i = \beta_j = 1$, é imediato ver que a função hipergeométrica generalizada é apenas um caso específico da função Ψ , a menos de normalização. Também é imediato pela definição que esta escolha de parâmetros reduz a função H para a Meyer-H.

$${}_p\Psi_q \left[\begin{matrix} (a_i, 1)_{1,p} \\ (b_i, 1)_{1,q} \end{matrix} \middle| z \right] = \frac{\prod_{n=1}^p \Gamma(a_n)}{\prod_{n=1}^q \Gamma(b_n)} {}_pF_q [(a_i)_{1,p}; (b_i)_{1,q}; z]. \quad (\text{A.9})$$

Os casos relevantes de ${}_p\Psi_q$ para serão ${}_1\Psi_0$ e ${}_1\Psi_1$, com coeficientes racionais. Em particular, Miller [41] mostrou que ${}_1\Psi_1$ tem as seguintes expansões em termos das funções hipergeométrica e Meyer-G:

$${}_1\Psi_1 \left[\left(a, \frac{\alpha}{k} \right); \left(b, \frac{\beta}{k} \right); z \right] = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)} + \sum_{s=1}^k \frac{\Gamma(a + \frac{\alpha}{k}s) z^s}{\Gamma(b + \frac{\beta}{k}s) s!} \times \quad (\text{A.10})$$

$$\times {}_{\alpha+1}F_{\beta+k} \left[1, \frac{s}{k} + \frac{a}{\alpha}, \dots, \frac{s}{k} + \frac{a + \alpha - 1}{\alpha}; \frac{s}{k} + \frac{b}{\beta}, \dots, \frac{s}{k} + \frac{b + \beta - 1}{\beta}, \frac{s+1}{k}, \dots, \frac{s+k}{k}; \frac{\alpha^\alpha}{\beta^\beta} \left(\frac{z}{k} \right)^k \right],$$

$${}_1\Psi_1 \left[\left(a, \frac{\alpha}{k} \right); \left(b, \frac{\beta}{k} \right); z \right] = 2\pi^{(1+\beta-\alpha+k)/2} \sqrt{\frac{k\beta}{\alpha}} \frac{\alpha^\alpha}{\beta^\beta} \times \quad (\text{A.11})$$

$$\times G_{\alpha k+\beta}^{k\alpha} \left(\frac{\alpha^\alpha}{\beta^\beta} \left(-\frac{z}{k} \right)^k \left| \begin{array}{c} 1 - \frac{a}{\alpha}, \dots, 1 - \frac{a+\alpha-1}{\alpha} \\ 0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1 - \frac{b}{\beta}, \dots, 1 - \frac{b+\beta-1}{\beta} \end{array} \right. \right).$$

O cerne deste apêndice consiste no cálculo dos limites assintóticos de ${}_1\Psi_0$. Isso pode ser feito notando-se que, sendo uma integral do tipo Mellin, a invés de fechar o contorno à direita da expressão, fecha-se à esquerda, apanhando-se os polos de $\Gamma(a + \alpha s)$, levando à expansão assintótica:

$${}_1\Psi_0 \left[\left(a, \alpha \right); z \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_C \Gamma(-s) \Gamma(a + \alpha s) (-z)^{-s} ds \quad (\text{A.12})$$

$$= \frac{(-z)^{-\frac{a}{\alpha}}}{\alpha} \sum_n \Gamma\left(\frac{n+a}{\alpha}\right) \frac{(-1)^n}{n!} (-z)^{-\frac{n}{\alpha}} \quad (\text{A.13})$$

$$= \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{a}{\alpha}\right) (-z)^{-\frac{a}{\alpha}} + O((-z)^{-\frac{a-1}{\alpha}}). \quad (\text{A.14})$$

Apêndice B

$SL(2, \mathbb{C})$ and $SU(2)$

A fim de se obter a decomposição ADM do operador de Dirac, revisa-se primeiro a relação entre spinores $SL(2, \mathbb{C})$ e spinores $SU(2)$, começando com sua definição.

