UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

Espaço de Fock em Redes Fermiônicas e Simetrias de Lie em Processos de Difusão Não-Lineares

Érica de Mello Silva

Orientador: Prof. Ademir Eugênio de Santana

Co-orientador: Prof. Tarcísio Marciano da Rocha Filho

Tese apresentada à Universidade de Brasília como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Física.

Junho de 2008

Aos meus pais,
Ernandes e Dila,
e ao meu marido, Paulo

Agradecimentos

Durante meu doutoramento contei com o apoio de várias pessoas. Gostaria de expressar meus agradecimentos àquelas que foram essenciais.

Ao Prof. Ademir, meu orientador, pela serenidade e paciência com que conduziu este trabalho. Agradeço por seu incentivo constante e conhecimentos transmitidos, pela confiança ofertada a mim e pela amizade construída ao longo desses quatro anos.

Ao Prof. Marciano, cuja co-orientação em muito contribuiu para o êxito desta tese. Agradeço por sua atenção, pela convivência amiga e por seu bom humor, tão peculiar.

À Profa. Tânia Tomé, pela receptividade e atenção durante minha visita ao IF-USP e por seus esclarecimentos, que me auxiliaram no desenvolvimento deste trabalho.

Aos Professores Anníbal Figueiredo, Marcos Maia, Joaquim Soares Neto, Viktor Dodonov, Marco Amato, Hugo Nazareno e Amílcar Queiroz, pela atenção que sempre dispensaram a mim e pelas sugestões para este trabalho.

Aos colegas do IF-UnB pela amizade, em especial ao Marcelo, Chrystian, Patrícia, Cleilton, Ronni, Roberto, Fábio, Nanderson, Nelson, Abraão, Wesley, Simone e João.

Aos funcionários do IF-UnB, especialmente à Célia, por todo seu auxílio.

Ao sr. Nonato, responsável pelos apartamentos da Colina, por toda sua atenção.

À Universidade Federal do Tocantins pelo incentivo à qualificação de seus docentes. Em especial, agradeço aos meus colegas de Colegiado e alunos por todo o apoio recebido.

Ao Paulo, meu companheiro na vida e no trabalho, por seu incentivo, disponibilidade, amor e carinho, que me dão forças e alegria para seguir em frente.

Aos meus amados pais e ao meu irmão, Breno, pela forte presença em minha vida.

Agradeço a Deus por essa conquista.

Índice

Resumo

Neste trabalho estudamos classes de processos estocásticos através do uso de ferramentas fundadas em simetria: exploramos o conceito de representação do espaço de Fock para tratar redes de spin estocásticas e usamos métodos de simetria de Lie para obter equações de transporte generalizadas. Na representação número, desenvolvemos um formalismo para estudar redes fermiônicas, seguindo em paralelo aos métodos utilizados na descrição de bósons. Como aplicação, consideramos o modelo de Glauber linear em d dimensões e deduzimos a magnetização e a função de correlação por pares em termos dos operadores de criação e aniquilação. Com o objetivo de estender uma classe de equações de reação-difusão com coeficiente de difusão logarítmico, utilizamos os procedimentos de simetria de Lie. Partindo inicialmente de uma equação de reação-difusão com álgebra 4-dimensional conhecida, resolvemos o problema inverso, ou seja, encontramos todas as equações em uma dada classe que são invariantes por essa álgebra de simetria. A classe que consideramos primariamente é a de equações de Fokker-Planck não-lineres em que o termo de fonte é um monômio na função de distribuição. Também utilizamos esse procedimento a fim de obter classes de equações de difusão em meio poroso com dependência logarítmica no coeficiente de difusão e nos termos de fonte não-lineares. Adicionalmente, apresentamos soluções invariantes para casos particulares das classes de equações obtidas.

Abstract

In this work we address the problem of analyzing stochastic processes through founded symmetry tools: we have explored the concept of Fock space representation to deal with stochastic spin lattices and used the Lie symmetry machinery to obtain generalized transport equations. In the realm of Fock space, we have developed a formalism to treat stochastic fermion-like lattices, following in parallel with the counterpart approach for the case of bosons. As an application, we have considered the d-dimensional linear Glauber model, deriving its magnetization and two-point correlation function in terms of creation and annihilation operators. In order to enlarge a class of transport equations with a logarithmic inhomogeneity of the diffusion coefficient, we have used the symmetry approaches. Starting from a reaction-diffusion equation with 4-dimensional symmetry algebra, we solved the inverse problem, namely, we have found all equations in a given class that are invariant under this symmetry algebra. The class we primary considered is that of nonlinear Fokker-Planck equations for which the source term is a monomial in the distribution function. We have also applied this approach to find a class of porous medium-like equations in which the logarithmic behavior still holds for both diffusity and nonlinear source terms. Some invariant solutions for particular cases of these generalized transport equations are presented.

Capítulo 1

Introdução

A mecânica estatística de não-equilíbrio constitui um campo de pesquisa muito ativo atualmente [1, 2]. Motivos que justifiquem essa afirmativa não faltam, pois os fenômenos mais interessantes na Natureza ocorrem fora do equilíbrio: sistemas abertos (atravessados por fluxos de energia, entropia ou matéria) podem atingir estados estacionários que não sejam descritos pela mecânica estatística de equilíbrio. Além disso, é natural tentar estender o uso das técnicas que permitiram o entendimento já alcançado sobre os sistemas em equilíbrio, como grupo de renormalização, para os de não-equilíbrio.

Uma diferença crucial entre sistemas de equilíbrio e de não-equilíbrio refere-se à condição de balanço detalhado, que geralmente não é satisfeita fora do equilíbrio. O fato de a mecânica estatística de equilíbrio estudar estados estacionários de classes de sistemas cujas taxas de transição obedecem ao balanço detalhado lhe confere o formalismo dos *ensembles*. Isso permite contornar a dinâmica e tratar as propriedades estacionárias diretamente, o que não acontece no caso da mecânica estatística de não-equilíbrio, que demanda o estudo do problema dinâmico em seu todo [3].

Do ponto de vista microscópico, os modelos que descrevem sistemas fora do equilíbrio são usualmente definidos em termos de uma equação mestra, pois grande parte da física está contida nas taxas de transição. Já no nível de grão grosso, é uma equação diferencial parcial estocástica (uma equação de Langevin generalizada ou, de maneira alternativa, uma equação de Fokker-Planck) que descreve a dinâmica do sistema [4, 5].

Em sistemas fora do equilíbrio espera-se que, para tempos longos, a dinâmica seja governada por flutuações. Portanto, é preciso começar a descrição do sistema pela equação mestra para se ter domínio sobre essas flutuações. Por outro lado, as propriedades de escala geralmente são observadas apenas em regimes de tempos longos, fazendo necessário o uso de uma teoria de grão grosso que contemple a descrição das flutuações importantes presentes no sistema. Mas não existe um método que permita construir de maneira controlada o processo de grão grosso, pois o procedimento utilizado na determinação da correspondente equação de Langevin usualmente é baseado em argumentos gerais de simetria. Para sistemas com ruído é necessário ainda postular as autocorrelações deste. Além disso, se o ruído for multiplicativo, diferentes interpretações podem ser atribuídas ao processo estocástico descrito pela equação mestra original [6, 7, 8, 9].

A fim de contornar tais dificuldades, uma abordagem que tem sido recorrente na literatura é a do formalismo do espaço de Fock [10, 11], que permite mapear diversos processos estocásticos em uma representação de integral funcional. Tal mapeamento fornece a ação efetiva, que pode ser estudada através do uso de ferramentas da mecânica estatística de equilíbrio, como grupo de renormalização (ver [12] e referências). Outra maneira de tratar equações que descrevem processos estocásticos consiste no uso das técnicas de simetrias de Lie aplicadas a equações diferenciais [13, 14, 15, 16, 17]. Com essa abordagem é possível, dentre outras possibilidades, obter generalizações de classes de equações de transporte que incluam termos de arraste e de fonte não-lineares e que, portanto, tenham maior fidelidade na descrição de sistemas físicos complexos e fora do equilíbrio. O presente trabalho foi desenvolvido sob essas duas perspectivas.

Espaço de Fock e redes fermiônicas

A noção de espaço de Fock, ou representação número [18, 19], foi introduzida na física clássica por Schönberg [10] para descrever classes de equações lineares, como a equação de Liouville, no espaço de fase. Mais tarde Doi utilizou esse procedimento para estudar processos de reação-difusão [11], apontando um caminho para tratar equações estocásticas com métodos da teria quântica de campos. Neste caso, os operadores de campo de criação e de aniquilação descrevem, por exemplo, o surgimento de reagentes em reações químicas.

