Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Francisco Enio do Nascimento Lima

Centralizadores em Grupos Localmente Finitos

Brasília
2013

Francisco Enio do Nascimento Lima

Centralizadores em Grupos Localmente Finitos

Tese apresentada ao Programa de Pós–Graduação do Instituto de Ciências Exatas da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Álgebra.

Orientador: Prof. Dr. Pavel Shumyatsky.

Brasília
2013

À memória do meu pai, José Ferreira,
pela minha educação.

À memória de minha mãe, Núbia,
que sempre me incentivou a estudar.

Ao meu orientador, Pavel Shumyatsky,
pela infinita paciência.

À minha esposa, Lena e minha filha, Envili,
pelo companheirismo.

Agradecimentos

À minha mãe Núbia e ao meu pai José (que não estão mais entre nós), pela minha existência.

Aos meus irmãos Endel, Eniede e Enivânia, por acreditarem nos meus ideais.

À minha esposa Lena - testemunha maior dos meus esforços - pelo amor, carinho e compreensão para comigo.

À minha filha, Envili, pela alegria.

A todos os meus familiares que direta ou indiretamente sempre torceram por mim.

Ao meu orientador, professor Pavel Shumyatsky, pelo enorme aprendizado, por sua paciência, pelas suas críticas construtivas e seus elogios.

Aos membros da minha banca, professores Robério Rogério, Alexei Krassilnikov, Cristina Acciarri e Antonio C. Tamarozzi, pelas valiosas sugestões para a melhoria deste trabalho.

A todos os meus colegas do Departamento de Matemática da UnB, em particular, aos colegas Agenor, Emerson, Kaliana e Raimundo por me ajudarem no meu momento decisivo.

Aos professores do Departamento de Matemática da UnB, por toda contribuição na minha formação.

Aos funcionários do Departamento de Matemática da UnB, pela competência.

Ao CNPq/CAPES, pelo suporte financeiro.

"O homem não é nada além daquilo que a educação faz dele",
Immanuel Kant.

Resumo

Seja G um grupo localmente finito. Estudamos as influências de propriedades dos centralizadores sobre a estrutura do grupo G. Obtemos os seguintes resultados:

1. Seja G um grupo localmente finito contendo um subgrupo não cíclico V de ordem quatro tal que $C_G(V)$ é finito e $C_G(\phi)$ tem expoente finito para algum $\phi \in V$. Demonstramos que $[G,\phi]'$ tem expoente finito. Isto permite-nos deduzir que G tem uma série normal $1 \leq G_1 \leq G_2 \leq G_3 \leq G$ tal que G_1 e G/G_2 têm expoente finito enquanto que G_2/G_1 é abeliano. Além disso, G_3 é hiperabeliano e tem índice finito em G.

2. Seja A um grupo isomorfo ao grupo S_4, o grupo simétrico de quatro símbolos. Seja V o subgrupo normal de ordem quatro em A e escolhemos uma involução $\alpha \in A \backslash V$. O 2-subgrupo de Sylow D de A é $V\langle\alpha\rangle$ e este é isomorfo ao grupo diedral de ordem 8. Demonstramos que se G é um grupo localmente finito contendo um subgrupo isomorfo a D tal que $C_G(V)$ é finito e $C_G(\alpha)$ tem expoente finito, então $[G,D]'$ tem expoente finito. Se G é um grupo localmente finito contendo um subgrupo isomorfo a A tal que $C_G(V)$ é finito e $C_G(\alpha)$ tem expoente finito, então G tem expoente finito.

Palavras–chave

Grupos localmente finitos, Centralizadores, Automorfismos.

Abstract

Let G be a locally finite group. In this work we study the influences of the properties of the centralizers over structures of G. We obtain the following results:

1. Let G be a locally finite group which contains a non-cyclic subgroup V of order four such that $C_G(V)$ is finite and $C_G(\phi)$ has finite exponent for some $\phi \in V$. We show that $[G, \phi]'$ has finite exponent. This enables us to deduce that G has a normal series $1 \leq G_1 \leq G_2 \leq G_3 \leq G$ such that G_1 and G/G_2 have finite exponents while G_2/G_1 is abelian. Moreover, G_3 is hyperabelian and has finite index in G.

2. Let A stand for the group isomorphic with S_4, the symmetric group on four symbols. Let V be the normal subgroup of order four in A and choose an involution $\alpha \in A \backslash V$. The Sylow 2-subgroup D of A is $V\langle\alpha\rangle$ and this is isomorphic with the dihedral group of order 8. We prove that if G is a locally finite group containing a subgroup isomorphic with D such that $C_G(V)$ is finite and $C_G(\alpha)$ has finite exponent, then $[G, D]'$ has finite exponent. If G is a locally finite group containing a subgroup isomorphic with A such that $C_G(V)$ is finite and $C_G(\alpha)$ has finite exponent, then G has finite exponent.

Keywords

Locally finite groups, Centralizers, Automorphisms.

Lista de Símbolos

$G, H, N, K, V, R, X, Y \dots$	Conjuntos, grupos, etc
I	Conjunto de índices
$\alpha, \beta, \dots$	Funções
$x, y, g, h, \dots$	Elementos de conjuntos
x^α	Imagem de elemento x pela função α
$[x, y]$	Comutador dos elementos x, y
$[H, K]$	Subgrupo comutador
$H \cong G$	H é isomorfo a G
$H \leq G$	H é subgrupo de G
$H \trianglelefteq G$	H é subgrupo normal de G
$C_G(H)$	Centralizador de H em G
$H \times K$	Produto direto de H e K
$[H]K$	Produto semidireto do subgrupo normal H pelo subgrupo K
$\langle X_i \vert i \in I \rangle$	Subgrupo gerado por subconjuntos X_i
$\Pi_{i \in I} N_i$	Produto de subgrupos N_i
$\langle x \rangle$	Grupo cíclico gerado por x
$\langle H^G \rangle$	Fecho normal de H em G
$Z_n(G)$	n-ésimo termo da série central superior de G
$\gamma_n(G)$	n-ésimo termo da série central inferior de G
$G^{(n)}$	n-ésima derivada de G
$\vert X \vert$	Cardinalidade do conjunto X

$\|x\|$ ou $o(x)$	Ordem do elemento x
$exp(G)$	Expoente de um grupo G
$\|G:H\|$	Índice de H em G
$Aut(G)$	Grupos de automorfismos de um grupo G
G^0	Parte divisível de um grupo G
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$	Conjunto dos números naturais e inteiros
$\mathbb{Q}, \mathbb{P}$	Conjunto dos números racionais e dos números primos
$\mathbb{Z}_n$	Conjuntos dos inteiros módulo n
S_X	Conjunto das pemutações de um conjunto X
C_{p^∞}	O p-grupo quasecíclico, p primo
$O_\pi(G)$	O π-subgrupo normal maximal de G

Sumário

Introdução

Um grupo G é localmente finito se todo subgrupo finitamente gerado de G é finito. É claro que grupos finitos são grupos localmente finitos.

Na teoria de grupos localmente finitos, centralizadores desempenham um papel importante. Mais especificamente, o seguinte questionamento tem atraído grande atenção: *seja V um subgrupo finito de um grupo localmente finito G tal que o $C_G(V)$ satisfaz certas "condições de finitude". Qual é o impacto dessas condições sobre a estrutura do grupo G?*

Naturalmente, como veremos, cada resultado dependerá da ordem de V e do tipo de condição imposta sobre $C_G(V)$.

Para uma melhor leitura desta introdução, apresentamos alguns conceitos importantes. Um grupo não cíclico de ordem 4 será chamado de um grupo de Klein. Dizemos que um grupo tem *quase* uma certa propriedade, se ele tem um subgrupo de índice finito com aquela tal propriedade (essa noção de "quase uma certa propriedade" ficará bem formalizada na seção 1.6). A expressão "$(a, b, c, ...)$-limitada" significa "limitada superiormente por uma função que depende unicamente dos parâmetros inteiros positivos $a, b, c, ...$".

Apresentaremos agora alguns resultados que nos mostram o impacto das propriedades de centralizadores sobre a estrutura de um grupo G. Por exemplo, se $|V| = 2$ e $|C_G(V)| = m$, então B. Hartley e T. Meixner mostraram que G tem um subgrupo nilpotente de classe no máximo 2 com o índice m-limitado (ver [9]). Se G contém um elemento de ordem prima p cujo centralizador é finito de ordem m, então G tem um subgrupo nilpotente de classe p-limitada e índice (m, p)-limitado. Vale destacar que este resultado para grupos periódicos localmente nilpotentes é devido a E. Khukhro [15], enquanto que a redução para o caso nilpotente foi obtida combinando um resultado de B. Hartley e T. Meixner [10] com o de P. Fong [5]. Este último utiliza a classificação dos grupos simples finitos. Um outro resultado nesta direção devido a B. Hartley [12] é o seguinte: se G contém um elemento de ordem n cujo centralizador é finito de ordem m, então G tem um subgrupo localmente solúvel com índice (m, n)-limitado. Diz-se que um grupo G é localmente solúvel quando todo subgrupo finitamente gerado de G é solúvel.

Sobre as hipóteses dos resultados acima, o grupo G em questão não é simples se ele for infinito. Por outro lado, consideremos o grupo $PSL(2,F)$ onde F é um corpo localmente finito de característica ímpar. Este grupo é localmente finito, infinito e simples. Ele contém um subgrupo não cíclico de ordem quatro com centralizador finito. A conclusão é que os resultados descritos no parágrafo anterior não podem ser estendidos para grupos com centralizadores finitos de subgrupos não cíclicos.

As demonstrações destes resultados dependem de muitas ferramentas diferentes. Em particular, elas usam a classificação dos grupos simples finitos, a teoria de representações (a teoria de Hall-Higman) e os métodos de Lie. Estas foram as mesmas ferramentas utilizadas na solução do famoso Problema Restrito de Burnside (ver [35],[36]). Sobre os chamados *Problemas de Burnside*, há um pequeno relato no capítulo 1, subseção 1.5.1. Fixemos nossa atenção no *Problema Restrito de Burnside*:

A ordem de um grupo finito G, m gerado e de expoente k é (m,k)-limitada.

Em 1957, Hall e Higman reduziram o *Problema Restrito de Burnside* para o caso onde o grupo G é um p-grupo para algum primo p. O caso quando G é um p-grupo continuou aberto por mais de 30 anos. Em 1989, Efim Zelmanov resolveu o Problema Restrito de Burnside. As técnicas utilizadas por Zelmanov foram baseadas nos métodos de Lie criados nos anos 30 do século passado por Magnus e Zassenhaus. Seus profundos resultados sobre álgebras de Lie com condições de Engel tiveram fortes influências em outras partes da álgebra. Em particular, elas acabaram sendo úteis no âmbito de centralizadores em grupos localmente finitos. De modo específico, foi descoberto na década de 90 que expoentes de centralizadores produzem fortes impactos sobre o expoente do grupo. Nesse contexto, em 1999 o seguinte Teorema foi demonstrado por E. Khukhro e P. Shumyatsky em [17]:

Teorema 1 *Seja e um inteiro positivo. Suponha que V é um grupo não cíclico de ordem p^2 agindo sobre um grupo finito G de ordem coprima com p^2, de tal maneira que os expoentes dos centralizadores $C_G(v)$ dos elementos não triviais $v \in V$ dividem e. Então, o expoente de G é (e,p)-limitado.*

Vale destacar que o *Teorema 1* foi um dos primeiros a relacionar o expoente de um grupo finito com a estrutura de seus centralizadores. Além disso, por algum tempo ele foi o único resultado dessa natureza. O *Teorema 1* desempenhou um papel crucial para, em 2001, P. Shumyatsky mostrar o seguinte resultado para grupos localmente finitos (ver [28]):

Teorema 2 *Seja G um grupo localmente finito contendo um subgrupo não cíclico V de ordem p^2 tal que $C_G(V)$ é finito e $C_G(v)$ tem expoente finito para todos os elementos não triviais $v \in V$. Então, G é quase localmente solúvel e tem expoente finito.*

Recentemente, especial atenção foi dada a situação onde um grupo de Frobenius age por automorfismos sobre um grupo G. Relembre que um grupo de Frobenius $[F]H$ com núcleo F e complemento H pode ser caracterizado como um grupo finito que é um produto semidireto do subgrupo normal F pelo subgrupo H de modo que $C_F(h) = 1$ para todo $h \in H \backslash \{1\}$. Recentemente, V. Mazurov levantou algumas questões sobre ações de grupos de Frobenius. Uma delas foi:

Suponha que um grupo de Frobenius $[F]H$ age sobre um grupo finito G de maneira que GF também é um grupo de Frobenius. É verdade que o expoente de G pode ser limitado em termos de $|H|$ e do expoente de $C_G(H)$, apenas?

Este problema parece ser muito difícil e até agora continua em aberto. Porém, a questão acima levou a mais perguntas sobre o expoente de grupos finitos com automorfismos. Em particular, foi dada alguma atenção para o seguinte problema:

Suponha que um grupo de Frobenius $[F]H$ com o núcleo F e complemento H age sobre um grupo finito G de tal maneira que $C_G(F) = 1$ e $C_G(H)$ tem expoente e. Então, o expoente de G é $(e, |FH|)$-limitado?

Trabalhos relacionados com o problema acima (ver por exemplo [29]) produziram alguns novos resultados relacionados a expoentes de grupos finitos com automorfismos. Além disso, esses resultados têm sido úteis para lidar com centralizadores em grupos localmente finitos. Em particular, P. Shumyatsky demonstrou em [30] o seguinte:

Teorema 3 *Seja e um inteiro positivo. Suponha que um grupo de Klein V age num grupo finito G de modo que $C_G(V) = 1$. Suponha ainda que V contenha duas involuções distintas v_1 e v_2 tais que os centralizadores $C_G(v_1)$ e $C_G(v_2)$ têm expoente e. Então, o expoente do subgrupo derivado G' é e-limitado.*

Com relação ao *Teorema 3*, ainda não se sabe, se há resultados análogos na suposição de que o grupo V é um p-grupo abeliano elementar, p sendo um primo ímpar. Por outro lado, em 2011, o seguinte resultado relacionado ao *Teorema 3* foi obtido por E. Romano e P. Shumyatsky [24]:

Teorema 4 *Seja G um grupo localmente finito contendo um subgrupo de Klein V com $C_G(V)$ finito. Suponha que V tenha duas involuções distintas v_1 e v_2 tais que os centralizadores $C_G(v_1)$ e $C_G(v_2)$ têm expoentes finitos. Então, G é quase localmente solúvel e o subgrupo derivado $[G, V]'$ tem expoente finito.*

No que segue, $[G, V] = \langle g^{-1}g^{\phi} \mid g \in G \text{ e } \phi \in V\rangle$.

Com relação ao Teorema 4, investigamos a situação em que o centralizador de uma *única* involução em V tem expoente finito. Conseguimos o seguinte resultado:

Teorema A *Seja G um grupo localmente finito contendo um subgrupo de Klein V tal que $C_G(V)$ é finito e $C_G(\phi)$ tem expoente finito para algum $\phi \in V$. Então, G é quase localmente solúvel e $[G, \phi]'$ tem expoente finito.*

Uma consequência do *Teorema A* é que obtemos detalhes a respeito da estrutura do grupo G. Mais precisamente, o grupo G terá uma série normal

$$1 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq G_3 \trianglelefteq G$$

tal que G_1 e G/G_2 têm expoentes finitos, enquanto que G_2/G_1 é abeliano. Mais ainda, G_3 é hiperabeliano e tem índice finito em G, isto é, G é quase hiperabeliano.

Relembre que um grupo G é dito *hiperabeliano* quando ele tem uma série normal ascendente (possivelmente infinita) cujos quocientes são grupos abelianos.

Estudamos também a situação em que um grupo localmente finito G possui um subgrupo isomorfo a S_4, o grupo simétrico de quatro símbolos. Mais precisamente, sejam A, D e V grupos tais que:

(i) A um grupo isomorfo a S_4;
(ii) V o 2-subgrupo maximal normal de ordem 4 de A. Daí, V é um grupo de Klein;
(iii) $D = V\langle\alpha\rangle$ o 2-subgrupo de Sylow de A, com a involução $\alpha \in A\backslash V$. Ele é isomorfo ao grupo diedral de ordem 8.

Obtemos os seguintes resultados:

Teorema B *Seja G um grupo localmente finito contendo um subgrupo isomorfo a D tal que $C_G(V)$ é finito e $C_G(\alpha)$ tem expoente finito. Então, G é quase localmente solúvel e $[G, D]'$ tem expoente finito.*

Teorema C *Seja G um grupo localmente finito contendo um subgrupo isomorfo a A tal que $C_G(V)$ é finito e $C_G(\alpha)$ tem expoente finito. Então, G é quase localmente solúvel e tem expoente finito.*

De modo análogo ao *Teorema A*, uma consequência do *Teorema B* é que o grupo G terá uma série normal

$$1 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq G_3 \trianglelefteq G$$

tal que G_1 tem expoente finito, G/G_2 é finito e G_2/G_1 é abeliano. Mais ainda, G_3 é hiperabeliano e tem índice finito em G.

Esta tese está dividida em dois capítulos. O primeiro capítulo está dividido em seções que tratam dos pré-requisitos necessários da Teoria dos Grupos para um bom entendimento dos principais resultados deste trabalho. Alguns destes pré-requisitos são: grupos solúveis, grupos nilpotentes, grupos localmente finitos, grupos de Chernikov, o Teorema de Schur, condições minimais, automorfismos de grupos, dentre outros. Alguns resultados do primeiro capítulo são demonstrados e outros apenas assumidos, tendo como critério para tal escolha apenas a subjetividade. O segundo capítulo é completamente dedicado às demonstrações dos principais resultados deste trabalho, a saber, os Teoremas A, B e C, bem como os Corolários *A1* e *B1*. Estes tratam de informações a respeito da estrutura do grupo em questão.

CAPÍTULO 1

Conceitos Básicos

A construção deste capítulo foi baseada nas seguintes referências: [3], [6], [13], [22], [25], [34].

1.1 Comutadores

Sejam G um grupo e x, y elementos de G. O elemento

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$$

é chamado o *comutador* dos elementos x e y. Geralmente, denominamos o elemento $x^y = y^{-1}xy$ de *conjugado* de x por y. Reescrevendo o comutador usando o conceito de conjugado, temos: $[x, y] = x^{-1}x^y$. Mais geralmente, dados n elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ em G, definimos o comutador destes elementos de modo recursivo, como segue

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n] = [[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}], x_n]$$

onde por convenção $[x_1] = x_1$.

Comutadores gozam das seguintes propriedades fundamentais:

Lema 1.1.1 *Seja G um grupo com $x, y, z \in G$, quaisquer. Valem:*

1. $[x, y]^{-1} = [y, x]$;
2. $[xy, z] = [x, z]^y[y, z]$ *e* $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$;
3. $[x, y]^z = [x^z, y^z]$;
4. $[x, y, z^x][y, z, x^y][z, x, y^z]] = 1$ *(Identidade de Witt);*

5. $[x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x$ *(Identidade de Hall-Wit).*

Sejam H, K subconjuntos não vazios de um grupo G. Definimos o *subgrupo comutador* dos subconjuntos H, K como sendo

$$[H, K] = \langle [h, k] \mid h \in H, k \in K \rangle.$$

E, indutivamente definimos

$$[H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}, H_n] = [[H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}], H_n]$$

com $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sendo subconjuntos não vazios de G.