A forma mais simples de se introduzir spinores no espaçotempo e spinores espaciais é pelo uso da formulação de fibrados. Como escrito em Nakahara[42], um fibrado consiste em uma variedade localmente isomorfa ao espaço produto entre uma variedade base M e uma fibra F , com uma condição adicional: nos trechos em quais esses isomorfismos locais se sobrepõem, sua composição deve ser uma representação do chamado grupo de estrutura G do feixe, um grupo de Lie. Neste contexto, tanto spinores espaçotemporais e spinores espaciais são definidos como fibrados com fibra típica $V := \mathbb{C}^2$, e com grupo de estrutura $SL(2, \mathbb{C})$ ou $SU(2)$ respectivamente, os quais são as coberturas universais das transformações de Lorentz $SO(3, 1)$ e rotações espaciais $SO(3)$. Então, a fim de se gerar a algebra spinorial complete, toma-se o produto tensorial de cópias desses espaços spinoriais, seus conjugados, e seus duais. Refina-se a notação, seguindo Wald[[19]. Representa-se usando índices latinos maiúsculos superscritos vetores de V , por exemplo, $\phi^A \in V$. Vetores no espaço dual V^* de mapas lineares $V \rightarrow \mathbb{C}$ são denotados por índices maiúsculos latinos subscritos, $\phi_A \in V^*$. Como trabalha-se com um espaço vetorial complexo, pode-se também definir um espaço de mapas antilineares, \bar{V}^* , cujos membros denotam-se por índices latinos maiúsculos subscritos com

apóstrofo, $\phi_{A'} \in \bar{V}^*$. Por ultimo, define-se os espaço \bar{V} dual a \bar{V}^* , e denotam-se seus elementos por índices latinos maiúsculos superscritos com apostrofo, $\phi^{A'} \in \bar{V}$. Tomando o produto tensorial desses espaços, pode-se construir objetos como $\phi^A_{B'C}$, o qual é a composição linear de um vetor complexo, um mapa antilinear em V e um mapa linear em V .

Uma propriedade especialmente útil do espaço spinorial é a existência de um subespaço isomorfo ao espaço tangent TM da variedade base, isto é, existe uma forma antissimétrica única ϵ_{AB} neste espaço tal que o espaço de spinores reais,

$$W = \{\xi^{AA'} \in V \otimes \bar{V} : \xi^{A'A} = \overline{\xi^{AA'}}\} \quad (\text{B.1})$$

é isomorfo a TM .

Este isomorfismo permite-nos construir os “Símbolos de Infeld-van der Waerden” [37], $g_{AA'}{}^a$ e $g^{AA'}{}_a$, os quais são produtos tensoriais de espaços vetoriais spinoriais e tensoriais, e trabalhar de forma similar a como tetradas convertem índices curvos em índices planos; os símbolos de Infeld convertem índices tensoriais em índices spinoriais,

$$T_{AA'} = g_{AA'}{}^a T_a \quad (\text{B.2a})$$

$$T_a = g^{AA'}{}_a T_{AA'}. \quad (\text{B.2b})$$

A partir de agora se faz um abuso de notação, omitindo os símbolos de Inveld-van der Waerden, fazendo a convenção de que letras minúsculas Latinas devem ser substituídas com um par real da mesma letra, mas maiúscula, $a \leftrightarrow AA'$.

Uma das propriedades mais importantes desses isomorfismos é a relação entre a métrica no espaçotempo e a forma antissimétrica spinorial,

$$g_{ab} = \epsilon_{AB}\epsilon_{A'B'}. \quad (\text{B.3})$$

Seguindo Sen[39], pode-se usar este isomorfismo para fazer o mapa de da representação $SL(2, \mathbb{C})$ para aquela de $SU(2)$. Como $SL(2, \mathbb{C})$ se quebra em duas cópias de $SU(2)$, $SL(2, \mathbb{C}) = SU(2) \otimes SU(2)$, pode-se associar a cada cópia um tipo de índice, por exemplo, aqueles com ou sem apóstrofe

(esta diferença também corresponde a se o índice é originado em uma cópia de V ou de seu conjugado \bar{V}), cada um transformando-se de acordo com a matriz complexa conjugada do outro [19]. Se introduz-se um vetor preferencial, como o vetor tempo unitário η , então o isomorfismo implica $\eta^a = \eta^{AA'}$, e este spinor real introduz um novo isomorfismo entre índices com e sem apóstrofe, simplesmente pela contração (B.4). Os índices puramente com ou sem apóstrofe correspondem às duas cópias de $SU(2)$.

$$T_{AB\dots}{}^{FG} := (\sqrt{2}\eta_A{}^{A'})(\sqrt{2}\eta_B{}^{B'})\dots(\sqrt{2}\eta^F{}_{F'})(\sqrt{2}\eta^G{}_{G'})\dots T_{A'B'\dots}{}^{F'G'\dots} \quad (\text{B.4})$$

