Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado em Matemática

Atratores e Dimensão Fractal

por

Tiago de Lima Bento Pereira

Orientadora: Prof^{a}. Dr^{a}. Simone Mazzini Bruschi

Brasília-DF

2013

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Atratores e Dimensão Fractal

por

Tiago de Lima Bento Pereira*

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 12 de setembro de 2013.

Comissão examinadora:

____

Prof^a.Dr^a. Simone Mazzini Bruschi - MAT/UNB (Orientadora)

____

Prof^a.Dr^a. Gleiciane da Silva Aragão - UNIFESP

____

Prof^o.Dr^o. Ricardo Ruviaro - MAT/UNB

* o autor foi bolsista CAPES durante a elaboração deste.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pai-eterno e todo-poderoso, pelo amor com o qual me fortaleceu durante toda a minha vida em especial durante a realização deste.

Aos meus pais, Waldison e Divina, a minha irmã, Beatriz, a minha eterna gratidão por acompanharem meus passos na construção desse caminho chamado vida, dando-me força, auxiliando, compreendendo e me fortalecendo nas horas difíceis.

À minha orientadora, Professora Simone, que com muita paciência, dedicação e principalmente por sua sabedoria, contribuiu de forma imensurável a conclusão de mais esta etapa da minha vida.

Ao Fábio (Bino), meu companheiro de "*Kit*" e parceiro para todas as horas nestes últimos anos. Ao pessoal do "bloco B", pessoas que tornaram mais agradavél este período. Ao Sédio, que me acolheu em sua casa e tornou mais simples meu começo em Brasília. Ao meu cunhado, Mateus, por todo o incentivo.

Agradeço aos professores que me acompanharam durante minha vida acadêmica, pois, ainda que indiretamente, este trabalho é fruto do conhecimento transmitido por eles. Em especial, agradeço ao incentivo das professoras Eliane e Cynthia para iniciar o mestrado e aos professores Gleiciane da Silva Aragão (UNIFESP), Ricardo Ruviaro (UnB) e Luis Henrique de Miranda (UNB) por terem aceitado participar da minha banca e pelas contribuições que muito enriqueceram este trabalho.

Sou eternamente grato a todos os colegas, alunos do mestrado e doutorado, funcionários do departamento de matemática, pelos momentos de ajuda nas minhas dificuldades e pelos momentos de alegrias e diversão. Não me atrevo a mencionar nomes, pois seria este agradecimento parte maior desta dissertação e, ainda assim, poderia cometer a injustiça de não citar alguém.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Enfim, agradeço a todos os familiares e amigos que rezaram por mim e que de alguma forma contribuíram para mais esta conquista.

RESUMO

Com o objetivo de obter atratores de semigrupos em espaço de Banach de dimensão infinita como objetos em espaços de dimensão finita estudamos condições sobre o semigrupo que asseguram que o atrator global possui dimensão de Hausdorff ou fractal (*"upper"box-counting dimension*) finita.

Palavras-chave: atratores, dimensão fractal, dimensão de Hausdorff, sistema gradiente.

ABSTRACT

In order to obtain the attractors of semigroups in infinite dimensional Banach spaces as objects in finite dimensional spaces, we study conditions on the semigroups which guarantee finite Hausdorff, or fractal ("upper"box-counting dimension), dimension for the attractors.

Key-Words: attractors, fractal dimension, Hausforff dimension, gradient system.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Nesta dissertação estudamos as dimensões de Hausdorff e Fractal de atratores de semigrupos em espaços de Banach. Com o objetivo de ver tais atratores como objetos em espaços de Banach de dimensão finita, estudamos condições sobre o semigrupo que asseguram que seu atrator global possui dimensão de Hausdorff ou fractal ("upper"box-counting dimension) finita.

Como referências principais destacamos: Sistemas Dinâmicos Não-Lineares, de A. N. Carvalho, [20], Carvalho, Langa, Robinson, [4] e [5].

Visando um melhor entendimento dos assuntos aqui tratados, divimos este trabalho em dois capítulos.

No primeiro capítulo, investigamos os atratores de semigrupos em espaços de Banach. Defini-se semigrupo, atrator global e conceitos de dinâmica (como ω-limite, assintoticamente compacto, ...) necessários para uma boa compreensão do estudo aqui exibido. Estudamos também, condições necessárias e suficientes para a existência de atratores globais para semigrupos. Além disto, caracteriza-se os atratores de *semigrupos gradiente* e *gradient-like*, como atratores do tipo *gradiente* (união dos cojuntos instáveis, $W^u(y_i^*)$, dos pontos de equilíbrios $y_i^*,\ 1 \leq i \leq p$). Se o conjunto, $\mathcal{E}$, dos pontos de equilíbrio é apenas limitado mostra-se que os atratores dos semigrupos *gradient* são dados pelo conjunto instável, $W^u(\mathcal{E})$.

No segundo capítulo, estudamos inicialmente os conceitos e propriedades das dimensões de Hausdorff e fractal ("upper"box-counting dimension). Na seção "Dimensão de Hausdorff", vamos um pouco além das propriedades da dimensão e estudamos condições sobre o semigrupo que nos fornecem uma cota superior para a dimensão de Hausdorff de atratores do tipo gradiente. Nas seções 2.3 e 2.4, prova-se que conjuntos compactos de dimensão fractal finita podem ser projetados, de maneira injetiva, em um espaço vetorial de dimensão finita e obtem-se uma cota para a dimensão fractal de conjuntos compactos negativamente invariantes para uma aplicação cuja derivada é a soma de uma contração forte e uma função compacta. Este último resultado foi primeiramente feito em espaços de Hilbert, por Mallet-Paret, [15], e posteriormente , em espaços de Banach, por Mañé, [16]. Neste trabalho seguimos Carvalho, Langa, Robinson, [5], que fazem demonstrações mais simples que Mañé e ainda melhoram o limite da dimensão fractal em espaços de Banach dado em [16].

Buscando outras condições em que o atrator global, $\mathcal{A}$, tenha dimensão fractal finita, definimos atrator exponencial para o caso discreto e exibimos resultados em que a dimensão fractal do atrator global é finita.

Encerrando, na última seção, apresentamos resultados de Bortolan, Caraballo, Carvalho, Langa, [3], os quais fornecem uma estimativa para a dimensão fractal do atrator global de semigrupos gradient-like em termos do máximo da dimensão fractal dos conjuntos instáveis locais dos conjuntos invariantes isolados e sob certas propriedades Lipschitz.

NOTAÇÕES

- $\rho_X : X \to [0, \infty)$, métrica no espaço X.
- (X, ρ_X): espaço métrico X.
- $X^\star$: espaço dual de X.
- $\mathcal{C}(X) := \{T : X \to X : T$ é contínua$\}$.
- $\mathcal{L}(X, Y) := \{T : X \to Y : T$ linear e limitada$\}$.
- $\mathbb{T}$: conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ ou conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{T}^+ = \{t \in \mathbb{T} : t \geq 0\}$.
- $\mathbb{T}^+ = \{t \in \mathbb{T} : t \leq 0\}$.
- $\mathbb{T}_t^+ = t + \mathbb{T}^+$.
- $\mathbb{T}_t^- = t + \mathbb{T}^-$
- $\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais.
- $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus 0$.
- $\mathcal{O}_\varepsilon(K) := \{x \in X : \rho(x, K) < \varepsilon\}$: ε-vizinhança de um subconjunto K de X.
- $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$: semigrupo.
- $\{S^n : n \in \mathbb{Z}^+\}$: semigrupo discreto.

- $T(t)B := \{T(t)x; x \in B\}$: imagem de B sob $T(t)$.
- $\gamma^+(B) := \bigcup_{t\in\mathbb{T}^+} T(t)B$: Órbita positiva de B.
- $\gamma^+_{[t,t']}(B) := \bigcup_{t\leq s\leq t'} T(s)B$: Órbita parcial entre dois números de $\mathbb{T}^+$, $t < t'$.
- $\gamma^+_t(B) := \bigcup_{s\in\mathbb{T}^+} T(s+t)B = \bigcup_{s\in\mathbb{T}^+_t} T(s)B$: Órbita de $T(t)B$.
- $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto T(t)x \in X$: solução por x do semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$.
- $\omega(B) := \bigcap_{t\in\mathbb{T}^+} \overline{\gamma^+_t(B)}$: ω-limite.
- $\alpha_\phi(x) := \bigcap_{t\in\mathbb{T}^-} \overline{(\gamma_\phi)^-_t(x)}$: α- limite de x relativo a solução global ϕ por x.
- $\lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}_H(T(t)B, A) = 0$: semi-distância de Hausdorff entre dois conjuntos A e B.
- $\mathcal{A}$: atrator global.
- Conjunto instável do conjunto B:

$$W^u(B) := \{x \in X \quad ; \quad \text{existe uma solução global } \phi : \mathbb{T} \to X \text{ tal que } \phi(0) = x \; e \; \lim_{t\to-\infty} \rho(\phi(t), B) = 0\}.$$

- Conjunto estável do conjunto B:

$$W^s(B) := \{x \in X \quad ; \quad \text{existe uma solução global } \phi : \mathbb{T} \to X \text{ tal que } \phi(0) = x \; e \; \lim_{t\to\infty} \rho(\phi(t), B) = 0\}.$$

- $W^u_{loc}(B)$: conjunto instável local do conjunto B.
- $W^s_{loc}(B)$: cojunto estável local do conjunto B.
- Ξ: conjunto invariante.
- $\mathbf{\Xi} = \{\Xi_1, ..., \Xi_p\}$: família disjunta de invariantes isolados.
- $\dim_H(B)$: dimensão de Hausdorff do conjunto B.
- $B^X_r(0)$: bola de centro 0 e raio r no espaço X.
- $N(r, K)$: número mínimo de bolas de raio r necessário para cobrir K.

- $c(K)$: dimensão fractal do compacto K.
- $\mathcal{P}(X,Y) := \{P \in \mathcal{L}(X); P^2 = P \ e \ P(X) = Y\}$: conjunto das projeções do espaço de Banach X no subespaço Y.
- $N(P) := \{x \in X : P \in \mathcal{P}(X,Y), P(x) = 0\}$.
- $\mathcal{P}_J := \{P \in \mathcal{P}(X,Y); N(P) \cap J = \varnothing\}$.
- $A_{n,r} := (K_n - K_n) \cap \{x \in X; ||x||_X \geq r\}$, onde K_n é compacto.
- $\mathcal{P}_{n,.r} := \{P \in \mathcal{P}(X,Y); diam(P^{-1}(y) \cap K_n) < r, \forall\, y \in Y\}$, onde K_n é compacto.
- $d_{BM}(X,Y) = log(\inf\{||T||_{\mathcal{L}(X,Y)}||T^{-1}||_{\mathcal{L}(Y,X)} : T \in \mathcal{L}(X,Y), T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)\})$: distância de Banach-Mazur entre X e Y.
- $\mathcal{K}(X) : \{T \in \mathcal{L}(X) : T$ é compacta $\}$.
- $\mathcal{L}_\lambda(X) := \{T \in \mathcal{L}(X) : T = L + C, com\ C \in \mathcal{K}(X)\ e\ ||L||_{\mathcal{L}(X)} < \lambda\}$
- $\nu_\lambda(T) := min\{n \in \mathbb{N} :$ existe subespaço $Z\ de\ X,\ dim(Z) =\ n$ tal que

$$\text{dist}_H(T[B_1^X(0)], T[B_1^Z(0)]) < \lambda\}.$$

- Atrator local A: para algum $\varepsilon > 0$ $A = \omega(\mathcal{O}_\varepsilon(A))$.
- $A^* := \{x \in \mathcal{A} : \omega(x) \cap A = \varnothing\}$: Repulsor associado ao atrator local A.
- (A, A^*): par atrator-repulsor.
- $\sigma(X^\star, X)$: topologia fraca*.
- $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$: convergência fraca*.
- $\dot{x} := \frac{dx(t)}{dt}$.

CAPÍTULO 1

ATRATORES PARA SEMIGRUPOS

Neste capítulo apresentamos as definições e resultados básicos para caracterização de semigrupos que possuem atrator global, utilizando como referência [4] e [20].

Seja X um espaço métrico e $\rho_X : X \times X \to [0, \infty)$ sua métrica (onde não houver confusão omitimos o índice X). Denote por $\mathcal{C}(X)$ o conjunto das aplicações contínuas de X em X.

Denotaremos por $\mathbb{T}$ o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ ou conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, $\mathbb{T}^+ = \{t \in \mathbb{T}; t \geq 0\}$, $\mathbb{T}^- = \{t \in \mathbb{T}; t \leq 0\}$, $\mathbb{T}_t^+ = t + \mathbb{T}^+$, $\mathbb{T}_t^- = t + \mathbb{T}^-$, $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Dado um subconjunto K de X e $\varepsilon > 0$, a **ε-vizinhança** de K é o conjunto definido por $\mathcal{O}_\varepsilon(K) := \{x \in X; \rho(x, K) < \varepsilon\}$.

Definição 1.0.1. *Um semigrupo contínuo é uma família $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\} \subset \mathcal{C}(X)$ tal que*

- $T(0)x = x$ *para todo* $x \in X$,
- $T(t+s) = T(t) \circ T(s)$, *para todo* $t, s \geq 0$.
- $[0, \infty) \times X \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in X$ *é contínua.*

Para um dado semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$, um ponto $x \in X$ e um subconjunto $B \subset X$, definimos:

- Para cada $t \in \mathbb{T}$, a imagem de B sob $T(t)$,

$$T(t)B := \{T(t)x : x \in B\};$$

- A **órbita positiva** de B,

$$\gamma^+(B) := \bigcup_{t \in \mathbb{T}^+} T(t)B;$$

- A **órbita parcial** entre dois números de $\mathbb{T}^+$, $t < t'$,

$$\gamma^+_{[t,t']}(B) := \bigcup_{t \leq s \leq t'} T(s)B;$$

- A **órbita de** $T(t)B$,

$$\gamma^+_t(B) := \bigcup_{s \in \mathbb{T}^+} T(s+t)B = \bigcup_{s \in \mathbb{T}^+_t} T(s)B;$$

- A função $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto T(t)x \in X$ é a **solução por x** do semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$.

Definição 1.0.2. *Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dito **eventualmente limitado** se para cada limitado $B \subset X$ existe $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $\gamma^+_{t_B}(B)$ é limitado. Diremos que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é **limitado** se $\gamma^+(B)$ é limitado sempre que B for limitado.*

Definição 1.0.3. *Uma **solução global** de um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ por $x \in X$ é uma função $\phi : \mathbb{T} \to X$ tal que $\phi(0) = x$ e, para cada $s \in \mathbb{T}, T(t)(\phi(s)) = \phi(t+s)$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Uma solução global constante é chamada uma **solução estacionária** e o seu valor um ponto de equilíbrio.*

Como $T(t)$ não é necessariamente injetiva, se existe uma solução global ela não precisa ser única. Quando existe uma solução global $\phi : \mathbb{T} \to X$ por $x \in X$, podemos definir:

Definição 1.0.4. *A **órbita global de x relativa à solução global** ϕ é o conjunto $\gamma_\phi(x) := \{\phi(t) : t \in \mathbb{T}\}$. Para cada $t \in \mathbb{T}$ escrevemos $(\gamma_\phi)^-_t(x) := \{\phi(s) : s \leq t\}$.*

O conjunto $\omega - limite$ de um subconjunto B de X é definido como segue

$$\omega(B) := \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} \overline{\gamma^+_t(B)},$$

definimos o conjunto $\alpha - limite$ de x relativo a ϕ por

$$\alpha_\phi(x) := \bigcap_{t \in \mathbb{T}^-} \overline{(\gamma_\phi)^-_t(x)}.$$

Proposição 1.0.5. *Se $B \subset X$, $\omega(B)$ é fechado e*

$$\omega(B) = \{y \in X \ \ : \ \ \textit{existem sequências } \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \textit{ em } \ \mathbb{T}^+ \textit{ e } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \textit{ em } B \\ \textit{tais que } t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \textit{ e } y = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n\}.$$

Se $\phi : \mathbb{T} \to X$ é uma solução global do semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ por $x \in X$, então $\alpha_\phi(x)$ é fechado e

$$\alpha_\phi(x) = \{v \in X : \textit{existe uma sequência } \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \textit{ em } \ \mathbb{T}^+ \textit{ tal que } t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \textit{ e } \phi(-t_n) \to v\}.$$

Dem. Primeiramente, $\omega(B)$ é fechado, pois $\bigcap_{t\in\mathbb{T}^+} \overline{\gamma_t^+(B)}$ é uma interseção de fechados.

Agora, seja $y \in \omega(B)$. Então $y \in \bigcap_{t\in\mathbb{T}^+} \overline{\gamma_t^+(B)}$, isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma sequência $\{y_k^n\} \subset \gamma_n^+(B)$ tal que

$$y_k^n \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} y.$$

Como $y_k^n \in \gamma_n^+(B), \forall n,\ k \in \mathbb{N}$, existem $x_k^n \subset B$ e $q_k^n \subset \mathbb{T}^+$ tais que

$$y_k^n = T(n + q_k^n)x_k^n.$$

Sabemos que dados $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$, existe $k(n,\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\rho(y_k^n, y) < \varepsilon, \ \text{ se } \ k \geqslant k(n,\varepsilon),$$

isto é, $\rho(T(n + q_k^n)x_k^n, y) < \varepsilon$, se $k \geqslant k(n,\varepsilon)$. Defina então

$$t_n := n + q^n_{k(n,\frac{1}{n})} \text{ e } x_n := x^n_{k(n,\frac{1}{n})}$$

assim,

$$\rho(T(t_n)x_n, y) < \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Portanto $y = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$.

Para a recíproca, seja $y \in X$ e sequências $\{t_n\} \subset \mathbb{T}^+$ e $\{x_n\} \subset B$, tais que $t_n \to \infty$ e $y = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$. Logo, se fixarmos $\tau \in \mathbb{T}^+$, temos que $\{T(t_n)x_n\}_{t_n \geq \tau} \subset \gamma_\tau^+(B)$ e $y \in \overline{\gamma_\tau^+(B)}$. Isso mostra que $y \in \omega(B)$.

Provemos agora a caracterização de $\alpha_\phi(x)$. Seja $v \in \alpha_\phi(x)$, logo $v \in \overline{(\gamma_\phi)_t^-(x)}$, para todo $t \in \mathbb{T}^-$; isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma sequência $\{v_k^n\}_{k\in\mathbb{N}} \subset (\gamma_\phi)_{-n}^-(x)$ tal que $v_k^n \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} v$. Como $v_k^n \in (\gamma_\phi)_{-n}^-(x)$, para todo $n,\ k \in \mathbb{N}$, existe $\{s_k^n\}_{n,\ k\in\mathbb{N}} \subset \{s \in \mathbb{T};\ s \leq -n\}$ tal que

$$\phi(s_k^n) = v_k^n.$$

Mas, dados $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$, existe $k(n,\varepsilon)$ tal que

$$\rho(v_k^n, v) < \varepsilon, \ se\ k \geq k(n,\varepsilon),$$

isto é, $\rho(\phi(s_n^k, v) < \varepsilon)$, se $k \geq k(n,\varepsilon)$.

Defina então $t_n = -s^n_{k(n,\frac{1}{n})}$, assim $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$. Como $s^n_{k(n,\frac{1}{n})} \subset \{s \in \mathbb{T} : \ s \leq -n\}$ temos que $-s^n_{k(n,\frac{1}{n})} \geq n$ e portanto $t_n = -s^n_{k(n,\frac{1}{n})} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Além disso,

$$\rho(\phi(-t_n), v) = \rho(\phi(s^n_{k(n,\frac{1}{n})})) < \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Portanto $\lim\limits_{n\to\infty} \phi(-t_n) = v$.

Para a recíproca, seja $v \in X$ e $\{t_n\}$ uma sequência em $\mathbb{T}^+$ tal que $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\phi(-t_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} v$. Assim, fixado $\tau \in \mathbb{T}^-$ temos que $\{\phi(-t_n)\}_{t_n\leq\tau} \subset (\gamma_\phi)^-_\tau(x)$ e portanto $y \in \overline{(\gamma_\phi)^-_\tau(x)}$. Logo $y \in \alpha_\phi(x)$. □

A seguir definiremos as noções de atração, absorção e invariância sob a ação do semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$. Para tal, utilizaremos a definição de **semi-distância de Hausdorff** entre dois conjuntos A e B de X,

$$\mathrm{dist}_H(A,B) := \sup_{x\in A}\inf_{y\in B} \rho(x,y). \tag{1.1}$$

Note que se $\mathrm{dist}_H(A,B) = 0$ então $\rho(x,B) = 0$ para todo $x \in A$ e portanto $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Definição 1.0.6. *Sejam A e B subconjuntos de um espaço métrico X. Diremos que A **atrai** B sob a ação do semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ se*

$$\lim_{t\to\infty} dist_H(T(t)B, A) = 0.$$

*Se existir um $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t)B \subset A$ para todo $t \geq t_0$, diremos que A **absorve** B.*

Observação 1.0.7. *Em particular, se A absorve B, então A atrai B. De fato, por definição existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t)B \subset A$ para todo $t \geq t_0$, o que implica que $dist_H(T(t)B, A) = 0$, $\forall\, t \geq t_0$. A recíproca não é verdadeira.*

Definição 1.0.8. *Diremos que um subconjunto A de X é invariante (ou positivamente invariante) pelo semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ se $T(t)A = A$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$ (ou $T(t)A \subset A$). Um conjunto invariante unitário corresponde a um **ponto de equilíbrio** de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$; isto é, um ponto $x^* \in X$ tal que $T(t)x^* = x^*$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$.*

Note que o conjunto, $\mathcal{E}$, dos pontos de equilíbrio é fechado, pois se $\mathcal{E} \ni x_n^* \to y$, então $T(t)y = \lim_{n\to\infty}(T(t)x_n^*) = \lim_{n\to\infty} x_n^* = y$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$.

Definição 1.0.9. *Um conjunto $\mathcal{A}$ é chamado um **atrator global** para $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ se é compacto, invariante e atrai subconjuntos limitados de X sob a ação de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$.*

Observe que o atrator global para um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é único. De fato, se $\mathcal{A}$ e $\hat{\mathcal{A}}$ são atratores globais para este semigrupo, pela invariância temos

$$dist_H(\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}}) = dist_H(T(t)\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}}) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

assim $\mathcal{A} \subset \hat{\mathcal{A}}$. Analogamente, mostra-se que $\hat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$.

Com o mesmo raciocínio mostra-se que $\mathcal{A}$ contém todo subconjunto de X limitado e invariante.

Proposição 1.0.10. *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em um espaço métrico X. Suponha que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tenha um atrator global $\mathcal{A}$. Então*

$$\mathcal{A} = \{x \in X : \textit{ existe uma solução global limitada por } x\}. \tag{1.2}$$

Dem. Seja $x \in \mathcal{A}$. Defina,

$$\begin{aligned} \phi \ : \ & \mathbb{T}^+ \longrightarrow X \\ & t \longmapsto \phi(t) = T(t)x \end{aligned}$$

ϕ está bem definida e como $\mathcal{A}$ é compacto e invariante ($\phi(t) = T(t)x \in \mathcal{A}$), ϕ também é limitada.

Agora, seja $x \in \mathcal{A} = T(1)\mathcal{A}$, logo existe $x_{-1} \in \mathcal{A}$ tal que $T(1)x_{-1} = x$, para x_{-1} existe $x_{-2} \in \mathcal{A}$ tal que $T(1)x_{-2} = x_{-1}$. Procedendo indutivamente conseguimos uma sequência $\{x_{-n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ tal que $x_0 = x$ e $T(1)x_{-n-1} = x_{-n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Defina então

$$\phi_x(t) = \begin{cases} T(t)x, & t \geq 0 \\ T(j+t)x_{-j}, & t \in [-j, -j+1) \cap \mathbb{T}, \ j = 1, 2, 3, ... \end{cases}$$

Afirmação: ϕ_x assim definida é uma solução global limitada por x.

De fato, para $t \in [-j, -j+1) \cap \mathbb{T}$ e todo $s \in \mathbb{T}^+$, temos que

$$\begin{aligned} T(s)\phi_x(t) &= T(s+j+t)x_{-j} \\ &= \begin{cases} \phi_x(t+s), & \text{se } t + s \in [-j, -j+1) \cap \mathbb{T},\ j = 1, 2, 3, ... \\ \phi_x(t+s), & \text{se } (t+s) \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

pois, se $t + s \geq 0$, então

$$\begin{aligned} T(s+j+t)x_{-j} &= T(s+(j-1)+t)T(1)x_{-j} \\ &= T(s+(j-1)+t)x_{-j+1} \\ &= (...) \\ &= T(t+s)x_0 := \phi_x(t+s). \end{aligned}$$

A limitação segue pelo mesmo argumento usado para ϕ.

Reciprocamente, cada solução global limitada $\phi : \mathbb{T} \to X$ para $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é invariante, logo $\phi(\mathbb{T}) \subset \mathcal{A}$. □

Proposição 1.0.11. *Seja K um subconjunto compacto de X e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X tal que*

$$\rho(x_n, K) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

então $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente cujo limite está em K.

Dado um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ e K um subconjunto compacto de X, se K atrai um conjunto compacto K_1, então $\gamma^+(K_1)$ é relativamente compacto e $\varnothing \neq \omega(K_1) \subset K$.

Dem. Como

$$\rho(x_n, K) = \inf_{y\in K} \rho(x_n, y) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

dado $j \in \mathbb{N}$, existe $n_j \in \mathbb{N}$ tal que $\inf_{y\in K} \rho(x_n, y) < \dfrac{1}{j}$, para todo $n \geq n_j$ e pela definição de ínfimo conseguimos uma sequência $\{y_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset K$ tal que $\rho(x_{n_j}, y_{n_j}) < \frac{1}{j}$, para todo $j \in \mathbb{N}^*$. Como K é compacto podemos assumir, passando a uma subsequência se necessário, que $y_{n_j} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} y_0$ para algum $y_0 \in K$. Assim, obtemos

$$\rho(x_{n_j}, y_0) \leqslant \rho(x_{n_j}, y_{n_j}) + \rho(y_{n_j}, y_0) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0;$$

isto é, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente.

Para a segunda afirmação, por hipótese, temos que

$$dist_H(T(t)K_1, K) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $\sup\limits_{y\in T(t)K_1} \rho(y, K) < \varepsilon$, para todo $t \geqslant t_0$.

Mostremos que $\gamma^+(K_1)$ é relativamente compacto. Para tal, provamos que $\gamma^+(K_1) \cup K$ é totalmente limitado e completo, ou seja, compacto. Dado, $\varepsilon > 0$ existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que

$$T(t)K_1 \subset \mathcal{O}_{\frac{\varepsilon}{2}}(K),\ \forall\, t \geqslant t_0.$$

Logo, $\cup_{t\geq t_0} T(t)K_1$ está contido em uma união finita de bolas de raio ε (K é compacto, então existe um cobertura finita por bolas de raio $\frac{\varepsilon}{4}$ para K. Aumentando o raio de cada uma dessas bolas para ε cobrimos $\mathcal{O}_{\frac{\varepsilon}{2}}(K)$ e portanto $\cup_{t\geq t_0} T(t)(K_1)$. Pela continuidade de $T(t) : \mathbb{T} \times X \to X$ e compacidade de $[0, t_0] \times K$, segue que $\cup_{0\leq t\leq t_0} T(t)(K_1)$ é compacto, consequentemente, totalmente limitado. Assim, $\gamma^+(K_1) \cup K$ é totalmente limitado. Pela primeira parte da demonstração $\gamma^+(K_1) \cup K$ é completo. Portanto $\gamma^+(K_1)$ é relativamente compacto.

Como $\overline{\gamma_t^+(K_1)}$ é compacto e não-vazio para todo $t \in \mathbb{T}^+$ e $\overline{\gamma_s^+(K_1)} \subset \overline{\gamma_t^+(K_1)}, s \ \geq\ t$, a família de fechados $\{\overline{\gamma_t^+(K_1)}\}_{t\in\mathbb{T}^+}$ possui a propriedade da interseção finita e portanto

$$\omega(K_1) = \bigcap_{t\in\mathbb{T}^+} \overline{\gamma_t^+(K_1)} \neq \varnothing.$$

Para finalizar mostremos que $\omega(K_1) \subset K$. Dado $y \in \omega(K_1)$ e $\varepsilon > 0$, existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $y \in \overline{\gamma_{t_0}^+(K_1)} \subset \mathcal{O}_\varepsilon(K)$; isto é, $\rho(y, K) \leq \varepsilon$. Pela arbitrariedade de ε segue o resultado. $\square$

Note que se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo com atrator global $\mathcal{A}$ então a órbita positiva de todo subconjunto compacto de X é relativamente compacta.

Lema 1.0.12. *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em X. Se $B \subset X$, então $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$ para $t \in \mathbb{T}^+$. Se B é tal que $\omega(B)$ é compacto e atrai B, então $\omega(B)$ é invariante.*

Dem. Se $\omega(B) = \varnothing$, não há o que provar. Suponha então $y \in \omega(B)$ e fixe $t \in \mathbb{T}^+$. Pela caracterização de $\omega(B)$, dada pela Proposição 1.0.5, existem sequências $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tais que $t_n \to \infty$ e $T(t_n)x_n \to y$. Da continuidade de $T(t)$ e da propriedade de semigrupo, segue que

$$T(t)y = T(t) \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n = \lim_{n\to\infty} T(t + t_n)x_n.$$

Portanto, novamente pela Proposição 1.0.5, $T(t)y \in \omega(B)$. Logo, $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$.

Para completar a demonstração resta mostrar que se $\omega(B)$ é compacto e atrai B, então $\omega(B) \subset T(t)\omega(B)$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Seja $x \in \omega(B)$, logo existem sequências $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tais que $T(t_n)x_n \to x$. Para $t \in \mathbb{T}^+$ fixo, uma vez que $t_n \to \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq t$, para todo $n \geq n_0$. Portanto

$$T(t)T(t_n - t)x_n = T(t_n)x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x. \tag{1.3}$$

Como $\omega(B)$ atrai B, em particular temos $\rho(T(t_n - t)x_n, \omega(B)) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$. E pela compacidade de $\omega(B)$ segue da Proposição 1.0.11, que $\{T(t_n - t)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente, digamos, $T(t_{n_j} - t)x_{n_j} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} y \ \in \omega(B)$. Note que

$$\begin{aligned} T(t)y &= T(t)(\lim_{j\to\infty} T(t_{n_j} - t)x_j) \\ &= \lim_{j\to\infty}(T(t_{n_j})x_j) = x, \end{aligned}$$

ou seja, se $x \in \omega(B)$, então $x \in T(t)\omega(B)$; isto é, $\omega(B) \subset T(t)\omega(B)$. Portanto $\omega(B) = T(t)\omega(B)$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$. □

Segue imediatamente do Lema anterior que, se $x \in X$, $\omega(x)$ atrai x e $\omega(x) = \{x^*\}$, então x^* é um ponto de equilíbrio para $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$.

