

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**APLICAÇÕES DE ALGORITMOS QUE CONSERVAM
A ENERGIA-MOMENTUM
NA ANÁLISE DINÂMICA NÃO-LINEAR.**

MARCELO HENRIQUE MADRUGA CARRILHO

ORIENTADOR: WILLIAM TAYLOR MATIAS SILVA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E
CONSTRUÇÃO CIVIL**

**PUBLICAÇÃO: E.DM – 007A/08
JUNHO 2008**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

APLICAÇÕES DE ALGORITMOS QUE CONSERVAM
A ENERGIA-MOMENTUM
NA ANÁLISE DINÂMICA NÃO-LINEAR

MARCELO HENRIQUE MADRUGA CARRILHO

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA
CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADA POR:



Prof. William Taylor Matias Silva, Dr. Ing (ENC-UnB)
(Orientador)



Prof. Marcos Aurélio Marques Noronha, DSc (USP)
(Examinador Externo)



Prof. Francisco Rogério Fontenelle Aragão, PhD (IF-UnB)
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, JUNHO DE 2008

FICHA CATALOGRÁFICA

CARRILHO, MARCELO HENRIQUE MADRUGA

Aplicação de algoritmos que conservam a energia-momentum na análise dinâmica não-linear [Distrito Federal] 2008.

xiii, 84p. (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2008). Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Análise dinâmica não-linear

2. Método de Newmark

3. Métodos α -generalizados

4. Não-linearidade geométrica

I. ENC/FT/UnB

II. Título

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

CARRILHO, M. H. M. (2008). Aplicação de algoritmos que conservam a energia-momentum na análise dinâmica não-linear. Dissertação de Mestrado em Estruturas, Publicação E.DM-007A/08, Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 84p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Marcelo Henrique Madruga Carrilho.

TÍTULO: Aplicação de algoritmos que conservam a energia-momentum na análise dinâmica não-linear.

GRAU: Mestre

ANO: 2008

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.



Marcelo Henrique Madruga Carrilho

Rua Sérgio Severo, 1322, Lagoa Nova

59.603-380, Natal-RN, Brasil.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao PECC, pela oportunidade de cursar o mestrado e por todo o suporte necessário para transmitir e aperfeiçoar os conhecimentos por mim adquiridos.

À CAPES, pelo suporte financeiro fornecido com o qual pude manter boas condições de estudo.

Às professoras Graciela Doz e Suzana Ávila, por terem ministrado uma das principais cadeiras objeto de estudo nessa dissertação e pela orientação no início da minha dissertação.

Ao professor William Taylor, meu orientador, por todos os ensinamentos passados e toda a confiança em mim depositada.

A Deus, por mais essa etapa da minha vida acadêmica conquistada.

Aos meus familiares por todo o esforço que fizeram e todo o apoio que me deram enquanto eu morei fora da minha cidade natal.

RESUMO

Neste trabalho estudam-se os algoritmos de integração no tempo que se baseiam nos métodos α -generalizados. Para isto, adotam-se os desenvolvimentos teóricos descritos em KUHL & CRISFIELD [1999]. Portanto, o objetivo principal é investigar o comportamento, na análise dinâmica não-linear, dos seguintes algoritmos:

1. Método de Newmark – NM;
2. Método de α -Bossak – M α B;
3. Método de α -Hilber – M α H;
4. Método α -Generalizado – M α G;
5. Método Energia-Momentum Generalizado – MEMG;

Segundo as seguintes características desejáveis:

1. Estabilidade numérica;
2. Conservação e decaimento da energia total do sistema;
3. Dissipação numérica mínima para as baixas frequências;
4. Dissipação numérica máxima para as altas frequências;
5. Convergência durante o processo iterativo;

Seguindo a estratégia acima delineada, foi analisado o problema do pêndulo simples não-linear, discretizado com o elemento bi-articulado no plano (elemento de treliça plana). Na primeira simulação numérica, assumiu-se o pêndulo rígido, enquanto que na segunda simulação, adotou-se o pêndulo elástico. Por fim, fez-se a análise numérica de um sistema composto por 5 massas concentradas conectadas por barras rígidas leves, que também foi discretizado com elementos bi-articulados no plano.

ABSTRACT

The present work studies some implicit time integration schemes developed within the framework of generalized α -methods. For that, it is adopted the theoretical formulation described in KUHL & CRISFIELD [1999]. The main aim is to investigate the performance in non-linear dynamic analysis of the following algorithms:

1. Newmark's Method;
2. Bossak's- α Method;
3. Hilber's- α Method;
4. Generalized- α Method;
5. Generalized Energy-Momentum Method;

Observing the following numerical features:

1. Numerical stability;
2. Energy-momentum decaying algorithms;
3. Minimal numerical dissipation of lower frequencies;
4. Controllable numerical dissipation of high frequencies;
5. Convergence of iterative solution strategy;

A set of examples is chosen to point out the properties of the discussed implicit time integration schemes. The non-linear pendulum problem is studied as a rigid pendulum and also as an elastic pendulum. Finally, the classical four-bar-chain system is analyzed.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.0 – Introdução	1
1.1 – Estabilidade numérica	2
1.2 – Dissipação numérica controlável	4
1.3 – Objetivos do trabalho	4
1.4 – Conteúdo do trabalho	5

CAPÍTULO 2

DESCRIÇÃO CINEMÁTICA DO ELEMENTO DE BARRA BI-ARTICULADO

2.1 – Introdução	7
2.2 – Descrição cinemática	7
2.3 – Relação entre as áreas A e A_0	8
2.4 – Formulação em 2D	11
2.5 – Formulação em 3D	12
2.6 – Medidas de deformação	14
2.7 – Energia de deformação	15
2.7.1 – Vetor de forças internas	16
2.7.2 – Matriz de rigidez tangente	16

CAPÍTULO 3

EQUAÇÃO NÃO-LINEAR DO MOVIMENTO DO ELEMENTO DE BARRA BI-ARTICULADO

3.1 – Introdução	18
3.2 – Equação não-linear do movimento	18
3.3 – O método de Newmark	19
3.4 – O método α -generalizado	22
3.5 – Introdução ao método energia-momentum	24

3.5.1 – O método energia-momentum	25
3.5.2 – O método energia-momentum generalizado	26

CAPÍTULO 4

OBTENÇÃO DO VETOR DE FORÇAS INTERNAS E DA MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE EM UM PASSO DE TEMPO DISCRETO

4.1 – Introdução	28
4.2 – Obtenção do vetor de forças internas e da matriz de rigidez tangente com o método de Newmark	28
4.3 – Obtenção do vetor de forças internas e da matriz de rigidez tangente com o método de Newmark	30
4.3.1 – Modo 1	31
4.3.2 – Modo 2	32
4.4 – Obtenção do vetor de forças internas e da matriz de rigidez tangente com o método Energia-momentum	34

CAPÍTULO 5

EXEMPLOS NUMÉRICOS

5.1 – Introdução	36
5.2 – Pêndulo rígido	39
5.3 – Pêndulo elástico	52
5.4 – Sistema com 5 massas concentradas ligadas por Barras rígidas	64

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

6.1 – Conclusões	77
6.2 – Sugestões para trabalhos futuros	78

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	80
-----------------------------------	-----------

LISTA DE TABELAS

- Tabela 5.1: Sumário dos algoritmos de integração temporal 37
- Tabela 5.2: Valores ótimos dos parâmetros de dissipação numérica em função do raio espectral ρ_∞ 37

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1.1 - Métodos de integração temporal que cumprem o critério de estabilidade (1.1) e possuem dissipação numérica para altas frequências	2
- Figura 2.1 – Movimento do elemento de barra bi-articulado no espaço	7
- Figura 2.2 – Relação entre as áreas A e A_0	9
- Figura 2.3 – Movimento do elemento de barra bi-articulado no plano	11
- Figura 3.1 – Esquema de integração de Newmark para sistemas não-lineares	26
- Figura 4.1 – Configurações do elemento de barra bi-articulado 3D nos instantes t_n e t_{n+1}	28
- Figura 4.2 – Configuração do elemento de barra bi-articulado 3D no ponto médio generalizado	30
- Figura 5.1 – Pêndulo rígido. Características geométricas e físicas	39
- Figura 5.2 – O Pêndulo Rígido. Solução com o esquema de Newmark	40
- Figura 5.3 – O Pêndulo Rígido. Solução com o esquema de Newmark	41
- Figura 5.4 – O Pêndulo Rígido. Solução com o esquema α -Bossak	42
- Figura 5.5 – O Pêndulo Rígido. Solução com o esquema α -Bossak	43
- Figura 5.6 – O Pêndulo Rígido. Solução com o esquema α -Hilber (modo 1)	45
- Figura 5.7 – O Pêndulo Rígido. Solução com o esquema α -Hilber (modo 1)	46
- Figura 5.8 – O Pêndulo Rígido. Solução com o esquema α -generalizado (modo 1)	47
- Figura 5.9 – O Pêndulo Rígido. Solução com o esquema α -generalizado (modo 1)	48
- Figura 5.10 – O Pêndulo Rígido. Solução com o esquema energia-momentum generalizado	50

- Figura 5.11 – O Pêndulo Rígido. Solução com o esquema energia-momentum generalizado	51
- Figura 5.12 – O pêndulo elástico. Características geométricas e físicas	52
- Figura 5.13 – O Pêndulo Elástico. Solução com o esquema de Newmark	53
- Figura 5.14 – O Pêndulo Elástico. Solução com o esquema de Newmark	54
- Figura 5.15 – O Pêndulo Elástico. Solução com o esquema α -Bossak	56
- Figura 5.16 – O Pêndulo Elástico. Solução com o esquema α -Bossak	57
- Figura 5.17 – O Pêndulo Elástico. Solução com o esquema α -Hilber (modo 1)	58
- Figura 5.18 – O Pêndulo Elástico. Solução com o esquema α -Hilber (modo 1)	59
- Figura 5.19 – O Pêndulo Elástico. Solução com o esquema α -generalizado (modo 1)	60
- Figura 5.20 – O Pêndulo Elástico. Solução com o esquema α -generalizado (modo 1)	61
- Figura 5.21 – O Pêndulo Elástico. Solução com o esquema energia-momentum generalizado	62
- Figura 5.22 – O Pêndulo Elástico. Solução com o esquema energia-momentum generalizado	63
- Figura 5.23 – Sistema com 5 massas concentradas ligadas barras rígidas e leves	64
- Figura 5.24 – Sistema com 5 massas concentradas. Solução com o esquema de Newmark	66
- Figura 5.25 – Sistema com 5 massas concentradas. Solução com o esquema de Newmark	67
- Figura 5.26 – Sistema com 5 massas concentradas. Solução com o esquema α -Bossak	68
- Figura 5.27 – Sistema com 5 massas concentradas. Solução com o esquema α -Bossak	69

- Figura 5.28 – Sistema com 5 massas concentradas. Solução com o esquema α -Hilber (modo 1) 70
- Figura 5.29 – Sistema com 5 massas concentradas. Solução com o esquema α -Hilber (modo 1) 71
- Figura 5.30 – Sistema com 5 massas concentradas. Solução com o esquema α -generalizado (modo 1) 72
- Figura 5.31 – Sistema com 5 massas concentradas. Solução com o esquema α -generalizado (modo 1) 73
- Figura 5.32 – Sistema com 5 massas concentradas. Solução com o esquema energia-momentum generalizado 74
- Figura 5.33 – Sistema com 5 massas concentradas. Solução com o esquema energia-momentum generalizado 75

LISTA DE SÍMBOLOS

U_n	- Energia de deformação no passo de tempo “ n ”
W_{ext}	- Trabalho das forças externas
Δt	- Passo de tempo
α_m, α_f	- Parâmetros de integração no tempo
C_0	- Configuração <i>inicial</i> ou de <i>referência</i>
C	- Configuração <i>atual</i> ou <i>deformada</i>
\mathbf{X}	- Coordenadas materiais dos nós do elemento bi-articulado
\mathbf{x}	- Coordenadas espaciais dos nós do elemento bi-articulado
$\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}$	- Vetor de deslocamentos, velocidades e acelerações nodais
l_0	- Longitude do elemento de barra na configuração inicial
l	- Longitude do elemento de barra na configuração deformada
A_0	- Área da seção transversal do elemento de barra na configuração inicial
A	- Área da seção transversal do elemento de barra na configuração deformada
ρ_0	- Densidade do elemento de barra na configuração inicial
ρ	- Densidade do elemento de barra na configuração deformada
V_0	- Volume do elemento de barra na configuração inicial
V	- Volume do elemento de barra na configuração deformada
T	- Força de tração aplicada na barra
ν	- Coeficiente de Poisson
ε	- Deformação
c_x, c_y, c_z	- Co-senos diretores de elemento na configuração deformada
σ_x	- Tensão axial associada à deformação nominal ε_x
\mathbf{p}	- Vetor de forças externas
δ_V	- Campo de deslocamentos virtuais cinematicamente admissíveis
E	- Módulo de elasticidade longitudinal
N	- Esforço axial
\mathbf{K}	- Matriz de rigidez tangente
\mathbf{f}	- Vetor de forças internas
\mathbf{I}	- Matriz identidade

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1 – Introdução

No âmbito do regime linear, a noção de estabilidade implica que a lei de conservação da energia impõe um limite ao crescimento desmedido da solução. Por outro lado, em um problema não-linear, o conceito de linearização da equação do movimento no tempo, não necessariamente implica na conservação da energia. Normalmente, ocorre um crescimento patológico da energia em algumas situações, para algoritmos que são incondicionalmente estáveis em regime linear. Um exemplo deste caso ocorre ao utilizar-se a regra do trapézio ou o método de Newmark, com $\beta = \frac{1}{4}$ e $\gamma = \frac{1}{2}$ na solução de um pêndulo rígido não-linear (grandes translações e rotações de corpo rígido). Diante deste fato, pode-se colocar em evidência se os critérios de estabilidade adotados na análise linear podem ser utilizados em uma análise não-linear. Desta maneira, uma condição suficiente na análise não-linear é a conservação ou o decremento da energia potencial total do sistema em um passo de tempo discreto. Este critério pode ser escrito como (BELYTSCHKO & SCHOEBERLE [1975]):

$$U_{n+1} - U_n + K_{n+1} - K_n \leq W_{ext} \quad (1.1)$$

onde U_{n+1} e U_n representam a energia de deformação no passo de tempo atual $n + 1$ e anterior n , respectivamente. K_{n+1} e K_n denotam a energia cinética e W_{ext} representa o trabalho das forças externas dentro do passo de tempo, $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. Um algoritmo que cumpra esta condição pode ser estável ainda que possa não convergir em situações onde ocorre um crescimento desmedido da energia cinética. Para superar este problema, é necessário introduzir parâmetros no algoritmo de integração temporal que produzam dissipação da energia. Portanto, estes parâmetros introduzem uma dissipação numérica para as respostas de sistemas em altas frequências.

Na figura a seguir, são mostrados cronologicamente os principais métodos de integração temporal desenvolvidos com a finalidade de controlar as dissipações numéricas, em altas frequências, nos problemas de análise dinâmica não-linear.

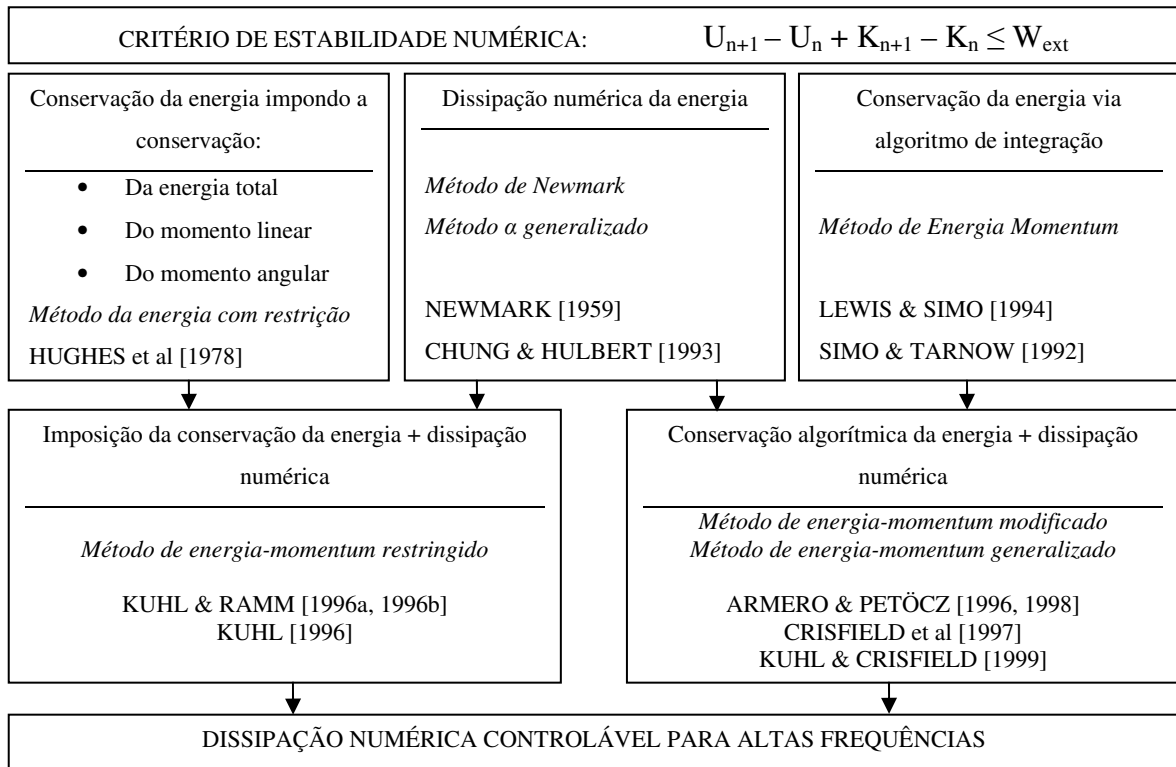


Figura 1.1 : Métodos de integração temporal que cumprem o critério de estabilidade (1.1) e possuem dissipação numérica para altas frequências

1.1- Estabilidade numérica

Na Figura 1.1 se detalham três grupos de algoritmos de integração no tempo que cumprem o critério energético descrito em (1.1), cujas principais características são:

- 1- Conservação da energia através de restrições;
- 2- Dissipação numérica;
- 3- Conservação algorítmica da energia.

O primeiro grupo foi proposto por HUGHES ET al [1978]. Estes algoritmos cumprem o critério (1.1) impondo a conservação da energia potencial total, do momento

linear e do momento angular. São denominados de *Método da energia com restrição*, e tratam-se de uma extensão da *regra do trapézio* com a restrição imposta através dos multiplicadores de Lagrange. KUHLMANN & RAMM [1996a, 1996b] observaram que este algoritmo conserva a energia total, apesar de não ter convergido para alguns casos com respostas em altas frequências. Estes autores detectaram problemas de convergência na reprodução do fenômeno *snap buckling* em cascas cilíndricas.

O segundo grupo, utiliza a dissipação numérica para cumprir a inequação (1.1). Tratam-se de algoritmos que possuem dissipação controlável para altas frequências nas análises dinâmicas lineares. Na referência CRISFIELD et al [1996a] são apresentadas algumas das desvantagens desse grupo de algoritmos quando aplicados na análise dinâmica não-linear. Eles não garantem a dissipação da energia utilizando os mesmos parâmetros da análise linear. Nestes algoritmos, a obtenção de um passo de tempo estável com uma escolha arbitrária dos parâmetros de integração ainda é pendente de solução.

Finalmente, o último grupo de algoritmos proposto por SIMO & TARNOW [1992a], é denominado como *Método energia-momentum*. Trata-se do método mais popular entre aqueles que garantem um passo de tempo estável ao longo do processo incremental-iterativo. Este método resulta de uma simples modificação da *Regra do ponto médio*, através da substituição do tensor de tensões avaliado no ponto médio, pela média deste tensor calculada nos passos prévio e atual de tempo, garantindo assim a conservação algorítmica da energia. O *Método energia-momentum* possui uma precisão de segunda ordem, além de conservar a energia total, o momento linear e o momento angular do sistema. Ao que parece, este método é o mais adequado para as análises dinâmicas não-lineares de estruturas.

Recentemente, ARMERO & ROMERO [2001a], [2001b], [2003] e ROMERO & ARMERO [2002]; propuseram estratégias de integração que se baseiam na conservação de algumas propriedades geométricas de sistemas Hamiltonianos simétricos, que conservam a energia total e o momento angular. Na referência HAIRER et al [2002] descreve-se detalhadamente o tratamento matemático e numérico dessas estratégias.

1.2- Dissipação numérica controlável

Nos problemas práticos de engenharia, os esquemas de integração no tempo são utilizados na análise de sistemas estruturais com múltiplos graus de liberdade. Para este tipo de problema, que tem comportamento linear, a dissipação numérica é uma propriedade essencial dos algoritmos de integração. Em 1959, Newmark incluiu a dissipação numérica para as frequências mais altas utilizando passos de tempo moderados. A desvantagem dessa inclusão é a perda de precisão de segunda ordem do algoritmo. Entretanto, nos anos 70, HILBER et al [1977] propôs uma modificação que recuperava a precisão de segunda ordem. Este algoritmo foi denominado de *Método α -Hilber*. Este método combina a estabilidade incondicional, a precisão de segunda ordem e a dissipação numérica para altas frequências na análise dinâmica linear.

Por outro lado, para superar os obstáculos apresentados pelo *método de energia com restrição*, KUHL & RAMM [1996a, 1996b] combinaram a estratégia de Newmark, que apresenta uma dissipação numérica arbitrária, com a imposição de conservação da energia, do momento linear e angular do *método de energia com restrição*. Esta modificação resultou em um algoritmo que apresenta uma dissipação numérica controlável para as altas frequências, assim como, uma dissipação numérica mínima para as frequências mais baixas; características que se apresentam no *método α -generalizado* proposto por CHUNG & HULBERT [1993].

1.3- Objetivos do trabalho

Tendo em conta os comentários dos itens anteriores, um esquema de integração no tempo para análise dinâmica não-linear deve apresentar as seguintes características:

- 1- Dissipação numérica mínima para frequências baixas;
- 2- Dissipação numérica máxima para frequências altas;
- 3- Conservação das energias de deformação e cinética;
- 4- Conservação dos momentos linear e angular.

Portanto, adotando-se esquemas de integração temporal que mantêm as propriedades ótimas de dissipação numérica, o objetivo deste trabalho é estudar a performance, quanto à conservação da energia potencial total e dos momentos linear e angular, dos seguintes algoritmos:

- 1- Método de Newmark – NM;
- 2- Método α -Hilber – M α H;
- 3- Método α -Bossak - M α B;
- 4- Método α -Generalizado – M α G;
- 5- Método Energia-momentum Generalizado – MEMG;

Além disso, nos métodos *α -generalizados* será feita uma análise espectral para a obtenção de valores ótimos para os parâmetros de integração $\alpha_m, \alpha_f, \beta$ e γ , com o objetivo de propor passos de tempo que possam garantir a estabilidade do esquema de integração e a dissipação numérica para frequências mais altas em regime não-linear.

Estes algoritmos serão aplicados para obtenção das respostas dinâmicas não-lineares, de sistemas discretizados por elementos de barra articulados tanto no plano (2D), quanto no espaço (3D). Utilizaremos a formulação Lagrangiana Total, para descrever o movimento do elemento de barra, o qual pode estar sujeito a grandes translações e grandes rotações de corpo rígido. Serão adotadas a medida de deformação de engenharia e as propriedades mecânicas do material de Saint Venant Kirchhoff. A formulação do elemento aqui descrito, para outros tipos de deformações, encontra-se detalhada na referência SILVA [2001].

1.4- Conteúdo do trabalho

Para se concretizar os objetivos enunciados no item anterior, este trabalho se estrutura em seis capítulos. No capítulo 2, descreve-se a cinemática de um elemento de barra articulado 2D e 3D, utilizando a formulação Lagrangiana Total. Obtém-se o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente levando em conta os efeitos da não linearidade geométrica. No capítulo 3, discretiza-se no tempo a equação do movimento do elemento de barra bi-articulado utilizando os métodos *α -generalizados*. Expande-se a

equação de movimento discreta através da Série de Taylor até os termos de primeira ordem, obtendo-se uma matriz iterativa que leva em consideração os efeitos elásticos e inerciais. No capítulo 4, descreve-se detalhadamente o procedimento numérico para a obtenção do vetor de forças internas e da matriz de rigidez tangente em um passo discreto. No capítulo 5, apresentam-se os resultados das simulações numéricas feitas com o pêndulo rígido, o pêndulo elástico e um sistema composto por 5 massas concentradas conectadas por barras rígidas e leves. Finalmente, no capítulo 6, apresentam-se as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

DESCRIÇÃO CINEMÁTICA DO ELEMENTO DE BARRA BI-ARTICULADO

2.1- Introdução

Neste capítulo descreve-se a cinemática de um elemento finito bi-articulado, tanto no plano (2D) quanto no espaço (3D), utilizando-se a formulação Lagrangeana Total. Este elemento está sujeito a grandes translações e grandes rotações de corpo rígido, porém, a magnitude das deformações é infinitesimal. Adota-se como medida de deformação a deformação de engenharia e seu par de tensão energeticamente conjugado. Admite-se a existência de um funcional de energia de deformação a partir do qual se obtém o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente através de derivadas direcionais de primeira e segunda ordem em função dos deslocamentos nodais.

2.2- Descrição cinemática

Seja um elemento finito de barra bi-articulado que se move no espaço conforme mostra-se na Figura 2.1.

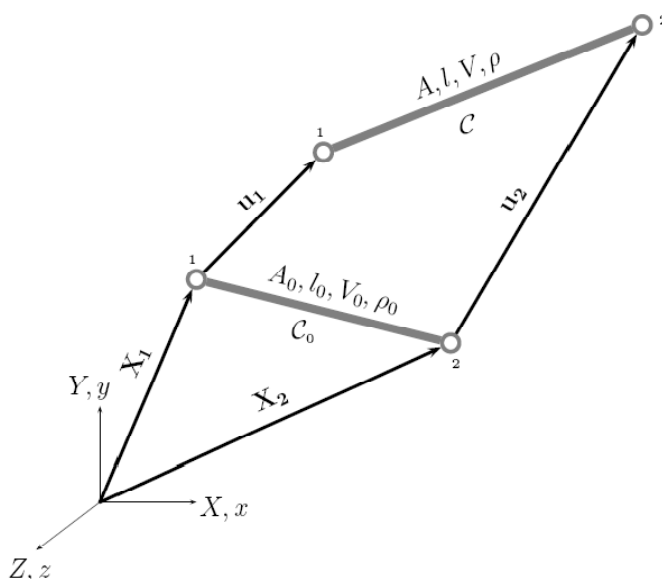


Figura 2.1: Movimento do elemento de barra bi-articulado no espaço.

Define-se C_0 como a configuração *inicial* ou de *referência* cuja posição é dada pelas coordenadas materiais \mathbf{X} dos nós do elemento. Por outra parte, define-se C como a configuração *atual* ou *deformada*, cujo vetor de coordenadas espaciais \mathbf{x} dos nós do elemento define sua posição. O movimento do elemento da configuração C_0 à configuração C se expressa através do vetor de deslocamentos nodais \mathbf{u} . A relação entre os vetores \mathbf{X} , \mathbf{x} e \mathbf{u} é dada pela seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

ou em forma vetorial como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \quad (2.2)$$

Na configuração de *referência* C_0 denota-se a longitude do elemento como l_0 , a área da seção transversal como A_0 e a densidade como ρ_0 . O volume nesta configuração se expressa como $V_0 = A_0 l_0$. Por outra parte, l denota a longitude do elemento na configuração *atual* C . A é a área, ρ expressa a densidade e o volume é dado por $V = Al$.

2.3- Relação entre as áreas A e A_0

Considere que o elemento bi-articulado indeformado possa ser representado por um prisma de comprimento \hat{l} e uma seção transversal quadrada de área $\hat{A} = a^2$, conforme mostra-se na Figura 2.2.

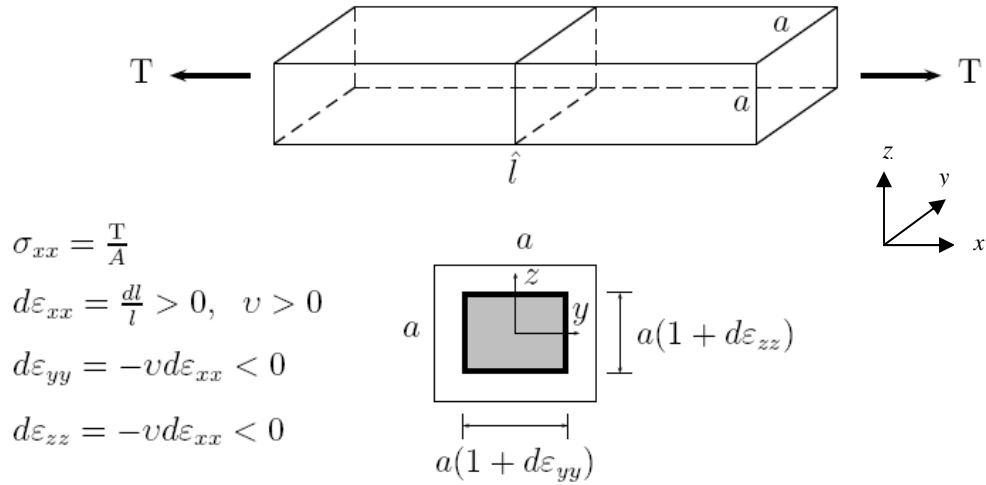


Figura 2.2 – Relação entre as áreas A e A_0 .

Assume-se que após a aplicação de uma força de tração T , tanto o elemento quanto a seção transversal deformam-se de maneira uniforme. As deformações nas direções dos eixos y e z podem ser calculadas em função da deformação no eixo x , através do coeficiente de Poisson ν , conforme é mostrado na Figura 2.2. A relação entre as áreas A e A_0 é obtida após um breve desenvolvimento algébrico, descrito a seguir:

$$\hat{A} = a^2$$

$$\bar{A} = a(1 + d\varepsilon_{yy})a(1 + d\varepsilon_{zz})$$

$$\bar{A} = a^2(1 + d\varepsilon_{yy})(1 + d\varepsilon_{zz})$$

$$\bar{A} = a^2(1 + d\varepsilon_{yy} + d\varepsilon_{zz} + d\varepsilon_{yy}d\varepsilon_{zz})$$

$$\bar{A} = a^2(1 - \nu d\varepsilon_{xx} - \nu d\varepsilon_{xx} + \nu^2 d\varepsilon_{xx}^2)$$

desprezando os termos de segunda ordem,

$$\bar{A} = a^2(1 - 2vd\varepsilon_{xx}) = \hat{A}(1 - 2vd\varepsilon_{xx})$$

$$d\hat{A} = \bar{A} - \hat{A} = \hat{A}(1 - 2vd\varepsilon_{xx}) - \hat{A} = -2\hat{A}vd\varepsilon_{xx}$$

$$\frac{d\hat{A}}{\hat{A}} = -2vd\varepsilon_{xx} = -2v\frac{d\hat{l}}{\hat{l}} \quad (2.3)$$

$$\int_{A_0}^A \frac{d\hat{A}}{\hat{A}} = -2v \int_{l_0}^l \frac{d\hat{l}}{\hat{l}} \rightarrow \ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = -2v \ln\left(\frac{l}{l_0}\right)$$

$$\frac{A}{A_0} = \left(\frac{l_0}{l}\right)^{2v}$$

A relação entre os demais parâmetros é dada pelo princípio da conservação da massa que permite escrever que: $\rho_0 l_0 A_0 = \rho l A$. Levando em consideração a Equação (2.3), reescreve-se este princípio como:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{l}{l_0}\right)^{1-2v} \begin{cases} \text{se } v = 0 \rightarrow \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{l}{l_0} \rightarrow A = A_0 \\ \text{se } v = 1/2 \rightarrow \frac{\rho_0}{\rho} = 1 \rightarrow V = V_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

onde neste trabalho adota-se $v=1/2$, portanto, ao longo do movimento do elemento seu volume mantém-se constante.

