



**IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL E ANÁLISE DA
FRENAGEM CONSIDERANDO INTERAÇÃO VEÍCULO -
ESTRUTURA EM PONTES FERROVIÁRIAS**

MARIO PEDRO RODRÍGUEZ VÁSQUEZ

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E
CONSTRUÇÃO CIVIL**

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL E ANÁLISE DA
FRENAGEM CONSIDERANDO INTERAÇÃO VEÍCULO -
ESTRUTURA EM PONTES FERROVIÁRIAS**

MARIO PEDRO RODRÍGUEZ VÁSQUEZ

ORIENTADOR: JOSÉ LUÍS VITAL DE BRITO

CO-ORIENTADOR: RAÚL DARÍO DURAND FARFÁN

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E
CONSTRUÇÃO CIVIL**

**PUBLICAÇÃO: E.DM-013A/13
BRASÍLIA/DF, 18 DE JULHO DE 2013.**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL E ANÁLISE DA
FRENAGEM CONSIDERANDO INTERAÇÃO VEÍCULO -
ESTRUTURA EM PONTES FERROVIÁRIAS

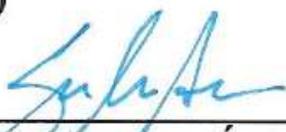
MARIO PEDRO RODRÍGUEZ VÁSQUEZ

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE
ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE
TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU
DE MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

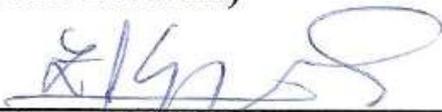
APROVADO POR:



Prof. José Luís Vital de Brito, Dsc (UNB)
(Orientador)



Profa. Suzana Moreira Ávila, Dsc (UNB)
(Examinadora Interna)



Prof. Zenón José Guzmán del Prado, Dsc (UFG)
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 18 DE JULHO DE 2013.

FICHA CATALOGRÁFICA

VÁSQUEZ, MARIO PEDRO RODRÍGUEZ

Implementação computacional e análise da frenagem considerando interação veículo-estrutura em pontes ferroviárias [Distrito Federal] 2013.

(xx, 116 p., 10 mm) (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2013).

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Análise da frenagem

2. Interação veículo-estrutura

3. Elemento de interface

4. Ponte ferroviária

I. ENC/FT/UnB

II. Título

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

VÁSQUEZ, M. P. R. (2013). Implementação computacional e análise da frenagem considerando interação veículo-estrutura em pontes ferroviárias. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-013A/13, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 136 p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Mario Pedro Rodríguez Vásquez.

TÍTULO: Implementação computacional e análise da frenagem considerando interação veículo-estrutura em pontes ferroviárias.

GRAU: Mestre

ANO: 2013

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Mario Pedro Rodríguez Vásquez
SQN 411 Bloco G Ap. 104. Asa Norte
CEP 70.866-070 Brasília – DF – Brasil.
Email: mprv74@hotmail.com

DEDICATÓRIA

Dedico tudo a minha mãe, o melhor exemplo e ainda principal responsável por todo o meu sucesso.

AGRADECIMENTOS

O autor deseja agradecer primeiramente a Deus, por ser minha fortaleza, minha guia, quando eu mais precisava, ele nunca deixou de estar ao meu lado, acompanhando-me neste novo desafio que colocou na minha vida.

A minha querida e adorada mãe MARILUZ VASQUEZ ZEGARRA, o anjo da minha vida, por dar-me a vida, ela nunca deixou de lutar por cultivar-me os valores necessários para ser um homem de bem para a sociedade, sendo meu modelo a seguir. A meus avós Martin Vásquez Coayla e Yolanda Zegarra de Vásquez, por suas preces e preocupação constante neste tempo, por cuidar de meus primeiros passos e brindar-me junto com minha mãe um amor único e incondicional. A meus tios, tias, primos e primas que nunca deixaram de acreditar que um dia, eu voltaria com este diploma debaixo do braço.

Expresso meu especial agradecimento ao Professor José Luis Vital de Brito, por sua imediata colaboração e compreensão, pela ajuda, disponibilidade e pelos conhecimentos, sem os quais não seria possível dar forma a este trabalho.

Não posso deixar de nomear, ao Professor Raúl Durand, que desde um primeiro momento colaborou comigo gentilmente, por permitir-me participar do desenvolvimento de novos conhecimentos, do qual absorvi o seu pleno domínio em linguagem de programação.

Aos colegas do curso de Pós - Graduação em Estruturas e Construção Civil-PECC da Universidade de Brasília pelo apoio e cooperação que me deram durante este período de estudos (2011 – 2013). Em especial ao Dyorgge Alves Silva, por permitir continuar o seu trabalho, pela bibliografia emprestada, e pelas palavras de apoio e incentivo.

De forma geral a todos aqueles que direta ou indiretamente incentivaram e contribuíram para a realização deste árduo trabalho.

RESUMO

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL E ANÁLISE DA FRENAGEM CONSIDERANDO INTERAÇÃO VEÍCULO - ESTRUTURA EM PONTES FERROVIÁRIAS

Autor: Mario Pedro Rodríguez Vásquez

Orientador: José Luís Vital De Brito

Co-orientador: Raúl Darío Durand Farfán

Programa de Pós Graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, Julho de 2013.

Nos últimos anos o problema da interação veículo-estrutura vem, cada vez mais, ganhando destaque. Neste contexto, o desenvolvimento de metodologias para a análise dinâmica de pontes sob a ação de tráfego ferroviário de cargas assume especial interesse. Neste trabalho é apresentada uma técnica computacional baseada em elementos finitos para simular frenagem em vias e pontes ferroviárias. Nesta técnica, os veículos são representados por modelos simples de massas, molas e amortecedores e a ponte é representada por elementos de viga. O contato entre os veículos e a ponte é representado através de um elemento de interface composto por um conjunto de molas e amortecedores dispostos nas direções vertical e horizontal. As molas verticais visam manter o contato entre as rodas dos veículos e a ponte, além de transmitir forças verticais. As molas horizontais visam simular a transmissão de forças de aderência dinâmica no processo de frenagem. O modelo do sistema de freio possui duas abordagens: a primeira considera a transmissão da força de frenagem constante durante todo o tempo de análise; a segunda considera a força de frenagem variando com o tempo de acordo à curva representativa de pressão no cilindro do freio. O valor da força de frenagem máxima do sistema está em função do coeficiente de aderência (roda-trilho) e do peso da roda, dependendo de cada modelo. Finalmente, veículo, ponte e interface constituem um único sistema dinâmico que pode ser integrado no tempo utilizando o método de Newmark.

Palavras-chave:

Análise da frenagem, Interação Veículo-Estrutura, Elemento de Interface, Ponte Ferroviária.

ABSTRACT

COMPUTATIONAL IMPLEMENTATION AND ANALYSIS OF BRAKING CONSIDERING INTERACTION VEHICLE WITH STRUCTURE IN RAILWAY BRIDGES

Author: Mario Pedro Rodríguez Vásquez

Supervisor: José Luís Vital De Brito

Co-supervisor: Raúl Darío Durand Farfán

Programa de Pós Graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, July 2013

In recent years the problem of vehicle-structure interaction comes increasingly gaining attention. In this context, the development of methodologies for the dynamic analysis of bridges under the action of railway traffic loads is of particular interest. This paper presents a computational technique based on finite elements to simulate braking on roads and railway bridges. In this technique, the vehicles are represented by simple models of masses, springs, and dampers; and the bridge is represented by elements of beam. The contact between the vehicle and the bridge is represented by an interface element that comprises a set of springs and dampers arranged in vertical and horizontal directions. The vertical springs aim to keep the contact between the vehicle wheels and the bridge, in addition to transmit vertical forces. The horizontal springs intend to simulate the transmission of dynamic forces of adhesion in the braking process. The model of the brake system has two approaches: the first considers the transmission of braking force constant throughout the analysis time, and the second considers that the braking force varies over time according to the curve that represents the pressure in the brake cylinder. The value of the maximum braking force of the system is a function of the adhesion coefficient (rail-wheel) and the wheel weight, depending on each model. Finally, vehicle, bridge, and interface form a single dynamic system which can be integrated over time using the Newmark method.

Keywords:

Braking analysis, Vehicle-Structure Interaction, Interface Element, Railway Bridge

SUMÁRIO

FICHA CATALOGRÁFICA.....	iv
DEDICATÓRIA	v
AGRADECIMENTOS.....	vi
RESUMO.....	vii
ABSTRACT	viii
SUMÁRIO.....	ix
LISTA DE TABELAS.....	xii
LISTA DE FIGURAS.....	xiii
LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIACÕES.....	xviii
1– INTRODUÇÃO.....	1
1.1 – JUSTIFICATIVA	2
1.2 – OBJETIVOS	3
1.2.1 – Objetivo geral	3
1.2.2 – Objetivos específicos	3
1.3 – METODOLOGIA DE TRABALHO.....	4
2– REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	5
3– MODELAGEM DA FRENAGEM.....	10
3.1 – PRINCÍPIOS DA FRENAGEM.....	10
3.2 – LIMITES DE ADERÊNCIA	12
3.3 – PESO DO VAGÃO	13
3.4 – TAXA DE FRENAGEM.....	13
3.5 – VELOCIDADE DO TREM.....	14
3.6 – MODELO DO SISTEMA DE FREIO	14
4– MODELAGEM DO TREM.....	19
4.1 – EQUAÇÕES BÁSICAS DO MOVIMENTO DO VEÍCULO	19
4.2 – MODELOS DE VEÍCULO	20

4.2.1 – Modelo de massa concentrada móvel (LumpedMass2D).....	20
4.2.2 – Modelo de veículo sem truque (SM1)	21
4.2.3 – Modelo de veículo com truque (SM2).....	23
4.2.4 – Modelo completo (SM3).....	26
4.2.5 – Equações dinâmicas do veículo	30
5– MODELAGEM DA PONTE.....	31
5.1 – MATRIZ DE RIGIDEZ.....	32
5.2 – MATRIZ DE MASSA	33
5.3 – MATRIZ DE AMORTECIMENTO.....	34
5.4 – EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO DINÂMICO DA PONTE	36
6– MODELAGEM DO SISTEMA VEÍCULO-ESTRUTURA.....	37
6.1 – INTERAÇÃO DO SISTEMA VEÍCULO-ESTRUTURA.....	37
6.1.1 – Molas horizontais.....	39
6.1.1.1 – Primeira abordagem	39
6.1.1.2 – Segunda abordagem	42
6.1.2 – Molas verticais.....	47
6.2 – INTEGRAÇÃO DIRETA PELO MÉTODO DE NEWMARK	48
7– IMPLEMENTAÇÃO DO PROGRAMA COMPUTACIONAL	51
7.1 – PROGRAMA PYDYN MODIFICADO	51
7.1.1 – Entrada de dados iniciais	52
7.1.2 – Criação do domínio de análise.....	53
7.1.3 – Criação dos elementos que conformam domínio de análise.....	54
7.1.4 – Definição das conectividades	54
7.1.5 – Definição das condições de contorno	54
7.1.6 – Solução	54
7.1.7 – Saída de resultados	55
8– VALIDAÇÃO E EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	56
8.1 – TESTE PARA UMA CARGA EM MOVIMENTO	56
8.1.1 – Exemplo 1.....	58
8.1.1.1 – Primeira abordagem	58
8.1.1.2 – Segunda abordagem	61
8.1.2 – Exemplo 2.....	66

8.1.3 – Exemplo 3.....	70
8.1.4 – Exemplo 4.....	76
8.2 – TESTE PARA MODELO SM2.....	77
8.2.1 – Respostas para as rodas do modelo SM2.....	78
8.2.1.1 – Primeira abordagem	78
8.2.1.2 – Segunda abordagem	80
8.2.2 – Respostas para o truque do modelo SM2	82
8.2.2.1 – Primeira abordagem	82
8.2.2.2 – Segunda abordagem	83
8.2.3 – Respostas no centro da ponte.....	84
8.2.3.1 – Primeira abordagem	84
8.2.3.2 – Segunda abordagem	85
8.2.4 – Notas finais sobre os resultados das respostas no sistema.....	87
8.3 – TESTE PARA MODELO SM3.....	88
8.3.1 – Respostas para as rodas do modelo SM3.....	89
8.3.1.1 – Primeira abordagem	89
8.3.1.2 – Segunda abordagem	92
8.3.2 – Respostas para os truques do modelo SM3	94
8.3.3 – Respostas no centro da ponte.....	97
8.3.4 – Notas finais sobre os resultados das respostas no sistema.....	100
9– CONCLUSÕES	103
9.1 – CONSIDERAÇÕES FINAIS	103
9.2 – SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	104
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	105
APÊNDICES	108
A – INSTRUÇÃO PARA USO DO PROGRAMA PYDYN.....	109

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 - Peso do vagão (ABNT, 1991)	13
Tabela 3.2 - Taxa de frenagem limites (ABNT, 1986).....	13
Tabela 8.1 – Comparação dos resultados obtidos no exemplo 1	60
Tabela 8.2 - Comparação dos resultados obtidos no Exemplo 2.....	69
Tabela 8.3 - Comparação de resultados para $h = 1,0$ s	71
Tabela 8.4 - Comparação de resultados para $h = 0,1$ s	73
Tabela 8.5 - Comparação de resultados para $h = 0.001$ s	75
Tabela 8.6 - Comparação de resultados entre abordagens para modelo SM2.....	88
Tabela 8.7 - Comparação de resultados entre abordagens para modelo SM3.....	101
Tabela 8.8 - Níveis recomendados de conforto para passageiros.....	102

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Vista ampliada do engate e ACT (Barbosa, 1993).....	5
Figura 2.2 – Esquema de um bi-trem (Ferreira, 2005)	9
Figura 3.1 – Força de atrito entre sapata de freio e roda (modificado - Martins, 1999).....	10
Figura 3.2 – Força de frenagem (modificado - Martins, 1999)	11
Figura 3.3 – Curvas de limite de aderência (Martins, 1999)	12
Figura 3.4 – Esquema de aplicação do freio no vagão (Martins, 1999)	14
Figura 3.5 – Força de frenagem constante no tempo.....	15
Figura 3.6 – Curva de pressão no cilindro do freio para três vagões de n (Barbosa, 1993)	16
Figura 3.7 – Curva de pressão no cilindro do freio representativa (Martins, 1999).....	16
Figura 3.8 – Força de frenagem variando com o tempo.....	17
Figura 3.9 - Ábaco para a determinação da curva de crescimento da força de frenagem (Martins, 1999)	17
Figura 4.1 – Representação esquemática da roda.....	20
Figura 4.2 – Representação esquemática do modelo de veículo sem truque	21
Figura 4.3 – Representação esquemática do modelo de veículo com truque	23
Figura 4.4 – Representação esquemática do modelo completo.....	26
Figura 5.1 – Graus de liberdade para um elemento de viga (Silva, 2012)	31
Figura 5.2 – Curvas de deslocamentos devido a um deslocamento unitário em uma das coordenadas nodais (Silva, 2012).....	31
Figura 5.3 – Amortecimento de Rayleigh (Silva, 2012).....	35
Figura 6.1 – Elemento de interface conectando uma roda à ponte.....	38
Figura 6.2 – Elemento de interfase isolado	38
Figura 6.3 – Força de frenagem constante no tempo.....	39
Figura 6.4 – Transmissão da força de frenagem com a interação veículo – estrutura.....	40
Figura 6.5 – Graus de liberdade do sistema.....	41
Figura 6.6 – Forças externas sobre sistema	41
Figura 6.7 – Força de frenagem variando no tempo.....	42
Figura 6.8 – Tempos necessários para o modelo do sistema de freio	43
Figura 6.9 – Rigidez para um ponto do segmento de reta III	45
Figura 7.1 – Dados de entrada para a biblioteca dynamics 1	53
Figura 8.1 – Configuração para análise de uma carga pontal que percorre sobre uma ponte	58

Figura 8.2 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade e (c) aceleração da carga móvel com maior nível de detalhamento para perceber melhor os resultados.	59
Figura 8.3 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade (c) aceleração no centro da ponte submetida à carga móvel	60
Figura 8.4 – Resposta do deslocamento vertical da carga móvel.....	61
Figura 8.5 – Resposta do deslocamento vertical analítico e numérico no centro da ponte submetida à carga móvel.	61
Figura 8.6 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade e (c) aceleração da carga móvel com maior nível de detalhamento para perceber melhor os resultados.	62
Figura 8.7 – Resposta do deslocamento vertical da carga móvel.....	63
Figura 8.8 – Resposta do deslocamento vertical analítico e numérico no centro da ponte submetida à carga móvel.	63
Figura 8.9 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade e (c) aceleração no centro da ponte submetida à carga móvel.....	64
Figura 8.10 – Comparação das curvas de frenagem com a curva teórica típica de frenagem para uma carga móvel por (a) primeira abordagem (b) segunda abordagem (c) Martins (1999)	64
Figura 8.11 – Gráficos típicos teóricos para respostas horizontais em um veículo (modificado - Ferreira, 2005)	65
Figura 8.12 – Obtenção de <i>Taba</i>	67
Figura 8.13 – Resposta do deslocamento horizontal por (a) Barbosa (1993) (b) primeira abordagem (c) segunda abordagem	68
Figura 8.14 – Resposta da velocidade horizontal por (a) Barbosa (1993) (b) primeira abordagem (c) segunda abordagem	68
Figura 8.15 – Resposta da aceleração horizontal por (a) Barbosa (1993) (b) primeira abordagem (c) segunda abordagem	69
Figura 8.16 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade e (c) aceleração da carga móvel - Primeira abordagem.....	70
Figura 8.17 – Resposta do deslocamento vertical analítico e numérico no centro da ponte submetida à carga móvel - Primeira abordagem	70
Figura 8.18 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade e (c) aceleração da carga móvel - Segunda abordagem.....	71
Figura 8.19 – Resposta do deslocamento vertical analítico e numérico no centro da ponte submetida à carga móvel - Segunda abordagem.	71

Figura 8.20 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade e (c) aceleração da carga móvel - Primeira abordagem.....	72
Figura 8.21 – Resposta do deslocamento vertical analítico e numérico no centro da ponte submetida à carga móvel - Primeira abordagem	72
Figura 8.22 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade e (c) aceleração da carga móvel - Segunda abordagem.....	73
Figura 8.23 – Resposta do deslocamento vertical analítico e numérico no centro da ponte submetida à carga móvel - Segunda abordagem	73
Figura 8.24 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade e (c) aceleração da carga móvel - Primeira abordagem.....	74
Figura 8.25 – Resposta do deslocamento vertical analítico e numérico no centro da ponte submetida à carga móvel - Primeira abordagem	74
Figura 8.26 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade e (c) aceleração da carga móvel - Segunda abordagem.....	75
Figura 8.27 – Resposta do deslocamento vertical analítico e numérico no centro da ponte submetida à carga móvel - Segunda abordagem	75
Figura 8.28 – Resposta do deslocamento vertical analítico e numérico no centro da ponte submetida à carga móvel sem considerar a frenagem	77
Figura 8.29 – Configuração para análise de um modelo SM2	78
Figura 8.30 – Resposta horizontal do deslocamento, velocidade e aceleração na (a) roda traseira (b) roda dianteira	79
Figura 8.31 – Maior nível de detalhamento da resposta horizontal da aceleração na (a) roda traseira (b) roda dianteira	80
Figura 8.32 – Resposta horizontal do deslocamento, velocidade e aceleração na (a) roda traseira (b) roda dianteira	81
Figura 8.33 – Maior nível de detalhamento da resposta horizontal da aceleração na (a) roda traseira (b) roda dianteira	82
Figura 8.34 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade e (c) aceleração do truque	82
Figura 8.35 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade e (c) aceleração do truque.....	83
Figura 8.36 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade (c) aceleração no centro da ponte.....	84

Figura 8.37 – Respostas verticais (a) deslocamento (b) velocidade (c) aceleração no centro da ponte.	85
Figura 8.38 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade (c) aceleração no centro da ponte.....	86
Figura 8.39 – Respostas verticais (a) deslocamento (b) velocidade (c) aceleração no centro da ponte.	87
Figura 8.40 – Configuração para análise de um modelo SM3	88
Figura 8.41 – Elementos do modelo SM3	89
Figura 8.42 – Respostas horizontais dos deslocamentos, velocidades e acelerações para (a) primeira roda (b) segunda roda (c) terceira roda (d) quarta roda.....	90
Figura 8.43 – Maior nível de detalhamento da resposta horizontal da aceleração na (a) primeira roda (b) segunda roda (c) terceira roda (d) quarta roda.....	91
Figura 8.44 – Respostas horizontais do deslocamento , velocidade e aceleração para (a) primeira roda (b) segunda roda (c) terceira roda.....	92
Figura 8.45 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade e (c) aceleração para a quarta roda	93
Figura 8.46 – Maior nível de detalhamento da resposta horizontal da aceleração na (a) primeira roda (b) segunda roda (c) terceira roda (d) quarta roda.....	93
Figura 8.47 – Respostas horizontais (a) deslocamentos (b) velocidades e (c) acelerações do truque da suspensão primaria esquerda	94
Figura 8.48 – Respostas horizontais dos deslocamentos, velocidades e acelerações para (a) truque da suspensão primaria direita (b) truque da suspensão secundaria.....	95
Figura 8.49 – Respostas horizontais dos deslocamentos, velocidades e acelerações para (a) truque da suspensão primaria direita (b) truque da suspensão secundaria.....	96
Figura 8.50 – Resposta horizontal do deslocamento no centro da ponte.	97
Figura 8.51 – Respostas horizontais da (a) velocidade (b) aceleração no centro da ponte.	98
Figura 8.52 – Respostas verticais (a) deslocamento (b) velocidade (c) aceleração no centro da ponte.	98
Figura 8.53 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade (c) aceleração no centro da ponte.....	99
Figura 8.54 – Respostas verticais (a) deslocamento (b) velocidade (c) aceleração no centro da ponte.	100
Figura 8.55 – Resposta da aceleração vertical do truque de suspensão secundaria do comboio.	101

Figura A. 1 – Elemento VIGA	111
Figura A. 2 – Elemento INTERF	112
Figura A. 3 – Elemento RODA	113
Figura A. 4 – Elemento SM1	114
Figura A. 5 – Elemento SM2.....	115
Figura A. 6 – Elemento VAGÃO	116

LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIACÕES.

α e β	Constantes obtidos em função das frequências de dois modos de vibração.
γ, ξ	Constantes de Newmark.
$\delta_i, \dot{\delta}_i, \ddot{\delta}_i$	Deslocamento, velocidade e aceleração virtual unitário da i -ésima coordenada nodal.
ζ	Taxa de de amortecimento da estrutura.
Δt	Incremento de tempo.
θ_v	Rotação do centro de massa do vagão.
θ_j	Rotação do j -ésimo elemento.
λ, η	Escalar de proporcionalidade.
$\psi_j(x), u_j(x)$	Funções polinomiais.
ω_n	Frequências naturais de vibração correspondente ao modo de vibração n .
ω_0	Frequência do primeiro modo de vibração.
A	Área da seção transversal de uma viga.
a, b	Distâncias relativas do eixo da roda as extremidades do elemento de viga.
at	Coefficiente de atrito entre sapata de freio e roda
c	Constante de dissipação do sistema
$c(x)$	Coefficiente de amortecimento viscoso.
c_s	Constante de amortecimento da suspensão vertical secundária do veículo.
c_v	Constante de amortecimento da suspensão vertical primária do veículo.
c_h	Constante de amortecimento horizontal do veículo.
$C_{vv}, C_{vr}, C_{vr}, C_{rr}$	Sub matrizes de amortecimento para o veículo e rodas.
C_s	Matriz de Amortecimento da suspensão secundária do veículo.
C_v	Matriz de Amortecimento do veículo.
C_p	Matriz de amortecimento da ponte
$E(x)$	Módulo de elasticidade da viga.
$F(t)$	Forças externas da ponte em função do tempo.
F	Força da segunda lei de Newton
Fa	Força de atrito entre a sapata e a roda
$Ffre$	Força de frenagem no tempo de análise
$Ffre_{max}$	Força de frenagem máxima para a segunda abordagem
Fl	Força líquida de frenagem
G	Sub matriz associada com a massa na equação de Newmark.
h	Passo de tempo.
$I(x)$	Momento de inércia transversal.

J_v	Momento de inércia da caixa de um veículo em torno do seu eixo longitudinal.
J_s	Momento de inércia do truque de um veículo em torno do seu eixo longitudinal.
J_{sj}	Momento de inércia do j-ésimo truque de um veículo, em torno do seu eixo longitudinal.
k	Matriz de rigidez de um elemento de viga.
k_{ij}	Coefficiente da matriz de rigidez.
k_o	Constante obtida a partir das propriedades da viga
k_v	Rigidez da suspensão vertical primária do veículo.
k_h	Rigidez da mola horizontal do veículo.
k_s	Rigidez da suspensão secundária do veículo.
K_p	Matriz de rigidez da ponte
K_v	Matriz de rigidez do veículo.
$K_{vv}, K_{vr}, K_{vr}, K_{rr}$	Sub matrizes de rigidez para o veículo e rodas.
L	Comprimento da estrutura.
L_v	Distância do centro de gravidade do truque ao eixo das rodas.
L_s	Distância do centro de gravidade do vagão ao eixo dos truques.
\mathcal{L}	Lagrangeano .
M	Matriz de massa de um elemento de viga.
m_{ij}	Coefficiente da matriz de massa.
m_r	Massa proveniente das rodas do veículo.
m_v	Massa proveniente do vagão (caixa + Truques).
m_{sj}	Massa suspensa dos j-ésimos truques.
$\bar{m}(x)$	Massa por unidade de comprimento.
M_p	Matriz de massa da ponte
$M(x)$	Momento fletor em x .
M_v	Matriz de massa do veículo.
M_{vv}, M_{rr}	Sub matrizes de massas para o veículo e rodas.
P_{cl}	Pressão nos cilindros do freio
q_j	Graus de liberdade do sistema para cada um dos j-ésimos.
R	Função de dissipação de Rayleigh.
RHS	Sub matriz relacionada com os termos do lado direito da equação de Nermark.
$SM1$	Modelo simplificado 1.

SM2	Modelo simplificado 2.
SM3	Modelo simplificado 3.
T	Energia cinética.
$U_n, \dot{U}_n, \ddot{U}_n$	Deslocamento, velocidade e aceleração horizontal e vertical no passo de tempo n ,
$U_{n+1}, \dot{U}_{n+1}, \ddot{U}_{n+1}$	Deslocamento, velocidade e aceleração, horizontal e vertical obtidos no passo de tempo $n + 1$.
\ddot{U}, \dot{U}, U	Aceleração, velocidade e deslocamentos horizontais e verticais nodais da estrutura.
μ	Coeficiente de aderência entre roda e trilho.
v	Velocidade de deslocamento do veículo.
\dot{v}	Velocidade que representa a dissipação do sistema.
V	Energia Potencial.
W_I	Trabalho virtual interno.
W_E	Trabalho virtual externo.
x, t	Variáveis de localização sobre a estrutura e do tempo.
x_i	Deslocamento horizontal do i -ésimo elemento.
x_{rj}	Deslocamentos horizontais de cada uma das dos j -ésimas massas não suspensas.
y	Vetor de deslocamentos horizontais e verticais
y_i	Deslocamento vertical do i -ésimo elemento.
y_{rj}	Deslocamentos verticais de cada uma das dos j -ésimas massas não suspensas.
$y_p, \dot{y}_p, \ddot{y}_p$	Vetor de deslocamento, velocidade e aceleração nodal de um elemento da estrutura de passagem de carga;
$y_v, y_r, \dot{y}_v, \dot{y}_r, \ddot{y}_v, \ddot{y}_r$	Vetores deslocamentos, velocidades e acelerações do veículo e da roda horizontais e verticais respectivamente.

1 – INTRODUÇÃO

O grande desafio dos pesquisadores nos anos cinquenta foi desenvolver procedimentos, com base na experimentação prática, que permitissem o cálculo dos esforços sobre vias sujeitas à ação de veículos. A partir do momento em que o trem sobre trilhos tornou-se uma realidade, desencadeou-se um processo de procura constante de melhores soluções, com o objetivo de tornar este sistema de transporte cada vez mais confiável e eficiente.

De acordo com registros de veículos, a primeira locomotiva, conhecida com o nome de “Experiment”, surgiu no ano 1827. Esta locomotiva foi projetada por George Stephenson na Inglaterra. (Hamilton, 1979).

No final do século passado, um trem transportava cerca de 10.000 KN de carga (20 vagões com 50 toneladas cada) por viagem. Hoje, as grandes composições para transporte de minério chegam a transportar por volta de 300.000 KN de carga (300 vagões com 100 toneladas cada) (Valec, 2010).

No instante em que se faz necessário parar um trem de carga longo e pesado, inicia-se o processo de frenagem através do acionamento manual do manipulador da válvula de freio da locomotiva comandante, o trem irá diminuir a velocidade percorrendo uma distância, esta distância depende de diversos fatores como a velocidade no momento da frenagem, o peso do trem, a inclinação da via no trecho, entre outros. Ela pode ser determinada através de ensaios, desde que se tenha um trem com características definidas em um determinado trecho de via.

O trem de carga está normalmente composto por locomotivas e uma grande quantidade de vagões, portanto, durante o processo de frenagem, cada veículo deve frear a si próprio e de forma compatível com os veículos adjacentes, para que a frenagem do trem ocorra de maneira eficiente e uniforme, sem gerar esforços inadequados aos sistemas de acoplamento que mantem os veículos unidos.

Para atender ao constante aumento na demanda de transporte de carga, foi necessário que houvesse um grande desenvolvimento tanto na tecnologia das vias como na tecnologia dos

veículos e seus componentes. Basicamente, para que uma quantidade maior de carga seja transportada por viagem, três fatores devem ser considerados:

- Aumento da velocidade do trem;
- Aumento da carga útil por vagão;
- Aumento da quantidade de vagões no trem.

Estes fatores irão refletir em uma série de problemas a serem solucionados, como por exemplo, problemas com tração, frenagem, irregularidade da via, etc. Por isso ao longo do tempo o problema da interação veículo estrutura vem cada vez mais ganhando destaque. O uso de ferramentas computacionais, para representar o comportamento destas estruturas, considerando os efeitos dinâmicos provocados pelo tráfego de trens de carga sobre pontes, vem recebendo grande importância na análise e no entendimento deste fenômeno.

Neste trabalho, se utiliza uma ferramenta computacional desenvolvida na linguagem Python por Silva (2012). A ferramenta computacional foi modificada de modo a permitir considerar o efeito de frenagem no sistema de trens de carga sobre pontes, podendo considerar o trem como: uma carga em movimento ou como um modelo de massas suspensas simplificadas. O programa na linguagem Python foi escolhido por haver sido validado por Silva (2012), através de exemplos comparativos, numéricos e analíticos, apresentando bons resultados.

Neste contexto, o desenvolvimento de metodologias para a análise dinâmica de pontes sob a ação de tráfego ferroviário de cargas assume especial interesse. A ponderação dos diversos fatores que influenciam a resposta dinâmica das pontes, ou dos veículos que sobre ela circulam, irá contribuir para um melhor conhecimento acerca do seu comportamento, bem como para um melhor dimensionamento deste tipo de estruturas.

1.1 – JUSTIFICATIVA

A justificativa para o desenvolvimento deste trabalho está calcada na necessidade de incluir o efeito da frenagem nos trens, considerando um elemento de interface que simule a interação veículo-estrutura ante a grande carência de ferramentas de cálculo na literatura.

Deve ser feita uma análise das variáveis envolvidas no processo de frenagem, com o objetivo de padronização na determinação destes valores para que haja consistência nos resultados das simulações, permitindo análise comparativa. (Ferreira, 2005)

Daí o interesse em se dispor de um processo de simulação confiável, onde seja possível considerar o efeito da frenagem dos veículos nas estruturas de pontes. Para isso o programa PyDyn de Silva (2012), é implementado para a otimização deste sistema, para simular diversas condições possíveis, para selecionar a representação mais adequada da interação veículo-estrutura.

1.2 – OBJETIVOS

1.2.1 – Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho é estudar os fatores que influenciam a resposta dinâmica veículo-estrutura, devido ao efeito da frenagem, por meio da modelagem numérica computacional do veículo, da via e das forças envolvidas.

1.2.2 – Objetivos específicos

Para uma apropriada simulação da interação veículo-estrutura considerando a frenagem este trabalho consta dos seguintes objetivos específicos:

- Implementar no programa computacional, já existente, a simulação da frenagem do trem, para diferentes tipos de modelos de composições, considerando a interação veículo estrutura. Neste item, serão realizadas simulações e uma análise comparativa dos resultados para avaliar a influência das variáveis no processo de frenagem do trem.
- Validar a programação considerando a frenagem através das equações analíticas da cinemática e comparar com os modelos desenvolvidos no trabalho.
- Apresentar a análise dinâmica de estruturas com tipologias simples, com alguns modelos utilizados para representar os veículos ferroviários.

1.3 – METODOLOGIA DE TRABALHO

A metodologia deste trabalho consiste em representar cada modelo de veículo mediante um conjunto de massas, molas e amortecedores, dispostos de tal forma a considerar os graus de liberdade do trem, inclusive o grau referente à frenagem. A cada representação, aplica-se a equação de Euler-Lagrange, com o objetivo de obter as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do veículo.

A ponte adotada para o estudo de vibrações induzidas pela passagem das cargas é representada por uma viga simplesmente apoiada, dividida em segmentos e analisada numericamente utilizando o método dos elementos finitos.

O elemento de interface está composto por molas e amortecedores dispostos nas direções verticais e horizontais. O modelo do sistema de freio possui duas abordagens:

- A primeira, baseada na cinemática, considera a transmissão da força de frenagem como constante agindo no correspondente nó da roda. Ao mesmo tempo age uma força de sentido contrário e com a metade da força de frenagem nos dois nós da interface próximos à roda.
- A segunda, baseada na dinâmica, considera a força de frenagem variando com o tempo de acordo à curva representativa de pressão no cilindro do freio (obtida mediante uso de ábacos), o valor da força de frenagem máxima do sistema está em função do coeficiente de aderência (roda-trilho) e do peso da roda, dependendo de cada modelo. A rigidez das molas horizontais age sem superar à força de frenagem máxima do sistema.

A obtenção das respostas do sistema (deslocamento, velocidade e aceleração) é realizada pelo método de integração no tempo de Newmark, levando-se em consideração a interação veículo-estrutura.

Por fim, será realizada a validação do modelo desenvolvido, dependendo da abordagem, usando equações da cinemática ou aproximações aos gráficos das respostas obtidas em termos dos deslocamentos, velocidades e acelerações, presentes na literatura.

2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A compreensão dos efeitos provenientes do tráfego de trens sobre estruturas tem evoluindo nos últimos anos, e isto só foi possível devido ao grande número de pesquisas, ensaios e estudos teóricos que foram realizados por diversos grupos de investigação, empenhados no avanço dos métodos de cálculo dinâmicos para estudar a interação veículo-estrutura. Entretanto, a maioria dos autores não considera o efeito da frenagem, a seguir serão destacadas as principais contribuições sobre frenagem e interação veículo-estrutura:

Os primeiros programas para estudo e avaliação do comportamento de trens foram baseados em modelos bastante simplificados (massas concentradas) até o início da década de 60. Neste contexto destacou-se o programa denominado TEM (Train Energy Model) que foi baseado em princípios físicos considerando a conservação da energia do trem (Barbosa, 1993). O programa TEM considerava o trem como uma longa corrente rígida, não considerando a existência de um sistema engate - aparelho de choque e tração (ACT), necessária para representar a interligação física entre vagões, como se ilustra na Figura 2.1. Esta forma de modelar foi permitida porque o programa apenas calculava o desempenho da operação de uma composição ferroviária.

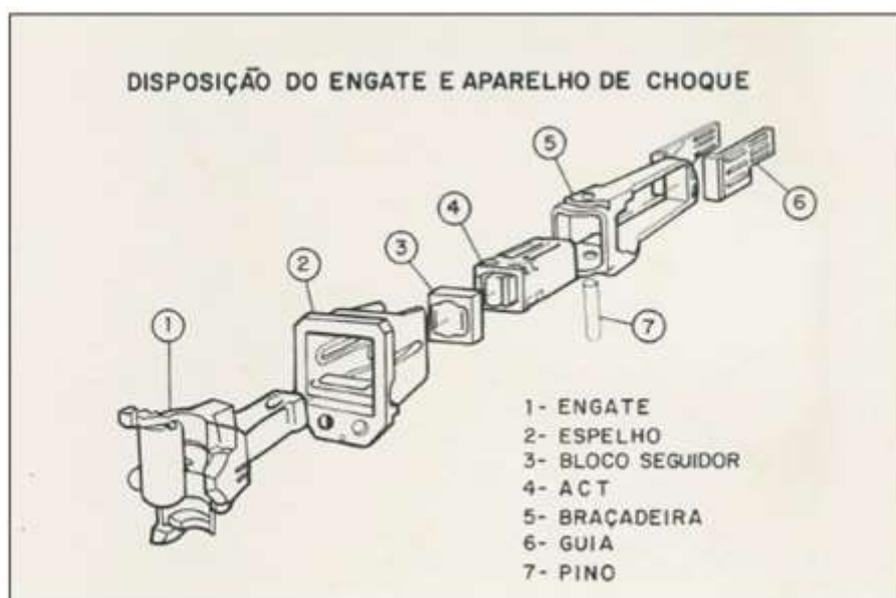


Figura 2.1 – Vista ampliada do engate e ACT (Barbosa, 1993)

A ABA - Air Brake Association, dos Estados Unidos de América, é o principal centro de informação sobre freios ferroviários. Neste contexto as normas elaboradas pela ABA são adotadas nas ferrovias brasileiras. No ano de 1975 esta associação estudou exaustivamente o desempenho do sistema de freio durante a frenagem com a finalidade de obter a variação da desaceleração do veículo com o decorrer do tempo. Para isso foram realizados ensaios em laboratórios que consistiam em montar e monitorar centenas de válvulas de freio, o que permitiu a análise de diversas simulações, para diferentes taxas de frenagem e a elaboração de curvas de aumento de pressão no cilindro do freio com o tempo. Por meio dessas curvas passou-se a pensar em um processo de cálculo da distância de parada, que deu origem ao método dos intervalos. Com o tempo este método tornou-se o mais adequado para lidar com a não linearidade do processo de frenagem, propondo uma análise cíclica, processada mecanicamente, com o emprego de um computador, que seja capaz de considerar as variações no decorrer do tempo. Por sua vez o método dos intervalos constitui-se a base para o desenvolvimento deste trabalho.

Norman (1980) apresentou um modelo matemático para cálculo do comportamento do sistema de freio pneumático utilizado em trens. O autor fez uma modelagem do comportamento das válvulas de controle e discretizou a tubulação pneumática em sua extensão ao longo do trem. Desta forma pode-se obter a simulação do comportamento do sistema de freio para várias formas de operação.

Ribeiro (1983) apresentou um programa computacional de simulação, desenvolvido na linguagem Fortran, utilizando o método dos intervalos. Para o modelo de trem utilizou uma massa concentrada pontual, associada a uma coordenada longitudinal. Este tipo de modelagem permite que todas as oscilações e interações internas entre os vagões sejam ignoradas. O programa computacional permitia calcular a distância percorrida em função de uma força de tração aplicada à massa total do trem. Os resultados obtidos foram comparados com experimentações práticas apresentando aceitável concordância. A experimentação prática consistia em simples medições do espaço percorrido por um pequeno veículo de aço, desenvolvido e montado em laboratório, controlado por dispositivos eletrônicos que permitiam o movimento.

Felicio (1984) apresentou um estudo completo da dinâmica longitudinal do trem utilizando um programa computacional desenvolvido na linguagem Borland C. Para a modelagem do

veículo foram utilizados três tipos de modelos. O primeiro modelo considera o trem como uma barra rígida não tendo, portanto, nenhum acoplamento entre dois vagões consecutivos. O segundo modelo, mais completo, discretizou cada veículo com massas individuais e idênticas. Finalmente o terceiro modelo, baseado em uma simplificação do segundo, com massas agrupadas. Para a modelagem da via férrea foi considerada por uma grade estrutural (lastro) composta por dormentes fixados transversalmente aos trilhos. Os componentes veículos e via férrea foram integrados no tempo por meio do método das diferenças finitas. O programa durante o processamento apresentava arquivos de dados contendo os esforços longitudinais nos acoplamentos dos vagões e seu respectivo ângulo de inclinação em relação a uma linha longitudinal ao longo da via férrea, com estes dados era possível verificar as relações entre as forças lateral e vertical, que podem ser utilizadas como forma de avaliar a tendência ao descarrilamento. A principal conclusão desse trabalho é a importância das forças longitudinais internas do trem, que são transmitidas ao sistema engate - aparelho de choque e tração, as mesmas que contribuem significativamente para as condições de segurança da operação ferroviária.

Yang *et al.* (1997) estudaram a importância da vibração de vigas simplesmente apoiadas submetidas a trens em alta velocidade. O trem foi formulado como dois subsistemas de cargas de roda proporcionalmente espaçadas em intervalos constantes. Para determinar os parâmetros que governam a resposta dinâmica utilizou uma abordagem analítica considerando a inércia dos subsistemas em movimento e sua interação com a estrutura, obtendo as soluções numéricas dos subsistemas por meio do método de Newmark. O estudo concluiu que: o efeito da inércia dos veículos em movimento tende a aumentar o período de vibração da viga, fazendo com que os picos de ressonância mudem para velocidades menores.

