Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Equações Diofantinas Envolvendo Potências de Termos de Sequências Recorrentes

por

Ana Paula de Araújo Chaves

Brasília
2013

Ana Paula de Araújo Chaves

Equações Diofantinas Envolvendo Potências de Termos de Sequências Recorrentes

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade de Brasília, para a obtenção do grau de Doutora em Matemática.
Área de concentracão: Álgebra
Orientador: Prof. Dr. Diego Marques Ferreira

Brasília
2013

Dedico este trabalho aos meus pais e irmãos. Sempre presentes apesar da distância.
Também dedico especialmente à Maria Cristina, que o tempo nunca há de afastar.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente aos meus pais, Jackeline e Pampoline, por todo o apoio, amor, carinho, compreensão e dedicação que me inspiram em tudo o que faço. Sem vocês, este trabalho não existiria. Agradeço também aos meus irmãos Emanuel, Emanuela, Marcela e Neto, pelas palavras de apoio em cada etapa, pelo companheirismo, carinho e amizade que sempre me fortaleceram.

Também faço aqui um agradecimento especial à Maria Cristina Del Pozo Mendoza, por fazer com que esses anos de doutorado fossem mais *leves*, por construir meu *porto seguro* em Brasília, pelos cuidados, atenção, paciência, dedicação, incentivo e verdadeiro companheirismo. Marcante em todas os aspectos da minha vida.

Agradeço aos meus grandes professores: Luquésio Jorge, José Othon, Fernanda Camargo, Fábio Montenegro, Antônio Caminha, Fernando Pimentel, Jânio Kléo, Luciana Ávila e Robério Rogério, pelos ensinamentos e inspiração.

Aos meus amigos: David Ribeiro, Thiago Chaves (Senpai), José Cardoso, Armando Araújo, Darley Tabosa, Érica Portela, Victor Wesley, Fernando David, Pedro Victor e Raphael Coutinho, por todas as conversas, apoio e amizade incondicional, mesmo à distância.

Aos professores: Fábio Brochero, José Plínio e José Othon por terem participado da banca e contribuído para melhorar o trabalho.

Aos meus companheiros de Doutorado: Thiago Porto, Luciana Ventura, Vinícius Facó, Daiane Soares, Kaliana Dias, Thaynara Lima, Andréia Borges, pelas conversas matemáticas e o companheirismo nesses anos de UnB.

Ao professor Hemar Godinho, pelas orientações, incentivo e acolhimento.

Ao meu orientador Diego Marques, pelo apoio, orientação e empenho no desenvolvimento desse trabalho.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

"Se os números não são bonitos, eu não sei o que é."

Paul Erdös

(2013 - Centenário de Paul Erdös)

"O valor das coisas não está no tempo que elas duram, mas na intensidade com que acontecem. Por isso existem momentos inesquecíveis, coisas inexplicáveis e pessoas incomparáveis.

Fernando Pessoa

Resumo

Seja $(F_n)_n$ a sequência de Fibonacci dada por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $n \geq 0$, onde $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$. Existem várias identidades interessantes envolvendo os termos desta sequência, como por exemplo a identidade quadrática $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$, para todo $n \geq 0$. Isso nos diz que a soma de quadrados de dois números de Fibonacci consecutivos continua sendo um número de Fibonacci. Tendo em vista estudar o comportamento de somas mais gerais, em 2010, Marques e Togbé mostraram que se $s > 2$, então existe apenas uma quantidade finita de números de Fibonacci da forma $F_n^s + F_{n+1}^s$ e, em 2011, Luca e Oyono encontraram todos esses exemplos. Seja $(F_n^{(k)})_n$ a sequência de k-bonacci dada pelos k valores iniciais $0, \ldots, 0, 1$, e tal que os demais termos são iguais à soma dos k termos anteriores. Neste trabalho, estudamos uma generalização do resultado de Luca e Oyono: a equação Diofantina $(F_m^{(k)})^s + (F_{m+1}^{(k)})^s = F_n^{(k)}$. Mostramos que para $s = 2$, ao contrário da sequência de Fibonacci, esta equação não possui soluções inteiras positivas n, m e k para $m > 1$ e $k \geq 3$. Para $s \geq 3$, mostramos, sobre certas condições, que essa equação não possui soluções inteiras não triviais. Além disso, provamos, em particular, que se $(G_m)_m$ é uma sequência recorrente linear (sob hipóteses fracas) e $G_n^s + \cdots + G_{n+k}^s \in (G_m)_m$ para infinitos inteiros $n > 0$, então s é limitada por uma constante efetivamente calculável, que depende apenas de k e dos parâmetros de G_m.

Palavras-chave: Sequência de Fibonacci, sequências recorrentes, forma linear em logaritmo, método de redução, equações Diofantinas.

Abstract

Let $(F_n)_n$ be the Fibonacci sequence given by $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ for $n \geq 0$, where $F_0 = 0$ and $F_1 = 1$. There are several interesting identities involving this sequence such as the quadratic identity $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$, for all $n \geq 0$. This fact tells that the sum of squares of two consecutive Fibonacci numbers still belongs to the Fibonacci sequence. In order to study the behavior of more general sums, in 2010, Marques e Togbé showed that if $s > 2$, then there exist only finitely many Fibonacci numbers of the form $F_n^s + F_{n+1}^s$ and, in 2011, Luca e Oyono found all these examples. Let $(F_n^{(k)})_n$ be the k-generalized Fibonacci sequence which is defined by the initial values $0, 0, \ldots, 0, 1$ (k terms) and such that each term afterwards is the sum of the k preceding terms. In this work, we study a generalization of Luca and Oyono's result: the Diophantine equation $(F_m^{(k)})^s + (F_{m+1}^{(k)})^s = F_n^{(k)}$. We prove that for $s = 2$, contrarily to the Fibonacci case, this Diophantine equation has no solution in positive integers n, m and k with $m > 1$ and $k \geq 3$. For $s \geq 3$, we state, under certain conditions, that this Diophantine equation has no nontrivial solutions. Moreover, we also prove that if $(G_n)_n$ is a linear recurrence sequence (under weak assumptions) and $G_n^s + \cdots + G_{n+k}^s \in (G_m)_m$ for infinitely many integers $n > 0$, then s is bounded by an effectively computable constant depending only on k and the parameters of G_m.

Keywords: Fibonacci numbers, recurrence sequence, linear form in logarithm, reduction method, Diophantine equations,.

Sumário

Prefácio **VII**

1 Preliminares **1**

1.1 Sequências recorrentes 1

1.2 A sequência de k-bonacci 4

1.3 Formas lineares em logaritmos 6

1.4 O método de redução 8

1.5 Outros resultados auxiliares 9

2 A Equação $G_{n_1}^s + \cdots + G_{n_k}^s = b \cdot G_m$ **13**

2.1 O caso assintótico 13

2.2 Uma aplicação do método 22

3 A Equação $(F_m^{(k)})^s + (F_{m+1}^{(k)})^s = F_n^{(k)}$ **25**

3.1 O caso $s = 2$ 25

3.2 O caso $s \geq 3$ 36

Referências **58**

Introdução

Diofanto, o "pai da álgebra", é famoso pelo seu livro *Aritmética*, um trabalho sobre teoria dos números que envolve a solução de algumas equações algébricas. No entanto, poucos fatos são conhecidos da sua vida e existem várias discurssões a cerca da época em que ele viveu. Grande parte dos historiadores acreditam que Diofantus realizou seus trabalhos por volta de 250 AC. Esse matemático foi o primeiro algebrista a empregar símbolos, chamados de *aritmos*, para designar alguma quantidade desconhecida, e também símbolos para operações algébricas e potências. *Aritmética* também é importante por seus resultados de teoria dos números, como por exemplo que nenhum inteiro da forma $8n+7$ pode ser escrito como a soma de três quadrados. Acredita-se que no original, *Aritmética* era uma coletânea de 13 livros, mas os manuscritos gregos que sobreviveram continham apeas 6 destes livros. Os outros são considerados perdidos, e possivelmente foram queimados no grande incêndio ocorrido em Alexandria, não muito tempo após Diofanto cuncluir a coletânea.

Pelos estudos pioneiros de Diofanto, denomina-se por *Equação Diofantina* uma equação da forma

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \ , \tag{1}$$

onde f é uma função de n variáveis, $n \geq 2$, e $x_1, \ldots, x_n$ assumem apenas valores inteiros. Quando f é tal que alguma de suas variáveis aparece como expoente, então dizemos que (1) é uma *Equação Diofantina Exponencial*. Definitivamente, o exemplo mais conhecido desse tipo de equação, é o agora denominado teorema de Fermat-Wiles, que afirma que não existem inteiros positivos x, y, z e n, com $n > 2$, satisfazendo $x^n + y^n = z^n$. Esse teorema surgiu da famosa anotação feita por Pierre de Fermat, em 1637, na margem de uma cópia do livro *Aritmética*, que estabelecia o resultado e continha a célebre afirmação: "Encontrei uma demonstração verdadeiramente maravilhosa disto, mas esta margem é estreita demais para contê-la."* Apesar da afirmação de Fermat, sua demonstração "maravilhosa"não foi encontrada. Então, inúmeros matemáticos foram tentados à demonstrar a conjectura, o que aconteceu apenas 358 anos depois com a prova de Andrew Wiles.

Outro tema central do nosso trabalho é a famosa *Sequência de Fibonacci*, assim denominada por ter sido apresentada ao mundo ocidental por Leonardo Fibonacci (também conhecido como Leonardo de Pisa ou Leonardo Pisano) em seu livro *Liber Abaci* de 1202. Fibonacci considerou o crescimento idealizado (biologicamente não real) de uma população de coelhos com as condições: Um par de coelhos recém-nascidos, um macho e uma fêmea, são colocados em um campo; os coelhos acasalam com um mês de idade, para que no final do segundo mês a fêmea dê a luz à um par de coelhos; coelhos nunca morrem e um casal de coelhos sempre gera um novo par (um macho e uma fêmea) todos os meses a partir do seu segundo mês. O problema que Fibonacci analisou foi: quantos casais de coelhos teremos em um ano? Uma rápida reflexão nos dá:

- Ao fim do primeiro mês, eles acasalam, mas ainda há apenas **1** casal;

- Ao fim do segundo mês, a fêmea dà a luz a um novo casal, donde temos **2** casais;

*No original: "Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet."

- Ao fim do terceiro mês, a primeira fêmea dà a luz à outro casal e o segundo par acasala, nos dando **3** casais;

- Ao fim do quarto mês, a primeira e a segunda fêmeas dão a luz a um novo par, totalizando **5** casais.

No final do n-ésimo mês, o número de pares de coelhos é igual ao número de novos pares (que é o número de pares do mês $n-2$), mais o número de pares vivos do último mês $(n-1)$. Este é o n-ésimo número de Fibonacci. Rigorosamente, temos que a sequência de Fibonacci, que denotaremos por $(F_n)_n$, é tal que definimos $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, e apartir daí temos $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para todo $n \geq 0$. Os primeiros números de Fibonacci são:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \ldots$$

O nome "Sequência de Fibonacci" foi usado pela primeira vez pelo teórico dos números Édouard Lucas, no século IXX.

Generalizando o conceito da sequência de Fibonacci, temos as *Sequências Recorrentes Lineares de ordem* k, $(G_n)_n$, onde definimos os coeficientes $c_1, \ldots,$ c_k, os k primeiros termos $G_0, G_1, \ldots, G_{k-1}$ da sequência, e a partir daí temos

$$G_{n+k} = c_1 G_{n+k-1} + c_2 G_{n+k-2} + \cdots + c_k G_n, \quad \forall n \geq 0.$$

Equações Diofantinas envolvendo sequências recorrentes, como a sequência de Fibonacci, têm sido objeto de extenso estudo da teoria dos números, desenvolvendo diversas ferramentas para resolver tais equações. Um resultado importante nessa direção, foi publicado na *Annals of Mathematics* (revista matemática mais prestigiada da atualidade), pelos matemáticos Y. Bugeaud, M. Mignotte e S. Siksek, em 2006, onde mostraram que as únicas soluções para a equação Diofantina $F_n = y^m$, são $(n, y, m) \in \{(0, 0, m), (1, 1, m), (2, 1, m),$ $(6, 2, 3), (12, 12, 2)\}$. Em 2010, D. Marques e A. Togbé, motivados pela pela bela identidade $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$, mostraram que se a equação Diofantina

$F_n^s + F_{n+1}^s = F_m$ for satisfeita para infinitos $n \in \mathbb{N}$, então $s = 1$ ou 2. Logo em sequida, F. Luca e R. Oyono, em 2011, resolveram completamente esta equação, mostrando que a equação anterior não possui solução para $s \geq 3$ e $n \geq 2$.

Nossos resultados tratam de generalizações desses trabalhos, e está organizado como segue:

No Capítulo 1, apresentamos os resultados auxiliares para o desenvolvimento da tese, onde destacamos o seguinte teorema sobre sequências recorrentes lineares:

Teorema 1 *Seja $(x_n)_n$ uma sequência recorrente linear onde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ são as raízes da recorrência e $a_1, \ldots, a_r$ suas respectivas multiplicidades. Então, os termos desta sequência podem ser escritos como*

$$x_n = Q_1(n)\lambda_1^n + Q_2(n)\lambda_2^n + \cdots + Q_r(n)\lambda_r^n \ ,$$

onde $Q_1, \ldots, Q_r$ são polinômios sobre o corpo $\mathbb{Q}(\{\lambda_j\}_{j=1}^r)$, com grau $\partial(Q_i) < a_i$, para todo $1 \leq i \leq r$.

No Capítulo 2, estabelecemos nosso primeiro resultado, que trata de certas equações Diofantinas envolvendo potências de termos de sequências recorrentes lineares. Mais precisamente, temos:

Teorema 2 *Seja $(G_m)_m$ uma sequência recorrente linear inteira, não nula, tal que seu polinômio característico possui uma única raíz simples, positiva, fora do círculo unitário. Sejam s, k, b e M inteiros positivos e $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{k-1} \in \mathbb{Z}$ tais que $|\epsilon_j| \leq M$, para $1 \leq j \leq k-1$. Então existe uma constante C, efetivamente computável, tal que se*

$$G_n^s + \epsilon_1 G_{n+1}^s + \cdots + \epsilon_{k-1} G_{n+k-1}^s + G_{n+k}^s \in (bG_m)_m \ , \qquad (2)$$

para infinitos $n \in \mathbb{N}$, temos $s < C$. A constante C depende apenas de k, b, M e dos parâmetros da sequência.

Ainda nesse capítulo, usando o método desenvolvido para demonstrar o teorema anterior, mostramos o seguinte resultado sobre equações Diofantinas envolvendo potências distintas de números de Fibonacci:

Teorema 3 *Sejam $\ell, s_1, \ldots, s_\ell, a_1, \ldots, a_\ell$ inteiros com $\ell > 1$ e $s_j \geq 1$. Suponha que existe $1 \leq t \leq \ell$ tal que $a_t \neq 0$ e $s_t > s_j$, para todo $j \neq t$. Se s_t é par ou a_t não é uma potência positiva de 5, então a soma*

$$a_1 F_{n+1}^{s_1} + a_2 F_{n+2}^{s_2} + \cdots + a_\ell F_{n+\ell}^{s_\ell}$$

não pertence à sequência de Fibonacci para quase todo $n \in \mathbb{N}$.

No Capítulo 3, começamos resolvendo completamente a seguinte equação Diofantina:

Teorema 4 *A equação Diofantina*

$$(F_m^{(k)})^2 + (F_{m+1}^{(k)})^2 = F_n^{(k)},$$

não possui solução para $k \geq 3$ e $n \geq 2$.

Tendo em vista generalizar a equação anterior para potências maiores, mostramos o seguinte resultado:

Teorema 5 *Sejam m, n, k e s inteiros tais que $3 \leq k \leq \min\{m, \log s\}$. Então a equação Diofantina*

$$(F_m^{(k)})^s + (F_{m+1}^{(k)})^s = F_n^{(k)},$$

não possui solução.

Brasília, agosto de 2013.

Ana Paula Chaves

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Sequências recorrentes

Sequências recorrentes são sequências $(x_n)_n$ nas quais cada termo é determinado em função dos termos anteriores. Dado um inteiro positivo k, uma *sequência recorrente de ordem* k é aquela onde definem-se seus k primeiros termos e a partir do $(k+1)$-ésimo termo, estes são determinados como uma função dos k termos anteriores:

$$x_{n+k} = f(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \dots, x_n).$$

Este tipo de sequência possui um estudo muito abrangente, confundido-se em larga escala com a teoria dos Sistemas Dinâmicos, e um comportamento que pode ser bastante caótico e de difícil descrição, mesmo que qualitativamente. Um caso particular, e nosso principal interesse, é quando a função f é linear, ou seja, quando existem constantes $C_1, C_2, \dots, C_k$ tais que

$$x_{n+k} = C_1 x_{n+k-1} + C_2 x_{n+k-2} + \cdots + C_k x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Sequências que satisfazem este tipo de recorrência são chamadas *sequências recorrentes lineares de ordem* k, e generalizam simultaneamente progressões geométricas e aritméticas: *

- Progressões geométricas: Se $x_n = aq^n$, então $x_{n+1} = qx_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $(x_n)_n$ é uma sequência recorrente linear de ordem 1.

- Progressões aritméticas: Se $(x_n)_n$ é uma progressão aritmética, existe uma constante r tal que $x_{n+1} - x_n = r$ para todo $n \in \mathbb{N}$, daí $x_{n+2} - x_{n+1} = x_{n+1} - x_n$, e logo $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$. Portanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência recorrente de ordem 2.

Outros exemplos importantes são:

- A sequência de Fibonacci:† A sequência $(F_n)_n$ é uma sequência recorrente linear de ordem 2, que satisfaz $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$.