A relação entre A e A_0 é necessária quando se utiliza uma família de deformações descritas em coordenadas espaciais para o cálculo do vetor de forças internas e da matriz de rigidez tangente. Para maiores detalhes, consultar a referência SILVA [2001].

2.4 - Formulação em 2D

No plano (X, Y) a longitude do elemento nas configurações C_0 e C se escreve como:

$$\begin{cases} l_0 = \sqrt{(X_{21})^2 + (Y_{21})^2} \\ l = \sqrt{(X_{21} + u_{21})^2 + (Y_{21} + v_{21})^2} \end{cases} \quad (2.5)$$

Da interpretação geométrica da Figura 2.3, se definem as seguintes relações:

$$\begin{cases} X_{21} = X_2 - X_1 \\ Y_{21} = Y_2 - Y_1 \\ u_{21} = u_2 - u_1 \\ v_{21} = v_2 - v_1 \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\cos\theta = \frac{X_{21} + u_{21}}{l} = \frac{x_{21}}{l} \quad , \quad \sin\theta = \frac{Y_{21} + v_{21}}{l} = \frac{y_{21}}{l} \quad (2.7)$$

onde θ é a inclinação do eixo baricêntrico do elemento na configuração C em relação às coordenadas globais (X, Y) . Nas equações (2.5), (2.6) e (2.7) se definem as variáveis cinemáticas que expressam o movimento do elemento de barra articulado 2D.

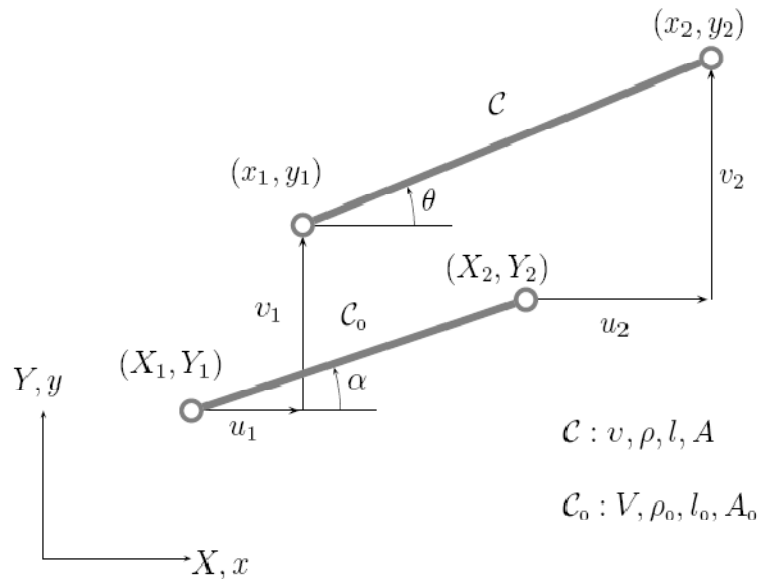


Figura 2.3 – Movimento do elemento de barra bi-articulado no plano.

O vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente do elemento são obtidos, respectivamente, através das derivadas primeiras e segundas do funcional de energia de deformação em relação aos deslocamentos nodais. Portanto, a derivada primeira da longitude do elemento l em relação aos deslocamentos nodais \mathbf{u} , levando em consideração as equações (2.5) e (2.7), se expressa como:

$$\frac{\partial l}{\partial u_2} = -\frac{\partial l}{\partial u_1} = \cos\theta \quad , \quad \frac{\partial l}{\partial v_2} = -\frac{\partial l}{\partial v_1} = \sen\theta \quad (2.8)$$

cuja forma vetorial é dada por:

$$\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} = \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sen\theta \\ \cos\theta \\ \sen\theta \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Utilizando as equações (2.5), (2.7) e (2.8) e a relação $\sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$, se obtém a derivada segunda de l em relação a \mathbf{u} como:

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \mathbf{u}^2} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} \sen^2\theta & -\sen\theta\cos\theta & -\sen^2\theta & \sen\theta\cos\theta \\ -\sen\theta\cos\theta & \cos^2\theta & \sen\theta\cos\theta & -\cos^2\theta \\ -\sen^2\theta & \sen\theta\cos\theta & \sen^2\theta & -\sen\theta\cos\theta \\ \sen\theta\cos\theta & -\cos^2\theta & -\sen\theta\cos\theta & \cos^2\theta \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

2.5 - Formulação em 3D

Na Figura 2.1 mostram-se as variáveis cinemáticas que definem as configurações *inicial* e *deformada* do elemento bi-articulado 3D. Analogamente ao anteriormente apresentado para o elemento de barra bi-articulado no plano, a longitude deste elemento 3D nas configurações C e C_0 se escreve como:

$$\begin{cases} l_0 = \sqrt{(X_{21})^2 + (Y_{21})^2 + (Z_{21})^2} \\ l = \sqrt{(X_{21} + u_{21})^2 + (Y_{21} + v_{21})^2 + (Z_{21} + w_{21})^2} \end{cases} \quad (2.11)$$

onde:

$$\begin{cases} X_{21} = X_2 - X_1 \\ Y_{21} = Y_2 - Y_1 \\ Z_{21} = Z_2 - Z_1 \\ u_{21} = u_2 - u_1 \\ v_{21} = v_2 - v_1 \\ w_{21} = w_2 - w_1 \end{cases} \quad (2.12)$$

Por outro lado, os co-senos diretores do elemento, na configuração C , em relação ao sistema de coordenadas globais (X,Y,Z) se escrevem como:

$$\begin{cases} \cos\theta_X = c_X = \frac{X_{21} + u_{21}}{l} = \frac{x_{21}}{l} \\ \cos\theta_Y = c_Y = \frac{Y_{21} + v_{21}}{l} = \frac{y_{21}}{l} \\ \cos\theta_Z = c_Z = \frac{Z_{21} + w_{21}}{l} = \frac{z_{21}}{l} \end{cases} \quad (2.13)$$

Nas equações (2.11), (2.12) e (2.13); foram definidas as variáveis cinemáticas que expressam o movimento do elemento de barra bi-articulado 3D. A partir delas, se obtém o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente em função do tipo de deformação que se adote.

Como foi comentado anteriormente, é necessário calcular as derivadas primeira e segunda da longitude do elemento na configuração C em relação aos deslocamentos nodais \mathbf{u} . Obtém-se a primeira derivada através das equações (2.11) e (2.13), da seguinte maneira:

$$\frac{\partial l}{\partial u_2} = -\frac{\partial l}{\partial u_1} = \cos\theta_X \quad , \quad \frac{\partial l}{\partial v_2} = -\frac{\partial l}{\partial v_1} = \cos\theta_Y \quad , \quad \frac{\partial l}{\partial w_2} = -\frac{\partial l}{\partial w_1} = \cos\theta_Z \quad (2.14)$$

cuja forma vetorial se expressa como:

$$\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} = \begin{pmatrix} -\cos\theta_X \\ -\cos\theta_Y \\ -\cos\theta_Z \\ \cos\theta_X \\ \cos\theta_Y \\ \cos\theta_Z \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Utilizando as equações (2.11), (2.13), (2.14) e a relação $c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 = 1$, se obtém a segunda derivada de l em relação a \mathbf{u} da seguinte maneira:

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \mathbf{u}^2} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} (c_y^2 + c_z^2) & -c_x c_y & -c_x c_z & -(c_y^2 + c_z^2) & c_x c_y & c_x c_z \\ -c_x c_y & (c_x^2 + c_z^2) & -c_y c_z & c_x c_y & -(c_x^2 + c_z^2) & c_y c_z \\ -c_x c_z & -c_y c_z & (c_x^2 + c_y^2) & c_x c_z & c_y c_z & -(c_x^2 + c_y^2) \\ -(c_y^2 + c_z^2) & c_x c_y & c_x c_z & (c_y^2 + c_z^2) & -c_x c_y & -c_x c_z \\ c_x c_y & -(c_x^2 + c_z^2) & c_y c_z & -c_x c_y & (c_x^2 + c_z^2) & -c_y c_z \\ c_x c_z & c_y c_z & -(c_x^2 + c_y^2) & -c_x c_z & -c_y c_z & (c_x^2 + c_y^2) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

2.6 – Medidas de deformação

Diferentes medidas de deformação podem ser adotadas ao comparar-se as longitudes do elemento nas configurações atual e de referência. Portanto, o quociente entre as longitudes do elemento em C e C_0 se expressa como:

$$\lambda = \frac{l}{l_0} \quad (2.17)$$

Na mecânica dos meios contínuos se definem distintas medidas de deformações em função do parâmetro acima definido. A correspondente definição matemática é dada por:

$$\begin{cases} \frac{1}{m}(\lambda^m - 1) & , \quad m \neq 0 \\ \ln \lambda & , \quad m = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

onde m é um número inteiro (positivo ou negativo). Quando se atribui à variável m um valor positivo, se escreve a expressão da deformação em função das coordenadas materiais \mathbf{X} . Entretanto, quando a variável m assume valores negativos, se escreve a expressão da deformação em função das coordenadas espaciais \mathbf{x} . Como está se usando a formulação Lagrangiana Total para descrever a cinemática do elemento bi-articulado, naturalmente, a deformação deste elemento será escrita em coordenadas materiais.

Neste trabalho, assume-se que $m = 1$, ou seja, adota-se a deformação *nominal* ou de *engenharia*, que se escreve como:

$$\varepsilon_X = \frac{l - l_0}{l_0} = \lambda - 1 \quad (2.19)$$

A derivada primeira desta deformação em relação aos deslocamentos nodais é dada por:

$$\frac{\partial \varepsilon_X}{\partial \mathbf{u}} = \frac{1}{l_0} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \quad (2.20)$$

Por outro lado, a derivada segunda se escreve como:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_X}{\partial \mathbf{u}^2} = \frac{1}{l_0} \frac{\partial^2 l}{\partial \mathbf{u}^2} \quad (2.21)$$

Para o elemento de barra bi-articulado 2D se utilizam as expressões dadas em (2.9) e (2.10) nas equações (2.20) e (2.21), respectivamente. Enquanto que para o elemento de barra bi-articulado 3D se utilizam as expressões dadas em (2.15) e (2.16) nas equações (2.20) e (2.21), respectivamente. Para as demais medidas de deformações se adota o mesmo procedimento. Para maiores detalhes, ver a referência SILVA [2001].

2.7- Energia de deformação

No item anterior, assumiu-se a deformação de engenharia, que é escrita em coordenadas materiais de acordo com (2.19). Naturalmente, surge uma dúvida a respeito de qual medida de tensão adotar. A medida de tensão associada à medida de deformação nominal (ou de engenharia) deve cumprir, por exemplo, o princípio dos trabalhos virtuais para obter o equilíbrio do elemento de barra bi-articulado. A relação tensão-deformação que cumpre este princípio denomina-se de par *energeticamente conjugado*. Escreve-se o princípio dos trabalhos virtuais, na configuração de referência, como:

$$\int_{V_0} \sigma_X \delta \varepsilon_X dV_0 = \mathbf{p}^T \delta \mathbf{u} \quad \text{em } Co \quad (2.22)$$

onde σ_X é uma tensão axial associada à deformação nominal ε_X , \mathbf{p} é o vetor de forças externas e δ_V é um campo de deslocamentos virtuais cinematicamente admissíveis. Como

está se assumindo que o elemento de barra bi-articulado trabalhe em regime de deformações infinitesimais, é aceitável adotar uma relação linear entre o par conjugado de tensão e deformação, ou seja, $\sigma_X = E \varepsilon_X$, onde E é o módulo de elasticidade longitudinal. Considerando-se esta hipótese, escreve-se a energia de deformação do elemento na configuração de referência como:

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_0^{l_0} EA_0 \varepsilon_X^2 dX \quad \text{em } C_0 \quad (2.23)$$

2.7.1- Vetor de forças internas

Obtém-se o vetor de forças internas através da derivada primeira do funcional da energia de deformação em relação aos deslocamentos nodais. Portanto, derivando a expressão da equação (2.23), chega-se a:

$$\mathbf{f} = \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{u}} = \frac{1}{2} \int_0^{l_0} 2EA_0 \varepsilon_X \frac{\partial \varepsilon_X}{\partial \mathbf{u}} dX = \int_0^{l_0} EA_0 \varepsilon_X \frac{\partial \varepsilon_X}{\partial \mathbf{u}} dX \quad (2.24)$$

Sendo o esforço axial, na configuração C_0 , dado por $N_0 = EA_0 \varepsilon_X$, e, levando em consideração a equação (2.20), o vetor de forças internas pode ser reescrito como:

$$\mathbf{f} = N_0 \frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \quad (2.25)$$

2.7.2- Matriz de rigidez tangente

Obtém-se a matriz de rigidez tangente através da derivada segunda do funcional da energia de deformação, definida em C_0 , em relação aos deslocamentos nodais. Portanto, derivando-se duas vezes a equação (2.23), chega-se a:

$$\mathbf{K} = \frac{\partial^2 U_0}{\partial \mathbf{u}^2} = \int_0^{l_0} EA_0 \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_X}{\partial \mathbf{u}} \right) \otimes \left(\frac{\partial \varepsilon_X}{\partial \mathbf{u}} \right) + \varepsilon_X \frac{\partial^2 \varepsilon_X}{\partial \mathbf{u}^2} \right] dX \quad (2.26)$$

onde \otimes é o produto diádico ou produto aberto. Levando em consideração as equações

(2.20) e (2.21), o esforço axial $N_0 = EA_0 \varepsilon_X$ e a definição do vetor de forças internas dada em (2.25). Após efetuar-se a integração da equação (2.26), reescreve-se a expressão da matriz de rigidez tangente como:

$$\mathbf{K} = \frac{EA_0}{l_0} \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right) \otimes \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right) + N_0 \frac{\partial^2 l}{\partial \mathbf{u}^2} \quad (2.27)$$

Observe que, o primeiro termo do lado direito da expressão acima é denominado de matriz de rigidez *material*; enquanto que o segundo termo representa a matriz de rigidez *geométrica*.

CAPÍTULO 3

EQUAÇÃO NÃO-LINEAR DO MOVIMENTO DO ELEMENTO DE BARRA BI-ARTICULADO

3.1- Introdução

Neste capítulo discretiza-se, no tempo, a equação não-linear do movimento do elemento de barra bi-articulado, utilizando os métodos α -generalizados como uma extensão do método de Newmark. Como trata-se de um problema não-linear, a forma discreta da equação do movimento gera um vetor de forças residuais ou forças não-equilibradas. Para dissipar as forças residuais adota-se uma estratégia de solução incremental-iterativa. Portanto, expande-se em série de Taylor a expressão das forças residuais até os termos de primeira ordem, obtendo-se uma matriz iterativa que leva em consideração os efeitos elásticos e inerciais.

3.2- Equação não-linear do movimento

Para escrever a equação do movimento se consideram as forças inerciais, internas e externas dependentes do tempo. Não se consideram as forças oriundas do amortecimento viscoso. As forças internas são provenientes das deformações elásticas. Por outro lado, assume-se que as forças externas não dependem dos deslocamentos, ou seja, trata-se de um sistema conservativo. Portanto, o princípio dos trabalhos virtuais (PTV), na configuração deformada, descrito em coordenadas Lagrangiana se expressa como:

$$\frac{1}{2}\rho_0 A_0 l_0 \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} + A_0 l_0 \delta \varepsilon E \varepsilon = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} \quad (3.1)$$

Supondo-se a deformação infinitesimal ou de engenharia, como descrito no Capítulo 2, sua variação virtual em relação aos deslocamentos nodais se escreve como:

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} \rightarrow \delta\varepsilon = \frac{\delta l}{l_0} \rightarrow \delta l = \left(\frac{\delta l}{\delta \mathbf{u}} \right)^T \delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}^T \frac{\delta l}{\delta \mathbf{u}} \rightarrow \delta\varepsilon = \frac{1}{l_0} \delta \mathbf{u}^T \frac{\delta l}{\delta \mathbf{u}} \quad (3.2)$$

Substituindo a variação virtual da deformação na expressão do PTV, se obtém a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho_0 A_0 l_0 \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} + E A_0 \varepsilon \delta \mathbf{u}^T \frac{\delta l}{\delta \mathbf{u}} &= \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} \\ \delta \mathbf{u}^T \left(\frac{1}{2} \rho_0 A_0 l_0 \mathbf{I}_6 \ddot{\mathbf{u}} \right) + \delta \mathbf{u}^T \left(E A_0 \varepsilon \frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right) &= \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Como a variação virtual dos deslocamentos é arbitrária, aplicando o PTV na equação (3.3), obtém-se a equação não-linear do movimento descrita como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{u}(t), t) = \mathbf{p}(t) \quad (3.4)$$

onde \mathbf{M} é a matriz de massa e \mathbf{f} é o vetor de forças internas que são definidos pelas seguintes expressões, respectivamente:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} \rho_0 A_0 l_0 \mathbf{I}_6 \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}(t), t) = E A_0 \varepsilon(\mathbf{u}(t), t) \frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}(t), t) \quad (3.5)$$

Observe que a massa está concentrada nos nós do elemento. Por outro lado, o vetor de forças internas depende dos deslocamentos através da deformação e dos co-senos diretores do elemento definidos na configuração deformada. Portanto, as componentes do vetor de forças internas expressam uma relação não-linear em relação aos deslocamentos.

3.3- O método de Newmark

Neste item, discretiza-se no tempo a equação de movimento dada em (3.4). Utilizando-se o método de Newmark como procedimento básico. No esquema de integração de Newmark, se introduzirão os métodos α -generalizado, energia-momentum e energia-momentum generalizado. Cabe comentar que, na literatura técnica, encontram-se outras metodologias distintas das propostas neste trabalho. Por exemplo, para maiores

detalhes, consultar ARMERO & ROMERO [2001a], [2001b], [2003], ROMERO & ARMERO [2002]. Neste trabalho, segue-se a metodologia proposta por KUHL & CRISFIELD [1999], KUHL & RAMM [1996a], [1996b], [1998], [1999].

De acordo com o método de Newmark, a velocidade e o deslocamento no passo de tempo $n + 1$ se descrevem como:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{u}}_n + (1 - \gamma)\Delta t\ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma\Delta t\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \\ \mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{u}_n + \Delta t\dot{\mathbf{u}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2\ddot{\mathbf{u}}_n + \beta\Delta t^2\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}\end{aligned}\quad (3.6)$$

Observe que para $\gamma = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{4}$, onde $0 < \gamma, \beta < 1$, obtém-se o método da regra do trapézio, também conhecido como o método do ponto médio. Estes parâmetros estão relacionados com a precisão e estabilidade do método. Para maiores detalhes, consultar o capítulo 7 da referência GERÁRDIN & RIXEN [1997] e o capítulo 9 da referência HUGHES [1987]).

Da equação (3.6), define-se a predição da velocidade e do deslocamento, para o instante $n + 1$, em função das variáveis conhecidas no passo de tempo anterior n , como:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^* &= \dot{\mathbf{u}}_n + (1 - \gamma)\Delta t\ddot{\mathbf{u}}_n \\ \mathbf{u}_{n+1}^* &= \mathbf{u}_n + \Delta t\dot{\mathbf{u}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2\ddot{\mathbf{u}}_n\end{aligned}\quad (3.7)$$

Utilizando as variáveis preditas $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^*$ e \mathbf{u}_{n+1}^* , a velocidade e o deslocamento no passo de tempo $n + 1$ se reescrevem como:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^* + \gamma\Delta t\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \\ \mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{u}_{n+1}^* + \beta\Delta t^2\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}\end{aligned}\quad (3.8)$$

Através da Equação (3.8), pode-se expressar a aceleração e a velocidade, no passo de tempo $n + 1$, em função de \mathbf{u}_{n+1} e $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}$, do seguinte modo:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^* + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}^*) \\ \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} &= \frac{1}{\beta\Delta t^2} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}^*)\end{aligned}\quad (3.9)$$

Desta maneira, a forma discreta da equação não-linear do movimento, dada em (3.4), no passo de tempo $n + 1$ se expressa como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{p}_{n+1}\quad (3.10)$$

Uma vez definida a aceleração em função do deslocamento através da equação (3.9b), pode-se reescrever a equação de movimento da seguinte maneira:

$$\frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{M}(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}^*) + \mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{p}_{n+1}\quad (3.11)$$

Como se trata de um problema não-linear, sua forma discreta gera forças desequilibradas ou residuais que se escrevem como:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}) = \frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{M}(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}^*) + \mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{p}_{n+1} \neq 0\quad (3.12)$$

Para dissipar as forças residuais, é necessário empregar uma estratégia de solução incremental-iterativa ao longo do tempo. Portanto, expandindo em série de Taylor até os termos de primeira ordem o resíduo na iteração k , obtém-se o resíduo na iteração $k + 1$ da seguinte maneira:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}^{k+1}) = \mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}^k) + \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \Delta \mathbf{u}^k + \mathcal{O}(\Delta \mathbf{u}^k)^2 = 0\quad (3.13)$$

Impondo que o resíduo \mathbf{r}_{n+1}^{k+1} seja nulo, pode-se obter da equação (3.13) o incremento dos deslocamentos, que é utilizado para atualizar a aceleração, a velocidade e o deslocamento na iteração $k + 1$. Por outro lado, levando-se em consideração a equação (3.12), a matriz tangente iterativa $\hat{\mathbf{K}}_{n+1}$ é obtida como:

$$\hat{\mathbf{K}}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{f}_{n+1}^k}{\partial \mathbf{u}_{n+1}}, \quad \mathbf{K}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{f}_{n+1}^k}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \quad (3.14)$$

onde \mathbf{K}_{n+1} é a matriz de rigidez tangente que se obtém através da derivada do vetor de forças internas em relação aos deslocamentos nodais, dada em (2.27). Portanto, escreve-se a expressão em notação compacta da matriz tangente iterativa como:

$$\hat{\mathbf{K}}_{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \mathbf{K}_{n+1} \quad (3.15)$$

Finalmente, se atualizam o deslocamento, a velocidade e a aceleração na iteração $k + 1$, em função da correção $\Delta \mathbf{u}^k$ obtida em (3.13). Levando em consideração a equação (3.9), estas atualizações se expressam como:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{n+1}^{k+1} &= \mathbf{u}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{u}^k \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{k+1} &= \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^k + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta \mathbf{u}^k \\ \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{k+1} &= \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^k + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta \mathbf{u}^k \end{aligned} \quad (3.16)$$

O esquema incremental-iterativo aqui descrito, utilizando o método de Newmark, encontra-se detalhado no fluxograma dado na Figura 3.1.

3.4 – O método α -generalizado

No método α -generalizado assume-se que a aceleração, a velocidade, o deslocamento, as forças internas e as forças externas sejam calculados através de uma média ponderada de seus respectivos valores nos passos de tempo n e $n + 1$. Desta maneira, as expressões que definem estas variáveis no ponto médio generalizado se escrevem como:

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{u}}_{n+1-\alpha_m} &= (1 - \alpha_m)\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \alpha_m\ddot{\mathbf{u}}_n \\
\dot{\mathbf{u}}_{n+1-\alpha_f} &= (1 - \alpha_f)\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \alpha_f\dot{\mathbf{u}}_n \\
\mathbf{u}_{n+1-\alpha_f} &= (1 - \alpha_f)\mathbf{u}_{n+1} + \alpha_f\mathbf{u}_n \\
\mathbf{p}_{n+1-\alpha_f} &= (1 - \alpha_f)\mathbf{p}_{n+1} + \alpha_f\mathbf{p}_n
\end{aligned} \tag{3.17}$$

onde α_m e α_f são os parâmetros de ponderação que representam a dissipação numérica para as altas frequências. O parâmetro α_m dissipa as forças inerciais, enquanto que o parâmetro α_f dissipa as forças viscosas (caso sejam consideradas), elásticas e as solicitações externas. A definição do vetor de forças internas no ponto médio generalizado será discutida no próximo capítulo.

Como o método α -generalizado está baseado no esquema de integração de Newmark, descrito no item anterior, as modificações que se introduzem no processo incremental-iterativo são muito simples como se mostra a seguir.

Em primeiro lugar, obtêm-se a aceleração e a velocidade no ponto médio generalizado em função do deslocamento obtido no passo de tempo $n + 1$, substituindo as equações (3.9a) e (3.9b) na equação (3.17), o que resulta na seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{u}}_{n+1-\alpha_f} &= (1 - \alpha_f)\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^* + \frac{(1 - \alpha_f)\gamma}{\beta\Delta t}(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}^*) + \alpha_f\dot{\mathbf{u}}_n \\
\ddot{\mathbf{u}}_{n+1-\alpha_m} &= \frac{1 - \alpha_m}{\beta\Delta t^2}(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}^*) + \alpha_m\ddot{\mathbf{u}}_n
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Por outro lado, a forma discreta da equação do movimento no ponto médio generalizado se expressa como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1-\alpha_m} + \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f} = \mathbf{p}_{n+1-\alpha_f} \tag{3.19}$$

Substituindo a equação (3.18b) na equação (3.19), obtêm-se as forças residuais, cuja expressão escreve-se como:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}) = \mathbf{M} \left(\frac{(1 - \alpha_m)}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}^*) + \alpha_m \ddot{\mathbf{u}}_n \right) + \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f} - \mathbf{p}_{n+1-\alpha_f} \neq 0 \quad (3.20)$$

Por último, a matriz tangente iterativa resulta da linearização das forças residuais, dadas em (3.20), com relação aos deslocamentos calculados no passo de tempo $n + 1$. A expressão desta matriz se escreve como:

$$\hat{\mathbf{K}}_{n+1-\alpha_f} = \frac{(1 - \alpha_m)}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \mathbf{K}_{n+1-\alpha_f} \quad , \quad \mathbf{K}_{n+1-\alpha_f} = \frac{\partial \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \quad (3.21)$$

onde $\mathbf{K}_{n+1-\alpha_f}$ é a matriz de rigidez tangente obtida através da derivada do vetor de forças internas, definido no ponto médio generalizado, com relação ao vetor deslocamento calculado no passo de tempo $n + 1$. É importante lembrar que há diferentes maneiras de se obter esta matriz em função da definição do vetor de forças internas. No capítulo seguinte, apresentam-se duas expressões diferentes para o vetor de forças internas, e, conseqüentemente, para a matriz de rigidez tangente. As modificações aqui introduzidas encontram-se detalhadas no fluxograma apresentado na Figura 3.1.

3.5 – Introdução ao método energia-momentum

Motivado pela observação da instabilidade numérica dos esquemas de integração temporal na análise dinâmica não-linear, SIMO e co-autores (LEWIS & SIMO [1994], SIMO & TARNOW [1992a], [1994], SIMO et al [1995], SIMO et al [1992b]) propuseram o método de energia-momentum que conserva a energia total, e, portanto, cumpre a condição de estabilidade (1.1). Este algoritmo tem precisão de segunda ordem e, além disso, preserva o momento linear e o momento angular. Entretanto, KUHL & RAMM [1996a], [1996b] observaram problemas de convergência ao analisar o fenômeno *snap-through* em cascas cilíndricas cuja resposta contém modos de alta frequência. Neste caso, estes autores utilizaram pequenos espaços de tempo para obter uma solução estável. Para superar este problema, KUHL & CRISFIELD [1999], entre outros, estenderam esta formulação dentro da estratégia do método α -generalizado para incorporar a dissipação numérica para altas frequências. Estes autores denominaram este algoritmo como método de energia-momentum generalizado.

3.5.1 – O método energia-momentum

Para maiores detalhes sobre este método consultar as referências SIMO et al [1995], SIMO & TARNOW [1992a], SIMO & TARNOW [1994], SIMO et al [1992b], SIMO & WONG [1991]. O método de energia-momentum se baseia na deformação calculada no ponto médio do intervalo do passo de tempo. O valor médio da deformação em um intervalo de integração é dado por:

$$\varepsilon(\mathbf{u}_{n+1-\alpha_f})|_{\alpha_f = 1/2} \rightarrow \frac{\varepsilon(\mathbf{u}_{n+1}) + \varepsilon(\mathbf{u}_n)}{2} \quad (3.22)$$

A matriz tangente iterativa, definida no ponto médio, é obtida assumindo $\alpha_m = \alpha_f = 1/2$ na equação (3.21), cuja expressão é dada por:

$$\hat{\mathbf{K}}_{n+1/2} = \frac{1}{2\beta\Delta t^2} \mathbf{M} + \mathbf{K}_{n+1/2} \quad , \quad \mathbf{K}_{n+1/2} = \frac{\partial \mathbf{f}_{n+1/2}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \quad (3.23)$$

onde $\mathbf{K}_{n+1/2}$ é a matriz de rigidez tangente avaliada no ponto médio. Esta matriz é obtida através da derivada do vetor de forças internas, definido no ponto médio, em relação ao vetor de deslocamentos calculado no passo de tempo $n + 1$. Por outro lado, utilizando-se a equação (3.5b), obtém-se o vetor de forças internas, que pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\mathbf{f}_{n+1/2} = EA_0 \varepsilon_{n+1/2} \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1/2} \quad (3.24)$$

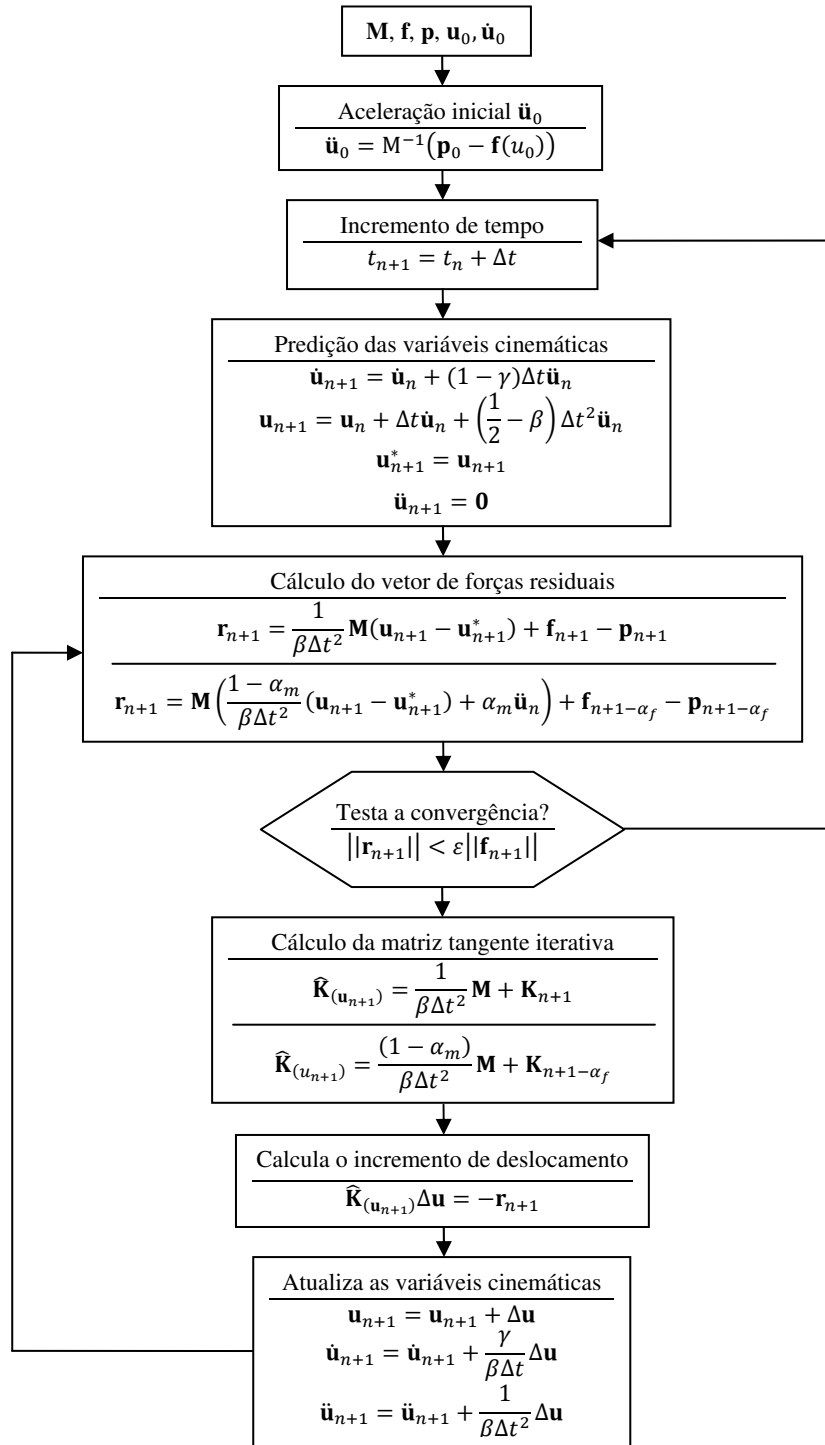


Figura 3.1: Esquema de integração de Newmark para sistemas não-lineares.