É fácil mostrar que o espaço de spinores sem apóstrofe contém um subespaço isomorfo ao dos tensores espaciais; o espaço de spinores sem apóstrofe simétricos. Como esse é um vetor especial da dimensão correta, precisa-se apenas mostrar que esses vetores são ortogonais a η . Seja $T_a = T_{AA'}$. O spinor $SU(2)$ correspondente é $T_{AB} = \sqrt{2}\eta_A{}^{A'}T_{BA'}$. Para se calcular a parte antissimétrica, contrai-se com ϵ_{AB} , e observa-se que o resultado zero é equivalente a $\eta^a T_a = 0$,

$$\epsilon^{AB}T_{AB} = \sqrt{2}\epsilon^{AB}\eta_B{}^{A'}T_{AA'} = \sqrt{2}\eta^{AA'}T_{AA'} = \sqrt{2}\eta^a T_a = 0. \quad (\text{B.5})$$

Aqui, normalização do vetor η se traduz na condição:

$$\epsilon_A{}^B = -2\eta_{AA'}\eta^{BA'} \quad (\text{B.6})$$

Mais explicitamente, pode-se ver que o projector de hipersuperfície induz esta simetrização; é fácil mostrar que $h_{ABCD} = \epsilon_{A(C}\epsilon_{D)B}$. Então sua ação em tensores é imediata,

$$h_{ABCC'}T^{CC'} = -h_{ABCD}T^{CD} = -\frac{1}{2}\epsilon_{AC}\epsilon_{DB}(T^{CD} + T^{DC}) \quad (\text{B.7})$$

$$= -\frac{1}{2}(\epsilon_{AC}T^C{}_B + \epsilon_{AC}T_B{}^C) \quad (\text{B.8})$$

$$= T_{(AB)}. \quad (\text{B.9})$$

No contexto de fibrados, esta redução em um grupo de estrutura menor pode sr vista do fato

de que o mapa em spinores sem apóstrofe introduz naturalmente uma operação de conjugação,

$$\xi^{A\dagger} := G^{AA'}\bar{\xi}_{A'} = \sqrt{2}\eta^{AA'}\bar{\xi}_{A'}. \quad (\text{B.10})$$

Então restringe-se às rotações de spin tais que as contrações $\xi^{A\dagger}\xi_A$ são conservadas; em outras palavras, exige-se que a forma $G_{AB'}$ seja preservada. Então imediatamente se vê que estes spinores sem apóstrofe são $SU(2)$, uma vez que este é o grupo de estrutura para o feixe com fibra V , variedade base M , que preserva tanto ϵ_{AB} e $G_{AB'}$.

Entretanto, nesta dissertação deseja-se usar o formalismo tensorial das matrizes γ , então deve-se indicar como converter a notação spinorial para aquela tensorial, como indicado no apêndice de [37]. Para fazê-lo adota-se uma perspectiva mais simples, mas frequentemente mais útil; pensa-se no espaço spinorial como o espaço de representação da álgebra de Clifford induzida pela métrica do espaçotempo. Em um espaçotempo plano, esta álgebra é apenas aquela das matrizes γ de Dirac tradicionais, mas para construí-las em espaçotempo curvo, precisa-se de um referencial ortonormal ou tetrada e_a^μ , definida por

$$e^\mu_a e^{\nu a} = g^{\mu\nu} \quad (\text{B.11a})$$

$$e^{\mu a} e_\mu^b = \eta^{ab}, \quad (\text{B.11b})$$

onde índices gregos correspondem a coordenadas curvas, e índices latinos a coordenadas planas ou do feixe.

Então, começando-se com as matrizes de Dirac tradicionais, as quais correspondem à álgebra de Clifford em espaço plano,

$$\{\gamma^a \gamma^b\} = 2\eta^{ab} \quad (\text{B.12})$$

pode-se “contrair” essas matrizes com as tetradas para se obter a algebra curva na variedade,

$$\begin{aligned}
\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= \{\gamma^a e_a^\mu, \gamma^b e_b^\nu\} \\
&= e_a^\mu e_b^\nu \{\gamma^a, \gamma^b\} = 2e_a^\mu e_b^\nu \eta^{ab} \\
&= 2g^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{B.13}$$

Então, o espaço spinorial é apenas um espaço de representação desta álgebra, e a derivada covariante spinorial é definida pela regra de Leibnitz, juntamente do postulado de tetrada,

$$\nabla_a \gamma_b = 0 \tag{B.14}$$

É fácil ver de (B.14) e (B.13) que o postulado de tetrad implica que a derivada covariante é compatível com a métrica.