- A sequência de Lucas:‡ A sequência $(L_n)_n$ é uma sequência recorrente linear cuja relação de recorrência é a mesma da sequência de Fibonacci, ou seja $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mas possui valores iniciais diferentes, $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$.

O fato de essas sequências possuirem a mesma relação de recorrência, implica na existência de várias identidades que as relacionam, como por exemplo:

- $L_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n$;
- $L_{m+n} = L_{m+1}F_n + L_m F_{m-1}$;
- $F_{n+k} + (-1)^k F_{n-k} = L_k F_n$.

*Para uma leitura complementar, ver [14, Apêndice B].

†Sequência de número A000045 na *Sloane's Encyclopedia of Integer Sequences.*

‡A000204.

Um outro fato bastante conhecido sobre estas duas sequências, são as suas formas fechadas. Em outras palavras, podemos calcular os números F_n e L_n sem recorrermos aos seus dois termos anteriores, com uma fórmula que depende apenas de n:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] , \tag{1.2}$$

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n .$$

A fórmula (1.2) é conhecida como *fórmula de Binet* (apesar de ser um resultado já conhecido por Euler, D. Bernoulli, e De Moivre mais de um século antes). Um resultado importante da teoria das sequências recorrentes lineares, nos diz que sempre há uma forma fechada para este tipo de sequência. Para enunciarmos este fato, precisamos de algumas definições:

O *polinômio característico* da sequência $(x_n)_n$, satisfazendo (1.1) é dado por

$$P(x) = x^k - C_1x^{k-1} - \cdots - C_{k-1}x - C_k ,$$

e denotamos por $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ suas raizes complexas com multiplicidades $a_1, a_2, \ldots, a_r$ respectivamente.

Agora, enunciamos o resultado que nos permitirá tratar destas sequências usando o seu *comportamento exponencial*, sendo de fundamental importância para o desenvolvimento do trabalho.

Teorema 1.1 *Seja $(x_n)_n$ uma sequência recorrente linear com a notação estabelecida anteriormente. Então, os termos desta sequência podem ser escritos como*

$$x_n = Q_1(n)\lambda_1^n + Q_2(n)\lambda_2^n + \cdots + Q_r(n)\lambda_r^n ,$$

onde $Q_1, \ldots, Q_r$ são polinômios sobre o corpo $\mathbb{Q}(\{\lambda_j\}_{j=1}^r)$, com grau $\partial(Q_i) < a_i$, para todo $1 \le i \le r$.

Para uma demonstração completa deste resultado, vários exemplos e aplicações interessantes, indicamos a leitura de [14, Apêndice B].

Na seção seguinte, veremos alguns resultados sobre uma generalização da sequência de Fibonacci, que será trabalhada no Capítulo 3.

1.2 A sequência de k-bonacci

Existem várias generalizações para a sequência de Fibonacci, desde recorrências lineares inteiras (como as sequências de Lucas) até extensões da sequência para números reais, como

$$F_x = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^x - \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}} \right)^x \cos(x\pi) \right\} .$$

A sequência de *k-bonacci* (ou *Fibonacci k-generalizada*), denotada por $(F_n^{(k)})_n$, é uma sequência recorrente linear de ordem k que também é uma generalização da sequência de Fibonacci. Os números de k-bonacci são definidos como segue:

$$F_{-(k-2)}^{(k)} = F_{-(k-3)}^{(k)} = F_{-(k-4)}^{(k)} = \cdots = F_0^{(k)} = 0 \quad ; \quad F_1^{(k)} = 1 \ ,$$

então a partir do $(k+1)$-ésimo termo, este é dado pela soma dos k termos anteriores:

$$F_{n+k}^{(k)} = F_{n+k-1}^{(k)} + F_{n+k-2}^{(k)} + \ldots + F_n^{(k)} \ . \tag{1.3}$$

Note que para $k = 2$ temos novamente a sequência de Fibonacci $(F_n)_n$, para $k = 3$ é conhecida como sequência de Tribonacci[§], $(T_n)_n$, e para $k = 4$ a sequência de Tetranacci[¶], $(Q_n)_n$. Segundo Kessler e Schiff [8], estes números aparecem na Teoria da Probabilidade em algoritmos de sorteio.

[§]Sequência de número A000073 na *Sloane's Encyclopedia of Integer Sequences.*
[¶]A000078.

A seguir temos os primeiros termos da sequência de k-bonacci para $k = 3, 4, 5$ e 6:

k	Nome	Termos iniciais	Primeiros valores não-nulos
3	Tribonacci	0, 0, 1	1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, ...
4	Tetranacci	0, 0, 0, 1	1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, 108, ...
5	Pentanacci	0, 0, 0, 0, 1	1, 1, 2, 4, 8, 16, 31, 61, 120, ...
6	Hexanacci	0, 0, 0, 0, 0, 1	1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 63, 125, ...

Pela recorrência, podemos calcular os $k+2$ primeiros termos positivos da sequência de k-bonacci, como segue

$$\begin{array}{ccccccccc} 0, & 0, & \dots & 0, & 1, & 1, & 2, & \dots & 2^{k-1}, & 2^k-1 \\ F^{(k)}_{-(k-2)} & F^{(k)}_{-(k-3)} & \dots & F^{(k)}_0 & F^{(k)}_1 & F^{(k)}_2 & F^{(k)}_3 & \dots & F^{(k)}_{k+1} & F^{(k)}_{k+2} \end{array}$$

O polinômio característico da recorrência (1.3) é dado por

$$\psi_k(x) = x^k - x^{k-1} - \cdots - x - 1 \ .$$

Como já foi visto em três demonstrações distintas [19, 20, 24], o polinômio $\psi_k(x)$ possui uma única raíz α, real, fora do círculo unitário, ou seja $|\alpha| > 1$, e as demais raízes $\alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}, \dots, \alpha^{(k)}$, possuem módulo estritamente menor do que 1. Denotamos esta raíz α, como a *raíz dominante da recorrência.* Também em [24], temos os seguintes limitantes para α:

$$2\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) < \alpha < 2 \ . \tag{1.4}$$

Foi mostrado em [2, Lemma 1], que valem as seguintes estimativas para $F_n^{(k)}$ em função de α:

$$\alpha^{n-2} < F_n^{(k)} < \alpha^{n-1} \ \text{ para todo } n \geq 3. \tag{1.5}$$

Na seção anterior, vimos que a fórmula de Binet nos dá uma maneira direta para calcular os números de Fibonacci:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

onde α e β são as raízes do polinômio $\psi_2(x) = x^2 - x - 1$. Para ilustrar melhor o próximo resultado, vamos reescrever a fórmula (1.2) da seguinte maneira:

$$F_n = \frac{\alpha - 1}{2 + 3(\alpha - 2)}\alpha^{n-1} + \frac{\beta - 1}{2 + 3(\beta - 2)}\beta^{n-1} .$$

A demonstração deste fato é puramente algébrica.

O resultado principal de Dresden [4], nos dá um análogo da fórmula de Binet, na versão acima, para números de k-bonacci:

Teorema 1.2 *Seja $F_n^{(k)}$ o n-ésimo número de k-bonacci. Então:*

$$F_n^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha^{(i)} - 1}{2 + (k+1)(\alpha^{(i)} - 2)}(\alpha^{(i)})^{n-1}, \tag{1.6}$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são as raizes do polinômio $\psi_k(x)$.

Também foi mostrado em [4] que $F_n^{(k)}$ é bem aproximado pelo termo $g\alpha^{n-1}$, onde $g := g(\alpha, k) = (\alpha - 1)/(2 + (k+1)(\alpha - 2))$, ou seja

$$|F_n^{(k)} - g\alpha^{n-1}| = |E_n(k)| < \frac{1}{2} , \tag{1.7}$$

onde $E_n(k) = \sum_{i=2}^{k} g(\alpha^{(i)}, k)(\alpha^{(i)})^{n-1}$.

1.3 Formas lineares em logaritmos

Primeiro, vamos ver qual o significado de *formas lineares em logaritmo*. Seja $n \geq 1$ um inteiro positivo. Para $i = 1, \ldots, n$, sejam x_i/y_i, racionais não nulos, b_i um inteiro positivo, e denote $A_i := \max\{|x_i|, |y_i|, 3\}$. Defina $B := \max\{b_1, \ldots, b_n, 3\}$. Considere a seguinte expressão

$$\Lambda := \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{b_1} \cdots \left(\frac{x_n}{y_n}\right)^{b_n} - 1, \tag{1.8}$$

que ocorre naturalmente em várias equações Diofantinas. Normalmente, é possível mostrar que Λ é diferente de zero e daí conseguir um limitante superior pequeno para $|\Lambda|$. Daí, para conseguir algum resultado, restaria conseguir um *bom* limitante inferior para $|\Lambda|$.

Apesar de (1.8) estar longe de ser linear, ou de conter logaritmos, é comumente conhecido por *forma linear em logaritmo*. A razão é a seguinte. Caso tenhamos $|\Lambda|$ muito pequeno, digamos $|\Lambda| \leq 1/2$, então a *forma linear em logaritmo* ocorre:

$$|\Lambda| \geq \frac{\log|1+\Lambda|}{2} = \frac{1}{2}\left|b_1 \log\frac{x_1}{y_1} + \cdots + b_n \log\frac{x_n}{y_n}\right|.$$

Agora, supondo que temos Λ não nulo, vamos estabelecer um limitante inferior trivial para $|\Lambda|$. Estimando diretamente o denominador de (1.8), obtemos

$$\log|\Lambda| \geq -\sum_{i=1}^{n} b_i \log|y_i| \geq -B\sum_{i=1}^{n}\log A_i.$$

A dependência deste limitante em A_i é satisfatória, ao contrário da dependência em B. No entanto, para resolver várias equações Diofantinas, precisamos de uma melhor estimativa para B, mesmo se as estimativas para A_i não forem as melhores possíveis. A. Baker [1] foi o primeiro a estabelecer um resultado nesta direção, o que gerou vários refinamentos por diversos autores (para uma bibliografia completa e progressos nessa teoria até 2000, ver [23]). Em 2000, E. Matveev [15] mostrou que sob as hipóteses anteriores, temos

$$\log|\Lambda| \geq -30^{n+4}(n+1)^6(\log A_1)\cdots(\log A_n)(\log B).$$

Vale salientar que também existem limitantes para a expressão (1.8), quando x_i/y_i são substituídos por algébricos não nulos α_i, com os números reais A_i sendo expressos em termos da *altura de Weil* (ou *altura logarítmica*) de α_i, como também foi mostrado por Matveev:

Teorema 1.3 (Matveev) *Sejam* $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ *números reais algébricos e* $b_1, \ldots, b_t$ *inteiros não nulos. Defina* $\Lambda := \alpha_1^{b_1} \cdots \alpha_t^{b_t} - 1$. *Sejam* $D = [\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_t) : \mathbb{Q}]$ *e* $A_1, \ldots, A_t$ *números reais positivos satisfazendo*

$$A_j \geq \max\{Dh(\alpha_j), |\log \alpha_j|, 0.16\}, \text{ para } j = 1, \ldots, t.$$

Tome $B \geq \max\{|b_1|, \ldots, |b_t|\}$. *Também defina*

$$C_{t,D} := 1.4 \times 30^{t+3} \times t^{4.5} \times D^2(1 + \log D).$$

Se $\Lambda \neq 0$, *então*

$$|\Lambda| > \exp(-C_{t,D}(1 + \log B)A_1 \cdots A_t) \ .$$

Onde para um número algébrico η, denotamos $h(\eta)$ pela altura logarítmica (ou de Weil) cuja fórmula é

$$h(\eta) = \frac{1}{d}\left(\log |a_0| + \sum_{i=1}^{d} \log(\max\{|\eta^{(i)}|, 1\})\right) \ ,$$

com $d = \partial(\eta)^{\|}$ sobre $\mathbb{Q}$, a_0 o coeficiente líder do polinômio minimal de η sobre $\mathbb{Z}$ e $\eta = \eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(d)}$, os seus conjugados.

1.4 O método de redução

Teorema 1.4 (Dujella-Pethö, [5]) *Suponha que* M *é um inteiro positivo. Seja* p/q *convergente da expansão em fração contínua do número irracional* γ *tal que* $q > 6M$ *e seja* $\epsilon = \| \mu q \| - M \| \gamma q \|$, *onde* μ *é um número real. Se* $\epsilon > 0$, *então não existe solução para a desigualdade*

$$0 < m\gamma - n + \mu < A \cdot B^{-m}$$

em inteiros positivos m, n *com*

$$\frac{\log(Aq/\epsilon)}{\log B} \leq m < M.$$

$^{\|}$O grau de um algébrico α sobre $\mathbb{Q}$, denotado por $\partial(\alpha)$, é o grau do polinômio minimal de α em $\mathbb{Q}[x]$.

1.5 Outros resultados auxiliares

Um polinômio $P(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}[x_1, \ldots, x_n]$, onde $\mathbb{A}$ é um anel, é chamado *simétrico* ou *função simétrica* em $x_1, \ldots, x_n$ se

$$P(x_{\alpha(1)}, \ldots, x_{\alpha(n)}) = P(x_1, \ldots, x_n),$$

para toda permutação $\alpha \in S_n$, onde S_n é o conjunto das permutações de $\{1, \ldots, n\}$. Para cada $1 \leq k \leq n$, o polinômio

$$\sigma_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

é simétrico em $x_1, \ldots, x_n$ e é chamado de *k-ésima função simétrica elementar.*

Teorema 1.5 (Relações de Girard) *Se $\beta_1, \ldots, \beta_n$ são raizes de $f(x) = bx^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_n$, então*

$$\sigma_i(\beta_1, \ldots, \beta_n) = (-1)^i \frac{c_i}{b} \in \mathbb{Q}, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n.$$

O seguinte teorema é devido à Legendre, e será fundamental para concluirmos a demonstração do resultado principal do nosso trabalho:

Teorema 1.6 *Seja ξ um número real. Qualquer número racional não nulo a/b que satisfaz*

$$\left|\xi - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2b^2}\ ,$$

é um convergente de ξ.

Demonstração: Veja [3], p. 10-11. ■

O próximo lema também será utilizado no final da demonstração do nosso resultado principal.

Teorema 1.7 *Seja ξ um número irracional e $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ a sua expansão em frações contínuas, com convergentes $p_n/q_n = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$. Então*

$$\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| > \frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: ** Seguem alguns fatos auxiliares, cujas demonstrações podem ser encontradas em [12, Seção 2.2]:

(F1): $p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1}$.

(F2): $p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} = (-1)^n a_n$.

(F3): $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$, com $p_{-2} = 0$ e $p_{-1} = 1$.

(F4): $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$, com $q_{-2} = 1$ e $q_{-1} = 0$. Isso nos diz que a sequência $(q_n)_n$ é crescente.

(F5): Para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, temos

$$[a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, x] = \frac{x p_{n-1} + p_{n-2}}{x q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

Defina $\xi_n = [a_n; a_{n+1}, \ldots] = a_n + 1/\xi_{n+1}$. Faça $x = \xi_n$ em (F5), então

$$\xi = [a_0; a_1, \ldots, \xi_n] = \frac{\xi_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\xi_n q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

Daí,

$$\xi - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\xi_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\xi_n q_{n-1} + q_{n-2}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\xi_n(p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1}) + (p_{n-2}q_n - p_n q_{n-2})}{q_n(\xi_n q_{n-1} + q_{n-2})}.$$

Agora, usando (F1) e (F2),

$$\begin{aligned} \xi - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{\xi_n(-1)^n + (-1)^{n+1}a_n}{q_n(\xi_n q_{n-1} + q_{n-2})} \\ &= (-1)^n \frac{\overbrace{\xi_n - a_n}^{=1/\xi_{n+1}}}{q_n(\xi_n q_{n-1} + q_{n-2})} \\ &= (-1)^n \frac{1}{\xi_{n+1} q_n(\xi_n q_{n-1} + q_{n-2})} \end{aligned} \tag{1.9}$$

**D. Marques

Observe que, como $\xi_{n+1} = a_{n+1} + 1/\xi_{n+2} < a_{n+1} + 1$, onde a última desigualdade vem de $\xi_{n+2} > 1$, temos $a_{n+1} - \xi_{n+1} > -1$ e portanto $a_{n+1} + 2 - \xi_{n+1} > 1$. Assim, $q_n(a_{n+1} + 2 - \xi_{n+1}) > q_n > q_{n-1}$ (por (F4)). Donde,

$$\begin{aligned} q_n(a_{n+1}+2) &> q_n\xi_{n+1} + q_{n-1} \\ &= \xi_{n+1}\left(q_n + \frac{q_{n-1}}{\xi_{n+1}}\right) \\ &= \xi_{n+1}\left(a_n q_{n-1} + q_{n-2} + \frac{q_{n-1}}{\xi_{n+1}}\right) \\ &= \xi_{n+1}\left(\left(a_n + \frac{1}{\xi_{n+1}}\right) q_{n-1} + q_{n-2}\right) \\ &= \xi_{n+1}(\xi_n q_{n-1} + q_{n-2}). \end{aligned}$$

Logo, de (1.9), obtemos

$$\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n} \cdot \frac{1}{\xi_{n+1}(\xi_n q_{n-1} + q_{n-2})} > \frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2}.$$

Com isso, concluimos a demonstração. ∎

Capítulo 2

Combinações de Potências de Termos de uma Recorrência

2.1 O caso assintótico

Uma sequência $(G_n)_n$ é dita uma *sequência recorrente linear inteira* de ordem k com coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1} \in \mathbb{Z}$, onde $c_0 \neq 0$, se para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$G_{n+k} = c_{k-1}G_{n+k-1} + \cdots + c_1 G_{n+1} + c_0 G_n,$$

onde são dados os valores iniciais $G_0, \ldots, G_{k-1} \in \mathbb{Z}$. Já vimos alguns exemplos interessantes destas sequências, como a famosa sequência de Fibonacci e a sequência de Lucas.