Essa teoria tem sido desenvolvida em várias direções [20], incluindo o trabalho de Martin, Siggia e Rose [21] que apresenta um formalismo funcional para a mecânica estatística de não-equilíbrio. Uma versão de integral de caminho para bósons foi proposta por Peliti [22], e esta foi mais tarde estendida e aplicada a diferentes sistemas [3, 23]. A maneira como os métodos baseados na representação número para análise de processos estocásticos têm sido apresentados induzem a pensar, num primeiro momento, que são desconexos entre si, gerando obstruções práticas que vêm sendo apontadas, por exemplo, por Grassberger e Scheunert [24] e Andersen [25] (uma revisão desse tópico pode ser encontrada em [20, 26]). Uma dessas dificuldades se deve ao fato de que a representação número tem sido utilizada em teorias quânticas e associada à indistinguibilidade das partículas subatômicas, um aspecto descrito pelas amplitudes de probabilidade. Porém, para sistemas clássicos, as amplitudes de probabilidade têm sido definidas em associação com uma generalização do teorema de Liouville [10, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41]. A natureza física e matemática desse formalismo também tem sido analizada através de representações de grupos de Lie [42], onde o espaço de Fock é considerado como o espaço de representação de simetrias. Nessa perspectiva, não aparece a constante de Planck "$\hbar$" no método, resultando em uma consistência plena com a física clássica e sem ambiguidades com a teoria quântica. Muito desses desenvolvimentos já foram feitos para bósons [12], restando o caso de redes do tipo fermiônicas a ser estudado em maiores detalhes.

É importante ressaltar que, no contexto de redes de spin, o método da representação número foi usado por Schultz, Mattis e Lieb para resolver analiticamente o modelo de Ising bidimensional [43]. Desde então, com a mesma perspectiva algébrica, vários trabalhos têm sido propostos [44] abordando, em particular, processos de adsorção [45, 46, 47] e o modelo de Glauber [48, 49, 50]. O esquema de operadores fermiônicos também foi aplicado recentemente em percolação direcionada [51] e no estudo da equação de Boltzman [52]. Portanto, acredita-se que seja importante avançar na sistematização da estrutura anti-simétrica do espaço de Fock, e é esse um dos nossos propósitos aqui. Seguimos os desenvolvimentos para o caso bosônico discutido, por exemplo, por Peliti [22], Grassberger e Scheunert [24] e Ali [53]. Para isso, introduzimos um operador de densidade para descrever o estado do sistema. Usando variáveis de Grassmann, quantidades conceituais, como o propagador escrito em termos de uma integral de caminho e a função geratriz de momentos, são obtidas. Aplicamos esse método na obtenção de grandezas que descrevem o modelo de Glauber linear d-dimensional [54].

O modelo de Glauber linear pertence à classe de universalidade do modelo do votante, que tem sido associado a diversos processos, como o processo de grão grosso crítico na ausência de tensão superficial [55], à cinética de reações catalíticas [56] e ao processo de aprendizado competitivo [57]. Recentemente, a validade do teorema de flutuação-dissipação e a ocorrência de um regime de envelhecimento foram atestadas para o modelo de Glauber linear [58]; esse modelo também descreve processos de reação catalítica de superfície [59]. Outro aspecto interessante é que, sendo um modelo não-trivial e solúvel, o modelo de Glauber linear pode ser útil para a verificação de propriedades e características de sistemas fora do equilíbrio [26, 54, 58, 60, 61].

No contexto do espaço de Fock, obtivemos uma expressão fechada para o Liouvilliano do modelo de Glauber linear em d dimensões e deduzimos a equação de evolução temporal para a magnetização e para a função de correlação, ambas definidas aqui através do operador número. Demonstramos a conexão entre os resultados obtidos com o presente formalismo e aqueles obtidos via operadores de spins [54]. Em termos das características da representação número, esse formalismo revela algumas propriedades novas e úteis a cálculos práticos. Os principais resultados foram obtidos de modo unificado com o caso bosônico e estão sintetizados em [62].

Simetrias de Lie e equações de transporte

Saindo da perspectiva microscópica para a de grão grosso, a equação de Fokker-Planck é uma equação de transporte que tem sido amplamente utilizada no estudo de processos estocásticos em diferentes contextos [63]. Muitos trabalhos têm sido realizados na tentativa de entender melhor a dinâmica de Fokker-Planck, incluindo métodos para obter, além de soluções, equações generalizadas a partir de determinadas simetrias. Entre os diversos procedimentos empregados, a análise de simetrias de Lie é frequentemente usada nesse tipo de problema, gerando equações de Fokker-Planck que possuem termos de arraste e difusão não triviais [64, 65, 66, 67, 68, 69, 70], simetrias de calibre [71] e termos não-lineares [72, 73]. No procedimento padrão para a generalização de equações de Fokker-Planck, um ingrediente central é a escolha de uma simetria inicial, que usualmente é considerada como a simetria de um conjunto mais restritivo de equações. Por exemplo, uma vez conhecido o grupo de simetria de uma equação de difusão, é possível utilizá-lo como simetria inicial para a dedução de uma equação de Fokker-Planck com termos de arraste e de fonte não-lineares.

Há alguns anos, uma equação de Fokker-Planck com termo de arraste logarítmico foi proposta para obter a distribuição do tamanho de partículas de metal formadas por processos de nucleação [74]. Mais recentemente, uma classe de equações de reação-difusão, com inomogeneidade logarítmica no coeficiente difusivo, foi apresentada [75]. Em outros contextos também é possível encontrar dependências logarítmicas como, por exemplo na função de mobilidade de esferas pesadas [76] e em processos de difusão quânticos caóticos [77]. Embora a presença de termos logarítmicos em equações de Fokker-Planck ainda seja pouco explorada, acredita-se que essa classe de equações possa ser útil na descrição de modelos com confinamento espacial [78]. É natural, portanto, questionar se é possível considerar uma classe de equações de Fokker-Planck com termos logarítmicos como candidatas para descrever sistemas confinados, como sistemas de elétrons em pontos e fios quânticos ou sistemas de quarks e glúons em cromodinâmica quântica. Esses resultados apontam para a necessidade de um estudo mais sistemático desse tipo de equação, e esse é um dos nossos propósitos aqui.

Neste trabalho, examinamos uma classe de equações de difusão e sua generalização para equações de Fokker-Planck com termos não-lineares, usando o procedimento de simetrias de Lie. Métodos algébricos computacionais [79] nos permitiram apresentar uma classe de álgebras de Lie para a equação a ser analizada, bem como algumas soluções associadas a simetrias específicas. Deduzimos, em particular, equações de Fokker-Planck com um termo de fonte não-linear [80]. A fim de estender nosso estudo, primariamente voltado para a dinâmica de Fokker-Planck, para uma classe de equações de transporte ainda mais geral, exploramos a classe de equações de difusão em meio poroso [81, 82], muito empregada na descrição de plasmas [83], dentre outras aplicações [84, 85, 86, 87, 88]. A partir da equação de difusão com coeficiente difusivo logarítmico, obtivemos equações de difusão generalizadas, com termos convectivos e de absorção [89, 90], e equações que descrevem processos de difusão rápida [91, 92].

Este programa demandou o uso intensivo de computação algébrica. Utilizamos algumas subrotinas do pacote SADE (*Symmetry Analysis of Differential Equations*) [79], desenvolvido em nosso grupo na Universidade de Brasília, para encontrar simetrias de Lie, manipular equações determinantes e obter soluções invariantes, cálculos intratáveis manualmente.

Objetivos gerais e organização da apresentação

Em suma, nesta tese nosso propósito primário é estudar classes de processos estocásticos utilizando ferramentas fundadas em simetria: exploramos a noção de espaço de Fock (representação número) na descrição de redes estocásticas fermiônicas e também utilizamos os métodos de simetrias de Lie aplicados a equações de transporte generalizadas. A apresentação do trabalho está organizada da seguinte maneira. No capítulo 2 tratamos do estudo de redes estocáticas de simetria fermiônica na representação número, e mostramos uma aplicação à dinâmica de Glauber linear. No capítulo 3 apresentamos uma breve revisão dos métodos de Lie próprios para serem aplicados a equações de transporte. No capítulo 4 mostramos uma discussão geral sobre equações diferenciais parabólicas, com ênfase na classe conhecida como equações de difusão em meio poroso que, pelo fato de abranger equações de transporte importantes como a equação de Fokker-Planck, forneceu motivação física para nossos resultados apresentados no capítulo 5. No quinto capítulo apresentamos as equações de transporte generalizadas encontradas a partir da imposição de certas simetrias, bem como soluções invariantes para alguns casos particulares. Nossas conclusões e perspectivas futuras são apresentadas no capítulo 6.