Deseja-se conectar essas duas notações. Primeiro, prova-se que as matrizes citepenrose1986spinors

$$(\gamma_p)_\alpha^\beta = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{PA} \epsilon_{P'}^{B'} \\ \epsilon_{P'A'} \epsilon_P^B & 0 \end{pmatrix} \tag{B.15}$$

são matrizes γ , satisfazendo a álgebra de Clifford em espaçotempo curvo,

$$\begin{aligned}
&(\gamma_p)_\alpha^\beta (\gamma_q)_{\beta\gamma} + (\gamma_q)_\alpha^\beta (\gamma_p)_{\beta\gamma} = \\
&= 2 \begin{pmatrix} \epsilon_{PA} \epsilon_{P'}^{B'} \epsilon_{Q'B'} \epsilon_{QC} + \epsilon_{QA} \epsilon_{Q'}^{B'} \epsilon_{P'B'} \epsilon_{PC} & 0 \\ 0 & \epsilon_{P'A'} \epsilon_P^B \epsilon_{QB} \epsilon_{Q'C'} + \epsilon_{Q'A'} \epsilon_Q^B \epsilon_{PB} \epsilon_{P'C'} \end{pmatrix} \\
&= 2 \begin{pmatrix} \epsilon_{P'Q'} (-\epsilon_{PA} \epsilon_{QC} + \epsilon_{QA} \epsilon_{PC}) & 0 \\ 0 & \epsilon_{PQ} (-\epsilon_{P'A'} \epsilon_{Q'C'} + \epsilon_{Q'A'} \epsilon_{P'C'}) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Como o resultado é antissimétrico com respeito a A, C , então deve ser um múltiplo de ϵ_{AC} . Como sua norma é $\epsilon^{AC} \epsilon_{P'Q'} (-\epsilon_{PA} \epsilon_{QC} + \epsilon_{QA} \epsilon_{PC}) = -2\epsilon_{P'Q'} \epsilon_{PQ} = -2g_{pq}$ e o tensor ϵ é normalizado como $\epsilon^{AB} \epsilon_{AB} = 2$, pode-se completar o cálculo e provar que tem-se uma álgebra de Clifford,

$$(\gamma_p)_\alpha^\beta (\gamma_q)_{\beta\gamma} + (\gamma_q)_\alpha^\beta (\gamma_p)_{\beta\gamma} = -2g_{pq} \begin{pmatrix} \epsilon_{AC} & 0 \\ 0 & \epsilon_{A'C'} \end{pmatrix} \tag{B.17}$$

Agora precisa-se de uma forma de se fazer contrações com índices spinoriais individuais dos tensores espaçotemporais; a forma de fazê-lo é sugerida pela forma dessas matrizes. Precisa-se apenas fazer a contração,

$$T^{AA'}\phi_{A'} = T_b\epsilon^{AB}\epsilon^{A'B'}\phi_{A'}; \quad (\text{B.18})$$

por claridade, lembra-se que b contrai-se com BB' via os símbolos de Infeld-Van Waerden. Então, quando trabalhando-se com 4-spinores, pode-se simplesmente suprimir os índices internos e escrever

$$T^{AA'}\phi_{A'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_\mu\gamma^\mu\phi)^A, \quad (\text{B.19})$$

O que se quer agora é demonstrar que a construção de matrizes γ pode também ser utilizada para se recriar a construção de spinores espaciais como spinores sem apóstrofe simetrizados. Primeiramente, nota-se que remover a apóstrofe de um índice é igual a multiplicar o spinor equivalente ao tensor por γ_η ,

$$\begin{aligned} T_{AB} &= \sqrt{2}\eta_B{}^{A'}T_{AA'} = \frac{1}{\sqrt{2}}T_\mu(\gamma^\mu)_{AA'}\eta_\nu(\gamma^\nu)_{B}{}^{A'} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_T)_A{}^{A'}(\gamma_\eta)_{BA'} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_T\gamma_\eta)_{AB} \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

onde define-se a notação $\gamma_T = T_\mu\gamma^\mu$.