Lema 1.0.13. *Suponha que $x \in X$ é tal que existe uma solução global $\phi : \mathbb{T} \to X$ por x tal que $\overline{\phi(\mathbb{T}^-)}$ é compacto. Então, $\alpha_\phi(x)$ é não vazio, compacto e invariante.*

Dem. Da definição de $\alpha_\phi(x)$, por $\overline{(\gamma_\phi)_t^-(x)} \subset \overline{(\gamma_\phi)_s^-(x)}$, $t < s < 0$, da compacidade de $\overline{\phi(\mathbb{T}^-)}$ e da propriedade da interseção finita segue que $\alpha_\phi(x)$ é não-vazio e compacto.

Agora provemos que $\alpha_\phi(x)$ é invariante. Fixe $t \in \mathbb{T}^+$. Pela caracterização dada pela Proposição 1.0.5, se $y \in \alpha_\phi(x)$, existe uma sequência $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tal que $\phi(-t_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$. Da continuidade de $T(t) : X \to X$ temos que

$$T(t)\phi(-t_n) = \phi(t - t_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} T(t)y$$

e portanto $T(t)y \in \alpha_\phi(x)$. Por outro lado, se $w \in \alpha_\phi(x)$, existe uma sequência $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tal que $\phi(-t_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} w$. Fixe $t \in \mathbb{T}^+$. Como $\overline{\{\phi(-t_n - t)\}_{n\in\mathbb{N}}} \subset \overline{\phi(\mathbb{T}^-)}$ temos que $\{\phi(-t_n -$

$t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é relativamente compacto. Passando a uma subsequência se necessário, existe $z \in X$ tal que $\phi(-t_n - t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$ e $z \in \alpha_\phi(x)$. Assim, pela continuidade de $T(t) : X \to X$,

$$T(t)z = \lim_{n\to\infty} T(t)\phi(-t_n - t) = \lim_{n\to\infty} \phi(-t_n) = w.$$

Logo, $w \in T(t)(\alpha_\phi(x))$, ou seja, $\alpha_\phi(x) \subset T(t)(\alpha_\phi(x))$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$.

Portanto $T(t)(\alpha_\phi(x)) = \alpha_\phi(x)$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$. □

De forma análoga ao comentário após o Lema 1.0.12, segue do Lema anterior que, se $\phi : \mathbb{T} \to X$ é uma solução global por $x \in X$ tal que $\overline{\phi(\mathbb{T}^-)}$ é compacto e $\alpha_\phi(x) = \{x^*\}$, então x^* é um ponto de equilíbrio para $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$.

Lema 1.0.14. *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em X e $B \subset X$ tal que $\omega(B)$ é compacto e atrai B.*

- *se $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, B é conexo e $B \supset \omega(B)$, então $\omega(B)$ é conexo;*
- *Se $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ e B é conexo, então $\omega(B)$ é conexo.*

Dem. Suponha que $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ e que $\omega(B)$ é desconexo, então $\omega(B)$ é a união disjunta de dois conjuntos compactos separados por uma distância $2r$. Como $\omega(B)$ atrai B, dado $\varepsilon = r > 0$, existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $\sup_{x\in B} \rho(T(t)x, \omega(B)) < r$, para todo $t \geq t_0$; e, como $T(t)(B)$ é conexo (B é conexo e $T(t)$ é contínuo), temos que $T(t)B$ deve estar contido na r vizinhança de uma das componentes conexas de $\omega(B)$ para t suficientemente grande. Assim, pelo Lema 1.0.12, temos uma contradição uma vez que $\omega(B)$ é invariante e como, por hipótese, $B \supset \omega(B)$, obtemos $T(t)B \supset T(t)\omega(B) = \omega(B)$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$.

Agora suponha que $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. Pela definição de semigrupo $T(t) : [0,\infty)\times X \to X$ é contínua, logo $T(t)$ leva o conexo $[t,\infty) \times B$ no conexo $\gamma_t^+(B) = \bigcup_{s\in\mathbb{T}^+} T(t+s)B$ e assim, $\overline{\gamma_t^+(B)}$ é conexo para cada $t \geq 0$. Portanto $\omega(B) = \bigcap_{t\in\mathbb{T}^+} \overline{\gamma_t^+(B)}$ é conexo. □

Lema 1.0.15. *Se B é um subconjunto não-vazio de X tal que $\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ é compacto, para algum $t_0 \in \mathbb{T}^+$, então $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e $\omega(B)$ atrai B.*

Dem. Pelo Lema 1.0.12 precisamos apenas mostrar que $\omega(B)$ é não-vazio, compacto e que $\omega(B)$ atrai B.

Como $\varnothing \neq B \subset X$, $\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ é compacto e $\overline{\gamma_t^+(B)} \subset \overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$, para todo $t \geq t_0$, temos que $\overline{\gamma_t^+(B)}$ é não vazio e compacto para cada $t \geq t_0,\ t \in \mathbb{T}^+$.

A compacidade de $\omega(B)$ segue do fato de que $\omega(B)$ é fechado e $\omega(B) \subset \overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$.

Mostremos que $\omega(B)$ é não-vazio. Seja $x \in B$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$, assim $\{T(t_n)x\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ para todo $t_n \geq t_0$. Então, passando a uma subsequência se necessário, $T(t_n)x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z \in \omega(B)$.

Agora, provemos que $\omega(B)$ atrai B. Suponha que não. Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\sup_{x\in B} \rho(T(t)x, \omega(B)) > \varepsilon_0, \text{ para todo } t \in \mathbb{T}^+.$$

Assim, conseguimos sequências $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$ com $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tais que $\rho(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \varepsilon_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ é compacto e $\{T(t_n)x_n; n \geq \hat{n}\} \subset \overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ para algum $\hat{n} \in \mathbb{N}$, existem subsequências $t_{n_j} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\{x_{n_j}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tais que $T(t_{n_j}x_{n_j})$ converge para algum $y \in X$. Pela caracterização dada pela Proposição 1.0.5 $y \in \omega(B)$, mas $\rho(y, \omega(B)) > \varepsilon_0$, absurdo. Portanto $\omega(B)$ atrai B. □

Observação 1.0.16. *Se K é um subconjunto compacto de X que atrai a si mesmo, então $\gamma^+(K)$ é relativamente compacto e $\omega(K) \subset K$; ainda mais: $\omega(K)$ é não-vazio, compacto, invariante e $\omega(K)$ $atrai$ K. Para tal, utilize a Proposição 1.0.11, com $K_1 = K$, e o Lema 1.0.15 com o fato de que $\overline{\gamma_t^+(K)}$ é um subconjunto fechado de um conjunto compacto para todo $t \in \mathbb{T}^+$.*

Definição 1.0.17. *Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dito* ***assintoticamente compacto*** *se, para qualquer subconjunto fechado, limitado e não-vazio $B \subset X$, para o qual $T(t)B \subset B$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$, existe um conjunto compacto $J \subset B$ que atrai B.*

Lema 1.0.18. *Se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo assintoticamente compacto e B é um subconjunto não-vazio de X tal que $\gamma_{t_0}^+(B)$ é limitado, para algum $t_0 \in \mathbb{T}^+$, então $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e $\omega(B)$ atrai B.*

Dem. Como $T(t)\gamma_{t_0}^+(B) \subset \gamma_{t_0}^+(B)$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$ e $T(t) : X \to X$ é contínua, temos que $T(t)\overline{\gamma_{t_0}^+(B)} \subset \overline{T(t)\gamma_{t_0}^+(B)} \subset \overline{\gamma_{t_0}^+(B)} \neq \varnothing$, para cada $t \in \mathbb{T}^+$. Então, por hipótese, existe um subconjunto compacto $J \subset \overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ que atrai $\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$. Assim, dada $\varepsilon_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, existe $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tal que

$$T(t)\overline{\gamma_{t_0}^+(B)} \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_n}(J), \forall\, t \geq t_n. \tag{1.4}$$

Logo, usando a Proposição 1.0.11, $\varnothing \neq \omega(B) \subset J$. Uma vez que $\omega(B)$ é fechado e J é compacto, segue $\omega(B)$ é compacto.

Se mostrarmos que $\omega(B)$ atrai B, pelo Lema 1.0.12, obtemos a invariância. Então, suponha que $\omega(B)$ não atrai B. Consequentemente existem $\varepsilon_0 > 0$ e sequências $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ e $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tais que $\rho(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \varepsilon_0$. Como J é compacto, vale (1.4) e pela Proposição 1.0.11, obtemos subsequências $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset B$ e $t_{n_j} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tais que

$$T(t_{n_j})x_{n_j} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} z, \text{ para algum } z \in J.$$

Assim, $z \in \omega(B)$, mas $\rho(z, \omega(B)) \geq \varepsilon_0$, absurdo. Portanto $\omega(B)$ atrai B e concluímos a demonstração. $\square$

Proposição 1.0.19. *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em um espaço métrico X. Suponha que $\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto sempre que $\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado em X, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado em X e $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Então $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto.*

Reciprocamente, se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo eventualmente limitado e assintoticamente compacto então $\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto sempre que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência limitada em X e $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Dem. Seja $B \subset X$ um subconjunto fechado, limitado e não-vazio, para o qual $T(t)B \subset B$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Valem as seguintes afirmações:

- $\omega(B) \neq \varnothing$. De fato, considere uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ e $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Então, $\{T(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ e por hipótese, segue que $\{T(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é relativamente compacto. Logo, passando a uma subsequência se necessário, $T(t_n)x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$. Pela caracterização de $\omega(B)$ por sequências, $y \in \omega(B)$.

- $\omega(B) \subset B$. Observe que $\overline{\gamma_t^+(B)} = \overline{\cup_{s\geq t} T(s)(B)} \subset B$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$. O que implica: $\omega(B) \subset B$.

- $\omega(B)$ é compacto. Como $T(t)B \subset B,\ \forall\, t \in \mathbb{T}^+$ e $\omega(B) \subset B$ segue, pela hipótese, que $\overline{\omega(B)} = \omega(B)$ é compacto.

- $\omega(B)$ atrai B. Suponha que não. Assim, existem $\varepsilon_0 > 0$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ e $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tais que $\rho(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \varepsilon_0$. De forma análoga ao que foi feito para provar a primeira afirmação temos, passando a uma subsequência se necessário, que $T(t_n)x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y \in \omega(B)$. Mas, $\rho(y, \omega(B)) \geq \varepsilon_0$, absurdo.

Portanto, exibimos um subconjunto compacto $\omega(B)$ de B que atrai B, ou seja, provamos que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto.

Reciprocamente, se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo eventualmente limitado e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em X, existe um $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $C = \overline{\gamma^+_{t_0}(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})}$ é um conjunto limitado. Como C é positivamente invariante e $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto, existe um compacto $J \subset C$ que atrai C. Em particular, $\{T(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para J quando n tende ao infinito e portanto é relativamente compacto. □

Definição 1.0.20. *Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dito **condicionalmente eventualmente compacto** se dado B limitado e positivamente invariante, existe $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $\overline{T(t_B)B}$ é compacto. Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dito **eventualmente compacto** se dado B limitado existe $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $\overline{T(t_B)B}$ é compacto.*

Teorema 1.0.21. *Um semigrupo condicionalmente eventualmente compacto é assintoticamente compacto.*

Dem. Seja $B \subset X$ um conjunto fechado, limitado, não-vazio e positivamente invariante. Como $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é condicionalmente eventualmente compacto, existe $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $\overline{\gamma^+_{t_B}(B)}$ é compacto. Pelo Lema 1.0.15, $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e $\omega(B)$ atrai B. Portanto $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto. □

Definição 1.0.22. *Diremos que um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é **ponto dissipativo** (limitado dissipativo / compacto dissipativo) se existir um subconjunto limitado $B \subset X$ que atrai pontos (subconjuntos limitados / subconjuntos compactos) de X.*

Observação 1.0.23. *Na definição acima podemos trocar a palavra atrai pela palavra absorve sem mudar os significados dos conceitos. De fato, pela Observação 1.0.7, se absorve, atrai. Por outro lado, seja $B \subset X$ limitado que atrai pontos $x \in X$, logo $\mathcal{O}_\varepsilon(B)$ é limitado e $T(t)x \subset \mathcal{O}_\varepsilon(B)$, $\forall\, t \geq t_0$. De forma análoga prova-se os casos restantes.*

Lema 1.0.24. *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo ponto dissipativo e assintoticamente compacto. Se $\gamma^+(K)$ é limitada sempre que K é compacto, então $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é compacto dissipativo.*

Dem. Como $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é ponto dissipativo, existe um conjunto não-vazio e limitado B que absorve pontos de X. Seja $U = \{x \in B : \gamma^+(x) \subset B\}$. Então valem as seguintes afirmações:

(i) U é não-vazio;

(ii) $\gamma^+(U) = U$;

(iii) U é limitado;

(iv) U absorve pontos;

(v) $\overline{\gamma^+(U)}$ é positivamente invariante.

De fato, para afirmação (i), note que, como B absorve pontos e considerando $x \in X$, existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t)x \subset B$, para todo $t \geq t_0$. Defina então $y = T(t_0)x \in B$ e assim $T(t)y = T(t + t_0)x \in B$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Consequentemente $\gamma^+(y) \subset B$ e portanto $y \in U$. Claramente $U \subset \gamma^+(U)$. Por outro lado, se $y \in \gamma^+(U)$, então existem $t_0 \in \mathbb{T}^+$ e $x_0 \in U$ tais que $y = T(t_0)x_0$. Como $x_0 \in U$, por definição $\gamma^+(x_0) \subset B$ e assim $y \in B$ e $T(t)y = T(t + t_0)x_0 \in B$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, provando a afirmação (ii). Já a afirmação (iii) segue direto da definição de B e U. Para demonstrar (iv) tome $x \in X$; sabemos que existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t)x \in B$, para todo $t \geq t_0$ e com o mesmo argumento utilizado na prova da afirmação (i) mostra-se que $T(t)x \in U$, para todo $t \geq t_0$. Já (v) segue do fato de $T(t)$ ser contínuo e $\overline{T(t)(\gamma^+(U))} \subset \overline{\gamma^+(U)}$, $\forall\, t \in \mathbb{T}^+$.

Sabendo que são válidas as afirmações acima e que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto, temos que existe um subconjunto compacto $K \subset \overline{\gamma^+(U)} = \overline{U}$, tal que K atrai U e portanto K atrai pontos de X .

Mostremos agora que existe uma vizinhança V de K tal que $\overline{\gamma_t^+(V)}$ é limitado para algum $t \in \mathbb{T}^+$. Se este não é o caso, existem sequências $x_n \in X$, $x_n \to y \in K$ e $t_n \to \infty$ tais que $\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}$ não é limitada. Considere $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, logo A é relativamente compacto e $\gamma_t^+(A)$ é não-limitada para cada $t \in \mathbb{T}^+$. Logo, $\gamma^+(\overline{A}) \supset \gamma_t^+(A)$ é não-limitada contradizendo a hipótese de que $\gamma^+(G)$ é limitada sempre que G é compacto.

Seja V uma vizinhança de K e $t_V \in \mathbb{T}^+$ tais que $\gamma_{t_V}^+(V)$ é limitado. Como K atrai pontos, para todo $x \in X$, dado $\varepsilon \geq 0$, existe $t_x \in \mathbb{T}^+$ tal que $\rho(T(t)x, K) < \frac{\varepsilon}{2}, \forall\, t \geq t_x$. Sendo $T(t) \in \mathcal{C}(X)$, existe $\mathcal{O}_\delta(x)$, vizinhança de x, tal que $\rho(T(t_x)x, T(t_x)y) < \frac{\varepsilon}{2}, \forall\, y \in \mathcal{O}_\delta(x)$. Logo, $\rho(T(t_x)y, K) < \varepsilon$, para todo $y \in \mathcal{O}_\delta(x)$. Consequentemente, para todo $x \in X$ existe uma vizinhança $\mathcal{O}_\delta(x)$ de x e $t_x \in \mathbb{T}^+$ tais que $T(t_x)\mathcal{O}_\delta(x) \subset V$. Assim

$$T(t_V + t_x)\mathcal{O}_\delta(x) \subset T(t_V)V \subset \gamma_{t_V}^+(V)$$

o que implica: $T(t)T(t_V + t_x)\mathcal{O}_\delta(x) \subset T(t)\gamma^+_{t_V}(V) \subset \gamma^+_{t_V}(V),\ \forall\ t \in \mathbb{T}^+$; isto é, $\gamma^+_{t_V}(V)$ absorve uma vizinhança de x para cada $x \in X$ ($T(t)\mathcal{O}_\delta(x) \subset \gamma^+_{t_V}(V),\ \forall\, t\ \geq t_V + t_x$).

Se G é um subconjunto compacto de X, então $G = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_\delta(x_i),\ x_i\ \in\ G$. Definindo $t_0 = \max\{(t_v + t_{x_i})\ :\ i\ = 1, 2, ..., n\}$, t_{x_i} como t_x acima, temos que

$$T(t)(G) = \bigcup_{i=1}^{n} T(t)\mathcal{O}_\delta(x_i) \subset \gamma^+_{t_V}(V),\ \forall\, t \geq t_0;$$

ou seja, $\gamma^+_{t_V}(V)$ abosorve subconjuntos compactos de X. Portanto $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é compacto dissipativo. $\square$

Proposição 1.0.25. *Seja X um espaço métrico e $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em X. Se K é compacto e atrai a si mesmo sob a ação de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$, então $\omega(K) = \bigcap_{t\in\mathbb{T}^+} T(t)K$.*

Dem. Note que $\bigcap_{t\in\mathbb{T}^+} T(t)K \subset \omega(K)$, pois se $x \in \bigcap_{t\in\mathbb{T}^+} T(t)K$ então existe $y_t \in K$ tal que $x = T(t)y_t,$ para cada $t \in \mathbb{T}^+$ e assim $x \in \gamma^+_t(K), \forall\, t \in \mathbb{T}^+$. Agora, para a inclusão contrária, pela observação 1.0.16, garantimos que $\omega(K) \subset K$ e $\omega(K)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai K. Assim,

$$\omega(K) = T(t)\omega(K) \subset T(t)K,\ \forall\, t\ \in \mathbb{T}^+,$$

concluindo o resultado. $\square$

Proposição 1.0.26. *Seja X um espaço métrico e $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em X. Se B é um conjunto positivamente invariante, então $\omega(B) = \bigcap_{t\in\mathbb{T}^+} \overline{T(t)B}$.*

Dem. Por hipótese $T(t)B \subset B$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Assim, $T(t+\tilde{t})B = T(t)T(\tilde{t})B \subset T(\tilde{t})B,\ \forall\, t \in \mathbb{T}^+$ e portanto $\gamma^+_{\tilde{t}}(B) = T(\tilde{t})B$. $\square$

Teorema 1.0.27. *Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado, ponto dissipativo e assintoticamente compacto se, e somente se, $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$.*

Dem. Primeiramente mostraremos que se $\{T(t)\ :\ t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado, ponto dissipativo e assintoticamente compacto, então tem um atrator global. Suponha que $\gamma^+(G)$ não seja limitada para algum G compacto. Logo existem sequências $x_n\ \in\ G$, $x_n \to y\ \in G$ e $t_n \to \infty$, tais que $\{T(t_n)x_n\ :\ n\ \in \mathbb{N}\}$ não é limitada. Considere $A = \{x_n :\ \ n \in \mathbb{N}\}$, logo $\overline{A}$ é compacto e $\gamma^+_t(A)$ é não-limitada para cada $t\ \in \mathbb{T}^+$, contradizendo a hipótese de $\{T(t)\ :\ t\ \in\ \mathbb{T}^+\}$ ser eventualmente limitado. Portanto $\gamma^+(K)$ é limitada sempre que K for compacto. Associando este resultado com o fato de $\{T(t)\ :\ t\ \in\ \mathbb{T}^+\}$ ser ponto dissipativo e assintoticamente compacto e utilizando o Lema 1.0.24, obtemos que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é compacto dissipativo. Seja C um conjunto limitado que absorve subconjuntos compactos de X. Considere $B = \{x \in C : \gamma^+(x) \subset C\}$. De maneira análoga as afirmações feitas na demonstração do Lema 1.0.24 valem as seguintes asserções:

(i) B é não-vazio;

(ii) B absorve subconjuntos compactos de X;

(iii) $T(t)\overline{B} \subset \overline{B}$.

Como $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto, existe um compacto $K \subset \overline{B}$ que atrai B e consequentemente atrai subconjuntos compactos de X.

Pela Observação 1.0.16 o conjunto $\mathcal{A} = \omega(K)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai K.

Seja $J \subset X$, compacto, pela Proposição 1.0.11, $\omega(J) \subset K$ é não vazio, compacto e invariante. Além disto, sabemos que $\omega(J)$ atrai J. Por outro lado,

$$\omega(J) = T(t)\omega(J) \subset T(t)K, \; \forall \, t \in \mathbb{T}^+.$$

Logo, pela Proposição 1.0.25, $\omega(J) \subset \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} T(t)K = \omega(K)$. Portanto, $\omega(K)$ atrai J.

Seja B um subconjunto limitado de X, com $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado e assintoticamente compacto, segue do Lema 1.0.18 que $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B. Logo, pelo parágrafo anterior, temos que $\mathcal{A} = \omega(K)$ atrai $\omega(B)$ e juntamente ao fato de $\omega(B)$ ser invariante segue que

$$dist_H(\omega(B), \mathcal{A}) = dist_H(T(t)\omega(B), \mathcal{A}) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Portanto $\omega(B) \subset \mathcal{A}$ e consequentemente $\mathcal{A}$ atrai B.

Reciprocamente, se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$, então existe um $t = t(B, \varepsilon) \in \mathbb{T}^+$ tal que para todo subconjunto B de X limitado $\gamma_t^+(B) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{A})$, ou seja, $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado. Como $\mathcal{A}$ atrai pontos, $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é ponto dissipativo. Para provar que ele é também assintoticamente compacto seja $\{T(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ limitadas e $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Logo, $\mathcal{A}$ atrai $\{T(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Pela Proposição 1.0.11, $\overline{\{T(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$ é compacto e pela Proposição 1.0.19 $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto. $\square$

1.1 Condições suficientes para a existência de atratores para semigrupos

Teorema 1.1.1. *Seja* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *um semigrupo ponto dissipativo e eventualmente compacto. Então* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *tem um atrator global* $\mathcal{A}$*.*

Dem. Pelos Teoremas 1.0.21 e 1.0.27 precisamos apenas mostrar que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado. Como $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente compacto, dado $B \subset X$ limitado, existe $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $\overline{T(t_B)B}$ é compacto. Logo, $T(t)T(t_B)B \subset T(t)\overline{T(t_B)B}$; portanto, se mostrarmos que a órbita positiva de subconjuntos compactos de X são limitadas concluímos a demonstração.

Seja K um subconjunto compacto de X e B_0 um subconjunto aberto e limitado de X que absorve pontos. Dado, $x \in K$, existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t)x \subset B_0$, para todo $t \geq t_0$ e pela continuidade de $T(t) : X \to X$ existe $\mathcal{O}_\delta(x)$ tal que $T(t)\mathcal{O}_\delta(x) \subset B_0$, para todo $t \geq t_0$. Consequentemente

$$T(t_{B_0})T(t)\mathcal{O}_\delta(x) \subset T(t_{B_0})B_0, \forall\, t \geq t_0,$$

ou seja, existe $t_x = t_0 + t_{B_0} \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(s)\mathcal{O}_\delta(x) \subset T(t_{B_0})B_0$ para todo $s \geq t_x$. Como K é compacto então $K \subset \cup_{i=1}^{p} \mathcal{O}_\delta(x_i)$, com $x_i \in K,\ 1 \leq i \leq\ p$. Seja $\tau = \tau(K) = \max\{t_{x_i} : 1 \leq\ i \leq\ p\}$, $K_0 = \overline{T(t_{B_0})B_0}$ e $\hat{K_0} = \gamma^+_{[0,\tau(K)]}K$. Pela continuidade de $T : \mathbb{T}^+ \times X \to X$ e por $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ ser eventualmente compacto K_0 e $\hat{K_0}$ são compactos. Note que

$$\gamma^+(K) = \left(\bigcup_{0 \leq\ s\ \leq \tau(K)} T(s)K \right) \cup \left(\bigcup_{s\ \geq \tau(K)} T(s)K \right) \subset \hat{K_0} \cup K_0.$$

Portanto $\gamma^+(K)$ é limitada para todo subconjunto compacto $K \subset X$. □

Teorema 1.1.2. *Seja* X *um espaço de Banach e* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *um semigrupo em* X*. Suponha que* $T(t) = S(t) + K(t)$ *como* $S(t)$ *e* $K(t)$ *satisfazendo:*

- *Para cada subconjunto limitado* B *de* X*, existe um* $t_B \in \mathbb{T}^+$ *tal que* $K(t)B$ *é relativamente compacto para todo* $t \geq t_B$*;*

- *Para cada subconjunto limitado* B *de* X*, existe* $t_B \in \mathbb{T}^+$ *tal que* $\sup_{x \in B} ||S(t)x||_X := s_B(t) < \infty$ *para todo* $t \geq t_B$ *e* $s_B(t) \overset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0.$

Então $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *é assintoticamente compacto. Além disso, se* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *é ponto dissipativo e eventualmente limitado, então ele possui um atrator global.*

Dem. Seja B um conjunto não vazio, fechado, limitado e positivamente invariante. Dado $\varepsilon > 0$, escolha $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $t_0 \geq t_B$ e $s_B(t_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $K(t_0)B$ é relativamente compacto, existem $N = N_{t_0}(B) \in \mathbb{N}$ e $y_1, ..., y_N$ em $K(t_0)B$ tais que $K(t_0)B \subset \bigcup_{i=1}^N B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_i)$. Segue que

$$\omega(B) = \bigcap_{t\, \in \mathbb{T}^+} \overline{T(t)B} \subset T(t_0)B \subset S(t_0)B + K(t_0)B \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) + \bigcup_{i=1}^{N} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_i) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{\varepsilon}(y_i);$$

onde a primeira igualdade segue da Proposição 1.0.26. Uma vez que ε é arbitrário, temos que $\omega(B)$ é totalmente limitado. Logo $\omega(B)$ é fechado e totalmente limitado no espaço de Banach X, portanto compacto. Note que $\omega(B)$ é não vazio, pois $\{T(t_n)x_n\} = \{K(t_n)x_n + S(t_n)x_n\}$, com $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$, é totalmente limitada, logo relativamente compacta e portanto possuindo uma subsequência convergente.

Suponha que $\omega(B)$ não atrai B, então existe $\varepsilon_0 > 0$ e sequências $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$ tais que $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\rho(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \varepsilon_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela demonstração que $\omega(B)$ não é vazio temos que $\{T(t_n)x_n\}$ tem uma subsequência que converge para $y \in \omega(B)$; absurdo, pois $\rho(y, \omega(B)) \geq 0$. Concluímos que $\omega(B) \subset B$ é não-vazio, compacto e atrai B, provando que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto.

Agora, a última afirmação segue direto do Teorema 1.0.27. □

1.2 Semigrupos Gradientes

Trabalharemos nesta seção com semigrupos gradientes. Denotaremos por $\mathcal{E}$ o conjunto dos pontos de equilíbrio para o semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$.

Definição 1.2.1. *Um* ***semigrupo*** $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *é dito* ***gradiente*** *se tem uma função de Lyapunov; isto é, se existe um função contínua* $V : X \to \mathbb{R}$ *com as seguintes propriedades:*

(i) $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto V(T(t)x)$ *é decrescente para cada* $x \in X$.

(ii) Se x *é tal que* $V(T(t)x) = V(x)$ *para todo* $t \in \mathbb{T}^+$, *então* $x \in \mathcal{E}$.

Lema 1.2.2. *Se* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *é um semigrupo gradiente, então* $\omega(x)$ *é um subconjunto de* $\mathcal{E}$ *para cada* $x \in X$. *Se existe uma solução global* $\phi : \mathbb{T} \to X$ *por* x *então* $\alpha_\phi(x)$ *é um subconjunto de* $\mathcal{E}$.

Se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo gradiente, tem atrator global $\mathcal{A}$ e $\mathcal{E}$ só tem pontos isolados, então $\mathcal{E}$ é finito e para cada $x \in X$, $\omega(x)$ é um conjunto unitário. Neste caso, se $x \in \mathcal{A}$ e $\phi : \mathbb{T} \to \mathcal{A}$ é uma solução global por x, então $\alpha_\phi(x)$ é um conjunto unitário.

Dem. Se $\omega(x) = \varnothing$ o resultdo é trivial. Se $\omega(x) \neq \varnothing$ e $y \in \omega(x)$ existe uma sequência $t_n \in \mathbb{T}^+,\ t_n \to \infty$, tal que $T(t_n)x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$ e pela continuidade da V: $V(T(t_n)x) \to V(y)$. Logo $V(T(t)x) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} V(y)$, pois é decrescente e possui uma subsequência convergente. Como, pela Lema 1.0.12, $T(t)\omega(x) \subset \omega(x)$, $t \in \mathbb{T}^+$, temos que cada ponto $y \in \omega(x)$ é tal que

$$V(y) = \lim_{n\to\infty} V(T(t_n)x) = c \ e \ V(T(t)y) = V(T(t) \lim_{n\to\infty} T((t_n)x) = \lim_{n\to\infty} V(T(t+t_n)x) = c,$$

onde $t_n \to \infty$. Pela propriedade (ii) na Definição 1.2.1 temos que $y \in \mathcal{E}$.

Suponha que exista uma solução global $\phi : \mathbb{T} \to X$ por x. Se $\alpha_\phi(x) = \varnothing$ o resultado é trivial. Por outro lado, se $z \in \alpha_\phi(x)$, existe $t_n \subset \mathbb{T}^+$ tal que $t_n \to \infty$ e $\phi(-t_n) \to z$. Logo, $V(\phi(-t)) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} c$, para algum $c \in \mathbb{R}$, pois é crescente (seja $s \geq t$ e $a = t - s \geq 0$, então

$$\begin{aligned} V(-\phi(s)) &= V(T(a)\phi(-s-a)) \\ &= V(T(a)\phi(-t)) \\ &\leq V(T(0)\phi(-t)) = V(\phi(-t))\ ) \end{aligned}$$

e tem uma subsequência convergente. Como, pela demonstração do Lema 1.0.13, $T(t)\alpha_\phi(x) \subset \alpha_\phi(x)$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$, segue para cada ponto $z \in \alpha_\phi(x)$ que:

$$V(z) = \lim_{n\to\infty} V(\phi(-t_n)) = c \ \text{ e } \ V(T(t)z) = \lim_{n\to\infty} V(T(t)\phi(-t_n)) = \lim_{n\to\infty} V(\phi(t-t_n)) = c.$$

Portanto $\alpha_\phi(x) \subset \mathcal{E}$.

Agora suponha que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ é compacto, $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ e $\mathcal{E}$ é fechado, segue que $\mathcal{E}$ é compacto. Sendo todos os pontos de $\mathcal{E}$ isolados, então $\mathcal{E}$ é finito, pois caso contrário $\mathcal{E}$ teria um ponto de acumulação, logo um ponto que não é isolado.