Denotaremos por

$$G(x) = x^k - c_{k-1}x^{k-1} - \cdots - c_1 x - c_0$$

o polinômio característico da sequência $(G_n)_n$, e fatorando-o sobre $\mathbb{C}$ temos

$$G(x) = (x - r_1)^{m_1}(x - r_2)^{m_2} \ldots (x - r_\ell)^{m_\ell}\ ,$$

onde $r_1, r_2, \ldots, r_\ell$ são números complexos distintos, ditos as raízes da recorrência. Também denotaremos por r_1 a raíz dominante da recorrência (quando houver), ou seja $|r_1| > |r_j|$, para todo $2 \leq j \leq \ell$. Pelo Teorema 1.1, sabemos que é possível escrever os termos da sequência como

$$G_n = g_1(n)r_1^n + \cdots + g_\ell(n)r_\ell^n \ , \tag{2.1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $g_1(x), \ldots, g_\ell(x)$ são polinômios sobre o corpo $\mathbb{Q}(\{r_j\}_{j=1}^{\ell})$ com $\partial(g_j) \leq m_j - 1$, para $j = 1, \ldots, \ell$.

Para motivar o resultado principal deste capítulo, começamos com uma identidade simples, satisfeita pelos termos da sequência de Fibonacci, que pode ser demonstrada por indução:

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}, \quad \forall\, n \geq 0 \ . \tag{2.2}$$

Podemos interpretar esta identidade como $F_n^2 + F_{n+1}^2 \in (F_m)_m$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta relação já não é satisfeita, para casos não triviais, se aumentarmos o expoente de 2 para $s \geq 3$, como pode ser visto em [10]. Podemos indagar se esta relação ainda se mantém se tomamos a soma de potência de vários termos, não necessariamente consecutivos, da sequência de Fibonacci, ou, generalizando, de uma sequência recorrente linear $(G_n)_n$, mesmo que apenas para infinitos $n \in \mathbb{N}$. Em [16, 17, 18], Melham mostrou as seguintes identidades envolvendo combinações lineares inteiras de potências de números de Tribonacci e Tetranacci:

$$T_{n+3}^2 + T_{n+2}^2 + T_{n+1}^2 - T_n^2 = 2T_{2n} + 32T_{2n+1} + 3T_{2n+2}$$

e

$$Q_{n+6}^2 + Q_{n+5}^2 + 2Q_{n+4}^2 + 2Q_{n+3}^2 - 2Q_{n+2}^2 + Q_{n+1}^2 - Q_n^2$$
$$= 46Q_{2n} + 70Q_{2n+1} + 82Q_{2n+2} + 88Q_{2n+3} \ ,$$

mas tais identidades não nos garantem que essas somas de potências pertencem às sequências. Sobre esta questão, nosso resultado é o seguinte:

Teorema 2.1 *Seja $(G_m)_m$ uma sequência recorrente linear inteira, não nula, tal que seu polinômio característico possui uma única raíz simples, positiva, fora do círculo unitário. Sejam s, k, b e M inteiros positivos e $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{k-1} \in \mathbb{Z}$ tais que $|\epsilon_j| \leq M$, para $1 \leq j \leq k-1$. Então existe uma constante C, efetivamente computável, tal que se*

$$G_n^s + \epsilon_1 G_{n+1}^s + \cdots + \epsilon_{k-1} G_{n+k-1}^s + G_{n+k}^s \in (bG_m)_m \ , \tag{2.3}$$

para infinitos $n \in \mathbb{N}$, temos $s < C$. A constante C depende apenas de k, b, M e dos parâmetros da sequência.

Antes de darmos início à demonstração deste teorema, mostramos o seguinte lema, que terá um papel fundamental na prova, pois nos permitirá mostrar que uma determinada forma linear é real.

Lema 2.1 *Seja $(G_m)_m$ uma sequência recorrente com infinitos termos positivos, satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.1. Então o polinômio dominante de $(G_m)_m$ é uma constante positiva.*

Demonstração: Sabemos por (2.1) que,

$$G_n = g_1(n)r_1^n + \cdots + g_\ell(n)r_\ell^n,$$

onde cada r_j é raíz do polinômio característico de G_n, com multiplicidade m_j, e cada $g_j(n)$ é um polinômio não nulo de grau $\partial(g_j) \leq m_j - 1$. Supondo que r_1 é a raíz dominante, como esta é simples, temos de imediato $m_1 = 1$ e assim o grau do polinômio dominante é no máximo $m_1 - 1 = 0$, portanto é uma constante, digamos g_1. Agora, dividindo G_n por r_1^n, obtemos

$$\frac{G_n}{r_1^n} = g_1 + \sum_{j=2}^{\ell} \frac{g_j(n)}{\kappa_j^n}, \tag{2.4}$$

onde denotamos $\kappa_j = r_1/r_j$. Como $|\kappa_j| > 1$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g_j(n)}{\kappa_j^n} = 0, \text{ para todo } 2 \leq j \leq \ell,$$

daí

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{G_n}{r_1^n} = g_1.$$

Portanto, $g_1 > 0$ já que $g_1 \neq 0$.

■

Com este resultado auxiliar, já temos as ferramentas necessárias para a demonstração.

Demonstração do Teorema 2.1: Pelas hipóteses do teorema, temos

$$G_n^s + \epsilon_1 G_{n+1}^s + \cdots + \epsilon_{k-1} G_{n+k-1}^s + G_{n+k}^s = bG_{t_n}, \ \forall n \in \mathcal{N}, \tag{2.5}$$

onde $\{t_n : n \geq 0\}$ e $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}$ são conjuntos infinitos. Afirmamos que podemos tomar $(G_n)_n$, sem perda de generalidade, com infinitos termos positivos. Negarmos tal fato equivale à existência de um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $G_n \leq 0$ para todo $n \geq n_0$. Agora, temos duas possibilidades:

- s par: Aqui, tomamos primeiramente $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq n_0$, suficientemente grande, de modo que o termo positivo G_{n+k}^s "domine" parte dos demais termos, que podem ser negativos. Ou seja,

$$G_{n+k}^s + \epsilon_1 G_{n+1}^s + \cdots + \epsilon_{k-1} G_{n+k-1}^s > 0 \quad \forall n \geq N_0 \geq n_0 \ .$$

Isto de fato ocorre, já que $O(G_{n+k}^s) = r_1^{s(n+k)}$* e $O(\epsilon_1 G_{n+1}^s + \cdots + \epsilon_{k-1} G_{n+k-1}^s) = r_1^{s(n+k-1)}$ por (2.1). Neste caso, temos $bG_{t_n} \leq 0$ para $t_n \geq N_0$. Assim, tomando n e t_n, de modo que ambos sejam pelo menos N_0, temos:

$$\underbrace{G_n^s}_{\geq 0} + \epsilon_1 G_{n+1}^s + \cdots + \epsilon_{k-1} G_{n+k-1}^s + G_{n+k}^s = bG_{t_n} \leq 0,$$

*Dadas duas funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{N} \to (0, \infty)$, escrevemos $f = O(g)$ se existe $C > 0$ tal que $|f(n)| < Cg(n)$ para n suficientemente grande.

$$\Rightarrow \quad 0 < \epsilon_1 G^s_{n+1} + \cdots + \epsilon_{k-1} G^s_{n+k-1} + G^s_{n+k} \leq 0$$

onde $G^s_n \geq 0$ pois s é par. Absurdo.

- s ímpar: Aqui definimos $H_n := -G_n$, e substituindo em (2.5) obtemos

$$H^s_n + \ \epsilon_1 H^s_{n+1} + \cdots + \epsilon_{k-1} H^s_{n+k-1} + H^s_{n+k} = bH_{t_n}, \ \forall \ n \in \mathcal{N},$$

e agora temos uma sequência $(H_n)_n$ satisfazendo uma identidade do tipo (2.5) tal que $H_n \geq 0$ para todo $n \geq n_0$. Resta-nos mostrar que esta sequência possui infinitos termos positivos. Com efeito, se $H_n = 0$, a partir de um certo n, usaríamos a própria relação de recorrência para concluir que $(H_n)_n$ é uma sequência nula, contradizendo o fato que $(G_n)_n$ é não nula. Desta forma, $(H_n)_n$ possui infinitos termos positivos.

Portanto, $(G_n)_n$ pode ser tomada, sem perda de generalidade, possuindo infinitos termos positivos. Temos que

$$G_{n+t} = g_1 r_1^{n+t} + g_2(n+t) r_1^{n+t} \cdots + g_\ell(n+t) r_\ell^{n+t} \ \text{ para } n \geq 1 \ , \tag{2.6}$$

com $r_1 > 1$ e, pelo Lema 2.1, $g_1(n) = g_1 > 0$. Usando o Teorema Multinomial[†] em (2.6) temos, para $0 \leq t \leq k$,

$$G^s_{n+t} = \sum_{\overline{\alpha} \in \mathcal{I}_s} \frac{s!}{\alpha_1! \cdots \alpha_\ell!} \prod_{j=1}^{\ell} g_j(n+t)^{\alpha_j} r_1^{\alpha_1(n+t)} \cdots r_\ell^{\alpha_\ell(n+t)},$$

onde $\mathcal{I}_s = \{\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell : \alpha_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i = s\}$. Dividindo ambos os lados da última igualdade por r_1^{sn}, separando o termo $\overline{\beta} = (s, 0, \ldots, 0)$ do somatório e denotando $\mathcal{J}_s := \mathcal{I}_s \setminus \{\overline{\beta}\}$, obtemos

$$\frac{G^s_{n+t}}{r_1^{sn}} = \frac{g_1^s r_1^{s(n+t)}}{r_1^{sn}} + \sum_{\overline{\alpha} \in \mathcal{J}_s} \frac{s!}{\alpha_1! \cdots \alpha_\ell!} \prod_{j=1}^{\ell} g_j(n+t)^{\alpha_j} \frac{r_1^{\alpha_1 t} \cdots r_\ell^{\alpha_\ell(n+t)}}{r_1^{n(s-\alpha_1)}} \ ,$$

[†] $(x_1 + \cdots + x_n)^m = \sum \frac{m!}{i_1! \cdots i_n!} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$, onde o somatório é sobre todos os inteiros não negativos $i_1, \ldots, i_n$ com $i_1 + \cdots + i_n = m$

daí

$$\frac{G_{n+t}^s}{r_1^{sn}} = g_1^s r_1^{st} + \sum_{\overline{\alpha} \in \mathcal{J}_s} \frac{s!}{\alpha_1! \cdots \alpha_\ell!} \prod_{j=2}^{\ell} \left(\frac{g_j(n+t)}{r_1^n} \right)^{\alpha_j} g_1^{\alpha_1} r_1^{\alpha_1 t} \prod_{i=2}^{\ell} r_i^{\alpha_i(n+t)}, \quad (2.7)$$

onde na última igualdade, usamos que $s - \alpha_1 = \alpha_2 + \cdots + \alpha_\ell > 0$ para as ℓ-uplas em $\mathcal{J}_s$. Como $|r_j| < 1$ e $\lim\limits_{n\to\infty} g_j(n+t)/r_1^n = 0$ para $j = 2, \ldots, \ell$, os termos do somatório em (2.7) tendem à zero quando $n \to \infty$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_{n+t}^s}{r_1^{ns}} = g_1^s r_1^{st}. \quad (2.8)$$

Por outro lado, sejam $\mathcal{N}$ e $(t_n)_n$ como definidos anteriormente. Sabemos que $G_m = O(r_1^m)$. Assim, a equação (2.5) nos dá $O(r_1^{ns}) = O(r_1^{t_n})$, portanto $t_n = O(n)$. Agora, pela equação (2.8)

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathcal{N}}} \frac{bG_{t_n}}{r_1^{ns}} = g_1^s(1 + \epsilon_1 r_1^s + \cdots + \epsilon_{k-1} r_1^{(k-1)s} + r_1^{ks}). \quad (2.9)$$

No entanto,

$$\frac{G_{t_n}}{r_1^{ns}} = g_1 r_1^{t_n - ns} + g_2(t_n) \frac{r_2^{t_n}}{r_1^{ns}} + \cdots + g_\ell(t_n) \frac{r_\ell^{t_n}}{r_1^{ns}},$$

e usando que a função exponencial r_1^{ns} "domina" qualquer polinômio em n, que $t_n = O(n)$ e $|r_j| < 1$, conseguimos

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathcal{N}}} \frac{g_j(t_n) r_j^{t_n}}{r_1^{ns}} = 0, \text{ para } j = 2, \ldots, \ell.$$

Assim, a equação (2.9) se torna

$$g_1^{s-1}(1 + \epsilon_1 r_1^s + \cdots + \epsilon_{k-1} r_1^{(k-1)s} + r_1^{ks}) = b \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathcal{N}}} r_1^{t_n - ns}.$$

Como $r_1 > 0$, a existência do limite da direita nos diz que o limite da sequência $(t_n - ns)_n$ também existe, logo, como esta é uma sequência de inteiros, então $t_n - ns = t$ constante, para todo $n \in \mathcal{N}$ suficientemente grande. Substituindo em (2.1), temos

$$g_1^{s-1}(1 + \epsilon_1 r_1^s + \cdots + \epsilon_{k-1} r_1^{(k-1)s} + r_1^{ks}) = b r_1^t$$

$$\Rightarrow g_1^{s-1}(r_1^{-ks} + \epsilon_1 r_1^{-(k-1)s} + \cdots + \epsilon_{k-1} r_1^{-s} + 1) = b r_1^{t-ks}. \tag{2.10}$$

Com isso, defina $\Lambda := g_1^{1-s} r_1^{t-ks} b - 1$. Para usar o Teorema 1.3, devemos ter $\Lambda \neq 0$. Note que a equação (2.10) pode ser escrita como

$$\Lambda = r_1^{-ks} + \epsilon_1 r_1^{-(k-1)s} + \cdots + \epsilon_{k-1} r_1^{-s} \ . \tag{2.11}$$

Se $\Lambda = 0$, a identidade (2.11) nos dá

$$\begin{aligned} r_1^{-ks} + \epsilon_1 r_1^{-(k-1)s} + \cdots + \epsilon_{k-1} r_1^{-s} &= 0 \quad (\times r_1^{ks}) \\ 1 + \epsilon_1 r_1^s + \cdots + \epsilon_{k-1} r_1^{(k-1)s} &= 0 \ . \end{aligned}$$

Assim, defina $j_0 = \max\{j \in \{1, \ldots, k-1\}; \epsilon_j \neq 0\}$. Então

$$1 + \epsilon_1 r_1^s + \cdots + \epsilon_{j_0-1} r_1^{(j_0-1)s} + \epsilon_{j_0} r_1^{j_0 s} = 0$$

$$\Rightarrow -\epsilon_{j_0} r_1^{j_0 s} = 1 + \epsilon_1 r_1^s + \cdots + \epsilon_{j_0-1} r_1^{(j_0-1)s} \ .$$

Agora, tomando o valor absoluto e aplicando a desigualdade triangular

$$\begin{aligned} r_1^{j_0 s} \leq \overbrace{|\epsilon_{j_0}|}^{\geq 1} r_1^{j_0 s} &\leq 1 + |\epsilon_1| r_1^s + \cdots + |\epsilon_{j_0-1}| r_1^{(j_0-1)s} \\ &\leq M(1 + r_1^s + \cdots + r_1^{(j_0-1)s}) \\ \Rightarrow r_1^{j_0 s} &\leq M k r_1^{(j_0-1)s} \ . \end{aligned} \tag{2.12}$$

Portanto, aplicando o logaritmo em ambos os lados de (2.12) obtemos o desejado limitante para s, aqui em função de M, k e r_1:

$$\begin{aligned} j_0 s \log r_1 &\leq \log M + \log k + (j_0 - 1) s \log r_1 \\ s \log r_1 &\leq \log M + \log k \\ \Rightarrow s &\leq \frac{\log M + \log k}{\log r_1} \ . \end{aligned} \tag{2.13}$$

Daí, $C = (\log M + \log k)/\log r_1$. Assim, podemos considerar $\Lambda \neq 0$, e por (2.11) obtemos

$$\begin{aligned} 0 < |\Lambda| &\leq r_1^{-ks} + |\epsilon_1| r_1^{-(k-1)s} + \cdots + |\epsilon_{k-1}| r_1^{-s} \\ &< M(r_1^{-ks} + r_1^{-(k-1)s} + \cdots + r_1^{-s})\ . \\ \Rightarrow |\Lambda| &< Mkr_1^{-s} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Para aplicar o Teorema 1.3, tomamos

$$\alpha_1 = 1/g_1,\ \ \alpha_2 = r_1,\ \ \alpha_3 = b,\ \ b_1 = s-1,\ \ b_2 = -(ks-t),\ \ b_3 = 1.$$

No entanto, b_1, b_2 e b_3 devem ser não-nulos. Como estamos supondo $s > 1$, basta-nos verificar que $b_2 \neq 0$. Na verdade, se $b_2 = 0$, então $ks = t$, e pela equação (2.10) obtemos

$$g_1^{s-1} r_1^{ks} < g_1^{s-1}(1 + \epsilon_1 r_1^s + \ldots + \epsilon_{k-1} r_1^{(k-1)s} + r_1^{ks}) = br_1^t$$
$$\Rightarrow b > g_1^{s-1} \ \Rightarrow\ s < \frac{\log b}{\log g_1} + 1\ ,$$

Portanto, $C = (\log b/\log g_1) + 1$.

Agora, podemos supor que $b_2 \neq 0$, para satisfazer as condições do resultado. Note que $D = [\mathbb{Q}(r_1, g_1) : \mathbb{Q}] \leq k!$, pois $g_1 \in \mathbb{Q}(\{r_j\}_{1 \leq j \leq \ell})$ e $[\mathbb{Q}(r_1, \ldots, r_\ell) : \mathbb{Q}] \leq k!$ (ver [6]). Agora defina $h(\alpha_1) = h(1/g_1) = h_1$.