Martins (1999) realizou uma análise das variáveis envolvidas no processo de frenagem, como: coeficiente de aderência (trilho-roda), tempo de reação do condutor, entre outras, com o objetivo de padronização na determinação destes valores para que haja consistência nos resultados das simulações, permitindo análise comparativa. Estabeleceu o método simplificado de cálculo da distância de parada que consiste em um procedimento de análise em que a curva velocidade versus tempo divide-se em duas partes. O primeiro intervalo de tempo corresponde ao tempo de reação do sistema, onde os cilindros do freio estão se enchendo de ar e as sapatas de freio estão se aproximando e sendo pressionadas contra as rodas, sem ainda exercer força suficiente para alterar a velocidade; e o segundo intervalo de

tempo corresponde a um processo de desaceleração uniforme onde a velocidade diminui constantemente até zero. Neste contexto foram feitos lotes de simulações compatíveis com situações reais das ferrovias brasileiras apresentando boa concordância nos resultados. O estudo destaca a importância dos fatores que influenciam a frenagem tais como a eficiência do sistema de freios.

Fryba (2001) investigou o comportamento dinâmico de pontes ferroviárias por meio das vibrações de ressonância quando submetidas à passagem de trens de alta velocidade. Para isso utilizou um modelo teórico de ponte, baseado nos princípios dos trabalhos virtuais, com a finalidade de obter as amplitudes dos deslocamentos e acelerações em vibrações livres, sem interação veículo-estrutura. O estudo concluiu que: as máximas amplitudes de vibração de ressonância aparecem no momento em que o último eixo deixa a ponte.

Correa (2003) estudou as vibrações em pontes ferroviárias quando submetidas à passagem de um trem elétrico típico utilizado nas vias férreas urbanas brasileiras. Os modelos de veículos utilizados vão desde forças concentradas até modelos mais complexos tal como um sistema massa-mola-amortecedor. Foi considerada a interação entre trem, trilhos e ponte, bem como a irregularidade entre trilhos e rodas. A ponte foi discretizada em elementos finitos de viga. Finalmente as equações de movimento do sistema foram integradas numericamente pelo método de Newmark, com o objetivo de obter os resultados em termos de deslocamentos verticais.

Ferreira (2005) desenvolveu uma planilha de cálculos para estudar o desempenho da frenagem de um bi-trem com suspensão em tandem e com sistema de frenagem ABS, como se ilustra na Figura 2.2, com a finalidade de otimizar o processo da frenagem para qualquer condição operacional. A planilha permite calcular a aderência em cada eixo, a desaceleração máxima desenvolvida pelo veículo, o espaço percorrido, o tempo de parada, a força de frenagem (e sua porcentagem) em cada eixo, a eficiência do sistema de freios entre outros. A principal conclusão deste trabalho, após de obter os resultados, é que durante o processo da frenagem o eixo dianteiro ganha força normal enquanto o traseiro perde.

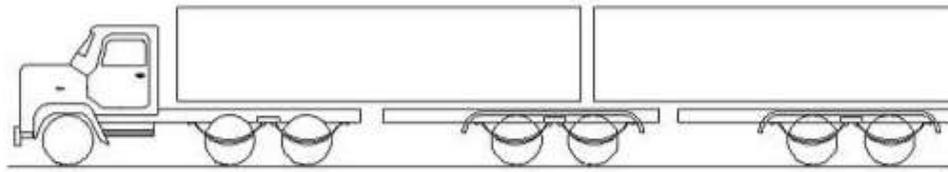


Figura 2.2 – Esquema de um bi-trem (Ferreira, 2005)

Gabaldón *et al.* (2005) estudaram os efeitos dinâmicos provocados em pontes devido à passagem de trens de alta velocidade. Foram utilizados métodos de cálculo baseados na integração temporal das equações de movimento considerando cargas móveis, podendo considerar ou não a interação veículo-estrutura. Os autores também compararam e destacaram as diferenças e similaridades entre os métodos baseados na integração temporal dos modos de vibração da estrutura, e os baseados na integração completa considerando todos os graus de liberdade do modelo estrutural e do veículo. A principal conclusão deste trabalho é que quando se considera o modelo com interação veículo estrutura, há uma redução nas respostas dinâmicas das pontes de comprimento curto.

Silva (2012) apresentou uma ferramenta computacional, desenvolvida em linguagem Python 2.7 considerando o problema da interação veículo-estrutura em pontes ferroviárias submetidas às ações de trens. O modelo do veículo foi representado por um conjunto de elementos básicos (massa, mola e amortecedor) interconectados. A ponte foi representada como uma viga simplesmente apoiada modelada por elementos finitos. Para o modelo da interação veículo-estrutura foi utilizado um elemento de interface que buscou compatibilizar o contato vertical entre a roda e o trilho. O método de integração usado na obtenção de respostas do sistema foi o de Newmark. Os resultados obtidos por meio do programa computacional apresentaram boa concordância com os encontrados na literatura.

Como pode ser observado pela descrição acima, poucos trabalhos foram desenvolvidos sobre o tema da frenagem. A maioria dos estudos estão voltados para a determinação das respostas verticais das estruturas, devidos aos efeitos provenientes das grandes massas dos veículos em movimento, desconsiderando as consequências geradas nas estruturas das pontes ferroviárias quando sujeitas à frenagem dessas composições. Embora o país disponha de uma malha ferroviária em franco processo de crescimento, poucas ferramentas e tecnologias foram desenvolvidas ou estão disponíveis para aplicação deste tipo de análise comportamental.

3 – MODELAGEM DA FRENAGEM

3.1 – PRINCÍPIOS DA FRENAGEM

O processo de frenagem é representado por uma aceleração negativa na relação fundamental, representada na equação (3.1):

$$F = m \cdot a \quad \begin{array}{l} a > 0 \text{ aceleração} \\ a < 0 \text{ frenagem} \end{array} \quad (3.1)$$

Onde:

F : força

m : massa

a : aceleração

A força de frenagem por atrito do trem, representada na equação (3.2), é produzida pelo atrito da sapata de freio contra a roda, conforme é mostrado na Figura 3.1.

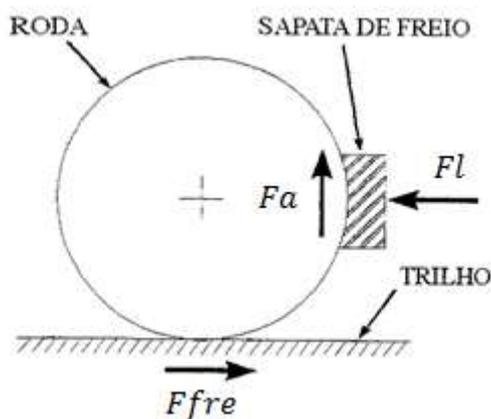


Figura 3.1 – Força de atrito entre sapata de freio e roda (modificado - Martins, 1999)

$$Fa = Fl \cdot at \quad (3.2)$$

Onde:

Fa : força de atrito entre a sapata de freio e a roda.

Fl : força líquida de frenagem.

at : coeficiente de atrito entre a sapata de freio e a roda.

Esta força deve permanecer dentro do limite de aderência entre a roda e o trilho para que não haja deslizamento, de modo que nesta condição podemos dizer que a força de atrito entre a sapata e a roda (Fa) é igual à força de frenagem ($Ffre$) entre a roda e o trilho, representada na equação (3.3).

$$Ffre = Fa \quad (3.3)$$

A força de frenagem do trem, representada na equação (3.4), é produzida pelo coeficiente de aderência (trilho-roda) e a parcela do peso do trem correspondente a cada roda, conforme se mostra na Figura 3.2.

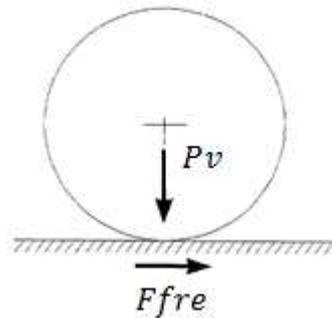


Figura 3.2 – Força de frenagem (modificado - Martins, 1999)

$$Ffre = Pv \cdot \mu \quad (3.4)$$

Onde:

Pv : peso do vagão equivalente.

μ : coeficiente de aderência entre roda e trilho.

A parcela do peso do trem correspondente a cada roda é obtida por meio da equação (3.5)

$$Pv = m \cdot g \quad (3.5)$$

Onde:

m : massa correspondente a cada roda.

g : aceleração da gravidade.

Utiliza-se a equação (3.4) para determinar o coeficiente de aderência representada na equação (3.6)

$$\mu = F_{fre}/Pv \quad (3.6)$$

3.2 – LIMITES DE ADERÊNCIA

Através de ensaios foram determinadas curvas de limites de aderência entre a roda e o trilho em função da velocidade do trem. Um exemplo de curvas deste tipo é mostrado na Figura 3.3, onde trilho normal representa as condições normais adequadas ao tráfego, e trilho ruim representa a situação onde as superfícies do trilho ou da roda estão molhadas ou com algum óleo, folhas, sujeira, e etc. O coeficiente de aderência é obtido ligando o valor correspondente da velocidade com a respectiva curva da condição do trilho, a interseção obtida é ligada à linha de aderência em porcentagem (%).

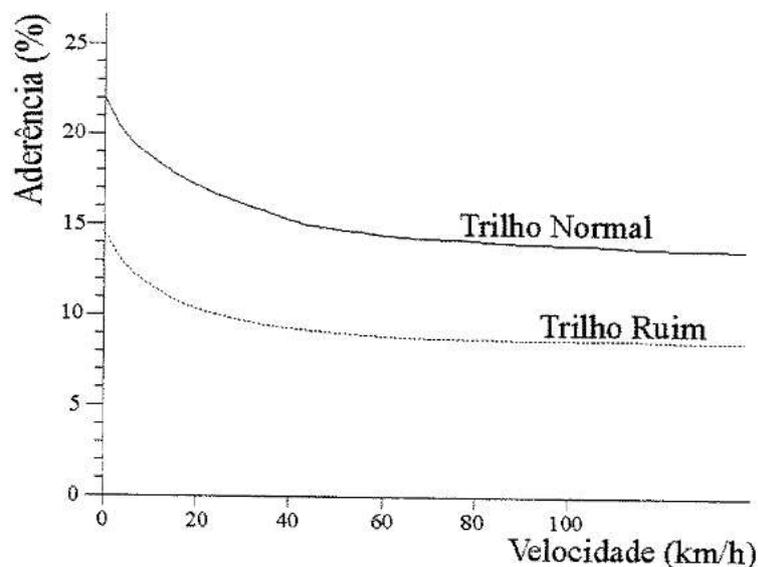


Figura 3.3 – Curvas de limite de aderência (Martins, 1999)

Ultrapassando o limite de aderência, a roda passa a escorregar sobre o trilho. Nesta condição a força de desaceleração diminui porque o coeficiente de atrito entre as superfícies metálicas é menor que a aderência entre elas.

Portanto a frenagem deve ocorrer de modo a garantir que o limite de aderência não seja ultrapassado.

3.3 – PESO DO VAGÃO

A Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) apresenta a Tabela 3.1 segundo a Norma CB-60/1991 em função das dimensões do vagão:

Tabela 3.1 - Peso do vagão (ABNT, 1991)

Truque – Manga de Eixo (mm)	Vagão – Peso Bruto (kN)
110 x 205	470
130 x 230	640
140 x 255	800
150 x 280	1000
165 x 305	1190
178 x 305	1430

3.4 – TAXA DE FRENAGEM

Taxa de frenagem é a relação entre a força exercida pelas sapatas de freio e o peso do vagão, a mesma que é medida mediante um ensaio estático com um dinamômetro especial que é instalado no lugar da sapata.

A Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) segundo a norma NB-58/1986 estabelece limites superiores para o valor da taxa de frenagem de modo a garantir que os limites de aderência não sejam ultrapassados durante a frenagem. As normas também estabelecem limites inferiores para que haja a garantia de que a frenagem seja adequadamente efetiva. Este valores de taxa de frenagem estabelecidos para pressão de 345 kPa (50 Psi) no cilindro são apresentados na Tabela 3.2 a seguir:

Tabela 3.2 - Taxa de frenagem limites (ABNT, 1986)

Tipo de freio	Taxa de frenagem para vagão carregado	Taxa de frenagem para vagão vazio
Freio a ar	Mínimo 6,5% Máximo 30%	Máximo 30%
Freio manual	Mínimo 11%	Máximo 60%

3.5 – VELOCIDADE DO TREM

Apesar de haver interesse em se trafegar com o trem na maior velocidade possível, verifica-se a capacidade de frenagem é um dos principais fatores que levam a se estabelecerem limites de velocidade em função das características do trem e da via.

A velocidade de um trem de carga, durante seu trajeto, pode variar pela aplicação dos freios sobre a roda, tal como se mostra na Figura 3.4.

Os sistemas de sinalização e a divisão da via férrea em blocos; baseiam-se na capacidade de frenagem dos trens que operam no trecho e isto conseqüentemente depende da adoção de valores limites de velocidade. Portanto, para que as ferrovias estabeleçam limites de velocidade precisam conhecer o desempenho dos trens na via. Para trens de carga, as ferrovias brasileiras operam com velocidades que variam na faixa de 10 a 25 m/s.

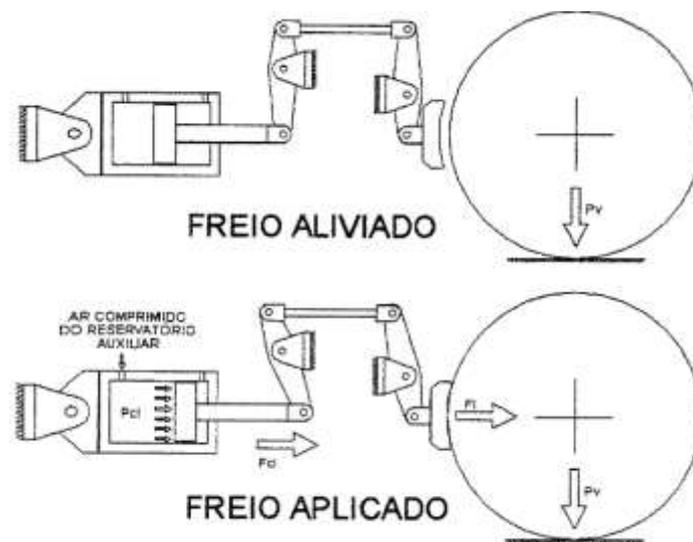


Figura 3.4 – Esquema de aplicação do freio no vagão (Martins, 1999)

3.6 – MODELO DO SISTEMA DE FREIO

A modelagem para o sistema de freio do vagão baseia-se nas formas de aplicar a força de frenagem, estas formas são conhecidas como abordagens. Neste trabalho o modelo de sistema de freio é modelado através de duas abordagens, como apresentado abaixo e detalhado logo em seguida.

- Força de frenagem constante no tempo.
- Força de frenagem variando com o tempo de acordo à curva representativa de pressão no cilindro do freio.

A primeira abordagem considera a força de frenagem constante durante todo o tempo de análise, para todos os vagões de um comboio ferroviário, como se ilustra na Figura 3.5.

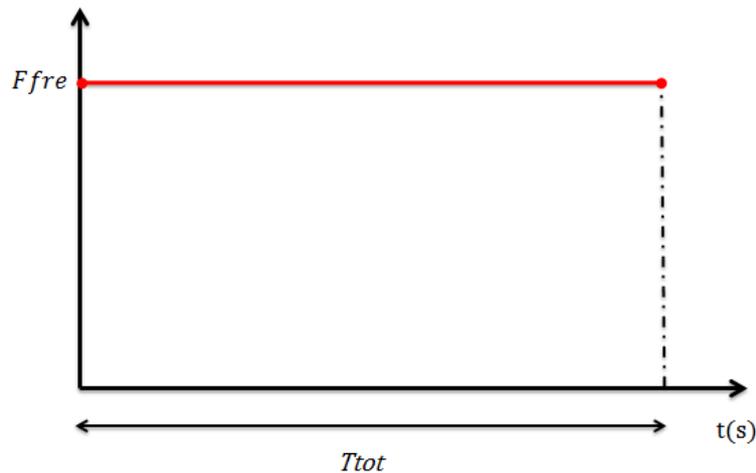


Figura 3.5 – Força de frenagem constante no tempo

De acordo com a Figura 3.5, F_{fre} e T_{tot} são respetivamente a força de frenagem e o tempo total de análises. A força de frenagem constante, não representa um modelo adequado para o comportamento real do trem, mas constitui um bom ponto de partida, para comparar as respostas obtidas do sistema (deslocamentos, velocidades e acelerações) com as equações da cinemática e entender o comportamento dos modelos de veículos.

A segunda abordagem considera a força de frenagem variando com o tempo de acordo com a curva representativa de pressão no cilindro do freio, o valor da força de frenagem máxima do sistema está em função do coeficiente de aderência (roda-trilho) e do peso da roda, dependendo de cada modelo. A pressão no cilindro sem dúvida apresenta uma relação direta, com a forma de aplicar a força de frenagem sobre o veículo, este aspecto aumenta o potencial da modelagem proposta na abordagem anterior, melhorando as respostas do sistema, com resultados satisfatórios e aproximando-se ao comportamento real do trem.

Quando o sistema está composto por n modelos de veículos, cada vagão tem uma curva de pressão no cilindro do freio. A Figura 3.6 ilustra a pressão para o primeiro vagão, o vagão do meio e o último vagão de um comboio ferroviário.

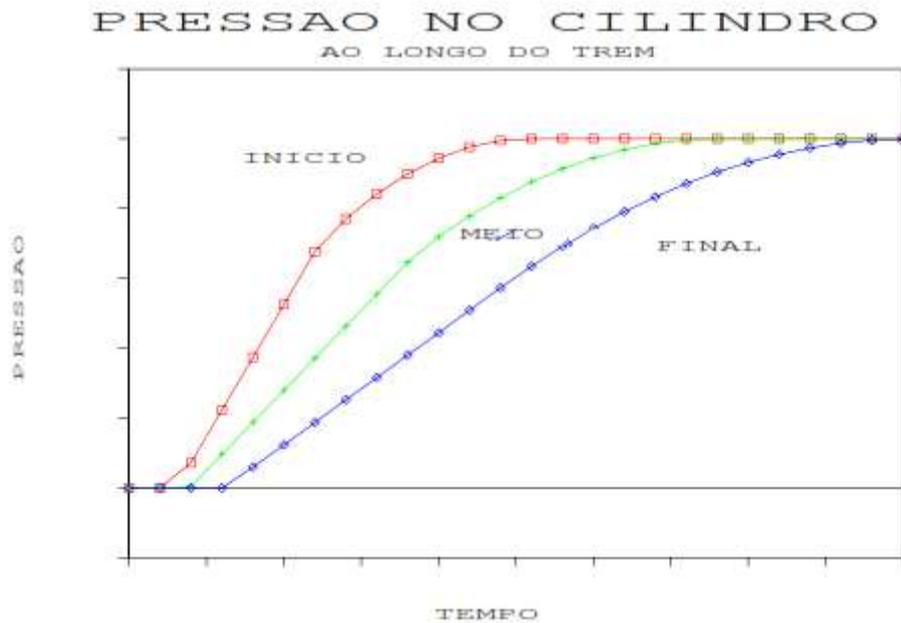


Figura 3.6 – Curva de pressão no cilindro do freio para três vagões de n (Barbosa, 1993)

Devido às dificuldades computacionais de ser criado um algoritmo, considerando essas curvas de pressão para cada vagão, Martins (1999) desenvolveu a possibilidade de se trabalhar com uma curva representativa que seja bilinear e represente a maioria das curvas dos vagões como se ilustra na Figura 3.7.

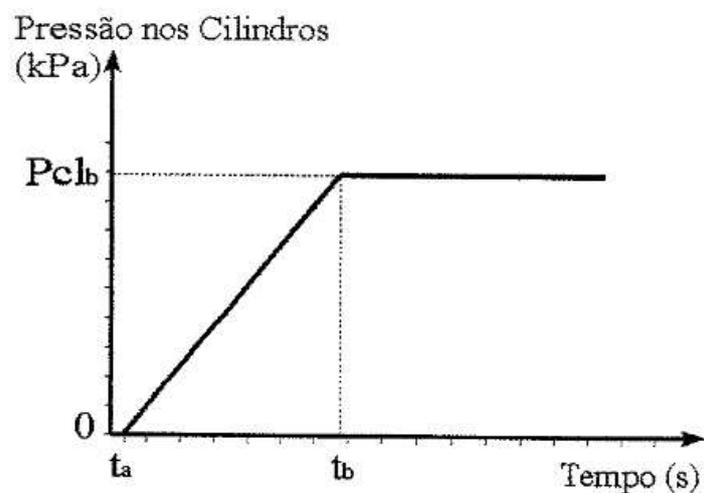


Figura 3.7 – Curva de pressão no cilindro do freio representativa (Martins, 1999)

A pressão no cilindro do freio é proporcional à força de frenagem, portanto por analogia, a força de frenagem varia com o tempo de acordo à Figura 3.8.

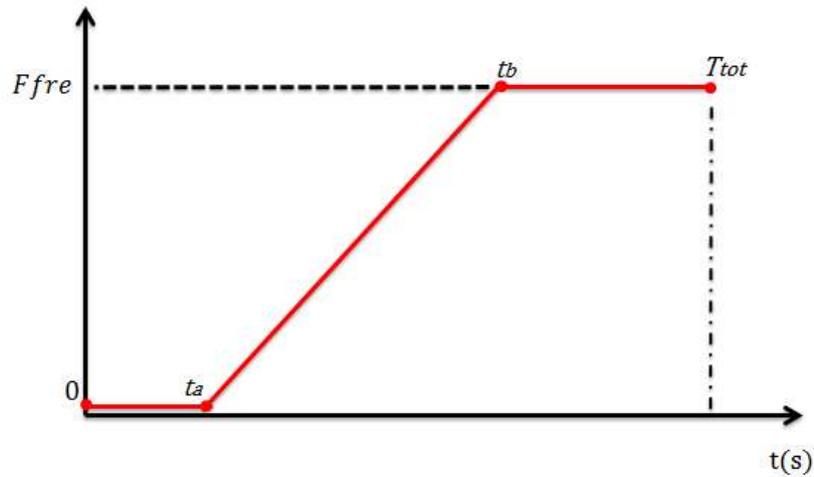


Figura 3.8 – Força de frenagem variando com o tempo

De acordo com a Figura 3.8, F_{fre} e T_{tot} são respectivamente a força de frenagem e o tempo total da análise, t_a e t_b são tempos padronizados por Martins (1999). O tempo t_a é o intervalo de tempo que o veículo demora em estabilizar sua pressão no cilindro do freio, segundo Martins (1999), este tempo é equivalente a 3 s. O tempo t_b é o intervalo de tempo que a força de frenagem atinge o valor máximo. Para determinação do tempo t_b , usa-se um ábaco, segundo as notas descritas após a Figura 3.9. Para o uso deste ábaco é importante conhecer a pressão nos cilindros do freio e o comprimento do encanamento geral dos vagões. O valor mínimo de t_b é de 10 s.

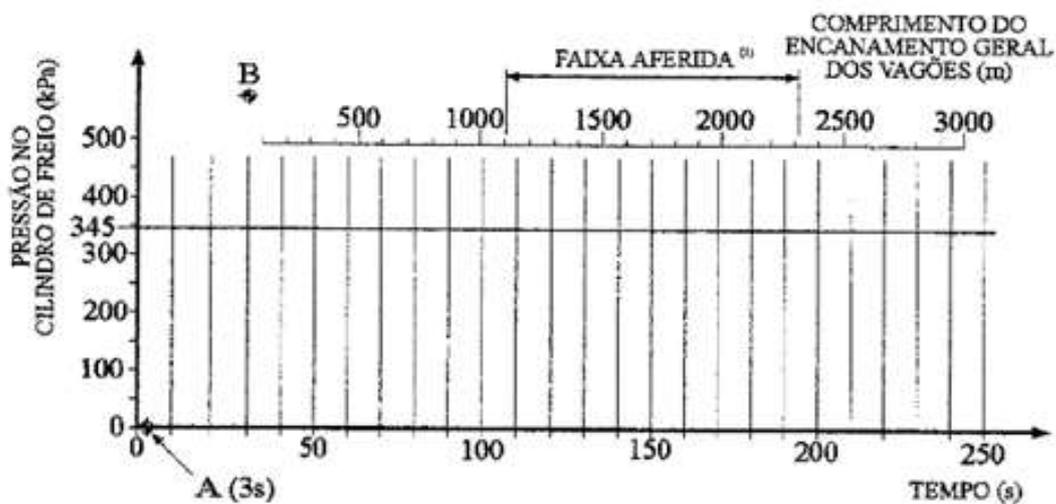


Figura 3.9 - Ábaco para a determinação da curva de crescimento da força de frenagem (Martins, 1999)

Para que o ábaco da Figura 3.9 seja usado adequadamente as seguintes notas devem ser observadas:

Para casos onde a pressão no cilindro do freio seja de até 70 psi (345 kPa) procede-se da seguinte maneira:

- Ligar o ponto “A” ao valor correspondente ao comprimento do encanamento geral;
- A interseção desta linha com a linha referente à pressão no cilindro do freio, define o tempo *tb*.

Para casos onde a pressão no cilindro do freio seja superior a 70 psi (345 kPa) procede-se da seguinte maneira:

- Ligar o ponto “A” ao valor correspondente ao comprimento do encanamento geral;
- Onde esta linha interceptar a linha referente a 70 psi (345 kPa), será definido um ponto e este ponto deve ser ligado ao ponto “B”;
- A interseção desta nova linha com a linha referente à pressão no cilindro do freio, define o tempo *tb*.

Cabe destacar, que os conceitos descritos nesta seção, precisam ser complementados com os descritos na seção 6.1.1.

4 – MODELAGEM DO TREM

Neste trabalho os diferentes modelos de veículos são representados por um conjunto de elementos básicos (massa, mola e amortecedor) interconectados. Todos os elementos básicos possuem as suas próprias matrizes de rigidez, massa e amortecimento que posteriormente são combinadas para montar as correspondentes matrizes do veículo. Os elementos básicos são dispostos nas direções horizontais e verticais com o intuito de que o movimento possa ser estudado nas duas direções. Os deslocamentos horizontais apresentam relação direta com o estudo da força de frenagem, que age sobre a roda de forma constante ou variando com o tempo (Barbosa, 1993). Os deslocamentos verticais que são produzidos na ponte, apresentam relação direta com o estudo da ressonância (Correa, 2008).

4.1 – EQUAÇÕES BÁSICAS DO MOVIMENTO DO VEÍCULO

As equações de movimento dos modelos de veículos podem ser obtidas a partir das equações de Euler-Lagrange, simplesmente expressa na forma de energia cinética T e energia potencial V , em termos de um conjunto de coordenadas generalizadas $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (4.1)$$

Onde se denomina lagrangeano ($\mathcal{L} = T - V$) à diferença entre a energia cinética T e a energia potencial V do sistema. Para descrever todo o movimento do sistema, deve-se escrever esta equação para cada um dos j -ésimos graus de liberdade q_j do sistema.

É possível utilizar várias formas de funções dissipativas quando o sistema não for conservativo. Quando parte da energia do sistema for dissipada por elementos submetidos a forças que sejam proporcionais a sua velocidade é possível acrescentar uma parcela à equação de Lagrange utilizando uma função dissipativa R (Montoya, 2009).

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (4.2)$$

Onde R é denominado função de dissipação de Rayleigh, a qual é uma função que depende da velocidade \dot{v} e representa a dissipação do sistema.

$$R = \frac{1}{2} c \dot{v}^2 \quad (4.3)$$

4.2 – MODELOS DE VEÍCULO

Para desenvolver as análises dinâmica com interação veículo-estrutura de pontes ferroviárias considerando a frenagem, será utilizado um programa computacional que tem uma biblioteca chamada PyDyn que utiliza a linguagem Python 2.7 desenvolvido por Silva (2012) e Durand *et al.* (2012), a mesma que permite realizar análises dinâmica da interação veículo-estrutura em pontes ferroviárias submetidas a carregamentos móveis, considerando ou não, o efeito da inércia dessas cargas em pontes isostáticas.

4.2.1 – Modelo de massa concentrada móvel (LumpedMass2D)

Este modelo de trem considera a ação do veículo sobre a estrutura como um conjunto de forças de magnitudes constantes que se deslocam sobre a estrutura com uma velocidade inicial constante até que a massa seja submetida a uma desaceleração. A roda apresenta dois graus de liberdade, um na direção horizontal e outro na vertical, de tal forma que o movimento possa ser estudado nas duas direções, conforme se ilustra na Figura 4.1

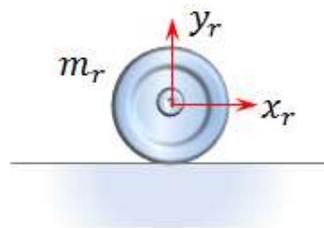


Figura 4.1 – Representação esquemática da roda

A massa concentrada m_r conforme se mostra na Figura 4.1 não apresenta rigidez nem amortecimento. Portanto as matrizes correspondentes a considerar neste modelo são:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_r & 0 \\ 0 & m_r \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

4.2.2 – Modelo de veículo sem truque (SM1)

Neste modelo o trem é considerado como um conjunto de eixos independentes correspondentes à posição de cada roda. No entanto para equilibrar o efeito da frenagem, o sistema também contará com um amortecedor e uma mola na direção do grau de liberdade horizontal.

As características do veículo são apresentadas na Figura 4.2. Na qual y_v e x_v são respectivamente os deslocamentos vertical e horizontal total da massa suspensa, y_r e x_r são respectivamente os deslocamento vertical e horizontal da roda, k_v e c_v são respectivamente a rigidez e o amortecimento do veículo, m_v massa proveniente do vagão (caixa + Truques), k_h e c_h são respectivamente a rigidez e o amortecimento do sistema de frenagem.

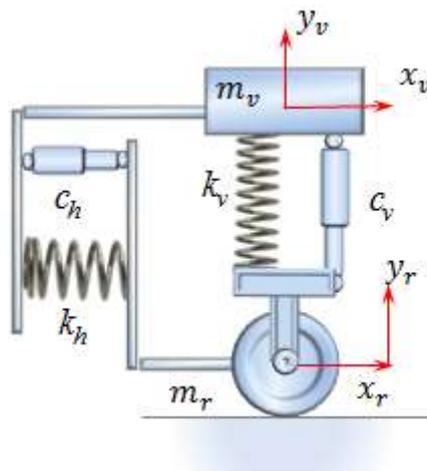


Figura 4.2 – Representação esquemática do modelo de veículo sem truque

Para o modelo da Figura 4.2 temos os seguintes deslocamentos relativos:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= x_v - x_r \\ \delta_2 &= y_v - y_r\end{aligned}\tag{4.5}$$

O modelo apresenta 4 graus de liberdade, os dois primeiros relacionados com a roda e os dois seguintes relacionados com a massa suspensa.

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ x_v \\ y_v \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Para o modelo da Figura 4.2 os componentes da equação de Lagrange a considerar são:

L = Lagrangeano.

$$\mathcal{L} = T - V \quad (4.7)$$

T = Energia cinética.

$$T = \frac{1}{2} m_r \dot{x}_r^2 + \frac{1}{2} m_r \dot{y}_r^2 + \frac{1}{2} m_v \dot{x}_v^2 + \frac{1}{2} m_v \dot{y}_v^2 \quad (4.8)$$

V = Energia potencial.

$$V = \frac{1}{2} k_h (x_v - x_r)^2 + \frac{1}{2} k_v (y_v - y_r)^2 \quad (4.9)$$

R = Função de dissipação de Rayleigh.

$$R = \frac{1}{2} c_h (\dot{x}_v - \dot{x}_r)^2 + \frac{1}{2} c_v (\dot{y}_v - \dot{y}_r)^2 \quad (4.10)$$

Após substituir as equações (4.8), (4.9) e (4.10) na equação (4.2), e fazer as derivações em relação a cada grau de liberdade obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} m_r \ddot{x}_r - c_h (\dot{x}_v - \dot{x}_r) - k_h (x_v - x_r) &= 0 \\ m_r \ddot{y}_r - c_v (\dot{y}_v - \dot{y}_r) - k_v (y_v - y_r) &= 0 \\ m_v \ddot{x}_v + c_h (\dot{x}_v - \dot{x}_r) + k_h (x_v - x_r) &= 0 \\ m_v \ddot{y}_v + c_v (\dot{y}_v - \dot{y}_r) + k_v (y_v - y_r) &= 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

A partir das equações (4.11) podem ser obtidas as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do modelo da Figura 4.2, estas matrizes são:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \begin{pmatrix} m_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_v \end{pmatrix} \\
\mathbf{C} &= \begin{pmatrix} c_h & 0 & -c_h & 0 \\ 0 & c_v & 0 & -c_v \\ -c_h & 0 & c_h & 0 \\ 0 & -c_v & 0 & c_v \end{pmatrix} \\
\mathbf{K} &= \begin{pmatrix} k_h & 0 & -k_h & 0 \\ 0 & k_v & 0 & -k_v \\ -k_h & 0 & k_h & 0 \\ 0 & -k_v & 0 & k_v \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

4.2.3 – Modelo de veículo com truque (SM2)

Este modelo pode ser resumido como dois modelos SM1, unidos por meio de um elemento de barra rígida com massa suspensa m_v e inércia rotacional J_v . A Figura 4.3 mostra esquematicamente a configuração deste modelo.

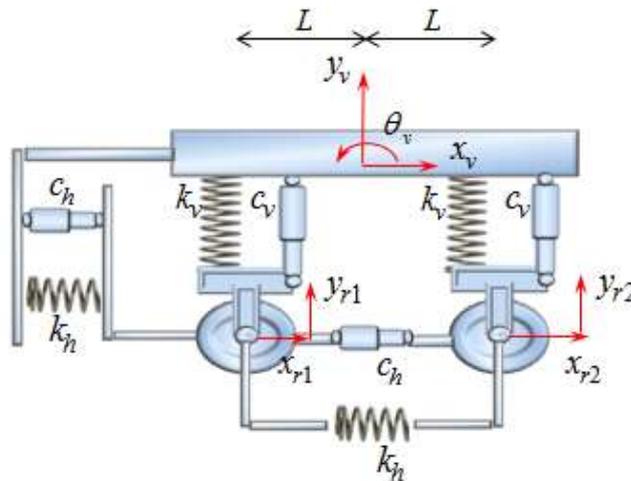


Figura 4.3 – Representação esquemática do modelo de veículo com truque

De acordo com a Figura 4.3 x_v , y_v e θ_v são respectivamente o deslocamento horizontal absoluto, o deslocamento vertical absoluto e a rotação da massa suspensa. Cada eixo está distante horizontalmente L do centro de massa. Os demais termos são os mesmos descritos no modelo SM1.

Para o modelo da Figura 4.3 tem-se os seguintes deslocamentos relativos:

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= x_v - x_{r1} \\
\delta_2 &= y_v - \theta_v L - y_{r1} \\
\delta_3 &= x_{r2} - x_{r1} \\
\delta_4 &= y_v + \theta_v L - y_{r2}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

O modelo apresenta 7 graus de liberdade, os quatro primeiros relacionados com as rodas, os dois seguintes relacionados com os deslocamentos da massa suspensa e o último relacionado com a rotação referente apenas à massa suspensa.

$$\mathbf{y} = (x_{r1} \ y_{r1} \ x_{r2} \ y_{r2} \ x_v \ y_v \ \theta_v)^T \tag{4.14}$$

Para o modelo da Figura 4.3 os componentes da equação de Lagrange a considerar são:

L = Lagrangeano.

$$\mathcal{L} = T - V \tag{4.15}$$

T = Energia cinética.

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m_{r1} \dot{x}_{r1}^2 + \frac{1}{2} m_{r1} \dot{y}_{r1}^2 + \frac{1}{2} m_{r2} \dot{x}_{r2}^2 + \frac{1}{2} m_{r2} \dot{y}_{r2}^2 + \frac{1}{2} m_v \dot{x}_v^2 + \frac{1}{2} m_v \dot{y}_v^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} J_v \dot{\theta}_v^2
\end{aligned} \tag{4.16}$$

V = Energia potencial.

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2} k_h (x_v - x_{r1})^2 + \frac{1}{2} k_v (y_v - \theta_v L - y_{r1})^2 + \frac{1}{2} k_h (x_{r2} - x_{r1})^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} k_v (y_v + \theta_v L - y_{r2})^2
\end{aligned} \tag{4.17}$$

R = Função de dissipação de Rayleigh.

$$\begin{aligned}
R = & \frac{1}{2}c_h(\dot{x}_v - \dot{x}_{r1})^2 + \frac{1}{2}c_v(\dot{y}_v - \dot{\theta}_vL - \dot{y}_{r1})^2 + \frac{1}{2}c_h(\dot{x}_{r2} - \dot{x}_{r1})^2 \\
& + \frac{1}{2}c_v(\dot{y}_v + \dot{\theta}_vL - \dot{y}_{r2})^2
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Após substituir as equações (4.16), (4.17) e (4.18) na equação (4.2), e fazer as derivações em relação a cada grau de liberdade obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
m_{r1}\ddot{x}_{r1} + c_h(2\dot{x}_{r1} - \dot{x}_{r2} - \dot{x}_v) + k_h(2x_{r1} - x_{r2} - x_{r1}) &= 0 \\
m_{r1}\ddot{y}_{r1} - c_v(\dot{y}_v - \dot{\theta}_vL - \dot{y}_{r1}) - k_v(y_v - \theta_vL - y_{r1}) &= 0 \\
m_{r2}\ddot{x}_{r2} + c_h(\dot{x}_{r2} - \dot{x}_{r1}) + k_h(x_{r2} - x_{r1}) &= 0 \\
m_{r2}\ddot{y}_{r2} - c_v(\dot{y}_v + \dot{\theta}_vL - \dot{y}_{r2}) - k_v(y_v + \theta_vL - y_{r2}) &= 0 \\
m_v\ddot{x}_v + c_h(\dot{x}_v - \dot{x}_{r1}) + k_h(x_v - x_{r1}) &= 0 \\
m_v\ddot{y}_v + c_v(2\dot{y}_v - \dot{y}_{r1} - \dot{y}_{r2}) + k_v(2y_v - y_{r1} - y_{r2}) &= 0 \\
J_v\ddot{\theta}_v + c_vL(2\dot{\theta}_vL + \dot{y}_{r1} - \dot{y}_{r2}) + k_vL(2\theta_vL + y_{r1} - y_{r2}) &= 0
\end{aligned} \tag{4.19}$$

A partir das equações (4.19) podem ser obtidas as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do modelo SM2, estas matrizes são:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \begin{bmatrix} m_{r1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{r1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{r2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{r2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_v \end{bmatrix} \\
\mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 2c_h & 0 & -c_h & 0 & -c_h & 0 & 0 \\ 0 & c_v & 0 & 0 & 0 & -c_v & c_vL \\ -c_h & 0 & c_h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_v & 0 & -c_v & -c_vL \\ -c_h & 0 & 0 & 0 & c_h & 0 & 0 \\ 0 & -c_v & 0 & -c_v & 0 & 2c_v & 0 \\ 0 & c_vL & 0 & -c_vL & 0 & 0 & 2c_vL^2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K} &= \begin{bmatrix} 2k_h & 0 & -k_h & 0 & -k_h & 0 & 0 \\ 0 & k_v & 0 & 0 & 0 & -k_v & k_vL \\ -k_h & 0 & k_h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_v & 0 & -k_v & -k_vL \\ -k_h & 0 & 0 & 0 & k_h & 0 & 0 \\ 0 & -k_v & 0 & -k_v & 0 & 2k_v & 0 \\ 0 & k_vL & 0 & -k_vL & 0 & 0 & 2k_vL^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

4.2.4 – Modelo completo (SM3)

Este modelo considera os quatro eixos do veículo e leva em consideração a massa do vagão e seus deslocamentos horizontais e verticais, assim como, às massas de dois truques e suas suspensões primárias e secundárias. Para a distribuição do peso total na roda, o vagão transmite uma correspondente parcela de sua massa total sobre a suspensão secundária e os truques distribuem parte desta através da suspensão primária, chegando diretamente sobre as rodas e finalmente sobre os trilhos.

Este modelo pode ser resumido como a junção de três elementos SM2, conforme é mostrada na Figura 4.4.