Então sua parte simétrica com respeito aos índices spinoriais é dada por

$$\begin{aligned} T_{(AB)} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(T_{AA'}\eta_B{}^{A'} + T_{BA'}\eta_A{}^{A'}\right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}T_p\eta_q(\epsilon_A{}^P\epsilon_{A'}{}^{P'}\epsilon_B{}^Q\epsilon^{A'Q'} + \epsilon_B{}^P\epsilon_{A'}{}^{P'}\epsilon_A{}^Q\epsilon^{A'Q'}) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}T_p\eta_q\epsilon^{P'Q'}(\epsilon_A{}^P\epsilon_B{}^Q + \epsilon_A{}^Q\epsilon_B{}^P) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(T_p\eta_q\epsilon^{P'Q'}\epsilon_A{}^P\epsilon_B{}^Q - \eta_qT_p\epsilon^{Q'P'}\epsilon_A{}^Q\epsilon_B{}^P) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}((\gamma_T\gamma_\eta)_{AB} - (\gamma_\eta\gamma_T)_{AB}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}[\gamma_T, \gamma_\eta]_{AB}, \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

então simetrização dos índices spinoriais implica que deve-se tomar o comutador das matrizes γ . Entretanto, pode-se decompor o tensor T_μ em suas partes espacial e temporal, $T_\mu = {}^3T_\mu + T_\nu \eta^\nu \eta_\mu$, e imediatamente se vê que o comutador interage apenas com a parte espacial, restando

$$\begin{aligned}
T_{(AB)} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} [({}^3T_\mu + T_\nu \eta^\nu \eta_\mu) \gamma^\mu, \eta_\rho \gamma^\rho]_{AB} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} [{}^3T_\mu \gamma^\mu, \eta_\nu \gamma^\nu]_{AB} \\
&= {}^3T_{(AB)}
\end{aligned} \tag{B.22}$$

Como esperado, pode-se calcular a parte antissimétrica, a qual é novamente proporcional a ϵ_{AB} ; repetindo-se o raciocínio anterior, confirma-se que ela é de fato proporcional à parte na direção do tempo, com mesmo fator multiplicativo que $T_{(AB)}$ para a parte espacial,

$$\begin{aligned}
T_{[AB]} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} T_\mu \eta_\nu \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}_{AB} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} T_\mu \eta^\mu \epsilon_{AB}
\end{aligned} \tag{B.23}$$

Referências Bibliográficas

- [1] R. J. Szabo, “Busstepp lectures on string theory,” *arXiv preprint hep-th/0207142*, 2002.
- [2] J. Overduin and P. S. Wesson, “Kaluza-klein gravity,” *Physics Reports*, vol. 283, no. 5, pp. 303–378, 1997.
- [3] L. E. Reichl and I. Prigogine, *A modern course in statistical physics*, vol. 71. University of Texas press Austin, 1980.
- [4] S. Doplicher, K. Fredenhagen, and J. E. Roberts, “The quantum structure of spacetime at the planck scale and quantum fields,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 172, no. 1, pp. 187–220, 1995.
- [5] S. Carlip, “Spontaneous dimensional reduction in short-distance quantum gravity?,” *arXiv preprint arXiv:0909.3329*, 2009.
- [6] J. Ambjorn, J. Jurkiewicz, and R. Loll, “Spectral dimension of the universe,” *arXiv preprint hep-th/0505113*, 2005.
- [7] J. J. Atick and E. Witten, “The hagedorn transition and the number of degrees of freedom of string theory,” *Nuclear Physics B*, vol. 310, no. 2, pp. 291–334, 1988.
- [8] M. Niedermaier, “The asymptotic safety scenario in quantum gravity: An introduction,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 24, no. 18, p. R171, 2007.
- [9] A. H. Chamseddine and A. Connes, “The spectral action principle,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 186, no. 3, pp. 731–750, 1997.
- [10] J. C. Varilly, *An introduction to noncommutative geometry*. European Mathematical Society, 2006.
- [11] B. S. DeWitt, B. S. DeWitt, and B. S. DeWitt, “Dynamical theory of groups and fields,” 1965.
- [12] S. A. Fulling, *Aspects of quantum field theory in curved spacetime*, vol. 17. Cambridge University Press, 1989.
- [13] D. V. Fursaev and D. V. Vassilevič, *Operators, geometry and quanta*. Springer, 2011.

