



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS E EQUAÇÕES DE
DIFUSÃO: UMA ABORDAGEM VIA O
FORMALISMO DE PAUL LÉVY PARA FUNÇÕES
CARACTERÍSTICAS

MÁRCIO TAVARES DE CASTRO

Orientador: Annibal Dias de Figueiredo Neto

Tese de Doutorado
em Física

BRASÍLIA
2013

MÁRCIO TAVARES DE CASTRO

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS E EQUAÇÕES DE
DIFUSÃO: UMA ABORDAGEM VIA O
FORMALISMO DE PAUL LÉVY PARA FUNÇÕES
CARACTERÍSTICAS

Tese de Doutorado submetida ao Instituto de Física da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Física.

Orientador: Annibal Dias de Figueiredo Neto

BRASÍLIA

2013

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS E EQUAÇÕES DE DIFUSÃO: UMA ABORDAGEM VIA O FORMALISMO DE PAUL LÉVY PARA FUNÇÕES CARACTERÍSTICAS

Por

Márcio Tavares de Castro

Tese submetida ao Instituto de Física da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Física.

Aprovada por:

Prof. Dr. Annibal Dias de Figueiredo Neto - IF/UnB
(Orientador)

Prof. Dr. Antony Marco Mota Polito - IF/UnB
(Membro Titular)

Prof. Dr. Tarcísio Marciano da Rocha Filho - IF/UnB
(Membro Titular)

Prof. Dr. Raul Yukihiro Matsushita - EST/UnB
(Membro Titular)

Prof. Dr. Zolacir Trindade de Oliveira Junior - UESC/BA
(Membro Titular)

Prof. Dr. Marco Antônio Amato - IF/UnB
(Membro Suplente)

À minha família.

Agradecimentos

Acima de tudo, agradeço a Deus, que em sua infinita bondade, guiou os meus passos ao longo desses árduos anos de estudos. Presto reconhecimento especial aos meus pais Berilo e Marli, meus irmãos Marcelo e Katiane, meu cunhado Humberto, minha sobrinha Gabriela, o pequeno Pedrinho e a princesa Diana, pelo amor e carinho a mim confiados. Gostaria de agradecer ao meu orientador o Prof. Dr. Annibal Dias de Figueiredo Neto pela orientação técnica e importantes conselhos, que foram imprescindíveis no desenvolvimento deste projeto. Agradecimentos especiais para Regina da Fonseca, Fernando Mendes, André Telles, Thyago Manguiera, Raul Matsushita, Samuel Avelino, Andrei Barbosa, Simone Lopes, Leandro Belo, Ana Paula Canizares, Thiago Prudencio, Jonatas Eduardo, Gabriela Possa, Felipe Ventrorm, Natália Coelho, Bruno Vieira, entre outros, amigos e fiéis companheiros de luta. Agradeço também ao grupo de Física Matemática da UnB pelas importantes discussões. Por fim, agradeço à Universidade de Brasília pela ajuda institucional e à Capes pelo apoio financeiro.

“A imaginação é mais importante que o conhecimento.
O conhecimento é limitado. A imaginação envolve o mundo.”

Albert Einstein

Resumo

Nesta tese de doutorado, investigamos que tipo de equação de difusão é a mais apropriada para descrever a evolução temporal de um processo estocástico. Desenvolvemos uma nova ferramenta, baseada na representação canônica de funções características proposta por Paul Lévy, para analisar a primeira condição de compatibilidade de Chapman do processo estocástico associado a uma variável aleatória. Mostramos que o tipo de equação de difusão está relacionada com a propriedade de auto-similaridade com respeito à escala temporal da distribuição de probabilidade subjacente. Aplicamos tal metodologia ao estudo de algumas séries financeiras de mercados cambiais. Soluções analíticas são obtidas utilizando o formalismo de Lévy da função característica e comparadas com dados empíricos. Realizamos estes estudos através de dois modelos: 1) Um modelo de difusão geométrica em que consideramos o termo estocástico como uma soma de um ruído de Wiener e um processo de salto. Salientamos os efeitos dos saltos na evolução temporal dos retornos, sugerindo que o processo pode ser descrito por uma função característica infinitamente divisível pertencente à classe de De Finetti em um modelo não-linear generalizado; 2) Modificamos o modelo de difusão geométrica assumindo uma evolução temporal não-exponencial e o termo estocástico é considerado como uma soma de um ruído de Wiener e um processo de salto. Em ambos os casos encontramos que a equação de difusão resultante obedece a uma equação de Kramers-Moyal e mostramos que os modelos propostos são capazes de explicar o comportamento de séries financeiras.

Palavras-Chave: Equações de Difusão; Processos Estocásticos; Função Característica; Paul Lévy; Equação de Kramers-Moyal; Modelos de Difusão com Salto.

Abstract

In this PhD thesis, we investigate which type of diffusion equation is most appropriate to describe the time evolution of a stochastic process. We develop a new tool, based on the canonical representation of characteristic functions developed by Paul Lévy, to analyze the first Chapman compatibility condition of the stochastic process associated to a continuous random variable. We show that the type of diffusion equation is related with the property of self-similarity with respect to the temporal scale of the underlying probability distribution. We apply this methodology to study of foreign exchange rates. Analytical solutions are obtained using Lévy formalism of characteristic functions and compared with empirical data. We realized these studies using two models: 1) A geometric diffusion model where we consider the stochastic term as a sum of the Wiener noise and a jump process. We point to the effects of the jumps on the return time evolution, suggesting that the process can be described by an infinitely divisible characteristic function belonging to the De Finetti class in a generalized nonlinear model; 2) We modify the geometric diffusion model assuming a non-exponential time evolution and the stochastic term is the sum of a Wiener noise and a jump process. In both cases we find the resulting diffusion equation to obey the Kramers-Moyal equation and we show that the proposed models to be capable of explaining return behavior.

Keywords: Diffusion Equations; Stochastic Processes; Characteristic Function; Paul Lévy; Kramers-Moyal Equation; Jump Diffusion Models.

Lista de Tabelas

4.1	Descrição do conjunto de dados	69
4.2	Valor do parâmetro β obtido para cada uma das taxa de câmbio dos países analisados.	77

Lista de Figuras

2.1	Ilustração de um processo de marginalização	14
3.1	Convergência de uma distribuição gaussiana, para vários valores de Δt . Assumimos $\sigma = 1$. A distribuição aproxima-se cada vez mais de uma delta de Dirac conforme o valor de Δt vai diminuindo.	44
3.2	Série temporal obtida a partir da simulação do movimento Browniano com ruído gaussiano definido no intervalo $[-0, 125; 0, 125]$. Assumimos $\gamma = 1$ e valor de $\Delta t = 0, 01$. Para uma melhor visualização do comportamento desta série temporal, plotamos gráficos para quatro escalas de tempo diferentes. . .	45
3.3	Coefficientes de Kramers-Moyal C_1, C_2, C_3 e C_4 para o movimento Browniano com ruído gaussiano, para vários valores de Δt . Calculamos os coeficientes para valores de $x = [-0, 2; 0, 2]$. Quando o valor de Δt vai ficando menor notamos que o coeficiente C_1 comporta-se como uma reta, o coeficiente C_2 assume um valor constante diferente de zero e os coeficientes C_3 e C_4 tornam-se nulos. . .	47
3.4	Processo de convergência de um processo de salto assumindo vários valores para Δt . Aqui, $\sigma = 1$ e $a = 1$. Note que a distribuição aproxima-se cada vez mais de uma delta de Dirac conforme o valor de Δt vai ficando menor. O traço vertical indica que $f(\theta)$ é infinito quando $\theta = 0$ para a distribuição dada, qualquer que seja o valor de Δt	52

- 3.5 Função de Lévy $\omega(z; x, t, \Delta t)$ relacionada a um processo de salto, calculada para vários valores de Δt . Aqui, $\sigma = 1$ e $a = 1$ 53
- 3.6 Série temporal estocástica obtida da simulação do movimento Browniano com ruído descrito por processo de salto dado em (3.44) definido no intervalo $[-0, 125; 0, 125]$. Assumimos $\gamma = 1$ e valor de $\Delta t = 0,01$. Para uma melhor visualização do comportamento desta série temporal, plotamos gráficos para quatro escalas de tempo diferentes. 54
- 3.7 Coeficientes de Kramers-Moyal C_1, C_2, C_3 e C_4 para o processo estocástico com ruído descrito por um processo de salto dado por (3.44), para vários valores de Δt . Calculamos os coeficientes para valores de $x = [-0, 2; 0, 2]$. Quando o valor de Δt vai ficando menor notamos que o coeficiente C_1 comporta-se como uma reta e o coeficiente C_2 assume um valor constante diferente de zero, o coeficiente C_3 torna-se nulo e o coeficiente C_4 assume um valor constante diferente de zero. 56
- 4.1 Os painéis (a) e (c) mostram as funções W_R associadas com o modelo GKM, dado pela equação (4.28) (linha contínua vermelha), e os dados empíricos (círculos negros) respectivamente para o iuan chinês e a rupia do Sri Lanka. Os painéis (b) e (d) mostram as funções W_R associadas com o modelo GFP dado pela equação (4.29) (linhas contínuas vermelhas) e os dados empíricos (círculos negros) respectivamente para as moedas da China e do Sri Lanka. O correspondente intervalo de tempo é colocado do lado de cada função empírica W_R (círculos negros). $\Delta t = 1$ corresponde ao intervalo de tempo associado com a frequência de cada série de retorno de preço. 72

- 4.2 O mesmo que a figura 4.1 respectivamente para as moedas da Finlândia e do Brasil. Lembramos que $\Delta t = 1$ corresponde ao intervalo de tempo associado com a frequência de cada série de retorno de preço. 73
- 4.3 Os painéis mostram a função W_I associado ao modelo GKM dado pela equação (4.28) (linha negra contínua) e os dados empíricos (círculos negros) para diferentes intervalos de tempo (os mesmos considerados nas figuras 4.1 e 4.2). Os painéis se referem respectivamente a (a) o iuan chinês, (b) a rupia do Sri Lanka, (c) a marca finlandesa e (d) o real brasileiro. Lembramos que $\Delta t = 1$ corresponde ao intervalo de tempo associado com a frequência de cada série de retorno de preço. 74
- 4.4 Os painéis mostram a função W_R associada ao modelo de De Finetti não-linear (linha vermelha contínua) e aos dados empíricos (círculos negros). Os valores de β usados no modelo de De Finetti não-linear são mostrados na tabela 4.3.1. Os painéis se referem respectivamente (a) ao iuan chinês, (b) à rupia do Sri Lanka, (c) à marca finlandesa e (d) ao real brasileiro. Lembramos que $\Delta t = 1$ corresponde ao intervalo de tempo associado com a frequência de cada série de retorno de preço. 75
- 4.5 O mesmo que a figura 4.4 respectivamente para (a) a libra britânica, (b) o índice S&P 500, (c) o dólar tailandês e (d) o dólar canadense. Lembramos que $\Delta t = 1$ corresponde ao intervalo de tempo associado com a frequência de cada série de retorno de preço. 76
- 4.6 O painel à esquerda mostra a evolução temporal da taxa de câmbio da rupia indiana em relação ao dólar americano. O painel à direita mostra o retorno do logaritmo de $X(t)$ para $\Delta t = 1$ 82

- 4.7 Os painéis mostram os momentos estatísticos normalizados da variável estocástica $\ln[X(t + \Delta t)] - \ln[X(t)]$ em função do intervalo Δt para a rupia da Índia. Temos, respectivamente: $M_{\Delta t}/M_1$ (topo à esquerda); $V_{\Delta t}^2/V_1^2$ (topo à direita); $S_{\Delta t}/S_1$ (abaixo à esquerda); $(K_{\Delta t} - 3)/(K_1 - 3)$ (abaixo à direita). Os círculos negros correspondem aos momentos calculados dos dados empíricos. As linhas contínuas negras nos painéis no topo correspondem aos modelos GFP e GKM que são dados em (4.45). As linhas contínuas negras nos painéis de baixo correspondem ao modelo GKM ($a \neq 0$). As curvas cinzas representam os momentos das 500 trajetórias geradas aleatoriamente. A região ocupada por estas 500 curvas pode ser vista como uma medida do intervalo de confiança no qual esperamos encontrar a curva do momento estatístico associada a realização única do processo estocástico. 83
- 4.8 Os painéis mostram a média $M_{\Delta t}/M_1$ (esquerda) e a variância $V_{\Delta t}^2/V_1^2$ (direita) em função de Δt para diferentes valores de q para a rupia da Índia. Os retornos de $Y(t)$ são obtidos a partir da taxa de câmbio da rupia indiana em relação ao dólar americano através da formula (4.39). 85
- 4.9 A linha contínua negra representa o expoente de difusão em função do parâmetro q do modelo para a rupia da Índia. A linha tracejada é o expoente de difusão $h = 1$. A linha contínua negra intercepta a linha tracejada no valor $q \approx 0.3577$ 86

- 4.10 Os painéis mostram os momentos estatísticos normalizados calculados para a variável $Y(t + \Delta t) - Y(t)$, em que a função $Y(t)$ é dada pela equação (4.39) com $q = 0.3577$ para a rupia da Índia. Temos, respectivamente: $M_{\Delta t}/M_1$ (topo à esquerda); $V_{\Delta t}^2/V_1^2$ (topo à direita); $S_{\Delta t}/S_1$ (abaixo à esquerda); $(K_{\Delta t} - 3)/(K_1 - 3)$ (abaixo à direita). Os círculos negros correspondem aos momentos calculados dos dados empíricos. As linhas contínuas negras correspondem aos momentos do modelo NGKM. As curvas cinzas representam os momentos das 500 trajetórias geradas aleatoriamente. A região ocupada por estas 500 curvas pode ser vista como uma medida do intervalo de confiança no qual esperamos encontrar a curva do momento estatístico associada a realização única do processo estocástico. 87
- 4.11 O painel acima à esquerda mostra a evolução temporal da variável estocástica $\ln[X(t + 1)] - \ln[X(t)]$ (linha cinza) e sua respectiva média M (linha negra) para a rupia da Índia. O painel acima à direita mostra a evolução temporal da variável $\ln[X(t)]$ (linha cinza) e sua respectiva curva Mt (linha negra). O painel abaixo à esquerda mostra a evolução temporal de $Y(t + 1) - Y(t)$ (linha cinza) e sua respectiva média M (linha negra). O painel abaixo à direita mostra a série temporal da variável $Y(t)$ (linha cinza) e sua respectiva curva Mt (linha negra). A função $Y(t)$ é dada pela equação (4.39), em que $q = 0.3577$. 88
- 4.12 A linha contínua negra representa o expoente de difusão em função do parâmetro q do modelo para a rupia do Sri Lanka. A linha tracejada representa o expoente de difusão $h = 1$. A linha contínua negra intercepta a linha tracejada em dois valores de q . Os valores são aproximadamente $q = 0.59$ e $q = 1.36$. . 89

- 4.13 Os painéis mostram respectivamente a média $M_{\Delta t}/M_1$ (topo à esquerda); a variância $V_{\Delta t}^2/V_1^2$ (topo à direita); a assimetria $S_{\Delta t}/S_1$ (abaixo à esquerda); a curtose $(K_{\Delta t}-3)/(K_1-3)$ (abaixo à direita) para a rupia do Sri Lanka. A linha contínua negra representa o modelo teórico. Os retornos são calculados dos dados empíricos usando a função Y em (4.39) para $q = 0.59$, $q = 1.0$ e $q = 1.36$ respectivamente. Todas as curvas são normalizadas por seus respectivos valores iniciais. Os respectivos valores iniciais da assimetria e da curtose são mostrados nas legendas. 90
- 4.14 Os painéis acima mostram os momentos estatísticos normalizados da variável $\ln[X(t+1)] - \ln[X(t)]$ em função do intervalo de tempo Δt para a rupia do Sri Lanka. Temos, respectivamente: $M_{\Delta t}/M_1$ (acima à esquerda) e $V_{\Delta t}^2/V_1^2$ (acima à direita). Os painéis abaixo mostram os momentos estatísticos normalizados da variável $Y(t + \Delta t) - Y(t)$ em função do intervalo de tempo Δt . Temos, respectivamente: $M_{\Delta t}/M_1$ (abaixo à esquerda) e $V_{\Delta t}^2/V_1^2$ (abaixo à direita). A função $Y(t)$ é dada em (4.39) com $q = 0.59$. Os círculos negros correspondem aos momentos calculados dos dados empíricos. As linhas contínuas negras correspondem aos valores teóricos do modelo NGKM. As linhas contínuas cinzas representam os momentos das 500 trajetórias geradas aleatoriamente. A região ocupada por estas 500 curvas pode ser vista como uma medida do intervalo de confiança no qual esperamos encontrar a curva do momento estatístico associada a realização única do processo estocástico. 91

4.15 O painel acima à esquerda mostra a evolução temporal da variável estocástica $\ln[X(t+1)] - \ln[X(t)]$ (linha cinza) e sua respectiva média M (linha negra) para a rupia do Sri Lanka. O painel acima à direita mostra a série temporal da variável $\ln[X(t)]$ (linha cinza) e sua respectiva curva Mt (linha negra). O painel abaixo à esquerda mostra a evolução temporal de $Y(t+1) - Y(t)$ (linha cinza) e sua respectiva média M (linha negra). O painel abaixo à direita mostra a série temporal da variável $Y(t)$ (linha cinza) e sua respectiva curva Mt (linha negra). A função $Y(t)$ é dada pela equação (4.39), em que $q = 0.59$. 92

Sumário

Resumo	i
Abstract	ii
Lista de Tabelas	iii
Lista de Figuras	x
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Problemas Abordados na Tese	6
1.3 Estrutura	8
2 Equações de Difusão	11
2.1 Processos Estocásticos	11
2.1.1 Densidade de Probabilidade Conjunta	12
2.1.2 Condições de Compatibilidade	12
2.1.3 Alguns Tipos de Processos Estocásticos Relevantes	16
2.1.4 Valor Esperado e Momentos	17
2.1.5 Função Característica	18
2.1.6 Função de Lévy	20
2.1.7 Distribuições Infinitamente Divisíveis	22

2.1.8	Distribuição Gaussiana	23
2.2	Processos de Difusão e Métodos da Função Característica	24
2.2.1	Processo de Difusão	24
2.2.2	Equação Diferencial Estocástica	26
2.2.3	Métodos das Funções Características	28
2.3	Equação de Difusão: Método dos Momentos Estatísticos	29
2.3.1	Equação de Fokker-Planck	31
2.3.2	Equação de Kramers-Moyal	31
2.4	Equação de Difusão: Forma Canônica de Lévy	32
2.5	Equação de Fokker-Planck	35
2.6	Equação de Kramers-Moyal	36
2.7	Discussão dos Resultados	38
3	Processos Estocásticos	39
3.1	Processo de Wiener	39
3.1.1	Movimento Browniano Geométrico	40
3.1.2	Uma Ilustração de um processo de Wiener	42
3.2	Processo de Salto	48
3.2.1	Equação de Kramers-Moyal	49
3.2.2	Uma Ilustração de um Processo de Salto	51
3.3	Processo Misto	56
4	Modelos de Difusão com Salto	60
4.1	Introdução	60
4.2	Modelos de Difusão com Salto	64
4.2.1	Equação de Difusão	64
4.2.2	Transformação de Variáveis e Função Característica	66

4.2.3	Taxas de Câmbio	68
4.3	Modelo de Difusão Geométrica com Salto	69
4.3.1	Modelo de De Finetti não-linear	74
4.3.2	Discussão dos Resultados	78
4.4	Modelo de Difusão Não-Geométrica com Salto	79
4.4.1	Discussão dos Resultados	93
5	Equações de Difusão Fracionárias	95
5.1	Formalismo geral de Lévy para Funções Características	95
5.2	Equação de Difusão Fracionária: Forma Canônica de Lévy	96
5.3	Equações de Fokker-Planck Fracionárias	98
5.3.1	Variável com Distribuição Simétrica	98
5.3.2	Variável com Distribuição Assimétrica	100
5.4	Equações de Kramers-Moyal Fracionárias	101
5.4.1	Variável com distribuição de probabilidade simétrica	102
5.4.2	Variável com distribuição de probabilidade assimétrica	104
5.5	Discussão dos Resultados	105
6	Conclusões e Perspectivas	106
6.1	Conclusões	106
6.2	Perspectivas de Trabalho	108
	Referências	110

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

A análise de séries temporais é de grande importância em física estatística. A associação de séries empíricas de diversos tipos a processos estocásticos tem sido tradicionalmente foco de extensas pesquisas em diversos campos de ciências naturais como, por exemplo: óptica quântica, biologia teórica, física do estado sólido e teoria de circuitos [1]. Sua aplicabilidade ainda estende-se a problemas relacionados a séries financeiras em estudos voltados para a teoria de especulações e flutuações no mercado financeiro [2]. Apesar de vários aspectos destes processos serem compreendidos, muitas questões ainda persistem em aberto.

Um sistema é descrito por um processo estocástico quando as variáveis do sistema são tidas como aleatórias. Tal aleatoriedade surge de influências externas ou internas a um sistema, cujo comportamento não é completamente conhecido. A equação de difusão é uma ferramenta matemática que lida com estes sistemas que são resultado de muitos e pequenos distúrbios, cada um dos quais geram mudanças nas variáveis do sistema de forma imprevisível.

A primeira formulação de um processo estocástico descrito por equações de difusão foi dada por Bachelier, que usou a ideia de caminhada aleatória para analisar flutuações no mercado financeiro [2]. Este problema foi aplicado ao estudo do movimento Browniano por Einstein, Smoluchowski (1906) e Langevin (1908) [1]. Movimento Browniano é um sistema

no qual uma partícula pequena, mas macroscópica, está imersa em um fluido, descrito inicialmente por Robert Brown em 1827 [3]. Os choques sucessivos da partícula com as moléculas do fluido levam-na a descrever um movimento flutuativo imprevisível. Devido a tais flutuações, não conhecemos nem a posição, nem a velocidade exata da partícula ao longo do tempo. A máxima informação que pode ser obtida é a probabilidade de encontrar a partícula em uma determinada região e com certa velocidade. Com a utilização de uma equação de difusão tal probabilidade pode ser determinada. Em 1923, uma teoria matemática mais rigorosa sobre este sistema foi construída por Wiener [4], razão pela qual o movimento Browniano também é conhecido como processo de Wiener.

Um processo estocástico para ser bem definido tem que satisfizer as condições de compatibilidade de Chapman [5]. Uma dessas condições permite estabelecer a seguinte relação entre a probabilidade condicional $f(x_{k+1}, t_{k+1} | x_k, t_k)$ de uma variável assumir um valor x_{k+1} em um tempo t_{k+1} , uma vez que a variável tinha um valor x_k no tempo t_k , e as probabilidades de tempo único $f(x_{k+1}, t_{k+1})$ e $f(x_k, t_k)$:

$$f(x_{k+1}, t_{k+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_{k+1}, t_{k+1} | x_k, t_k) f(x_k, t_k) dx_k. \quad (1.1)$$

Esta equação é denominada de 1º condição de compatibilidade de Chapman e implica em uma equação de difusão, fundamental na descrição de processos estocásticos.

Se um processo estocástico satisfaz simultaneamente a equação (1.1) e a equação de Chapman-Kolmogorov [1], então ele é um processo de Markov, em que a probabilidade de encontrar o sistema em um dado estado em um certo instante de tempo depende apenas do estado do sistema em um instante de tempo prévio. Estes processos de Markov foram estudados pela primeira vez, para espaço de estados e tempo discretos, por Markov em 1906 [1]. A extensão para um número infinito de estados e para tempos contínuos foi dada por Kolmogorov em 1936 [6].

Em física, a equação que descreve a evolução temporal das distribuições de probabilidade

para processos estocásticos em geral é a equação mestra, introduzida por Pauli em 1928 [7]. Ela é assim denominada devido ao fato de que muitas quantidades de interesse podem ser derivadas desta equação. A conexão da equação mestra com processos de Markov foi clarificada por Siegert em 1949 [6].

Em muitos casos, quando a equação mestra não pode ser resolvida de maneira exata, podemos usar uma aproximação para descrever o sistema, conhecida como equação de Fokker-Planck. Ela é uma equação que fornece como solução a distribuição de probabilidade $f(x, t)$ associadas à variável aleatória X a ser descrita. A equação de Fokker-Planck geral para um processo estocástico $X(t)$ tem a forma

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial x} D_1(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_2(x, t) \right] f(x, t), \quad (1.2)$$

em que $D_2(x, t) > 0$ é chamado de coeficiente de difusão e $D_1(x, t)$ é o coeficiente de desvio. Matematicamente, ela é uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem do tipo parabólica. Ela pode ser obtida em sua forma exata dada por (1.2), para uma variável X que obedece uma equação diferencial estocástica com ruído gaussiano, como demonstrado por Langevin (1908) [1]. A equação de Fokker-Planck foi utilizada em uma forma sem coeficiente de desvio por Einstein (1905), Smoluchowski (1906) e Fokker (1914) [1, 8], mas foi Planck que derivou, a partir da equação mestra, sua forma geral dada pela equação (1.2) em 1917 [9].

Em geral, um processo estocástico é descrito por uma equação de Kramers-Moyal (1949) [5, 10], dada por uma equação diferencial que é de primeira ordem com relação ao tempo e envolve uma expansão em todas as ordens das derivadas parciais com relação a variável estocástica. A expansão geral com um número infinito de termos é dada por

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^n D_n(x, t) f(x, t). \quad (1.3)$$

Ela pode ser vista como uma generalização da equação de Fokker-Planck. Se a variável X de uma equação estocástica possui um ruído gaussiano associado, os coeficientes D_n ,

denominados coeficientes de Kramers-Moyal, para $n \geq 3$, desaparecem e a equação (1.3) reduz-se à equação de Fokker-Planck. De modo geral, os coeficientes D_n não são nulos. Pode-se mostrar que processos estocásticos onde as mudanças ocorrem através de saltos aleatórios devem ser descritos através de equações de Kramers-Moyal [1].

Pawula demonstrou que equações de difusão somente podem assumir estas duas formas básicas: equações de Fokker-Planck ou equações de Kramers-Moyal [11]. A equação de Fokker-Planck é a forma de equação de difusão predominantemente utilizada na literatura [1,6]. No entanto, estudos na literatura tem cada vez mais foco em processos estocásticos em geral, que implicam na análise de equações de Kramers-Moyal: Risken escreveu a equação de Kramers-Moyal com o intuito de truncá-la até uma ordem finita, como aproximação para a o problema complicado de resolver a equação mestra completa [12]; Frank obteve resultados analíticos a partir de equações de Kramers-Moyal para derivar a evolução temporal das densidades de probabilidade de processos não-markovianos [13]; Utilizando a definição de funções característica e equação de Kramers-Moyal, El-Wakil obteve equações de difusão fracionárias no domínio de evolução temporal fractal [14]. A discussão das características e as formas que as equações de difusão podem assumir, da maneira que surgem e onde e como utilizá-las é um dos principais focos da literatura de processos estocásticos [2, 15].

Um lócus natural para a aplicação destas técnicas e a respectiva avaliação de sua utilidade é a análise de séries temporais de variáveis relevantes em sistemas estocásticos. Particularmente, vamos analisar séries temporais de preços de ativos financeiros, pois a complexidade destas tem desafiado os mais poderosos desenvolvimentos estatísticos.

Um sistema econômico pode ser considerado como um sistema altamente complexo, cujas partes (ou subunidades) ditas não-lineares interagem de forma complicada [16]. A dinâmica que rege este sistema não é completamente conhecida, o que atrai a atenção de muitos pesquisadores no intuito de analisá-la mediante o estudo das propriedades estatísticas observadas empiricamente em séries temporais financeiras.

Em 1900, Bachelier aplicou o movimento Browniano para explicar a formação de preços em mercados de ações [2]. Em 1954, Samuelson estabeleceu a moderna teoria de apreçamento, no qual o logaritmo dos preços descreve um movimento Browniano (modelo de difusão geométrica clássica) [17]. O amplamente utilizado modelo de Black-Scholes é a versão generalizada do modelo de Samuelson, desenvolvida para opções [18] em 1973. Seguindo outra linha, em 1897, Pareto estabeleceu leis de potência para modelar a distribuição de renda de diferentes nações [19]. Esta propriedade ainda hoje estabelece novos paradigmas, graças aos trabalhos de Lévy em teorias de probabilidade [20] e no estudo de transições de fase, que introduziu os conceitos de escala para funções termodinâmicas e funções de correlação [21]. Vale ressaltar também o pioneiro trabalho de Mandelbrot em 1963 no uso de distribuições de cauda longa (não gaussianas), fractalidade e auto-similaridade na descrição de finanças e variações de mercados em geral [22].

O termo “Econofísica” foi cunhado por H. Eugene Stanley em 1994 para descrever o grande número de artigos escritos na descrição de problemas relacionados a mercados financeiros [2]. Hoje, o termo se refere ao ramo da física dos sistemas complexos que vem procurando fazer um levantamento completo das propriedades estatísticas dos mercados financeiros, usando o imenso volume de dados agora disponíveis e a metodologia de trabalho da física. A econofísica toma como ponto de partida a hipótese de que a dinâmica de séries temporais financeiras é um processo estocástico [23, 24].

Um dos fatos mais conhecidos a respeito dos preços de séries financeiras, é que eles são propensos a seguir caminhos aleatórios não gaussianos [25]. Alguns autores propõem então voos de Lévy como modelos estocásticos descrever estas séries [2, 26]. Outros autores levam em conta processos de salto na análise de séries temporais financeiras. É comum desenvolver métodos para estimar a volatilidade nas quais os efeitos dos saltos podem ser separados daqueles que se originam de uma volatilidade browniana [27–30]. Ait-Sahalia [27, 31] observa que a estimativa de modelos financeiros que lidam com processos de salto são mais complexos

e realísticos, apresentando um processo estocástico que é equivalente a soma de um processo de Wiener e um processo de salto (Poisson). Entender como a distribuição de probabilidade dos retornos evolui no tempo é o principal interesse na literatura de econofísica [2].

1.2 Problemas Abordados na Tese

Estamos interessados no estudo da forma básica da primeira condição de compatibilidade de Chapman do processo estocástico associado a uma variável aleatória contínua. Assim, podemos estabelecer condições gerais sob as quais podemos descrever um processo estocástico através de uma equação de Fokker-Planck ou através de uma equação de Kramers-Moyal.

Para alcançar tal objetivo, utilizamos a forma canônica proposta pelo matemático Paul Lévy [20] para expressar a função característica associada a uma variável aleatória. Deste modo, podemos escrever a equação de difusão associada a um processo estocástico em um novo formalismo. Mostramos que o tipo de equação de difusão está diretamente relacionado a existência (ou não) da propriedade de auto-similaridade no ruído que descreve a probabilidade de transição marginal da variável estocástica no tempo t para o tempo $t + \Delta t$ quando $\Delta t \rightarrow 0$. Este nosso formalismo original está publicado nas referências [32, 33].

A partir destes resultados, podemos definir um conjunto de medidas estatísticas interessantes para caracterização de processos estocásticos em séries temporais reais. Aplicamos tal metodologia ao estudo de algumas séries financeiras associadas a mercados cambiais. O estudo sobre o assunto mostra que o comportamento dos retornos de taxas de câmbio em diferentes intervalos de tempo pode ser descrito em termos de equações de difusão. Realizamos estes estudos através de dois modelos:

- 1) Um modelo de difusão geométrica no qual consideramos o termo estocástico como uma soma de um ruído de Wiener e um processo de salto. Obtivemos soluções analíticas para este modelo utilizando-se o formalismo de Lévy para funções características e as comparamos com os dados empíricos. Estudamos os efeitos dos saltos na evolução temporal dos retornos, uma

questão de grande interesse na literatura de econofísica. Mostramos que devido a presença de saltos, podemos descrever o processo por uma função característica infinitamente divisível, pertencente à classe de De Finetti. Estendemos estas funções de De Finetti em um modelo não-linear generalizado e mostramos que este modelo é capaz de explicar o comportamento dos retornos de taxas cambiais. Estes resultados estão publicados no nosso artigo “*Jump diffusion models and the evolution of financial prices*” no periódico *Physics Letters A* (2011) [32].

2) Propomos um modelo de difusão não-geométrica assumindo uma taxa de crescimento não-exponencial e o termo estocástico é considerado como uma soma de um ruído de Wiener e um processo de salto. Isto implica que a equação de difusão resultante obedece a uma equação de Kramers-Moyal. A análise concentra-se nos quatro primeiros momentos centrais, em que comparamos suas soluções analíticas, obtidas utilizando-se o formalismo de função característica, com os dados empíricos de taxas cambiais. Mostramos que o modelo proposto oferece um grande aperfeiçoamento em relação ao modelo de difusão geométrica clássico. Estes resultados estão publicados no nosso artigo “*Diffusion equations and the time evolution of foreign exchange rates*” no periódico *Physics Letters A* (2013) [33].

Por fim, vamos estender nossos métodos de obtenção de equações de difusão para a situação onde as funções características associadas não são analíticas. A partir de um formalismo mais geral de funções características proposto por Lévy [20], mostramos que para processos estocásticos em geral (analíticos ou não), a propriedade de auto-similaridade assintótica em relação à escala temporal é peça chave para obtenção da equação de difusão mais apropriada para descrever o sistema.

Vale ressaltar, que estes resultados obtidos, permitem formulações alternativas do modelo clássico apresentado na literatura que considera processos estocásticos como simultaneamente markovianos, estacionários e gaussianos, conhecidos como processos de Ornstein-Uhlenbeck. Isto foi feito no nosso artigo “*Generalized Ornstein-Uhlenbeck process by Doob’s theorem*”

and the time evolution of financial prices publicado no periódico *Physica A* (2013) [34]. Neste artigo, generalizamos o processo de Ornstein-Uhlenbeck usando o teorema de Doob. Relaxamos as condições do processo ser gaussiano e estacionário, assumindo um processo linear e homogêneo no tempo. Os resultados analíticos foram obtidos usando probabilidades de transição e o formalismo de funções características e foram comparados com dados empíricos do mercado de ações que notoriamente apresentam comportamento não-gaussiano. Focamos nossa análise em padrões de decaimento e no estudo de convergência dos quatro primeiros cumulantes do processo estocástico, considerando o retorno do logaritmo do preço das ações, que notadamente apresentam comportamento não-gaussiano [2]. Mostramos que o modelo proposto oferece uma melhor aproximação do que o modelo clássico de Ornstein-Uhlenbeck. Este trabalho não é abordado aqui, pois constitui o tema principal de uma outra tese de doutorado [35].

1.3 Estrutura

A seguir, indicamos como esta tese foi organizada.

No capítulo 2, dedicamo-nos à obtenção de equações de difusão associadas a séries temporais estocásticas. Na seção 2.1, recapitulamos alguns dos conceitos básicos de teoria de probabilidade: definição do conceito de processo estocástico e do significado de densidade de probabilidade; apresentação das relações de compatibilidade de Chapman, que definem os processos de marginalização; definição do conceito de funções características, no formalismo canônico desenvolvido por Paul Lévy [20]. Na seção 2.2, discutimos processos de difusão e a utilização de funções características para a obtenção das equações de difusão subjacentes. Na seção 2.3, mostramos como obter equações de difusão através da utilização de funções características em seu formalismo clássico [5], classificando-as em dois tipos distintos: equações de Fokker-Planck e equações de Kramers-Moyal. Na seção 2.4, desenvolvemos uma nova formulação para equações de difusão baseada na representação canônica de funções características

desenvolvida por Paul Lévy. Nas seções 2.5 e 2.6, apresentamos respectivamente as equações de Fokker-Planck e Kramers-Moyal na nossa nova representação, mostrando que a forma específica que cada equação possui é dada por propriedades de convergência e auto-similaridade subjacentes ao processo estocástico. Na seção 2.7, discutimos o resultados obtidos ao longo do capítulo.

No capítulo 3, apresentamos processos estocásticos de tempo contínuo que tem relevância para esta tese e as equações de difusão correspondentes. Na seção 3.1, revisamos o processo de Wiener, que é um processo estocástico com incrementos independentes e estacionários que segue uma distribuição gaussiana, mostrando que este processo implica em uma equação de Fokker-Planck. Na seção 3.2, apresentamos o processo de salto como um tipo simplificado de processo de Poisson e, através da análise de sua função característica na forma canônica de Lévy, obtemos que a equação de Kramers-Moyal está associada a este processo. Na seção 3.3, mostramos que um processo misto, definido pela soma de um processo de Wiener e um processo de salto, implica em uma equação de difusão do tipo Kramers-Moyal [5, 10], processo este que será utilizado como modelo estatístico para a descrição de séries temporais financeiras.