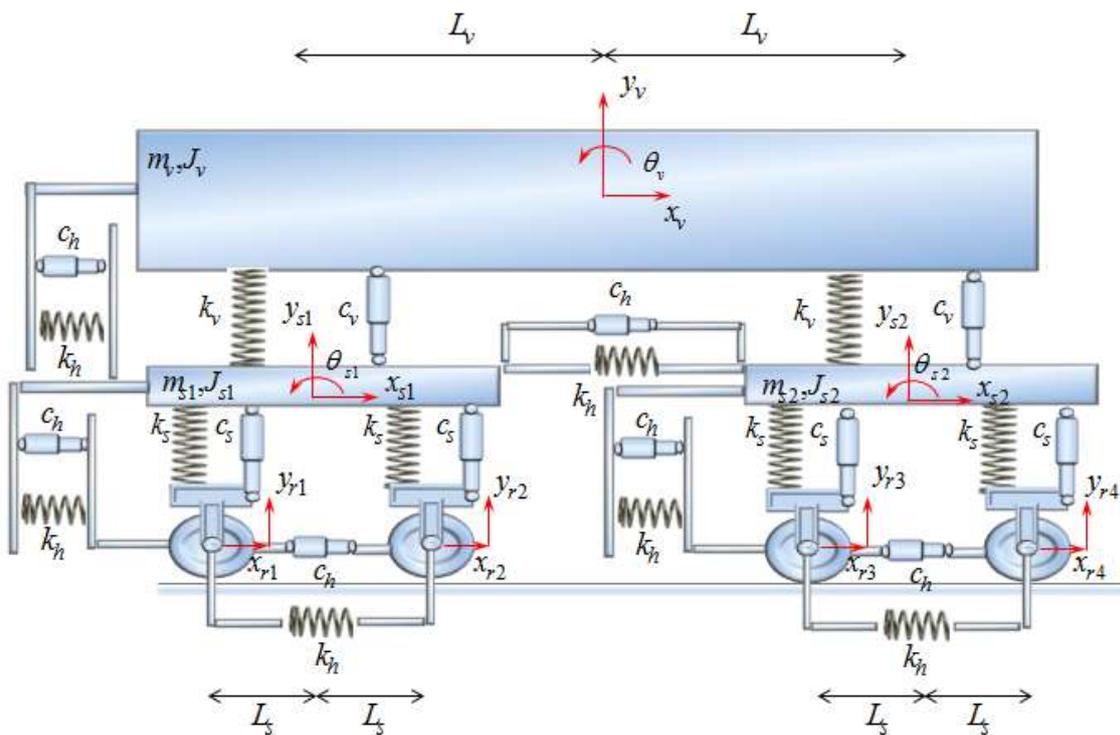


Figura 4.4 – Representação esquemática do modelo completo

Os termos são os mesmos descritos no modelo SM2. A distância entre as rodas em cada truque é igual a $2L_s$ e a distância entre eixos de cada truque é igual a $2L_v$. O sistema de suspensão primária dos truques possuem molas de rigidez horizontal k_h e rigidez vertical k_s , da mesma forma, os amortecedores apresentam coeficientes horizontal c_h e vertical c_s . Da mesma forma a suspensão principal da caixa apresenta rigidez k_h e k_v e amortecedores c_h e c_v respectivamente, para as direções horizontal e vertical.

Este modelo possui 17 graus de liberdade entre deslocamentos e rotações de acordo com:

$$\mathbf{y} = (x_{r1} \ y_{r1} \ x_{r2} \ y_{r2} \ x_{r3} \ y_{r3} \ x_{r4} \ y_{r4} \ x_{s1} \ y_{s1} \ x_{s2} \ y_{s2} \ x_v \ y_v \ \theta_{s1} \ \theta_{s2} \ \theta_v)^T \quad (4.21)$$

Para o modelo da Figura 4.3 os componentes da equação de Lagrange a considerar são:

L = Lagrangeano.

$$\mathcal{L} = T - V \quad (4.22)$$

T = Energia cinética.

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2}m_{r1}\dot{x}_{r1}^2 + \frac{1}{2}m_{r1}\dot{y}_{r1}^2 + \frac{1}{2}m_{r2}\dot{x}_{r2}^2 + \frac{1}{2}m_{r2}\dot{y}_{r2}^2 + \frac{1}{2}m_{r3}\dot{x}_{r3}^2 + \frac{1}{2}m_{r3}\dot{y}_{r3}^2 \\ & + \frac{1}{2}m_{r4}\dot{x}_{r4}^2 + \frac{1}{2}m_{r4}\dot{y}_{r4}^2 + \frac{1}{2}m_{s1}\dot{x}_{s1}^2 + \frac{1}{2}m_{s1}\dot{y}_{s1}^2 + \frac{1}{2}m_{s2}\dot{x}_{s2}^2 \\ & + \frac{1}{2}m_{s2}\dot{y}_{s2}^2 + \frac{1}{2}m_v\dot{x}_v^2 + \frac{1}{2}m_v\dot{y}_v^2 + \frac{1}{2}J_{s1}\dot{\theta}_{s1}^2 + \frac{1}{2}J_{s2}\dot{\theta}_{s2}^2 \\ & + \frac{1}{2}J_v\dot{\theta}_v^2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

V = Energia potencial.

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2}k_h(x_{s1} - x_{r1})^2 + \frac{1}{2}k_s(y_{s1} - \theta_{s1}L_s - y_{r1})^2 + \frac{1}{2}k_h(x_{r2} - x_{r1})^2 \\ & + \frac{1}{2}k_s(y_{s1} + \theta_{s1}L_s - y_{r2})^2 + \frac{1}{2}k_h(x_{s2} - x_{r3})^2 \\ & + \frac{1}{2}k_s(y_{s2} - \theta_{s2}L_s - y_{r3})^2 + \frac{1}{2}k_h(x_{r4} - x_{r3})^2 \\ & + \frac{1}{2}k_s(y_{s2} + \theta_{s2}L_s - y_{r4})^2 + \frac{1}{2}k_h(x_v - x_{s1})^2 \\ & + \frac{1}{2}k_v(y_v - \theta_vL_v - y_{s1})^2 + \frac{1}{2}k_h(x_{s2} - x_{s1})^2 \\ & + \frac{1}{2}k_v(y_v + \theta_vL_v - y_{s2})^2 \end{aligned} \quad (4.24)$$

R = Função de dissipação de Rayleigh

$$\begin{aligned}
R = & \frac{1}{2}c_h(\dot{x}_{s1} - \dot{x}_{r1})^2 + \frac{1}{2}c_s(\dot{y}_{s1} - \dot{\theta}_{s1}L_s - \dot{y}_{r1})^2 + \frac{1}{2}c_h(\dot{x}_{r2} - \dot{x}_{r1})^2 \\
& + \frac{1}{2}c_s(\dot{y}_{s1} + \dot{\theta}_{s1}L_s - \dot{y}_{r2})^2 + \frac{1}{2}c_h(\dot{x}_{s2} - \dot{x}_{r3})^2 \\
& + \frac{1}{2}c_s(\dot{y}_{s2} - \dot{\theta}_{s2}L_s - \dot{y}_{r3})^2 + \frac{1}{2}c_h(\dot{x}_{r4} - \dot{x}_{r3})^2 \\
& + \frac{1}{2}c_s(\dot{y}_{s2} + \dot{\theta}_{s2}L_s - \dot{y}_{r4})^2 + \frac{1}{2}c_h(\dot{x}_v - \dot{x}_{s1})^2 \\
& + \frac{1}{2}c_v(\dot{y}_v - \dot{\theta}_vL_v - \dot{y}_{s1})^2 + \frac{1}{2}c_h(\dot{x}_{s2} - \dot{x}_{s1})^2 \\
& + \frac{1}{2}c_v(\dot{y}_v + \dot{\theta}_vL_v - \dot{y}_{s2})^2
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Após substituir as equações (4.23), (4.24) e (4.25) na equação (4.2), e fazer as derivações em relação a cada grau de liberdade obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
m_{r1}\ddot{x}_{r1} + c_h(2\dot{x}_{r1} - \dot{x}_{r2} - \dot{x}_{s1}) + k_h(2x_{r1} - x_{r2} - x_{s1}) &= 0 \\
m_{r1}\ddot{y}_{r1} - c_s(\dot{y}_{s1} - \dot{\theta}_{s1}L_s - \dot{y}_{r1}) - k_s(y_{s1} - \theta_{s1}L_s - y_{r1}) &= 0 \\
m_{r2}\ddot{x}_{r2} + c_h(\dot{x}_{r2} - \dot{x}_{r1}) + k_h(x_{r2} - x_{r1}) &= 0 \\
m_{r2}\ddot{y}_{r2} - c_s(\dot{y}_{s1} + \dot{\theta}_{s1}L_s - \dot{y}_{r2}) - k_s(y_{s1} + \theta_{s1}L_s - y_{r2}) &= 0 \\
m_{r3}\ddot{x}_{r3} + c_h(2\dot{x}_{r3} - \dot{x}_{r4} - \dot{x}_{s2}) + k_h(2x_{r3} - x_{r4} - x_{s2}) &= 0 \\
m_{r3}\ddot{y}_{r3} - c_s(\dot{y}_{s2} - \dot{\theta}_{s2}L_s - \dot{y}_{r3}) - k_s(y_{s2} - \theta_{s2}L_s - y_{r3}) &= 0 \\
m_{r4}\ddot{x}_{r4} + c_h(\dot{x}_{r4} - \dot{x}_{r3}) - k_h(x_{r4} - x_{r3}) &= 0 \\
m_{r4}\ddot{y}_{r4} - c_s(\dot{y}_{s2} + \dot{\theta}_{s2}L_s - \dot{y}_{r4}) - k_s(y_{s2} + \theta_{s2}L_s - y_{r4}) &= 0 \\
m_{s1}\ddot{x}_{s1} + c_h(3\dot{x}_{s1} - \dot{x}_{r1} - \dot{x}_{s2} - \dot{x}_v) + k_h(3x_{s1} - x_{r1} - x_{s2} - x_v) &= 0 \\
m_{s1}\ddot{y}_{s1} + c_s(2\dot{y}_{s1} - \dot{y}_{r1} - \dot{y}_{r2}) - c_v(\dot{y}_v - \dot{\theta}_vL_v - \dot{y}_{s1}) + k_s(2y_{s1} - y_{r1} - y_{r2}) &= 0 \\
- k_v(y_v - \theta_vL_v - y_{s1}) &= 0 \\
m_{s2}\ddot{x}_{s2} + c_h(2\dot{x}_{s2} - \dot{x}_{r3} - \dot{x}_{s1}) + k_h(2x_{s2} - x_{r3} - x_{s1}) &= 0 \\
m_{s2}\ddot{y}_{s2} + c_s(2\dot{y}_{s2} - \dot{y}_{r3} - \dot{y}_{r4}) - c_v(\dot{y}_v + \dot{\theta}_vL_v - \dot{y}_{s2}) + k_s(2y_{s2} - y_{r3} - y_{r4}) &= 0 \\
- k_v(y_v + \theta_vL_v - y_{s2}) &= 0 \\
m_v\ddot{x}_v + c_h(\dot{x}_v - \dot{x}_{s1}) + k_h(x_v - x_{s1}) &= 0 \\
m_v\ddot{y}_v + c_v(2\dot{y}_v - \dot{y}_{s1} - \dot{y}_{s2}) + k_v(2y_v - y_{s1} - y_{s2}) &= 0 \\
J_{s1}\ddot{\theta}_{s1} + c_sL_s(2\dot{\theta}_{s1}L_s + \dot{y}_{r1} - \dot{y}_{r2}) + k_sL_s(2\theta_{s1}L_s + y_{r1} - y_{r2}) &= 0 \\
J_{s2}\ddot{\theta}_{s2} + c_sL_s(2\dot{\theta}_{s2}L_s + \dot{y}_{r3} - \dot{y}_{r4}) + k_sL_s(2\theta_{s2}L_s + y_{r3} - y_{r4}) &= 0 \\
J_v\ddot{\theta}_v + c_vL_v(2\dot{\theta}_vL_v + \dot{y}_{s1} - \dot{y}_{s2}) + k_vL_v(2\theta_vL_v + y_{s1} - y_{s2}) &= 0
\end{aligned} \tag{4.26}$$

A partir das equações (4.26) podem ser obtidas as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do modelo SM3, outra forma seria usando o método de superposição partindo das equações (4.20) do modelo SM2, como descrito em Silva (2012) estas matrizes são:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix}
 m_{r1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & m_{r1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & m_{r2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & m_{r2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & m_{r3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{r3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{r4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{r4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{s1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{s1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{s2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{s2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_v & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_v & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{s1} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{s2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_v
 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix}
 2c_h & 0 & -c_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & c_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_s & 0 & 0 & 0 & 0 & c_s L_s & 0 \\
 -c_h & 0 & c_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & c_s & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_s & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_s L_s & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 2c_h & -c_h & 0 & 0 & 0 & -c_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_s & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_s & 0 & 0 & 0 & c_s L_s & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -c_h & 0 & c_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_s & 0 & 0 & -c_s & 0 & 0 & 0 & -c_s L_s & 0 \\
 -c_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3c_h & 0 & -c_h & 0 & -c_h & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -c_s & 0 & -c_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2c_s + c_v & 0 & 0 & 0 & -c_v & 0 & c_v L_v \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -c_h & 0 & 0 & 0 & -c_h & 0 & 2c_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_s & 0 & -c_s & 0 & 0 & 0 & 2c_s + c_v & 0 & -c_v & 0 & -c_v L_v \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_h & 0 & 0 & 0 & c_h & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_v & 0 & -c_v & 0 & 2c_v & 0 & 0 \\
 0 & c_s L_s & 0 & -c_s L_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2c_s L_s^2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_s L_s & 0 & -c_s L_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2c_s L_s^2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_v L_v & 0 & -c_v L_v & 0 & 0 & 0 & 2c_v L_v^2
 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix}
2k_h & 0 & -k_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & k_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_s & 0 & 0 & 0 & 0 & k_s L_s & 0 & 0 \\
-k_h & 0 & k_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & k_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_s & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_s L_s & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2k_h & 0 & -k_h & 0 & 0 & 0 & -k_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_s & 0 & 0 & 0 & k_s L_s & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -k_h & 0 & k_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_s & 0 & 0 & -k_s & 0 & 0 & 0 & -k_s L_s & 0 \\
-k_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3k_h & 0 & -k_h & 0 & -k_h & 0 & 0 & 0 \\
0 & -k_s & 0 & -k_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2k_s + k_v & 0 & 0 & 0 & -k_v & 0 & 0 & k_v L_v \\
0 & 0 & 0 & 0 & -k_h & 0 & 0 & 0 & -k_h & 0 & 2k_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_s & 0 & -k_s & 0 & 0 & 0 & 2k_s + k_v & 0 & -k_v & 0 & 0 & -k_v L_v \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_h & 0 & 0 & 0 & k_h & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_v & 0 & -k_v & 0 & 2k_v & 0 & 0 & 0 \\
0 & k_s L_s & 0 & -k_s L_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2k_s L_s^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_s L_s & 0 & -k_s L_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2k_s L_s^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_v L_v & 0 & -k_v L_v & 0 & 0 & 0 & 0 & 2k_v L_v^2
\end{bmatrix} \quad (4.28)$$

4.2.5 – Equações dinâmicas do veículo

Independente do modelo de interação utilizado, as equações de equilíbrio dos diferentes tipos de modelos de veículos conduzem a seguinte expressão (Correa, 2003):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{vv} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{y}}_v \\ \ddot{\mathbf{y}}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{vv} & \mathbf{C}_{vr} \\ \mathbf{C}_{rv} & \mathbf{C}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_v \\ \dot{\mathbf{y}}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{vv} & \mathbf{K}_{vr} \\ \mathbf{K}_{rv} & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_v \\ \mathbf{y}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Onde o índice v indica o veículo e r a roda, sendo os vetores e as matrizes que compõem o sistema, descritas abaixo:

- $\mathbf{M}_{vv}, \mathbf{M}_{rr}$ Sub matrizes de massas para o veículo e rodas.
- $\mathbf{C}_{vv}, \mathbf{C}_{vr}, \mathbf{C}_{rv}, \mathbf{C}_{rr}$ Sub matrizes de amortecimento para o veículo e rodas.
- $\mathbf{K}_{vv}, \mathbf{K}_{vr}, \mathbf{K}_{rv}, \mathbf{K}_{rr}$ Sub matrizes de rigidez para o veículo e rodas.
- $\mathbf{y}_v, \mathbf{y}_r, \dot{\mathbf{y}}_v, \dot{\mathbf{y}}_r, \ddot{\mathbf{y}}_v, \ddot{\mathbf{y}}_r$ Vetores deslocamentos, velocidades e acelerações do veículo e a roda respectivamente.

5 – MODELAGEM DA PONTE

A ponte é representada por meio de um conjunto de elementos de viga convencional que seguem a teoria de Euler-Bernoulli. Cada elemento de viga possui seis graus de liberdade, sendo dois de deslocamentos verticais, y_2 e y_4 , dois deslocamentos axiais, y_1 e y_3 , e dois de rotação, θ_1 e θ_2 , como mostra a Figura 5.1. A teoria de viga de Euler-Bernoulli pode ser encontrada em Chopra (1995), Paz (1992) e Silva (2012). O vetor dos graus de liberdade correspondente é dado por:

$$\mathbf{y} = (y_1 \quad y_2 \quad \theta_1 \quad y_3 \quad y_4 \quad \theta_2)^T. \quad (5.1)$$

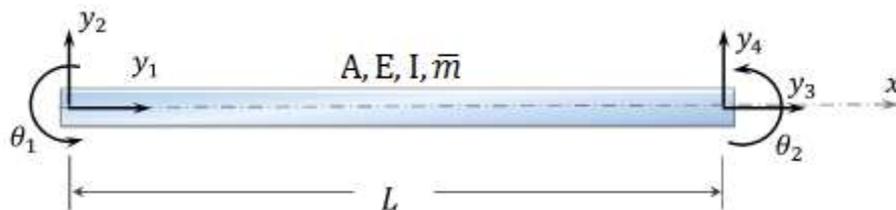


Figura 5.1 – Graus de liberdade para um elemento de viga (Silva, 2012)

Na Figura 5.2 a viga é representada por seu eixo baricêntrico que pode ser discretizado por um elemento finito unidimensional com dois nós, além de mostrar as curvas de deslocamentos correspondentes aos deslocamentos unitários de cada uma das seis coordenadas nodais.

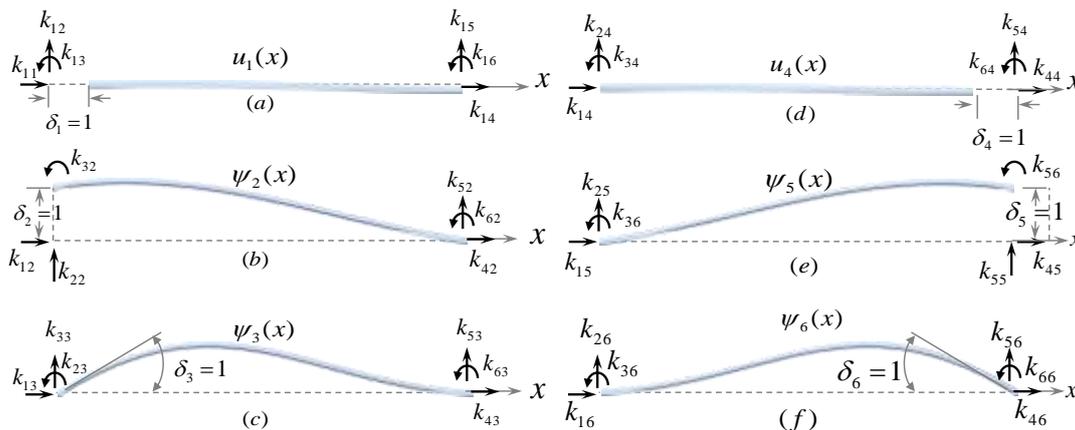


Figura 5.2 – Curvas de deslocamentos devido a um deslocamento unitário em uma das coordenadas nodais (Silva, 2012)

5.1 – MATRIZ DE RIGIDEZ

A partir da Figura 5.2 é possível obter os coeficientes de rigidez k_{ij} , correspondente aos deslocamentos unitários δ_i . Para determinar as expressões do coeficiente de rigidez k_{ij} , são apresentadas abaixo as equações das funções de forma que correlacionam os deslocamentos de qualquer ponto do elemento aos deslocamentos nodais, estas curvas de deslocamento nodais são expressas como:

$$\begin{aligned}u_1(x) &= 1 - \frac{x}{L} \\ \psi_2(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ \psi_3(x) &= x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2\end{aligned}\tag{5.2}$$

As funções de forma equivalentes para os deslocamentos aplicados na extremidade direita do elemento de viga são:

$$\begin{aligned}u_4(x) &= \frac{x}{L} \\ \psi_5(x) &= 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ \psi_6(x) &= \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right)\end{aligned}\tag{5.3}$$

Onde:

$\psi_j(x), u_j(x)$: Funções polinomiais.

De uma maneira geral, qualquer coeficiente de rigidez associado com a flexão de uma viga, pode, portanto, ser expresso como:

$$k_{ij} = \int_0^L EI \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx\tag{5.4}$$

Onde:

E : módulo de elasticidade.

I : momento de inercia.

$i, j = 2, 3, 5, 6$.

E para os coeficientes associados com os esforços axiais de uma viga, com seção transversal de área A , temos:

$$k_{ij} = \int_0^L EAu_i(x)u_j(x)dx \quad (5.5)$$

Onde:

A : área da seção transversal.

$i, j = 1, 4$.

Para um segmento de viga uniforme como o da Figura 5.1, aplicando as equações (5.4) e (5.5) a matriz de rigidez resultante é:

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Onde:

L : comprimento do elemento de viga.

5.2 – MATRIZ DE MASSA

É possível calcular os coeficientes de massa correspondente às coordenadas nodais de um elemento de viga por um procedimento similar ao utilizado na determinação dos coeficientes de rigidez.

Considerando que as mesmas funções de forma, do caso anterior, relacionam agora, as acelerações de um ponto qualquer da barra com as acelerações nodais, os coeficientes de massa consistente, relativos às coordenadas transversais e de rotação resultam em:

$$m_{ij} = \int_0^L \bar{m}(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx \quad (5.7)$$

E para os efeitos axiais:

$$m_{ij} = \int_0^L \bar{m}(x) u_i(x) u_j(x) dx \quad (5.8)$$

Onde:

$\bar{m}(x)$: massa por unidade de comprimento

Para o caso de uma viga com massa uniformemente distribuída as equações (5.7) e (5.8) conduzem à seguinte matriz de massa consistente:

$$\mathbf{M} = \frac{\bar{m}L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

5.3 – MATRIZ DE AMORTECIMENTO

O amortecimento será considerado do tipo viscoso. Assim, para a ponte a matriz de amortecimento será considerada proporcional ou de Rayleigh. Deste modo, a matriz de amortecimento é admitida proporcional à matriz de massa \mathbf{M} e à matriz de rigidez \mathbf{K} , como pode ser visto na equação (5.10):

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (5.10)$$

Uma vez conhecida a razão de amortecimento ξ , os dois coeficientes α e β são obtidos em função das frequências, ω_i e ω_j , correspondentes aos dois primeiros modos de vibração, por intermédio das seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \alpha &= \omega_i \omega_j \beta \\ \beta &= \frac{2\xi}{\omega_i + \omega_j} \end{aligned} \quad (5.11)$$

As frequências naturais de vibração ω_n para vãos simplesmente apoiados podem ser obtidas com base nas expressões descritas em Chopra (1995), através da equação (5.12):

$$\omega_n = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (5.12)$$

Onde:

n : número do modo de vibração desejado.

Na Figura 5.3 é mostrada a variação do amortecimento de Rayleigh com as frequências naturais.

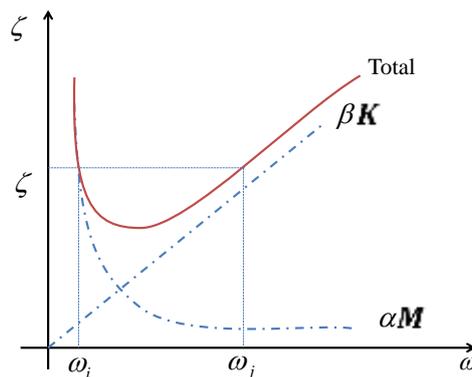


Figura 5.3 – Amortecimento de Rayleigh (Silva, 2012)

5.4 – EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO DINÂMICO DA PONTE

A equação de movimento da ponte pode então ser estabelecida impondo as condições de equilíbrio dinâmico apresentadas por Chopra (1995) ou Clough & Pezien (1975), e expressa em função das matrizes de massa M_p , amortecimento C_p e rigidez K_p , como:

$$M_p \ddot{Y} + C_p \dot{Y} + K_p Y = F(t) \quad (5.13)$$

Onde:

M_p é matriz de massa consistente global da ponte;

C_p é a matriz de amortecimento global da ponte;

K_p é a matriz de rigidez global da ponte;

$F(t)$ é o vetor de forças externas da ponte em função do tempo; e

\ddot{Y} , \dot{Y} e Y são respectivamente, os vetores de aceleração, velocidade e deslocamento das coordenadas nodais do sistema (dependentes do tempo).

6 – MODELAGEM DO SISTEMA VEÍCULO-ESTRUTURA

6.1 – INTERAÇÃO DO SISTEMA VEÍCULO-ESTRUTURA

A modelagem para interação do sistema veículo-estrutura considera o veículo e a estrutura conectados por meio de um elemento de interface que permite a transmissão automática de forças e compatibilizar os deslocamentos nos pontos de contato entre o veículo e a ponte. Este elemento de interface está baseado no elemento proposto por (Durand, 2008) para simular a interação de reforços (barras) dispostos arbitrariamente em malhas de elementos finitos. Os elementos de interface tipo mola foram utilizados para ligar um elemento de barra com um elemento sólido em pontos que não coincidiam com os pontos nodais. Nesses pontos os deslocamentos são compatibilizados. Um elemento de interface semelhante foi também utilizado por Silva (2012) para simular a interação vertical veículo-estrutura com resultados bastante satisfatórios.

De forma semelhante a Durand (2008) e Silva (2012) o elemento de interface formulado neste trabalho está composto por molas e amortecedores dispostos tanto na direção horizontal quanto na vertical, com a finalidade de que o deslocamento seja estudado em duas direções. As molas horizontais simulam a transmissão de forças de aderência dinâmica no processo de frenagem, integrando este fenômeno à análise do sistema. As molas verticais simulam o contato entre as rodas dos veículos e a ponte, além de transmitir forças verticais.

A Figura 6.1 mostra esquematicamente uma roda pertencente a um veículo conectada a uma ponte constituída de três elementos tipo viga por meio do elemento de interface. Neste caso, o elemento de interface possui cinco nós. Pode-se observar que, embora representado por vários pontos, o nó cinco é único e constitui o ponto de ligação entre a roda do veículo e o elemento de interface.

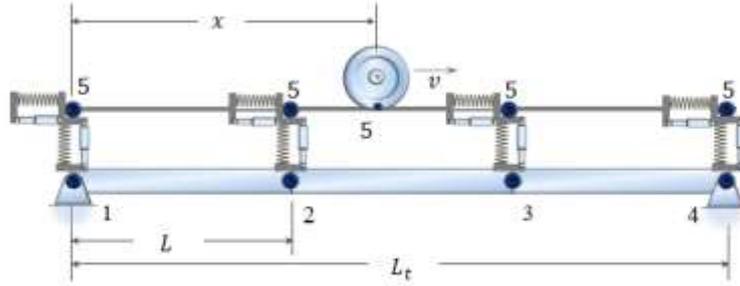


Figura 6.1 – Elemento de interface conectando uma roda à ponte

A Figura 6.2 apresenta o elemento de interface isolado, o qual é constituído por quatro elementos de mola e quatro elementos de amortecedor para cada direção, dispostos sobre os nós da ponte.

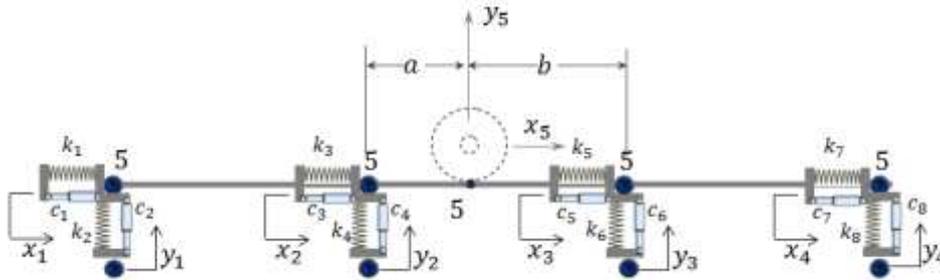


Figura 6.2 – Elemento de interfase isolado

De acordo com a Figura 6.2, k_1, k_3, k_5 e k_7 são as rigidezes das molas horizontais, k_2, k_4, k_6 e k_8 são as rigidezes das molas verticais, c_1, c_3, c_5 e c_7 são os coeficientes de amortecimento dos amortecedores horizontais, c_2, c_4, c_6 e c_8 são os coeficientes de amortecimento dos amortecedores verticais. Também existem 10 graus de liberdade de deslocamento nodal, representados na equação (6.1).

$$\mathbf{y} = (x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad x_3 \quad y_3 \quad x_4 \quad y_4 \quad x_5 \quad y_5)^T \quad (6.1)$$

A matriz de rigidez é dada pela equação (6.2):

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_2 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_5 & 0 & 0 & 0 & -k_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_6 & 0 & 0 & 0 & -k_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_7 & 0 & -k_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_8 & 0 & -k_8 \\ -k_1 & 0 & -k_3 & 0 & -k_5 & 0 & -k_7 & 0 & k_1 + k_3 + k_5 + k_7 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & -k_4 & 0 & -k_6 & 0 & -k_8 & 0 & k_2 + k_4 + k_6 + k_8 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Os valores que correspondem a cada elemento da matriz de rigidez, obtidos por equilíbrio estático em cada nó de acordo à correspondente posição da roda e grau de liberdade, representados na equação (6.2), constituem parte importante na obtenção das respostas do sistema, em termos de deslocamentos, velocidades e acelerações. A seguir, explica-se como o programa adota os valores para cada elemento da matriz de rigidez.

6.1.1 – Molas horizontais

Para o elemento de interface, ilustrado na Figura 6.2, as rigidez das molas horizontais são: k_1, k_3, k_5 e k_7 .

De acordo com a Figura 6.2, a transmissão da força de frenagem da roda para ponte é realizada apenas por meio das molas horizontais centrais (k_3 e k_5), correspondentes aos dois nós próximos à posição da roda. As rigidezes k_1 e k_7 são igualadas a zero, pois não participam da transmissão da força de frenagem nesse instante de tempo.

Na seção (3.6) tratou-se de duas abordagens para o modelo do sistema de freio. Cada abordagem apresenta um enfoque distinto. A primeira baseada em princípios cinemáticos e a segunda em princípios dinâmicos. Estas abordagens são utilizadas na obtenção dos valores das rigidezes horizontais da interface correspondentes aos dois nós próximos à posição da roda, de acordo com a Figura 6.2 são k_3 e k_5 , detalhados a seguir.

6.1.1.1 – Primeira abordagem

Esta abordagem considera a existência de uma força de frenagem constante (F_{fre}) que age nas rodas durante o processo de frenagem, como se ilustra na Figura 6.3.

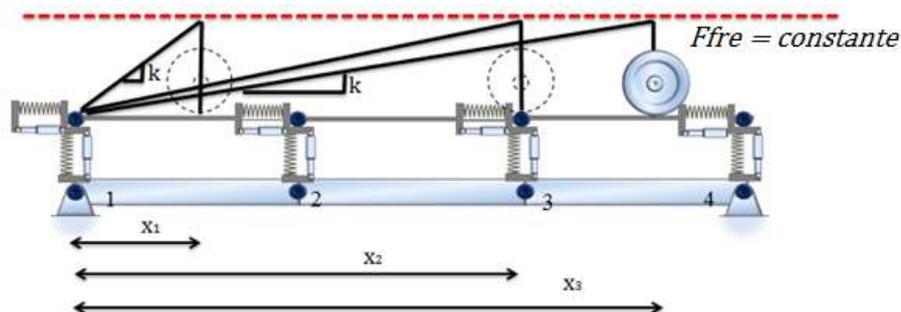


Figura 6.3 – Força de frenagem constante no tempo

De acordo com a Figura 6.3 x_1 , x_2 e x_3 são respectivamente as posições da roda em diferentes instantes de tempo.

Forças equivalentes são aplicadas também na ponte nos nós mais próximos ao ponto de contato. Como visto na Figura 6.4 estas forças são aplicadas diretamente, portanto não é necessário que o elemento de interface apresente rigidez nas molas horizontais, assim as rigidezes das molas horizontais k_3 e k_5 correspondentes aos dois nós próximos à posição da roda, dada pela Figura 6.2, são nulas.

As respostas horizontais do sistema (deslocamentos, velocidades, etc.) estão em função da força de frenagem definida.

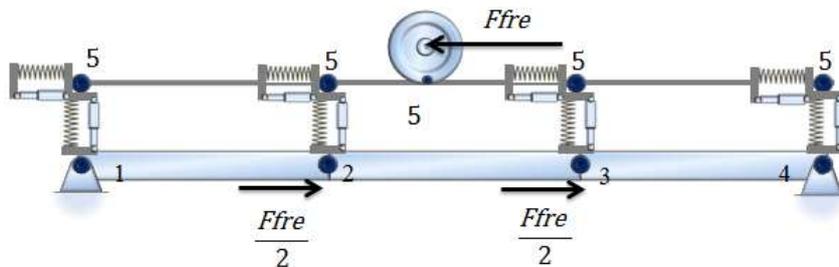


Figura 6.4 – Transmissão da força de frenagem com a interação veículo – estrutura

A força da frenagem ($Ffre$) e suas transmissões ($Ffre/2$) são colocadas no sistema quando o maquinista aplica os freios e retiradas quando os freios são liberados. Portanto a matriz de forças exteriores do sistema, da Figura 6.4, varia ao longo do tempo. A quantidade de elementos que apresenta a matriz de força externa é a mesma que o número de graus de liberdade total do sistema.

A seguir, mostra-se um pequeno exemplo de como o programa preenche a matriz de forças externas para um caso determinado.

A ponte, dividida em três segmentos de viga, apresenta 14 graus de liberdade, como se ilustra na Figura 6.5. A ponte esta sujeita á passagem de uma carga $P = 10 N$. Considerar $Ffre = 4 N$. Pede-se obter o vetor de força externa do sistema.

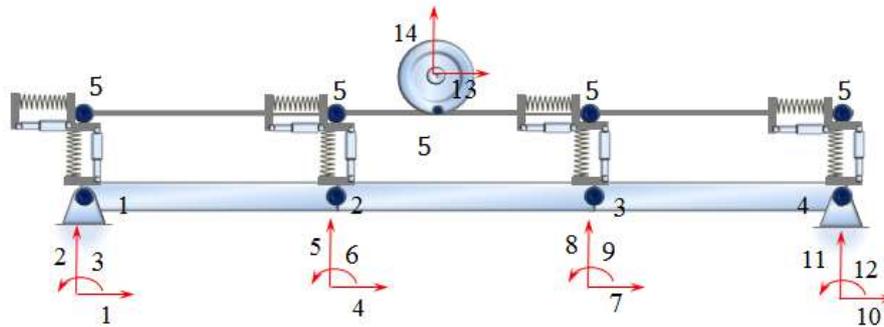


Figura 6.5 – Graus de liberdade do sistema

Na Figura 6.6, se ilustra as forças externas atuantes sobre o sistema nesse instante de tempo.

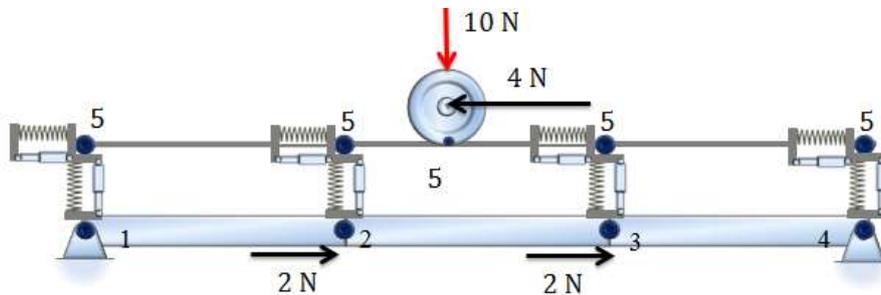


Figura 6.6 – Forças externas sobre sistema

A sequência que o programa computacional utiliza para preencher a matriz de forças externas do sistema, nesse instante de tempo, pode ser representada através das seguintes etapas:

- Definição dos graus de liberdade total do sistema, neste caso 14.
- O vetor inicial de forças externas é criado com n elementos nulos, neste caso 14.
- O valor da força de frenagem (F_{fre}) é preenchido no correspondente grau de liberdade horizontal que pertence ao nó da roda, neste caso o grau de liberdade 13.
- Os valores das transmissões da força de frenagem ($F_{fre}/2$) são preenchidos nos graus de liberdade horizontais pertencentes aos dois nós próximos à roda, neste caso os graus de liberdade 4 e 7.

- O valor da carga sobre a ponte (P) é preenchido no correspondente grau de liberdade vertical que pertence ao nó da roda, neste caso o grau de liberdade 14.
- Para os demais graus de liberdade que não têm participação nesse instante de tempo o programa adota o valor nulo.

A matriz de força nesse instante de tempo é representada na equação (6.3). Cabe destacar que as forças podem adotar valores positivos se estão na mesma direção do grau de liberdade ou negativos se estão em direção contrária.

$$\mathbf{F} = (0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -4 \ -10)^T \quad (6.3)$$

6.1.1.2 – Segunda abordagem

Esta abordagem esta baseada em princípios dinâmicos, portanto considera a força de frenagem variando com o tempo de acordo à curva representativa de pressão no cilindro do freio, como se ilustra na Figura 6.7.

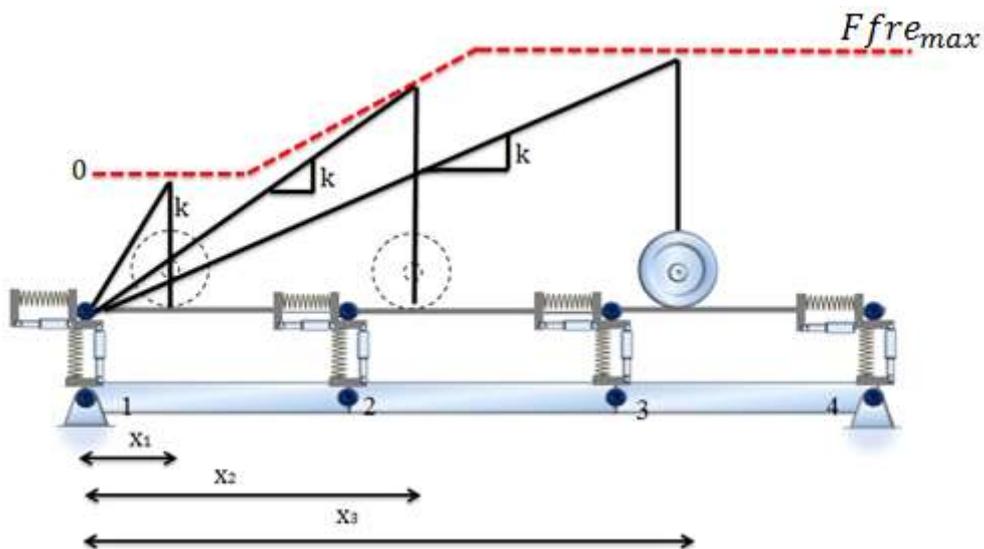


Figura 6.7 – Força de frenagem variando no tempo

De acordo com a Figura 6.7 x_1 , x_2 e x_3 são respectivamente as posições da roda em diferentes instantes de tempo. As linhas pretas indicam os valores da rigidez horizontal, que variam de

acordo com a posição da roda, de modo a provocar uma força de frenagem que acompanhe sempre à linha tracejada.

A força de frenagem máxima no sistema é calculada em função do coeficiente de aderência (roda - trilho) e do peso equivalente sobre a roda, de acordo com.

$$Ffre_{max} = Pv \cdot \mu \quad (6.4)$$

Onde:

$Ffre_{max}$: força de frenagem máxima no sistema.

Pv : peso sobre a roda.

μ : coeficiente de aderência entre roda e trilho.

As respostas horizontais do sistema (deslocamentos, velocidades, etc.) estão em função do coeficiente de aderência definido entre a roda e o trilho definido.

A Figura 6.8 apresenta uma curva simplificada da força frenagem variando com o tempo, que visa se aproximar do comportamento real do funcionamento do sistema de freios de um veículo. Esta figura apresenta quatro trechos (I, II, III e IV) com intervalos de tempo definidos de maneira semelhante ao comportamento do cilindro do freio.