O subgrupo $[G, G]$ é chamado o *grupo derivado* de G. Ele também é denotado por G'.

Observação 1.1.2

Temos $[H, K] = [K, H]$ e $[H, K] \trianglelefteq \langle H, K \rangle$. Se H, K são subgrupos normais em G, então $[H, K] \trianglelefteq G$ e $[H, K] \leq H \cap K$. Também teremos $H \trianglelefteq G$ se, e somente se $[H, G] \leq H$. Se φ é um homomorfismo de G, então $[H, K]^\varphi = [H^\varphi, K^\varphi]$. Finalmente, se H, K e L são subgrupos normais em G, então $[HK, L] = [H, L][K, L]$.

Introduziremos agora uma definição análoga aquela do elemento conjugado. Sejam H um subconjunto não vazio de G e K subgrupo de G. Definimos

$$\langle H^K \rangle = \langle h^k \mid h \in H, k \in K \rangle.$$

É claro que $H \subseteq \langle H^K \rangle \trianglelefteq \langle H, K \rangle$. É fácil verificar que $\langle H^K \rangle = \langle H^{\langle H,K \rangle} \rangle$. Chamaremos $\langle H^K \rangle$ de *o fecho normal de H em $\langle H, K \rangle$*. Em particular, para $K = G$, temos o fecho normal de H em G. Esse é o menor subgrupo normal em G contendo H. Ele também é caracterizado por ser a interseção de todos subgrupos normais de G que contêm H. O conceito de fecho normal $\langle H^G \rangle$ será essencial neste trabalho, especialmente no capítulo 2.

Fechos normais têm as seguintes propriedades cujas demonstrações podem ser encontradas em [22, pág.124].

Lema 1.1.3 *Sejam X, Y subconjuntos e H um subgrupo de um grupo G. Valem:*

1. $\langle X^H \rangle = \langle X, [X, H] \rangle$;
2. $\langle [X, H]^H \rangle = [X, H]$;
3. *Se* $H = \langle Y \rangle$, *então* $[X, H] = \langle [X, Y]^H \rangle$;
4. *Se* $L = \langle X \rangle$ *e* $H = \langle Y \rangle$, *então* $[L, H] = \langle [X, Y]^{LH} \rangle$.

1.2 Séries, Grupos Solúveis e Nilpotentes

Iniciaremos com a básica definição de uma série. Dado um grupo G, uma *série* de G é uma sequência

$$1 = H_0 \leq H_1 \leq H_2 \leq H_3 \leq \cdots$$

de subgrupos de G onde cada H_i é subgrupo de seu sucessor.

Os subgrupos H_i são chamados de *termos* da série.

Se existir um número natural n tal que $1 = H_0 \leq H_1 \leq H_2 \leq H_3 \leq \cdots \leq H_n = G$, esse n é chamado de *comprimento da série* e, neste caso, a série é dita de *comprimento finito n*.

Uma série é chamada *própria* se $H_i \neq H_{i+1}$, para todo $i = 0, 1, 2, ...$

Se $H_i \trianglelefteq H_{i+1}$, o grupo quociente H_{i+1}/H_i é chamado um *quociente* da série.

Definiremos algumas importantes séries. Antes, lembremos que o *centro* de um grupo G é o seguinte subgrupo:

$$Z(G) = \{z \in G \mid [z, g] = 1, para\ todo\ g \in G\}$$

Definição 1.2.1 *Uma série* $1 = H_0 \leq H_1 \leq H_2 \leq H_3 \leq \cdots$ *de um grupo G é dita*

1. *subnormal se* $H_i \trianglelefteq H_{i+1}$ *para todo* $i = 0, 1, 2, ...$;
2. *normal se* $H_i \trianglelefteq G$ *para todo* $i = 0, 1, 2, ...$;
3. *central se ela é normal e* $H_{i+1}/H_i \leq Z(G/H_i)$ *para todo* $i = 0, 1, 2, ...$ *(ou equivalentemente* $[H_{i+1}, G] \leq H_i$ *para todo* $i = 0, 1, 2, ...$ *).*

Observação 1.2.2

(a) *Como a normalidade não é transitiva, então a propriedade de um grupo G ter uma série normal é mais forte do que ter uma série subnormal.*

(b) *Não há uma terminologia consistente na literatura, alguns autores chamam nossa série subnormal de normal, e nossa normal de "invariante" ; livros mais antigos usam terminologias distintas.*

Definição 1.2.3 *Um grupo G é dito ser solúvel quando ele possui uma série subnormal de comprimento finito n*

$$1 = H_0 \leq H_1 \leq H_2 \leq H_3 \leq \cdots \leq H_n = G$$

tal que os quocientes H_{i+1}/H_i são abelianos, para todo $i = 0, 1, ..., n$.

Observação 1.2.4

(a) *Quando G é solúvel, a série acima é chamada série solúvel;*

(b) *Quando G é solúvel, o comprimento da menor série solúvel é chamado comprimento derivado de G e será denotado por $dl(G)$;*

(c) *Grupos abelianos são solúveis de comprimento derivado igual a 1.*

Relembremos em alguns Lemas propriedades de grupos solúveis. As demonstrações podem ser achadas em [25, págs. 231,232] e [22, pág. 122].

Lema 1.2.5 *Seja G um grupo , então:*

1. *Se H é subgrupo de G e G é solúvel , então H é solúvel;*
2. *Se $H \trianglelefteq G$ e G é solúvel, então G/H é solúvel;*
3. *Se $H \trianglelefteq G$ com H e G/H solúveis, então G é solúvel;*
4. *Se H, K são subgrupos normais solúveis de G, então HK é solúvel.*

Observação 1.2.6

(a) *Nos itens 1 e 2 do Lema 1.2.5, se G for solúvel de comprimento derivado $dl(G) = k$, então $dl(H) \leq k$ e $dl(G/H) \leq k$;*

(b) *O item 4) do Lema 1.2.5 nos diz que todo grupo finito G tem um único subgrupo normal solúvel maximal chamado de radical solúvel e denotado por $S(G)$. Este é o produto de todos os subgrupos normais solúveis de G. Falaremos um pouco sobre o conceito de radicais na seção 1.6.1.*

Os subgrupos normais minimais têm importantes propriedades em grupos solúveis finitos. Lembre que um grupo G é dito *p-grupo abeliano elementar* (p primo), se G é abeliano e $x^p = 1$ para todo $x \in G$. Destacaremos no Lema a seguir uma propriedade que é essencial neste trabalho. A demonstração podem ser encontrada em [25, pág. 235].

Lema 1.2.7 *Seja G um grupo solúvel finito. Se N for subgrupo normal minimal de G, então ele é um p-grupo abeliano elementar para algum primo p.*

Nesta tese recorreremos muitas vezes ao seguinte Teorema sobre grupos solúveis devido a Feit e Thompson (ver [4]). Antes de enunciá-lo, lembre que um grupo $1 \neq G$ é *simples*, se seus únicos subgrupos normais são 1 e G.

Teorema 1.2.8 (Feit-Thompson) *Qualquer grupo de ordem ímpar é solúvel; equivalentemente, todo grupo finito simples não abeliano tem ordem par.*

Definição 1.2.9 *Um grupo G é dito nilpotente quando ele possui uma série de comprimento finito n*

$$1 = H_0 \leq H_1 \leq H_2 \leq H_3 \leq \cdots \leq H_n = G$$

que é central.

Observação 1.2.10

(a) *Quando G é nilpotente, o comprimento da menor série central é chamado classe de nilpotência de G e será denotado por $cl(G)$;*

(b) *Grupos abelianos são nilpotentes de classe menor do que 1 e grupos nilpotentes são solúveis.*

Em alguns Lemas relembremos propriedades de grupos nilpotentes. As demonstrações podem ser encontradas em [22, pág. 122].

Lema 1.2.11 *Seja G nilpotente, então:*

1. *Se H é subgrupo de G, então H é nilpotente;*
2. *Imagens homomórficas de G são nilpotentes.*

Observação 1.2.12 *No Lema acima, se G for nilpotente de classe $cl(G) = k$, então $cl(H) \leq k$ e $cl(G/H) \leq k$.*

Para grupos nilpotentes vale destacar o Teorema de Fitting, cuja demonstração pode ser vista em [22, pág. 133].

Teorema 1.2.13 (de Fitting) *Se H, K são subgrupos normais nilpotentes de um grupo G com classes m e n, respectivamente, então HK é nilpotente com $cl(HK) \leq m + n$.*

Observação 1.2.14 *O subgrupo gerado por todos os subgrupos normais nilpotentes de um grupo G é chamado de subgrupo de Fitting de G e será denotado por $Fitt(G)$. Quando G é finito, então $Fitt(G)$ é nilpotente, pelo Teorema de Fitting.*

Definiremos agora de maneira indutiva importantes subgrupos de um grupo G.

Definição 1.2.15 *O i-ésimo termo da série central inferior $\gamma_i(G)$ é definido indutivamente por*

$$\gamma_1(G) = G, \quad \gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G]$$

para todo $i = 1, 2, 3, ...$

Definição 1.2.16 *O i-ésimo centro $Z_i(G)$ é definido indutivamente por*

$$Z_0(G) = 1, \quad Z_{i+1}(G) = \{z \in G \mid [z, g] \in Z_i(G), \ para\ todo\ g \in G\}$$

para todo $i = 0, 1, 2, 3, ...$

Definição 1.2.17 *O i-ésimo subgrupo derivado $G^{(i)}$ é definido indutivamente por*

$$G^{(0)} = G, \quad G^{(i)} = [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}]$$

para todo $i = 1, 2, 3, ...$

Observação 1.2.18

(a) *Os subgrupos $\gamma_i(G)$, $Z_i(G)$ e $G^{(i)}$ são todos característicos em G e, portanto, normais em G;*

(b) *Note que $\gamma_2(G) = G^{(1)} = G'$ é o subgrupo derivado de G. Também, $Z_1(G)$ é o centro de G.*

De posse dos subgrupos acima, definiremos as seguintes séries:

Definição 1.2.19

1. *A série central inferior é a série: $G = \gamma_1(G) \trianglerighteq \gamma_2(G) \trianglerighteq \gamma_3(G) \cdots$;*
2. *A série central superior é a série: $1 = Z_0(G) \trianglelefteq Z_1(G) \trianglelefteq Z_2(G) \trianglelefteq \cdots$;*
3. *A série derivada é a série: $G^{(0)} = G \trianglerighteq G^{(1)} \trianglerighteq G^{(2)} \cdots$;*

Se $1 = H_0 \leq H_1 \leq H_2 \leq H_3 \leq \cdots \leq H_n = G$ é qualquer série central de comprimento n de G, então vale:

$$\gamma_{i+1}(G) \leq H_{n-i} \leq Z_{n-i}(G)$$

para $0 \leq i \leq n$.

Os próximos Lemas fornecem caracterizações para a solubilidade e a nilpotência de um grupo G "em função" dos subgrupos $\gamma_i(G)$, $Z_i(G)$ e $G^{(i)}$.

Lema 1.2.20 *Sejam G um grupo e n um inteiro positivo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *G é solúvel com $dl(G) = n$;*
2. *$G^{(n)} = 1$.*

Observação 1.2.21 *G é dito um grupo metabeliano quando $G'' = 1$.*

Lema 1.2.22 *Sejam G um grupo e n um inteiro positivo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *G é nilpotente com $cl(G) \leq n$;*
2. *$\gamma_{n+1}(G) = 1$;*
3. *$Z_n(G) = G$.*

Listaremos nos próximos Lemas algumas propriedades importantes envolvendo os subgrupos $\gamma_i(G)$, $Z_i(G)$ e $G^{(i)}$.

Lema 1.2.23 *Sejam G um grupo e i, j, n inteiros positivos. Valem:*

1. *$[\gamma_i(G), \gamma_j(G)] \leq \gamma_{i+j}(G)$;*
2. *$[\gamma_i(G), Z_j(G)] \leq Z_{j-i}(G)$ se $j \geq i$;*
3. *$\gamma_i(\gamma_j(G)) \leq \gamma_{ij}(G)$;*
4. *$Z_i(G/Z_j(G)) = Z_{i+j}(G)/Z_j(G)$;*
5. *$G^{(i)} \leq \gamma_{2^i}(G)$.*

Observação 1.2.24 *Das informações acima, deduzimos que se G é nilpotente de classe no máximo $2^k - 1$, então G é solúvel e $dl(G) \leq k$.*

Lema 1.2.25 *Sejam G um grupo, N subgrupo normal em G e n um inteiro positivo. Então:*

1. *$\gamma_n(G/N) = \gamma_n(G)N/N$;*
2. *$(G/N)^{(n)} = G^{(n)}N/N$.*

1.3 O Teorema de Schur

O Teorema de Schur é uma poderosa ferramenta empregada na demonstração dos principais resultados desta tese. Pela sua relevância neste trabalho, não só daremos seu enunciado como também apresentaremos uma demonstração baseada em [22, pág. 287].

1.3.1 O Homomorfismo Transfer

Relembremos a definição de um transversal:

Definição 1.3.1 *Sejam G um grupo e H um subgrupo de G. Um transversal T à esquerda (à direita) de H em G é um subconjunto de G que consiste de um elemento em cada classe lateral à esquerda (à direita) de H em G.*

Observação 1.3.2 *Nesse sentido é claro que G é a seguinte união disjunta: $G = \bigcup_{t\in T} tH$ (ou $G = \bigcup_{t\in T} Ht$). Ademais, todo elemento de G pode ser escrito unicamente da forma th (ou ht), $t \in T$ e $h \in H$.*

Sejam G um grupo e H um subgrupo de G tal que $|G : H| = n$. Escolhendo um transversal $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ de H em G, nós temos que $Ht_ix = Ht_{(i)x}$ com $x \in G$, onde a função $i \mapsto (i)x$ é uma permutação do conjunto $\{1, 2, \ldots n\}$. Assim, $t_ixt_{(i)x}^{-1} \in H$ para todo $x \in G$.

Suponha que $\theta : H \to A$ é um homomorfismo de H sobre um grupo abeliano A. Então o *Homomorfismo Transfer* (ou simplesmente o *Transfer*) de θ é a função $\theta^* : G \to A$ definida pela regra

$$\theta^*(x) = \prod_{i=1}^{n} \theta(t_ixt_{(i)x}^{-1})$$

Como A é abeliano, então a ordem dos fatores no produto é irrelevante.

Lema 1.3.3 *O Transfer $\theta^* : G \to A$ é um homomorfismo e não depende da escolha do transversal.*

Demonstração:
Primeiro, mostraremos que $\theta^* : G \to A$ é um homomorfismo. De fato,

$$\begin{aligned}
\theta^*(xy) &= \prod_{i=1}^{n} \theta(t_i xy t_{(i)xy}^{-1}) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \theta(t_i x t_{(i)x}^{-1})\theta(t_{(i)x} y t_{(i)xy}^{-1}) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \theta(t_i x t_{(i)x}^{-1}) \prod_{j=1}^{n} \theta(t_j y t_{(j)y}^{-1}) \\
&= \theta^*(x)\theta^*(y)
\end{aligned}$$

e θ^* é homomorfismo, o que mostra o resultado.

Segundo, se $T' = \{t_1', t_2', \ldots, t_n'\}$ é outro transversal podemos sempre organizar os t_i e os t_i' de modo que $Ht_i = Ht_i'$ e, conseqüentemente, $t_i' = h_i t_i$, com h_i em H. Então, se $x \in G$,

$$Ht_{(i)x} = Ht_i x = Ht_i' x = Ht_{(i)x}'$$

portanto, $t_{(i)x}' = h_{(i)x} t_{(i)x}$ com $h_{(i)x} \in H$. Assim,

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n} \theta(t_i' x t_{(i)x}'^{-1}) &= \prod_{i=1}^{n} \theta(h_i t_i x t_{(i)}^{-1} h_{(i)x}^{-1}) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \theta(h_i)\theta(h_{(i)x}^{-1})\theta(t_i x t_{(i)x}^{-1}) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n} \theta(h_i h_{(i)x}^{-1})\right)\left(\prod_{i=1}^{n} \theta(t_i x t_{(i)x}^{-1})\right)
\end{aligned}$$

Agora, veja que, quando i varia sobre o conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ o mesmo ocorre com $(i)x$ e, daí,

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \theta(h_i h_{(i)x}^{-1})\right) = 1.$$

Mas então,

$$\prod_{i=1}^{n} \theta(t_i' x t_{(i)x}'^{-1}) = \prod_{i=1}^{n} \theta(t_i x t_{(i)x}^{-1})$$

E o transfer não depende do transversal. ■

Lema 1.3.4 *Dado $x \in G$, existem $s_1, s_2, \ldots, s_k \in G$ e $l_1, l_2, \ldots, l_k \in \mathbb{N}$ tais que*

$$\theta^*(x) = \prod_{i=1}^{k} \theta(s_i x^{l_i} s_i^{-1})$$

com $H \leq G$, $|G : H| = n$ e $\sum_{i=1}^{k} l_i = n$.

Demonstração:
Sejam $x, s_1 \in G$ e considere as classes $Hs_1, Hs_1x, Hs_1x^2, \ldots$. Com $Hs_1x^{l_1} = Hs_1$, onde l_1 é o menor inteiro tal que a igualdade ocorre. Considerando $s_2 \neq s_1$, faça o mesmo procedimento anterior com s_2 e seja l_2 o menor inteiro tal que $Hs_1x^{l_2} = Hs_2$. Dessa maneira, teremos

$$Hs_1, Hs_1x, Hs_1x^2, \ldots, Hs_kx^{l_k-1}$$

onde l_k o menor inteiro tal que $Hs_kx^{l_k} = Hs_k$.

Os elementos s_ix^j, com $i = 1, 2, \ldots, k$, $j = 1, 2, \ldots, l_i - 1$ formam um transversal de H.

Como

$$\theta((s_ix)(s_ix)^{-1} \cdots (s_ix^{l_1-1})(s_ix^{l_1-1})^{-1}(s_ix^{l_i}s_i^{-1})) = \theta(s_ix^{l_i}s_i^{-1}),$$

então

$$\theta^*(x) = \prod_{i=1}^{k} \theta(s_i x^{l_i} s_i^{-1})$$

■

Mais um Lema útil para a demonstração do Teorema de Schur é o seguinte:

Lema 1.3.5 *Seja G um grupo finitamente gerado e H um subgrupo de G com o índice $|G : H|$ finito. Então H é finitamente gerado.*

Demonstração:
Seja $G = \langle X \rangle$ onde X é um subconjunto finito. Se $T = \{t_1 = 1, t_2, t_3, \ldots, t_n\}$ é um transversal de H em G, então temos a seguinte união disjunta $G = \bigcup_{t \in T} Ht$.

Sejam $g \in G$ e $Ht_jg = Ht_{(j)g}$. Assim, $t_jg = h(j, g)t_{(j)g}$ $h(j, g) \in H$ dependendo de j e g.

Se g_1 é outro elemento de G, veja que

$$
\begin{aligned}
t_j g g_1 &= (t_j g) g_1 \\
&= h(j,g) t_{(j)g} g_1 \\
&= h(j,g) t_{(j)g} g_1 \\
&= h(j,g) h((j)g, g_1) t_{(j)g g_1}
\end{aligned}
$$

Se g_2 é outro elemento de G teremos:

$$t_j g g_1 g_2 = h(j,g) h((j)g, g_1) h((j)g g_1, g_2) t_{(j)g g_1 g_2}$$

e assim sucessivamente.