3.5.2 – O método energia-momentum generalizado

Tomando a expressão (3.22) como ponto de partida, KUHL & CRISFIELD [1999], KUHL & RAMM [1996a], [1996b], [1998], [1999] propuseram o método energia-

momentum generalizado, que se baseia no cálculo da deformação através da média ponderada de seus respectivos valores nos passos de tempo n e $n + 1$. Isto é, se está utilizando o método α -generalizado para calcular as deformações no ponto médio generalizado. Calcula-se esta deformação por meio da seguinte expressão:

$$\varepsilon(\mathbf{u}_{n+1-\alpha_f}) \rightarrow (1 - \alpha_f)\varepsilon(\mathbf{u}_{n+1}) + \alpha_f\varepsilon(\mathbf{u}_n) \quad (3.25)$$

onde α_f é o coeficiente de ponderação. Deste modo, levando em consideração a equação (3.5b), define-se o vetor de forças internas como:

$$\mathbf{f}_{n+1-\alpha_f} = EA_0\varepsilon_{n+1-\alpha_f} \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1-\alpha_f} \quad (3.26)$$

Observe que para este método, a matriz tangente iterativa é a mesma dada pela expressão (3.21a), e que a matriz de rigidez tangente é obtida através da derivada do vetor de forças internas, dada em (3.26), em relação ao vetor de deslocamentos definido no passo de tempo $n+1$.

CAPÍTULO 4

OBTENÇÃO DO VETOR DE FORÇAS INTERNAS E DA MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE EM UM PASSO DE TEMPO DISCRETO

4.1- Introdução

Neste capítulo obtém-se o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente do elemento de barra bi-articulado, no passo de tempo atual $n + 1$, utilizando o método de Newmark, o método α -generalizado e o método energia-momentum generalizado. Quanto ao método α -generalizado, há dois modos de se calcular o vetor de forças internas. No primeiro modo, avalia-se este vetor como uma média ponderada de seus respectivos valores nos passos de tempo n e $n + 1$. No segundo modo, primeiramente, calcula-se uma média ponderada das deformações obtidas nos passos de tempo n e $n + 1$, e em seguida, avalia-se o vetor de forças internas em função da deformação calculada no ponto médio generalizado.

4.2- Obtenção do vetor de forças internas e da matriz de rigidez tangente com o método de Newmark

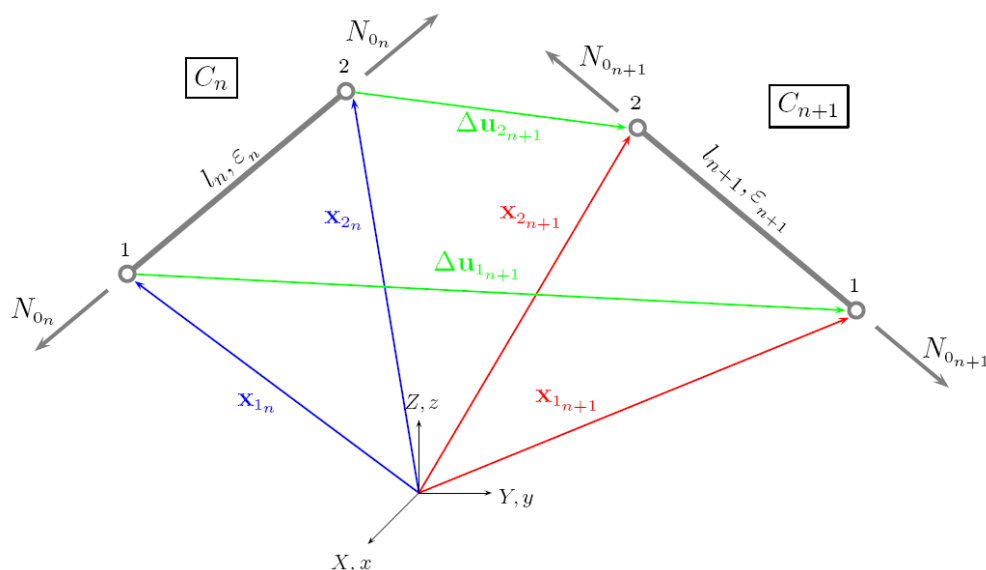


Figura 4.1 – Configurações do elemento de barra bi-articulado 3D nos instantes t_n e t_{n+1} .

Seja C_n a configuração do elemento no instante t_n dada pelas coordenadas espaciais dos nós \mathbf{x}_{1n} e \mathbf{x}_{2n} . C_{n+1} é a configuração do elemento no instante t_{n+1} definida pelas coordenadas espaciais \mathbf{x}_{1n+1} e \mathbf{x}_{2n+1} , conforme mostra-se na figura 4.1. No instante t_{n+1} , utilizando as equações (2.11), (2.12) e (2.19), a longitude, a deformação e o esforço normal do elemento podem ser escritos como:

$$\begin{cases} l_{n+1} = \sqrt{(X_{21} + u_{21n+1})^2 + (Y_{21} + v_{21n+1})^2 + (Z_{21} + w_{21n+1})^2} \\ \varepsilon_{n+1} = \frac{l_{n+1} - l_0}{l_0} \\ N_{0n+1} = EA_0 \varepsilon_{n+1} \end{cases} \quad (4.1)$$

Utilizando a equação (2.13), os co-senos diretores do elemento em C_{n+1} se escrevem como:

$$\begin{cases} c_{X_{n+1}} = \frac{X_{21} + u_{21n+1}}{l_{n+1}} = \frac{x_{21n+1}}{l_{n+1}} \\ c_{Y_{n+1}} = \frac{Y_{21} + v_{21n+1}}{l_{n+1}} = \frac{y_{21n+1}}{l_{n+1}} \\ c_{Z_{n+1}} = \frac{Z_{21} + w_{21n+1}}{l_{n+1}} = \frac{z_{21n+1}}{l_{n+1}} \end{cases} \quad (4.2)$$

O vetor de forças internas do elemento é obtido, a partir das definições dadas em (2.14), (2.15) e (2.16), da seguinte maneira:

$$\mathbf{f}_{n+1} = EA_0 \varepsilon_{n+1} \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1} = N_{0n+1} \begin{Bmatrix} -c_{X_{n+1}} \\ -c_{Y_{n+1}} \\ -c_{Z_{n+1}} \\ c_{X_{n+1}} \\ c_{Y_{n+1}} \\ c_{Z_{n+1}} \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

Obtém-se a matriz de rigidez tangente, no instante t_{n+1} , derivando-se o vetor de forças internas, dado em (4.3), em relação ao vetor de deslocamentos nodais \mathbf{u}_{n+1} . Portanto, após um breve desenvolvimento algébrico, chega-se a seguinte expressão para a matriz de rigidez tangente:

$$\mathbf{K}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{f}_{n+1}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} = EA_0 \frac{\partial \varepsilon_{n+1}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \otimes \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1} + EA_0 \varepsilon_{n+1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \left(\left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1} \right) \quad (4.4)$$

$$\mathbf{K}_{n+1} = \underbrace{\frac{EA_0}{l_0} \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1} \otimes \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1}}_{\text{matriz de rigidez material}} + \underbrace{N_{0_{n+1}} \left(\frac{\partial^2 l}{\partial \mathbf{u}^2} \right)_{n+1}}_{\text{matriz de rigidez geométrica}}$$

Para o elemento de barra bi-articulado 2D, utilizam-se as equações (2.9) e (2.10) para calcular as matrizes de rigidez material e geométrica, respectivamente. Por outro lado, para o elemento de barra bi-articulado 3D, utilizam-se as equações (2.15) e (2.16) para calcular as matrizes de rigidez material e geométrica, respectivamente.

4.3- Obtenção do vetor de forças internas e da matriz de rigidez tangente com o método α -generalizado

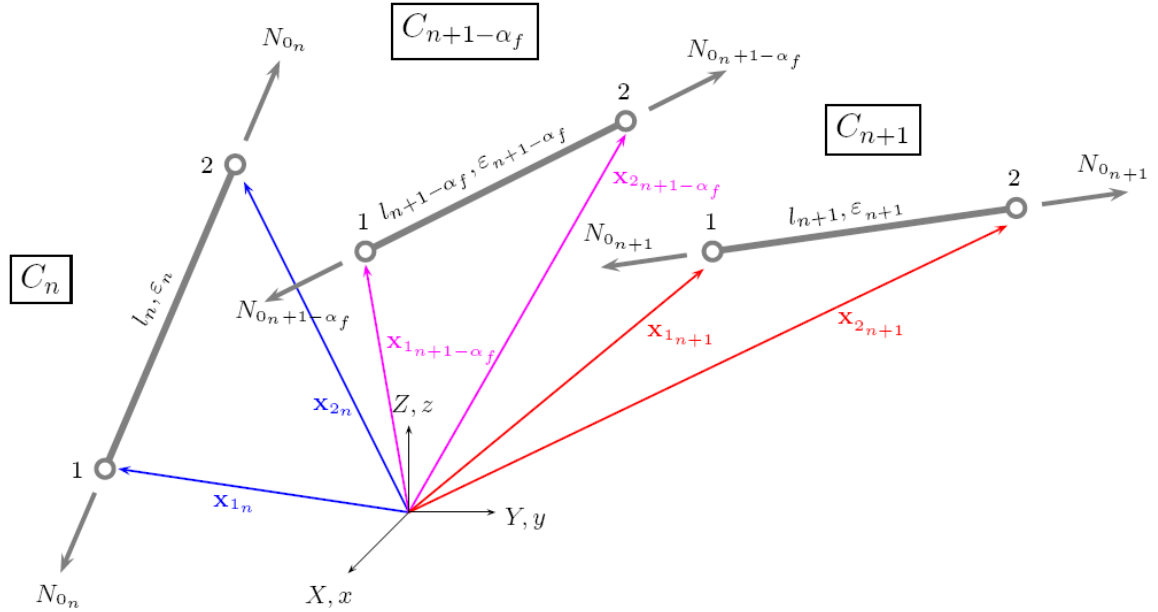


Figura 4.2 – Configuração do elemento de barra bi-articulado 3D no ponto médio generalizado.

Seja $C_{n+1-\alpha_f}$ a configuração do elemento no ponto médio generalizado. Define-se esta configuração pelas coordenadas espaciais dos nós do elemento, isto é, $\mathbf{x}_{1_{n+1-\alpha_f}}$ e $\mathbf{x}_{2_{n+1-\alpha_f}}$. Nesta configuração, o elemento está sujeito à deformação $\varepsilon_{n+1-\alpha_f}$ e ao esforço axial dado por $N_{0_{n+1-\alpha_f}} = EA_0 \varepsilon_{n+1-\alpha_f}$. Por outro lado, o método α -generalizado permite duas maneiras distintas de calcular o vetor de forças internas.

4.3.1- Modo 1

No primeiro modo, o vetor de forças internas é dado por uma média ponderada dos vetores de forças internas calculados nos passos de tempo t_n e t_{n+1} . Esta média ponderada se escreve como:

$$\mathbf{f}_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f)\mathbf{f}_{n+1} + \alpha_f\mathbf{f}_n \quad (4.5)$$

Levando em conta a equação (2.25), a equação acima pode ser reescrita como:

$$\mathbf{f}_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f)EA_0\varepsilon_{n+1} \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1} + \alpha_f EA_0\varepsilon_n \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_n \quad (4.6)$$

Observe que $\mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}$ depende das deformações e dos co-senos diretores, do elemento de barra bi-articulado, calculados nos extremos do intervalo de integração no tempo, além do parâmetro α_f .

Obtém-se a matriz de rigidez tangente derivando a expressão (4.6) em relação ao vetor de deslocamentos calculado no passo de tempo t_{n+1} . A seguir, são mostrados alguns passos do desenvolvimento algébrico para a obtenção desta matriz.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{n+1-\alpha_f}^l &= \frac{\partial \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} = (1 - \alpha_f)EA_0 \frac{\partial \varepsilon_{n+1}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \otimes \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1} + (1 - \alpha_f)EA_0\varepsilon_{n+1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \left(\left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1} \right) \\ \mathbf{K}_{n+1-\alpha_f}^l &= \underbrace{(1 - \alpha_f) \frac{EA_0}{l_0} \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1} \otimes \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1}}_{\text{matriz de rigidez material}} + \underbrace{(1 - \alpha_f)N_{0n+1} \left(\frac{\partial^2 l}{\partial \mathbf{u}^2} \right)_{n+1}}_{\text{matriz de rigidez geométrica}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{K}_{n+1-\alpha_f}^l = (1 - \alpha_f)\mathbf{K}_{n+1}$$

Pode-se observar que a matriz de rigidez tangente (modo 1) depende do esforço axial e dos co-senos diretores do elemento de barra bi-articulado, calculados no passo de tempo t_{n+1} , além do parâmetro α_f . Para $\alpha_f = 0$, a expressão (4.7) torna-se igual à equação (4.4).

4.3.2- Modo 2

No segundo modo, o vetor de forças internas no ponto médio generalizado é calculado em função da deformação do elemento, obtida neste ponto, que se calcula como:

$$\varepsilon_{n+1-\alpha_f} = \frac{l_{n+1-\alpha_f} - l_0}{l_0} \quad (4.8)$$

onde $l_{n+1-\alpha_f}$ é a longitude do elemento em $C_{n+1-\alpha_f}$. Este comprimento é dado por:

$$l_{n+1-\alpha_f} = \sqrt{\left(X_{21} + u_{21n+1-\alpha_f}\right)^2 + \left(Y_{21} + v_{21n+1-\alpha_f}\right)^2 + \left(Z_{21} + w_{21n+1-\alpha_f}\right)^2} \quad (4.9)$$

Por outro lado, os deslocamentos nodais relativos do elemento, calculados no ponto médio generalizado, são dados, segundo o método α -generalizado, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} u_{21n+1-\alpha_f} &= (1 - \alpha_f)u_{21n+1} + \alpha_f u_{21n} = (1 - \alpha_f)(u_{2n+1} + u_{1n+1}) + \alpha_f(u_{2n} - u_{1n}) \\ v_{21n+1-\alpha_f} &= (1 - \alpha_f)v_{21n+1} + \alpha_f v_{21n} = (1 - \alpha_f)(v_{2n+1} + v_{1n+1}) + \alpha_f(v_{2n} - v_{1n}) \\ w_{21n+1-\alpha_f} &= (1 - \alpha_f)w_{21n+1} + \alpha_f w_{21n} = (1 - \alpha_f)(w_{2n+1} + w_{1n+1}) + \alpha_f(w_{2n} - w_{1n}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Utilizando a equação (2.13), os co-senos diretores do elemento em $C_{n+1-\alpha_f}$ se escrevem como:

$$\begin{cases} c_{X_{n+1-\alpha_f}} = \frac{X_{21} + u_{21n+1-\alpha_f}}{l_{n+1-\alpha_f}} = \frac{x_{21n+1-\alpha_f}}{l_{n+1-\alpha_f}} \\ c_{Y_{n+1-\alpha_f}} = \frac{Y_{21} + v_{21n+1-\alpha_f}}{l_{n+1-\alpha_f}} = \frac{y_{21n+1-\alpha_f}}{l_{n+1-\alpha_f}} \\ c_{Z_{n+1-\alpha_f}} = \frac{Z_{21} + w_{21n+1-\alpha_f}}{l_{n+1-\alpha_f}} = \frac{z_{21n+1-\alpha_f}}{l_{n+1-\alpha_f}} \end{cases} \quad (4.11)$$

O vetor de forças internas do elemento é obtido, a partir das definições dadas em (2.14), (2.15) e (2.16), da seguinte maneira:

$$\mathbf{f}_{n+1-\alpha_f} = EA_0 \varepsilon_{n+1-\alpha_f} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1-\alpha_f} = N_{0n+1-\alpha_f} \begin{Bmatrix} -C_{X_{n+1-\alpha_f}} \\ -C_{Y_{n+1-\alpha_f}} \\ -C_{Z_{n+1-\alpha_f}} \\ C_{X_{n+1-\alpha_f}} \\ C_{Y_{n+1-\alpha_f}} \\ C_{Z_{n+1-\alpha_f}} \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

Obtém-se a matriz de rigidez tangente derivando a expressão (4.12) com relação ao vetor de deslocamentos nodais calculados em C_{n+1} . Mostra-se a seguir alguns passos do desenvolvimento algébrico para obter esta matriz.

$$\mathbf{K}_{n+1-\alpha_f}^{II} = \frac{\partial f_{n+1-\alpha_f}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} = EA_0 \frac{\partial \varepsilon_{n+1-\alpha_f}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \otimes \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1-\alpha_f} + EA_0 \varepsilon_{n+1-\alpha_f} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \left(\left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1-\alpha_f} \right)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{n+1-\alpha_f}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} = \frac{1}{l_0} \frac{\partial l_{n+1-\alpha_f}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} = (1 - \alpha_f) \frac{1}{l_0} \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1-\alpha_f} \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \left(\left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1-\alpha_f} \right) = (1 - \alpha_f) \left(\frac{\partial^2 l}{\partial \mathbf{u}^2} \right)_{n+1-\alpha_f}$$

$$\mathbf{K}_{n+1-\alpha_f}^{II} = \underbrace{(1 - \alpha_f) \frac{EA_0}{l_0} \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1-\alpha_f} \otimes \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1-\alpha_f}}_{\text{matriz de rigidez material}} + \underbrace{(1 - \alpha_f) N_{0n+1-\alpha_f} \left(\frac{\partial^2 l}{\partial \mathbf{u}^2} \right)_{n+1-\alpha_f}}_{\text{matriz de rigidez geométrica}}$$

$$\mathbf{K}_{n+1-\alpha_f}^{II} = (1 - \alpha_f) \mathbf{K}_{n+1-\alpha_f}$$

Pode-se notar que a matriz de rigidez tangente (modo 2) depende do esforço axial e dos co-senos diretores, do elemento de barra bi-articulado, calculados no ponto médio generalizado $n + 1 - \alpha_f$, além do parâmetro α_f . Por outro lado, tendo em conta as equações (4.8), (4.9), (4.10) e (4.11); observa-se que a deformação, o esforço axial e os co-senos diretores, definidos em $C_{n+1-\alpha_f}$, dependem dos deslocamentos nodais calculados nos passos de tempo t_n e t_{n+1} e do parâmetro α_f .

4.4- Obtenção do vetor de forças internas e da matriz de rigidez tangente com o método energia-momentum generalizado

Neste método, usa-se uma média ponderada das deformações dadas em C_n e C_{n+1} , para definir a deformação do elemento no ponto médio generalizado da seguinte maneira: $\hat{\varepsilon}_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f)\varepsilon_{n+1} + \alpha_f\varepsilon_n$, onde α_f é coeficiente de ponderação. Portanto, o esforço axial pode ser escrito como: $\hat{N}_{0_{n+1-\alpha_f}} = EA_0 \left((1 - \alpha_f)\varepsilon_{n+1} + \alpha_f\varepsilon_n \right)$. Levando em conta as definições dadas acima, o vetor de forças internas se define como:

$$\mathbf{f}_{n+1-\alpha_f} = EA_0 \left((1 - \alpha_f)\varepsilon_{n+1} + \alpha_f\varepsilon_n \right) \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1-\alpha_f} \quad (4.14)$$

Observe que o termo $\left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1-\alpha_f}$ contém os co-senos diretores do elemento, na configuração $C_{n+1-\alpha_f}$, que são definidos através das equações (4.9), (4.10) e (4.11).

Obtém-se a matriz de rigidez tangente derivando a expressão (4.14) com relação ao vetor de deslocamentos nodais calculados em C_{n+1} . Mostra-se a seguir alguns passos do desenvolvimento algébrico para obter esta matriz.

$$\mathbf{K}_{n+1-\alpha_f} = \frac{\partial f_{n+1-\alpha_f}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}}$$

$$\mathbf{K}_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f)EA_0 \frac{\partial \varepsilon_{n+1}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \otimes \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1-\alpha_f} + EA_0 \left((1 - \alpha_f)\varepsilon_{n+1} + \alpha_f\varepsilon_n \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \left(\left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1-\alpha_f} \right)$$

onde,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \left(\left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1-\alpha_f} \right) = (1 - \alpha_f) \left(\frac{\partial^2 l}{\partial \mathbf{u}^2} \right)_{n+1-\alpha_f} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{K}_{n+1-\alpha_f} = \underbrace{(1 - \alpha_f) \frac{EA_0}{l_0} \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1} \otimes \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1-\alpha_f}}_{\text{matriz de rigidez material}} + \underbrace{(1 - \alpha_f) \hat{N}_{0_{n+1-\alpha_f}} \left(\frac{\partial^2 l}{\partial \mathbf{u}^2} \right)_{n+1-\alpha_f}}_{\text{matriz de rigidez geométrica}}$$

$$\mathbf{K}_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f) \hat{\mathbf{K}}_{n+1-\alpha_f}$$

Pode-se observar que a matriz de rigidez tangente depende da deformação calculada nos passos de tempo t_n e t_{n+1} ; dos co-senos diretores, do elemento de barra bi-articulado, calculados no ponto médio generalizado $n + 1 - \alpha_f$ e no passo de tempo t_{n+1} ; além do parâmetro α_f . Por outro lado, a matriz de rigidez material é não simétrica enquanto que a matriz de rigidez geométrica permanece simétrica. Portanto, as matrizes $\hat{\mathbf{K}}_{n+1-\alpha_f}$ e $\mathbf{K}_{n+1-\alpha_f}$ são não simétricas.

CAPÍTULO 5

EXEMPLOS NUMÉRICOS

5.1- Introdução

No capítulo 4 foram apresentadas quatro expressões distintas para o cálculo do vetor de forças internas e para o cálculo da matriz de rigidez tangente. Para o método de Newmark utilizam-se as expressões (4.3) e (4.4) para o cálculo do vetor de forças internas e da matriz de rigidez tangente, respectivamente. Para o método α -generalizado (modo 1) utilizam-se as expressões (4.6) e (4.7), enquanto que para o método α -generalizado (modo 2) utilizam-se as expressões (4.12) e (4.13). Por último, para o método energia-momentum generalizado utilizam-se as expressões (4.14) e (4.15).

Para cada um destes algoritmos pode-se assumir valores arbitrários para os parâmetros de dissipação numérica, e, conseqüentemente, obter determinadas expressões para o vetor de forças internas e para a matriz de rigidez tangente. Esta informação encontra-se detalhada na Tabela 5.1. São adotados valores ótimos para os parâmetros de dissipação em função do raio espectral ρ_∞ .

Para maiores detalhes sobre o conceito de raio espectral, consultar o capítulo 7 da referência GÉRADIN & RIXEN [1997] e o capítulo 9 da referência HUGHES [1987]. Estes valores se mostram na Tabela 5.2. Quando $\rho_\infty = 1$ não ocorre dissipação numérica, enquanto que, para valores decrescentes de ρ_∞ implica em valores crescentes de dissipação numérica. Observa-se que os valores atribuídos aos parâmetros α_m , α_f , γ e β na Tabela 5.1, foram obtidos com $\rho_\infty = 1$ na Tabela 5.2. Por outro lado, valores ótimos de ρ_∞ significa que os algoritmos que os utilizam possui dissipação numérica mínima para as respostas em baixas frequências e dissipação numérica máxima para as respostas em altas frequências.

Tabela 5.1: Sumário dos algoritmos de integração temporal.

MÉTODO	PARÂMETROS	$\mathbf{f}_{n+1+\alpha_f}$	$\mathbf{K}_{n+1+\alpha_f}$
NM, NEWMARK [1959]	$\alpha_m = \alpha_f = 0$	(4.3)	(4.4)
M α B, WOOD et al [1981]	$\alpha_f = 0$	(4.6)	(4.7)
M α H1, HILBER et al [1977]	$\alpha_m = 0$	(4.6)	(4.7)
M α H2, KUHL & CRISFIELD [1999]	$\alpha_m = 0$	(4.12)	(4.13)
M α G1, CHUNG & HULBERT [1993]	$\alpha_m \neq 0, \alpha_f \neq 0$	(4.6)	(4.7)
M α G2, KUHL & CRISFIELD [1999]	$\alpha_m \neq 0, \alpha_f \neq 0$	(4.12)	(4.13)
MEM, SIMO & TARNOW [1992a]	$\alpha_m = \alpha_f = 2\beta = \gamma = 1/2$	(4.14)	(4.15)
MEMG, KUHL & CRISFIELD [1999]	$\alpha_m \neq 0, \alpha_f \neq 0$	(4.14)	(4.15)

Tabela 5.2: Valores ótimos dos parâmetros de dissipação numérica em função do raio espectral ρ_∞ .

ALGORITMO	α_m	α_f	β	γ
MN (NEWMARK [1959])	0	0	$\frac{1}{(\rho_\infty + 1)^2}$	$\frac{3 - \rho_\infty}{2\rho_\infty + 2}$
M α B (WOOD et al [1981])	$\frac{\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}$	0	$\frac{1}{4}(1 - \alpha_m)^2$	$\frac{1}{2} - \alpha_m$
M α H1 (HILBER et al [1977]) M α H2 (KUHL & CRISFIELD [1999])	0	$\frac{1 - \rho_\infty}{\rho_\infty + 1}$	$\frac{1}{4}(1 - \alpha_f)^2$	$\frac{1}{2} + \alpha_f$
M α G1 (CHUNG & HULBERT [1993]), M α G2 (KUHL & CRISFIELD [1999]), MEM (SIMO & TARNOW[1992a]), MEMG (KUHL & CRISFIELD [1999])	$\frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}$	$\frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1}$	$\frac{1}{4}(1 - \alpha_m + \alpha_f)^2$	$\frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f$

Nas simulações numéricas que aqui serão realizadas, serão introduzidos os seguintes algoritmos de integração temporal:

1. Método de Newmark - MN;
2. Método α -Bossak - M α B;
3. Método α -Hilber (modo 1) - M α H1;
4. Método α -generalizado (modo 1) - M α G1;
5. Método energia-momentum generalizado - MEMG;

Nos exemplos que serão analisados em seguida, adota-se para cada um dos algoritmos listados acima, os seguintes valores para o raio espectral $\rho_\infty = 1$, $\rho_\infty = 0.8$ e $\rho_\infty = 0.6$. Por último, nota-se na Tabela 5.1 que para $\alpha_m = \alpha_m = 0$ e $2\beta = \gamma = 1/2$, os

algoritmos de Newmark, $M\alpha B$, $M\alpha H1$ e $M\alpha H2$ coincidem com o método da Regra do Trapézio, o que se verifica nos exemplos aqui analisados.

Para analisar os resultados obtidos com os algoritmos enumerados acima, se utilizam os seguintes gráficos:

1. As componentes cartesianas do deslocamento \times tempo;
2. As componentes cartesianas da velocidade \times tempo;
3. As componentes cartesianas da aceleração \times tempo;
4. A energia potencial total \times tempo;
5. O momento angular \times tempo;
6. A deformação axial $\left(\varepsilon = \frac{l-l_0}{l_0}\right) \times$ tempo;
7. O número de iterações por passo de tempo.

Com o objetivo de averiguar o comportamento destes algoritmos em relação à capacidade de:

1. Conservar a energia potencial total;
2. Conservar o momento angular;
3. Dissipar o mínimo para movimentos em baixas frequências;
4. Dissipar o máximo para movimentos em altas frequências;
5. Convergir durante o processo iterativo;

5.2 – Pêndulo rígido:

Este exemplo foi analisado por BATHE [1996], CRISFIELD & SHI [1994, 1996b], KUHL & CRISFIELD [1999], entre outros autores. As características geométricas e físicas, as condições iniciais, as condições de contorno e demais dados do problema encontram-se na Figura 5.1.

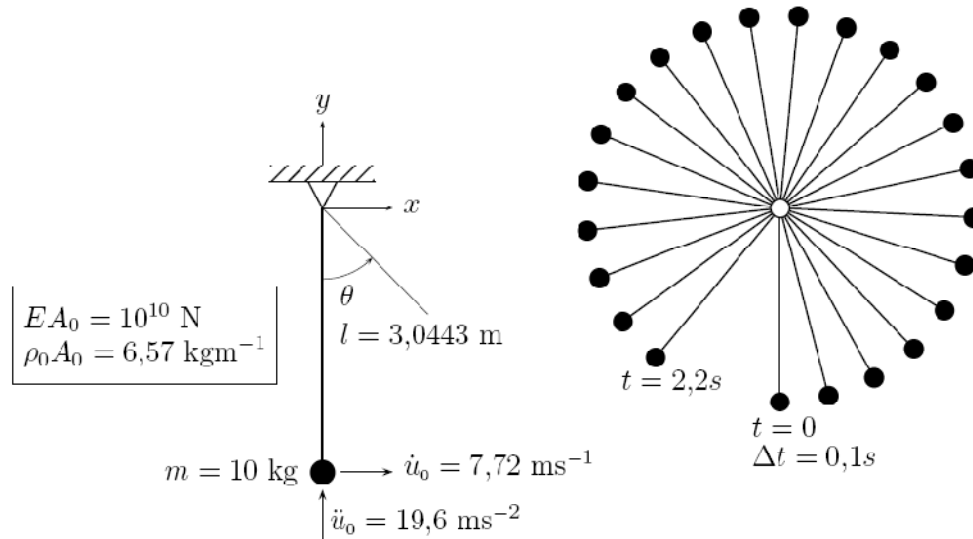


Figura 5.1: Pêndulo rígido. Características geométricas e físicas.

O pêndulo foi discretizado com um elemento de barra bi-articulado 2D, tendo 2 graus de liberdade restringidos e 2 graus de liberdade livres. Considera-se o pêndulo rígido adotando uma rigidez axial de $EA = 10^{10}$ N. Considera-se a velocidade angular constante, ou seja, $\dot{\theta} = \omega_0$, $\dot{u}_0 = \dot{\theta}l$, $\ddot{u}_0 = \dot{\theta}^2 l = \frac{\dot{u}_0^2}{l}$. Além disso, assume-se que o sistema seja conservativo, isto é, $\frac{1}{2}m\dot{u}_0^2 = mgl$. Portanto, a velocidade inicial é dada por $\dot{u}_0 = \sqrt{2gl} = 7,72\text{ms}^{-1}$, e a aceleração inicial é dada por $\ddot{u}_0 = 2g = 19,6\text{ms}^{-2}$, conforme mostra-se na Figura 5.1.

Por outro lado, não se leva em conta a ação gravitacional, isto é, não há forças externas aplicadas na extremidade livre do pêndulo, o que implica que, a energia potencial total e o momento angular se mantêm constantes ao longo do tempo. Desta maneira, a energia potencial total é igual a $\pi_0 = \frac{1}{2}m\dot{u}_0^2 = 298\text{Nm}$, e o momento angular $\mathcal{H}_0 = lm\dot{u}_0 = 235\text{Nms}$. O período do pêndulo é dado por $T = \pi\sqrt{\frac{2l}{g}} = 2.47\text{s}$, que corresponde

ao ângulo de 360° , isto é, a uma volta ou a um ciclo. Adotou-se um passo de tempo $\Delta t = 0.1s$, e fez-se a análise para um intervalo de tempo de 30s com os valores de $\rho_\infty = 1$, $\rho_\infty = 0.8$ e $\rho_\infty = 0.6$. A seguir, apresentam-se os resultados obtidos para o pêndulo rígido.