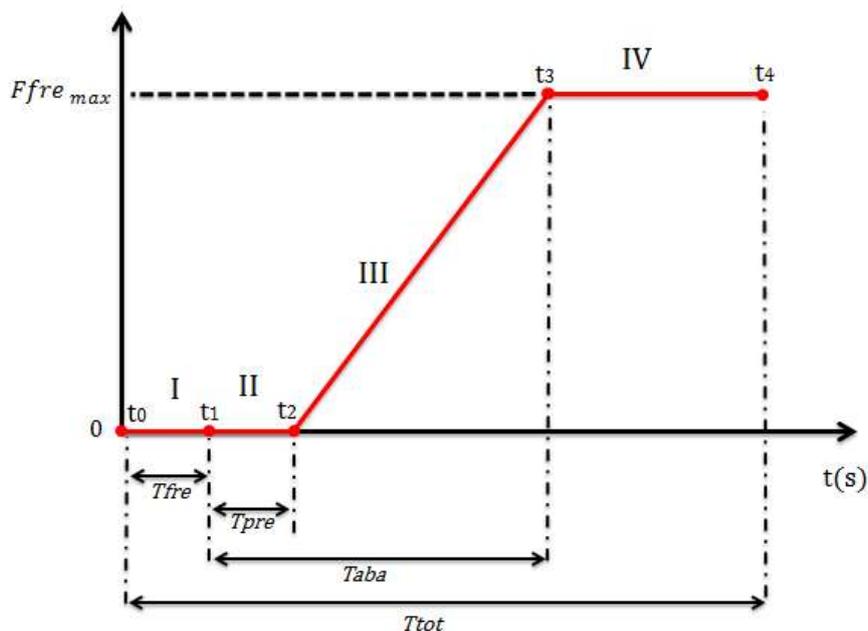


Figura 6.8 – Tempos necessários para o modelo do sistema de freio

De acordo a Figura 6.8, os intervalos de tempo são descritos a seguir:

- T_{fre} é o intervalo de tempo que o maquinista demora para aplicar os freios depois de iniciado o movimento do veículo.
- T_{pre} é o intervalo de tempo que o veículo demora para estabilizar sua pressão no cilindro do freio. Segundo Martins (1999), este tempo é equivalente a 3 s.
- T_{aba} é o intervalo de tempo que a força de frenagem demora para atingir à força de frenagem máxima do sistema. Segundo Martins (1999), este tempo é obtido usando o ábaco da Figura 3.9 sendo o valor mínimo de 10 s.
- T_{tot} é o tempo total de análise.

Os tempos (t_0, t_1, t_2, t_3 e t_4) são representados mediante as equações (6.5), (6.6), (6.7), (6.8) e (6.9). Os mesmos que são obtidos em função dos intervalos de tempo descritos anteriormente.

$$t_0 = 0 \quad (6.5)$$

$$t_1 = T_{fre} \quad (6.6)$$

$$t_2 = T_{fre} + T_{pre} \quad (6.7)$$

$$t_3 = T_{fre} + T_{aba} \quad (6.8)$$

$$t_4 = T_{tot} \quad (6.9)$$

Nesta abordagem os valores das rigidezes das molas horizontais variam com o tempo.

A seguir são descritos os valores que podem ser adotados para as rigidezes horizontais de acordo com os trechos I, II, III e IV, ilustrados na Figura 6.8.

Para os trechos I e II a força de frenagem é nula. Por intermédio da equação (6.10) são representados os valores das rigidezes horizontais correspondentes aos dois nós próximos à posição da roda, de acordo com a Figura 6.2 são k_3 e k_5 .

$$k_3 = 0 \quad k_5 = 0 \quad (6.10)$$

O trecho III apresenta uma força de frenagem que varia com o tempo t , como se ilustra na Figura 6.9. Esta força de frenagem adota valores desde zero até a força de frenagem máxima do sistema ($Ffre_{max}$), de acordo com a equação (6.4). A força de frenagem ($Ffre$), para qualquer ponto do segmento de reta III, é obtida da equação de uma reta, conforme pode ser observada na equação (6.11).

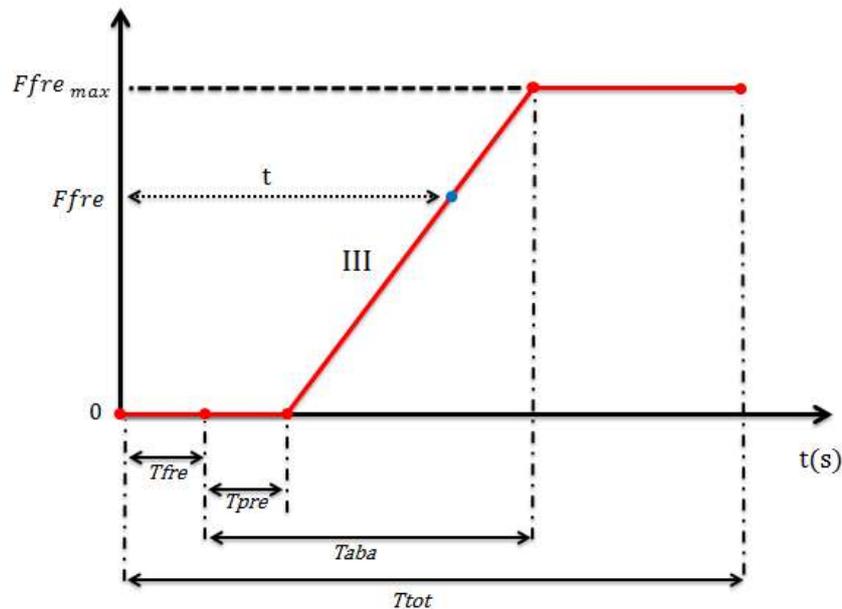


Figura 6.9 – Rigidez para um ponto do segmento de reta III

$$Ffre = \frac{Ffre_{max} \cdot (t - (Tfre + Tpre))}{(Taba - Tpre)} \quad (6.11)$$

Utiliza-se a relação força-deslocamento para obter o valor da rigidez horizontal que gera a força de frenagem obtida pela equação (6.11). O valor desta rigidez horizontal é representado na equação (6.12).

$$K = \frac{Ffre}{\delta} \quad (6.12)$$

Onde:

$Ffre$: força de frenagem obtida por intermédio da equação (6.11).

δ : posição da roda no instante de tempo t , considerada desde o início do movimento, como se ilustra na Figura 6.7.

Substituindo a equação (6.11) em (6.12) obtém-se a equação da rigidez a utilizar-se no programa, de acordo com:

$$K = \frac{Ffre_{max} \cdot (t - (Tfre + Tpre))}{(Taba - Tpre) \cdot \delta} \quad (6.13)$$

Por último a rigidez da equação (6.13) é distribuída proporcionalmente às rigidezes das molas horizontais. Por intermédio da equação (6.14) são representados os valores das rigidezes horizontais correspondentes aos dois nós próximos à posição da roda, de acordo com a Figura 6.2 são k_3 e k_5 .

$$k_3 = 0,5 \cdot K \quad k_5 = 0,5 \cdot K \quad (6.14)$$

O trecho IV apresenta a força de frenagem máxima do sistema. Por intermédio da equação (6.15) são representados os valores das rigidezes horizontais correspondentes aos dois nós próximos à posição da roda, de acordo com a Figura 6.2 são k_3 e k_5 .

$$k_3 = 0,5 \cdot K_{max} \quad k_5 = 0,5 \cdot K_{max} \quad (6.15)$$

Onde:

K_{max} : rigidez máxima no sistema, representada na equação (6.16).

$$K_{max} = \frac{Ffre_{max}}{\delta} \quad (6.16)$$

6.1.2 – Molas verticais

Para as molas verticais são atribuídos os mesmos parâmetros utilizados por Silva (2012), que já foram validados e com boa concordância nos resultados numéricos obtidos para as respostas verticais. Esses parâmetros são aplicados para as molas verticais nas duas abordagens utilizadas neste trabalho.

Para o elemento de interface, ilustrado na Figura 6.2, as rigidezes das molas verticais são: k_2, k_4, k_6 e k_8 .

De acordo com a Figura 6.2, a transmissão da força de contato da roda para ponte é realizada apenas por meio das molas verticais centrais (k_4 e k_6), correspondentes aos dois nós próximos à posição da roda. As rigidezes k_2 e k_8 são igualladas a zero, pois não participam da transmissão da força de contato nesse instante de tempo.

Para as rigidezes verticais k_4 e k_6 , são adotados valores altos com a finalidade de que o sistema apresente deslocamentos relativos desprezíveis. Além disso, os valores de k_4 e k_6 devem ser proporcionais às distâncias a e b (ver Figura 6.2), de forma a transmitir duas forças verticais de contato nos nós participantes equivalentes às forças de reação geradas em uma viga isostática com carga pontual de acordo com:

$$k_4 = \frac{b}{L} \cdot k_0 \quad k_6 = \frac{a}{L} \cdot k_0 \quad (6.17)$$

Onde k_0 é um valor suficientemente grande e pode ser relacionado com as propriedades da ponte por meio de um escalar λ , que relaciona uma porcentagem admissível para a discrepância entre o deslocamento da interface e da ponte, de acordo com:

$$k_0 = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{48EI}{L^3} \quad (6.18)$$

A matriz de amortecimento é assumida proporcional à matriz de rigidez de acordo com:

$$\mathbf{C} = \frac{\eta}{\omega_0} \cdot \mathbf{K} \quad (6.19)$$

Onde η é um escalar de proporcionalidade e ω_0 é a frequência do primeiro modo de vibração da ponte, usado como parâmetro de normalização. Por sua vez, a matriz de massa é composta apenas por zeros. Cabe destacar que neste trabalho são usados os valores de 0.021 e 0.028 para λ e η respectivamente. Os valores anteriores foram escolhidos por apresentar excelente precisão nos resultados numéricos das respostas verticais no trabalho desenvolvido por Silva (2012).

6.2 – INTEGRAÇÃO DIRETA PELO MÉTODO DE NEWMARK

O método mais genérico para a resolução de um problema dinâmico é o método no qual a análise é feita passo a passo através de um incremento de tempo Δt . Neste método, o carregamento e a resposta da estrutura são divididos numa sequência de pequenos intervalos de tempo chamados “passo”. A análise parte das condições iniciais no início de cada intervalo incluindo depois a história do carregamento durante esse intervalo. Existem variados métodos para este tipo de resolução, mas no geral todos têm por base a resolução do conjunto completo das equações de equilíbrio em cada ponto do sistema no final de cada passo $\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t$, etc.

Estes métodos têm a vantagem de permitirem facilmente a introdução de não linearidades bastando apenas refazer a matriz rigidez para cada passo. A grande desvantagem está no consumo de tempo devido ao grande esforço computacional e de cálculo requerido para resolver todo o sistema em todos os passos. Neste campo, o método da superposição modal mostra-se mais vantajoso, pois obtém a resposta da estrutura a partir da contribuição de cada modo de vibração para o resultado final, mas apenas pode ser aplicado a sistemas com comportamento linear (Barbero, 2001),

Um dos métodos de integração passo a passo mais geral foi proposto por Newmark (1959), que partindo da série numérica de Taylor desenvolveu um método implícito expresso nas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \dot{y}_{n+1} &= \dot{y}_n + (1 - \gamma)h\ddot{y}_n + \gamma h\ddot{y}_{n+1} \\ y_{n+1} &= y_n + h\dot{y}_n + \left(\frac{1}{2} - \xi\right)h^2\ddot{y}_n + h^2\xi\ddot{y}_{n+1} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Onde:

$y_{n+1}, \dot{y}_{n+1}, \ddot{y}_{n+1}$: deslocamento, velocidade e aceleração no passo $n+1$,

$y_n, \dot{y}_n, \ddot{y}_n$: deslocamento, velocidade e aceleração no passo de tempo n ,

ξ, γ : constantes de integração,

h : passo de tempo.

Na aplicação do método de Nemark o processo se inicia selecionando um valor numérico para os parâmetros ξ e γ . A prática, entretanto, tem mostrado que para valores de γ diferentes de $1/2$, o método introduz amortecimento artificial nas respostas do sistema. Por esta razão este parâmetro se fixa geralmente em $\gamma = 1/2$. Para a escolha de ξ , Newmark sugeriu que seja no intervalo de $1/2 \leq \xi \leq 1/6$. Para $\xi = 1/4$ o método equivale a dizer que a velocidade varia linearmente durante o incremento de tempo, o que requer que a aceleração se mantenha constante em cada incremento de tempo. Neste caso o método de Nemark é incondicionalmente estável e em geral apresenta resultados satisfatórios. Neste trabalho será adotado $\xi = 1/4$ e $\gamma = 1/2$, que admite a aceleração constante em um intervalo de tempo.

Considerando o esquema de integração proposto na equação (6.20) e resolvendo o sistema chegamos a seguinte equação matricial:

$$\left[M^{n+1} + \frac{h}{2} C^{n+1} + \frac{h^2}{4} K^{n+1} \right] \ddot{y}_{n+1} = F^{n+1} - C^{n+1} \left[\dot{y}_n + \frac{h}{2} \ddot{y}_n \right] - K^{n+1} \left[y_n + h \dot{y}_n + \frac{h^2}{4} \ddot{y}_n \right] \quad (6.21)$$

Adotada as condições iniciais do sistema, para velocidade \dot{y}_{n+1} e deslocamento y_{n+1} , pode ser obtido o valor da aceleração \ddot{y}_{n+1} dividindo a equação (6.21) pela massa associada.

$$\ddot{y}_{n+1} = \frac{F^{n+1} - C^{n+1} \left[\dot{y}_n + \frac{h}{2} \ddot{y}_n \right] - K^{n+1} \left[y_n + h \dot{y}_n + \frac{h^2}{4} \ddot{y}_n \right]}{\left[M^{n+1} + \frac{h}{2} C^{n+1} + \frac{h^2}{4} K^{n+1} \right]} \quad (6.22)$$

Rescrevendo a equação (6.22) de maneira compacta temos:

$$\ddot{y}_{n+1} = \frac{RHS}{G} \quad (6.23)$$

Onde G é a massa associada à aceleração do sistema. RHS está relacionado com os termos do lado direito da equação (6.21), no sistema apresentado na equação (6.24) correlacionam os graus de liberdade conhecidos e desconhecidos.

Para o problema de acoplamento do sistema veículo-estrutura temos:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{Y}_{1_{n+1}} \\ \ddot{Y}_{2_{n+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RHS_1 \\ RHS_2 \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

Para esse sistema o valor da aceleração \ddot{y}_{n+1} pode ser obtido da mesma maneira que na equação (6.23), resultando:

$$\ddot{Y}_{1_{n+1}} = \frac{RHS_1 - G_{12}\ddot{Y}_{2_{n+1}}}{G_{11}} \quad (6.25)$$

E para o valor da aceleração $\ddot{Y}_{2_{n+1}}$, temos

$$\ddot{Y}_{2_{n+1}} = \frac{RHS_2 - G_{21}\ddot{Y}_{1_{n+1}}}{G_{22}} \quad (6.26)$$

7 – IMPLEMENTAÇÃO DO PROGRAMA COMPUTACIONAL

O programa computacional chamado PyDyn que utiliza a linguagem Python 2.7, desenvolvido por Silva (2012), Durand *et al.* (2012), foi modificado com a finalidade de contemplar as abordagens descritas na seção 6.1. As modificações utilizam linguagem de *scripting*. O termo script geralmente se refere a programas em linguagens interpretadas que automatizam algumas tarefas. Para cada abordagem usa-se uma biblioteca diferente, sendo *dynamics1* e *dynamics2*, para a primeira e segunda abordagem respectivamente. A implementação continua mantendo a mesma estrutura básica do programa de Silva (2012). As similaridades e diferenças podem ser encontradas nos itens que são descritos a seguir.

7.1 – PROGRAMA PYDYN MODIFICADO

O programa PyDyn modificado permite realizar análises dinâmicas da interação veículo-estrutura em pontes ferroviárias submetidas a carregamentos móveis considerando o efeito da frenagem. As bibliotecas *dynamics1* e *dynamics2*, correspondentes a cada abordagem apresentadas nos itens anteriores, utilizam definições de classes que representam o domínio de análise, elementos básicos e compostos (roda, veículos com 2 ou 4 eixos, etc.) e graus de liberdade horizontais e verticais. A numeração dos nós correspondentes para os modelos de veículos, ponte e interface são obtidas de forma automática. Adicionalmente as bibliotecas *dynamics1* e *dynamics2*, contêm funções internas necessárias para a montagem de um dado problema para finalmente proceder a integração da equação do movimento por meio do método de Newmark detalhado na seção 6.

Nas bibliotecas, são consideradas algumas hipóteses para a análise:

- As molas de suspensão do veículo e a viga se comportam linearmente;
- Todos os componentes do veículo movem-se com velocidade variável, e;
- Não ocorre descontinuidade entre a roda e a ponte, ou seja, a roda não se separa do elemento da estrutura sobre o qual ela se movimenta.

O uso de simuladores que permitam uma melhor execução das diferentes classes do programa, sobretudo na hora de ser modificado o algoritmo original, é permitido. Neste trabalho com a finalidade de contar com uma interface utilizada pela linguagem Matlab, se decidiu adaptar o programa Python modificado usando um simulador chamado Eclipse.

Eclipse é um IDE (Ambiente de desenvolvimento integrado) desenvolvidos em Java e Python, seguindo o modelo *open source* (código aberto) de desenvolvimento de software. Possui como características marcantes o uso de bibliotecas de rotinas, podendo desenvolver plug-ins de outros programas, desta forma atende-se as diferentes necessidades dos programadores em distintas linguagens de programação.

A sequência da análise do programa PyDyn pode ser representado através das etapas descritas a seguir.

7.1.1 – Entrada de dados iniciais

O programa PyDyn depende dos dados iniciais para a criação do domínio, definição das conectividades e das condições de contorno.

O usuário deve definir as condições iniciais para as seis seções constantes da entrada de dados iniciais: dados de viga, dados da interface, dados do veículo, dados do tempo, dados da frenagem e dados para plotar respostas.

A Figura 7.1 apresenta, a título de exemplo, a seção onde se descreve os dados iniciais, cada um com seu respectivo comentário, por exemplo, de acordo ao comentário para a variável veículo, se coloca 1 se o elemento é roda, 2 se o elemento é SM1, 3 se o elemento é SM2 e 7 se o elemento é SM3.

```

Dados de entrada:

# Dados da viga
E = 8.E6      #Modulo de elasticidade
I = 1         #Inercia
L = 80.       #Comprimento
A = 1         #Area
dens = 2.3    #Densidade
xi = 0.01     #Amortecimento
g = 9.81      #gravidade
n = 40        #Numero de elementos da viga
dist = 10     #Distancia ao inicio da viga

#Dados da interface
vel = 20      #velocidade
lam = 0.021   #coeficiente lam
eta = 0.028   #coeficiente eta

#Dados do veiculo
veiculo = 3   #1=roda,2=SM1,3=SM2,7=SM3
quantidade = 1 #Quantidade de veiculos
F = -400      #Forca sobre as rodas ou sobre o veiculo
dist_rodas = [0, 6] #Distancia do inicio a cada roda
ms = 2.8      #Massa suspensa
kh = 90       #Rigidez horizontal
ks = 90       #Rigidez vertical
ch = 10       #Amortecimento horizontal
cs = 10       #Amortecimento vertical
Ls = 3        #Distancia do centro do veiculo ate a roda

#Dados do tempo
h = 0.01      #Passo de tempo
tmax = 40     #Maximo tempo

#Dados da frenagem
t_aplica_frenagem = 2.0 #A partir de qual segundo aplicara os freios
Ffre = -32     #Forca de frenagem

#Para grafico
id_elemento = [1] #Numero do elemento
elementos_graficar = [1,2,3] #Poe numero do subelemento ex. primeira,segunda,etc (em numeros)
Graficar_no_central = 1 #0=Nao e 1=sim

```

Figura 7.1 – Dados de entrada para a biblioteca dynamics 1

7.1.2 – Criação do domínio de análise

Nesta etapa é criada uma variável computacional para representar o domínio de análise. A esta variável deve ser atribuída um objeto da classe Domínio que contem algumas propriedades e métodos.

Para o programa PyDyn foi necessário a criação de três novas funções dentro da classe Domínio. A primeira trabalha com as propriedades da frenagem. A segunda facilita os gráficos das respostas do sistema em termos de deslocamentos, velocidades e acelerações. A terceira cria as condições necessárias para processar as abordagens da seção 6.1.

7.1.3 – Criação dos elementos que conformam domínio de análise

A classe Domínio precisa de informações inerentes às propriedades da viga, veículo e interface. A vantagem é que foram inseridas como dados de entrada inicial. O programa PyDyn após a criação de cada elemento, internamente reconhece e configura os graus de liberdade para os nós.

7.1.4 – Definição das conectividades

Nesta etapa é introduzida a relação de conexões entre os nós dos elementos baseando-se na numeração global. O programa PyDyn internamente reconhece e configura as conectividades dos nós em função aos dados iniciais definidos.

7.1.5 – Definição das condições de contorno

Nesta etapa são definidas as condições de contorno nodais. As condições de contorno essenciais são dadas por deslocamentos e rotações nodais. Por sua vez, as condições naturais são dadas por forças e momentos nodais os quais podem ser função do tempo. O programa PyDyn internamente reconhece e configura as condições de contorno em função aos dados iniciais definidos.

7.1.6 – Solução

Nesta etapa, inicialmente são definidos os dados necessários para a solução do problema e posteriormente é realizada a integração da equação do movimento. Entre os dados necessários se encontram o tempo de análise e o passo de tempo. Quando a solução é iniciada, internamente e para cada passo de tempo é realizada a montagem das matrizes globais de massa, amortecimento e rigidez correspondentes à equação de movimento do sistema. Posteriormente, o algoritmo de Newmark é aplicado para determinar os deslocamentos no próximo passo de tempo.

7.1.7 – Saída de resultados

Nesta etapa o histórico do nó definido para análise é salvo, para ser posteriormente impressa as características dinâmicas do grau de liberdade do elemento a ser analisado. Os resultados apresentados graficamente por meio do programa PyDyn são os deslocamentos, velocidades e acelerações do sistema podendo ser tanto na direção horizontal como na direção vertical.

8 – VALIDAÇÃO E EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Neste tópico serão apresentados os testes para validação da programação comparando alguns resultados obtidos analiticamente com os numéricos, usando exemplos apresentados na literatura e desenvolvidos pelo autor.

Nesta seção presta-se maior atenção na validação e comportamento das molas horizontais. As mesmas que influenciam na resposta dinâmica veículo-estrutura, devido ao efeito da frenagem.

8.1 – TESTE PARA UMA CARGA EM MOVIMENTO

Para verificação das molas horizontais são utilizadas as equações da cinemática, de acordo com:

$$a = \frac{Ffre}{m} \quad (8.1)$$

$$d = \frac{Vo^2}{2 \cdot a} \quad (8.2)$$

$$t = \frac{2 \cdot d}{Vo} \quad (8.3)$$

Onde:

Ffre: força de frenagem.

m: massa equivalente aplicada à roda.

a: desaceleração.

d: distância de parada.

Vo: velocidade inicial.

t: tempo de parada.

As equações (8.1), (8.2) e (8.3) são aplicadas apenas para a validação da primeira abordagem.

Para a verificação do comportamento do sistema na direção vertical são utilizadas as equações analíticas propostas por Chopra (1995) que representam a resposta no meio do vão de uma viga em função do tempo t devido a uma carga móvel que se desloca com velocidade v . A seguir, a equação (8.4) é utilizada para representar o deslocamento no meio do vão enquanto a carga se encontra sobre a ponte; a equação (8.5) é utilizada para representar o deslocamento após a carga deixar a ponte.

$$y(t) = \frac{y_s}{1-r^2} [\text{sen}(r\omega_0 t) - r \exp(-\xi\omega_0 t) \text{sen}(\omega_0 t)] \quad (8.4)$$

$$y(t) = \frac{y_s r}{1-r^2} [\text{sen}(\omega_0 t) \exp(-\xi\omega_0 t) + \text{sen}(\omega_0(t-t_1)) \exp(-\xi\omega_0(t-t_1))] \quad (8.5)$$

Nas equações (8.4) e (8.5), t é o tempo decorrido, para a carga que se desloca sobre a ponte, contado a partir do início da mesma, t_1 é o tempo necessário para a carga percorrer a ponte completamente, ω_0 é frequência natural do primeiro modo de vibração da ponte e ξ a sua razão de amortecimento, $y_s = PoL^3/48EI$ é a flecha estática e r é dado pela relação:

$$r = \frac{\pi v}{\omega_0 L} \quad (8.6)$$

As equações (8.4) e (8.5) são aplicadas para uma velocidade constante. Neste trabalho a velocidade é variável por efeito da frenagem. Portanto a comparação numérica com a analítica não deveria coincidir, mas o comportamento vertical numérico considerando a frenagem na ponte deve ser muito parecido ao obtido pelas equações (8.4) e (8.5).

A seguir são apresentados quatro exemplos de aplicação sendo que o primeiro e segundo foram usados para a validação do programa computacional, o terceiro foi usado para uma análise de convergência, com a finalidade de diminuir o consumo de tempo no cálculo computacional e o quarto foi usado para comprovar que existe uma melhor precisão dos resultados para o deslocamento vertical no centro da ponte, quando a força de frenagem aplicada é muito pequena.

8.1.1 – Exemplo 1

Neste teste é utilizada uma viga bi-apoiada com as seguintes propriedades: comprimento $L = 30\text{ m}$, módulo de elasticidade $E = 8,3 \times 10^6\text{ kN/m}^2$, momento de inércia $I = 1,0\text{ m}^4$, área $A = 1,0\text{ m}^2$, massa por unidade de comprimento $\bar{m} = 2.300\text{ kg/m}$, velocidade de deslocamento $v = 25\text{ m/s}$, razão de amortecimento $\xi = 0,01$. A viga foi discretizada em 40 elementos. Para o elemento de interface, os valores dos coeficientes, λ e η adotados pelo programa são: $\lambda = 0,021$ e $\eta = 0,028$.

A viga está sujeita à passagem de uma carga $P_0 = 100\text{ kN}$, como se ilustra na Figura 8.1. A distância da roda ao início da ponte $dist = 0\text{ m}$. Os freios serão aplicados desde o início do movimento $T_{fre} = 0\text{ s}$. A força de frenagem $F_{fre} = 30\text{ kN}$. O coeficiente de aderência $\mu = 0,3$. A análise foi executada utilizando um tempo total de 15,0 segundos com um passo de tempo de 0,01 s.

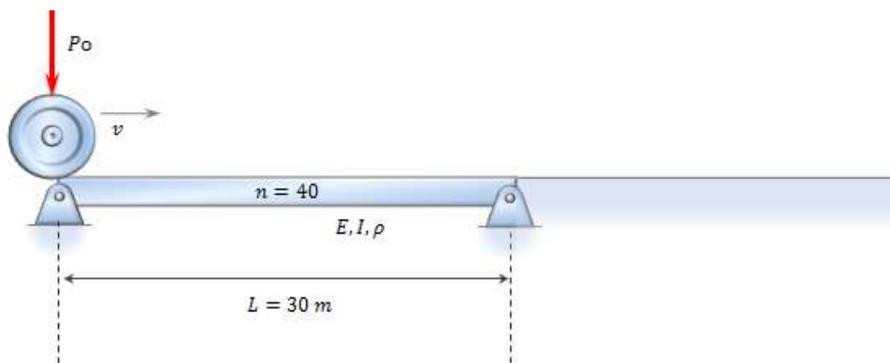


Figura 8.1 – Configuração para análise de uma carga pontal que percorre sobre uma ponte

8.1.1.1 – Primeira abordagem

Têm-se as seguintes respostas horizontais para a carga móvel, apresentadas na Figura 8.2.

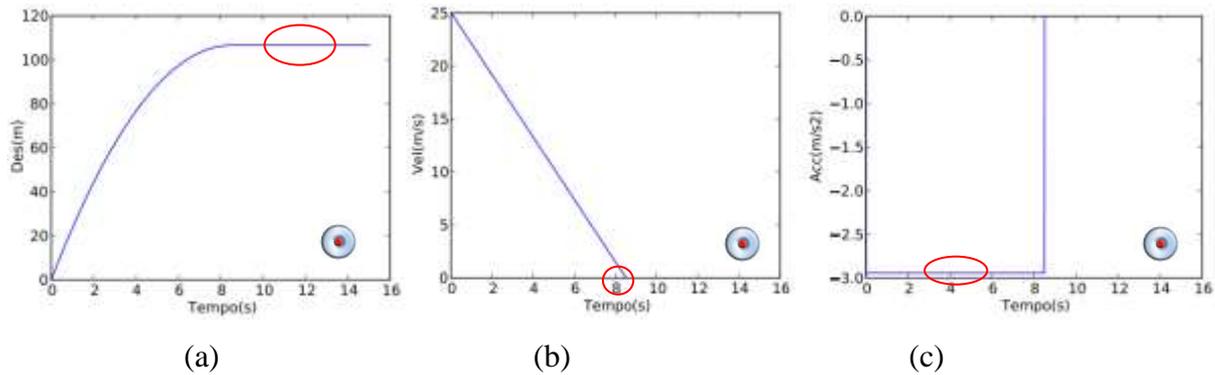


Figura 8.2 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade e (c) aceleração da carga móvel.

Para validação dos resultados da Figura 8.2, aplica-se as equações (8.1), (8.2) e (8.3) para verificar a concordância com os princípios da cinemática. A carga sobre a roda é $P_o = 100000 \text{ N}$, portanto a massa equivalente que atua sobre a roda é $m = P/g = 100000/9,8 = 10.204,1 \text{ kg}$. A força de frenagem é $F_{fre} = 30.000 \text{ N}$.

O valor da desaceleração do sistema é obtido mediante a equação (8.1).

$$a = \frac{30.000}{10.204,1} = 2,94 \text{ m/s}^2 \quad (8.7)$$

O valor da distância de parada é obtido mediante a equação (8.2).

$$d = \frac{25^2}{2 \cdot 2,94} = 106,30 \text{ m} \quad (8.8)$$

O tempo de parada é obtido mediante a equação (8.3).

$$t = \frac{2 \cdot 106,3}{25} = 8,50 \text{ s} \quad (8.9)$$

Por meio da Figura 8.2 pode-se obter a distância e tempo de parada pela primeira abordagem, os valores obtidos são apresentados e comparados na Tabela 8.1. Os resultados obtidos mediante esta abordagem apresentam boa concordância em relação às soluções obtidas mediante as equações da cinemática, validando o comportamento da carga móvel na direção horizontal.

Tabela 8.1 – Comparação dos resultados obtidos no exemplo 1

Obtido por:	Distância de parada (m)	Tempo de parada (s)	%erro com distância de parada	%erro com tempo de parada
Cinemática	106,30	8,50	-	-
Primeira abordagem	106,60	8,51	0,28	0,11

As respostas horizontais no centro da ponte devidas à frenagem são apresentadas na Figura 8.3.

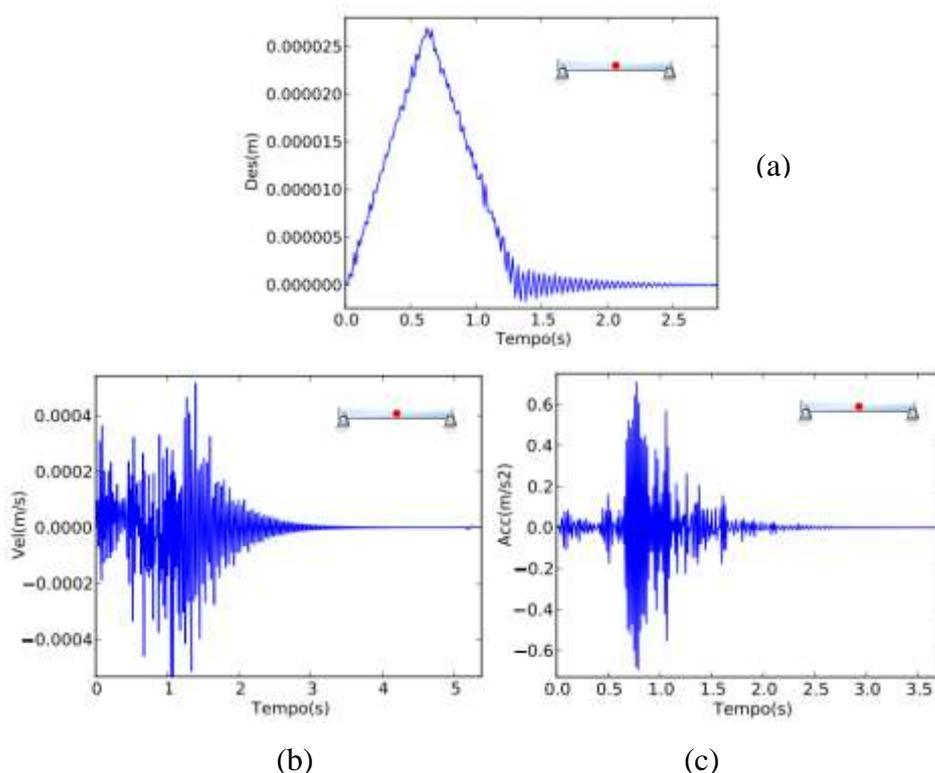


Figura 8.3 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade (c) aceleração no centro da ponte submetida à carga móvel.

De acordo com a Figura 8.3, o máximo deslocamento horizontal no centro da ponte é de aproximadamente 0,000027 m, velocidade máxima de aproximadamente 0,0005 m/s, ambos os valores são quase desprezíveis. A desaceleração que é o fenômeno em análise apresenta um valor máximo aproximadamente de 0,7 m/s², representando maior importância em comparação com os outros valores.

De acordo com a Figura 8.4, o deslocamento vertical máximo da carga móvel é de -0,0075 m.

A Figura 8.5 apresenta os resultados calculados pelo programa juntamente com os valores analíticos obtidos pelas equações (8.4) e (8.5). Pode ser observado que existe uma diferença nas oscilações entre os resultados analítico e numérico, com maior ênfase após a carga percorrer sobre a ponte; isto se deve à influência da velocidade variável.

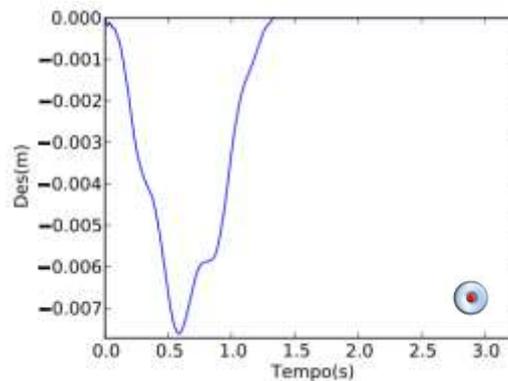


Figura 8.4 – Resposta do deslocamento vertical da carga móvel.

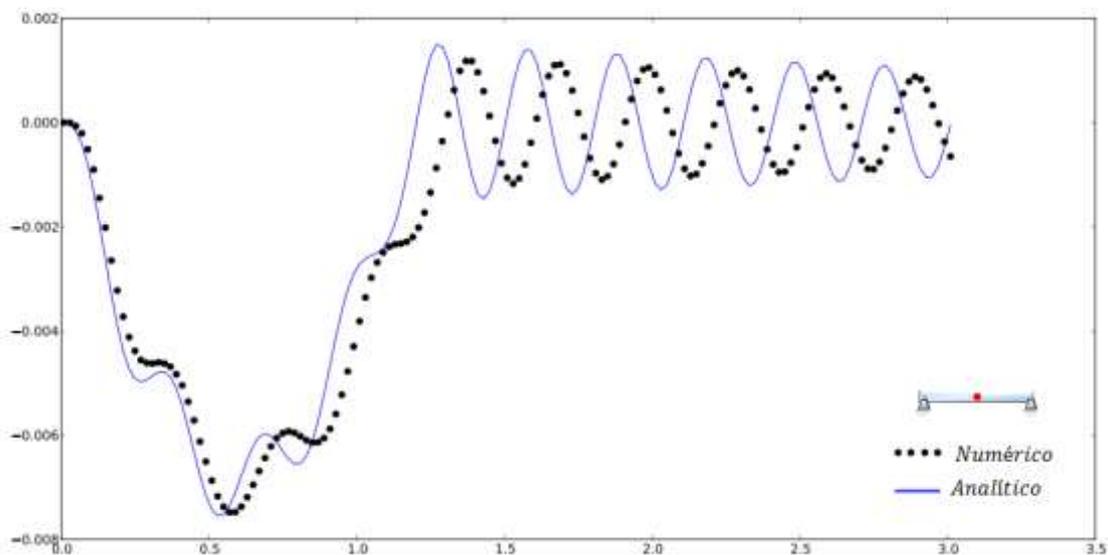


Figura 8.5 – Resposta do deslocamento vertical analítico e numérico no centro da ponte submetida à carga móvel.

8.1.1.2 – Segunda abordagem

O exemplo em análise é uma carga móvel, portanto pode-se considerar neste caso o valor de *Taba* mínimo. Segundo Martins (1999) o valor mínimo de *Taba* é de 10 s, portanto considerando este último valor, têm-se as seguintes respostas horizontais para a carga móvel, apresentadas na Figura 8.6.

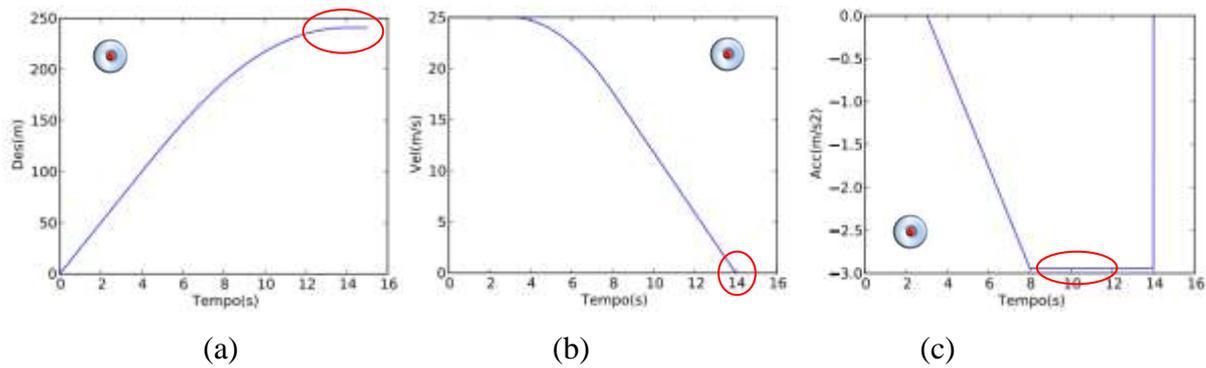


Figura 8.6 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade e (c) aceleração da carga móvel.

As respostas da Figura 8.6 podem variar se o coeficiente de aderência aumentar ou diminuir. O coeficiente de aderência é de 0,3 para que a desaceleração do sistema seja aproximada à desaceleração da primeira abordagem ($-2,94\text{m/s}^2$).

Nesta abordagem, o intervalo de tempo em que a velocidade permanece constante é maior em comparação com a primeira abordagem, isto se deve à presença de rigidez nas molas horizontais. Além disso, após o maquinista aplicar os freios, o sistema demora um pequeno tempo para poder estabilizar a pressão dos cilindros do freio segundo Martins (1999) esse tempo deve ser de 3 s. Portanto existem diferenças no comportamento de ambas as abordagens, devido a essa velocidade, as principais são descritas a seguir:

- A distância de parada da carga móvel é maior para a segunda abordagem, por ser aplicada uma força de frenagem que varia com o tempo. Na segunda abordagem a distância de parada é de 241 m como se ilustra na Figura 8.6.
- O deslocamento vertical máximo da carga móvel é relativamente maior para a segunda abordagem. Na segunda abordagem o deslocamento vertical máximo é de $-0,0077\text{ m}$ como se ilustra na Figura 8.7.

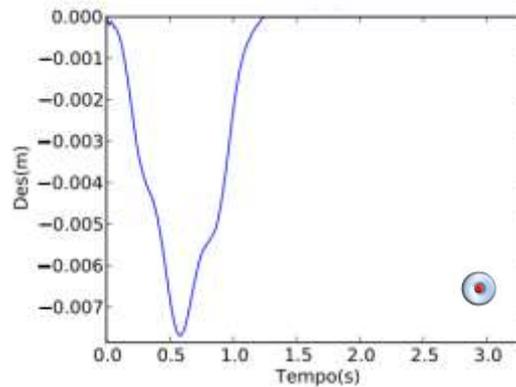


Figura 8.7 – Resposta do deslocamento vertical da carga móvel

- A Figura 8.8, apresenta os resultados calculados pelo programa juntamente com os valores analíticos obtidos pelas equações (8.4) e (8.5). Pode ser observado que existe uma diferença nas oscilações entre o resultado analítico e numérico, mas a precisão dos resultados é melhor em comparação com a primeira abordagem (ver Figura 8.5).

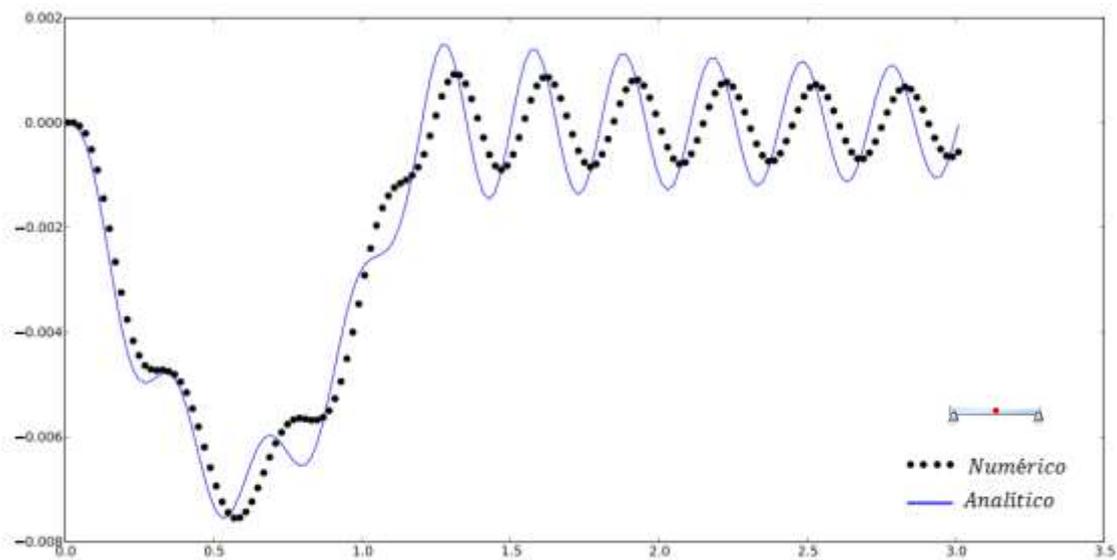


Figura 8.8 – Resposta do deslocamento vertical analítico e numérico no centro da ponte submetida à carga móvel.