Como r_1 é a única raíz fora do círculo unitário e o polinômio minimal deste algébrico divide $G(x)$, temos

$$\begin{aligned} h(\alpha_2) = h(r_1) &= \underbrace{\frac{1}{\partial(r_1)}}_{\geq \ell} \left(\log(|a_0|) + \sum_{i=1}^{\partial(r_1)} \log(\max\{|r_1^{(i)}|, 1\}) \right) \\ \Rightarrow h(\alpha_2) &\leq \frac{\log r_1}{\ell}\ , \end{aligned}$$

onde usamos que a_0 divide o coeficiente líder de $G(x)$, donde $|a_0| = 1$, e que o conjunto dos conjugados de r_1 está contido no conjunto das raízes de $G(x)$, e portanto $|r_1^{(i)}| < 1$, para todo $r_1^{(i)} \neq r_1$. Temos de imediato $h(\alpha_3) = \log b$, já que $b \in \mathbb{N}$. Sendo assim, como

$$A_j \geq \max\{Dh(\alpha_j), |\log \alpha_j|, 0.16\}, \quad \text{para } j = 1, 2, 3\ ,$$

usamos que o máximo de um conjunto de números não negativos não ultrapassa a soma de seus elementos, para escolher

$$A_1 := k!h_1 + |\log g_1| + 0.16,\ A_2 := (k!+1)\log r_1 + 0.16,\ \text{ e } A_3 := k!\log b + 0.16.$$

Também temos

$$B \geq \max\{|b_1|, |b_2|, |b_3|\} = \max\{s-1, |ks-t|\}\ ,$$

onde podemos tomar $B := s - 1 + |ks - t| = O(s)$, pois

$$B \leq s - 1 + ks + |t| = (k+1)s - 1 + t_n + ns = O(s).$$

Portanto, pela estimativa dada no Teorema 1.3, obtemos

$$\begin{aligned} |\Lambda| &> \exp(-1.4 \times 30^{3+3} \times 3^{4.5} \times \ell^2(1 + \log \ell)(1 + \log B) \\ &\quad \times (k!h_1 + |\log g_1| + 0.16)((k! + 1)\log r_1 + 0.16)(k!\log b + 0.16)) \\ &> \exp(-1.44 \times 10^{11} \times \ell^2(1 + \log \ell)(1 + \log B) \\ &\quad \times (k!h_1 + |\log g_1| + 0.16)((k! + 1)\log r_1 + 0.16)(k!\log b + 0.16))\ , \end{aligned}$$

e usando (2.14) com a desigualdade anterior, conseguimos

$$\begin{aligned} \frac{Mk}{r_1^s} > |\Lambda| > \exp(&-1.44 \times 10^{11} \times \ell^2(1 + \log \ell)(1 + \log B) \\ &\times (k!h_1 + |\log g_1| + 0.16)((k!+1)\log r_1 + 0.16)(k!\log b + 0.16))\ . \end{aligned}$$

Denotando,

$$\begin{aligned} P(s) := P(b, \ell, k, g_1, r_1, s) = 1.44 \times 10^{11} \times \ell^2(1 + \log B)(k!h_1 + |\log g_1| + 0.16) \\ \times ((k! + 1)\log r_1 + 0.16)(k!\log b + 0.16)(1 + \log \ell)\ , \end{aligned}$$

aplicamos o logaritmo na última desigualdade para obter

$$\begin{aligned} \log Mk - s\log r_1 &> -P(s) \\ \Rightarrow s &< \frac{\log Mk}{\log r_1} + \frac{P(s)}{\log r_1}\,. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Agora, observe que $P(s) = O(\log s)$, pois $B = O(s)$. Por outro lado, a desigualdade (2.15) nos diz que s está sendo limitado por uma função cuja ordem é $\log s$, o que ocorre apenas para s limitado. Neste caso, o limitante depende de M, k, b e dos parâmetros da sequência: r_1, ℓ, g_1 e r_1. Portanto, o resultado está demonstrado. ■

2.2 Uma aplicação do método

Observe que existem identidades envolvendo a soma de potências distintas de números de Fibonacci, como

$$5F^3_{2n+2} + 3F_{2n+1} + 3F_{2n} = F_{6(n+1)}, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Aplicando o nosso método, descrito na seção anterior, vamos tratar agora de somas de potências distintas de termos na sequência de Fibonacci, mostrando que identidades como a anterior são, de certa forma, aquelas que podem ser satisfeitas para infinitos n. Mais precisamente, temos:

Teorema 2.2 *Sejam $\ell, s_1, \ldots, s_\ell, a_1, \ldots, a_\ell$ inteiros com $\ell > 1$ e $s_j \geq 1$. Suponha que existe $1 \leq t \leq \ell$ tal que $a_t \neq 0$ e $s_t > s_j$, para todo $j \neq t$. Se s_t é par ou a_t não é uma potência positiva de 5, então a soma*

$$a_1F^{s_1}_{n+1} + a_2F^{s_2}_{n+2} + \cdots + a_\ell F^{s_\ell}_{n+\ell} \tag{2.16}$$

não pertence à sequência de Fibonacci para quase todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Pela fórmula de Binet (1.2),

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)\ ,$$

onde $\alpha := (1+\sqrt{5})/2$ e $\beta := -(1/\alpha)$. Aplicando o teorema binomial,

$$\begin{aligned} F_{n+j}^{s_j} &= \left(\frac{\alpha^{n+j} - (-\alpha)^{-(n+j)})}{\sqrt{5}}\right)^{s_j} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{s_j} \cdot \sum_{k=0}^{s_j} \binom{s_j}{k} (-1)^{(n+j+1)k} (\alpha^{-1})^{(n+j)k} \alpha^{(n+j)(s_j-k)} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{s_j} \cdot \sum_{k=0}^{s_j} \binom{s_j}{k} (-1)^{(n+j+1)k} \alpha^{(n+j)s_j - 2(n+j)k}. \end{aligned}$$

Assim, dividindo a identidade anterior por $\alpha^{(n+t)s_t}$, obtemos

$$\frac{F_{n+j}^{s_j}}{\alpha^{(n+t)s_t}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{s_j} \cdot \sum_{k=0}^{s_j} \binom{s_j}{k} (-1)^{(n+j+1)k} \alpha^{(s_j - s_t)n + js_j - ts_t - 2(n+j)k}.$$

Como $s_t > s_j$, para todo $j \neq t$, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+j}^{s_j}}{\alpha^{(n+t)s_t}} = \begin{cases} 0, & \text{se } \ j \neq t \\ (\sqrt{5})^{-s_t}, & \text{se } \ j = t \end{cases} \tag{2.17}$$

Suponha que o enunciado do Teorema 2.2 é falso, ou seja que existe uma sequência $(t_n)_n \subseteq \mathbb{N}$, tal que

$$a_1 F_{n+1}^{s_1} + a_2 F_{n+2}^{s_2} + \cdots + a_\ell F_{n+\ell}^{s_\ell} = F_{t_n}, \tag{2.18}$$

para infinitos n inteiros positivos. Assim, por (2.17)

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{F_{t_n}}{\alpha^{(n+t)s_t}} = \limsup_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\ell} \frac{a_j F_{n+j}^{s_j}}{\alpha^{(n+t)s_t}} = a_t \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{s_t}. \tag{2.19}$$

Por outro lado, usando a fórmula de Binet para F_{t_n}:

$$\begin{aligned} F_{t_n} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{t_n} - \beta^{t_n}) \quad (\times \alpha^{-(n+t)s_t}) \\ \Rightarrow \frac{F_{t_n}}{\alpha^{(n+t)s_t}} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{t_n - (n+t)s_t} - \alpha^{-((n+t)s_t + t_n)}) , \end{aligned}$$

e como $\lim_{n\to\infty} \alpha^{-((n+t)s_t+t_n)} = 0$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{t_n}}{\alpha^{(n+t)s_t}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \lim_{n\to\infty} \alpha^{t_n-(n+t)s_t}. \tag{2.20}$$

Já que $|\alpha| > 1$, combinando (2.19) e (2.20), conseguimos a identidade

$$\frac{\alpha^{\nu}}{\sqrt{5}} = a_t \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{s_t},$$

onde $\nu = \lim_{n\to\infty}(t_n - (n+t)s_t) \in \mathbb{Z}$. Assim, $\alpha^{2\nu} \in \mathbb{Q}$, logo $\nu = 0$, pois $\alpha^m = ((1+\sqrt{5})/2)^m \in \mathbb{Q}$, para $m \in \mathbb{Z}$, se, e somente se, $m = 0$. Portanto, a identidade anterior se torna

$$(\sqrt{5})^{s_t-1} = a_t, \tag{2.21}$$

que não acontece para s_t par, já que o lado esquerdo da igualdade é irracional neste caso. Daí, s_t é ímpar e a_t é uma potência de 5. Assim, pelas hipóteses do teorema, concluímos que $s_t = 1$. No entanto, como $\ell \geq 2$, temos

$$1 \leq \min\{s_1, s_2\} < s_t = 1 ,$$

uma contradição que completa a demonstração do Teorema 2.2. ∎

Capítulo 3

A Equação Diofantina $(F_m^{(k)})^s + (F_{m+1}^{(k)})^s = F_n^{(k)}$

3.1 O caso $s = 2$

Dentre as sequências de números inteiros, a sequência de Fibonacci possui o *status* de "uma das duas estrelas que brilham na vasta gama das sequências de inteiros"*. A outra "estrela" é a sequência de Lucas, que está relacionada diretamente com a sequência de Fibonacci.

Os números de Fibonacci são conhecidos por suas belas e intrigantes propriedades. Algumas são bastante conhecidas como, por exemplo, que a soma e a diferença de dois números de Fibonacci consecutivos também são números de Fibonacci. Também o máximo divisor comum entre dois números de Fibonacci é um número de Fibonacci ($\mathrm{mdc}(F_a, F_b) = F_{\mathrm{mdc}(a,b)}$) †.

Estamos interessados nas identidades exponenciais satisfeitas pela sequência de Fibonacci. Dentre elas citamos:

*No original: *"two shining stars in the vast array of integer sequences"* - Gushy Koshy.

†Para mais informações históricas e fatos interessantes sobre a sequência de Fibonacci, consultar [7].

(a) $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$

(b) Identidade de Catalan: $F_n^2 - F_{n+r}F_{n-r} = (-1)^{n-r}F_r^2$

(c) $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_nF_{n+1}$

Observe que a identidade (a) nos diz que a soma de quadrados de dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci também é um número de Fibonacci. Em [16, 17, 18], Melham mostrou as seguintes identidades exponenciais para números de Tribonacci e Tetranacci:

$$T_{n+3}^2 + T_{n+2}^2 + T_{n+1}^2 - T_n^2 = 2T_{2n} + 32T_{2n+1} + 3T_{2n+2}$$

e

$$\begin{aligned} Q_{n+6}^2 + Q_{n+5}^2 + 2Q_{n+4}^2 + 2Q_{n+3}^2 - 2Q_{n+2}^2 + Q_{n+1}^2 - Q_n^2 \\ = 46Q_{2n} + 70Q_{2n+1} + 82Q_{2n+2} + 88Q_{2n+3}. \end{aligned}$$

Nosso objeto de estudo é a generalização da identidade (a) para os números de k-bonacci. Em outras palavras, procuramos soluções inteiras para a equação Diofantina

$$(F_m^{(k)})^2 + (F_{m+1}^{(k)})^2 = F_n^{(k)}. \tag{3.1}$$

Sobre esta questão, segue o nosso resultado:

Teorema 3.1 *A equação Diofantina (3.1) não possui solução para $k \geq 3$ e $n \geq 2$.*

Concluímos então que, entre as sequências de k-bonacci, a única que gera soluções não triviais para a equação Diofantina (3.1) é a sequência de Fibonacci, ou seja, a propriedade citada anteriormente é exclusiva dos números de Fibonacci.

Pela fórmula de Dresden (Teorema 1.2), escrevemos

$$F_m^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} g(\alpha_i, k)\alpha_i^{m-1}, \tag{3.2}$$

onde $g(x,k) = (x-1)/(2+(k+1)(x-2))$. Denotaremos por $\alpha = \alpha_1$ a raíz dominante do polinômio característico da recorrência, e por $g := g(\alpha, k)$. Segue uma lista de valores de g aproximados com quatro casas decimais para $k = 3, 4, \ldots, 11$, respectivamente:

$$\{0.6184, 0.5663, 0.5379, 0.5217, 0.5124, 0.5070, 0.5039, 0.5022, 0.5012\}.$$

Para os valores de $k \geq 12$, temos $g(\alpha, k) < 0.502$, pois

$$\begin{aligned} g(\alpha,k) &= \frac{\alpha-1}{2+(k+1)(\alpha-2)} \\ &< \frac{\alpha-1}{2-\dfrac{k+1}{2^{k-1}}} && (3.3) \\ &\leq \frac{\alpha-1}{2-\dfrac{13}{2048}} = \frac{2048}{4083} < 0.502, && (3.4) \end{aligned}$$

onde em (3.3) usamos a estimativa $\alpha > 2(1-1/2^k)$ e em (3.4) usamos o fato de que a função $(x+1)/2^{x-1}$ é decrescente para $x \geq 12$. Também, note que $g < 4/3$ para todo $k \geq 3$:

$$\begin{aligned} g(\alpha,k) &= \frac{\overbrace{\alpha-1}^{<1}}{2+(k+1)(\alpha-2)} \\ &< \frac{1}{2-\dfrac{k+1}{2^{k-1}}} && (3.5) \\ &< \frac{1}{2-\dfrac{4}{2^2}} = 1 < \frac{4}{3}\,. && (3.6) \end{aligned}$$

Antes de iniciar a demonstração do Teorema 3.1, precisamos de um Lema auxiliar que nos dá um limitante inferior para g em função de α:

Lema 3.1 *Com a notação estabelecida, $g > 1/\alpha$.*

Demonstração: De fato,

$$
\begin{aligned}
g\alpha - 1 &= \frac{\alpha(\alpha-1)-(2+(k+1)(\alpha-2))}{(2+(k+1)(\alpha-2))} \\
&= \frac{\alpha^2 + k\overbrace{(2-\alpha)}^{>0} - 2\alpha}{2+(k+1)(\alpha-2)} \\
&\geq \frac{\alpha^2 + 3(2-\alpha) - 2\alpha}{2+(k+1)(\alpha-2)} \\
&= \frac{\alpha^2 - 5\alpha + 6}{2+(k+1)(\alpha-2)} > 0, \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

onde na última desigualdade usamos o fato que o polinômio $x^2 - 5x + 6$ assume valores positivos para $x \in (1, 2)$, e que

$$2 + (k+1)(\alpha-2) > 2 - (k+1)/2^{k-1} \geq 2 - 4/2^2 = 1 \ ,$$

para todo $k \geq 3$. Portanto, (3.7) implica em $g > 1/\alpha$. ■

Para $m = 1$ temos $(m, k, n) = (1, k, 3)$ solução de (3.1) para todo $k \geq 3$. Caso $m = 2$, a equação (3.1) nos dá

$$(F_2^{(k)})^2 + (F_3^{(k)})^2 = 1^2 + 2^2 = 5 \ . \qquad (3.8)$$

Notamos que a sequência de k-bonacci é crescente, e se $k_1 \leq k_2$, então $F_n^{(k_1)} \leq F_n^{(k_2)}$. Assim,

$$F_4^{(k)} = F_4^{(3)} = 4 < 5 < 7 = F_5^{(3)} \leq F_5^{(k)}, \quad \forall k \geq 3$$

$$\Rightarrow F_4^{(k)} < 5 < F_5^{(k)}, \quad \forall k \geq 3,$$

donde $5 \notin (F_n^{(k)})_n$, e não temos solução para a equação (3.1) quando $n = 2$. Portanto, podemos supor que $n \geq 3$.

Agora podemos dar inicio à demonstração.

Demonstração do Teorema 3.1: Primeiro vamos restringir os valores de n em função de m usando as estimativas de [2]. A identidade (3.1) com estas estimativas nos dá

$$\alpha^{n-1} > F_n^{(k)} = (F_m^{(k)})^2 + (F_{m+1}^{(k)})^2 > \alpha^{2m-4} + \alpha^{2m-2} = \alpha^{2m-4}\overbrace{(1+\alpha^2)}^{>\alpha^2} > \alpha^{2m-2},$$

daí $n-1 > 2m-2$, o que nos dá $n > 2m-1$, e

$$\alpha^{n-2} < F_n^{(k)} = (F_m^{(k)})^2 + (F_{m+1}^{(k)})^2 < \alpha^{2m-2} + \alpha^{2m} = \alpha^{2m-2}(1+\alpha^2) < \alpha^{2m+1},$$

onde usamos que $1+\alpha^2 < \alpha^3$, consequência imediata de $\alpha^2(\alpha-1) > (7/4)^2(7/4-1) = 147/64 > 1$. Assim, $n-2 < 2m+1$, logo $n < 2m+3$, e concluimos que se (m,n,k) é solução de (3.1), então $n \in \{2m, 2m+1, 2m+2\}$. Trataremos em primeiro lugar o caso $m \leq 20$. Se tivermos $m \leq 20$ e $3 \leq k \leq 42$, uma rápida verificação computacional mostra que não há soluções para (3.1) nestes intervalos. Caso $m \leq 20$ e $k > 42$, então $F_m^{(k)}, F_{m+1}^{(k)}$ e $F_n^{(k)}$ são potências de 2, pois como os $k+1$ primeiros termos da sequência de k-bonacci são potências de 2 temos

- $m \leq 20 < 42 < k+1 \Rightarrow F_m^{(k)} = 2^{m-2}$;
- $m+1 \leq 21 < 42 < k+1 \Rightarrow F_{m+1}^{(k)} = 2^{m-1}$;
- $n \leq 2m+2 \leq 42 < k+1 \Rightarrow F_n^{(k)} \in \{2^{2m-2}, 2^{2m-1}, 2^{2m}\}$.