No capítulo 4, temos como proposta a obtenção de modelos de difusão que admitama a presença de saltos, para a descrição da evolução temporal de séries temporais financeiras. Na seção 4.1, propomos que séries temporais financeiras devam ser descritos a partir de um processo estocástico no qual os retornos do preço são gerados por uma mistura de processo de Wiener com processo de salto e apresentamos uma revisão da literatura sobre o assunto. Na seção 4.2, apresentamos um detalhamento estatístico do modelo de difusão com salto e as propriedades estatísticas que definirão os dois modelos estudados nas seções posteriores. Na seção 4.3, desenvolvemos um modelo de difusão geométrica que admite a presença de saltos e o processo de agregação do retorno pode ser descrito por uma função característica infinitamente divisível pertencente à classe de De Finetti, em um modelo generalizado não-linear

em relação ao parâmetro temporal, mostrando que o modelo é capaz de explicar satisfatoriamente o comportamento dos retornos de séries financeiras. Na seção 4.4, desenvolvemos um modelo não-geométrico assumindo uma evolução temporal não-exponencial e o ruído como um processo misto, em que a partir da análise nos quatro primeiros momentos estatísticos, mostramos que um modelo de não-geométrico de Kramers-Moyal é uma melhor aproximação do que o modelo clássico de Fokker-Planck de difusão geométrica para descrição de séries financeiras.

No capítulo 5, estendemos nossos métodos estatístico de obtenção de equações de difusão para descrever processos estocásticos cuja função característica subjacente não é analítica. Na seção 5.1, dedicamo-nos ao estudo destas funções características em um formalismo geral proposto por Lévy. Na seção 5.2, propomos as propriedades básicas de obtenção de equações de difusão fracionárias que descrevem processos estocásticos com função característica não-analítica. Na seção 5.3, estudamos processos estocásticos assintoticamente auto-similares que são descritos por distribuições estáveis de Lévy quando o intervalo de tempo tende a zero, o que nos leva à uma equação de difusão de Fokker-Planck fracionária. Na seção 5.4, estudamos processos estocásticos cujas distribuições correspondentes não possuem a propriedade de ser assintoticamente auto-similar e descrevemos o sistema através de uma equação de difusão de Kramers-Moyal fracionária. Na seção 5.5, discutimos os resultados obtidos ao longo do capítulo.

Finalmente, no capítulo 6, apresentamos conclusões e perspectivas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Equações de Difusão

2.1 Processos Estocásticos

Uma variável aleatória ou variável estocástica é um objeto X definido por um conjunto de possíveis realizações ω , chamado de espaço de fases, cuja evolução é governada por leis de probabilidade [6].

Um Processo Estocástico é um modelo matemático definido como uma coleção indexada de variáveis estocásticas $\{X(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$, definidas em um espaço de probabilidade Ω , indexado pelo parâmetro t , que varia no conjunto de índices T [6]. O parâmetro t , interpretado como o tempo, pode ser contínuo ou discreto. Nesta tese, concentraremos nossos estudos em alguns tipos de processos estocásticos de tempo contínuo.

Comentários sobre a notação

Para facilitar a notação, $X(t)$ será usado daqui por diante para denotar um processo estocástico. Designaremos a variável estocástica por X enquanto o valor que ela assume em um dado instante de tempo será dado por x . Isto é feito pois é comum em teoria da probabilidade a utilização de diferentes símbolos para diferenciar a variável estocástica em si e a correspondente variável em distribuições de probabilidade. Também é comum na literatura usar indistintamente o termo distribuição de probabilidade para designar o que tecnicamente é a densidade de probabilidade associada à função de distribuição. Usaremos

então a expressão indistintamente, pois ficará claro, ao longo desta tese, que em todas as aplicações trataremos sempre da densidade e não da distribuição em si. Para dar maior ênfase, designaremos o valor complexo $I = \sqrt{-1}$.

2.1.1 Densidade de Probabilidade Conjunta

Vamos considerar um sistema cujas propriedades possam ser descritas em termos de um processo estocástico $X(t)$. Para um tempo fixo t_1 , definimos $f(x_1, t_1)$ como sendo a densidade de probabilidade da variável estocástica X assumir o valor x_1 no tempo t_1 . De forma semelhante, para dois tempos fixos t_1 e t_2 , podemos definir $f(x_1, t_1; x_2, t_2)$ como sendo a densidade de probabilidade conjunta da variável estocástica X assumir o valor x_1 no tempo t_1 e x_2 no tempo t_2 .

De forma geral, a densidade $f(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$ é a densidade de probabilidade conjunta da variável estocástica X assumir o valor x_1 no tempo t_1 , \dots , x_n no tempo t_n , em que $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Esta coleção de vários instantes de tempo t , na qual a variável X assume diferentes valores, é denominado de malha temporal. A densidade f possui as seguintes propriedades:

$$f(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) \geq 0, \quad (2.1)$$

e se o espaço de realização for real,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n = 1. \quad (2.2)$$

2.1.2 Condições de Compatibilidade

Para uma completa caracterização do processo estocástico, as densidades de probabilidade f devem satisfazer as condições de compatibilidade de Chapman [5]. Estas condições de compatibilidade garantem que se acrescentarmos mais tempos em uma certa malha temporal, as novas probabilidades de realização devem ser compatíveis com a malha anterior ao

acréscimo [36, 37]. Essas condições são expressas por integrais, válidas para $k < n$

$$f(x_{k+1}, t_{k+1}; \dots; x_n; t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) dx_1 \dots dx_k. \quad (2.3)$$

A nova densidade obtida é denominada *densidade de probabilidade marginal*. Desta forma, a integração de $f(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$ com respeito a certas variáveis, implica na densidade conjunta das variáveis remanescentes, sem perda de informação.

Por outro lado, podemos atribuir valores fixos para X nos tempos t_1, \dots, t_k e considerar a densidade de probabilidade conjunta das variáveis remanescentes nos tempos posteriores t_{k+1}, \dots, t_n . Isto é chamado de *densidade de probabilidade condicional conjunta* $f(x_{k+1}, t_{k+1}; \dots; x_n, t_n | x_1, t_1; \dots; x_k, t_k)$ da variável estocástica X assumir o valor x_{k+1} no tempo t_{k+1}, \dots, x_n no tempo t_n dado que a variável assumiu os valores x_1 no tempo t_1, \dots, x_k no tempo t_k , em que $t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots < t_n$. Ela é definida através da seguinte identidade (denominada regra de Bayes) [6]:

$$f(x_{k+1}, t_{k+1}; \dots; x_n, t_n | x_1, t_1; \dots; x_k, t_k) = \frac{f(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k; \dots; x_n; t_n)}{f(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k)}. \quad (2.4)$$

Kolmogorov provou que qualquer conjunto de funções normalizáveis, positivas e que satisfazem as condições de compatibilidade de Chapman, determina um processo estocástico completamente [6]. Conseqüentemente, a hierarquia de densidades de probabilidade conjuntas constitui uma definição alternativa equivalente de processo estocástico.

1ª Condição de Compatibilidade de Chapman

Utilizando a identidade (2.4), encontraremos a seguinte densidade de probabilidade condicional:

$$f(x_{k+1}, t_{k+1} | x_k, t_k) = \frac{f(x_k, t_k; x_{k+1}, t_{k+1})}{f(x_k, t_k)}. \quad (2.5)$$

A figura 2.1 fornece uma ilustração gráfica da equação (2.5). O processo de marginalização que define a densidade $f(x_{k+1}, t_{k+1} | x_k, t_k)$ resulta na soma de todos os possíveis caminhos que levam a um certo par x_k e x_{k+1} nos tempos t_k e t_{k+1} , respectivamente, dividido pelo

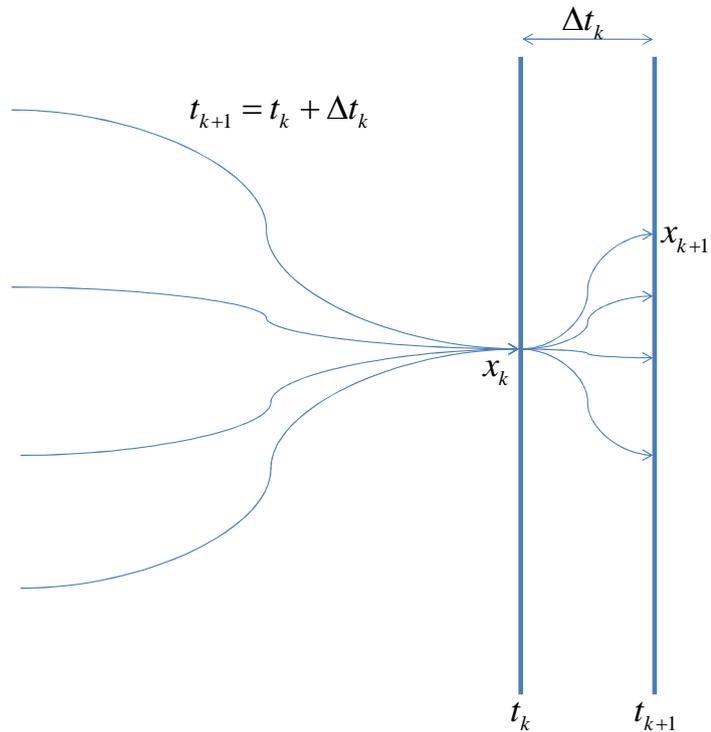


Figura 2.1: Ilustração de um processo de marginalização

número de caminhos que levam até x_k no tempo t_k . De fato, esta é uma probabilidade que pode ser interpretada como uma probabilidade de transição associada ao ensemble de trajetórias possíveis.

As equações (2.3) e (2.5) implicam diretamente na 1ª condição de compatibilidade de Chapman, que estabelece a seguinte relação entre densidades de probabilidade de um ponto:

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}, t_{k+1}) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_{k+1}, t_{k+1}; x_k, t_k) dx_k \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_{k+1}, t_{k+1} | x_k, t_k) f(x_k, t_k) dx_k. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Isto é, as densidades de probabilidades de x_{k+1} em um tempo t_{k+1} e x_k em um tempo t_k estão relacionados por uma probabilidade de transição condicional $f(x_{k+1}, t_{k+1} | x_k, t_k)$. A equação (2.6) é uma consequência necessária das definições de probabilidade condicional e

de probabilidade marginal para probabilidades de um ponto. Esta equação é uma identidade válida para qualquer processo estocástico e a primeira na hierarquia das condições de compatibilidade de Chapman. A segunda condição, que também é sempre válida, é dada por

$$\begin{aligned} f(x_{k+2}, t_{k+2} | x_k, t_k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_{k+2}, t_{k+2}; x_{k+1}, t_{k+1} | x_k, t_k) dx_{k+1} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_{k+2}, t_{k+2} | x_k, t_k; x_{k+1}, t_{k+1}) f(x_{k+1}, t_{k+1} | x_k, t_k) dx_{k+1}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Vamos agora introduzir o conceito de processo markoviano. A hipótese de Markov é formulada em termos de probabilidades condicionais. Um processo é dito de Markov (ou markoviano) se a seguinte relação é satisfeita:

$$f(x_{k+1}, t_{k+1}; \dots; x_n, t_n | x_1, t_1; \dots; x_k, t_k) = f(x_{k+1}, t_{k+1}; \dots; x_n, t_n | x_k, t_k). \quad (2.8)$$

Desta maneira, a equação (2.7) é reescrita da seguinte forma:

$$f(x_{k+2}, t_{k+2} | x_k, t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_{k+2}, t_{k+2} | x_{k+1}, t_{k+1}) f(x_{k+1}, t_{k+1} | x_k, t_k) dx_{k+1}, \quad (2.9)$$

que é a *equação de Chapman-Kolmogorov*. A equação (2.9) é uma equação funcional não-linear relacionando todas as probabilidades condicionais $f(x_i, t_i | x_j, t_j)$ entre si.

Vale ressaltar que no caso de um processo markoviano, a densidade $f(x_k, t_k; x_{k+1}, t_{k+1})$ deve satisfazer simultaneamente a 1ª condição de compatibilidade de Chapman (2.6) e a equação de Chapman-Kolmogorov (2.9). Desta maneira, o simples conhecimento da densidade $f(x_k, t_k; x_{k+1}, t_{k+1})$ permite a completa descrição do processo estocástico.

Em um processo não-markoviano, toda a hierarquia de densidades de probabilidade é requerida para especificar completamente o processo. Neste caso, a equação de Chapman-Kolmogorov não é satisfeita, e a 1ª condição de Chapman permite apenas a obtenção da evolução temporal da probabilidade marginal da variável estocástica assumir certo valor em um dado instante de tempo.

As equações (2.5) e (2.6) permitem concluir que a densidade de probabilidade condicional marginal $f(x_{k+1}, t_{k+1} | x_k, t_k)$ dependerá do valor de x_k no tempo t_k e do intervalo de tempo

$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$. A diferença $t_{k+1} - t_k$ da probabilidade condicional $f(x_{k+1}, t_{k+1} | x_k, t_k)$ é definida arbitrariamente. Em geral, se o valor de Δt_k é grande, as variáveis x_{k+1} e x_k estarão pouco correlacionadas [38]. Por outro lado, se a diferença é infinitesimalmente pequena, a probabilidade condicional possuirá um valor de pico em x_k , i.e.,

$$\lim_{t_{k+1} \rightarrow t_k} f(x_{k+1}, t_{k+1} | x_k, t_k) = \delta(x_{k+1} - x_k). \quad (2.10)$$

Na verdade, esta equação expressa que a variável estocástica não pode ter saltos instantâneos [5]. Além disso, a equação (2.10) pode ser utilizada como importante ferramenta na caracterização da equação de difusão que descreve o processo estocástico em estudo, como será visto nas seções 2.5 e 2.6.

2.1.3 Alguns Tipos de Processos Estocásticos Relevantes

Processo Independente

Chamamos um processo $X(t)$ de independente, se a densidade de probabilidade condicional [1]

$$f(x_n, t_n | x_1, t_1; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) = f(x_n, t_n). \quad (2.11)$$

Disso, segue que a densidade de probabilidade conjunta

$$f(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = f(x_1, t_1) \dots f(x_n, t_n). \quad (2.12)$$

Processo Estacionário

Um processo é dito *estacionário* se quando dividido em intervalos de tempo as várias seções do processo exibem essencialmente as mesmas propriedades estatísticas. Caso contrário é dito *não-estacionário* [1].

Considere então um processo estocástico $X(t)$. Sejam $X(t_1), \dots, X(t_n)$ as variáveis aleatórias obtidas pela observação do processo $X(t)$ nos instantes t_1, \dots, t_n , respectivamente. Suponha em seguida que deslocamos todos os tempos de observação de Δt , obtendo novas

variáveis $X(t_1 + \Delta t), \dots, X(t_n + \Delta t)$. O processo estocástico $X(t)$ é dito estacionário se

$$f(x_1, t_1 + \Delta t; \dots; x_n, t_n + \Delta t) = f(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n), \quad (2.13)$$

quaisquer que sejam Δt e os instantes t_1, \dots, t_n .

Processos com Incrementos Independentes e Estacionários

Um processo $X(t)$ é dito ter *incrementos independentes* se para quaisquer n instantes de tempos $t_0 < \dots < t_n$, $X(t_1) - X(t_0), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$, são variáveis aleatórias independentes. Se, além disso, $X(t) - X(s)$ tem a mesma distribuição que $X(t + \Delta t) - X(s + \Delta t)$ para todo $s, t, \Delta t \geq 0, s < t$, então o processo é dito ter *incrementos independentes e estacionários*. Os processos de Wiener e de salto, que serão apresentados no capítulo 3, são dois exemplos de processos com incrementos independentes e estacionários [6].

2.1.4 Valor Esperado e Momentos

Considere uma função $\varphi(X_1, \dots, X_n)$ e seja $f(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$ a densidade de probabilidade associada a variável X . O valor esperado, também denominado de média, é definido por [1]

$$\langle \varphi(X_1, \dots, X_n) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, \dots, x_n) f(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (2.14)$$

A seguinte média

$$\langle [X(t_k) - b]^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x_k - b)^n f(x_k, t_k) dx_k, \quad (2.15)$$

é denominada de n -ésimo momento da variável $X(t_k)$ em torno de b , para b real e k inteiro não-negativo. Se $b = 0$, então $M_n = \langle X^n(t_k) \rangle$ é chamado de n -ésimo momento de $X(t_k)$.

O valor esperado $\mu_k = \langle X(t_k) \rangle$ é denominado média de $X(t_k)$ e se ela existe, então o n -ésimo momento em torno da média $\langle [X(t_k) - \mu_k]^n \rangle$ chama-se n -ésimo momento central de $X(t_k)$. O primeiro momento central $\langle X(t_k) - \mu_k \rangle$ é igual à zero. O segundo momento central

$$Var[X(t_k)] = \langle [X(t_k) - \mu_k]^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x_k - \mu_k)^2 f(x_k, t_k) dx_k, \quad (2.16)$$

é denominado de *variância*. O *desvio-padrão* $\sigma_k = \sqrt{Var[X(t_k)]}$ é a medida mais comum da dispersão estatística. É definido desta forma de maneira a dar-nos uma medida da dispersão que seja um número não-negativo e que use a mesma unidade de medida dos dados fornecidos.

A assimetria é o grau de desvio, ou afastamento da simetria de uma distribuição [36]. Ou seja, a assimetria ocorre devido à extensão de uma das caudas da distribuição. Os valores da cauda afetam o valor da média, pois a média sempre acompanha o lado da cauda da distribuição com extensão. A medida de assimetria de uma distribuição é dada por

$$Skew[X(t_k)] = \left\langle \left(\frac{X(t_k) - \mu_k}{\sigma_k} \right)^3 \right\rangle. \quad (2.17)$$

A *curtose* é o grau de achatamento de uma distribuição, considerado usualmente em relação a uma distribuição normal e é dada por

$$Kur[X(t_k)] = \left\langle \left(\frac{X(t_k) - \mu_k}{\sigma_k} \right)^4 \right\rangle. \quad (2.18)$$

De grande importância também, temos o momento da variável estocástica X em diversos tempos, definido por [39]

$$\langle X_1 \dots X_k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \dots x_k f(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k) dx_1 \dots dx_k, \quad (2.19)$$

que nos fornece a autocorrelação entre os valores da variável estocástica X em diferentes tempos. Caso as variáveis, em diferentes tempos, sejam independentes entre si então

$$\langle X_1 \dots X_n \rangle = \langle X_1 \rangle \dots \langle X_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1, t_1) dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_k f(x_k, t_k) dx_k. \quad (2.20)$$

2.1.5 Função Característica

O valor esperado pode ser utilizado para caracterizar, parcialmente ou completamente, uma determinada variável aleatória. A função característica é um tipo de valor esperado que sempre existe e sempre caracteriza uma distribuição de probabilidade de forma completa e unívoca. Ela é uma ferramenta de grande utilidade para o estudo do conceito de convergência

em distribuições de variáveis aleatórias e na demonstração de alguns teoremas de extrema relevância [1, 20].

A função característica $\psi_X(z, t)$ de uma variável estocástica $X(t)$ é definida como a transformada de Fourier da densidade de probabilidade associada a $X(t)$, isto é,

$$\psi_X(z, t) = \langle e^{IzX(t)} \rangle = \langle \cos [zX(t)] \rangle + I \langle \sin [zX(t)] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{Izx} f(x, t) dx. \quad (2.21)$$

Logo, a densidade de probabilidade é a transformada inversa de Fourier da função característica. A função característica possui as seguintes propriedades [40]:

1. $|\psi_X(z, t)| \leq 1$;
2. $\psi_X(0, t) = 1$;
3. Se $X(t)$ e $X(t')$ são independentes, então $\psi_{[X(t)+X(t)]} = \psi_X(z, t)\psi_X(z, t')$;
4. Se $X = aY + b$, em que a e b são reais e Y é uma variável estocástica, então $\psi_X(z, t) = e^{Izb}\psi_Y(az, t)$;
5. Se a função característica associada a X é analítica, todos os momentos estatísticos de X serão finitos, ou seja, $\langle |X(t)|^n \rangle < \infty, \forall n \in N$. Então, $\psi_X(z, t)$ possui infinitas derivadas contínuas e

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n} \psi_X(z, t) = \int (Ix)^n e^{Izx} f(x, t) dx, \quad n = 1, 2, \dots, \infty. \quad (2.22)$$

A partir de (2.22), se $|\psi_X(0, t)| < \infty$, então o n -ésimo momento de $X(t)$ existe e pode ser obtido por:

$$\frac{1}{I^n} \frac{\partial^n \psi_X(z, t)}{\partial z^n} \Big|_{z=0} = \langle X^n(t) \rangle. \quad (2.23)$$

Desta forma, a existência de todos os momentos permite o desenvolvimento de $\psi_X(z, t)$ em série de Taylor

$$\psi_X(z, t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Iz)^n}{n!} \langle X^n(t) \rangle. \quad (2.24)$$

Entretanto, este resultado não é aplicável se $\langle X^n(t) \rangle$ for infinito para algum k .

O resultado (2.24) é bastante importante, pois estabelece uma relação entre a função característica e os momentos da distribuição. Enquanto a densidade de probabilidade define a forma da distribuição de seus possíveis valores, a função característica permite descrever o processo no espaço dos momentos estatísticos. Por isso, as propriedades estatísticas do processo podem ser estudadas tanto da perspectiva da densidade de probabilidade como da função característica.

Segunda Característica

Podemos determinar a *segunda característica* aplicando o logaritmo na função característica, isto é,

$$W_X(z, t) = \ln[\psi_X(z, t)]. \quad (2.25)$$

A função $W_X(z, t)$ é também chamada de *função geradora de cumulantes* da função de distribuição $f(x, t)$ [36].

Os cumulantes também chamados de momentos cumulativos são de grande importância na descrição (ou caracterização estatística) de um processo estocástico $X(t)$. Eles fornecem uma alternativa para os momentos da distribuição de probabilidade [1], e definimos o cumulante de n -ésima ordem como:

$$c_n(t) = \frac{d^n W_X(z, t)}{dz^n}, \quad (2.26)$$

em que usamos a equação (2.25).

2.1.6 Função de Lévy

A função de Lévy foi utilizada na literatura [41, 42] para analisar o processo de convergência de soma de variáveis aleatórias em séries temporais estocásticas. Ela pode ser utilizada para medir e caracterizar de modo preciso o afastamento de uma distribuição em relação à distribuição normal. Ela é obtida através da utilização de uma forma canônica da função

característica proposta originalmente por Paul Lévy [20].

Primeiramente, definimos o conceito de *variável aleatória reduzida*, dada por:

$$\bar{X}(t) = \frac{X(t) - \mu}{\sigma}. \quad (2.27)$$

em que μ e σ são, respectivamente, a média e o desvio-padrão de $X(t)$. Este tipo de variável é também denominada de padronização de $X(t)$, pois expressa tal variável em unidades de desvio-padrão. Ela possui sempre média igual a zero e variância igual a um.

Lévy demonstrou [20,43] que, para uma variável aleatória X com variância finita, a função característica associada à sua variável reduzida pode ser escrita como

$$\psi_{\bar{X}}(z) = e^{-\frac{z^2}{2}[1+\omega(z)]}. \quad (2.28)$$

A função $\omega(z)$ é denominada de função de Lévy. Ela é uma função complexa e contínua em um intervalo real aberto $-\epsilon < z < \epsilon$, podendo ser escrita da seguinte forma:

$$\omega(z) = \omega_R(z) + I\omega_I(z). \quad (2.29)$$

A função $\omega_R(z)$ é uma função par e $\omega_I(z)$ é uma função ímpar e $\omega(0) = 0$.

A função de Lévy pode ser calculada a partir da função característica $\psi_{\bar{X}}(z, t)$. De acordo com a definição dada em (2.21) para função característica, podemos reescrevê-la como:

$$\psi_{\bar{X}}(z, t) = \psi_R(z, t) + I\psi_I(z, t), \quad (2.30)$$

em que

$$\begin{aligned} \psi_R(z, t) &= \langle \cos [zX(t)] \rangle, \\ \psi_I(z, t) &= \langle \sin [zX(t)] \rangle. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Com isso, obtemos a parte real de $\omega(z)$ através da fórmula:

$$\omega_R(z) = -\frac{z^2 + 2 \ln \left(\sqrt{\psi_R^2(z, t) + \psi_I^2(z, t)} \right)}{z^2}, \quad (2.32)$$

e sua parte imaginária:

$$\omega_I(z) = \frac{1}{z^2} \arctan \left[\frac{\psi_I(z, t)}{\psi_R(z, t)} \right], \quad (2.33)$$

em que a função arco-tangente fornece o valor principal do argumento θ do número complexo $x + Iy \equiv re^{I\theta}$, o que significa que $-\pi < \theta \leq \pi$.

Somente quando $\omega(z) = 0$, a função característica associada será

$$\psi_{\bar{X}}(z, t) = e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad (2.34)$$

que é a função característica associada a distribuição normal-padrão (veja a subseção 2.1.8).

2.1.7 Distribuições Infinitamente Divisíveis

Considerando um processo estocástico $X(t)$, sua densidade de probabilidade $f(x, t)$ é *infinitamente divisível* se, para qualquer $n \geq 1$, existir uma distribuição $f_n(x, t)$ tal que $f(x, t)$ é a convolução de n cópias independentes de $f_n(x, t)$ [36]. Por outro lado, uma função densidade de probabilidade $f(x, t)$ é infinitamente divisível se e somente se sua função característica $\psi_X(z, t)$ (que também será chamada de infinitamente divisível), for para cada $n \in \mathbb{N}$, a n -ésima potência de alguma função característica $\psi_n(z, t)$, isto é,

$$\psi_X(z, t) = [\psi_n(z, t)]^n, \quad (2.35)$$

com as condições $\psi_n(0, t) = 1$ e $\psi_n(z, t)$ seja contínua.

A equação (2.35) mostra que podemos criar cópias da distribuição original simplesmente tomando potências de sua função característica. Este procedimento nos leva a conclusão de que, independentemente da sequência de variáveis aleatórias escolhida que satisfaça a equação (2.35), sempre a soma de suas componentes resultará na mesma variável aleatória X [2, 36].

De Finetti demonstrou as condições necessárias e suficientes para que a equação (2.35) seja uma função característica válida (para detalhes, veja [36]). É por esse motivo que também dizemos que uma função característica infinitamente divisível pertence à classe de De Finetti de funções características, notação esta que utilizaremos.

2.1.8 Distribuição Gaussiana

Por ser de grande interesse para nossos propósitos, vamos descrever as propriedades estatísticas associadas a uma variável aleatória $X(t)$, cuja densidade de probabilidade é descrita por uma distribuição gaussiana dada por [1]:

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.36)$$

na qual μ e σ são respectivamente a média e o desvio-padrão de $X(t)$. Utilizando a equação (2.21), a função característica associada a esta variável será dada por:

$$\psi_{gauss}(z, t) = e^{I\mu z - \frac{\sigma^2 z^2}{2}}. \quad (2.37)$$

A distribuição gaussiana é um exemplo de distribuição infinitamente divisível, pois

$$\psi_{gauss}(z, t) = e^{i\mu z - \frac{\sigma^2 z^2}{2}} = \left[e^{i\frac{\mu}{n}z - \frac{\sigma^2}{2n}z^2} \right]^n.$$

Considerando a variável reduzida $\bar{X}(t)$, a densidade na equação (2.36) torna-se

$$f(\bar{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\bar{x}^2}{2}}, \quad (2.38)$$

denominada de *distribuição normal-padrão*. Pode-se mostrar que os momentos desta distribuição são dados por [1]

$$\langle \bar{X}^n(t) \rangle = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1), \quad (2.39)$$

válida para n par. Os momentos ímpares da distribuição normal-padrão são nulos. Em particular, $Skew[X(t)] = \langle \bar{X}^3(t) \rangle = 0$ e $Kur[X(t)] = \langle \bar{X}^4(t) \rangle = 3$. E a função característica associada a variável reduzida $\bar{X}(t)$, será dada por:

$$\psi_{\bar{X}}(z, t) = e^{-\frac{z^2}{2}}. \quad (2.40)$$

Da equação (2.40), podemos concluir que a função de Lévy pode ser utilizada como uma medida do quanto uma distribuição de probabilidade se aproxima ou se afasta da distribuição normal.

2.2 Processos de Difusão e Métodos da Função Característica

2.2.1 Processo de Difusão

Um *processo de difusão* é um processo estocástico contínuo no tempo e está relacionado com o estudo da existência e unicidade de soluções para equações diferenciais estocásticas [14]. A literatura tem mostrado que vários fenômenos naturais [13] e econômicos [41, 42] são bem modelados por processos de difusão.

O tipo de difusão associado pode ser caracterizada pelo estudo da variância do processo estocástico. A *difusão normal* é o caso mais emblemático na literatura. Um processo estocástico $X(t)$ possui difusão normal se sua variância $Var[X(t + \Delta t) - X(t)] \propto \Delta t$. Entretanto, outros tipos de regimes difusivos não se manifestam de forma linear em relação ao intervalo de tempo Δt . Tais regimes são denominados de *difusões anômalas* [13].

De um modo geral, podemos expressar o tipo de difusão através da seguinte lei de potência,

$$Var[X(t + \Delta t) - X(t)] \propto (\Delta t)^h \quad (2.41)$$

em que h é denominado de *expoente de Hurst* (ou expoente de difusão), indicador do formato do regime de difusão, expresso por:

- $0 \leq h < 1 \longrightarrow$ Subdifusão;
- $h = 1 \longrightarrow$ Difusão Normal;
- $1 < h < 2 \longrightarrow$ Superdifusão.

A difusão anômala compreende a subdifusão e a superdifusão. O expoente de Hurst não pode ser negativo porque, neste caso, não haveria um processo de difusão, mas sim, uma contração, e quando o tempo tende-se ao infinito, ocorreria um colapso em uma singularidade. O expoente de difusão pode ser visto como uma ferramenta eficiente para detectar a presença de correlações de longo alcance nos dados [13].

O expoente de Hurst pode ser relacionado à dimensão fractal d_f de linhas como [22]

$$d_f = 2 - \frac{h}{2} \quad (2.42)$$

Um fractal é uma estrutura na qual suas partes se assemelham ao todo, sendo essa característica denominada de auto-semelhança. A dimensão fractal é o principal parâmetro de um modelo fractal, e ela pode ser entendida como uma medida de complexidade, fragmentação ou correlação do sistema. A dimensão fractal de uma linha pode assumir valores $1 \leq d_f < 2$. Desta forma, a equação (2.42) mostra porque $0 \leq h < 2$.

A difusão normal ($h = 1$) consiste em uma variância dos incrementos $X(t + \Delta t) - X(t)$ que possui uma evolução temporal linear. Isto indica um processo estocástico sem memória longa e que os incrementos $X(t + \Delta t) - X(t)$ são independentes. Este tipo de difusão é condição necessária para a obtenção de equações de difusão na descrição de processos estocásticos, como veremos nas seções seguintes.

Caso o expoente de Hurst seja diferente de um, temos difusão anômala. Isto é indicativo de que os incrementos $X(t + \Delta t) - X(t)$ não são independentes e contêm uma memória dos eventos que os procederam. Este é um tipo de memória de longo prazo, nos quais eventos presentes influenciam eventos futuros distantes, ou seja, o processo estocástico possui *correlação de longo alcance*.

Valores entre $1 < h < 2$ (superdifusão) indicam dependência longa positiva (persistência), ou seja, se o processo $X(t)$ foi aumentando de valor em um período passado, há uma maior chance de que continue aumentando no próximo período. Valores entre $0 \leq h < 1$ (subdifusão) indicam dependência longa negativa (anti-persistência), ou seja, tendências passadas tendem a se reverter no futuro.

Difusão Anômala: Soluções

No regime de difusão anômala, não podemos descrever o processo estocástico em termos de equações de difusão (Fokker-Planck ou Kramers-Moyal). Alguns autores, no entanto,

utilizam generalizações das equações de difusão, nas quais se obtêm derivadas fracionárias em relação ao parâmetro temporal, para a obtenção resultados analíticos para as densidades de probabilidade associadas ao processo [13, 14].

Outros autores [41, 42] utilizam-se dos chamados *Voos de Lévy*. Um voo de Lévy possui a propriedade de que, para valores grandes de $|x|$, sua distribuição é dada por

$$f(|x|, t) = |x|^{-\alpha}, \quad (2.43)$$

ou seja, há uma lei de potência, o que significa que os Voos de Lévy não apresentam escala característica, que é indicativo de geometria fractal. Além disso, voos de Lévy são estacionários, possuem incrementos independentes e seu desvio-padrão é infinito. Mais precisamente, todos os momentos de ordem maior que dois são infinitos. O desvio-padrão é uma medida da dispersão do processo estocástico, e torna-se complicado dar significado a essa grandeza se ela for infinita.

Nesta tese, vamos lidar com o problema de difusão anômala, quando este surgir, com uma abordagem diferente. Vamos utilizar de técnicas estatísticas para suavizar os efeitos de correlações de longo alcance no processo. Assim, vamos realizar renormalizações no processo a fim de recuperar o regime de difusão normal e assim poder obter a equação de difusão relacionada ao sistema. Isto será visto com detalhes no capítulo 4.

2.2.2 Equação Diferencial Estocástica

Considere um processo estocástico $X(t)$ no regime de difusão normal, caracterizado pelos coeficientes $\mu(x, t)$ e $\sigma(x, t)$, respectivamente, a média e o desvio-padrão do processo. Como $X(t)$ evolui continuamente no tempo, o processo $X(t)$ pode ser escrito através de uma equação diferencial estocástica. De forma não rigorosa, partindo das definições dos coeficientes

infinitesimais

$$\begin{aligned}\langle X(t + \Delta t) - X(t) \rangle &= \mu(x, t)\Delta t, \\ \text{Var}[X(t + \Delta t) - X(t)] &= \sigma^2(x, t)\Delta t,\end{aligned}\tag{2.44}$$

em que a equação

$$x(t + \Delta t) - x(t) \approx \mu(x, t)\Delta t + \sigma(x, t)[\epsilon(t + \Delta t) - \epsilon(t)],\tag{2.45}$$

é compatível com as definições de coeficientes infinitesimais (com Δt pequeno). Fazendo $\Delta t \rightarrow 0$, obtemos uma equação diferencial estocástica denominada equação de Langevin não-linear [6]:

$$dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)\epsilon(dt),\tag{2.46}$$

em que $\mu(x, t)$ e $\sigma(x, t)$ são funções diferenciáveis e $\epsilon(dt)$ é um ruído aleatório.

A equação diferencial (2.46) fornece uma realização específica (uma trajetória) do processo estocástico seguido pela variável aleatória $X(t)$. Se tomarmos uma média sobre várias trajetórias, a densidade de probabilidade de obtermos um certo valor x no tempo t é descrita pela distribuição $f(x, t)$.

Caso o sistema em estudo possua memória, ou seja, sistemas em que os eventos do passado possuem certa influência no presente, então devemos utilizar uma generalização para a equação de Langevin (2.46), de modo a englobar tais sistemas. Para mais detalhes, veja as referências [1, 6]. Vamos estudar regimes de difusão normal, em que (2.46) é válida.

O principal problema para resolver a equação (2.46) consiste no fato de que o teorema clássico de existência e unicidade das soluções não é assegurado, porque o ruído $\epsilon(t)$ não é uma função contínua. É útil então reescrever a equação (2.46) na forma integral

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t \mu(x, t')dt' + \int_{t_0}^t \sigma(x, t')\epsilon(dt'),\tag{2.47}$$

Podemos até inferir uma boa definição para resolver a equação (2.47), o problema é que sua solução não é unívoca. Na literatura existem dois diferentes caminhos para definir integrais

estocásticas: a) Ito-Doob e b) Stratanovich. Nesta tese, não discutiremos estas definições. Para uma discussão mais detalhada, veja a referência [1].

O presente trabalho centra-se em um método de análise de processos estocásticos sem a utilização de equações diferenciais. Na verdade acreditamos que a utilização de equações diferenciais estocásticas tem seu grau de importância em determinados casos, mas a simples utilização de funções características pode ser mais plausível na obtenção das propriedades estatísticas de processos estocásticos, como veremos a seguir.

2.2.3 Métodos das Funções Características

Vamos considerar um intervalo de tempo Δt suposto como sendo muito pequeno. Vamos então considerar um processo estocástico mais geral em que

$$x(t + \Delta t) - x(t) = \theta(x, t, \Delta t). \quad (2.48)$$

De um ponto de vista probabilístico, a equação (2.48) descreve uma transformação probabilística que relaciona a variável X do tempo t à variável X no tempo $t + \Delta t$. Esta transformação é feita através da variável aleatória θ que possui $f[\theta(x, t, \Delta t)]$ como densidade de probabilidade associada, condicionada ao valor de X no tempo t e ao intervalo de tempo Δt . Esta variável θ será chamada de variável de retorno. A 1ª condição de compatibilidade de Chapman

$$f(x', t + \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x', t + \Delta t | x, t) f(x, t) dx, \quad (2.49)$$

em que $f(x', t + \Delta t | x, t)$ é a densidade de probabilidade de obtermos x' no tempo $t + \Delta t$ condicionado em x no tempo t , é assumida como sendo satisfeita [5].