As respostas horizontais da segunda abordagem no centro da ponte são apresentadas na Figura 8.9. Os valores são muito pequenos, porque a força de frenagem inicia com um valor pequeno aumentando com o tempo.

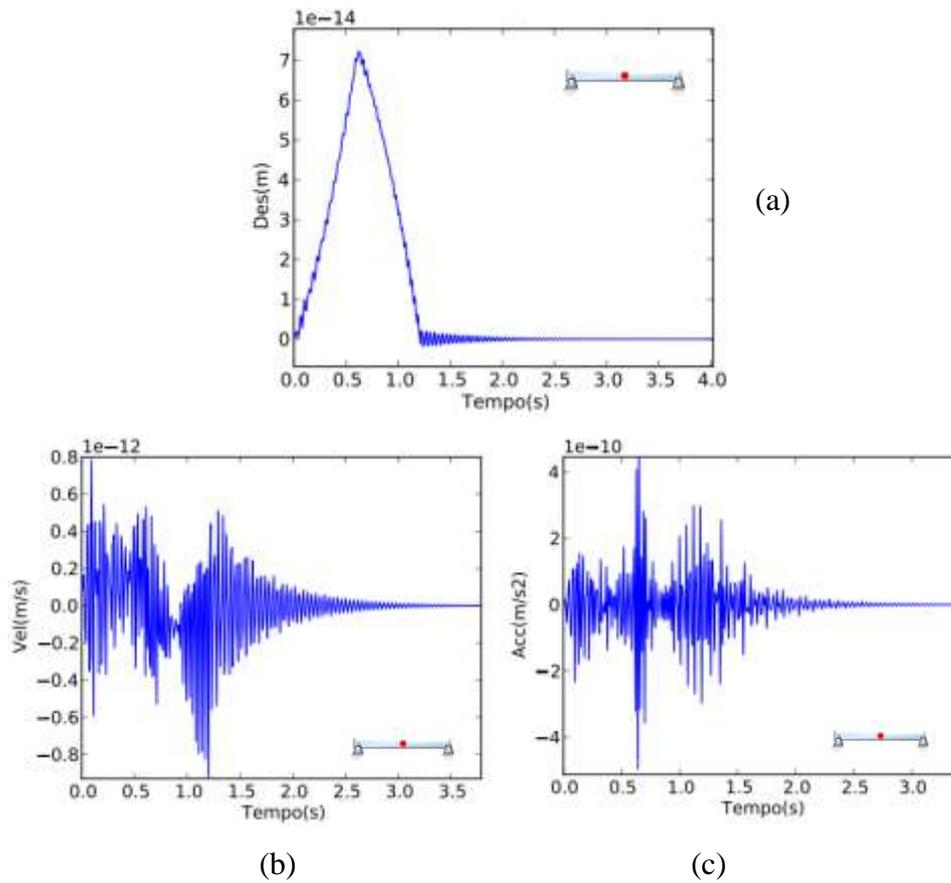


Figura 8.9 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade e (c) aceleração no centro da ponte submetida à carga móvel.

A semelhança dos gráficos correspondentes às respostas horizontais das duas abordagens, com os gráficos típicos das referencias bibliográficas (Martins, 1999) e (Ferreira, 2005), indica que o modelo numérico está funcionando corretamente com se apresenta na Figura 8.10.

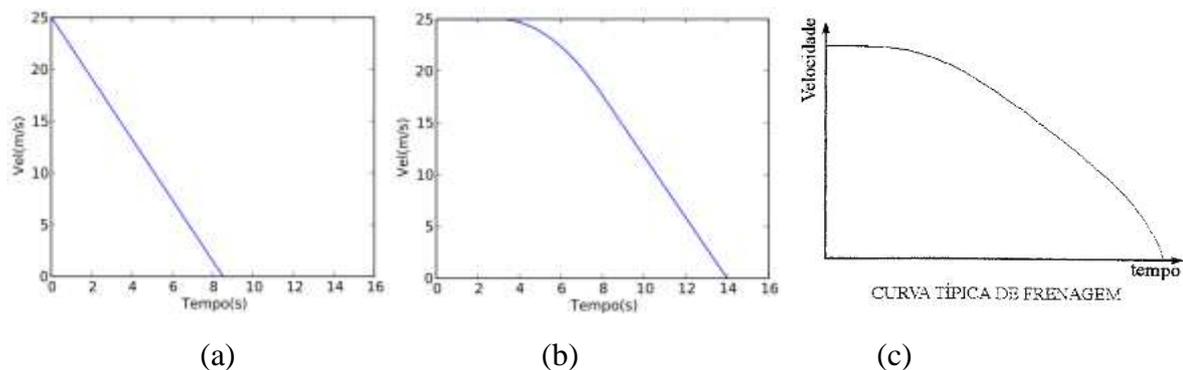


Figura 8.10 – Comparação das curvas de frenagem com a curva teórica típica de frenagem para uma carga móvel por (a) primeira abordagem (b) segunda abordagem (c) Martins (1999)

Cabe destacar que a resposta horizontal da velocidade para uma carga móvel varia de forma linear com o tempo para a primeira abordagem e de forma não linear (curva) com o tempo para a segunda abordagem, como se ilustra na Figura 8.10.

A Figura 8.11 apresenta os gráficos teóricos típicos para as respostas horizontais em termos de deslocamentos, velocidades e acelerações apresentada por (Ferreira, 2005).

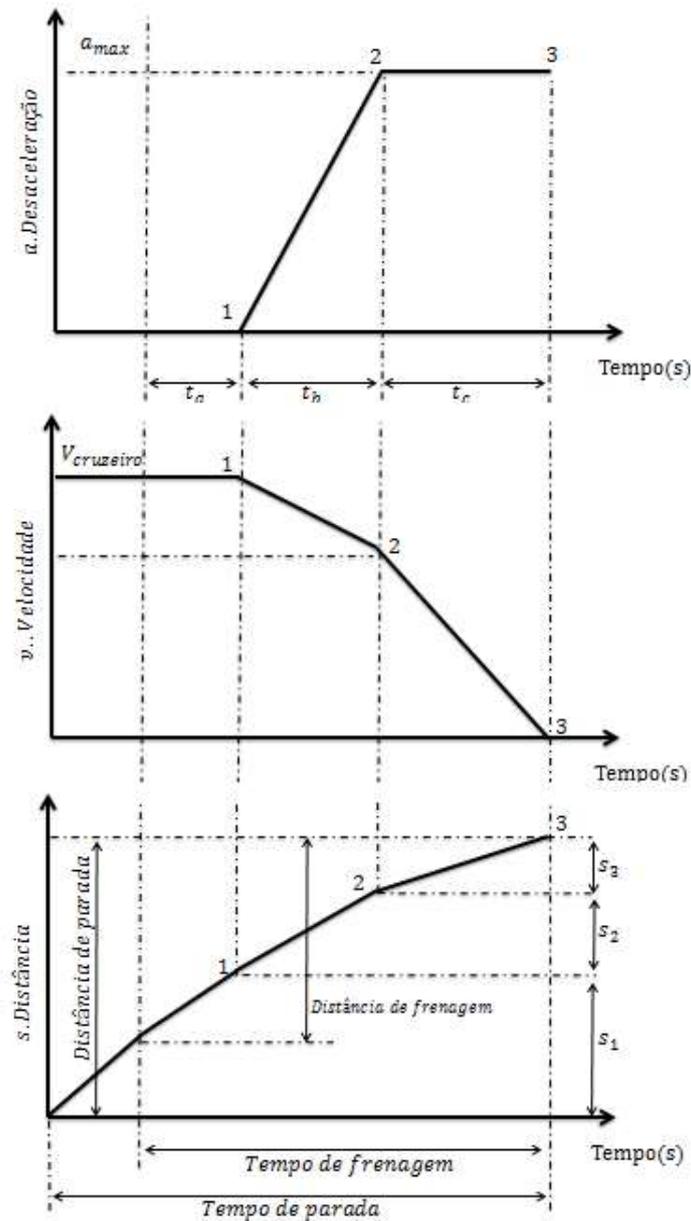


Figura 8.11 – Gráficos típicos teóricos para respostas horizontais em um veículo (modificado - Ferreira, 2005)

Analisadas as respostas horizontais tem-se que a segunda abordagem apresenta melhor concordância e precisão nos resultados, devido à semelhança entre os gráficos obtidos numericamente e os gráficos típicos teóricos de acordo com a Figura 8.11.

8.1.2 – Exemplo 2

Neste exemplo são considerados os parâmetros utilizados por Barbosa (1993) para estudar a dinâmica longitudinal do trem. O autor não considera a existência de uma viga só assume que existem os trilhos. As propriedades para o modelo de veículo são: distância de roda ao início da ponte $dist = 0 \text{ m}$, velocidade inicial $v = 16,7 \text{ m/s}$, massa do elemento $m = 120.000 \text{ kg}$, pressão do cilindro $Pre = 300 \text{ kPa}$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Considerar o comprimento do encanamento geral dos vagões equivalente a 20 vagões de 25 m cada e uma desaceleração de $0,23 \text{ m/s}^2$. A análise foi executada utilizando um tempo total de 100 s com um passo de tempo de 0,01 s.

Alguns dados de entrada necessários, tanto para a primeira como para a segunda abordagem, são obtidos mediante as seguintes expressões:

O peso equivalente a colocar sobre a roda, de acordo com a equação (3.4).

$$Pv = 120.000 \cdot 9,8 = 1.176.000 \text{ N} \quad (8.10)$$

O valor da força de frenagem a aplicar-se é obtido de acordo com a equação (8.1).

$$Ffre = 120.000 \cdot 0,23 = 27.600 \text{ N} \quad (8.11)$$

O valor do coeficiente de aderência é obtido igualando a equação (3.1) com a equação (6.4), resolvendo temos as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} F &= Ffre_{max} \\ m \cdot a &= \mu \cdot m \cdot g \\ \mu &= a/g \end{aligned} \quad (8.12)$$

Substituindo na equação (8.12) temos:

$$\mu = 0,23/9,8 = 0,0235 \quad (8.13)$$

O valor do comprimento do encanamento geral dos vagões (*E.G.V*) é obtido por intermédio da seguinte expressão:

$$E.G.V = \text{número de vagões} \cdot \text{comprimento de um vagão} \quad (8.14)$$

$$E.G.V = 20 \cdot 25 = 500 \text{ m}$$

O valor para a pressão nos cilindros do freio é de 300 *kPa*. Usa-se o ábaco da Figura 3.9 para encontrar o *Taba* (ver seção 6.1.1.2). O valor de *Taba* se representa na Figura 8.12, a seguir.

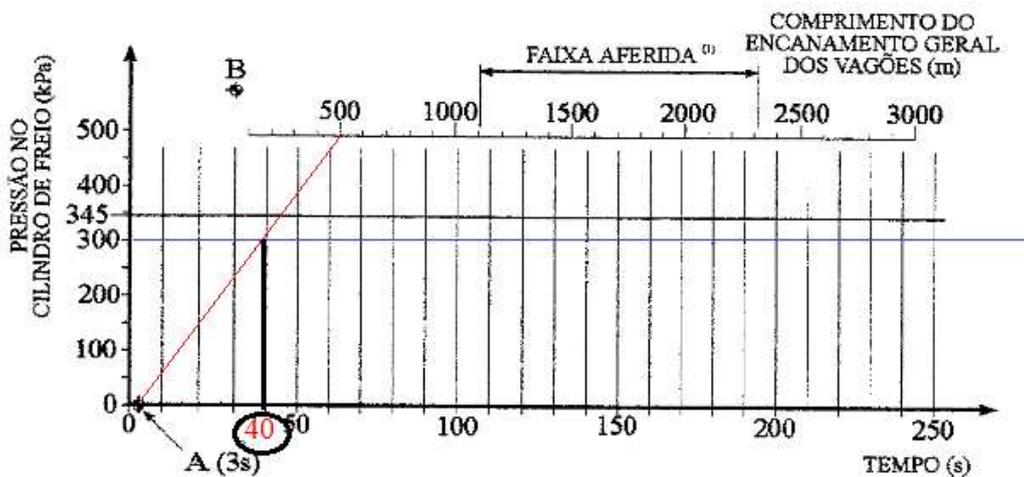


Figura 8.12 – Obtenção de *Taba*

As respostas horizontais em termos de deslocamentos, velocidades e acelerações obtidas pelo programa são ilustradas na Figura 8.13, Figura 8.14 e Figura 8.15, respectivamente. Os resultados apresentados nessas figuras são comparados aos obtidas por Barbosa (1993).

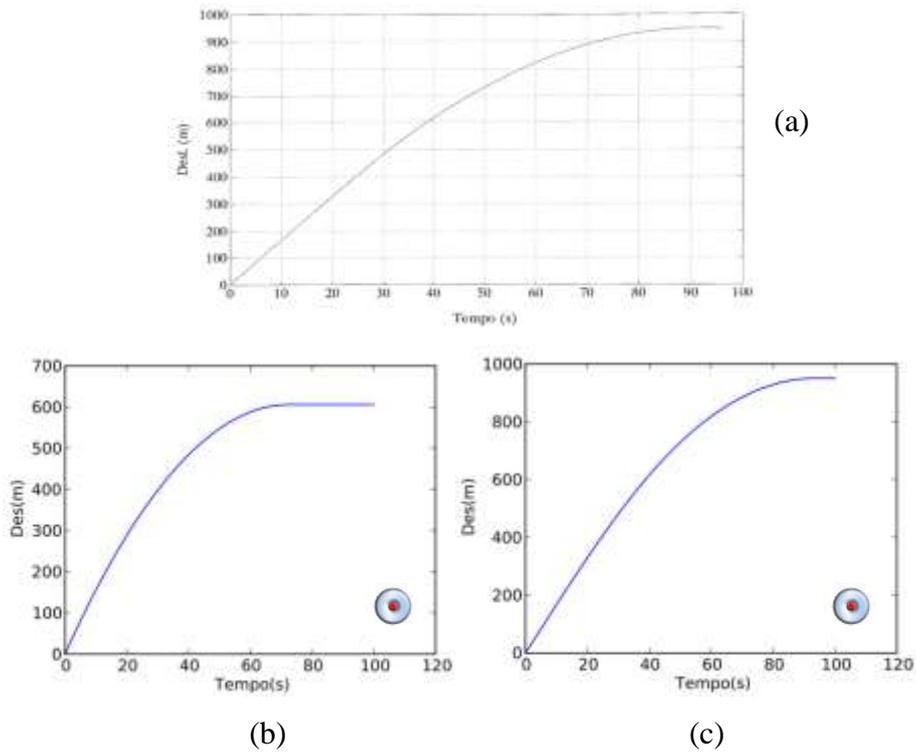


Figura 8.13 – Resposta do deslocamento horizontal por (a) Barbosa (1993) (b) primeira abordagem (c) segunda abordagem

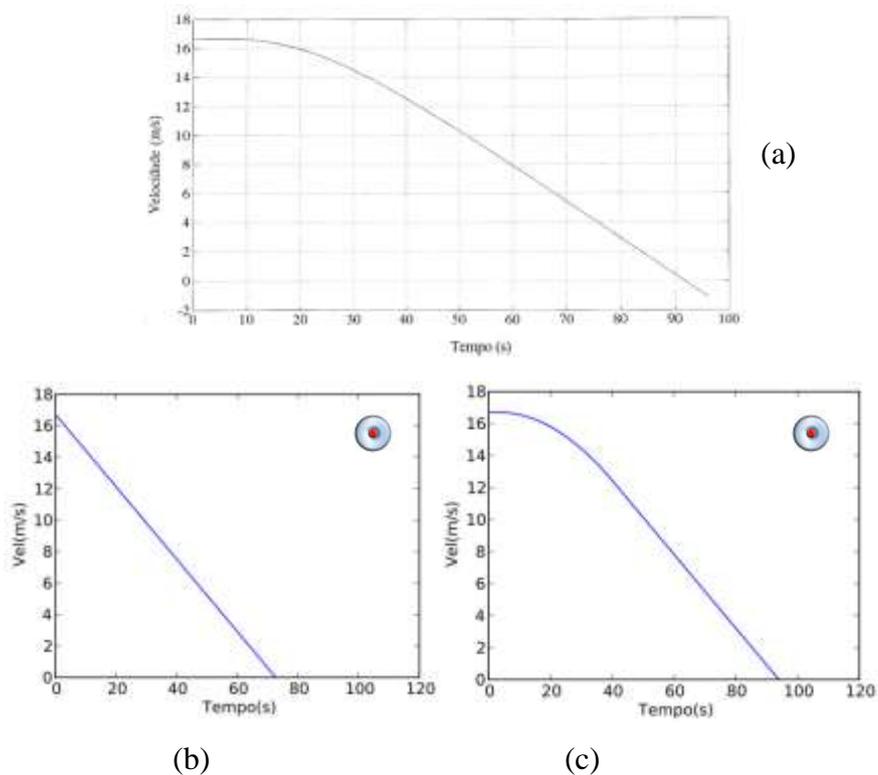


Figura 8.14 – Resposta da velocidade horizontal por (a) Barbosa (1993) (b) primeira abordagem (c) segunda abordagem

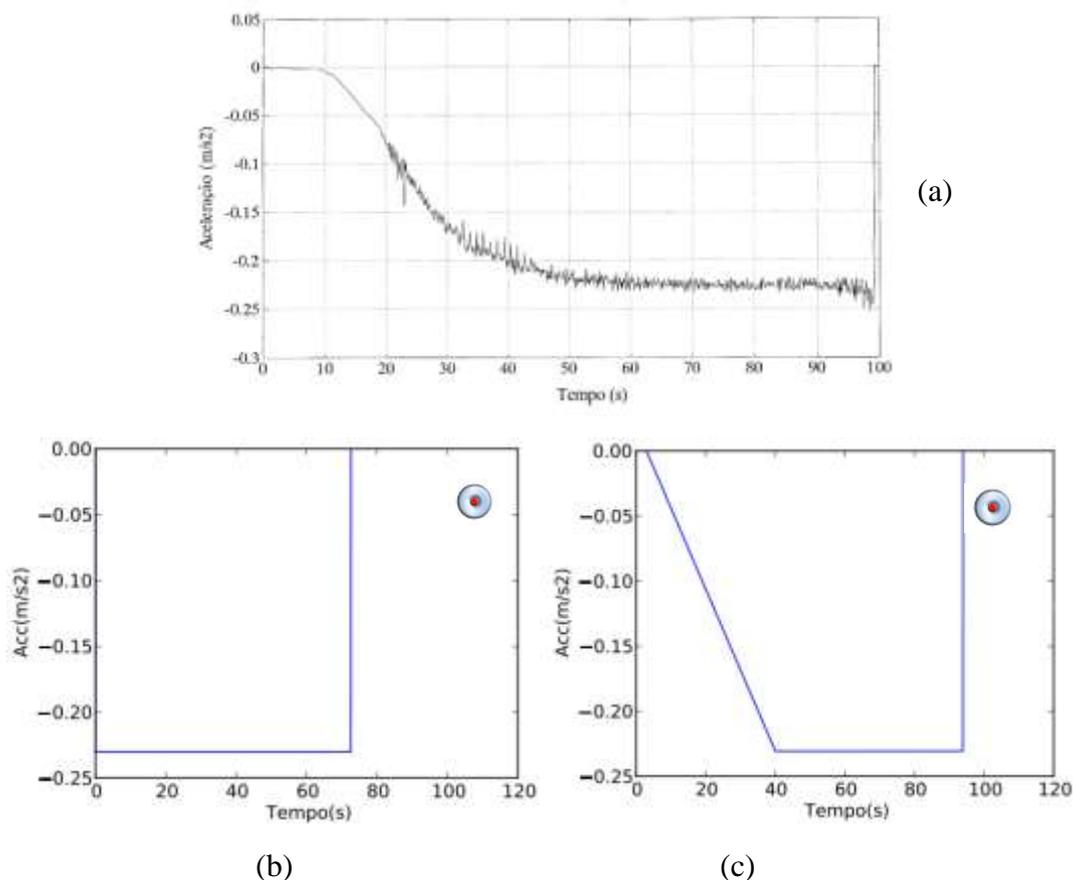


Figura 8.15 – Resposta da aceleração horizontal por (a) Barbosa (1993) (b) primeira abordagem (c) segunda abordagem

A Tabela 8.2 resume a comparação dos resultados apresentados acima.

Tabela 8.2 - Comparação dos resultados obtidos no Exemplo 2

Obtido por:	Distância de parada (m)	Tempo de parada (s)	%erro com distância de parada	%erro com tempo de parada
Barbosa	950	98	-	-
Primeira abordagem	607	73	36	26
Segunda abordagem	951	94	0,1	4,0

Observa-se na Tabela 8.2 que a segunda abordagem apresenta uma boa concordância com os resultados do modelo desenvolvido por Barbosa (1993), de acordo às porcentagens de erro apresentadas. Cabe destacar também que as formas dos gráficos das respostas horizontais do sistema obtidas por Barbosa (1993) adaptam-se melhor às da segunda abordagem.

8.1.3 – Exemplo 3

Os parâmetros adotados neste exemplo são os mesmos do exemplo 1. Neste caso é realizada uma análise de convergência com o objetivo de escolher valores apropriados do passo de tempo que permita obter resultados de tal modo que o tempo de processamento da análise não seja exagerado. Foram considerados passos de tempo iguais a 1,0 s, 0,1 s, 0,01 s e 0,001 s.

A análise como o passo de tempo igual a 1,0 s apresenta os gráficos a seguir.

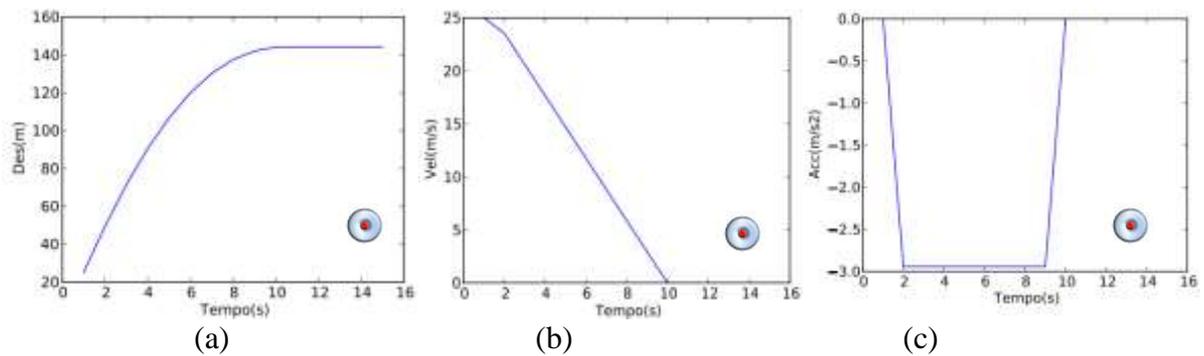


Figura 8.16 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade e (c) aceleração da carga móvel - Primeira abordagem

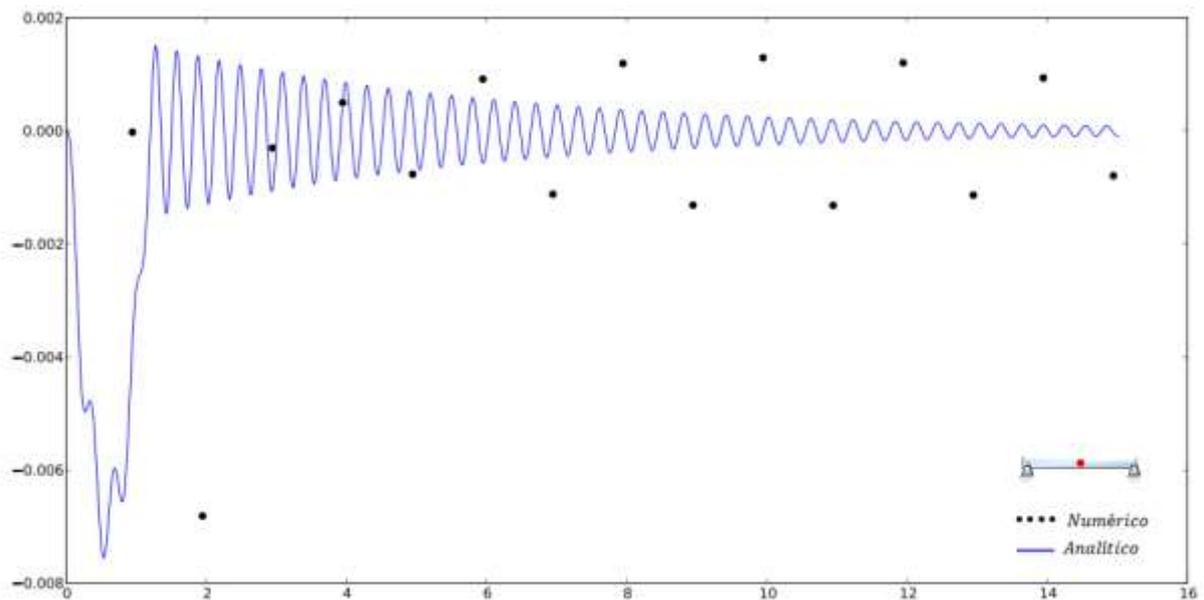


Figura 8.17 – Resposta do deslocamento vertical analítico e numérico no centro da ponte submetida à carga móvel - Primeira abordagem

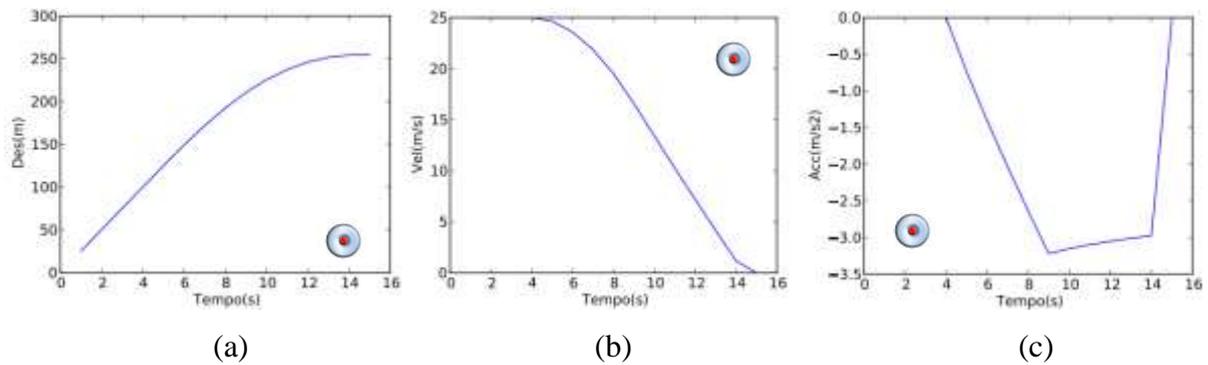


Figura 8.18 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade e (c) aceleração da carga móvel - Segunda abordagem

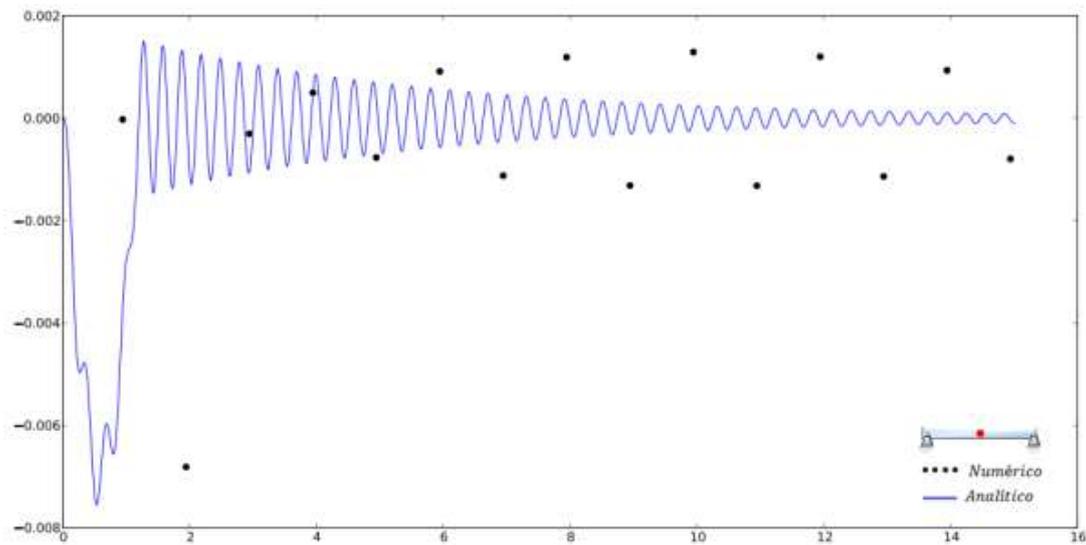


Figura 8.19 – Resposta do deslocamento vertical analítico e numérico no centro da ponte submetida à carga móvel - Segunda abordagem.

De acordo com a Figura 8.16, Figura 8.17, Figura 8.18 e Figura 8.19 os valores das respostas do sistema são apresentados e comparados com os resultados do exemplo 1, de acordo com a Tabela 8.3.

Tabela 8.3 - Comparação de resultados para $h = 1,0$ s

Obtido por:	Distância de parada (m)	Tempo de parada (s)	Deslocamento vertical no centro da ponte (m)	Tempo de processamento aproximado (s)
Primeira abordagem (exemplo 1)	106,30	8,50	-0,0075	220,0
Primeira abordagem (exemplo 3)	144,30	10,00	-0,0031	4,0
Segunda abordagem (exemplo 1)	241,30	14,20	-0,0077	220,0
Segunda abordagem (exemplo 3)	250,40	14,80	-0,0032	4,0

De acordo com a tabela anterior, usar o passo de tempo igual a 1,0 s, diminui muito o esforço computacional, mas não é recomendável usar-se por motivo da baixa precisão nos resultados. Cabe destacar que o tempo de processamento foi medido usando um microprocessador Intel (R) Core (TM) i7 com memória RAM de 6.00 GB.

A análise como o passo de tempo igual a 0,1 s apresenta os gráficos a seguir.

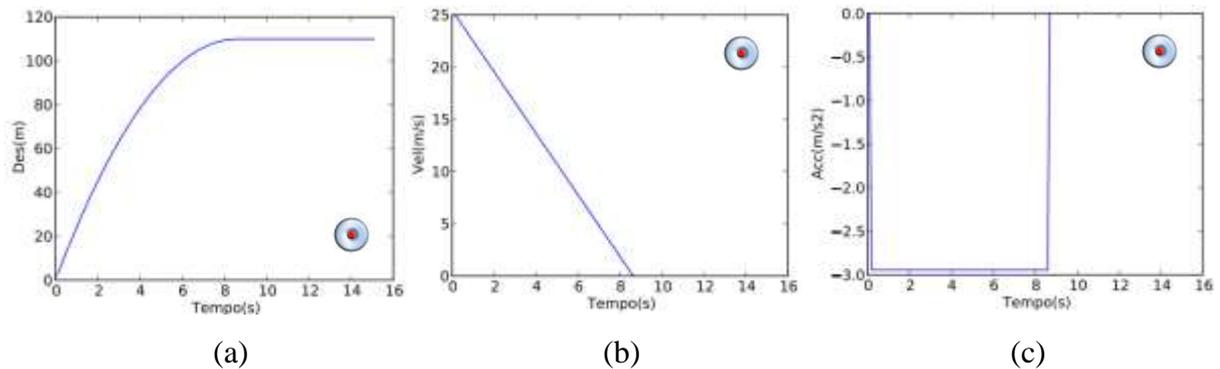


Figura 8.20 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade e (c) aceleração da carga móvel - Primeira abordagem

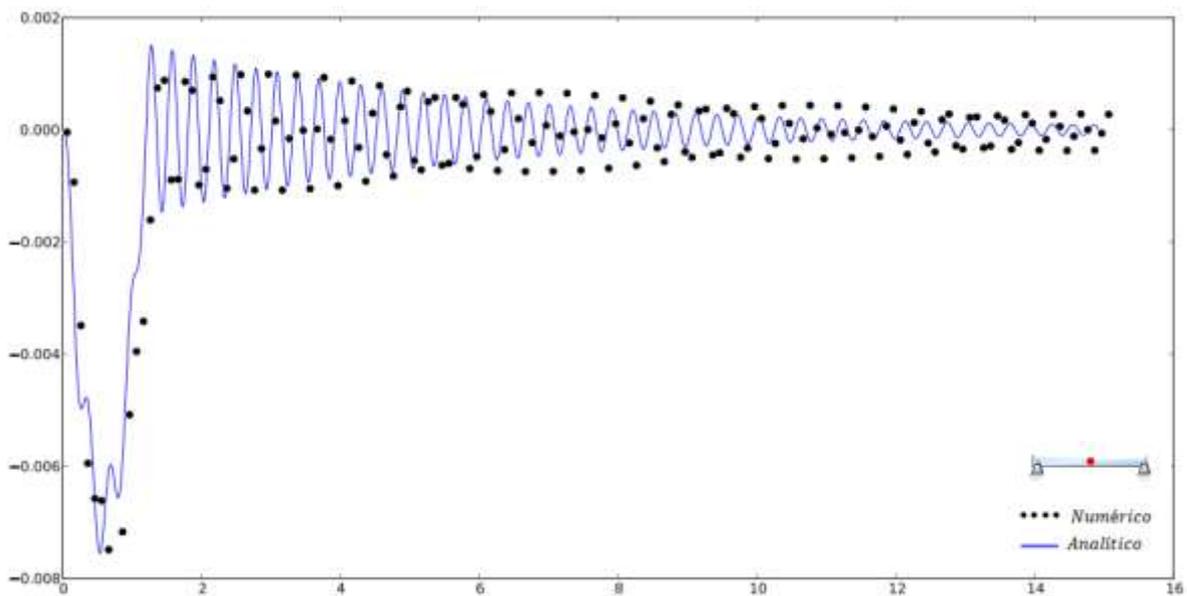


Figura 8.21 – Resposta do deslocamento vertical analítico e numérico no centro da ponte submetida à carga móvel - Primeira abordagem

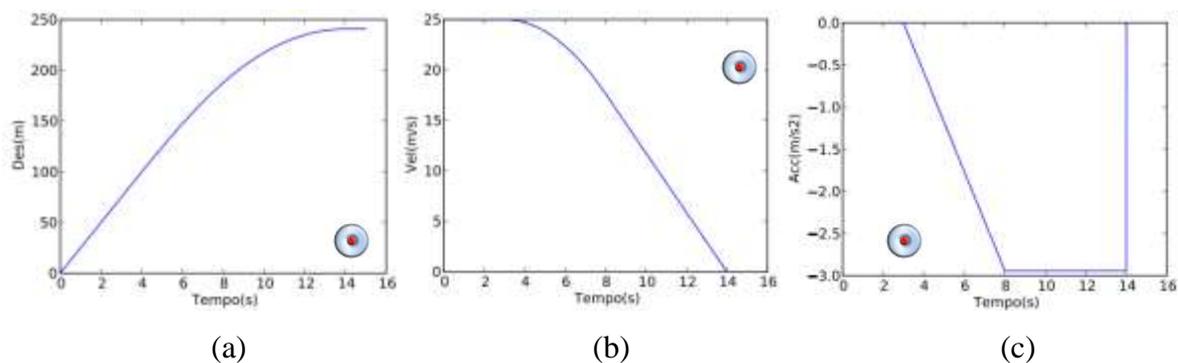


Figura 8.22 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade e (c) aceleração da carga móvel - Segunda abordagem

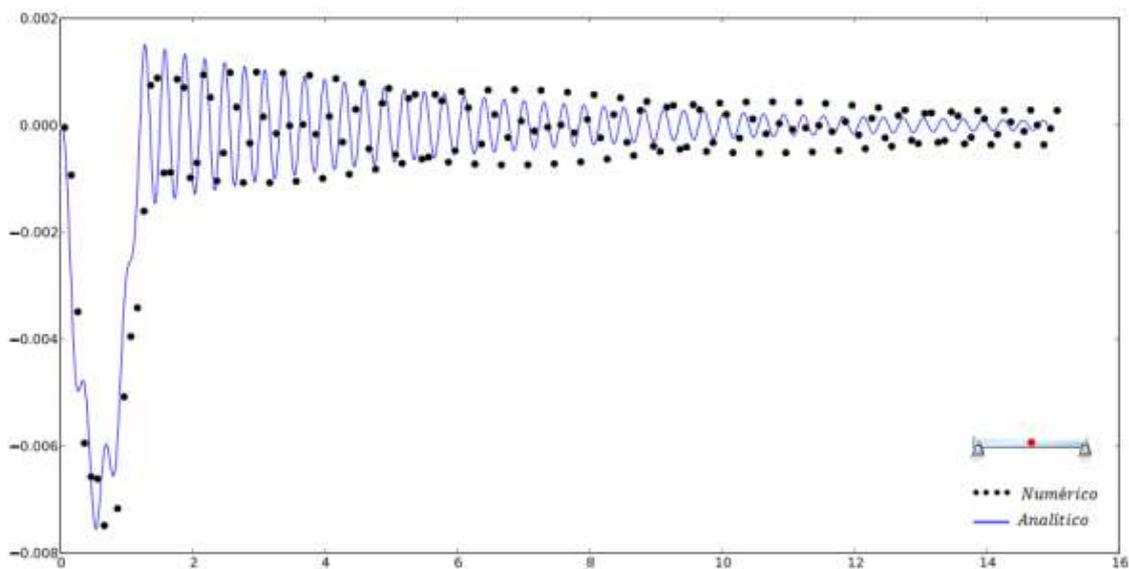


Figura 8.23 – Resposta do deslocamento vertical analítico e numérico no centro da ponte submetida à carga móvel - Segunda abordagem

De acordo com a Figura 8.20, Figura 8.21, Figura 8.22 e Figura 8.23 os valores das respostas do sistema são apresentados e comparados com os resultados do exemplo 1, de acordo com a Tabela 8.4.

Tabela 8.4 - Comparação de resultados para $h = 0,1$ s

Obtido por:	Distância de parada (m)	Tempo de parada (s)	Deslocamento vertical no centro da ponte (m)	Tempo de processamento aproximado (s)
Primeira abordagem (exemplo 1)	106,30	8,50	-0,0075	220,0
Primeira abordagem (exemplo 3)	110,10	8,90	-0,0070	24,0
Segunda abordagem (exemplo 1)	241,30	14,20	-0,0077	220,0
Segunda abordagem (exemplo 3)	243,60	14,60	-0,0073	24,0

De acordo com a tabela anterior, utilizar o valor de 0,1 s para o passo de tempo permite uma razoável concordância com os resultados horizontais em comparação com o exemplo 1, mas em relação aos resultados verticais não se tem a mesma precisão (ver Figura 8.21 e Figura 8.23).

Para o passo de tempo igual a 0,01 s, a análise resulta nos resultados do exemplo 1.

A análise como o passo de tempo igual a 0,001 s, apresenta os gráficos a seguir.