Ainda resta mostrar que $\omega(x)$ e $\alpha_\phi(x)$ são conjuntos unitários. Se $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ o resultado é direto uma vez que $\omega(x)$ e $\alpha_\phi(x)$ são conexos e os pontos de $\mathcal{E}$ são isolados. Para o caso $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ suponha que $\omega(x) = \{y_1^*, ..., y_l^*\} \subset \mathcal{E}$ com $l \geq 2$, então existe uma cobertura disjunta $\{\mathbb{N}_i\}_{i=1}^l$ com a propriedade de que cada $\mathbb{N}_i$ é infinito e $\lim\limits_{\substack{n\in\mathbb{N}_i \\ n\to\infty}} T(t_n)x = y_i^*, 1 \leq i \leq l$ (de fato, como $y_i^* \in \omega(x)$, para todo $\varepsilon > 0$, sejam $t_n^i \in \mathbb{T}^+$ tais que $\rho(T(t_n^i)x, y_i^*) < \varepsilon$. Como o conjunto dos $t \in \mathbb{T}$, tais que $T(t)x \notin \cup_{i=1}^{l} \mathcal{O}_\varepsilon(y_i^*)$, é finito, conseguimos tal cobertura de $\mathbb{N}$). Agora, escolha uma sequência $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $k_{2n-1} \in \mathbb{N}_1$ e $k_{2n} = k_{2n-1} + 1 \in \mathbb{N}_j$, para algum $2 \leq j \leq l$. Então, $y_1^* = T(1)y_1^* = \lim_{n\to\infty} T(1 + k_{2n})x = \lim_{n\to\infty} T(k_{2n-1})x = y_j^*$, absurdo. Logo, se o conjunto das soluções estacionárias for finito, então $\omega(x)$ será um conjunto unitário. A prova de que $\alpha_\phi(x)$ é um conjunto unitário quando o conjunto das soluções estacionárias é finito e $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ é análoga. $\square$

Teorema 1.2.3. *Suponha que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo gradiente que é eventualmente limitado, assintoticamente compacto e tem um conjunto de equilíbrio $\mathcal{E}$ limitado. Então $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A} = W^u(\mathcal{E})$, onde*

$$W^u(\mathcal{E}) := \{y \in X \;:\; \text{existe uma solução global } \phi(\cdot) : \mathbb{T} \to X \text{ por } y \text{ tal que } \phi(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} \mathcal{E}\}$$

*é chamado de **conjunto instável** de $\mathcal{E}$. Se $\mathcal{E} = \{e_1^*, ..., e_n^*\}$ é finito, então $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^n W^u(e_i^*)$. Finalmente, se existe um conjunto conexo e limitado B que contém $\mathcal{A}$, então $\mathcal{A}$ é conexo.*

Dem. Como $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado e assintoticamente compacto segue, pelo Lema 1.0.18, que para cada $x \in X$, $\omega(x)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai x. Do fato de que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é gradiente temos, pelo Lema 1.2.2, que $\omega(x) \subset \mathcal{E}$ e como $\mathcal{E}$ é limitado segue que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é ponto dissipativo. Portanto, do Teorema 1.0.27, $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global.

Se $x \in \mathcal{A}$, existe uma solução global limitada $\phi : \mathbb{T} \to X$ por x. Como $\phi(\mathbb{T}) \subset \mathcal{A}$ é relativamente compacto, $\alpha_\phi(x) \neq \varnothing$. Do Lema 1.2.2, $\alpha_\phi(x) \subset \mathcal{E}$. Disto, segue que $\mathcal{A} \subset W^u(\mathcal{E})$.

Por outro lado, se $x \in W^u(\mathcal{E})$, existe uma solução global $\phi : \mathbb{T} \to X$ por x e $\phi(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} \mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. Note que $\phi(\mathbb{T})$ é limitada. De fato, dado $\varepsilon > 0$ existem $\tilde{t} < 0$ e $\hat{t} > 0$ tais que $\phi(t) \in \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{E})$ para todo $t \leq \tilde{t}$ e $\phi(t) \in \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{A})$ para todo $t \geq \hat{t}$, esta última inclusão devido ao fato de que $\phi(t) = T(t)x$ para $t \in \mathbb{T}^+$ e $\{x\}$ ser limitado. Logo,

$$\phi(\mathbb{T}) = \{\phi(t) : t \leq \tilde{t}\} \cup \{\phi(t) : t \in [\tilde{t}, \hat{t}]\} \cup \{\phi(t) : t \geq \hat{t}\}$$

é limitada. Por ser $\phi(\mathbb{T})$ invariante e limitado concluímos que $\phi(\mathbb{T}) \subset \mathcal{A}$ e consequentemente $x \in \mathcal{A}$. Portanto $\mathcal{A} \supset W^u(\mathcal{E})$. Provando que $\mathcal{A} = W^u(\mathcal{E})$.

Se $\mathcal{E} = \{e_1^*, ..., e_n^*\}$ então $\mathcal{A} = \cup_{i=1}^n W^u(e_i^*)$. Pois, claramente, $W^u(\mathcal{E}) \supset \cup_{i=1}^n W^u(e_i^*)$ e para a inclusão contrária seja $x \in W^u(\mathcal{E})$. Logo, existe $\phi : \mathbb{T} \to X$ solução global por x tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\hat{t} < 0$ tal que $\phi(t) \in \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{E})$ para cada $t \leq \hat{t}$. Considere $\varepsilon_0 = \frac{\max\{\rho(e_i^*, e_j^*); i \neq j, 1 \leq i,j \leq n\}}{2}$ e assim concluímos que $x \in W^u(e_i^*)$ para algum $1 \leq i \leq n$.

Seja B um conjunto conexo e limitado tal que $\mathcal{A} \subset B$. Suponha que $\mathcal{A}$ não seja conexo, então $\mathcal{A}$ é a união disjunta de dois compactos (portanto separados por uma distância positiva 2ρ). Mas $\mathcal{A}$ atrai B, logo para todo $\varepsilon > 0$ existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $\sup_{x \in T(t)B} \rho(x, \mathcal{A}) < \varepsilon$ para cada $t \geq t_0$. Como $T(t)B$ é conexo temos que $T(t)B$ deve estar contido na ρ vizinhança de uma das componentes conexas de $\mathcal{A}$ para t suficientemente grande. Porém, chegamos a um absurdo pelo fato de que se $\mathcal{A} \subset B$, então $T(t)\mathcal{A} = \mathcal{A} \subset T(t)B$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Portanto $\mathcal{A}$ é conexo.

□

Lema 1.2.4. *Suponha que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo gradiente que tem um atrator global $\mathcal{A}$ e que $\mathcal{E} = \{y_i^* : 1 \leq i \leq n\}$ para algum $n \in \mathbb{N}^*$. Seja $V : X \to \mathbb{R}$ a função de Lyapunov associada à $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ e $V(\mathcal{E}) = \{n_1, ..., n_p\}$ com $n_i < n_{i+1}, 1 \leq i \leq p-1$.*

Se $1 \leq j \leq p-1$ e $n_j \leq r < n_{j+1}$, então $X_r = \{z \in X : V(z) \leq r\}$ é positivamente invariante sob a ação de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ e $\{T_r(t) : t \in \mathbb{T}\}$ a restrição de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ a X_r, tem atrator global $\mathcal{A}^{(j)}$ dado por

$$\mathcal{A}^{(j)} = \cup\{W^u(y_l^*) : V(y_l^*) \leq n_j\}. \tag{1.5}$$

Em particular, $V(z) \leq n_j$ para $z \in \mathcal{A}^{(j)}, n_1 = min\{V(x) : x \in X\}$ e $\mathcal{A}^{(1)} = \{y^* \in \mathcal{E} : V(y^*) = n_1\}$ consiste de todos os pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis; isto é para cada $y^* \in \mathcal{A}^{(1)}$ existe uma vizinhança $\mathcal{O}_{y*}$ de y^* tal que $T(t)x \to y^*$ para cada $x \in \mathcal{O}_{y*}$.

Dem. Seja $z \in X_r$, então $V(T(t)z) \geq V(T(0)z) = V(z) \geq r$, para todo $t \in T^+$; isto é, X_r é positivamente invariante sob a ação de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$.

Para mostrarmos que $\{T_r(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem atrator global $\mathcal{A}^{(j)}$ e que este é da forma descrita em (1.5) observe que as propriedades suficientes para garantirmos a existência de um atrator global são herdadas de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ (a saber, $\{T_r(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado, assintoticamente compacto e ponto dissipativo, Teorema 1.0.27) e a restrição V_r de V a X_r é uma função de Lyapunov para $\{T_r(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$. Utilizando o Teorema 1.2.3 segue o desejado.

Em particular, se $z \in \mathcal{A}^{(j)}$ então

$$V(z) = V(\phi_z(0)) \leq V(\phi(-t)) \stackrel{t \to \infty}{\longrightarrow} V(y_l^*) \leq n_j.$$

Provemos agora que $n_1 = min\{V(x); x \in X\}$. Suponha que exista $x \in X$ tal que $V(x) < n_1$. Pela definição de V : $V(T(t)x) < n_1$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Assim, $V(y) = \lim_{n\to\infty} V(T(t_n)x) < n_1$; contrariando o fato de que $\omega(x) \subset \mathcal{E}$ (Lema 1.2.2).

Ainda falta provar a última afirmação. Para tal, seja $\delta_0 = \frac{1}{2}\min\{\rho(x^*, y^*); x^*, y^* \in \mathcal{A}^{(1)}, x^* \neq y^*\}$. Provemos a estabilidade de x^*, isto é,

(I) Para $x^* \in \mathcal{A}^{(1)}$ e $0 < \delta < \delta_0$ existe, um $\delta' < \delta < \delta_0$, tal que, para todo $x \in B_{\delta'}(x^*)$, $\gamma^*(x) \subset B_\delta(x^*)$.

De fato, suponha que existem um $\delta_0 > \delta > 0$ e sequências $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em X e $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$ tais que $x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x^*$ e $\rho(T(t_k)x_k, x^*) \geq \delta$ $(\rho(T(t)x_k, x^*) < \delta$ para $0 \leq t < t_k)$. Então, $\{T(t_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tem subsequência convergente. De fato, como $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$é eventualmente limitado e $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada, existe $\hat{t} \in \mathbb{T}^+$ tal que $\gamma^+_{\hat{t}}(\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}})$ é limitada. Pela compacidade assintótica de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ existe um subconjunto compacto $K \subset \overline{\gamma^+_{\hat{t}}(\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}})}$ que atrai $\overline{\gamma^+_{\hat{t}}(\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}})}$. Assim, $\rho(T(t_k)x_k, K) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e utilizando a Proposição 1.0.11, $\{T(t_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tem subsequência convergente, a qual denotamos novamente por $\{T(t_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e y o seu limite. Como

$$V(x_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} V(x^*) = n_1,$$

segue que $V(T(t)x_k) = n_1$ e consequentemente $V(y) = V(\lim_{k\to\infty} T(t_k)x_k) = n_1 = V(T(t)y)$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Portanto, pela hipótese (ii) da definição de semigrupo gradiente $y \in \mathcal{A}^{(1)}$ e $\rho(y, x^*) > \delta$. Por outro lado, de forma análoga prova-se que $\{T(t_k - 1)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente e como $\rho(T(t)x_k, x^*) < \delta$ para $0 \leq t < t_k$, segue que o limite z desta subsequência pertence a $\mathcal{A}^{(1)} \cap B_\delta(x^*)$. Logo, $z = x^*$ e

$$x^* = T(1)x^* = T(1)z = \lim_{k\to\infty} T(1)T(t_k - 1)x_k = y.$$

Absurdo; provando (I).

Como para cada $x \in X$, $T(t)x \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} x^* \in \mathcal{E}$, a afirmação segue. $\square$

1.3 Semigrupos Gradient-like

Nesta seção definimos o conceito de semigrupo *gradient-like*. Este conceito sintetiza as características estruturais do sistema gradiente sem a necessidade da função de Lyapunov.

Inicialmente enfatizamos a distinção entre semigrupos gradientes e semigrupos que tem atrator do tipo gradiente.

Definição 1.3.1. *Seja* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *um semigrupo com um atrator global* $\mathcal{A}$ *com* $\mathcal{E} = \{y_1^*, ..., y_p^*\}$. *Se* $\mathcal{A} = \cup_{i=1}^p W^u(y_i^*)$, *diremos que* $\mathcal{A}$ *é um* ***atrator do tipo gradiente*** *e que* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *é um* ***semigrupo com atrator do tipo gradiente***.

Como provado no Teorema 1.2.3 um semigrupo gradiente com um atrator global e com um número finito de pontos de equilíbrios é um semigrupo com um atrator do tipo gradiente.

Definição 1.3.2. *Considere um semigrupo* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *com um número finito de soluções estacionárias* $\mathcal{E} = \{y_1^*, ..., y_p^*\}$. *Defina*

$$\delta_0 = \frac{1}{2} \min_{\substack{1 \le i,j \le p \\ i \neq j}} \rho(y_i^*, y_j^*) > 0.$$

Seja $\varepsilon_0 < \delta_0$, $y^* \in \mathcal{E}$ *e* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. *Uma* $\varepsilon - cadeia$ *de* y^* *a* y^* *é um subconjunto* $\{y_{l_1}^*, ..., y_{l_k}^*\}$ *de* $\mathcal{E}$, *juntamente com conjuntos* $\{y_1, ..., y_k\}$ *em* X *e* $\{\sigma_1, t_1, ..., \sigma_k, t_k\}$ *em* $\mathbb{T}$ *tais que,* $0 < \sigma_i < t_i$, $1 \le i \le k$, $k \le p, \rho(y_i, y_{l_i}^*) < \varepsilon, 1 \le i \le k$, $y^* = y_{l_1}^* = y_{l_{k+1}}^*, \rho(T(\sigma_i)y_i, \mathcal{E}) > \varepsilon_0$ *e* $\rho(T(t_i)y_i, y_{l_{i+1}}^*) < \varepsilon, 1 \le i \le k$. *Diremos que* $y^* \in \mathcal{E}$ *é recorrente por cadeias se existe um* $\varepsilon_0 > 0$ *fixo e uma* $\varepsilon - cadeia$ *de* y^* *a* y^*, *para cada* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

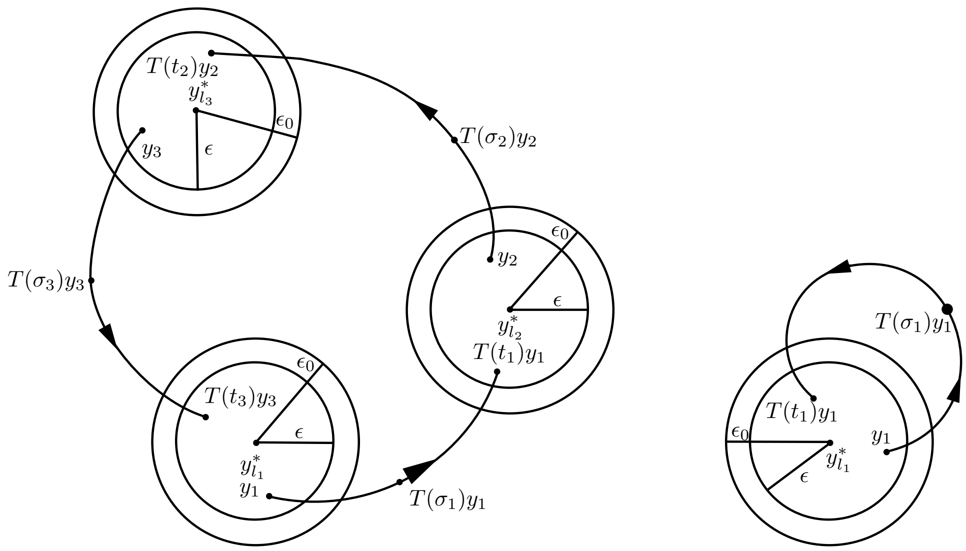

Figura 1.1: Exemplos de $\varepsilon - cadeia$.

Definição 1.3.3. *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo com um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E} = \{y_1^*, ..., y_p^*\}$ e suponha que ele tem um atrator global $\mathcal{A}$. Dizemos que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um* ***semigrupo gradient-like*** *se as seguintes condições são satisfeitas:*

(G1) Dada uma solução global $\phi : \mathbb{T} \to X$ em $\mathcal{A}$, existem $i, j \in \{1, ..., p\}$ tais que

$$\lim_{t\to-\infty} \rho(\phi(t), y_i^*) = 0 \ \text{ e } \ \lim_{t\to\infty} \rho(\phi(t), y_j^*) = 0.$$

(G2) $\mathcal{E} = \{y_1^*, ..., y_p^*\}$ não contém nenhum ponto recorrente por cadeia.

De $(G1)$, temos que $\mathcal{A} = \cup_{i=1}^p W^u(y_i^*)$. De fato, se $x \in \mathcal{A}$ então existe uma solução global $\phi : \mathbb{T} \to X$ por x em $\mathcal{A}$ e por $(G1)$ existe $i \in \{1, ..., p\}$ tal que $\lim\limits_{t\to-\infty} \rho(\phi(t), y_i^*) = 0$, ou seja, $x \in W^u(y_i^*)$ para algum $1 \leq i \leq p$. Por outro lado, se $x \in W^u(y_i^*)$ para algum $1 \leq \ i \ \leq p$, então existe uma solução global $\phi : \mathbb{T} \to X$ por x tal que $\phi(-t) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} y_i^*$. Assim, $(\gamma_\phi)_0^-(x)$ é limitada. Como $\mathcal{A}$ atrai pontos, pela Proposição 1.0.11, segue que $\gamma^+(x)$ é relativamente compacta. Portanto $\gamma_\phi(x) = (\gamma_\phi)_0^-(x) \cup \gamma^+(x)$ é limitada, assim $x \in \mathcal{A}$.

Lema 1.3.4. *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo e y^* um ponto de equilíbrio para $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$. Dados $t \in \mathbb{T}^+$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\{T(s)y : 0 \leq s \leq t,\ y \in B_\delta(y^*)\} \subset B_\varepsilon(y^*)$.*

Dem. Suponha que existem $t_0 \in \mathbb{T}^+$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que, para todo $k \in \mathbb{N}^*$ existe $x_k \in B_{\frac{1}{k}}(y^*)$ e $s_k \in [0, t_0]$ com $\rho(T(s_k)x_k, y^*) \geq \varepsilon_0$. Passando a uma subsequência se necessário podemos assumir que $s_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} s_0$ para algum $s_0 \in [0, t_0]$. Como

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^+ \times X \ &\longrightarrow \ X \\ (t, x) \ &\longmapsto \ T(t)x \end{aligned}$$

é contínua: $0 = \rho(y^*, y^*) = \rho(T(s_0)y^*, y^*) = \lim\limits_{k\to\infty} \rho(T(s_k)x_k, y^*) \geq \varepsilon_0$. □

Proposição 1.3.5. *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo tal que para cada sequência $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$, $t_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset B$, $B \subset X$ limitado, então $\{T(t_k)u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é relativamente compacto. Sejam $\{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{T}^+$ com $\sigma_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em X e, para $\mathbb{J}_k = \{s \in \mathbb{T} : -\sigma_k \leq s < \infty\}$, defina $\xi^k : \mathbb{J}_k \to X$ por $\xi^k(s) = T(s + \sigma_k)u_k,\ s \in \mathbb{J}_k$. Se $\{T(s)u_k : k \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{T}^+\}$ é limitada, existe uma solução global $\phi : \mathbb{T} \to X$ de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ e uma subsequência de $\{\xi^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (que novamente denotamos por $\{\xi^k\}_{k\in\mathbb{N}}$) tal que*

$$\lim_{k\to\infty} \xi^k(s) \to \phi(s),\ \ \forall\, s \in \mathbb{T}.$$

Dem. Como $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada e $\sigma_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, então $\{\xi^k(0) = T(0+\sigma_k)u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é relativamente compacto; logo, possui uma subsequência convergente, digamos $\{\xi^{k_j^0}(0)\}_{j\in\mathbb{N}}$:

$$\xi^{k_j^0}(0) = T(\sigma_{k_j^0})u_{k_j^0} \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} x_0.$$

Defina $\phi : \mathbb{T}^+ \to X$ por $\phi(t) = T(t)x_0$, $t \in \mathbb{T}^+$. Note que:

$$\xi^{k_j^0}(s) = T(s+\sigma_{k_j^0})u_{k_j^0} = T(s)T(\sigma_{k_j^0})u_{k_j^0} \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} T(s)x_0 = \phi(s), \forall s \in \mathbb{T}^+.$$

Com procedimento análogo obtemos $\{\xi^{k_j^1}(-1)\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma subsequência de $\{\xi^{k_j^0}(-1)\}_{j\in\mathbb{N}}$ que é convergente: $\xi^{k_j^1}(-1) = T(-1+\sigma_{k_j^1})u_{k_j^1} \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} x_{-1}$. Defina $\phi : \{t \in \mathbb{T} : t \geq -1\} \to X$ por $\phi(t) = T(t+1)x_{-1}$. Assim,

- $T(1)x_{-1} = \lim\limits_{j\to\infty} T(1)\xi^{k_j^1}(-1) = \lim\limits_{j\to\infty} \xi^{k_j^1}(0) = x_0$;
- $\phi(0) = T(1)x_{-1} = x_0$;
- $\phi(-1) = T(0)x_1 = x_1$;
- $$\begin{aligned}\xi^{k_j^1}(s) &= T(s+\sigma_{k_j^1})u_{k_j^1} = T(s+1-1+\sigma_{k_j^1})u_{k_j^1} = T(s+1)\xi^{k_j^1}(-1)\\ &\stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} T(s+1)x_{-1} = \phi(s), \forall s \in \{s \in \mathbb{T} : s \geq -1\}.\end{aligned}$$

Suponha que obtemos subsequências $\{\xi^{k_j^i}\}_{j\in\mathbb{N}}, 0 \leq i \leq \ m-1$, tais que $\{k_j^i\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de $\{k_j^{i-1}\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\xi^{k_j^i}(-i) \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} x_{-i}$, $1 \leq i \leq \ m-1$ e $T(1)x_{-i} = x_{-i+1}$, $1 \leq i \leq m-1$. Defina $\{t \in \mathbb{T} : s \geq -i\} \ni \ t \longmapsto \phi(t) = T(t+\ i)x_{-i} \in \ X$, $1 \leq i \leq m-1$. Consequentemente

$$\begin{aligned}\xi^{k_j^i}(t) &= T(t+\sigma_{k_j^i})u_{k_j^i} = T(t+i-i+\sigma_{k_j^i})u_{k_j^i} = T(t+i)\xi^{k_j^i}(-i)\\ &\stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} T(t+i)x_{-i} = \phi(t), 0 \leq i \leq \ m-1.\end{aligned}$$

Agora construímos $\{\xi^{k_j^m}\}_{j\in\mathbb{N}}$ subsequência de $\{\xi^{k_j^{m-1}}\}_{j\in\mathbb{N}}$, tal que $\{\xi^{k_j^m}(-m)\}_{j\in\mathbb{N}}$ é convergente e x_{-m} é o seu limite. Note que:

$$T(1)x_{-m} = \lim_{j\to\infty} T(1)\xi^{k_j^m}(-m) = \lim_{j\to\infty} \xi^{k_j^m}(-m+1) = x_{-m+1}.$$

Considere $\phi : \{s \in \mathbb{T}^+;\ s\ \geq -m\ \} \to X$ sendo $\phi(t) = T(t+m)x_{-m}$. Logo,

- $\phi(0) = T(m)x_{-m} = \lim_{j\to\infty} T(m)\xi^{k_j^m}(-m) = \lim_{j\to\infty} T(\sigma_{k_j^m})u_{k_j^m} = x_0$;

- $\phi(-i) = T(-i+m)x_{-m} = \lim_{j\to\infty} T(-i+m)\xi^{k_j^m}(-m) = \lim_{j\to\infty} T(-i+\sigma_{k_j^m})u_{k_j^m} = x_{-i},\ 1\leq\ i\ \leq m$;

- $$\begin{aligned} \xi^{k_j^m}(t) &= T(t+\sigma_{k_j^m})u_{k_j^m} = T(t+m-m+\sigma_{k_j^m})u_{k_j^m} = T(t+m)\xi^{k_j^m}(-m) \\ \xi^{k_j^m}(t) &\overset{j\to\infty}{\longrightarrow} T(t+m)x_{-m} = \phi(t), \forall\, s\in\{s\in\mathbb{T}^+;\ s\ \geq\ -m\}. \end{aligned}$$

Portanto construímos uma subsequência de $\{\xi^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (que novamente denotamos por $\{\xi^k\}_{k\in\mathbb{N}}$) e uma solução global $\phi : \mathbb{T}\to X$ de $\{T(t) : t\in\mathbb{T}^+\}$ tais que

$$\lim_{k\to\infty} \xi^k(s) \to \phi(s),\ \ \forall\, s\in\mathbb{T}.$$

□

Pela demonstração acima observe que se $\{T(t) : t\in\mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$ então $\phi(s)\in\mathcal{A}$, para todo $s\in\mathbb{T}^+$. Pois, $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada, $(s\ +\sigma_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e pela definição de $\mathcal{A}$:

$$\rho(\phi(s),\mathcal{A}) = \lim_{k\to\infty} \rho(T(s\ +\sigma_k)u_k,\mathcal{A}) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \phi(s)\in\mathcal{A}, \forall\, s\in\mathbb{T}.$$

Lema 1.3.6. *Seja $\{T(t) : t\in\mathbb{T}^+\}$ um semigrupo com um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E} = \{y_1^*, ..., y_p^*\}$ e suponha que ele tem um atrator global $\mathcal{A}$. Se $\{T(t) : t\in\mathbb{T}^+\}$ satisfaz $(G1)$, dado $\delta < \delta_0 = \dfrac{1}{2}\min\limits_{\substack{1\leq i,j\leq p\\ i\neq j}} \rho(y_i^*, y_j^*)$ e $B\subset X$ limitado, existe um $t_0 = t_0(\delta, B) > 0$ tal que $\{T(t)u_0 : 0\leq t\leq t_0\}\cap\cup_{i=1}^p B_\delta(y_i^*) \neq\varnothing$ para todo $u_0\in B$.*

Dem. Suponha que o resultado não é válido. Assim existem sequências $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset B$ e $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{T}^+$ (com $t_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$) tais que $\{T(s)u_k : 0\leq s\leq 2t_k\}\cap\cup_{i=1}^p B_\delta(y_i^*) = \varnothing$. Como $\{T(t) : t\in\mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$, $\{T(t) : t\in\mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado e assintoticamente compacto. Pela Proposição 1.0.19 temos que $\{T(t_k)u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é relativamente compacto. Usando a Proposição 1.3.5 existe uma solução global $\phi : \mathbb{T}\to X$ tal que $T(s\ +t_k)u_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \phi(s)\in\mathcal{A}$ para cada $s\in\mathbb{T}$. Porém, para $-t_k\leq\ s\ \leq t_k$, $T(s+t_k)u_k\notin\cup_{i=1}^p B_\delta(y_i^*)$ e assim $\phi(s)\notin\cup_{i=1}^p B_\delta(y_i^*)$ para todo $s\in\mathbb{T}^+$, contradizendo $(G1)$. □

Lema 1.3.7. *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo gradient-like. Se $\mathcal{E} = \{y_1^*, ..., y_p^*\}$ denota o conjunto de suas soluções estacionárias e $\mathcal{A}$ o seu atrator global, dado $0 < \delta < \delta_0$, existe um $\delta' > 0$ tal que, se para algum $1 \leq i \leq p, \rho(u_0, y_i^*) < \delta'$ e, para algum $t_1 > 0, \rho(T(t_1)u_0, y_i^*) \geq \delta$, então $\rho(T(t)u_0, y_i^*) > \delta'$ para todo $t \geq t_1$.*

Dem. Suponha que, para algum $1 \leq i \leq p$ e $\delta > 0$, existe uma sequência $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ com $\rho(u_k, y_i^*) < \frac{1}{k}$ e sequências $\{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+, \sigma_k < t_k$ tais que $\rho(T(\sigma_k)u_k, y_i^*) \geq \delta$ e $\rho(T(t_k)u_k, y_i^*) < \frac{1}{k}$. Então y_i^* é recorrente por cadeias, o que contraria $(G2)$. □

Lema 1.3.8. *Suponha que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo gradient-like com um conjunto de equilíbrios $\mathcal{E} = \{y_1^*, ..., y_p^*\}$ e um atrator global $\mathcal{A}$. Dado $u \in X$ existe um $y_i^* \in \mathcal{E}$ tal que*

$$T(t)u \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} y_i^*.$$

Dem. Sabemos que:

(i) Pelo Lema 1.3.7, dado $\delta \in (0, \delta_0)$ existe $\delta' \in (0, \delta)$ tal que, se $\rho(v, y_i^*) < \delta'$ e, para algum $\tilde{t} = t\ (v, \delta) > 0$, $\rho(T(\tilde{t})v,\ y_i^*) \geq \delta$, então $\rho(T(t)v, y_i^*) > \delta'$ para todo $t \geq \tilde{t}$.

(ii) Utilizando a Proposição 1.0.11, $\gamma^+(u)$ é limitada. Então, segue do Lema 1.3.6 que dado $\delta < \delta_0$ existe um $t_\delta = t(\gamma^+(u), \delta) \in \mathbb{T}$ tal que para cada $v \in \gamma^+(u)$: $\{T(t)v : 0 \leq t \leq t_\delta\} \cap \cup_{i=1}^p B_\delta(y_i^*) \neq \varnothing$.

Uma vez que $u \in \gamma^+(u)$, existe um $t_{\delta'}$ e $t_0 \in [0, t_{\delta'}]$ tal que $T(t_0)u \in B_{\delta'}(y_l^*)$ para algum $1 \leq\ l\ \leq p$, δ' dado por (i) . As seguintes situações podem ocorrer:

(I) $T(t)u \in B_\delta(y_l^*)$ para todo $t \geq t_0$;

(II) $T(\hat{t})u \notin B_\delta(y_l^*)$ para algum $\hat{t} > t_0$.

Na situação (I) como para $\delta < \delta_0$ vale que $\{T(t)v; 0 \leq t \leq t_\delta\} \cap B_\delta(y_l^*) \neq \varnothing$ e vale (i), temos que $T(t)u \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} y_l^*$.