A equação (2.48) permite a seguinte constatação:

$$f(\theta, t + \Delta t | x, t) = f(x' - x, t + \Delta t | x, t) = f(x', t + \Delta t | x, t). \quad (2.50)$$

Esta relação pode ser entendida da seguinte maneira: em um tempo t obtemos que a variável estocástica X assume um valor x . Em um tempo $t + \Delta t$, a variável x não possuirá mais uma

probabilidade associada, pois o seu valor já foi anteriormente obtido. Assim, a probabilidade associada a θ será a probabilidade associada a x' , satisfazendo a relação (2.50).

As funções características de $X(t)$ e $\theta(x, t, \Delta t)$ são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned}\psi_X(z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{Izx} f(x, t) dx, \\ \psi_\theta(z, t, \Delta t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{Iz\theta} f(\theta|x, t, \Delta t) d\theta.\end{aligned}\quad (2.51)$$

em que $f(\theta|x, t, \Delta t)$ é a densidade de probabilidade condicional de θ em função do valor de x em um tempo t e do intervalo de tempo Δt . O próximo passo consiste em obter a relação entre as funções características associadas. Da equação (2.48), obtemos

$$\psi_X(z, t + \Delta t) = \langle e^{Izx'} \rangle = \langle e^{Iz[x + \theta(x, t, \Delta t)]} \rangle. \quad (2.52)$$

A partir das equações (2.50) e (2.51), podemos reescrever a equação (2.52) como

$$\psi_X(z, t + \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{Izx} \psi_\theta(z, t, \Delta t) f(x, t) dx. \quad (2.53)$$

Vamos desenvolver dois métodos para lidar com a equação (2.53): o primeiro método é baseado no cálculo dos momentos estatísticos associados a variável aleatória θ , o segundo método utiliza a forma específica para a função característica da variável θ , denominada forma canônica de Lévy, que permite um estudo mais abrangente das propriedades estatísticas da variável θ .

Em ambos os métodos, vamos assumir que a função característica da variável aleatória θ é analítica para qualquer intervalo de tempo Δt . Isto implica que seus momentos estatísticos são finitos. No capítulo 5, relaxaremos esta hipótese e consideraremos a situação em que a função característica de θ é não analítica.

2.3 Equação de Difusão: Método dos Momentos Estatísticos

Neste primeiro método, vamos utilizar a função característica da variável de retorno θ para encontrar a equação de difusão em termos dos coeficientes de Kramers-Moyal [5, 8],

obtidos a partir dos momentos estatísticos $\langle \theta^n \rangle$. Este é um método conhecido e amplamente encontrado na literatura [1].

Primeiramente, vamos expandir a função característica de θ em séries de Taylor

$$\psi_\theta(z, t, \Delta t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle \theta^n \rangle}{n!} (Iz)^n, \quad (2.54)$$

em que $\langle \theta^n \rangle$ é o n -ésimo momento da variável θ . Substituindo (2.54) em (2.53), obtemos:

$$\psi_X(z, t + \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{Izx} f(x, t) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Iz)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} \langle \theta^n \rangle f(x, t) dx. \quad (2.55)$$

Vamos usar agora a seguinte propriedade:

$$(iz)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} \langle \theta^n \rangle f(x, t) dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [\langle \theta^n \rangle f(x, t)] dx, \quad (2.56)$$

em que realizamos n integrações por partes e consideramos a condição de contorno natural $f(\pm\infty, t) = 0$. Então, a equação (2.55) pode ser reescrita como

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{Izx'} f(x', t + \Delta t) dx' = \int_{-\infty}^{\infty} e^{Izx} f(x, t) dx + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [\langle \theta^n \rangle f(x, t)] dx. \quad (2.57)$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier nos dois lados da equação (2.57), obtemos

$$f(x, t + \Delta t) - f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [\langle \theta^n \rangle f(x, t)]. \quad (2.58)$$

Dividindo ambos os lados da equação (2.58) por Δt e tomando o limite para $\Delta t \rightarrow 0$, obtemos

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [D_n(x, t) f(x, t)], \quad (2.59)$$

em que D_n são denominados de coeficientes de Kramers-Moyal, dados por:

$$D_n(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \theta^n \rangle}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \theta^n f(x', t + \Delta t | x, t) dx', \quad (2.60)$$

A equação (2.59) é a *Equação de Difusão* associada ao processo estocástico $X(t)$. É nítido que o modo como os coeficientes D_n 's se comportam define a forma que a equação de difusão possuirá: quando os valores de D_n são nulos para $n \geq 3$, a equação (2.59) torna-se a

equação de Fokker-Planck; do contrário, temos a então chamada equação de Kramers-Moyal. O lema de Pawula garante que essas são as duas únicas formas que a equação de difusão pode assumir [11].

A equação (2.59) só é verdadeiramente uma equação de difusão se ela possuir termos de desvio. Isso significa que o coeficiente D_2 deve ser diferente de zero. Para que isto ocorra $\langle \theta^2 \rangle \propto \Delta t$, o que significa que o sistema deve estar no regime de difusão normal para obtermos uma equação de difusão como encontrado em (2.59).

2.3.1 Equação de Fokker-Planck

A equação de Fokker-Planck [8, 9] é obtida quando os seguintes limites são satisfeitos:

$$\begin{aligned} D_1(x, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \theta \rangle}{\Delta t} \neq 0; \\ D_2(x, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \theta^2 \rangle}{\Delta t} \neq 0; \\ D_n(x, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \theta^n \rangle}{\Delta t} = 0, \quad \text{para } n \geq 3. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Neste caso, escrevemos a equação de difusão (2.59) como:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [D_1(x, t)f(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [D_2(x, t)f(x, t)]. \quad (2.62)$$

Esta equação tem como solução formal para $\Delta t \rightarrow 0$ (para demonstração deste resultado veja a referência [1]):

$$f(x', t + \Delta t | x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D_2(x, t)\Delta t}} e^{-\frac{[\theta - D_1(x, t)\Delta t]^2}{4D_2(x, t)\Delta t}}. \quad (2.63)$$

Se os coeficientes D_1 e D_2 forem independentes de x e t , então a equação (2.63) não é só válida para Δt pequeno, mas também para $\Delta t > 0$ arbitrário.

2.3.2 Equação de Kramers-Moyal

A Equação de Kramers-Moyal [5, 10] é obtida da seguinte maneira: se

$$D_n(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \theta^n \rangle}{\Delta t} \neq 0 \quad \text{para algum } n > 3 \text{ e par,} \quad (2.64)$$

então o lema de Pawula [11] garante que todos os coeficientes D_n pares são diferentes de zero e a equação (2.59) será dada por uma expansão de infinitos termos, do seguinte modo:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [D_n(x, t)f(x, t)]. \quad (2.65)$$

O lema de Pawula garante ainda que se $D_n = 0$ para algum n par, então todos os coeficientes $D_n = 0$ para $n \geq 3$, retomando assim a equação de Fokker-Planck.

Uma equação de Kramers-Moyal geralmente é escrita com o intuito de truncá-la até uma ordem finita [12], já que ela não possui solução formal com infinitos termos. No entanto, de acordo com o teorema de Pawula, qualquer truncagem da equação (2.65) até o termo $n \geq 3$ gera distribuições negativas, geralmente em tempos transientes. Na seção a seguir, apresentamos uma nova abordagem que permite uma melhor descrição das propriedades estatísticas de equações de Kramers-Moyal que este modelo tradicional.

2.4 Equação de Difusão: Forma Canônica de Lévy

Nesta seção, vamos utilizar a forma canônica de Lévy para a função característica da variável estocástica θ para a obtenção da equação de difusão. Este formalismo para a equação de Difusão, por nós desenvolvido e publicado nos artigos [32, 33], é inédito na literatura.

O primeiro passo consiste em centralizar e normalizar a variável de retorno θ :

$$\bar{\theta} = \frac{\theta - \mu_{\theta}}{\sigma_{\theta}}, \quad (2.66)$$

em que

$$\begin{aligned} \mu_{\theta} &= \mu_{\theta}(x, t, \Delta t) = \langle \theta \rangle, \\ \sigma_{\theta}^2 &= \sigma_{\theta}^2(x, t, \Delta t) = \langle \theta^2 \rangle - \langle \theta \rangle^2. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Como visto na seção 2.1, a forma canônica de Lévy para função característica com variância finita associada à variável reduzida $\bar{\theta}$, é dada por:

$$\psi_{\bar{\theta}}(z, t, \Delta t) = e^{-\frac{z^2}{2}[1+\omega(z;x,t,\Delta t)]}. \quad (2.68)$$

De acordo com as propriedades de funções características, podemos escrever:

$$\theta = \sigma_\theta \bar{\theta} + \mu_\theta \Rightarrow \psi_\theta(z, t, \Delta t) = e^{I\mu_\theta z} \psi_{\bar{\theta}}(\sigma_\theta z, t, \Delta t). \quad (2.69)$$

A partir de (2.69), obtemos:

$$\psi_\theta(z, t, \Delta t) = e^{I\mu_\theta z} e^{-\frac{(\sigma_\theta z)^2}{2}[1+\omega(\sigma_\theta z; x, t, \Delta t)]}. \quad (2.70)$$

Se adicionarmos $-\psi_X(z, t)$ em cada lado da equação (2.53), dividirmos os dois lados por Δt e tomarmos o limite $\Delta t \rightarrow 0$, obtemos

$$\frac{\partial \psi_X(z, t)}{\partial t} = \int e^{Izx} f(x, t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\psi_\theta(z, t, \Delta t) - 1}{\Delta t} \right] dx. \quad (2.71)$$

Todo o nosso trabalho concentra-se em avaliar o limite:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\psi_\theta(z, t, \Delta t) - 1}{\Delta t} \right]. \quad (2.72)$$

A segunda característica de θ é dada por

$$W_\theta(z; x, t, \Delta t) = \ln [\psi_\theta(z, t, \Delta t)] = I\mu_\theta z - \frac{(\sigma_\theta z)^2}{2} - \frac{(\sigma_\theta z)^2}{2} \omega(\sigma_\theta z; x, t, \Delta t). \quad (2.73)$$

Podemos expandir a função característica de θ em séries de Taylor, obtendo a seguinte relação

$$\frac{\psi_\theta(z, t, \Delta t) - 1}{\Delta t} = \frac{W_\theta(z; x, t, \Delta t)}{\Delta t} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{W_\theta^n(z; x, t, \Delta t)}{\Delta t}. \quad (2.74)$$

O limite (2.72) existe se e somente se as seguintes condições forem obedecidas:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mu_\theta}{\Delta t} &= \mu(x, t), \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sigma_\theta^2}{\Delta t} &= \sigma^2(x, t), \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega(\sigma_\theta z; x, t, \Delta t) &= \Omega(z; x, t). \end{aligned} \quad (2.75)$$

em que $\mu(x, t)$, $\sigma^2(x, t)$ e $\Omega(z; x, t)$ são funções finitas e arbitrárias. Estas condições estabelecidas são necessárias e suficientes para a existência do limite. A segunda condição em (2.75) implica que o sistema deve estar no regime de difusão normal.

Desta forma, a partir das equações (2.73) e (2.75), podemos mostrar que

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W_\theta(z; x, t, \Delta t)}{\Delta t} &= I\mu(x, t)z - \frac{\sigma^2(x, t)z^2}{2} - \frac{\sigma^2(x, t)z^2}{2}\Omega(z; x, t), \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W_\theta^n(z; x, t, \Delta t)}{\Delta t} &= 0, \quad \forall n \geq 2. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Aplicando (2.76) à expansão (2.74), obtemos:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\psi_\theta(z, t, \Delta t) - 1}{\Delta t} \right] = I\mu(x, t)z - \frac{\sigma^2(x, t)z^2}{2} - \frac{\sigma^2(x, t)z^2}{2}\Omega(z; x, t). \quad (2.77)$$

Substituindo (2.77) na equação (2.71), obtemos:

$$\frac{\partial \psi_X(z, t)}{\partial t} = \int e^{Izx} f(x, t) \left[I\mu(x, t)z - \frac{\sigma^2(x, t)z^2}{2} - \frac{\sigma^2(x, t)z^2}{2}\Omega(z; x, t) \right] dx. \quad (2.78)$$

Se $H(z, x, t)$ é uma função complexa, então podemos definir um operador linear L_H que age em uma função real $R(x, t)$ qualquer como se segue:

$$L_H R = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} H(z, x', t) e^{Iz(x'-x)} R(x', t) dx'. \quad (2.79)$$

Vale a pena dar alguns exemplos do operador L_H e suas respectivas funções $H(z, X, t)$:

$$\begin{aligned} L_0 &= 0; & H(z, X, t) &= 0 \\ L_1 &= 1; & H(z, X, t) &= 1 \\ L_{I^n z^n} &= (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial X^n}; & H(z, X, t) &= I^n z^n, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.80)$$

Se multiplicarmos a equação (2.78) por $e^{-IzX}/2\pi$, e tomarmos a integral em z de $-\infty$ a ∞ e considerarmos as definições de $\psi_X(z, t)$ e L_H , obteremos:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [\mu(x, t)f(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2(x, t)f(x, t)] + \frac{1}{2} L_{I^2 z^2 \Omega} [\sigma^2(x, t)f(x, t)], \quad (2.81)$$

em que $L_{I^2 z^2 \Omega}$ é o operador de Kramers-Moyal, que também será denotado por K_Ω .

A equação (2.81) é a equação de difusão expressa através do formalismo de Lévy. Escrita desta forma, a caracterização da equação de difusão associada a variável de retorno θ será completamente determinado pela função $\Omega(z; x, t)$, que é o limite da função de Lévy em

(2.75). Vemos claramente que se $\Omega(z; x, t) = 0$ para qualquer valor de z , obtemos a equação de Fokker-Planck; caso contrário, com $\Omega(z; x, t) \neq 0$, o que obtemos é a equação de Kramers-Moyal.

A função de Lévy pode ser obtida diretamente dos dados de séries temporais estocásticas reais, independentemente dos conhecimentos dos momentos estatísticos da distribuição. Desta maneira, utilizando a função de Lévy podemos caracterizar a distribuição associada a variável de retorno θ de um modo mais sofisticado e direto do que os métodos estatísticos mais tradicionais.

2.5 Equação de Fokker-Planck

Observe que se a função $\Omega(z, x, t) = 0$, teremos $\mathbf{K}_\Omega = \mathbf{L}_0 = 0$ e a equação de difusão (2.81) será uma equação de Fokker-Planck, dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} [\mu(x, t)f(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2(x, t)f(x, t)]. \quad (2.82)$$

Utilizando a propriedade de funções características da equação (2.70) e satisfazendo as condições da equação (2.75), obtemos a função característica de θ para um pequeno intervalo Δt :

$$\psi_\theta(z, t, \Delta t) = \psi_{Gauss}(z, t, \Delta t) = e^{I\mu(x, t)\Delta tz - \frac{\sigma^2(x, t)\Delta tz^2}{2}}. \quad (2.83)$$

que pode ser vista como uma solução analítica para a equação de Fokker-Planck.

A equação (2.83) nada mais é que a função característica associada a uma variável aleatória cuja densidade é gaussiana. Desta forma, quando $\Delta t \rightarrow 0$, teremos uma distribuição gaussiana que converge para uma delta de Dirac $\delta(\theta)$. De fato, para um pequeno valor de Δt , a função $\omega(\sigma_\theta z, x, t, \Delta t) = 0$. A principal consequência disso é que a variável aleatória θ é auto-similar com respeito a Δt . Em outras palavras, as distribuições de probabilidade da variável $\bar{\theta}$ serão as mesmas para qualquer intervalo de tempo Δt escolhido.

2.6 Equação de Kramers-Moyal

Quando $\Omega(z, x, t)$ associado a variável aleatória é diferente de zero, o operador de Kramers-Moyal $\mathbf{K}_\Omega \neq 0$ e a equação de difusão (2.81) torna-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} [\mu(x, t)f(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2(x, t)f(x, t)] + \frac{1}{2} \mathbf{K}_\Omega [\sigma^2(x, t)f(x, t)]. \quad (2.84)$$

Utilizando (2.70) e (2.75) e considerando Δt pequeno, temos que a função característica de θ pode ser escrita como:

$$\psi_\theta(z, t, \Delta t) = e^{I\mu(x, t)\Delta tz - \frac{1}{2}\sigma^2(x, t)\Delta tz^2[1+\Omega(z, x, t)]}. \quad (2.85)$$

Desta forma, utilizando o nosso formalismo, obtemos a equação (2.85) que fornece uma solução analítica para a equação de Kramers-Moyal.

Vamos utilizar a segunda característica da variável θ e compará-la à segunda característica de uma gaussiana, e vamos analisar sua convergência quando $\Delta t \rightarrow 0$ através da seguinte relação:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W_\theta(z, t, \Delta t) - W_{gauss}(z, t, \Delta t)}{\Delta t} = -\frac{\sigma^2}{2} z^2 \Omega(z). \quad (2.86)$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier na relação acima, obtemos:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\theta) - \text{Gauss}(\theta)}{\Delta t} = \frac{1}{2\pi} \int e^{-Iz\theta} \left[-\frac{\sigma^2(x, t)}{2} z^2 \Omega(z) \right] dz. \quad (2.87)$$

Podemos então concluir que para $\Omega(z, x, t) \neq 0$, a distribuição de probabilidade de θ será não-gaussiana e também converge para uma delta de Dirac $\delta(\theta)$ quando $\Delta t \rightarrow 0$. De fato, para um pequeno valor de Δt , a função $\omega(z, x, t, \Delta t)$ escreve-se aproximadamente como

$$\omega(z, x, t, \Delta t) = \Omega \left(\frac{z}{\sigma(x, t)\sqrt{\Delta t}}, x, t \right). \quad (2.88)$$

A principal consequência disso é que a variável reduzida $\bar{\theta}$ tem diferentes distribuições para diferentes valores de Δt . Em outras palavras, a variável θ não pode ser auto-similar com respeito a Δt .

Operador de Kramers-Moyal

O operador de Kramers-Moyal pode ser interpretado como se segue. Sabemos que qualquer função característica $\psi_\theta(z, x, t, \Delta t)$ possuindo momentos finitos até a ordem N pode ser expandida como

$$\psi_\theta(z, x, t, \Delta t) = 1 + \sum_{n=1}^N M_n(x, t, \Delta t) \frac{I^n z^n}{n!} + h(z, x, t, \Delta t), \quad (2.89)$$

em que

$$M_n(x, t, \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta^n f(\theta|x, t, \Delta t) d\theta; \quad n = 1, \dots, N, \quad (2.90)$$

e a função $h(z, x, t, \Delta t)$ é $o(z^N)$, isto é,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{h(z, x, t, \Delta t)}{z^N} = 0. \quad (2.91)$$

Portanto, a função $\omega(z, x, t, \Delta t)$ pode ser expandida como

$$\omega(z, x, t, \Delta t) = \sum_{n=1}^{N-2} \omega_n(x, t, \Delta t) I^n z^n + j(z, x, t, \Delta t), \quad (2.92)$$

com $j(z, x, t, \Delta t) = o(z^{N-2})$. Da equação (2.92), o limite na equação (2.75) torna-se

$$\Omega(z, x, t) = \sum_{n=1}^{N-2} \Omega_n(x, t) I^n z^n + k(z, x, t), \quad (2.93)$$

em que

$$\begin{aligned} \Omega_n(z, x, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\sigma^2 \Delta t]^{\frac{n}{2}} \omega_n(x, t, \Delta t), \\ k(z, x, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} j(z\sigma\sqrt{\Delta t}, x, t, \Delta t). \end{aligned} \quad (2.94)$$

Então, podemos expressar o operador de Kramers-Moyal $\mathbf{K}_\Omega = \mathbf{L}_{I^2 z^2 \Omega}$ como

$$\mathbf{K}_\Omega = \sum_{n=1}^{N-2} \mathbf{L}_{I^{n+2} z^{n+2} \Omega_n} + \mathbf{L}_{I^2 z^2 k} = \sum_{n=1}^{N-2} (-1)^{n+2} \frac{\partial^{n+2}}{\partial x^{n+2}} \Omega_n(z, x, t) + \mathbf{L}_{I^2 z^2 k}. \quad (2.95)$$

Se a função característica de θ é analítica, então ela possui uma expansão em série infinita.

Desta forma, podemos tomar $N = \infty$ na equação (2.89) para obter

$$\mathbf{K}_\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+2} \frac{\partial^{n+2}}{\partial x^{n+2}} \Omega_n(z, x, t). \quad (2.96)$$

O operador de Kramers-Moyal, escrito desta forma, permite uma formulação alternativa do lema de Pawula: Se a função $\Omega(z; x, t) = 0$, então todas as derivadas de ordem maior que dois desaparecem e uma equação de Fokker-Planck descreve o sistema; se a função $\Omega(z; x, t) \neq 0$, a equação de difusão será dada por uma expansão de infinitos termos (dado pelo operador de Kramers-Moyal), e portanto, o sistema será descrito por uma equação de Kramers-Moyal.

2.7 Discussão dos Resultados

O tipo de densidade de probabilidade associada a variável aleatória de retorno θ determina o tipo de equação de difusão que melhor descreve o processo estocástico a ela associada. A função $\Omega(z; x, t)$ é a propriedade chave para determinação do tipo de equação que será adotada.

- Quando $\Omega(z; x, t) = 0$, a distribuição de probabilidade de θ será descrita por uma gaussiana que converge para um delta de Dirac quando Δt tende a zero. Isso significa que a densidade de probabilidade associada a θ é assintoticamente auto-similar com respeito a escala temporal. Desta forma, a equação de difusão terá a forma de uma equação de Fokker-Planck;
- Quando $\Omega(z; x, t) \neq 0$, a distribuição de probabilidade de θ será não-gaussiana e da mesma forma convergirá para um delta de Dirac quando Δt tende a zero. Desta forma, a variável aleatória θ não é assintoticamente auto-similar com respeito à escala temporal Δt e a equação de difusão será uma equação de Kramers-Moyal.

Capítulo 3

Processos Estocásticos

3.1 Processo de Wiener

O Movimento Browniano recebeu esse nome graças ao botânico inglês Robert Brown, que descobriu e caracterizou o movimento irregular de grãos de pólen imersos num fluido [3] em 1827. Esta observação aparentemente sem muita importância tornou-se especialmente relevante alguns anos depois. Embora L. Bachelier em 1900 e A. Einstein em 1905 tenham sido os primeiros a abordar quantitativamente o estudo deste fenômeno, foi o matemático Norbert Wiener quem em 1923, estudou e formalizou rigorosamente o modelo matemático motivado no fenômeno físico do movimento browniano [4], razão pela qual o movimento Browniano também é conhecido como processo de Wiener.

Um *processo de Wiener padrão* $\{W(t), t \geq 0\}$ é um processo estocástico que possui as seguintes propriedades [1]:

- O processo começa em zero, $W(0) = 0$.
- Os incrementos $W(t) - W(s)$ são estacionários e independentes.
- Para $t > s$, $W(t) - W(s)$ são distribuídos gaussianamente com média igual a zero e desvio-padrão $\sqrt{t - s}$.
- As trajetórias são contínuas (i.e., sem saltos).

A condição de estacionariedade implica que a densidade de probabilidade do incremento $W(t) - W(s)$, para $t > s$, depende apenas da diferença de tempo $t - s$.

Vamos tomar intervalos de tempo igualmente espaçados Δt , e desta forma, temos que $\Delta W = W(t + \Delta t) - W(t)$. Assim, ΔW é distribuído gaussianamente com média zero e variância igual a Δt e temos que $\langle \Delta W^2 \rangle = \Delta t$. Em termos de diferenciais, escrevemos $\langle [dW]^2 \rangle = dt$, em que dW é conhecido como incremento de Wiener.

Um *processo de Wiener generalizado*, também conhecido como movimento Browniano com *drift*, para um processo estocástico $X(t)$, é definido em termos do incremento de Wiener dW como se segue:

$$dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dW, \quad (3.1)$$

em que $\mu(x, t)$ é um parâmetro de desvio (*drift*), $\sigma(x, t)$ é um parâmetro de difusão (ou dispersão), dx a pequena variação ocorrida em X entre t e $t + dt$. Mais sucintamente: $dW = \epsilon(\sqrt{dt})$, em que ϵ é um ruído aleatório distribuído gaussianamente com média zero e variância igual a dt , ou seja, sua densidade de probabilidade será dada por:

$$f(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi dt}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\epsilon^2}{dt}}. \quad (3.2)$$

Por questões de simplicidade, chamaremos o processo de Wiener generalizado simplesmente de processo de Wiener.

3.1.1 Movimento Browniano Geométrico

Um processo de Wiener de grande importância em finanças é o *movimento browniano geométrico* [2], que é definido como a solução para a seguinte equação diferencial estocástica

$$dx = \mu x dt + \sigma x dW, \quad (3.3)$$

na qual μ e σ são constantes, sujeitas a condição inicial genérica $X(t_0) = X_0$. Considerando um intervalo de tempo Δt muito pequeno, podemos escrever (3.3) como:

$$dx = (\mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \epsilon) x, \quad (3.4)$$

em que $dx = x(t + \Delta t) - x(t)$ é denominado retorno. Podemos ainda reescrever (3.4) como:

$$\frac{dx}{x} = \mu\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}, \quad (3.5)$$

ou seja, quando consideramos os retornos incrementais dx/x , os coeficientes de desvio e dispersão da equação diferencial estocástica são constantes e invariantes no tempo.

Neste contexto mais aplicado à finanças, podemos interpretar (3.5) da seguinte maneira: o retorno incremental dx/x é composto por duas partes: uma determinística, $\mu\Delta t$ (na qual μ é uma medida da taxa média de crescimento do preço do ativo em um pequeno intervalo de tempo Δt), e uma aleatória, $\sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}$ (sendo σ a volatilidade, que mede o desvio-padrão dos retornos). Esta parte aleatória pode ser identificada com efeitos externos que mudam o preço do ativo considerado de maneira aleatória. Se considerarmos que os parâmetros μ e σ são constantes ao longo do tempo, podemos estimá-los utilizando a série histórica de preços do ativo-objeto em questão.

As principais características estatísticas do movimento Browniano geométrico são:

- Satisfaz a propriedade de Markov;
- A média $\langle dx \rangle = \mu x \Delta t \Leftrightarrow \left\langle \frac{dx}{x} \right\rangle = \mu \Delta t$;
- A variância $Var[dx] = \sigma^2 x^2 \Delta t \Leftrightarrow Var\left[\frac{dx}{x}\right] = \sigma^2 \Delta t$;
- O movimento de X descrito por (3.5) é um caminho aleatório lognormal. Isto significa que os retornos do logaritmo ($\ln[X(t + \Delta t)] - \ln[X(t)]$) possuem distribuição gaussiana.

Para mostrar a validade das propriedades acima descritas, devemos realizar uma transformação de variáveis para X . Para simplificar, vamos reescrever a equação (3.4) como

$$dx = x(t + \Delta t) - x(t) = \eta_W x, \quad (3.6)$$

em que η_W é um processo de Wiener que depende de Δt (considerado suficientemente pe-

queno) e possui densidade de probabilidade dada por

$$f(\eta_W) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\Delta t}} e^{-\frac{(\eta_W - \mu\Delta t)^2}{2\sigma^2\Delta t}}. \quad (3.7)$$

Queremos realizar uma transformação de variáveis de modo a obter uma variável estocástica Y que satisfaça a seguinte relação

$$y(t + \Delta t) - y(t) = dy = \frac{dx}{x} = \eta_W. \quad (3.8)$$

A variável estocástica Y que satisfaz a relação dada em (3.8) é dada pela seguinte integral indefinida:

$$Y = \int \frac{dX}{X} = \ln(X). \quad (3.9)$$

Substituindo o resultado obtido em (3.9) na equação (3.8), obtemos

$$\ln[x(t + \Delta t)] - \ln[x(t)] = d[\ln(x)] = \frac{dx}{x} = \eta_W. \quad (3.10)$$

Desta forma, vemos claramente que os retornos do logaritmo de $X(t)$ (i.e. $\ln[x(t + \Delta t)] - \ln[x(t)]$) possuem distribuição gaussiana, dada pela equação (3.7), com média e variância crescendo linearmente com o tempo (pois são proporcionais a Δt). Isto implica que o processo está no regime de difusão normal.

A função característica associada a variável η_W é dada por

$$\psi_{\eta_W}(z, t) = e^{I\mu\Delta tz - \frac{\sigma^2\Delta tz^2}{2}}. \quad (3.11)$$

Conforme calculado na seção 2.5, obtemos que a equação de difusão associada a $X(t)$ é descrita por uma equação de Fokker-Planck, dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = -\mu \frac{\partial}{\partial x} [xf(x, t)] + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [x^2 f(x, t)]. \quad (3.12)$$

3.1.2 Uma Ilustração de um processo de Wiener

Para obtermos uma visão mais ilustrativa do processo de Wiener, vamos fazer uma breve análise das propriedades estatísticas de uma partícula browniana (partícula que descreve um movimento browniano). Para maiores detalhes, veja a dissertação [44].

Físicos estão bastante familiarizados com equações diferenciais envolvendo termos estocásticos como a equação de Langevin [1]

$$\frac{dx}{dt} = -\gamma x + \epsilon, \quad (3.13)$$

ou considerando um intervalo de tempo Δt muito pequeno, podemos reescrever (3.13) como um mapa linear

$$x(t + \Delta t) - x(t) = \theta(x, t, \Delta t) = -(\gamma \Delta t)x(t) + \epsilon[\Delta t], \quad (3.14)$$

que descreve a velocidade x de uma partícula browniana em um líquido viscoso [38], em que γ é a viscosidade do fluido e é considerado constante. O ruído ϵ é distribuído gaussianamente

$$f(\epsilon) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi\Delta t}} e^{-\frac{\epsilon^2}{2\sigma^2\Delta t}}, \quad (3.15)$$

na qual σ é constante e pode ser considerado como a ‘amplitude’ da força flutuativa agindo na partícula browniana.

Densidade de Probabilidade e Função Característica

A figura 3.1 mostra a densidade $f(\epsilon)$ para vários valores de Δt . Note que conforme o valor de Δt vai ficando menor, a largura da distribuição vai ficando cada vez menor e, em contrapartida, o seu valor de pico aumenta. Na verdade, o processo de convergência da figura 3.1 sugere que a densidade $f(\epsilon)$ tende a uma delta de Dirac, quando $\Delta t \rightarrow 0$. Isto porque obteremos uma função nula em todo o seu domínio exceto em $\epsilon = 0$, ponto no qual será infinito.

A função característica associada a $\bar{\epsilon}$ é dada por

$$\psi_{\bar{\epsilon}}(z, t) = e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad (3.16)$$

e a função de Lévy $\omega(z; x, t, \Delta t) = 0$. A densidade de probabilidade dada por (3.15) é auto-similar em relação a Δt e, desta forma, a equação de Fokker-Planck deve ser a utilizada na descrição de variáveis deste tipo.

Simulação Computacional

Considerando o mapa linear (3.14), podemos facilmente obter o movimento browniano computacionalmente. A figura 3.2 ilustra um processo estocástico deste tipo. Como o ruído é contínuo, o comportamento apresentado será uma trajetória contínua (sem saltos), oscilando erráticamente em torno de zero.

Coeficientes de Kramers-Moyal

Os coeficientes de Kramers-Moyal D_n podem ser obtidos a partir da seguinte relação (veja a seção 2.3):

$$D_n(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \theta^n \rangle}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (x' - x)^n f(x', t + \Delta t | x, t) dx'. \quad (3.17)$$

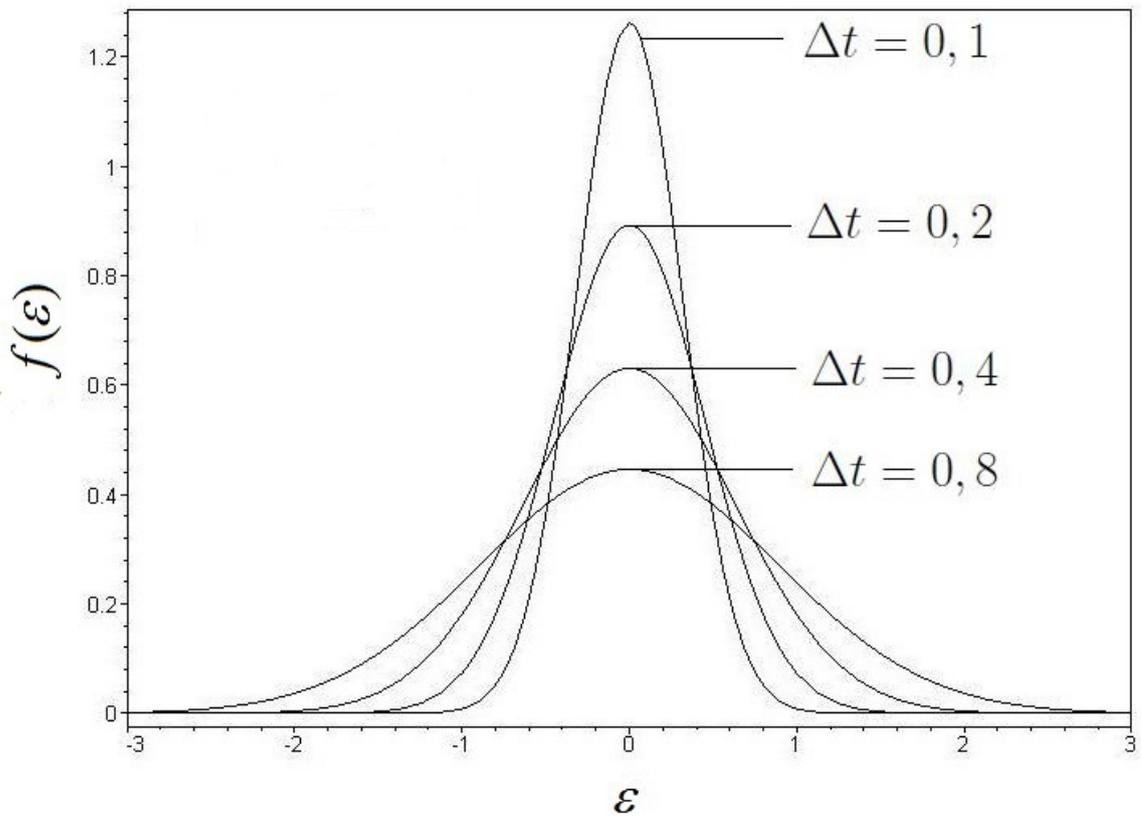


Figura 3.1: Convergência de uma distribuição gaussiana, para vários valores de Δt . Assumimos $\sigma = 1$. A distribuição aproxima-se cada vez mais de uma delta de Dirac conforme o valor de Δt vai diminuindo.

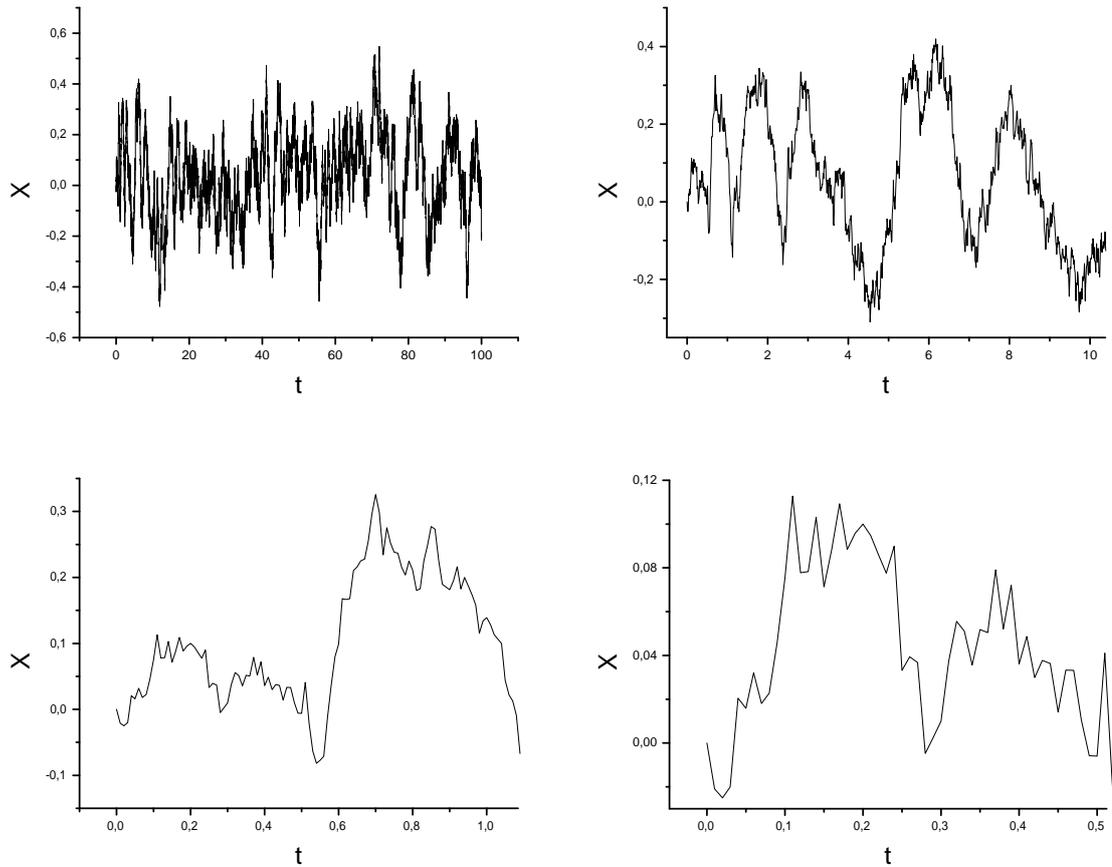


Figura 3.2: Série temporal obtida a partir da simulação do movimento Browniano com ruído gaussiano definido no intervalo $[-0, 125; 0, 125]$. Assumimos $\gamma = 1$ e valor de $\Delta t = 0, 01$. Para uma melhor visualização do comportamento desta série temporal, plotamos gráficos para quatro escalas de tempo diferentes.