Agora, se $a \in H$, então $a = x_1 \cdot x_2 \cdots x_k$, com $x_i \in X \cup X^{-1}$, pois $G = \langle X \rangle$. Usando o argumento acima, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
a &= t_1 a \\
&= t_1 x_1 \cdot x_2 \cdots x_k \\
&= h(1, x_1) h((1)x_1, x_2) h((1)x_1 x_2, x_3) \cdots h((1)x_1 \cdot x_2 \cdots x_{k-1}, x_k) t_{(1)x_1 \cdot x_2 \cdots x_k} \\
&= h(1, x_1) h((1)x_1, x_2) h((1)x_1 x_2, x_3) \cdots h((1)x_1 \cdot x_2 \cdots x_{k-1}, x_k) t_{(1)a}
\end{aligned}
$$

Mas, $H = Ht_1 a$, pois, $t_1 = 1$ e $a \in H$. Portanto, $t_{(1)a} = 1$, visto que $t_{(1)a}$ e 1 pertencem a $T = \{t_1 = 1, t_2, \cdots, t_n\}$. Logo,

$$a = h(1, x_1) h((1)x_1, x_2) h((1)x_1 x_2, x_3) \cdots h((1)x_1 \cdot x_2 \cdots x_{k-1}, x_k).$$

Concluímos que H é gerado por um número finito de $h(i, x)$, com $1 \leq i \leq n$ e $x \in X \cup X^{-1}$. ■

Lema 1.3.6 (Schur) *Seja G um grupo e $H \leq Z(G)$ tal que $|G : H| = n$. Então, o Homomorfismo Transfer da função $\theta : H \to H$ dada por $\theta(h) = h$, para todo $h \in H$ é a função $\theta^* : G \to H$ dada por $\theta^*(x) = x^n$.*

Demonstração:
Usando o Lema e o fato de que θ é a identidade de H , podemos escrever

$$\theta^*(x) = \prod_{i=1}^{k} s_i x^{l_i} s_i^{-1}$$

Como $Hs_i x^{l_i} = Hs_i$, então, $s_i x^{l_i} = z_i s_i$, $z_i \in H \leq Z(G)$. Assim, $x^{l_i} = s_i^{-1} z_i s_i = z_i$ portanto $x^{l_i} \in H \subseteq Z(G)$.

Logo,

$$\theta^*(x) = \prod_{i=1}^{k} s_i x^{l_i} s_i^{-1} = \prod_{i=1}^{k} x^{l_i}.$$

Como,

$$\sum_{i=1}^{k} l_i = n,$$

então, $\theta^*(x) = x^n$. Finalmente, o Lema 1.3.3 nos garante que o Transfer é um homomorfismo. ■

Teorema 1.3.7 (de Schur) *Se $G/Z(G)$ tem ordem finita n, então o subgrupo derivado G' é finito e $(G')^n = 1$.*

Demonstração:
Seja $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ um transversal. Como $G/Z(G)$ é finito, então

$$G/Z(G) = \{t_1 Z(G), t_2 Z(G), \ldots, t_n Z(G)\}.$$

Afirmamos que $G' = \langle [t_i, t_j] \; ; \; 1 \leq i, j \leq n \rangle$. De fato, $G = \bigcup_{i=1}^{n} t_i Z(G)$. Sejam $x, y \in G$, então $x = t_i z_i$, $y = t_j z_j$, com $t_i, t_j \in T$ e $z_i, z_j \in Z(G)$. Assim ,

$$\begin{aligned} [x, y] &= [t_i z_i, t_j z_j] \\ &= z_i^{-1} t_i^{-1} z_j^{-1} t_j^{-1} t_i z_i t_j z_j \\ &= t_i^{-1} t_j^{-1} t_i t_j \\ &= [t_i, t_j] \end{aligned}$$

Da Afirmação acima segue que G' é finitamente gerado. Por outro lado, pelo Lema de Schur, a função $\varphi^* : G \to Z(G)$ dado por $\varphi^*(x) = x^n$ é o Homomorfismo

Transfer de $\varphi : Z(G) \to Z(G)$ dado por $\varphi(z) = z$, para todo $z \in Z(G)$. Portanto, pelo Teorema dos Homomorfismos temos:

$$G/Nuc(\varphi^*) \cong \varphi(G) \leq Z(G)$$

Assim, $G/Nuc(\varphi^*)$ é abeliano e, portanto, $G' \leq Nuc(\varphi^*)$. Logo, para todo $g \in G' \leq Nuc(\varphi^*)$, temos $\varphi^*(g) = g^n = 1$, isto é, G' é de torção.

Mostraremos agora que G' é finito. Naturalmente, $G' \cap Z(G)$ é abeliano. Como

$$G'/G' \cap Z(G) \cong Z(G)G'/Z(G)$$

e, por hipótese, $|G : Z(G)|$ é finito, então $|G' : G' \cap Z(G)| = |Z(G)G' : Z(G)|$ é finito. Por outro lado, G' é finitamente gerado (e de torção) e $|G' : G' \cap Z(G)|$ é finito, então pelo Lema 1.3.5 $G' \cap Z(G)$ é finitamente gerado. Além disso, $G' \cap Z(G)$ é de torção, pois $G' \cap Z(G) \subseteq G'$ que o é. Mas então, pelo teorema dos grupos abelianos finitamente gerados, segue que $G' \cap Z(G)$ é finito. Finalmente, concluímos que $|G'| = |G' \cap Z(G)| \cdot |G' : G' \cap Z(G)|$ é finito. ■

1.4 O Teorema de Schur-Zassenhaus

O Teorema de Schur-Zassenhaus é muito útil neste trabalho. Ele será usado na demonstração de um resultado sobre ações coprimas, vista na seção 1.8.

Teorema 1.4.1 *Sejam G um grupo finito e N um subgrupo normal em G tal que $(|N|, |G : N|) = 1$. Então:*

1. *N tem um complemento em G, isto é, existe K subgrupo de G tal que $G = KN$ e $K \cap N = 1$;*
2. *Se K e J são complementos de N em G, então existe $g \in G$ tal que $J = K^g$.*

Observação 1.4.2

(a) *Se $(|N|, |G : N|) \neq 1$ o Teorema 1.4.1 pode falhar. Por exemplo, $G = \langle x \rangle$ com $|G| = 4$. Veja que $\langle x^2 \rangle$ não tem complemento;*

(b) *Se N não for normal mesmo quando $(|N|, |G : N|) = 1$ o Teorema 1.4.1 pode falhar. Tome $G = A_5$ e N um 3-subgrupo de Sylow de G. Então $|N| = 3$ mas G não possui subgrupo de ordem 20;*

(c) *No grupo de Klein $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, todo subgrupo tem um complemento uma vez que ele é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}_2$;*

(d) *Um complemento não precisa ser único. Tome S_3 e o subgrupo alternado A_3. Todo subgrupo de ordem 2 é um complemento de A_3 em S_3.*

Daremos uma outra formulação para o Teorema de Schur-Zassenhaus, para isso precisamos de algumas definições. Antes, sejam π um subconjunto não vazio de números primos e π' o complementar de π em relação ao conjunto de todos os números primos $\mathbb{P}$.

Definição 1.4.3

1. *Seja G um grupo finito. Então G é dito um π-grupo quando todo primo que divide a ordem de G pertence a π;*
2. *Um subgrupo H de G é dito um π-subgrupo de Hall de G quando ele é π-subgrupo e $(|H|, |G : H|) = 1$.*

Observação 1.4.4

(a) *Para um determinado subconjunto de primos π, um π-subgrupo de Hall pode não existir. Por exemplo, tome $G = A_5$ e $\pi = \{3, 5\}$. Neste caso, um $\{3, 5\}$-subgrupo de Hall de G deveria ter índice 4, o que não ocorre;*

(b) *Se um π-subgrupo de Hall H de G tem um complemento, então este é um π'-subgrupo de Hall de G;*

(c) *Se G possui um π-subgrupo de Hall H e um π'-subgrupo de Hall K, então K é um complemento de H em G e vice-versa;*

(d) *Quando $\pi = \{p\}$, então um π-subgrupo de Hall H é um p-subgrupo de Sylow de G. Nesse caso, pelo Teorema de Sylow, sempre existirá π-subgrupo de Hall em G.*

Vamos a uma outra formulação para o Teorema de Schur-Zassenhaus:

Teorema 1.4.5 *Sejam G um grupo finito e N um π-subgrupo de Hall que é normal em G. Então:*

1. *G possui π'-subgrupo de Hall K que é um complemento de H em G;*
2. *Se N ou G/N é solúvel, quaisquer dois π'-subgrupo de Hall de G são conjugados em G.*

Pelo Teorema de Feit-Thompson a solubilidade dos grupos N ou G/N no Teorema acima pode ser removida.

1.5 Grupos Periódicos

Um grupo G é dito *periódico* (ou de *torsão*) quando todos os seus elementos têm ordem finita. Se existir um menor inteiro positivo n tal que $x^n = 1$ para todo x em G, então dizemos que G é de *expoente finito* n. O expoente de um grupo G será denotado por $exp(G)$. Obviamente, um grupo finito tem expoente finito e um grupo com expoente finito é um grupo periódico. Por outro lado, se apenas a identidade de G tem ordem finita, então G é chamado *livre de torção.*

Observação 1.5.1

(a) *Um grupo G é periódico se, e somente se, $\langle x \rangle$ é finito para todo x em G;*

(b) *Claro que há grupos periódicos infinitos. Tome $G = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots) \mid x_i \in \mathbb{Z}_2\}$;*

(c) *Grupos periódicos não precisam ter expoente finito. Tome*

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \left\{ \frac{m}{n} + \mathbb{Z} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}.$$

Um Lema elementar relativo a expoente mas bastante útil neste trabalho é o seguinte:

Lema 1.5.2 *Sejam G um grupo e N um subgrupo normal de G tais que $exp(N) = k$ e $exp(G/N) = l$, então $exp(G) \leq kl$.*

Demonstração:
Para todo $x \in G$ temos que $(x^l)^k = 1$, uma vez que $x^l \in N$. ■

Destacaremos agora nosso objeto central de estudo, a saber: os grupos localmente finitos.

Definição 1.5.3 *Um grupo é localmente finito quando todo subgrupo finitamente gerado é finito.*

É fácil ver que todo grupo finito é localmente finito. Também, grupos localmente finitos são periódicos. Quando estudamos grupos localmente finitos, seus subgrupos finitos requerem uma atenção especial.

Definição 1.5.4 *Seja G um grupo (não necesssariamente localmente finito). Um conjunto de subgrupos $\sum$ do grupo G é chamado um sistema local para G, se:*

(i) $G = \bigcup\{H \mid H \in \sum\}$;

(ii) *Para todo par $E, F \in \sum$, existe um subgrupo $H \in \sum$ de G tal que $E, F \subseteq H$.*

Em particular, se G é um grupo localmente finito então o conjunto de todos os subgrupos finitos de G formam um sistema local para G. Ademais, grupos localmente finitos que são enumeráveis são bem caracterizados em termos de sistemas locais, como mostra o

Lema 1.5.5 *Seja G um grupo. Então, G localmente finito e enumerável se, e somente se, existe um sistema local $\sum$ consistindo de subgrupos finitos e que são totalmente ordenados pela inclusão.*

Demonstração:
Seja G localmente finito e enumerável. Então, $G = \{g_1, g_2, ...\}$. Consideremos $G_n = \langle g_1, g_2, ..., g_n\rangle$. Então, G_n é finito e $G_n \leq G_{n+1}$, para todo natural $n \geq 1$. Claramente $G = \bigcup_{n\geq 1} G_n$ e, daí, $\{G_n \mid n \geq 1\}$ forma um sistema local para G. Reciprocamente, se G possui um tal sistema local $\sum$, então $G = \bigcup_{H\in\sum} H$ e ele é claramente localmente finito. Mais ainda, G é enumerável uma vez que $\sum$ tem uma

sequência bem ordenada de grupos finitos. ■

Nas demonstrações dos principais resultados deste trabalho, faremos o uso do seguinte Teorema devido a Mann (ver [20]): "*Seja G um grupo tal que $G/Z(G)$ é localmente finito e tem expoente n. Então G' é localmente finito e tem expoente finito o qual é n-limitado*".

Embora não apresentemos a demonstração desse resultado, gostaríamos de não perder a oportunidade de demonstrá-lo numa situação particular. Além do que, como neste momento do trabalho estamos no "ambiente localmente finito" é oportuna sua apresentação. Embora tal caso particular seja uma consequência do Teorema de Schur, vamos destacá-lo como um:

Teorema 1.5.6 *Seja G um grupo solúvel. Suponha que $G/Z(G)$ é localmente finito e tem expoente n. Então G' é localmente finito e tem expoente finito.*

Demonstração:
Primeiro mostraremos que G' é localmente finito. Com efeito, seja $H = \langle x_1, x_2, \ldots, x_k\rangle \leq G'$ e mostraremos que H é finito. Como $H \leq G'$, então cada x_i, $1 \leq i \leq k$ se escreve como $x_i = \prod_{j=1}^{r=1} z_{ji}$ onde $z_{ji} = [a_{ji}, b_{ji}]$, com $1 \leq i \leq k$. Seja $K = \langle a_{ji}, b_{ji} | 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq r\rangle$. Desta forma, $H \leq K'$. Como K é finitamente gerado e $G/Z(G)$ é localmente finito, então $KZ(G)/Z(G)$ é finito. Mas $K \cap Z(G) \leq Z(K)$, logo $K/Z(K)$ é finito. Pelo Teorema de Schur segue que K' é finito e, portanto, H é finito como queríamos.

Agora, mostraremos que G' tem expoente finito. Realmente, sejam a, b quaisquer elementos em G e considere $N = \langle a, b\rangle$. Usando que $N \cap Z(G) \leq Z(N)$ e $G/Z(G)$ tem expoente n, então $N/Z(N)$ tem expoente n-limitado. Daí, $N/Z(N)$ é um grupo solúvel, finitamente gerado e de torção, donde, finito. Pelo Teorema de Schur, temos que N' tem ordem limitada. Assim, $o([a, b])$ é limitada. Desde que todo quociente $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ é gerado por elementos da forma $[a, b]$ para todo $i = 1, 2, 3, ..., dl(G) - 1$, então o expoente de $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ é limitado para todo $i = 1, 2, 3, ..., dl(G) - 1$. Portanto, G' tem expoente limitado. ■

Um grupo localmente finito (infinito) importante neste trabalho é o *p-grupo quasecíclico*, denotado por C_{p^∞}, onde p é um primo. Em termos de geradores e relações temos a seguinte caracterização para C_{p^∞} :

$$C_{p^\infty} \cong \langle x_i \mid x_{i+1}^p = x_i, x_1^p = 1, i = 1, 2, ..., \rangle.$$

Este grupo também surge mais concretamente; ele pode ser pensado como as p-ésimas raízes complexas da unidade, ou como o conjunto dos elementos de ordens potências de p no grupo abeliano aditivo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Todo subgrupo próprio de C_{p^∞} é cíclico e finito. De acordo com o isomorfismo descrito anteriormente, pode-se ver que C_{p^∞} não tem expoente finito. Mais ainda, o produto direto de grupos C_{p^∞} é localmente finito.

Já sabemos que grupos localmente finitos são periódicos. Será que vale a recíproca? A recíproca está relacionada com os chamados problemas de Burnside. Discorreremos um pouco sobre eles na próxina subseção, que foi baseada na tese de doutorado de J. Caldeira (ver [33] para maiores detalhes históricos).

1.5.1 Os Problemas de Burnside

1) O Problema Geral de Burnside

Em 1902, William Burnside, em seu trabalho entitulado "On an unsettled question in theory of descontinuous", levantou o seguinte problema:

É verdade que todo grupo periódico é localmente finito?

Equivalentemente:

É verdade que todo grupo periódico finitamente gerado é finito?

Esta questão ficou conhecida como *O Problema Geral de Burnside* e permaneceu em aberto por algum tempo, até que em 1964 Golod apresentou um contra-exemplo: constrói para todo primo p e todo $d \geq 2$ um p-grupo infinito, d-gerado, tal que todo subgrupo $(d-1)$-gerado é finito. Esta foi a primeira resposta negativa para o Problema Geral de Burnside. Outros contra-exemplos foram surgindo por meio de diferentes técnicas.

2) O Problema de Burnside

Seja F_m o grupo livre com m geradores e seja $N = \langle x^n \mid x \in F_m \rangle$. Posto isto, o *Grupo Livre de Burnside* m-gerado e de expoente n é definido como

$$B(m,n) = F_m/N.$$

As seguintes questões (equivalentes) ficaram conhecidas como *O Problema de Burnside*:

(i) É verdade que todo grupo de expoente n é localmente finito?

(ii) É verdade que todo grupo de expoente n, finitamente gerado é finito?

(iii) $B(m,n)$ é finito?

Note que $B(1,n)$ e $B(m,2)$ são ambos finitos, pois o primeiro é um grupo cíclico de ordem n e o segundo é um 2-grupo abeliano elementar. Burnside demonstrou em 1902 que $B(m,3)$ é finito. Sanov em 1940 demonstrou que $B(m,4)$ é finito e em 1958, M. Hall mostrou a finitude de $B(m,6)$. São problemas em aberto as finitudes de $B(m,5)$, $B(m,8)$, $B(m,9)$ e $B(m,12)$.

A resposta para O Problema de Burnside é também negativa e o primeiro contra-exemplo apareceu com Novikov e Adian em 1968, num trabalho onde demonstraram que para todo $n \geq 4381$, n ímpar, e para todo $m > 1$, existe um grupo infinito m-gerado e de expoente n. Em 1975, Adian melhora este último resultado considerando $n \geq 665$, n ímpar. Outros resultados neste sentido foram obtidos por Olshanskii, que construi um grupo que ficou conhecido como *Mostro de Tarsky* (grupo infinito não abeliano onde todo subgrupo próprio tem ordem prima p, com p suficientemente grande). Em 1982 ele usou as mesmas técnicas da construção do Mostro de Tarsky para dar uma demonstração de que $B(m,n)$ é infinito para $n > 10^{10}$, n ímpar; Ivanov em 1992 mostrou que $B(m,n)$ é infinito para todo $m > 1$ e n suficientemente grande, a saber, $n \geq 2^{48}$; Lysënok apresentou solução negativa para $n \geq 8000$, n divisível por 16.

Muitos pesquisadores se dedicam a investigação da finitude ou não de $B(m,n)$ para certos valores de m e n.

3) O Problema Restrito de Burnside

Um grupo G é dito *residualmente finito* se para todo $1 \neq g \in G$ existe um subgrupo normal N_g de G tal que $g \notin N_g$ e G/N_g é finito. Posto isso, as seguintes questões (equivalentes) ficaram conhecidas como *O Problema Restrito de Burnside*:

(i) É verdade que todo grupo finito, m-gerado e de expoente n tem sua ordem limitada por uma função que depende apenas de m e n?

(ii) $B(m,n)$ possui apenas um número finito de subgrupos de índice finito?

(iii) É verdade que todo grupo residualmente finito de expoente n é localmente finito?