- [14] A. Connes, “Gravity coupled with matter and the foundation of non-commutative geometry,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 182, no. 1, pp. 155–176, 1996.
- [15] A. H. Chamseddine and A. Connes, “Why the standard model,” *Journal of Geometry and Physics*, vol. 58, no. 1, pp. 38–47, 2008.
- [16] V. P. Gusynin, “New algorithm for computing the coefficients in the heat kernel expansion,” *Physics Letters B*, vol. 225, no. 3, pp. 233–239, 1989.
- [17] H. Widom, “A complete symbolic calculus for pseudodifferential operators,” *Bull. Sci. Math*, vol. 104, no. 2, pp. 19–63, 1980.
- [18] D. Nesterov and S. N. Solodukhin, “Gravitational effective action and entanglement entropy in uv modified theories with and without lorentz symmetry,” *Nuclear Physics B*, vol. 842, no. 2, pp. 141–171, 2011.
- [19] R. M. Wald, *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [20] É.ourgoulhon, “3+ 1 formalism and bases of numerical relativity,” *arXiv preprint gr-qc/0703035*, 2007.
- [21] P. Hořava, “Membranes at quantum criticality,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2009, no. 03, p. 020, 2009.
- [22] P. Hořava, “Quantum gravity at a lifshitz point,” *Physical Review D*, vol. 79, no. 8, p. 084008, 2009.
- [23] E. Lifshitz, “On the theory of second-order phase transitions i & ii,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz*, vol. 11, no. 255, p. 269, 1941.
- [24] K. Stelle, “Renormalization of higher-derivative quantum gravity,” *Physical Review D*, vol. 16, no. 4, p. 953, 1977.
- [25] D. Blas, O. Pujolas, and S. Sibiryakov, “Models of non-relativistic quantum gravity: the good, the bad and the healthy,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2011, no. 4, pp. 1–53, 2011.
- [26] P. Hořava, “Spectral dimension of the universe in quantum gravity at a lifshitz point,” *Physical review letters*, vol. 102, no. 16, p. 161301, 2009.
- [27] A. Pinzul, “On a spectral geometry approach to hořava–lifshitz gravity: a spectral dimension,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 28, no. 19, p. 195005, 2011.
- [28] D. Blas, O. Pujolas, and S. Sibiryakov, “On the extra mode and inconsistency of hořava gravity,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2009, no. 10, p. 029, 2009.
- [29] S. Fagnocchi, S. Finazzi, S. Liberati, M. Kormos, and A. Trombettoni, “Relativistic bose–einstein condensates: a new system for analogue models of gravity,” *New Journal of Physics*, vol. 12, no. 9, p. 095012, 2010.

- [30] A. Mamiya and A. Pinzul, “Heat kernel for flat generalized laplacians with anisotropic scaling,” *arXiv preprint arXiv:1308.2706*, 2013.
- [31] A. Jeffrey and D. Zwillinger, *Table of integrals, series, and products*. Access Online via Elsevier, 2007.
- [32] V. Belinskii, I. M. Khalatnikov, and E. Lifshitz, “Oscillatory approach to a singular point in the relativistic cosmology,” *Advances in Physics*, vol. 19, no. 80, pp. 525–573, 1970.
- [33] C. Estrada and M. Marcolli, “Noncommutative mixmaster cosmologies,” *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, vol. 10, no. 01, 2013.
- [34] I. Bakas, F. Bourliot, D. Lüst, and M. Petropoulos, “The mixmaster universe in hořava–lifshitz gravity,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 27, no. 4, p. 045013, 2010.
- [35] C. W. Misner and J. A. Wheeler, *Gravitation: Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John Archibald Wheeler*. Macmillan, 1973.
- [36] Y. I. Manin and M. Marcolli, “Continued fractions, modular symbols, and noncommutative geometry,” *Selecta Mathematica*, vol. 8, no. 3, pp. 475–521, 2002.
- [37] R. Penrose and W. Rindler, *Spinors and Space-time: Spinor and twistor methods in space-time geometry*. Cambridge University Press, 1986.
- [38] P. Sommers, “Space spinors,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 21, p. 2567, 1980.
- [39] A. Sen, “Quantum theory of spin-3/2 field in einstein spaces,” *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 21, no. 1, pp. 1–35, 1982.
- [40] A. A. Kilbas, *H-transforms: Theory and Applications*. CRC Press, 2004.
- [41] A. R. Miller and I. S. Moskowitz, “Reduction of a class of fox-wright psi functions for certain rational parameters,” *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 30, no. 11, pp. 73–82, 1995.
- [42] M. Nakahara, *Geometry, topology, and physics*. CRC Press, 2003.