Note que os coeficientes D_n são calculados em termos dos momentos de θ . Primeiro, vamos definir a densidade de probabilidade condicional relacionada à θ . Ela pode ser dada através da seguinte relação:

$$\begin{aligned} f(x', t + \Delta t | x, t) &= f((1 - \gamma \Delta t)x + \epsilon[\Delta t], t + \Delta t | x, t) \\ &= f(\epsilon[\Delta t], t + \Delta t | x, t). \end{aligned} \quad (3.18)$$

em que usamos o fato de que $x' = (1 - \gamma \Delta t)x + \epsilon[\Delta t]$ obtido a partir da equação (3.14). Desta forma, o n -ésimo momento $\langle \theta^n \rangle$ é definido a partir da relação:

$$\langle \theta^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x' - x)^n f(\epsilon[\Delta t], t + \Delta t | x, t) dx'. \quad (3.19)$$

Como $\Delta t \rightarrow 0$, obtemos

$$f(\epsilon[\Delta t], t + \Delta t | x, t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\Delta t}} e^{-\frac{\epsilon^2}{2\sigma^2\Delta t}}. \quad (3.20)$$

Então, para uma variável θ com ruído gaussiano, temos que:

$$\langle \theta^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x' - x)^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\Delta t}} e^{-\frac{\epsilon^2}{2\sigma^2\Delta t}} dx'. \quad (3.21)$$

Substituindo x' por $(1 - \gamma\Delta t)x + \epsilon$ na equação (3.21), obtemos:

$$\langle \theta^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (-\gamma\Delta tx + \epsilon)^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\Delta t}} e^{-\frac{\epsilon^2}{2\sigma^2\Delta t}} d\epsilon. \quad (3.22)$$

Como resultado para a equação (3.22) teremos a seguinte soma de integrais, associada ao binômio de Newton:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (-\gamma x \Delta t)^{n-k} (\epsilon)^k \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\Delta t}} e^{-\frac{\epsilon^2}{2\sigma^2\Delta t}} d\epsilon = \\ \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{2^{\frac{k}{2}-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) [1 + (-1)^k] (\sigma)^k (-\gamma x)^{n-k} (\Delta t)^{n-\frac{k}{2}}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

em que $\Gamma((k+1)/2)$ é a função Gama. Se dividirmos a equação (3.23) por Δt e tendermos este a zero, obtemos o coeficiente de Kramers-Moyal D_n :

$$\begin{aligned} D_n(x, t) = \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{2^{\frac{k}{2}-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) [1 + (-1)^k] (\sigma)^k (-\gamma x)^{n-k} (\Delta t)^{\frac{2(n-1)-k}{2}}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

A partir da equação (3.24) vemos que D_n só não será nulo para o primeiro e o segundo momento. Assim:

$$D_n(x, t) = \begin{cases} -\gamma x, & n = 1; \\ \sigma^2, & n = 2; \\ 0, & n \geq 3. \end{cases} \quad (3.25)$$

Como já esperado, este resultado mostra que para um ruído gaussiano, a equação difusiva associada é descrita por uma equação de Fokker-Planck, dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = \gamma \frac{\partial}{\partial x} [x f(x, t)] + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t). \quad (3.26)$$

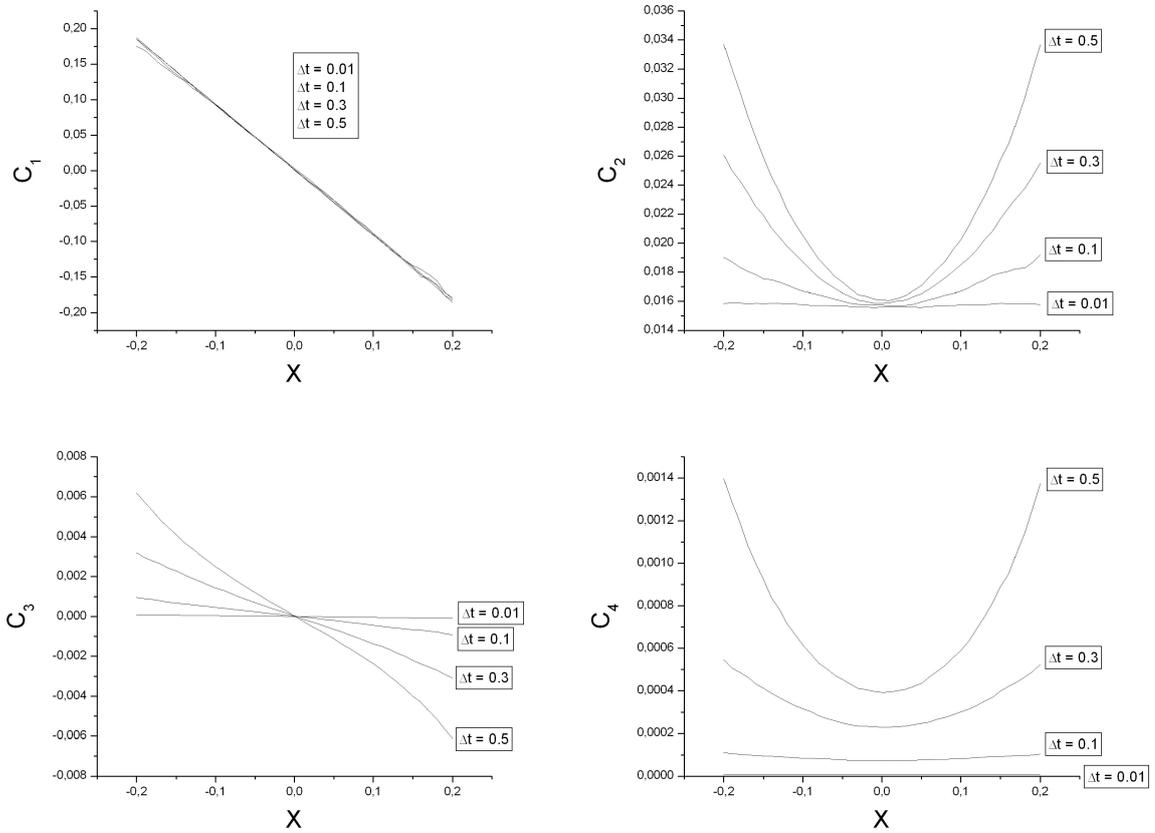


Figura 3.3: Coeficientes de Kramers-Moyal C_1 , C_2 , C_3 e C_4 para o movimento Browniano com ruído gaussiano, para vários valores de Δt . Calculamos os coeficientes para valores de $x = [-0, 2; 0, 2]$. Quando o valor de Δt vai ficando menor notamos que o coeficiente C_1 comporta-se como uma reta, o coeficiente C_2 assume um valor constante diferente de zero e os coeficientes C_3 e C_4 tornam-se nulos.

Vamos agora obter os coeficientes de Kramers-Moyal computacionalmente. Vamos definir os coeficientes C_n como

$$C_n(x, t) = \frac{\langle \theta^n(x, t, \Delta t) \rangle}{\Delta t} \quad (3.27)$$

Desta forma, os coeficientes de Kramers-Moyal serão dados pela relação

$$D_n(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} C_n(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \theta^n(x, t, \Delta t) \rangle}{\Delta t}. \quad (3.28)$$

Obteremos então os coeficientes de Kramers-Moyal D_n analisando o processo de convergência dos coeficientes C_n considerando vários valores de Δt cada vez menores.

As figura 3.3 mostra a convergência dos coeficientes C_n para os coeficientes de Kramers-

Moyal D_n de um processo estocástico descrito por um ruído gaussiano. Note que para $\Delta t = 0.01$ já temos uma boa aproximação para os coeficientes D_n .

Note que os resultados obtidos computacionalmente vêm corroborar com os resultados obtidos em (3.25). Veja que o coeficiente C_4 para Δt suficientemente pequeno é nulo. De acordo com o lema de Pawula: se um coeficiente D_n , para n par e maior que três, for nulo, então todos os D_n para $n \geq 3$ serão nulos. Desta forma comprovamos que para um processo de Wiener, a equação de difusão será uma equação de Fokker-Planck.

3.2 Processo de Salto

O processo de Poisson é um processo contínuo no tempo que permite mudanças discretas (ou descontínuas) nas variáveis. Um processo de salto é um tipo de processo de Poisson que define a probabilidade de um evento ocorrer durante um intervalo de tempo Δt (em que Δt é tão pequeno quanto se queira) como segue [31]:

$$\begin{aligned}
 1 - a(x, t)\Delta t + \varphi(\Delta t) &\equiv \text{probabilidade do evento não ocorrer} \\
 &\text{em um intervalo } (t, t + \Delta t); \\
 a(x, t)\Delta t + \varphi(\Delta t) &\equiv \text{probabilidade do evento ocorrer ao menos uma vez} \\
 &\text{em um intervalo } (t, t + \Delta t); \\
 \varphi(\Delta t) = O(\Delta t) &\equiv \text{probabilidade do evento ocorrer mais de uma vez} \\
 &\text{em um intervalo } (t, t + \Delta t). \tag{3.29}
 \end{aligned}$$

em que $\varphi(\Delta t)$ é a ordem assintótica definida por $\varphi(\Delta t) = O(\Delta t)$ se $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\varphi(\Delta t)/\Delta t] = 0$, e $a(x, t)$ é o número médio de ocorrências por unidade de tempo.

Os resultados acima descritos estabelecem apenas a probabilidade de ocorrência (flutuação) ou não-ocorrência de um evento, no entanto, nada falam sobre qual distribuição de probabilidade estará associada em cada um dos casos. Sabemos que $\theta_J = X(t + \Delta t) - X(t)$ é uma variável que relaciona a transição probabilística da variável estocástica X de um tempo

t para um tempo $t + \Delta t$. Vamos então considerar que a ocorrência de um evento tenha como significado uma mudança de valor da variável estocástica X segundo uma densidade de probabilidade específica $F(\theta_J|x, t)$. Assim, a densidade de probabilidade relacionada a uma transição de estados de um tempo t para um tempo $t + \Delta t$ será dado pela relação $[a(x, t)\Delta t]F(\theta_J|x, t)$.

A função delta de Dirac pode ser utilizada como uma densidade de probabilidade que especifica uma não-transição. Então a densidade de probabilidade $[1 - a(x, t)\Delta t]\delta(\theta_J)$ é a probabilidade que nenhum evento ocorra de um tempo t para um tempo $t + \Delta t$.

Como a ocorrência e a não-ocorrência da transição são eventos mutuamente exclusivos, a densidade de probabilidade de um processo de Salto, definido pela variável de retorno θ_J , será dada por:

$$f(\theta_J|x, t, \Delta t) = [1 - a(x, t)\Delta t]\delta(\theta_J) + [a(x, t)\Delta t]F(\theta_J|x, t), \quad (3.30)$$

na qual $\delta(\theta_J)$ é a função delta de Dirac e $F(\theta_J|x, t)$ é uma densidade de probabilidade contínua qualquer.

3.2.1 Equação de Kramers-Moyal

Aplicando a transformada de Fourier na distribuição condicional $f(\theta_J|x, t, \Delta t)$ em (3.30), obtemos a função característica de θ_J :

$$\psi_{\theta_J}(z, x, t, \Delta t) = 1 + a(x, t)\Delta t[-1 + \psi_F(z, x, t)], \quad (3.31)$$

em que

$$\psi_F(z, x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{Iz\theta_J} F(\theta_J|x, t) d\theta_J. \quad (3.32)$$

Se estamos interessados no operador de Kramers-Moyal de um processo de salto, devemos obter a média m_{θ_J} , o desvio-padrão σ_{θ_J} e a função ω_{θ_J} associada com a distribuição f . Os

valores de m_{θ_J} e σ_{θ_J} são

$$\begin{aligned} m_{\theta_J}(x, t, \Delta t) &= a(x, t)\nu_1(x, t)\Delta t, \\ \sigma_{\theta_J}^2(x, t, \Delta t) &= a(x, t)\nu_2(x, t)\Delta t - a^2(x, t)\nu_1^2(x, t)(\Delta t)^2, \end{aligned} \quad (3.33)$$

com ν_1 e ν_2 calculados como

$$\nu_i(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta_J^i F(\theta_J|x, t) d\theta_J; \quad i = 1, 2. \quad (3.34)$$

A função ω_{θ_J} deve ser obtida da função característica $\psi_{\bar{\theta}_J}$ associada a variável reduzida $\bar{\theta}_J = (\theta_J - m_{\theta_J})/\sigma_{\theta_J}$, através das relações:

$$\begin{aligned} \omega_{\theta_J}(z, x, t, \Delta t) &= -\frac{2}{z^2} \ln \psi_{\bar{\theta}_J}(z, x, t, \Delta t) - 1, \\ \psi_{\bar{\theta}_J}(z, x, t, \Delta t) &= e^{-Iz \frac{m_{\theta_J}}{\sigma_{\theta_J}}} \psi_{\theta_J}\left(\frac{z}{\sigma_{\theta_J}}, x, t, \Delta t\right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Depois de alguma álgebra, obtemos

$$\omega_{\theta_J}(\sigma_{\theta_J}z, x, t, \Delta t) = \frac{2I m_{\theta_J}}{z \sigma_{\theta_J}^2} - \frac{2}{z^2} \frac{1}{\sigma_{\theta_J}^2} \ln \psi_{\theta_J}(z, x, t, \Delta t) - 1. \quad (3.36)$$

Substituindo ψ_{θ_J} , m_{θ_J} e σ_{θ_J} das equações (3.31) e (3.33) na equação (3.36), expandindo $\ln \psi_{\theta_J}$ em séries de potência de Δt e tomando o limite para $\Delta t \rightarrow 0$, obtemos

$$\Omega(z; x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{\theta_J}(\sigma_{\theta_J}z, x, t, \Delta t) = \frac{2I \nu_1}{z \nu_2} - \frac{2}{z^2} \frac{1}{\nu_2} [-1 + \psi_F(z, x, t)] - 1. \quad (3.37)$$

Como a densidade de probabilidade F possui variância finita, sua função característica ψ_F pode ser escrita como

$$\psi_F(z, x, t) = 1 + \nu_1(x, t)Iz - \frac{1}{2}\nu_2(x, t)z^2 + g_F(z, x, t). \quad (3.38)$$

em que $g_F(z, x, t) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(Iz)^n}{n!} \nu_n$. Finalmente, substituímos a equação (3.38) na equação (3.37) para obter

$$\Omega(z, x, t) = -\frac{2}{\nu_2(x, t)} \frac{g_F(z, x, t)}{z^2}. \quad (3.39)$$

O operador de Kramers-Moyal é dado por

$$\mathbf{K}_\Omega = \mathbf{L}_{I^2 z^2 \Omega} = \mathbf{L}_{2 \frac{g_F}{\nu_2}}. \quad (3.40)$$

Podemos mostrar que

$$\frac{1}{2} \mathbf{L}_{2 \frac{g_F}{\nu_2}} a \nu_2 f = \mathbf{L}_{g_F} a f. \quad (3.41)$$

Como consequência, a equação de difusão torna-se

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = - \frac{\partial}{\partial x} [a(x, t) \nu_1(x, t) f(x, t)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [a(x, t) \nu_2(x, t) f(x, t)] + \mathbf{L}_{g_F} a(x, t) f(x, t). \quad (3.42)$$

A equação (3.42) é uma equação de Kramers-Moyal.

3.2.2 Uma Ilustração de um Processo de Salto

Para obtermos uma visão mais ilustrativa do processo de salto, vamos apresentar uma nova formulação para a equação de Langevin (3.13) na qual o ruído ϵ , ao invés de ser definido com uma distribuição gaussiana, é definido através de um processo de salto com a seguinte densidade de probabilidade

$$f(\epsilon) = (1 - a\Delta t)\delta(\epsilon) + (a\Delta t)F(\epsilon). \quad (3.43)$$

O parâmetro a pode ser visto como o inverso do tempo característico de flutuação. Para efeitos de ilustração vamos considerar que a distribuição $F(\epsilon)$ é uma densidade gaussiana:

$$f(\epsilon) = (1 - a\Delta t)\delta(\epsilon) + (a\Delta t) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{\epsilon^2}{2\sigma^2}}. \quad (3.44)$$

Para maiores detalhes dos resultados aqui obtidos, leia a dissertação [44].

Densidade de Probabilidade e Função Característica

A figura 3.4 mostra a densidade $f(\epsilon)$ para vários valores de Δt . Note que conforme o valor de Δt vai ficando menor, a distribuição vai espalhando-se. Temos ainda uma descontinuidade em $\epsilon = 0$, na qual a função assume um valor infinito. Na verdade, a figura 3.4 sugere um

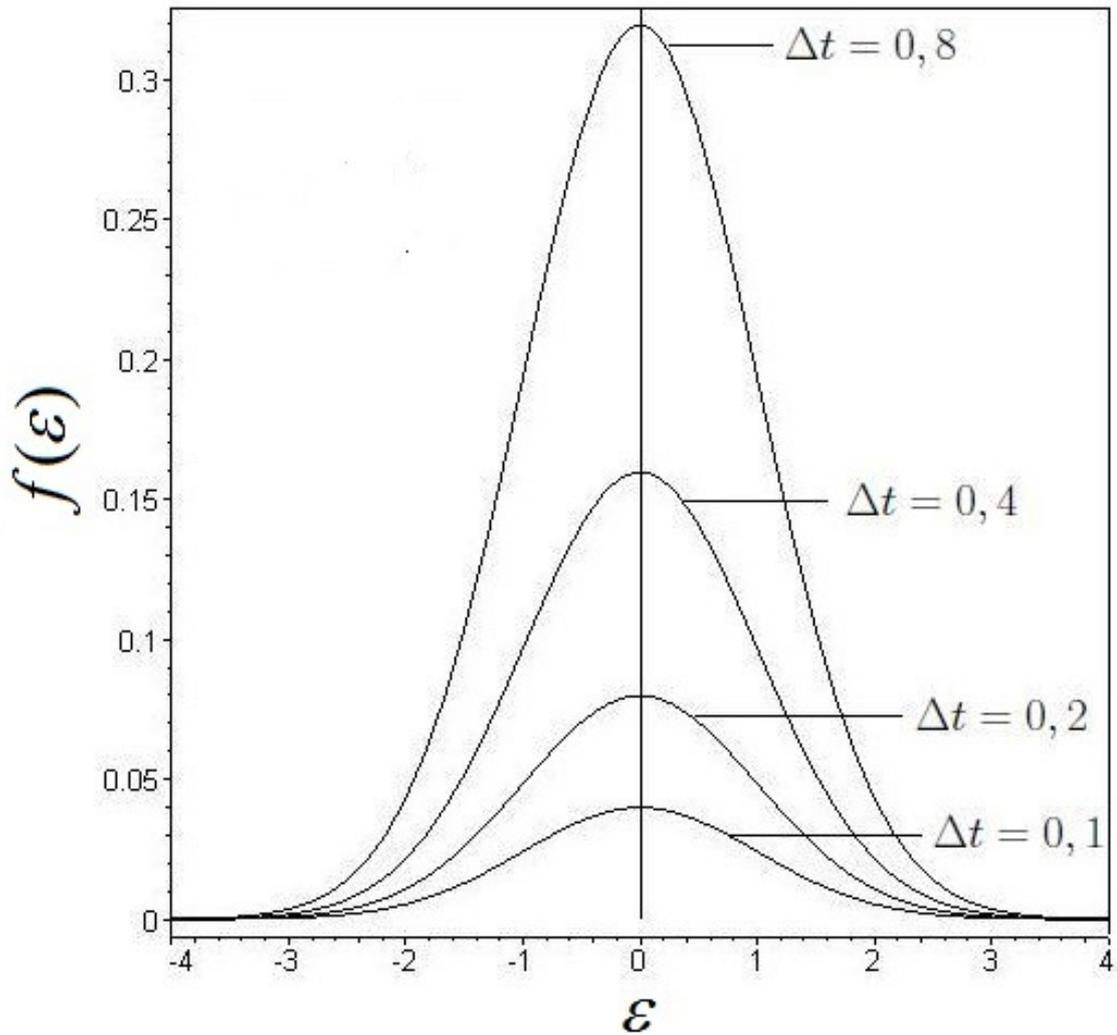


Figura 3.4: Processo de convergência de um processo de salto assumindo vários valores para Δt . Aqui, $\sigma = 1$ e $a = 1$. Note que a distribuição aproxima-se cada vez mais de uma delta de Dirac conforme o valor de Δt vai ficando menor. O traço vertical indica que $f(\theta)$ é infinito quando $\theta = 0$ para a distribuição dada, qualquer que seja o valor de Δt .

processo de convergência na qual a densidade $f(\epsilon)$ tende a uma delta de Dirac, quando $\Delta t \rightarrow 0$.

Vamos agora obter a função $\omega(z; x, t, \Delta t)$ para um processo de salto deste tipo. A função característica associada a variável $\bar{\epsilon}$ será dada por [44]:

$$\psi_{\bar{\epsilon}}(z) = (1 - a\Delta t) + a\Delta t e^{-\frac{1}{2a\Delta t}z^2}. \quad (3.45)$$

Temos que:

$$\ln \left[(1 - a\Delta t) + a\Delta t e^{-\frac{1}{2a\Delta t} z^2} \right] = -\frac{z^2}{2} [1 + \omega(z; x, t, \Delta t)]. \quad (3.46)$$

Por fim, a função de Lévy $\omega(z; x, t, \Delta t)$ será dada por:

$$\omega(z; x, t, \Delta t) = -\frac{\ln \left[(1 - a\Delta t) + a\Delta t e^{-\frac{1}{2a\Delta t} z^2} \right] + z^2}{z^2}. \quad (3.47)$$

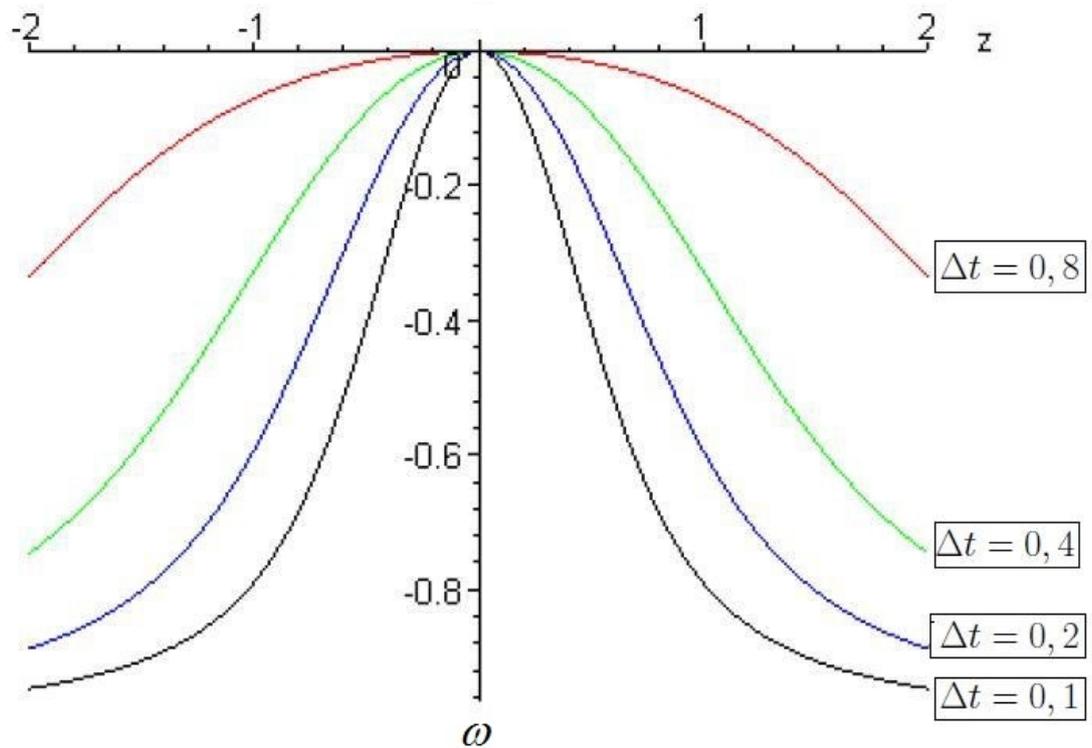


Figura 3.5: Função de Lévy $\omega(z; x, t, \Delta t)$ relacionada a um processo de salto, calculada para vários valores de Δt . Aqui, $\sigma = 1$ e $a = 1$.

A figura 3.5 ilustra a função (3.47) em função de z para vários valores de Δt . Temos que $\Omega(z; x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega(\sigma_\epsilon z; x, t, \Delta t) \neq 0$ e assim a variável ϵ não é assintoticamente auto-similar e a equação de difusão associada a variável de retorno será descrita por uma equação de Kramers-Moyal.

Simulação Computacional

A figura 3.6 ilustra um processo estocástico cujo ruído é dado por um processo de salto dado pela equação (3.44): o valor de x decai exponencialmente enquanto a flutuação não ocorre. Quando a flutuação ocorre observamos a presença de saltos aleatórios.

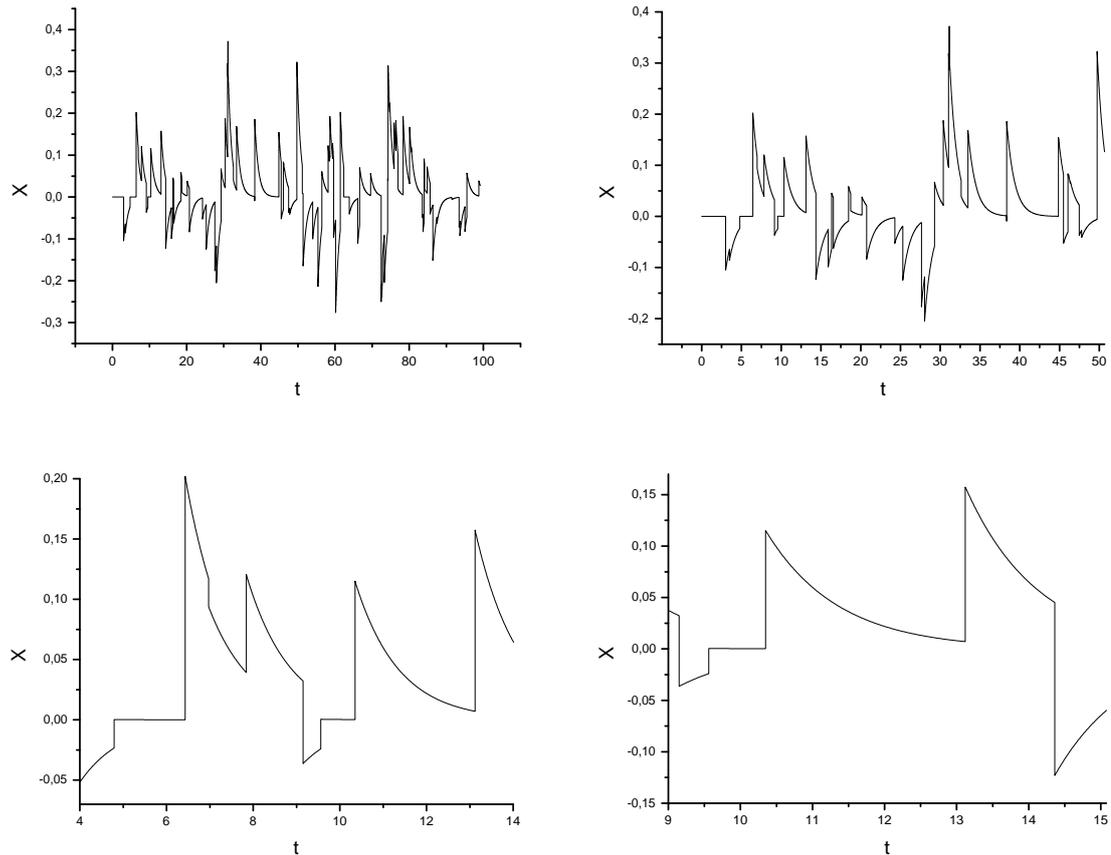


Figura 3.6: Série temporal estocástica obtida da simulação do movimento Browniano com ruído descrito por processo de salto dado em (3.44) definido no intervalo $[-0, 125; 0, 125]$. Assumimos $\gamma = 1$ e valor de $\Delta t = 0,01$. Para uma melhor visualização do comportamento desta série temporal, plotamos gráficos para quatro escalas de tempo diferentes.

Coefficientes de Kramers-Moyal

Para uma variável θ com ruído dado pelo processo de salto em (3.44), temos que:

$$\langle \theta^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x' - x)^n \left[(1 - a\Delta t)\delta(\epsilon) + (a\Delta t) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\epsilon^2}{2\sigma^2}} \right] dx'. \quad (3.48)$$

Substituindo x' por $(1 - \gamma\Delta t)x + \epsilon$ na equação (3.21), obtemos:

$$\langle \theta^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (-\gamma\Delta t x + \epsilon)^n \left[(1 - a\Delta t)\delta(\epsilon) + (a\Delta t) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\epsilon^2}{2\sigma^2}} \right] d\epsilon. \quad (3.49)$$

Como resultado para a equação (3.49) teremos

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} (-\gamma\Delta t x + \epsilon)^n (1 - a\Delta t)\delta(\epsilon) d\epsilon \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (a\Delta t) (-\gamma x \Delta t)^{n-k} (\epsilon)^k \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\epsilon^2}{2\sigma^2}} d\epsilon \\ & = (-\gamma x \Delta t)^n - (-\gamma x \Delta t)^n a \Delta t \\ & + \sum_{k=0}^n \frac{2^{\frac{k}{2}-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) [1 + (-1)^k] (\sigma)^k (-\gamma x)^{n-k} a (\Delta t)^{n-k+1}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Se dividirmos a equação (3.50) por Δt e tendermos este a zero, obtemos o coeficiente de Kramers-Moyal D_n :

$$\begin{aligned} D_n(x, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (-\gamma x)^n (\Delta t)^{n-1} - a (-\gamma x \Delta t)^n \\ & + \sum_{k=0}^n \frac{2^{\frac{k}{2}-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) [1 + (-1)^k] (\sigma)^k (-\gamma x)^{n-k} a (\Delta t)^{n-k}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Desta forma, D_n será dado por:

$$D_n(x, t) = \begin{cases} -\gamma x, & n=1; \\ a \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) (\sigma)^n, & n \text{ par}; \\ 0, & n \text{ ímpar}. \end{cases} \quad (3.52)$$

Como esperado, este resultado mostra que a equação de difusão é descrita por uma equação de Kramers-Moyal:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = \gamma \frac{\partial}{\partial x} [x f(x, t)] + a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sigma)^{2n}}{(2n)!} \frac{2^{\frac{2n}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} f(x, t). \quad (3.53)$$

A figura 3.7 mostra a convergência dos coeficientes C_n para os coeficientes de Kramers-Moyal D_n de um processo estocástico descrito pelo processo de salto em (3.44). Note que para $\Delta t = 0.01$ já temos uma boa aproximação para os coeficientes D_n .

Os resultados obtidos em nossa simulação reafirmam a validade dos resultados obtidos em (3.52). Os coeficientes C_n , para n ímpar e maior que 1, anulam-se, pois estamos tratando

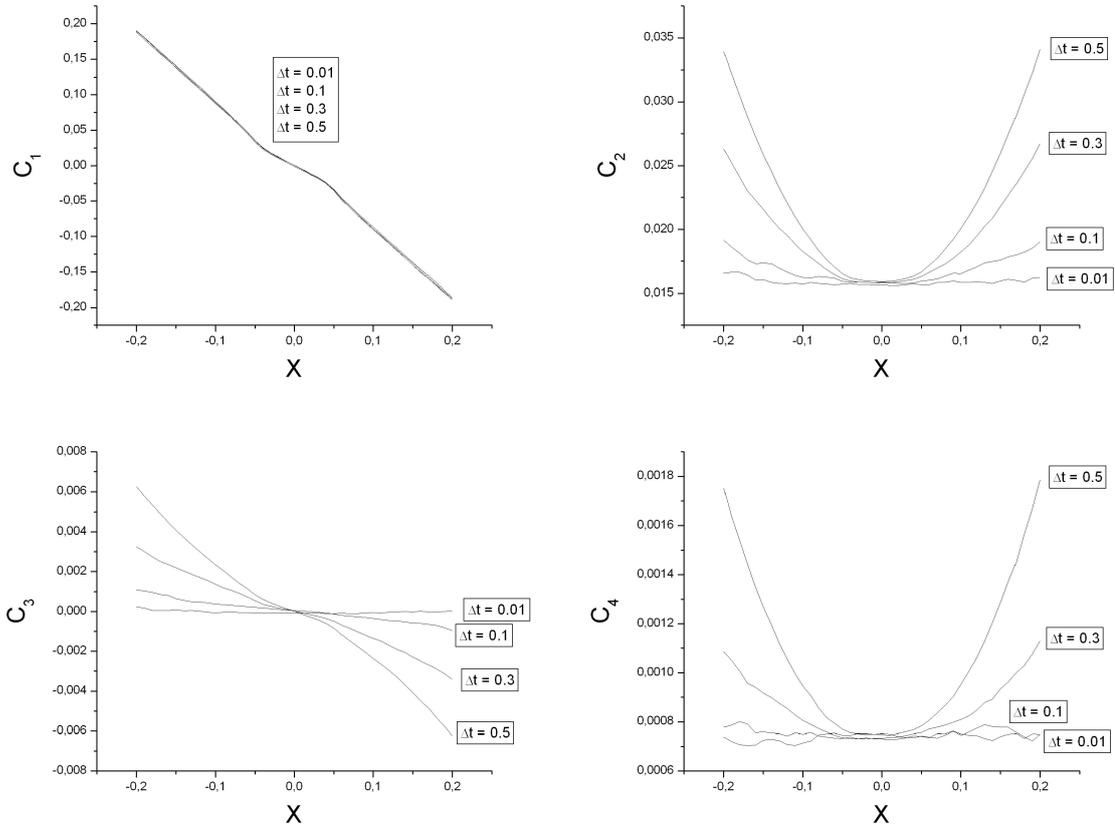


Figura 3.7: Coeficientes de Kramers-Moyal C_1 , C_2 , C_3 e C_4 para o processo estocástico com ruído descrito por um processo de salto dado por (3.44), para vários valores de Δt . Calculamos os coeficientes para valores de $x = [-0, 2; 0, 2]$. Quando o valor de Δt vai ficando menor notamos que o coeficiente C_1 comporta-se como uma reta e o coeficiente C_2 assume um valor constante diferente de zero, o coeficiente C_3 torna-se nulo e o coeficiente C_4 assume um valor constante diferente de zero.

de uma distribuição simétrica. Note que o coeficiente C_4 é não-nulo e constante. Assim, de acordo o lema de Pawula, todos os outros coeficientes D_n para n par também não serão nulos e a equação de difusão associada a um processo de salto será uma equação de Kramers-Moyal.

3.3 Processo Misto

Vamos agora definir um modelo que seja a mistura do processo de salto com o processo de Wiener [27, 31, 45]. Vamos considerar um processo estocástico tal que a variável aleatória

θ é dada, para valores pequenos de Δt , por

$$\theta(X, t, \Delta t) = \theta_W(X, t, \Delta t) + \theta_J(X, t, \Delta t), \quad (3.54)$$

no qual θ_W é um processo de Wiener, θ_J é um processo de salto e ambos são estatisticamente independentes entre si.

A variável θ_W é um processo de Wiener com média e variância dados respectivamente por

$$\begin{aligned} \mu_{\theta_W}(x, t, \Delta t) &= \mu_W(x, t)\Delta t, \\ \sigma_{\theta_W}^2(x, t, \Delta t) &= \sigma_W^2(x, t)\Delta t, \end{aligned} \quad (3.55)$$

e sua função característica é escrita como

$$\psi_{\theta_W}(z, x, t, \Delta t) = e^{I\mu_W(x, t)\Delta tz} e^{-\frac{\sigma_W(x, t)\Delta tz^2}{2}}. \quad (3.56)$$

Vale lembrar que a função de Lévy $\omega_{\theta_W}(\sigma_{\theta_W} z, x, t, \Delta t) = 0$ para um processo de Wiener.