Se ocorrer (II), como $T(\hat{t})u \in \gamma^+(u)$, existe $t_{\delta'}^1$ tal que $T(s)T(\hat{t})u = T(s + \hat{t})u \in B_{\delta'}(y_m^*)$ para algum $s \in [0, t_{\delta'}^1]$ e algum $m \neq l, 1 \leq\ m\ \leq p$. Agora, para $T(t)T(s + \hat{t})u,\ t > t_{\delta'}^1$ e y_m^*, temos situações análogas a (I) e (II). Caso (I) ocorra, segue que $T(t)u \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} y_m^*$. Porém, se acontece (II), aplicamos o mesmo procedimento de $T(\hat{t})u$ a $T(\tilde{t} + \hat{t})u$, $\tilde{t} > t_{\delta'}^1$. Uma vez que o conjunto $\mathcal{E}$ dos pontos de equilíbrio é finito a situação (II) não pode ocorrer indefinidamente e em algum momento teremos que $T(t)u \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} y_i^*$, para algum $1 \leq i \leq p$. Caso contrário, dado $\delta < \delta_0$ construímos uma δ'-cadeia para cada $\delta' \in (0, \delta)$ contrariando $(G2)$. □

Definição 1.3.9. *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo com um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E} = \{y_1^*, ..., y_p^*\}$ e um atrator global $\mathcal{A}$. Uma* ***estrutura homoclínica*** *em $\mathcal{A}$ é um conjunto $\{y_{l_1}^*, ..., y_{l_k}^*\} \subset \mathcal{E}$ e um conjunto de soluções globais $\{\phi^{(i)} : \mathbb{T} \to X, 1 \leq i \leq k\}$ em $\mathcal{A}$ tal que, fazendo $y_{l_{k+1}}^* := y_{l_1}^*$,*

$$\lim_{t\to-\infty} \phi^{(i)}(t) = y_{l_i}^* \ \ e \ \ \lim_{t\to+\infty} \phi^{(i)}(t) = y_{l_{i+1}}^*, \ \ 1 \leq i \leq k.$$

Lema 1.3.10. *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo que possui um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E} = \{y_1^*, ..., y_p^*\}$ e um atrator global $\mathcal{A}$. Se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ satisfaz $(G1)$, então $(G2)$ é satisfeita se, e somente se, $\mathcal{A}$ não possui estruturas homoclínicas.*

Dem. Se $\mathcal{A}$ tem estrutura homoclínica ($\{y_{l_1}^*, ..., y_{l_k}^*\} \subset \mathcal{E}$, $\{\phi^{(i)} : \mathbb{T} \to X, 1 \leq i \leq k\}$ em $\mathcal{A}$) e y^* é um equilíbrio nesta estrutura então y^* é recorrente por cadeias. De fato, considere $0 < \delta < \delta_0$ e $y^* = y_{l_1}^* = y_{l_{k+1}}^*$ pertecentes a estrutura homoclínica. Logo, para todo $\varepsilon < 0$ temos que:

(i) existe $y_i \in X$ tal que $\rho(y_i, y_{l_i}^*) < \varepsilon$, $1 \leq \ i \ \leq \ k$, pois pela definição de estrutura homoclínica $\phi^{(i)}(t) \stackrel{t\to-\infty}{\longrightarrow} y_{l_i}^*$;

(ii) Como $\phi^{(i)}(t) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} y_{l_i+1}^*$, existe $t_i \in \mathbb{T}$ tal que $\rho(T(t_i)y_i, y_{l_{i+1}}^*) < \varepsilon$, $1 \leq \ i \ \leq \ k$ (y_i dado pelo item (i));

(iii) Pela continuidade de $\phi^{(i)} : \mathbb{T} \to X$ existe $\sigma_i \in \mathbb{T}$, $\sigma_i < \ t_i$, tal que $\rho(T(\sigma_i)y_i, \mathcal{E}) > \delta$, $1 \leq \ i \ \leq k$ (y_i dado pelo item (i)).

Ou seja, se y^* é um equilíbrio nesta estrutura, existe $\varepsilon - cadeia$ de y^* a y^* para todo $\varepsilon \in (0, \delta)$.

Para a recíproca suponha que $y^* \in \mathcal{E}$ é recorrente por cadeias. Então existem $\delta < 0$, $\{y_{l_1}^*, ..., y_{l_k}^*\} \subset \mathcal{E}$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n} < \delta$, conjuntos $\{y_1^n, ..., y_k^n\} \subset X$, $\{\tau_1^n, t_1^n, ..., \tau_k^n, t_k^n\} \subset \mathbb{T}^+$, $\tau_i^n < t_i^n, 1 \leq \ i \ \leq \ k$, tais que

$$\rho(y_i^n, y_{l_i}^*) < \frac{1}{n}, \ \rho(T(\tau_i^n)y_i^n, \mathcal{E}) > \delta \ \ e \ \ \rho(T(t_i^n)y_i^n, y_{l_{i+1}}^*) < \frac{1}{n}. \tag{1.6}$$

Escolha $\sigma_i^n > 0$ tal que $\rho(T(\sigma_i^n)y_i^n, y_{\sigma_i}^*) \geq \delta$ e $\rho(T(t)y_i^n, y_{\sigma_i}^*) < \delta$, para todo $0 \leq t < \sigma_i^n$. Do Lema 1.3.4 segue que $\sigma_i^n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Defina

$$\phi^{i,n} \ \ : \ \ [-\sigma_i^n, \infty) \longrightarrow X \tag{1.7}$$

$$t \qquad \longmapsto T(\sigma_i^n + \ t)y_i^n. \tag{1.8}$$

De maneira análoga a demonstração do Lema 1.3.6 existe uma solução global $\phi^{(i)} : \mathbb{T} \to X$ em $\mathcal{A}$, $\phi^{(i)} = \lim_{n\to\infty} \phi^{i,n}$. Como $(G1)$ é satisfeita, cada $\phi^{(i)}$ deve convergir para um ponto de equilíbrio quando $t \to \infty$ e quando $t \to -\infty$. Observe que $\phi^{i,n}(t) \in B_\delta(y^*_{\sigma_i})$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t \in [-\sigma_i^n, 0)$; assim, $\phi^{(i)}(t) \in \overline{B_\delta(y^*_{\sigma_i})}$ para cada $t < 0$. Portanto $\phi^{(i)} \stackrel{t\to-\infty}{\longrightarrow} y^*_{\sigma_i}$. □

Corolário 1.3.11. *Se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo gradient-like, existem pontos de equilíbrio y^*_α e y^*_ω tais que y^*_α tem conjunto estável trivial em $\mathcal{A}$; isto é, $W^s_\mathcal{A}(y^*_\alpha) = \{y^*_\alpha\}$ onde*

$$W^s_\mathcal{A}(y^*_\alpha) := \{y \in \mathcal{A} :\ tal\ que\ T(t)y \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} y^*_\alpha\}$$

e y^*_ω tem conjunto instável trivial; isto é, $W^u(y^*_\omega) = \{y^*_\omega\}$.

Dem. Provemos que existe $y^*_\alpha \in \mathcal{E}$ que tem conjunto estável trivial em $\mathcal{A}$. A existência de y^*_ω é similar. Suponha que exista $x_i \in \mathcal{A}$ tal que $T(t)x_i \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} y^*_i$ para cada $y^*_i \in \mathcal{E}$. Como $x_i \in \mathcal{A}$, existe solução global limitada $\phi_{x_i} : \mathbb{T} \to X$. Por $(G1)$ existe $y^*_j \in \mathcal{E}$ tal que $\phi_{x_i}(t) \stackrel{t\to-\infty}{\longrightarrow} y^*_j$. Sendo $\mathcal{E}$ finito existe um $1 \leq r \leq p$ tal que $\{y^*_{l_1}, ..., y^*_{l_r}\} \subset \mathcal{E}$ e $\{\phi_{x_1}, ..., \phi_{x_r}\}$ constituem uma estrutura homoclínica. Pelo Lema 1.3.10 contrariamos $(G2)$ e provamos a existência de y^*_α como enunciado. □

Agora substituímos os pontos de equilíbrio por conjuntos invariantes isolados e definimos os semigrupos gradient-like relativos a uma família disjunta de invariantes isolados.

Definição 1.3.12. *Dizemos que $\mathbf{\Xi} = \{\Xi^*_1, ..., \Xi^*_p\}$ é uma* ***família disjunta de conjuntos invariantes isolados*** *se existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{O}_\delta(\Xi_i) \cap \mathcal{O}_\delta(\Xi_j) = \varnothing, 1 \leq i < j \leq p$, e Ξ_i é o subconjunto invariante maximal de $\mathcal{O}_\delta(\Xi_i)$.*

Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo com um atrator global $\mathcal{A}$ que contém uma família disjunta de cojuntos invariantes isolados $\mathbf{\Xi} = \{\Xi^*_1, ..., \Xi^*_p\}$. Definimos

Definição 1.3.13. *Seja δ como na definição 1.3.12 e fixe $\varepsilon_0 \in (0, \delta)$. Para $\Xi \in \mathbf{\Xi}$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, uma $\boldsymbol{\varepsilon - cadeia}$ de Ξ a Ξ é uma sequência $\{\Xi_{l_i}, ..., \Xi_{l_k}\} \subset \mathbf{\Xi}$, uma sequência $\{\sigma_i, t_i, ..., \sigma_k, t_k\} \subset \mathbb{T}^+$, com $\sigma_i < t_i, 1 \leq i \leq k,\ k \leq p$, e uma sequência de vetores $u_i, 1 \leq i \leq k$, tais que $u_i \in \mathcal{O}_\varepsilon(\Xi_{l_i})$, $T(\sigma_i)u_i \notin \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(\cup_{i=1}^k(\Xi_{l_i}))$ e $T(t_i)u_i \in \mathcal{O}(\Xi_{l_i+1}), 1 \leq i \leq k$, com $\Xi = \Xi_{l_{k+1}} = \Xi_{l_1}$. Diremos que $\Xi \in \mathbf{\Xi}$ é* ***recorrente por cadeias*** *se existe um $\varepsilon_0 \in (0, \delta)$ e $\varepsilon - cadeia$ de Ξ a Ξ para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.*

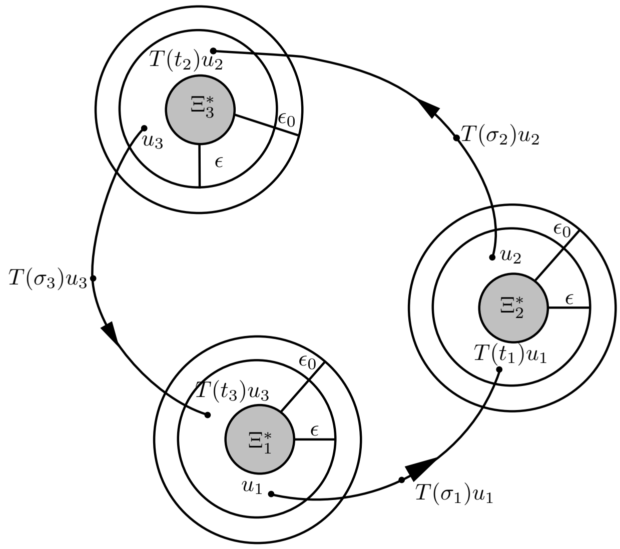

Figura 1.2: Exemplo de $\varepsilon - cadeia$.

Definição 1.3.14. *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo que possui atrator global $\mathcal{A}$. Diremos que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo gradient-like relativo a uma família disjunta de invariantes isolados $\mathbf{\Xi} = \{\Xi_1, ..., \Xi_p\}$ se,*

(GL1) Para cada solução global $\phi : \mathbb{T} \to X$ em $\mathcal{A}$ existem $1 \leq i,\ j \leq p$ tais que

$$\lim_{t\to-\infty} \rho(\phi(t), \Xi_i) = 0 \ \ e \ \ \lim_{t\to\infty} \rho(\phi(t), \Xi_j) = 0.$$

(GL2) Nenhum elemento de $\mathbf{\Xi} = \{\Xi_1, ..., \Xi_p\}$ é recorrente por cadeias.

Definição 1.3.15. *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo. O conjunto instável de um conjunto invariante isolado Ξ é dado por*

$$\begin{aligned} W^u(\Xi) := \{x \in X \ \ : \ \ & \textit{existe uma solução global } \phi : \mathbb{T} \to X \\ & \textit{tal que } \phi(0) = x \textit{ e } \lim_{t\to-\infty} \rho(\phi(t), \Xi) = 0\}. \end{aligned}$$

O conjunto estável de um conjunto invariante isolado Ξ para $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dado por

$$\begin{aligned} W^s(\Xi) := \{x \in X \ \ : \ \ & \textit{existe uma solução global } \phi : \mathbb{T} \to X \\ & \textit{tal que } \phi(0) = x \textit{ e } \lim_{t\to\infty} \rho(\phi(t), \Xi) = 0\}. \end{aligned}$$

Dada uma vizinhança V de Ξ, o conjunto de pontos de $y \in V$ pelos quais existe solução global $\phi_y : \mathbb{T} \to X$ tal que $\phi_y(t) \stackrel{t\to-\infty}{\longrightarrow} \Xi$ e $\phi_y(t) \in V$ para todo $t \in \mathbb{T}^-$ é chamado um *conjunto instável local de* Ξ *e é denotado por* $W^u_{loc}(\Xi)$. *De maneira semelhante, define-se um conjunto estável local.*

Prova-se, de forma semelhante a prova que os atratores de semigrupos gradient-like são atratores do tipo gradiente, que o atrator $\mathcal{A}$ de um semigrupo gradient-like relativo a uma família de invariantes isolados é dado por $\cup_{i=1}^{p} W^u(\Xi_i)$.

CAPÍTULO 2

DIMENSÃO DE ATRATORES

Neste capítulo, trabalharemos com a dimensão do atrator do semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ em espaços de Banach de dimensão infinita. Para tal consideraremos a teoria de **dimensão fractal**[1] de atratores.

Dedicamos as duas primeiras seções deste capítulo para noções básicas sobre a dimensão de Hausdorff e Fractal para espaços de Banach de dimensão infinita, seguindo [7], [4] e [9]. Em seguida mostra-se que conjuntos compactos de dimensão fractal finita em um espaço de Banach de dimensão infinita podem ser projetados de maneira injetiva em um subespaço de dimensão finita.

Continuando, exibi-se condições sobre o semigrupo que asseguram que o atrator global tem dimensão fractal finita.

2.1 Dimensão de Hausdorff

Nesta seção apresentaremos a definição e algumas propriedades da dimensão Hausdorff para espaços de Banach de dimensão infinita (para mais detalhes ver [7] e [9]). Além disto, calculamos a dimensão de Hausdorff de atratores do tipo gradiente com determinadas condições sobre $T(t) : \mathbb{T} \times X \to X$ e em relação ao conjunto instável local dos pontos de equilíbrio.

Recordemos que uma medida exterior $\mu^* : 2^X \longrightarrow [0, \infty]$ é uma função definida sobre o

[1] Mañé, em [16], utiliza o termo "*limit capacity*" referindo-se ao que definimos como dimensão fractal. Também encontra-se, como em Falconer [7], a expressão *"(upper) box-counting dimension"*.

conjunto das partes de um conjunto não-vazio X que satisfaz

(i) $\mu^*(\varnothing) = 0$;

(ii) $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$, se $A \subset B$;

(iii) $\mu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$.

Um conjunto $E \subset X$ é dito μ^*-mensurável se para cada $A \subset X$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Uma medida exterior μ^* em X é chamada **medida exterior métrica** se

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

sempre que $\rho(A, B) > 0$.

Proposição 2.1.1. *Se μ^* é uma medida exterior métrica em X, então todo subconjunto fechado de X, e consequentemente, todo subconjunto de Borel de X é μ^*-mensurável.*

Dem. Seja F um subconjunto fechado de X. Pela subadtividade de μ^* basta mostrar que

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap F^c)$$

para todo $A \subset X$ com $\mu^*(A) < +\infty$.

Defina r-vizinhança de F como o conjunto $\mathcal{O}_r(F) = \{x \in X; \rho(x, F) < r\}$ e considere

$$B_n = A \cap (\mathcal{O}_{\frac{1}{n}}(F))^c, n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}.$$

Note que:

(i) $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset ...$

(ii)

$$\begin{aligned} \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n &= A \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (\mathcal{O}_{\frac{1}{n}}(F))^c) \\ &= A \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{O}_{\frac{1}{n}}(F))^c \\ &\overset{(*)}{=} A \cap F^c \end{aligned}$$

$(*)$ Obviamente $F \subset \mathcal{O}_{\frac{1}{n}}(F)$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, e assim $F \subset \cap_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{O}_{\frac{1}{n}}(F)$. Por outro lado temos que $\cap_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{O}_{\frac{1}{n}}(F) \subset F$. De fato, seja $x \in \cap_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{O}_{\frac{1}{n}}(F)$, o que implica que $d(x, F) < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Logo, $d(x, F) = 0$ e, sendo F fechado, x pertence a F. Portanto $F = \cap_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{O}_{\frac{1}{n}}(F)$.

Como $\rho(B_n, F) \geq \frac{1}{n} > 0$, $((A \cap F) \cup B_n) \subset A$ e μ^* é uma medida exterior métrica,

$$\mu^*(A) \geq \mu^*((A \cap F) \cup B_n) = \mu^*(A \cap F) + \mu^*(B_n).$$

Com isto, se mostrarmos que $\mu^*(B_n) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mu^*(A \cap F^c)$ concluímos a demonstração.

Seja $C_n = B_{n+1} \cap B_n^c$, então

$$C_{n+1} = B_{n+2} \cap B_{n+1}^c = A \cap (\mathcal{O}_{\frac{1}{n+2}}(F))^c \cap (\mathcal{O}_{\frac{1}{n+1}}(F)).$$

Se $x \in C_{n+1}$ e $\rho(x, y) < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, então

$$\rho(y, F) \leq \rho(y, x) + \rho(x, F) < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}.$$

Consequentemente $\rho(C_{n+1}, B_n) \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, pois supondo que $\rho(C_{n+1}, B_n) < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, existem, pela definição de ínfimo, $x \in C_{n+1}$ e $y \in B_n$ tais que $\rho(x, y) < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Pelos cálculos acima temos que $\rho(y, F) < \frac{1}{n}$, contrariando o fato de $y \in B_n$ ($\rho(y, F) \geq \frac{1}{n}, \forall y \in B_n$). Disto, por indução e observando que $C_n = (B_{n+1} \cap B_n^c) \subset B_{n+1}$ e (i), segue

$$\begin{aligned} \mu^*(B_{2k}) &\geq \mu^*(C_{2k-1} \cup B_{2k-2}) \\ &\geq \mu^*(C_{2k-1}) + \mu^*(B_{2k-2}) \\ &\geq \mu^*(C_{2k-1}) + \mu^*(C_{2k-3}) + \mu^*(B_{2k-4}) \\ &[...] \\ &\geq \sum_{j=1}^{k} \mu^*(C_{2j-1}). \end{aligned}$$

Analogamente obtemos que $\mu^*(B_{2k+1}) \geq \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \mu^*(C_{2j})$.

Como $\mu^*(B_n) \leq \mu^*(A) < \infty$, segue que as séries $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(C_{2j-1})$ e $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(C_{2j})$ são covergentes.

Observemos que $(A \cap F^c) = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n = B_{n_1} \cup (\cup_{j=n_1}^{\infty} C_j)$, pois se $x \in \cup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$ então $x \in B_{n_0}$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}^*$. Se $n_0 \leq n_1$ então $x \in B_{n_1}$ e se $n_0 \geq n_1$ então $x \in (C_j \cup B_{n_1})$, para algum j. Por outro lado, se $x \in B_{n_1} \cup (\cup_{j=1}^{\infty} C_j)$ obviamente $x \in \cup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$.

Novamente por subadtividade, temos que,

$$\begin{aligned}\mu^*(A\cap F^c) &\leq \mu^*(B_n)+\mu^*(\cup_{j=n}^{\infty}C_j)\\ &\leq \mu^*(B_n)+\sum_{j=n}^{\infty}\mu^*(C_j)\end{aligned}$$

e consequentemente:

(a)

$$\begin{aligned}\mu^*(A\cup F^c)-\sum_{j=n}^{\infty}\mu^*(C_j) &\leq \mu^*(B_n)\\ \mu^*(A\cap F^c)+\liminf_{n\to\infty}-\mu^*(\cup_{j=n}^{\infty}C_j) &\leq \liminf_{n\to\infty}\mu^*(B_n)\\ \mu^*(A\cap F^c) &\leq \liminf_{n\to\infty}\mu^*(B_n).\end{aligned}$$

(b) Como $B_n\subset(A\cup F^c), \forall\, n\in N^*$,

$$\limsup_{n\to\infty}\mu^*(B_n)\leq\mu^*(A\cap F^c).$$

Logo

$$\mu^*(A\cap F^c)\leq\liminf_{n\to\infty}\mu^*(B_n)\leq\limsup_{n\to\infty}\mu^*(B_n)\leq\mu^*(A\cap F^c).$$

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty}\mu^*(B_n)=\mu^*(A\cap F^c)$ e uma vez que os conjuntos fechados geram a σ-álgebra de Borel a prova está concluída. $\square$

A seguir apresentaremos a definição e algumas propriedades básicas da dimensão de Hausdorff.

Para um espaço métrico $(X,\rho), \alpha>0$ e $\varepsilon>0$. Se $A\subset X$, seja

$$\mu_{\varepsilon}^{(\alpha)}(A)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(\text{diam}(B_i))^{\alpha} : A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i, \text{diam}(B_i)<\varepsilon\right\}, \tag{2.1}$$

com a convenção $\inf\varnothing=\infty$. Como $\mu_{\varepsilon}^{(\alpha)}(A)$ cresce quando ε decresce definimos

$$\mu^{(\alpha)}(A)=\lim_{\varepsilon\to0}\mu_{\varepsilon}^{(\alpha)}(A). \tag{2.2}$$

Proposição 2.1.2. *Seja $\alpha'>\alpha>0$. Se $\mu^{(\alpha)}(A)<\infty$, então $\mu^{(\alpha')}(A)=0$ e, se $\mu^{(\alpha')}(A)>0$ então $\mu^{(\alpha)}(A)=\infty$.*

Dem. É suficiente provar a primeira afirmação, uma vez que a segunda é contrapositiva da primeira. Se $\mu^{(\alpha)}(A) < \infty$, para cada $\delta > 0$ existe $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $A \subset \cup_{j=1}^{\infty} B_j$, $\operatorname{diam}(B_j) \leq \delta$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(B_j))^{\alpha} \leq \mu_{\delta}^{(\alpha)}(A) + 1 \leq \mu^{(\alpha)}(A) + 1.$$

Mas para $\alpha' > \alpha$,

$$\begin{aligned} (\operatorname{diam}(B_j))^{\alpha'-\alpha} &\leq \delta^{\alpha'-\alpha} \\ (\operatorname{diam}(B_j))^{\alpha'} &\leq \delta^{\alpha'-\alpha}(\operatorname{diam}(B_j))^{\alpha}, \end{aligned}$$

consequentemente,

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(B_j))^{\alpha'} \leq \delta^{\alpha'-\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(B_j))^{\alpha} \leq \delta^{\alpha'-\alpha}[\mu^{(\alpha)}(A) + 1]$$

e $\mu_{\delta}^{(\alpha')}(A) \leq \delta^{\alpha'-\alpha}[\mu^{(\alpha)}(A) + 1] \xrightarrow{\delta \to 0} 0$, ou seja, $\mu^{(\alpha')}(A) = 0$. □

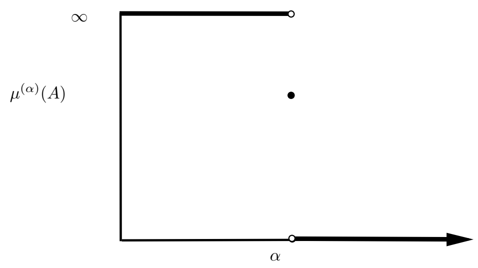

Figura 2.1: Dimensão de Hausdorff

Definição 2.1.3. *Para qualquer $A \subset X$, a **dimensão de Hausdorff** de A, $dim_H(A)$, é definida pelo número real não-negativo dado por*

$$\inf\{\alpha \geq 0 : \mu^{(\alpha)}(A) = 0\} = \sup\{\alpha \geq 0 : \mu^{(\alpha)}(A) = \infty\}.$$

Proposição 2.1.4. *Seja (X, ρ) um espaço métrico. Para cada $\alpha > 0$ e $\delta > 0$, $\mu_{\delta}^{(\alpha)} : 2^X \to [0, \infty]$ é uma medida exterior.*

Dem. Sejam $\alpha > 0$ e $\delta > 0$ fixos, assim

(i) Segue direto da definição que $\mu_{\delta}^{(\alpha)}(\varnothing) = 0$.

(ii) Se $A \subset B$ então $\mu_\delta^{(\alpha)}(A) \leq \mu_\delta^{(\alpha)}(B)$. De fato, note que a coleção de coberturas para B por conjuntos de diâmetro menor que δ está contida na coleção de coberturas para A por conjuntos de diâmetro também menor que δ. Logo o ínfimo tomado sobre essas coleções nos da $\mu_\delta^{(\alpha)}(A) \leq \mu_\delta^{(\alpha)}(B)$.

(iii) $\mu_\delta^{(\alpha)}(\cup_{j=1}^\infty A_j) \leq \displaystyle\sum_{j=1}^\infty \mu_\delta^{(\alpha)}(A_j)$, para qualquer sequência $\{A_j\}_{j=1}^\infty$. Para tal, considere $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ uma sequência em 2^X. Se $\mu_\delta^{(\alpha)}(A_j) = \infty$ para algum j o resultado é direto. Caso contrário, pela definição de ínfimo, dado $\varepsilon > 0$ existe, para cada $j \in \mathbb{N}$, uma sequência $\{B_i^j\}_{i=1}^\infty$ com $A_j \subset \cup_{i=1}^\infty B_i^j$ e $\text{diam}(B_i^j) < \delta$ tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^\infty (\text{diam}(B_i^j))^\alpha \leq \mu_\delta^{(\alpha)}(A_j) + \varepsilon 2^{-j}$, então $\cup_{j=1}^\infty A_j \subset \cup_{j,i=1}^\infty B_i^j$ e

$$\mu_\delta^{(\alpha)}(\cup_{j=1}^\infty A_j) \leq \sum_{i=1,j=1}^\infty (\text{diam}(B_i^j))^\alpha \leq \sum_{j=1}^\infty \mu_\delta^{(\alpha)}(A_j) + \varepsilon.$$

Pela arbitrariedade de ε, $\mu_\delta^{(\alpha)}(\cup_{j=1}^\infty A_j) \leq \displaystyle\sum_{j=1}^\infty \mu_\delta^{(\alpha)}(A_j)$.

Portanto, $\mu_\delta^{(\alpha)} : 2^X \longrightarrow [0, \infty]$ é uma medida exterior. □

Teorema 2.1.5. *Seja (X, ρ) um espaço métrico. Para cada $\alpha > 0$, $\mu^{(\alpha)} : 2^X \to [0, \infty]$ é uma medida exterior métrica.*

Dem. Segue imediatamente da Proposição 2.1.4 que $\mu^{(\alpha)}$ é uma medida exterior. Sejam $A, B \subset X$ tais que $\rho(A, B) > 0$. Considere $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ uma cobertura para $A \cup B$ tal que $diam(C_n) < \varepsilon < \rho(A, B)$. Assim para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n \cap A = \varnothing$ ou $C_n \cap B = \varnothing$ e

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty (diam(C_n))^\alpha &= \sum_{C_n \cap A \neq \varnothing} (diam(C_n))^\alpha + \sum_{C_n \cap B \neq \varnothing} (diam(C_n))^\alpha \\ &\geq \mu_\varepsilon^{(\alpha)}(A) + \mu_\varepsilon^{(\alpha)}(B). \end{aligned}$$

Como a desigualdade acima é válida para toda cobertura $\{C_n\}$ com $diam(C_n) < \varepsilon < \rho(A, B)$, temos que $\mu_\varepsilon^{(\alpha)}(A \cup B) \geq \mu_\varepsilon^{(\alpha)}(A) + \mu_\varepsilon^{(\alpha)}(B)$, para todo $0 < \varepsilon < \rho(A, B)$. Portanto, usando a subaditividade de $\mu_\varepsilon^{(\alpha)}$, segue que $\mu_\varepsilon^{(\alpha)}(A \cup B) = \mu_\varepsilon^{(\alpha)}(A) + \mu_\varepsilon^{(\alpha)}(B)$.

Assim, $\mu^{(\alpha)}(A \cup B) = \lim_{\varepsilon \to 0}(\mu_\varepsilon^{(\alpha)}(A) + \mu_\varepsilon^{(\alpha)}(B)) = \mu^{(\alpha)}(A) + \mu^{(\alpha)}(B)$, sempre que $\rho(A, B) > 0$. □

Lema 2.1.6. *Seja (X, ρ) um espaço métrico e $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ uma sequência crescente de subconjuntos de X. Se $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$, $\mu^{(\alpha)}(A) < \infty$ e $\rho(A_j, A \setminus A_{j+1}) > 0$ para cada $j \in \mathbb{N}^*$, então $\mu^{(\alpha)}(A) = \lim_{j\to\infty} \mu^{(\alpha)}(A_j)$.*

Dem. Como $A_j \subset A$, para todo $j \in \mathbb{N}$, e A_j é crescente, segue pela monotonicidade de $\mu^{(\alpha)}$ que $\lim_{j\to\infty} \mu^{(\alpha)}(A_j)$ existe e $\lim_{j\to\infty} \mu^{(\alpha)}(A_j) \leq \mu^{(\alpha)}(A) < \infty$.

Para obter a outra desigualdade considere $B_1 = A_1$ e $B_j = A_j \setminus A_{j-1}$, para $j \geq 2$. Observe que

$$\rho(B_{2j-1}, B_{2j+1}) = \rho(A_{2j-1} \setminus A_{2j-2}, A_{2j+1} \setminus A_{2j}) = \rho(A_{2j-1}, A \setminus A_{2j}) > 0, \forall\, j \ \geq 2$$

e

$$\rho(B_{2j}, B_{2j+2}) = \rho(A_{2j} \setminus A_{2j-1}, A_{2j+1} \setminus A_{2j}) = \rho(A_{2j}, A \setminus A_{2j}) > 0, \forall\, j \ \geq 2;$$

assim, cada dois conjuntos na família $\{B_{2j-1}\}_{j=1}^{\infty}$ ou na família $\{B_{2j}\}_{j=1}^{\infty}$ são positivamente separados. Logo,

$$\begin{aligned} \mu^{(\alpha)}(A) &\geq \mu^{\alpha}(\bigcup_{j=1}^{n} B_{2j-1}) = \sum_{j=1}^{n} \mu^{(\alpha)}(B_{2j-1}), \\ \mu^{(\alpha)}(A) &\geq \mu^{\alpha}(\bigcup_{j=1}^{n} B_{2j}) = \sum_{j=1}^{n} \mu^{(\alpha)}(B_{2j}) \end{aligned}$$

e $\sum_{j=1}^{n} \mu^{(\alpha)}(B_j) \leq 2\mu^{(\alpha)}(A) < \infty$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, ou seja, a série $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^{(\alpha)}(B_j)$ converge.

Agora, note que

$$\mu^{(\alpha)}(A) = \mu^{(\alpha)}(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \mu^{(\alpha)}(A_n) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \mu^{(\alpha)}(B_j).$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$ na expressão acima, segue que $\mu^{(\alpha)}(A) \leq \lim_{n\to\infty} \mu^{(\alpha)}(A_n)$.