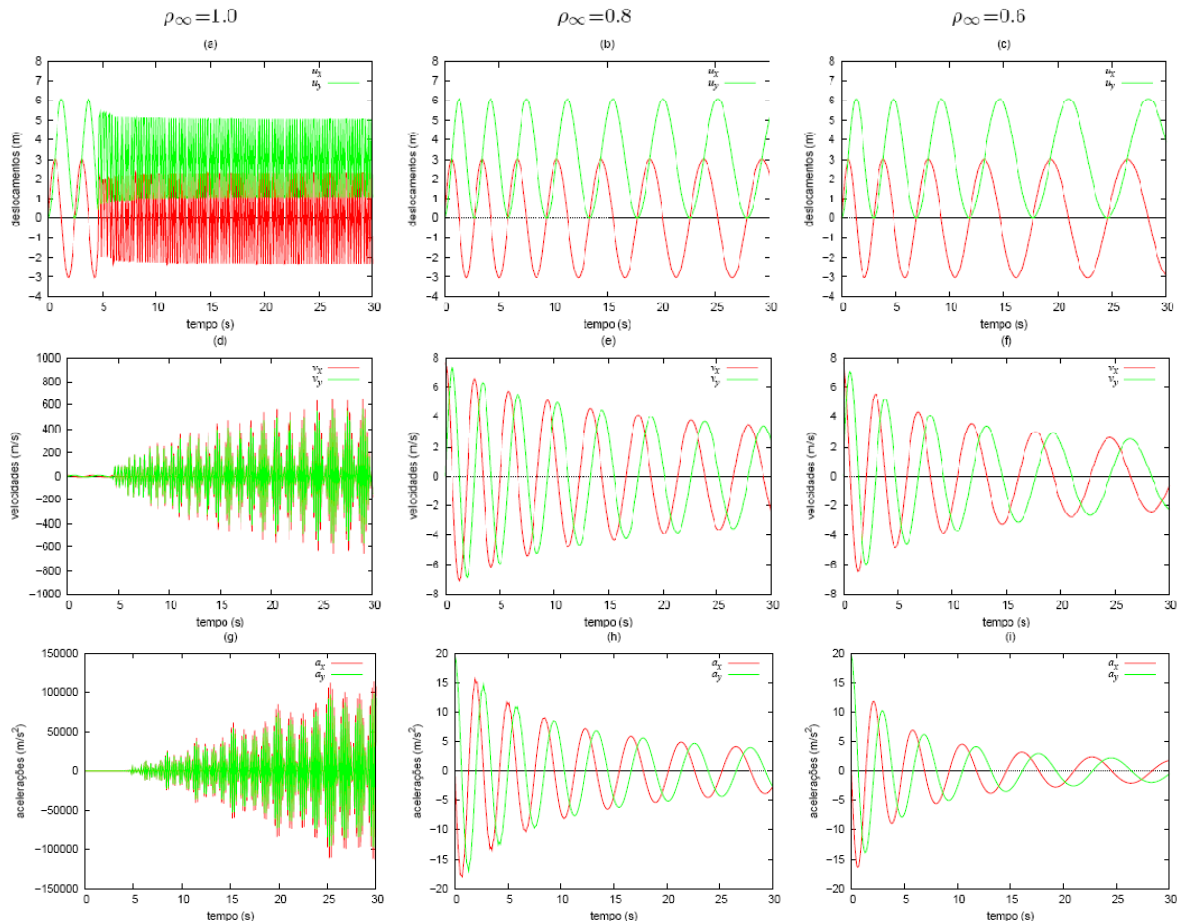


Figura 5.2 – O Pêndulo Rígido. Solução com o esquema de Newmark.

Para o esquema de Newmark sem dissipação numérica, pode-se observar que os deslocamentos (5.2a), velocidades (5.2d) e acelerações (5.2g) permaneceram estáveis até aproximadamente o tempo de 4 segundos. A partir daí, o sistema apresenta um crescimento abrupto e descontrolado. Para os amortecimentos numéricos $\rho_\infty = 0,8$ e $\rho_\infty = 0,6$; o sistema comporta-se de forma controlada em todo o intervalo analisado. Porém, o decaimento das amplitudes destas respostas transientes (deslocamentos, velocidades e acelerações) e o aumento gradativo nos erros de período ocorridos foram significativos, conforme mostra-se nas figuras 5.2b, 5.2c, 5.2e, 5.2f, 5.2h e 5.2i.

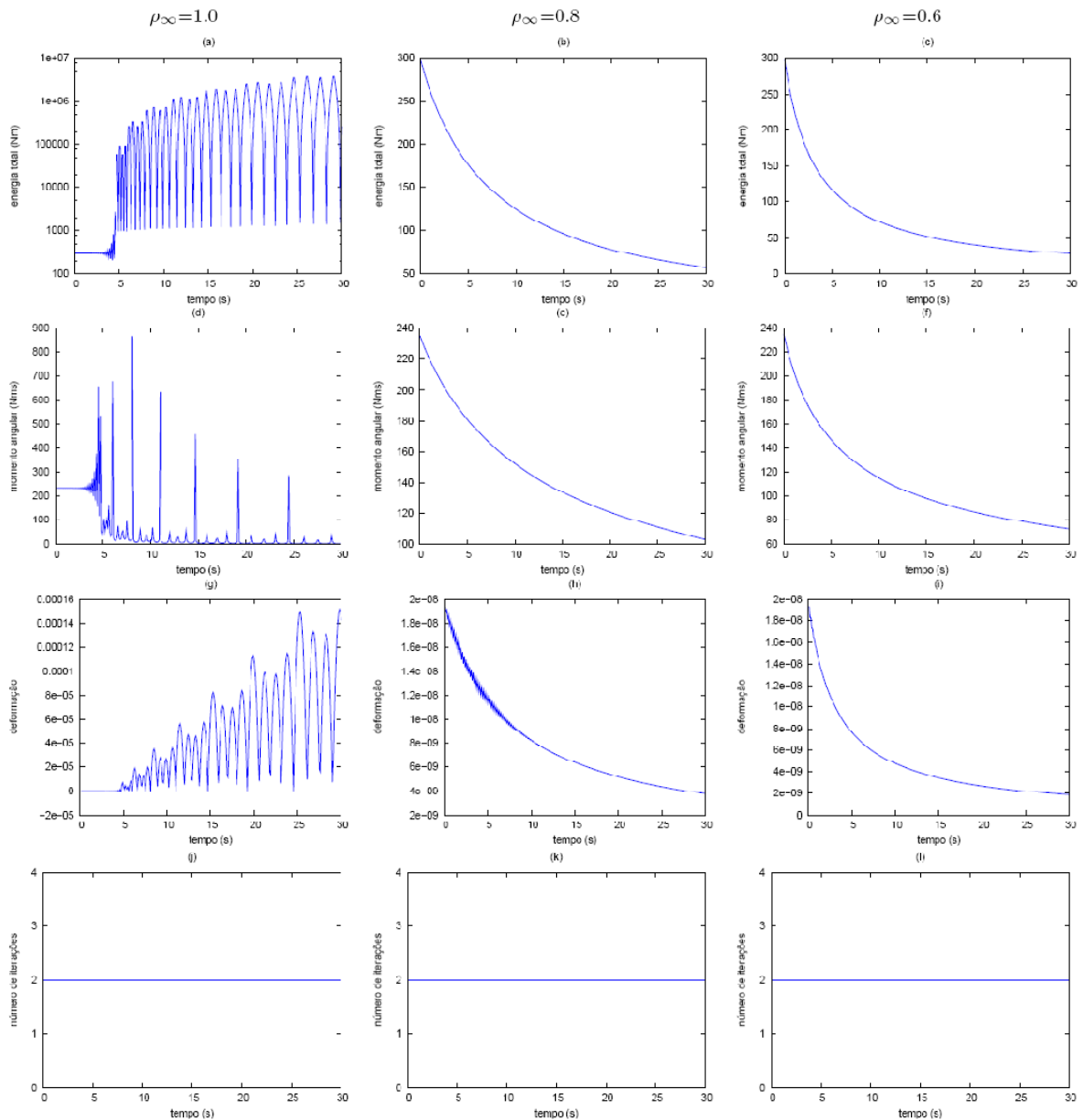


Figura 5.3 – O Pêndulo Rígido. Solução com o esquema de Newmark.

Observa-se também, a partir do tempo de 4 segundos, o crescimento patológico da energia total (5.3a), do momento angular (5.3d) e das deformações (5.3g) para o esquema de Newmark sem dissipação numérica. Apesar desse crescimento anormal das propriedades comentadas, o sistema convergiu, conforme observa-se na Figura 5.3j. Para os amortecimentos numéricos $\rho_{\infty} = 0,8$ e $\rho_{\infty} = 0,6$, o sistema se comportou de forma controlada em todo o intervalo analisado. O decaimento da energia total foi de 84% para $\rho_{\infty} = 0,8$, e 88% para $\rho_{\infty} = 0,6$. O decaimento do momento angular foi de 59% para $\rho_{\infty} = 0,8$ e 70% para $\rho_{\infty} = 0,6$. As amplitudes máximas de deformação foram de 2×10^{-8}

inicialmente, sendo então dissipadas em 80% para $\rho_\infty = 0,8$ e 90% para $\rho_\infty = 0,6$; de acordo com figuras 5.3h e 5.3i.

Conclusão: Considerando-se o pêndulo rígido e o esquema de integração de Newmark, o sistema não se manteve estável para o amortecimento numérico nulo ($\rho_\infty = 1$), apesar de ter convergido, e obteve estabilidade ao se introduzirem as dissipações numéricas. Porém, as amplitudes e períodos foram demasiadamente dissipados, gerando assim grandes erros numéricos em relação ao fenômeno estudado.

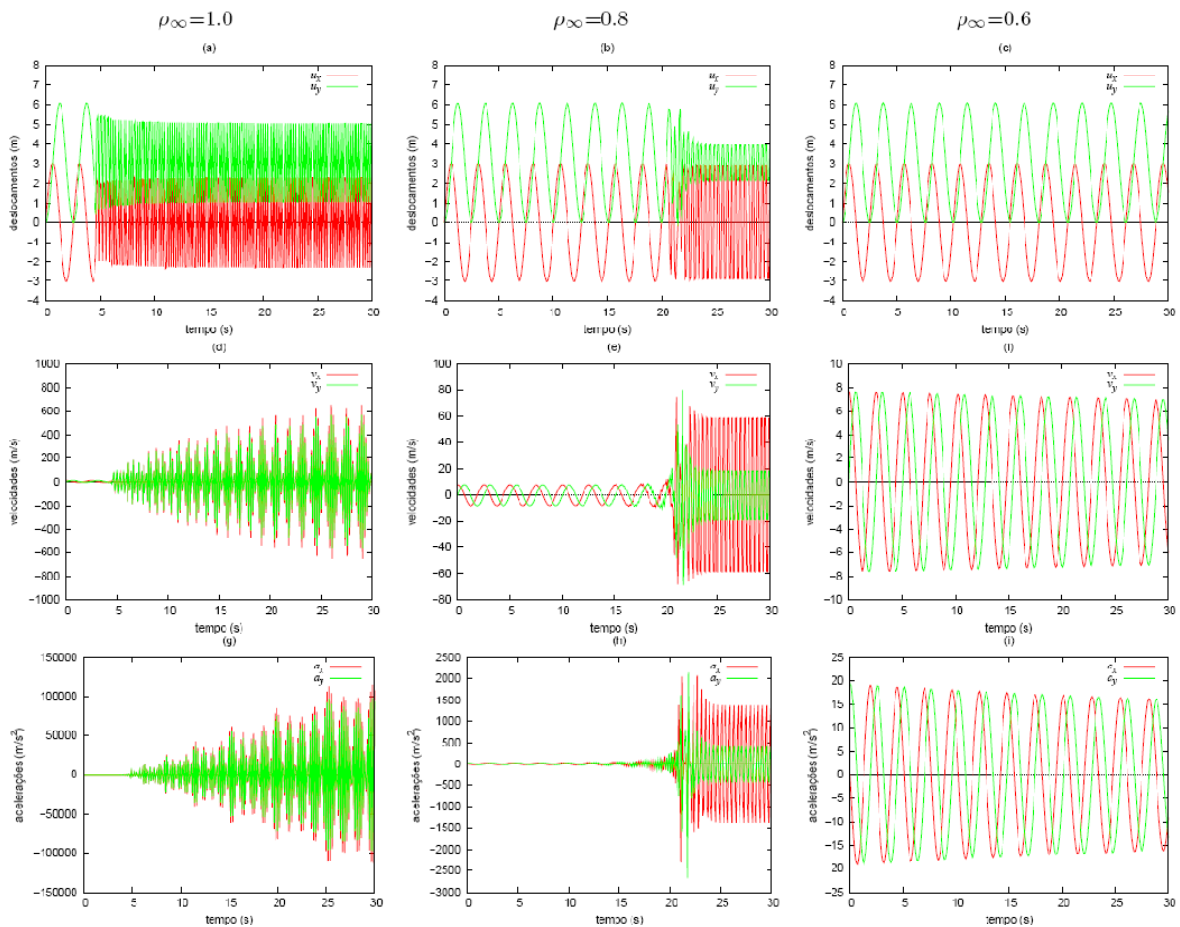


Figura 5.4 – O Pêndulo Rígido. Solução com o esquema α -Bossak.

Para o esquema α de Bossak sem dissipação numérica, percebe-se que os deslocamentos (5.4a), velocidades (5.4d) e acelerações (5.4g) permaneceram estáveis até aproximadamente o tempo de 4 segundos. A partir daí, o sistema tem um crescimento abrupto e descontrolado. Para o amortecimento numérico $\rho_\infty = 0,8$, o sistema se comportou bem até aproximadamente o tempo de 20 segundos, quando a partir daí, teve uma mudança patológica nos seus resultados, conforme figuras 5.4b, 5.4e e 5.4h. Para o

amortecimento $\rho_\infty = 0,6$, o sistema se comportou de forma controlada em todo o intervalo analisado, introduzindo pequenos erros de amplitude e de período, conforme se observa nas Figuras 5.4c, 5.4f e 5.4i.

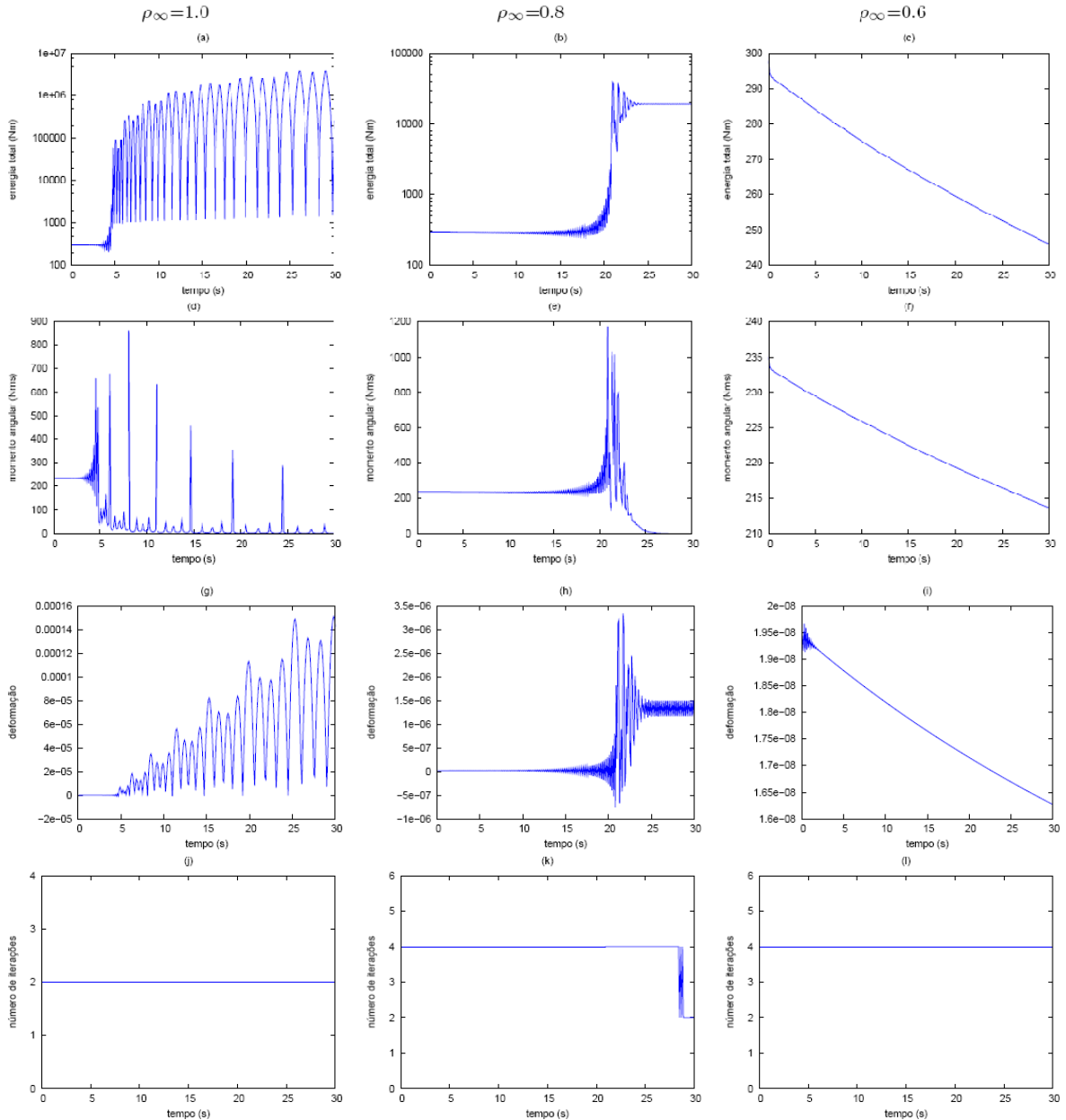


Figura 5.5 – O Pêndulo Rígido. Solução com o esquema α -Bossak.

Observa-se também, a partir do tempo de 4 segundos, o crescimento patológico da energia total (5.5a), do momento angular (5.5d) e das deformações (5.5g) para o esquema α de Bossak sem dissipação numérica. Apesar desse crescimento anormal das propriedades comentadas, o sistema convergiu, conforme se observa na Figura 5.5j. Para o

amortecimento numérico $\rho_\infty = 0,8$, o sistema se comportou bem até aproximadamente o tempo de 20 segundos, quando a partir daí, teve uma mudança patológica nos seus resultados, conforme figuras 5.5b, 5.5e e 5.5h. Ocorreram ainda, pequenos erros de convergência, conforme figura 5.5k. Para o amortecimento $\rho_\infty = 0,6$, o sistema se comportou de forma controlada em todo o intervalo analisado, introduzindo dissipação numérica nas propriedades inicialmente comentadas, conforme se observa nas Figuras 5.5c, 5.5f e 5.5i. O sistema convergiu bem para $\rho_\infty = 0,6$, conforme figura 5.5l. O decaimento da energia total e do momento angular foi de 17% e 9%, respectivamente, para $\rho_\infty = 0,6$. As amplitudes máximas de deformação foram de 2×10^{-8} inicialmente, sendo então dissipadas em 17% para $\rho_\infty = 0,6$, conforme observa-se na figura 5.5i.

Conclusão: Considerando-se o pêndulo rígido e o esquema de integração α de Bossak, o sistema não se manteve estável para o amortecimento numérico nulo ($\rho_\infty = 1$), apesar de ter convergido. Obteve estabilidade parcial ao se introduzir o amortecimento numérico $\rho_\infty = 0,8$ (até aproximadamente 20 segundos), e obteve estabilidade ao se introduzir a dissipação numérica $\rho_\infty = 0,6$. As amplitudes e períodos tiveram poucos erros introduzidos pela dissipação numérica, se comparados ao esquema de Newmark, por exemplo.

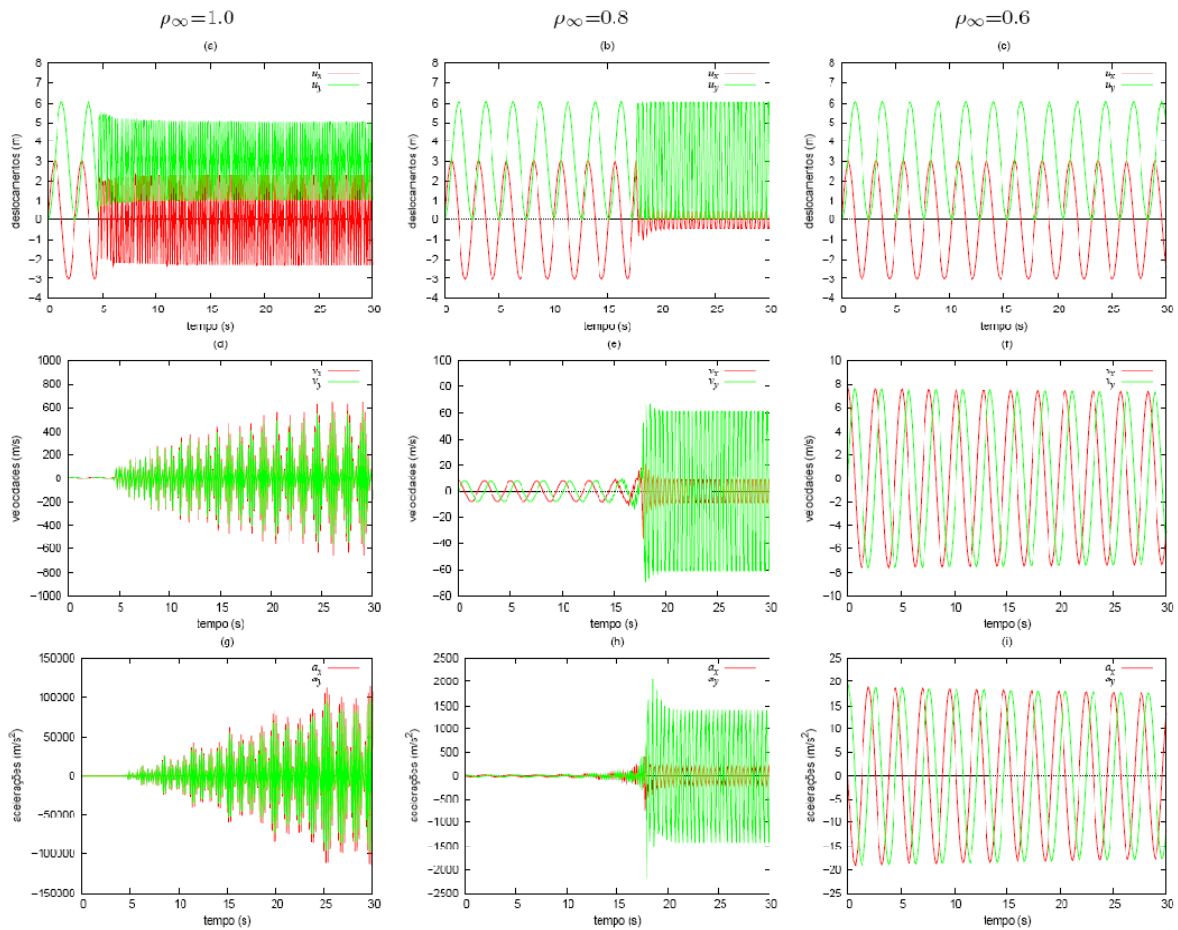


Figura 5.6 – O Pêndulo Rígido. Solução com o esquema α -Hilber (Modo 1).

Para o esquema α de Hilber sem dissipação numérica, percebe-se que os deslocamentos (5.6a), velocidades (5.6d) e acelerações (5.6g) permaneceram estáveis até aproximadamente o tempo de 4 segundos. A partir daí, o sistema tem um crescimento abrupto e descontrolado. Para o amortecimento numérico $\rho_\infty = 0,8$, o sistema se comportou bem até aproximadamente o tempo de 17 segundos, quando a partir daí, apresentou uma mudança patológica nos seus resultados, conforme figuras 5.6b, 5.6e e 5.6h. Para o amortecimento $\rho_\infty = 0,6$, o sistema se comportou de forma controlada em todo o intervalo analisado, introduzindo pequenos erros de amplitude e de período, conforme observa-se nas Figuras 5.6c, 5.6f e 5.6i.

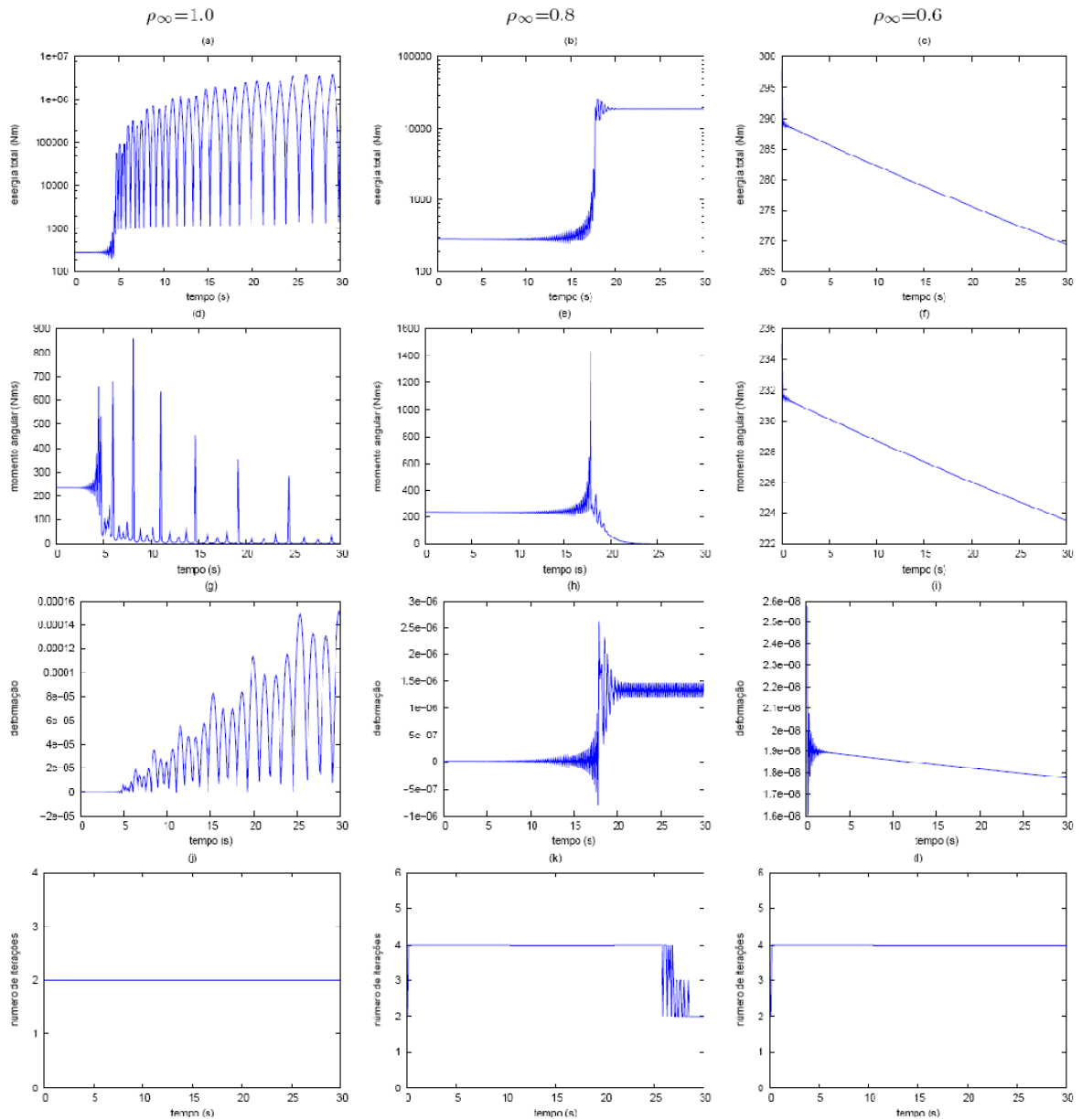


Figura 5.7 – O Pêndulo Rígido. Solução com o esquema α -Hilber (modo 1).

Observa-se também, a partir do tempo de 4 segundos, o crescimento patológico da energia total (5.7a), do momento angular (5.7d) e das deformações (5.7g) para o esquema α de Hilber sem dissipação numérica. Apesar desse crescimento anormal das propriedades comentadas, o sistema convergiu, conforme se observa na Figura 5.7j. Para o amortecimento numérico $\rho_\infty = 0,8$, o sistema se comportou bem até aproximadamente o tempo de 17 segundos, quando a partir daí, teve uma mudança patológica nos seus resultados, conforme figuras 5.7b, 5.7e e 5.7h. Ocorreram ainda, pequenos erros de convergência, conforme figura 5.7k. Para o amortecimento $\rho_\infty = 0,6$, o sistema se comportou de forma controlada em todo o intervalo analisado, introduzindo dissipação

numérica nas propriedades inicialmente comentadas, conforme se observa nas Figuras 5.7c, 5.7f e 5.7i. O sistema convergiu bem para $\rho_\infty = 0,6$, conforme figura 5.7l. O decaimento da energia total e do momento angular foi de 7% e 5%, respectivamente, para $\rho_\infty = 0,6$. As amplitudes máximas de deformação foram de 2×10^{-8} inicialmente, sendo então dissipadas em 11% para $\rho_\infty = 0,6$, conforme se observa na figura 5.7i.

Conclusão: Considerando-se o pêndulo rígido e o esquema de integração α de Hilber, o sistema não se manteve estável para o amortecimento numérico nulo ($\rho_\infty = 1$), apesar de ter convergido. Para o amortecimento numérico $\rho_\infty = 0,8$, o sistema obteve estabilidade parcial menos duradoura que no método α de Bossak (até aproximadamente 17 segundos). Porém, para $\rho_\infty = 0,6$, o sistema introduziu menores erros numéricos de amplitude e período, se comparados ao esquema α de Bossak.

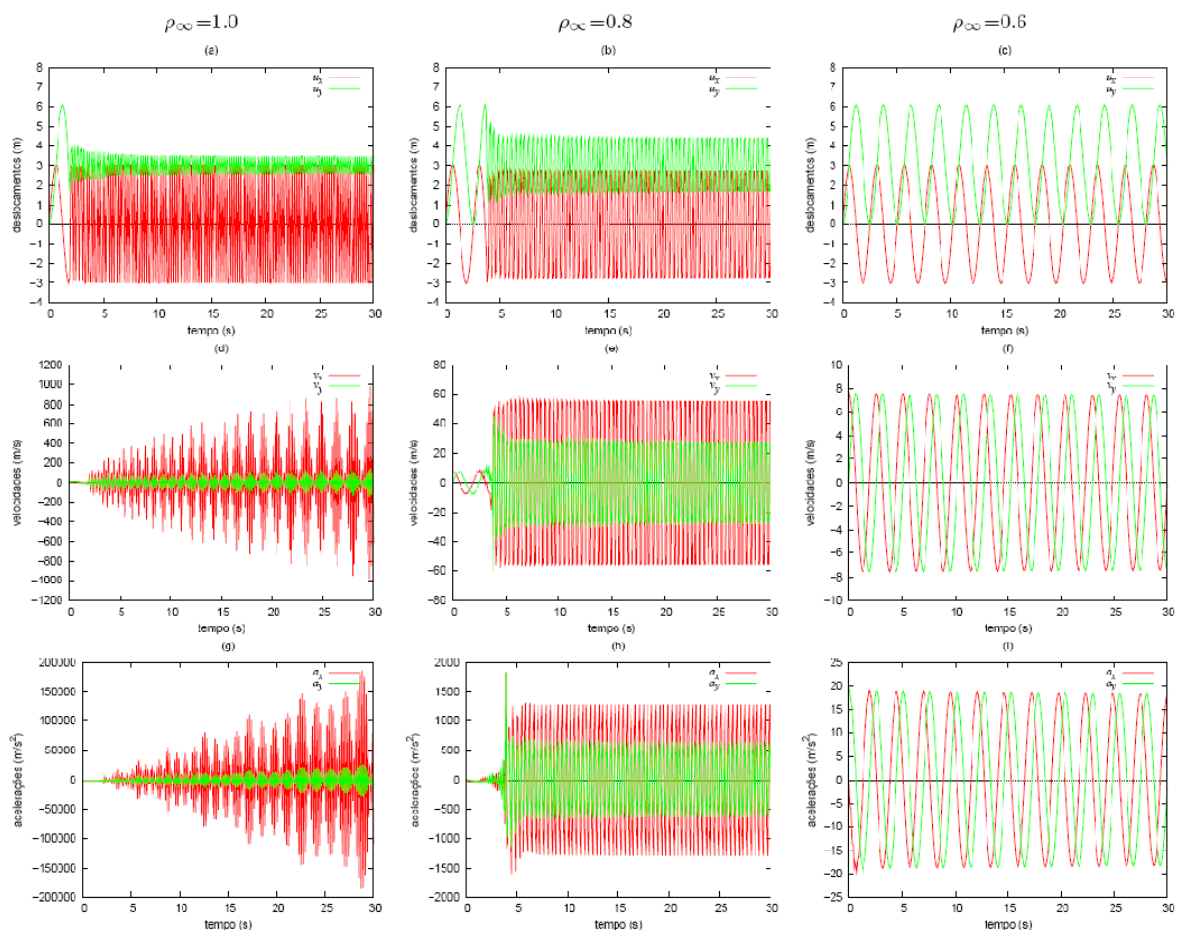


Figura 5.8 – O Pêndulo Rígido. Solução com o esquema α -generalizado (modo 1).