A variável θ_J representa um processo de salto com densidade de probabilidade dada pela equação (3.30). Sua média e sua variância são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} \mu_{\theta_J}(x, t, \Delta t) &= a(x, t)\nu_1(x, t)\Delta t, \\ \sigma_{\theta_J}^2(x, t, \Delta t) &= a(x, t)\nu_2(x, t)\Delta t - a^2(x, t)\nu_1^2(x, t)(\Delta t)^2, \end{aligned} \quad (3.57)$$

com ν_1 e ν_2 calculados como

$$\nu_n(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta_J^n F(\theta_J|x, t) d\theta_J; \quad n = 1, 2. \quad (3.58)$$

A função característica associada a variável θ_J pode ser escrita como

$$\psi_{\theta_J}(z, x, t, \Delta t) = 1 + a(x, t)\Delta t[-1 + \psi_F(z, x, t)], \quad (3.59)$$

na qual

$$\psi_F(z, x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{Iz\theta_J} F(\theta_J|x, t) d\theta_J. \quad (3.60)$$

Como θ_W e θ_J são variáveis aleatórias independentes e considerando Δt pequeno, então as seguintes relações são satisfeitas para a soma de variáveis $\theta = \theta_W + \theta_J$:

$$\begin{aligned}\mu_\theta &= \mu_{\theta_W} + \mu_{\theta_J} = \mu_W(x, t)\Delta t + a(x, t)\nu_1(x, t)\Delta t, \\ \sigma_\theta^2 &= \sigma_{\theta_W}^2 + \sigma_{\theta_J}^2 = \sigma_W^2(x, t)\Delta t + a(x, t)\nu_2(x, t)\Delta t, \\ \omega_\theta(z, x, t, \Delta t) &= \frac{\sigma_{\theta_W}^2}{\sigma_\theta^2}\omega_{\theta_W}\left(\frac{\sigma_{\theta_W}}{\sigma_\theta}z, x, t, \Delta t\right) + \frac{\sigma_{\theta_J}^2}{\sigma_\theta^2}\omega_{\theta_J}\left(\frac{\sigma_{\theta_J}}{\sigma_\theta}z, x, t, \Delta t\right) \\ &= \frac{\sigma_{\theta_J}^2}{\sigma_\theta^2}\omega_{\theta_J}\left(\frac{\sigma_{\theta_J}}{\sigma_\theta}z, x, t, \Delta t\right),\end{aligned}\quad (3.61)$$

nas quais consideramos o fato de que $\omega_{\theta_W}\left(\frac{\sigma_{\theta_W}}{\sigma_\theta}z, x, t, \Delta t\right) = 0$.

Portanto, o limite quando $\Delta t \rightarrow 0$ torna-se

$$\Omega(z, x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_\theta(\sigma_\theta z, x, t, \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sigma_{\theta_J}^2}{\sigma_\theta^2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{\theta_J}(\sigma_{\theta_J} z, x, t, \Delta t). \quad (3.62)$$

O segundo limite no lado direito da equação (3.62) já foi encontrado e é dado pela equação (3.39). O primeiro limite do lado direito pode ser calculado através de σ_{θ_J} e σ_θ na equação (3.61). Então, temos que:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sigma_{\theta_J}^2}{\sigma_\theta^2} &= \frac{a(x, t)\nu_2(x, t)}{\sigma_W^2(x, t) + a(x, t)\nu_2(x, t)}, \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{\theta_J}(\sigma_{\theta_J} z, x, t, \Delta t) &= -\frac{2}{\nu_2(x, t)} \frac{g_F(z, x, t)}{z^2}.\end{aligned}\quad (3.63)$$

O limite na equação (3.62) torna-se

$$\Omega(z, x, t) = \frac{2a(x, t)}{\sigma_W^2(x, t) + a(x, t)\nu_2(x, t)} \frac{g_F(z, x, t)}{z^2}, \quad (3.64)$$

e o respectivo operador de Kramers-Moyal será dado por

$$\mathbf{K}_\Omega = \mathbf{L}_{I^2 z^2 \Omega} = \mathbf{L}_{\frac{2a}{\sigma_W^2 + a\nu_2} g_F}. \quad (3.65)$$

Podemos mostrar que

$$\frac{1}{2} \mathbf{L}_{\frac{2a}{\sigma_W^2 + a\nu_2} g_F} (\sigma_W^2 + a\nu_2) = \mathbf{L}_{g_F} (af). \quad (3.66)$$

Então, a forma final para a equação de Kramers-Moyal será:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} [(\mu_W + a\nu_1)f(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(\sigma_W^2 + a\nu_2)f(x, t)] + \mathbf{L}_{g_F} [af(x, t)]. \quad (3.67)$$

No próximo capítulo, vamos considerar modelos no quais o termo estocástico é uma soma de um processo de Wiener e um processo de salto. A equação de Kramers-Moyal no formato de (3.67) é utilizada para descrever os processo estocásticos e sua função característica é obtida analiticamente. Vamos mostrar como a presença de saltos está relacionada ao modo como a distribuição dos retornos convergem para gaussiana. Mostramos assim que os saltos são os ingredientes básicos para a obtenção de modelos mais gerais para a descrição de séries financeiras.

Capítulo 4

Modelos de Difusão com Salto

4.1 Introdução

O estudo de séries temporais é de grande importância em física estatística. Dados empíricos de diversos processos estocásticos de distintas áreas tem sido analisado na literatura, de séries temporais financeiras [2, 23, 24] a batimentos cardíacos [46] entre outros. De particular interesse é o campo da econofísica, que tem atraído bastante atenção nos últimos anos [47–54]. Neste capítulo, nos concentramos no estudo do comportamento estatístico de séries temporais financeiras.

Um modelo comumente utilizado na literatura para descrever a evolução temporal do preço de derivativos financeiros é o movimento Browniano geométrico que é um modelo de difusão geométrica [2, 23], no qual o preço $X(t)$ em um dado tempo t é assumido como tendo um crescimento exponencial, seguindo um processo de Wiener. Particularmente, dado um intervalo de tempo Δt , temos que:

$$dx = (\mu\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t})x, \quad (4.1)$$

em que $dx = x(t+\Delta t) - x(t)$ é a diferença de preço (retorno). A variável aleatória ϵ é um ruído com distribuição gaussiana com média zero e desvio-padrão unitário. O parâmetro $\mu > 0$ representa a média da taxa de crescimento exponencial. O parâmetro $\sigma > 0$ é a volatilidade, que pode ser interpretada como medida da “magnitude de flutuação” da taxa de crescimento

exponencial. Neste modelo, a densidade de probabilidade $f(x, t)$ da variável aleatória $X(t)$ satisfaz a seguinte equação de Fokker-Planck:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [\mu x f(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2 x^2 f(x, t)]. \quad (4.2)$$

A equação (4.2) implica que o retorno do logaritmo de $X(t)$ (i.e. $\ln[X(t + \Delta t)] - \ln[X(t)]$) possui uma distribuição normal com média e variância crescendo linearmente com o tempo. Desta forma, o processo está sob o regime de difusão normal (veja a seção 3.1.1).

Entretanto, séries temporais financeiras não demonstram tais comportamentos [55, 56]: nem a difusão é normal nem os retornos do logaritmo de $X(t)$ são distribuídos gaussianamente. Os expoentes de Hurst de séries financeiras são geralmente diferentes de 1, o que significa que a difusão não pode ser normal [41, 42] (veja a seção 2.2.1). No entanto, conforme o intervalo de tempo Δt cresce, o retorno do logaritmo de $X(t)$ assintoticamente converge para uma gaussiana [26]. Esta propriedade pode ser observada da evolução temporal da assimetria e da curtose associada aos retornos dos logaritmos, como será mostrado na seção 4.4 (para definição de assimetria e curtose veja a seção 2.1.4). Tais comportamentos podem ser explicados pela presença de correlações de longo alcance nos dados, que podem ser responsáveis pela falha do modelo geométrico [57, 58]. Isto parece indicar que a natureza markoviana do processo estocástico na equação (4.1) não é válida, como já estabelecido em grande parte da literatura financeira [31, 59–61].

Neste trabalho, vamos seguir uma outra abordagem. Estamos interessados em estudar a forma básica da 1ª condição de compatibilidade de Chapman [5] do processo estocástico associada a variável $X(t)$ (veja a seção 2.1.2). Vamos reescrever o processo dado em (4.1) do seguinte modo:

$$dx = (\eta_W + \eta_J)D(x), \quad (4.3)$$

na qual a função $D(x)$ é uma função regular de x , η_W é um processo de Wiener e η_J é um processo de salto, ambos dependentes de Δt . Vamos denominar estes modelos que consideram

o termo do ruído como sendo a soma de um processo de Wiener e um processo de salto, como *modelos de difusão com salto*.

A análise do tipo de equação de difusão que é mais apropriada para descrever a evolução de séries financeiras é, em nosso ponto de vista, um problema importante. A literatura de econofísica usualmente estuda as propriedades exóticas e complexas apresentadas por séries temporais econométricas. Alguns autores propõem voos de Lévy como modelos estocásticos para tais séries [2,26] (veja a seção 2.2.1). Nossa abordagem está de certa forma correlacionada a estes modelos, já que propriedades como multifractalidade e aglomerações de volatilidade, muito presentes em voos de Lévy, desempenham um papel importante na escolha do modelo de difusão adequado para descrição do processo estocástico subjacente, como veremos na seção 4.4.

A literatura financeira está bem consciente da necessidade de levar em conta processos de salto na análise de séries temporais financeiras. Em vários trabalhos, o foco é medir os efeitos de processos de salto na volatilidade do sistema [27–30]. É comum desenvolver métodos para estimar a volatilidade nas quais os efeitos dos saltos podem ser separados daqueles que se originam da volatilidade browniana. Geralmente, com a utilização dessas técnicas obtêm-se estimadores estatísticos bastante eficientes que são capazes de obter separadamente os efeitos provocados pelos saltos daqueles causados pela volatilidade browniana.

Barndorff-Nielsen e Shephard [28, 29] desenvolveram um método para medir momentos estatísticos generalizados (não-inteiros) que tornam possível estimar a volatilidade browniana como oposta aquela que se origina de saltos. Tais momentos generalizados são chamados de variação de potência e bi-potência. Mancini [30] segue a mesma abordagem, mas considera estimadores não-paramétricos a partir da observação de momentos estatísticos generalizados dos retornos. Ait-Sahalia [27] salienta que os trabalhos que lidam com processos de salto seguem três direções: (1) a estimativa de modelos teóricos que incorporam processos de salto cada vez mais complexos e realísticos [62,63]; (2) testes estatísticos em dados empíricos

para a obtenção dos efeitos da presença de saltos nas soluções analíticas do processo [45, 64]; (3) e a estimativa do comportamento de quantidades estatísticas de interesse como a volatilidade e momentos estatísticos generalizados [28, 29]. A referência [27] apresenta um processo estocástico que é equivalente a soma de um processo de Wiener e um processo de salto (Poisson). A solução é obtida através de integração estocástica e assumindo uma forma gaussiana para os saltos. Uma densidade de probabilidade de transição é criada para um intervalo de tempo Δt dado. Esta densidade é constituída pela soma infinita de gaussianas que é então multiplicada por decaimentos exponenciais.

Neste trabalho, vamos considerar diretamente as funções características dos retornos de séries financeiras para mostrar como os saltos podem ser enxergados como a principal causa da lenta convergência para a gaussiana. Consideramos também que o termo estocástico é a soma de um ruído de Wiener e um processo de salto, de acordo com o método apresentado em [31]. Construímos a equação de Kramers-Moyal relacionada ao limite infinitesimal do processo estocástico. A primeira vista, esta equação nos habilita a conseguir a solução. Entretanto, em vez de resolver a equação diretamente, encontramos a equação correspondente para a função característica em sua forma canônica. Como será mostrado adiante, a equação pode ser facilmente resolvida em uma simples forma analítica. Isto torna diretamente possível comparar a função característica dos retornos com sua contrapartida empírica. Não é necessário impor uma distribuição gaussiana para os saltos como feito em [27], como ficará claro nas próximas seções. Em vez disso, analisamos qualitativamente como a presença de saltos influencia na evolução temporal do retorno.

Entender como a distribuição de probabilidade dos retornos evolui no tempo é o principal interesse na literatura de econofísica [2]. Exemplos incluem o estudo da lenta convergência para gaussiana e difusão anômala. Seguindo tais abordagens, este capítulo visa explicar como a presença de saltos está relacionada à maneira como a distribuição dos retornos convergem para uma gaussiana. Mostramos que os saltos são os ingredientes básicos para modelos ge-

neralizados e que eles são úteis para explicar a convergência lenta para a gaussiana, embora algum tipo de correlação não-linear ainda possa desempenhar um papel no processo de convergência. O objetivo é introduzir novas ferramentas para a análise de processos estocásticos, que são baseados na forma canônica de Lévy para funções características.

4.2 Modelos de Difusão com Salto

4.2.1 Equação de Difusão

Vamos então considerar o modelo de difusão com salto definido pela equação (4.3) para descrição de séries temporais financeiras. Para obter a equação de difusão associada a este modelo, utilizamos o processo misto definido pela equação (3.54) para valores pequenos de Δt . Isto significa considerar as variáveis θ_W e θ_J na equação (3.54) como sendo

$$\begin{aligned}\theta_W(X, t, \Delta t) &= D(X)\eta_W(\Delta t), \\ \theta_J(X, t, \Delta t) &= D(X)\eta_J(\Delta t),\end{aligned}\tag{4.4}$$

com densidades de probabilidade de η_W e η_J dados respectivamente por:

$$\begin{aligned}\eta_W &\rightarrow f(\eta_W) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}\sqrt{\Delta t}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\eta_W - \mu\Delta t)^2}{\sigma^2\Delta t}}, \\ \eta_J &\rightarrow f(\eta_J) = (1 - a\Delta t)\delta(\eta_J) + a\Delta t F(\eta_J).\end{aligned}\tag{4.5}$$

Os parâmetros σ , μ e a não dependem de X , t e Δt . A função $F(\eta_J)$ é uma densidade de probabilidade com variância finita que não depende de X , t e Δt . Suas respectivas funções características são (veja a seção 3.3, para maiores esclarecimentos dos cálculos desta seção):

$$\begin{aligned}\psi_{\eta_W}(z) &= e^{Iz\mu\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta tz^2}, \\ \psi_{\eta_J}(z) &= 1 + a\Delta t[-1 + \psi_F(z)],\end{aligned}\tag{4.6}$$

e a função característica $\psi_F(z)$ relacionada a densidade de probabilidade $F(\eta_J)$ é

$$\psi_F(z) = 1 + Iz\nu_1 + \frac{I^2 z^2}{2}\nu_2 + g_F(z).\tag{4.7}$$

Utilizando a propriedade de reescalonamento, válida para funções características, é fácil obter as funções características das variáveis aleatórias θ_W e θ_J :

$$\begin{aligned}\psi_{\theta_W} &= \psi_{\eta_W}(D(x)z) = e^{Iz\mu D(x)\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 D^2(x)\Delta t z^2}, \\ \psi_{\theta_J} &= \psi_{\eta_J}(D(x)z) = 1 + a\Delta t[-1 + \psi_F(D(x)z)].\end{aligned}\quad (4.8)$$

Para um intervalo de tempo Δt pequeno, temos:

$$\begin{aligned}\mu_\theta &= \mu_{\theta_W} + \mu_{\theta_J} = \mu D(x)\Delta t + a\nu_1 D(x)\Delta t, \\ \sigma_\theta &= \sigma_{\theta_W} + \sigma_{\theta_J} = \sigma^2 D^2(x)\Delta t + a\nu_2 D^2(x)\Delta t,\end{aligned}\quad (4.9)$$

e

$$\psi_F(D(x)z) = 1 + Iz\nu_1 D(x) + \frac{I^2 z^2}{2}\nu_2 D^2(x) + g_F(D(x)z).\quad (4.10)$$

Então, a partir da equação (3.67), obtemos a seguinte equação de difusão:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) &= -(\mu + a\nu_1) \frac{\partial}{\partial x} [D(x)f(x, t)] + \frac{1}{2}(\sigma^2 + a\nu_2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} [D^2(x)f(x, t)] \\ &\quad + a\mathbf{L}_{g_F(D(x)z)} f(x, t).\end{aligned}\quad (4.11)$$

Além disso, se a função característica $\psi_F(z)$ é analítica, a função $g_F(z)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned}g_F(z) &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(Iz)^n}{n!} \nu_n, \\ \nu_n &= \int_{-\infty}^{\infty} \eta_J^n F(\eta_J) d\eta_J,\end{aligned}\quad (4.12)$$

e podemos mostrar que

$$\mathbf{L}_{g_F(D(x)z)} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \nu_n \frac{\partial^n}{\partial x^n} D^n(x).\quad (4.13)$$

O processo estocástico definido pelas equações (4.4) e (4.5), juntamente com a correspondente equação de Kramers-Moyal dada por (4.11), representa a forma geral do modelo estocástico que usamos para descrever a evolução temporal de derivativos financeiros. O modelo de difusão geométrica tradicional é obtido com $a = 0$ e $D(x) = x$.

Não há necessidade de impor uma densidade particular para os saltos. Isto porque estamos interessados em analisar o modo como a função característica e seus momentos estatísticos associados evoluem no tempo e não seus valores absolutos. Desta forma, estudamos estas quantidades estatísticas normalizadas por seus valores iniciais. Como ficará claro nas próximas seções, isso elimina a necessidade do cálculo de certos parâmetros e podemos caracterizar o processo estocástico de acordo com a nossa conveniência.

A função $D(x)$ deve ser especificada para comparar o modelo teórico com os dados empíricos. Como estamos interessados em verificar se o modelo de crescimento geométrico é realmente adequado para descrever o comportamento apresentado por series temporais de taxas de câmbio, vamos considerar um modelo de crescimento mais geral, no qual o modelo geométrico representa um caso particular e, por simplicidade, vamos considerar que $D(X) = X^q$ (o modelo geométrico é dado tomando $q = 1$). Então, vamos testar se as propriedades estatísticas de uma dada série temporal é melhor explicada por este tipo de modelo para algum valor de $q \neq 1$.

4.2.2 Transformação de Variáveis e Função Característica

Vamos agora apresentar uma solução analítica para a equação de difusão (4.11). Utilizando a metodologia apresentada na seção 3.1.1, precisamos definir um nova variável estocástica Y , que será dada pela seguinte integral indefinida:

$$Y = \int \frac{dX}{D(X)}, \quad (4.14)$$

E, desta forma:

$$y(t + \Delta t) - y(t) = dy = \frac{dx}{D(x)} = \eta_W + \eta_J, \quad (4.15)$$

Assim, o processo estocástico será homogêneo e autônomo para Y , porque, desta forma, os ruídos aleatórios η_W e η_J não dependem de t e Y . Partindo da equação (2.71), a equação

para a função característica de Y deve satisfazer a seguinte relação

$$\frac{\partial \psi_Y(z, t)}{\partial t} = \psi_Y(z, t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\psi_{\eta_W + \eta_J}(z, \Delta t) - 1}{\Delta t} \right]. \quad (4.16)$$

Da propriedade de convolução da soma de duas variáveis independentes, expandindo as funções $\psi_{\eta_W}(z, \Delta t)$ e $\psi_{\eta_J}(z, \Delta t)$ em potências de Δt , desprezando os termos maiores que a primeira ordem e tomando o limite em (4.16), obtemos

$$\frac{\partial \psi_Y(z, t)}{\partial t} = \psi_Y(z, t) \left\{ Iz\mu + \frac{I^2 z^2}{2} \sigma^2 + a[-1 + \psi_F(z)] \right\}. \quad (4.17)$$

A solução da equação (4.17) é dada por

$$\psi_Y(z, t) = \psi_Y(z, t_0) e^{\left\{ Iz\mu + \frac{I^2 z^2}{2} \sigma^2 + a[-1 + \psi_F(z)] \right\} (t - t_0)}, \quad (4.18)$$

em que $\psi_Y(z, t_0)$ é a função característica de Y no tempo inicial t_0 . Então, se considerarmos $Y(t_0 + \Delta t) = Y(t_0) + \Delta Y$ com $\Delta t = t - t_0$, então da equação (4.18), concluímos que a função característica da variável ΔY é

$$\psi_{\Delta Y}(z, \Delta t) = e^{\left\{ Iz\mu + \frac{I^2 z^2}{2} \sigma^2 + a[-1 + \psi_F(z)] \right\} \Delta t}. \quad (4.19)$$

Podemos considerar o intervalo de tempo $\Delta t = t - t_0 = \sum_{i=1}^N \Delta t_i = N \Delta t_i$, em que os intervalos de tempo $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ são igualmente espaçados com $t_N = t$. Podemos também associar a estes intervalos Δt_i , a variável aleatória $\Delta Y_i = Y(t_i) - Y(t_{i-1})$. Então, a função característica de $\Delta Y = Y(t) - Y(t_0)$ pode ser escrita como

$$\psi_{\Delta Y}(z, \Delta t) = \left\{ e^{\left[\frac{I^2 z^2}{2} (\sigma^2 + a\nu_2) + a\psi_F(z) \right] \Delta t_i} \right\}^N. \quad (4.20)$$

Concluimos então que a função $\psi_{\Delta Y}(z, \Delta t)$ é uma função característica infinitamente divisível pertencente a classe de De Finetti (veja a seção 2.1.7). Isto significa que podemos decompor a distribuição de probabilidade de ΔY na soma de N variáveis aleatórias ($\Delta Y = \sum_{i=1}^N \Delta Y_i$) independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.). Esta é uma propriedade de elevada importância. Vamos utilizá-la para obter apropriadamente as propriedades estatísticas de nossos modelos de difusão com salto. Neste trabalho, faremos a adoção de dois modelos deste tipo:

- **Seção 4.3:** Vamos assumir um modelo linear para a equação (4.3) em que $D(X) = X$. Isto implica como veremos, que a variável estocástica $Y = \ln X$. Neste caso, a variável de retorno $\Delta Y = \ln X(t + \Delta t) - \ln X(t)$. Consideramos então que o preço de ativos financeiros é descrito por um modelo de difusão geométrica, no qual o preço $X(t)$ é assumido como possuindo um crescimento exponencial e ΔY segue um processo misto. Nossa intenção é mostrar que a presença de saltos sugere que o processo de retornos agregados pode ser descrito por uma função característica infinitamente divisível pertencente à classe de De Finetti. Estendemos a funções de De Finetti para obter um modelo generalizado não-linear em relação ao intervalo de tempo Δt , capaz de explicar a presença de correlações de longo alcance na variável de retorno ΔY .
- **Seção 4.4:** Vamos assumir um modelo não-linear para (4.3) em que $D(X) = X^q$, com $q \neq 1$. Neste caso, $Y = (X^{1-q})/(1-q)$. Vamos denominá-lo como modelo de difusão Não-Geométrica, no qual o preço $X(t)$ possui uma taxa de crescimento não-exponencial e ruído estocástico seguindo um processo misto. O estudo é focado nos primeiros quatro momentos centrais da variável de retorno ΔY . As soluções analíticas são obtidas usando o formalismo de Lévy para funções características e comparadas com os dados empíricos das taxas de câmbio.

4.2.3 Taxas de Câmbio

Os detalhes do conjunto de dados empíricos utilizados em nossa análise são mostrados na tabela 4.1. Eles representam a taxa de câmbio entre o preço diário do dólar americano em relação às moedas selecionadas e ao índice S&P 500. O conjunto de dados utilizado foram retirados do “Federal Reserve Website” no endereço “<http://www.federalreserve.gov>”. A taxa de câmbio do Brasil está em uma frequência de 15 minutos para o ano de 2002.

País	Moeda	Período de tempo	Frequência	Num. de pontos
Brasil	Real	02/01/1995 - 31/12/2001	15 min	6155
China	Iuan	02/01/2002 - 30/12/2002	Diária	4963
Canadá	Dólar	04/01/1971 - 31/09/2000	Diária	7445
EUA	S&P 500	01/1871 - 01/2003	Mensal	1585
Finlândia	Marca	04/01/1971 - 31/12/1998	Diária	6976
Grã-Bretanha	Libra	04/01/1971 - 31/08/2001	Diária	7695
Índia	Rupia	02/01/1973 - 29/12/2000	Diária	7017
Sri Lanka	Rupia	02/01/1973 - 31/10/2000	Diária	6875
Taiwan	Dólar	30/10/1983 - 31/09/2001	Diária	4211

Tabela 4.1: Descrição do conjunto de dados

4.3 Modelo de Difusão Geométrica com Salto

Os resultados obtidos nesta seção foram publicados no nosso artigo [32]. Vamos considerar um modelo para descrição de séries temporais financeiras, que mantém a forma básica do modelo geométrico. Desta forma, vamos assumir um modelo linear para a equação (4.3) em que $D(X) = X$, assumindo assim um crescimento exponencial para descrever a evolução temporal do preço $X(t)$. Consideramos, no entanto, que o ruído é uma soma de um processo de Wiener e um processo de salto, descartando o processo de Wiener padrão. Ou seja, o processo estocástico em (4.3) é dado por

$$dx = x(\eta_W + \eta_J), \quad (4.21)$$

no qual η_W é um processo de Wiener e η_J é um processo de salto, como dado em (4.5). Um processo misto como este é descrito por uma equação de Kramers-Moyal

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = & -(\mu + a\nu_1) \frac{\partial}{\partial x} [x f(x, t)] + \frac{1}{2}(\sigma^2 + a\nu_2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} [x^2 f(x, t)] \\ & + aL_{g_F(xz)} f(x, t). \end{aligned} \quad (4.22)$$

A equação (4.22) foi obtida a partir da equação (4.11), assumindo $D(x) = x$. Logo, o modelo dado pela equação (4.21) corresponde a um modelo Geométrico de Kramers-Moyal (GKM)

em oposição ao modelo tradicional com ruído de Wiener dado por (4.1), que é um modelo Geométrico de Fokker-Planck (GFP). Para obter o modelo GFP, devemos considerar $a = 0$ na equação (4.22), o que implica que a densidade de probabilidade do retorno do logaritmo deve ser gaussiana para qualquer intervalo de tempo Δt .

O processo estocástico definido em (4.21) pode ser reescrito como

$$y(t + \Delta t) - y(t) = dy = \frac{dx}{x} = \eta_W + \eta_J, \quad (4.23)$$

em que a variável Y será dada pela seguinte integral

$$Y = \int \frac{dX}{X} = \ln X, \quad (4.24)$$

e a variável de retorno $\Delta Y = \ln X(t + \Delta t) - \ln X(t)$ representa o retorno do logaritmo da variável X . Desta forma, podemos dizer que o retorno do logaritmo da variável X segue um processo misto. A função característica para ΔY é dado pela equação (4.19).

Vamos comparar o modelo teórico com os dados empíricos considerando o logaritmo da função característica (segunda característica) associada a variável de retorno centralizada $\Delta Y_\mu = Y_\mu(t) - Y_\mu(t_0) = \Delta Y - \langle \Delta Y \rangle$. A função característica associada a estes retornos centralizados pode ser obtida a partir da equação (4.19) considerando $\mu = 0$. Assim

$$\psi_{\Delta Y_\mu}(z, t) = e^{\left\{ \frac{r^2 z^2}{2} \sigma^2 + a[-1 + \psi_F(z)] \right\} \Delta t}, \quad (4.25)$$

A função característica empírica dos retornos empíricos ΔY_μ de um dado intervalo Δt é obtida diretamente dos dados através do cálculo do valor esperado $\langle e^{I \Delta Y_\mu z} \rangle$. Os detalhes do conjunto de dados empíricos utilizados em nossa análise são mostrados na tabela 4.1.

No que se segue $\Delta t = 1$ corresponde ao intervalo de tempo associado com a frequência de cada série de retorno de preço (por exemplo, $\Delta t = 1$ corresponde a 15 minutos para a taxa de câmbio do Brasil), dado pela tabela 4.1. Para comparar a evolução temporal da função característica dada em (4.25) com as respectivas funções empíricas, vamos considerar

a segunda característica de $\psi_{\Delta Y_\mu}(z, \Delta t)$ definida como

$$W_{\Delta Y_\mu}(z, \Delta t) = \ln [\psi_{\Delta Y_\mu}(z, \Delta t)] \quad (4.26)$$

A função $W_{\Delta Y_\mu}(z, \Delta t)$ pode ser reescrita em termos de uma parte real $W_R(z, \Delta t)$ e uma parte imaginária $W_I(z, \Delta t)$. E assim:

$$W(z, \Delta t) = W_R(z, \Delta t) + IW_I(z, \Delta t) = \left(-\frac{z^2}{2}(\sigma^2 + a\nu_2) + a\psi_F(z) \right) \Delta t \quad (4.27)$$

Podemos reescrever a equação (4.27), como se segue

$$\begin{aligned} W_R(z, \Delta t) &= W_R(z, 1)\Delta t, \\ W_I(z, \Delta t) &= W_I(z, 1)\Delta t, \end{aligned} \quad (4.28)$$

em que $W_R(z, 1)$ e $W_I(z, 1)$ podem ser obtidos diretamente dos dados considerando o intervalo de tempo $\Delta t = 1$. Lembramos que $\Delta t = 1$ corresponde ao intervalo de tempo associado com a frequência da série de cada país, dada pela tabela 4.1. Vamos utilizar a equação (4.28) para obtenção do modelo GKM. Estamos interessados em analisar apenas como as funções características evoluem no tempo e não seus valores absolutos. Vamos estudar então a segunda característica em termos de seu comportamento inicial para $\Delta t = 1$. Isto elimina a necessidade de impor uma função característica específica para $\psi_F(z)$ e de calcular os valores absolutos dos parâmetros a , σ e ν_2 .

As fórmulas para o modelo GFP serão obtidas considerando $a = 0$ em (4.27), o que nos leva a:

$$\begin{aligned} W_R(z, \Delta t) &= -\sigma^2 \Delta t \frac{z^2}{2}, \\ W_I(z, \Delta t) &= 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

O valor de $\sigma^2 = \langle (\Delta y_\mu)^2 \rangle_{\Delta t=1}$ é obtido dos dados empíricos. Esta equação é a segunda característica de uma distribuição gaussiana. Podemos utilizar então a equação (4.29) para o estudo da convergência da distribuição dos retornos ΔY_μ para uma gaussiana.

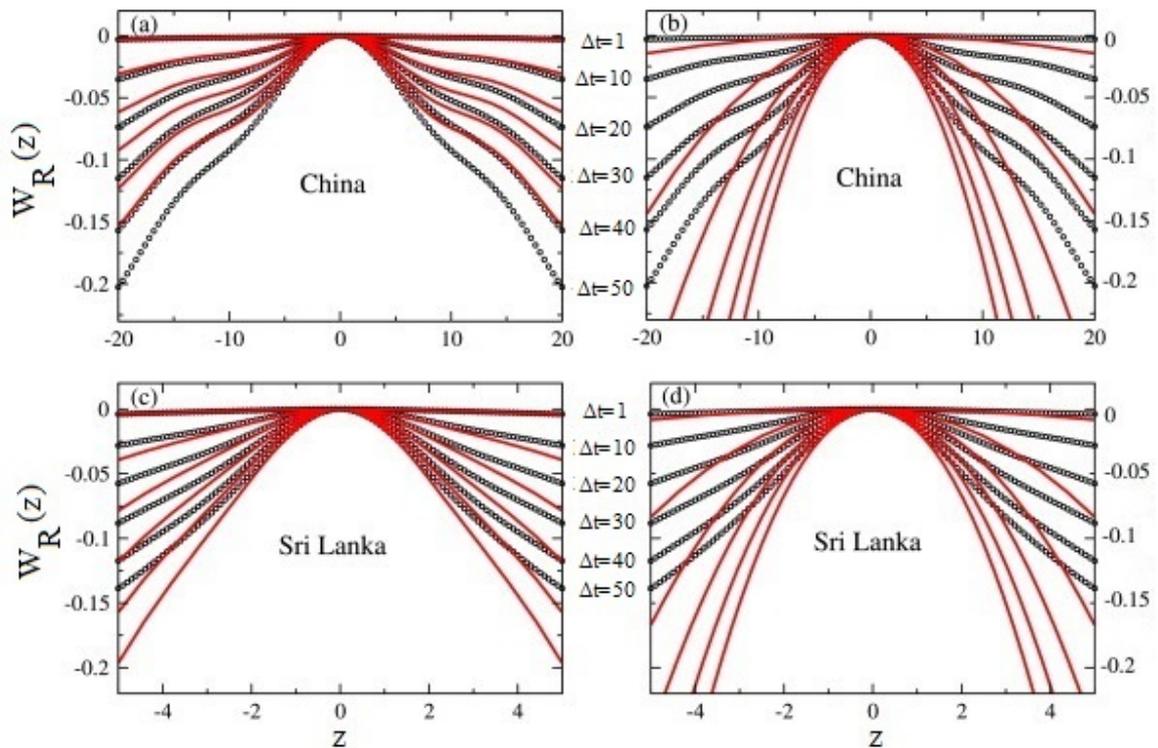


Figura 4.1: Os painéis (a) e (c) mostram as funções W_R associadas com o modelo GKM, dado pela equação (4.28) (linha contínua vermelha), e os dados empíricos (círculos negros) respectivamente para o iuan chinês e a rupia do Sri Lanka. Os painéis (b) e (d) mostram as funções W_R associadas com o modelo GFP dado pela equação (4.29) (linhas contínuas vermelhas) e os dados empíricos (círculos negros) respectivamente para as moedas da China e do Sri Lanka. O correspondente intervalo de tempo é colocado do lado de cada função empírica W_R (círculos negros). $\Delta t = 1$ corresponde ao intervalo de tempo associado com a frequência de cada série de retorno de preço.

A figura 4.1 mostra as funções W_R obtida dos dados empíricos de duas taxas cambiais (iuan chinês e rupia do Sri Lanka) comparadas com as funções W_R calculadas usando o modelo GKM (4.28) e o modelo GFP (4.29). O modelo GKM se ajusta melhor aos dados que o modelo GFP. A lenta convergência da função W_R para uma parábola (gaussiana) está de acordo com o que é encontrado na literatura [2] e pode ser explicado pela presença de saltos.

A figura 4.2 mostra a função W_R para a marca finlandesa e o real brasileiro. O modelo GKM está em melhor acordo com os dados empíricos para a marca finlandesa, embora a diferença para o modelo GFP ser muito menos pronunciada do que as encontradas para as

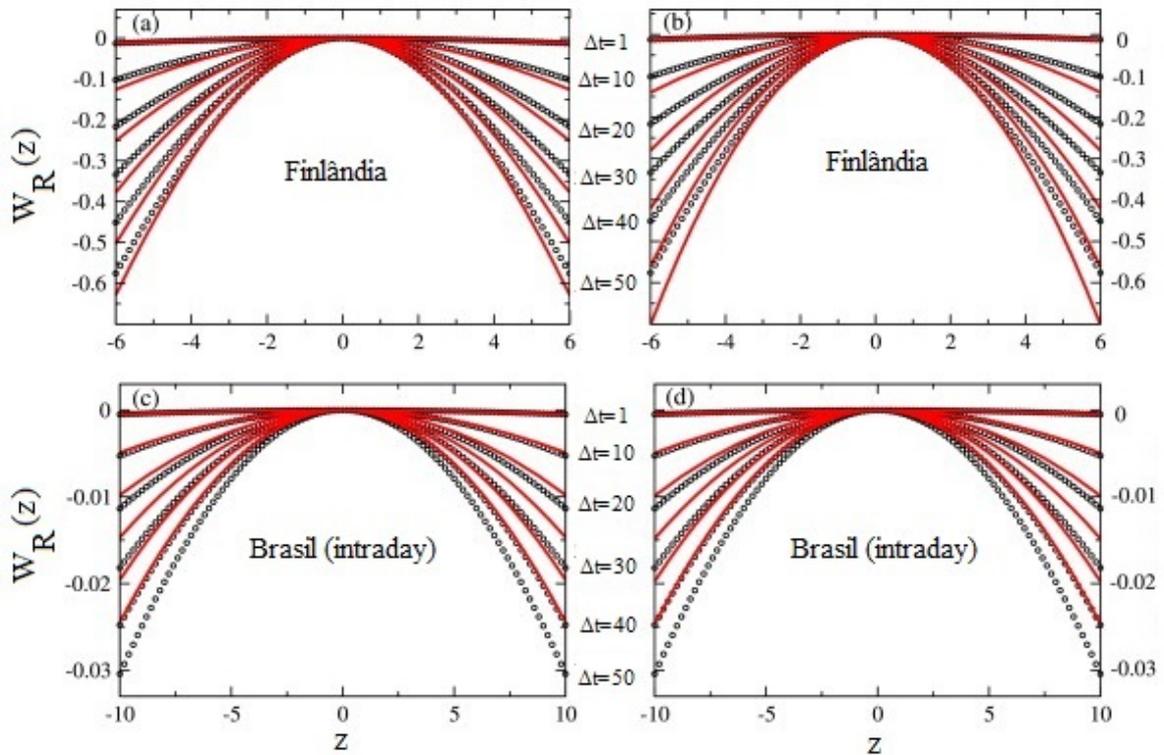


Figura 4.2: O mesmo que a figura 4.1 respectivamente para as moedas da Finlândia e do Brasil. Lembramos que $\Delta t = 1$ corresponde ao intervalo de tempo associado com a frequência de cada série de retorno de preço.

moedas chinesa e do Sri Lanka. No caso do real brasileiro, a diferença entre os modelos GKM e GFP é desprezível. Este fato pode gerar dificuldades na decisão de qual é o melhor modelo para descrever os dados: GKM ou GFP. Por isso, devemos analisar adicionalmente a função W_I para termos uma análise mais precisa.