Como a soma de duas potências distintas de 2 não pode resultar em outra potência de 2, não há soluções também neste caso.

Feitas estas observações, a partir de agora vamos considerar $m \geq 20$. Escrevemos

$$F_m^{(k)} = g\alpha^{m-1} + E_m(k) , \tag{3.9}$$

onde lembramos que $E_m(k) = \sum_{i=2}^{k} g(\alpha_i, k)\alpha_i^{m-1}$. Então a identidade (3.1) nos dá

$$(g\alpha^{m-1} + E_m(k))^2 + (g\alpha^m + E_{m+1}(k))^2 = g\alpha^{2m+i-1} + E_{2m+i}(k), \tag{3.10}$$

com $i \in \{0, 1, 2\}$. Assim, dividindo ambos os membros de (3.10) por α^{2m-2},

$$(g + E_m(k)/\alpha^{m-1})^2 + (g\alpha + E_{m+1}(k)/\alpha^{m-1})^2 = g\alpha^{i+1} + E_{2m+i}(k)/\alpha^{2m-2}. \tag{3.11}$$

Agora denotamos

$$(g + E_m(k)/\alpha^{m-1})^2 = g^2 + C_1,$$

onde $C_1 := C_1(k, m)$. Usando (3.6) e a desigualdade triangular,

$$\begin{aligned}
|C_1| &= |2gE_{m+1}(k)/\alpha^{m-1} + (E_m(k)/\alpha^{m-1})^2| \\
&\leq 2 \times (4/3) \times (1/2) \times \alpha^{-(m-1)} + (1/4) \times \alpha^{-2(m-1)} \\
&< 2 \times 2 \times (4/3) \times (1/2) \times \alpha^{-(m-1)} \\
&< 3/\alpha^{m-1}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Analogamente,

$$(g\alpha + E_{m+1}(k)/\alpha^{m-1})^2 = g^2\alpha^2 + C_2,$$

para $C_2 := C_2(k, m)$, onde,

$$\begin{aligned}
|C_2| &= |2g\alpha E_{m+1}(k)/\alpha^{m-1} + (E_{m+1}(k)/\alpha^{m-1})^2| \\
&< 2 \times (4/3) \times 2 \times (1/2) \times (2/\alpha^{m-1}) \\
&< 6/\alpha^{m-1}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Denotando $C_3 := C_3(m, k) = E_{2m+i}/\alpha^{2m-2} < 1/\alpha^{m-1}$, temos

$$|C_3| < \frac{|E_{2m+i}(k)|}{\alpha^{2m-2}} < \frac{1/2}{\alpha^{2m-2}} < \frac{1}{\alpha^{m-1}}\ , \tag{3.14}$$

onde usamos na última desigualdade que $2\alpha^{2m-2} = \alpha^{m-1}(2\overbrace{\alpha^{m-1}}^{>1}) > \alpha^{m-1}$ para todo $m \geq 2$. Portanto, as estimativas (3.12), (3.13) e (3.14) em (3.11) nos dão

$$\begin{aligned}
g^2 + C_1 + (g\alpha)^2 + C_2 &= g\alpha^{i+1} + C_3 \\
|g^2 + (g\alpha)^2 - g\alpha^{i+1}| &= |C_3 - C_1 - C_2| \qquad\qquad (\times g^{-1}) \\
|g + g\alpha^2 - \alpha^{i+1}| &\leq \frac{1}{g}\left(|C_3| + |C_1| + |C_2|\right) \\
&< 2 \times \left(\frac{1}{\alpha^{m-1}} + \frac{3}{\alpha^{m-1}} + \frac{6}{\alpha^{m-1}}\right) \\
&= \frac{20}{\alpha^{m-1}}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad |g + g\alpha^2 - \alpha^{i+1}| < \frac{20}{\alpha^{m-1}} \ . \tag{3.15}$$

Para $3 \leq k \leq 11$ e $i \in \{0, 1, 2\}$ obtemos computacionalmente

$$0.505 < |g + g\alpha^2 - \alpha^{i+1}| < \frac{20}{\alpha^{m-1}} < \frac{20}{1.5^{m-1}},$$

donde $1.5^{m-1} < 40$, o que é absurdo para $m \geq 20$.

No caso $k \geq 12$, analisamos (3.15) para cada valor de i:

- $i = 0$:

  Fazendo $i = 0$ em (3.15) e usando o Lema 3.1:

  $$g + g\alpha^2 - \alpha = g + \overbrace{(g\alpha)}^{>1}\alpha - \alpha > g > 0.5 \ .$$

  Assim $0.5 > 20/\alpha^{m-1} \ \Rightarrow \ 1.5^{m-1} < 40$, e novamente conseguimos um absurdo para $m \geq 20$.

Precisamos, nos casos $i = 1, 2$, de um limitante inferior para α quando $k \geq 12$,

$$\alpha > 2\left(1 - 2^{-k}\right) > 2(1 - 2^{-12}) = \frac{4095}{2048} > 1.99 \ .$$

Portanto, $\alpha > 1.99$ para todo $k \geq 12$. Também usaremos o fato, já visto em (3.4), que $g < 0.502$ para $k \geq 12$.

- $i = 1$:

  Neste caso, temos $\alpha^2 - g\alpha^2 - g > (1.99)^2 - 0.502 \times 2^2 - 0.502 > 1.45$, e obtemos

  $$1.45 < \alpha^2 - g\alpha^2 - g \leq |g + g\alpha^2 - \alpha^2| < \frac{20}{\alpha^{m-1}} \Rightarrow \alpha^{m-1} < 13.8,$$

  que é falso para $\alpha > 1.99$ e $m \geq 20$.

- $i = 2$:

  Analogamente, temos $\alpha^3 - g\alpha^2 - g > (1.99)^3 - 0.502 \times 2^2 - 0.502 > 5.37$, que é ainda maior do que a constante do caso anterior, nos dando

  $$5.37 < \alpha^3 - g\alpha^2 - g \leq |g + g\alpha^2 - \alpha^2| < \frac{20}{\alpha^{m-1}} \Rightarrow \alpha^{m-1} < 3.73,$$

  também falso para $\alpha > 1.99$ e $m \geq 20$.

Isto termina a demonstração. ■

Observe a demonstração anterior consiste em mostrar que $F_n^{(k)} \neq F_{2m+i}^{(k)}$, para $i = 0, 1, 2$. Na verdade, no caso $i = 1$, conseguimos provar um resultado mais forte, como segue.

Proposição 3.1 *Sejam m, n e k inteiros positivos, com $n > 1$ e $k \geq 3$. Então*

$$(F_n^{(k)})^2 + (F_{n+1}^{(k)})^2 < F_{2n+1}^{(k)}.$$

Para simplificar a notação, nessa demonstração usaremos $[a, b] = \{a, a+1, \ldots, b\}$ para inteiros $a < b$.

Demonstração: Vamos proceder por indução em n. O caso base, $n = 2$ é imediato, já que $F_2^{(k)} = 1$, $F_3^{(k)} = 2$ e então $(F_2^{(k)})^2 + (F_3^{(k)})^2 = 5 < 8 = F_5^{(k)}$, para todo $k \geq 3$. Agora, supondo que $(F_i^{(k)})^2 + (F_{i+1}^{(k)})^2 < F_{2i+1}^{(k)}$, para $i \in$

$[2, n]$, e usando o Teorema Multinomial obtemos que

$$\begin{aligned}
(F_{n+1}^{(k)})^2 + (F_{n+2}^{(k)})^2 &= (F_n^{(k)} + \cdots + F_{n-k+1}^{(k)})^2 + (F_{n+1}^{(k)} + \cdots + F_{n-k+2}^{(k)})^2 \\
&= (F_n^{(k)})^2 + \cdots + (F_{n-k+1}^{(k)})^2 + 2\left(\sum_{\mathcal{I}_1} F_i^{(k)} F_j^{(k)}\right) \\
&\quad + (F_{n+1}^{(k)})^2 + \cdots + (F_{n-k+2}^{(k)})^2 + 2\left(\sum_{\mathcal{I}_2} F_i^{(k)} F_j^{(k)}\right) \\
&< F_{2n+1}^{(k)} + F_{2n-1}^{(k)} + \cdots + F_{2n-2k+3}^{(k)} \\
&\quad + 2\left((F_{n+1}^{(k)})^2 - (F_{n-k+1}^{(k)})^2 + 2\left(\sum_{\mathcal{I}} F_i^{(k)} F_j^{(k)}\right)\right)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

onde (para $\ell = 1, 2$) $\mathcal{I}_\ell = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : i < j \in [n + \ell - k, n + \ell - 1]\}$, $\mathcal{I} = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : i < j \in [n - k + 2, n]\}$ e para a última desigualdade usamos a hipótese de indução em conjunto com

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathcal{I}_1} F_i^{(k)} F_j^{(k)} + \sum_{\mathcal{I}_2} F_i^{(k)} F_j^{(k)} &= (F_{n+1}^{(k)} + F_{n-k+1}^{(k)}) \overbrace{(F_n^{(k)} + \cdots + F_{n-k+2}^{(k)})}^{F_{n+1}^{(k)} - F_{n+k-1}^{(k)}} + \\
&\quad + 2\left(\sum_{\mathcal{I}} F_i^{(k)} F_j^{(k)}\right) \\
&= (F_{n+1}^{(k)})^2 - (F_{n-k+1}^{(k)})^2 + 2\left(\sum_{\mathcal{I}} F_i^{(k)} F_j^{(k)}\right).
\end{aligned}$$

Vamos supor que k par (para k ímpar, a demonstração é análoga). Então, o último termo da recorrência de $F_{2n+3}^{(k)}$ aparece na soma $F_{2n+1}^{(k)} + F_{2n-1}^{(k)} + \cdots + F_{2n-2k+3}^{(k)}$, logo

$$\begin{aligned}
F_{2n+3}^{(k)} - ((F_{n+1}^{(k)})^2 + (F_{n+2}^{(k)})^2) &> F_{2n+2}^{(k)} + F_{2n}^{(k)} + \cdots + F_{2n-k+6}^{(k)} \\
&\quad - 2\left((F_{n+1}^{(k)})^2 - (F_{n-k+1}^{(k)})^2 + 2\left(\sum_{\mathcal{I}} F_i^{(k)} F_j^{(k)}\right)\right),
\end{aligned}$$

onde utilizamos a estimativa $F_{2n-k+4}^{(k)} > F_{2n-k+1}^{(k)} + F_{2n-k-1}^{(k)} + \cdots + F_{2n-2k+3}^{(k)}$ (que segue da recorrência de $F_{2n-k+4}^{(k)}$). Agora, tendo como objetivo mostrar que $F_{2n+3}^{(k)} - ((F_{n+1}^{(k)})^2 + (F_{n+2}^{(k)})^2) > 0$, é suficiente mostrarmos as seguintes desigualdades:

(i) $\dfrac{F_{2n+2}^{(k)}}{3} + F_{2n}^{(k)} + \cdots + F_{2n-k+6}^{(k)} > 4\left(\sum_{\mathcal{I}} F_i^{(k)} F_j^{(k)}\right)$.

(ii) $\dfrac{2F_{2n+2}^{(k)}}{3} > 2((F_{n+1}^{(k)})^2 - (F_{n-k+1}^{(k)})^2)$.

Vamos mostrar o item (i), já que a prova de (ii) segue os mesmos passos.

De fato, primeiro note que, usando novamente a hipótese de indução, conseguimos

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{I}} F_i^{(k)} F_j^{(k)} &< (F_n^{(k)})^2 + (F_{n-1}^{(k)})^2 + \cdots + (F_{n-k+4}^{(k)})^2 + (F_{n-k+3}^{(k)})^2 \\ &< F_{2n-1}^{(k)} + F_{2n-5}^{(k)} + \cdots + F_{2n-2k+7}^{(k)}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Por outro lado, observamos que $F_{n+3}^{(k)} > 4(F_n^{(k)} + F_{n-1}^{(k)})$, para todo $n > 1$, donde, para $k \geq 10$, a soma

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{(k-6)/2} F_{2n-2j}^{(k)} &> 4(F_{2n-7}^{(k)} + F_{2n-8}^{(k)} + \cdots + F_{2n-k+2}^{(k)}) \\ &> 4(F_{2n-9}^{(k)} + F_{2n-13}^{(k)} + \cdots + F_{2n-2k+7}^{(k)}), \end{aligned} \tag{3.18}$$

temos, do lado esquerdo de (i). Observe que a soma do lado direito da desigualdade (3.18) somente aparece em (3.17) quando $k \geq 10$. No entanto, para todo $k \geq 4$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{F^{(k)}_{2n+2}}{3} + F^{(k)}_{2n} + F^{(k)}_{2n-2} &= \frac{F^{(k)}_{2n+2}}{3} + \sum_{j=1}^{k} F^{(k)}_{2n-j} + F^{(k)}_{2n-3} + \cdots + F^{(k)}_{2n-k-2} \\
&> \frac{F^{(k)}_{2n+2}}{3} + F^{(k)}_{2n-1} + \overbrace{(F^{(k)}_{2n-2} + \cdots + F^{(k)}_{2n-k} + F^{(k)}_{2n-6})}^{>F^{(k)}_{2n-1}} \\
&\quad + F^{(k)}_{2n-3} + F^{(k)}_{2n-4} + F^{(k)}_{2n-5} + F^{(k)}_{2n-7} + \cdots + F^{(k)}_{2n-k-2} \\
&> \frac{F^{(k)}_{2n+2}}{3} + 2F^{(k)}_{2n-1} + 4F^{(k)}_{2n-5}, \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade, usamos que $F^{(k)}_{2n-3} > 2F^{(k)}_{2n-5}$. A única peça que falta no nosso quebra-cabeça é mostrar que $F^{(k)}_{2n+2} > 6F^{(k)}_{2n-1}$, pois, nesse caso a desigualdade (3.19) nos dá

$$\frac{F^{(k)}_{2n+2}}{3} + F^{(k)}_{2n} + F^{(k)}_{2n-2} > 4(F^{(k)}_{2n-1} + F^{(k)}_{2n-5}),$$

o que junto com (3.19) se torna

$$\begin{aligned}
\frac{F^{(k)}_{2n+2}}{3} + \sum_{j=0}^{(k-6)/2} F^{(k)}_{2n-2j} &> 4(F^{(k)}_{2n-1} + F^{(k)}_{2n-5} + \cdots + F^{(k)}_{2n-2k+7}) \\
&> 4 \sum_{\mathcal{I}} F^{(k)}_i F^{(k)}_j \ ,
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos (3.18).

Com efeito, temos $F_{2n+2}^{(k)} > 6F_{2n-1}^{(k)}$, como vemos a seguir

$$\begin{aligned}
F_{2n+2}^{(k)} &= F_{2n+1}^{(k)} + F_{2n}^{(k)} + F_{2n-1}^{(k)} + F_{2n-2}^{(k)} + \cdots + F_{2n-k+2}^{(k)} \\
&= (F_{2n}^{(k)} + \cdots + F_{2n-k+1}^{(k)}) + (F_{2n-1}^{(k)} + \cdots + F_{2n-k}^{(k)}) \\
&\quad + F_{2n-1}^{(k)} + \cdots + F_{2n-k+2}^{(k)} \\
&= 3F_{2n-1}^{(k)} + (F_{2n-1}^{(k)} + \cdots + F_{2n-k}^{(k)}) + \overbrace{(F_{2n-2}^{(k)} + \cdots + F_{2n-k}^{(k)} + F_{2n-2}^{(k)})}^{>F_{2n-1}^{(k)}} \\
&\quad + 3(F_{2n-3}^{(k)} + \cdots + F_{2n-k}^{(k)}) + 2F_{2n-2}^{(k)} + F_{2n-k+1}^{(k)} + F_{2n-k+2}^{(k)} \\
&> 5F_{2n-1}^{(k)} + \overbrace{(F_{2n-2}^{(k)} + \cdots + F_{2n-k}^{(k)} + F_{2n-3}^{(k)})}^{>F_{2n-1}^{(k)}} \\
&> 6F_{2n-1}^{(k)},
\end{aligned}$$

O que completa a demonstração. ■

3.2 O caso $s \geq 3$

Após resolver o caso $s = 2$, é natural indagarmos sobre a existência de soluções para a equação Diofantina

$$(F_m^{(k)})^s + (F_{m+1}^{(k)})^s = F_n^{(k)}, \tag{3.20}$$

quando $s \geq 3$. Em 2010, Marques e Togbé [13] mostraram que se $F_m^s + F_{m+1}^s$ for um número de Fibonacci para infinitos n, então $s = 1$ ou 2. Em 2011 este problema foi completamente resolvido por Luca e Oyono [10], onde mostraram que a equação (3.20) não possui solução para $s \geq 3$ e $m \geq 2$. A equação (3.20) foi revista em um contexto mais geral em [9], mostrando que as únicas soluções da equação

$$F_n^x + F_{n+1}^x = F_m^y \ ,$$

para (m, n, x, y) inteiros positivos com $y > 1$ são $(m, n, x, y) = (3, 4, 1, 3)$, $(4, 2, 3, 2)$. Luca e Oyono [11] também estudaram as seguintes equações:

$$F_n^x + F_{n+1}^y = F_m^y \quad \text{e} \quad F_n^y + F_{n+1}^x = F_m^x \ ,$$

onde encontraram que a única solução para $n \geq 3$ e $x \neq y$, é $F_3^4 + F_4^2 = F_5^2$.