Capítulo 2

Espaço de Fock em redes fermiônicas e o modelo de Glauber linear

Neste capítulo apresentamos o estudo sobre aspectos de redes fermiônicas descritas na representação número, seguindo uma formulação que tem se mostrado vantajosa para tratar sistemas bosônicos de não-equilíbrio. Como aplicação do formalismo, consideramos quantidades físicas da dinâmica d-dimensional de Glauber linear, que é irreversível para $d \geq 2$. O capítulo está estruturado da seguinte maneira. Na seção 2.1, introduzimos o espaço de Hilbert e mostramos a formulação de integral de trajetória para redes de spin. Na seção 2.2, apresentamos a descrição do modelo de Glauber linear d-dimensional no espaço de Fock e deduzimos a magnetização e a função de correlação em termos do operador número. Este capítulo apresenta com mais detalhes os resultados publicados na referência [62].

2.1 Redes estocásticas fermiônicas

Nesta seção apresentamos um sistema de spins geral escrito na representação de Fock. Consideramos uma rede em que cada sítio esteja vazio ou ocupado por uma partícula. Esse tipo de rede é descrita por operadores fermiônicos. Além disso, as configurações do sistema serão caracterizadas por um conjunto de números de ocupação, denotados por $\{n_m, m = 1, ..., N\}$, com $n_m = 0$ ou 1, $\forall\ m$, descrevendo o m-ésimo sítio vazio ($n_m = 0$) ou ocupado ($n_m = 1$). O estado do sistema é dado por $\phi_n(t) = \phi(n_1, n_2, ..., n_N; t)$, que representa a probabilidade de ocorrência da configuração $n = \{n_1, n_2, ..., n_N\}$, e satisfaz à equação mestra

$$\partial_t \phi_n(t) = \sum_m (w_{nm}\phi_m(t) - w_{mn}\phi_n(t)) \ , \tag{2.1}$$

onde w_{nm} é a taxa de transição do estado ϕ_m para ϕ_n.

2.1.1 Especificações da rede de spin no espaço de Fock

Consideremos que o estado da rede seja descrito pelo operador de probabilidade $\widehat{\phi}$, definido no espaço de Hilbert ($\mathcal{H}$) e diagonal na representação número, ou seja, associamos $n \longrightarrow |n\rangle$ com $\widehat{\phi}|n\rangle = \phi_n|n\rangle$. Consideremos também que os observáveis da teoria são operadores Hermitianos tal que, para um observável qualquer $\widehat{A}$, temos $\widehat{A}|n\rangle = A_n|n\rangle$, onde A_n é um autovalor real de $\widehat{A}$ na base $|n\rangle$. A notação que será utilizada é tal que, para bósons, teremos $n = 0, 1, 2, \ldots$; além disso, por simplicidade, por enquanto vamos estabelecer as especificações para uma rede de um único sítio.

A normalização da base $|n\rangle$ e a relação de completeza são, respectivamente, dadas por

$$\langle m|n\rangle = n!\delta_{nm} \ , \quad 1 = \sum_n \frac{1}{n!}|n\rangle\langle n| \ . \tag{2.2}$$

O traço de um operador $\widehat{A}$ é

$$Tr\widehat{A} = \sum_n \frac{1}{n!}\langle n|\widehat{A}|n\rangle \ , \tag{2.3}$$

e o valor médio de $\widehat{A}$ em um estado descrito por $\widehat{\phi}$ é definido por

$$\langle\widehat{A}\rangle_\phi = Tr\ (\widehat{\phi}\widehat{A}) = \sum_n A_n\phi_n \ ,$$

correspondendo a uma quantidade física média usual A_n com probabilidade ϕ_n de ocorrer.

Introduzindo os vetores

$$|I\rangle = \sum_n |n\rangle \ , \quad |\overline{I}\rangle = \sum_n \frac{1}{n!}|n\rangle \ ,$$

vemos que o operador de probabilidade $\hat{\phi}$ leva aos vetores

$$
\begin{aligned}
|\overline{\phi}\rangle &= \widehat{\phi}|\overline{I}\rangle = \sum_n \frac{1}{n!}\phi_n|n\rangle \ , \\
|\phi\rangle &= \widehat{\phi}|I\rangle = \sum_n \phi_n|n\rangle \ ,
\end{aligned}
$$

que podem ser usados para descrever o estado do sistema. A partir dessas definições, obtemos o conjunto de propriedades apresentados na Tabela 1.

$\langle I\|I\rangle = \sum_{n,m}\langle m\|n\rangle = \sum_n n!$	$\langle\overline{I}\|\overline{I}\rangle = \sum_n \frac{1}{n!}$
$\langle n\|\overline{I}\rangle = 1 \ , \ \langle n\|I\rangle = n!$	$\langle 0\|I\rangle = \langle 0\|\overline{I}\rangle = 1$
$\langle\overline{I}\|I\rangle = \sum_{n,m}\frac{1}{n!}\langle m\|n\rangle = \sum_n \delta_{nn}$	$\langle\overline{\psi}\|\overline{\phi}\rangle = \sum_n \frac{1}{n!}\psi_n\phi_n$
$\langle\psi\|\phi\rangle = \sum_n n!\psi_n\phi_n$	$\langle\overline{\psi}\|\phi\rangle = \sum_n \psi_n\phi_n = \langle\psi\|\overline{\phi}\rangle$
$\phi_n = \frac{1}{n!}\langle n\|\phi\rangle$	$\phi_n = \langle n\|\overline{\phi}\rangle$

Tabela 1: Propriedades dos estados básicos.

Note que o valor médio de um operador arbitrário $\langle\widehat{O}\rangle = \langle\overline{I}|\widehat{O}|I\rangle$ é equivalente à operação do traço para operadores diagonais. Além disso, quando $\widehat{O} = \widehat{A}\widehat{\phi}$, temos

$$
\langle\overline{I}|\widehat{A}\widehat{\phi}|I\rangle = \langle\overline{I}|\widehat{A}|\phi\rangle = \sum_n A_n\phi_n = Tr\widehat{A}\widehat{\phi} \ .
$$

Por outro lado, a normalização da probabilidade é dada por

$$
\langle\overline{I}|\widehat{\phi}|I\rangle = \langle\overline{I}|\phi\rangle = \sum_n \phi_n = 1 \ .
$$

Em particular,

$$
\langle 0|\phi\rangle = \langle 0|\widehat{\phi}|I\rangle = \sum_n \phi_n\langle 0|n\rangle = \langle 0|\overline{\phi}\rangle = \phi_0 \ ,
$$

que é um resultado útil para estabelecer condições iniciais.

Os operadores de criação e destruição satisfazem às regras de anticomutação:

$$
\begin{aligned}
\{a, a\} &= \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0 \ , \\
\{a, a^\dagger\} &= 1 \ ,
\end{aligned}
$$

tal que

$$\begin{aligned}
a|n\rangle &= n|n-1\rangle \ , \\
a^\dagger|n\rangle &= |n+1\rangle \ , \\
\langle n|a &= \langle n+1| \ , \\
\langle n|a^\dagger &= \langle n-1|n
\end{aligned}$$

(em relação à definição usual, existe um fator de normalização diferente). O operador número é dado por

$$\widehat{N} = a^\dagger a, \quad \text{com } \widehat{N}|n\rangle = n|n\rangle \ , \quad n = 0, 1.$$

Em termos do operador $a^\dagger$, o vetor $|\overline{I}\rangle$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
|\overline{I}\rangle &= \sum_m n!|n\rangle = \sum_m \frac{1}{n!}(a^\dagger)^n|0\rangle \\
&= e^{a^\dagger}|0\rangle \ .
\end{aligned}$$

Isso sugere que a definição do estado coerente $|\overline{\alpha}\rangle = e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle$, sendo que, no caso de férmions, α é um número de Grassmann; no caso de bósons, α é um número c complexo.