Para o esquema α -generalizado sem dissipação numérica, percebe-se que os deslocamentos (5.8a), velocidades (5.8d) e acelerações (5.8g) permaneceram estáveis até aproximadamente o tempo de 2 segundos; e até o tempo de 4 segundos para o amortecimento numérico $\rho_\infty = 0,8$, conforme figuras 5.8b, 5.8e e 5.8h. A partir daí, o sistema tem um crescimento abrupto e descontrolado. Para o amortecimento $\rho_\infty = 0,6$, o sistema se comportou de forma controlada em todo o intervalo analisado, introduzindo pequenos erros de amplitude e de período, conforme se observa nas Figuras 5.8c, 5.8f e 5.8i.

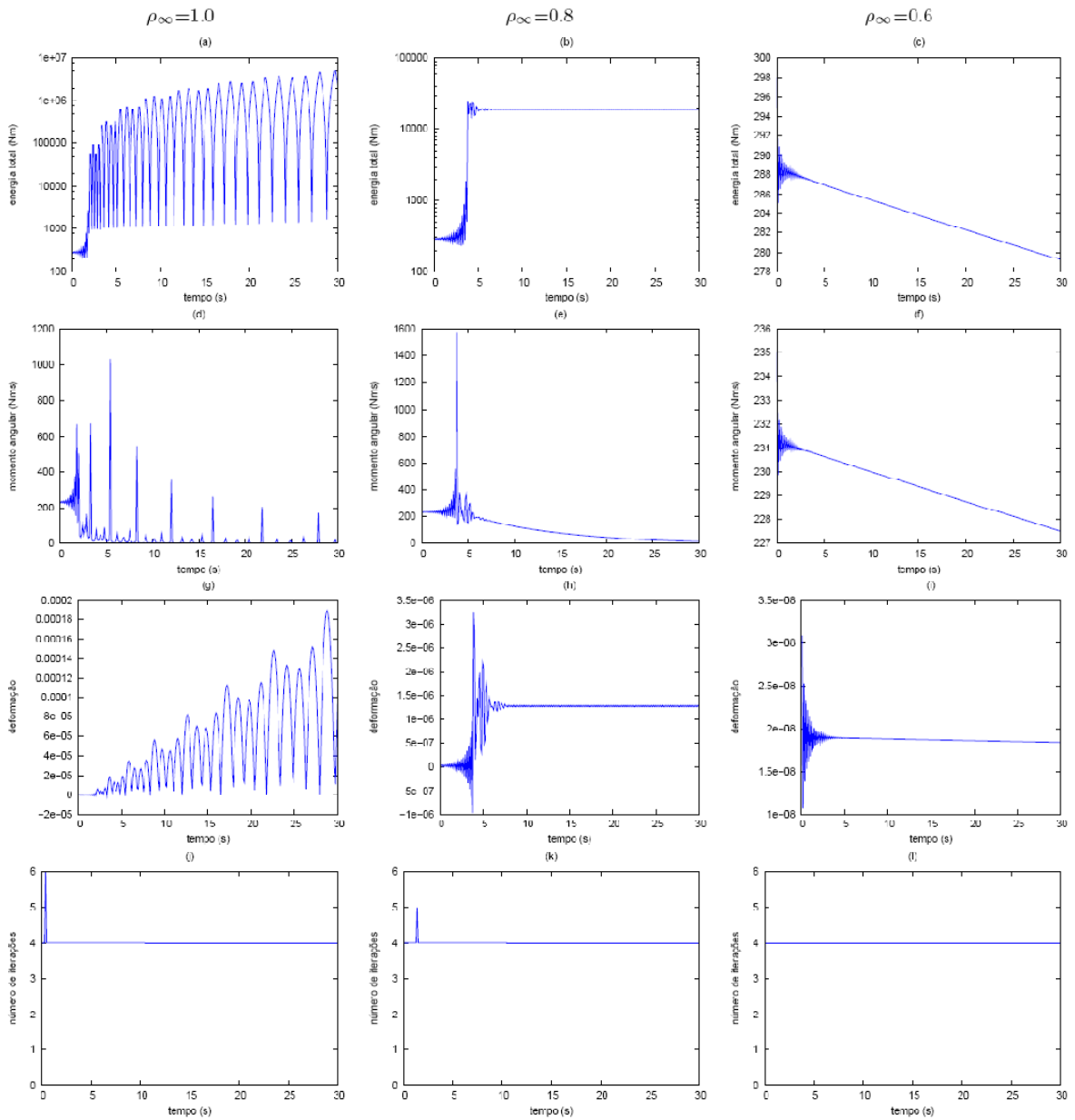


Figura 5.9 – O Pêndulo Rígido. Solução com o esquema α -generalizado (modo 1).

Observa-se também, a partir do tempo de 2 segundos, o crescimento patológico da energia total (5.9a), do momento angular (5.9d) e das deformações (5.9g) para o esquema α -generalizado sem dissipação numérica. Apesar desse crescimento anormal das propriedades comentadas, o sistema apresenta pequena falha de convergência no início, permanecendo depois estável, conforme se observa na Figura 5.9j. Para o amortecimento numérico $\rho_\infty = 0,8$, o sistema obteve crescimento patológico inicialmente ($\Delta t = 2s$), mantendo-se logo após numericamente estável (porém, não mais representa bem as características físicas do problema), conforme figuras 5.9c, 5.9e e 5.9h. Ocorreu ainda, um pequeno erro de convergência, conforme figura 5.9k. Para o amortecimento $\rho_\infty = 0,6$, o sistema se comportou de forma controlada em todo o intervalo analisado (apesar de apresentar perturbações iniciais), introduzindo dissipação numérica nas propriedades inicialmente comentadas, conforme se observa nas Figuras 5.9c, 5.9f e 5.9i. O sistema convergiu bem para $\rho_\infty = 0,6$, conforme figura 5.9l. O decaimento da energia total e do momento angular foi de 4% e 2%, respectivamente, para $\rho_\infty = 0,6$. As amplitudes máximas de deformação foram de 2×10^{-8} inicialmente, sendo mantida praticamente estável para $\rho_\infty = 0,6$, conforme observa-se na figura 5.9i.

Conclusão: Considerando-se o pêndulo rígido e o esquema de integração α -generalizado, o sistema não se manteve estável para o amortecimento numérico nulo ($\rho_\infty = 1$), apesar de ter convergido. Para o amortecimento numérico $\rho_\infty = 0,8$, o sistema obteve estabilidade parcial menos duradoura que no método α de Hilber (até aproximadamente 4 segundos). Porém, para $\rho_\infty = 0,6$, o sistema introduziu menores erros numéricos de amplitude e período, se comparados ao esquema α de Hilber.

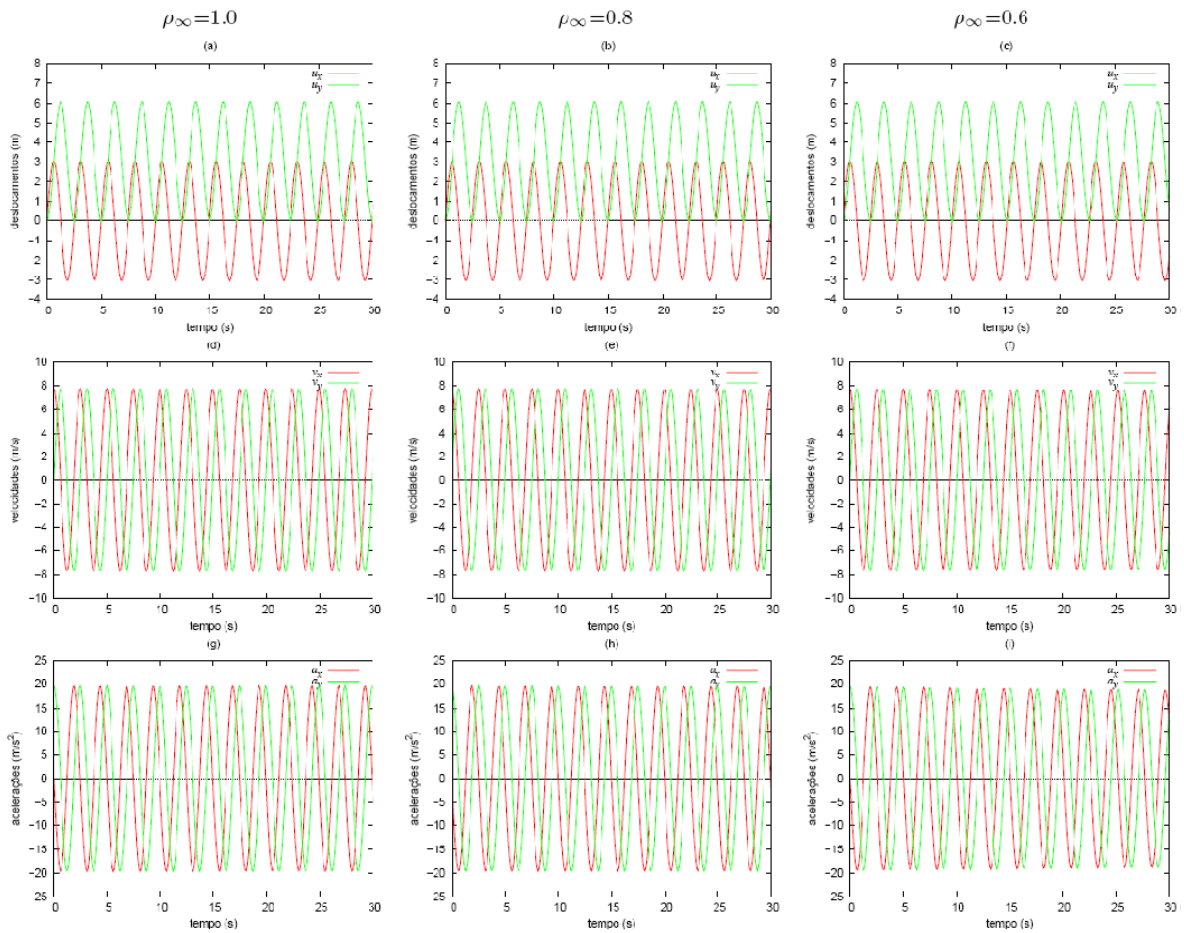


Figura 5.10 – O Pêndulo Rígido. Solução com o esquema energia-momentum generalizado.

Para o esquema energia-momentum generalizado, percebe-se todas as respostas transientes acima apresentadas (deslocamentos, velocidades e acelerações) se mantiveram constantes, sem erros de amplitude ou período, considerando-se ou não os amortecimentos numéricos $\rho_{\infty} = 0,8$ e $\rho_{\infty} = 0,6$. Esses amortecimentos não modificaram a resposta do sistema dinâmico, mantendo-se o mesmo sempre estável e constante, conforme observa-se nas figuras 5.10a a 5.10i.

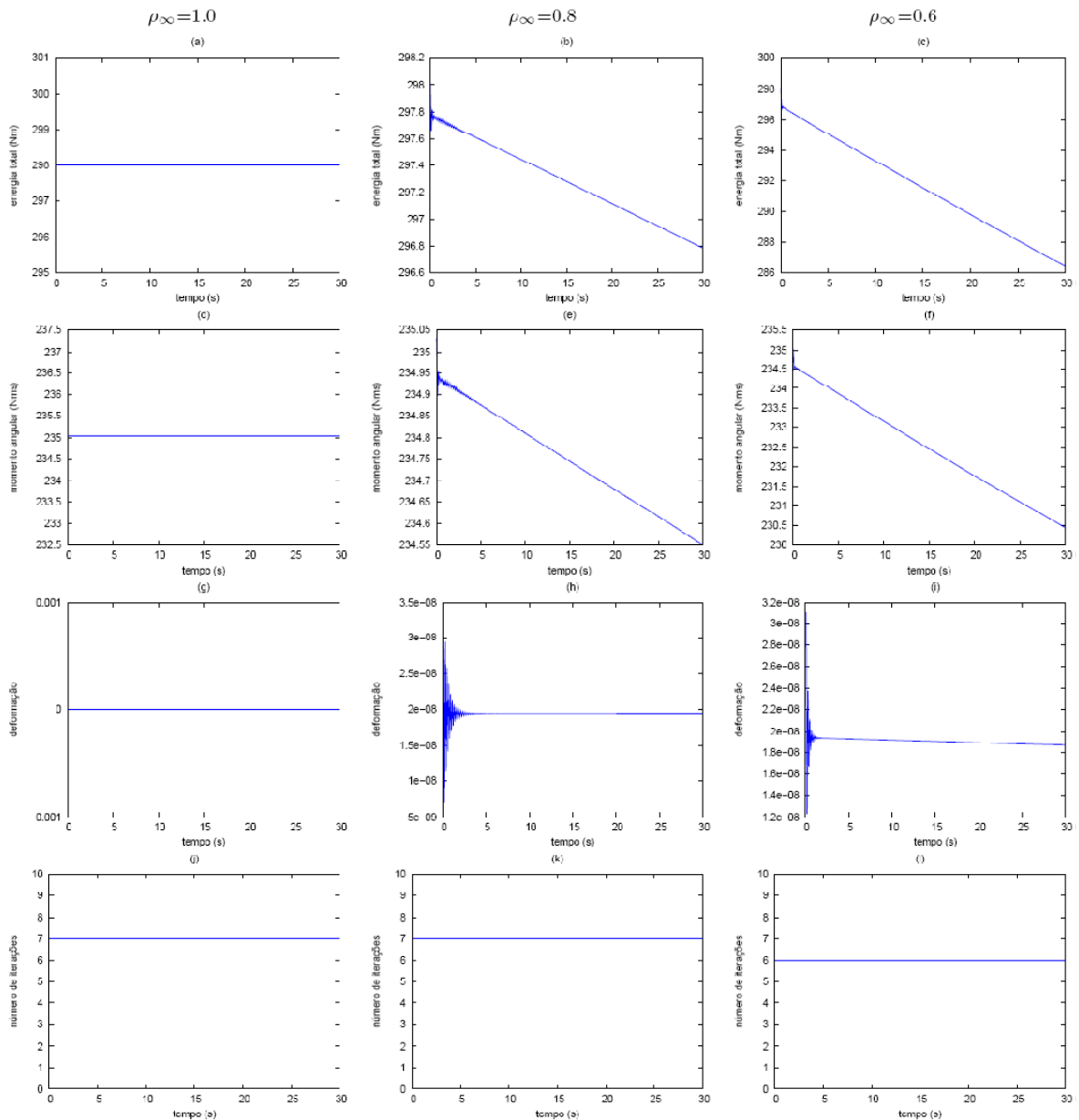


Figura 5.11 – O Pêndulo Rígido. Solução com o esquema Energia-momento generalizado.

Observa-se também, que para o sistema sem amortecimento ($\rho_\infty = 1$), o sistema se manteve estável e constante, no que diz respeito a energia total, momento angular, deformações e convergência; conforme figuras 5.11a, 5.11d, 5.11g e 5.11j. O decaimento da energia total e do momento angular foi de 0,5% e 0,2%, para $\rho_\infty = 0,8$, e de 4% e 1,7% para $\rho_\infty = 0,6$, respectivamente. As amplitudes máximas de deformação foram de 2×10^{-8} inicialmente, sendo mantida praticamente estável para o sistema amortecido e não amortecido, conforme observa-se nas figuras 5.11g, 5.11h e 5.11i.

Conclusão: Considerando-se o pêndulo rígido e o esquema de integração de energia-momentum generalizado, o sistema se manteve estável e praticamente inalterado tanto considerando o amortecimento numérico, como não considerando o mesmo. De todos os métodos numéricos aqui analisados para o caso do pêndulo rígido, esse é o mais estável e confiável.

5.3 – Pêndulo elástico:

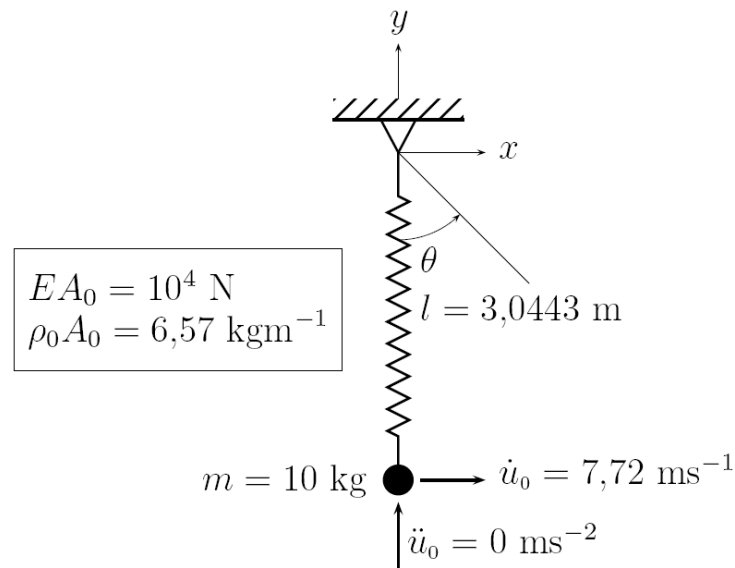


Figura 5.12: O pêndulo elástico. Características geométricas e físicas.

Este exemplo foi analisado por KUHLE & CRISFIELD [1999], entre outros autores. As características geométricas e físicas, as condições iniciais, as condições de contorno e demais dados do problema encontram-se na Figura 5.12. O pêndulo foi discretizado com um elemento de barra bi-articulado 2D, tendo 2 graus de liberdade restringidos e 2 graus de liberdade livres. Neste exemplo considera-se o pêndulo elástico com uma rigidez axial de $EA_0 = 10^4 \text{ N}$. Considera-se a massa concentrada no nó livre do pêndulo. Por outro lado, não se considera a ação gravitacional, portanto, não há forças externas atuando sobre o nó livre do pêndulo, e conseqüentemente, a energia potencial total e o momento angular permanecem constantes ao longo do tempo. A energia potencial total é dada por $\pi_0 = \frac{1}{2} m \dot{u}_0^2 = 298 \text{ Nm}$ e o momento angular é igual a $\mathcal{H}_0 = l m \dot{u}_0 = 235 \text{ Nm s}$. O período do pêndulo, correspondente a resposta em baixa frequência, é dado por $T = \pi \sqrt{\frac{2l}{g}} = 2.47 \text{ s}$,

que corresponde a uma volta completa de 360° . Adicionalmente, há uma oscilação axial de alta frequência cujo período é igual a $T = 0,28s$. Para capturar esta oscilação axial adotou-se o seguinte passo de tempo $\Delta t = 0,05s$. Fez-se a análise durante um intervalo de tempo de 30s para $\rho_\infty = 1$, $\rho_\infty = 0.8$ e $\rho_\infty = 0.6$. A seguir apresentam-se os resultados obtidos para o pêndulo elástico.

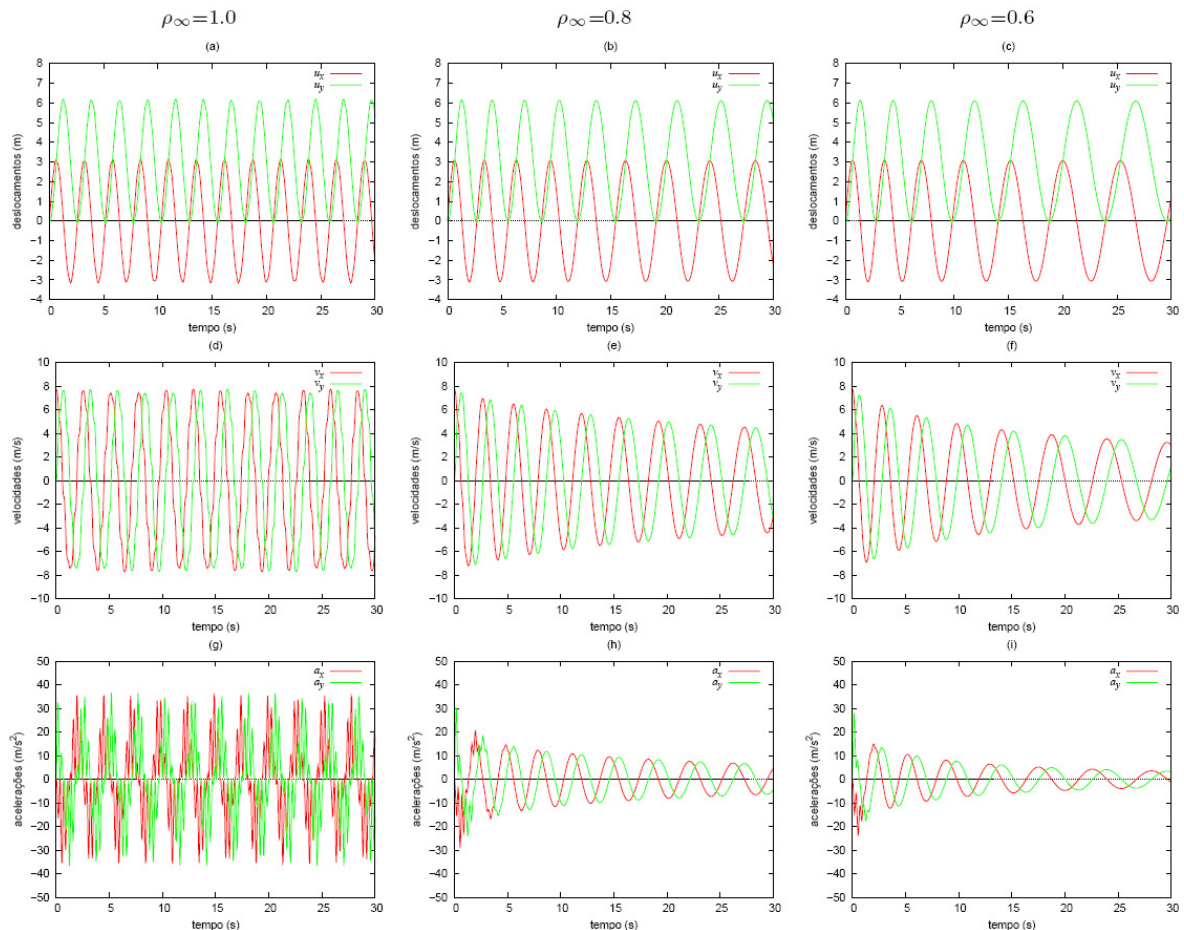


Figura 5.13 – O Pêndulo Elástico. Solução com o esquema de Newmark.

Para o esquema de Newmark sem dissipação numérica, percebe-se que os deslocamentos (5.13a) e velocidades (5.13d) permaneceram estáveis e controlados durante todo o intervalo de tempo analisado. As acelerações permaneceram estáveis dentro de um limite de amplitude, porém apresentaram disfunções de frequência localizadas, conforme figura 5.13g. Para o amortecimento numérico $\rho_\infty = 0,8$, o sistema se comportou de forma estável e controlada do que diz respeito aos deslocamentos, apresentando erros muito pequenos de amplitude e período, conforme se observa na figura 5.13b. As velocidades se mantiveram controladas apresentando, porém, maiores erros de amplitude e período

introduzidos numericamente no sistema (5.13e). Já as acelerações, apresentaram correção das disfunções de frequência localizadas (que existiam no caso sem dissipação numérica, $\rho_\infty = 1$), apesar de serem introduzidos erros numéricos de amplitude e período (5.13h). Para o amortecimento numérico $\rho_\infty = 0,6$, o sistema se comportou similarmente ao amortecimento $\rho_\infty = 0,8$, com o acréscimo de erros de amplitude e período introduzidos nos deslocamentos (que eram menores nos casos de amortecimento numérico $\rho_\infty = 0,8$), conforme se observa nas figuras 5.13c, 5.13f e 5.13i.

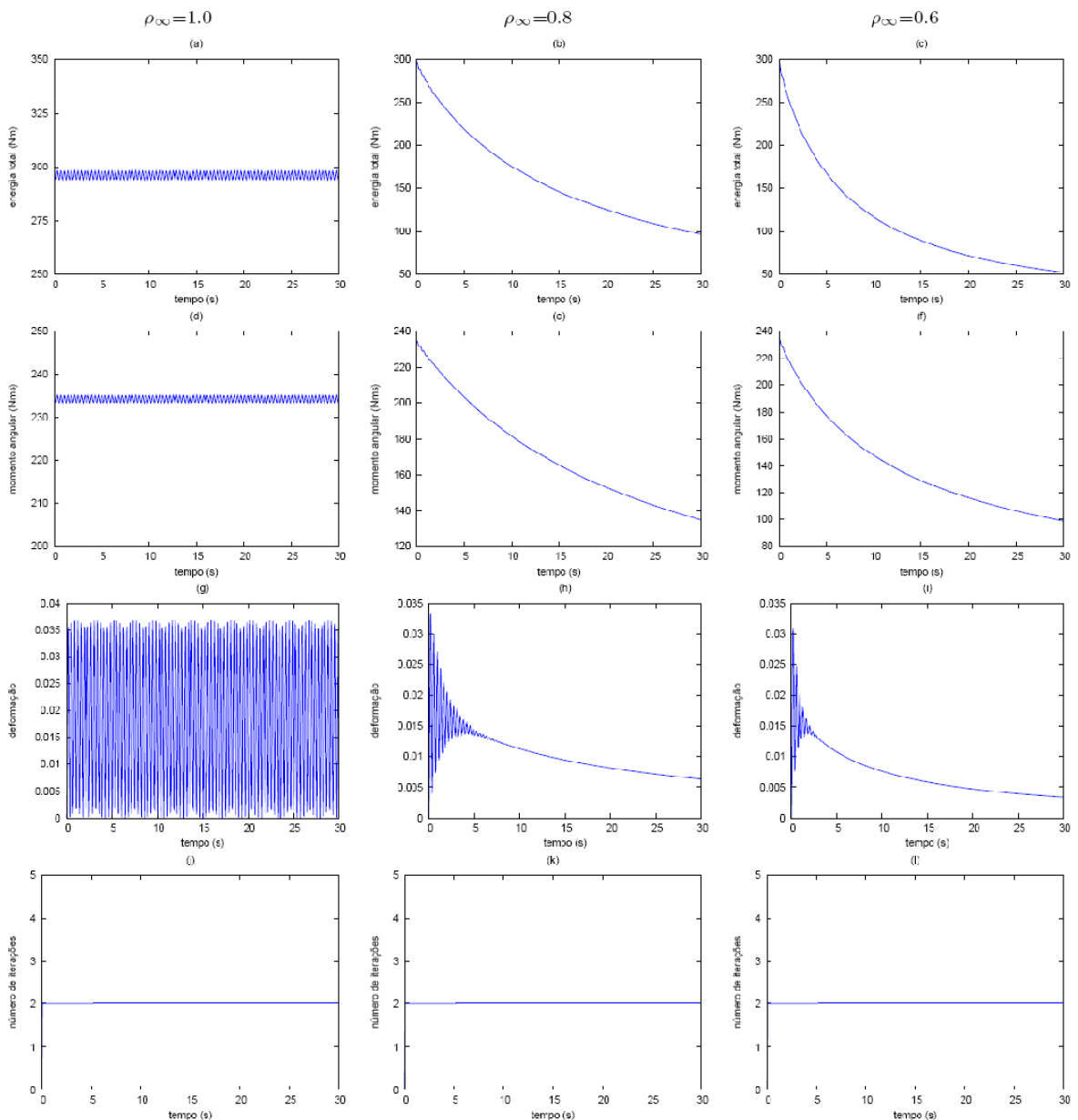


Figura 5.14 – O Pêndulo Elástico. Solução com o esquema de Newmark.

Observa-se que, para o sistema de Newmark sem amortecimento numérico, a energia total e o momento angular do sistema permanecem delimitados dentro de uma estreita faixa constante e linear (os valores são quase constantes), conforme se pode observar nas figuras 5.14a e 5.14d, respectivamente. As deformações variam em alta frequência ao longo de uma longa faixa de variação, entre o valor de 0,04 e zero. Para os sistemas com amortecimento numérico $\rho_{\infty} = 0,8$ e $\rho_{\infty} = 0,6$, o sistema comporta-se bem, apresentando grandes dissipações numéricas da energia total e do momento angular, sendo reduzidos em 77% e 42% dos seus valores para $\rho_{\infty} = 0,8$, respectivamente; e em 84% e 59% dos seus valores para $\rho_{\infty} = 0,6$, respectivamente; conforme figuras 5.14b, 5.14c, 5.14e e 5.14f. As deformações apresentaram melhor comportamento, sendo dissipadas numericamente em uma curva suave e contínua ao longo do tempo analisado. Estas eram da ordem de 0,035 inicialmente, sendo reduzidas em 83% para $\rho_{\infty} = 0,8$, e em 88% para $\rho_{\infty} = 0,6$; conforme figuras 5.14h e 5.14i. Note que estas deformações iniciais são maiores que as deformações verificadas para o pêndulo rígido. O sistema convergiu bem tanto nos casos amortecidos quanto do caso não amortecido; conforme figuras 5.14j, 5.14k e 5.14l.

Conclusão: Considerando-se o pêndulo elástico e o esquema de integração de Newmark, o sistema se manteve estável na maioria dos casos (mesmo sem amortecimento numérico), apesar de terem dissipado demasiadamente as amplitudes e os períodos dos deslocamentos, velocidades e acelerações; assim como a energia total, o momento angular e a deformação.

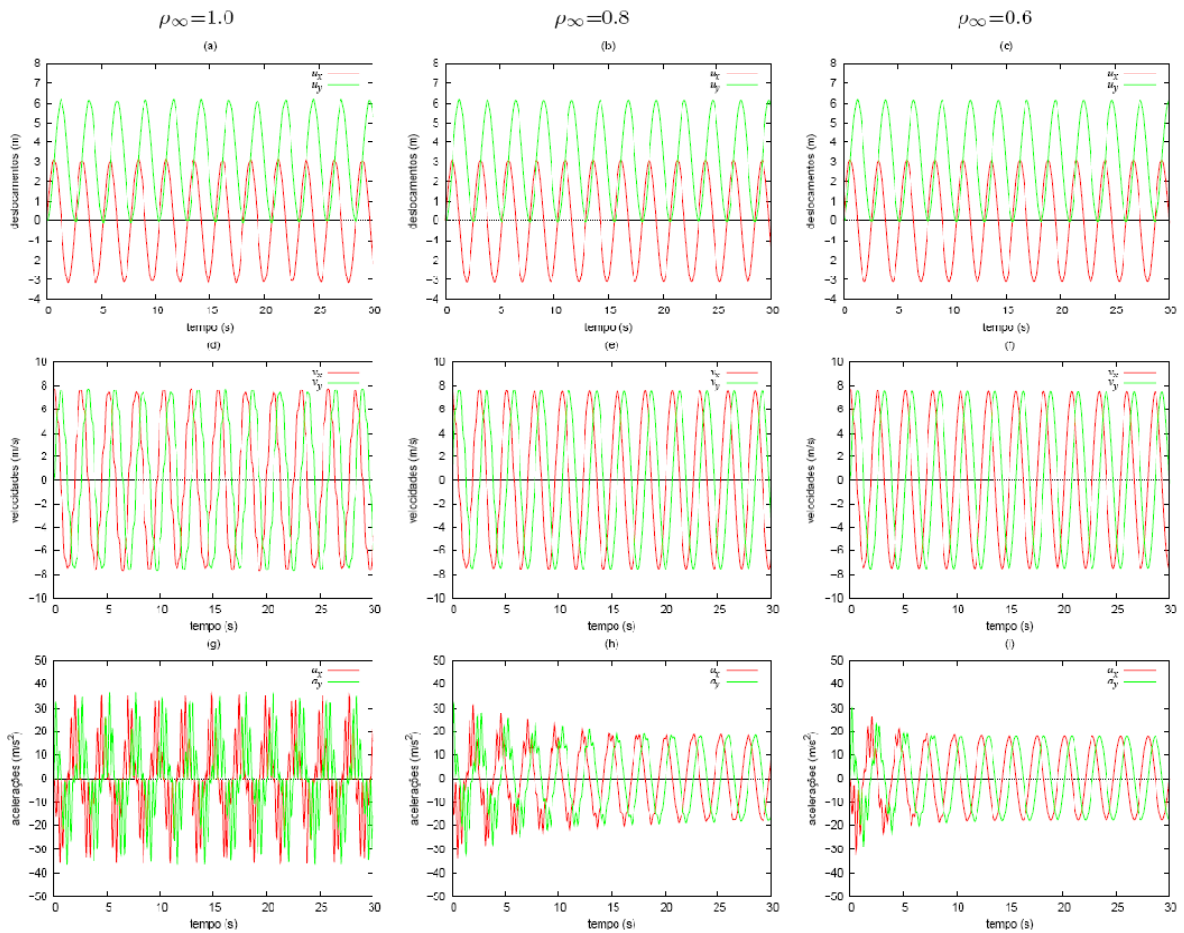


Figura 5.15 – O Pêndulo Elástico. Solução com o esquema α -Bossak.