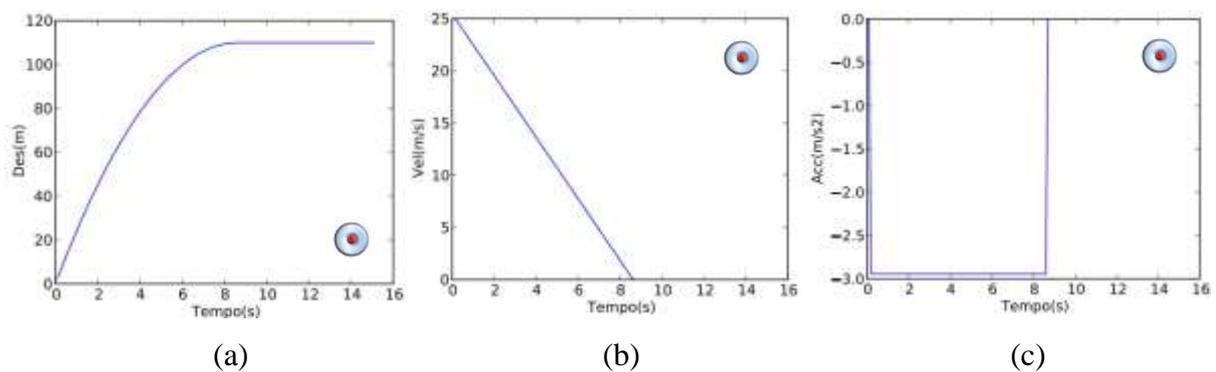


Figura 8.24 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade e (c) aceleração da carga móvel - Primeira abordagem

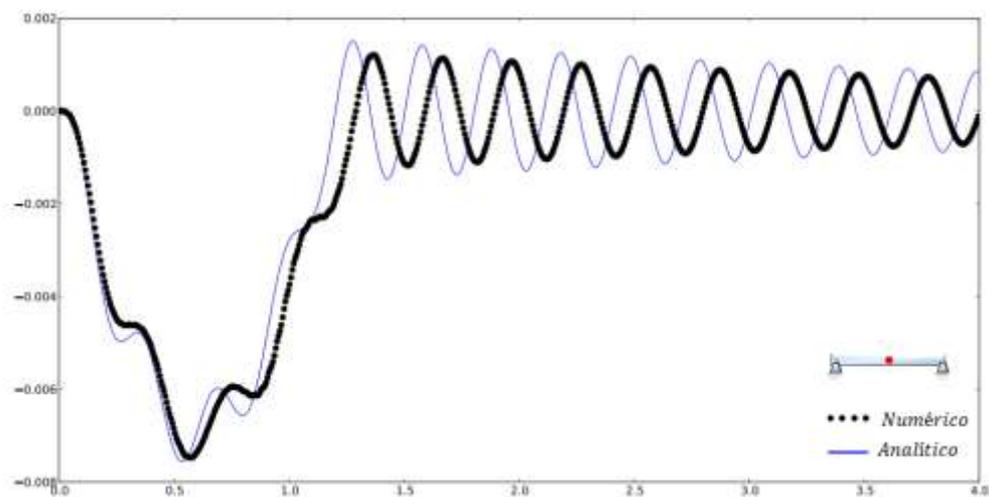


Figura 8.25 – Resposta do deslocamento vertical analítico e numérico no centro da ponte submetida à carga móvel - Primeira abordagem

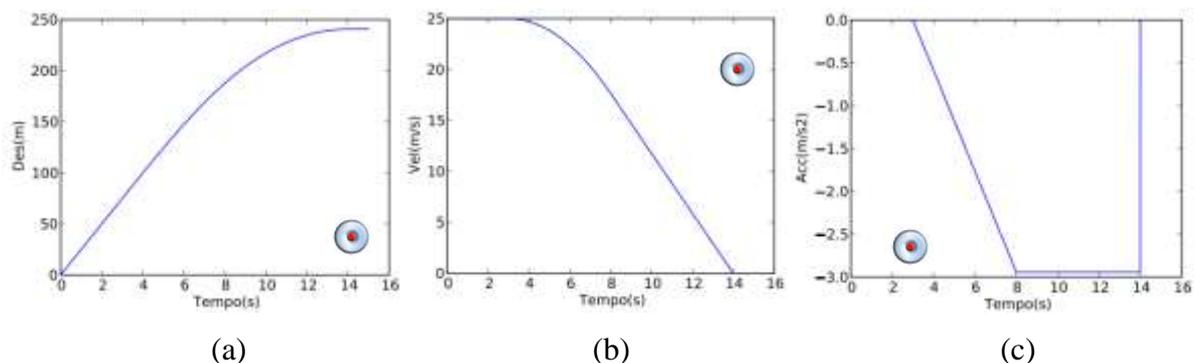


Figura 8.26 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade e (c) aceleração da carga móvel - Segunda abordagem

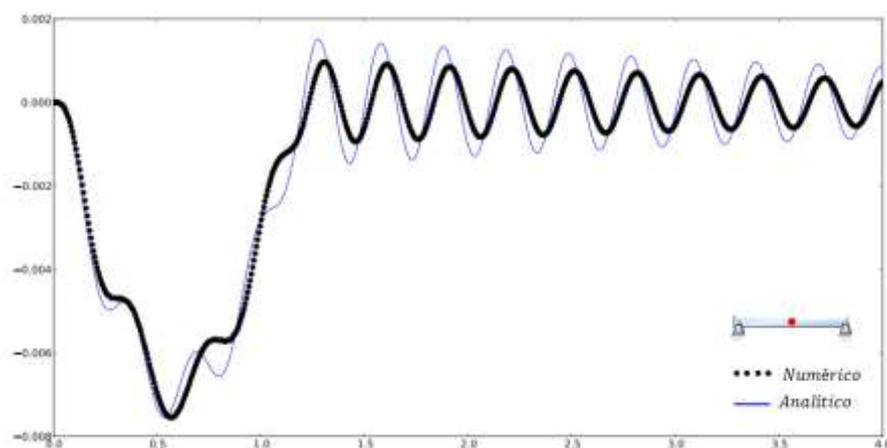


Figura 8.27 – Resposta do deslocamento vertical analítico e numérico no centro da ponte submetida à carga móvel - Segunda abordagem

De acordo com a Figura 8.24, Figura 8.25, Figura 8.26 e Figura 8.27 os valores das respostas do sistema são apresentados e comparados com os resultados do exemplo 1, de acordo com a Tabela 8.5.

Tabela 8.5 - Comparação de resultados para $h = 0.001$ s

Obtido por:	Distância de parada (m)	Tempo de parada (s)	Deslocamento vertical no centro da ponte (m)	Tempo de processamento aproximado (s)
Primeira abordagem (exemplo 1)	106,30	8,50	-0,0075	220,0
Primeira abordagem (exemplo 3)	106,10	8,45	-0,0076	2630,0
Segunda abordagem (exemplo 1)	241,30	14,20	-0,0077	220,0
Segunda abordagem (exemplo 3)	241,25	14,10	-0,0077	2630,0

De acordo com a tabela anterior, usar o valor de 0,001 s para o passo de tempo permite uma melhor concordância com os resultados em comparação com o exemplo 1, no entanto o consumo de tempo para o cálculo computacional é maior, além disso, os resultados não apresentam diferenças significativas em relação ao passo de tempo de 0,01 s.

Após a análise dos resultados, conclui-se que a segunda abordagem apresenta melhores resultados numéricos nas respostas verticais, independentemente do passo do tempo adotado; um apropriado valor do passo de tempo, que apresentou resultados com boa precisão e com razoável tempo de processamento, foi o de 0,01 s sendo adotado nos próximos exemplos de aplicação.

8.1.4 – Exemplo 4

Os parâmetros adotados neste exemplo são os mesmos do exemplo 1. Nesta seção é realizada uma análise sem considerar a frenagem com o objetivo de comprovar a precisão dos resultados numéricos com os valores analíticos obtidos pelas equações (8.4) e (8.5), obtidas com a hipótese de velocidade constante. Deste modo, a forma de representar no programa tal hipótese é mediante uma força de frenagem ou coeficiente de aderência, dependendo da abordagem, muito pequeno. Neste exemplo a força de frenagem é de $F_{fre} = 0,0000001 \text{ kN}$. Passo do tempo é de 0,0001 s. A viga foi discretizada em 70 elementos para uma maior aproximação entre o resultado numérico e analítico.

A Figura 8.28 apresenta os resultados calculados pelo programa juntamente como os valores analíticos, cabe destacar que sem a frenagem.

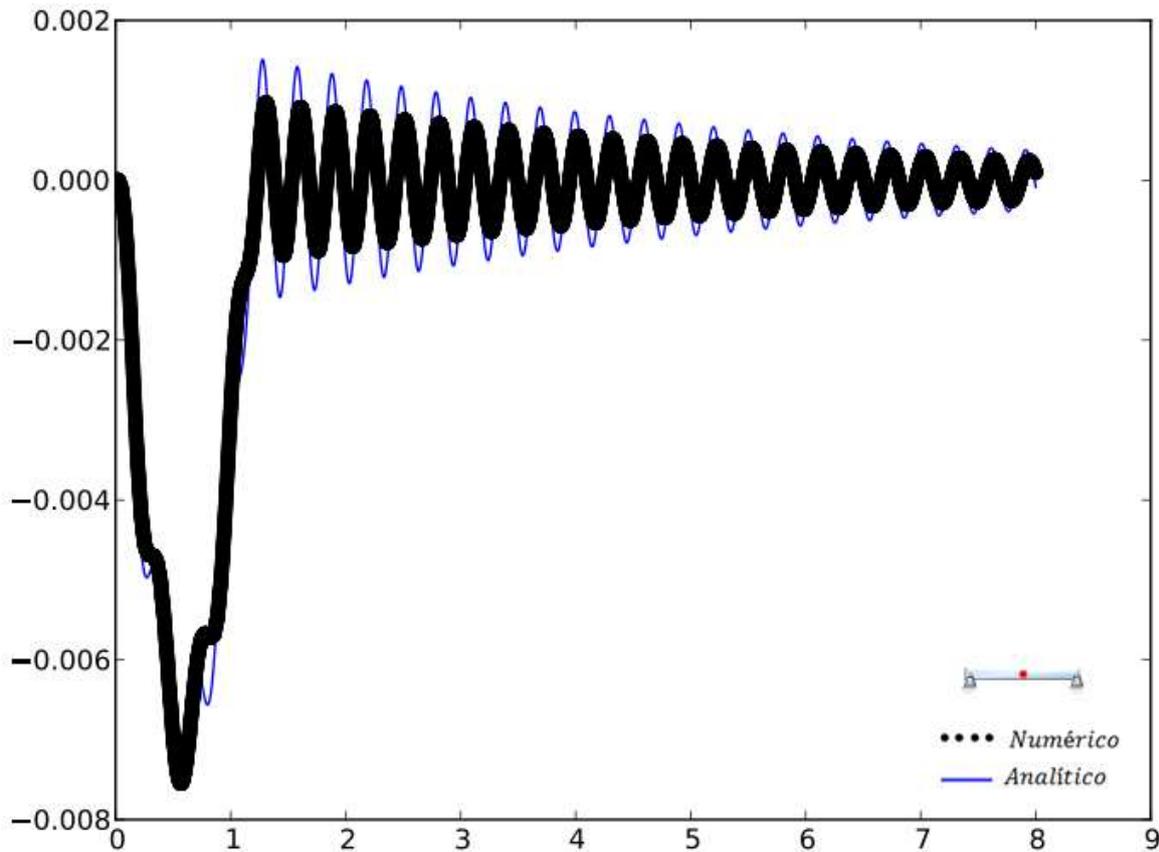


Figura 8.28 – Resposta do deslocamento vertical analítico e numérico no centro da ponte submetida à carga móvel sem considerar a frenagem

8.2 – TESTE PARA MODELO SM2

Nesta análise, o veículo está representado pelo modelo apresentado na seção 4.2.3. As propriedades do veículo, de acordo com a Figura 8.29 são: $L = 3 \text{ m}$, $m_v = 2.800 \text{ kg}$, $J_v = 8.400 \text{ kgm}^2$, $k_s = 90 \text{ kN/m}$, $k_h = 90 \text{ kN/m}$, $c_s = 10 \text{ kNs/m}$, $c_h = 10 \text{ kNs/m}$. A ponte de comprimento $L = 50 \text{ m}$. A viga foi discretizada em 40 elementos com as seguintes propriedades: $EI = 8,6 \times 10^6 \text{ kNm}^2$, $\rho = 2300 \text{ kg/m}$, $\xi = 0,01$. O elemento de interface está disposto ao longo do trajeto que percorre o modelo SM2, conectando todos os nós da interface ou ponte com os nós das rodas do vagão. As propriedades utilizadas no elemento de interface, de acordo com a seção 6.1 são: $\lambda = 0,021$ e $\eta = 0,028$. Uma carga $P = 400 \text{ kN}$ correspondente à massa do vagão foi aplicada no nó correspondente ao centro de gravidade do truque. Para a frenagem considerar que os freios são aplicados depois de 1 s de iniciada a análise $T_{fre} = 1 \text{ s}$. Considerar o valor de $T_{aba} = 10 \text{ s}$. (Valor mínimo). A força de frenagem é de $F_{fre} = 40 \text{ kN}$ (10% da carga de serviço). Foi considerado o coeficiente de aderência igual a $\mu = 0.2$.

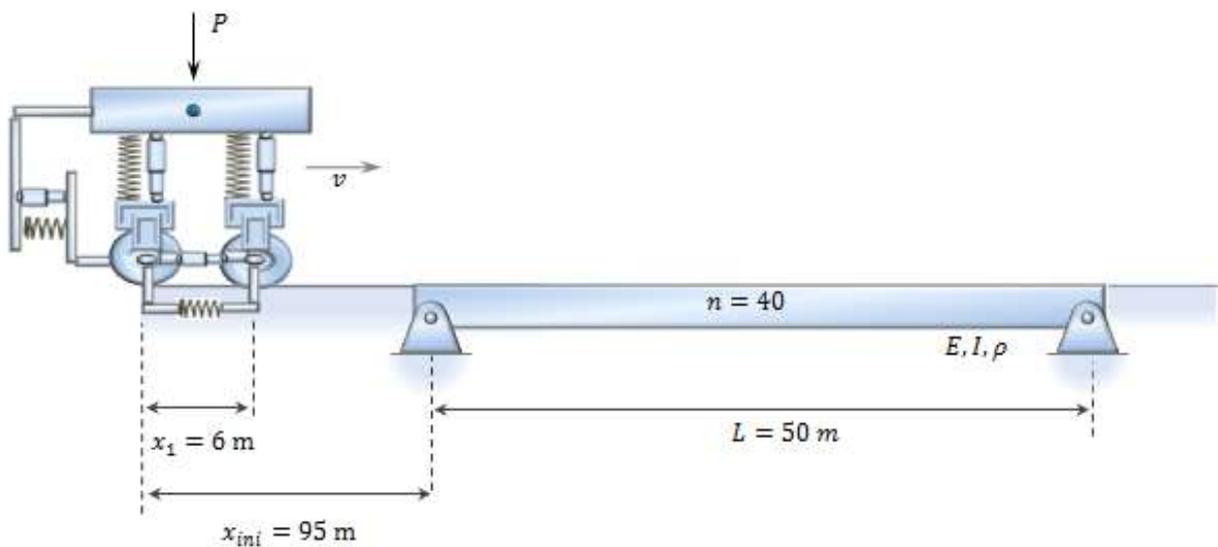


Figura 8.29 – Configuração para análise de um modelo SM2

A análise foi executada utilizando o método de integração de Newmark para um tempo total de 20 s e com um passo de tempo de 0,01 s. Durante a análise, o veículo inicia seu percurso a 95 m antes da ponte e move-se a uma velocidade de 20 m/s.

Neste teste várias respostas são obtidas para uma análise completa do comportamento dos dois sistemas, veículo e estrutura. Dependendo da abordagem, são apresentadas as respostas em termos de deslocamentos, velocidades e acelerações para cada elemento que compõe o modelo SM2 e no centro da ponte.

8.2.1 – Respostas para as rodas do modelo SM2

8.2.1.1 – Primeira abordagem

As respostas horizontais são apresentadas na Figura 8.30.

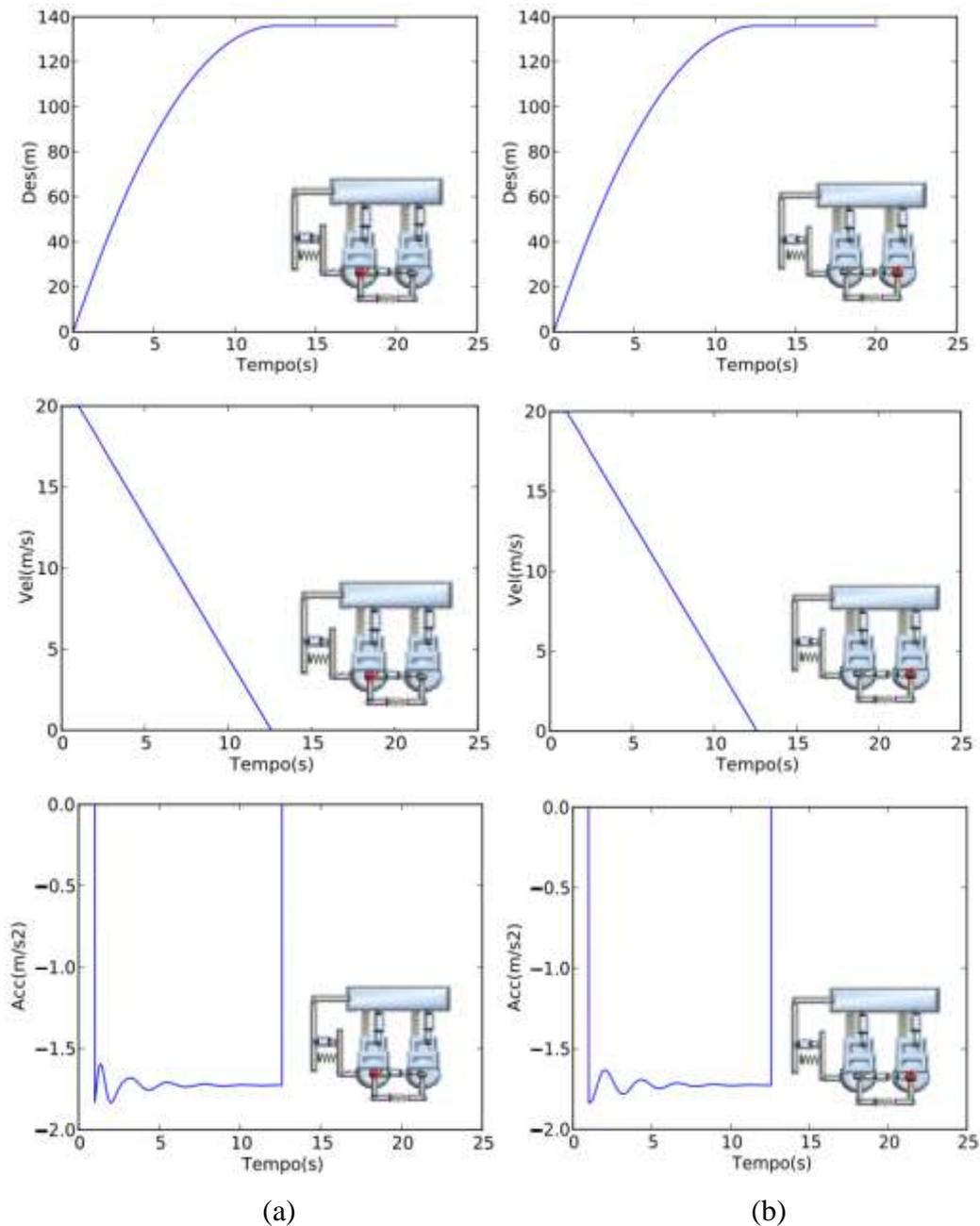


Figura 8.30 – Resposta horizontal do deslocamento, velocidade e aceleração na (a) roda traseira (b) roda dianteira

De acordo com a Figura 8.30, o comportamento do sistema é o mesmo em termos da resposta do deslocamento e da velocidade da roda traseira e dianteira. O comportamento da aceleração apresenta oscilações diferentes como é esperado. A Figura 8.31 apresenta um maior nível de detalhamento dessas oscilações.

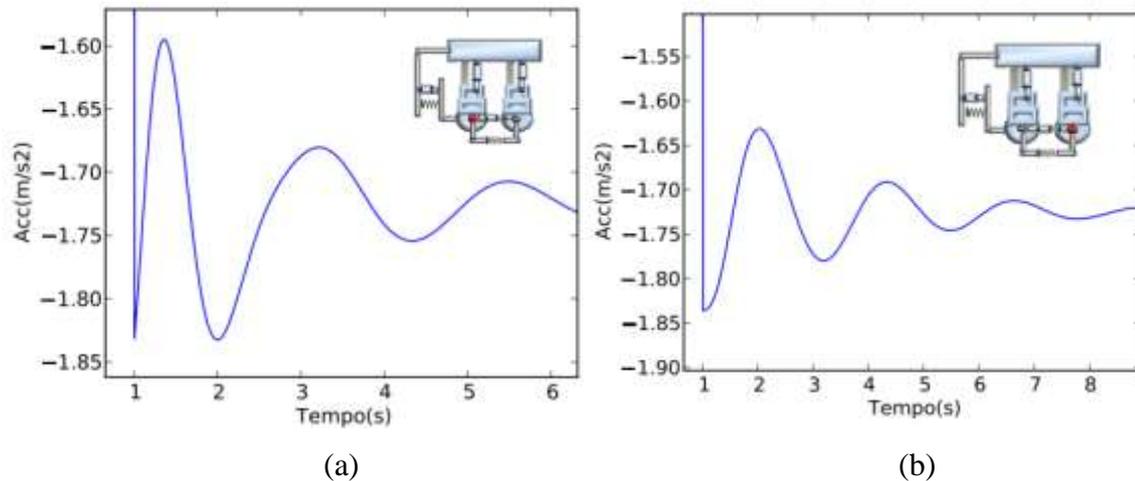


Figura 8.31 – Maior nível de detalhamento da resposta horizontal da aceleração na (a) roda traseira (b) roda dianteira

O máximo valor da desaceleração acontece apenas inicia o processo de frenagem (1 s), sendo de igual valor para ambas as rodas. Com o tempo a resposta horizontal da desaceleração na roda dianteira apresenta menores oscilações em relação à da roda traseira, dando a entender que a força de frenagem age com maior intensidade na roda dianteira.

De acordo com a Figura 8.31, a desaceleração varia para cada roda ao longo do tempo, apresentando diferentes valores até estabilizar-se em um determinado instante de tempo para finalmente adotar o valor da desaceleração do sistema de $1,72 \text{ m/s}^2$.

8.2.1.2 – Segunda abordagem

As respostas horizontais são apresentadas na Figura 8.32.

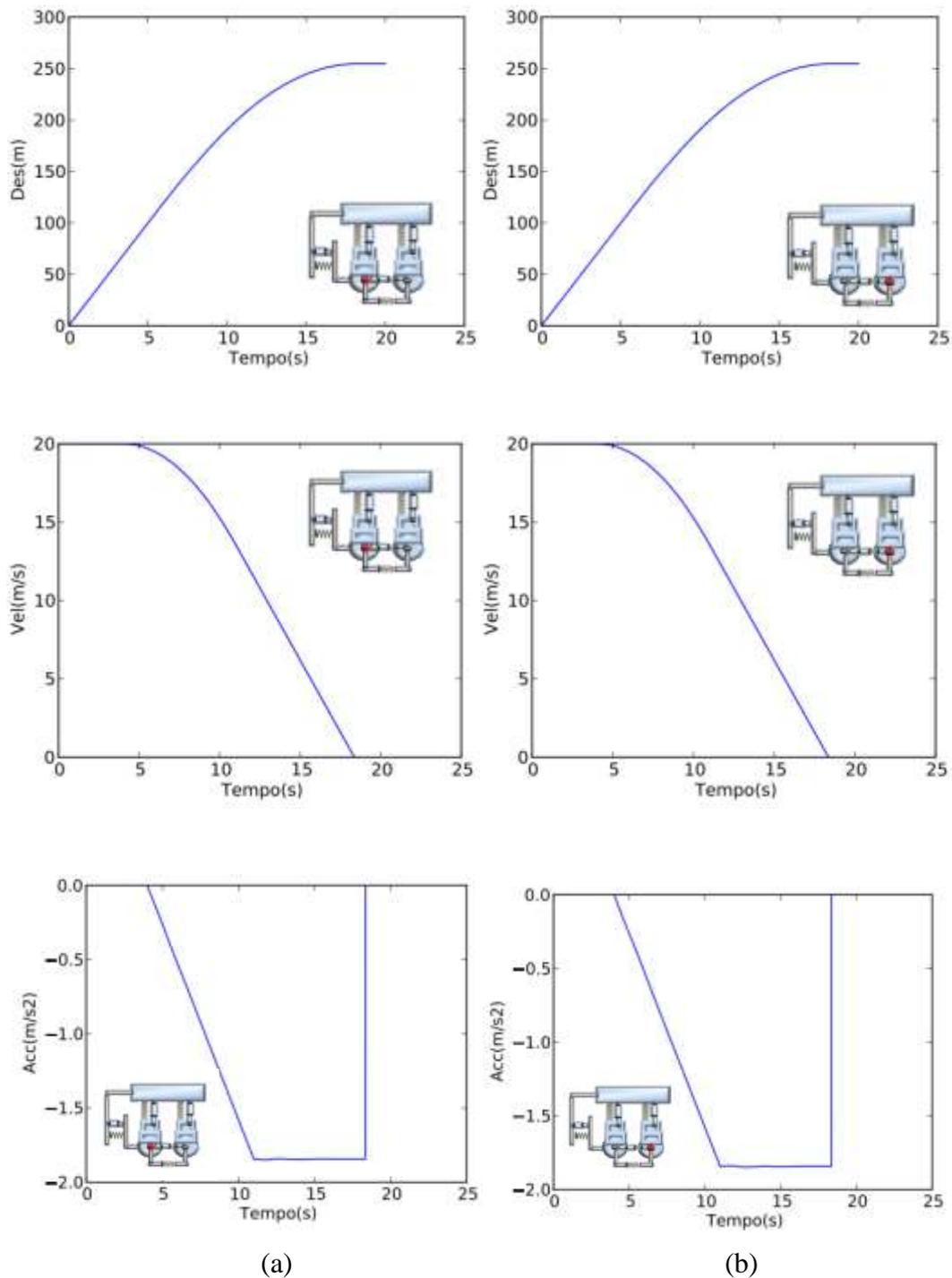
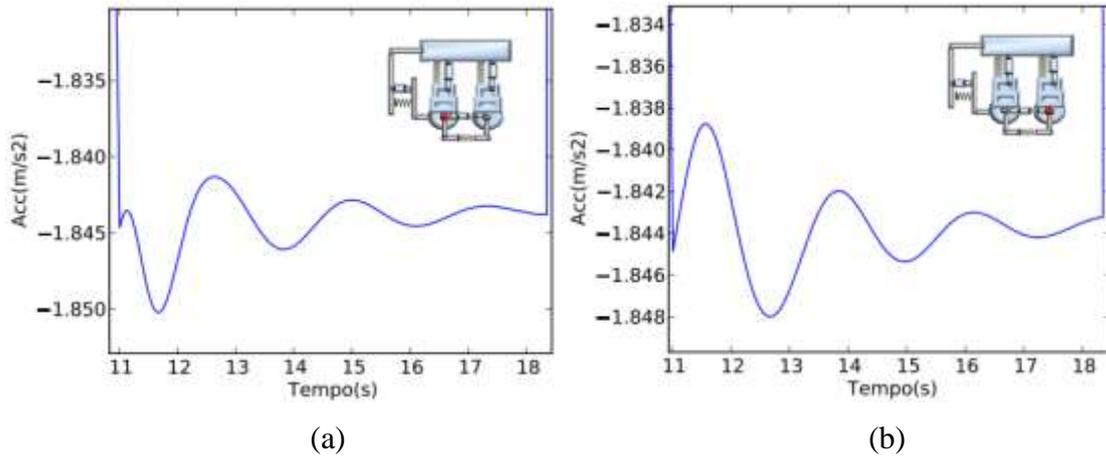


Figura 8.32 – Resposta horizontal do deslocamento, velocidade e aceleração na
 (a) roda traseira (b) roda dianteira

De acordo com a Figura 8.32, o comportamento do sistema é o mesmo em termos da resposta do deslocamento e da velocidade da roda traseira e dianteira. A importância do efeito da frenagem está compreendida no intervalo de tempo de 10 s a 19 s. A Figura 8.33, apresenta um maior nível de detalhamento sobre as oscilações, nesse intervalo de tempo, para perceber melhor a variação da desaceleração do sistema com o tempo.



(a) (b)
 Figura 8.33 – Maior nível de detalhamento da resposta horizontal da aceleração na
 (a) roda traseira (b) roda dianteira

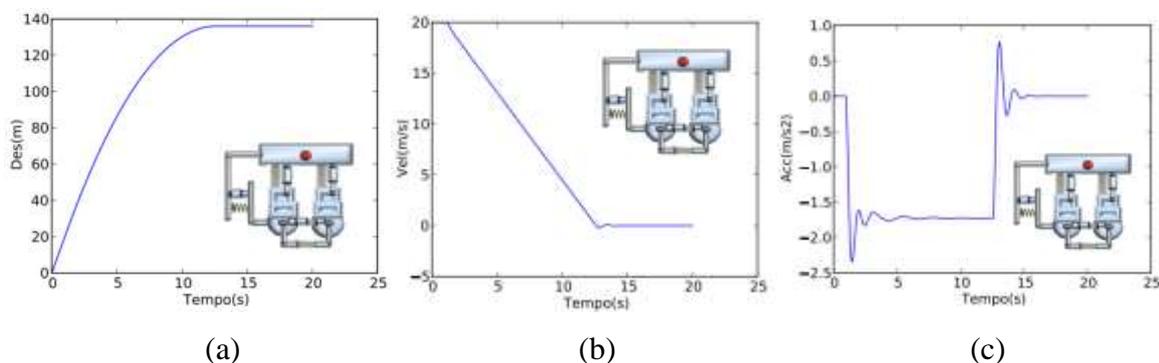
O máximo valor da desaceleração acontece quando a força de frenagem atinge também o seu máximo valor (aos 11 s), sendo de igual valor para ambas as rodas.

De acordo com a Figura 8.33, a desaceleração varia para cada roda ao longo do tempo, apresentando valores até estabilizar-se em um determinado instante de tempo para finalmente adotar o valor da desaceleração do sistema de $1,84 \text{ m/s}^2$.

8.2.2 – Respostas para o truque do modelo SM2

8.2.2.1 – Primeira abordagem

As respostas horizontais são apresentadas na Figura 8.34.



(a) (b) (c)
 Figura 8.34 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade e (c) aceleração do truque

De acordo com a Figura 8.34, verifica-se que:

- a) a resposta da velocidade versus tempo apresenta leves oscilações que não aparecem nos gráficos das rodas (ver Figura 8.30), quando o valor da velocidade é nulo, isto deve-se aos sistemas de suspensão horizontal (amortecimento e rigidez) presentes no vagão;
- b) na resposta de aceleração versus tempo, após aproximadamente de 13 s da análise, o truque continua apresentando leve oscilações que não aparecem nos gráficos das rodas (ver Figura 8.30), o que indica que a parte superior do veículo, após percorrer a distância de parada, demora um tempo adicional para se estabilizar e parar.

8.2.2.2 – Segunda abordagem

As respostas horizontais são apresentadas na Figura 8.35.

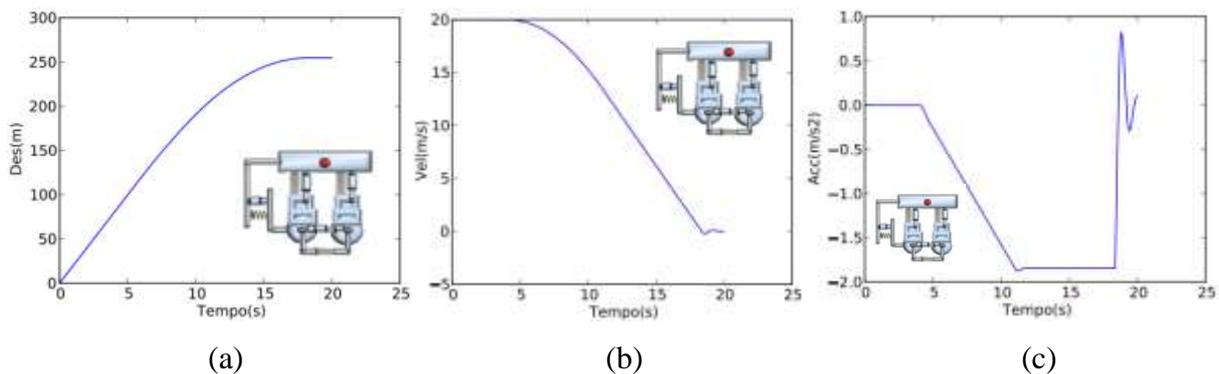


Figura 8.35 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade e (c) aceleração do truque.

De acordo com a Figura 8.35, verifica-se que:

- a) a resposta da velocidade versus tempo apresenta leves oscilações que não aparecem nos gráficos das rodas (ver Figura 8.32), quando o valor da velocidade é nulo, isto deve-se aos sistemas de suspensão horizontal (amortecimento e rigidez) presentes no vagão;

b) na resposta de aceleração versus tempo, após aproximadamente de 18 s da análise, o truque continua apresentando leve oscilações que não aparecem nos gráficos das rodas (ver Figura 8.32), o que indica que a parte superior do veículo, após da distância de parada, demora um tempo adicional para se estabilizar e parar.

8.2.3 – Respostas no centro da ponte

8.2.3.1 – Primeira abordagem

As respostas horizontais são apresentadas na Figura 8.36.

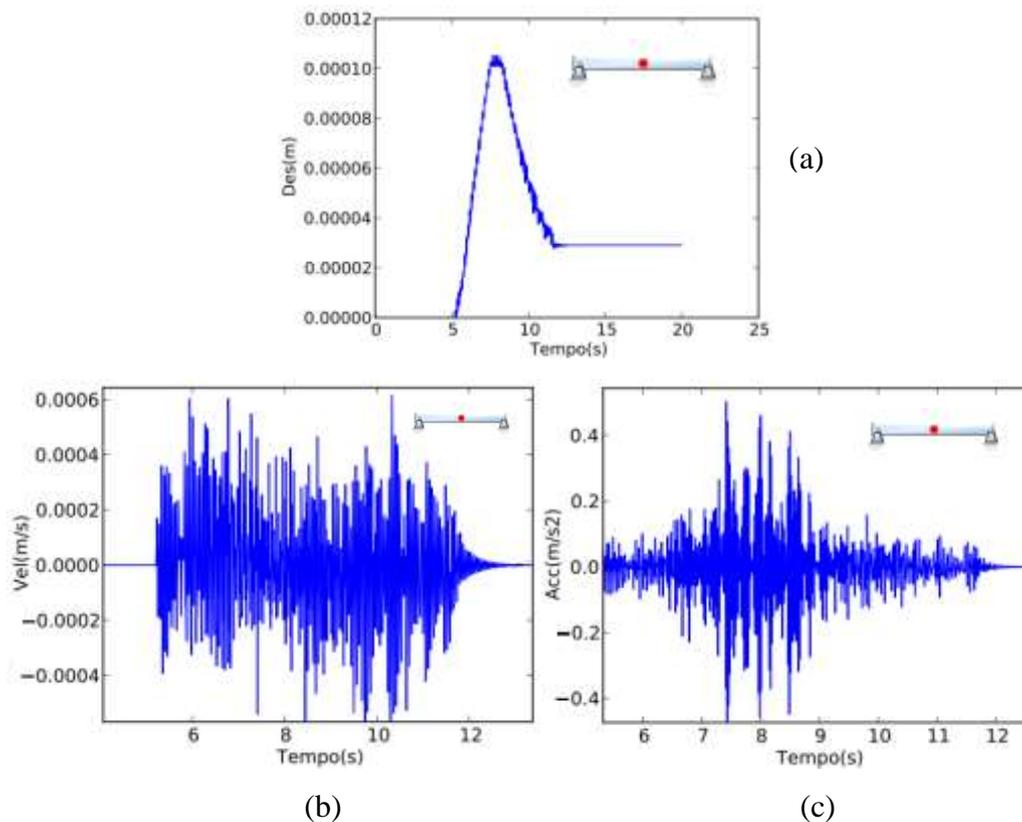


Figura 8.36 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade (c) aceleração no centro da ponte.

De acordo com a Figura 8.36, o máximo deslocamento horizontal no centro da ponte é de 0,00011 m, velocidade máxima de 0,0006 m/s, ambos os valores são quase desprezíveis. A desaceleração que é o fenômeno em análise apresenta um valor máximo de 0,5 m/s², representando maior importância em comparação com os outros valores.

A resposta horizontal do deslocamento não chega a ser nulo ao longo do tempo, indicando que o modelo SM2 para sobre a ponte, portanto o gráfico do deslocamento horizontal está mantendo o valor do último deslocamento no sistema, isto se deve ao fato que continua sendo aplicada a força de frenagem no sistema após de parar o veículo.

O tempo necessário para a primeira roda entrar na ponte é de 5,2 s e após o tempo de 12,6 s a roda para sobre a ponte A Figura 8.37 mostra as respostas verticais no centro da ponte.

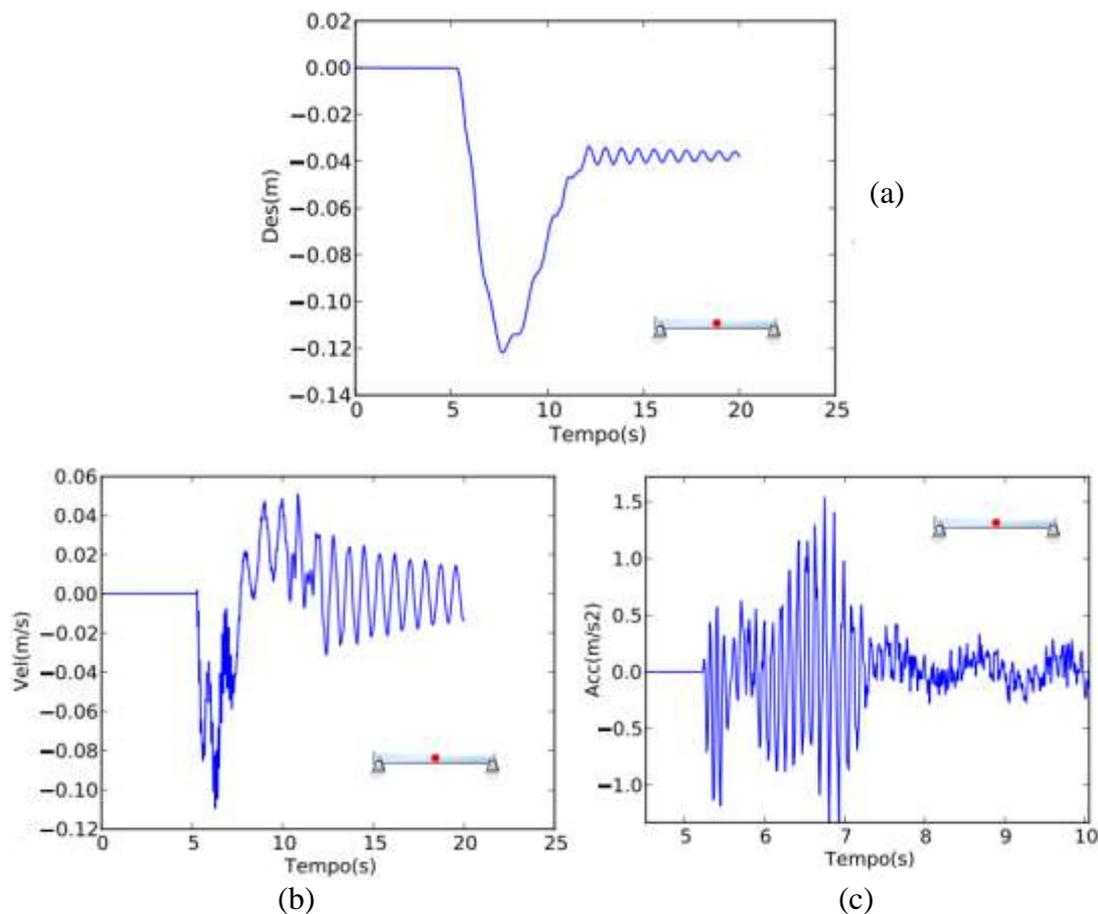


Figura 8.37 – Respostas verticais (a) deslocamento (b) velocidade (c) aceleração no centro da ponte.

De acordo com a Figura 8.37, o máximo deslocamento vertical no centro da ponte é de 0,123 m no tempo de 6,9 s. O valor máximo da aceleração vertical é de 1,5 m/s².

8.2.3.2 – Segunda abordagem

As respostas horizontais são apresentadas na Figura 8.38.