Considerando primeiro o caso de bósons, os operadores $a^\dagger$ e a satisfazem às relações de comutação $[a, a^\dagger] = 1$. É fácil mostrar que

$$|\overline{\alpha}\rangle|_{\alpha=1} = |\overline{I}\rangle \ , \quad a|\overline{\alpha}\rangle = \alpha|\overline{\alpha}\rangle \quad \text{e} \quad \partial_\alpha^k|\overline{\alpha}\rangle|_{\alpha=1} = (a^\dagger)^k|\overline{I}\rangle \ .$$

Definindo a função geradora de momentos, $G(\phi, \alpha) = \langle\overline{\alpha}|\phi\rangle$, o k-ésimo momento binomial (ou fatorial), $n_k(\phi)$ [1, 24, 26], é dado por

$$n_k(\phi) = \partial_\alpha^k G(\phi, \alpha)|_{\alpha=1} = \langle\overline{I}|a^k|\phi\rangle = \langle n(n-1)\cdots(n-k+1)\rangle|_\phi \ .$$

Outra maneira de expressar esse resultado é observando que $n_k(\phi) = \langle n|a^k|\overline{\alpha}\rangle|_{\alpha=1}$. Em particular, para o operador número $\widehat{N} = a^\dagger a$, temos

$$n_1(\phi) = \langle\overline{I}|a^\dagger a|\phi\rangle = \langle\overline{I}|a|\phi\rangle = \langle n|a|\overline{\alpha}\rangle|_{\alpha=1} \ .$$

Para obter quantidades similares para redes fermiônicas, precisamos introduzir as variáveis de Grassmann [93] nesse contexto.

2.1.2 Variáveis de Grassmann

A formulação de integral de caminho é sensível à natureza da partícula. Isso porque, no caso bosônico, a integral de trajetória soma sobre funções “comutantes”, uma vez que o resultado do produto de duas ou mais dessas funções independe da ordem em que elas figuram no produto. Já no caso fermiônico, as funções são anticomutativas, pois são escritas em termos de geradores de uma álgebra não-comutativa [94]. Apresentamos a seguir propriedades básicas da álgebra não-comutativa de Grassmann e sua relação com um sistema de férmions.

Notação, derivada e integral

Em relação à notação utilizada, o conjunto de variáveis de Grassmann é representado por $G = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$, os operadores fermiônicos de criação e destruição são, respectivamente, a e $a^\dagger$, e os números complexos são denotados por $\{c\}$. As variáveis de Grassmann satisfazem às seguintes propriedades:

(i) $\alpha\beta = -\beta\alpha$;

(ii) $\alpha(\beta + c\gamma) = \alpha\beta + c\alpha\gamma$, $\alpha a = -a\alpha$, $\alpha a^\dagger = -a^\dagger\alpha$.

O conjugado complexo das variáveis de Grassmann é um mapeamento antilinear ao conjugado complexo de números complexos, de modo que

$$(\alpha + ca\beta a^\dagger\gamma^*)^\dagger = \alpha^* + \gamma a\beta^* a^\dagger c^* \ ,$$

onde α e α^* são considerados independentes.

Uma função arbitrária de uma variável de Grassmann, $f(\alpha)$, é descrita na forma $f(\alpha) = f_{00} + f_{01}\alpha$, onde $f_{00}, f_{01} \in \mathcal{C}$. A integração é definida por

$$\int \alpha d\alpha = 1, \quad \int d\alpha = 0 \ . \tag{2.4}$$

As equações (2.4) são consistentes e satisfatórias, especialmente para o uso prático em funções exponenciais (a invariância por translação também justifica essas definições). É simples mostrar que as operações de derivação e integração para uma função $f(\alpha)$ qualquer são idênticas, ou seja

$$\frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} = f_{01} \quad \text{e} \quad \int f(\alpha) d\alpha = f_{01} \ .$$

Nesse contexto, as operações de derivação e integração não são definidas como processos limites e nem possuem interpretação geométrica. Para a função exponencial $e^{a\alpha} = 1 + a\alpha$, temos

$$\frac{d}{d\alpha} e^{a\alpha} = a \ , \ \ a \in \mathcal{C} \ ,$$

e

$$\int e^{a\alpha} d\alpha = \int (1 + a\alpha) d\alpha = a \ .$$

Note que para $e^{-a\alpha^*\alpha} = 1 - a\alpha^*\alpha$, também obtemos

$$\begin{aligned} \int e^{-a\alpha^*\alpha} d\alpha^* d\alpha &= \int (1 - a\alpha^*\alpha) d\alpha^* d\alpha \\ &= a \int d\alpha^* \alpha^* \int d\alpha \ \alpha = a \ . \end{aligned} \tag{2.5}$$

O resultado (2.5) é a contrapartida da integral Gaussiana, fundamental para o formalismo de integral de caminho bosônico.

Base e produto escalar

O produto escalar envolvendo duas funções de Grassmann $f(\alpha)$ e $g(\alpha)$ é definido por

$$(f, g) = \int (f(\alpha^*))^* g(\alpha^*) e^{-\alpha^*\alpha} d\alpha^* d\alpha \ , \tag{2.6}$$

onde $(f(\alpha^*))^* = f_{00}^* + f_{01}^*\alpha$. A definição (2.6) abrange o caso de bósons e funciona como um produto escalar positivo.

Uma base é dada por $\psi_0 = 1$ e $\psi_1 = \alpha^*$ tal que $(\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij}$. Essa base fornece uma representação matricial para os operadores a e $a^\dagger$. Para ver isso, note que

$$\alpha^*\psi_0 = \psi_1; \quad \alpha^*\psi_1 = 0; \quad \frac{d}{d\alpha^*}\psi_0 = 0; \quad \frac{d}{d\alpha^*}\psi_1 = \psi_0 \ .$$

Assim, temos que $a = \partial/\partial\alpha^*$ e $a^\dagger = \alpha^*$. Como resultado, os elementos de matriz $(\psi_i, a\psi_j) = a_{ij}$ e $(\psi_i, a^\dagger\psi_j) = a^\dagger_{ij}$ são tais que

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{2.7}$$

Operadores

Em termos de a e $a^\dagger$, podemos escrever um operador geral $A(a^\dagger, a)$, no ordenamento normal, como

$$\begin{aligned} A(a^\dagger, a) &= \mathcal{A}_{00} + \mathcal{A}_{10}a^\dagger + \mathcal{A}_{01}a + \mathcal{A}_{11}a^\dagger a \\ &= \sum_{n,m=0} \mathcal{A}_{nm}(a^\dagger)^n(a)^m \ , \end{aligned}$$

onde $\mathcal{A}_{nm} \in \mathcal{C}$. Na representação de variáveis de Grassmann, podemos definir duas funções associadas ao operador A:

- *Símbolo Normal* (*núcleo normal*):

$$\mathcal{A}(a^\dagger, a) = \mathcal{A}(\alpha^*, \alpha) = \sum_{n,m} \mathcal{A}_{nm}(\alpha^*)^n(\alpha)^m \ , \ n, m = 0, 1 \tag{2.8}$$

- *Núcleo*:

$$A(a^\dagger, a) \to A(\alpha^*, \alpha) = \sum_{n,m} A_{n,m}(\alpha^*)^n(\alpha)^m \ , \tag{2.9}$$

  onde $A_{n,m} = (\psi_n|A\psi_m)$ é a matriz de elementos do operador A na base (ψ_n, ψ_m).

Também é importante destacar as seguintes propriedades:

(*i*) $A(\alpha^*, \alpha) = e^{\alpha^*\alpha}\mathcal{A}(\alpha^*, \alpha)$;

(*ii*) $\langle\alpha^*|A|\psi\rangle \equiv (A\psi)(\alpha^*) = \int A(\alpha^*, \beta)\psi(\beta)e^{-\beta^*\beta}d\beta^*d\beta$,
onde $(A\psi)(\alpha^*)$ corresponde à ação de A sobre um vetor (função) ψ ;

(*iii*) Produto de dois operadores:
$(A_1A_2)(\alpha^*, \alpha) = \int A_1(\alpha^*, \beta)A_2(\beta^*, \alpha)e^{-\beta^*\beta}d\beta^*d\beta$,

levando em conta que
$\int \beta^m \beta^{*n} e^{-\beta^*\beta} d\beta^* d\beta = \delta_{nm}$.