Para o esquema α de Bossak sem dissipação numérica, percebe-se que os deslocamentos (5.15a) e velocidades (5.15d) permaneceram estáveis e controlados durante todo o intervalo de tempo analisado. As acelerações permaneceram estáveis dentro de um limite de amplitude, porém apresentaram disfunções de freqüência localizadas, conforme figura 5.15g. Para os amortecimentos numéricos $\rho_\infty = 0,8$ e $\rho_\infty = 0,6$, o sistema também se comportou de forma satisfatória, corrigindo-se as disfunções apresentadas para as acelerações no caso sem amortecimento e introduzindo erros de dissipação numérica praticamente nulos (dissipação numérica de baixas freqüências), bem menores que para o algoritmo de Newmark, conforme se observa nas figuras 5.15b, 5.15c, 5.15e, 5.15f, 5.15h e 5.15j.

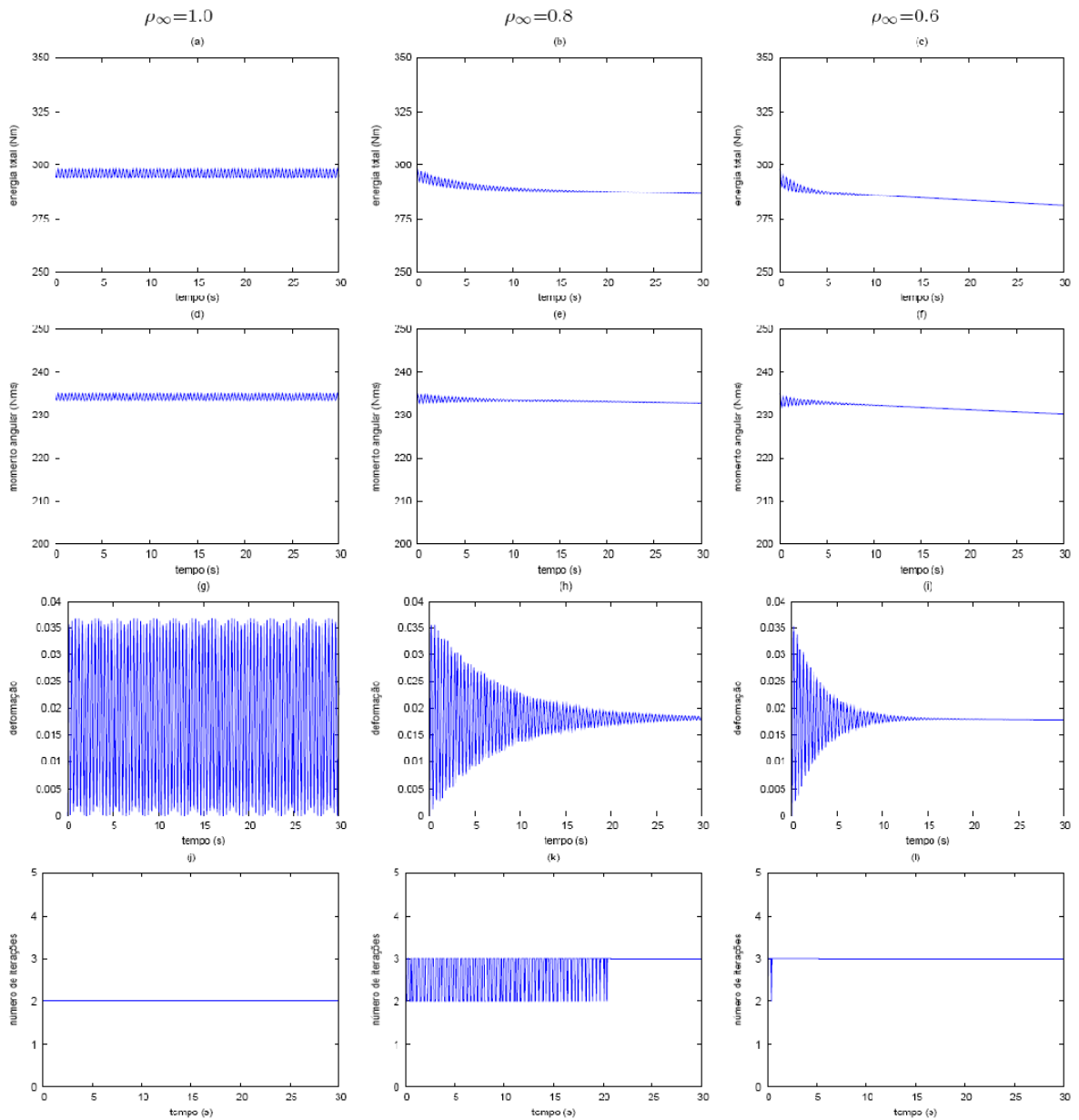


Figura 5.16 – O Pêndulo Elástico. Solução com o esquema α -Bossak.

Observa-se que, para o sistema α de Bossak sem amortecimento numérico, a energia total e o momento angular do sistema permanecem delimitados dentro de uma estreita faixa constante e linear (os valores são quase constantes), conforme pode-se observar nas figuras 5.16a e 5.16d, respectivamente. As deformações variam em alta frequência ao longo de uma longa faixa de variação, entre o valor de 0,04 e zero. O objetivo numérico, nesse caso, seria dissipar ao máximo as altas frequências; o que podemos observar no fenômeno da deformação para os casos amortecidos ($\rho_\infty = 0,8$ e $\rho_\infty = 0,6$), onde o sistema delimita-se por curvas assíntotas tendendo a um valor constante de 0,02; conforme se observa nas figuras 5.16h e 5.16i. Considerando-se esses mesmos

amortecimentos numéricos para a energia total e para o momento angular, percebe-se que a pequena oscilação de alta frequência foi dissipada, e os erros numéricos introduzidos foram muito pequenos (menores que os erros introduzidos com o método de Newmark); atingindo uma redução em torno de 5% para a energia total ($\rho_\infty = 0,6$) e 1% para o momento angular ($\rho_\infty = 0,6$); conforme se pode observar nas figuras 5.16c e 5.16f. O sistema convergiu sem erros no caso sem amortecimento e apresentou pequenas perturbações iniciais nos casos amortecidos, conforme figuras 5.16j, 5.16k e 5.16l.

Conclusão: Considerando-se o pêndulo elástico e o esquema de integração α de Bossak, o sistema se manteve estável em todos os casos, dissipando bem as altas frequências e muito pouco as baixas frequências. Ocorreram ainda pequenos erros de dissipação numérica introduzidos (da ordem de 1 a 5%) pela dissipação das altas frequências. As acelerações ainda levaram um bom intervalo de tempo para serem corrigidas e o sistema apresentou pequenas perturbações de convergência inicial para os casos amortecidos. No geral, o algoritmo se comportou melhor que Newmark.

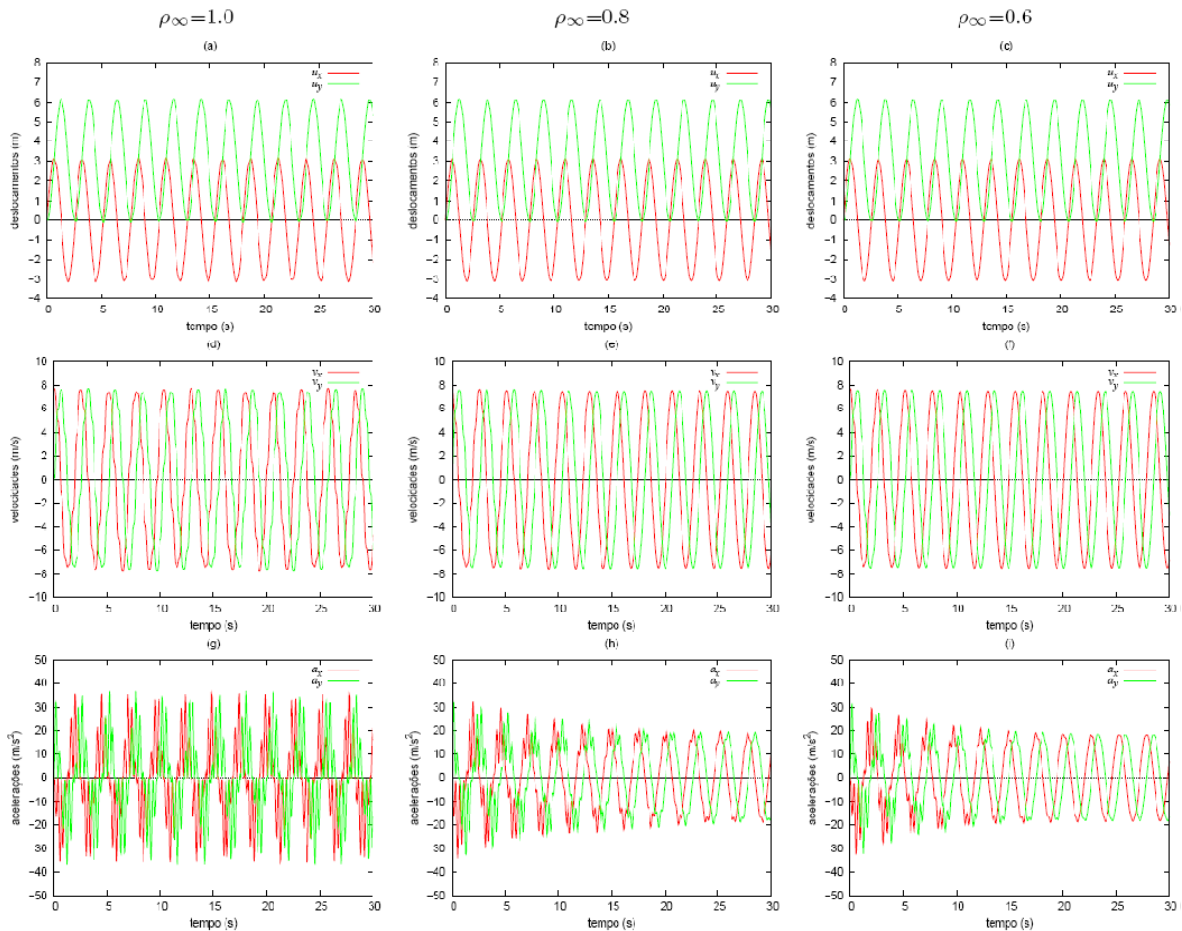


Figura 5.17 – O Pêndulo Elástico. Solução com o esquema α -Hilber (modo 1).

Para o esquema α de Hilber, percebe-se um bom comportamento nas respostas transientes (deslocamentos, velocidades), dissipando as altas frequências e conservando as baixas frequências, mesmo no caso sem amortecimento numérico ($\rho_\infty = 1$), conforme observa-se nas figuras 5.17a a 5.17f. Para as acelerações, o sistema apresentou pequenas disfunções localizadas em alta frequência, não apresentando porém, crescimento desmedido da solução. A introdução do amortecimento numérico corrigiu essas disfunções localizadas, conforme observa-se nas figuras 5.17g, 5.17h e 5.17i.

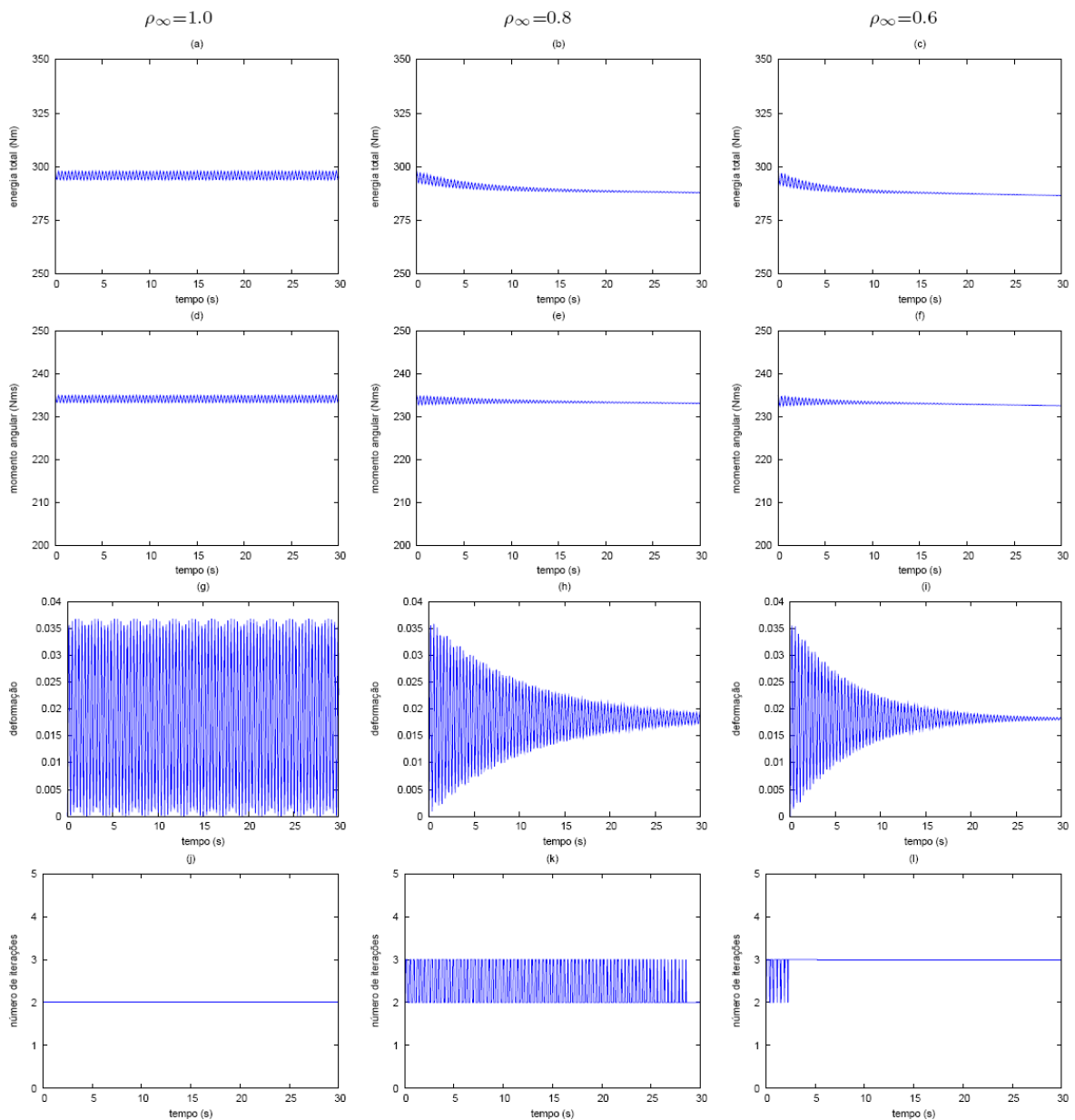


Figura 5.18 – O Pêndulo Elástico. Solução com o esquema α -Hilber (modo 1).

O sistema α de Hilber sem amortecimento numérico comportou-se de forma bastante similar ao sistema α -Bossak. Considerando-se os dois amortecimentos numéricos, a diferença básica entre esses sistemas é quanto aos erros de dissipação numérica introduzidos para a energia total e o momento angular que são praticamente imperceptíveis (menores que em α -Bossak). Quanto à convergência, a introdução do amortecimento numérico provocou perturbações em praticamente todo o intervalo analisado, no caso $\rho_\infty = 0,8$; e no início do intervalo de tempo para $\rho_\infty = 0,6$, conforme figuras 5.18j, 5.18k e 5.18l.

Conclusão: Considerando-se o pêndulo elástico e o esquema de integração α de Hilber, percebe-se que esse sistema comporta-se de forma muito semelhante ao sistema α -Bossak; introduzindo, porém, menores erros de dissipação numérica para as altas frequências. O sistema apresenta pequenas perturbações na sua convergência (controladas e delimitadas) para os casos amortecidos.

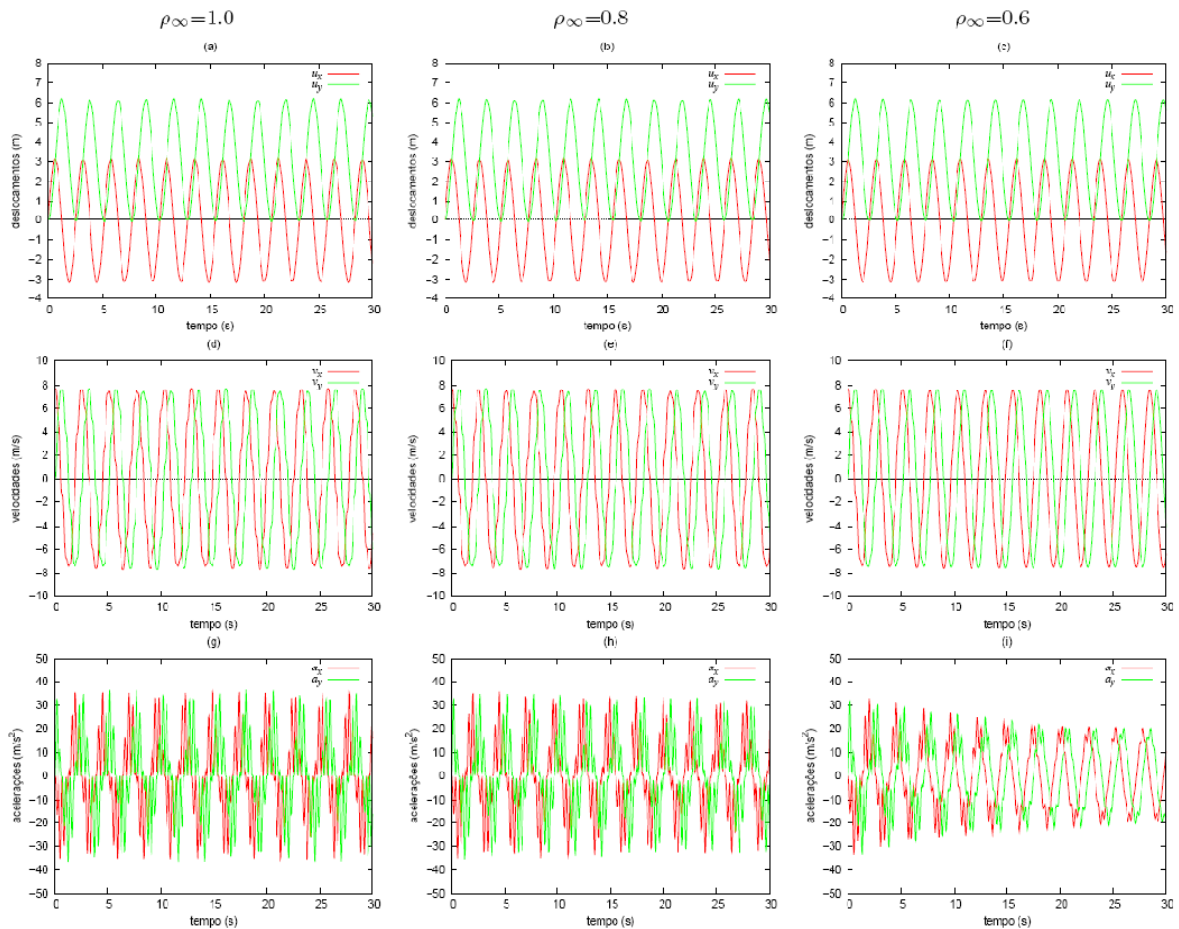


Figura 5.19 – O Pêndulo Elástico. Solução com o esquema α -generalizado (modo 1).

Para o esquema α -generalizado, a dissipação das altas frequências localizadas das acelerações não foi eficaz para o caso sem amortecimento e com amortecimento $\rho_\infty = 0,8$, comportando-se de forma inferior ao método α -Hilber (anterior), conforme figuras 5.19g, 5.19h e 5.19i. Já para o amortecimento $\rho_\infty = 0,6$ as disfunções localizadas foram dissipadas e as baixas frequências mantidas.

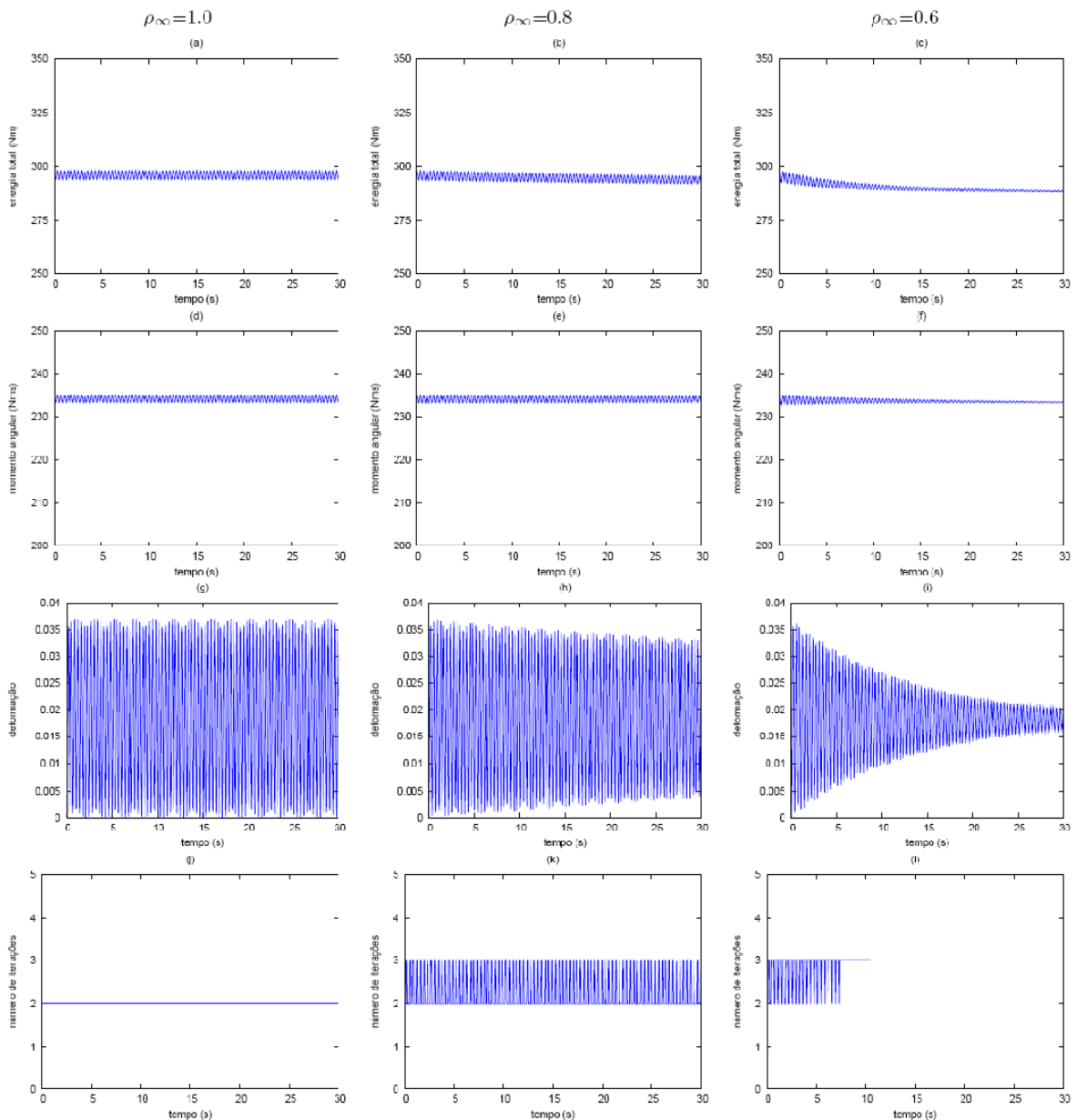


Figura 5.20 – O Pêndulo Elástico. Solução com o esquema α -generalizado (modo 1).

Percebe-se que, a diferença básica entre os resultados numéricos desse algoritmo e os resultados do algoritmo anterior (α -Hilber) é quanto as dissipações das deformações que

foram melhor dissipadas no caso α -Hilber (dissipações numéricas de alta frequência), conforme observa-se nas figuras 5.20g, 5.20h e 5.20i.

Conclusão: Considerando-se o pêndulo elástico e o esquema de integração α -generalizado, percebe-se que esse sistema comporta-se de forma muito semelhante aos sistemas α -Bossak e α -Hilber, anteriormente apresentados.

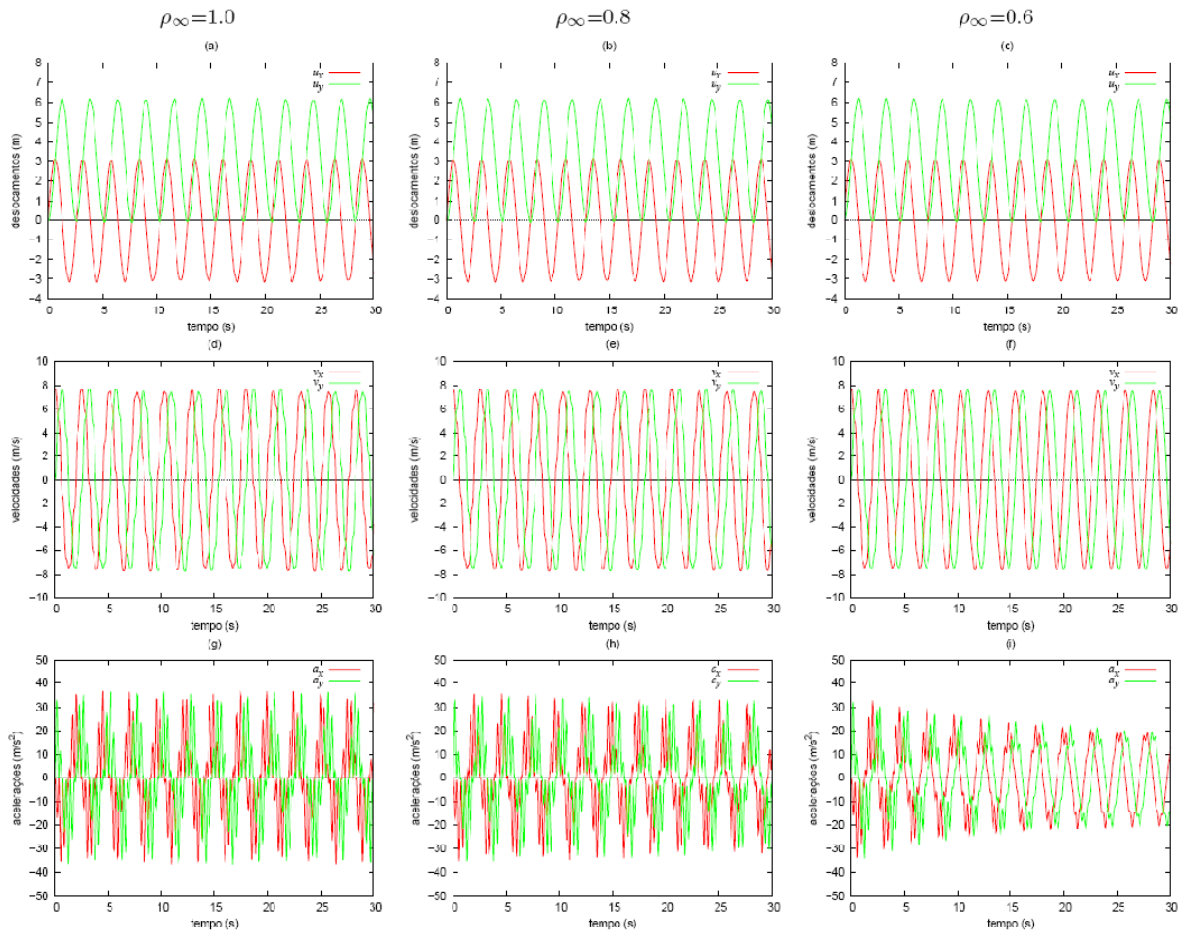


Figura 5.21 – O Pêndulo Elástico. Solução com o esquema energia-momentum generalizado.

Para o esquema energia-momentum generalizado, percebe-se um bom comportamento nas análises transientes dos deslocamentos e velocidades (figuras 5.21a a 5.21f), mantendo as baixas frequências bastante estáveis tanto para os casos amortecidos quanto para os casos não-amortecidos. As acelerações continuam apresentando perturbações em alta frequência localizadas, sendo então corrigidas para o amortecimento $\rho_\infty = 0,6$, a exemplo do método α -generalizado.

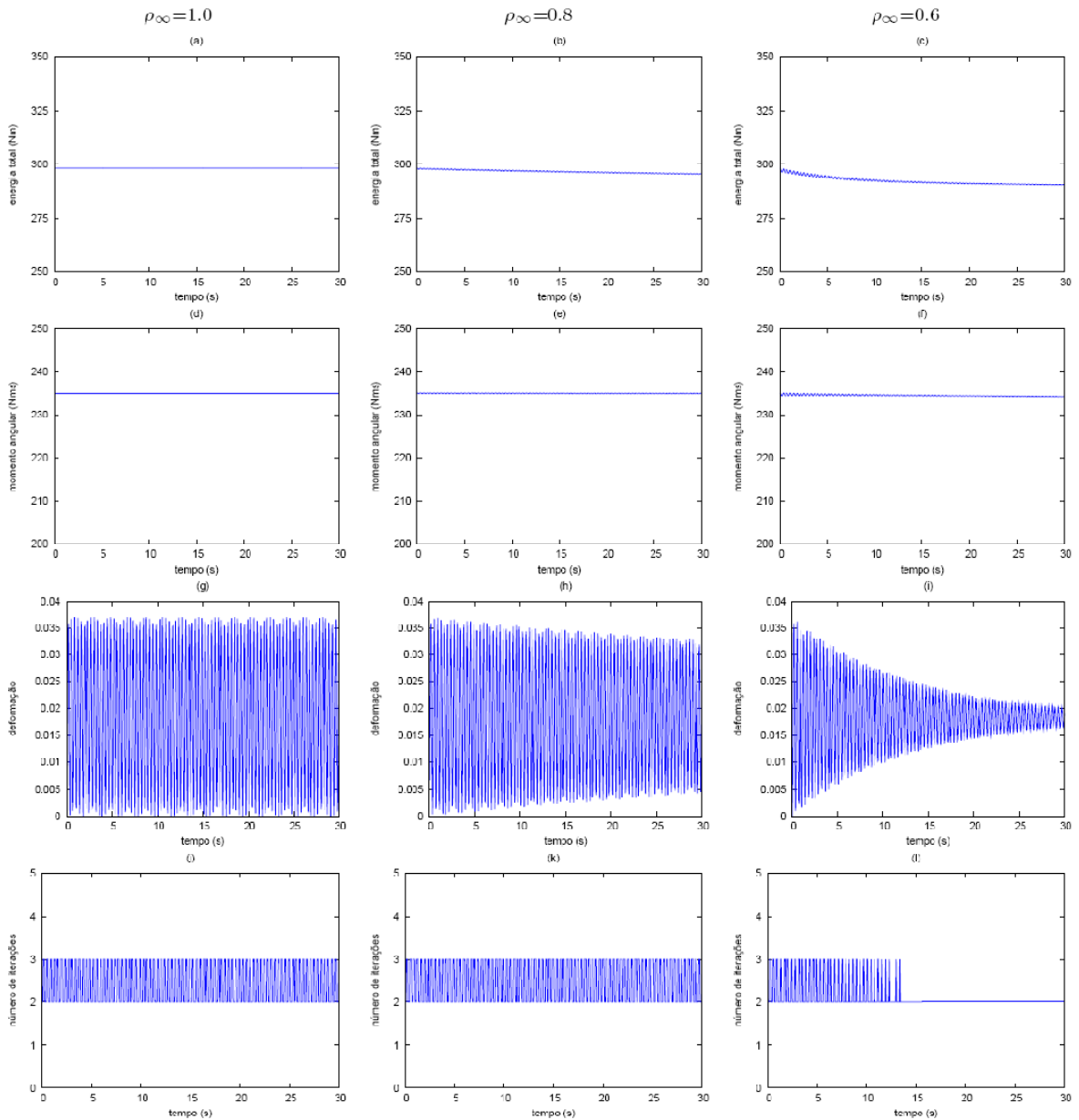


Figura 5.22 – O Pêndulo Elástico. Solução com o esquema energia-momentum generalizado.