O Problema Restrito de Burnside foi respondido afirmativamente em 1989 com um trabalho premiado de Zelmanov [35, 36]. Em 1956, P. Hall e G. Higman [7] apresentaram importantíssimos resultados relacionados com este problema, onde reduziram o Problema Restrito de Burnside ao caso de grupos com expoente potência de primo e obtêm, assim, contribuições importantes para uma resposta positiva. Em 1959, A.I.Kostrikin apresentou uma solução parcial, demonstrando o caso em que o expoente do grupo é um número primo. Suas discussões basearam-se em um profundo estudo de álgebras de Lie de característica prima com condição de Engel.

1.6 Classes de Grupos

A seguinte definição de classe de grupos é baseada na referência [22].

Uma *classe de grupos* $\mathcal{X}$ é uma classe (não é um conjunto) cujos seus membros são grupos e que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\mathcal{X}$ contém um grupo de ordem 1;
(ii) se $H \cong G \in \mathcal{X}$, então $H \in \mathcal{X}$.

Exemplos de classes de grupos são: a classe de todos os grupos, todos os grupos finitos, todos os grupos abelianos.

Se $\mathcal{X}$ é uma classe de grupos, então $s\mathcal{X}$ e $q\mathcal{X}$ denotarão, respectivamente, a classe de todos os grupos que são isomorfos a um subgrupo de um grupo $G \in \mathcal{X}$, e a classe de todos os grupos que são imagens homomórficas de um grupo $G \in \mathcal{X}$.

Uma classe $\mathcal{X}$ é dita *fechada para subgrupos* quando $\mathcal{X} = s\mathcal{X}$ e, *fechada para quocientes* quando $\mathcal{X} = q\mathcal{X}$. Uma classe $\mathcal{X}$ é dita *fechada para extensões* se $N, G/N \in \mathcal{X}$ com $N \trianglelefteq G$, implicar que $G \in \mathcal{X}$. Uma classe $\mathcal{X}$ é dita N_0-*fechada* se N, H são subgrupos normais de G, com $N, H \in \mathcal{X}$, implicar que $NH \in \mathcal{X}$. Em particular, a classe de todos os grupos solúveis é N_0-fechada. Note que qualquer classe $\mathcal{X}$ de grupos que é fechada para quocientes e extensões será N_0-fechada também. Mais geralmente, $\mathcal{X}$ é dita N-*fechada* se $\{N_i\}_{i\in I}$ for uma família de subgrupos normais de um grupo G com $N_i \in \mathcal{X}$ para todo $i \in I$, então $\prod_{i\in I} N_i \in \mathcal{X}$, onde $\prod_{i\in I} N_i$ é o produto de todos os subgrupos normais N_i.

Seja $\mathcal{X}$ uma classe de grupos. Dizemos que um grupo G é *localmente*-$\mathcal{X}$ se todo subgrupo finitamente gerado de G pertence a $\mathcal{X}$. Se, por exemplo, $\mathcal{X}$ for a classe de todos os grupos finitos, então G é localmente finito se, e somente se, para todo subgrupo H de G com H finitamente gerado implicar $H \in \mathcal{X}$.

Dizemos que um grupo G é *quase*-$\mathcal{X}$ se G tem um subgrupo H de índice finito (em G) tal que $H \in \mathcal{X}$. Note que se $G \in \mathcal{X}$, então G é quase-$\mathcal{X}$, pois $|G : G| = 1$.

Destacaremos neste trabalho, dois tipos importantes de grupos: *grupo periódico localmente solúvel* e *grupo periódico quase localmente solúvel*.

Nosso objetivo agora é apresentar algumas propriedades de grupos periódicos localmente finitos, localmente solúveis e grupos quase localmente solúveis.

Lema 1.6.1 *A classe $\mathcal{X}$ formada por todos os grupos periódicos é fechada para subgrupos, quocientes e extensões.*

Demonstração:
Fechada para subgrupo: sejam $G \in \mathcal{X}$ e $H \leq G$. Como todo elemento de G tem ordem finita, em particular, os elementos de H, então $H \in \mathcal{X}$. Fechada para quocientes: sejam $G \in \mathcal{X}$ e ϕ um homomorfismo de G. Uma vez que a ordem de $\phi(x)$ divide a ordem de x para todo $x \in G$, então $\phi(G) \in \mathcal{X}$. Finalmente, $\mathcal{X}$ é fechada para extensões: seja $N \trianglelefteq G$ com ambos N e G/N em $\mathcal{X}$. Seja $x \in G$ qualquer. Desde que $G/N \in \mathcal{X}$, então $x^k \in N$ para algum inteiro positivo k e, uma vez que $N \in \mathcal{X}$, então $x^{kj} = 1$ para algum inteiro positivo j. Portanto, $G \in \mathcal{X}$ como queríamos. ■

Lema 1.6.2 *A classe $\mathcal{X}$ formada por todos os grupos localmente finitos é fechada para subgrupos, quocientes e extensões.*

Demonstração:
Fechada para subgrupo: sejam $G \in \mathcal{X}$, $H \leq G$ e K um subgrupo finitamente gerado de H. Então K um é subgrupo finitamente gerado de G. Mas $G \in \mathcal{X}$, então K é finito, daí segue-se que $H \in \mathcal{X}$.

Fechada para quocientes: sejam $G \in \mathcal{X}$, ϕ um homomorfismo de G e H subgrupo finitamente gerado de $\phi(G)$. Daí, $H = \langle \phi(h_1), \phi(h_2), \ldots, \phi(h_i) \rangle = \phi(\langle h_1, h_2, \ldots, h_i \rangle)$, com $h_j \in G$, $1 \leq j \leq i$. Como $G \in \mathcal{X}$ então $\langle h_1, h_2, \ldots, h_i \rangle$ é finito e, assim, H é finito. Logo, $\phi(G) \in \mathcal{X}$.

Fechada para extensões: seja $N \trianglelefteq G$ com ambos N e G/N em $\mathcal{X}$. Seja H um subgrupo finitamente gerado de G e mostremos que ele é finito. Temos HN/N finito, pois $G/N \in \mathcal{X}$. Daí, $|H : H \cap N|$ é finito. Agora, usando o Lema 1.3.5 segue que $H \cap N$ é finitamente gerado, logo finito dado que $N \in \mathcal{X}$. Portanto, $G \in \mathcal{X}$ e a demonstração está completa. ■

Lema 1.6.3

1. *Todo grupo periódico localmente solúvel é localmente finito;*
2. *Todo grupo periódico quase localmente solúvel é localmente finito.*

Demonstração:

1) Sejam G periódico localmente solúvel e H um subgrupo finitamente gerado de G. Então H é um grupo periódico e solúvel. Logo, existe uma série

$$1 = H_0 \leq H_1 \leq H_2 \leq H_3 \leq \cdots \leq H_{s-1} \leq H_s = H$$

tal que os quocientes H_{i+1}/H_i são abelianos, para todo $i = 0, ..., s-1$. Como H_s/H_{s-1} é grupo abeliano periódico finitamente gerado, então ele é finito. Pelo Lema 1.3.5, segue que H_{s-1} é finitamente gerado. Por indução sobre s, H_{s-1} é finito. Mas então, G é localmente finito.

2) Seja G periódico quase localmente solúvel, então existe subgrupo M tal que o índice $|G : M|$ é finito e M é localmente solúvel. Pelo item 1) temos que M é localmente finito. Agora o resultado segue do Lema 1.6.2. ■

Proposição 1.6.4 *A classe de todos os grupos periódicos localmente solúveis é N_0-fechada.*

Demonstração:
É suficiente mostrar que a classe de todos os grupos periódicos localmente solúveis é fechada para extensões. Assim, seja G um grupo contendo um subgrupo normal N tal que ambos N e G/N são periódicos localmente solúveis. Claramente G é periódico. Se H é um subgrupo finitamente gerado de G, então HN/N é um grupo solúvel finitamente gerado e, assim, $H/H \cap N$ é finito pelo Lema 1.6.3. Agora, pelo Lema 1.3.5, segue que $H \cap N$ é finitamente gerado (e solúvel). Logo, por hipótese, concluímos que $H \cap N$ é finito. Assim, H é um grupo solúvel finito, daí segue-se que G é localmente solúvel, como queríamos. ■

1.6.1 Radicais e Resíduos

Seja $\mathcal{X}$ é uma classe de grupos. Definimos o *radical-$\mathcal{X}$* de um grupo G como sendo o produto de todos os subgrupos normais de G que pertencem a classe $\mathcal{X}$. Se tais subgrupos normais não existem, então o radical-$\mathcal{X}$ será definido como o grupo trivial. Denotaremos o radical-$\mathcal{X}$ de um grupo G por $G_{\mathcal{X}}$; assim, $G_{\mathcal{X}} = \Pi\{N \trianglelefteq G \mid N \in \mathcal{X}\}$. É fácil verificar que $G_{\mathcal{X}}$ é sempre subgrupo característico de G. A situação mais interessante é o caso em que $G_{\mathcal{X}}$ pertença a $\mathcal{X}$, uma vez que neste caso, G conterá um único $\mathcal{X}$-subgrupo normal maximal. Certamente, em geral $G_{\mathcal{X}}$ não precisa pertencer a $\mathcal{X}$; por exemplo, um produto direto (infinito) de grupos solúveis não precisa ser solúvel. Se $\mathcal{X}$ for a classe de todos os grupos nilpotentes finitos e G for finito, então $G_{\mathcal{X}} \in \mathcal{X}$ pois, neste caso, $G_{\mathcal{X}}$ nada mais é do que o $Fitt(G)$. Por outro lado, pela Proposição 1.6.4 todo grupo localmente finito tem um radical localmente solúvel, o qual é novamente localmente solúvel.

De maneira completamente análoga, se $\mathcal{X}$ é uma classe de grupos, então o *residual*-$\mathcal{X}$ de um grupo G é definido por

$$G^{\mathcal{X}} = \bigcap \{N \trianglelefteq G \mid G/N \in \mathcal{X}\}.$$

Também $G^{\mathcal{X}}$ será subgrupo característico de G. Em geral $G/G^{\mathcal{X}}$ não precisa pertencer a $\mathcal{X}$. Por exemplo, se $\mathcal{X}$ é a classe de todos os grupos finitos, então $G/G^{\mathcal{X}}$ não precisa ser finito. Similar ao que acontece com $G_{\mathcal{X}}$, se $G/G^{\mathcal{X}} \in \mathcal{X}$, então este é o menor subgrupo normal de G com quociente em $\mathcal{X}$.

Lema 1.6.5 *Suponha que $\mathcal{X}$ é uma classe de grupos que é fechada para subgrupos e N-fechada. Se $H \leq G$, então $H \cap G_{\mathcal{X}} \leq H_{\mathcal{X}}$ com a igualdade ocorrendo se $H \trianglelefteq G$. Se $\mathcal{X}$ é também fechada para quocientes e $H \trianglelefteq G$, então $G_{\mathcal{X}}H/H \leq (G/H)_{\mathcal{X}}$*

Demonstração: $G_{\mathcal{X}} \in \mathcal{X}$, pois $\mathcal{X}$ é N-fechada. Daí, $H \cap G_{\mathcal{X}} \in \mathcal{X}$, pois $\mathcal{X}$ é subgrupo fechada. Uma vez que $H \cap G_{\mathcal{X}} \trianglelefteq H$ temos que $H \cap G_{\mathcal{X}} \leq H_{\mathcal{X}}$. Se $H \trianglelefteq G$, então $H_{\mathcal{X}} \leq G_{\mathcal{X}}$ e a igualdade segue. Seja $H \trianglelefteq G$ e considere o homomorfismo $\phi : G \to G/H$. Como agora $\mathcal{X}$ é também fechada para quocientes, então $G_{\mathcal{X}}H/H \in \mathcal{X}$. Juntando com o fato de que $G_{\mathcal{X}}$ é normal em G, o resultado segue. ■

Observação 1.6.6

(a) *Sejam π um subconjunto não vazio de números primos e $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$, onde $\mathbb{P}$ é o conjunto dos números primos. Denotaremos por $\mathcal{X}_\pi$ a classe de todos os π-grupos. Como o produto de um número arbitrário de π-subgrupos normais de um grupo é novamente um π-grupo, então todo grupo G localmente finito contém um único π-subgrupo normal maximal, que é o radical-$G_{\mathcal{X}_\pi}$. Neste caso, vamos denotá-lo por $O_\pi(G)$. Em particular, quando $\pi = \{2\}$, escreveremos $O(G)$ no lugar de $O_{\pi'}(G)$.*

(b) *Pelo Lema 1.6.5, segue que para cada subgrupo H de G tem-se $H \cap O_\pi(G) \leq O_\pi(H)$ e $H \cap O_\pi(G) = O_\pi(H)$ se, e somente se, $H \trianglelefteq G$.*

1.7 A Condição Minimal, Grupos de Chernikov e Grupos com min-p

Nesta seção apresentaremos mais ferramentas que desempenharão um papel considerável neste trabalho. São elas: grupos com condição minimal, grupos de Chernikov e grupos com min-p, p um número primo. Veremos como estes conceitos se relacionam com os de grupos localmente finitos a fim de produzir resultados úteis para demonstração dos principais Teoremas deste trabalho.

1.7.1 A Condição Minimal Sobre Subgrupos

Há muitas propriedades de grupos infinitos que são motivadas por aquelas dos grupo finitos. Tais "condições de finitude" têm desempenhado um papel extremamente essencial na teoria dos grupos. A condição minimal sobre subgrupos é uma delas.

Definição 1.7.1 *Um grupo G é dito ter a condição minimal sobre subgrupos (ou G satisfaz min) se todo conjunto não vazio de subgrupos de G, parcialmente ordernados pela inclusão, tem um elemento minimal.*

Observação 1.7.2 *Certamente, todos os grupos finitos têm condição minimal sobre subgrupos. Também, para cada primo p, o p-grupo quasecíclico C_{p^∞} satisfaz min uma vez que seus subgrupos próprios são finitos.*

No que segue, denotaremos a classe de todos os grupos satisfazendo min por $\mathcal{X}_{min}$. O próximo Teorema dará uma importante caracterização para grupos em $\mathcal{X}_{min}$. Tal caracterização evidencia a condição de finitude que está por trás da definição acima. Antes, precisamos da seguinte definição:

Definição 1.7.3 *Um grupo G satisfaz a* condição de cadeia descendente *(ou satisfaz c.c.d) para subgrupos se toda sequência descendente de subgrupos*

$$H_1 \geq H_2 \geq H_3 \geq \cdots$$

em G é finita, isto é, existe um inteiro positivo n tal que $H_n = H_k$ para todo $k \geq n$.

Observação 1.7.4 *Grupos cíclicos infinitos não satisfazem c.c.d, também o grupo dos racionais $\mathbb{Q}$. Por outro lado, o p-grupo quasecíclico C_{p^∞} satisfaz c.c.d.*

A caracterização ora informada anteriormente é a seguinte:

Teorema 1.7.5 *Um grupo G tem min se, e somente se, ele satisfaz c.c.d.*

Demonstração:
Suponha que G tem min e que

$$H_1 \geq H_2 \geq H_3 \geq \cdots$$

é uma sequência descendente de subgrupos de G. Seja $\mathcal{S} = \{H_i \leq G \mid i \in I\}$. Então, existe um elemento minimal $H_k \in \mathcal{S}$, para algum inteiro positivo k. Como $H_k \geq H_{k+j}$ para todo $j \geq 1$, segue que $H_k = H_{k+j}$. Reciprocamente, suponha que G satisfaz c.c.d e seja $\mathcal{S} = \{H_i \mid i \in I\}$ um conjunto não vazio de subgrupos parcialmente ordenado pela inclusão de G. Se $H_1 \in \mathcal{S}$ não é minimal, então existe $H_2 \in \mathcal{S}$ para o qual $H_1 > H_2$. Se $H_2 \in \mathcal{S}$ não é minimal, então existe $H_3 \in \mathcal{S}$ para o qual $H_1 > H_2 > H_3$. Esse procedimento leva a contrução de uma sequência descendente de subgrupos que deve ser finita uma vez que G satisfaz $c.c.d$. Portanto, $\mathcal{S}$ deve ter um elemento minimal. ∎

Colorário 1.7.6 *Todo grupo satisfazendo min é periódico.*

Demonstração:
Suponha que G é um grupo não periódico satisfazendo min. Seja $x \in G$ de ordem infinita. Logo, a sequência descendente de subgrupos

$$\langle x \rangle > \langle x^2 \rangle > \langle x^4 \rangle > \cdots > \langle x^{2^n} \rangle > \cdots$$

não pode ser finita. Contradição pelo Teorema 1.7.5. ■

Observação 1.7.7 *Fica claro do Corolário acima que grupos com min não têm subgrupos isomorfos a* $\mathbb{Z}$.

Mais uma caracterização importante para grupos com *min* é a seguinte:

Lema 1.7.8 *Um grupo G satisfaz min se, e somente se, todo subgrupo enumerável de G satisfaz min.*

Demonstração:
A condição necessária é clara. Para a condição suficiente, suponha que G tenha uma sequência descendente infinita de subgrupos distintos

$$H_1 > H_2 > H_3 > \cdots .$$

Para cada natural i seja $h_i \in H_i \setminus H_{i+1}$. Então $H = \langle h_i \mid i \geq 1 \rangle$ é um subgrupo enumerável de G, logo por hipótese, ele satisfaz min. Porém,

$$H \cap H_1 > H \cap H_2 > H \cap H_3 > \cdots .$$

é uma sequência descendente de subgrupos distintos de H, isso nos dá uma contradição. Logo, G deve satisfazer min.

■

A estrutura de grupos abelianos com min é bem definida. Isso devido ao seguinte resultado de Kuroš cuja demonstração pode ser encontrada em [22, pág. 104]

Teorema 1.7.9 (Kuroš) *Seja G um grupo abeliano. Então G tem min se, e somente se, G é um produto direto de um número finito de p-grupos quasecíclicos e grupos cíclicos de ordem potência de um primo.*

Mostraremos agora a Lei Modular de Dedekind que será usada na demonstração do próximo Lema bem como na demonstração do Lema 2.1.2.

Proposição 1.7.10 (*Lei Modular de Dedekind*) *Sejam H, K, L subgrupos de um grupo G e assuma que $K \subseteq L$. Então, $(HK) \cap L = (H \cap L)K$.*

Demonstração:
Em primeiro lugar, temos que $(H \cap L)K \subseteq HK$ e $(H \cap L)K \subseteq LK = L$: assim, $(H \cap L)K \subseteq HK \cap L$. Reciprocamente, seja $x \in (HK) \cap L$. Então, $x = hk$ e, daí, $h = xk^{-1} \in LK = L$. A conclusão é que $x \in (H \cap L)K$ e a Proposição está demonstrada. ■

Lembre que um grupo G é uma *extensão* de um grupo K por um grupo L se existe um subgrupo normal N de G tal que $N \cong K$ e $G/N \cong L$. Por exemplo, qualquer produto semidireto $[K]L$ é uma extensão de K por L.