Portanto, $\mu^{(\alpha)}(A) = \lim_{n\to\infty} \mu^{(\alpha)}(A_n)$. □

Proposição 2.1.7. *$\mu^{(\alpha)} : 2^X \to [0, \infty]$ é invariante sob isometrias de X. Se Y é um conjunto qualquer e $f, g : Y \to X$ são tais que*

$$\rho(f(y), f(z)) \leq C\rho(g(y), g(z)),\ \forall y, z \in Y.$$

Então $\mu^{(\alpha)}(f(A)) \leq C^{\alpha}\mu^{(\alpha)}(g(A))$ para todo $A \subset Y$.

Dem. A primeira afirmação segue direto da definição de $\mu^{(\alpha)}$ associada ao fato de que se $h : X \to X$ é uma isometria, então diam$(B) =$ diam$(h(B))$, para todo $B \subset X$.

Para a segunda asserção considere $\mu^{(\alpha)}(g(A)) < \infty$ (caso contrário não há o que provar). Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta_\varepsilon > 0$ tal que

$$|\mu_\delta^{(\alpha)}(g(A)) - \mu^{(\alpha)}(g(A))| < \varepsilon, \forall\, 0 < \delta < \delta_\varepsilon.$$

Usando agora a definição de ínfimo garantimos que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que para todo $0 < \delta < \delta_\varepsilon$, existe uma cobertura de $g(A)$ por conjuntos B_i com diam$(B_i) \leq \frac{\delta}{C}$ e

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(B_i))^\alpha \leq \mu^{(\alpha)}(g(A)) + \varepsilon.$$

Os conjuntos $B_i' = f(g^{-1}(B_i))$ cobrem $f(A)$ e diam$(B_i') \leq C$ diam$(B_i) \leq \delta$, assim

$$\mu^{(\alpha)}(f(A)) \leq C^\alpha \mu^{(\alpha)}(g(A)) + C^\alpha \varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ e $\delta \to 0$ concluímos a demonstração. □

Proposição 2.1.8. *Sejam (X, ρ_X) e (Y, ρ_Y) espaços métricos e $f : Y \to X$ uma função Lipschitz contínua com constante de Lipschitz $C \geq 0$ e $A \subset Y$. Então $\mu^{(\alpha)}(f(A)) \leq C^\alpha \mu^{(\alpha)}(A)$.*

Dem. Seja $\{B_i\}_{i=1}^\infty$ uma cobertura de A tal que diam$(B_i) < \delta$, então

$$\text{diam}(f(A \cap B_i)) \leq C\ \text{diam}(A \cap B_i) \leq C\ \text{diam}(B_i),$$

pois para todo $x, y \in Y$ tem-se $\rho_X(f(x), f(y)) \leq C\ \rho_Y(x, y)$.

Logo $\{f(A \cap B_i)\}_{i=1}^\infty$ é uma cobertura para $f(A)$ tal que diam$(f(A \cap B_i)) \leq \varepsilon$, onde $\varepsilon = C\delta$. Segue que $\sum_{i=1}^\infty \text{diam}(f(A \cap B_i))^\alpha \leq \sum_{i=1}^\infty C^\alpha \text{diam}(B_i)^\alpha$ e assim $\mu_\varepsilon^{(\alpha)}(f(A)) \leq C^\alpha\ \mu_\delta^{(\alpha)}(A)$.
Tomando o limite quando δ vai a zero temos que $\varepsilon \to 0$ e $\mu^{(\alpha)}(f(A)) \leq C^\alpha \mu^{(\alpha)}(A)$. □

Proposição 2.1.9. *Seja $f : Y \to X$ uma função Lipschitz contínua e $A \subset Y$. Então*

$$\dim_H(f(A)) \leq \dim_H(A).$$

Dem. Pela Proposição 2.1.8, temos que se $\mu^{(\alpha)}(A) = 0$ então $\mu^{(\alpha)}(f(A)) = 0$. Logo, $\{\alpha \geq 0 : \mu^{(\alpha)}(A) = 0\} \subset \{\alpha \geq 0 : \mu^{(\alpha)}(f(A)) = 0\}$ e portanto $\dim_H(A) \geq \dim_H(f(A))$. □

Corolário 2.1.10. *Seja $f : Y \to X$ uma função Lipschitz contínua, $A \subset Y$ e $G(f, A) = \{(x, f(x)); x \in A\}$ o gráfico de f restrito à A. Então $\dim_H(G(f, A)) = \dim_H(A)$.*

Dem. Considere as aplicações $A \ni x \longmapsto (x, f(x)) \in G(f, A)$ e $G(f, A) \ni (x, f(x)) \longmapsto x \in A$. Note que,

$$\rho_2((x, f(x)), (y, f(y))) = \rho_Y(x, y) + \rho_X(f(x), f(y)) \leq (c + 1)\rho_Y(x, y) \ \ e$$
$$\rho_Y(x, y) \leq \rho_Y(x, y) + \rho_X(f(x), f(y)) = \rho_2((x, f(x)), (y, f(y)))$$

onde ρ_Y, ρ_X e ρ_2 são as métricas de Y, X e $Y \times X$ respectivamente e na primeira desigualdade usamos o fato que $f : Y \to X$ é uma função Lipschitz. Logo, as aplicações definidas acima são Lipschitz e pela Proposição 2.1.9 segue o resultado. □

Proposição 2.1.11. *Seja $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma sequência de conjuntos em X e seja $A = \cup_{j \in \mathbb{N}^*} A_j$. Então*

$$\dim_H(A) = \sup_{j \in \mathbb{N}^*} \dim_H(A_j).$$

Dem. Pela monotonicidade temos que $\sup_{j \in \mathbb{N}^*} \dim_H(A_j) \leq \dim_H(A)$.

Por outro lado, considere $\alpha > \sup_{j \in \mathbb{N}^*} \dim_H(A_j)$. Logo, pela Proposição 2.1.2, $\mu^{(\alpha)}(A_j) = 0$, para todo $j \in \mathbb{N}^*$. Então, pela subaditividade de $\mu^{(\alpha)} : 2^X \longrightarrow [0, \infty]$,

$$\mu^{(\alpha)}(A) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu^{\alpha}(A_j) = 0$$

e assim $\dim_H(A) \leq \alpha$. Pela arbitrariedade de α, $\dim_H(A) \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} \dim_H(A_j)$.

Portanto, $\mu^{(\alpha)}(A) = \sup_{j \in \mathbb{N}^*} \dim_H(A_j)$. □

Podemos então provar que $\dim_H(\mathbb{R}^n) = n$. Se C é um cubo de lado unitário em $\mathbb{R}^n$, dado $\delta > 0$ seja k tal que $\delta \geq k^{-1} n^{\frac{1}{2}}$. Dividimos C em k^n subcubos de lados $\frac{1}{k}$, então

$$\mu_{\delta}^{(n)}(C) \leq k^n (n^{\frac{1}{2}} k^{-1})^n = n^{\frac{n}{2}},$$

assim $\mu^{(n)}(C) < \infty$. Pela Proposição 2.1.2, $\mu^{(\alpha)}(C) = 0$ para todo $\alpha > n$. Logo, $\dim_H(C) \leq n$ e como $\mathbb{R}^n$ pode ser expresso como uma união contável de tais cubos, segue da Proposição 2.1.11 que $\dim_H(\mathbb{R}^n) \leq n$. Assim, sabendo[2] que $\dim_T(X) \leq \dim_H(X)$ e $\dim_T(\mathbb{R}^n) = n$, temos que $\dim_H(\mathbb{R}^n) = n$. Além disto, $\dim_H(E) \leq n$ para todo $E \subset \mathbb{R}^n$.

Vamos agora nos voltar aos atratores do tipo gradiente[3] em espaços de Banach.

[2] $\dim_T(X)$: dimensão topológica de X, para mais detalhes ver [17], p. 305, e [12].

[3] ver definição 1.3.1

Seja $\mathcal{E} = \{e_1^*, ..., e_p^*\}$ o conjunto dos pontos de equílibrio do semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$. Sabemos que o atrator global é dado por

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{p} W^u(e_i^*).$$

Suponha que $T = T(1) \in \mathcal{C}(X)$ é uma aplicação Lipschitz contínua e que o conjunto instável local $W^u_{loc}(e_i^*)$ de cada ponto de equílibrio é o gráfico de uma função Lipschitz contínua com domínio contendo uma bola de Q_iX, onde Q_i é uma projeção de posto finito, $1 \leq\ i\ \leq\ p$. Então

$$\dim_H(\mathcal{A}) = \max_{1\leq\ i\ \leq\ p} \dim_H(Q_iX).$$

Para provar a afirmação acima provemos primeiro que:

$$\dim_H(W^u_{loc}(e_i^*)) = \dim_H(Q_iX) < \infty, \text{ para cada } 1 \leq\ i\ \leq\ p; \tag{2.3}$$

$$\dim_H(T^n(W^u_{loc}(e_i^*))) \leq \dim_H(W^u_{loc}(e_i^*)), \text{ para cada } 1 \leq\ i\ \leq\ p; \tag{2.4}$$

$$W^u(e_i^*) = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(W^u_{loc}(e_i^*)), \text{ para cada } 1 \leq\ i\ \leq\ p. \tag{2.5}$$

- (2.3): como Q_i é de posto finito temos que Q_iX é isomorfo a $\mathbb{R}^n$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Portanto $\dim_H(Q_iX) < \infty$ para cada $i = 1, ..., p$. A igualdade segue do Corolário 2.1.10.

- (2.4): segue direto da Proposição 2.1.9.

- (2.5): seja $y \in W^u(e_i^*)$. Logo, existe $\phi : \mathbb{T} \to X$, solução global por y, de forma que, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\hat{t} \in \mathbb{T}^+$ tal que $\rho(\phi(t), e_i^*) < \varepsilon$, para todo $t \leq -\hat{t}$. Tome β como o menor natural maior que $\hat{t}$, assim $\phi(-\beta) \in B_\varepsilon(e_i^*)$. Defina, $\xi : \mathbb{T} \to X$ por $\xi(t) = \phi(t - \beta)$. Note que $\xi(0) = \phi(-\beta) \in B_\varepsilon(e_i^*)$, $\xi(t) \stackrel{t\to-\infty}{\longrightarrow} e_i^*$ e $\xi(t) \in B_\varepsilon(e_i^*)$ para todo $t \in \mathbb{T}^-$; isto é, $\phi(-\beta) \in W^u_{loc}(e_i^*)$. Portanto, $y = T^\beta\phi(-\beta)\ \in T^\beta(W^u_{loc}(e_i^*))$ e $W^u(e_i^*) \subset T^\beta(W^u_{loc}(e_i^*))$. Por outro lado, se $y \in \cup_{n=0}^{\infty} T^n(W^u_{loc}(e_i^*))$ então existem $\beta \in \mathbb{N}$ e $x \in W^u_{loc}(e_i^*)$, para algum $i \in \mathbb{N}^*$, tais que $y = T^\beta x = T^\beta\phi_x(0) = \phi_x(\beta)$. Defina $\psi : \mathbb{T} \to X$ por $\psi(t) = \phi_x(t + \beta)$. Logo, $\psi(0) = y$ e $\psi(t) \stackrel{t\to-\infty}{\longrightarrow} e_i^*$. Concluindo a demonstração.

Utilizando a Proposição 2.1.11 segue que,

$$\begin{aligned}\dim_H(Q_iX) = \dim_H(W^u_{loc}(e_i^*)) &\leq \dim_H((W^u(e_i^*)) = \dim_H\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(W^u_{loc}(e_i^*))\right)\\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \dim_H(T^n(W^u_{loc}(e_i^*)))\\ &\leq \dim_H(W^u_{loc}(e_i^*)) = \dim_H(Q_iX).\end{aligned}$$

Portanto $\dim_H(W^u(e_i^*)) = \dim_H(Q_iX)$, para todo $i = 1, ..., p$. Como $\mathcal{A} = \cup_{i=1}^p W^u(e_i^*)$, temos que $\dim_H(\mathcal{A}) = \max\limits_{1\leq\ i\ \leq\ p} \dim_H(Q_iX)$.

2.2 Dimensão Fractal

Nesta seção apresentaremos algumas propriedades da dimensão fractal[4] para espaços de Banach de dimensão infinita.

Seja K um espaço métrico compacto. Defina $N(r, K)$ como o número mínimo de bolas de raio r necessário para cobrir K. A **dimensão fractal** $c(K)$ de K é definida por:

$$c(K) = \limsup_{r\to 0} \frac{\log N(r, K)}{\log\ \left(\frac{1}{r}\right)}. \tag{2.6}$$

A proposição seguinte nos fornece uma definição equivalente para a dimensão fractal.

Proposição 2.2.1. *O valor* $c(K)$*, definido por* (2.6)*, é o menor número para o qual, dado* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$N(r, K) \leq \left(\frac{1}{r}\right)^{c(K)+\varepsilon},\ 0 <\ r\ < \delta. \tag{2.7}$$

Dem. Por (2.6), dado $\varepsilon_1 > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\left|\sup_{0<\ r\ <\delta_1} \frac{\log N(r, K)}{\log\ \left(\frac{1}{r}\right)} -\ c(K)\right| < \varepsilon_1. \tag{2.8}$$

Logo, $\log N(r, K) \leq \log\ (\frac{1}{r})^{c(K)+\varepsilon_1}$, para todo $0 <\ r\ < \delta_1$ e como $\log$ é uma função crescente $N(r, K) \leq (\frac{1}{r})^{c(K)+\varepsilon_1}$, para todo $0 <\ r\ < \delta_1$.

Agora, suponha que exista $\beta < c(K)$ tal que, dado $\varepsilon^* > 0$, existe $\delta^* > 0$ de modo que $N(r, K) \leq (\frac{1}{r})^{\beta+\varepsilon^*}$, $0 <\ r\ < \delta^*$. Tome $\varepsilon^* = c(K) - \beta + \varepsilon_1 > 0$, então existe $\delta^* > 0$ tal

[4] Para mais detalhes ver *"(upper) box-counting dimension"* em [7] e [4].

que $N(r,K) \leq (\frac{1}{r})^{c(K)-\varepsilon_1}$, $0 < r < \delta^*$. Considerando $\delta = min\{\delta_1, \delta^*\}$, temos que, para $\varepsilon^* = c(K) - \beta + \varepsilon_1 > 0$, existe δ de modo que

$$\frac{\log N(r,K)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} \leq c(K) - \varepsilon_1, \forall\, 0 < r < \delta^*,$$

contradizendo (2.8).

Reciprocamente, se $c(K)$ é o menor número para o qual, dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $N(r,K) \leq (\frac{1}{r})^{c(K)+\varepsilon}$, $0 < r < \delta$, então

$$\frac{\log N(r,K)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} \leq c(K) + \varepsilon, 0 < r < \delta \Rightarrow \sup_{0 < r < \delta} \frac{\log N(r,K)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} - c(K) < \varepsilon. \tag{2.9}$$

Suponha que $\sup\limits_{0 < r < \delta} \dfrac{\log N(r,K)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} - c(K) \leq -\varepsilon$. Logo

$$N(r,K) \leq \left(\frac{1}{r}\right)^{c(K)-\varepsilon}, 0 < r < \delta \Rightarrow N(r,K) \leq \left(\frac{1}{r}\right)^{(c(K)-\varepsilon-\varepsilon)+\varepsilon}, 0 < r < \delta;$$

isto é, existe $c_1 = c(K) - 2\varepsilon$, para o qual, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $N(r,K) \leq (\frac{1}{r})^{c_1+\varepsilon}$, $0 < r < \delta$, contrariando a minimalidade de $c(K)$. Portanto

$$\sup_{0 < r < \delta} \frac{\log N(r,K)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} - c(K) > -\varepsilon. \tag{2.10}$$

De (2.9) e (2.10) obtemos (2.8), concluindo a demonstração. □

Observe que multiplicando a expressão (2.7) por $(2r)^\alpha$ conseguimos

$$\mu_r^{(\alpha)}(K) \leq 2^\alpha N(r,K) r^\alpha \leq 2^\alpha \left(\frac{1}{r}\right)^{c(K)+\varepsilon-\alpha}, 0 < r < \delta.$$

Assim, $\mu_r^{(c(K)+\varepsilon)}(K) \leq 2^{c(K)+\varepsilon}(\frac{1}{r})^{\varepsilon-\lambda}$ para $0 < r < \delta$ e para todo $\lambda > 0$. Fazendo $r \to 0$ temos $\mu^{(c(K)+\lambda)}(K) = 0$, para todo $0 < \varepsilon < \lambda$. Portanto,

$$\begin{aligned} \dim_H(K) &\leq c(K) + \lambda \\ &\leq \lim_{\lambda \to 0}(c(K) + \lambda) \\ &\leq c(K). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Lema 2.2.2. *Dado um subconjunto compacto K de um espaço métrico X, $w > 0$ e α com $0 < \alpha < 1$, então*

$$c(K) = \limsup_{k \longrightarrow \infty} \frac{log(N(\alpha^k w,\ K))}{-log(\alpha^k)}.$$

Dem. Primeiro note que:

$$\limsup_{k\longrightarrow\infty}\frac{log(N(\alpha^k w,\ K))}{-log(\alpha^k w)}=\limsup_{k\longrightarrow\infty}\frac{log(N(\alpha^k w,\ K))}{-log(\alpha^k)}. \tag{2.12}$$

De fato,

$$\begin{aligned}\frac{log(N(\alpha^k w,\ K))}{-log(\alpha^k w)} &= \frac{log(N(\alpha^k w,\ K))}{-(log(\alpha^k)+log(w))}\\ &= \frac{1}{1+\frac{log(w)}{log(\alpha^k)}}\cdot\frac{log(N(\alpha^k w,\ K))}{-log(\alpha^k)},\end{aligned}$$

e (2.12) segue pois $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{1+\frac{log(w)}{log(\alpha^k)}}=1.$

Uma vez que $\alpha^k w \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, pela definição de $c(K)$ temos que

$$c(K)\geq\limsup_{k\longrightarrow\infty}\frac{log(N(\alpha^k w,\ K))}{-log(\alpha^k w)}.$$

Para a outra desigualdade dado $k>0$ escolha ε tal que $\alpha^{k+1}w<\varepsilon<\alpha^k w$. Assim

$$\begin{aligned}\frac{log(N(\varepsilon,\ K))}{-log(\varepsilon)} &\leq \frac{log(N(\alpha^{k+1}w,\ K))}{-log(\alpha^k w)}=\frac{log(N(\alpha^{k+1}w,\ K))}{-log(\alpha^{k+1}w)+log(\alpha)}\\ &\leq \frac{1}{1-\frac{log(\alpha)}{log(\alpha^{k+1}w)}}\cdot\frac{log(N(\alpha^{k+1}w,\ K))}{-log(\alpha^{k+1}w)},\end{aligned}$$

Como (2.12) é válida, $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{1-\frac{log(\alpha)}{log(\alpha^{k+1}w)}}=1$ e quando $k\to\infty$, ε tende a zero, concluímos a demonstração. □

Lema 2.2.3. *Seja X um espaço vetorial normado e K_1, K_2 subconjuntos compactos de K. Então $c(K_1+K_2)\leq c(K_1)+c(K_2)$.*

Dem. Suponha que $c(K_1)<\infty$ e $c(K_2)<\infty$, caso contrário não há o que provar. Pela compacidade de K_1 e K_2, dado $r>0$, existem $\{x_i^1\}_{i=1}^{N_1}$, $\{x_j^2\}_{j=1}^{N_2}\subset X$ tais que $K_1\subset\bigcup_{i=1}^{N_1}B_r(x_i^1)$ e $K_2\subset\bigcup_{j=1}^{N_2}B_r(x_j^2)$. Logo,

$$(K_1+K_2)\subset\bigcup_{i=1}^{N_1}\bigcup_{j=1}^{N_2}(B_r(x_i^1)+B_r(x_j^2))=\bigcup_{i=1}^{N_1}\bigcup_{j=1}^{N_2}B_{2r}(x_i^1+x_j^2)$$

e consequentemente $N(2r,(K_1+K_2))\leq N_1\cdot N_2$. Portanto,

$$\begin{aligned}c(K_1+K_2) &:= \limsup_{r\to0}\frac{log\ N(2r,K_1+K_2)}{log\left(\frac{1}{2r}\right)}\leq\frac{log\ (N_1\cdot N_2)}{log\left(\frac{1}{2r}\right)}\\ &\leq \limsup_{r\to0}\frac{log\ (N_1)}{log\left(\frac{1}{r}\right)}+\limsup_{r\to0}\frac{log\ (N_2)}{log\left(\frac{1}{r}\right)}=c(K_1)+c(K_2).\end{aligned}$$

□

Como consequência direta do Lema anterior temos o seguinte resultado:

Corolário 2.2.4. *Seja X um espaço vetorial normado e K um subconjunto compacto de X. Se $c(K) < \infty$, então $c(K - K) \leq 2c(K)$.*

Lema 2.2.5. *Se (X, ρ_X) e (Y, ρ_Y) são espaços métricos, K um subconjunto compacto de X e $f : K \to Y$ é Hölder contínua com expoente $\theta(0 < \theta \leq 1)$, isto é, existe $L > 0$ tal que*

$$\rho_Y(f(x), f(y)) \leq L\rho_X(x, y)^\theta \quad \textit{para todo x, y} \ \in K,$$

então $c(f(K)) \leq \frac{c(K)}{\theta}$.

Dem. Se $c(K) = \infty$, não há o que provar. Suponha então que $c(K) < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$ temos que: $K \subset \cup_{i=1}^{N(\varepsilon,K)} B_\varepsilon^X(x_i)$. Note que, se $x \in \left(B_\varepsilon^X(x_i) \cap K\right)$ então $\rho_Y(f(x), f(x_i)) \leq L\rho_X(x, x_i)^\theta < L\varepsilon^\theta$. Assim,

$$f(K) \subset \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon,K)} f\left(B_\varepsilon^X(x_i) \cap K\right) \subset \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon,K)} B_{L\varepsilon^\theta}^Y(f(x_i)).$$

Portanto $N(L\varepsilon^\theta, f(K)) \leq N(\varepsilon, K)$ e

$$\begin{aligned} c(f(K)) &= \limsup_{\varepsilon \to \infty} \frac{\log N(L\varepsilon^\theta, f(K))}{-\log L\varepsilon^\theta} \leq \limsup_{\varepsilon \to \infty} \frac{\log N(\varepsilon, K)}{-(\log L + \log \varepsilon^\theta)} \\ &\leq \limsup_{\varepsilon \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{\log L}{\log \varepsilon^\theta}} \frac{\log N(\varepsilon, K)}{-\theta \log \varepsilon} = \frac{c(K)}{\theta} \end{aligned}$$

□

Corolário 2.2.6. *Seja $f : X \to Y$ uma função Lipschitz contínua, K um subconjunto compacto de X e $G(f, K) = \{(x, f(x)) : x \in K\}$ o gráfico de f restrito à K. Então $c(G(f, K)) = c(K)$.*

Dem. Considere as aplicações $K \ni x \longmapsto (x, f(x)) \in G(f, K)$ e $G(f, K) \ni (x, f(x)) \longmapsto x \in K$. Note que,

$$\rho_2((x, f(x)), (y, f(y))) = \rho_X(x, y) + \rho_Y(f(x), f(y)) \leq (c + 1)\rho_X(x, y) \ \ e$$
$$\rho_X(x, y) \leq \rho_X(x, y) + \rho_Y(f(x), f(y)) = \rho_2((x, f(x)), (y, f(y)))$$

onde ρ_Y, ρ_X e ρ_2 são as métricas de Y, X e $X \times Y$ respectivamente e na primeira desigualdade usamos o fato que $f : X \to Y$ é uma função Lipschitz . Logo, as aplicações definidas acima são Lipschitz e pelo Lema 2.2.5 segue o resultado. □

Lema 2.2.7. *Seja (X, ρ_X) e (Y, ρ_Y) espaços métricos e K_X, K_Y subconjuntos compactos de X, Y respectivamente. Então $c(K_X \times K_Y) \leq c(K_X) + c(K_Y)$.*

Dem. Se $c(K_X) = \infty$ ou $c(K_Y) = \infty$ o resultado é direto. Suponhamos então que ambas são finitas e adotemos em $X \times Y = Z$ a métrica

$$\rho_Z((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \rho_X(x_1, x_2) + \rho_Y(y_1, y_2).$$

Como $K_X \subset \cup_{i=1}^{N_X} B_\varepsilon^X(x_i)$, $K_Y \subset \cup_{j=1}^{N_Y} B_\varepsilon^Y(y_j)$ e como $\rho_Z((x, y), (x_i, y_j)) = \rho_X(x, x_i) + \rho_Y(y, y_i) < 2\varepsilon$ sempre que $(x, y) \in B_\varepsilon^X(x_i) \times B_\varepsilon^Y(y_j)$, segue que

$$K_X \times K_Y \subset \bigcup_{i=1}^{N_X} \bigcup_{j=1}^{N_Y} \left(B_\varepsilon^X(x_j) \times B_\varepsilon^Y(y_j)\right) \subset \bigcup_{i=1}^{N_X} \bigcup_{j=1}^{N_Y} B_{2\varepsilon}^Z(x_i, y_j).$$

Portanto, $N(2\varepsilon, K_X \times K_Y) \leq N_X \cdot N_Y$. E o resultado segue direto por (2.6). $\square$

Combinando os Lemas 2.2.5 e 2.2.7, temos o seguinte resultado:

Lema 2.2.8. *Sejam $K_X \subset X$ e $K_Y \subset Y$ conjuntos compactos. Suponha que $c(K_X) < \infty$, $c(K_Y) < \infty$ e que $f : X \times Y \to Z$ satisfaz*

$$\rho_Z(f(x, y), f(x', y')) \leq C_X \rho_x(x, x')^\alpha + C_Y \rho_Y(y, y')^\beta,$$

onde $0 < \alpha \leq 1$ e $0 < \beta \leq 1$. Então

$$c(f(K_X \times K_Y)) \leq \frac{c(K_X)}{\alpha} + \frac{c(K_Y)}{\beta}.$$

2.3 Projeção de compactos com dimensão fractal finita

Aqui nos dedicamos a exibir um resultado de Mañé (ver [16], Lema 1.1), orientando-nos por Carvalho, [20], o qual prova, em um espaço de Banach X de dimensão infinita, dado um subconjunto K e um subespaço fechado de dimensão finita Y (com certas condições de compacidade e sobre a dimensão (Hausdorff ou Fractal) de K, além de hipóteses sobre a dimensão de Y) que as projeções de X em Y injetivas quando restritas a K são "maioria" no conjunto das projeções de X em Y.

Se X é um espaço de Banach e Y é um subespaço fechado de X seja

$$\mathcal{P}(X, Y) := \{P \in \mathcal{L}(X) : P^2 = P \text{ e } P(X) = Y\},$$

com a topologia uniforme de operadores, o conjunto das projeções de X em Y.

Lema 2.3.1. *Seja X um espaço de Banach, Y subespaço fechado de X tal que $\mathcal{P}(X,Y) \neq \varnothing$ e J um subconjunto compacto de X. Defina*

$$\mathcal{P}_J = \{P \in \mathcal{P}(X,Y) : N(P) \cap J = \varnothing\}.$$

Então, $\mathcal{P}_J$ é aberto em $\mathcal{P}(X,Y)$.

Dem. Dada uma projeção $P \in \mathcal{P}_J$, pela compacidade de J, por ser $N(P)$ fechado e por $N(P) \cap J = \varnothing$, temos que $\varepsilon = \rho(N(P), J) > 0$. Escolha $s > 2t > 2\varepsilon$ onde t é tal que $B_t(0) \supset J$.

Notemos que, $\rho(N(P), J) = \rho((I-P)B_s(0), J), \forall\, P \in \mathcal{P}(X,Y)$. De fato,

(i) se $x \in (I-P)B_s(0)$, então existe $y \in B_s(0)$ tal que $x = (I-P)(y)$. Logo, $P(x) = P(y - P(y)) = 0$, ou seja, $x \in N(P)$. Pela arbitrariedade de x, segue que $(I-P)B_s(0) \subset N(P)$;

(ii) se $x \in N(P) \cap B_s(0)$, então $(I-P)(x) = x - P(x) = x$, ou seja, $x \in (I-P)B_s(0)$. Assim, $N(P) \cap B_s(0) \subset (I-P)B_s(0)$;

(iii)

$$\begin{aligned}
\rho(N(P) \cap B_s^c(0), J) &= \inf\{\rho(x,y) : x \in N(P) \cap B_s^c(0), y \in J\} \\
&\geq \inf\{\rho(x,0) - \rho(y,0) : x \in N(P) \cap B_s^c(0), y \in J\} \\
&\geq \inf_{x \in N(P) \cap B_s^c(0)} \rho(x,0) + \inf_{y \in J} -\rho(y,0) \\
&\geq \inf_{x \in N(P) \cap B_s^c(0)} \rho(x,0) - \sup_{y \in J} \rho(y,0) \\
&> s - t > 2t - t > \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, por (i), (ii) e (iii),

$$\rho(N(P), J) = \rho(N(P) \cap B_s(0), J) \geq \rho((I-P)B_s(0), J) \geq \rho(N(P), J), \forall\, P \in \mathcal{P}_J.$$

Agora, seja $\bar{P} \in \mathcal{P}(X,Y)$ tal que $||P - \bar{P}||_{\mathcal{L}(X)} < \frac{\varepsilon}{s}$. Então

$$\begin{aligned}
\inf_{x \in N(\bar{P})} \rho(x, J) &= \rho(N(\bar{P}), J) = \rho((I - \bar{P})B_s(0), J) \\
&= \inf\{\rho((I - \bar{P})(x), y) : x \in B_s(0), y \in J\} \\
&= \inf\{||(I - \bar{P})(x) - y||_X : x \in B_s(0), y \in J\} \\
&= \inf\{||(I - \bar{P})(x) - y + (I - P)(x) - (I - P)(x)||_X : x \in B_s(0), y \in J\} \\
&\geq \inf\{||(I - P)(x) - y||_X - ||\bar{P}(x) - P(x)||_X : x \in B_s(0), y \in J\} \\
&\geq \inf\{||(I - P)(x) - y||_X : x \in B_s(0), y \in J\} + \inf_{x \in B_s(0)}\{-||\bar{P}(x) - P(x)||_X\} \\
&= \rho(N(P), J) - \sup_{x \in B_s(0)} ||\bar{P}(x) - P(x)||_X \\
&= \rho(N(P), J) - s||\bar{P} - P||_{\mathcal{L}(X)} \\
&> \varepsilon - s\frac{\varepsilon}{s} = 0.
\end{aligned}$$

Assim $N(\bar{P}) \cap J = \varnothing$ e $\bar{P} \in P_J$, provando que P_J é aberto. □

Lema 2.3.2. *Seja X um espaço de Banach real. Se $K = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} K_n,\ K_n \subset X$ compacto, então, existe uma sequência $\{\phi_i(x)\}_{i \in N^*}$ em $X^\star$ tal que, se $x \in span(K)$ e $\phi_i(x) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}^*$, então $x = 0$.*

Dem. Seja W o fecho do subespaço de X gerado por K, $W = \overline{span(K)}$.