Utilizando as propriedades (i) e (ii), é possível mostrar que a generalização da propriedade (iii) para o produto de N operadores A é dada por

$$\begin{aligned} A^N(\alpha^*,\alpha) &= A^N(\beta_0^*,\beta_N) \\ &= \int \prod_{i=1}^{N} e^{\beta_{i-1}^*\beta_i} \mathcal{A}(\beta_{i-1}^*,\beta_i) \prod_{j=1}^{N-1} e^{-\beta_j^*\beta_j} d\beta_j^* d\beta_j \ . \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.1.3 Integral de trajetória para redes fermiônicas

De posse das definições apresentadas na seção anterior, vamos construir o formalismo de integral de trajetória para uma equação estocástica como (2.1), com solução formal dada por

$$|\phi(t)\rangle = U(t)|\phi_0\rangle \ . \quad (2.11)$$

Primeiro faremos uso da fórmula de Trotter [22] para escrever o operador de evolução temporal $U(t) = e^{t\mathcal{L}}$ como

$$\begin{aligned} U(t) = e^{t\mathcal{L}} &= \lim_{N\to\infty} \left[1 + \frac{t}{N}\mathcal{L}\right]^N \\ &= \lim_{N\to\infty} [A(t)]^N \ . \end{aligned}$$

A partir da expressão (2.10), que descreve produto de N operadores A, temos

$$U(\alpha^*,\alpha;t) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=1}^{N} e^{\beta_{i-1}^*\beta_i} \mathcal{A}(\beta_{i-1}^*,\beta_i) \prod_{j=1}^{N-1} e^{-\beta_j^*\beta_j} d\beta_j^* d\beta_j \ , \quad (2.12)$$

onde $\mathcal{A}(\beta_{i-1}^*,\beta_i) = 1 + \tau_N \mathcal{L}(\beta_{i-1}^*,\beta_i)$, com $\tau_N = t/N \ll 1$.

Considerando que $(1+\tau_N\mathcal{L}) \simeq e^{\tau_N\mathcal{L}}$, levamos $\mathcal{A} \sim \exp(\tau_N\mathcal{L})$ em (2.12) e obtemos

$$U(\alpha^*,\alpha;t) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=1}^{N} \exp\left(\beta_{i-1}^*\beta_i + \tau_N \mathcal{L}(\beta_{i-1}^*,\beta_i)\right) \prod_{j=1}^{N-1} e^{-\beta_j^*\beta_j} d\beta_j^* d\beta_j$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int \exp\left(\sum_{i-1}^{N-1}[(\beta^*_{i-1}-\beta_i)\beta_i+\tau_N\mathcal{L}(\beta^*_{i-1},\beta_i)]+\beta^*_{N-1}\beta_N+\tau_N\mathcal{L}(\beta^*_{N-1},\beta_N)\right)$$
$$\times\prod_{j=1}^{N-1}d\beta^*_j d\beta_j$$
$$= \lim_{N\to\infty}\int \exp\left(\tau_N\sum_{i-1}^{N-1}\left[\frac{(\beta^*_{i-1}-\beta_i)}{\tau_N}\beta_i+\mathcal{L}(\beta^*_{i-1},\beta_i)\right]+\beta^*_{N-1}\beta_N+\tau_N\mathcal{L}(\beta^*_{N-1},\beta_N)\right)$$
$$\times\prod_{j=1}^{N-1}d\beta^*_j d\beta_j\ .$$

Usando a notação padrão para funcionais

$$\int\prod_{j=1}^{N-1}d\beta^*_j d\beta_j\ldots \quad\to\quad \int\mathcal{D}\beta^*\mathcal{D}\beta\ldots\ ,$$
$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N-1}\tau_k[\ldots f_k] \quad\to\quad \int_0^t dt'[\ldots f(t')]\ ,$$

e tomando $\beta_i \to \beta(t')$, $\beta_N = \alpha \equiv \beta(t)$, $\beta^*_{N-1} \to \beta^*(t)$, $\lim_{N\to\infty}\tau_N\mathcal{L}(\beta^*_{N-1},\beta_N) = 0$, chegamos à seguinte expressão para a o propagador (2.12):

$$U(\alpha,\alpha^*;t) = \int\mathcal{D}\beta^*\mathcal{D}\beta\exp\left(\int_0^t dt'[\beta^*(t')\partial_{t'}\beta(t')+\mathcal{L}(\beta^*(t'),\beta(t'))]+\beta^*(t)\alpha\right)\ . \qquad (2.13)$$

Este propagador é a contrapartida de férmions ao encontrado por Peliti [22] na representação de integral funcional para bósons.

2.1.4 Função geradora de momentos

Vamos agora definir a função geradora de momentos em termos das variáveis de Grassmann. Para isso, introduzimos o estado $|\bar{\alpha}\rangle = e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle$, que se assemelha a um estado coerente de Glauber. De fato, no contexto de variáveis de Grassmann, $e^{\alpha a}$ funciona como um operador de deslocamento:

$$e^{\alpha a}ae^{\alpha a^\dagger} = a-\alpha\ .$$

Entretanto, é preciso ter cuidado na introdução do espaço dual. O operador de deslocamento unitário fermiônico é definido por [95]

$$D_a(\alpha) = \exp(a^\dagger\alpha-\alpha^*a)\ , \qquad (2.14)$$

tal que

$$D_a(\alpha)aD_a^\dagger(\alpha) = a - \alpha \ ,$$

com o estado coerente fermiônico dado por

$$|\alpha\rangle = D_a(\alpha)|0\rangle_a \ \text{ e } \ a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \ .$$

Podemos então provar que o estado coerente dual é definido como

$$\langle\alpha| = \langle 0|D_a^\dagger(\alpha), \ \text{com} \ \ D_a^\dagger(\alpha) = D_a^{-1}(\alpha) \ .$$

Consequentemente,

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \exp(\alpha^*\beta - \frac{1}{2}\alpha^*\alpha - \frac{1}{2}\beta^*\beta) \ \text{ e } \ \langle\alpha|a^\dagger(\alpha) = \langle\alpha|\alpha^* \ .$$

O projetor de $|\alpha\rangle$ na base número é

$$|\alpha\rangle = e^{-\alpha^*\alpha/2}\sum_n(-\alpha)^n|n\rangle \ , \tag{2.15}$$

e então

$$\langle n|\alpha\rangle = \exp(-\alpha^*\alpha/2)(\alpha)^n \ .$$

Considerando α como sendo variável de Grassmann real, e então $\alpha^* = \alpha$ em $D^\dagger(\alpha)$, temos

$$e^{\alpha a^\dagger - a\alpha}|0\rangle = (1 + \alpha a^\dagger - a\alpha)|0\rangle = e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle = |\bar{\alpha}\rangle \ , \tag{2.16}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}|\bar{\alpha}\rangle = \frac{\partial}{\partial\alpha}(1 + \alpha a^\dagger)|0\rangle = a^\dagger e^{a^\dagger}|0\rangle \equiv a^\dagger|\bar{I}\rangle \ . \tag{2.17}$$

Portanto, a função geradora de momentos pode ser escrita de maneira similar ao caso de bósons, ou seja, $G(\phi,\alpha) = \langle\overline{\alpha}|\phi\rangle$.

2.1.5 O Liouvilliano

Vamos agora considerar uma rede de N sítios, onde os operadores de criação e destruição anticomutam num mesmo sítio mas comutam para sítios distintos. Este aspecto resulta nos operadores chamados *Paulions*, definidos pelas seguintes regras mistas [24]

$$\{c_i, c_i^\dagger\} = 1 \ ,$$
$$\{c_i, c_i\} = \{c_i^\dagger, c_i^\dagger\} = 0 \ ,$$
$$[c_i, c_j] = [c_i^\dagger, c_j^\dagger] = [c_i, c_j^\dagger] = 0 \ , \ \ i \neq j \ .$$

Esses operadores podem ser usados para representar as matrizes de Pauli,

$$\begin{aligned} \sigma_1^j &= c_j^\dagger + c_j \ , \\ \sigma_2^j &= i(c_j - c_j^\dagger) \ , \\ \sigma_3^j &= 2 - c_j^\dagger c_j \ . \end{aligned}$$

A representação número para um sistema de spins pode ser perfeitamente obtida pela associação de Paulions com operadores fermiônicos. A relação entre Paulions e operadores fermiônicos é dada pela fórmula de Jordan-Wigner [20],

$$c_j = a_j \exp(i\pi \sum_{m<j} a_m^\dagger a_m) = a_j \exp(i\pi \sum_{m<j} c_m^\dagger c_m) \ . \tag{2.18}$$