Para este caso, percebe-se que as pequenas perturbações de alta frequência para a energia total e momento angular já praticamente não existem mais (aproximando o gráfico de uma reta) tanto para o caso amortecido, quanto não amortecidos (figuras 5.22a a 5.22f). Já as perturbações de convergência aumentaram, ficando o número de iterações sempre mantido entre 2 ou 3 ao longo do intervalo analisado; conforme se observa nas figuras 5.22j, 5.22k e 5.22l.

Conclusão: Considerando-se o pêndulo elástico e o esquema de integração energia-momentum generalizado, conclui-se que, apesar das oscilações de convergência serem maiores que nos outros 4 casos anteriormente estudados, esse é o método que melhor se comporta, dissipando mais as altas frequências, introduzindo os menores erros de dissipação numérica (após dissipadas as altas frequências) e dissipando menos as baixas frequências.

5.4 – Sistema com 5 massas concentradas ligadas por barras rígidas

Este exemplo foi analisado por CRISFIELD & SHI [1994]. Trata-se de um sistema composto por 5 massas concentradas conectadas por meio de fios leves e inextensíveis. As características geométricas e físicas, as condições iniciais, as condições de contorno e demais dados do problema encontram-se na Figura 5.23.

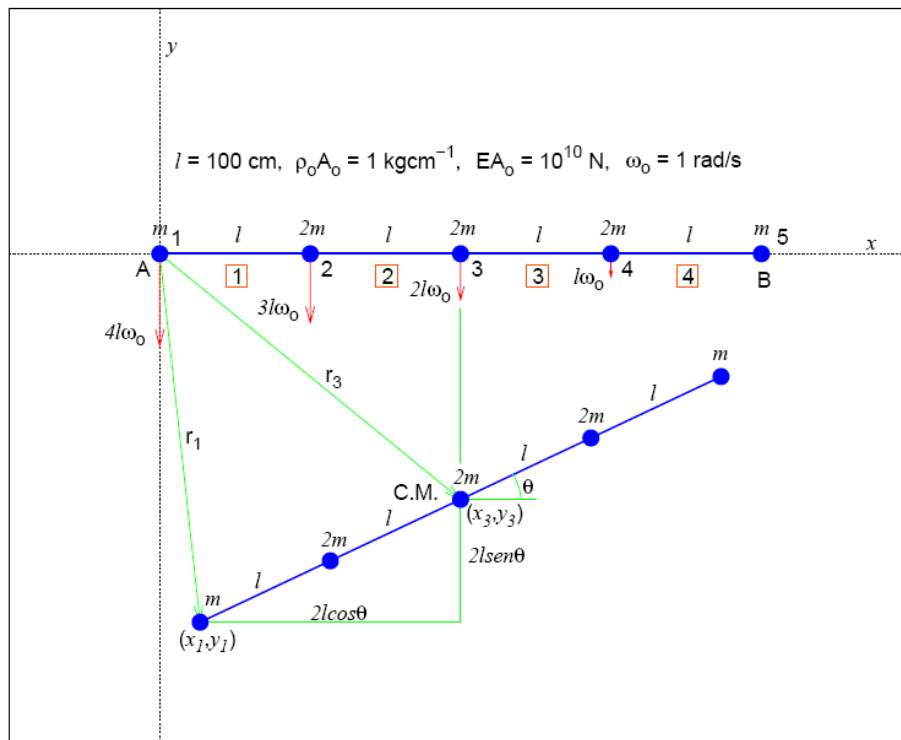


Figura 5.23 – Sistema com 5 massas concentradas ligadas por barras rígidas e leves.

Como condições iniciais impõe-se uma velocidade angular constante, $\omega_0 = \dot{\theta}_0 = 1 \text{ rads}^{-1}$, em torno de um eixo que contém o pólo B (nó 5) paralelo ao eixo z, e aceleração angular nula, $\alpha_0 = \ddot{\theta}_0 = 0$. Este sistema foi discretizado com 4 elementos de barra bi-

articulado 2D, possui 5 nós e 10 graus de liberdade livres. Não há nós restringidos. Não se leva em conta a ação gravitacional, portanto, a energia potencial total e o momento angular mantêm-se constantes ao longo do tempo. Devido às condições iniciais e de contorno, este sistema descende na direção vertical, eixo y , e rotaciona em torno de um eixo paralelo ao eixo z que contém o centro de massa do sistema. Portanto, está sujeito a grandes rotações no plano xy . A energia potencial total é dada por $\pi_0 = 22ml^2\omega_0^2 = 0,11 \times 10^8 \text{Nm}$, e o momento angular em relação ao pólo B (nó 5) é dado por $\mathcal{H}_0 = 44ml^2\omega_0 = 22 \times 10^8 \text{Nms}$. As componentes dos vetores deslocamento, velocidade e aceleração do pólo A (nó 1) são dadas por:

$$\begin{aligned} u_{x1} &= 2l(1 - \cos\omega_0 t) & u_{y1} &= -2l(\omega_0 t + \text{sen}\omega_0 t) \\ \dot{u}_{x1} &= 2l\omega_0 \text{sen}\omega_0 t & \dot{u}_{y1} &= -2l\omega_0(1 + \cos\omega_0 t) \\ \ddot{u}_{x1} &= 2l\omega_0^2 \cos\omega_0 t & \ddot{u}_{y1} &= 2l\omega_0^2 \text{sen}\omega_0 t \end{aligned}$$

Por outro lado, o período deste sistema é dado por $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 6,28\text{s}$, que corresponde a um giro de 360° do sistema rígido. Foi adotado um passo de tempo de $\Delta t = 0,1\text{s}$. Fez-se a análise para um intervalo de tempo de 30s , ou aproximadamente 5 ciclos, adotando os valores de $\rho_\infty = 1$, $\rho_\infty = 0.8$ e $\rho_\infty = 0.6$ para o raio espectral. A seguir, apresentam-se os resultados numéricos para este exemplo.

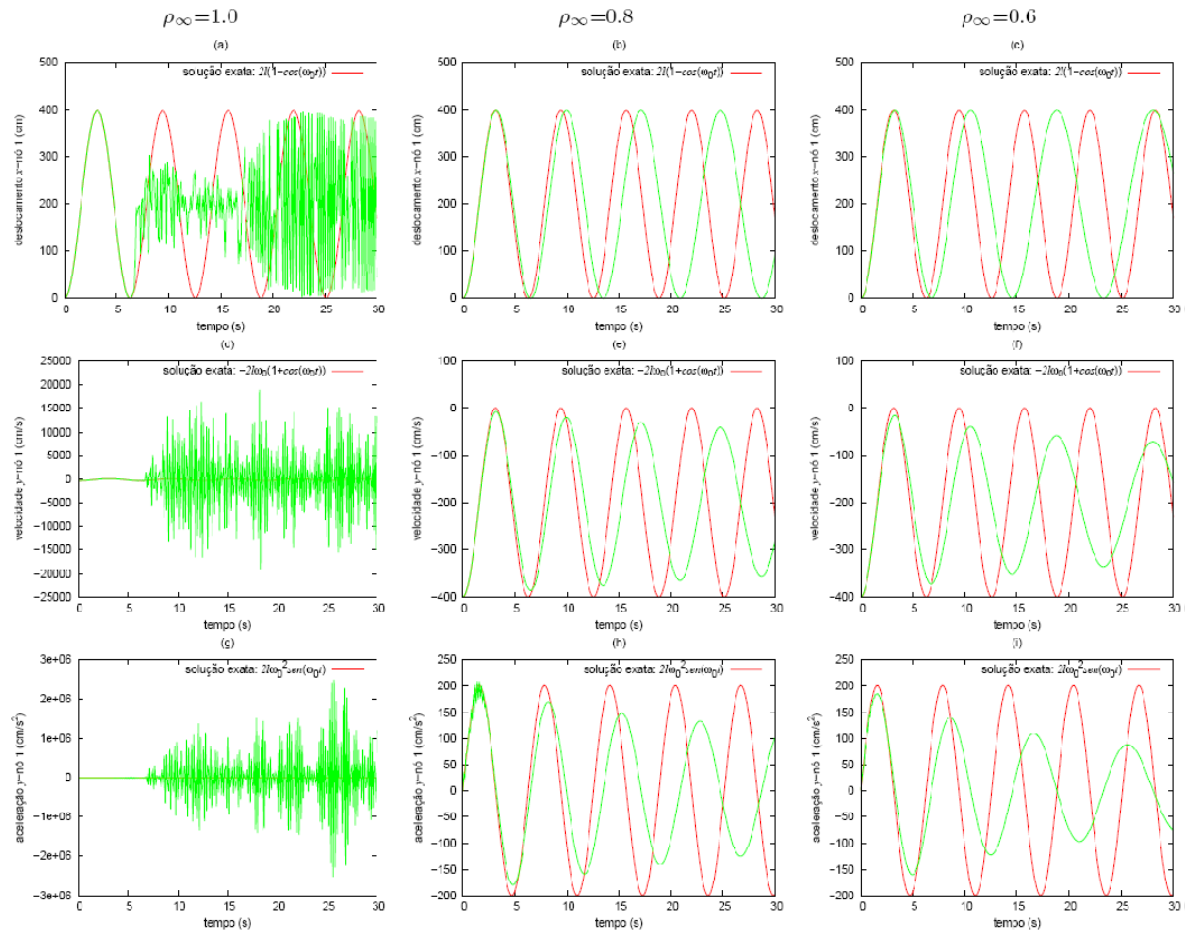


Figura 5.24 – Sistema com 5 massas concentradas. Solução com o esquema de Newmark.

Para o sistema de 5 massas concentradas conectadas por uma barra rígida, observa-se os seguintes resultados numéricos:

Para o caso sem amortecimento numérico ($\rho_\infty = 1$), verifica-se o crescimento anormal e descontrolado dos deslocamentos, velocidades e acelerações a partir do instante $\Delta t = 6s$, conforme se observa nas figuras 5.24a, 5.24d e 5.24g. Já para os amortecimentos numéricos $\rho_\infty = 0,8$ e $\rho_\infty = 0,6$, verifica-se o controle dos crescimentos desmedidos dos casos sem amortecimento. Porém, comparando-se a solução numérica com a solução teórica, verificam-se grandes erros de período e amplitude introduzidos pela dissipação numérica, conforme figuras 5.24b, 5.24c, 5.24e, 5.24f, 5.24h e 5.24i.

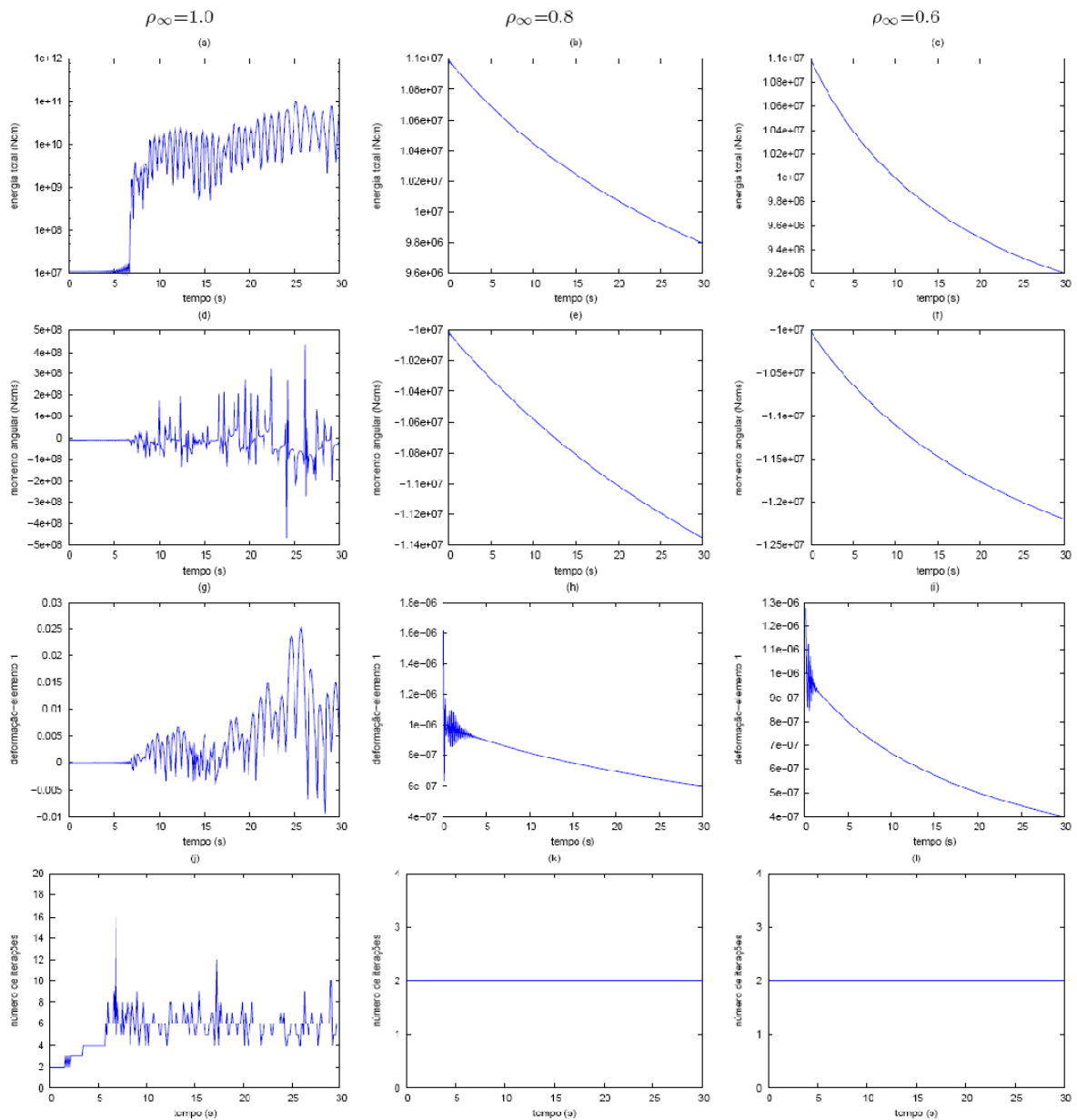


Figura 5.25 – Sistema com 5 massas concentradas. Solução com o esquema de Newmark.

Dando continuidade à análise do sistema de 5 massas concentradas (Newmark), para o sistema sem amortecimento, verifica-se o crescimento desmedido da solução para a energia total, momento angular, deformações e número de iterações após decorridos 6 segundos do instante inicial; conforme figuras 5.25a, 5.25d, 5.25g e 5.25j, respectivamente. A introdução dos amortecimentos numéricos $\rho_\infty = 0,8$ e $\rho_\infty = 0,6$ controla o crescimento desmedido da solução, verificado para o caso anterior (dissipa as altas frequências), porém, introduz grandes erros de dissipação numérica na resposta. A energia total foi dissipada em 17%, o momento angular em 20% e as deformações em 60%, conforme se observa nas

figuras 5.25b, 5.25c, 5.25e, 5.25f, 5.25h e 5.25i. Para o caso amortecido, o sistema convergiu bem em ambos os casos.

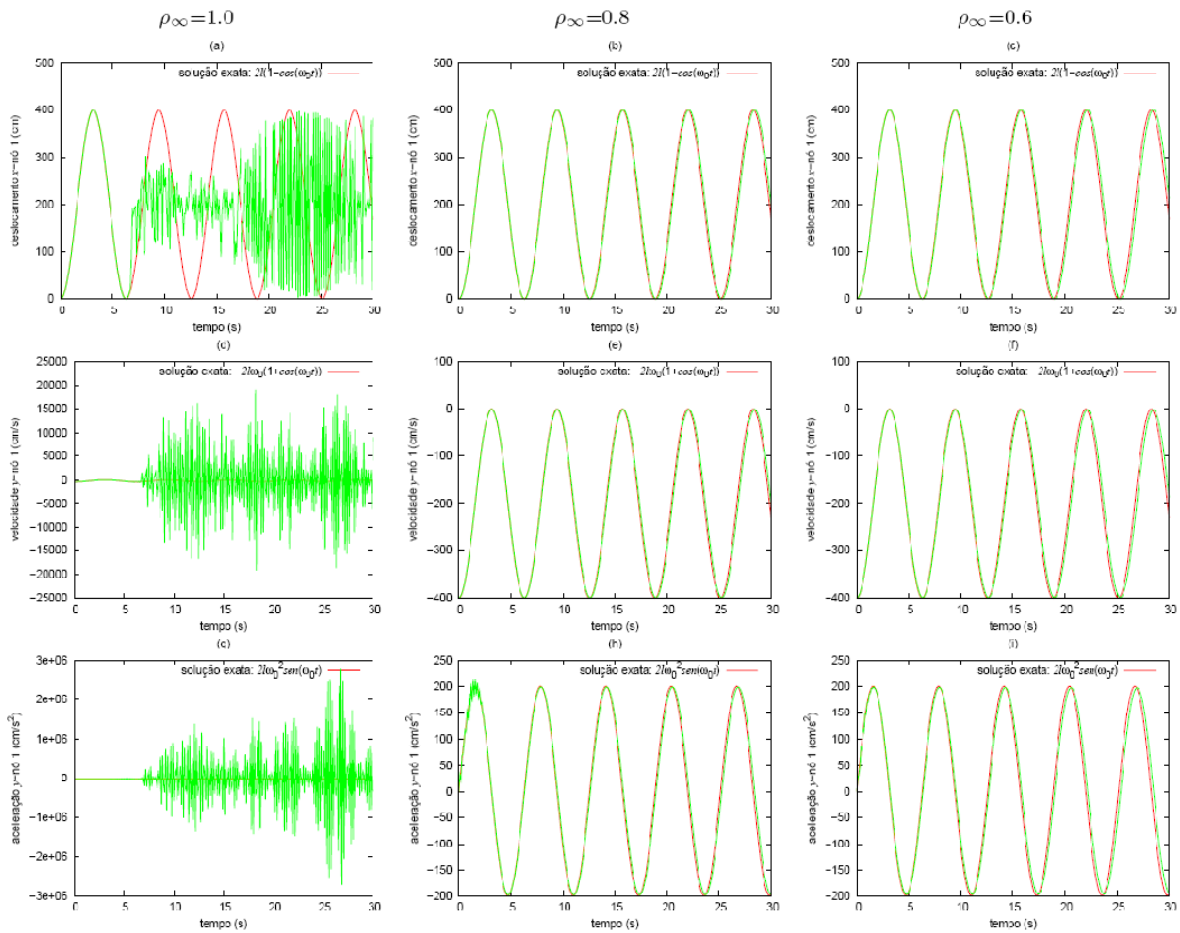


Figura 5.26 – Sistema com 5 massas concentradas. Solução com o esquema α -Bossak.

Para o esquema α de Bossak sem amortecimento, percebe-se que o sistema continua a ter um crescimento patológico para os deslocamentos, velocidades e acelerações; a partir do instante 7 segundos (note que este método de integração demorou um pouco mais para apresentar um crescimento desmedido da solução do que o método de Newmark), conforme se observa nas figuras 5.26a, 5.26d e 5.26g. Considerando-se os amortecimentos numéricos $\rho_\infty = 0,8$ e $\rho_\infty = 0,6$, o sistema corrige os crescimentos patológicos ocorridos, aproximando-se, quase que na sua totalidade, da solução teórica exata para este problema, não se percebendo erros de período ou amplitude (dissipou todas as altas frequências e não dissipou as baixas), conforme se observa nas figuras 5.26b, 5.26c, 5.26e, 5.26f, 5.26h e 5.26i.

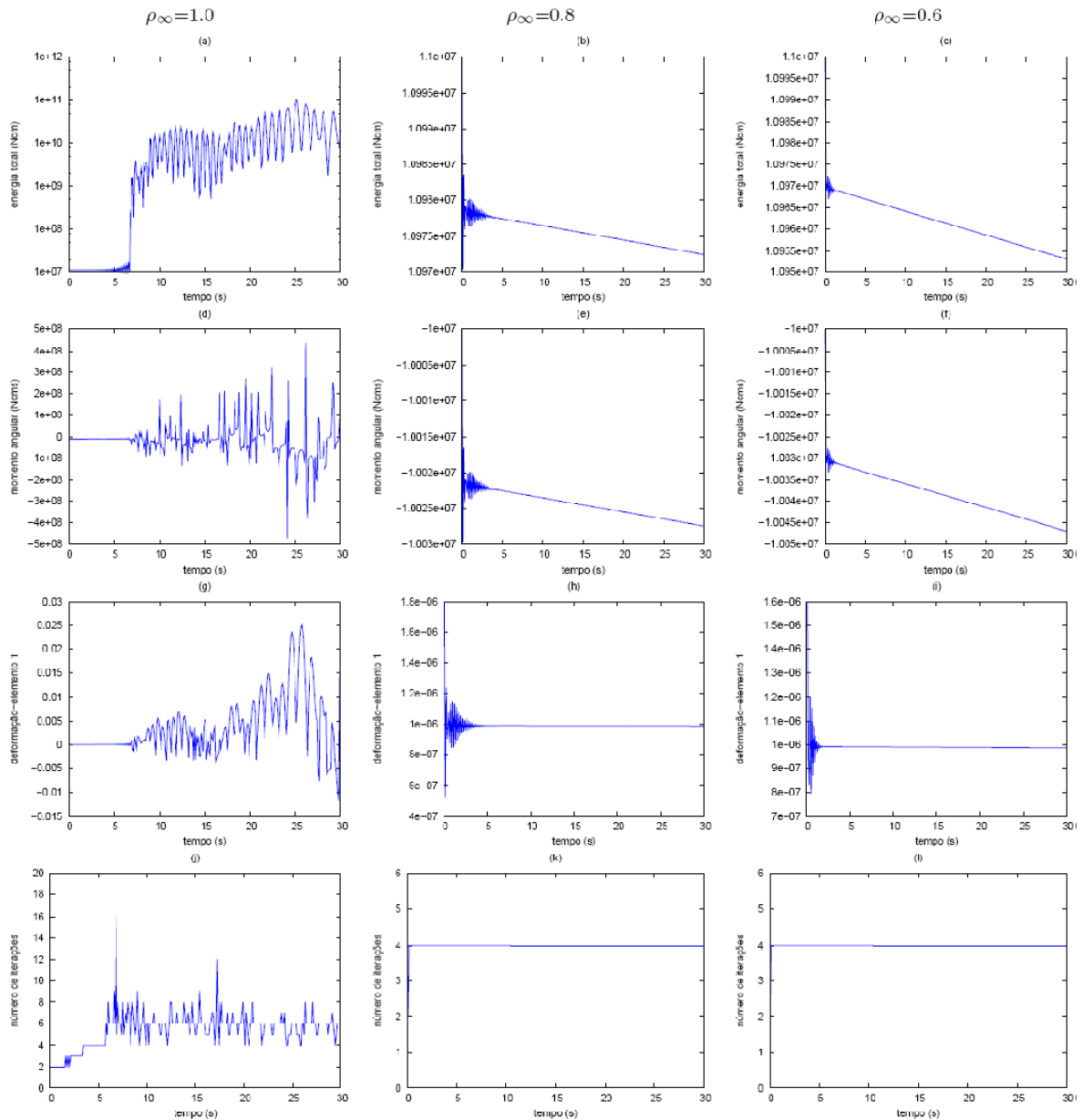


Figura 5.27 – Sistema com 5 massas concentradas. Solução com o esquema α -Bossak.

A exemplo da figura 5.26, para o sistema sem amortecimento numérico ($\rho_\infty = 1$), o sistema apresenta crescimento desmedido da solução a partir do instante de 7 segundos, conforme se observa nas figuras 5.27a, 5.27d, 5.27g e 5.27j. Considerando-se os amortecimentos numéricos $\rho_\infty = 0,8$ e $\rho_\infty = 0,6$, o sistema corrige os crescimentos patológicos ocorridos, aproximando-se, quase que na sua totalidade, da solução teórica exata para este problema. A energia total e o momento angular tiveram pequena perturbação inicial (até aproximadamente o instante de 3 segundos) permanecendo linear após dissipadas as altas frequências. O decaimento da energia total e do momento angular nesse caso é muito pequeno, conforme observa-se nas figuras 5.27b, 5.27c, 5.27e e 5.27f,

respectivamente. As deformações ocorridas foram da ordem de 1×10^{-6} e se mantiveram constantes, apesar de sofrerem pequena perturbação inicial, conforme figuras 5.27h e 5.27i. O sistema convergiu bem para ambos os casos amortecidos, conforme se observa nas figuras 5.27k e 5.27l.

Conclusão: Considerando-se o sistema de 5 massas ligadas através de uma barra rígida analisadas pelo método α -Bossak, conclui-se que, para o sistema não amortecido o sistema apresentou um crescimento desmedido da solução a partir do instante de, aproximadamente, 7 segundos (um pouco mais que o ponto de explosão do sistema de Newmark). Já para o sistema com amortecimento numérico, as respostas obtidas foram bastante satisfatórias, aproximando-se bastante da resposta teórica exata; apresentando apenas, alguns casos localizados de perturbações iniciais para a energia total, momento angular e deformações.

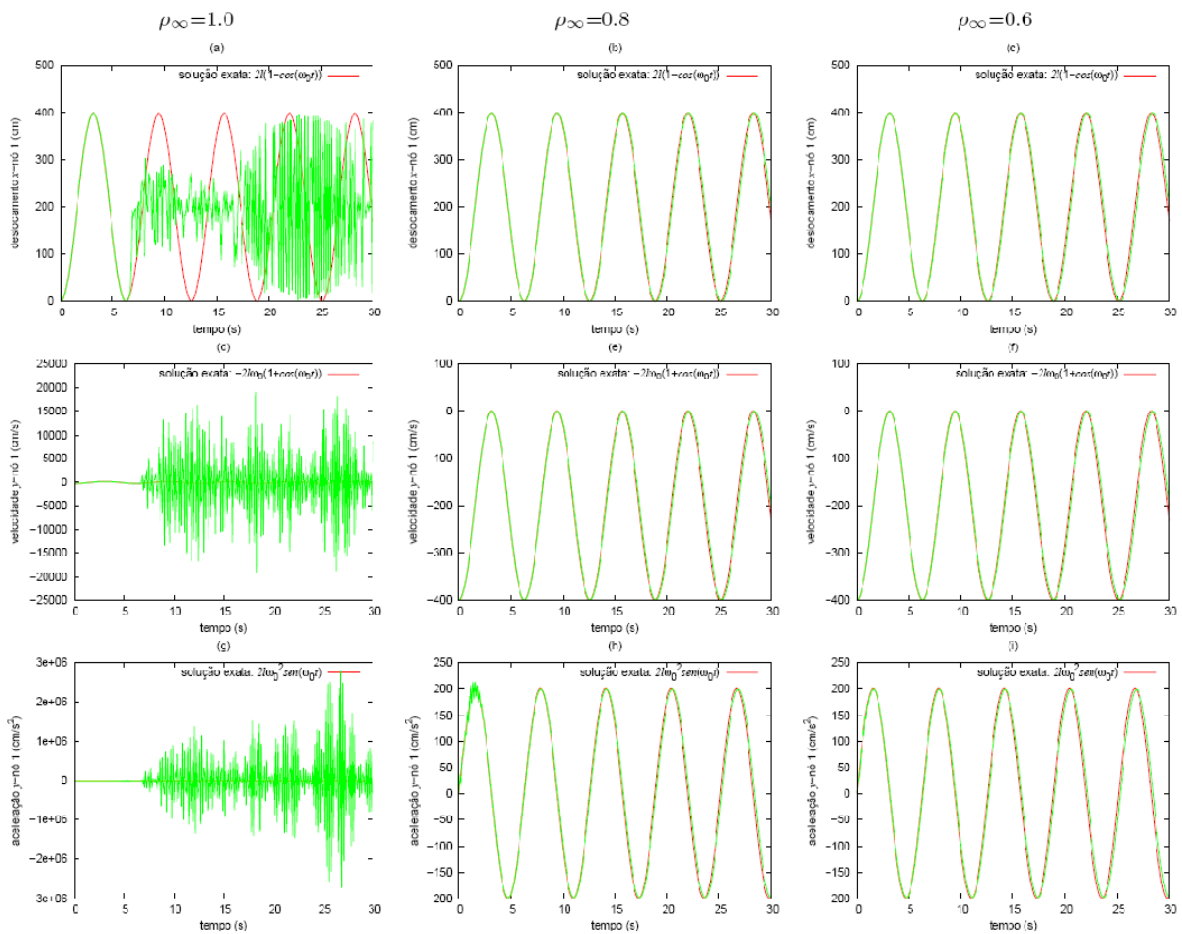


Figura 5.28 – Sistema com 5 massas concentradas. Solução com o esquema α -Hilber (modo 1).

Para o sistema α -Hilber sem amortecimento, percebe-se o crescimento desmedido da solução das respostas transientes a partir do instante 4 segundos, conforme figuras 5.28a, 5.28d e 5.28g. A introdução da dissipação numérica controla esse crescimento desmedido, estabelecendo um comportamento para o sistema numérico muito próximo do comportamento da solução exata, conforme figuras 5.28b, 5.28c, 5.28e, 5.28f, 5.28h e 5.28i.