Com relação as propriedades fechadas de grupos com min, temos:

Lema 1.7.11 *A classe $\mathcal{X}_{min}$ é fechada para subgrupos, quocientes e extensões.*

Demonstração:
Que é fechada para subgrupos e quocientes segue direto da definição. Seja G um grupo com $N \trianglelefteq G$ e ambos N e G/N em $\mathcal{X}_{min}$. Suponha que

$$H_1 \geq H_2 \geq H_3 \geq \cdots$$

é uma sequência descendente de subgrupos em G. Então,

$$H_1 \cap N \geq H_2 \cap N \geq H_3 \cap N \geq \cdots$$

e

$$H_1N/N \geq H_2N/N \geq H_3N/N \geq \cdots$$

são sequências descendentes de subgrupos em N e G/N, respectivamente. Logo, por hipótese, existe inteiro positivo k tal que $H_n \cap N = H_k \cap N$ e $H_nN = H_kN$ para todo $n \geq k$. Daí, aplicando a Lei Modular de Dedekind, teremos:

$$H_k = H_k \cap H_kN = H_k \cap H_nN = H_n(H_k \cap N) = H_n(H_n \cap N) = H_n.$$

A conclusão é que $G \in \mathcal{X}_{min}$. ■

Observação 1.7.12 *Do Lema 1.7.11 segue que a classe $\mathcal{X}_{min}$ é N_0-fechada.*

1.7.2 Grupos de Chernikov

Nesta seção estudaremos os grupos de Chernikov. Apresentaremos alguns resultados fundamentais sobre tais grupos e, para isso, relembremos a definição de grupos abelianos divisíveis.

Definição 1.7.13 *Um grupo abeliano G é dito divisível se para qualquer $x \in G$ e qualquer inteiro positivo n, existe $y \in G$ tal que $y^n = x$.*

Observação 1.7.14 *O grupo aditivo dos racionais $\mathbb{Q}$ e C_{p^∞} são exemplos de grupos divisíveis. Por outro lado, $\mathbb{Z}$ não é divisível.*

Um importante, elementar e útil resultado sobre grupos divisíveis é o que segue:

Lema 1.7.15 *Se G é grupo abeliano divisível e N é subgrupo de índice finito em G, então $G = N$.*

Demonstração:
Seja $N \leq G$ com $|G : N| = k$. Logo, $x^k \in N$ para todo $x \in G$. Por outro lado, G é divisível, logo para todo $y \in G$ temos que $y = z^k$ para algum $z \in G$, isto é, $y \in N$ e, assim, $G = N$. ■

Estamos prontos para a definição de grupo de Chernikov.

Definição 1.7.16 *Um grupo G é dito um grupo de Chernikov quando ele é uma extensão de um grupo abeliano por um grupo finito e satisfaz min.*

Tais grupos são em homenagem a S.N.Chernikov, que fez um extenso estudo de grupos com min. Segue do Teorema 1.7.9 que um grupo G é de Chernikov se, e somente se, ele tem um subgrupo normal N abeliano divisível de índice finito (em G), e N é um produto direto de uma quantidade finita de p-grupos quasecíclicos para diversos primos p, isto é, $N = C_{p_1^\infty} \times C_{p_2^\infty} \times \cdots \times C_{p_i^\infty}$, onde $p_j \in \mathbb{P}$, para $1 \leq j \leq i$. Podendo ocorrer $N = 1$. Chamaremos N de *parte divisível* de G e denotaremos por G^0.

Observação 1.7.17

(a) *Todo grupo de Chernikov é localmente finito;*

(b) *Todo grupo de Chernikov satisfaz min;*

(c) *Um grupo de Chernikov tem expoente finito se, e só se, ele é finito;*

(d) *O grupo C_{p^∞} tem o automorfismo de ordem 2, $\phi : g \mapsto g^{-1}$. Assim, o produto semidireto $[C_{p^\infty}]\mathbb{Z}_2$ é um grupo de Chernikov.*

Os próximos dois Lemas nos darão uma caracterização importante de G^0. Antes, denotaremos por $\mathcal{F}$ a classe de todos os grupos finitos. Então, $G^{\mathcal{F}}$ será o residual finito de G (ver subseção 1.6.1).

Lema 1.7.18 *Seja G um grupo tal que o conjunto de todos os subgrupos normais de índice finito tem min. Então, o residual finito $G^{\mathcal{F}}$ tem índice finito em G.*

Demonstração:
Relembremos que $G^{\mathcal{F}} = \bigcap\{N \trianglelefteq G \mid G/N \in \mathcal{F}\}$. Seja $\mathcal{S} = \{N \trianglelefteq G \mid G/N \in \mathcal{F}\}$. Então, por hipótese, $\mathcal{S}$ tem um elemento minimal, digamos K. Visto que a interseção de dois subgrupos de índice finito tem índice finito, segue que $K \leq N$ para todo $N \in \mathcal{S}$. Assim, $K = G^{\mathcal{F}}$. ∎

Lema 1.7.19 *Se G é um grupo de Chernikov, então $G^0 = G^{\mathcal{F}}$.*

Demonstração:
Uma vez que G tem min, então pelo Lema 1.7.18 temos que $G/G^{\mathcal{F}}$ é finito. Mas G^0 também tem índice finito em G, logo $G^{\mathcal{F}} \leq G^0$. Por outro lado, uma vez que $G^0G^{\mathcal{F}}/G^{\mathcal{F}}$ é um grupo abeliano divisível e finito, então ele deve ser trivial, logo $G^0 \leq G^{\mathcal{F}}$ e o resultado segue. ∎

Observação 1.7.20 *Todo grupo de Chernikov G não trivial tem um subgrupo característico finito não trivial. Ora, se G for finito, então o resultado é claro. Caso contrário, G^0 é não trivial. Assim, para algum primo p, $G^0[p] = \{g \in G^0 \mid o(g) = p\}$ é não trivial. Também é finito, pois G^0 tem min e $exp(G^0[p]) = p$. Claramente ele é característico em G.*

Observação 1.7.21

(a) *A classe dos grupos de Chernikov é fechada para subgrupos e quocientes;*

(b) *Se G é uma extensão de um grupo de Chernikov por um grupo finito, então G é de Chernikov.*

Proposição 1.7.22 *A classe dos grupos de Chernikov é fechada para extensões.*

A Proposição acima não é tão simples de se demonstrar. Ela precisa de um Teorema que caracteriza grupos solúveis com condição minimal sobre subgrupos normais. O referido Teorema que pode ser encontrado em, por exemplo, [3, Teorema 1.6.7].

Agora, apresentaremos o resultado mais importante e profundo relacionado aos grupos de Chernikov e usado nesta tese. O mesmo foi demonstrado independentemente por Shunkov [32] e, por Kegel e Wehrfritz [13, 14]. Apresentaremos a versão encontrada em [13, Corolário 5.8].

Teorema 1.7.23 *Para um grupo localmente finito G as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *G é um grupo de Chernikov;*
2. *G satisfaz a condição minimal sobre subgrupos;*
3. *O centralizador de todo elemento não trivial de G satisfaz condição minimal sobre subgrupos;*
4. *Todo subgrupo abeliano de G tem min.*

1.7.3 Grupos com min-p

Em grupos finitos temos os conhecidos teoremas de Sylow. Para grupos localmente finitos a condição min-p, p primo, nos propicia grandes avanços para o estudo dos p-subgrupos de Sylow de um grupo G. Não é o objetivo deste trabalho fazer um estudo avançado de tal teoria, mais sim, destacar os principais pontos que nos serviram de suporte para as demonstrações de nossos principais teoremas.

Definição 1.7.24 *Seja p um número primo. Um grupo G satisfaz* min-p *se cada um dos seus p-subgrupos satisfaz min.*

Valem os seguintes resultados para grupos satisfazendo min-p, cujas demonstrações podem ser encontradas em [13].

Lema 1.7.25

(a) *Um grupo G satisfaz min-p se, e somente se, toda sequência descendente de p-subgrupos é finita;*

(b) *Seja G é localmente finito satisfazendo min-p. Se N é um subgrupo normal de G, então N e G/N também satisfazem min-p.*

No que segue, $Max_p(G)$ denotará o conjunto de todos os p-subgrupos maximais de um grupo G. Pelo Lema de Zorn, todo p-subgrupo de G está contido em pelo menos um p-subgrupo maximal de G, e daí, $Max_p(G)$ é não vazio. Daremos agora a definição de um p-subgrupo de Sylow de G segundo [13]:

Definição 1.7.26 *Sejam G um grupo e p um número primo. Um subgrupo P é um p-subgrupo de Sylow de G se $P \in Max_p(G)$ e ele contém uma cópia isomórfica de todo p-subgrupo de G.*

O conjunto formado por todos os p-subgrupos de Sylow de G será denotado por $Syl_p(G)$. Claramente, $Syl_p(G) \subseteq Max_p(G)$. Ademais, ele é invariante pela ação de todo automorfismo de G. Se os p-subgrupos maximais de G são todos isomorfos ou até conjugados, então $Syl_p(G) = Max_p(G)$. Assim, os p-subgrupos de Sylow de um grupo finito são justamente seus p-subgrupos maximais, e a nossa definição é consistente com a terminologia usual para grupos finitos. O problema é que um grupo localmente finito não precisa conter um p-subgrupo de Sylow para um dado primo p (ver um exemplo em [13], pág.85).

Uma das técnicas usadas na demonstração de nossos principais resultados requer o uso de p-subgrupos de Sylow em grupos localmente finitos. O seguinte Lema dá uma condição suficiente para um grupo localmente finito conter p-subgrupos de Sylow (ver [13, Lema 3.7]).

Lema 1.7.27 *Se G é um grupo localmente finito satisfazendo min-p, então G contém p-subgrupos de Sylow. Mais ainda, todo p-subgrupo finito de G está contido num p-subgrupo de Sylow de G.*

Também vale (ver [13, Lema 3.13]):

Lema 1.7.28 *Seja G localmente finito satisfazendo min-p. Se N é um subgrupo normal de G e P um p-subgrupo de Sylow de G, então $P \cap N$ é um p-subgrupo de Sylow de N.*

Finalizaremos esta seção com Lemas que seguem imediatamente de [13, Corolário 3.11], [13, Corolário 3.2] e [13, Corolário 3.17], respectivamente.

Lema 1.7.29 *Se G é um grupo localmente finito satisfazendo min-p, então um p-subgrupo P de G é um p-subgrupo de Sylow de G se, e somente se, P contém um conjugado de todo p-subgrupo finito de G.*

Lema 1.7.30 *Um grupo localmente finito tendo elementos de ordem p satisfaz min-p se, e somente se, ele contém um p-subgrupo finito cujo centralizador satisfaz min-p.*

Lema 1.7.31 *Seja G um grupo periódico quase localmente solúvel que satisfaz min-p. Então, $G/O_{p'}(G)$ é um grupo de Chernikov.*

1.8 Sobre Automorfismos de Grupos

Sejam V e G grupos com $V \leq Aut(G)$. Como sabemos, podemos considerar V e G como subgrupos do produto semidireto $[G]V$. Apresentaremos agora dois subgrupos de G (ou $[G]V$) fundamentais neste trabalho.

Definição 1.8.1

1. *O centralizador de V em G (ou subgrupo dos pontos fixos de V em G):*

$$C_G(V) = \{x \in G \mid x^{\phi} = x, \ \textit{para todo } \phi \in V\};$$

2. *O subgrupo comutador*

$$[G, V] = \langle x^{-1}x^{\phi} \mid x \in G \ \textit{e} \ \phi \in V\rangle.$$

Observação 1.8.2

(a) *$[G, V]$ é subgrupo normal de G, uma vez que no produto semidireto $[G]V$ temos $[G, V] \trianglelefteq \langle V, G\rangle$;*

(b) *$[G,V]$ é V-invariante, pois $[x,\phi]^{\psi} = [x^{\psi},\phi^{\psi}] \in [G,V]$, para todo $\psi \in V$ e para todo $[x,\phi] \in [G,V]$. Portanto, V pode ser considerado como um grupo de automorfismos de $[G,V]$ e, assim, o subgrupo $[[G,V],V]$ de $[G,V]$ está bem definido;*

(c) *$C_G(V)$ é V-invariante;*

(d) *V age trivialmente sobre G se, e somente se, $[G,V]=1$.*

Lema 1.8.3 *Se N é um subgrupo V-invarinte de G, então $[G,V] \leq N$ se, e somente se, $(xN)^{\phi} = xN$ para todos $x \in G$ e $\phi \in V$. Em adicional, se N for subgrupo normal e V age trivialmente sobre G/N, então $[G,V] \leq N$.*

Demonstração:
Para todos $x \in G$ e $\phi \in V$ temos:

$$(xN)^{\phi} = xN \Leftrightarrow x^{\phi}N = xN \Leftrightarrow x^{-1}x^{\phi}N = N \Leftrightarrow [x,\phi] \in N.$$

O resto é imediato. ■

Observação 1.8.4 *O Lema acima tem a seguinte leitura equivalente: $[G,V]$ é o único menor subgrupo normal V-invariante de G tal que V age trivialmente sobre $G/[G,V]$.*

Num grupo, um elemento de ordem 2 será chamado de *involução*. Diz-se que um grupo de automorfismos V *age livre de pontos fixos* sobre G se $C_G(V)=1$. De modo semelhante, um automorfismo ϕ é dito *livre de pontos fixos* (ou *regular*) quando $C_G(\phi)=1$.

As duas Proposições a seguir ilustram como $C_G(\phi)$ e $C_G(V)$ influenciam na estrutura do grupo G. Além do mais, tais proposições são importantes neste trabalho, especialmente no capítulo 2.

Proposição 1.8.5 *Sejam G um grupo finito e ϕ um automorfismo de ordem 2. Se ϕ é livre de pontos fixos, então $x^{\phi} = x^{-1}$ para todo $x \in G$. Em particular, G é abeliano.*

Demonstração:
Considere a função $\lambda : G \to G$, tal que $\lambda(x) = x^{-1}x^{\phi}$. Para todos $x, y \in G$, temos que $\lambda(x) = \lambda(y)$ implica que $xy^{-1} \in C_G(\phi) = 1$, isto é, λ é injetiva. Já que G é finito, então λ é bijeção. Logo, para todo $x \in G$, existe $z \in G$ tal que $x = \lambda(z)$. Posto isto, para todo x em G teremos:

$$x^{\phi} = (\lambda(z))^{\phi} = (z^{-1}z^{\phi})^{\phi} = z^{-\phi}z = (\lambda(z))^{-1} = x^{-1}.$$

Finalmente, para todos $x, y \in G$, temos $(xy)^{\phi} = x^{\phi}y^{\phi}$, implicando $xy = yx$. Logo, G é abeliano. ■

Proposição 1.8.6 *Sejam G um grupo finito e V um p-grupo de automorfimos de G. Se V age livre de pontos fixos sobre G, então G é um p'-grupo.*

Demonstração:
Consideremos o produto semidireto $[G]V$ e seja M um p-subgrupo de Sylow de VG contendo V. Então $M_1 = M \cap G$ é um p-subgrupo de Sylow de G e, além disso, $M_1 \trianglelefteq M$. A demonstração será concluida se mostrarmos que $M_1 = 1$. Com efeito, se $M_1 \neq 1$, então $M_1 \cap Z(M) \neq 1$. Em particular, $Z(M) \neq 1$. Isso contraria nossa hipótese. Assim, $M_1 = 1$ e a demonstração está completa. ■

Observação 1.8.7 *Considerando $p = 2$ na Proposição 1.8.6, conclui-se naturalmente que G terá ordem ímpar.*

A propriedade de ser livre de pontos fixos é preservada por imagens homomóficas, como mostra o seguinte

Lema 1.8.8 *Seja ϕ um automorfismo livre de pontos fixos de um grupo finito G e H um subgrupo normal ϕ-invariante de G. Então ϕ induz um automorfismo livre de pontos fixos de G/H.*

Demonstração:
Seja $\overline{G} = G/H$ e suponha que $\overline{x}^{\phi} = \overline{x}$ para algum $\overline{x} \in \overline{G}$. Então $\overline{x}^{-1}\overline{x}^{\phi} = \overline{1}$ e, assim, $y = x^{-1}x^{\phi} \in H$ para todo representante x de $\overline{x}$. Uma vez que ϕ induz um homomorfismo livre de pontos fixos de H, então pela demonstração da Proposição 1.8.5, podemos garantir que $y = z^{-1}z^{\phi}$ para algum $z \in H$. Logo, $x = z$ e, por esse motivo, ϕ induz um automorfismo livre de pontos fixos de G/H como queríamos. ■

Definição 1.8.9 *Sejam V e G grupos finitos tais que $V \leq Aut(G)$. Dizemos que a ação de V sobre G é coprima quando $(|V|, |G|) = 1$.*

No produto semidireto $[G]V$ o subgrupo V é um complemento do subgrupo normal G, assim, no caso de V agir de modo coprimo sobre G as hipóteses do Teorema de Schur-Zassenhaus são satisfeitas. Logo, todo subgrupo de ordem $|V|$ em $[G]V$ será um conjugado de V. Uma importante consequência do Teorema de Schur-Zassenhaus é o seguinte:

Lema 1.8.10 *Suponha que V age de modo coprimo sobre G. Sejam U um subgrupo V-invariante de G e $x \in G$ tais que $(Ux)^V = Ux$. Então, existe $c \in C_G(V)$ tal que $Ux = Uc$.*

Demonstração:
$U^V = U$ e $(Ux)^V = Ux$ implicam que $x^\phi x^{-1} \in U$ para todo $\phi \in V$. No produto semidireto VG temos que $\phi^{-1}x\phi x^{-1} \in U$. Portanto, se $y \in V^{x^{-1}}$, então, $y = x\alpha x^{-1} = \alpha\alpha^{-1}x\alpha x^{-1} \in VU$, para algum $\alpha \in V$. A conclusão é que $V^{x^{-1}} \leq VU$.

Assim, $V^{x^{-1}}$ e V são complementos de U em VU. Pelo Teorema de Schur-Zassenhaus eles são conjugados em VU. Daí, existe $u \in U$ tal que $V^u = V^{x^{-1}}$. Para $c = ux$, temos $c \in N_{VG}(V) \cap Ux$. Juntando-se isso ao fato de que $[V, c] \leq V \cap G = 1$, temos $c \in C_G(V)$ e a demonstração está completa. ∎

Proposição 1.8.11 *Seja N é um subgrupo normal V-invariante de um grupo finito G. Suponha que $(|V|, |G|) = 1$. Então valem:*

1. *$C_{G/N}(V) = C_G(V)N/N$;*
2. *$G = [G, V]C_G(V)$;*
3. *$[[G, V], V] = [G, V]$.*

Demonstração:

1) Se uma classe Nx contém um elemento de $C_G(V)$, então $(Nx)^V = Nx$ e, portanto, $Nx \in C_{G/N}(V)$. Isso mostra a inclusão $C_G(V)N/N \leq C_{G/N}(V)$. Por outro lado, se $Nx \in C_{G/N}(V)$, então $(Nx)^V = Nx$. Além disso, $N^V = N$. Agora, a inclusão $C_{G/N}(V) \leq C_G(V)N/N$ segue diretamente do Lema 1.8.10.

2) $C_{G/[G,V]}(V) = G/[G, V]$, pois V age trivialmente em $G/[G, V]$. Agora, usando o item 1) , o resultado segue.