Outro resultado útil que pode ser imediatamente obtido é

$$c_j^\dagger c_j = a_j^\dagger a_j \ ,$$
$$c_{j\pm1}^\dagger c_j = a_{j\pm1}^\dagger a_j \ ,$$
$$\exp(2\pi i c_j^\dagger c_j) = \exp(2\pi i a_j^\dagger a_j) \ .$$

Podemos escrever a equação mestra utilizando o resultado

$$\sum_n \phi_n(t)|n\rangle = \widehat{\phi}(t)|I\rangle = |\phi(t)\rangle \ . \tag{2.19}$$

Assim, temos

$$\partial_t|\phi(t)\rangle = \sum_n \partial_t\phi_n(t)|n\rangle = \sum_{n,m}\{w(n,m)\phi_m(t)|n\rangle - w(m,n)\phi_n(t)|n\rangle\} \ . \tag{2.20}$$

Por outro lado, se $\sum_n \partial_t\phi_n(t)|n\rangle = \mathcal{L}|\phi(t)\rangle$, a equação mestra pode ser escrita como

$$\partial_t|\phi(t)\rangle = \mathcal{L}|\phi(t)\rangle \ , \tag{2.21}$$

onde $\mathcal{L}$ é o Liouvilliano do sistema de Paulions (ou de férmions). Na próxima seção aplicaremos esse formalismo no modelo de Glauber linear.

2.2 O modelo de Glauber linear

O modelo de Glauber linear descreve a dinâmica de um sistema interagente de spins do tipo Ising em que, a cada unidade de tempo discretizado, ocorre inversão de estado apenas para o m-ésimo spin da rede. Em duas ou mais dimensões, a condição de balanço detalhado não é satisfeita para esse modelo, fato que o insere na classe de modelos irreversíveis com simetria de inversão para $d \geq 2$ (em uma dimensão, o modelo de Glauber linear recai na dinâmica reversível de Glauber [1]). Sua correspondente equação mestra é

$$\partial_t\phi(\sigma,t) = \sum_{m=1}^{N}\{\omega_m(\sigma^m)\phi_m(\sigma^m,t) - \omega_m(\sigma)\phi(\sigma,t)\} \ , \tag{2.22}$$

onde $\sigma = (\sigma_1,\, \sigma_2, ..., \sigma_m, ..., \sigma_N)$ representa a configuração do sistema. Se ocorre inversão de estado para o m-ésimo spin, então $\sigma^m = (\sigma_1,\, \sigma_2, ..., -\sigma_{m,} ..., \sigma_N)$. A taxa de inversão (ou taxa de transição) do sistema é definida por

$$\omega_m(\sigma) = \frac{\alpha}{2}\left[1 - \frac{\lambda}{2d}\sigma_m\sum_\beta \sigma_{m+\beta}\right] \ , \tag{2.23}$$

onde a soma se estende sobre todos os $2d$ primeiros vizinhos do m-ésimo sítio, α é um parâmetro que descreve a escala temporal e λ é um parâmetro definido no intervalo $(0,1]$.

2.2.1 Liouvilliano para a dinânima de Glauber linear

Com o objetivo de escrever as equações (2.22) e (2.23) na representação do espaço de Fock, definimos o vetor $|\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_N\rangle = |\sigma_1\rangle \otimes |\sigma_2\rangle \otimes ... \otimes |\sigma_N\rangle$, onde $\langle\sigma_m|\sigma_n\rangle = \delta_{nm}$, e o operador de spin $\widehat{\sigma}_m$ que é diagonal, ou seja, para o m-ésimo sítio,

$$\widehat{\sigma}_m|\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m, ..., \sigma_N\rangle = \sigma_m|\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_N\rangle \ . \tag{2.24}$$

Além disso, definimos um operador de inversão de estados (*spin-flip*), $\widehat{F}_m$, por

$$\widehat{F}_m|\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m, ..., \sigma_N\rangle = |\sigma_1, \sigma_2, ..., -\sigma_m, ..., \sigma_N\rangle \ . \tag{2.25}$$

O operador de probabilidade $\hat{\phi}(t)$ é definido aqui por

$$\widehat{\phi}(\widehat{\sigma}, t)|\sigma\rangle = \phi(\sigma, t)|\sigma\rangle \ .$$

Introduzindo $|\phi(t)\rangle = \widehat{\phi}(t)|I\rangle$, com $|I\rangle = \sum_\sigma |\sigma\rangle$, obtemos

$$|\phi(t)\rangle = \widehat{\phi}(t) \sum_\sigma |\sigma\rangle = \sum_\sigma \phi(\sigma, t)|\sigma\rangle \ . \tag{2.26}$$

Nessa base a taxa de transição também é descrita por um operador diagonal, ou seja,

$$\widehat{w}_j(\widehat{\sigma})|\sigma\rangle = w_j(\sigma)|\sigma\rangle \ . \tag{2.27}$$

Multiplicando a equação (2.22) por $|\sigma\rangle$ e somando sobre todoas as configurações possíveis, escrevemos

$$\sum_\sigma \partial_t\phi(\sigma, t)|\sigma\rangle = \partial_t|\phi(t)\rangle \tag{2.28}$$

$$= \sum_m \{\widehat{F}_m\widehat{w}_m(\widehat{\sigma}_m) - \widehat{w}_m(\widehat{\sigma}_m)\}|\phi(t)\rangle \ . \tag{2.29}$$

Como consequência, temos a equação mestra escrita como $\partial_t|\phi(t)\rangle = \mathcal{L}|\phi(t)\rangle$ em que $\mathcal{L}$, o Liouvilliano, é dado por

$$\mathcal{L} = \sum_m (\widehat{F}_m - 1)\widehat{w}_m(\widehat{\sigma}_m) \ , \tag{2.30}$$

com taxa de inversão

$$\widehat{w}_m(\widehat{\sigma}_m) = \frac{\alpha}{2}\left[1 - \frac{\lambda}{2d}\widehat{\sigma}_m \sum_{\beta} \widehat{\sigma}_{m+\beta}\right] \ . \tag{2.31}$$

Vamos agora tratar explicitamente o modelo de Glauber linear definido por (2.22) na base de Fock. A relação entre os vetores de base do tipo $|\sigma\rangle$ e $|n\rangle$ é definida da seguinte maneira. Usando $1 = \sum_n \frac{1}{n!}|n\rangle\langle n|$, escrevemos

$$|\sigma\rangle = \sum_n \frac{1}{n!}|n\rangle\langle n|\sigma\rangle \ . \tag{2.32}$$

Como $\widehat{\sigma}|\sigma\rangle = \sigma|\sigma\rangle$, com $\sigma = \pm 1$, temos

$$\widehat{\sigma}\sum_n \frac{1}{n!}|n\rangle\langle n|\sigma\rangle = \sigma \sum_n \frac{1}{n!}|n\rangle\langle n|\sigma\rangle \ . \tag{2.33}$$

Multiplicando a equação (2.33) por $\langle m|$, obtemos

$$\langle m|\widehat{\sigma}\sum_n \frac{1}{n!}|n\rangle\langle n|\sigma\rangle = \sigma \sum_n \frac{1}{n!}\langle m|n\rangle\langle n|\sigma\rangle = \sigma\langle n|\sigma\rangle \ , \tag{2.34}$$

que resulta em

$$\langle n|\sigma\rangle = \delta_{2n-1,\sigma} \quad \text{e} \quad \widehat{\sigma}_m = 2c_m^{\dagger}c_m - 1 \ .$$

Da expressão (2.32), temos que

$$\begin{aligned} |\sigma = 1\rangle &= |n = 1\rangle \ , \\ |\sigma = -1\rangle &= |n = 0\rangle \ , \end{aligned}$$

enquanto que, de $\widehat{\sigma}_m = 2\widehat{n}_m - 1$, segue que

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}|n = 1\rangle &= 1|1\rangle \\ \widehat{\sigma}|n = 0\rangle &= -1|0\rangle \ . \end{aligned}$$

Desse modo, temos

$$
\begin{aligned}
\widehat{w}_m(c,t) &= \frac{\alpha}{2}\left[1-\frac{\lambda}{2d}(2c_m^\dagger c_m-1)\sum_\beta(2c_{m+\beta}^\dagger c_{m+\beta}-1)\right] \\
&= \frac{\alpha}{2}\left[1-\frac{2\lambda}{d}\left(\widehat{n}_m\sum_\beta \widehat{n}_{m+\beta}-\widehat{n}_m-\frac{1}{2}\sum_\beta \widehat{n}_{m+\beta}+\frac{1}{2}\right)\right] \ , \qquad (2.35)
\end{aligned}
$$

onde $\widehat{n}_m = c_m^\dagger c_m$ é o operador número. O operador de inversão de estado (*spin flip*) $\widehat{F}_m$, é dado por

$$
\widehat{F}_m = c_m + c_m^\dagger \ . \qquad (2.36)
$$

Levando (2.35) e (2.36) em (2.30), encontramos o Liouvilliano em termos do operador número,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \sum_m(\widehat{F}_m-1)\widehat{w}_m = \frac{\alpha}{2}\sum_m(c_m+c_m^\dagger-1) \\
&\times\left[1-\frac{2\lambda}{d}\left(\widehat{n}_m\sum_\beta \widehat{n}_{m+\beta}-\widehat{n}_m-\frac{1}{2}\sum_\beta \widehat{n}_{m+\beta}+\frac{1}{2}\right)\right] \ . \qquad (2.37)
\end{aligned}
$$

A seguir usaremos este Liouvilliano para obter as equações de movimento da magnetização e da função de correlação.