Como K_n é compacto para cada $n \in \mathbb{N}^*$, K_n contém um subconjunto enumerável denso (ver [14], cor. 3, p. 224), ou seja, K_n é separável para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Sendo K união enumerável de conjuntos separáveis K também é separável e consequentemente W é separável. Por ser W o fecho de $span(K)$, W é fechado em X e assim é completo (ver [14], prop. 6, p. 106). Logo W é um espaço de Banach separável. Segue, pelos Teoremas A.0.9 e A.0.10, que $B_1^{W^\star}(0)$ é compacto e metrizável na topologia $fraca^\star$ $\sigma(W^\star, W)$. Da compacidade de $B_1^{W^\star}(0)$ obtemos que ela é totalmente limitada e consequentemente separável (ver [14], prop. 7, p. 22 e [13], lema 8. 2-2, p. 412), ou seja, existe uma sequência densa $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ em $(B_1^{W^\star}(0), \sigma(W^\star, W))$.

Suponha agora que $\phi_n(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in W$. Logo, pela Proposição A.0.8, $\phi(x) = 0$ para todo $\phi \in B_1^{W^\star}(0)$ e assim $x = 0$. A sequência desejada é obtida estendendo ϕ_n a X através do Corolário A.0.7 do Teorema de Hahn-Banach A.0.6.

□

Lema 2.3.3. *Seja K_n compacto. Dado, $r > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, se*

$$A_{n,r} = \{z \in K_n - K_n : ||z||_X \geq r\} = (K_n - K_n) \cap \{x \in X : ||x||_X \geq r\},$$

então $A_{n,r}$ é um subconjunto compacto de X.

Dem. Considere uma sequência $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}^*} \subset A_{n,r}$, logo $y_k = v_k - w_k$, com $v_k,\ w_k \in K_n$. Pela compacidade de K_n, passando se necessário a uma subsequência $v_k - w_k \to (v\ - w) \in (K_n - K_n)$. Assim, $y_k \to v - w = y \in (K_n - K_n)$. Como $||y||_X = \lim_{k\to\infty} ||y_k|| \geq\ r$, provamos que $y\ \in A_{n,r}$. Portanto $A_{n,r}$ é compacto. □

Lema 2.3.4. *Seja K_n compacto e*

$$\mathcal{P}_{n,.r} = \{P \in \mathcal{P}(X,Y) : diam(P^{-1}(y) \cap K_n) < r, \forall\, y \in Y\}, \tag{2.13}$$

então $P \in \mathcal{P}_{n,r}$ se, e somente se, $N(P) \cap A_{n,r} = \varnothing$.

Dem. Suponha que exista $y \in N(P) \cap A_{n,r}$, então $P(y) = 0$ e existem $v, w \in K_n$ tais que $y = v - w, ||v - w||_X \geq r$ e consequentemente $P(v) = P(w)$. Seja $z = P(v) = P(w)$; isto é $v, w \in P^{-1}(z)$. Logo, $diam(P^{-1}(z) \cap K_n) \geq ||v - w||_X \geq r$ e $P \notin \mathcal{P}_{n,r}$.

Para a recíproca, seja $P \in \mathcal{P}(X,Y)$, se $N(P) \cap A_{n,r} = \varnothing$, então para todo $y \in Y$ e $v, w \in P^{-1}(y) \cap K_n$ temos que $v - w \in N(P)$ e consequentemente $||v - w||_X < r$. Assim, $diam(K_n \cap P^{-1}(y)) \leq r$, mas como K_n é compacto e $K_n \cap P^{-1}(y)$ é fechado, segue que $K_n \cap P^{-1}(y)$ é compacto e $diam(K_n \cap P^{-1}(y)) < r$.

□

Corolário 2.3.5. *Seja $\mathcal{P}_{n,r}$ definido por* (2.13)*, então $\mathcal{P}_{n,r}$ é aberto em $\mathcal{P}(X,Y)$ com a topologia uniforme de operadores.*

Dem. Segue imediatamente da caracterização de $\mathcal{P}_{n,r}$ obtida no Lema 2.3.4 e utilizando o Lema 2.3.1. □

Teorema 2.3.6. *Se X é um espaço de Banach sobre $\mathbb{R}$, $K = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$ com K_n compacto para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $\dim_H(K - K) < \infty$ e Y é um subespaço de X com $\dim_H(K - K) + 1 < dimY < \infty$, então o conjunto $\{P \in \mathcal{P}(X,Y) : P|_K$ é injetora$\}$ é residual em $\mathcal{P}(X,Y)$.*

Dem. Recordemos que, se M é um espaço métrico, um conjunto $A \subset M$ é dito residual se seu complemento em M é magro[5], isto é,

$$M \setminus A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} B_n,$$

[5]Para conjunto magro, ou de primeira categoria, ver [14], seção "o teorema de Baire", p. 186.

onde o interior do fecho de cada B_n é vazio[6]

Sem perda de generalidade supomos que $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ é uma sequência crescente de conjuntos compactos. Pois, se este não é o caso, podemos definir $C_n = \cup_{i=1}^{n} K_i$ e teremos uma sequência crescente de conjuntos compactos tal que $K = \cup_{n=1}^{\infty} C_n$.

Seja $\mathcal{P}_{n,.r}$ definido em (2.13). Note que

$$\{P \in \mathcal{P}(X,Y) : P|_K \text{ é injetora}\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{m\in\mathbb{N}^*} \mathcal{P}_{n,\frac{1}{m}}.$$

De fato, valendo-se do Lema 2.3.4, suponha por contradição que $P \in \{P \in \mathcal{P}(X,Y) : P|_K$ é injetora$\}$, mas $N(P) \cap A_{n_0,\frac{1}{m_0}} \neq \varnothing$, para algum $n_0, m_0 \in \mathbb{N}^*$. Seja $x \in N(P) \cap A_{n_0,\frac{1}{m_0}}$, logo $x \in (K_{n_0} - K_{n_0})$ e $||x|| \geq \frac{1}{m_0}$. Consequentemente $x \neq 0$, $x = a - b$, com $a,\ b\ \in K_{n_0}$ e $P(a) = P(b)$; isto é, $P|_K$ não é injetora. Portanto

$$\{P \in \mathcal{P}(X,Y) : P|_K \text{ é injetora}\} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{m\in\mathbb{N}^*} \mathcal{P}_{n,\frac{1}{m}}.$$

Para a outra inclusão suponha que $P|_K$ não é injetora. Então, existem $a, b\ \in K$ tais que $P(a) = P(b) \in Y$. Como consideramos a sequência $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ crescente, $a, b \in K_{n_0}$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}^*$. Assim $(a - b) \in (K_{n_0} - K_{n_0})$, $||a - b|| = \lambda > 0$ e $P(a - b) = 0$, ou seja,

$$(a - b) \in N(P) \cap A_{n_0,\frac{1}{m_0}}, \text{ com } \frac{1}{m_0} < \lambda.$$

Portanto, $P \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{m\in\mathbb{N}^*} \mathcal{P}_{n,\frac{1}{m}}$.

Escreva π como a aplicação quociente[7] de X sobre $Z = X/Y$. Então

$$\pi(A_{n,r}) \setminus \{0\} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} \{\pi(v); v \in A_{n,r}, ||\pi(v)||_Z \geq \frac{1}{m}\}$$

onde cada $\{\pi(v); v \in A_{n,r}, ||\pi(v)||_Z \geq \frac{1}{m}\}$ é compacto, pois π é um operador linear limitado e, pelo Lema 2.3.3, $A_{n,r}$ é compacto. Segue do Lema 2.3.2 que existe um sequência $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ em $Z^\star$ tal que, se $z \in\ span(\pi(A_{n,r}))$ e $f_i(z) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}^*$, então $z = 0$. Defina

$$A_{n,r,i,j} := \left\{v \in A_{n,r} : |f_i(\pi(v))| \geq \frac{1}{j}\right\} \quad e \quad P_{n,r,i,j} := \{P \in \mathcal{P}(X,Y) : N(P) \cap A_{n,r,i,j} = \varnothing\}.$$

Segue facilmente que $A_{n,r,i,j}$ é compacto e portanto, usando o Lema 2.3.1, $P_{n,r,i,j}$ é aberto em $\mathcal{P}(X,Y)$. Além disto:

[6]Em um espaço métrico M, int$X = \varnothing$ em M se, e somente se, $M \setminus X$ é denso em M.

[7]Sobre espaço quociente ver [2], seção 11.2, p.353.

- $$A_{n,r} = (\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} A_{n,r,i,j}) \cup (A_{n,r}\cap Y).$$

  De fato, quando tomamos a união sobre todo $i, j \in \mathbb{N}^*$ estamos considerando $|f_i(\pi(v))| > 0$, para todo $i \in \mathbb{N}^*$ e os $v \in A_{n,r}$ tais que isto acontece. Logo, devemos considerar os $v \in A_{n,r}$ tais que $|f_i(\pi(v))| = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}^*$. Porém, pela definição de f_i, para tais v temos que $\pi(v) = 0$ (a classe do zero, isto é, Y). Assim temos $A_{n.r}\cap Y$.

- $$N(P)\bigcap A_{n,r} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{j\in\mathbb{N}^*}(N(P)\cap A_{n,r,i,j})$$

  Como $P^2 = P$, temos que $P(y) = y$, para todo $y \in Y$ (sendo $P^{-1}(y)$ a imagem inversa de y, segue $P^2(P^{-1}(y)) = P(y)$ e $P(P^{-1}(y)) = y$). Então $N(P)\cap Y = \{0\}$ e consequentemente $N(P)\cap(A_{n,r}\cap Y) = \varnothing$, pois $0 \notin A_{n,r}$.

- $$P_{n,r} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}^*}\bigcap_{j\in\mathbb{N}^*} P_{n,r,i,j}$$

  Este item é consequência direta dos anteriores lembrando que $P \in P_{n,r}$ se, e somente se, $N(P)\cap A_{n,r} = \varnothing$.

Sintetizando:

$$\begin{aligned}\{P\in\mathcal{P}(X,Y) : P|_K \text{ é injetora}\} &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\bigcap_{m\in\mathbb{N}^*}\mathcal{P}_{n,\frac{1}{m}}.\\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\bigcap_{m\in\mathbb{N}^*}\bigcap_{i\in\mathbb{N}^*}\bigcap_{j\in\mathbb{N}^*} P_{n,\frac{1}{m},i,j}.\end{aligned}$$

Como $P_{n,\frac{1}{m},i,j}$ é aberto temos que $\mathcal{P}(X,Y)\setminus P_{n,\frac{1}{m},i,j}$ é fechado. Logo, nos resta mostrar que $P_{n,\frac{1}{m},i,j}$ é denso em $\mathcal{P}(X,Y)$ para cada $m,n,i,j\ \in \mathbb{N}$.

Seja $P_0 \in \mathcal{P}(X,Y)$ e defina

$$\begin{aligned}\phi : Y\setminus\{0\} &\longrightarrow S = \{y\in Y : ||y||_X = 1\}\\ y &\longmapsto \phi(y) = \frac{y}{||y||_X}.\end{aligned}$$

Logo

$$\phi(P_0(A_{n,r}) \setminus \{0\}) = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} (\phi(P_0(A_{n,r}) \cap [Y \setminus B^Y_{\frac{1}{l}}(0)]).$$

Note que ϕ restrita a $P_0(A_{n,r}) \cap [Y \setminus B^Y_{\frac{1}{l}}(0)]$ é Lipschitz contínua. De fato,

$$||\phi(x) - \phi(y)||_X = \left\| \frac{x}{||x||_X} - \frac{y}{||y||_X} \right\|_X \leq \, l \, ||x - y||_X.$$

Portanto, pelas Proposições 2.1.9 e 2.1.11,

$$\begin{aligned}
\dim_H(\phi(P_0(A_{n,r}) \setminus \{0\})) &= \sup_{l \in \mathbb{N}^*} \dim_H(\phi(\, P_0(A_{n,r}) \cap [Y \setminus B^Y_{\frac{1}{l}}(0)])) \\
&\leq \sup_{l \in \mathbb{N}^*} \dim_H(\, P_0(A_{n,r}) \cap [Y \setminus B^Y_{\frac{1}{l}}(0)]) \\
&\leq \dim_H(P_0(A_{n,r})) \\
&\leq \dim_H(A_{n,r}) \\
&\leq \dim_H(K_n - K_n) \leq \dim_H(K - K) < \dim(Y) - 1.
\end{aligned}$$

Assim, existe $u \in S$ tal que $u \notin \phi(P_0(A_{n,r}) \setminus \{0\})$. Isso segue pois, se este não é o caso, então

$$\dim_H(Y) - 1 = \dim_H S = \dim_H(\phi(P_0(A_{n,r})) \setminus \{0\}) \leq \dim_H(K - K),$$

contradizendo nossa hipótese.

Dado $\varepsilon > 0, \ i, \ j \ \in \mathbb{N}^*$ definimos

$$P_\varepsilon(x) = P_0(x) + \varepsilon f_i(\pi(x))u.$$

Note que $P_\varepsilon \in \mathcal{L}(X)$ com imagem em Y e ainda mais, $P_\varepsilon \in \mathcal{P}(X, Y)$. De fato,
se $y \in Y$, então

$$P_\varepsilon(y) = P_0(y) + \varepsilon f_i(\pi(y))u = P_0(y), \text{ pois } \pi(y) = 0;$$

se $y \in X \setminus Y$, então

$$P_\varepsilon(y) \ = \ P_0(y) + \varepsilon f_i(\pi(y))u \in \ Y$$

e

$$\begin{aligned}
P_\varepsilon^2(y) &= P_0[P_0(y) + \varepsilon f_i(\pi(y))u] + \varepsilon f_i(\pi(P_\varepsilon(y)))u \\
&= P_0(y) + \varepsilon f_i(\pi(y))u,
\end{aligned}$$

pois $P_0^2 = P_0$ e $P_0(u) = u$, para todo $u \in Y$.

Suponha que $P_\varepsilon \notin P_{n,r,i,j}$, logo existe $x \in A_{n,r,i.j}$ tal que $P_\varepsilon(x) = 0$. Para este x temos que $P_0(x) = -\varepsilon f_i(\pi(y))u$ e $f_i(\pi(x)) \neq 0$. Portanto,

$$u = -(\varepsilon f_i(\pi(x)))_{-1} P_0(x)$$

e

$$\phi(P_0(x)) = \pm\phi(u).$$

Como $u \in S$, $u = \phi(u)$ e assim $\pm u = \phi(P_0(x)) \in \phi(P_0(A_{n,r,i,j}) \setminus \{0\})$. Consequentemente $u \in \phi(P_0(A_{n,r}) \setminus \{0\})$ contradizendo a escolha de u e mostrando que $P_\varepsilon \in P_{n,r,i,j}$.

Por $||P_\varepsilon - P_0||_{\mathcal{L}(X)} \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$ temos que $P_{n,r,i,j}$ é denso em $\mathcal{P}(X, Y)$. □

Recordando que a dimensão de Hausdorff é menor que ou igual a dimensão fractal e utilizando o Corolário 2.2.4, segue imediatamente do teorema acima o resultado seguinte.

Corolário 2.3.7. *Se $c(K) < \infty$ e Y é um subespaço de X com $2c(K) + 1 < dimY < \infty$, então o conjunto $\{P \in \mathcal{P}(X, Y) : P|_K$ é injetora$\}$ é residual em $\mathcal{P}(X, Y)$.*

2.4 Dimensão de compactos negativamente invariantes

Denotamos por $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço das transformações lineares limitadas de X sobre Y, por $\mathcal{L}(X)$ o espaço das transformações lineares limitadas de X sobre ele mesmo e por $\mathbb{K}^m_\infty$ o espaço $\mathbb{K}^m$ equipado com a norma $||\cdot||_\infty$: para $\underline{z} \in \mathbb{K}^m$ com $\underline{z} = (z_1, ..., z_m)$, $z_j \in \mathbb{K}$, definimos

$$||\underline{z}||_\infty = \max_{j=1,\dots,m} ||z_j||_{\mathbb{K}}.$$

Sejam X e Y espaços normados. Se existe $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ que é bijetiva e tem $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, dizemos que X e Y são isomorfos e que T é um isomorfismo entre X e Y.

Nesta seção, utilizando uma estimativa para a cobertura por bolas em $\mathbb{K}^m_\infty$ e utilizando o isomorfismo entre $\mathbb{K}^m_\infty$ e um subespaço m-dimensional Y de X, exibi-se uma estimativa para coberturas por bolas em Y e posteriomente uma estimativa para cobrir $T\left[B_1^X(0)\right]$, $T \in \mathcal{L}(X)$. Com este resultado para coberturas prova-se que conjuntos compactos negativamente invariantes (isto é, $f(K) \supset K$) para uma aplicação cuja a derivada é a soma de uma contração forte e uma função compacta tem dimensão fractal finita. Apresentamos também alguns resultados sobre dimensão fractal de atrator global.

Os resultados desta seção são de Mañe, [16]. Porém, as demonstrações dos resultados são feitas seguindo Carvalho, Langa, Robinson, [5], que fazem demonstrações mais simples que Mañé e ainda melhoram o limite da dimensão fractal em espaços de Banach dado em [16].

Começamos definindo:

Definição 2.4.1. *Sejam X e Y dois espaços normados isomorfos. Definimos a distância de Banach-Mazur entre X e Y por*

$$d_{BM}(X,Y) = log(\inf\{||T||_{\mathcal{L}(X,Y)}||T^{-1}||_{\mathcal{L}(Y,X)} : T \in \mathcal{L}(X,Y), T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)\}).$$

Proposição 2.4.2. *Seja Y um espaço de Banach m-dimensional sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Então $d_{BM}(Y, \mathbb{K}^m_\infty) \leq log\, m$.*

Dem. Seja $\{x_1, ..., x_m\}$ uma base de Auerbach[8] e $\{f_1, ..., f_m\}$ a correspondente base de $Y^\star$, isto é, $||x_i||_Y = ||f_i||_{Y^\star} = 1$ e $f_i(x_k) = \delta_{ik}, 1 \leq i,k \leq m$. Defina a aplicação

$$\begin{aligned} T \ : \ \mathbb{K}^m_\infty &\longrightarrow Y \\ \underline{z} &\longmapsto \sum_{j=1}^{m} z_j x_j. \end{aligned}$$

Então

$$||T(\underline{z})||_Y = \left\|\sum_{j=1}^{m} z_j x_j\right\|_Y \leq \sum_{j=1}^{m} |z_j| \leq m||\underline{z}||_\infty$$

e assim

$$||T||_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^m_\infty, Y)} \leq m.$$

Por outro lado, se $x = \sum_{j=1}^{m} z_j x_j \in Y$ com $||x||_Y \leq 1$, então, como $z_j = f_j(x)$,

$$||T^{-1}(x)||_\infty = ||\underline{z}||_\infty = \max_{j=1,...,m} |z_j| = \max_{j=1,...,m} |f_j(x)| \leq ||x||_Y,$$

e assim

$$||T^{-1}||_{\mathcal{L}(Y, \mathbb{K}^m_\infty)} \leq 1.$$

Pela definição 2.4.1 segue o resultado. □

Lema 2.4.3. *Se Y é um subespaço m-dimensional do espaço de Banach X, então*

$$N(\rho, B^Y_r(0)) \leq (m+1)^{\alpha m} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha m}, \ \ 0 < \rho \leq r,$$

onde $\alpha = 1$ se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\alpha = 2$ se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Além disto, as bolas na cobertura podem ser tomadas com centros em Y.

[8] Para existência de tal base veja A.0.5.

Dem. Assuma primeiro que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Como Y e $\mathbb{R}^m_\infty$ são m-dimensionais, pela Proposição 2.4.2, $d_{BM}(Y, \mathbb{R}^m_\infty) \leq \log m$; em particular existe um isomorfismo linear $T : \mathbb{R}^m_\infty \to Y$ tal que $||T||||T^{-1}|| \leq m$. Uma vez que $||T^{-1}(x)||_{\mathbb{R}^m_\infty} \leq ||T^{-1}||||x||_Y$, segue que

$$B^Y_r(0) = T(T^{-1}(B^Y_r(0))) \subseteq T\left(B^{\mathbb{R}^m_\infty}_{||T^{-1}||\ r}(0)\right).$$

Observe que $B^{\mathbb{R}^m_\infty}_{||T^{-1}||\ r}(0)$ pode ser coberta por

$$\left(1 + \frac{||T^{-1}||r}{\frac{\rho}{||T||}}\right)^m = \left(1 + \frac{||T||||T^{-1}||r}{\rho}\right)^m \leq \left(1 + \frac{m\, r}{\rho}\right)^m \leq (1+m)^m \left(\frac{r}{\rho}\right)^m$$

bolas em $\mathbb{R}^m_\infty$ de raio $\frac{\rho}{||T||}$. Logo, $B^Y_r(0)$ pode ser coberta por este mesmo número de bolas com raio ρ $(pois, ||T(x)||_Y \leq ||T||||x||_{\mathbb{R}^m_\infty}, ||x||_{\mathbb{R}^m_\infty} \leq \frac{\rho}{||T||})$.

Se X é um espaço de Banach complexo, cobrimos $B^{\mathbb{C}^m_\infty}_{||T^{-1}||\ r}(0)$ com $\left(1 + \frac{||T^{-1}||r}{\frac{\rho}{||T||}}\right)^{2m}$ bolas em $\mathbb{C}^m_\infty$ de raio $\frac{\rho}{||T||}$. $\square$

Denotamos por $\mathcal{K}(X)$ o subespaço fechado de $\mathcal{L}(X)$ consistindo de todas as transformações lineares compactas de X sobre ele mesmo e definimos

$$\mathcal{L}_\lambda(X) := \{T \in \mathcal{L}(X) : T = L + C, \text{ com } C \in \mathcal{K}(X)\ e\ ||L||_{\mathcal{L}(X)} < \lambda\}. \tag{2.14}$$

Lema 2.4.4. *Seja X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}_{\frac{\lambda}{2}}(X)$. Então existe um subespaço Z de X de dimensão finita tal que*

$$dist_H(T[B^X_1(0)], T[B^Z_1(0)]) < \lambda. \tag{2.15}$$

Dem. Escreva $T = L + C$, onde $C \in \mathcal{K}(X)$ e $L \in \mathcal{L}(X)$ com $||L||_{\mathcal{L}(X)} < \frac{\lambda}{2}$. Mostremos primeiramente que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um subespaço Z de dimensão finita tal que

$$dist_H(C[B^X_1(0)], C[B^Z_1(0)]) \leq \varepsilon.$$

Suponha que isto seja falso; isto é, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$dist_H(C[B^X_1(0)], C[B^Z_1(0)]) > \varepsilon_0,$$

para todo subespaço Z de X com dimensão finita. Escolha algum $x_1 \in X$ com $||x_1||_X = 1$, e seja $Z_1 = span\{x_1\}$. Então

$$dist_H(C[B^X_1(0)], C[B^{Z_1}_1(0)]) > \varepsilon_0,$$

logo existe um $x_2 \in X$ com $||x_2||_X \leq 1$ tal que

$$||Cx_2 - Cx_1||_X \geq \varepsilon_0.$$

De forma análoga para $Z_2 := span\{x_1, x_2\}$, podemos encontrar x_3 com $||x_3||_X \leq 1$ tal que

$$||Cx_3 - Cx_2||_X \geq \varepsilon_0 \quad e \quad ||Cx_3 - Cx_1||_X \geq \varepsilon_0.$$

Continuando indutivamente podemos construir desta maneira um sequência $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ com $\|x_i\|_X \leq 1$ tal que

$$||Cx_i - Cx_j||_X \geq \varepsilon_0, \;\; i \neq j$$

contradizendo a compacidade de C.

Considere agora $\lambda_0 < \lambda$ de modo que $2||L||_{\mathcal{L}(X)} < \lambda_0 < \lambda$. Do que foi feito acima, escolha um espaço Z de X, com dimensão de Z finita, de forma que

$$dist_H(C[B_1^X(0)], C[B_1^Z(0)]) \leq \lambda - \lambda_0.$$

Se $x \in B_1^X(0)$ e $z \in B_1^X(0)$, então

$$||Tx - Tz||_X \leq ||L(x-z)||_X + ||Cx - Cz||_X < \lambda_0 + ||Cx - Cz||_X.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} dist_H(T[B_1^X(0)], T[B_1^Z(0)]) &:= \sup_{x\in B_1^X(0)} \inf_{z\in B_1^Z(0)} ||Tx - Tz||_X \\ &\leq \sup_{x\in B_1^X(0)} (\lambda_0 + \inf_{z\in B_1^Z(0)} ||Cx - Cz||_X) \\ &\leq \lambda_0 + dist_H(C[B_1^X(0)], C[B_1^Z(0)]) \\ &< \lambda. \end{aligned}$$

□

Observe que na demonstração do Lema acima, o subsespaço de dimensão finita Z é obtido em função da parte compacta C de $T \in \mathcal{L}_{\frac{\lambda}{2}}(X)$. Logo, se C é de posto finito ν, podemos considerar $dim(Z) \leq \nu$.

Lema 2.4.5. *Sejam X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$, $Y \subset X$ um subespaço com $dim(Y) = m$, $\lambda > 0$ e $T \in \mathcal{L}(X)$ tal que $dist_H(T[B_1^X(0)], T[B_1^Y(0)]) < \lambda$. Então, para todo $r > 0$ e $\gamma > 0$:*

$$N((1+\gamma)\lambda r, \; T[B_r^X(0)]) \leq (m+1)^{\alpha m} \left(\frac{||T||_{\mathcal{L}(X)} + \lambda}{\gamma\lambda} \right)^{\alpha m},$$

onde $\alpha = 1$ se X é real e $\alpha = 2$ se X é complexo.

Dem. Pela linearidade de T basta mostrar o resultado para $r = 1$. Seja $\bar{r} = ||T||_{\mathcal{L}(X)} + \lambda$. Então, pelo Lema 2.4.3,

$$B_{\bar{r}}^{Y}(0) \cap T(Y) \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{\gamma\lambda}^{X}(x_i), \text{ com } x_i \in B_{\bar{r}}^{Y}(0) \text{ e } k \leq (m+1)^{\alpha m} \left(\frac{\bar{r}}{\gamma\lambda}\right)^{\alpha m},$$

onde $\alpha = 1$, se X é real e $\alpha = 2$, se X é complexo. Se mostrarmos que $T(B_1^X(0)) \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{(1+\gamma)\lambda}(x_i)$ demonstramos o Lema. Para isto, tome $v \in X$ tal que $||v||_X \leq 1$. Como $dist_H(T[B_1^X(0)], T[B_1^Y(0)]) := \sup\limits_{x \in B_1^X(0)} \inf\limits_{y \in B_1^Y(0)} ||Tx - Ty||_X < \lambda$, existe $y \in B_1^Y(0)$ de forma que $||Tv - Ty||_X < \lambda$. Logo,

$$||Ty||_X \leq ||Tv||_X + ||Tv - Ty||_X \leq ||T||_{\mathcal{L}(X)} ||v||_X + \lambda \leq \bar{r}.$$

Agora, escolha $1 \leq i \leq k$ tal que $||Ty - x_i||_X < \gamma\lambda$, assim

$$||Tv - x_i||_X \leq ||Tv - Ty||_X + ||Ty - x_i||_X \leq (1+\gamma)\lambda.$$

Portanto, $T(B_1^X(0)) \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{(1+\gamma)\lambda}(x_i), k \leq (m\ +1)^{\alpha m} \left(\frac{||T||_{\mathcal{L}(X)}+\lambda}{\gamma\lambda}\right)^{\alpha m}$ onde $\alpha = 1$, se X é real e $\alpha = 2$, se X é complexo. $\square$

Lema 2.4.6. *Sejam K um subconjunto compacto de um espaço de Banach X sobre $\mathbb{K}$ e $f\ :\ X \to X$ uma função continuamente diferenciável em uma vizinhança de K. Suponha que K seja negativamente invariante para f; isto é, $f(K) \supset K$, e suponha também que existam $0 < \alpha < 1$ e $M \in \mathbb{N}$ tais que para cada $x \in K$,*

$$N(\alpha, D_x f[B_1^X(0)]) \leq\ M. \tag{2.16}$$

Então

$$c(K)\ \leq \frac{log\ M}{-log\alpha}. \tag{2.17}$$

Dem. Para função continuamente diferenciável em espaços de Banach ver [18].

Como f é diferenciável e K é compacto, para cada $\eta > 0$ existe $r_0 = r_0(\eta)$ tal que para qualquer $x \in K$ e qualquer $0 < r \leq r_0$,

$$f(B_r^X(0) \cap K) \subset f(x) + D_x f(B_r^X(0)) + B_{\eta r}^X(x).$$

Pela linearidade de $D_x f$ e por (2.16) temos que, $N(\alpha r, D_x f[B_r^X(0)]) \leq M$ e assim

$$N((\alpha+\eta)r, f(B_r^X(x) \cap K)) \leq M,\ \ r \leq r_0(\eta). \tag{2.18}$$

Agora, fixe η com $0 < \eta < 1 - \alpha$, e seja $r_0 = r_0(\eta)$. Cubra K com $N(r_0, K)$ bolas de raio r_0. Faça a interseção das bolas desta cobertura com K e aplique f a todos os conjuntos desta nova cobertura. Como K é negativamente invariante para f isto nos fornece uma cobertura para K por conjuntos da forma $f(B^X_{r_0}(x) \cap K)$, com $x \in K$. Por (2.18) cada um destes conjuntos pode ser coberto por M bolas de raio $(\alpha + \eta)r_0$, e assim,

$$N((\alpha + \eta)r_0, K) \leq MN(r_0, K). \tag{2.19}$$

De forma análoga, agora cobrindo K com $N((\alpha+\eta)r_0, K)$ bolas de raio $(\alpha+\eta)r_0$, obtemos uma cobertura para K formada por conjuntos da forma $f(B^X_{(\alpha+\eta)r_0}(x) \cap K)$, com $x \in K$. Novamente por (2.16) segue que cada uma destas imagens pode ser coberta por M bolas de raio $(\alpha + \eta)^2 r_0$ e juntamente com (2.19) temos que

$$N((\alpha + \eta)^2 r_0, K) \leq M^2 N(r_0, K).$$

Aplicando este argumento k vezes,

$$N((\alpha + \eta)^k r_0, K) \leq M^k N(r_0, K).$$

Pelo Lema 2.2.2

$$\begin{aligned} c(K) &= \limsup_{k\to\infty} \frac{log N((\alpha + \eta)^k r_0, K)}{-k\ log(\alpha + \eta)} \\ &\leq \limsup_{k\to\infty} \frac{k\ log M + log N(r_0, K)}{-k\ log(\alpha + \eta)} \\ &\leq \frac{log M}{-log(\alpha + \eta)}. \end{aligned}$$

Pela arbitrariedade de η segue o resultado. □

Definição 2.4.7. *Para $T \in \mathcal{L}(X)$ definimos*

$$\nu_\lambda(T) = min\{n \in \mathbb{N} : \textit{ existe subespaço } Z \textit{ de } X,\ dim(Z) = \ n \textit{ tal que } (2.15) \textit{ vale}\}$$

com a convenção que $min\ \varnothing = \infty$.