Nosso objetivo principal é extender o resultado de Luca e Oyono em [10] para $k \geq 3$, buscando soluções para (3.20) neste caso. O resultado principal deste capítulo dá condições suficientes para que esta equação Diofantina não possua solução, como segue:

Teorema 3.2 *Sejam m, n, k e s inteiros tais que* $3 \leq k \leq \min\{m, \log s\}$. *Então a equação Diofantina (3.20) não possui solução.*

O método utilizado segue os seguintes passos: Primeiro, usamos o resultado de Matveev [15] sobre formas lineares em logaritmo para obter um limitante superior para s em função de m. Em seguida, tratamos o caso em que m é *pequeno* ($m \leq 1394$) usando o resultado de Dujella e Pethö [5]. Para tratar o caso $m \geq 1395$ usamos novamente formas lineares em logaritmo para obter um limitante superior para s, agora em função de k, o que combinado com a hipótese $k < \log s$ dá um limitante superior absoluto para s. Para finalizar a demonstração, usamos os Teoremas 1.6 e 1.7 para reduzir o limitante para s, e então, com uma verificação computacional, concluimos a prova.

Demonstração do Teorema 3.2: Como na demonstração do Teorema 3.1, vamos usar as estimativas de [2] para conseguir cotas superiores e inferiores para n em função de m e s:

- $$\begin{aligned} \alpha^{n-1} > F_n^{(k)} = (F_m^{(k)})^s + (F_{m+1}^{(k)})^s &> \alpha^{(m-2)s} + \alpha^{(m-1)s} \\ &= \alpha^{(m-2)s} \overbrace{(1 + \alpha^s)}^{>\alpha^s} > \alpha^{(m-1)s}, \end{aligned}$$

daí $n-1 > (m-1)s$, o que implica em $n > (m-1)s+1$, e

- $$\begin{aligned}\alpha^{n-2} < F_n^{(k)} = (F_m^{(k)})^s + (F_{m+1}^{(k)})^s &< \alpha^{(m-1)s} + \alpha^{ms} \\ &= \alpha^{(m-1)s}\overbrace{(1+\alpha^s)}^{<\alpha^{s+1}} \\ &< \alpha^{ms+1},\end{aligned}$$

onde usamos na última desigualdade que $1+\alpha^s < \alpha^{s+1}$, que é uma consequência de $\alpha^s(\alpha-1) > (7/4)^3 \times (7/4-1) = \frac{1029}{256} > 1$. Assim, temos $n \in [(m-1)s+2, ms+2]$. Agora usando (3.2), escrevemos

$$(F_m^{(k)})^s + (F_{m+1}^{(k)})^s = F_n^{(k)} = g\alpha^{n-1} + E_n(k)$$

que implica em

$$(F_{m+1}^{(k)})^s - g\alpha^{n-1} = (F_m^{(k)})^s - E_n(k)\ . \tag{3.21}$$

Como $|E_n(k)| < 1/2$, então $(F_{m+1}^{(k)})^s - g\alpha^{n-1} \in [(F_m^{(k)})^s - 1/2, (F_m^{(k)})^s + 1/2]$, e com isso o lado esquerdo da igualdade (3.21) é positivo, já que $(F_m^{(k)})^s > 1$. Aplicando o valor absoluto em (3.21) juntamente com a desigualdade triangular, obtemos

$$|g\alpha^{n-1} - (F_{m+1}^{(k)})^s| < \frac{1}{2} + (F_m^{(k)})^s < 2(F_m^{(k)})^s\ .$$

Dividindo ambos os lados por $(F_{m+1}^{(k)})^s$,

$$\left|\frac{g\alpha^{n-1}}{(F_{m+1}^{(k)})^s} - 1\right| < 2\left(\frac{F_m^{(k)}}{F_{m+1}^{(k)}}\right)^s\ . \tag{3.22}$$

Vamos limitar superiormente o lado direito da desigualdade (3.22). Para tal, usamos o fato que

$$F_{m+1}^{(k)} = F_m^{(k)} + \underbrace{F_{m-1}^{(k)} + \cdots + F_{m-k+1}^{(k)}}_{=F_m^{(k)} - F_{m-k}^{(k)}} = 2F_m^{(k)} - F_{m-k}^{(k)}\ .$$

Assim,

$$\frac{F_{m+1}^{(k)}}{F_m^{(k)}} = \frac{2F_m^{(k)} - F_{m-k}^{(k)}}{F_m^{(k)}} = 2 - \frac{F_{m-k}^{(k)}}{F_m^{(k)}} = 2 - \frac{F_{m-k}^{(k)}}{F_{m-1}^{(k)} + \cdots + F_{m-k}^{(k)}} \ . \tag{3.23}$$

Por outro lado, sabemos que $F_{m-k}^{(k)} \leq F_{m-k+1}^{(k)} \leq \cdots \leq F_{m-1}^{(k)}$, nos dando em (3.23):

$$\frac{F_{m+1}^{(k)}}{F_m^{(k)}} \geq 2 - \frac{F_{m-k}^{(k)}}{kF_{m-k}^{(k)}} = 2 - \frac{1}{k} \geq \frac{5}{3} > 1.65 \ .$$

Portanto

$$\frac{F_m^{(k)}}{F_{m+1}^{(k)}} < \frac{1}{1.65} \ . \tag{3.24}$$

Usando o limitante (3.24) em (3.22), conseguimos nossa primeira desigualdade chave:

$$\left| \frac{g\alpha^{n-1}}{(F_{m+1}^{(k)})^s} - 1 \right| < \frac{2}{1.65^s} \ . \tag{3.25}$$

Para a primeira aplicação do resultado de Matveev (Teorema 1.3), tomamos $t := 3$, $\gamma_1 := F_{m+1}^{(k)}$, $\gamma_2 := \alpha$, $\gamma_3 := g$, e $b_1 := -s$, $b_2 := n-1$, $b_3 := 1$. Assim, consideramos

$$\Lambda_1 := g\alpha^{n-1}(F_{m+1}^{(k)})^{-s} - 1 \ ,$$

que é diferente de zero como já havíamos observado ($(F_{m+1}^{(k)})^s - g\alpha^{n-1} > 0$). O corpo de números algébricos que contém γ_1, γ_2 e γ_3 é $\mathbb{K} := \mathbb{Q}(\alpha)$, cujo grau é $D := [\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = k$. Para o valor de B, temos

$$\max\{|b_1|, |b_2|, |b_3|\} = \max\{s, n-1, 1\} = \max\{s, n-1\} \ ,$$

mas como $s + 2 \leq (m-1)s + 2 \leq n$, então $s < s + 1 \leq n - 1$, donde podemos tomar $B := n - 1$. Agora, precisamos estimar as alturas logarítmicas $h(\gamma_1)$, $h(\gamma_2)$ e $h(\gamma_3)$.

Para $h(\gamma_1)$, temos $\partial(\gamma_1) = 1$ e o coeficiente líder do polinômio minimal de γ_1 é igual a 1. Daí

$$h(\gamma_1) = h(F_{m+1}^{(k)}) = \log F_{m+1}^{(k)} < \log 2^m = m \log 2 \ ,$$

e temos que

$$\max\{Dh(\gamma_1), |\log\gamma_1|, 0.16\} < \max\{km\log 2, \overbrace{|\log F_{m+1}^{(k)}|}^{<m\log 2}, 0.16\} = km\log 2\ .$$

Assim, podemos tomar $A_1 := km\log 2$.

Em $h(\gamma_2)$, já vimos que $\partial(\gamma_2) = \partial(\alpha) = k$ e que o coeficiente líder do polinômio minimal de α também é igual a 1, donde obtemos

$$h(\gamma_2) = h(\alpha) = \frac{1}{k}\left(\log(1) + \sum_{i=1}^{k}\log(\max\{|\alpha_i|, 1\})\right) = \frac{\log\alpha}{k} < \frac{\log 2}{k}\ ,$$

onde usamos o fato de α ser a única raíz de $\psi_k(x)$ que está fora do círculo unitário, ou seja, $|\alpha_i| < 1$ para $i = 2, \ldots, k$. Desta forma

$$\max\{Dh(\gamma_2), |\log\gamma_2|, 0.16\} < \max\{k((\log 2)/k), \overbrace{|\log\alpha|}^{<\log 2}, 0.16\} < \log 2\ ,$$

e podemos escolher $A_2 := \log 2$.

Para $h(\gamma_3)$, denotando $\partial(g) = d$, a_0 pelo coeficiente líder do polinômio minimal de g e g_i os seus conjugados sobre $\mathbb{K}$, temos

$$h(\gamma_3) = h(g) = \frac{1}{d}\left(\log|a_0| + \sum_{i=1}^{k}\log(\max\{|g_i|, 1\})\right)\ .$$

Primeiro, note que aplicando a conjugação (sobre $\mathbb{K}$) em $g = g(\alpha, k)$, obtemos $g_i = g(\alpha_i, k)$ para todo $1 \leq i \leq k$, e como, pela relação entre g e α, sabemos que $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(g)] = 1$, temos $d = k$. Agora, considere o polinômio

$$G(x) = \prod_{i=1}^{k}\left(x - \frac{\alpha_i - 1}{2 + (\alpha_i - 2)(k+1)}\right)\ .$$

Temos que $G(x) \in \mathbb{Q}[x]$, pois

$$G(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - g_i) = x^k + \sum_{i=1}^{k}\sigma_i(g_1, \ldots, g_k)x^{k-i}$$

e pelo Teorema 1.5 sabemos que $\sigma_i(g_1, \dots, g_k) \in \mathbb{Q}$. Também temos que a_0 divide $\prod_{i=1}^k (2 + (\alpha_i - 2)(k+1))$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left|\prod_{i=1}^k (2 + (\alpha_i - 2)(k+1))\right| &= \left|\prod_{i=1}^k (k+1)\left(\frac{2}{k+1} + \alpha_i - 2\right)\right| \\ &= (k+1)^k \left|\prod_{i=1}^k \left(2 - \frac{2}{k+1} - \alpha_i\right)\right| \\ &= (k+1)^k \left|\psi_k\left(2 - \frac{2}{k+1}\right)\right| , \qquad (3.26) \end{aligned}$$

onde usamos em (3.26) que $\psi_k(x) = \prod_{i=1}^k (x - \alpha_i)$. Afirmamos que $|\psi_k(y)| < \max\{y^k, y^{k-1} + \cdots + y + 1\}$. De fato, observe que

$$\begin{aligned} |A - B| &= \max\{A, B\} - \min\{A, B\} \\ &< \max\{A, B\} . \end{aligned}$$

Desta forma

$$|\psi_k(y)| = |y^k - (y^{k-1} + \cdots + y + 1)| < \max\{ \overbrace{y^k}^{<2^k} , \overbrace{y^{k-1} + \cdots + y + 1}^{<2^{k-1}+\cdots+2+1=2^k-1<2^k} \} < 2^k ,$$

e obtemos, usando a desigualdade anterior em (3.26), já que $0 < 2 - 2/(k+1) < 2$,

$$\left|\prod_{i=1}^k (2 + (\alpha_i - 2)(k+1))\right| < (k+1)^k 2^k .$$

Daí, como a_0 divide $\left|\prod_{i=1}^k (2 + (\alpha_i - 2)(k+1))\right| \neq 0$, a desigualdade anterior nos dá um limitante superior para $|a_0|$:

$$|a_0| \leq \left|\prod_{i=1}^k (2 + (\alpha_i - 2)(k+1))\right| < (k+1)^k 2^k \;\Rightarrow\; \log|a_0| < k(\log(k+1) + \log 2) .$$

Para $k \geq 3$, temos $2(k+1) = 2k + 2 < k^3$, onde aplicando o logaritmo obtemos $3 \log k > \log(k+1) + \log 2$, e substituindo na desigualdade acima conseguimos

$$\log|a_0| < 3k \log k . \qquad (3.27)$$

Encontrado o limitante para $\log|a_0|$, passamos a analisar o módulo de g_i para todo $1 \leq i \leq k$:

- Caso $2 \leq i \leq k$:

  Nestes casos, temos $|\alpha_i| < 1$. Com isso,

$$\begin{aligned}
|2+(k+1)(\alpha_i-2)| &= |(k+1)(2-\alpha_i)-2| \\
&\geq (k+1)|2-\alpha_i|-2 \\
&\geq (k+1)(2-\overbrace{|\alpha_i|}^{<1})-2 \\
&> (k+1)-2 \\
&= k-1 \geq 2\ .
\end{aligned}$$

  Portanto, $|2+(k+1)(\alpha_i-2)| \geq 2$. Assim,

$$\left|\frac{\alpha_i-1}{2+(k+1)(\alpha_i-2)}\right| \leq \frac{|\alpha_i|+1}{2} < 1 \ \Rightarrow \ |g_i| < 1\ .$$

- Caso $i = 1$:

  Para o caso da raíz dominante, α, é imediato que $|g| < 1$, como podemos ver

$$g = \frac{\overbrace{\alpha}^{<2}-1}{2+(k+1)\underbrace{(\alpha-2)}_{>-2^{k-1}}} < \frac{1}{2-\dfrac{k+1}{2^{k-1}}} \leq 1\ ,$$

  onde usamos na última desigualdade o fato que $k+1 \leq 2^{k-1}$ para todo $k \geq 3$.

Concluímos então que $\max\{|g_i|, 1\} = 1$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, o que nos dá para a altura logarítmica $h(g)$ o seguinte limitante superior

$$\begin{aligned}
h(g) &= \frac{1}{k}\left(\log|a_0| + \sum_{i=1}^{k}\log\left(\overbrace{\max\{|g_i|, 1\}}^{=1}\right)\right) \\
&< \frac{1}{k}(3k\log k) \Rightarrow h(g) < 3\log k\ .
\end{aligned}$$

Assim, lembrando que $1/2 < g < 1$, temos

$$\max\{Dh(\gamma_3), |\log\gamma_3|, 0.16\} < \max\{3k\log k, \overbrace{|\log g|}^{<\log 2}, 0.16\} = 3k\log k\ ,$$

e podemos tomar $A_3 := 3k\log k$. Agora podemos aplicar o resultado de Matveev (Teorema 1.3). Relembramos que o limitante inferior para $|\Lambda_1|$ dado pelo Teorema 1.3 é dado por

$$|\Lambda_1| > \exp(-1.4 \times 30^{t+3} \times t^{4.5} \times D^2 \times (1+\log D)(1+\log B)A_1 \cdots A_t)\ .$$

Deste modo, obtemos

$$\begin{aligned} |\Lambda_1| &> \exp(-1.4 \times 30^{3+3} \times 3^{4.5} \times k^2 \times (1+\log k)(1+\log(n-1)) \\ &\quad \times (3k\log k)(\log 2)(km\log 2)) \\ \Rightarrow |\Lambda_1| &> \exp(-\overbrace{1.4 \times 30^6 \times 3^{5.5} \times (\log 2)^2}^{<2.064\times 10^{11}} \times k^4 m \\ &\quad \times \log k(1+\log k)(1+\log(n-1))) \\ \Rightarrow |\Lambda_1| &> \exp(-2.064 \times 10^{11} \times k^4 m \log k(\overbrace{1+\log k}^{<2\log k})(1+\log(n-1)))\ . \end{aligned}$$

Pelas estimativas para n vistas no início da demonstração, temos que $n \geq (m-1)s+2 \geq 8$, onde é válida a desigualdade $1+\log(n+1) < 2\log(n-1)$, e também por aquelas estimativas temos que $n-1 \leq ms+1$. Desta forma,

$$\begin{aligned} |\Lambda_1| &> \exp(-2.064 \times 10^{11} \times k^4 m \log k(2\log k)(2\log(ms+1))) \\ \Rightarrow |\Lambda_1| &> \exp(-8.256 \times 10^{11} \times mk^4(\log k)^2 \log(ms+1)) \end{aligned} \tag{3.28}$$

Combinando nossa primeira desigualdade chave (3.15) com a desigualdade (3.28),

$$\frac{2}{1.65^s} > |\Lambda_1| > \exp(-8.256 \times 10^{11} \times mk^4(\log k)^2 \log(ms+1))$$

e aplicando o logaritmo em ambos os membros, conseguimos

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \log 2 - s\log 1.65 &> -8.256\times 10^{11}\times mk^4(\log k)^2\log(ms+1)\\
\Rightarrow s &< \frac{\log 2}{\log 1.65} + \frac{8.256}{\log 1.65}\times 10^{11}\times mk^4(\log k)^2\log(ms+1)\\
\Rightarrow s &< 1.39 + 16.49\times 10^{11}\times mk^4(\log k)^2\log(ms+1)\\
\Rightarrow s &< 16.7\times 10^{11}\times mk^4(\log k)^2\log(ms+1)\ . \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

Já que $m, s \geq 3$, temos $\log m, \log s > 1$, donde

$$\log(ms+1) < \log(ms)^2 = 2(\log m + \log s) < 4\log m\log s\ , \qquad (3.30)$$

onde a última desigualdade é válida pois, para $x, y > 1$, temos (supondo sem perda de generalidade $x < y$) que $x + y < 2y < 2xy$. Assim, usando a relação (3.30) em (3.32) obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
s &< 16.7\times 10^{11}\times mk^4(\log k)^2(4\log m\log s)\\
\Rightarrow \frac{s}{\log s} &< 66.8\times 10^{11}\times mk^4(\log k)^2\log m\ . \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

Por hipótese, temos $k \leq m$, o que em (3.31) nos dá

$$\frac{s}{\log s} < 66.8\times 10^{11}\times m^5(\log m)^3 \qquad (3.32)$$

Agora, vamos usar o seguinte argumento chave, mostrado por Luca e Oyono [10]:

$$\frac{x}{\log x} < A \ \Rightarrow\ x < 2A\log A\ , \qquad (3.33)$$

para todo $A \geq 3$. Com efeito, primeiro observamos que a função $x \mapsto x/\log x$ é crescente para todo $x \geq e$:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\log x}\right) = \frac{\overbrace{\log x - 1}^{>0}}{\underbrace{(\log x)^2}_{>0}} > 0\ .$$

Assim, se $x \geq 2A\log A > e$, então, como esta função é crescente,

$$\frac{x}{\log x} > \frac{2A\log A}{\log(2A\log A)} = \frac{2A\log A}{\log(2\log A) + \log A} > A\ ,$$

onde na última desigualdade usamos que $2\log A < A$ para $A \geq 3$. Isso contradiz nossa hipótese.