2.2.2 Magnetização e função de correlação

Uma vez que temos $\widehat{n}_m = c_m^\dagger c_m = \frac{1}{2}(\widehat{\sigma}_m + 1)$, quantidades físicas relevantes podem ser obtidas pelo cálculo do valor esperado de $\widehat{n}_m$ e de seus produtos. Inicialmente, consideremos $\langle\widehat{n}_m\rangle$, que é escrito como

$$
\langle\widehat{n}_m\rangle = \langle\overline{I}|\widehat{n}_m|\phi(t)\rangle \ , \qquad (2.38)
$$

e, de (2.21), encontramos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\langle\widehat{n}_m\rangle &= \langle\overline{I}|\widehat{n}_m\frac{\partial}{\partial t}|\phi(t)\rangle = \langle\overline{I}|c_m^\dagger c_m\mathcal{L}|\phi(t)\rangle \\
&= \langle\overline{I}|c_m^\dagger c_m\sum_n(\widehat{F}_n-1)\widehat{w}_n|\phi(t)\rangle \ ,
\end{aligned}
$$

tal que, para $m \neq n$, temos a seguinte relação de comutação

$$[c_m^\dagger c_m, (\widehat{F}_n - 1)\widehat{w}_n] = 0 \ . \tag{2.39}$$

Assim, escrevemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\langle \widehat{n}_m \rangle &= \langle \overline{I}| c_m^\dagger c_m (\widehat{F}_m - 1)\widehat{w}_m |\phi(t)\rangle \\
&= \langle \overline{I}| c_m^\dagger \widehat{w}_m |\phi(t)\rangle - \langle \overline{I}| c_m^\dagger c_m \widehat{w}_m |\phi(t)\rangle \ .
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Usando as propriedades

$$\begin{aligned}
&\langle \overline{I}| c_m^\dagger = (\langle 0| + \langle 1|) c_m^\dagger = \langle 0| \ , \\
&\langle 0| c_m^\dagger c_m = 0 \ , \\
&\langle 1| c_m^\dagger c_m = \langle 1| \ , \\
&\langle \overline{I}| c_m^\dagger c_m = (\langle 0| + \langle 1|) c_m^\dagger c_m = \langle 1| \ ,
\end{aligned} \tag{2.41}$$

reescrevemos os r-ésimos termos da equação (2.40) como

$$\begin{aligned}
\langle \overline{I}| c_m^\dagger \widehat{w}_m |\phi(t)\rangle &= \langle 0| \widehat{w}_m |\phi(t)\rangle \\
&= \langle 0| \frac{\alpha}{2} \left[1 + \frac{\lambda}{d} \left(\sum_\beta \widehat{n}_{m+\beta} - d \right) \right] |\phi(t)\rangle \ ,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \overline{I}| c_m^\dagger c_m \widehat{w}_m |\phi(t)\rangle &= \langle 1| \widehat{w}_m |\phi(t)\rangle \\
&= \langle 1| \frac{\alpha}{2} \left[1 - \frac{\lambda}{d} \left(\sum_\beta \widehat{n}_{m+\beta} - d \right) \right] |\phi(t)\rangle \ .
\end{aligned}$$

Portanto, a expressão (2.40) fica dada por

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\langle \widehat{n}_m \rangle &= \langle 0| \left[1 + \frac{\lambda}{d} \left(\sum_\beta \widehat{n}_{m+\beta} - d \right) \right] |\phi(t)\rangle - \langle 1| \left[1 - \frac{\lambda}{d} \left(\sum_\beta \widehat{n}_{m+\beta} - d \right) \right] |\phi(t)\rangle \\
&= (\langle 0| - \langle 1|)\, |\phi(t)\rangle + (\langle 0| + \langle 1|) \left[\frac{\lambda}{d} \left(\sum_\beta \widehat{n}_{m+\beta} - d \right) \right] |\phi(t)\rangle \ ,
\end{aligned}$$

ou

$$\frac{2}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\langle\widehat{n}_m\rangle = -\langle\overline{I}|2\widehat{n}_m - 1|\phi(t)\rangle + \frac{\lambda}{d}\langle\overline{I}|\sum_\beta \widehat{n}_{m+\beta} - d|\phi(t)\rangle \ , \tag{2.42}$$

onde usamos o fato de que $\langle 0| - \langle 1| = -\langle\overline{I}|(2\widehat{n}_m - 1)$. Finalmente, obtemos

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\langle\widehat{n}_m\rangle = -\langle\widehat{n}_m\rangle + \frac{\lambda}{2d}\sum_\beta\langle\widehat{n}_{m+\beta}\rangle + \frac{1-\lambda}{2} \ . \tag{2.43}$$

A conexão dessa expressão com a equação de evolução para a magnetização, $\langle\widehat{\sigma}_m\rangle$, é obtida considerando que $\widehat{\sigma}_m = 2\widehat{n}_m - 1$. Então, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\langle\widehat{\sigma}_m\rangle &= -\frac{1}{2}\langle\widehat{\sigma}_m + 1\rangle + \frac{\lambda}{4d}\sum_\beta\langle\widehat{\sigma}_{m+\beta} + 1\rangle + \frac{1-\lambda}{2} \\ &= -\frac{1}{2}\langle\widehat{\sigma}_m\rangle + \frac{\lambda}{4d}\sum_\beta\langle\widehat{\sigma}_{m+\beta}\rangle \ ,\end{aligned}$$

que leva à conhecida equação para a magnetização do modelo de Glauber linear d-dimensional [54]

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\langle\widehat{\sigma}_m\rangle = -\langle\widehat{\sigma}_m\rangle + \frac{\lambda}{2d}\sum_\beta\langle\widehat{\sigma}_{m+\beta}\rangle \ . \tag{2.44}$$

Um procedimento análogo pode ser usado para obter a equação de evolução temporal para a função de correlação, $\langle\widehat{n}_m\widehat{n}_n\rangle$. Começamos com

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\langle\widehat{n}_m\widehat{n}_n\rangle &= \langle\overline{I}|\widehat{n}_m\widehat{n}_n\frac{\partial}{\partial t}|\phi(t)\rangle \\ &= \langle\overline{I}|c_m^\dagger c_m c_n^\dagger c_n\sum_r(\widehat{F}_r - 1)\widehat{w}_r|\phi(t)\rangle \\ &= \langle\overline{I}|\sum_r(\widehat{F}_r - 1)\widehat{w}_r c_m^\dagger c_m c_n^\dagger c_n|\phi(t)\rangle \ .\end{aligned}$$

Para $r \neq m, n$, temos

$$\langle\overline{I}|\sum_{r\neq m,n}(\widehat{F}_r - 1) = \sum_{r\neq m,n}(\langle 0| + \langle 1|)(c_r^\dagger + c_r - 1) = 0 \ , \tag{2.45}$$

logo

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\widehat{n}_m\widehat{n}_n\rangle = \langle\overline{I}|c_m^\dagger c_m c_n^\dagger c_n(\widehat{F}_m - 1)\widehat{w}_m|\phi(t)\rangle + \langle\overline{I}|c_m^\dagger c_m c_n^\dagger c_n(\widehat{F}_n - 1)\widehat{w}_n|\phi(t)\rangle \ . \tag{2.46}$$