3) Pelo item 2) vale que $[G, V] = [[G, V]C_G(V), V]$. Seja então $z = [xc, \phi] \in [[G, V]C_G(V), V]$, onde $x \in [G, V]$, $c \in C_G(V)$ e $\phi \in V$. É suficiente mostrar que $z \in [G, V]$. Pelo item 2) do Lema 1.1.1 e o fato de que $c \in C_G(V)$, temos $z = [xc, \phi] = [x, \phi]^c[c, \phi] = [x, \phi]^c$. Desde que $[G, V] \trianglelefteq G$, então $z \in [G, V]$ como queríamos. ■

A igualdade no item 1) da Proposição 1.8.11 não tem razão para ocorrer se a ação não for coprima. Tome por exemplo o grupo dos quatérnios

$$Q_8 = \langle u, w \mid u^4 = w^4 = 1, u^2 = w^2, u^w = u^3\rangle.$$

Considere a aplicação ϕ dada por $u \mapsto w$ e $w \mapsto u$. Daí, o subgrupo normal $N = \langle u^2\rangle$ de Q_8 é ϕ-invariante. Seja $\overline{x}$ a imagem de x no quociente Q_8/N. Neste caso, Q_8/N é o produto direto $\langle\overline{u}\rangle \times \langle\overline{w}\rangle$ de dois grupos cíclicos de ordem 2. Note que o automorfismo induzido por ϕ, que chamaremos de $\overline{\phi}$, dado por $\overline{u} \mapsto \overline{w}$ e $\overline{w} \mapsto \overline{u}$, fixa o elemento $\overline{uw}$, mas ele não é a imagem de nenhum ponto fixo de ϕ, uma vez que $C_{Q_8}(\phi) = \langle u^2\rangle$.

A Proposição 1.8.11 pode ser estendida para o caso em que G é um grupo localmente finito com $(|V|, o(g)) = 1$ para todo $g \in G$. Isso será demonstrado no Corolário a seguir:

Colorário 1.8.12 *Seja G é um grupo localmente finito em que $(|V|, o(g)) = 1$ para todo $g \in G$. Seja N é um subgrupo normal V-invariante de G. Então:*

1. $C_{G/N}(V) = C_G(V)N/N$;
2. $G = [G, V]C_G(V)$;
3. $[[G, V], V] = [G, V]$.

Demonstração:
Seja $H = \langle g^V\rangle = \langle g^\phi \mid \phi \in V\rangle$. É fácil verificar que H é um subgrupo V-invariante de G. Ademais, ele é finito pois G é localmente finito.

1) Seja $gN \in C_{G/N}(V)$. Então $g^\phi N = gN$ para todo $\phi \in V$. Isto é, existe $n_\phi \in N$ tal que $n_\phi = g^{-1}g^\phi$. Isso significa que $n_\phi \in H \cap N$, pois $g, g^\phi \in H$. Mas então $g(H \cap N) \in C_{H/N\cap H}(V)$. Agora, usando a Proposição 1.8.11 temos que $g(H \cap N) \in C_H(V)(N \cap H)/N \cap H$. Logo, existem $g_1 \in C_H(V) \subseteq C_G(V)$ e $x \in H \cap N \subseteq N$ tais que $g = g_1x$. Concluímos que $gN \in C_G(V)N/N$ e o resultado segue.

2) Seja $g \in G$ qualquer. Já que pela Proposição 1.8.11 $H = [H, V]C_H(V)$, então $g \in [H, V]C_H(V) \subseteq [G, V]C_G(V)$ e o resultado segue.

3) Seja $[g, \phi] \in [G, V]$ qualquer. Daí, $[g, \phi] \in [[H, V], V] = [H, V]$ pela Proposição 1.8.11. Como $[[H, V], V] \subseteq [[G, V], V]$ o resultado segue.

■

Para um automorfismo ϕ de G, definiremos o seguinte subconjunto de G:

$$I_G(\phi) = \{x \in G \mid x^\phi = x^{-1}\}.$$

O subconjunto $I_G(\phi)$ não precisa ser um subgrupo. Com efeito, seja

$$G = S_3 = \langle x, y \mid x^2 = y^3 = 1,\ y^x = y^{-1}\rangle$$

e considere o automorfismo ϕ dado por $x \mapsto x$, $y \mapsto y^{-1}$. Note que $I_G(\phi)$ não é subgrupo de G, uma vez que $x, y \in I_G(\phi)$ mas $xy \notin I_G(\phi)$. Na hipótese de G ser um grupo abeliano, é fácil ver que $I_G(\phi)$ torna-se um subgrupo de G. Baseado em $I_G(\phi)$ vale o seguinte Lema:

Lema 1.8.13 *Seja G um grupo finito de ordem ímpar admitindo um automorfismo ϕ de ordem 2. Então:*

1. $G = I_G(\phi)C_G(\phi) = C_G(\phi)I_G(\phi)$;
2. $\langle I_G(\phi)\rangle = [G, \phi]$;
3. *se N é um subgrupo normal ϕ-invariante de G tal que $C_N(\phi) = 1$, então $N \leq Z([G, \phi])$ e $[N, I_G(\phi)] = 1$;*
4. *se N é um subgrupo normal ϕ-invariante, então $I_G(\phi)N/N = I_{G/N}(\phi)$.*

Demonstração:

1) Seja $|G : C_G(\phi)| = n$. Logo,

$$G = x_1C_G(\phi) \cup x_2C_G(\phi) \cup \ldots \cup x_nC_G(\phi).$$

Façamos $y_i = x_i^{-1}x_i^\phi$ para todo $i = 1, 2, ..., n$. Pela demonstração da Proposição 1.8.5, segue que $y_i \in I_G(\phi)$ para todo $i = 1, 2, ..., n$. Afirmamos que o conjunto

$Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ é transversal à direita de $C_G(\phi)$ em G. De fato, do contrário, existe $i \neq j$, tal que $y_j = zy_i, \quad z \in C_G(\phi)$. Aplicando ϕ, obtemos $y_j^{-1} = zy_i^{-1}$ implicando $y_j = y_i z^{-1}$. Assim, $y_i z^{-1} = zy_i$, isto é, $z^{y_i} = z^{-1}$. De $z^{y_i} = z^{-1}$ conclui-se que $z^{y_i^2} = z$. Como G tem ordem ímpar, então $z^{y_i^2} = z$ implica que $z^{y_i} = z$ e, juntando com o fato de que $z^{y_i} = z^{-1}$, segue que $z = z^{-1}$. Como G tem ordem ímpar, então $z = 1$, de modo que $y_i = y_j$. De $y_i = y_j$, segue que $x_i x_j^{-1} \in C_G(\phi)$ e, consequentemente, x_i e x_j determinam a mesma classe de $C_G(\phi)$, logo $i = j$. Contradição. Logo, Y é um transversal.

Para finalizarmos a demonstração do item 1), basta mostrarmos que $Y = I_G(\phi)$. Com efeito, seja $w \in I_G(\phi)$, então w se escreve unicamente como $w = cy_i$ para algum i e algum $c \in C_G(\phi)$. Daí, $w^\phi = (cy_i)^\phi = cy_i^{-1} = w^{-1} = y_i^{-1}c^{-1}$, isto é, $c^{-1} = c^{y_i}$. De $c^{y_i} = c^{-1}$ conclui-se que $c^{y_i^2} = c$. Desde que G tem ordem ímpar, então $c^{y_i^2} = c$ implica que $c^{y_i} = c$ e, juntando com o fato de que $c^{y_i} = c^{-1}$, segue que $c = c^{-1}$. Logo, $c = 1$, de modo que $w \in Y$. Uma vez que a inclusão contrária sempre ocorre, a demonstração do item 1) está completa.

2) é direta da demonstração da Proposição 1.8.5.

3) De $C_N(\phi) = 1$, segue pela Proposição 1.8.5 que $n^\phi = n^{-1}$ para todo $n \in N$. Pelos itens 1) e 2) temos que $N = [N, \phi]$. Por outro lado, para todo $x \in G$ temos $n^x \in N$. Daí,

$$(n^x)^\phi = (n^{-1})^x \Rightarrow (n^{-1})^{x^\phi} = (n^{-1})^x \Rightarrow (n^{-1})^{x^\phi x^{-1}} = (n^{-1}) \Rightarrow [n, x^\phi x^{-1}] = 1.$$

Logo, $[N, [G, \phi]] = 1$ e, junto com $N = [N, \phi]$ o resultado segue.

4) Como G tem ordem ímpar, então $\langle w \rangle = \langle w^2 \rangle$, para todo $w \in G$. Seja agora $xN \in I_G(\phi)N/N$, com $x \in I_G(\phi)$. Teremos: $(xN)^\phi = x^\phi N = x^{-1}N = (xN)^{-1}$. Mostramos a inclusão $I_G(\phi)N/N \subseteq I_{G/N}(\phi)$. Para a inclusão reversa, seja $xN \in I_{G/N}(\phi)$. Usando os fatos de que $x^\phi N = x^{-1}N$ e xN tem ordem ímpar, então

$$xN \in \langle xN \rangle = \langle x^{-2}N \rangle = \langle x^{-1}x^\phi N \rangle = \langle x^{-1}x^\phi \rangle N.$$

Desde que ϕ manda todo elemento de $\langle x^{-1}x^\phi \rangle$ no seu inverso, então o item 4) segue. O Lema está assim finalizado. ■

Observação 1.8.14 *É fácil verificar do Lema 1.8.13 e a partir das definições de $C_G(\phi)$ e $I_G(\phi)$ que $C_G(\phi) \cap I_G(\phi) = 1$ e $|G : C_G(\phi)| = |I_G(\phi)|$.*

Observação 1.8.15 *Como foi feito para a Proposição 1.8.11, o Lema 1.8.13 pode ser estendido para o caso em que G é um grupo localmente finito com $(|\phi|, o(g)) = 1$ para todo $g \in G$.*

CAPÍTULO 2

Principais Resultados

2.1 O Teorema A

Relembre que um grupo não cíclico de ordem 4 será chamado de um grupo de Klein e que a expressão "$(a, b, c, ...)$-limitada" significa "limitada superiormente por uma função que depende unicamente dos parâmetros inteiros positivos $a, b, c, ...$".

O principal objetivo desta seção é demonstrar o seguinte Teorema:

Teorema A *Seja G um grupo localmente finito contendo um subgrupo de Klein V tal que $C_G(V)$ é finito e $C_G(\phi)$ tem expoente finito para algum $\phi \in V$. Então, G é quase localmente solúvel e $[G, \phi]'$ tem expoente finito.*

O *Teorema A* está relacionado com o seguinte Teorema de E. Romano e P. Shumyatsky (ver [24]):

Teorema 2.1.1 *Seja G um grupo localmente finito contendo um subgrupo de Klein V tal que $C_G(V)$ é finito. Suponha que V contenha duas involuções distintas v_1 e v_2 tais que os centralizadores $C_G(v_1)$ e $C_G(v_2)$ têm expoentes finitos. Então, G é quase localmente solúvel e o subgrupo derivado $[G, V]'$ tem expoente finito.*

O *Corolário A1* dado no final desta seção nos mostra que, sob as hipóteses do *Teorema A*, o grupo G tem uma série normal

$$1 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq G_3 \trianglelefteq G$$

tal que G_1 e G/G_1 têm expoente finito, enquanto que G_2/G_1 é abeliano. Mais ainda, G_3 é hiperabeliano e tem índice finito em G. Isto nos dá informação bastante detalhada sobre a estrutura do grupo G.

O *Teorema A* foi apresentado em [18].

Apresentaremos agora a demonstração do seguinte Lema que é devido a Hartley [11].

Lema 2.1.2 *Seja V um grupo de automorfismos de um grupo finito G com $(|V|,|G|)=1$. Seja $\{N_i \mid \ i \in I\}$ uma família de subgrupos normais V-invariantes de G e $N=\prod_{i\in I} N_i$. Então, $C_N(V)=\prod_{i\in I} C_{N_i}(V)$.*

Demonstração:
Seja $C = C_N(V)$. Já que todo elemento de C está num produto finito de N_i, então sempre podemos assumir que I é finito, digamos $|I| = t$ e usaremos indução sobre t. Seja $M = N_1N_2N_3...N_{t-1}$ e $L = N_t$. Por indução, temos que $C \cap M = \prod_{1\leq i\leq t-1} C_{N_i}(V)$. Pela Proposição 1.8.12 temos $(C \cap ML)M/M \leq C_{ML/M}(V) = C_L(V)M/M$, uma vez que o homomorfismo canônico de G sobre G/M mapeia L sobre LM/M. Portanto, $C\cap ML \leq M(C\cap L)$. A Lei Modular de Dedekind nos dá que $C\cap ML \leq (C\cap M)(C\cap L)$. A igualdade agora segue. Assim, $C\cap N_1N_2N_3...N_t = \prod_{1\leq i\leq t} C_{N_i}(V)$ como queríamos. ■

Os seguintes Lemas estão em [24]. Eles desempenharão um papel fundamental nas demonstrações dos nossos principais resultados. Resolvemos apresentar suas demonstrações.

Lema 2.1.3 *Seja G um grupo abeliano divisível com um automorfismo ϕ de ordem 2. Então, $G=[G,\phi]C_G(\phi)$ e ϕ inverte todos os elementos de $[G,\phi]$.*

Demonstração:
Seja $x\in G$. Escreva $x^2=(xx^{-\phi})(xx^{\phi})$. Como $xx^{-\phi}\in[G,\phi]$ e $xx^{\phi}\in C_G(\phi)$, então $G^2\leq[G,\phi]C_G(\phi)$. Usando que G é divisível, temos $G=[G,\phi]C_G(\phi)$. Finalmente, seja $z=xx^{-\phi}$. Como $z^{\phi}=(xx^{-\phi})^{\phi}=x^{\phi}x^{-1}=z^{-1}$, então ϕ inverte os elementos de $[G,\phi]$, como queríamos. ■

Lema 2.1.4 *Seja G um grupo com um automorfismo ϕ de ordem 2. Suponha que N é um subgrupo normal de G tal que ou ϕ inverte todos os elementos de N ou $N\leq C_G(\phi)$. Então, $[N,[G,\phi]]=1$.*

Demonstração:
Sejam $x \in G$ e $y \in N$, então $y^x \in N$. Por hipótese, temos que $(y^x)^\phi = y^{-x} = y^{-x^\phi}$ ou $(y^x)^\phi = y^x = y^{x^\phi}$. Em ambos os casos $[y, [x, \phi]] = 1$ e, daí, $[N, [G, \phi]] = 1$ como queríamos. ■

Lema 2.1.5 *Seja $G = MS$, onde M é um subgrupo normal abeliano e S é subgrupo abeliano divisível. Suponha que G tenha um automorfismo ϕ de ordem 2 que inverte todos os elementos de $M \cup S$. Então, G é um grupo abeliano e ϕ inverte todos os elementos de G.*

Demonstração:
É suficiente demonstrar que $[M, S] = 1$. Pelo Lema 2.1.3, $S = [S, \phi]$, assim, $[M, S] \leq [M, [G, \phi]]$. Pelo Lema 2.1.4, $[M, [G, \phi]] = 1$ e o resultado segue. ■

2.1.1 Um resultado sobre grupo finito de ordem ímpar

O próximo resultado é fundamental para a demonstração do *Teorema A*. Ele também é uma das principais contribuições que este trabalho representa.

Teorema 2.1.6 *Sejam e e m inteiros positivos. Seja G um grupo de ordem ímpar admitindo um grupo de Klein V de automorfismos tal que $|C_G(V)| = m$ e $C_G(\phi)$ tem expoente e, para algum $\phi \in V$. Então o subgrupo derivado $[G, \phi]'$ tem expoente (e, m)-limitado.*

Os próximos dois resultados serão necessários para a demonstração do Teorema 2.1.6.

Lema 2.1.7 *Seja G um grupo metabeliano de ordem ímpar admitindo um automorfismo ϕ de ordem 2 tal que $C_G(\phi)$ tem expoente e e $G = [G, \phi]$. Então o expoente do grupo derivado G' é igual a e.*

Teorema 2.1.8 *Seja e um inteiro positivo. Seja G um grupo de ordem ímpar admitindo um grupo de Klein V de automorfismos tal que $C_G(V) = 1$ e $C_G(\phi)$*

tem expoente e para algum $\phi \in V$. Então, o expoente do segundo grupo derivado G'' é e-limitado.

A demonstração do Lema 2.1.7 está em [21] enquanto que o Teorema 2.1.8 foi demonstrado em [26]. O próximo Lema também é um resultado deste trabalho, ele é uma consequência do Teorema 2.1.8, além do que, o mesmo será utilizado na demonstração do Teorema 2.1.6, como veremos.

Lema 2.1.9 *Seja e um inteiro positivo. Seja G um grupo de ordem ímpar admitindo um grupo de Klein V de automorfismos tal que $C_G(V) = 1$ e $C_G(\phi)$ tem expoente e para algum $\phi \in V$. Então o subgrupo derivado $[G, \phi]'$ tem expoente e-limitado.*

Demonstração:
Sem perda de generalidade podemos assumir que $G = [G, \phi]$. O Teorema 2.1.8 nos mostra que o expoente de G'' é e-limitado. Passando ao quociente G/G'', podemos supor sem perda de generalidade que G é metabeliano. Agora, o resultado segue do Lema 2.1.7. ■

A utilidade do próximo Teorema ficará clara no decorrer deste trabalho. Sua demonstração pode ser encontrada em [20].

Teorema 2.1.10 (A. Mann) *Seja G um grupo tal que $G/Z(G)$ é localmente finito e tem expoente n. Então G' é localmente finito e tem expoente finito que é n-limitado.*

Agora estamos prontos para apresentar a demonstração do Teorema 2.1.6.

Demonstração:
Sem perda de generalidade podemos assumir que $G = [G, \phi]$. Se $m = 1$, então o resultado segue do Lema 2.1.9. Assim, suponhamos $m \geq 2$ e usemos indução sobre m. Seja N o produto de todos os subgrupos V-invariantes normais H tais que $H \cap C_G(V) = 1$. Pelo Lema 2.1.2 temos $C_N(V) = 1$. O Teorema 2.1.8 nos mostra que N'' tem expoente e-limitado. Podemos então passar ao quociente G/N'' e supor sem perda de generalidade que N' é um grupo abeliano. Seja $M_0 = \langle C_{N'}(\phi)^G \rangle$, o fecho normal em G. Como N' é um grupo abeliano e $C_G(\phi)$ tem expoente e, concluímos que M_0 tem expoente e. Podemos então passar ao quociente G/M_0 e assumir sem perda de generalidade que $C_{N'}(\phi) = 1$. Agora, segue do Lema 1.8.13 que $N' \leq Z(G)$ e, daí, N é nilpotente (de classe no máximo 2). Seja $M_1 = \langle C_N(\phi)^G \rangle$. Uma vez que N é nilpotente de classe no máximo 2 e $C_G(\phi)$ tem expoente e, concluímos que M_1

tem expoente e-limitado. Passando ao quociente G/M_1 assumiremos que $C_N(\phi) = 1$ e, novamente pelo Lema 1.8.13, segue que $N \leq Z(G)$.

Consideremos primeiro o caso em que $N = 1$. Seja T o subgrupo normal minimal V-invariante de G. Assim, $C_T(V) \neq 1$ e $|C_{G/T}(V)| < m$. Note que T é um p-grupo abeliano elementar para algum primo p dividindo m. Portanto, o expoente de T divide m. Desde que $|C_{G/T}(V)| < m$, então por indução o grupo $(G/T)'$ tem expoente (e, m)-limitado. Agora, do Lema 1.5.2 segue que $G'T$ tem expoente (e, m)-limitado. No caso geral onde $N \leq Z(G)$, o quociente $G'/Z(G')$ tem expoente limitado. Logo, pelo Teorema 2.1.10, o expoente de G'' é limitado. Podemos então passar ao quociente G/G'' e assumir que G é metabeliano. Em vista do Lema 2.1.7 segue que G' tem expoente e. A demonstração está completa. ■

2.1.2 Demonstração do Teorema A

Precisaremos do seguinte fato sobre automorfismos de grupos localmente finitos cuja demonstração pode ser encontrada em [11].