A figura 4.3 mostra as funções W_I correspondentes as quatro taxas de câmbio presentes nas figuras 4.1 e 4.2. Observe que o modelo GFP não pode explicar a evolução temporal da parte imaginária da função característica, já que a função $W_I(z) \neq 0$. Em outras palavras, o modelo GFP não é capaz de explicar a presença de assimetrias na distribuição de probabilidade dos retornos. Podemos concluir que a presença de saltos é responsável pelo surgimento destas assimetrias na variável de retorno (veja a seção 4.4, na qual obtemos o comportamento destas assimetrias para algumas séries). Embora a presença de saltos possa em alguns casos não

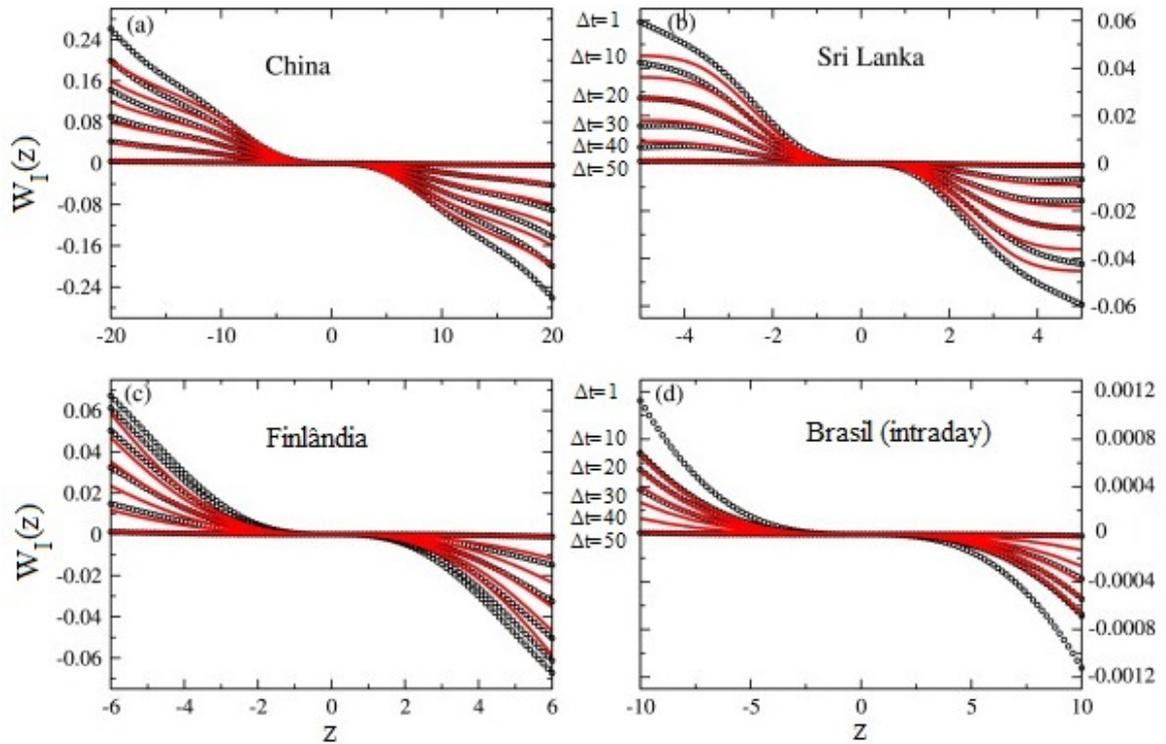


Figura 4.3: Os painéis mostram a função W_I associado ao modelo GKM dado pela equação (4.28) (linha negra contínua) e os dados empíricos (círculos negros) para diferentes intervalos de tempo (os mesmos considerados nas figuras 4.1 e 4.2). Os painéis se referem respectivamente a (a) o iuan chinês, (b) a rupia do Sri Lanka, (c) a marca finlandesa e (d) o real brasileiro. Lembramos que $\Delta t = 1$ corresponde ao intervalo de tempo associado com a frequência de cada série de retorno de preço.

afetar a função W_R , o seu efeito pode ser visto na função W_I .

Embora o modelo GKM se ajuste melhor aos dados que o modelo GFP, ele ainda é um modelo muito impreciso. Isto se deve à presença de correlações de longo alcance nos dados. Na subseção a seguir, utilizamos um método baseado em divisibilidade infinita de funções características para lidar com tais correlações.

4.3.1 Modelo de De Finetti não-linear

A função característica dada em (4.25), assim como a função característica (4.19), é infinitamente divisível e pertence à classe de De Finetti. Isto porque ela pode ser vista como produto de um número qualquer de funções características idênticas.

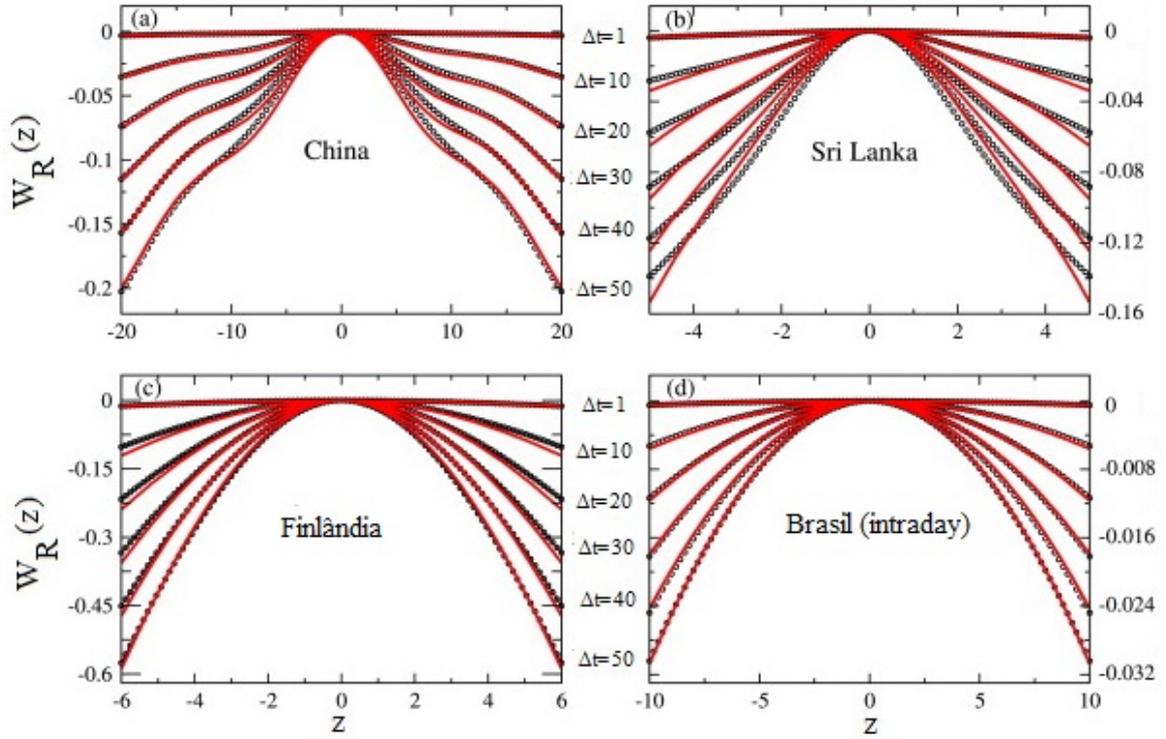


Figura 4.4: Os painéis mostram a função W_R associada ao modelo de De Finetti não-linear (linha vermelha contínua) e aos dados empíricos (círculos negros). Os valores de β usados no modelo de De Finetti não-linear são mostrados na tabela 4.3.1. Os painéis se referem respectivamente (a) ao iuan chinês, (b) à rupia do Sri Lanka, (c) à marca finlandesa e (d) ao real brasileiro. Lembramos que $\Delta t = 1$ corresponde ao intervalo de tempo associado com a frequência de cada série de retorno de preço.

Vamos considerar o intervalo de tempo $\Delta t = t - t_0 = \sum_{i=1}^N \Delta t_i$, em que os intervalos de tempo $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ são igualmente espaçados com $t_N = t$. Vamos também associar a estes intervalos Δt_i a variável aleatória $\Delta Y_{\mu,i} = Y_{\mu}(t_i) - Y_{\mu}(t_{i-1})$. Então, a função característica de $\Delta Y_{\mu} = Y_{\mu}(t) - Y_{\mu}(t_0)$ pode ser escrita como

$$\psi_{\Delta Y_{\mu}}(z, \Delta t) = \prod_{i=1}^N \psi_{\Delta Y_{\mu,i}}(z, \Delta t_i), \quad (4.30)$$

em que

$$\psi_{\Delta Y_{\mu,i}}(z, \Delta t_i) = e^{\left[\frac{r^2 z^2}{2} (\sigma^2 + a\nu_2) + a\psi_F(z) \right] \Delta t_i}. \quad (4.31)$$

Assim, a variável aleatória ΔY_{μ} é a soma de N variáveis aleatórias independentes $\Delta Y_{\mu,i}$.

Outra propriedade importante desta função característica (4.30) é que sua segunda característica $W_{\Delta Y_\mu}(z, t)$ é linear em relação ao parâmetro temporal. Vamos denominar um processo estocástico descrito por estas funções características como *modelo de De Finetti linear*.

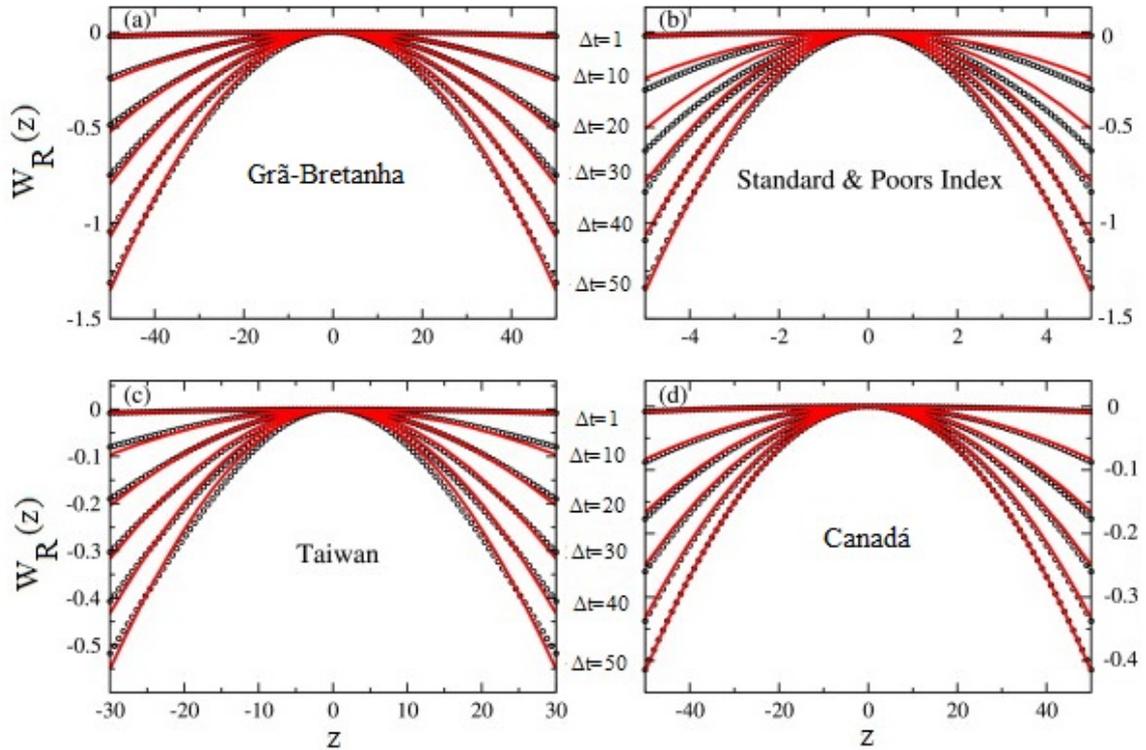


Figura 4.5: O mesmo que a figura 4.4 respectivamente para (a) a libra britânica, (b) o índice S&P 500, (c) o dólar tailandês e (d) o dólar canadense. Lembramos que $\Delta t = 1$ corresponde ao intervalo de tempo associado com a frequência de cada série de retorno de preço.

Para descrever mais precisamente a evolução temporal das variáveis de retornos centralizados ΔY_μ , vamos considerar uma classe de De Finetti para funções características, na qual seus logaritmos sejam não-lineares em relação ao intervalo de tempo Δt . Particularmente, vamos definir a seguinte classe de funções características:

$$\psi_{\Delta Y_\mu}(z, \Delta t) = e^{\left[\frac{z^2}{2} (\sigma^2 + a\nu_2) + a\psi_F(z) \right] (\Delta t)^\beta}. \quad (4.32)$$

Estes processos estocásticos descritos por (4.32) serão denominados como *modelos de De Finetti não-lineares*. A variável aleatória ΔY_μ pode ser vista como a soma de N variáveis

aleatórias $\Delta Y_{\mu,i}$, porém, ao contrário do modelo de De Finetti linear, as variáveis $\Delta Y_{\mu,i}$ não podem ser consideradas como estatisticamente independentes.

A partir da equação (4.32), encontramos a segunda característica de ΔY_{μ} para o modelo de De Finetti não-linear:

$$\begin{aligned} W_R(z, \Delta t) &= W_R(z, 1)(\Delta t)^\beta, \\ W_I(z, \Delta t) &= W_I(z, 1)(\Delta t)^\beta. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Para comparar o modelo de De Finetti não-linear com os dados empíricos temos que estimar o parâmetro β que aparece na equação (4.33). Então, para calcular o parâmetro β , devemos escolher um intervalo de tempo $\Delta t > 1$ e encontrar o valor de β que minimiza a função

$$\sum_{i=1}^L \left[W_R(z_i, \Delta t) - W_R(z_i, 1)(\Delta t)^\beta \right]^2, \quad (4.34)$$

em que z_i são os pontos para os quais obtemos as funções empíricas W_R . A equação (4.34) é o método dos mínimos quadrados. O valor de β que satisfaz a condição de minimização é dado por

$$\beta = \frac{1}{\ln \Delta t} \frac{\sum_{i=1}^L W_R(z_i, \Delta t) W_R(z_i, 1)}{\sum_{i=1}^L W_R^2(z_i, 1)}. \quad (4.35)$$

Os valores de β usados para comparar o modelo de De Finetti com os dados empíricos nas figuras 4.4 e 4.5 são mostrados na tabela 4.2. Estes valores foram obtidos utilizando $\Delta t = 50$ na equação (4.35).

Moeda	Valor de β	Moeda	Valor de β
Iuan chinês	1,0670	Libra britânica	1,0534
Rupia do Sri Lanka	0,9371	Dólar canadense	1,0019
Marca finlandesa	0,9593	Dólar tailandês	1,0833
Real brasileiro	1,0584	Índice S&P 500	1,0745

Tabela 4.2: Valor do parâmetro β obtido para cada uma das taxa de câmbio dos países analisados.

As figuras 4.4 e 4.5 mostram as funções empíricas W_R (círculos negros) das oito séries financeiras descritas na tabela 4.1, contrastando tais curvas com as respectivas funções W_R

do modelo de De Finetti não-linear proposto (linhas vermelhas). Os resultados indicam que o modelo de De Finetti não-linear é um bom candidato para explicar, ao menos aproximadamente, a evolução temporal dos retornos dos logaritmos de séries financeiras.

O fato de os parâmetros $\beta \neq 1$ indicam a presença de correlações de longo alcance emergindo da soma dos retornos do logaritmo dos dados. Isto porque a variância de ΔY_μ possuirá uma dependência não-linear em relação ao intervalo de tempo Δt , o que implica em um regime de difusão anômala. Desta forma, o modelo de De Finetti não-linear pode ser visto como uma reparametrização temporal que lida com estas correlações, fornecendo um melhor ajuste do modelo teórico em relação aos dados empíricos.

4.3.2 Discussão dos Resultados

Analisamos um modelo de difusão geométrica para descrição de séries financeiras e ilustramos isso com dados de taxas de câmbio de vários países e o índice S&P 500. A equação de difusão associada com o modelo é do tipo Kramers-Moyal, pois consideramos o ruído como uma soma de um processo de Wiener e um processo de salto. Isto implica que o retorno do logaritmo do preço não é gaussianamente distribuído. Entretanto, o regime gaussiano é assintoticamente alcançado de forma lenta. Estas propriedades equivalem às propriedades observadas nos dados.

Comparando a função característica do modelo teórico proposto com os dados empíricos, vimos que a evolução temporal das distribuições dos retornos do logaritmo do preço podem ser explicada pela presença de saltos. Uma vantagem desta abordagem é o fato de que a função característica para o modelo teórico é de fácil obtenção e possui um formato elegante que pode ser facilmente comparado com funções características empíricas.

Introduzimos então um novo modelo de processo de Wiener-salto chamado modelo de De Finetti não-linear para um melhor ajuste do modelo teórico com os dados empíricos. Nosso modelo não-linear supera o modelo linear porque ele leva em conta, de uma maneira simples,

as correlações não-lineares emergindo da soma das variáveis de retorno do logaritmo do preço. A caracterização estatística deste modelo de De Finetti não-linear, dado um processo estocástico bem definido, foi objeto de uma investigação mais apurada publicada no artigo [34] de nossa autoria e tema de tese de doutorado [35]. Do ponto de vista estatístico, nosso modelo de De Finetti não-linear pode ser visto como um tipo de generalização de um processo misto de Wiener e salto que é capaz de explicar as correlações de longo alcance existentes em dados reais.

4.4 Modelo de Difusão Não-Geométrica com Salto

Os resultados obtidos nesta seção foram publicados no nosso artigo [33]. Nesta seção, vamos assumir uma taxa de crescimento não-exponencial para a evolução temporal do preço de ativos financeiros. Este modelo é denominado de modelo de difusão não-geométrica. Consideramos novamente que o ruído é uma soma de um processo de Wiener e um processo de salto, descartando o processo de Wiener padrão. Ou seja, o processo estocástico é dado por

$$dx = D(x)(\eta_W + \eta_J), \quad (4.36)$$

em que $D(x)$ é uma função regular de x , η_W é um processo de Wiener e η_J é um processo de salto, como dado em (4.5). Vamos considerar que $D(x) = x^q$, em que $q \neq 1$ ($q = 1$ corresponde ao modelo geométrico). Um processo como este é descrito por uma equação de Kramers-Moyal

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = & - (\mu + a\nu_1) \frac{\partial}{\partial x} [x^q f(x, t)] + \frac{1}{2} (\sigma^2 + a\nu_2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} [x^{2q} f(x, t)] \\ & + a \mathbf{L}_{g_F(x^q z)} f(x, t). \end{aligned} \quad (4.37)$$

A equação (4.37) foi obtida a partir da equação (4.11), assumindo $D(x) = x^q$. Vamos denominar este modelo, com $q \neq 1$, como modelo Não-Geométrico de Kramers-Moyal (NGKM).

O processo estocástico definido em (4.36) pode ser reescrito como

$$y(t + \Delta t) - y(t) = dy = \frac{dx}{x^q} = \eta_W + \eta_J, \quad (4.38)$$

em que a variável Y será dada pela seguinte integral

$$Y = \int \frac{dX}{X^q} = \frac{X^{1-q}}{1-q}. \quad (4.39)$$

Então, para um dado valor de q e Δt , a variável ΔY representa o retorno de Y definido na equação (4.39). A função característica para ΔY é dada pela equação (4.19).

Vamos comparar o modelo teórico com os dados empíricos, analisando os momentos estatísticos associados a variável de retorno ΔY . Vamos calcular a média, a variância, a assimetria e a curtose da variável de retorno ΔY , que são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} M_{\Delta t} &= \langle \Delta Y \rangle, \\ V_{\Delta t}^2 &= \langle (\Delta Y - M_{\Delta t})^2 \rangle, \\ S_{\Delta t} &= \left\langle \left(\frac{\Delta Y - M_{\Delta t}}{V_{\Delta t}} \right)^3 \right\rangle, \\ K_{\Delta t} &= \left\langle \left(\frac{\Delta Y - M_{\Delta t}}{V_{\Delta t}} \right)^4 \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Os valores teóricos são calculados diretamente da função característica dada pela equação (4.19). O cálculo do terceiro e do quarto momentos exige a hipótese extra de que a função característica $\psi_F(z)$ possui expansão em séries de potência até quarta ordem. Neste caso, a função característica $\psi_F(z)$ deve ser expandida como

$$\psi_F(z) = 1 + Iz\nu_1 + \frac{I^2 z^2}{2} \nu_2 + \frac{I^3 z^3}{3!} \nu_3 + \frac{I^4 z^4}{4!} \nu_4 + O(z^4). \quad (4.41)$$

em que

$$\nu_i(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta_J^i F(\eta_J | x, t) d\eta_J; \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (4.42)$$

Substituindo esta expansão na equação (4.19), obtemos:

$$\psi_{\Delta Y}(z, t) = e^{Iz(\mu + a\nu_1)\Delta t + \frac{I^2 z^2}{2}(\sigma^2 + a\nu_2)\Delta t + \frac{I^3 z^3}{3!} a\nu_3 \Delta t + \frac{I^4 z^4}{4!} a\nu_4 \Delta t + \dots} \quad (4.43)$$

A partir de (4.43), podemos mostrar que

$$\begin{aligned}
 M_{\Delta t} &= (\mu + a\nu_1)\Delta t, \\
 V_{\Delta t}^2 &= (\sigma^2 + a\nu_2)\Delta t, \\
 S_{\Delta t} &= \frac{a\nu_3}{(\sigma^2 + a\nu_2)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{\Delta t}}, \\
 K_{\Delta t} &= \frac{a\nu_4}{(\sigma^2 + a\nu_2)^2} \frac{1}{\Delta t} + 3.
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

A fórmula em (4.44) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
 M_{\Delta t} &= M_1 \Delta t, \\
 V_{\Delta t}^2 &= V_1^2 \Delta t, \\
 S_{\Delta t} &= \frac{S_1}{\sqrt{\Delta t}}, \\
 K_{\Delta t} - 3 &= \frac{K_1 - 3}{\Delta t},
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

em que M_1 , V_1^2 , S_1 e K_1 são os valores iniciais dos momentos estatísticos definidos em (4.44) para $\Delta t = 1$ (intervalo de tempo associado com a frequência de cada taxa de câmbio descrita na tabela 4.1). Devido à grande imprecisão associada aos cálculos dos valores absolutos de momentos de mais alta ordem (assimetria e curtose), vamos analisar apenas o modo como os momentos evoluem no tempo e não seus valores absolutos. Preferimos estudar então os momentos estatísticos normalizados por seus valores iniciais. Isto também elimina a necessidade de impor uma função característica específica para $\psi_F(z)$ e de calcular os valores absolutos dos parâmetros a , μ , σ e os i -ésimos momentos ν_i .

Para comparar os momentos do modelo teórico com os momentos estatísticos dos dados empíricos, devemos considerar que a série temporal real representa apenas uma única realização de um suposto processo estocástico subjacente. Portanto, devemos calcular o erro associado a medidas feitas nesta única realização. Isto é um problema sério, porque as séries temporais analisadas possuem poucos pontos de observação.

Um método para obter o grau de incerteza associado aos cálculos que serão desenvolvidos,

é gerar séries aleatórias que possuem as mesmas propriedades básicas do processo estocástico definido no modelo teórico, permitindo o cálculo do erro associado. A propriedade mais notável de nosso modelo é que a variável aleatória $\Delta Y(\Delta t) = Y(t + \Delta t) - Y(t)$, em que $\Delta t = n$ é um inteiro, é nada mais que a soma de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (veja a seção 4.2.2) dadas pelo retorno $\Delta Y(1) = Y(t + 1) - Y(t)$. Então, nosso método consiste em gerar N valores aleatórios i.i.d e calcular as somas dos n termos consecutivos, medindo a evolução dos momentos estatísticos como uma função de n . Estes valores são gerados através de um gerador aleatório de boa qualidade, no qual o número de valores gerados é o número N de pontos observados nas séries temporais reais. Usamos um gerador que permite ajustar os valores dos quatro primeiros momentos medidos nos dados reais obtidos de $\Delta Y(1)$.

Análise dos Dados: Modelo GKM versus Modelo GFP (Rupia da Índia)

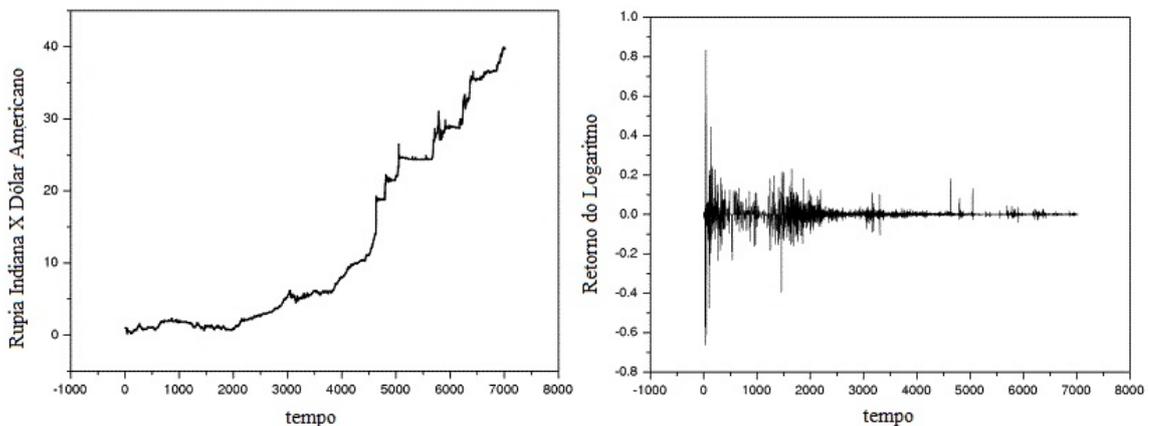


Figura 4.6: O painel à esquerda mostra a evolução temporal da taxa de câmbio da rupia indiana em relação ao dólar americano. O painel à direita mostra o retorno do logaritmo de $X(t)$ para $\Delta t = 1$.

Vamos a partir de agora analisar a variável de retorno ΔY , comparando o modelo teórico com os dados empíricos. Primeiramente, vamos estudar o modelo linear, em que $D(X) = X$. Vamos analisar então o modelo Geométrico de Kramers-Moyal (GKM) em oposição ao

modelo Geométrico de Fokker-Planck (GFP). Para ambos os modelos, teremos $Y = \ln(X)$ e consequentemente $\Delta Y = \ln X(t + \Delta t) - \ln X(t)$.

A primeira ilustração de nossa análise é aplicada ao estudo da taxa de câmbio da rupia indiana em relação ao dólar americano. No painel à esquerda da figura 4.6, mostramos a evolução temporal da taxa de câmbio da rupia indiana por cerca de 20 anos (7017 dias). No painel à direita da figura 4.6, mostramos o retorno do logaritmo do preço $X(t)$.

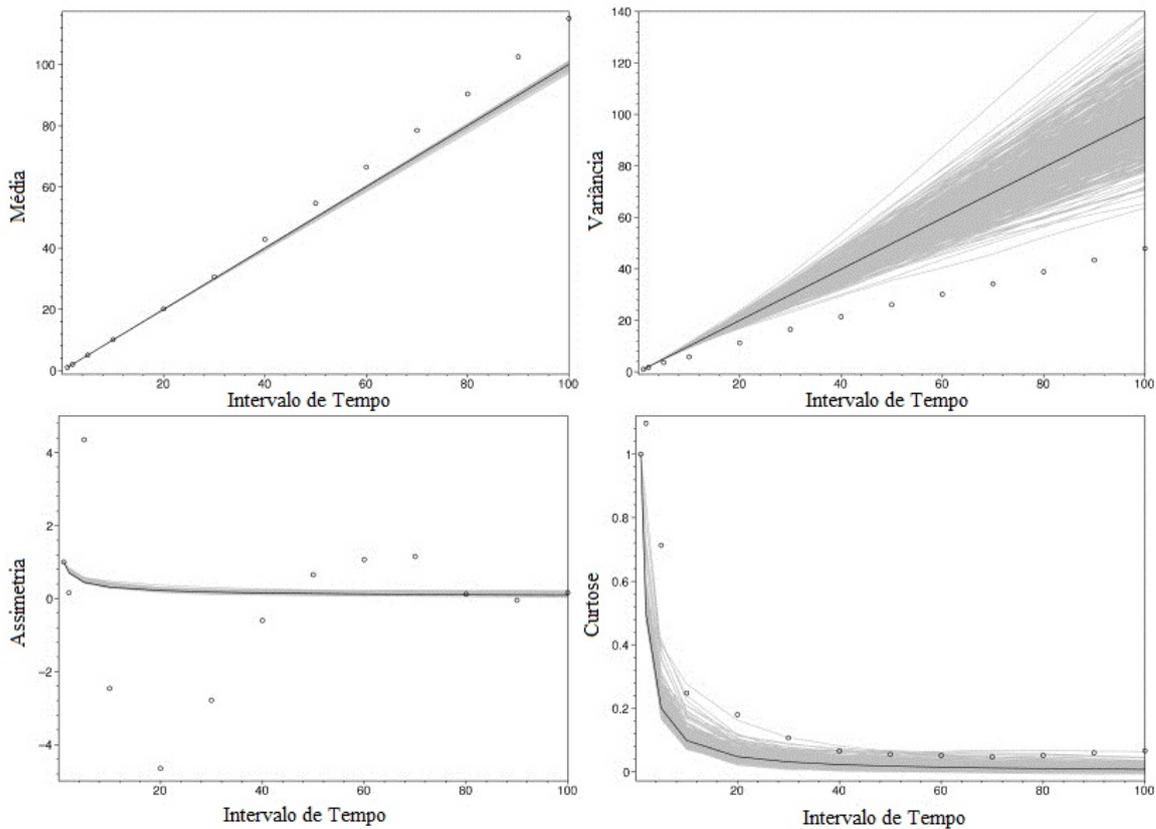


Figura 4.7: Os painéis mostram os momentos estatísticos normalizados da variável estocástica $\ln[X(t + \Delta t) - \ln[X(t)]]$ em função do intervalo Δt para a rupia da Índia. Temos, respectivamente: $M_{\Delta t}/M_1$ (topo à esquerda); $V_{\Delta t}^2/V_1^2$ (topo à direita); $S_{\Delta t}/S_1$ (abaixo à esquerda); $(K_{\Delta t} - 3)/(K_1 - 3)$ (abaixo à direita). Os círculos negros correspondem aos momentos calculados dos dados empíricos. As linhas contínuas negras nos painéis no topo correspondem aos modelos GFP e GKM que são dados em (4.45). As linhas contínuas negras nos painéis de baixo correspondem ao modelo GKM ($a \neq 0$). As curvas cinzas representam os momentos das 500 trajetórias geradas aleatoriamente. A região ocupada por estas 500 curvas pode ser vista como uma medida do intervalo de confiança no qual esperamos encontrar a curva do momento estatístico associada a realização única do processo estocástico.

A figura 4.7 mostra os momentos estatísticos de $\Delta t = 1$ a $\Delta t = 100$. As linhas contínuas cinzas mostram a evolução temporal dos momentos estatísticos, obtidas a partir de 500 realizações do nosso gerador aleatório. Desta figura, podemos ter uma ideia das flutuações associadas com cada momento estatístico. A dispersão destas 500 curvas representa uma medida do intervalo de confiança. Assim, esperamos obter as medidas da realização única do processo estocástico, advindas dos dados empíricos, dentro deste intervalo de confiança.

Através da análise dos momentos estatísticos normalizados da figura 4.7, vemos que um modelo com ruído de Wiener padrão (GFP) não pode descrever os dados. Isto porque em um modelo GFP ($a = 0$), a assimetria $S_{\Delta t} = 0$ e a curtose $K_{\Delta t} = 3$, como dado pela equação (4.45). Admitir a presença de um processo de salto no modelo ajuda a explicar porque as distribuições do retorno do logaritmo são não-gaussianas e também a maneira lenta como estas distribuições convergem para gaussiana. O modelo GKM é mais adequado para explicar o comportamento da curtose do que o modelo GFP, mas a concordância entre a assimetria empírica e a assimetria do modelo GKM está longe de ser satisfatória. Ambos os modelos falham em explicar a evolução temporal da média $M_{\Delta t}$ e da variância $V_{\Delta t}^2$. Isto corrobora o abandono do modelo geométrico.

Análise dos Dados: Modelo Não-Geométrico de Kramers-Moyal (Rupia da Índia)

Vamos agora considerar um modelo de difusão não-geométrica dada por (4.36) em que $D(X) = X^q$, com $q \neq 1$. Este modelo denominado de modelo Não-Geométrico de Kramers-Moyal (NGKM), possui uma função Y dada por (4.39). A análise será feita a partir dos retornos ΔY .

A figura 4.8 mostra a evolução temporal da média e da variância da variável de retorno ΔY para diferentes valores do parâmetro q . Nota-se que o comportamento destes momentos dependem fortemente do valor do parâmetro q . Para $q \approx 0.3$, a concordância com o modelo teórico é mais precisa.

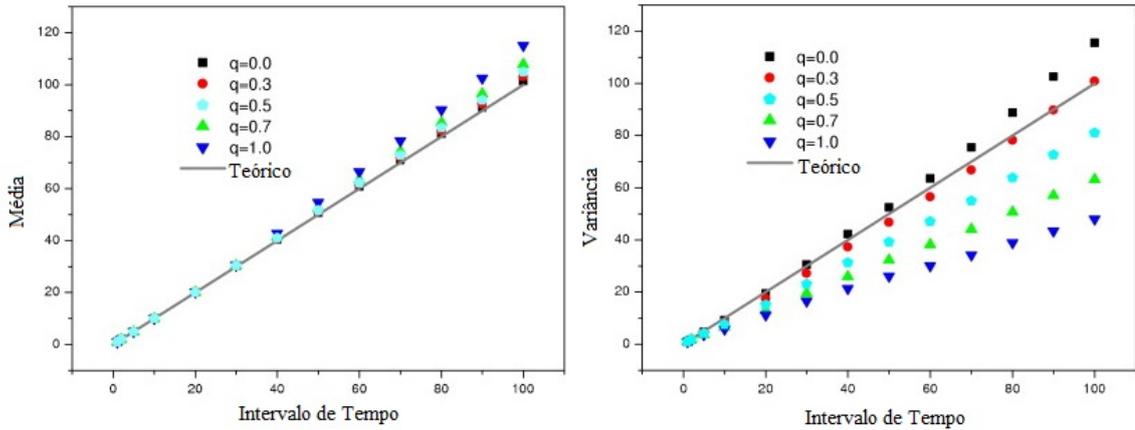


Figura 4.8: Os painéis mostram a média $M_{\Delta t}/M_1$ (esquerda) e a variância $V_{\Delta t}^2/V_1^2$ (direita) em função de Δt para diferentes valores de q para a rupia da Índia. Os retornos de $Y(t)$ são obtidos a partir da taxa de câmbio da rupia indiana em relação ao dólar americano através da formula (4.39).

Para todos os valores de q a evolução temporal da variância $V_{\Delta t}^2$ segue aproximadamente uma lei de potência $V_{\Delta t}^2 = C(\Delta t)^h$. O parâmetro h é conhecido como expoente de difusão e define o tipo de difusão associado a variável de retorno (veja a seção 2.2.1). A difusão normal corresponde a $h = 1$ e significa que as variáveis de retorno são linearmente correlacionadas em relação a Δt . Como o expoente h depende do valor de q , vamos encontrar qual valor de q torna o expoente de difusão igual a um. A fim de fazer isso, vamos considerar vários valores de q e medir dos retornos empíricos de Y , obtidos a partir da equação (4.39), seus respectivos expoentes de difusão. Estes expoentes de difusão são obtidos do ajuste linear do gráfico log-log dos dados empíricos de $V_{\Delta t}^2$ em função de Δt . O resultado deste ajuste é mostrado na figura 4.9, da qual obtemos um expoente de Hurst igual a 1.0 para $q = 0.3577$.