Teorema 2.4.8. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$, $U \subset X$ um conjunto aberto e $f : U \to X$ uma aplicação continuamente diferenciável. Suponha que $K \subset U$ é um subconjunto compacto e que $D_x f \in \mathcal{L}_{\frac{\lambda}{2}}(X)$, para algum $0 < \lambda < \frac{1}{2}$, para todo $x \in K$. Então*

$$n = \sup_{x\in K} \nu_\lambda(D_x f) \ \ e \ \ D = \sup_{x\in K} ||D_x f||$$

são finitos e:

$$N(2\lambda, D_x f[B_1^X(0)]) \leq \left[(n+1)\frac{D}{\lambda}\right]^{\alpha n}, \; para \; todo \; x \in K, \tag{2.20}$$

onde, $\alpha = 1$ *se* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *e* $\alpha = 2$ *se* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Se ainda $f(K) \supset K$*, então*

$$c(K) \leq \; \alpha n \left\{ \frac{log((n+1)\frac{D}{\lambda})}{-\, log(2\lambda)} \right\}, \tag{2.21}$$

onde, $\alpha = 1$ *se* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *e* $\alpha = 2$ *se* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Dem. Mostremos que $n = \sup_{x \in K} \nu_\lambda(D_x f) < \infty$. De fato, pelo Lema 2.4.4, para cada $x \in K$ existe um subespaço de dimensão finita Z_x tal que

$$dist_H(D_x f[B_1^X(0)], D_x f[B_1^{Z_x}(0)]) < \lambda.$$

Pela continuidade de $K \ni x \longmapsto D_x f \in \mathcal{L}(X)$, existe $\delta_x > 0$ tal que

$$dist_H(D_y f[B_1^X(0)], D_y f[B_1^{Z_x}(0)]) < \lambda,$$

para todo $y \in B_{\delta_x}^X(x)$, consequentemente, $\nu_\lambda(D_y f) \leq \nu_\lambda(D_x f)$ para este tais y. Utilizando a compacidade de K extraímos uma subcobertura finita da cobertura aberta de K formada pela união de $B_{\delta_x}^X(x)$ sobre x, de onde segue que $n < \infty$.

Como $n < \infty$, para cada $x \in K$ existe um subespaço Z_x de X com $dim(Z_x) \leq n$ tal que

$$dist_H(D_x f[B_1^X(0)], D_x f[B_1^{Z_x}(0)]) < \lambda.$$

Para facilitar a notação escreveremos $Z_x = Z$ e $T = D_x f$.

Observe que $T(Z)$ também é um subespaço de X com dimensão menor ou igual a n e assim podemos, pelo Lema 2.4.3, cobrir a bola $B_{||T||}^{T(Z)}(0)$ por bolas $B_\lambda^X(y_i), 1 \leq i \leq k$, com $y_i \in B_{||T||}^X(0)$ para cada i e

$$k \leq \left((n+1)\frac{||T||}{\lambda}\right)^{\alpha n}, \text{ onde } \alpha = 1, \text{se } \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ e } \alpha = 2, \text{ se } \mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

Uma vez que $||Tx|| \leq ||T||\,||x||$,

$$T[B_1^Z(0)] \subseteq B_{||T||}^{T(Z)}(0) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B_\lambda^X(y_i). \tag{2.22}$$

Agora, provemos (2.20), mostrando que

$$T[B_1^X(0)] \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{2\lambda}^X(y_i).$$

De fato, se $z \in B_1^X(0)$ então, do fato de que

$$dist_H(T[B_1^X(0)], T[B_1^Z(0)]) < \lambda,$$

segue que existe $y \in B_1^Z(0)$ tal que $||Tz - Ty||_X < \lambda$. Como $Ty \in T[B_1^Z(0)]$, segue de (2.22), que $||Ty - y_i|| < \lambda$, $1 \leq i \leq k$, logo

$$||Tz - y_i||_X \leq ||Tz - Ty||_X + ||Ty - y_i||_X < 2\lambda,$$

isto é, $Tz \in T[B_{2\lambda}^X(y_i)]$. Pela uniformidade de n em K, (2.20) segue.

Para concluir a demonstração do teorema utilizamos o Lema 2.4.6 para obter (2.21). $\square$

Corolário 2.4.9. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$, $U \subset X$ um conjunto aberto e $f : U \to U$ uma aplicação continuamente diferenciável. Suponha que $K \subset U$ é um conjunto compacto tal que $f(K) \supseteq K$ e que existe $\varepsilon > 0$ tal que $D_x f \in \mathcal{L}_{1-\varepsilon}(X)$ para todo $x \in K$, então*

$$c(K) < \infty.$$

Dem. Para todo $x \in K$ temos que $D_x f = L_x + C_x$, onde $C_x \in \mathcal{K}(X)$ e $||L_x||_{\mathcal{L}(X)} < 1 - \varepsilon$. Note que,

$$D_x f^p = D_{f^{p-1}(x)} f \circ ... \circ D_x f = L + C,$$

onde $D_{f^j(x)} f = L_j + C_j$, com $||L_j||_{\mathcal{L}(X)} < 1 - \varepsilon,\ C_j \in \mathcal{K}(X),\ 1 \leq j \leq p,\ L = L_{p-1} \circ ... \circ L_0$ e $C \in \mathcal{K}(X)$.

Assim, para p suficientemente grande, $D_x f^p \in \mathcal{L}_{\frac{\lambda}{2}}(X)$, para todo $x \in K$ e $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. E, como $f(K) \supseteq K$, aplicando o Teorema 2.4.8 a f^p no lugar de f, obtemos que

$$c(K) < \infty.$$

$\square$

Corolário 2.4.10. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ (real ou complexo) e suponha que $f \in \mathcal{C}^1(X)$ é tal que $\{f^n : n \geq 0\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$ e $D_x f$ tem posto finito $\nu(x)$ com $\sup\limits_{x \in \mathcal{A}} \nu(x) := \nu < \infty$. Então,*

$$c(\mathcal{A}) \leq \alpha \nu,$$

onde, $\alpha = 1$, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\alpha = 2$ se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Dem. Como $D_x f$ é linear e contínua ($f \in \mathcal{C}^1(X)$), então f é limitada e sendo $dim[R(D_x f)] \leq \nu(x) < \infty$, segue que (veja [13], p. 407, teo $8.1 - 4$) $D_x f$ é compacto. Logo, para cada $\lambda > 0$ e $x \in \mathcal{A}$,

$$D_x f = 0 + D_x f \in \mathcal{L}_{\frac{\lambda}{2}}(X).$$

Em particular, para cada $0 < \lambda < \frac{1}{2}$.

Note que $n = \sup_{x \in \mathcal{A}} \nu_\lambda(D_x f) \leq \nu < \infty$, pois pela observação feita após o Lema 2.4.4 temos que $\nu_\lambda(D_x f) \leq \nu(x)$, para todo $x \in \mathcal{A}$.

Como $f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, pelo Teorema 2.4.8:

$$c(\mathcal{A}) \leq \alpha\nu \frac{\log\,[(\nu+1)\frac{D}{\lambda}]}{-\log\,(2\lambda)}.$$

Tomando o limite quando $\lambda \to 0$, obtemos $c(\mathcal{A}) \leq \alpha\nu$, com $\alpha = 1$, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\alpha = 2$ se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. $\square$

Corolário 2.4.11. *Seja X um espaço de Banach real, $L,\ K \in \mathcal{C}^1(X)$. Se $T = L + K$, suponha que o semigrupo discreto $\{T^n : n \geq 0\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$. Suponha que K tem posto finito em $\mathcal{A}$; isto é, $R(D_x K) \subset Y(x)$ onde $Y(x)$ é um subespaço de X com $\sup_{x \in \mathcal{A}} dim(Y(x)) := \nu < \infty$, e que L satisfaz*

$$\sup_{x \in \mathcal{A}} ||D_{T^{n-1}(x)} L \circ ... \circ D_x L|| \leq c(n),\ n \in \mathbb{N}^*,$$

onde $c(n) \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Então, se $\sup_{x \in \mathcal{A}} \dim(D_x K) = \nu < \infty$, então

$$c(\mathcal{A}) \leq \nu.$$

Dem. Observe que

$$\begin{aligned} D_x T^n &= D_{T^{n-1}(x)} T \circ ... \circ D_x T = (D_{T^{n-1}(x)} L^n + D_{T^{n-1}(x)} K^n) \circ ... \circ (D_x L + D_x K) \\ &= (D_{T^{n-1}(x)} L \circ ... \circ D_x L) + K_n := L_n + K_n, \end{aligned}$$

onde K_n é um operador compacto com posto menor ou igual a ν.

Como $D_x T^n \in \mathcal{L}_{c(n)}(X)$ para todo $x \in \mathcal{A}$ e $n \in \mathbb{N}$, pelo Lema 2.4.4, existe um subespaço $Z_n \subset X$ tal que $\dim(Z_n) \leq \nu$ e

$$\text{dist}_H(D_x T^n[B_1^X(0)], D_x T^n[B_1^{Z_n}(0)]) < 2c(n).$$

Portanto, dado $\lambda > 0$, se $\sup_{x\in\mathcal{A}} \dim(D_xK) = \nu < \infty$ e tomando n suficientemente grande, garantimos que $D_xT^n \in \mathcal{L}_{\frac{\lambda}{2}}(X)$ com $\nu_\lambda(D_xT^n) \leq \nu$.

Como $T^n(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, pelo Teorema 2.4.8, segue que

$$c(\mathcal{A}) \leq \nu \frac{\log\left((\nu+1)\frac{D}{\lambda}\right)}{-\log(2\lambda)},$$

para cada $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Tomando limite quando $\lambda \to 0$, obtemos que $c(\mathcal{A}) \leq \nu$. □

Utilizando os resultados do Apêndice B, vale o seguinte corolário:

Corolário 2.4.12. *Seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função continuamente diferenciável. Assuma que o semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ em $\mathbb{R}^n$ associado a equação diferencial ordinária*

$$\dot{x} = g(x),$$
$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

tem um atrator global $\mathcal{A}$. Se $\dim[R(D_xg)] \leq k \leq n$ para todo $x \in \mathcal{A}$, então $c(\mathcal{A}) \leq k$.

Em particular, se $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, $\beta > 0$ e existe uma constante $M > 0$ tal que $g(x)\cdot x < 0$ para $||x||_{\mathbb{R}^k} \geq M$, então o semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ associado a

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

tem um atrator global $\mathcal{A}$ em $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ com $c(\mathcal{A}) \leq k$.

2.5 Atratores exponenciais

Definição 2.5.1. *Seja $\{S^n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ um semigrupo num espaço métrico (X, ρ). Diremos que $\mathcal{M}$ é um **atrator exponencial** para $\{S^n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ se é compacto, positivamente invariante, $c(\mathcal{M}) < \infty$ e existe uma constante $\gamma > 0$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} e^{\gamma n} dist_H(S^n(B), \mathcal{M}) = 0$$

para cada $B \subset X$ limitado.

Sejam $(X, ||.||_X)$ e $(Y, ||.||_Y)$ espaços de Banach e suponha que $(X, ||.||_X)$ está compactamente imerso em $(Y, ||.||_Y)$; isto é, $X \subset Y$ e os limitados de $(X, ||.||_X)$ são relativamente compactos em $(Y, ||.||_Y)$. Seja $S : X \to X$ uma função contínua tal que:

(C1) $\{S^n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ é limitado dissipativo; isto é, existe um conjunto limitado $B_0 \subset X$ tal que, para todo $B \subset X$ limitado existe $n_B \in \mathbb{Z}^+$ tal que $S^n(B) \subset B_0$ para todo $n \geq n_B$.

(C2) Existe uma constante $k > 0$ tal que $||Sx - Sy||_X \leq k||x - y||_Y$, para todo $x, y \in B_0$.

Teorema 2.5.2. *Com as hipóteses acima, para todo $\nu \in (0, 1)$, $\{S^n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ tem um atrator exponencial $\mathcal{M}_\nu$ e se $N(r, A)$ denota o número mínimo de bolas de raio r em $(Y, || \cdot ||_Y)$ necessárias para cobrir $A \subset Y$, então $\mathcal{M}_\nu$ pode ser escolhido de modo que*

$$c(\mathcal{M}_\nu) \leq \frac{log(N(\frac{\nu}{2K}, B_1^X(0)))}{log(\frac{1}{\nu})}.$$

O semigrupo $\{S^n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$ com $c(\mathcal{A}) \leq c(\mathcal{M}_\nu)$.

Dem. Assumiremos (tomando iteradas de S se necessário) que $n_{B_0} = 1$. Seja $\nu \in (0, 1)$ e pela compacidade de $\overline{B_0}$ em Y, existem $N_0 = N(\frac{\nu}{k}, B_0)$ e $V_0 = \{x_1, ..., x_{n_0}\} \subset B_0$ tais que

$$B_0 \subset \bigcup_{i=1}^{N_0} B^Y_{\frac{\nu}{k}}(x_i).$$

Como $S(B_0) \subset B_0$, vale que

$$S(B_0) = \bigcup_{i=1}^{N_0} S(B^Y_{\frac{\nu}{k}}(x_i) \cap B_0) = \bigcup_{i=1}^{N_0} B^X_\nu(Sx_i) \cap S(B_0). \tag{2.23}$$

Claramente vale a primeira igualdade e $\left(\cup_{i=1}^{N_0} B^X_\nu(Sx_i) \cap S(B_0)\right) \subset S(B_0)$. Seja então $y \in (B^Y_{\frac{\nu}{k}}(x_i) \cap B_0)$. Logo, $Sy \in S(B_0)$ e

$$||Sy - Sx_i||_X \leq k||y - x_i||_Y < \nu;$$

isto é, $\cup_{i=1}^{N_0} S\left(B^Y_{\frac{\nu}{k}}(x_i) \cap B_0\right) \subset \bigcup_{i=1}^{N_0} B^X_\nu(Sx_i) \cap S(B_0)$

Defina $V_1 = S(V_0)$ e $N_\nu = N(\frac{\nu}{2k}, B_1^X(0))$. Como $B^X_\nu(Sx_i) \cap S(B_0)$ é limitado em X, é relativamente compacto em Y. Assim,

$$B^X_\nu(Sx_i) \cap S(B_0) \subset \bigcup_{j=1}^{N_\nu} B^Y_{\frac{\nu^2}{2k}}(x_{ij}), \text{ para cada } 1 \leq \ i \ \leq N_0.$$

Para a inclusão acima transladamos as N_ν bolas que cobrem $B_1^X(0)$ em Y e contraímos os raios (multiplicamos por ν) para cobrir $B_\nu^X(Sx_i)$.

Para garantir que os (x_{ij}) estejam em $S(B_0)$, como necessitaremos, escolhemos $y \in S(B_0) \cap B^Y_{\frac{\nu^2}{2k}}(x_{ij})$ como centro (continuaremos utilizando a notação $x_{ij} = y$) de bolas de raio $\frac{\nu^2}{k}$. Assim,

$$B_\nu^X(Sx_i) \cap S(B_0) \subset \bigcup_{j=1}^{N_\nu} B^Y_{\frac{\nu^2}{k}}(x_{ij}), x_{ij} \in S(B_0), \text{ para cada } 1 \leq \ i \ \leq N_0. \tag{2.24}$$

Logo, existe $V_2 = \{x_{ij}; 1 \leq \ i \ \leq N_0, 1 \leq \ j \ \leq N_\nu\} \subset S(B_0)$ tal que

$$S(B_0) = \bigcup_{i=1}^{N_0} B_\nu^X(Sx_i) \cap S(B_0) = \left(\bigcup_{i=1}^{N_0} \bigcup_{j=1}^{N_\nu} B^Y_{\frac{\nu^2}{k}}(x_{ij}) \right) \cap S(B_0).$$

Procedendo como antes,

$$S^2(B_0) = \bigcup_{i=1}^{N_0} \bigcup_{j=1}^{N_\nu} S\left(B^Y_{\frac{\nu^2}{k}} \cap B_0 \right) \cap S^2(B_0) = \bigcup_{i=1}^{N_0} \bigcup_{j=1}^{N_\nu} B^X_{\nu^2}(Sx_{x_{ij}}) \cap S^2(B_0)$$

e existe $V_3 = \{x_{ijl}; 1 \leq \ i \leq N_0, 1 \leq \ j \leq N_\nu, 1 \leq \ l \leq N_\nu\} \subset S^2(B_0)$ tal que

$$S^2(B_0) = \bigcup_{i=1}^{N_0} \bigcup_{j=1}^{N_\nu} \bigcup_{l=1}^{N_\nu} B^Y_{\frac{\nu^3}{k}}(x_{ijl}) \cap S^2(B_0)$$

e

$$S^3(B_0) = \bigcup_{i=1}^{N_0} \bigcup_{j=1}^{N_\nu} \bigcup_{l=1}^{N_\nu} S\left(B^Y_{\frac{\nu^3}{k}}(x_{ijl}) \cap S^2(B_0) \right) = \bigcup_{i=1}^{N_0} \bigcup_{j=1}^{N_\nu} \bigcup_{l=1}^{N_\nu} B^X_{\nu^3}(Sx_{ijl}) \cap S^3(B_0).$$

Prosseguindo por indução obtemos $V_n \subset S^{n-1}(B_0)$ com $\#V_n = N_0 N_\nu^{n-1}$ e

$$S^n(B_0) \subset \bigcup_{x \in V_n} B^X_{\nu^n}(x).$$

Note que se $\{S^n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ tem atrator global $\mathcal{A}$ então $\mathcal{A} \subset S^n(B_0)$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e portanto $N(\nu^n, \mathcal{A}) \leq \#V_n$. Segue do Lema 2.2.2, que

$$c(\mathcal{A}) = \limsup_{n \to \infty} \frac{log(N(\nu^n, \mathcal{A}))}{-log(\nu^n)} \leq \lim_{n \to \infty} \frac{log(N_0 N_\nu^{n-1})}{-log(\nu^n)} = \frac{log(N_\nu)}{-log(\nu)} < \infty.$$

Provemos então que $\{S^n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ tem atrator global $\mathcal{A}$. Por hipótese $\{S^n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ é limitado dissipativo, logo é ponto dissipativo. Observe, por (2.23), que $\overline{S(B_0)}$ é totalmente limitado em X. Logo, relativamente compacto em X. Seja então $B \subset X$ limitado, logo existe $n_B \in \mathbb{N}$ tal que $S^n(B) \subset B_0$, para todo $n \geq n_B$. Em particular $S^{n_B}(B) \subset B_0$ e assim

$\overline{S^{n_B+1}(B)} \subset \overline{S(B_0)}$. Portanto $\overline{S^{n_B+1}(B)}$ é compacto. Pela Definição 1.0.20, $\{S^n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ é eventualmente compacto. Utilizando o Teorema 1.1.1, provamos que $\{S^n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ tem atrator global $\mathcal{A}$.

Agora, observe que

$$dist_H(S^n(B_0), V_n) = \sup_{y \in S^n(B_0)} \rho(y, V_n) \leq \nu^n. \tag{2.25}$$

Defina $E_0 = V_0$, $E_{n+1} = V_{n+1} \cup S(E_n)$ e $\mathcal{M}_\nu = \overline{\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n}^X$.

Segue direto da definição que $S(\mathcal{M}_\nu) \subset \mathcal{M}_\nu$ e por (2.25), $dist_H(S^n(B_0), \mathcal{M}_\nu) \leq \nu^n = e^{-nlog\frac{1}{\nu}}$. Como B_0 absorve subsconjuntos limitados, dado $B \subset X$, existe $C(B) > 0$ tal que

$$dist_H(S^n(B), \mathcal{M}_\nu) \leq C(B) e^{-nlog\frac{1}{\nu}}, \ n \ \in \mathbb{N}.$$

Falta mostrar que $c(\mathcal{M}_\nu) < \infty$. Primeiramente note que, $S^s(B_0) \subset S^t(B_0)$ sempre que $s > t$. Observe também que:

$E_1 = V_1 \cup S(V_0) = V_1 \subset S(B_0) \subset B_0$;

$E_2 = V_2 \cup S(E_1) = V_2 \cup S(V_1) \subset S(B_0) \subset B_0$;

$E_3 = V_3 \cup S(E_2) = V_3 \cup S(V_2) \cup S^2(V_1) \subset S^2(B_0) \subset S(B_0) \subset B_0$;

$E_4 = V_4 \cup S(E_3) = V_4 \cup S(V_3) \cup S^2(V_2) \cup S^3(V_1) \subset S^3(B_0) \subset S^2(B_0) \subset S(B_0) \subset B_0$;

(...),

ou seja, $E_{n+i} \subset S^n(B_0)$, para todo $i = 1, 2, 3, ...$ Assim

$$\mathcal{M}_\nu \subset E_0 \cup E_1 \cup ... \cup E_n \cup \overline{S^n(B_0)}.$$

Afirmação: $\#(E_0 \cup E_1 \cup ... \cup E_n) \leq [(n+1)^2 - 1] N_0 N_\nu^{n-1}, n \geq 1$.

De fato, $\#(E_0 \cup E_1) \leq 2N_0 \leq 3N_0 = [(1+1)^2 - 1] N_0 N_\nu^{1-1}$. Suponha que $\#(E_0 \cup E_1 \cup ... \cup E_{n-1}) \leq (n^2 - 1) N_0 N_\nu^{n-1}$. Então,

$$\begin{aligned}
\#(E_0 \cup E_1 \cup ... \cup E_n) &\leq \#(E_0 \cup E_1 \cup ... \cup E_{n-1}) + \#(E_n) \\
&\leq (n^2 - 1) N_0 N_\nu^{n-1} + n N_0 N_\nu^{n-1} \\
&\leq (n^2 - 1) N_0 N_\nu^{n-1} + 2n N_0 N_\nu^{n-1} + N_0 N_\nu^{n-1} \\
&\leq [(n+1)^2 - 1] N_0 N_\nu^{n-1}.
\end{aligned}$$

Como $N(\nu^n, S^n(B_0)) \leq N_0 N_\nu^{n-1}$, segue que

$$N(\nu^n, \mathcal{M}_\nu) \leq (n+1)^2 N_0 N_\nu^{n-1}.$$

Utilizando o Lema 2.2.2: $c(\mathcal{M}_\nu) \leq \frac{logN_\nu}{log\frac{1}{\nu}}$.

Para completar a demonstração observe que dado $\nu \in (0,1)$ existe $\hat{\nu} = 1/\sqrt[c(\mathcal{M}_\nu)]{N_{\hat{\nu}}} \in (0,1)$ tal que $\frac{logN_{\hat{\nu}}}{log\frac{1}{\hat{\nu}}} \leq c(\mathcal{M}_\nu)$. Portanto $c(\mathcal{A}) \leq c(\mathcal{M}_\nu)$ para cada $\nu \in (0,1)$. □

Corolário 2.5.3. *Sejam X, Y espaços de Banach com X compactamente imerso em Y e $S : X \to X$ contínuo e tal que $\{S^n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$. Se $||Sx \; - \; Sy\,||_X \leq K\,||x \; - \; y||_Y$ para todo $x,\ y \in \mathcal{A}$ e para algum $K > 0$, então $c(\mathcal{A}) < \infty$.*

Dem. Uma vez que $\{S^n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ tem atrator global, ele é limitado dissipativo e o resultado segue pelo Teorema 2.5.2. □

Teorema 2.5.4. *Sejam X um espaço de Banach e $S \in \mathcal{C}(X)$. Suponha que o semigrupo $\{S^n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ possua um atrator global $\mathcal{A}$ em X. Seja Y um espaço de Banach com X compactamente imerso em Y e suponha que $S = L \, + \, C \; : \; X \to X$ com $L,\ C \in \mathcal{C}(X)$ tais que, para todo $x,\ y \in \mathcal{A}$, para algum $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$ e algum $K > 0$,*

$$||Lx \; - \; Ly\,||_X \leq \lambda||\,x \; - \; y\,||_X, \qquad ||Cx \; - \; Cy\,||_X \leq K\,||\,x \; - \; y\,||_Y. \tag{2.26}$$

Então $c(\mathcal{A}) \leq \frac{log(N(\frac{\nu}{K}, B_1^X(0)))}{log\left(\frac{1}{2(\lambda+\nu)}\right)}$.

Dem. Seja $0 < \nu < \frac{1}{2} - \lambda$. Como $\mathcal{A}$ é compacto,

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{N_1} B^X_{2(\lambda+\nu)}(x_i) \cap \mathcal{A},$$

onde $V_1 = \{x_1, ..., x_{N_1}\} \subset \mathcal{A}$. Seja N_ν o número mínimo de bolas de raio $\frac{\nu}{k}$ necessário para cobrir $B_1^X(0)$ em Y, então

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= S(\mathcal{A}) = S\left(\bigcup_{i=1}^{N_1} B^X_{2(\lambda+\nu)}(x_i) \cap \mathcal{A}\right) \\
&= \bigcup_{i=1}^{N_1} \big(L(B^X_{2(\lambda+\nu)} \cap \mathcal{A}) + C(B^X_{2(\lambda+\nu)}(x_i) \cap \mathcal{A})\big) \cap \mathcal{A} \\
&= \bigcup_{i=1}^{N_1} \left(B^X_{2\lambda(\lambda+\nu)}(Lx_i) + \bigcup_{j=1}^{N_\nu} B^X_{2\nu(\lambda+\nu)}(y_{ij}) \cap \mathcal{A}\right) \cap \mathcal{A}.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Para provar a igualdade (2.27), seja $x \in B^X_{2(\lambda+\nu)}(x_i) \cap \mathcal{A}$. Logo,

$$||Lx - Lx_i||_X \leq \lambda||x - x_i||_X < 2\lambda(\lambda+\nu).$$

Note também, que $B^X_{2(\lambda+\nu)}(x_i) \subset \cup_{j=1}^{N_\nu} B^Y_{2\frac{\nu}{k}(\lambda+\nu)}(z_{ij})$. Logo, se $x \in B^X_{2(\lambda+\nu)}(x_i)$, então

$$||Cx - Cz_{ij}||_X \leq k||x - z_{ij}||_Y < 2\nu(\lambda+\nu).$$

Assim,

$$\left(L(B^X_{2(\lambda+\nu)}(x_i) \cap \mathcal{A}) + C(B^X_{2(\lambda+\nu)}(x_i) \cap \mathcal{A})\right) \subset \left(B^X_{2\lambda(\lambda+\nu)}(Lx_i) + \bigcup_{j=1}^{N_\nu} B^X_{2\nu(\lambda+\nu)}(y_{ij})\right)$$

onde $y_{ij} = C(z_{ij})$, donde segue (2.27).

Continuando,

$$\mathcal{A} = S(\mathcal{A}) = \bigcup_{i=1}^{N_1} \bigcup_{j=1}^{N_\nu} B^X_{2(\lambda+\nu)^2}(Lx_i + y_{ij}) \cap \mathcal{A}.$$

Se $(Lx_i + y_{ij}) \notin \mathcal{A}$ para algum $1 \leq i \leq N_1$ ou $1 \leq j \leq N_\nu$, então escolhemos $z \in B^X_{2(\lambda+\nu)^2}(Lx_i + y_{ij}) \cap \mathcal{A}$ para ser o centro de uma bola de raio $2^2(\lambda+\nu)^2$ que obviamente contém $B^X_{2(\lambda+\nu)^2}(Lx_i + y_{ij})$; caso $B^X_{2(\lambda+\nu)^2}(Lx_i + y_{ij}) \cap \mathcal{A} = \varnothing$, podemos desconsiderar tal bola. Assim, existe $V_2 = \{x_{ij}; 1 \leq\ i\ \leq N_1, 1 \leq\ j\ \leq N_\nu\} \subset \mathcal{A}$ tal que

$$\mathcal{A} = S(\mathcal{A}) = \bigcup_{i=1}^{N_1} \bigcup_{j=1}^{N_\nu} B^X_{2^2(\lambda+\nu)^2}(x_{ij}) \cap \mathcal{A}.$$

Prosseguindo por indução obtemos $V_n \subset \mathcal{A}$ com $\#V_n = N_1 N_\nu^{n-1}$ tal que

$$\mathcal{A} = S(\mathcal{A}) = \bigcup_{x \in V_n} B^X_{2^n(\lambda+\nu)^n}(x) \cap \mathcal{A}.$$

Portanto $N\left(2^n(\lambda+\nu)^n, \mathcal{A}\right) \leq \#V_n = N_1 N_\nu^{n-1}$ e, pelo Lema 2.2.2,

$$c(\mathcal{A}) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{log(N_1 N_\nu^{n-1})}{log\left(\frac{1}{2^n(\lambda+\nu)^n}\right)} = \frac{logN_\nu}{-log(2(\lambda+\nu))} < \infty.$$

Agora, seja B_0 um conjunto limitado absorvente com $S(B_0) \subset B_0$, $0 < \nu < \frac{1}{2} - \lambda$ e $R > 0$ tal que $B_0 \subset B^X_R(b_0)$ para algum $b_0 \in B_0$. Assim,

$$\begin{aligned} S(B_0) &= S\left(B^X_R(b_0) \cap B_0\right) \\ &= \left(L(B^X_R(b_0) \cap B_0) + C(B^X_R(b_0) \cap B_0)\right) \cap S(B_0) \\ &= \left(B^X_{\lambda R}(Lb_0) + \bigcup_{i=1}^{N_\nu} B^X_{\nu R}(y_i)\right) \cap S(B_0) \\ &= \left(\bigcup_{i=1}^{N_\nu} B^X_{2R(\lambda+\nu)}(x_i)\right) \cap S(B_0), \end{aligned}$$

para alguma escolha $\{x_i; 1 \leq \ i \leq N_\nu\}$ em $S(B_0)$.

Procedendo como antes,

$$\begin{aligned} S^2(B_0) &= \bigcup_{i=1}^{N_\nu} \left(L(B^X_{2R(\lambda+\nu)}(x_i) \cap S(B_0)) + C(B^X_{2R(\lambda+\nu)}(x_i) \cap S(B_0))\right) \cap S^2(B_0) \\ &= \bigcup_{i=1}^{N_\nu} \left(B^X_{2\lambda R(\lambda+\nu)}(Lx_i) + \bigcup_{j=1}^{N_\nu} C(B^X_{2R\nu(\lambda+\nu)}(y_{ij})) \right) \cap S^2(B_0) \\ &= \bigcup_{i=1}^{N_\nu} \bigcup_{j=1}^{N_\nu} B^X_{2R(\lambda+\nu)^2}(Lx_i + y_{ij}) \cap S^2(B_0), \end{aligned}$$

para alguma escolha $\{x_{ij}; 1 \leq \ i \leq N_\nu, 1 \leq \ j \leq N_\nu\}$ em X. Assim, existe $\{x_{ij}; 1 \leq \ i \leq N_\nu, 1 \leq \ j \leq N_\nu\}$ em $S^2(B_0)$ tal que

$$S^2(B_0) = \left(\bigcup_{i=1}^{N_\nu} \bigcup_{j=1}^{N_\nu} B^X_{2^2R(\lambda+\nu)^2}(x_{ij}) \right) \cap S^2(B_0).$$

Continuando este procedimento obtemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $U_n \subset S^n(B_0)$, com $\#U_n = N_\nu^n$ e tal que

$$S^n(B_0) \subset \bigcup_{x \in V_n} B^X_{(2(\lambda+\nu))^n R}(x).$$

Assim, $dist_H(S^n(B_0), V_n) \leq (2(\lambda+\nu))^n R$.