Lema 2.1.11 *Seja V um π-grupo de automorfismos de um grupo localmente finito G e seja N um subgrupo normal V-invariante de G. Se $N/O_{\pi'}(N)$ é um grupo de Chernikov, então o índice $|C_{G/N}(V) : C_G(V)N/N|$ é finito.*

A próxima Proposição foi um dos principais resultados de [24]. Neste trabalho sua relevância permanece e, por isso, apresentaremos sua demonstração.

Proposição 2.1.12 *Seja G um grupo localmente finito admitindo um grupo de Klein V de automorfismos tal que $C_G(V)$ é finito. Suponha que V contém um elemento ϕ para o qual $C_G(\phi)$ tem expoente finito. Então G é quase localmente solúvel.*

Relembre que um grupo G é localmente solúvel quando todo subgrupo finitamente gerado de G é solúvel. Antes da sua demonstração, mostraremos um Lema necessário para a mesma.

Lema 2.1.13 *Seja G um grupo localmente finito satisfazendo min-2. Suponha que G não possua subgrupos normais localmente solúveis não triviais. Então G tem um subgrupo normal minimal.*

Demonstração:
Seja S um 2-subgrupo de Sylow de G. Uma vez que S é um grupo de Chernikov podemos escolher um subgrupo T de S que é minimal com respeito a condição de que existe um subgrupo normal não trivial N de G tal que $N \cap S = T$. Se $T = 1$, o subgrupo N não teria involuções e, assim, pelo Teorema de Feit-Thompson N (ver [4]) seria localmente solúvel, contradição. Segue que $T \neq 1$. Seja M a interseção de todos os subgrupos normais de G cuja interseção com S contém T. Daí, M é o subgrupo requerido. ■

A partir de agora daremos a demonstração da Proposição 2.1.12.

Demonstração:
Pelo Lema 1.7.30 G satisfaz min-2. Seja R o radical localmente solúvel de G. Pelo Lema 1.7.31 $R/O(R)$ é um grupo de Chernikov. Portanto, pelo Lema 2.1.11 $C_{G/R}(V)$ é finito e $C_{G/R}(\phi)$ tem expoente finito. Podemos então, sem perda de generalidade, passar ao quociente G/R e supor que $R = 1$. Pelo Teorema de Feit-Thompson (ver [4]) $O(G) \leq R = 1$. O Lema 2.1.13 nos garante que G tem um subgrupo normal minimal. Este é o produto direto de grupos simples isomorfos (ver [22], 3.3.15). Suponha que G contenha um subgrupo normal minimal M de expoente infinito. Escreva $M = S_1 \times S_2 \times ...$, onde cada S_i é um grupo simples. Um grupo localmente finito, infinito e simples satisfazendo min-p para algum primo p é linear (ver [13, capítulo 4]) e, portanto, ele é do tipo Lie sobre algum corpo localmente finito de característica diferente do primo p. Isso foi demonstrado independentemente em [1, 2, 8, 10]. Segundo Hartley qualquer p-automorfismo de tal grupo fixa elementos de ordem prima q para uma quantidade infinita de tais primos q [12, Teorema C]. Então, cada S_i é um grupo do tipo Lie sobre algum corpo localmente finito de característica ímpar e, assim, todo automorfismo de ordem 2 de S_i fixa elementos de ordem prima q para uma quantidade infinita de tais primos q. Suponha que ϕ normaliza S_1. Desde que S_1 é infinito e $C_G(\phi)$ tem expoente finito, temos uma contradição. Logo, ϕ não normaliza S_1. Daí, ϕ centraliza a diagonal do produto $S_1 \times S_1^{\phi}$. Este fato também contradiz a hipótese de que $C_G(\phi)$ tem expoente finito. Portanto, concluímos que todos os subgrupos normais minimais de G têm expoente finito.

Suponha que exista um subgrupo normal K em G tal que $C_K(V) = 1$. Então K não tem involuções e, daí, $K \leq O(G) = 1$. Isto é, para todo subgrupo normal $N_0 \neq 1$ vale que $C_G(V) \cap N_0 \neq 1$. Uma vez que $C_G(V)$ é finito, então G possui somente uma quantidade finita de subgrupos normais minimais. Seja N um deles. Como N tem expoente finito e $C_N(V)$ é finito, então o Teorema 1.2 de [28] nos garante que $N/S(N)$ é finito. Aqui $S(N)$ denotará o radical localmente solúvel de N. Uma vez que N é o produto direto de grupos simples não abelianos, temos $S(N) = 1$. Logo, N é finito e, daí, todo subgrupo normal minimal de G é finito. Como G tem apenas uma quantidade finita de tais subgrupos, seja então M o produto de todos eles. O centralizador $C_G(M)$ tem índice finito em G. Se $C_G(M) \neq 1$, então $C_G(M)$ contém um subgrupo normal minimal de G e, assim, $M \cap C_G(M) \neq 1$. Por outro lado, como $M \cap C_G(M)$ é abeliano, então $M \cap C_G(M) \leq R = 1$. Esta contradição nos diz que $C_G(M) = 1$. Logo, G é finito e a demonstração está completa. ■

O Lema a seguir surgiu durante nossa pesquisa. O mesmo também exercerá um papel importante na demonstração do *Teorema A*.

Lema 2.1.14 *Seja G um grupo periódico sem involuções e assuma que G admite um grupo de Klein V de automorfismos tal que $C_G(V)$ é finito. Se $1 \neq \phi \in V$, então $G/[G, \phi]$ é solúvel.*

Demonstração:
Façamos $K = G/[G, \phi]$. O grupo V age naturalmente sobre K. Também, o centralizador $C_K(V)$ é finito (ver [23, Lema 2.2]). Seja ψ uma involução em V com $\psi \neq \phi$. Uma vez que ϕ age trivialmente sobre K, segue que $C_G(\psi)$ é finito e, assim, pelo Teorema de Shunkov (ver [31]) segue que K tem um subgrupo normal solúvel de índice finito. O fato de K não ter involuções junto com o Teorema de Feit-Thompson (ver 1.2.8) nos dá que K é solúvel. ■

Agora daremos a demonstração do *Teorema A*.

Demonstração:
Pela Proposição 2.1.12, G tem um subgrupo normal localmente solúvel de índice finito em G. Seja $K = O(G)$. Segue do Lema 1.7.31 que G/K é um grupo de Chernikov. Pelo Lema 1.7.30 G satisfaz min-2, podemos então escolher um 2-subgrupo de Sylow P de G que contém V. Seja S o subgrupo minimal de índice finito em P. Note que V normaliza S. Afirmamos que KS é subgrupo normal de G e ele tem índice finito em G. De fato, já que K é subgrupo normal de G e G/K é de Chernikov, então é suficiente considerar o caso em que $K = 1$. Neste caso, G é um grupo de Chernikov sem $2'$-subgrupos normais, implicando que S é normal em G e $|G : S|$ finito. Portanto a afirmação segue.

O centralizador $C_S(\phi)$ é um grupo de Chernikov com expoente finito e, portanto, ele é finito. Como $C_S(\phi)$ é finito, então pelo Lema 2.1.3 $|S : I_S(\phi)|$ também será finito e, pelo Lema 1.7.15 segue que $S = I_S(\phi)$. Em outras palavras, ϕ inverte todos os elementos de S. Seja $M = \langle [K, V]^G \rangle$ o fecho normal de $[K, V]$ em G. Então

$M \leq K$ por que K é normal em G e $[K,V] \leq K$. De acordo com o Lema 2.1.14, $M/[M,\phi]$ é um grupo solúvel. Assim, existe inteiro positivo j tal que o j-ésimo subgrupo derivado $M^{(j)}$ está contido em $[M,\phi]$. Logo, deduzimos do Teorema 2.1.6 que $M^{(j+1)}$ tem expoente finito. Uma vez que $M^{(j+1)}$ é normal em G tem expoente finito, podemos passar ao quociente $G/M^{(j+1)}$ e supor sem perda de generalidade que M é solúvel de comprimento derivado $dl(M) \leq j+1$.

A demonstração será completada usando indução sobre $dl(M)$. Suponha M abeliano e seja $M_0 = \langle C_M(\phi)^G \rangle$. Uma vez que M abeliano e $C_G(\phi)$ tem expoente finito, então M_0 tem expoente finito também. Passando ao quociente G/M_0 podemos assumir que $C_M(\phi) = 1$. Neste caso, combinando os Lemas 1.8.13 e 2.1.4 garantimos que $M \leq Z([G,\phi])$.

Seja $H = MS$ e vamos mostrar que H é normal em G. Visto que M é normal em G é suficiente considerarmos o caso em que $M = 1$. Pelo Corolário 1.8.12, o índice de M em K é finito e, como estamos no caso $M = 1$, segue que K é finito. Usando que S não tem subgrupos de índice finito, concluímos que $[K,S] = 1$ e, portanto, $S = O_2(KS)$. Assim sendo, no caso $M = 1$ o subgrupo S é normal em G, logo, H é normal em G. Agora, usando os Lemas 2.1.4 e 2.1.5 segue que $H \leq Z([G,\phi])$. Uma vez que KS tem índice finito em G e H tem índice finito em KS, então H tem índice finito em G. Como consequência, o centro $Z([G,\phi])$ tem índice finito em G. Finalmente, pelo Teorema de Schur (Teorema 1.3.7) temos que $[G,\phi]'$ é finito.

Agora, suponhamos $j \geq 1$ e seja $L = M^{(j)}$. Por indução, $[G,\phi]'L/L$ tem expoente finito. Seja $M_1 = \langle C_L(\phi)^G \rangle$. O centralizador $C_G(\phi)$ tendo expoente finito e junto com L abeliano nos dá que M_1 tem expoente finito também. Passando ao quociente G/M_1 podemos assumir, sem perda de generalidade, que $C_L(\phi) = 1$. Segue agora dos Lemas 2.1.4 e 2.1.5 que $L \leq Z([G,\phi])$. Desde que $[G,\phi]'L/L$ tem expoente finito e $L \leq Z([G,\phi])$, então pelo Teorema 2.1.10 $[G,\phi]''$ tem expoente finito. Passando ao quociente $G/[G,\phi]''$ podemos assumir que $[G,\phi]'$ é abeliano. Seja $M_2 = \langle C_{[G,\phi]'}(\phi)^G \rangle$. Neste momento, é fácil ver que M_2 tem expoente finito. Passando ao quociente G/M_2 e usando o Lema 2.1.11, podemos assumir que $C_{[G,\phi]'}(\phi)$ é finito. Seja M_3 o fecho normal em G de $O(C_{[G,\phi]'}(\phi))$. Daí M_3 é um $2'$-subgrupo de expoente finito e, assim, passamos ao quociente G/M_3 e podemos assumir que $C_{[G,\phi]'}(\phi)$ é 2-grupo finito. Agora, suponha que $[G,\phi]$ é abeliano. Assim sendo, ϕ manda todos os elementos de $[G,\phi]$ no seu inverso e, daí, todos os elementos de $C_{[G,\phi]}(\phi)$ são involuções. Como G satisfaz min-2 e $[G,\phi]$ é abeliano, então o centralizador $C_{[G,\phi]}(\phi)$ é um 2-grupo finito. Combinando com o fato de que $C_{[G,\phi]'}(\phi)$ é 2-grupo finito, conluímos que, até se $[G,\phi]$ não for abeliano, o centralizador $C_{[G,\phi]}(\phi)$ será um 2-grupo finito. O resultado de Hartley e Meixner [10] pode ser aplicado para concluir que $[G,\phi]$ tem um subgrupo N de índice finito o qual é nilpotente de classe no máximo 2. Por um resultado de

Khukhro e Makarenko (ver [16]) podemos assumir que N é característico em $[G,\phi]$ e, portanto, normal em G. Já que ϕ não centraliza qualquer elemento não trivial de $O(N)$, segue que $O(N)$ é abeliano. Seja S_0 o subgrupo minimal de índice finito no 2-subgrupo de Sylow de N. Então, $O(N)S_0$ é um subgrupo abeliano de índice finito em $[G,\phi]$ e ϕ manda todo elemento de $O(N)S_0$ no seu inverso. Portanto, pelo Lema 2.1.4, $O(N)S_0 \leq Z([G,\phi])$. A conclusão é que o centro $Z([G,\phi])$ tem índice finito em $[G,\phi]$. Podemos então usar o Teorema de Schur para concluir que $[G,\phi]'$ é finito. A demonstração está completa.

■

Um grupo G é dito *hiperabeliano* se ele tem uma série normal ascendente (possivelmente infinita) com quocientes abelianos. Foi mostrado por P. Shumyatsky em [27] o seguinte resultado:

Seja G um grupo periódico localmente solúvel e V um subgrupo de Klein de G.

(i) Se $C_G(V)$ é um grupo de Chernikov, então G é uma extensão de um grupo hiperabeliano por um grupo de Chernikov;

(ii) Se $C_G(V)$ é um grupo finito, então G é um grupo hiperabeliano.

Estamos prontos para darmos a demonstração do *Corolário A1.*

Corolário A1 *Seja G como no Teorema A, então G tem uma série normal*

$$1 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq G_3 \trianglelefteq G$$

tal que G_1 e G/G_2 têm expoente finito, enquanto que G_2/G_1 é abeliano. Mais ainda, G_3 é hiperabeliano e tem índice finito em G.

Demonstração:
Façamos $H = [G,\phi]$. Usando o Lema 2.1.11 para H e, junto com o fato de que ϕ age trivialmente sobre G/H, podemos concluir que o expoente de G/H é finito. Seja G_3 o subgrupo normal maximal localmente solúvel de G. A Proposição 2.1.12 nos garante que existe um subgrupo normal N de G que é localmente solúvel e tem índice finito em G. Logo, G_3 tem índice finito em G. Por outro lado, como G_3 é periódico, localmente solúvel e $C_{G_3}(V)$ é finito, então de acordo com o resultado (ii) de [27], G_3 é hiperabeliano.

Considere os seguintes subgrupos normais de G:

$$G_1 = H' \cap G_3 \ , \ G_2 = H \cap G_3.$$

Como $|G : G_3|$ é finito, então $|G_3H : G_3|$ também o é. Como H/G_2 é isomorfo a G_3H/G_3, então ele será finito. Já mostramos que G/H tem expoente finito, como H/G_2 é finito, então G/G_2 terá expoente finito também.

O *Teorema A* nos garante que H' tem expoente finito, logo o mesmo acontece com o expoente de G_1. Por último, é fácil ver que G_2/G_1 é um grupo abeliano.

A conclusão é que a série

$$1 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq G_3 \trianglelefteq G$$

tem as propriedades requeridas.

■

2.2 Os Teoremas B e C

Em toda esta seção os grupos A, D e V serão tais que:

(i) A um grupo isomorfo a S_4, o grupo simétrico de quatro símbolos;

(ii) V o 2-subgrupo normal maximal de ordem 4 de A. Daí, V é um subgrupo de Klein;

(iii) $D = V\langle\alpha\rangle$ o 2-subgrupo de Sylow de A, com a involução $\alpha \in A\backslash V$. Ele é isomorfo ao grupo diedral de ordem 8.

Posto isso, se $\beta \in V$ é uma involução, então $V = \langle\beta, \beta^{\alpha}\rangle$ e $D = \langle\alpha, \beta\rangle$.

O objetivo principal desta seção é a demonstração dos Teoremas:

Teorema B *Seja G um grupo localmente finito contendo um subgrupo isomorfo a D tal que $C_G(V)$ é finito e $C_G(\alpha)$ tem expoente finito. Então, G é quase localmente solúvel e $[G, D]'$ tem expoente finito.*

Teorema C *Seja G um grupo localmente finito contendo um subgrupo isomorfo a A tal que $C_G(V)$ é finito e $C_G(\alpha)$ tem expoente finito. Então, G é quase localmente solúvel e tem expoente finito.*

Com relação ao *Teorema B*, vale destacar o seguinte: uma vez que $[G, D]$ tem índice finito em G (ver Lema 2.2.6), o *Teorema B* nos permite deduzir algumas informações muito específicas da estrutura do grupo G. Mais precisamente, o *Corolário B1* dado no final deste capítulo mostra que nas hipóteses do *Teorema B* o grupo G tem uma série normal

$$1 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq G_3 \trianglelefteq G$$

tal que G_1 tem expoente finito, G/G_2 é finito e G_2/G_1 é abeliano. Mais ainda, G_3 é hiperabeliano e tem índice finito em G.

Os *Teorema B* e *C* foram apresentados em [19].

Um Lema técnico muito importante é o seguinte:

Lema 2.2.1 *Seja m um inteiro positivo. Suponha que D age sobre G de modo que $C_G(V)$ é finito e tem ordem m. Se α age invertendo todo elemento de G, então $C_G(\beta)$ tem ordem finita m.*

Demonstração:
É claro que o automorfismo de G induzido por α está no centro do grupo de automorfismos de G. Assim, β e β^{α} induz o mesmo automorfismo de G. Logo, $C_G(\beta) = C_G(\beta^{\alpha}) = C_G(V)$ tem ordem m. ■

2.2.1 Resultados sobre grupo finito de ordem ímpar

Lembre que antes de demonstrarmos o *Teorema A* , mostramos um resultado essencial sobre grupos finitos de ordem ímpar, a saber, o Teorema 2.1.6. Nesta seção acontece o mesmo. São contribuições deste trabalho os Teoremas 2.2.4 e 2.2.5. Suas demonstrações requerem os seguintes resultados de [30]

Teorema 2.2.2 *Seja D um grupo isomorfo ao grupo diedral de ordem 8. Suponha que D age num grupo finito G tal que $C_G(V) = 1$ e $C_G(\alpha)$ tem expoente e. Então o expoente do subgrupo derivado G' é e-limitado.*

Teorema 2.2.3 *Seja A um grupo isomorfo ao grupo simétrico S_4 e α uma involução em $A \backslash V$. Suponha que A age num grupo finito G tal que $C_G(V) = 1$ e $C_G(\alpha)$ tem expoente e. Então o expoente de G é limitado somente em termos de e.*

Agora estamos prontos para demonstrarmos os Teoremas referidos anteriormente:

Teorema 2.2.4 *Sejam e e m inteiros positivos. Seja G um grupo de ordem ímpar e suponha que D age sobre G de modo que $|C_G(V)| = m$ e $C_G(\alpha)$ tem expoente e. Então o subgrupo derivado $[G, D]'$ tem expoente (e, m)-limitado.*

Demonstração:
Sem perda de generalidade podemos assumir que $G = [G, D]$. No caso $m = 1$, o resultado segue direto do Teorema 2.2.2. Assim, suponhamos $m \geq 2$. Seja N o produto de todos os subgrupos D-invariantes normais H tais que $H \cap C_G(V) = 1$. Pelo Lema 2.1.2 temos $C_N(V) = 1$. Novamente pelo Teorema 2.2.2 conclui-se que N' tem expoente e-limitado. Podemos então passar ao quociente G/N' e supor sem perda de generalidade que N é um grupo abeliano. Seja $M = \langle C_N(\alpha)^G \rangle$. Como N é um grupo abeliano e $C_G(\alpha)$ tem expoente e, então M também tem expoente e. Assim, podemos passar ao quociente G/M e assumir sem perda de generalidade que $C_N(\alpha) = 1$. Agora, segue do Lema 2.1.4 que $N \leq Z([G, \alpha])$. Pelo Lema 2.2.1

$C_N(\beta)$ tem ordem no máximo m. Seja $M_1 = \langle C_N(\beta)^G \rangle$. Já que N é abeliano e $C_N(\beta)$ tem ordem no máximo m, então que M_1 tem expoente m-limitado. Desta forma, podemos passar ao quociente G/M_1 e assumir sem perda de generalidade que $C_N(\beta) = 1$. Segue do Lema 2.1.4 que $N \leq Z([G, \beta])$. Como D é gerado por α e β, então $[G, D] = [G, \alpha][G, \beta]$ e, usando o fato de que $G = [G, D]$ concluímos que $N \leq Z(G)$.