A figura 4.10 mostra os momentos estatísticos normalizados da variável de retorno ΔY associada como o valor de $q = 0.3577$. Similarmente ao que foi mostrado na figura 4.7, as linhas contínuas cinzas correspondem as 500 trajetórias geradas aleatoriamente. A média, a variância e a curtose estão em melhor concordância com o modelo NGKM do que com o modelo GKM previamente analisado. A assimetria também está em melhor concordância, mas

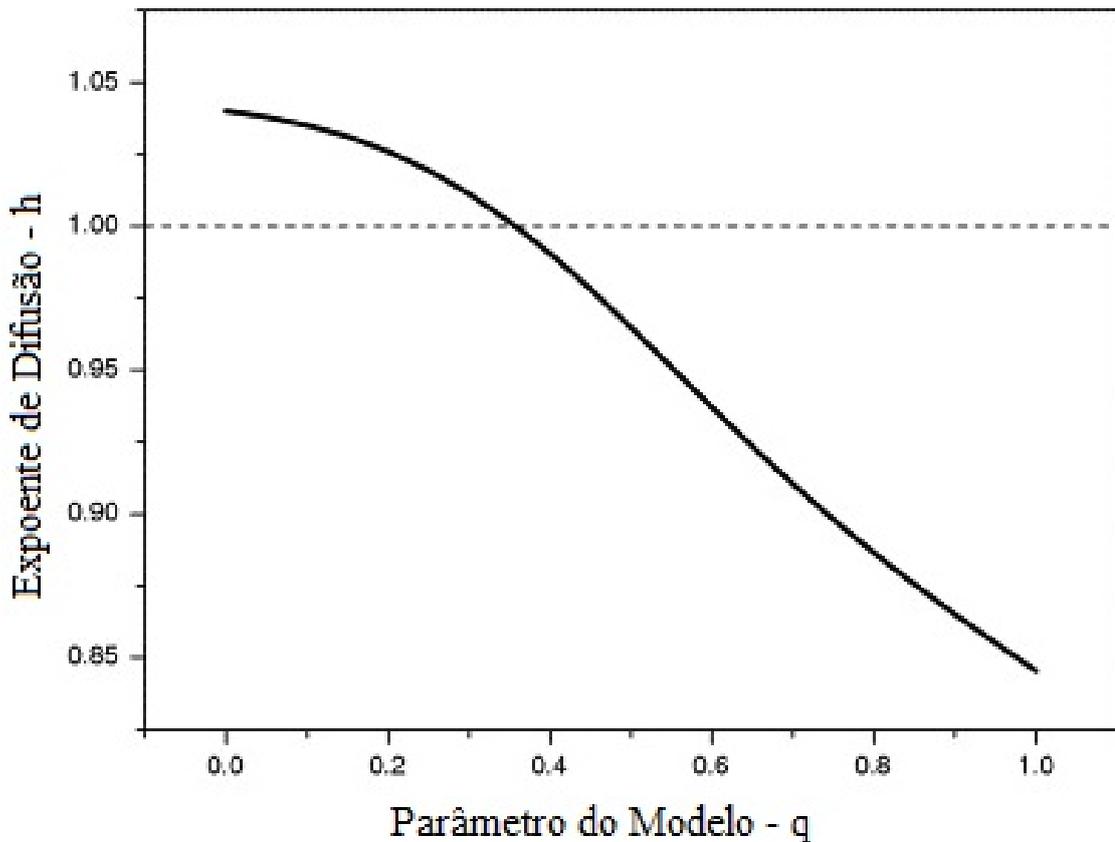


Figura 4.9: A linha contínua negra representa o expoente de difusão em função do parâmetro q do modelo para a rupia da Índia. A linha tracejada é o expoente de difusão $h = 1$. A linha contínua negra intercepta a linha tracejada no valor $q \approx 0.3577$.

está claramente fora do intervalo de confiança. O modelo de Kramers-Moyal não-Geométrico utilizando $q = 0.3577$ mostra-se mais apropriado para explicar os dados empíricos do que o modelo GFP ou o modelo GKM.

Vale a pena observar que a variância é muito sensível com respeito à medidas feitas em uma única trajetória: suas flutuações são relativamente maiores que as flutuações observadas em outros momentos estatísticos, implicando em uma incerteza maior em sua medição. Por outro lado, a média apresenta flutuações mais estreitas ao redor do resultado esperado, e constitui um teste mais robusto para testar a qualidade do modelo proposto.

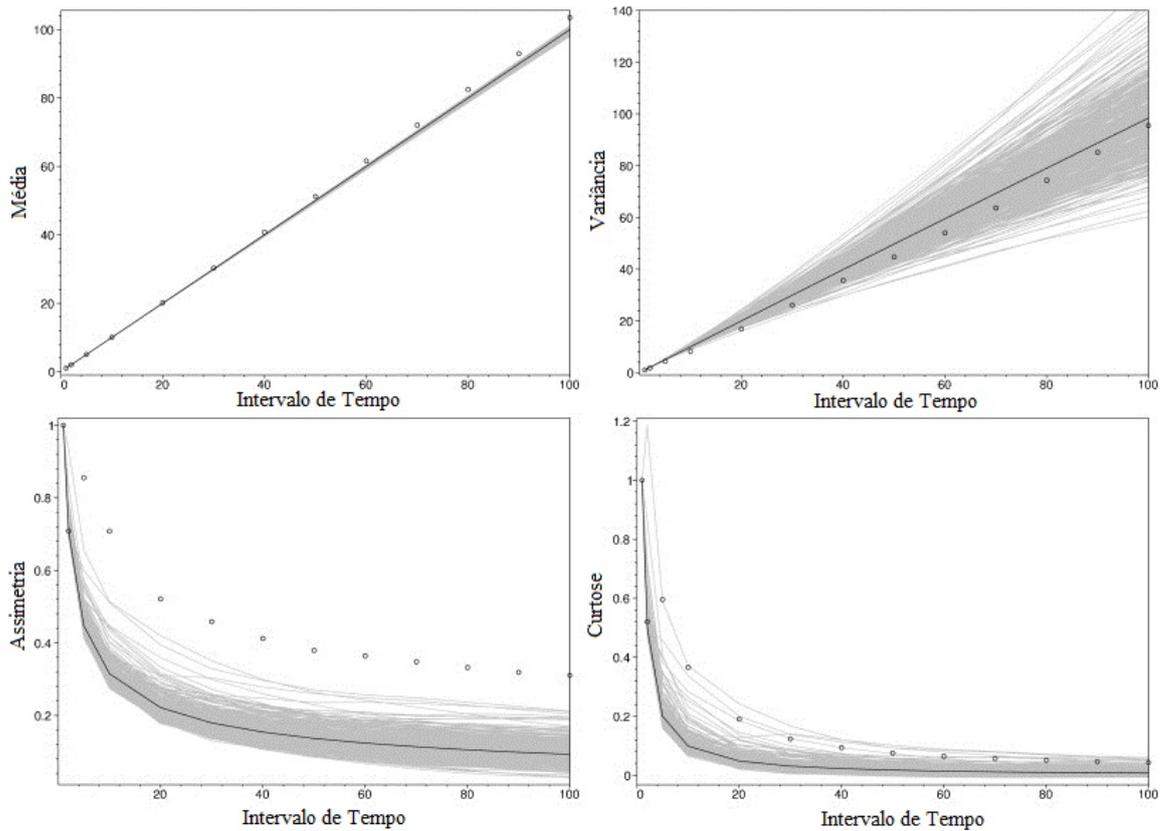


Figura 4.10: Os painéis mostram os momentos estatísticos normalizados calculados para a variável $Y(t + \Delta t) - Y(t)$, em que a função $Y(t)$ é dada pela equação (4.39) com $q = 0.3577$ para a rupia da Índia. Temos, respectivamente: $M_{\Delta t}/M_1$ (topo à esquerda); $V_{\Delta t}^2/V_1^2$ (topo à direita); $S_{\Delta t}/S_1$ (abaixo à esquerda); $(K_{\Delta t} - 3)/(K_1 - 3)$ (abaixo à direita). Os círculos negros correspondem aos momentos calculados dos dados empíricos. As linhas contínuas negras correspondem aos momentos do modelo NGKM. As curvas cinzas representam os momentos das 500 trajetórias geradas aleatoriamente. A região ocupada por estas 500 curvas pode ser vista como uma medida do intervalo de confiança no qual esperamos encontrar a curva do momento estatístico associada a realização única do processo estocástico.

Análise dos Dados: Modelo Não-Geométrico versus Modelo Geométrico (Rupia da Índia)

Com o objetivo de obter uma ideia sobre o efeito da utilização do modelo não-geométrico em vez de um modelo geométrico, mostramos nos painéis à esquerda da figura 4.11, a trajetória $\Delta Y(1) = Y(t + 1) - Y(t)$ respectivamente para $q = 1.0$ (modelo geométrico, painel acima) e $q = 0,3577$ (modelo não-geométrico, painel abaixo). Podemos ver que o modelo

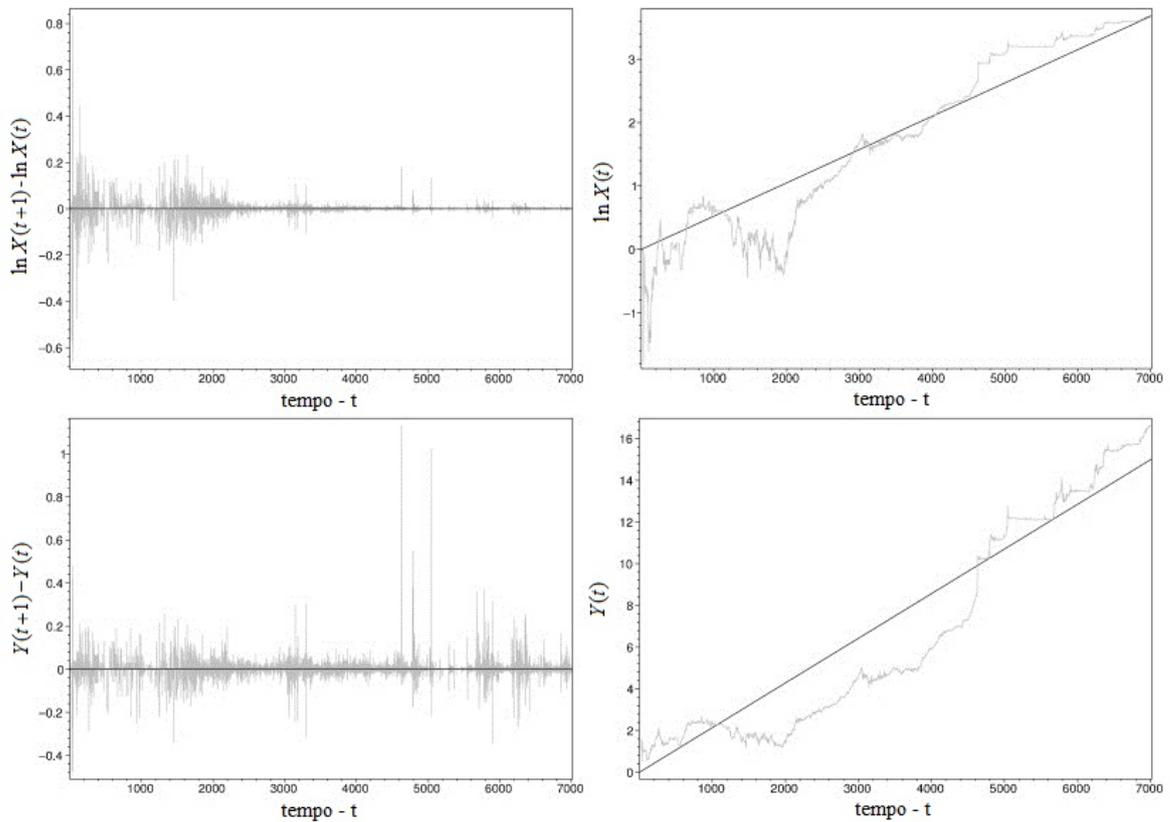


Figura 4.11: O painel acima à esquerda mostra a evolução temporal da variável estocástica $\ln[X(t+1)] - \ln[X(t)]$ (linha cinza) e sua respectiva média M (linha negra) para a rupia da Índia. O painel acima à direita mostra a evolução temporal da variável $\ln[X(t)]$ (linha cinza) e sua respectiva curva Mt (linha negra). O painel abaixo à esquerda mostra a evolução temporal de $Y(t+1) - Y(t)$ (linha cinza) e sua respectiva média M (linha negra). O painel abaixo à direita mostra a série temporal da variável $Y(t)$ (linha cinza) e sua respectiva curva Mt (linha negra). A função $Y(t)$ é dada pela equação (4.39), em que $q = 0.3577$.

não-geométrico possui menos aglomerações em sua volatilidade (i.e., períodos que apresentam grandes oscilações por um extenso período de tempo, seguidas de períodos em que há relativa calma) e o efeito devido a presença de saltos é visível. Da mesma forma, a variável geométrica possui uma forte concentração de volatilidade na primeira parte de sua trajetória: o intervalo de tempo entre $t = 0$ e $t = 2000$. Esta característica desaparece em uma variável não-geométrica.

Os painéis da direita na figura 4.11, mostram a mais evidente consequência a respeito da estacionariedade da média: a evolução temporal da variável Y . No painel de cima à

direita, correspondente ao modelo geométrico, a evolução de $Y = \ln X$ não corresponde a um crescimento linear. De fato, se quisermos considerar este modelo, devemos admitir diferentes taxas de crescimento para diferentes períodos de tempo. O painel de baixo à direita mostra o mesmo para a variável Y não-geométrica ($q = 0.3577$). Podemos observar que, exceto para o período entre $t = 1000$ e $t = 2000$, o crescimento é essencialmente linear e paralelo à Mt , em que M é a média calculada para a variável $\Delta Y(1) = Y(t+1) - Y(t)$. Os efeitos devido a presença de saltos são evidentes: eles transladam a curva de crescimento linear em outra curva linear paralela, em um tempo ao redor de $t = 4500$.

Análise dos Dados: Modelo de Difusão Não-Geométrica (Rupia do Sri Lanka)

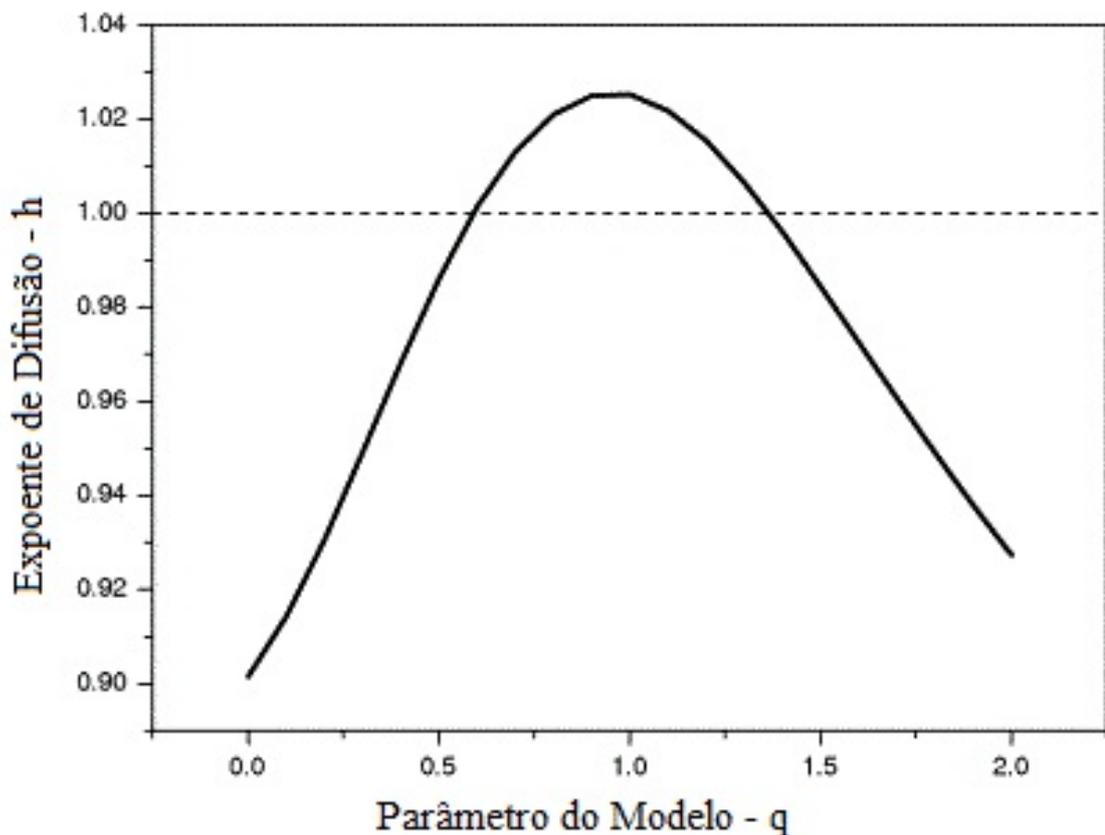


Figura 4.12: A linha contínua negra representa o expoente de difusão em função do parâmetro q do modelo para a rupia do Sri Lanka. A linha tracejada representa o expoente de difusão $h = 1$. A linha contínua negra intercepta a linha tracejada em dois valores de q . Os valores são aproximadamente $q = 0.59$ e $q = 1.36$.

A segunda ilustração de nossa análise é aplicada ao estudo da taxa de câmbio da rupia do Sri Lanka em relação ao dólar americano. A figura 4.12 mostra o expoente de difusão h em função do parâmetro q do modelo para a taxa de câmbio da rupia do Sri Lanka. Para obtermos as curvas mostradas na figura 4.12 aplicamos o mesmo procedimento adotado na figura 4.9. Há dois valores de q que tornam o expoente de difusão igual a um. Vamos considerar então os modelos de difusão não-geométrica para estes dois valores de q e vamos compará-los com o modelo geométrico ($q = 1$).

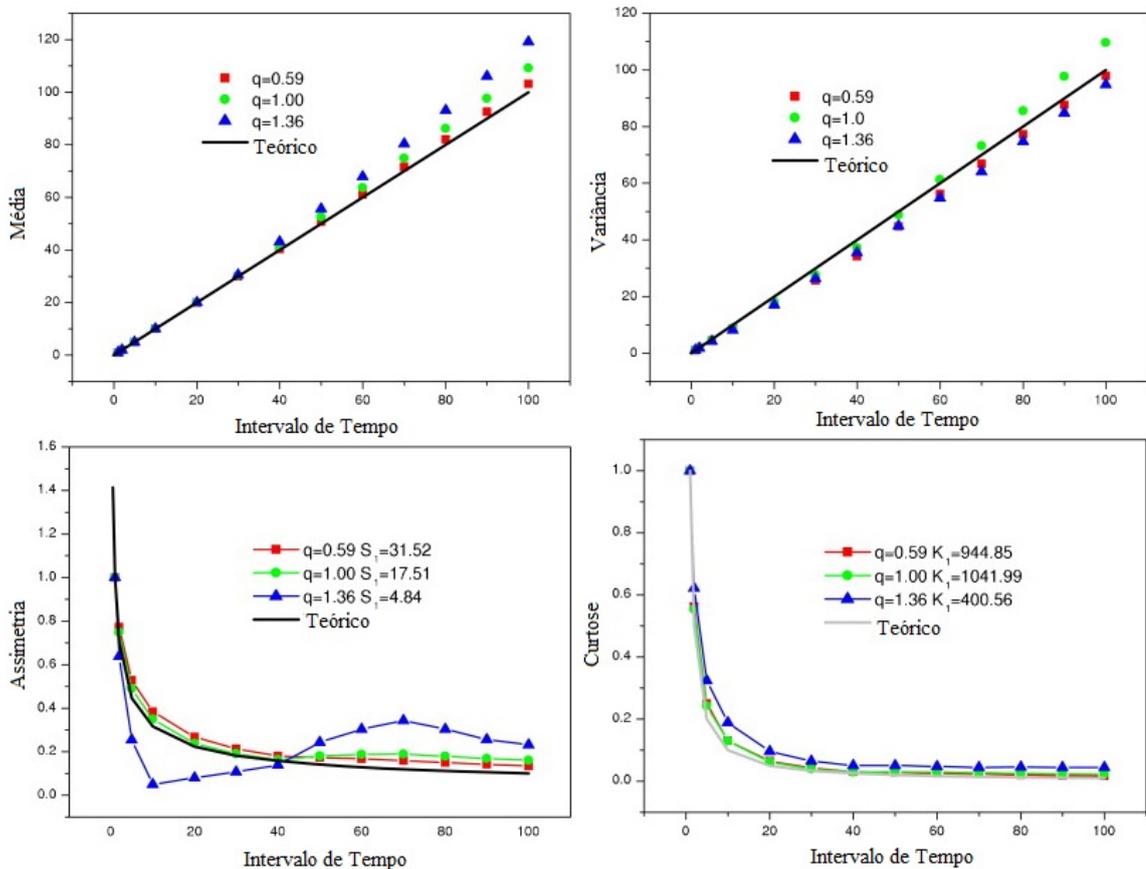


Figura 4.13: Os painéis mostram respectivamente a média $M_{\Delta t}/M_1$ (topo à esquerda); a variância $V_{\Delta t}^2/V_1^2$ (topo à direita); a assimetria $S_{\Delta t}/S_1$ (abaixo à esquerda); a curtose $(K_{\Delta t} - 3)/(K_1 - 3)$ (abaixo à direita) para a rupia do Sri Lanka. A linha contínua negra representa o modelo teórico. Os retornos são calculados dos dados empíricos usando a função Y em (4.39) para $q = 0.59$, $q = 1.0$ e $q = 1.36$ respectivamente. Todas as curvas são normalizadas por seus respectivos valores iniciais. Os respectivos valores iniciais da assimetria e da curtose são mostrados nas legendas.

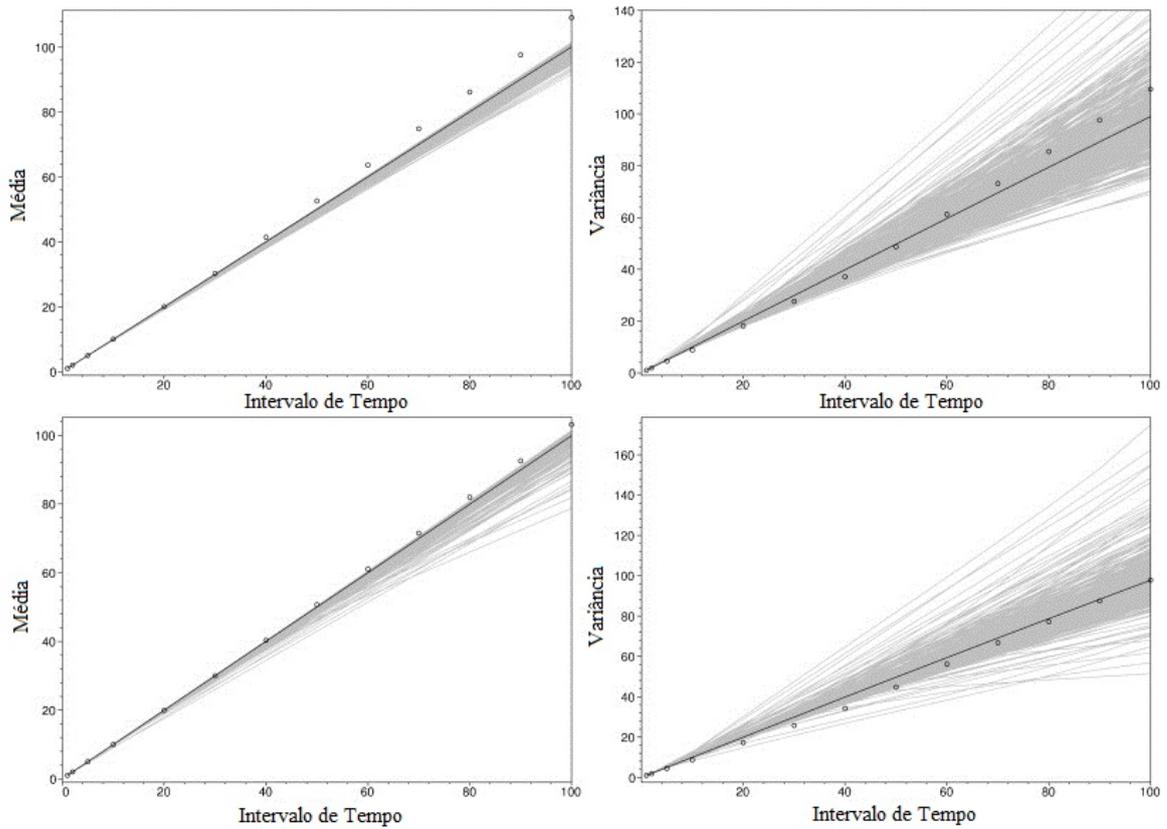


Figura 4.14: Os painéis acima mostram os momentos estatísticos normalizados da variável $\ln[X(t+1)] - \ln[X(t)]$ em função do intervalo de tempo Δt para a rupia do Sri Lanka. Temos, respectivamente: $M_{\Delta t}/M_1$ (acima à esquerda) e $V_{\Delta t}^2/V_1^2$ (acima à direita). Os painéis abaixo mostram os momentos estatísticos normalizados da variável $Y(t+\Delta t) - Y(t)$ em função do intervalo de tempo Δt . Temos, respectivamente: $M_{\Delta t}/M_1$ (abaixo à esquerda) e $V_{\Delta t}^2/V_1^2$ (abaixo à direita). A função $Y(t)$ é dada em (4.39) com $q = 0.59$. Os círculos negros correspondem aos momentos calculados dos dados empíricos. As linhas contínuas negras correspondem aos valores teóricos do modelo NGKM. As linhas contínuas cinzas representam os momentos das 500 trajetórias geradas aleatoriamente. A região ocupada por estas 500 curvas pode ser vista como uma medida do intervalo de confiança no qual esperamos encontrar a curva do momento estatístico associada a realização única do processo estocástico.

A figura 4.13 mostra a evolução temporal dos vários momentos estatísticos normalizados para três diferentes valores de q . Realizamos a mesma análise de incerteza (intervalo de confiança representado pelas linhas cinzas), como feito no caso prévio para a rupia indiana. Podemos concluir que: (i) para $q = 0.59$, todos os momentos empíricos estão em boa concordância com o modelo NGKM, (ii) para $q = 1.36$, apenas a variância empírica está em

boa concordância com o modelo NGKM e (iii) para $q = 1$, o comportamento da média e da variância não podem ser explicados pelo modelo GKM.

Como o modelo de difusão não-geométrica com $q = 0.59$ mostrou-se melhor para descrever os dados, mostramos na figura 4.14, apenas os momentos estatísticos normalizados com análise de incerteza para $q = 1$ (modelo geométrico, painéis de cima) e para $q = 0.59$ (modelo não-geométrico, painéis abaixo). Esta análise é feita de maneira similar ao que foi feito na figura 4.7. Por fim, a figura 4.15 é obtida exatamente da mesma maneira que a figura 4.11.

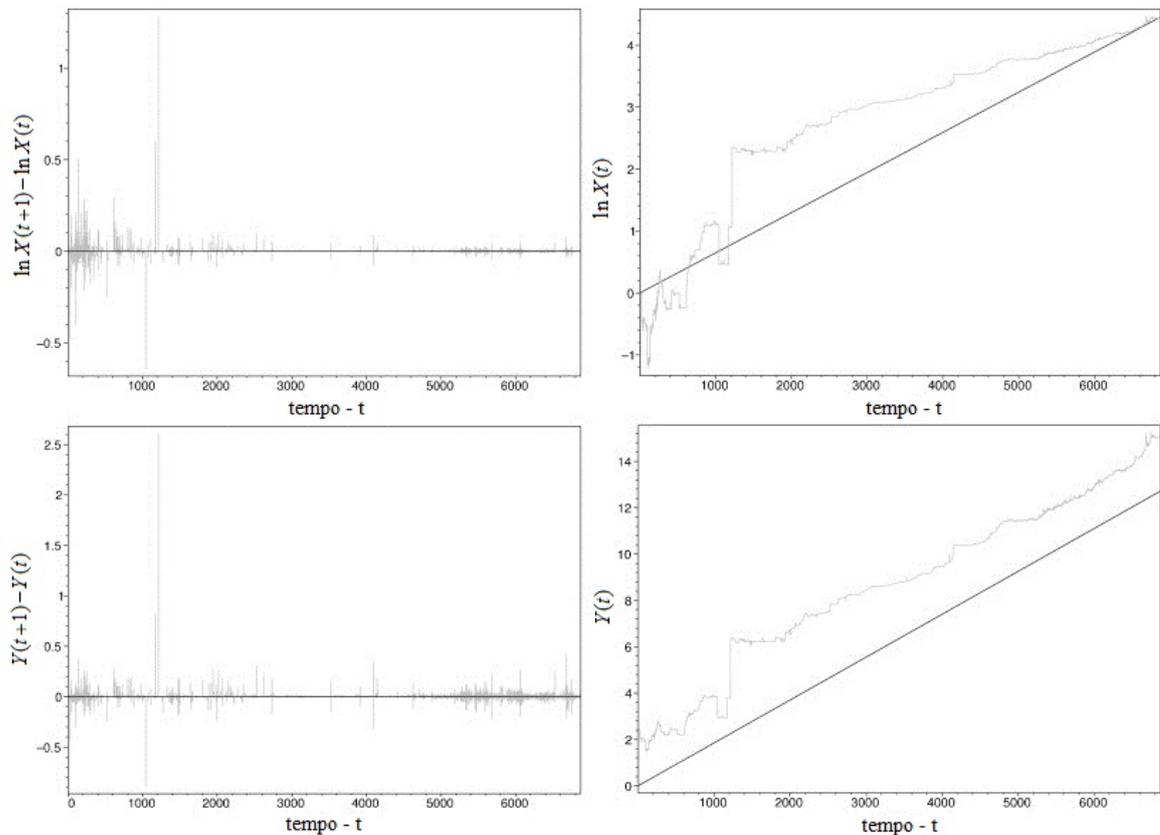


Figura 4.15: O painel acima à esquerda mostra a evolução temporal da variável estocástica $\ln[X(t + 1)] - \ln[X(t)]$ (linha cinza) e sua respectiva média M (linha negra) para a rupia do Sri Lanka. O painel acima à direita mostra a série temporal da variável $\ln[X(t)]$ (linha cinza) e sua respectiva curva Mt (linha negra). O painel abaixo à esquerda mostra a evolução temporal de $Y(t + 1) - Y(t)$ (linha cinza) e sua respectiva média M (linha negra). O painel abaixo à direita mostra a série temporal da variável $Y(t)$ (linha cinza) e sua respectiva curva Mt (linha negra). A função $Y(t)$ é dada pela equação (4.39), em que $q = 0.59$.

Para explicar o comportamento das duas taxas de câmbio estudadas devemos descartar o modelo de difusão geométrica padrão. Devemos também consideramos uma taxa de crescimento não-exponencial, que pode ser dada pela função $D(X) = X^q$ usando $q \neq 1$. A função $D(X)$ determina a evolução temporal dos momentos estatísticos associados com a variável de retorno. Graças a nossa escolha, eliminamos algumas propriedades que normalmente são vistas como resultantes de correlações de longo alcance nos dados.

Neste sentido, vale a pena enfatizar que nosso método de ajuste para obtenção de um modelo não-geométrico foi exclusivamente baseado na variância, e, nas duas taxas cambiais estudadas, esta metodologia permitiu a obtenção de uma variável Y com média quase estacionária. Em contrapartida, para $q = 1$, as séries temporais dos retornos do logaritmo de $X(t)$ não são compatíveis com média estacionária. Isto reforça o caso em favor do modelo não-geométrico. De fato, o uso da taxa de crescimento correta implica encontrar uma variável Y na qual os efeitos das correlações são mais suaves.

4.4.1 Discussão dos Resultados

Apresentamos um modelo de difusão não-geométrica com salto para descrição de retornos do preço de séries financeiras e ilustramos isso com dados empíricos de taxas de câmbio. Assumimos que o processo estocástico é descrito por um processo misto de Wiener e de salto e a taxa de crescimento médio do retorno é uma função não-linear dada por $D(X)$. A primeira hipótese implica que a equação de difusão associada com o modelo é do tipo Kramers-Moyal e que o retorno não é gaussianamente distribuído. Entretanto, ele converge assintoticamente para a Gaussiana. As duas hipóteses estão em correspondência com as propriedades observadas nos dados reais de taxas cambiais.

A evolução temporal dos momentos estatísticos associados aos retornos das taxas cambiais depende fortemente do modo como a função $D(X)$ é especificada. Com a função $D(X)$ definida, podemos gerar uma transformação de variáveis na qual os retornos são não-Gaussianos,

mas convergem para uma Gaussiana de um modo muito particular. Se a escolha da função $D(X)$ for apropriada, então obtemos um nova variável aleatória para a qual a maioria das correlações de longo alcance nos dados é eliminada.

No entanto, não estamos propondo a universalidade do modelo não-geométrico. Estamos apenas interessados na importância de investigar se a hipótese fundamental de taxa de crescimento exponencial é apropriada ou não e como e quando esta hipótese falha. Aplicamos nosso método para diversas taxas de câmbio de diversos países. Em alguns casos, o modelo geométrico com salto mostrou-se melhor para descrever o processo estocástico que o modelo não-geométrico com salto. De fato, os retornos do logaritmo destas taxas de câmbio apresentam média aproximadamente estacionária.

Não desenvolvemos uma teoria para justificar a escolha mais adequada da função $D(X)$ e, apenas por simplicidade, consideramos esta função como dada na equação (4.39). Contudo, a evidência empírica sugere que vale a pena considerar uma equação de Kramers-Moyal como equação de difusão apropriada para modelar retornos de séries financeiras. O modelo com um ruído que é a soma de um processo de Wiener e um processo de salto é suficiente para explicar porque a curtose dos retornos do logaritmo do preço possui valor muito alto para intervalos de tempo muito pequenos.

Capítulo 5

Equações de Difusão Fracionárias

5.1 Formalismo geral de Lévy para Funções Características

Este capítulo é dedicado a desenvolver métodos de obtenção de equações de difusão para processos estocásticos em que a expansão em séries de sua função característica não conduz a séries de potências inteiras, quando o limite $\Delta t \rightarrow 0$ é levado em conta. De fato, pretendemos obter neste capítulo, as propriedades estatísticas básicas para descrição de processos estocásticos (com funções características analíticas ou não), que nos permitam decidir qual equação de difusão é mais apropriada para a descrição do processo.

Primeiramente, vamos considerar um processo estocástico $X(t)$, em que é possível definir uma variável reduzida \bar{X} , escrita como

$$\bar{X}(t) = \frac{X(t) - A(x, t, \Delta t)}{B(x, t, \Delta t)}, \quad (5.1)$$

em que $A(x, t, \Delta t)$ é um parâmetro de centralização e $B(x, t, \Delta t) > 0$ é um parâmetro de dispersão. Independentemente das propriedades estatísticas de $X(t)$, a função característica da variável reduzida $\bar{X}(t)$ pode ser escrita como

$$\psi_{\bar{X}}(z) = e^{-\frac{|z|^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} [1 - I_{|z|}^{\frac{z}{|z|} \beta \phi}]^{1+\omega(z)}}, \quad 0 < \alpha \leq 2, \quad |\beta| \leq 1, \quad (5.2)$$

em que a função $\omega(z)$ é a função de Lévy, $\omega(0) = 0$, para $\alpha = 1$: $\phi = -\frac{2}{\pi} \ln |z|$, para $\alpha \neq 1$: $\phi = \tan(\frac{\pi\alpha}{2})$, $\Gamma(1 + \alpha)$ é a função Gama e β é o coeficiente de assimetria. Esta função

característica corresponde a lei de distribuição de Levy-Khintchine, introduzida por Lévy em seu trabalho sobre o teorema do limite central para soma de variáveis aleatórias [20].

O parâmetro α pode assumir qualquer valor no intervalo $(0, 2]$. Se $0 < \alpha \leq 1$, todos os momentos estatísticos de $X(t)$ serão infinitos. Para valores de $1 < \alpha < 2$, a função característica corresponde a uma variável aleatória X com média finita e dada pelo parâmetro de centralização A e segundo momento infinito. Somente para $\alpha = 2$, o segundo momento é finito e os parâmetros A e B são respectivamente a média e o desvio-padrão de $X(t)$. Neste último caso ($\alpha = 2$), a função característica da variável aleatória $\bar{X}(t)$ se reduz à fórmula (2.28), bastante utilizada nos capítulos anteriores.

O parâmetro β é um parâmetro de assimetria e pode assumir qualquer valor no intervalo $[-1, 1]$. Quando $\beta = 0$, a distribuição de probabilidade da variável aleatória será simétrica e a equação (5.2) se reduz à seguinte função característica correspondente

$$\psi_{\bar{X}}(z) = e^{-\frac{|z|^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} [1+\omega(z)]}. \quad (5.3)$$

Quando a função de Lévy $\omega(z) = 0$, para qualquer valor de z , dizemos que a variável aleatória segue uma distribuição de Lévy estável. Um exemplo importante é a distribuição gaussiana, que é obtida a partir da equação (5.2) para $\alpha = 2$ (variância finita), $\omega(z) = 0$ (distribuição estável) e $\beta = 0$ (distribuição simétrica).