Defina $E_0 = U_0 := \{b_0\}$, $E_{n+1} = U_{n+1} \cup S(E_n)$, $n \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{M}_\nu = \overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n}^X$. Vemos facilmente que $S(\mathcal{M}_\nu) \subset \mathcal{M}_\nu$ e que

$$dist_H(S^n(B_0), \mathcal{M}_\nu) \leq [2(\lambda+\nu)]^n R = Re^{-nlog\frac{1}{2(\lambda+\nu)}}.$$

Como B_0 é um conjunto absorvente, dado um limitado $B \subset X$, existe $C(B) > 0$ tal que

$$dist_H(S^n(B), \mathcal{M}_\nu) \leq C(B) e^{-nlog\frac{1}{2(\lambda+\nu)}}.$$

Agora, mostremos que $c(\mathcal{M}_\nu) < \infty$. Primeiramente note que $E_{n+i} \subset S^n(B_0)$, para todo $i \in \mathbb{N}$, e consequentemente

$$\mathcal{M}_\nu \subset E_0 \cup E_1 \cup ... \cup E_n \cup \overline{S^n(B_0)}.$$

Afirmação: $\#(E_0 \cup E_1 \cup ... \cup E_n) \leq [(n+1)^2 - 1] N_\nu^n$.

De fato, $\#(E_0 \cup E_1) \leq N_\nu + 2 \leq 3N_\nu = [(1+1)^2 - 1] N_\nu^1$. Suponha que $\#(E_0 \cup E_1 \cup ... \cup E_{n-1}) \leq$

$(n^2-1)N_\nu^n$. Então,

$$\begin{aligned}\#(E_0 \cup E_1 \cup ... \cup E_n) &\leq (E_0 \cup E_1 \cup ... \cup E_{n-1}) + \#(E_n)\\ &\leq (n^2-1)N_\nu^n + (n+1)N_\nu^n\\ &\leq (n^2-1)N_\nu^n + 2nN_\nu^n + N_\nu^n\\ &\leq [(n+1)^2-1]N_\nu^n.\end{aligned}$$

Como $N([2(\lambda+\nu)]^n, S^n(B_0)) \leq N_\nu^n$, segue que

$$N([2(\lambda+\nu)]^n, \mathcal{M}_\nu) \leq (n+1)^2 N_\nu^n.$$

Utilizando o Lema 2.2.2: $c(\mathcal{M}_\nu) \leq \frac{logN_\nu}{-log[2(\lambda+\nu)]}$. □

Trabalhando com iteradas é possível supor apenas que L seja uma contração estrita ($\lambda < 1$).

2.6 Atratores de semigrupos gradient-like e sua dimensão fractal.

Nesta seção estimamos a dimensão fractal do atrator global de semigrupos gradient-like em termos do máximo da dimensão fractal dos conjuntos instáveis locais dos conjuntos invariantes isolados e sob certas propriedades Lipschitz. Os resultados apresentados nesta seção são de Bortolan, Caraballo, Carvalho, Langa, [3].

Antes de prosseguirmos necessitamos de algumas definições.

Definição 2.6.1. *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo com atrator global $\mathcal{A}$. Diremos que um subconjunto não vazio A de $\mathcal{A}$ é um* ***atrator local*** *se existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\omega(\mathcal{O}_\varepsilon(A)) = A$. O* ***repulsor*** *$A^*$ associado ao atrator local A é o conjunto definido por*

$$A^* := \{x \in \mathcal{A} : \omega(x) \cap A = \varnothing\}$$

O par (A, A^*) é chamado ***par atrator-repulsor*** *para $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$.*

Definição 2.6.2. *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo gradient-like relativamente a família disjunta de conjuntos invariantes isolados $\Xi = \{\Xi_1^*, ..., \Xi_p^*\}$ e com atrator global $\mathcal{A}$. Diremos que um conjunto invariante isolado Ξ_i é uma fonte, se $W^s_{loc}(\Xi_i) \cap \mathcal{A} = \Xi_i$; e um sumidouro se $W^u(\Xi_i) = \Xi_i$. Caso contrário diremos que Ξ_i é uma sela.*

Note que se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo *gradient-like* relativo a uma família disjunta de conjuntos invariantes isolados $\Xi = \{\Xi_1^*, ..., \Xi_p^*\}$ e com atrator global $\mathcal{A}$, então existem pelo menos uma fonte e um sumidouro. De fato, suponha que não exista uma fonte, ou seja, $W^s_{loc}(\Xi_i) \cap \mathcal{A} \neq \Xi_i$ para todo $1 \leq i \leq p$. Então dada uma ε-vizinhança de Ξ_j, $1 \leq j \leq p$, existe $x \in \mathcal{A}$ tal que, por (GL**1**), uma das duas situações ocorre:

(I) $\phi_x(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi_j$ e $\phi_x(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} \Xi_j$;

(II) $\phi_x(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi_j$ e $\phi_x(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} \Xi_l, 1 \leq l \neq j \leq p$,

onde ϕ_x é uma solução global por x. Em ambas as situações temos que Ξ_j é recorrente por cadeias, contrariando (GL**2**) (na segunda usamos o fato da quantidade de conjuntos invariantes isolados ser finita).

Para provar que existe pelo menos um sumidouro, suponhamos também que não exista Ξ_k, $1 \leq k \leq p$, tal que $W^u(\Xi_k) = \Xi_k$. Como $\mathcal{A} = \cup_{i=1}^p W^u(\Xi_i)$, se $x \in W^u(\Xi_k)$ então $x \in \mathcal{A}$. De forma análoga a prova que existe uma fonte concluímos que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um sumidouro.

Agora, provemos que se $\{T(t); t \in \mathbb{R}^+\}$ é um semigrupo *gradient-like* relativo a uma família disjunta de conjuntos invariantes isolados $\Xi = \{\Xi_1^*, ..., \Xi_p^*\}$ e com atrator global $\mathcal{A}$, então $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$, onde $\mathcal{A}'$ é o atrator global do semigrupo gradient-like discreto $\{S^n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ com $S = T(1)$. Para tal, observe que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$. Reciprocamente, como $\mathcal{A}' = \cup_{i=1}^p W^u(\Xi_i)$, dado $y \in \mathcal{A}'$ existe uma solução global limitada $\zeta : \mathbb{Z} \to \mathcal{A}'$ por y e um conjunto invariante isolado Ξ_i, tais que $\zeta(-n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Xi_i$. Defina

$$\phi(t) = \begin{cases} T(n+t)\zeta(-n), & t \in [n, n+1), n = 0, 1, 2, ... \\ T(n+t)\zeta(-n), & t \in [-n, -n+1), n = 1, 2, ... \end{cases}$$

logo, $\phi(0) = y$ e $T(s)\phi(t) = T(s+n+t)\zeta(-n) = \phi(s+t)$; isto é, existe uma solução global limitada ($\zeta(t)$ é invariante) $\phi(t) : \mathbb{R} \to X$ por y. Portanto $y \in \mathcal{A}$.

Podemos, então, considerar apenas o caso discreto para semigrupos *gradient-like* relativo a uma família disjunta de conjuntos invariantes isolados.

Proposição 2.6.3. *Seja $\{T^n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ um semigrupo discreto com atrator global $\mathcal{A}$ e $S = T_{|\mathcal{A}}$. Suponha que S é Lipschitz com constante de Lipschitz $c > 1$. Seja (A, A^*) um par atrator repulsor em $\mathcal{A}$ e suponha que:*

(i) existe uma vizinhança B de A^* em $\mathcal{A}$ tal que $c(\overline{B}) = c(S(\overline{B}))$;

(ii) existem constantes $M \geq 1$ e $w > 0$ tais que, para todo K subconjunto compacto de $\mathcal{A}$ com $K \cap A^* = \varnothing$ temos que $dist_H(S^n K, A) \leq M e^{-wn}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então

$$c(\overline{B}) \leq c(\mathcal{A}) \leq \max\left\{\frac{w + log(c)}{w} c(\overline{B}), c(A)\right\}.$$

Dem. Como $\overline{B} \subset \mathcal{A}$ então $c(\overline{B}) \leq (\mathcal{A})$. Provemos então a segunda desigualdade. Para facilitar a compreensão dividimos a prova em quatro passos:

Passo 1: Defina $\Omega_n = S^n(\mathcal{A} \setminus B) \setminus S^{n+1}(\mathcal{A} \setminus B)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que $\overline{\Omega_0} = \overline{(\mathcal{A} \setminus B) \setminus S(\mathcal{A} \setminus B)} \subset \overline{S(B)} = S(\overline{B})$, portanto $c(\overline{\Omega_0}) \leq c(\overline{B})$.

Agora obtemos uma estimativa sobre o número mínimo $N(r, \Omega_k)$ de bolas de raio r necessárias para cobrir Ω_k em termos do número mínimo de bolas necessário para cobrir $\overline{\Omega_0}$.

Seja $N_0 = N(\frac{r}{c^k}, \overline{\Omega_0})$ e $\{x_1, ..., x_{N_0}\}$ uma sequência finita de pontos em $\overline{\Omega_0}$ tal que

$$\overline{\Omega_0} \subset \bigcup_{i=1}^{N_0} B_{\frac{r}{c^k}}(x_i).$$

Faça para cada $i = 1, ..., N_0$, $\xi_i = S^k(x_i) \in \overline{\Omega_k}$. Então, para cada $y \in \Omega_k$ existe $z \in \Omega_0$ tal que $y = S^k(z), z \in B_{\frac{r}{c^k}}(x_i)$ para algum $i = 1, ..., N_0$ e assim

$$||y - \xi_i|| = ||S^k(z) - S^k(x_i)|| \leq c^k ||z - x_i|| < r, \forall\, y \ \in \Omega_k.$$

Logo, provamos que $\Omega_k \subset \cup_{i=1}^{N_0} B_r(\xi_i)$ e portanto $N(r, \Omega_k) \leq N_0$.

Passo 2:Como $\mathcal{A} \setminus B$ é fechado, logo compacto, $\mathcal{A} \setminus B \subset \mathcal{A}$ e $(\mathcal{A} \setminus B) \cap A^* = \varnothing$, então

$$dist_H(S^n(\mathcal{A} \setminus B), A) \leq M e^{-wn}, \text{ para todo } n \geq 0.$$

Assim, existe $n_0 = \frac{1}{w} log\left(\frac{M}{r}\right)$ tal que

$$G := \left(\bigcup_{k \geq n_0} \Omega_k\right) \cup A \subset \mathcal{O}_r(A).$$

Consequentemente, se $A \subset \cup_{i=1}^{N(r,A)} B_r(x_i)$, com $\{x_1, ..., x_{N(r,A)}\} \subset A$, então $\mathcal{O}_r(A) \subset \cup_{i=1}^{N(r,A)} B_{2r}(x_i)$ e portanto $N(2r, G) \leq N(r, A)$. Como essa relação é válida para todo $r > 0$, $N(r, G) \leq N(\frac{r}{2}, A)$.

Passo 3: Do passo 1, defina

$$H := \cup_{k=0}^{n_0} \Omega_k.$$

Como $c > 1$, segue que $N\left(\frac{r}{c^k}, \Omega_0\right) \leq N\left(\frac{r}{c^{n_0}}, \Omega_0\right)$, para todo $0 \leq k \leq n_0$. Assim

$$N(r, H) \leq n_0 \max_{k=0,1,\dots,n_0} N(r, \Omega_k) \leq n_0 \max_{k=0,1,\dots,n_0} N\left(\frac{r}{c^k}, \Omega_k\right) \leq n_0 N\left(\frac{r}{c^{n_0}}, \Omega_0\right).$$

Passo 4: Note que $\mathcal{A} = \overline{B} \cup G \cup H$. De fato, claramente $\overline{B} \cup G \cup H \subset \mathcal{A}$. Para a outra inclusão, observe que $\overline{B} \cup G \cup H = \overline{B} \cup A \cup (\cup_{k=0,1,2\dots} \Omega_k)$ e mostremos que se $x \in \mathcal{A}$ e $x \notin \overline{B} \cup A$ então $x \in \cup_{k\in\mathbb{N}.} \Omega_k$. Suponha que $x \notin \cup_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$, então: ou $x \in B$ (absurdo), ou $x \in S^n(\mathcal{A} \setminus B)$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e por (ii):

$$dist_H(x, A) \leq Me^{-wn}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}^*;$$

isto é, $d(x, A) = 0$ e $x \in A$. Absurdo.

Assim, temos

$$\begin{aligned} N(r, \mathcal{A}) &\leq 3\max\{N(r, \overline{B}); N(r, H); N(r, G)\} \\ &\leq 3\max\left\{N(r, \overline{B}); n_0 N\left(\frac{r}{c^{n_0}}, \Omega_0\right); N\left(\frac{r}{2}, A\right)\right\}. \end{aligned}$$

Como a função logarítmo é crescente,

$$\begin{aligned} \frac{logN(r,\mathcal{A})}{log\left(\frac{1}{r}\right)} &\leq \frac{log3}{log\left(\frac{1}{r}\right)} + \\ &+ \max\left\{\frac{logN(r,\overline{B})}{log\left(\frac{1}{r}\right)}; \frac{log(n_0)}{log\left(\frac{1}{r}\right)} + \frac{logN\left(\frac{r}{c^{n_0}}, \overline{\Omega_0}\right)}{log\left(\frac{1}{r}\right)}; \frac{log\left(\frac{r}{2}, A\right)}{log\left(\frac{1}{r}\right)}\right\} \end{aligned} \tag{2.28}$$

Calculemos o $\limsup_{r\to 0^+}$ de cada um dos termos do lado direito da desigualdade (2.28):

(a) $\limsup_{r\to 0^+} \frac{log3}{log\left(\frac{1}{r}\right)} = 0.$

(b) $\limsup_{r\to 0^+} \frac{log(n_0)}{log\left(\frac{1}{r}\right)} \leq \limsup_{r\to 0^+} \frac{log\left(\frac{1}{w}\right)}{log\left(\frac{1}{r}\right)} + \limsup_{r\to 0^+} \frac{log\left(log\left(\frac{M}{r}\right)\right)}{log\left(\frac{1}{r}\right)} = 0.$

(c)

$$\begin{aligned} \limsup_{r\to 0^+} \frac{logN\left(\frac{r}{c^{n_0}}, \overline{\Omega}_0\right)}{log\left(\frac{1}{r}\right)} &= \limsup_{r\to 0^+} \frac{logN\left(\frac{r}{c^{n_0}}, \overline{\Omega}_0\right)}{log\left(\frac{c^{n_0}}{r}\right) + log\left(\frac{1}{c^{n_0}}\right)} \\ &= \limsup_{r\to 0^+} \frac{1}{1 - \frac{n_0 log(c)}{log(\frac{c^{n_0}}{r})}} \cdot \frac{logN\left(\frac{r}{c^{n_0}}, \overline{\Omega}_0\right)}{log\left(\frac{c^{n_0}}{r}\right)}, \end{aligned}$$

note que,

$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{1}{1 - \frac{n_0 log(c)}{log(\frac{c^{n_0}}{r})}} = \limsup_{r\to 0^+} \left(\frac{n_0 log(c)}{log\left(\frac{1}{r}\right)} + 1\right),$$

como $\frac{1}{w}log\left(\frac{M}{r}\right) \leq n_0 \leq \frac{1}{w}log\left(\frac{M}{r}\right)+1$, segue que

$$\limsup_{r\to 0^+}\left(\frac{n_0 log(c)}{log\left(\frac{1}{r}\right)}+1\right)=\frac{w+log(c)}{w}.$$

Logo, $\displaystyle\limsup_{r\to 0^+}\frac{logN\left(\frac{r}{c^{n_0}},\overline{\Omega}_0\right)}{log\left(\frac{1}{r}\right)}=\frac{w+log(c)}{w}c(\overline{\Omega}_0).$

(d)

$$\begin{aligned}\limsup_{r\to 0^+}\frac{logN(\frac{r}{2},A)}{log\left(\frac{1}{r}\right)} &= \limsup_{r\to 0^+}\frac{logN(\frac{r}{2},A)}{log\left(\frac{2}{r}\right)+log\left(\frac{1}{2}\right)}\\ &= \limsup_{r\to 0^+}\frac{1}{1+\frac{log(1/2)}{log(2/r)}}\cdot\frac{logN(\frac{r}{2},A)}{log\left(\frac{2}{r}\right)}=c(A).\end{aligned}$$

Como $c(\overline{\Omega}_0)\leq c(\overline{B})$, segue de (a), (b), (c) e (d) que

$$c(\mathcal{A})\leq\max\left\{\frac{w+log(c)}{w}c(\overline{B}),c(A)\right\}.$$

Concluíndo a demonstração. □

Teorema 2.6.4. *Seja $\{S^n : n\in\mathbb{Z}^+\}$ um semigrupo gradient-like relativo à família disjunta de conjuntos invariantes isolados $\Xi=\{\Xi_1^*,...,\Xi_p^*\}$ e atrator global $\mathcal{A}$. Suponha que a restrição $S_{|\mathcal{A}}$ do operador S a $\mathcal{A}$ é uma função Lipschitz contínua com constante de Lipschitz $c>1$ e suponha também que existem constantes $M>1$ e $w>0$ tais que, para todo par atrator-repulsor (A,A^*) em $\mathcal{A}$ e todo subconjunto compacto $K\subset\mathcal{A}$ com $K\cap A^*=\varnothing$ temos que*

$$dist_H(S^n(K),A)\leq M\,e^{-wn},\forall\,n\geq 0.$$

Finalmente, suponha que os conjuntos instáveis locais $\{W^u_{loc}(\Xi_i) : i=1,....,p\}$ são dados como gráficos de função Lipschitz. Nestas condições

$$\max_{i=1,\ldots,p}c(W^u_{loc}(\Xi_i))\leq c(\mathcal{A})\leq\frac{w+log\,c}{w}\max_{i=1,\ldots,p}c(W^u_{loc}(\Xi_i)). \quad (2.29)$$

Dem. Como $\{S^n : n\in\mathbb{Z}^+\}$ é um semigrupo *gradient-like*, existe pelo menos uma fonte Ξ_j. Sendo $\mathcal{A}=\cup_{i=1}^p W^u(\Xi_i)$ tome B_j como uma vizinhança de Ξ_j tal que $B_j\subset W^u_{loc}(\Xi_j)$ e $S(B_j)\subset W^u_{loc}(\Xi_i)$, isto é possível pois Ξ_i é uma fonte. Como B_j é uma vizinhança e $W^u_{loc}(\Xi_j)$ é o gráfico de uma função Lipschitz, temos que $c(\overline{B_j})=c(W^u_{loc}(\Xi_j))$. Pelo Lema 2.2.5, temos que $c\left(S(\overline{B_j})\right)\leq c(\overline{B_j})$. Por outro lado, temos que $B_j\subset S(B_j)$, logo $c(\overline{B_j})\leq c\left(S(\overline{B_j})\right)$. Portanto, $c(\overline{B_j})=c(S\overline{B_j})=c(W^u_{loc}(\Xi_j))$.

Defina $A_j = \cup_{1\leq i\neq j\leq p} W^u_{loc}(\Xi_i)$. Note que $\omega(\mathcal{O}_\varepsilon(A_j)) = A_j$, caso contrário, por ser relativo a uma quantidade finita de conjuntos invariante isolados, $\{S^n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ seria recorrente por cadeias. Observe também, que $A_j^* = \Xi_j$,

Pela Proposição anterior,

$$c(\overline{B_j}) \leq c(\mathcal{A}) \leq \max\left\{\frac{w + \log c}{w} c(\overline{B_j}), c(A_j)\right\},$$

ou seja,

$$c(W^u_{loc}(\Xi_j)) \leq c(\mathcal{A}) \leq \max\left\{\frac{w + \log c}{w} c(W^u_{loc}(\Xi_j)), c(A_j)\right\}. \tag{2.30}$$

Agora, considere $S_{|C_j}$ a restrição de S ao conjunto $C_j = \cup_{1\leq i\neq j\leq p} W^u(\Xi_i)$. Logo, temos um semigrupo *gradient-like* discreto em relação a família disjunta de invariantes isolados $\Xi^j = \Xi \setminus \Xi_j$, onde o atrator é o próprio $C_j = \cup_{1\leq i\neq j\leq p} W^u(\Xi_i)$. Assim, este semigrupo tem ao menos uma fonte Ξ_l, $l \neq j$. Usando o mesmo argumento acima, o fato de que $A_j \subset C_j$ e $W^u_{loc}(\Xi_l) \subset A_j$, podemos provar que

$$c(W^u_{loc}(\Xi_l)) \leq c(A_j) \leq \max\left\{\frac{w + \log c}{w} c(W^u_{loc}(\Xi_l)), c(A_l)\right\}. \tag{2.31}$$

Sabendo que $W^u_{loc}(\Xi_l) \subset \cup_{i=1}^p W^u(\Xi_i) = \mathcal{A}$, usando (2.30) e (2.31), temos que

$$\max_{i=j,l} c(W^u_{loc}(\Xi_i)) \leq c(\mathcal{A}) \leq \max\left\{\frac{w + \log c}{w} c(W^u_{loc}(\Xi_j)), \frac{w + \log c}{w} c(W^u_{loc}(\Xi_l)), c(A_l)\right\}.$$

Como temos um número finito de conjuntos invariante isolados, repetindo o processo acima (retirando as fontes) em um determinado momento teremos apenas sumidouros e assim obtemos (2.29).

□

APÊNDICE A

ANÁLISE FUNCIONAL

Apresentamos alguns resultados básicos que foram utilizados no texto.

O lema a seguir garante a existência da base de Auerbach.

Lema A.0.5. *Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimensão n. Então, existem bases $\{x_1, ..., x_n\}$ de X e $\{f_1, ..., f_n\}$ de $X^\star$ com $||x_i||_X = ||f_i||_{X^\star} = 1$ e $f_j(x_k) = \delta_{jk}, 1 \leq j, k \leq n$. Neste caso $\{x_1, ..., x_n\}$ é chamada uma* ***base de Auerbach*** *para X.*

Dem. Seja $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base para X. Dada uma n-upla de vetores $(x_1, ..., x_n)$ de X, seja $\bar{y}_j$ a matriz coluna das coordenadas y_j na base $\mathcal{B}$. Considere a função

$$\begin{aligned} g : X^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (y_1, ..., y_n) &\longmapsto g((y_1, ..., y_n)) := \det[\bar{y}_1, ..., \bar{y}_n]. \end{aligned}$$

onde X^n é o produto de n cópias de X.

Agora, tome B sendo a bola unitária fechada em X, B^n o produto de n cópias de B e $(x_1, ..., x_n)$ o ponto onde a função $|g(\cdot, ..., \cdot)|$ atinge seu máximo em B^n. Note que cada x_j tem norma 1, pois caso contrário um múltiplo de x_j por um número maior do que um ainda estaria em B contrariando a escolha de $(x_1, ..., x_n)$. Defina

$$\begin{aligned} f_j : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_j(x) := \frac{\det[\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{j-1}, \bar{x}, \bar{x}_{j+1}\bar{x}_n]}{\det[\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n]} \end{aligned}$$

Claro que $f_j(x_k) = \delta_{jk}$ e $||f_j||_{X^\star} = 1, 1 \leq j, k \leq n.$ $\square$

Os seguintes resultados foram utilizados para provar que dado um subconjunto compacto de um espaço de Banach real, existe uma sequência $\{\phi_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ no dual do espaço, tal que, se $x \in span(K)$ e $\phi_i(x) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}^*$, então $x = 0$.

Teorema A.0.6 (Hahn-Banach, ver [2], teo. 1.1, p. 1)**.** *Seja $p : E \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo*

$$p(\lambda x) \;=\; \lambda\, p(x), \quad \textit{para todo } x \in E \;\; e\, \lambda > 0, \tag{A.1}$$

$$p(x + y) \;\leq\; p(x) + p(y), \quad \textit{para todo } x,\, y \in E. \tag{A.2}$$

Seja $G \subset E$ um subespaço linear e $g : G \to \mathbb{R}$ um funcional linear tal que

$$g(x) \leq p(x), \quad \textit{para todo } x \in E. \tag{A.3}$$

Então, existe um funcional linear f definido sobre todo E que estende g, isto é, $g(x) = f(x)$ para todo $x \in G$ e tal que

$$f(x) \leq p(x) \quad \textit{para todo } x \in E.$$

Corolário A.0.7 (ver [2], cor. 1.2, p. 3)**.** *Seja $G \subset E$ um subespaço linear. Se $g : G \to \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo, então existe $f \in E^\star$ que estende g e tal que*

$$||f||_{E^\star} = ||g||_{G^\star}.$$

Proposição A.0.8 (ver [2], prop. 3.13, p. 63)**.** *Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $X^\star$. Então*

$$[f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f \textit{ em } \sigma(X^\star, X)] \iff [\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle, \forall x \in X]. \tag{A.4}$$

Teorema A.0.9 (ver [2], teo 3.16, p. 66)**.** *A bola unitária fechada $B_{X^\star} := \{f \in X^\star : ||f|| \leq 1\}$ é compacta na topologia $fraca^\star$ $\sigma(X^\star, X)$.*

Teorema A.0.10 (ver [2], teo 3.28, p. 74)**.** *Seja X um espaço de Banach sepáravel. Então $B_{X^\star}$ é metrizável na topologia $fraca^\star$ $\sigma(X^\star, X)$. Por outro lado, se $B_{X^\star}$ é metrizável na topologia $fraca^\star$, então X é separável.*

APÊNDICE B

SEMIGRUPO ASSOCIADO AO PVI

Neste apêndice mostramos como é feita a associação de um semigrupo a um problema de valor incial e resultados que foram utilizados no decorrer do texto.

Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\dot{x} = f(x), \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \tag{B.1}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma função continuamente diferenciável. $x(t) = \phi(t) + x_0$ é uma solução de (B.1) se, e somente se, ϕ é ponto fixo do operador

$$T_{x_0}\phi(t) = \int_0^t f(\phi(s) + x_0)ds.$$

O semigrupo$\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ em $\mathbb{R}^n$ associado a (B.1) é dado por: $\{T(t)x_0 = x(t, x_0) : t \in \mathbb{R}^+\}$, onde $x(t, x_0)$ é a solução de (B.1). Para uma prova das propriedades:

(i) $T(0)x_0 = x_0, \forall\, t \in \mathbb{T}^+$;

(ii) $T(t + s) = T(t) \circ T(s)$;

(iii) $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n \ni (t, x_0) \to T(t)x \in \mathbb{R}^n$ é contínua;

ver Hale, [11], p. 38.

Teorema B.0.11 (ver [11], teo. 3.3, p. 21)**.** *Se $f(t, x)$ tem primeira derivada contínua com respeito a x, para $x \in \mathbb{R}^n$, então a solução $x(t, x_0)$ de* (B.1)*, é continuamente diferenciável com respeito a x_0 em seu domínio de definição. A matriz $\frac{\partial x(t,x_0)}{\partial x_0}$, satisfaz a equação,*

$$\dot{y} = \frac{\partial f(t, x(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda)}{\partial x} y, \qquad y(0) = I. \tag{B.2}$$

Lema B.0.12 (ver [11], p. 07). *Sejam X e Y espaços de Banach, $F \subset X$, $G \subset Y$ e $\{T_y : y \in G\}$, uma família de operadores $F \to X$. Suponha que $T_y x$ tem primeiras derivadas contínuas $A(x, y)$, $B(x, y)$ com respeito a y e x, respectivamente. Suponha também que $g(y)$ é um ponto fixo de T_y. Então*

$$D_y g h = (I - B(g(y), y))^{-1} \circ A(g(y), y) h,$$

onde I é a aplicação identidade.

Lema B.0.13. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e considere $\dot{x} = f(x)$. Se $f(x) \cdot x < 0$ para $||x||_{\mathbb{R}^n} \geq M$, então o conjunto de pontos de equilíbrio é limitado.*

Dem. Se x é um ponto de equilíbrio então $f(x) = 0$ e portanto $||x||_{\mathbb{R}^n} < M$. $\square$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BARTLE, G. R. *The Elements of Real Analysis*, New York: John Wiley & Sons Inc. (1964).

[2] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, New York: Springer. (2011).

[3] BORTOLAN, M. C.; CARABALLO, T.; CARVALHO, A.N.; LANGA, J. A. *An estimate on the fractal dimension of attractors of gradient-like dynamical systems*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, $75(14)5702 - 5722(2012)$.

[4] CARVALHO, A. N.; LANGA, J. A.; ROBINSON J. C. *Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems*, New York: Springer. (2010).

[5] CARVALHO, A. N.; LANGA, J. A.; ROBINSON J. C. *Finite-dimensional global attractors in Banach space*, Journal of Differential Equations, 249 (12) $3099 - 3109$ (2010).

[6] CHOLEWA, J. W.; CZAJA, R.; MOLA, G. *Remarks on the fractal dimension of bi-space global and exponential attractors*. Boll. Unione Mat. Ital. $(9)1, no.1, 121 - 145.(2008)$.

[7] FALCONER, K. J. *Fractal Geometry Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley & Sons, Inc, 2ª ed.,University of St Andrews, UK. (2003).

[8] FALCONER, K. J. *The geometry of fractal sets*, Cambridge Tracts in Mathematics 85, Cambridge University Press (1985).

[9] FOLLAND, G. B. *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*, 2ª ed. John Wiley & Sons Inc. (1999).

[10] HALE, J. K. *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Mathematical Surveys and Monographs 25 (American Mathematical Society, Providence, RI) (1988).

[11] HALE, J. K. *Ordinary Differential equations*, 2ª ed., Florida: Robert E. Krieger Publishing Company, INC. (1980).

[12] KAHANE, J. P. *Measures et dimensions, Turbulence and the Navier Stokes equation*, Lecture Notes in Mathematics 565, New York: Springer-Verlag. (1976).

[13] KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley & Sons. Inc. (1978).

[14] LIMA, E. L. *Espaços Métricos*, IMPA, 4ª ed., Rio de Janeiro (2011).

[15] MALLET-PARET *Negatively invariant sets of compact maps and an extension of a theorem of Cartwright*, J. Differential Equations 22 331 − 348 (1976).

[16] MAÑÉ, R. *On the dimension of the compact invariant sets of certain non-linear maps*, Lecture Notes in Mathematics 898 230 − 242, Springer-Verlag, New York. (1981).

[17] MUNKRES, J. R. *Topology*, Second Edition, Pearson Education. (2000).

[18] NACHBIN, L. *Introdução à Análise funcional, espaços de Banach e cálculo diferencial*. Brasília: Universidade de Brasília. 98.

[19] TEMAM, R. *Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Applied Mathematical Sciences 68, Springer-Verlag (1997).

[20] CARVALHO, A. N., *Sistemas dinâmicos não-lineares*. Disponível em ⟨http://www2.icmc.usp.br/∼andcarva/SDNL2012.pdf ⟩. Acessado em 15 de setembro de 2012.

ÍNDICE REMISSIVO