Consideremos primeiro o caso em que $N = 1$. Seja T o subgrupo normal minimal D-invariante de G. Assim, $C_T(V) \neq 1$ e $|C_{G/T}(V)| < m$. Note que T é um p-grupo abeliano elementar para algum primo p dividindo m. Portanto, o expoente de T divide m. Desde que $|C_{G/T}(V)| < m$, então por indução o grupo $(G/T)'$ tem expoente (e, m)-limitado. Pelo Lema 1.5.2 $G'T$ também tem expoente (e, m)-limitado. No caso geral onde $N \leq Z(G)$, o quociente $G/Z(G)$ tem expoente limitado e, pelo Teorema 2.1.10, o expoente de G' é limitado. Podemos então passar ao quociente G/G' e assumir que $G' = 1$. Isto completa a demonstração. ■

Teorema 2.2.5 *Sejam e e m inteiros positivos. Seja G um grupo de ordem ímpar e suponha que A age sobre G de modo que $|C_G(V)| = m$ e $C_G(\alpha)$ tem expoente e. Então o grupo G tem expoente (e, m)-limitado.*

Demonstração:
Usaremos indução sobre m. No caso $m = 1$, o resultado segue do Teorema 2.2.3. Assim, suponhamos $m \geq 2$. Seja $N = \prod_{i \in I} H_i$ onde os H_i são subgrupos normais A-invariantes tais que $H_i \cap C_G(V) = 1$. Pelo Lema 2.1.2 temos $C_N(V) = 1$. Novamente pelo Teorema 2.2.3 temos N de expoente e-limitado. Podemos então passar ao quociente G/N e supor sem perda de generalidade que $N = 1$.

Seja M o subgrupo normal minimal A-invariante de G. Assim, $C_M(V) \neq 1$ e $|C_{G/M}(V)| < m$. Note que M é um p-grupo abeliano elementar para algum primo p dividindo m. Portanto, o expoente de M divide m. Desde que $|C_{G/M}(V)| < m$, então por indução o grupo G/M tem expoente (e, m)-limitado e, usando o Lema 1.5.2, segue que G tem expoente (e, m)-limitado como queríamos. ■

2.2.2 Demonstrações dos Teoremas B e C

Lema 2.2.6 *Seja G um grupo periódico quase localmente solúvel contendo um p-grupo finito P tal que $C_G(P)$ é finito. Então, o índice $|G : [G, P]|$ é finito.*

Demonstração:
Seja $N = [G, P]$. Combinando os Lemas 1.7.30 e 1.7.31 concluímos que $G/O_{p'}(G)$ é um grupo de Chernikov, logo, $N/O_{p'}(N)$ também será. Como $N/O_{p'}(N)$ é um grupo de Chernikov, então pelo Lema 2.1.11 temos que o índice $|C_{G/N}(P) : C_G(P)N/N|$ é finito. Por outro lado, $C_G(P)$ também é finito, resultando que $C_{G/N}(P)$ é finito. Mas a imagem de P em G/N é central, então $C_{G/N}(P) = G/N$ e a demonstração está completa. ■

Proposição 2.2.7 *Seja G um grupo localmente finito contendo p-subgrupo B tal que $C_G(B)$ é finito e $C_G(\beta)$ tem expoente e para algum $\beta \in B$. Então, G é quase localmente solúvel.*

A Propisição 2.2.7 foi demonstrada no capítulo 2 (ver Proposição 2.1.12) para o caso particular em que B tem ordem 4. O caso geral dado aqui admite uma demonstração muito similar aquela dada pela Proposição 2.1.12. De fato, apenas algumas modificações óbvias são necessárias. Por isso, deixamos a Proposição 2.2.7 sem uma demonstração.

A partir de agora demonstraremos o *Teorema B* e em seguida o seu Corolário.

Demonstração:
Relembre que G é um grupo localmente finito contendo um subgrupo diedral de D (de ordem 8) tal que $C_G(V)$ é finito e $C_G(\alpha)$ de expoente finito. Seja $R = [G, D]$. Desejamos mostrar que R' tem expoente finito. Primeiramente, será útil mostrar que:

(1) Se N é um $2'$-subgrupo normal e nilpotente de G,
então $[N, R]$ tem expoente finito.

De fato, seja $N_0 = \langle C_N(\alpha)^G \rangle$. Como N é nilpotente e $C_N(\alpha)$ tem expoente finito, então N_0 terá expoente finito. Podemos passar ao quociente G/N_0 e assumir que $C_N(\alpha) = 1$. Neste caso, o Lema 2.1.4 garante que $N \leq Z([G, \alpha])$. Pelo Lema 2.2.1 o $C_N(\beta)$ é finito. Seja $N_1 = \langle C_N(\beta)^G \rangle$. Como N_1 é nilpotente e $C_N(\beta)$ tem expoente finito, então N_1 terá expoente finito. Podemos passar ao quociente G/N_1 e assumir que $C_N(\beta) = 1$. Assim, pelo Lema 2.1.4 temos que $N \leq Z([G,\beta])$. Uma vez que $R = [G,\alpha][G,\beta]$, a afirmação *(1)* está demonstrada.

Como $C_G(D)$ é finito, podemos usar a Proposição 2.2.7 e concluir que G tem um subgrupo normal localmente solúvel que tem índice finito em G. Seja $K = O(G)$. Segue do Lema 1.7.31 que G/K é um grupo de Chernikov. Pelo Lema 1.7.30, G satisfaz min-2 e, daí, podemos escolher um 2-subgrupo de Sylow P de G contendo D. Seja P^0 a parte divisível de P e, daí, o índice $|P : P^0|$ é finito. É claro que D normaliza P^0. Além disso, KP^0 é normal em G e o índice $|G : KP^0|$ é finito. De fato, se $K = 1$, então G é um grupo de Chernikov e sem $2'$-subgrupos normais. Portanto, P^0 é normal em G e tem índice finito em G. Logo, no caso geral, KP^0 é normal em G e tem índice finito em G.

Agora será útil também mostrar que:

(2) Se N é um subgrupo normal e nilpotente de G,
então $[P^0 \cap N, R] = 1$.

Com efeito, o centralizador $C_{P^0}(\alpha)$ é um grupo de Chernikov de expoente finito e, portanto, finito. Agora, segue do Lema 2.1.3 que $[P^0,\alpha]$ tem índice finito em P^0. Mas então, $P^0 = [P^0,\alpha]$ (ver o Lema 1.7.15). Em outras palavras, α inverte todos os elementos de P^0. Com isso, podemos aplicar o Lema 2.2.1 e concluir que o $C_{P^0}(\beta)$ é finito. Assim, β inverte todos os elementos de P^0 também. Podemos então garantir que $P^0 \cap N$ é um subgrupo normal de G invertido por α e β. O Lema 2.1.4 nos garante que $P^0 \cap N$ comuta com ambos $[G,\alpha]$ e $[G,\beta]$. Uma vez que $R = [G,\alpha][G,\beta]$, a afirmação *(2)* está demonstrada.

Seja $M = \langle [K,D]^G \rangle$ o fecho normal de $[K,D]$ em G. Então $M \leq K$ pois K é normal em G e $[K,D] \leq K$. Em vista do Lema 2.1.14, temos que $M/[M,\beta]$ é um grupo solúvel. Assim, existe inteiro positivo j tal que o j-ésimo grupo derivado $M^{(j)}$ está contido em $[M,\beta]$. Daí, $M^{(j)} \leq [K,D]$ e, deduzimos do Teorema 2.2.4 que $M^{(j+1)}$ tem expoente finito. Uma vez que $M^{(j+1)}$ é normal em G tem expoente finito, podemos passar ao quociente $G/M^{(j+1)}$ e supor, sem perda de generalidade, que M é solúvel de comprimento derivado $dl(M) \leq j+1$.

A demonstração será completada usando indução sobre $dl(M)$. Suponha que $M = 1$. Pelo Corolário 1.8.12, o índice de M em K é finito e, como estamos no caso $M = 1$, segue que K é finito. Usando que P^0 não tem subgrupos de índice finito, concluímos que $[K,P^0] = 1$ e, portanto, $P^0 = O_2(KP^0)$. Logo, no caso $M = 1$, o subgrupo P^0 é normal em G. Usando agora a afirmação *(2)*, segue que $P^0 \leq Z(R)$. Uma vez que KP^0 tem índice finito em G e P^0 tem índice finito em KP^0, concluímos que P^0 tem índice finito em G. Assim, $Z(R)$ tem índice finito em R. Pelo Teorema de Schur (ver Teorema 1.3.7) segue que R' é finito.

Agora suponha $M \geq 1$ e seja Q o último termo não trivial da série derivada de M. Por indução, $R'Q/Q$ tem expoente finito. Como Q é abeliano, segue da afirmação *(1)* que $[Q, R]$ tem expoente finito. Passando ao quociente sobre $[Q, R]$, podemos assumir que $Q \leq Z(R)$ e, juntando com o fato de que $R'Q/Q$ tem expoente finito, o Teorema 2.1.10 nos garante que o expoente de R'' também é finito. Passando então ao quociente G/R'' podemos assumir que R' é abeliano.

Seja $R_0 = O(R')$. Pela afirmação *(1)*, o expoente de $[R_0, R]$ é finito e, passando ao quociente $G/[R_0, R]$, assumiremos sem perda de generalidade que $R_0 \leq Z(R)$. Além disso, por causa da afirmação *(2)* teremos $P^0 \cap R' \leq Z(R)$. Como $P \cap R'$ é um 2-subgrupo de Sylow de R', então $R_0(P^0 \cap R')$ tem índice finito em R'. Além do que, $R_0(P^0 \cap R') \leq Z(R)$. Sejam $\overline{R} = R/Z(R)$ e $\overline{R'} = R'Z(R)/Z(R)$. Daí, $\overline{R'}$ é um 2-grupo finito. Neste caso, o centralizador $C_{\overline{R}}(\overline{R'})$ é um subgrupo de $\overline{R}$ que é nilpotente de classe no máximo 2, característico e de índice finito em $\overline{R}$. Logo, R contém um subgrupo N que é nilpotente, característico e de índice finito em R. De acordo com a afirmação *(1)* $[O(N), R]$ tem expoente finito. Passando ao quociente $G/[O(N), R]$ podemos assumir que $O(N) \leq Z(R)$. Além disso, novamente pela afirmação *(2)*, temos $P^0 \cap N \leq Z(R)$. Como $P \cap N$ é um 2-subgrupo de Sylow de N, então $O(N)(P^0 \cap N)$ tem índice finito em N. Ademais, $O(N)(P^0 \cap N) \leq Z(R)$. A conclusão é que $R/Z(R)$ é finito. Portanto, pelo Teorema de Schur, segue que R' é finito. A demonstração está completa.

■

Corolário B1 *Seja G como no Teorema B. Então G tem uma série normal*

$$1 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq G_3 \trianglelefteq G$$

tal que G_1 tem expoente finito, G/G_2 é finito e G_2/G_1 é abeliano. Mais ainda, G_3 é hiperabeliano e tem índice finito em G.

Demonstração:
Seja $R = [G, D]$. O *Teorema B* nos garante que R' tem expoente finito. Pela Proposição 2.2.7, G é quase localmente solúvel. Pelo Lema 2.2.6 G/R é finito. Seja G_3 o subgrupo normal maximal localmente solúvel de G. Pela Proposição 2.2.7, G_3 tem índice finito em G. De acordo com o resultado de [27], G_3 é um grupo hiperabeliano.

Considere os seguintes subgrupos normais de G:

$$G_1 = R' \cap G_3 \ , \ G_2 = R \cap G_3.$$

Como $|G : G_3|$ é finito, então $|G_3R : G_3|$ também é finito. Desde que R/G_2 é isomorfo a G_3R/G_3, então ele será finito. Agora, é imediato ver que G/G_2 é finito. O fato de R' ter expoente finito, nos dá que o expoente de G_1 é finito. Por último, é fácil ver que G_2/G_1 é um grupo abeliano. A conclusão é que a série $1 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq G_3 \trianglelefteq G$ tem as propriedades requeridas. ■

Finalizaremos agora este capítulo com a demonstração do *Teorema C*:

Demonstração:
Relembre que G é um grupo localmente finito contendo um subgrupo isomorfo a A, o grupo simétrico de quatro símbolos, tal que $C_G(V)$ é finito e $C_G(\alpha)$ tem expoente finito onde $\alpha \in A \backslash V$. Como $C_G(D)$ é finito, podemos usar a Proposição 2.2.7 para concluir que G tem um subgrupo normal localmente solúvel de índice finito em G. Seja $K = O(G)$. Pelo Lema 1.7.30 G satisfaz min-2. Portanto, pelo Lema 1.7.31 temos que G/K é um grupo de Chernikov. Pelo Teorema 2.2.5, K tem expoente finito. Assim, podemos passar ao quociente G/K e supor, sem perda de generalidade, que G é um grupo de Chernikov. Seja G^0 a parte divisível de G. Como sabemos, o índice $|G : G^0|$ é finito. O centralizador $C_{G^0}(\alpha)$ é um grupo de Chernikov de expoente finito, portanto, ele é finito. Procedendo-se de maneira análoga a demonstração do *Teorema B*, concluiremos que α inverte todos os elementos de G^0 e, assim, o automorfismo que α induz sobre G^0 está no centro do grupo de automorfismos de G^0. Disto, segue que $[A, \alpha]$ age trivialmente sobre G^0. Mas $[A, \alpha]$ contém V, logo, V centraliza G^0. Finalmente, já que $C_G(V)$ é finito e V centraliza G^0, então $G^0 = 1$ e, daí, G é finito.

■

Referências Bibliográficas

[1] V. V. Belyaev, *Locally finite Chevalley groups*, Studies in Group Theory, **150** (1984), 39–50.

[2] A. V. Borovik, *Embeddings of finite Chevalley groups and periodic linear groups*, Siberian Math. J. **24** (1983), 843–855.

[3] M. R. Dixon, *Sylow theory , formations and Fitting classes in locally finite groups*, World Scientific, Singapure, New Jersey, London, Hong Kong, 1994.

[4] Feit and J. Thompson, *Solvability of groups of odd order*, Pacific J. Math. **13** (1963), 773–1029.

[5] P. Fong, *On orders of finite groups and centralizers of p-elements*, Osaka J.Math. **13** (1976), 483-489.

[6] D. Gorenstein, *Finite groups*, Harper and Row, New York, 1968.

[7] P.Hall and G. Higman, *On the p-length of p-soluble group and reduction theorems for Burnside´s problem,* Proc. London Math Soc. (3) **6** (1956), 1-42.

[8] B. Hartley and G. Shute, *Monomorphisms and direct limits of finite groups of Lie type,* Q. J. Math. Oxford (2) **35** (1984), 49–71.

[9] B. Hartley and T. Meixner, *Periodic groups in which the centralizer of an involution has bounded order*, J. Algebra **64** (1980), 285–291.

[10] B. Hartley and T. Meixner, *Finite soluble groups in which the centralizer of an element of prime order is small*, Arch. Math. (Basel) **36** (1981), 211-213.

[11] B. Hartley, *Periodic locally soluble groups containing an element of prime order with Cernikov centralizer*, Q. J. Math. Oxford (2) **33** (1982), 309-323.

[12] B. Hartley, *A general Brauer-Fowler Theorem and centralizers in locally finite groups*, Pacific J. Math. **152** (1992), 101-117.

[13] O. H. Kegel and B. F. A. Wehrfritz, *Locally finite groups,* North-Holland, Amsterdam, 1973.

[14] O. H. Kegel and B. F. A. Wehrfritz, *Strong finiteness conditions in locally finite groups*, Math. Z. **117** (1970), 309-324.

[15] E. I. Khukhro, *Groups and Lie rings admitting an almost regular automorphism of prime order*, Math. USSR Sbornik, **71** (1990), 51-63.

[16] E.I. Khukhro and N.Yu. Makarenko, *Large characteristic subgroups satisfying multilinear commutator identities*, J. Lond. Math. Soc. **75** (2007), 635-646.

[17] E. I. Khukhro and P. Shumyatsky, *Bounding the exponent of a finite group with automorphisms*, J. Algebra **212** (1999), 363–374.

[18] E. Lima and P. Shumyatsky, *On locally finite groups with a four-subgroup whose centralizer is small*, Monatsh.Math, **172(1)** (2013), 77–84.

[19] E. Lima and P. Shumyatsky, *On the structure of locally finite groups with small centralizers*, Journal of Algebra, **398** , 303-309.

[20] A. Mann, *The exponents of central factor and commutator groups*, J. Group Theory **10** (2007), 435-436.

[21] K. Oliveira and P. Shumyatsky, C. Sica *On groups of odd order admitting an elementary 2-group of automorphisms*, Rendiconti del Seminario Matematico dell'Universit di Padova **126** (2011), 229–236.

[22] D. J. S. Robinson, *A course in the theory of groups*, Springer-Verlag, New York 1996.

[23] N. Rocco and P. Shumyatsky, *On periodic groups having almost regular 2-elements*, Proc. Edinburgh Math. Soc., **41** (1998), 385–391.

[24] E. Romano and P. Shumyatsky , *On locally finite groups with a small centralizer of a four-subgroup*, Archiv der Mathematik **97** (2011), 1-10.

[25] H. E. Rose, *A Course on finite groups*, Springer London Dordrecht Heidelberg New York, 2009.

[26] P. Shumyatsky, *Exponent of a finite group with a fixed-point-free four-group of automorphisms*, Israel Journal of Mathematics **194** (2013), 895-906.

[27] P. Shumyatsky, *On locally soluble periodic groups with Chernikov centralizer of a four-subgroup*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **37** (1994), 133-138.

[28] P. Shumyatsky, *On centralizers in locally finite groups*, J. Algebra **243** (2001) 551–556.

[29] P. Shumyatsky, *On the exponent of a finite group with an automorphisms group of order twelve*, J. Algebra **331**, 482–489 (2011).

[30] P. Shumyatsky, *Exponent of a finite group with four-group of automorphisms,* Monatshefte fur Mathematik, **168** (2012), 113-124.

[31] V. P. Shunkov, *On periodic group with an almost regular involution*, Algebra and Logic **11** (1972), 260–272.

[32] V. P. Shunkov, *On the minimality problem for locally finite groups*, Algebra and Logic **9** (1970), 137–151.

[33] J. C. Silva, *Variedades de grupos e generalizações verbais para o problema restrito de Burnside*, Universidade de Brasília, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, 2009.

[34] B. Stellmacher and H. Kurzweil , *The theory of finite groups*, Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg, 2004.

[35] E. Zelmanov, *The solution of the restricted Burnside problem for groups of odd exponent*, Math. USSR Izv. **36** (1991), 41-60.

[36] E. Zelmanov, *The solution of the restricted Burnside problem for 2-groups*, Math. Sb. **182** (1991), 568-592.