Como $66.8 \times 10^{11} \times m^5(\log m)^3 > 3$, temos por (3.33) a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} s &< 2 \times (66.8 \times 10^{11} \times m^5(\log m)^3)\log(66.8 \times 10^{11} \times m^5(\log m)^3) \\ &= 133.6 \times 10^{11} \times m^5(\log m)^3(\underbrace{\log 66.8 + 11\log 10}_{<29.54} + 5\log m + 3\log\log m) \\ &< 133.6 \times 10^{11} \times m^5(\log m)^3(29.54 + 5\log m + 3\underbrace{\log\log m}_{<\log m}) \\ &< 133.6 \times 10^{11} \times m^5(\log m)^3(\underbrace{29.54 + 8\log m}_{<34.9\log m})\ , \end{aligned}$$

ou seja,

$$s < 4.7 \times 10^{14} \times m^5(\log m)^4\ . \tag{3.34}$$

Dividiremos a prova em dois casos:

- *Caso* $3 \leq m \leq 1394$:

Neste caso, como $m \leq 1394$, a desigualdade (3.34) nos dá um limitante também para s, como vemos a seguir

$$s < 4.7 \times 10^{14} \times (1394)^5(\log 244)^4 \ \Rightarrow\ s < 6.75 \times 10^{33}\ .$$

Assim , obtemos limitantes para as demais variáveis k e n:

$$\begin{aligned} n \leq ms + 2 \ &\Rightarrow\ n < 1394 \times 6.75 \times 10^{33} + 2 \ \Rightarrow\ n < 9.41 \times 10^{36}\ , \\ k \leq \log s \ &\Rightarrow\ k \leq \log(6.75 \times 10^{33}) \ \Rightarrow\ k \leq 77\ . \end{aligned}$$

Também observamos que $n < ms+2$, nos dá $s > (n-2)/1394$. Agora, tendo em vista usar o método de redução, defina

$$\Gamma_1 := (n-1)\log\alpha - \log\left(\frac{1}{g}\right) - s\log F_{m+1}^{(k)}\ . \tag{3.35}$$

Então, $\Lambda_1 = e^{\Gamma_1} - 1$. Note que Γ_1 é positivo, já que Λ_1 é positivo, e temos por (3.25),

$$0 < \Gamma_1 < e^{\Gamma_1} - 1 = \Lambda_1 < \frac{2}{1.65^s} \ .$$

Dividindo ambos os membros da desigualdade anterior por $\log F_{m+1}^{(k)}$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 < \quad n\left(\frac{\log\alpha}{\log F_{m+1}^{(k)}}\right) - s - \left(\frac{\log(\alpha/g)}{\log F_{m+1}^{(k)}}\right) \quad &< \frac{2}{1.65^s \log F_{m+1}^{(k)}} \\ &< \frac{2}{1.65^s} \\ &< \frac{2\times(1.65)^{2/1394}}{(1.65)^{n/1394}} \\ \Rightarrow 0 < \quad n\left(\frac{\log\alpha}{\log F_{m+1}^{(k)}}\right) - s - \left(\frac{\log(\alpha/g)}{\log F_{m+1}^{(k)}}\right) \quad &< 2.01\times(1.65)^{-\frac{n}{1394}} \ . \end{aligned} \tag{3.36}$$

Vamos aplicar o resultado de Dujella-Pethö (Teorema 1.4), onde

$$\gamma_{m,k} := \frac{\log\alpha}{\log F_{m+1}^{(k)}} \ , \ \mu_{m,k} := -\frac{\log(\alpha/g)}{\log F_{m+1}^{(k)}} \ , \ A := 2.01 \ , \ B := (1.65)^{\frac{1}{1394}} \ .$$

Tome $M = 9.41 \times 10^{36}$. Seja $q_{t,m,k}$ o denominador do t-ésimo convergente da fração contínua de $\gamma_{m,k}$. Para os cálculos que seguem, usamos o software *Mathematica 9*, em um OSX 10.8.4, 1.8 GHz Intel Core i5 com 4GB de memória, com as seguintes linhas de comando:

- O n-ésimo número de k-bonacci:

```
Serie[k_]:=Series[x/(1-Sum[x^j,{j, 1, k}])
F[k_, n_]:=SeriesCoefficient[Serie[k], {x, 0, 1400}],n] ;
```

- O polinômio $\psi_k(x)$:

```
s[x_, k_] := x^k - Sum[x^j, {j, 0, k - 1}]  ;
```

- A raíz dominante α, com 12000 casas decimais de aproximação:

```
alpha[k_] := x /. Last[NSolve[s[x, k], x, 12000]] ;
```

- O polinômio dominante g:

```
g[k_] := (alpha[k] - 1)/(2 + (k + 1)*(alpha[k] - 2)) ;
```

- Denominador do n-ésimo convergente da fração contínua de x:

```
DeFrac[x_, n_] := Last[Denominator[Convergents[x, n]]] ;
```

- A função distância entre x e o inteiro mais próximo, $\| x \|$:

```
Near[x_] := Min[Abs[x - Floor[x]], Abs[Ceiling[x] - x]]
```

Então, definindo no *Mathematica* as variáveis $\gamma_{m,k}$:

```
gama[m_, k_] := Log[alpha[k]]/Log[F[k, m + 1]] ,
```

$\mu_{m,k}$:

```
mi[m_, k_] := -Log[alpha[k]/g[k]]/Log[F[k, m + 1]] ,
```

$q_{t,m,k}$:

```
q[t_,m_,k_] := DeFrac[gama[m, k], t] ,
```

e $\epsilon_{t,m,k}$:

```
Epsilon[t_, m_, k_] := Near[mi[m, k]*q[t,m,k]]
-9.41*10^(36)*Near[gama[m, k]*q[t,m,k]] ,
```

calculamos para $4 \leq m \leq 1394$, e $3 \leq k \leq \min\{m, 77\}$:

```
Min[Table[q[700,m,k], {m, 3, 1394}, {k, 3, Min[m, 77]}]] ,
```

donde obtemos que o menor valor de $q_{700,m,k}$ é maior que $6M$, e

```
Min[Table[Epsilon[700, m, k],{m,4,1394},{k,3,Min[m,77]}]] ,
```

retornando em aproximadamente 17 horas um valor maior que $1.8 \cdot 10^{-189}$, ou seja o menor valor de $\epsilon_{700,m,k}$ é positivo (o que não é verdade para $\epsilon_{600,m,k}$). Assim, estão satisfeitas as condições do Teorema 1.4, donde não existem soluções inteiras para (3.36) quando

$$\left\lfloor \max_{\substack{3\le k\le 77\\ 3\le m\le 1394}} \frac{\log(Aq_{700,m,k}/\epsilon_{700,m,k})}{\log B} \right\rfloor \le n \le 9.41 \times 10^{36}$$

$$\Rightarrow \left\lfloor \frac{\log(2.01 \cdot 2.1 \times 10^{425}/1.8 \cdot 10^{-189})}{\log((1.65)^{\frac{1}{1394}})} \right\rfloor \le n \le 9.41 \times 10^{36}$$

$$\Rightarrow\ 1515054 \le n \le 9.41 \times 10^{36}\ .$$

Portanto, temos $n \le 1515053$, com isso, usamos que $s \le (n-2)/(m-1)$ para obter $s \le 757526$ (pois $m \ge 3$). Também, como $k \le \log s$, conseguimos $k \le 13$. Efetuando uma verificação computacional no *Mathematica* para os valores $3 \le m \le 1394$, $3 \le k \le 13$, $21 \le s \le 757526$ (pois $s \ge e^k \ge e^3 \ge 20.085\ldots$) e $(m-1)s + 2 \le n \le ms + 2$ com o comando

```
Catch[Do[{m,n,k,s}; If[F[k,m]^s+F[k,m+1]^s == F[k,n],
 Print[{m,n,k,s}]],{m,3,1394},{s,21,757526},{k,3,13},
 {n,(m-1)*s+2, m*s+2}]]
```

observamos que não há soluções para a equação (3.20) nestes intervalos, o que conclui este caso.

- *Caso* $m \ge 1395$:

Defina

$$\chi_m := \frac{|E_m(k)|s}{g\alpha^{m-1}}\ .$$

A desigualdade (3.34) nos dá,

$$\begin{aligned}\chi_m &= \frac{|E_m(k)|s}{g\alpha^{m-1}} < \frac{(1/2)4662.65 \times 10^{11} \times m^5(\log m)^4}{(1/2)\alpha^{m-1}} \\ \Rightarrow \chi_m &< \frac{4662.65 \times 10^{11} \times m^5(\log m)^4}{\alpha^{m-1}} < \frac{1}{\alpha^{(m-1)/2}} \ , \end{aligned} \tag{3.37}$$

onde na última desigualdade usamos que

$$4662.65 \times 10^{11} \times m^5(\log m)^4 < \left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{m-1}{2}} < \alpha^{\frac{m-1}{2}} \ ,$$

para $m \geq 1395$. Em particular, $\chi_m < \alpha^{-697} < (7/4)^{-697} < 2.3 \times 10^{-30}$. Analogamente,

$$\chi_{m+1} = \frac{|E_{m+1}(k)|s}{g\alpha^{m+1}} < \frac{(1/2)4662.65 \times 10^{11} \times m^5(\log m)^4}{(1/2)\alpha^{m}} < \frac{1}{\alpha^{\frac{m-1}{2}}} \ ,$$

onde também usamos que

$$4662.65 \times 10^{11} \times m^5(\log m)^4 < \left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{m-1}{2}} < \alpha^{\frac{m-1}{2}} < \alpha^{\frac{m+1}{2}} \ ,$$

para $m \geq 1395$. Agora, escrevemos

$$(F_m^{(k)})^s = \left(g\alpha^{m-1} + E_m(k)\right)^s = g^s\alpha^{(m-1)s}\left(1 + \frac{E_m(k)}{g\alpha^{m-1}}\right)^s \ . \tag{3.38}$$

Caso tenhamos $E_m(k) > 0$, então

$$1 < \left(1 + \frac{E_m(k)}{g\alpha^{m-1}}\right)^s = \left(1 + \frac{|E_m(k)|}{g\alpha^{m-1}}\right)^s < e^{\overbrace{\left(s|E_m(k)|/g\alpha^{m-1}\right)}^{=\chi_m}} < 1 + 2\chi_m \ ,$$

onde usamos que $e^x < 1 + 2x$ para $0 < x < 1.25$.

Caso $E_m(k) < 0$, então

$$\begin{aligned} 1 > \left(1 + \frac{E_m(k)}{g\alpha^{m-1}}\right)^s = \left(1 - \frac{|E_m(k)|}{g\alpha^{m-1}}\right)^s &= \exp\left(s\log\left(1 - \frac{|E_m(k|}{g\alpha^{m-1}}\right)\right) \\ &> 1 - 2\chi_m \ , \end{aligned}$$

onde usamos que $\log(1-x) > -2x$ para $0 < x < 0.79$.

Combinando essas duas últimas desigualdades, conseguimos estimar o quão $(F_m^{(k)})^s$ é bem aproximado por $g^s\alpha^{(m-1)s}$, como segue

$$\begin{aligned} \bullet\ (F_m^{(k)})^s = &\ g^s\alpha^{(m-1)s}\left(1+\tfrac{E_m(k)}{g\alpha^{m-1}}\right)^s &< g^s\alpha^{(m-1)s}(1+2\chi_m) \\ \Rightarrow &\ (F_m^{(k)})^s - g^s\alpha^{(m-1)s} &< 2\chi_m g^s\alpha^{(m-1)s}\ , \end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned} \bullet\ (F_m^{(k)})^s = &\ g^s\alpha^{(m-1)s}\left(1+\tfrac{E_m(k)}{g\alpha^{m-1}}\right)^s &> g^s\alpha^{(m-1)s}(1-2\chi_m) \\ \Rightarrow &\ (F_m^{(k)})^s - g^s\alpha^{(m-1)s} &> -2\chi_m g^s\alpha^{(m-1)s}\ . \end{aligned} \tag{3.40}$$

Portanto, (3.39) e (3.40) nos dão

$$|(F_m^{(k)})^s - g^s\alpha^{(m-1)s}| < 2\chi_m g^s\alpha^{(m-1)s}\ , \tag{3.41}$$

e da mesma forma, obtemos

$$|(F_{m+1}^{(k)})^s - g^s\alpha^{ms}| < 2\chi_{m+1} g^s\alpha^{ms}\ . \tag{3.42}$$

Assim, voltamos à nossa equação Diofantina (3.20) para obter

$$\begin{aligned} g\alpha^{n-1} + E_n(k) = F_n^{(k)} = (F_m^{(k)})^s + (F_{m+1}^{(k)})^s &= g^s\alpha^{(m-1)s} + g^s\alpha^{ms} \\ &+ \left((F_m^{(k)})^s - g^s\alpha^{(m-1)s}\right) \\ &+ \left((F_{m+1}^{(k)})^s - g^s\alpha^{ms}\right)\ , \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} |g\alpha^{n-1} - g^s\alpha^{(m-1)s}(1+\alpha^s)| &\le |((F_m^{(k)})^s - g^s\alpha^{(m-1)s})| \\ &\quad +|((F_{m+1}^{(k)})^s - g^s\alpha^{ms})| + |E_n(k)| \\ &< 2\chi_m g^s\alpha^{(m-1)s} + 2\chi_{m+1}g^s\alpha^{ms} + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

e dividindo por $g^s\alpha^{ms}$,

$$\begin{aligned} \Rightarrow |g^{1-s}\alpha^{n-(ms+1)} - (1+\alpha^{-s})| &< \frac{1}{2g^s\alpha^{ms}} + 2\chi_m\alpha^{-s} + 2\chi_{m+1} \\ &< \frac{1}{2g^s\alpha^{ms}} + 0.38\chi_m + 2\chi_{m+1} \end{aligned} \tag{3.43}$$

onde em (3.43) usamos que $\alpha^s > (7/4)^3 > 5.35$, daí $2/\alpha^s < 2/5.35 < 0.38$. Agora, precisamos encontrar um limitante inferior para $2g^s\alpha^{ms}$ em termos de $\alpha^{\frac{m-1}{2}}$:

$$\begin{aligned}
2g^s\alpha^{ms-\frac{m-1}{2}} &> 2\left(\frac{1}{2}\right)^s \times \left(\frac{7}{4}\right)^{2s} \times \left(\frac{7}{4}\right)^{(m-2)s-\frac{m-1}{2}} \\
&> 2 \times \left(\frac{49}{32}\right)^s \times \left(\frac{7}{4}\right)^{3(m-2)-\frac{m-1}{2}} \\
&\geq 2\left(\frac{49}{32}\right)^3 \times \left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{5m-11}{2}} \\
&> 2\left(\frac{49}{32}\right)^3 \times \left(\frac{7}{4}\right)^{607} > 3 \times 10^{147} > 10^3 \ ,
\end{aligned}$$

onde $(5m-11)/2 \geq 607$, para $m \geq 1395$. Usando este fato em (3.43), juntamente com (3.37), obtemos

$$|g^{1-s}\alpha^{n-(ms+1)} - (1+\alpha^{-s})| < \frac{0.001}{\alpha^{\frac{m-1}{2}}} + \frac{0.38}{\alpha^{\frac{m-1}{2}}} + \frac{2}{\alpha^{\frac{m}{2}}} < \frac{2.39}{\alpha^{\frac{m-1}{2}}} \ , \tag{3.44}$$

e aplicando a desigualdade triangular diminuída conseguimos nossa segunda desigualdade chave:

$$|g^{1-s}\alpha^{n-(ms+1)} - 1| - \alpha^{-s} \leq |g^{1-s}\alpha^{n-(ms+1)} - (1+\alpha^{-s})| < \frac{2.39}{\alpha^{\frac{m-1}{2}}} \tag{3.45}$$

$$\Rightarrow \ |g^{1-s}\alpha^{n-(ms+1)} - 1| < \frac{1}{\alpha^s} + \frac{2.39}{\alpha^{\frac{m-1}{2}}} \ ,$$

ou seja,

$$|g^{1-s}\alpha^{n-(ms+1)} - 1| < \frac{3.39}{\alpha^{\ell}} \ , \tag{3.46}$$

onde denotamos $\ell := \min\{s, \frac{m-1}{2}\}$, Tendo em vista utilizarmos novamente formas lineares em logaritmo, tomamos

$$\Lambda_2 := g^{1-s}\alpha^{n-(ms+1)} - 1 \ , \tag{3.47}$$

mas antes disso, devemos mostrar que $\Lambda_2 \neq 0$. De fato, se $\Lambda_2 = 0$, temos $g^{s-1} = \alpha^{n-(ms+1)}$. Conjugando esta identidade em $\mathbb{Q}(\alpha)$ e tomando o produtório:

$$\prod_{i=1}^{k}(g_i)^{s-1} = \prod_{i=1}^{k}(\alpha_i)^{n-(ms+1)} = \left(\prod_{i=1}^{k}\alpha_i\right)^{n-(ms+1)} = (-1)^{k(n-(ms+1))} ,$$

daí,

$$\left|\prod_{i=1}^{k}(g_i)^{s-1}\right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\prod_{i=1}^{k}|g_i|\right)^{s-1} = 1 .$$

Por outro lado, vimos ao limitar a altura logarítmica $h(g)$ que $|g_i| < 1$ para todo $1 \leq i \leq k$, e que $s-1 \geq 2$, donde $\prod_{i=1}^{k}|g_i|^{s-1} < 1$, contradizendo a igualdade anterior. Portanto $\Lambda_2 \neq 0$.