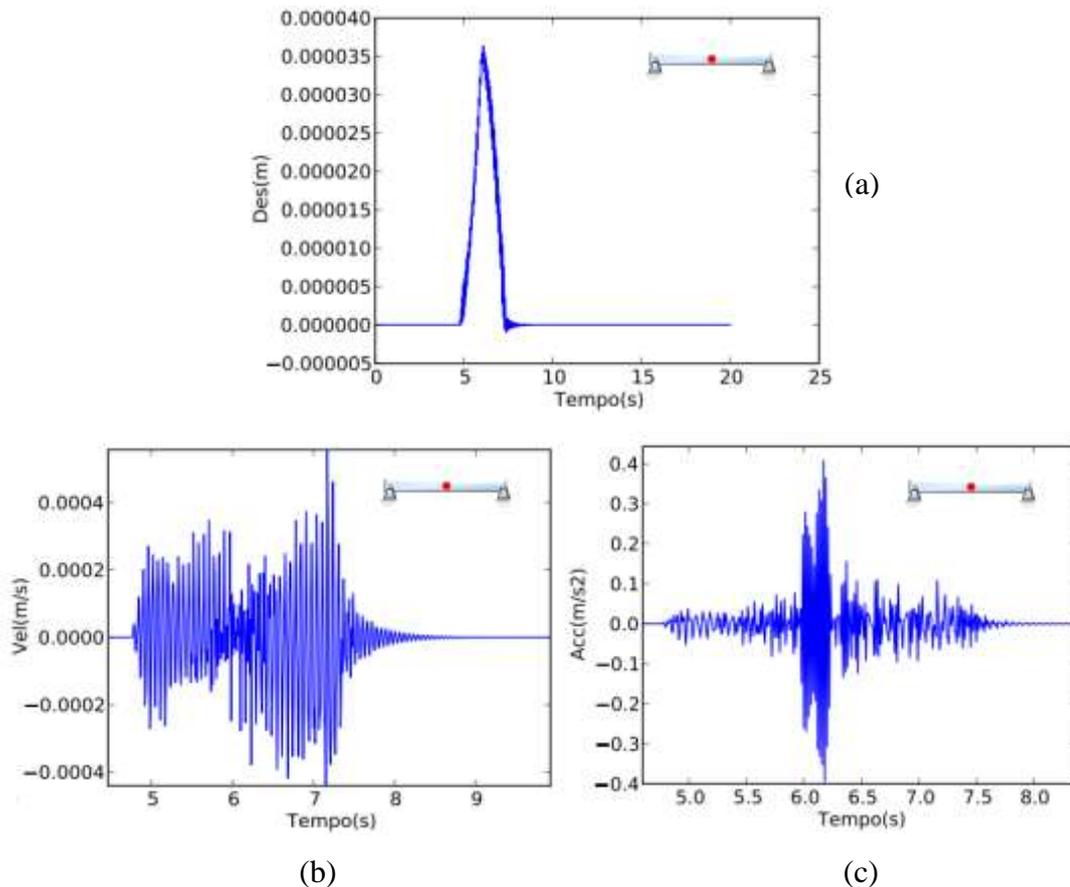


Figura 8.38 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade (c) aceleração no centro da ponte.

De acordo com a Figura 8.38, o máximo deslocamento horizontal no centro da ponte é de $0,000036\text{ m}$, velocidade máxima de $0,0005\text{ m/s}$, ambos os valores são desprezíveis. A desaceleração que é o fenômeno em análise apresenta um valor máximo de $0,4\text{ m/s}^2$, representando maior importância em comparação com os outros valores.

O tempo necessário para a primeira roda entrar na ponte é de $4,70\text{ s}$ e para a última roda sair da ponte é de $7,40\text{ s}$. A Figura 8.39 mostra o deslocamento obtido no centro da ponte. Pode se observar que a flecha máxima $0,124\text{ m}$ acontece aproximadamente no tempo de $6,10\text{ s}$. Após a saída do trem, tem-se o comportamento em vibração livre da ponte como é esperado. O valor máximo da aceleração vertical é de $3,5\text{ m/s}^2$

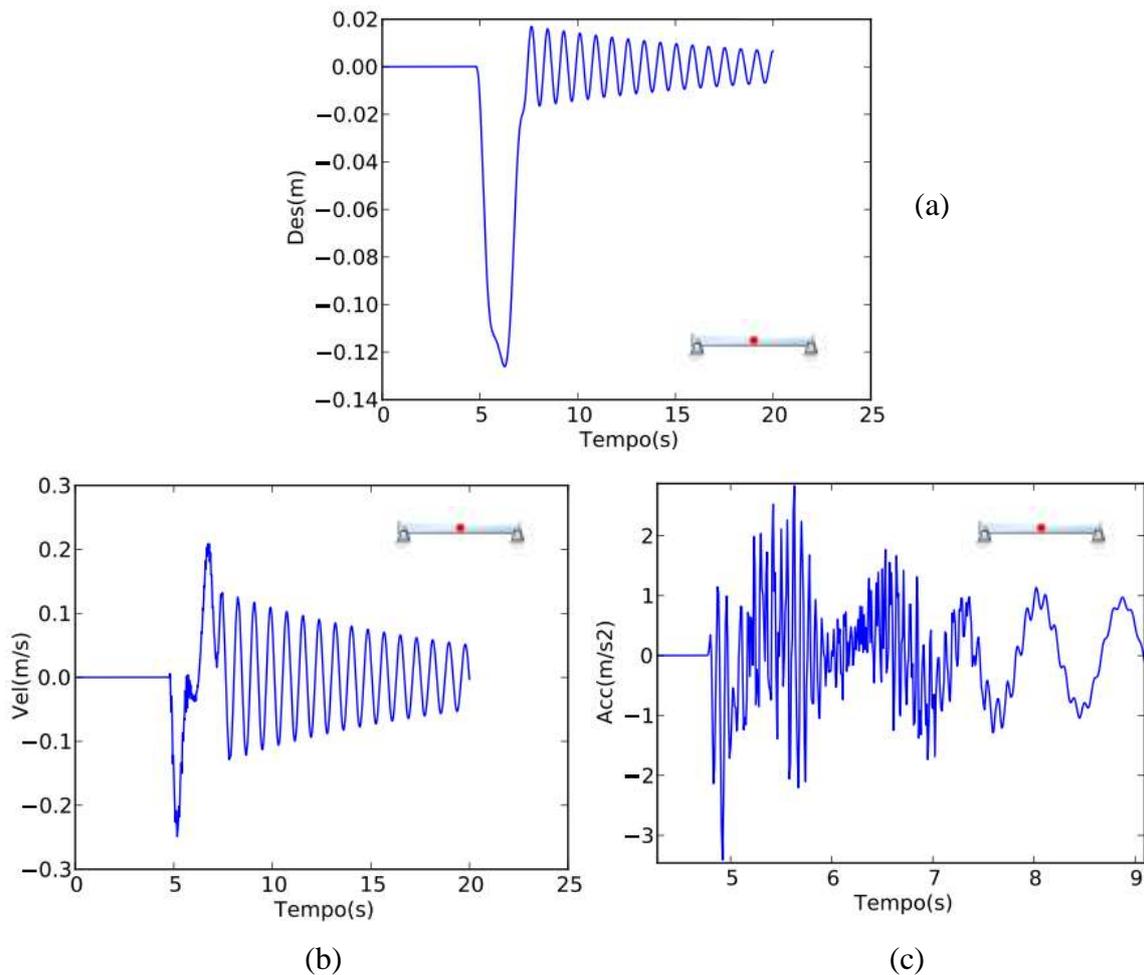


Figura 8.39 – Respostas verticais (a) deslocamento (b) velocidade (c) aceleração no centro da ponte.

8.2.4 – Notas finais sobre os resultados das respostas no sistema

Os valores das respostas horizontais, ao longo do tempo, no centro da ponte, foram maiores na primeira abordagem. A principal influência deve-se à força de frenagem que se considera constante no tempo, portanto os efeitos dinâmicos sobre a viga são maiores. Outro detalhe é a forma de vibração, de forma mais pronunciada para os gráficos correspondentes à primeira abordagem.

O modelo analisado tem comportamento apropriado de um veículo, destacando a distribuição da força de frenagem maior na parte dianteira do veículo.

Por último, a Tabela 8.6 apresenta e compara os valores das respostas horizontais da roda traseira do modelo SM2, obtidos mediante cada abordagem.

Tabela 8.6 - Comparação de resultados entre abordagens para modelo SM2

Obtido por:	Distância de parada (m)	Tempo de parada (s)	Desaceleração (m/s^2)
Primeira abordagem	136,0	12,60	1,72
Segunda abordagem	255,0	18,40	1,84

8.3 – TESTE PARA MODELO SM3

Nesta análise, o veículo está representado pelo modelo completo apresentado na seção 4.2.4. As propriedades do veículo, de acordo com a Figura 8.40, são: $L_v = 4\text{ m}$, $L_s = 1\text{ m}$, $m_v = 35.300\text{ kg}$, $m_{s1} = m_{s2} = 2.800\text{ kg}$, $J_v = 188.266,67\text{ kgm}^2$, $J_{s1} = J_{s2} = 933,33\text{ kgm}^2$, $k_h = 90\text{ kN/m}$, $k_v = 2600\text{ kN/m}$, $k_s = 90\text{ kN/m}$, $c_v = 20\text{ kNs/m}$, $c_s = 12\text{ kNs/m}$, $c_h = 12\text{ kNs/m}$. A ponte de comprimento $L = 40\text{ m}$ foi discretizada em 40 elementos de viga com as seguintes propriedades: $EI = 8,6 \times 10^6\text{ Nm}^2$, $\rho = 2300\text{ kg/m}$, $\xi = 0,01$. O elemento de interface está disposto conectando todos os nós da ponte com os nós das rodas do vagão. As propriedades utilizadas no elemento de interface, de acordo com a seção 5, são: $\lambda = 0,021$ e $\eta = 0,028$. Uma carga $P = 700\text{ kN}$ correspondente à massa do vagão foi aplicada no nó correspondente ao centro de gravidade do truque de suspensão secundária. Para a frenagem considerar que os freios são aplicados depois de 1 s de iniciado a análise $T_{fre} = 1\text{ s}$. Considerar o valor de $T_{aba} = 15\text{ s}$. A força de frenagem é de $F_{fre} = 70\text{ kN}$ (10% da carga de serviço). Foi considerando o coeficiente de aderência igual a $\mu = 0.2$.

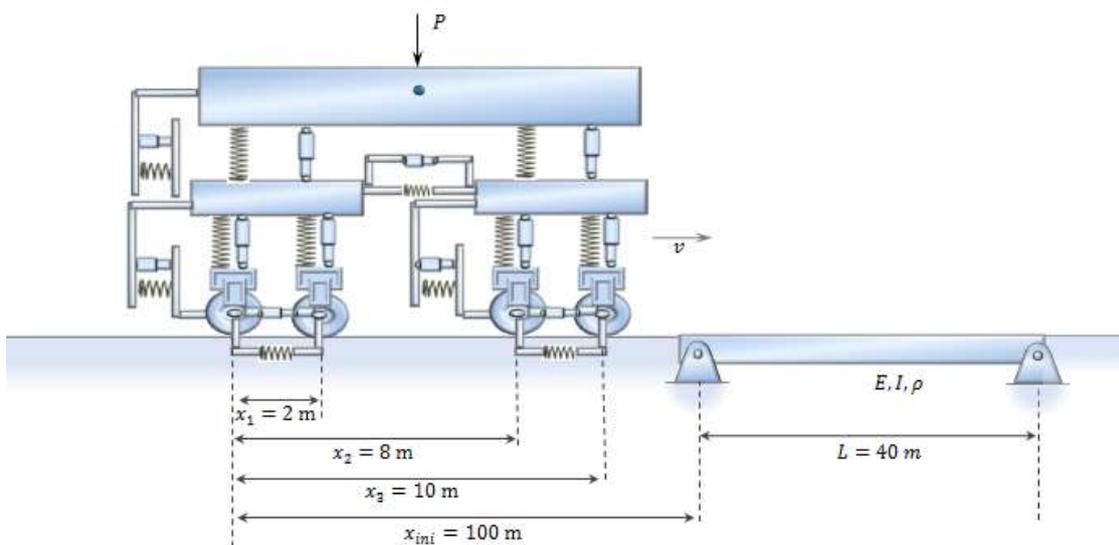


Figura 8.40 – Configuração para análise de um modelo SM3

A análise foi executada utilizando o método de integração de Newmark para um tempo total de 25 s com um passo de tempo de 0,01 s. Durante a análise, o veículo inicia seu percurso a 100 m antes da ponte e move-se a uma velocidade de 20 m/s.

A Figura 8.41 ilustra como são considerados os elementos que formam parte do modelo SM3, o objetivo é facilitar a identificação dos elementos descritos nesta seção. Cabe destacar que o modelo SM3 pode ser resumido como a junção de três elementos SM2.

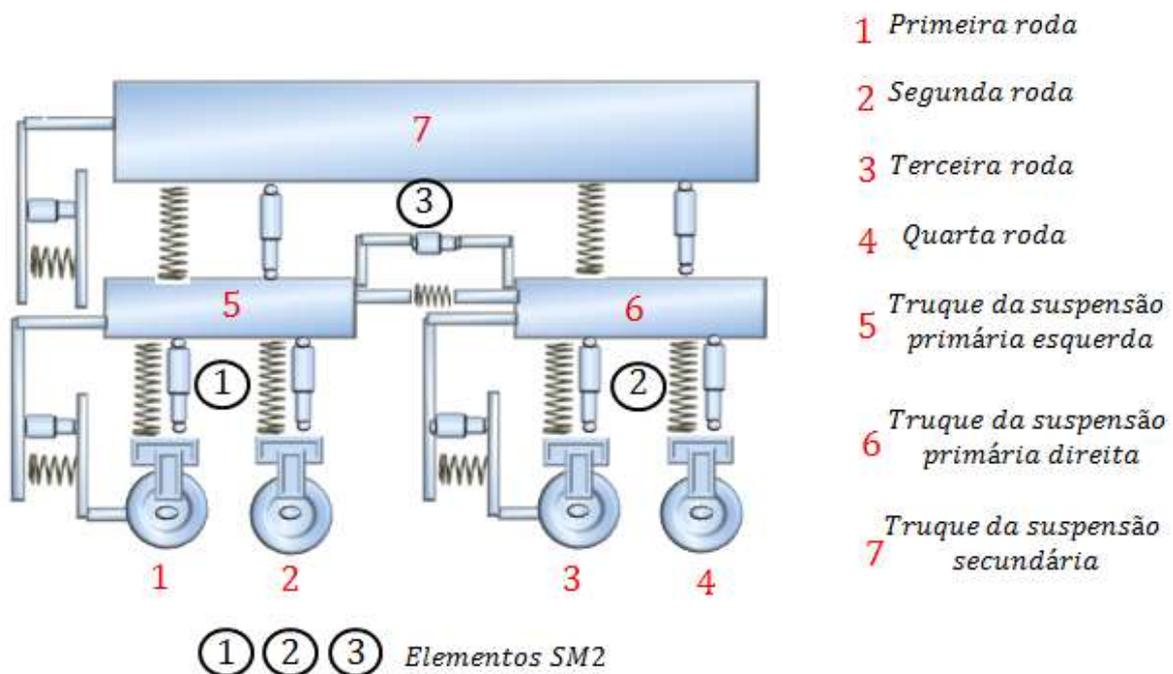


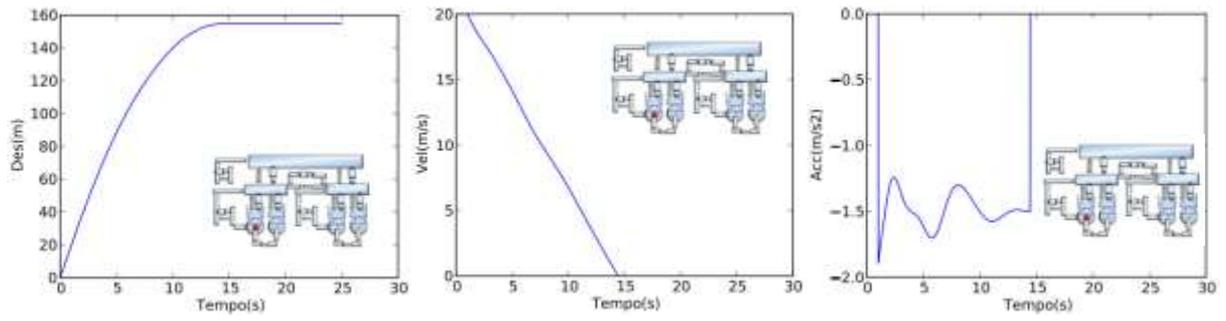
Figura 8.41 – Elementos do modelo SM3

Neste teste várias respostas são obtidas para uma análise completa do comportamento dos dois sistemas, veículo e estrutura. Dependendo da abordagem, são apresentadas as respostas em termos de deslocamentos, velocidades e acelerações para cada elemento que compõe o modelo SM3 e no centro da ponte.

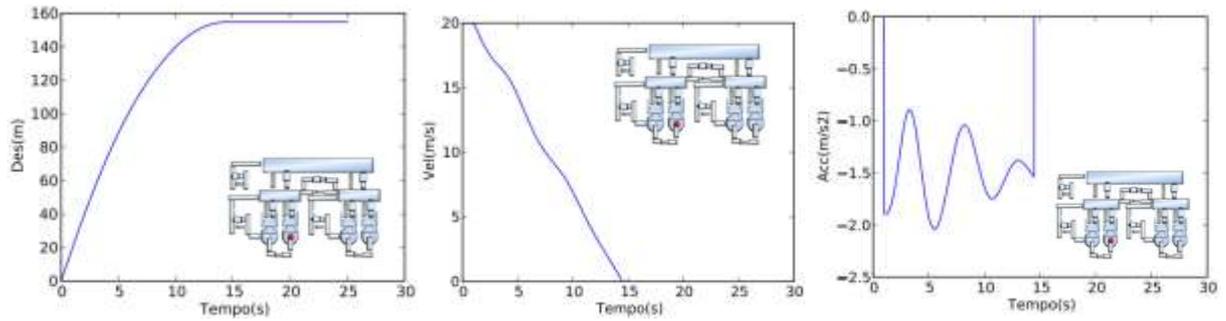
8.3.1 – Respostas para as rodas do modelo SM3

8.3.1.1 – Primeira abordagem

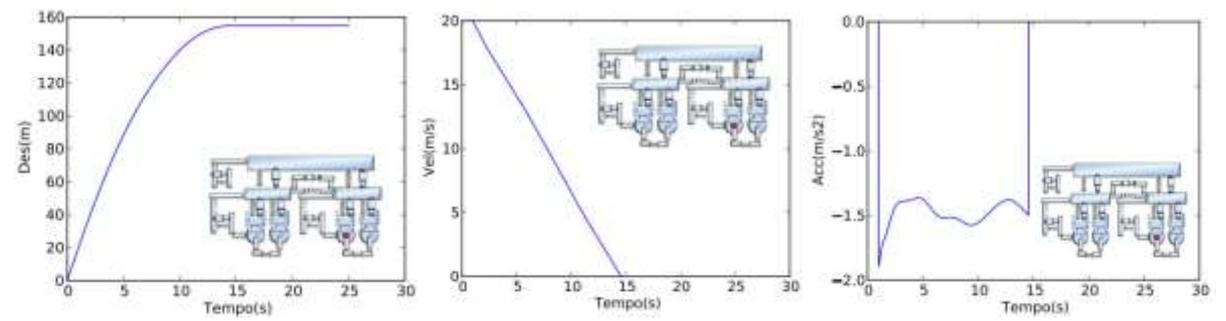
As respostas horizontais são apresentadas na Figura 8.42.



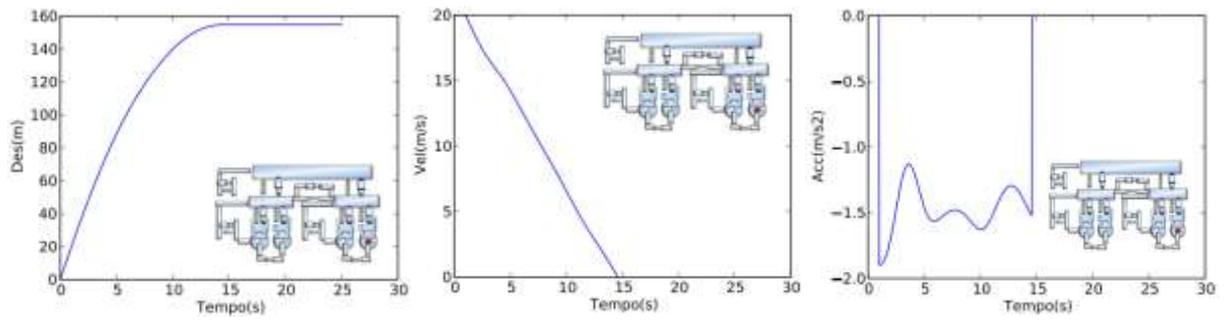
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 8.42 – Respostas horizontais dos deslocamentos, velocidades e acelerações para (a) primeira roda (b) segunda roda (c) terceira roda (d) quarta roda

De acordo com a Figura 8.42, o comportamento é o mesmo em termos dos deslocamentos nas quatro rodas. Os gráficos das velocidades apresentam leves oscilações para a segunda e quarta

roda, isto se deve porque essas rodas estão funcionando como rodas dianteiras de um elemento SM2 que formam parte do veículo completo (SM3).

Os gráficos das acelerações apresentam oscilações diferentes como é esperado, na Figura 8.43, apresenta um maior nível de detalhamento dessas oscilações para que se possa perceber melhor os resultados.

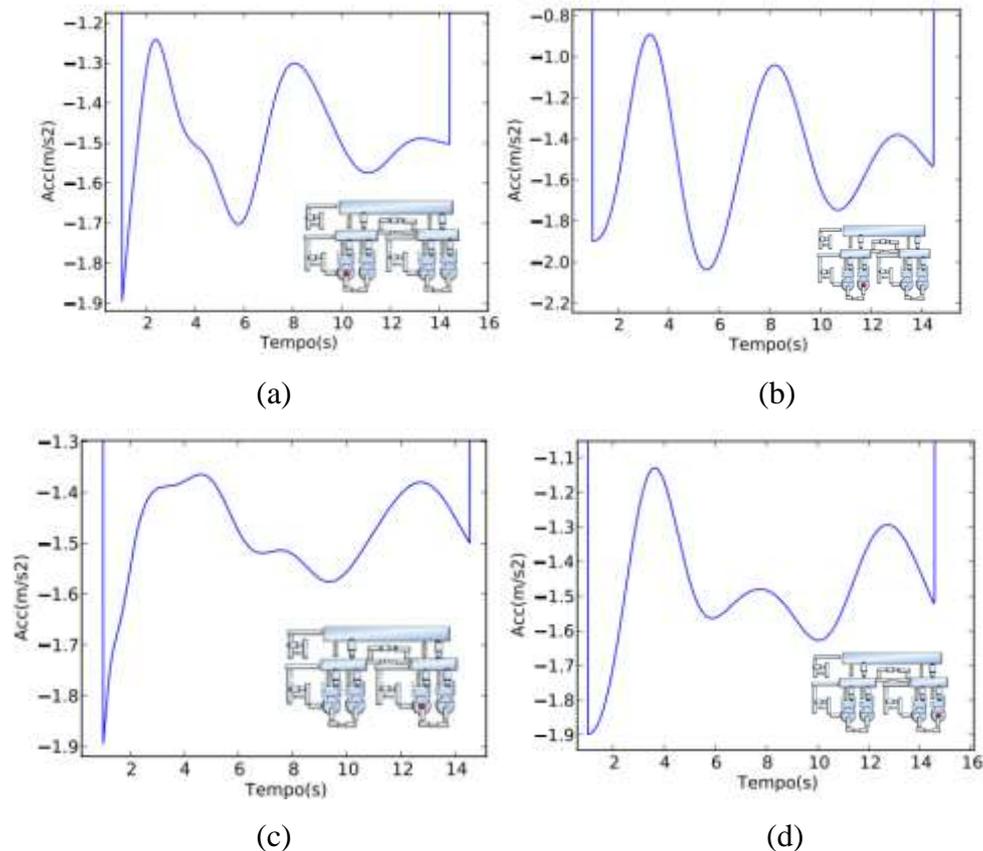


Figura 8.43 – Maior nível de detalhamento da resposta horizontal da aceleração na (a) primeira roda (b) segunda roda (c) terceira roda (d) quarta roda

De acordo com a Figura 8.43, verifica-se que:

- o valor da desaceleração que acontece no início do processo de frenagem (1 s) é o mesmo para todas as rodas;
- a segunda e quarta rodas são as que apresentam maiores desacelerações nos primeiros segundos da análise, após de iniciado o processo de frenagem;

c) antes de estabilizar-se em 14,45 s. (ver intervalo entre 12 e 14 s), o pronunciamento das curvas de desaceleração para cada roda, decrescem da quarta roda para a primeira. O valor da desaceleração do sistema de $1,52 \text{ m/s}^2$;

d) ocorrem oscilações nas acelerações porque a força de frenagem é aplicada instantaneamente.

8.3.1.2 – Segunda abordagem

As respostas horizontais são apresentadas na Figura 8.44 e Figura 8.45.

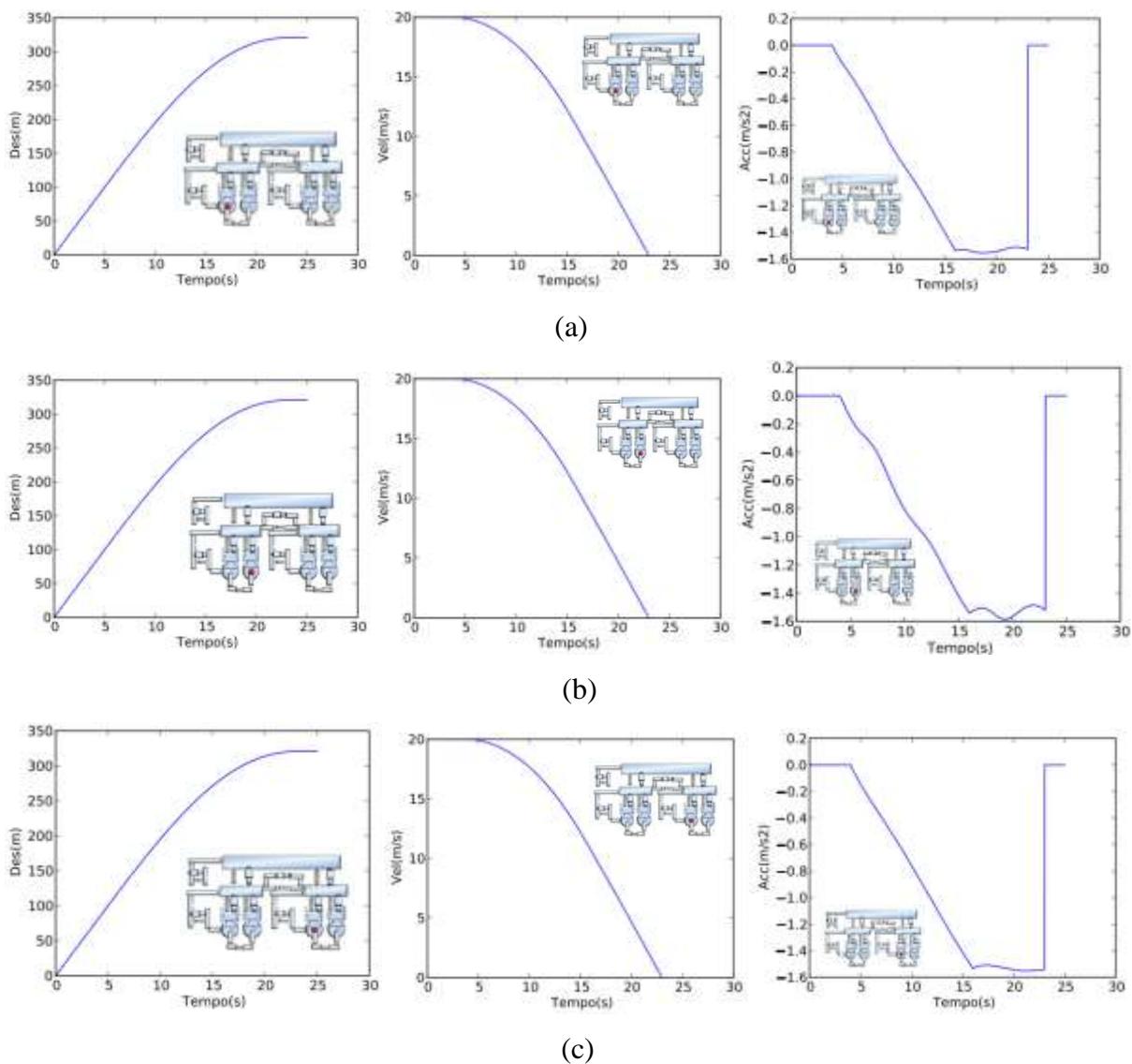
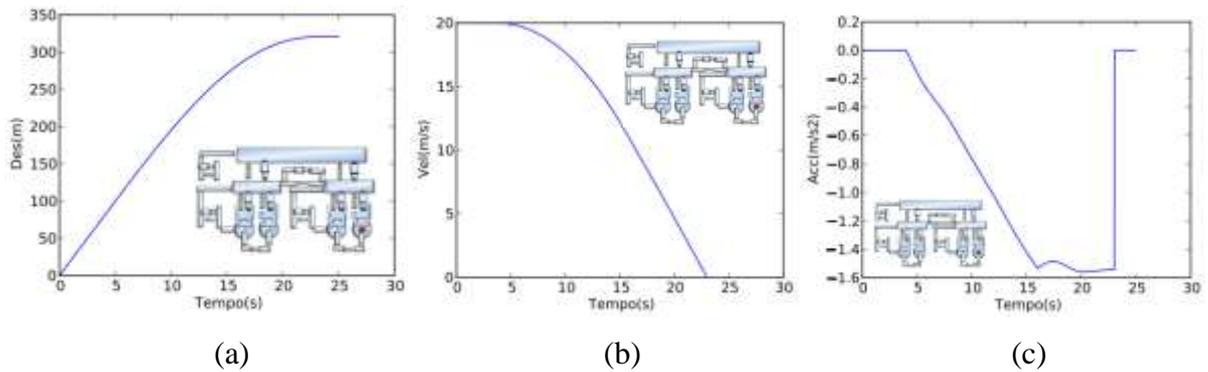


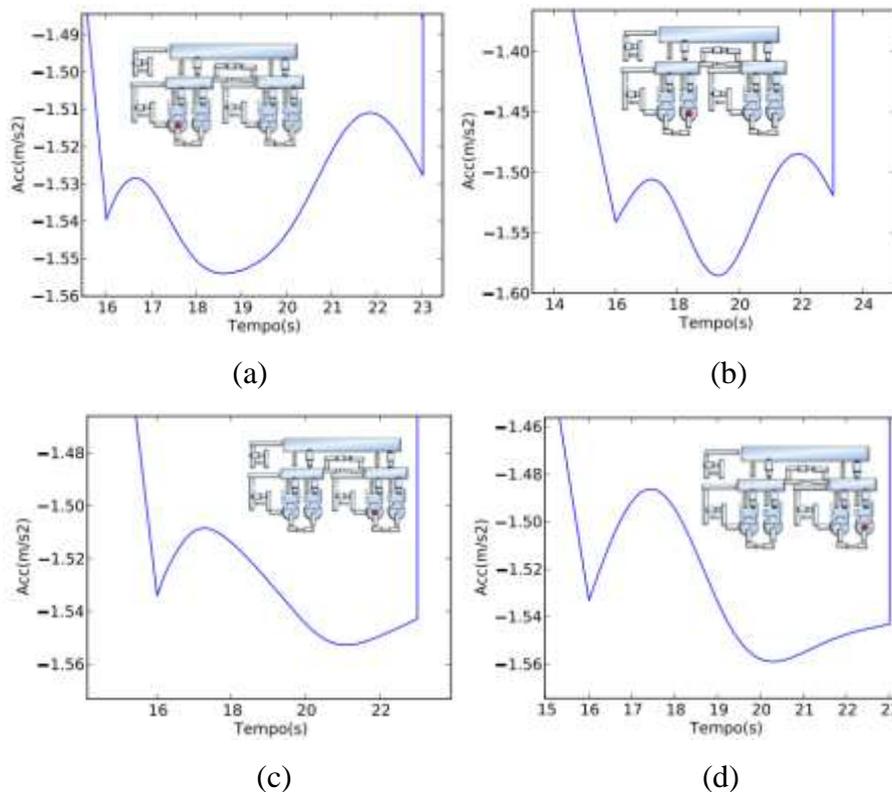
Figura 8.44 – Respostas horizontais do deslocamento , velocidade e aceleração para (a) primeira roda (b) segunda roda (c) terceira roda



(a) (b) (c)
 Figura 8.45 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade e (c) aceleração para a quarta roda

De acordo com a Figura 8.44 e Figura 8.45, o comportamento é o mesmo na resposta do deslocamento e velocidade em todas as rodas.

O comportamento da aceleração apresenta oscilações diferentes, a importância do efeito da frenagem está compreendida no intervalo de tempo de 16 s a 23 s, na Figura 8.46, apresenta um maior nível de detalhamento sobre estas oscilações para perceber melhor os resultados.



(a) (b) (c) (d)
 Figura 8.46 – Maior nível de detalhamento da resposta horizontal da aceleração na (a) primeira roda (b) segunda roda (c) terceira roda (d) quarta roda

De acordo com a Figura 8.46, verifica-se que:

- a) o valor da desaceleração que acontece no início do processo de frenagem é o mesmo para todas as rodas.
- b) as rodas traseiras (primeira e segunda) são as que apresentam maiores desacelerações nos primeiros segundos da análise, após de atingir à força de frenagem máxima no sistema, mas diminuem de valor ao longo do tempo.
- c) para intervalos de tempo próximos do tempo de parada as rodas dianteiras sofrem um aumento da desaceleração, dando a entender que a força de frenagem age com maior intensidade nas rodas dianteiras.
- e) ocorrem oscilações menores em relação com a primeira abordagem, porque a força de frenagem não é aplicada instantaneamente.

8.3.2 – Respostas para os truques do modelo SM3

8.3.2.1 – Primeira abordagem

As respostas horizontais são apresentadas na Figura 8.47 e Figura 8.48.

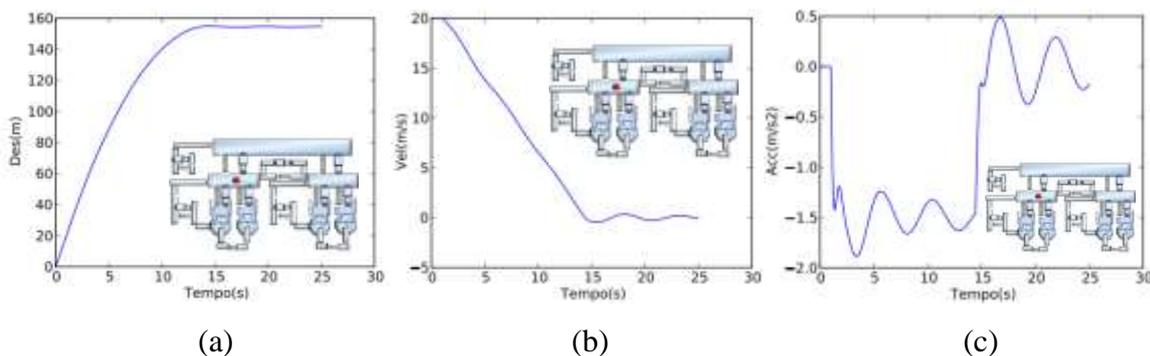


Figura 8.47 – Respostas horizontais (a) deslocamentos (b) velocidades e (c) acelerações do truque da suspensão primária esquerda

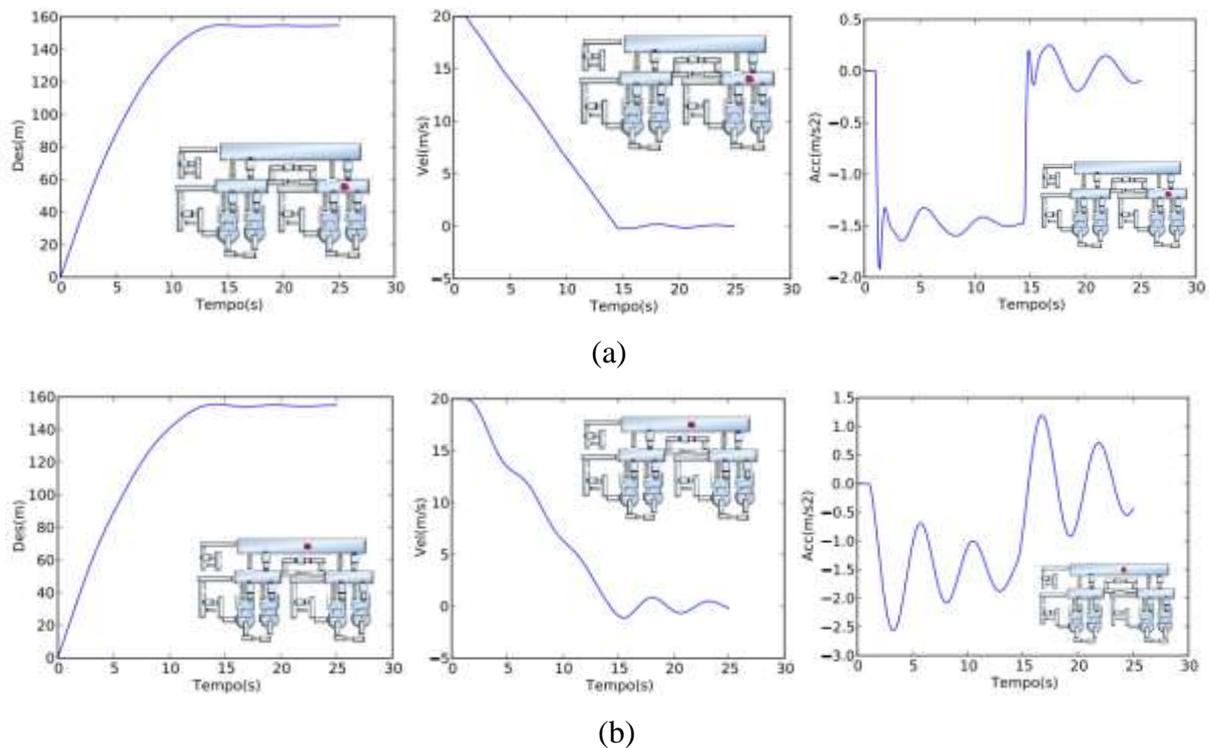


Figura 8.48 – Respostas horizontais dos deslocamentos, velocidades e acelerações para
 (a) truque da suspensão primária direita (b) truque da suspensão secundária

De acordo com a Figura 8.47 e Figura 8.48, verifica-se o seguinte:

- a) a resposta da velocidade apresenta leves oscilações que não aparecem nos gráficos das rodas (ver Figura 8.42) quando o valor da velocidade é nulo, isto deve-se aos sistemas de suspensão horizontal (amortecimento e rigidez) presentes no vagão;
- b) nos gráficos das acelerações, após aproximadamente de 15 s da análise, os truques continua apresentando leves oscilações que não aparecem nos gráficos das rodas (ver Figura 8.42), o que indica que a parte superior do veículo, após as rodas ficarem paradas, demora um tempo adicional para estabilizar-se e parar, sendo de maior intensidade no truque de suspensão secundária;
- c) o truque de suspensão primária direita apresenta maior desaceleração que o truque de suspensão primária esquerda, indicando que existe uma força de frenagem maior na parte dianteira do modelo SM3;

d) as respostas do truque de suspensão secundária apresentam maiores oscilações que os truques de suspensão primária, fazendo desta a parte mais sensível do sistema,

8.3.2.2 – Segunda abordagem

As respostas horizontais são apresentadas na Figura 8.49.

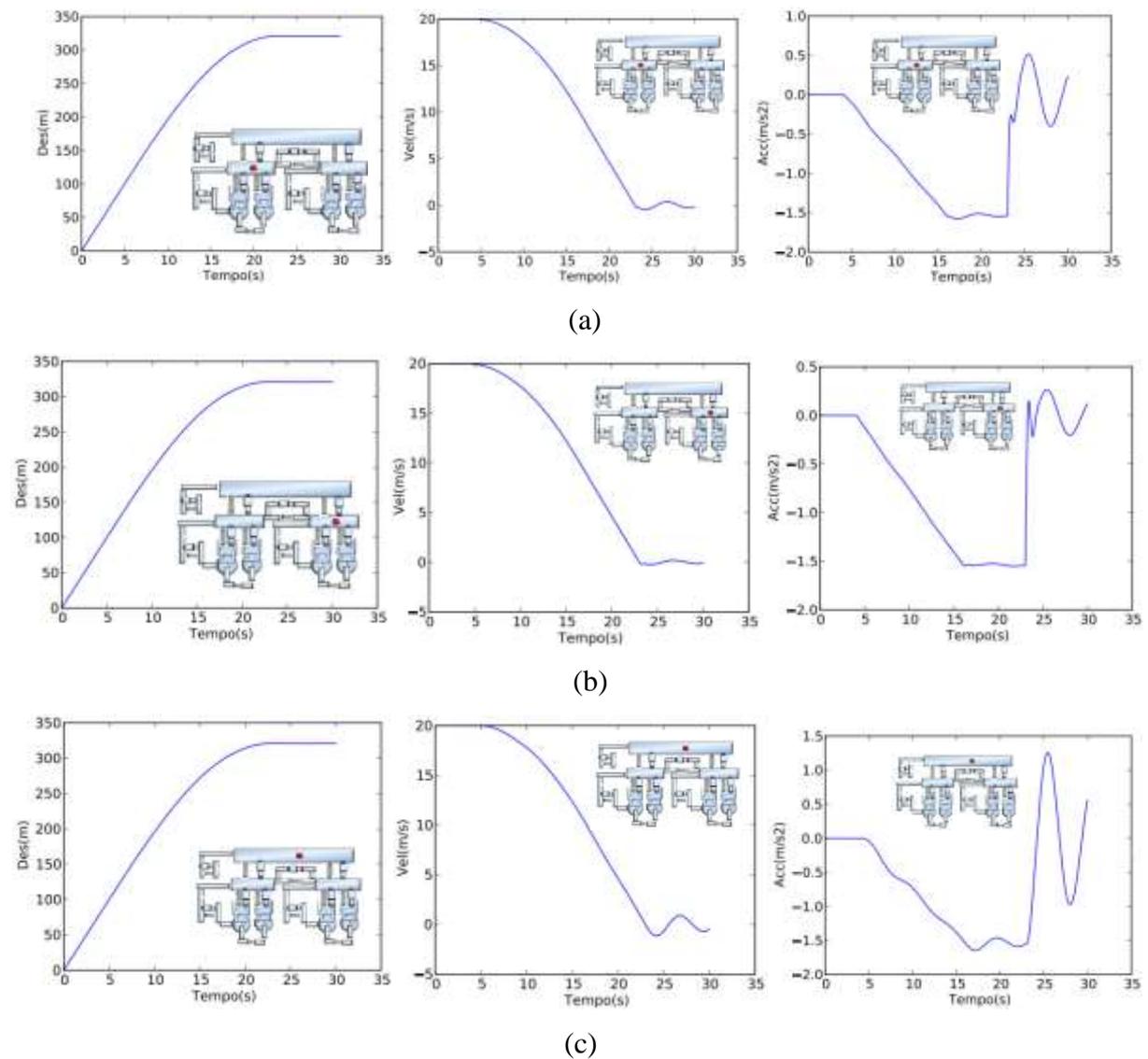


Figura 8.49 – Respostas horizontais dos deslocamentos, velocidades e acelerações para (a) truque da suspensão primária direita (b) truque da suspensão secundária

De acordo com a Figura 8.49, verifica-se que:

- a) o comportamento do sistema é semelhante ao descrito na primeira abordagem;
- b) os gráficos das velocidades apresentam leves oscilações que não aparecem nos gráficos das rodas (ver Figura 8.44 e Figura 8.45), quando o valor da velocidade é nulo, isto deve-se aos sistemas de suspensão horizontal (amortecimento e rigidez) presentes no vagão;
- c) o truque de suspensão primária direita apresenta menores oscilações das velocidades, quando as rodas param (24 s), que o truque de suspensão primária esquerda, indicando que existe uma força de frenagem maior na parte dianteira do veículo;
- d) as respostas do truque de suspensão secundária apresentam maiores oscilações que os truques de suspensão primária, fazendo desta a parte mais sensível do sistema

8.3.3 – Respostas no centro da ponte

8.3.3.1 – Primeira abordagem

As respostas horizontais são apresentadas na Figura 8.50 e Figura 8.51.