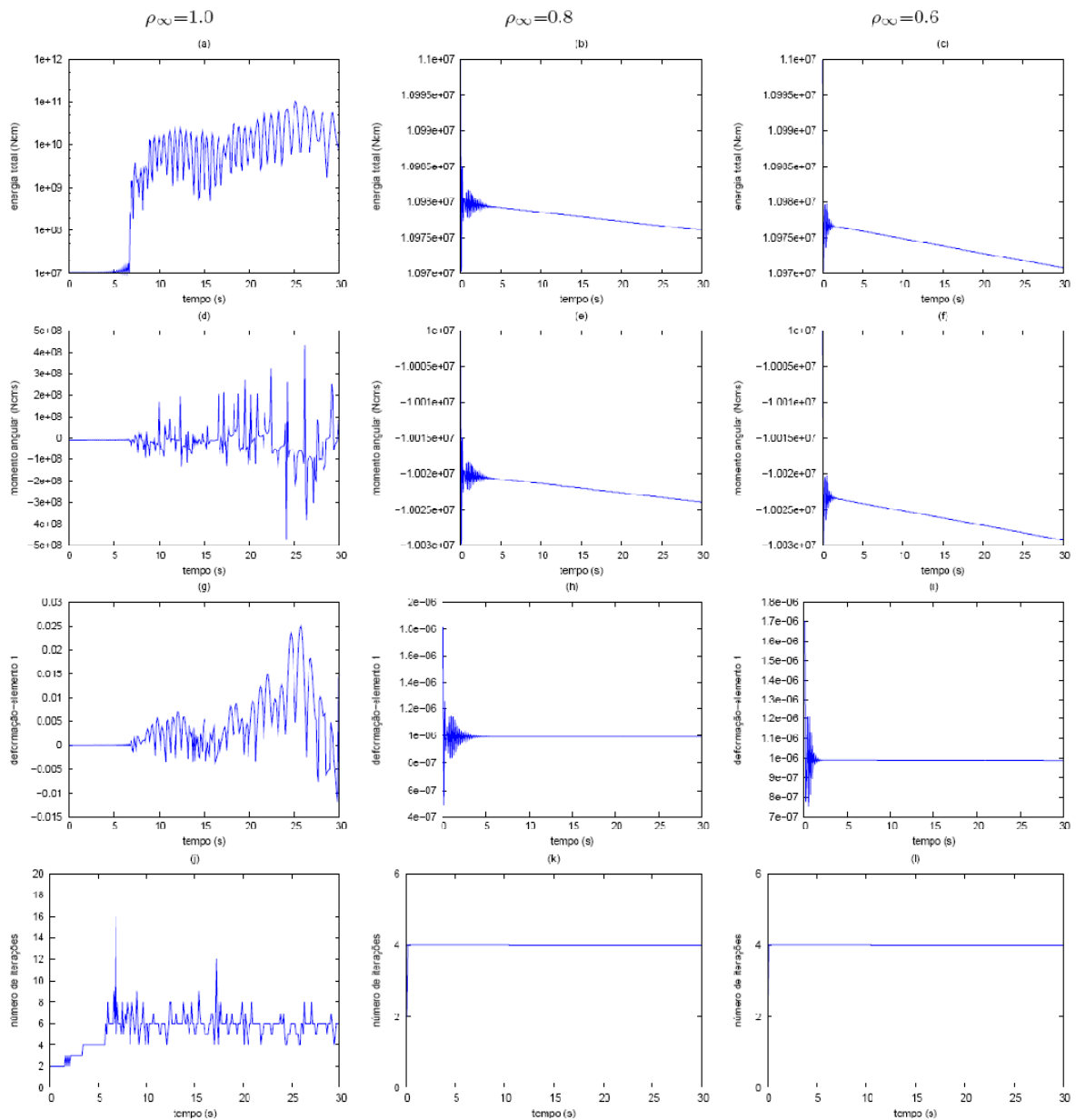


Figura 5.29 – Sistema com 5 massas concentradas. Solução com o esquema α -Hilber (modo 1).

Para o esquema α -Hilber, percebe-se um crescimento desmedido da solução a partir do instante 6 segundos nos casos sem amortecimento, no que diz respeito ao comportamento da energia total, do momento angular, das deformações e da convergência, conforme figuras 5.29a, 5.29d, 5.29g e 5.29j. A introdução do amortecimento numérico estabeleceu uma boa convergência do sistema e mínimas dissipações das baixas frequências para a energia total e momento angular; introduzindo dissipações inferiores a 1%, conforme observa-se nas figuras 5.29b, 5.29c, 5.29e, 5.29f, 5.29h, 5.29i, 5.29k e 5.29l.

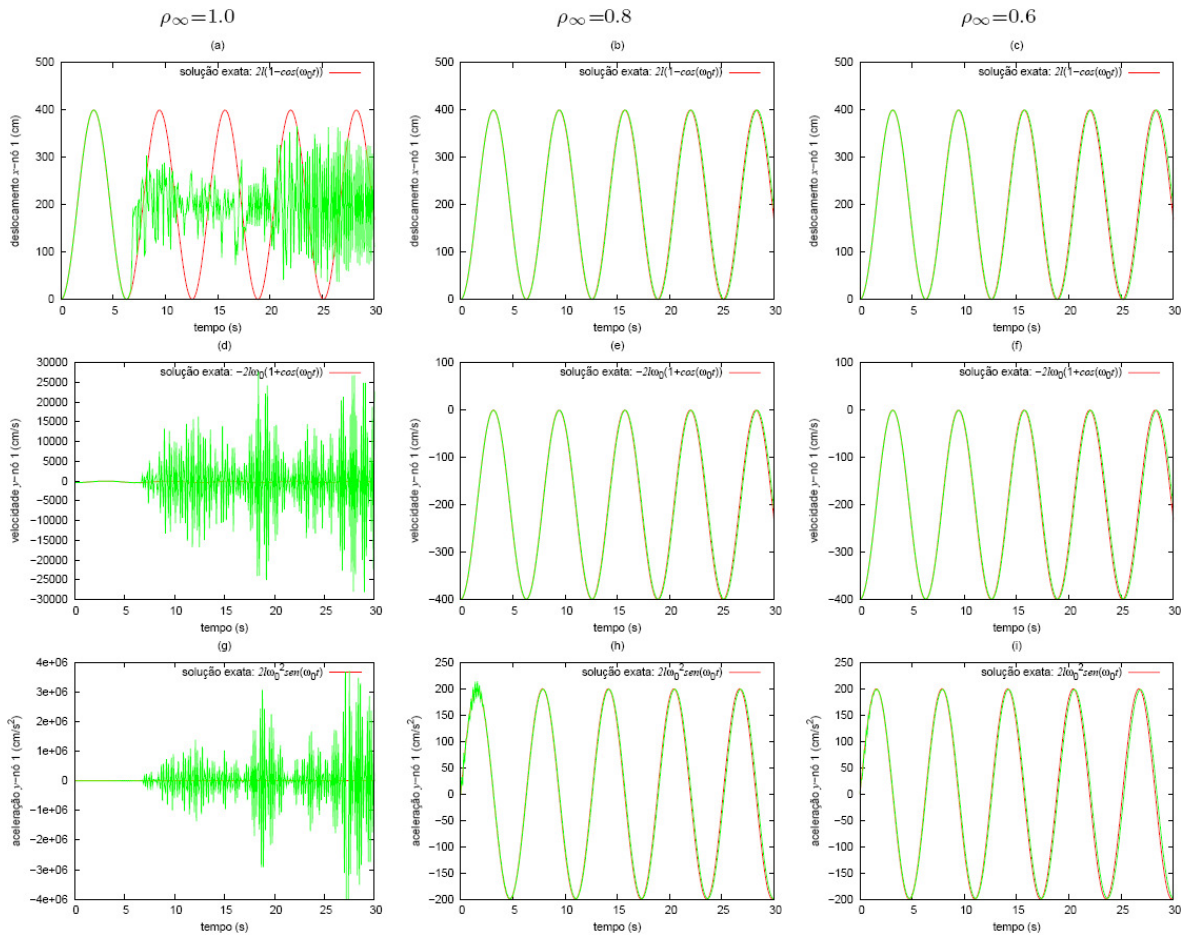


Figura 5.30 – Sistema com 5 massas concentradas. Solução com o esquema α -generalizado (modo 1).

Para o esquema α -generalizado sem dissipação numérica, observa-se o crescimento desmedido da solução a partir do instante 7 segundos, conforme figuras 5.30a, 5.30d e 5.30g. A introdução da dissipação numérica controlou as altas frequências e manteve as baixas frequências.

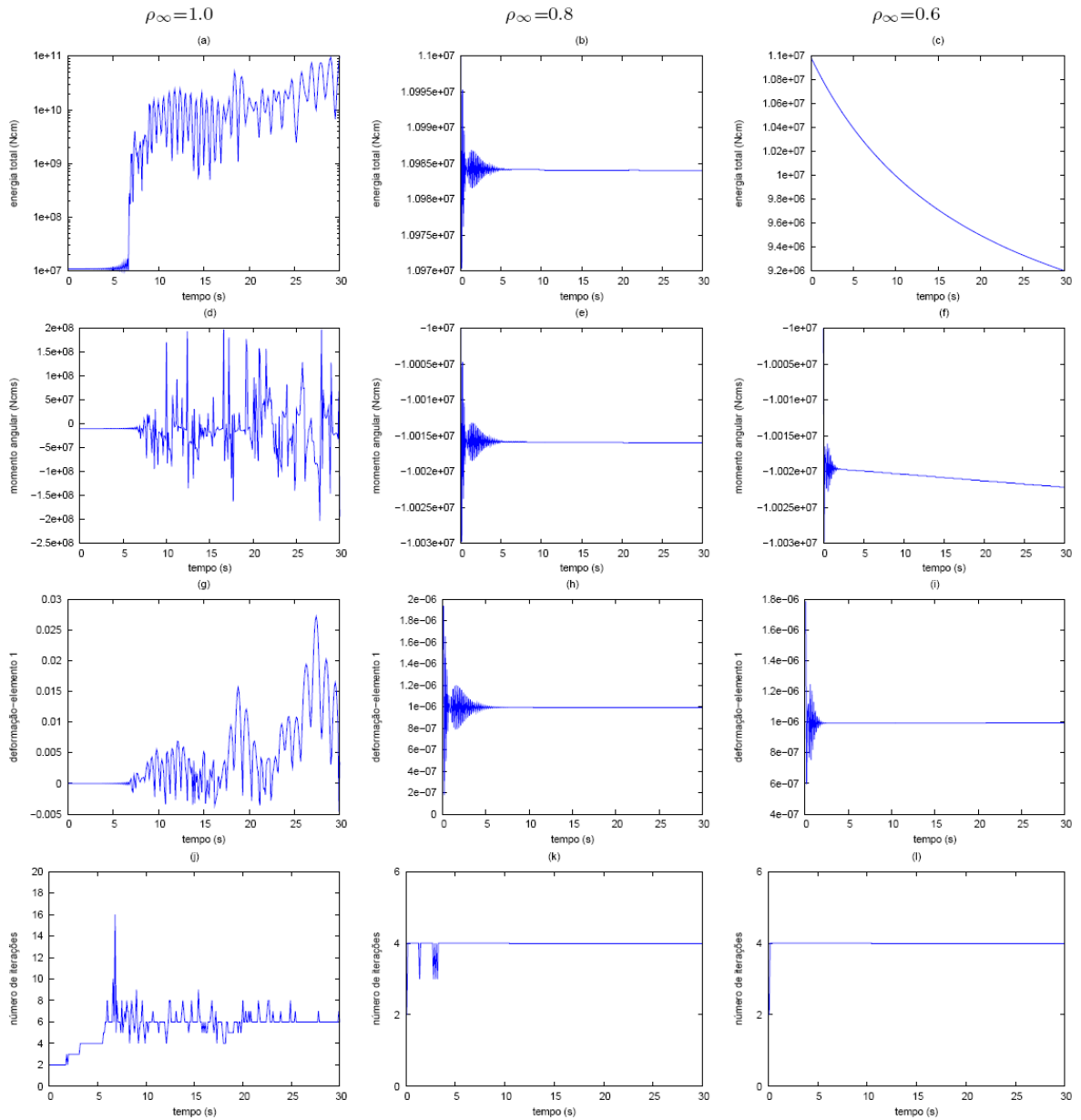


Figura 5.31 – Sistema com 5 massas concentradas. Solução com o esquema α -generalizado (modo 1).

Para o esquema α -generalizado, no que diz respeito ao comportamento na energia total, momento angular, deformações e convergência, conclui-se que: Para o sistema sem amortecimento, o mesmo se comportou de forma similar aos sistemas anteriores (α -Bossak, α -Hilber e α -generalizado). Entretanto, considerando-se o amortecimento numérico ($\rho_\infty = 0,6$), verifica-se que a energia total foi demasiadamente dissipada, reduzindo-se em torno de 17% do seu valor inicial; conforme figura 5.31c. O momento angular e as deformações tiveram uma perturbação inicial um pouco maior que nos casos anteriores, sendo então linearizadas e mantidas controladas, conforme figuras 5.31e, 5.31f, 5.31h e

5.31i, respectivamente. O sistema convergiu bem, apesar de ter apresentado pequenas perturbações para o amortecimento $\rho_\infty = 0,8$, conforme figuras 5.31k e 5.31l.

Conclusão: Considerando-se o sistema de 5 massas concentradas analisadas pelo método α -generalizado, conclui-se que, para o sistema não amortecido o comportamento do sistema é bem semelhante aos casos anteriores; enquanto que, para o amortecimento numérico $\rho_\infty = 0,6$, o sistema dissipou demasiadamente a energia total. Portanto, conclui-se que, o método α -generalizado, para este caso, obteve performance inferior aos métodos α -Bossak e α -Hilber.

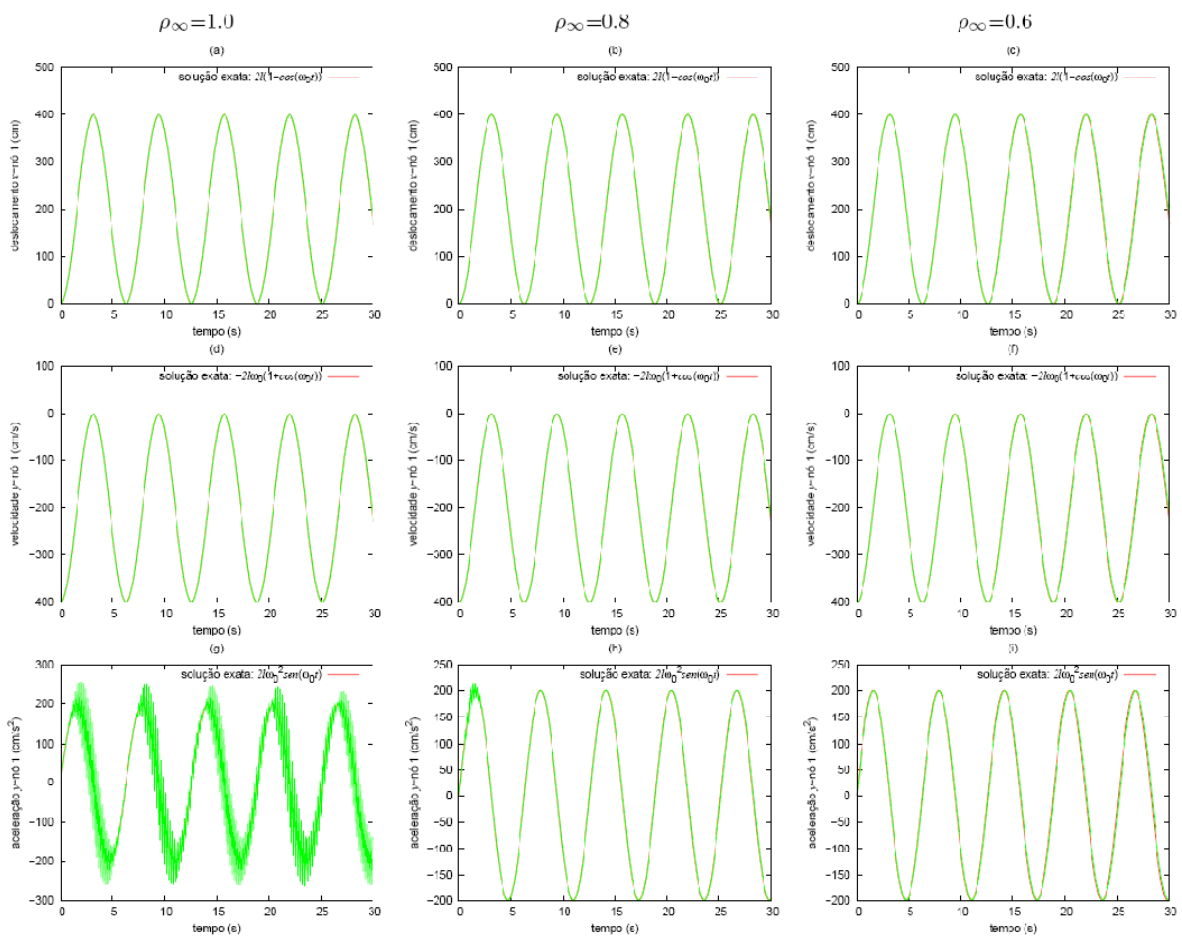


Figura 5.32 – Sistema com 5 massas concentradas. Solução com o esquema energia-momentum generalizado.

Para o esquema de integração de energia-momentum generalizado, percebe-se que: As disfunções que existiam para o sistema sem amortecimento numérico (no que diz respeito aos deslocamento, velocidades e acelerações) foram corrigidas, restando apenas

disfunções de frequência localizadas para as acelerações (porém, sem apresentar um crescimento patológico e mantendo a macro amplitude e período do sistema); conforme se observa nas figuras 5.32a, 5.32d e 5.32g. Os sistemas amortecidos mantiveram o bom comportamento dos esquemas de integração anteriores, aproximando-se bastante da solução teórica exata deste problema (figuras 5.32b, 5.32c, 5.32e, 5.32f, 5.32h e 5.32i).

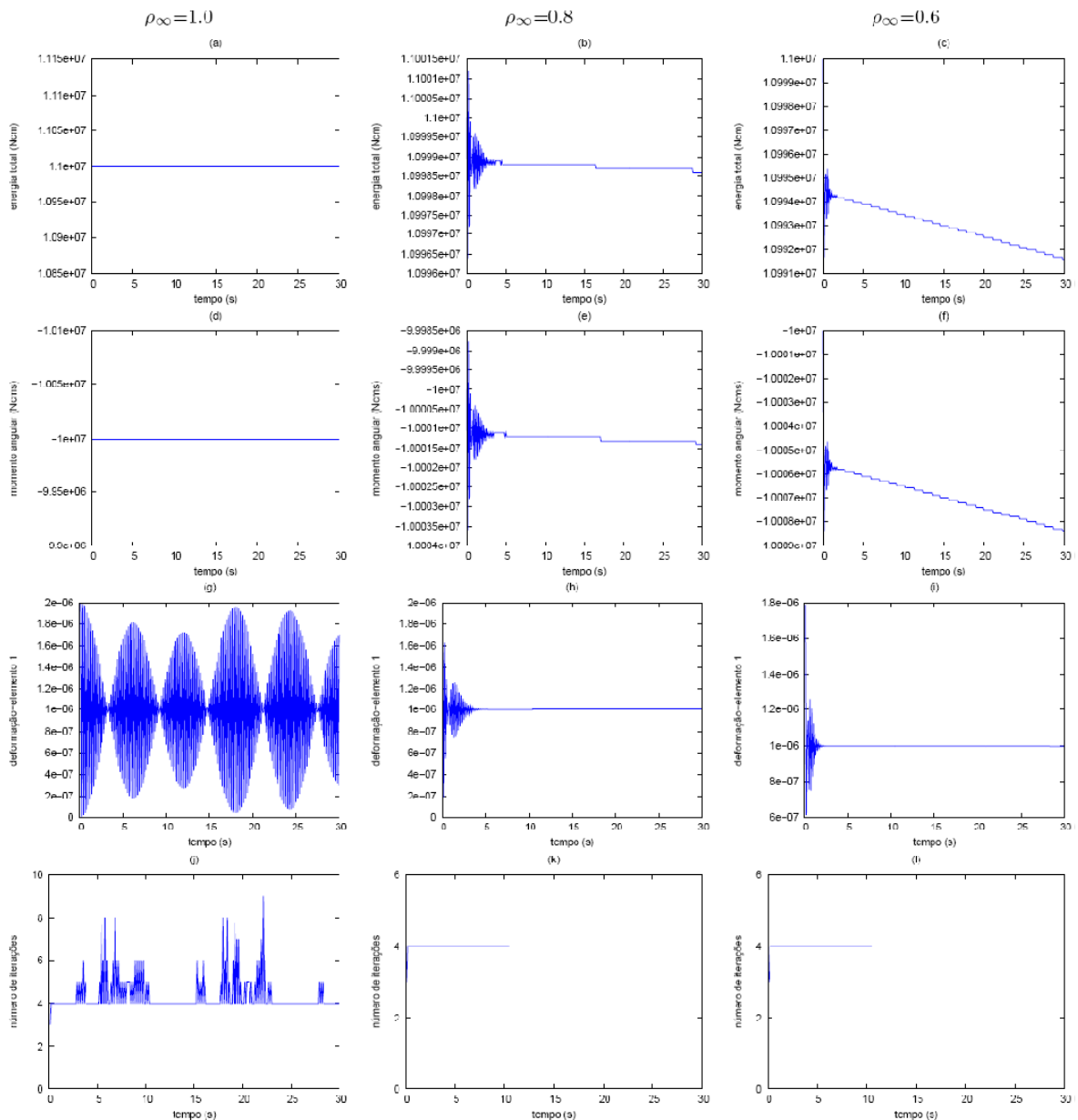


Figura 5.33 – Sistema com 5 massas concentradas. Solução com o esquema energia-momentum generalizado.

Observa-se ainda que apesar do bom comportamento do sistema numérico sem amortecimento, o mesmo apresentou crescimento desmedido para o caso das deformações,

conforme Figura 5.33g. A convergência no caso não-amortecido foi um pouco perturbada, enquanto que para os casos amortecidos foi constante e estável, convergindo com 4 iterações. A energia total e o momento angular tiveram as altas frequências controladas e as mínimas frequências mantidas, conforme desejado (Figuras 5.33a, 5.33b, 5.33c, 5.33d, 5.33e e 5.33f).

Conclusão: De todos os métodos de integração numérica analisados para o sistema de 5 massas concentradas, o método energia-momentum generalizado foi o que se comportou melhor, segundo as características desejáveis de dissipar mais as altas frequências e menos as baixas frequências. Percebe-se que, mesmo sem se considerar o amortecimento numérico, o sistema se comportou bem não apresentando crescimento desmedido da resposta na maioria das características estudadas, além de aproximar-se bastante da solução exata.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

6.1- Conclusões

O principal objetivo deste trabalho foi comparar a performance de 5 esquemas de integração temporal que se baseiam em modificações do esquema de Newmark, em geral. Introduziram-se dissipações numéricas nos exemplos a fim de estudar o seu comportamento no que diz respeito às máximas dissipações numéricas das altas frequências, mínimas dissipações numéricas das baixas frequências, conservação da energia total, estabilidade numérica e convergência dos sistemas estudados (pêndulo rígido, pêndulo elástico e sistema de 5 massas concentradas conectadas por uma barra rígida e leve).

Dos exemplos analisados no capítulo anterior, podemos concluir que

- Ao incluirmos a dissipação numérica, os métodos de Newmark, α de Bossak, α de Hilber e α Generalizado, comportaram-se numericamente estáveis, porém não para qualquer valor adotado para os parâmetros de dissipação;
- O método energia-momentum generalizado foi o que obteve melhor performance dos 5 métodos estudados, dispensando-se, na maioria dos casos, o amortecimento numérico para dissipar as altas frequências.
- Para o caso do sistema de 5 massas conectadas por uma barra rígida amortecido, o método α -generalizado foi atípico, obtendo performance inferior aos métodos de Newmark, α -Bossak e α -Hilber, no que diz respeito à dissipação excessiva da energia total do sistema. Para os casos anteriores (pêndulo rígido e pêndulo elástico), as melhores performances, em ordem crescente, foram: Newmark, α -Bossak, α -Hilber, α -generalizado e Energia-momentum generalizado.

- A principal desvantagem do método de Newmark é a excessiva dissipação que implica em erros de período e de amplitude muito grandes, isto é, também dissipa de maneira excessiva as baixas frequências (assim como ocorre em casos pontuais para os esquemas de α -Bossak e α -Hilber, principalmente);
- A introdução da conservação algorítmica da energia dentro do esquema de Newmark (método energia-momentum) garantiu a estabilidade numérica em regime não-linear, além de dissipar as altas frequências;
- Quando feita uma boa escolha dos parâmetros de dissipação, o método de energia-momentum generalizado garantiu a estabilidade incondicional (mesmo sem considerar o amortecimento numérico), assim como dissipou as altas frequências;
- A principal desvantagem do método de energia-momentum generalizado é que o mesmo possui precisão de primeira ordem;
- A desconsideração do amortecimento na equação dinâmica do movimento é essencial para o estudo desses algoritmos, não se confundindo assim, dissipação viscosa com dissipação numérica.

É importante frisar que, mesmo que o método energia-momentum generalizado (EMG) tenha obtido bons resultados para os exemplos aqui propostos, isto não garante o bom comportamento do mesmo frente a outros problemas de análise dinâmica não-linear.

6.2- Sugestões para trabalhos futuros

A escolha dos parâmetros α_m , α_f , β e γ aleatória que garanta a estabilidade incondicional utilizando o método de energia-momentum generalizado é tema aberto a futuras pesquisas.

Outros tipos de dissipação numérica, como, por exemplo, a dissipação numérica de ARMERO F., PETÖCZ E.; devem ser introduzidas nesses problemas para verificar a estabilidade numérica dos algoritmos que não se comportaram de maneira satisfatória em cada um dos 3 casos estudados.

Outro fator de relevante estudo seria introduzir o amortecimento viscoso na obtenção do vetor de forças internas e da matriz de rigidez tangente para análise do método energia-momentum generalizado, comparando-se o mesmo com a resposta exata do fenômeno.

A introdução da não-linearidade física (com plasticidades localizadas no elemento de barra) nos métodos mais estáveis, assim como a utilização de outros tipos de deformação também pode ser objeto de futuros trabalhos.

Finalmente, concluímos que existe a necessidade de se investigar novos algoritmos que possam superar algumas limitações que existem em boa parte dos esquemas aqui estudados, principalmente, com respeito à necessidade de se obter a estabilidade incondicional.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ABELL M.L., BRASELTON J.P. [2004], *Differential equation with Mathematica*, Third Edition, Elsevier Academic Press.
- [2] ARMERO F. PETÖCZ E. [1996], A new class of conserving algorithms for dynamic contact problems. In: Désidéri J. A., LeTallec P., Oñate E., Périaux J., Stein E. Editors. Numerical Methods in Engineering '96. *Proc. 2nd ECCOMAS Conf. on Numerical Methods in Engineering*, Paris, France, 9-13 September, 861-867.
- [3] ARMERO F., PETÖCZ E. [1998], Formulation and analysis of conserving algorithms for frictionless dynamic contact / impact problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **158** (3-4), 269-300.
- [4] ARMERO F. ROMERO I. [2001a], On the formulation of high-frequency dissipative time-stepping algorithms for nonlinear dynamics. Part I: low-order methods for two model problems and nonlinear elastodynamics, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **190**, 2603-2649.
- [5] ARMERO F. ROMERO I. [2001b], On the formulation of high-frequency dissipative time-stepping algorithms for nonlinear dynamics. Part II: second-order methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **190**, 6783-6824.
- [6] ARMERO F. ROMERO I. [2003], Energy-dissipative momentum-conserving time-stepping algorithms for the dynamics of nonlinear Cosserat rods, *Computational Mechanics*, **31**, 3-26.
- [7] BATHE K.J. [1996], *Finite element procedures*, Englewood Cliffs, Prentice Hall, Inc.
- [8] BELYTSCHKO T., SCHOEBERLE D.F. [1975], On the unconditional stability of an implicit algorithm for nonlinear structural dynamics, *Journal of Applied Mechanics*, Transactions of the ASME, **45**, 865-869.

- [9] CHUNG J., HULBERT G. M. [1993], A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized α method, *Journal of Applied Mechanics*, Transactions of the ASME, **60**, 371-375.
- [10] CRISFIELD M.A. [1991], *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, Vol. 1, Essentials, John Wiley & Sons.
- [11] CRISFIELD M.A. [1997a], *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, Vol. 2, Advanced topics, John Wiley & Sons.
- [12] CRISFIELD M.A., GALVANETTO U., JELENIC G. [1997b], Dynamics of 3-D co-rotational beams, *Computational Mechanics*, **20**, 507-519.
- [13] CRISFIELD M.A., SHI J. [1994], A co-rotational element/time-integration strategy for non-linear dynamics, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **37**, 1897-1913.
- [14] CRISFIELD M.A., JELENIC G., ZHONG H.G., FAN Z. [1996a], Static and dynamic non-linear analysis of structures, In: Désidéri J.A., Hirsch C., LeTallec P., Oñate E., Pandolfi M., Périaux J., Stein E., Editors. *Computational Methods in Applied Sciences'96*, Paris, 9-13 September, 9-21.
- [15] CRISFIELD M.A., SHI J. [1996b], An energy conserving co-rotational procedure for non-linear dynamics with finite elements, *Nonlinear Dynamics*, **9**, 37-52.
- [16] GALVANETTO U., CRISFIELD M.A. [1996], An energy-conserving co-rotational procedure for the dynamics of planar beam structures, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **39**, 2265-2282.
- [17] GÉRADIN M. CARDONA A. [2001], *Flexible multibody dynamics*, John Wiley & Sons.
- [18] GÉRADIN M. RIXEN D. [1997], *Mechanical vibrations*, Second Edition, John Wiley & Sons.

- [19] HAIRER E., LUBICH C., WANNER G. [2002], *Geometric numerical integration: Structure-preserving algorithms for ordinary differential equations*, Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag.
- [20] HUGHES T.J.R. [1987], *The finite element method. Linear static and dynamic finite element analysis*, Englewood Cliffs, Prentice Hall, Inc.
- [22] HUGHES T.J.R., CAUGHEY T.K., LIU W.K. [1978], Finite element methods for nonlinear elastodynamics which conserve energy, *Journal of Applied Mechanics*, Transactions of the ASME, **45**, 366-370.
- [23] KUHL D., CRISFIELD M.A. [1999], Energy-conserving and decaying algorithms in non-linear structural dynamics, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, **45**, 569-599.
- [24] KUHL D., RAMM E. [1996a], Constraint energy momentum algorithm and its application to nonlinear dynamics of shells, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **136**, 293-315.
- [25] KUHL D. RAMM E. [1996b], Conservation of energy and momentum for implicit single step time integration schemes, In: Augusti G. Borri C., Spinelli P., Editors. *Structural Dynamics, Eurodyn'96 – (3rd) European Conference on Structural Dynamics*, Florence, 5-8 June, 349-356.
- [26] KUHL D., RAMM E. [1998], Generalized energy-momentum method for non-linear dynamics of shells. In: Idelson S.R., Oñate E., Dvorkin E.N., Editors. *Computational Mechanics, New Trends and Applications. Proc. 4th World Cong. on Computational Mechanics*, Buenos Aires, 29 June – 2 July.
- [27] KUHL D. RAMM E. [1999], Generalized energy-momentum method for non-linear adaptive shell dynamics, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **178**, 343-366.

- [28] LEWIS D., SIMO J.C. [1994], Conserving algorithms for the dynamic of Hamiltonian systems on Lie groups, *Journal of Nonlinear Science*, **4** (3), 253-299.
- [29] NEWMARK N.M. [1959], A method of computation for structural dynamics, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Proceedings of the ASCE, **85** (EM3), 67-94.
- [30] OLLER S. [2002], *Dinámica no-lineal*, Monografía CIMNE N° 63.
- [31] ROMERO I., ARMERO F. [2002], An objective finite approximation of the kinematics of geometrically exact rods and its use in the formulation of an energy-momentum conserving scheme in dynamics, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **54**, 1683-1716.
- [32] SILVA W.T.M. [2001], Análisis no lineal elástico de estructuras de barras articuladas con diferentes medidas de deformaciones, *22 Iberian Latin-American Congresso n Computational Methods in Engineering*, November 7-9, Campinas, SP – Brasil, CDROM, 1-20.
- [33] SIMO J.C., TARNOW N., DOBLARÉ M. [1995], Non-linear dynamics of three-dimensional rods: exact energy and momentum conserving algorithms, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **38**, 1431-1473.
- [34] SIMO J.C., TARNOW N. [1992a], The discrete energy-momentum method. Conserving algorithms for nonlinear elastodynamics, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, **43**, 757-792.
- [35] SIMO J.C. TARNOW N. [1994], A new energy and momentum conserving algorithm for the nonlinear dynamics of shells, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **37** (15), 2527-2549.
- [36] SIMO J.C., TARNOW N., WONG K.K. [1992b], Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic schemes for nonlinear dynamics, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **100**, 63-116.

[37] SIMO J.C., WONG K.K. [1991], Unconditionally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly preserve energy and momentum, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **31**, 19-52.

[38] ZHONG H.G., CRISFIELD M.A. [1998], An energy-conserving co-rotational procedure for the dynamics of shell structures, *Engineering Computations*, **15**, 552-576.

[39] WOOD W.L., BOSSAK M., ZIENKIEWICZ O.C. [1981], An alpha modification of Newmark's method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **15**, 1562-1566.