Agora podemos usar o resultado de Matveev novamente. Assim, tomamos $t = 2$, $\lambda_1 := g$, $\lambda_2 := \alpha$ e $c_1 := 1-s$, $c_2 := n-(ms+1)$. Novamente, $\mathbb{K} := \mathbb{Q}(\alpha)$ e $D := [\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = k$. Para escolhermos $B \geq \max\{|c_1|, |c_2|\} = \max\{s-1, |n-(ms+1)|\}$, como $n \in [(m-1)s+2, ms+2]$, primeiro observamos que,

$$\begin{aligned} n \geq (m-1)s+2 \quad &\Rightarrow \quad n-(ms+1) \geq -(s-1) \\ n \leq ms+2 \quad &\Rightarrow \quad n-(ms+1) \leq s-1 , \end{aligned}$$

portanto $|n-(ms+1)| < s-1$, e podemos tomar $B := s-1$. Como já foi visto, $h(g) < 3\log k$ e $h(\alpha) < \log 2/k$, daí escolhemos novamente $A_1 := 3k\log k$ e $A_2 := \log 2$. Aplicando o Teorema 1.3:

$$\begin{aligned} |\Lambda_2| \quad > \quad & \exp(-1.4 \times 30^5 \times 2^{4.5} \times k^2(1+\log k)(1+\log(s-1)) \\ & \times(3k\log k)(\log 2)) \\ > \quad & \exp(-3.87 \times 10^8 \times k^3\overbrace{(1+\log k)}^{<2\log k}(1+\log(s-1))) \\ > \quad & \exp(-7.74 \times 10^8 \times k^3\log k(1+\log(s-1))) . \end{aligned}$$

Por outro lado, a desigualdade (3.46) combinada com esta última nos dá

$$
\begin{aligned}
\frac{3.39}{\alpha^\ell} &> \exp(-7.74 \times 10^8 \times k^3 \log k(1+\log(s-1))) \\
\Rightarrow \quad \log 3.39 - \ell \log \alpha &> -7.74 \times 10^8 \times k^3 \log k(1+\log(s-1)) \\
\Rightarrow \quad \ell &< \underbrace{\frac{\log 3.39}{\log \alpha}}_{>0.55} + \underbrace{\frac{7.74}{\log \alpha}}_{>0.55} \times 10^8 \times k^3 \log k(1+\log(s-1)) \\
\Rightarrow \quad \ell &< 2.19 + 13.9 \times 10^8 \times k^3 \log k(1+\log(s-1)) \\
\Rightarrow \quad \ell &< 1.4 \times 10^9 \times k^3 \log k(1+\log(s-1)) \;, \qquad (3.48)
\end{aligned}
$$

onde usamos para obter (3.48) que $14x > 2.19 + 13.9x$ para $x \geq 22$.

Caso $\ell = s$, a desigualdade (3.48) se torna

$$s < 1.4 \times 10^9 \times k^3 \log k(1+\log(s-1)) \;,$$

onde usando que $k < \log k$, temos

$$s < 1.4 \times 10^9 \times (\log s)^3 \log\log s(1+\log(s-1)) \;,$$

que é válida apenas para $s \leq 9.55 \times 10^{15}$.

No caso $\ell = (m-1)/2$, usamos a desigualdade (3.34) em (3.48) para obter

$$
\begin{aligned}
\frac{m-1}{2} &< 1.4 \times 10^9 \times k^3 \log k(1+\log(4.7 \times 10^{14} \times m^5(\log m)^4)) \\
&= 1.4 \times 10^9 \times k^3 \log k(1+\log 4.7 + 14\log 10 + 5\log m + 4\log\log m) \\
&< 1.4 \times 10^9 \times k^3 \log k(34.79 + 5\log m + 4\log\log m)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m-1}{2(34.79 + 5\log m + 4\log\log m)} < 1.4 \times 10^9 \times k^3 \log k \;. \qquad (3.49)$$

Como $m \geq 1395$, temos que $\log\log m < 0.31\log m$, donde $34.79 + 5\log m + 4\log\log m < 34.79 + 6.24\log m < 13\log m$, onde a última desigualdade também é válida porque temos $m \geq 1395$. Observando também que $m - 1 >$

$m/1.004$ para $m \geq 1395$, obtemos em (3.49):

$$\begin{aligned} \frac{1}{13 \times 1.004} \cdot \frac{m}{\log m} &< 2.8 \times 10^9 \times k^3 \log k \\ \Rightarrow \frac{m}{\log m} &< 3.7 \times 10^{10} \times k^3 \log k \ . \end{aligned}$$

Novamente por (3.33), obtemos $m/\log m < 3.7 \times 10^{10} \times k^3 \log k$, daí

$$m < 2(3.7 \times 10^{10} \times k^3 \log k) \log(3.7 \times 10^{10} \times k^3 \log k)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow m &< 7.4 \times 10^{10} \times k^3 \log k(\underbrace{\log 3.7 + 10 \log 10}_{<24.34} + 3 \log k + \log\log k) \\ &< 7.4 \times 10^{10} \times k^3 \log k(\underbrace{24.34 + 3 \log k + \log\log k}_{<26 \log k}) \\ &\Rightarrow m < 1.93 \times 10^{12} k^3 (\log k)^2 \ . \end{aligned} \tag{3.50}$$

Usando mais uma vez a desigualdade (3.34), agora com (3.50), também conseguimos um limitante superior para s em função de k, o que nos dá novamente um limitante absoluto para s:

$$\begin{aligned} s &< 4.7 \times 10^{11} \times (1.93 \times 10^{12} k^3 (\log k)^2)^5 \\ &\quad \times (\log(1.93 \times 10^{12} k^3 (\log k)^2))^4 \\ &< \underbrace{4.7 \times (1.93)^5 \times 10^{71}}_{1.26 \times 10^{73}} \times k^5 (\log k)^{10} \\ &\quad \times (\underbrace{\log 1.93 + 12 \log 10}_{<28.29} + 3 \log k + 2 \log\log k)^4 \\ &< 1.26 \times 10^{73} \times k^5 (\log k)^{10} (\underbrace{28.29 + 3 \log k + 2 \log\log k}_{<25.5 \log k})^4 \\ \Rightarrow s &< 5.33 \times 10^{78} \times k^5 (\log k)^{14} \ , \end{aligned}$$

donde usando que $k < \log s$, obtemos

$$s < 5.33 \times 10^{78} \times (\log s)^5 (\log\log s)^{14} \ ,$$

que á válido apenas para $s < 7.31 \times 10^{100}$, nos dando $k < \log(7.31 \times 10^{100}) < 232$.

Portanto, em qualquer um dos casos temos $s < 7.31 \times 10^{100}$ e $k < 232$. Como estes limitantes ainda são altos, e não possuimos em ambos os casos relações suficientes para limitar as demais variáveis (o que só é possível no caso $\ell = (m-1)/2$), vamos usar um critério de Legendre (Teorema 1.6) sobre os convergentes da fração contínua de um determinado número, com o objetivo de diminuir esses limitantes.

Com a intenção de usar este método, voltamos à desigualdade (3.45) e conseguimos, usando que $s \geq 20$ e $m \geq 1394$, o seguinte limitante:

$$|\Lambda_2| < \frac{1}{\alpha^s} + \frac{2.39}{\alpha^{(m-1)/2}} < \frac{1}{\alpha^{20}} + \frac{2.39}{\alpha^{697}} < 1.38 \times 10^{-5}. \tag{3.51}$$

Defina,

$$\Gamma_2 := (s-1)\log(g^{-1}) - (ms+1-n)\log\alpha\ .$$

Note que $\Lambda_2 = e^{\Gamma_2} - 1$, daí como $|\Lambda_2| < 1.38 \times 10^{-5}$, temos

$$1.38 \times 10^{-5} > |\Lambda_2| = |e^{\Gamma_2} - 1| \geq |e^{\Gamma_2}| - 1 \ \Rightarrow\ e^{|\Gamma_2|} < 1.38 \times 10^{-5} + 1. \tag{3.52}$$

Já que

$$|\Gamma_2| \leq e^{|\Gamma_2|}|e^{\Gamma_2} - 1| < (1.38 \times 10^{-5} + 1)|\Lambda_2| < (1.38 \times 10^{-5} + 1)\left(\frac{1}{\alpha^s} + \frac{2.39}{\alpha^{(m-1)/2}}\right),$$

temos,

$$|(s-1)\log(g^{-1}) - (ms+1-n)\log\alpha| < (1.38 \times 10^{-5} + 1)\left(\frac{1}{\alpha^s} + \frac{2.39}{\alpha^{(m-1)/2}}\right)$$

e dividindo por $(s-1)\log\alpha$,

$$\left|\frac{\log(g^{-1})}{\log\alpha} - \frac{ms+1-n}{s-1}\right| < \frac{(1.38 \times 10^{-5} + 1)}{(s-1)\log\alpha}\left(\frac{1}{\alpha^s} + \frac{2.39}{\alpha^{(m-1)/2}}\right)\ . \tag{3.53}$$

Observe que tomando $s \geq 292$, temos $\alpha^s > (7/4)^{292} > 2.58 \times 10^{68} s$ e também, para $m \geq 1395$, temos $\alpha^{(m-1)/2} > (7/4)^{697} > 2.58 \times 10^{68} s$, donde substituindo em (3.53) obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\log(g^{-1})}{\log\alpha} - \frac{ms+1-n}{s-1}\right| &< \frac{(3.39)(1.38\times 10^{-5}+1)}{2.58\times 10^{68}s(s-1)\log\alpha} \\
\Rightarrow \left|\frac{\log(g^{-1})}{\log\alpha} - \frac{ms+1-n}{s-1}\right| &< \frac{1}{4.2\times 10^{67}(s-1)^2}\ . \qquad (3.54)
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.6, a desigualdade (3.54) implica que o número racional $(ms+1-n)/(s-1)$ é um convergente de $\beta_k = (\log(g^{-1}))/(\log\alpha)$. Sejam $[a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots]$ a fração contínua de β_k e $p_t^{(k)}/q_t^{(k)}$ o seu t-ésimo convergente. Suponha que $(ms+1-n)/(s-1) = p_{t_k}^{(k)}/q_{t_k}^{(k)}$, para algum t_k. Então $s-1 = d_k q_{t_k}^{(k)}$, para algum inteiro positivo d_k, ou seja, $s-1 \geq q_{t_k}^{(k)}$. Por outro lado, usando mais uma vez o software *Mathematica*, conseguimos que

$$\min_{k\in\{3,232\}} q_{250}^{(k)} > 4.87\times 10^{118} > 7.31\times 10^{100} - 1 > s-1,$$

portanto $1 \leq t_k \leq 250$, para todo $3 \leq k \leq 232$. Também usando o *Mathematica*, observamos que $a_{t_k+1} \leq \max\{a_t^{(k)}\} < 4.15\times 10^{67}$, para $k \in \{3, 232\}$ e $t \in \{1, 251\}$. Pelo Teorema 1.7, temos que

$$\begin{aligned}
\left|\beta_k - \frac{ms+1-n}{s-1}\right| = \left|\beta_k - \frac{p_{t_k}^{(k)}}{q_{t_k}^{(k)}}\right| &> \frac{1}{(a_{t_k+1}+2)(q_{t_k}^{(k)})^2} \\
&\geq \frac{d_k^2}{4.15\times 10^{67}(s-1)^2} \\
&\geq \frac{1}{4.15\times 10^{67}(s-1)^2}\ ,
\end{aligned}$$

o que contradiz a desigualdade (3.54). Portanto, $s \leq 291$, donde $k < \log 291 < 5.6$, portanto $k \in \{3,4,5\}$.

Para o passo final, voltamos à desigualdade (3.44), e a dividimos por $(1+\alpha^{-s})$ para obter,

$$\begin{aligned}
|\alpha^{n-(ms+1)} g^{1-s}(1+\alpha^{-s})^{-1} - 1| &< \frac{2.39}{\alpha^{(m-1)/2}\underbrace{(1+\alpha^{-s})}_{>1}} \\
&< \frac{2.39}{\alpha^{(m-1)/2}}\ . \qquad (3.55)
\end{aligned}$$

Agora, denote $t := ms+1-n$. Usando a desigualdade (3.51), vamos encontrar limitantes para t em função de s:

$$\begin{aligned}
g^{1-s}\alpha^{-t} - 1 &< 1.38 \times 10^{-5} \\
\Rightarrow\ (1-s)\log g - t\log\alpha &< \log(1 + 1.38 \times 10^{-5}) \\
\Rightarrow\ t &> \frac{(s-1)\overbrace{\log g^{-1}}^{>0.48}}{\underbrace{\log\alpha}_{<0.7}} - \frac{\overbrace{\log(1+1.38\times 10^{-5})}^{<1.38\times 10^{-5}}}{\underbrace{\log\alpha}_{>0.55}} \\
\Rightarrow\ t &> 0.68(s-1) - 2.51 \times 10^{-5} \\
\Rightarrow\ t &> 0.68s - 0.69\ .
\end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned}
g^{1-s}\alpha^{-t} - 1 &> -1.38 \times 10^{-5} \\
\Rightarrow\ (1-s)\log g - t\log\alpha &> \log(1 - 1.38 \times 10^{-5}) \\
\Rightarrow\ t &< \frac{(s-1)\overbrace{\log g^{-1}}^{<0.7}}{\underbrace{\log\alpha}_{>0.55}} - \frac{\overbrace{\log(1-1.38\times 10^{-5})}^{>-1.39\times 10^{-5}}}{\underbrace{\log\alpha}_{<0.7}} \\
\Rightarrow\ t &< 1.27(s-1) + 1.9 \times 10^{-5} \\
\Rightarrow\ t &< 1.27s - 1.26\ .
\end{aligned}$$

Portanto, $t \in [\lfloor 0.68s + 0.31\rfloor, \lfloor 1.27s - 1.26\rfloor]$. Fazendo uma verificação computacional para $20 \leq s \leq 291$, $3 \leq k \leq 5$ e t no intervalo obtido, encontramos que

$$\min\left\{\left|\frac{\alpha^{-t}g^{1-s}}{(1+\alpha^{-s})} - 1\right|\right\} > 0.0003\ \Rightarrow \frac{2.39}{\alpha^{(m-1)/2}} > 0.0003 \Rightarrow m \leq 33\ ,$$

o que contradiz o fato que $m \geq 1394$. Com isso, finalizamos a demonstração do teorema. ∎

Referências Bibliográficas

[1] A. Baker, Linear forms in the logarithms of algebraic numbers, *Mathematika* **12** (1966), 204-216.

[2] J. Bravo, F. Luca, On a conjecture about repdigits in k-generalized Fibonacci sequences, *Publ. Math. Debrecen,* to appear.

[3] Y. Bugeaud (2004) *Approximation by Algebraic Numbers*, Cambridge Tracts in Mathematics Vol **160**, Cambridge University Press, New York.

[4] G. P. Dresden, A simplified Binet formula for k-generalized Fibonacci numbers, Preprint, arXiv:0905.0304v2 (2011). Accessed 27 November 2012.

[5] A. Dujella, A. Pethő, Generalization of a theorem of Baker and Davenport, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **49(195)** (1998) 291-306.

[6] O. Endler, *Teoria dos Corpos*, Coleção Publicações Matemáticas, Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. ed. **1.** 240 p.

[7] D. Kalman, R. Mena, The Fibonacci numbers exposed, *Math. Mag.* **76** (2003), no. 3, 167–181.

[8] D. Kessler, J. Schiff, A combinatoric proof and generalization of Ferguson's formula for k-generalized Fibonacci numbers, *Fibonacci Quart.* **42** (2004), 266-273.

[9] N. H. Kohno, F. Luca, On the Diophantine equation $F_n^x + F_{n+1}^x = F_m^y$, *Rocky Mtn. Math.*, to appear.

[10] F. Luca, R. Oyono, An exponential Diophantine equation related to powers of two consecutive Fibonacci numbers. *Proc. Japan Acad. Ser.* A, **87** (2011) p. 45–50.

[11] F. Luca, R. Oyono, The Diophantine equation $F_n^y + F_{n+1}^x = F_m^x$. *INTEGERS* **13** A33 (2013).

[12] D. Marques, *Teoria dos Números Transcendentes.* Coleção Matemática Universitária, SBM. 1º ed. 224 p.

[13] D. Marques, A. Togbé, On the sum of powers of two consecutive Fibonacci numbers. *Proc. Japan. Acad. Ser. A*, **86** (2010) p. 174-176.

[14] F. B. Martinez, C. G. Moreira, N. Saldanha e E. Tengan (2010) *Teoria dos Números: Um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro.* Projeto Euclides, Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. ed. **1.** 457p.

[15] E. M. Matveev, An explicit lower bound for a homogeneous rational linear form in the logarithms of algebraic numbers, II, *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* **64 (6)** (2000) 125–180; translation in: *Izv. Math.***64 (6)** (2000) 1217-1269.

[16] R. S. Melham, Some analogs of the identity $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$. *Fibonacci Quart.* **37** (1999), no. 4, 305–311.

[17] R. S. Melham, On certain combinations of higher powers of Fibonacci numbers, *Fibonacci Quart.* **48** (2010), no. 3, 256–259.

[18] R. S. Melham, More on combinations of higher powers of Fibonacci numbers, *Fibonacci Quart.* **48** (2010), no. 4, 307–311.

[19] E. P. Miles Jr., Generalized Fibonacci numbers and associated matrices, *Amer. Math. Monthly* **67** (1960), 745-752.

[20] M. D. Miller, Mathematical Notes: On Generalized Fibonacci Numbers, *Amer. Math. Monthly* **78** (1971), 1108-1109.

[21] J. P. O. Santos (2003). *Introdução à Teoria dos Números. Coleção Matemática Universitária.* Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

[22] M. Waldschmidt (2008)*An Introduction to Irrationality and Transcendence Methods. Lecture Notes from Arizona Winter School.* University of Arizona.

[23] M. Waldschmidt, Diophantine Approximation on Linear Algebraic Groups. Transcendence properties of the exponential function in several variables. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* **326**. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[24] A. Wolfram, Solving generalized Fibonacci recurrences, *Fibonacci Quart.* **36** (1998), 129–145.