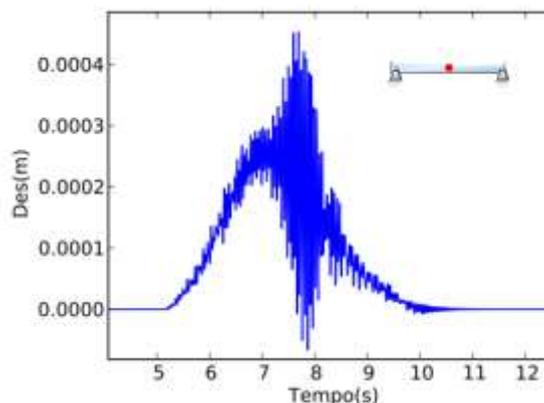


Figura 8.50 – Resposta horizontal do deslocamento no centro da ponte.

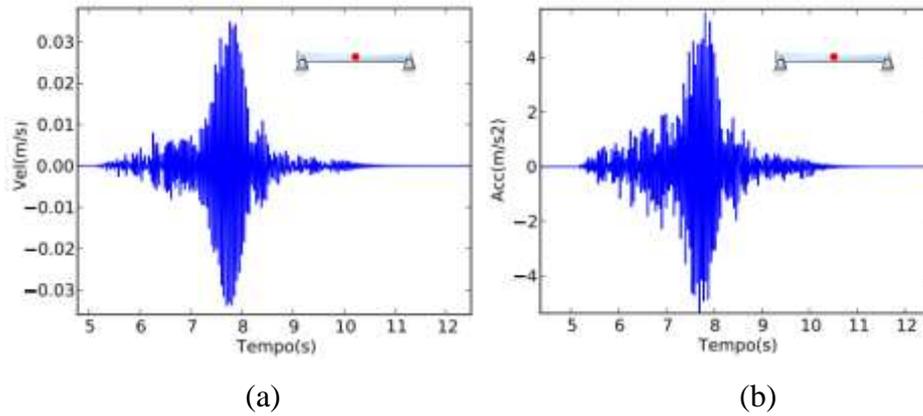


Figura 8.51 – Respostas horizontais da (a) velocidade (b) aceleração no centro da ponte.

De acordo com a Figura 8.50 e Figura 8.51, o máximo deslocamento horizontal no centro da ponte é de 0,00052 m, velocidade máxima de 0,032 m/s, ambos os valores são desprezíveis. A desaceleração que é o fenômeno em análise apresenta um valor máximo de 4,5 m/s², representando maior importância em comparação com os outros valores.

O tempo necessário para a primeira roda entrar na ponte é de 5,2 s e para a última roda sair da ponte é de 10 s. A Figura 8.52 mostra o deslocamento obtido no centro da ponte. Pode se observar que a flecha máxima 0,11 m acontece aproximadamente no tempo de 7,25 s. O valor máximo da aceleração vertical é de 1.51 m/s²

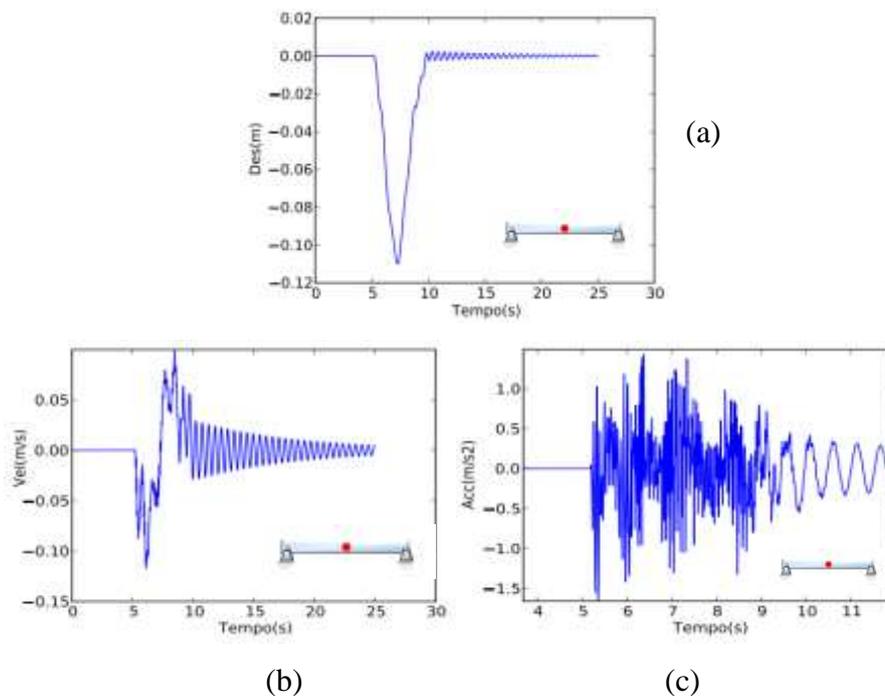


Figura 8.52 – Respostas verticais (a) deslocamento (b) velocidade (c) aceleração no centro da ponte.

8.3.3.2 – Segunda abordagem

As respostas horizontais são apresentadas na Figura 8.53.

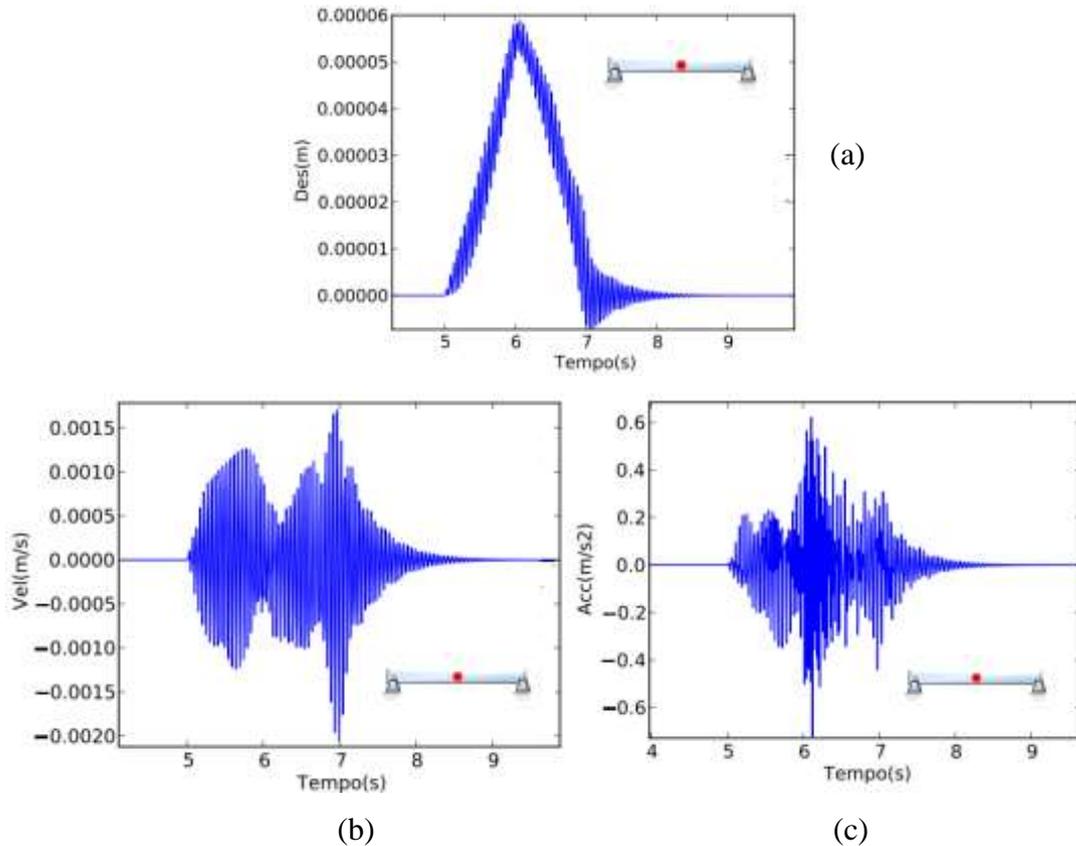


Figura 8.53 – Respostas horizontais (a) deslocamento (b) velocidade (c) aceleração no centro da ponte.

De acordo com a Figura 8.53, o máximo deslocamento horizontal no centro da ponte é de 0,00006 m, velocidade máxima de 0,0015 m/s, ambos os valores são desprezíveis. A desaceleração que é o fenômeno em análise apresenta um valor máximo de 0,65 m/s², representando maior importância em comparação com os outros valores.

O tempo necessário para a primeira roda entrar na ponte é de 4,9 s e para a última roda sair da ponte é de 7,2 s. A Figura 8.54 mostra o deslocamento obtido no centro da ponte. Pode se observar que a flecha máxima 0,122 m acontece aproximadamente no tempo de 6,38 s. O valor máximo da aceleração vertical é de 10 m/s²

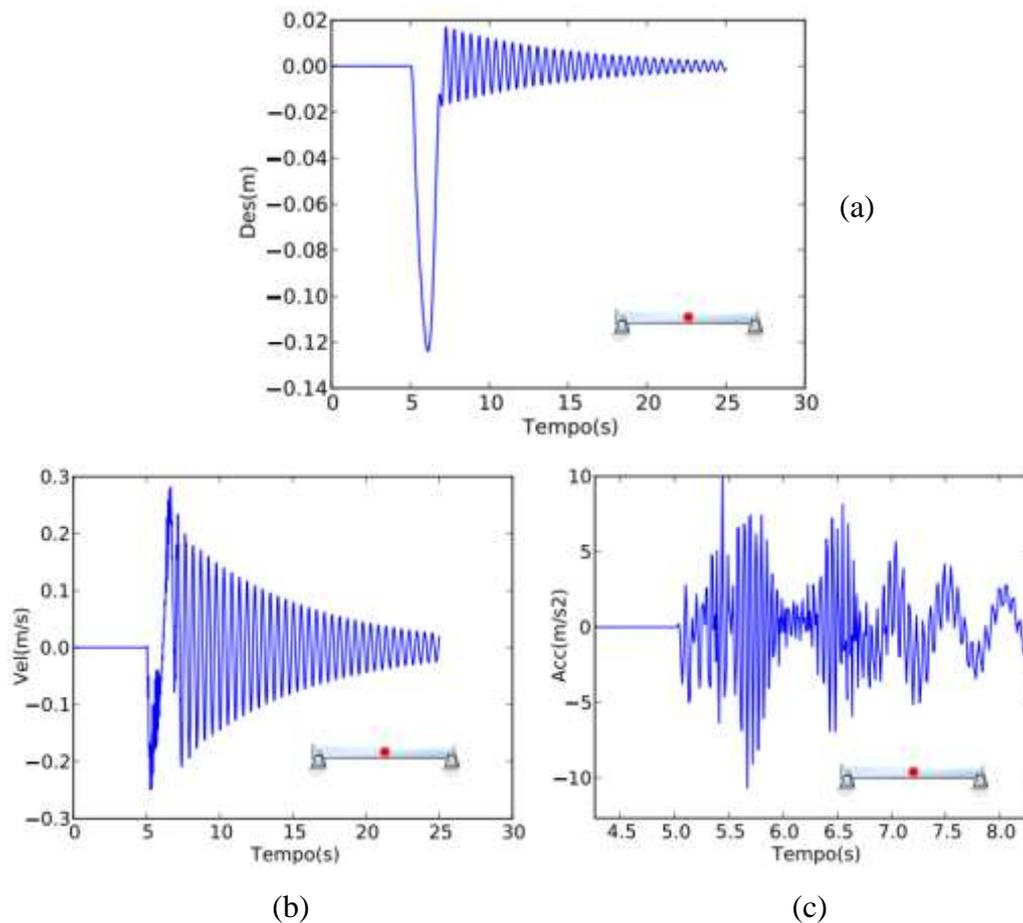


Figura 8.54 – Respostas verticais (a) deslocamento (b) velocidade (c) aceleração no centro da ponte.

8.3.4 – Notas finais sobre os resultados das respostas no sistema

O intervalo de tempo em que a velocidade permanece constante é maior na segunda abordagem, por isso o tempo que as rodas levam para entrarem e saírem da ponte são menores em comparação com a primeira abordagem.

Os valores das respostas horizontais, ao longo do tempo, no centro da ponte, foram maiores na primeira abordagem. A principal influência deve-se à força de frenagem que é considerada constante ao longo do tempo; portanto os efeitos dinâmicos sobre a viga são maiores. Outro detalhe é a forma de vibração, de forma mais pronunciada para os gráficos correspondentes à primeira abordagem.

Durante a aplicação dos freios, a parte superior do veículo (truques) movimenta-se para a frente, e esse movimento faz as rodas traseiras aumentarem sua velocidade, sendo o feito mais crítico para a segunda roda.

Por falta de dados reais correspondentes às propriedades da rigidez das molas horizontais, esses valores foram igualados aos valores da rigidez das molas verticais, da mesma forma que foi considerada por Shen-Haw Ju *et al.* (2007). Os valores da rigidez das molas horizontais são importantes, porque ajudaram a diminuir as acelerações excessivas que poderiam aparecer no sistema.

Por último, a Tabela 8.7 apresenta e compara os valores das respostas horizontais da primeira roda do modelo SM3, de acordo com cada abordagem.

Tabela 8.7 - Comparação de resultados entre abordagens para modelo SM3

Obtido por:	Distância de parada (m)	Tempo de parada (s)	Desaceleração (m/s^2)
Primeira abordagem	155,0	14,60	1,52
Segunda abordagem	320,0	23,10	1,54

Em relação à aceleração vertical apresentam-se os seguintes gráficos das acelerações verticais do truque de suspensão secundária, com o intuito de se verificar os limites de conforto para os passageiros, de acordo com cada abordagem.

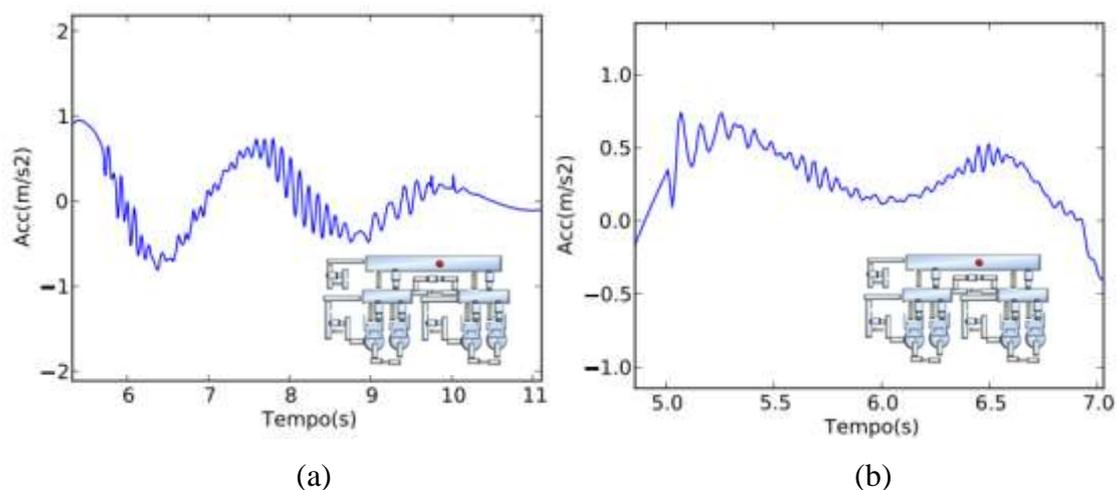


Figura 8.55 – Resposta da aceleração vertical do truque de suspensão secundária do comboio.
(a) primeira abordagem (b) segunda abordagem

De acordo com o (CEN 1990-A2, 2005), são estabelecidos níveis máximos de aceleração para o conforto dos passageiros, que está ligado diretamente com a aceleração vertical no interior da caixa do veículo, de acordo com a Tabela 8.8 abaixo.

Tabela 8.8 - Níveis recomendados de conforto para passageiros

Nível de conforto	Aceleração vertical do veículo (m/s^2)
Muito bom	1,0
Bom	1,3
Aceitável	2,0

A avaliação do conforto dos passageiros para a análise dinâmica realizada, considerando a interação veículo estrutura para o comboio, apresentou uma aceleração igual $a = 1.0 m/s^2$ e $a = 0.7 m/s^2$ na primeira e segunda abordagem respectivamente, como se ilustra na Figura 8.55. De acordo com Código Europeu, ambas as abordagens são classificadas com um nível de conforto estabelecido como muito bom.

9 – CONCLUSÕES

9.1 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi representado o efeito da frenagem em veículos que podem ser modelados como simples carga percorrendo uma ponte, assim como modelos mais complexos.

O elemento de interface formulado neste trabalho está composto por molas e amortecedores dispostos tanto na direção horizontal como na vertical, com o intuito de que o deslocamento seja estudado nas duas direções. As molas horizontais simulam a transmissão de forças de aderência dinâmica no processo de frenagem, integrando este fenômeno à análise do sistema. As molas verticais simulam o contato entre as rodas dos veículos e a ponte, além de transmitir forças verticais.

Foram realizadas duas abordagens: a primeira abordagem, baseada na cinemática, considera a força de frenagem constante do início até o fim; a segunda abordagem, baseada na dinâmica, considera a força de frenagem variando com o tempo, de acordo à curva de pressão no cilindro do freio. Portanto, esta última abordagem apresentou melhores resultados, de acordo com os exemplos da seção 8.

A precisão dos resultados numéricos pode ser melhorada aumentando o número de elementos na discretização da viga, ou diminuindo o tamanho do passo de tempo, em relação às respostas (deslocamento, velocidade e aceleração) verticais do veículo, não acontecendo o mesmo com as respostas horizontais. Isto se deve ao fato que a distância de parada e o tempo de parada do veículo dependem principalmente da força de frenagem ou coeficiente de aderência definido.

Os fatores que influenciam diretamente, a resposta horizontal no modelo do veículo foram observados durante a validação do programa, dentre eles, os mais importantes foram a rigidez e amortecimento horizontal do sistema de suspensão do veículo. Uma escolha adequada destes parâmetros para representar o veículo é crucial para obter a resposta final do sistema. Vale ressaltar que a falta de parâmetros geométricos e físicos reais dos veículos dificultou uma modelagem mais precisa, obrigando a utilização de modelos de veículos idealizados que não representam fielmente a dinâmica real do veículo.

Por último, a implementação do programa computacional PyDyn, apresentou resultados satisfatórios, as desacelerações horizontais encontra-se dentro dos limites para veículo de carga de pouca velocidade, cuja variação vai de 0,5 até 1,5 m/s^2 , dependendo das características e função do veículo. Para as acelerações verticais apresentou um valor de conforto para o passageiro considerado como muito bom.

9.2 – SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Desenvolver no programa PyDyn, metodologias para modelagem da frenagem, que considerem, condições próprias para o funcionamento do trem, tais como: a resistência das rodas do trem, a resistência de rampa, a resistência de curva, eficiência da frenagem, que vão proporcionar resultados mais de acordo com o completo funcionamento do trem. Também pode-se desenvolver metodologias que considerem as irregularidades existentes nos trilhos ferroviários, e considerando também a frenagem.

Adotar a curva de pressão no cilindro do freio, dividida em quatro trechos, cada um deles com valores respectivos em função da pressão adotada e outros parâmetros. Este modelo de curva de pressão foi apresentado por Barbosa (1993).

Estudo das forças longitudinais geradas no sistema de acoplamento (engate), durante a frenagem, entre dois ou mais modelos desenvolvidos. Quando se inicia o processo da frenagem os vagões da frente comecem a frear antes dos de trás. Isto provoca a compressão do trem gerando forças no sistema de acoplamento. Em trens longos e pesados estas forças certamente devem ser grandes e devem ser adequadamente amortecidas e absorvidas pelos sistemas de acoplamento e pela estrutura do vagão.

Realizar ensaios experimentais, de tal forma que permita a validação dos modelos através da comparação dos resultados numéricos com os mesmos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Associação Brasileira de Normas Técnicas, A. (1986). *"Norma NB-58. Freio Ferroviario"*. Rio de Janeiro.
- Associação Brasileira de Normas Técnicas, A. (1991). *"Norma CB-60. Vagão ferroviario. Classificação"*. Rio de Janeiro.
- Association Air Brake, A. (1975). *"Engineering and design of railway brake systems"*. Chicago.
- Barbero, J. D. (2001). "Dinámica de puentes de ferrocarril para alta velocidad: métodos de cálculo y estudio de la resonancia". *Tesis doctoral*, 293. Madrid, Spain: Universidad Politécnica de Madrid.
- Barbosa, R. S. (1993). "Estudo da dinâmica longitudinal do trem". *Dissertação*. Campinas, São Paulo, Brasil: Universidade Estadual de Campinas.
- Battista, L. C. (1995). *"On the fundamental load problem moving"*. Oslo: North-Holland.
- CEN 1990-A2. (2005). "Basis of Structural Design". EUROCODE.
- Chopra, A. K. (1995). *"Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering"*. Rio de Janeiro, New Jersey, EUA: Prentice Hall.
- Clough, R. W., & Penzien, J. (1975). *"Dynamics of Structures"*. New York, EUA: McGraw-Hill.
- Correa, W. d. (2003). "Vibrações em pontes ferroviárias". *Dissertação de Mestrado*, 106. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: UFRJ.

- Correa, W. d. (2008). "Controle das Vibrações induzidas pela interação dinâmica entre trilhos-dormentes-estruturas de aço de pontes ferroviárias". *Tese de Doutorado*, 209. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: COPPE/UFRJ.
- Durand, R. (2008). "Análise Tridimensional de Estruturas Geotécnicas Submetidas a Reforço e Drenagem". *Tese de Doutorado*, 153. Brasília, DF, Brasília: Universidade de Brasília.
- Durand, R., Silva, D. A., & Brito, J. L. (2012). "Interface Element For The Dynamic Analysis of Vehicle-Structure Interaction". *10^o World Congress on Computational Mechanics*, p. 14:19082.
- Felicio, L. C. (1984). "Modelagem e Simulação do Comportamento Dinâmico de uma Composição Ferroviária". *Dissertação, Volumen 2, Relatório Técnico nº 20.311*. São Paulo, Brasil: Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo.
- Ferreira, P. R. (2005). "Estudo do desempenho na frenagem de um bi-trem com suspensão em tandem e com ABS". *Dissertação*. São Carlos, São Paulo, Brasil: Universidade de São Paulo.
- Frýba, L. (2001). "A rough assesement of railway bridges for high speeds trains". *Engineering Structures*, 23, pp. 548–556.
- Gabaldón, F., Riquelme, F., & Goicolea, J. M. (2005). "Análisis dinámico de estructuras sometidas a acciones de trenes de alta velocidad, considerando la interacción vehículo-estructura". *Congreso de métodos numéricos em ingeniería, Granada, España*.
- Hamilton, D. S. (1979). "*Historia ilustrada do trem*". Rio de Janeiro: Fresinbra.
- Martins, R. S. (1999). "Simulação da frenagem de trem unitario de carga". *Dissertação*. Campinas, São Paulo, Brasil: Universidad Estadual de Campinas.

- Montoya, R. C. (2009). "Desenvolvimento de algoritmo e implementação computacional para a análise dinâmica de pontes ferroviárias considerando interação veículo-estrutura". *Dissertação*. Belém, Pará, Brasil: UFPa.
- Newmark, N. M. (1959). "A Method of computation for structural dynamics". *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 85 EM3, pp. 67-94.
- Norman, R. R. (1980). "The braking of long trains". *Dissertação*. Nedlands, Australia: University of Western Australia.
- Paz, M. (1992). "*Dinámica estructural teoría e cálculo*" (3º ed.). (M. Paz, Trad.) Sant Joan Despí, Barcelona, Spain: Reverté.
- Python Software Foundation. (s.d.). <http://www.python.org/>. Acesso em 2012
- Ribeiro, M. M. (1983). "Distância de parada de trem pelo método dos intervalos". *Dissertação*, 299-307. Salvador, Brasil: ABNT/CVRD.
- Shen-Haw, J., & Hung-Tan, L. (2007). "A finite element model of vehicle-bridge interaction considering braking and acceleration". *Journal of sound and vibration*, pp. 46-57.
- Silva, A. D. (2012). "Programa computacional para análise dinâmica da interação veículo-estrutura em pontes ferroviárias". *Dissertação*. Brasília, Brasil: Universidade de Brasília.
- VALEC, E. C. (2010). "*Evolução do transporte ferroviário*". Acesso em 2010, disponível em <http://www.valec.gov.br>.
- Yang, Y. B., Yau, J. D., & Hsu, L. C. (1997). "Vibration of simples beams due to trains moving at high speeds". *Engineering Structures*, 19, pp. 936-944.

APÊNDICES

A – INSTRUÇÃO PARA USO DO PROGRAMA PYDYN

Para as análises no programa PyDyn, é apresentado neste apêndice, um sistema de ajuda que contém instruções para o usuário, onde podem ser obtidas informações sobre os componentes dos elementos. A linguagem de Pydyn, como programação orientada a objetos, esta composta de classes. Com a finalidade de explicar todas as classes implementadas no programa, o autor chamará algumas classes como função e a outras como elemento.

Cabe ressaltar que para cada abordagem, no que diz respeito à frenagem, foi criada uma biblioteca, devido à forma diferente de cada abordagem. As funções e elementos para ambas as bibliotecas são as mesmos, a única diferença se dá na função Domain, na hora de criar a força de frenagem, felizmente esta função é feita automaticamente pelo programa, sendo definidas antes as condições iniciais dos modelos pelo usuário. A primeira abordagem trabalha com a biblioteca dynamics1 e a segunda com dynamic2.

Os tipos de elementos e funções, implementados no programa PyDyn, para as bibliotecas (dynamic1 e dynamic2), durante este trabalho são apresentados a seguir:

- **GRAU DE LIBERDADE** é uma função dentro da biblioteca, como principal contribuição, encarrega-se de definir os graus de liberdade, fazendo uma correta numeração dos graus de liberdade, de cada elemento que compõe o sistema, segundo as condições iniciais. Entre outras contribuições, que executa automaticamente de forma interna, temos:

- ✓ Permite definir a que grau de liberdade do sistema, deve ser atribuído a velocidade inicial.
- ✓ Permite definir a que grau de liberdade do sistema, deve ser atribuído a força externa aplicada sobre o elemento.
- ✓ Permite armazenar as respostas ao longo do tempo (deslocamentos, velocidades, acelerações), para posteriormente plotar as mesmas.
- ✓ Permite definir que graus de liberdade serão restringidos.
- ✓ Permite recalcular, a posição durante a frenagem.

Nome da classe na biblioteca PyDyn DOF ();

- **NUDO** é uma função dentro da biblioteca, como principal contribuição, encarrega-se de definir o número de nós do sistema, dando uma correta numeração, a cada um deles, para cada elemento que compõe o sistema, segundo as condições iniciais.

Trabalha de forma direta com a classe DOF, chamando internamente esta função para definir as características próprias para o nó.

Nome da classe na biblioteca PyDyn NODE ();

- **DOMINIO** é uma função dentro da biblioteca, destacada como fundamental, que tem como principal contribuição, definir todas as matrizes de rigidez, amortecimento e massa para cada elemento do sistema, segundo as condições iniciais. Entre outras contribuições que executa automaticamente de forma interna, temos:

- ✓ Permite definir as características próprias de cada elemento como: conectividades, condições de contorno, o modelo, etc.
- ✓ Permite definir as características da frenagem como: tempo de frenagem, atrito, força de frenagem, etc.
- ✓ Permite definir o passo de tempo e o tempo total de análise.
- ✓ Permite definir os nós que vão ser plotados, o nó central da viga que pode ou não ser plotado.
- ✓ Permite criar as condições necessárias para executar o processo de integração de Newmak.
- ✓ Permite criar os vetores para as respostas do sistema.

Nome da classe na biblioteca PyDyn DOMAIN ();

- **ELEMENTO** é uma função dentro da biblioteca, que tem como principal contribuição, iniciar as variáveis de conectividade e tempo, para cada elemento do sistema. A partir desta função as demais classes se derivaram, chamando a esta classe em linguagem de programação, como classe mãe.

Nome da classe na biblioteca PyDyn ELEMENT ();

A seguir são detalhadas às classes que se originam a partir de ELEMENT, definidas como elementos que podem conformar o sistema:

- **VIGA** é um elemento uniaxial, bidimensional, linear com capacidades de atuar na tração, compressão e flexão. O elemento tem três graus de liberdade por nó, sendo eles, duas translações segundo os eixos x e y, e uma rotação em torno do eixo z.

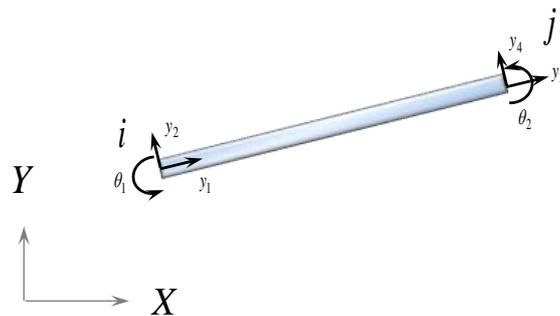


Figura A. 1 – Elemento VIGA

Características do elemento VIGA:

Nome da classe na biblioteca PyDyn BRIDGE ();

Nós: 2 (i – j)

Graus de liberdade: 3 DOF, UX, UY e UZ, duas translações segundo os eixos x, y e uma rotação ao redor do eixo z;

Mostra a atuação de forças e momentos no sistema de coordenadas do elemento para os 3 DOF;

n usado para informar o número de elementos de VIGA intermediários existente entre os nós i e j que se solicita para discretização (VIGA);

Constantes geométricas:

A = Área da seção transversal;

L = Comprimento longitudinal total da ponte em x;

Propriedades dos materiais:

E = Módulo de Elasticidade Longitudinal ou de Young.

dens = Massa por unidade de comprimento;

I = Momento de inércia em z

ξ = Taxa de amortecimento da ponte.

- **INTERF** é um elemento bidimensional, linear com capacidades de atuar na tração ou compressão, em ambas as direções horizontal e vertical. O elemento tem dois graus de liberdade por nó, sendo eles, translações segundo o eixo x e y . Está incluída a capacidade de resolver problemas com interação veículo-estrutura, permitindo que o nó das extremidades do elemento tenha uma conectividade com o elemento LUMPEDMASS2D.

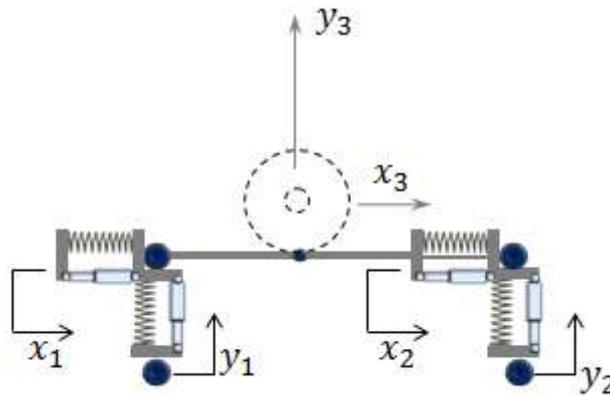


Figura A. 2 – Elemento INTERF

Características do elemento INTERF:

Nome da classe na biblioteca PyDyn `INTERFACE_GROUND_2D ()`;

Nós: 3 (i – j - k) k é o nó de conectividade com a roda

Graus de liberdade: 6 DOF, três translações segundo o eixo x e três translações segundo o eixo y ;

Transfere a força devido o carregamento móvel para coordenadas do nó do elemento PONTE;

lam e eta , são usados como coeficientes de proporcionalidade, em função das propriedades do elemento VIGA.

Constantes:

vel = Velocidade do veículo;

- **RODA** é um elemento que pode ser utilizado para representar a passagem das rodas do veículo na análise de pontes ferroviárias. Dependendo da aplicação, o elemento pode atuar como somente um ponto com carga móvel no sistema e, é conectado ao elemento de INTERF, com dois graus de liberdade por roda; translações na direção do eixo coordenado x e do eixo coordenado y .

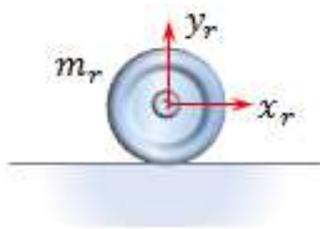


Figura A. 3 – Elemento RODA

Características do elemento RODA:

Nome da classe na biblioteca PyDyn LUMPEDMASS2D ();

Nós: 1 (i);

Graus de liberdade: 2 DOF, elemento plano, uma translação segundo o eixo x e outra translação segundo o eixo y ;

Propriedade do elemento:

mr = Massa da roda.

- **SM1** considera o trem como um conjunto de eixos independentes correspondentes à posição de cada roda, seu sistema de suspensão (mola e amortecedor) podem ser submetidos à tração e compressão, nas direções horizontal e vertical de seu eixo, além de considerar a massa suspensa juntamente com graus de liberdade em ambas as direções.

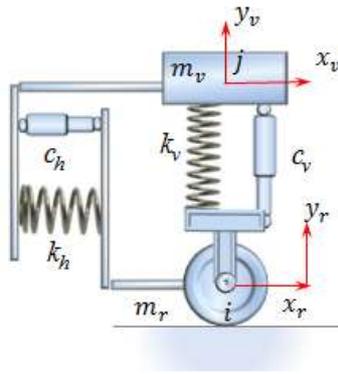


Figura A. 4 – Elemento SM1

Características do elemento SM1:

Nome da classe na biblioteca PyDyn SM1_2D();

Nós: 2 (i – j);

Graus de liberdade: 4 DOF, quatro translações, dois para o eixo x e dois para o eixo y.

Propriedades dos materiais:

$m(r,s)$ = Massa da roda (r) ou massa suspensa do truque (s);

$k(h,v)$ = Coeficiente de rigidez horizontal (h) ou vertical (v) do sistema de suspensão do truque, conectando com a roda;

$c(h,v)$ = Coeficiente de amortecimento horizontal (h) ou vertical (v) do sistema de suspensão do truque, conectando com a roda;

- **SM2** é um elemento que pode ser usado como um modelo de veículo na forma simplificada. Dependendo da aplicação, o elemento pode atuar como sistema de suspensão primária e secundária do veículo ou como o próprio veículo de maneira simplificada, e seu sistema de suspensão (mola e amortecedor) podem ser submetidos à tração e compressão, nas direções horizontal e vertical de seu eixo, além de considerar a massa suspensa juntamente com sua inércia. É considerado nos nós inferiores dois graus de liberdade de translação por nó e no superior, três graus de liberdade, com translações: na direção do eixo coordenado x, do eixo coordenado y e rotação no z.

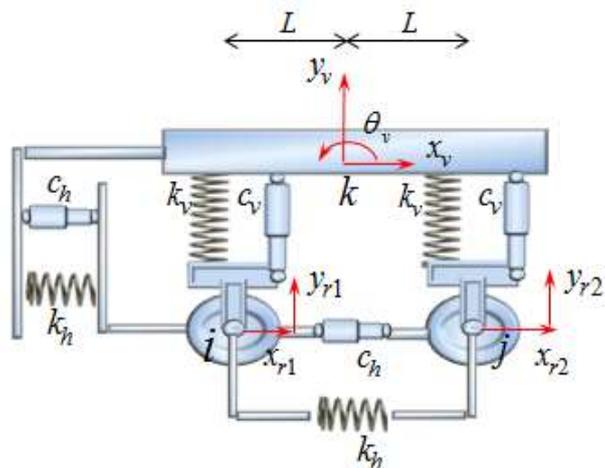


Figura A. 5 – Elemento SM2

Características do elemento SM2:

Nome da classe na biblioteca PyDyn SM2_2D();

Nós: 3 (i – j - k);

Graus de liberdade: 7 DOF, três translações segundo o eixo y e uma rotação em relação ao eixo z ;

Propriedades dos materiais:

$m(r,s)$ = Massa da roda (r) ou massa suspensa do truque (s);

$k(h,v)$ = Coeficiente de rigidez horizontal (h) ou vertical (v) do sistema de suspensão do truque, conectando com a roda;

$c(h,v)$ = Coeficiente de amortecimento horizontal (h) ou vertical (v) do sistema de suspensão do truque conectando com a roda;

L = Distância dos nós extremos do truque em relação ao central.

- **VAGÃO** é um elemento que representa o modelo de veículo completo. O elemento atua com um sistema de suspensão primária e secundária, seu sistema de suspensão (mola e amortecedor) pode ser submetido à tração e compressão na direção de seu eixo, além de considerar a massa suspensa dos truques e da caixa juntamente com sua inércia. É

considerado nos nós inferiores dois graus de liberdade por nó e nos superiores, três graus de liberdade, com translações na direção do eixo coordenado x e y, e rotação no z.

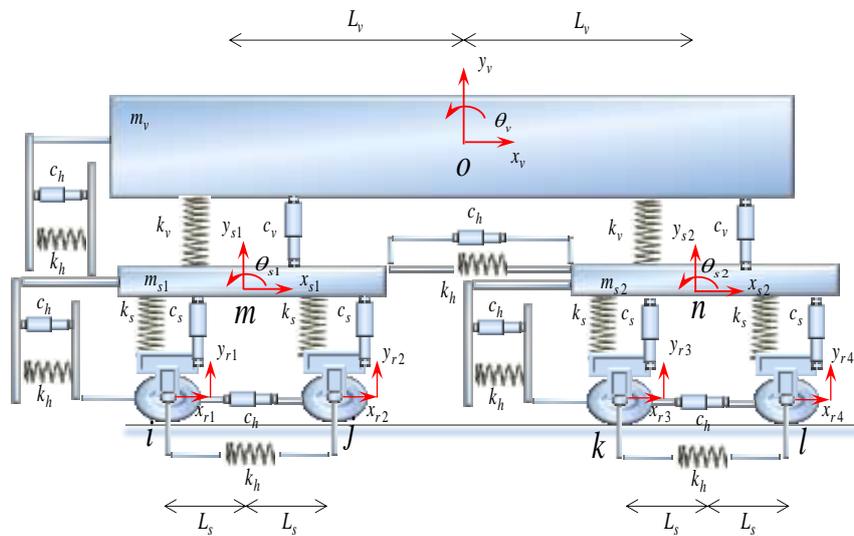


Figura A. 6 – Elemento VAGÃO

Características do elemento VAGÃO:

Nome da classe na biblioteca PyDyn SM3_2D ();

Nós: 7 (i – j – k – l – m – n – o);

Graus de liberdade: 17 DOF, sete translações segundo o eixo x, sete translações segundo o eixo y e três rotações em torno do eixo z;

Propriedades dos materiais:

m_v = Massa da caixa;

k_v = Coeficiente de rigidez do sistema de suspensão da caixa;

c_v = Coeficiente de amortecimento do sistema de suspensão da caixa;

L_v = Distância dos nós extremos da caixa em relação ao central;

m_s = Massa do truque;

k_s = Coeficiente de rigidez do sistema de suspensão do truque;

c_s = Coeficiente de amortecimento do sistema de suspensão do truque;

L_s = Distância dos nós extremos de cada truque em relação ao central;