5.2 Equação de Difusão Fracionária: Forma Canônica de Lévy

Vamos agora utilizar o formalismo geral de Lévy para funções características, estabelecido pela equação (5.2), para a obtenção de equações de difusão. Este formalismo para a equação de difusão é inédito na literatura. A metodologia utilizada é bastante similar à utilizada na seção 2.4.

Vamos considerar a variável de retorno $\theta = X(t + \Delta t) - X(t)$. Obtemos então a variável reduzida $\bar{\theta}$, a partir da equação (5.1). Assim, a forma canônica geral de Lévy para função

característica de $\bar{\theta}$, é dada por:

$$\psi_{\bar{\theta}}(z, t, \Delta t) = e^{-\frac{|z|^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} [1 - I_{|z|} \beta \phi]^{1+\omega(z; x, t, \Delta t)}}, \quad 0 < \alpha \leq 2, \quad |\beta| \leq 1, \quad (5.4)$$

De acordo com as propriedades de funções características, como estabelecido na equação (2.69), podemos escrever

$$\psi_{\theta}(z, t, \Delta t) = e^{IAz} \psi_{\bar{\theta}}(Bz, t, \Delta t). \quad (5.5)$$

Como visto na equação (2.53), podemos escrever

$$\psi_X(z, t + \Delta t) = \int e^{Izx} \psi_{\theta}(z, t, \Delta t) f(x, t) dx, \quad (5.6)$$

ou, ainda:

$$\frac{\psi(z, t + \Delta t) - \psi(z, t)}{\Delta t} = \int e^{Izx} f(x, t) \left[\frac{\psi_{\theta}(z, t, \Delta t) - 1}{\Delta t} \right] dx. \quad (5.7)$$

Calculando o limite para $\Delta t \rightarrow 0$ na equação (5.7), obtemos:

$$\frac{\partial \psi(z, t)}{\partial t} = \int e^{Izx} f(x, t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\psi_{\theta}(z, t, \Delta t) - 1}{\Delta t} \right] dx. \quad (5.8)$$

Levando em conta as equações (5.4) e (5.5), vamos considerar a seguinte expansão em série:

$$\psi_{\theta}(z, t, \Delta t) = e^{IA(x, t, \Delta t)z - \frac{|B(x, t, \Delta t)z|^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} [1 - I_{|z|} \beta \phi]^{1+\omega(B(x, t, \Delta t)z)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{W_{\theta}^n(z; x, t, \Delta t)}{n!}, \quad (5.9)$$

em que $W_{\theta}(z; x, t, \Delta t)$ é a segunda característica de θ , dada por

$$W_{\theta}(z, t, \Delta t) = IA(x, t, \Delta t)z - \frac{|B(x, t, \Delta t)z|^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \left[1 - I_{|z|} \beta \phi \right] [1 + \omega(B(x, t, \Delta t)z)]. \quad (5.10)$$

Assim, das equações (5.9) e (5.10), podemos mostrar que

$$\frac{\psi_{\theta}(z, t, \Delta t) - 1}{\Delta t} = \frac{W_{\theta}(z; x, t, \Delta t)}{\Delta t} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{W_{\theta}^n(z; x, t, \Delta t)}{\Delta t}. \quad (5.11)$$

Os dois parâmetros A e B possuem dependência em Δt e supomos que as seguintes condições são obedecidas quando Δt converge para zero:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(x, t, \Delta t)}{\Delta t} &= A(x, t), \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B^\alpha(x, t, \Delta t)}{\Delta t} &= B^\alpha(x, t), \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega(Bz; x, t, \Delta t) &= \Omega(z, x, t). \end{aligned} \quad (5.12)$$

em que $A(x, t)$, $B(x, t)$ e $\Omega(z; x, t)$ são funções finitas e arbitrárias. Estas condições estabelecidas são necessárias e suficientes para a existência do limite. Assim, mais uma vez, a caracterização do processo de difusão associado a θ dependerá do caso limite em que $\Omega(z; x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega(Bz; x, t, \Delta t)$. As seções a seguir, discutem estes casos.

5.3 Equações de Fokker-Planck Fracionárias

Nesta seção, vamos estudar o caso limite em que a função $\Omega(z; x, t) = 0$. Então os limites da equação (5.12) serão dados por:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(x, t, \Delta t)}{\Delta t} &= A(x, t), \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B^\alpha(x, t, \Delta t)}{\Delta t} &= B^\alpha(x, t), \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega(B(x, t, \Delta t)z; x, t, \Delta t) &= 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

A situação apresentada por (5.13) significa que, para valores pequenos de Δt , as densidades de probabilidade associadas a variável θ serão distribuições de Lévy Estáveis, que desempenham um papel fundamental no teorema do limite central. Neste caso, a equação de difusão que descreve o processo será uma equação de Fokker-Planck fracionária.

5.3.1 Variável com Distribuição Simétrica

Por questões didáticas, vamos primeiramente obter a equação de difusão associada a variável θ com distribuição simétrica, ou seja, distribuições nas quais o parâmetro de assimetria $\beta = 0$ e sua função característica se reduz à equação (5.3) e, quando $\Delta t \rightarrow 0$, a equação (5.13) é satisfeita. Desta forma, a partir das equações (5.10) e (5.13), podemos mostrar que

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W_\theta(z; x, t, \Delta t)}{\Delta t} &= IA(x, t)z - \frac{B^\alpha(x, t)|z|^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}, \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W_\theta^n(z; x, t, \Delta t)}{\Delta t} &= 0, \quad \forall n \geq 2. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Substituindo (5.14) em (5.9), obtemos

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\psi_\theta(z, t, \Delta t) - 1}{\Delta t} = IA(x, t)z - \frac{B^\alpha(x, t)|z|^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}, \quad (5.15)$$

Substituindo (5.15) na equação (5.8), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi(z, t)}{\partial t} &= \int e^{Izx} f(x, t) \left[IA(x, t)z - \frac{B^\alpha(x, t)|z|^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \right] dx. \\ &= Iz \langle A(x, t)f(x, t) \rangle_z + \frac{I^2|z|^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \langle B^\alpha(x, t)f(x, t) \rangle_z,\end{aligned}\quad (5.16)$$

em que definimos o seguinte operador que pode ser calculado para qualquer função real $G(x, t)$:

$$\langle G \rangle_z = \int e^{Izx} G(x, t) dx. \quad (5.17)$$

Vamos definir o Operador Diferencial Fracionário Par de ordem α , que atua em uma função real $G(x, t)$ como se segue:

$$\partial_P^\alpha(x)G = \frac{I^2}{2\pi} \int e^{-Izx} |z|^\alpha \langle G \rangle_z. \quad (5.18)$$

Vale notar que para $\alpha = 2$, este operador diferencial reduz-se a derivada parcial par de segunda ordem $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Na verdade, o operador fracionário definido na equação (5.18), é generalizado para qualquer valor positivo de α e este operador se reduz a

$$\partial_P^{2n}(x) = (-1)^{n-1} \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}, \quad (5.19)$$

quando n assume valores inteiros positivos. O resultado apresentado acima é a principal razão de chamar este operador como par. Também devemos notar que para valores ímpares de α , o operador não se torna uma derivada parcial de ordem n .

Por fim, para obter a equação de difusão, utilizamos os operadores definidos em (5.17) e (5.18) e calculamos a transformada inversa de Fourier na equação (5.16). Este cálculo permite mostrar que

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [A(x, t)f(x, t)] + \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \partial_P^\alpha(x) [B^\alpha(x, t)f(x, t)]. \quad (5.20)$$

que é denominada de equação de Fokker-Planck fracionária simétrica.

Utilizando a propriedade de funções características da equação (5.5) e satisfazendo as condições da equação (5.13), obtemos a função característica de θ para um pequeno intervalo

Δt :

$$\psi_\theta(z, t, \Delta t) = e^{IA(x,t)\Delta t z - \frac{|Bz|^\alpha \Delta t}{\Gamma(1+\alpha)}}. \quad (5.21)$$

que é a função característica de uma distribuição de Lévy estável e simétrica. Ela pode ser vista como uma solução analítica para a equação de Fokker-Planck fracionária simétrica.

5.3.2 Variável com Distribuição Assimétrica

Nesta subseção, vamos obter a equação de difusão correspondente ao caso em que a variável aleatória θ cuja densidade de probabilidade é assimétrica ($\beta \neq 0$), ou seja, possui uma função característica dada pela equação (5.2) e, quando $\Delta t \rightarrow 0$, a equação (5.13) é satisfeita.

Os passos a serem seguidos no cálculo são os mesmos do caso simétrico anterior. Então, de modo similar como feito para obter a equação (5.16), podemos obter

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial t} &= \int e^{Izx} f(x, t) \left[IA(x, t)z + \frac{B^\alpha(x, t)}{\Gamma(1+\alpha)} I^2 |z|^\alpha + Iz \frac{B^\alpha(x, t)}{\Gamma(1+\alpha)} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) |z|^{\alpha-1} \right] dx \\ &= Iz \langle A(x, t)f(x, t) \rangle_z + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \left[I^2 |z|^\alpha + \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) Iz |z|^{\alpha-1} \right] \langle B^\alpha(x, t)f(x, t) \rangle_z. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Aqui, mantivemos a mesma hipótese feita na equação (5.13). Finalmente, aplicando a transformada inversa de Fourier na equação (5.22), obtemos a equação de Fokker-Planck fracionária assimétrica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} &= - \frac{\partial}{\partial x} [A(x, t)f(x, t)] \\ &+ \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \left\{ \partial_I^\alpha(x) [B^\alpha(x, t)f(x, t)] - \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \partial_I^\alpha(x) [B^\alpha(x, t)f(x, t)] \right\}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

em que o operador diferencial fracionário ímpar $\partial_I^\alpha(x)$ atuando em uma função arbitrária real $G(x, t)$ é definido como

$$\partial_I^\alpha(x)G = \frac{I}{2\pi} \int e^{-Izx} z |z|^{\alpha-1} \langle G \rangle_z. \quad (5.24)$$

Quando o parâmetro $\alpha = 1$, o operador fracionário ímpar acima se reduz a derivada parcial de primeira ordem $-\frac{\partial}{\partial x}$. O operador fracionário definidos em (5.24) é generalizado para

qualquer valor positivo de α e este operador se reduz a

$$\partial_I^{2n-1}(x) = (-1)^n \frac{\partial^{2n-1}}{\partial x^{2n-1}}, \quad (5.25)$$

quando n assume valores inteiros positivos. O resultado apresentado acima é a principal razão de chamar este operador como impar. Também devemos notar que para valores pares de α o operador impar não se reduz a uma derivada parcial de ordem n .

Utilizando a propriedade de funções características da equação (5.5) e satisfazendo as condições da equação (5.13), obtemos a função característica de θ para um pequeno intervalo Δt :

$$\psi_\theta(z, t, \Delta t) = e^{IA(x,t)\Delta tz - \frac{|Bz|^\alpha \Delta t}{\Gamma(1+\alpha)} [1 - I_{|z|} \beta \phi]}. \quad (5.26)$$

que é a função característica de uma distribuição de Lévy estável e assimétrica. Ela pode ser vista como uma solução analítica para a equação de Fokker-Planck fracionária assimétrica.

As funções características (5.21) e (5.26) nada mais são que a funções características nas quais as densidades de probabilidades são distribuições estáveis de Lévy, respectivamente, simétrica e assimétrica, que convergem para uma delta de Dirac $\delta(\theta)$, quando $\Delta t \rightarrow 0$. De fato, para um pequeno valor de Δt , a função $\omega(Bz, x, t, \Delta t) = 0$. A principal consequência disso é que a variável reduzida θ , nestes dois casos, é auto-similar com respeito a Δt . Em outras palavras, as distribuições de probabilidade da variável $\bar{\theta}$ serão as mesmas para qualquer intervalo de tempo Δt escolhido.

5.4 Equações de Kramers-Moyal Fracionárias

Nesta seção, vamos lidar com a obtenção da equação de difusão para uma variável aleatória θ cuja função característica é dada pela equação (5.2) e a função $\Omega(z; x, t) \neq 0$ na equação (5.12). Aqui, ao invés de apresentar uma teoria geral das condições suficientes e necessárias que nos conduzem a descrição através de equações de Kramers-Moyal, apresentaremos dois exemplos: 1) a distribuição de probabilidade da variável θ é simétrica; 2) a variável aleatória

é dada por uma lei de probabilidade assimétrica. Começaremos nossos cálculos a partir da equação (5.8) e devemos manter em mente que a função característica associada a variável reduzida $\bar{\theta}$ possui uma função $\Omega(z; x, t) \neq 0$.

Antes de começar, vale ressaltar que utilizando (5.5) e satisfazendo as condições da equação (5.12) e considerando Δt pequeno, temos que a função característica de θ pode ser escrita como:

$$\psi_{\theta}(z, t, \Delta t) = e^{IA(x,t)\Delta t z - \frac{|Bz|^{\alpha}\Delta t}{\Gamma(1+\alpha)} [1 - I \frac{z}{|z|} \beta \phi]^{1+\Omega(z,x,t)}} \quad (5.27)$$

Esta função característica é uma solução analítica geral para a equação de Kramers-Moyal fracionária. Podemos concluir que para $\Omega(z, x, t) \neq 0$, a distribuição de probabilidade de θ será uma distribuição de Lévy não-estável, mas que também converge para uma delta de Dirac $\delta(\theta)$ quando $\Delta t \rightarrow 0$. A principal consequência disso é que a variável reduzida $\bar{\theta}$ tem diferentes distribuições para diferentes valores de Δt . Em outras palavras, a variável θ não pode ser auto-similar com respeito a Δt .

5.4.1 Variável com distribuição de probabilidade simétrica

Nosso primeiro exemplo consiste em considerar a seguinte densidade de probabilidade para a variável θ

$$f(\theta) = [a(x, t)\Delta t] \left[\frac{1}{2} \frac{(q-1)}{(1+|\theta|)^q} \right] + [1 - a(x, t)\Delta t] \delta(\theta), \quad q > 1, \quad (5.28)$$

em que $\delta(\theta)$ é a função delta de Dirac. O parâmetro q é tido como constante e não pode assumir valores inteiros, ou seja, $q \neq n$ para valores de n inteiros. Podemos mostrar que os momentos estatísticos de ordem β associados a variável aleatória θ são dados por

$$\int f(\theta) |\theta|^{\beta} d\theta = \frac{(q-1)\Gamma(\beta+1)\Gamma(q-1-\beta)}{\Gamma(q)} a(x, t)\Delta t, \quad \beta > 1. \quad (5.29)$$

A função característica correspondente a densidade de probabilidade em (5.28) pode ser calculada e é escrita como

$$\psi_{\theta}(z) = 1 - [a(x, t)\Delta t] z^{q-\frac{1}{2}} L\left(\frac{3}{2} - q, \frac{1}{2}, z\right), \quad (5.30)$$

em que a função $L(\mu, \nu, z)$ é a função de Lommel que satisfaz a seguinte equação diferencial de segunda ordem

$$z^2 \frac{d^2 L}{dz^2} + z \frac{dL}{dz} + (z^2 - \nu^2)L = z^{\mu+1}. \quad (5.31)$$

Consequentemente

$$\frac{\psi_\theta(z) - 1}{\Delta t} = -a(x, t) z^{q-\frac{1}{2}} L\left(\frac{3}{2} - q, \frac{1}{2}, z\right), \quad (5.32)$$

Se considerarmos o limite em que $\Delta t \rightarrow 0$ em (5.32) e substituirmos os resultados na equação (5.7), obtemos

$$\frac{\partial \psi(z, t)}{\partial t} = -a(x, t) \int e^{Izx} f(x, t) z^{q-\frac{1}{2}} L\left(\frac{3}{2} - q, \frac{1}{2}, z\right) dx. \quad (5.33)$$

Agora, vamos considerar a expansão em série para o termo dentro do integrando na equação (5.33), então temos que

$$\frac{\partial \psi(z, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(q)}{2n!} I^{2n} z^{2n} \langle a(x, t) f(x, t) \rangle_z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(q)}{\Gamma(q-1+n)} I^2 |z|^{q-1+n} \langle a(x, t) f(x, t) \rangle_z. \quad (5.34)$$

em que $A_n(q)$ e $B_n(q)$ são números reais que dependem apenas do valor do parâmetro q . O último passo no cálculo consiste em tomar a transformada inversa de Fourier na equação (5.34), que nos leva a

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(q)}{2n!} \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} [a(x, t) f(x, t)] + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(q)}{\Gamma(q-1+n)} \partial_P^{q-1+n}(x) [a(x, t) f(x, t)]. \quad (5.35)$$

Como podemos ver neste caso, a equação de difusão pode ser dividida em duas partes: a primeira consiste em uma expansão constituída por derivadas inteiras pares; a segunda parte é dada por uma soma infinita de operadores diferenciais fracionários pares. Este fato é a principal razão de chamar esta equação de difusão como equação fracionária de Kramers-Moyal simétrica.

5.4.2 Variável com distribuição de probabilidade assimétrica

Como um segundo exemplo, vamos considerar a variável θ como tendo a seguinte densidade de probabilidade assimétrica

$$f(\theta) = [a(x, t)\Delta t] \frac{(q-1)H(\theta)}{(1+\theta)^q} + [1 - a(x, t)]\delta(\theta), \quad (5.36)$$

em que $H(\theta)$ é a função degrau, ou seja, $H(\theta) = 0$ para $\theta < 0$ e $H(\theta) = 1$ para $\theta > 0$. A função característica desta distribuição deve ser escrito como

$$\psi_\theta(z) = 1 + a(x, t)\Delta t \left[-1 + Ie^{-I\pi\frac{q}{2}} \frac{\pi}{\sin(\pi q)\Gamma(q-1)} z^{q-1} e^{-Iz} - Ie^{I\pi\frac{q}{4}} z^{\frac{q}{2}-1} e^{-I\frac{z}{2}} W \right], \quad (5.37)$$

em que W é a função de Whittaker que satisfaz a seguinte equação diferencial de segunda ordem

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\mu}{z} + \frac{1/4 - \mu^2}{z^2} \right) W = 0. \quad (5.38)$$

Agora, vamos considerar a expansão em séries em termos de z e podemos obter

$$\frac{\psi_\theta(z) - 1}{\Delta t} = a(x, t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(q)}{n!} I^n z^n + a(x, t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(q)}{\Gamma(q-1+n)} \left(I^2 |z|^{q-1+n} + Iz |z|^{q-2+n} \right), \quad (5.39)$$

em que $A_n(q)$ e $B_n(q)$ são números reais e observamos que estes números não estão relacionados com aqueles que apareceram na equação (5.34), quando obtivemos um relação similar associada ao caso em que a variável θ foi tomada como uma variável aleatória simétrica.

O próximo passo consiste em calcular os limites que aparecem na equação (5.8) usando as expressões obtidas nas equações (5.37) e (5.39). Este cálculo nos leva a

$$\frac{\partial \psi(z, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(q)}{n!} I^n z^n \langle a f \rangle_z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(q)}{\Gamma(q-1+n)} \left(I^2 |z|^{q-1+n} + Iz |z|^{q-2+n} \right) \langle a f \rangle_z. \quad (5.40)$$

Terminamos o cálculo tomando a transformada inversa de Fourier da equação (5.40):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = & A_1(q) \frac{\partial}{\partial x} [a(x, t) f(x, t)] + C_1 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{A_n(q)}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [a(x, t) f(x, t)] + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(q)}{\Gamma(q-1+n)} \left(\partial_1^{q-1+n}(x) [a(x, t) f(x, t)] + \partial_2^{q-1+n}(x) [a(x, t) f(x, t)] \right), \end{aligned} \quad (5.41)$$

em que os operadores fracionários da expressão acima são definidos pelas equações (5.18) e (5.24). Esta equação é denominada de equação de Kramers-Moyal fracionária assimétrica.

5.5 Discussão dos Resultados

Vamos terminar este capítulo com alguns comentários a respeito dos resultados obtidos. O ponto mais importante que gostaríamos de salientar aqui está relacionado com o tipo de condições atribuídas a variável estocástica a fim de obter a equação de difusão apropriada. Primeiramente, observamos que a relação entre a variável estocástica e sua respectiva equação de difusão depende fortemente do modo como as equações se comportam quando o limite $\Delta t \rightarrow 0$ é tomado. Estas diferentes maneiras de calcular o limite são essencialmente relacionadas com o tipo de propriedades relacionadas à variável estocástica em estudo.

A propriedade chave para determinar o tipo de equação de difusão, depende da forma específica da função $\Omega(z; x, t)$. A função $\Omega(z; x, t) = 0$ significa que a densidade de probabilidade associada é assintoticamente auto-similar com respeito a escala temporal. Em outras palavras, é possível encontrar uma renormalização linear da variável aleatória que nos permite obter uma densidade de probabilidade que é assintoticamente independente da escala temporal Δt . Neste caso, caso a variável seja ou não analítica, os cálculos permitem afirmar que a equação de difusão terá a forma de Fokker-Planck. Caso contrário, se $\Omega(z; x, t) \neq 0$, a variável aleatória não é assintoticamente auto-similar com respeito a escala temporal Δt , a aproximação apresentada aqui guia-nos para uma equação de Kramers-Moyal.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

6.1 Conclusões

Ao longo deste trabalho fizemos uma análise que nos possibilitou uma melhor compreensão de equações de difusão para processos estocásticos, assim como das técnicas necessárias para sua aplicação.

Como primeiro grande resultado, estabelecemos as condições necessárias para a determinação do tipo específico de equação de difusão que descreverá o processo estocástico. Isto está ligado à forma como a distribuição de probabilidade de uma variável estocástica de retorno θ converge para a função delta de Dirac quando o intervalo de tempo Δt tende a zero. Para realizar este estudo, utilizamos um novo formalismo para a função característica associada a variável aleatória e ela é escrita em termos de uma função denominada função de Lévy $\omega(z; x, t, \Delta t)$. Esta função, analisada no limite $\Omega(z; x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega(\sigma_\theta z; x, t, \Delta t)$, mostrou-se como uma ferramenta de grande utilidade para esta análise, pois a sua forma específica determina o tipo de distribuição que está associada a variável θ .

Quando $\Omega(z; x, t) = 0$, a distribuição de probabilidade de θ será descrita por uma distribuição de Lévy estável que converge para um delta de Dirac quando Δt tende a zero. Isso significa que a densidade de probabilidade associada a θ é assintoticamente auto-similar com respeito à escala temporal. Desta forma, a equação de difusão terá a forma de uma equação

de Fokker-Planck; Quando $\Omega(z; x, t) \neq 0$, a distribuição de probabilidade de θ será uma distribuição de Lévy não-estável e da mesma forma convergirá para um delta de Dirac quando Δt tende a zero. Desta forma, a variável aleatória θ não é assintoticamente auto-similar com respeito à escala temporal Δt e a equação de difusão será uma equação de Kramers-Moyal. A validade destas afirmações estendem-se tanto ao estudo de variáveis estocásticas com função característica subjacente analítica quanto não-analítica.

A partir destes resultados, definimos um conjunto de medidas estatísticas interessantes para caracterização de processos estocásticos em séries temporais reais, aplicadas ao estudo de séries financeiras. Ilustramos isso com a análise de dados de taxas de câmbio de vários países e o índice S&P 500.

A análise destes dados mostra que a equação de difusão associada a estas séries financeiras é do tipo Kramers-Moyal e nem o retorno do preço e nem o retorno do logaritmo do preço são gaussianamente distribuídos. Entretanto, o regime gaussiano é assintoticamente alcançado de forma lenta. Encontramos então que modelos adequados para descrição de derivativos financeiros devem incluir tanto um processo de Wiener como um processo de salto.

Admitir a presença de saltos acabou por explicar a evolução temporal das distribuições dos retornos, depois de comparar as funções características de nossos modelos teóricos aos dados empíricos. Uma vantagem desta abordagem é o fato que a função característica é facilmente obtida no modelo e possui um formato elegante que pode ser facilmente comparado com funções características empíricas. Realizamos estes estudos através de dois modelos de difusão com salto:

1. Introduzimos um modelo de difusão geométrica com um ruído descrito por um processo de Wiener-salto. Este processo é descrito por uma função característica infinitamente divisível pertencente à classe de De Finetti. Adotamos um modelo de De Finetti não-linear para um melhor ajuste do modelo teórico com os dados empíricos. Nosso modelo

não-linear supera o modelo linear porque ele leva em conta, de uma maneira simples, as correlações não-lineares emergindo da soma das variáveis de retorno do logaritmo do preço. Do ponto de vista estatístico, nosso modelo de De Finetti não-linear pode ser visto como um tipo de generalização de um processo misto de Wiener e salto que é capaz de explicar as correlações existentes em dados reais.

2. Apresentamos um modelo de difusão não-geométrica, em que assumimos que a taxa de crescimento médio do retorno é uma função não-linear dada por $D(X)$ e que o processo estocástico é descrito pela soma de um processo de Wiener e um processo de salto. Podemos definir a função $D(X)$, obtendo uma nova variável na qual os retornos são não-gaussianos, mas convergem para uma gaussiana de um modo muito particular. A evolução temporal dos momentos estatísticos associados aos retornos das taxas cambiais depende fortemente do modo como a função $D(X)$ é especificada. A função $D(X)$ apropriada corresponde a um nova variável aleatória para a qual a maioria das correlações de longo alcance é eliminada. As evidências empíricas sugerem que vale a pena considerar o nosso modelo de difusão não-geométrica para modelar retornos de séries financeiras.

6.2 Perspectivas de Trabalho

Como estudado ao longo deste trabalho, em geral, as distribuições dos retornos do preço não possuem a mesma forma para intervalos de tempo Δt diferentes, o que implicaria diferentes probabilidades para um certo intervalo de confiança estabelecido em torno da média. A própria questão da estacionaridade da volatilidade é um problema para definição destes intervalos. Outro ponto importante é que diferentes ativos possuem distribuições de probabilidade muito distintas, implicando em uma análise de risco caso a caso.

De maneira geral, para todas as séries financeiras, os retornos tem um tempo muito longo

para convergirem para perto de uma gaussiana, implicando que uma análise gaussiana dos riscos só poderia ser feita para intervalos de tempo Δt muito grandes.

Sugerimos definir outra estratégia, na qual não usaríamos mais um intervalo de tempo fixo e, ao mesmo tempo, na análise de risco desta nova estratégia pudéssemos ter parâmetros estáveis no tempo e válidos para qualquer ativo financeiro. Uma condição importante para o estabelecimento de tal estratégia seria o fato das distribuições dos retornos convergirem “rapidamente” para uma distribuição de forma fixa: de preferência uma distribuição gaussiana.

Um candidato natural para parâmetro que substituiria o intervalo de tempo Δt é a seção de Levy, conforme estudada em [65]. Desta forma, poderemos ver como as distribuições dos retornos associados as seções de Levy “rapidamente” convergem para perto de uma gaussiana. Como perspectiva de trabalho sugerimos comparar esta estratégia baseada nas seções de Levy com a estratégia de análise de risco em intervalos de tempo fixo.

Referências Bibliográficas

- [1] H. RISKEN. *The Fokker-Planck Equation*. Springer-Verlag, 1984.
- [2] R. N. MANTEGNA and H. E. STANLEY. *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge University Press, 2000.
- [3] R. BROWN. A brief account of microscopical observations made in the months on june, july and august, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *Phil. Mag.*, 4:161, 1828.
- [4] N. WIENER. Differential-space. *J. Math. and Physics*, 2:131–174, 1923.
- [5] J. E. MOYAL. Stochastic processes and statistical physics. *Journal of Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 11:150–210, 1949.
- [6] N. G. VAN KAMPEN. *Stochastic processes in physics and chemistry*. North-Holland, Amsterdam, 1990.
- [7] W. PAULI. *Festschrift zum*, 60:30, 1928.
- [8] A. D. FOKKER. The median energy of rotating electrical dipoles in radiation fields. *Annalen der Physik*, 43:810–820, 1914.
- [9] M. PLANCK. *Ann. Physik*, 43:810, 1914.

-
- [10] H. A. KRAMERS. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions. *Physica*, 7, 7:284–304, 1940.
- [11] R. F. PAWULA. Approximation of the linear Boltzmann equation by the Fokker-Planck equation. *Physical Review*, 162:186–188, 1967.
- [12] H. RISKENL and Z. VOLLMER. *Physik*, B35:313, 1979.
- [13] T. D. FRANK. Kramers-Moyal expansion for stochastic differential equations with single and multiple delays: Applications to financial physics and neurophysics. *Physics Letters A*, 360:552–562, 2007.
- [14] S.A. EL-WAKIL and M. A. ZAHRAN. Fractional Fokker-Planck equation. *Chaos, Solitons and Fractals*, 11:791, 2000.
- [15] R. CONT and P. TANKOV. *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman and Hall-CRC Press, 2003.
- [16] S. DA SILVA, R. MATSUSHITA, I. GLÉRIA, A. FIGUEIREDO, and P. RATHIE. International finance, Lévy distributions and the econophysics of exchange rates. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 10:365–393, 2005.
- [17] P. SAMUELSON. *The Review of Economics and Statistics*, 36:387–389, 1954.
- [18] F. BLACK and M. SCHOLES. *The Journal of Political Economy*, 81:637–654, 1973.
- [19]
- [20] P. LÉVY. Théorie des erreurs. la loi de Gauss et les lois exceptionnelles. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 52:49–85, 1924.
- [21] H. STANLEY. *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*. Oxford University Press, 1971.

- [22] B. MANDELBROT. *J. Business*, 36:394–419, 1963.
- [23] F. GHASEMI, J. P. SAHIMI, R. FRIEDRICH, G. R. JAFARI, and M. R. T. RAHIMI. Markov analysis and Kramers-Moyal expansion of nonstationary stochastic processes with application to the fluctuations in the oil price. *Physical Review E*, 75:060102, 2007.
- [24] R. FRIEDRICH, J. PEINKE, and Ch. RENNER. How to quantify deterministic and random influences on the statistics of the foreign exchange market. *Physical Review Letters*, 84:5224, 2000.
- [25] A. LO and A. C. MACKINLAY. Stock market prices do not follow random walks: evidence from a simple specification test. *Rev. Fin. Stud.*, 1:41–66, 1988.
- [26] I. KOPONEN. Analytic approach to the problem of convergence of truncated Lévy flights towards the gaussian stochastic process. *Physical Review E*, 52:1197, 1995.
- [27] Y. AIT-SAHALIA. Disentangling diffusion from jumps. *Journal of Financial Economics*, 74:487, 2004.
- [28] O. E. BARNDORFF-NIELSEN and N. SHEPHARD. Econometrics of testing for jumps in financial economics using bipower variation. *Journal of Financial Econometrics*, 4:1, 2006.
- [29] O. E. BARNDORFF-NIELSEN and N. SHEPHARD. Power and bipower variation with stochastic volatility and jumps. *Journal of Financial Econometrics*, 2:1, 2004.
- [30] C. MANCINI. Non-parametric threshold estimation for models with stochastic diffusion coefficient and jumps. *Scandinavian Journal of Statistics*, 36:270, 2009.
- [31] R. C. MERTON. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3:125, 1976.

- [32] A. FIGUEIREDO, M. T. CASTRO, S. SILVA, and I. GLERIA. Jump Diffusion Models and the Evolution of Financial Prices. *Physics Letters A*, 375:3055–3061, 2011.
- [33] A. FIGUEIREDO, M. T. CASTRO, R. C. B. DA FONSECA, and I. GLERIA. Diffusion Equations and the Time Evolution of Foreign Exchange Rates. *Physics Letters A*, 377:1571–1581, 2013.
- [34] R. C. B. DA FONSECA, A. FIGUEIREDO, M. T. CASTRO, and F. M. MENDES. Generalized Ornstein-Uhlenbeck process by Doob's theorem and the time evolution of financial prices. *Physica A*, 392:1671–1680, 2013.
- [35] R. C. B. DA FONSECA and A. FIGUEIREDO. Generalização do processo de Ornstein-Uhlenbeck usando o teorema de Doob e aplicado em séries financeiras. Tese de Doutorado, Universidade de Brasília, 2012.
- [36] B. V. GNEDENKO. *A Teoria da Probabilidade*. Ciência Moderna, 2008.
- [37] P. ATHANASIOS. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw Hill Inc., 1965.
- [38] F. REIF. *Fundamentals of statistical and thermal physics*. McGraw Hill Book Company, 1965.
- [39] L. E. REICHL. *A modern course in statistical physics*. New York: Wiley-Interscience, 1998.
- [40] B. R. JAMES. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. impa, 1981.
- [41] A. FIGUEIREDO, I. GLERIA, R. MATSUSHITA, and S. SILVA. Autocorrelation as a source of truncated Lévy flights in foreign exchange rates. *Physica A*, 323:601–625, 2003.

- [42] A. FIGUEIREDO, I. GLERIA, R. MATSUSHITA, and S. SILVA. On the origins of truncated Lévy flights. *Physics Letters A*, 315:51–60, 2003.
- [43] D. DUGUÉ. *Oeuvres de Paul Lévy, Vol. III: Eléments Aléatoires*. Gauthiers-Villars, 1976.
- [44] M. T. CASTRO and A. FIGUEIREDO. Equações de difusão associadas a séries temporais estocásticas: Kramers-Moyal versus Fokker-Planck. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, 2009.
- [45] Y. AIT-SAHALIA. Telling from discrete data whether the underlying continuous-time model is a diffusion. *Journal of Finance*, 57:2075, 2002.
- [46] P. Ch. IVANOV, L. A. N. AMARAL, A. L. GOLDBERGER, S. HAVLIN, M. G. ROSENBLUM, Z. R. STRUZIK, and STANLEY H. E. Multifractality in human heartbeat dynamics. *Nature*, 399:461, 1999.
- [47] R. J. HAWKINS and B. R. FRIEDEN. Fisher information and equilibrium distributions in econophysics. *Physics Letters A*, 322:126, 2004.
- [48] D. O. CAJUEIRO and R. S. CAMARGO. Minority game with local interactions due to the presence of herding behavior. *Physics Letters A*, 355:280, 2006.
- [49] M. A. FUENTES, M. KUPERMAN, and J. R. IGLESIAS. Living in an irrational society: Wealth distribution with correlations between risk and expected profits. *Physica A*, 371:280, 2006.
- [50] B. H. HONG, K. E. LEE, and J. W. LEE. Power law in firms bankruptcy. *Physica Letters A*, 361:6, 2007.
- [51] R. MATSUSHITA, I. GLERIA, S. da SILVA, and A. FIGUEIREDO. Are pound and euro the same currency? *Physica Letters A*, 173:6, 2007.

- [52] T. ARAUJO and F. LOUÇÃ. The seismography of crashes in financial markets. *Physics Letters A*, 372:429, 2008.
- [53] D. O. CAJUEIRO and B. M. TABAK. Long-range dependence in interest rates and monetary policy. *Physics Letters A*, 372:181, 2008.
- [54] M. F. LAGUNA, G. ABRAMSON, S. RISAU-GUSMAN, and J. R. IGLESIAS. Do the right thing. *Journal of Statistical Mechanics*, page P03028, 2010.
- [55] R. N. MANTEGNA and H. E. STANLEY. Scaling behaviour in the dynamics of an economic index. *Nature*, 376:46, 1995.
- [56] L. C. MIRANDA and R. RIERA. Truncated Lévy walks and an emerging market economic index. *Physica A*, 297:509, 2001.
- [57] G. M. VISWANANTHAN, U. L. FULCO, M. L. LYRA, and M. SERVA. The origin of fat-tailed distributions in financial time series. *Physica A*, 329:273, 2003.
- [58] M. SERVA, U. L. FULCO, I. GLERIA, M. L. LYRA, F. PETRONI, and G. M. VISWANANTHAN. A Markov model of financial returns. *Physica A*, 363:393, 2006.
- [59] G. JUMARIE. Stock exchange dynamics involving both gaussian and poissonian white noises: approximate solution via a symbolic stochastic calculus. *Insurance: Mathematics and Economics*, 31:179, 2002.
- [60] K. J. SINGLETON. Estimation of affine asset pricing models using the empirical characteristic function. *Journal of Econometrics*, 102:111, 2001.
- [61] G. G. JIANG and J. L. KNIGHT. Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of Business and Economic Statistics*, 20:339, 2002.

-
- [62] B. ERAKER, M. S. JOHANNES, and N. POLSON. The impact of jumps in volatility and returns. *Journal of Finance*, 58:1269, 2003.
- [63] M. CHERNOV, A. R. GALLANT, E. GHYSELS, and G. T. TAUCHEN. Alternative models for stock price dynamics. *Journal of Econometrics*, 116:225, 2003.
- [64] P. CARR and L. WU. What type of process underlies options? a simple robust test. *Journal of Finance*, 58:2581, 2003.
- [65] A. FIGUEIREDO, I. GLERIA, R. MATSUSHITA, and S. DA SILVA. The Lévy sections theorem revisited. *J. Physics A: Math. Theo.*, 40:5783–5794, 2007.