Levando em conta a equação (2.39) e as relações de comutação e anticomutação para Paulions, os r-ésimos termos de (2.46) são tais que

$$\begin{aligned}
\langle\overline{I}|c_m^\dagger c_m c_n^\dagger c_n(\widehat{F}_m-1)\widehat{w}_m|\phi(t)\rangle &= \langle\overline{I}|c_m^\dagger c_m(c_m^\dagger+c_m-1)\widehat{w}_m c_n^\dagger c_n|\phi(t)\rangle \\
&= \langle\overline{I}|c_m^\dagger\widehat{w}_m\widehat{n}_n|\phi(t)\rangle-\langle\overline{I}|c_m^\dagger c_m^\dagger c_m\widehat{w}_m\widehat{n}_n|\phi(t)\rangle \\
&\quad -\langle\overline{I}|c_m^\dagger c_m\widehat{w}_m\widehat{n}_n|\phi(t)\rangle \\
&= \langle 0|\widehat{w}_m\widehat{n}_n|\phi(t)\rangle-\langle 1|\widehat{w}_m\widehat{n}_n|\phi(t)\rangle\ ,
\end{aligned} \tag{2.47}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle\overline{I}|c_m^\dagger c_m c_n^\dagger c_n(\widehat{F}_n-1)\widehat{w}_n|\phi(t)\rangle &= \langle\overline{I}|c_n^\dagger c_n(c_n^\dagger+c_n-1)\widehat{w}_n c_m^\dagger c_m|\phi(t)\rangle \\
&= \langle\overline{I}|c_n^\dagger\widehat{w}_n\widehat{n}_m|\phi(t)\rangle-\langle\overline{I}|c_n^\dagger c_n^\dagger c_n\widehat{w}_n\widehat{n}_m|\phi(t)\rangle \\
&\quad -\langle\overline{I}|c_n^\dagger c_n\widehat{w}_n\widehat{n}_m|\phi(t)\rangle \\
&= \langle 0|\widehat{w}_n\widehat{n}_m|\phi(t)\rangle-\langle 1|\widehat{w}_n\widehat{n}_m|\phi(t)\rangle\ .
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Usando as propriedades dadas em (2.41), os r-ésimos termos da expressão (2.47) são dados por

$$\langle 0|\widehat{w}_m\widehat{n}_n|\phi(t)\rangle=\langle 0|\frac{\alpha}{2}\left[1+\frac{\lambda}{d}\left(\sum_\beta\widehat{n}_{m+\beta}-d\right)\right]\widehat{n}_n|\phi(t)\rangle\ , \tag{2.49}$$

e

$$\langle 1|\widehat{w}_m\widehat{n}_n|\phi(t)\rangle=\langle 1|\frac{\alpha}{2}\left[1-\frac{\lambda}{d}\left(\sum_\beta\widehat{n}_{m+\beta}-d\right)\right]\widehat{n}_n|\phi(t)\rangle\ . \tag{2.50}$$

Resultados similares são obtidos para os r-ésimos termos de (2.48). Considerando que

$$\langle 0|-\langle 1|=-\langle\overline{I}|(2\widehat{n}_m-1)\ ,$$

a equação (2.46) resulta em

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\langle\widehat{n}_m\widehat{n}_n\rangle=-2\langle\widehat{n}_m\widehat{n}_n\rangle+\frac{\lambda}{2d}\sum_\beta[\langle\widehat{n}_m\widehat{n}_{n+\beta}\rangle+\langle\widehat{n}_n\widehat{n}_{m+\beta}\rangle]+\frac{1-\lambda}{2}(\langle\widehat{n}_m\rangle+\langle\widehat{n}_n\rangle)\ . \tag{2.51}$$

Como $\widehat{\sigma}_m = 2\widehat{n}_m - 1$ e, considerando ainda que

$$\begin{aligned}\langle\widehat{\sigma}_m\widehat{\sigma}_n\rangle &= \langle(2\widehat{n}_m - 1)(2\widehat{n}_n - 1)\rangle \\ &= 4\langle\widehat{n}_m\widehat{n}_n\rangle - 2\langle\widehat{n}_m\rangle - 2\langle\widehat{n}_n\rangle + 1 \ ,\end{aligned} \tag{2.52}$$

calculamos $\frac{\partial}{\partial t}\langle\widehat{\sigma}_m\widehat{\sigma}_n\rangle$. Da equação (2.43), escrevemos

$$\begin{aligned}\frac{4}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\langle\widehat{n}_m\widehat{n}_n\rangle &= \frac{2}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\langle\widehat{n}_m\rangle + \frac{2}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\langle\widehat{n}_n\rangle \\ &-8\langle\widehat{n}_m\widehat{n}_n\rangle + 4\langle\widehat{n}_m\rangle + 4\langle\widehat{n}_n\rangle - 2 \\ &+\frac{\lambda}{2d}\sum_\beta[4\langle\widehat{n}_m\widehat{n}_{n+\beta}\rangle + 4\langle\widehat{n}_n\widehat{n}_{m+\beta}\rangle \\ &-2\langle\widehat{n}_{n+\beta}\rangle - 2\langle\widehat{n}_{m+\beta}\rangle - 2\langle\widehat{n}_m\rangle - 2\langle\widehat{n}_n\rangle + 2] \ ,\end{aligned}$$

que leva a [54]

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\langle\widehat{\sigma}_m\widehat{\sigma}_n\rangle = -2\langle\widehat{\sigma}_m\widehat{\sigma}_n\rangle + \frac{\lambda}{2d}\sum_\beta[\langle\widehat{\sigma}_m\widehat{\sigma}_{n+\beta}\rangle + \langle\widehat{\sigma}_n\widehat{\sigma}_{m+\beta}\rangle] \ . \tag{2.53}$$

Note que as equações (2.43) e (2.51) fornecem uma maneira alternativa para se estudar as propriedades físicas da dinâmica de Glauber linear (ou não-linear), explorada no contexto do espaço de Fock. Em particular, as médias $\langle\widehat{n}_m\rangle$ e $\langle\widehat{n}_m\widehat{n}_n\rangle$ podem ser associadas diretamente com o propagador no limite contínuo.

Capítulo 3

Simetrias de Lie e Equações Diferenciais

Este capítulo apresenta uma revisão dos principais aspectos dos métodos de grupos de simetria de Lie aplicados a equações diferenciais, tendo em vista o estudo de equações de transporte que faremos no capítulo 5. Esta revisão é baseada nas referências [13, 14, 15, 16, 17], e segue especialmente [17]. A estrutura do capítulo é a seguinte. Na seção 3.1, apresentamos os conceitos de grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro. A seção 3.2 mostra os conceitos de transformações infinitesimais e seus desdobramentos. A seção 3.3 traz a definição de prolongações e prolongações infinitesimais. Na seção 3.4, tratamos dos grupos de transformação a r-parâmetros e de álgebras de Lie. Por fim, na seção 3.5, apresentamos aspectos relacionados à invariância de equações diferenciais parciais, soluções invariantes e sistema de equações determinantes.

3.1 Grupo de transformações de Lie

Antes de definir grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, é conveniente apresentar os conceitos de grupos e de grupo de transformações.

3.1.1 Grupo

Considere $\mathcal{G}$ um conjunto de elementos $\mathcal{G} = \{a, b, \ldots\}$.

Definição 3.1.1.1 *$\mathcal{G}$ é grupo se existe uma lei de composição ϕ que satisfaz aos axiomas:*

(i) *Completeza. Para quaisquer elementos a e $b \in \mathcal{G}$, $\phi(a,b)$ é um elemento de $\mathcal{G}$.*

(ii) *Associatividade. Para quaisquer elementos $a, b, c \in \mathcal{G}$, $\phi(a, \phi(b,c)) = \phi(\phi(a,b), c)$.*

(iii) *Identidade. Existe um único elemento de identidade e, $e \in \mathcal{G}$, tal que, para qualquer elemento a de $\mathcal{G}$, $\phi(a,e) = \phi(e,a) = a$.*

(iv) *Inverso. Para qualquer elemento $a \in \mathcal{G}$ existe um único elemento inverso $a^{-1} \in \mathcal{G}$ tal que $\phi(a, a^{-1}) = \phi(a^{-1}, a) = e$.*

Definição 3.1.1.2 *Um grupo $\mathcal{G}$ é dito Abeliano se $\phi(a,b) = \phi(b,a)$ for válido para todos os elementos $a, b \in \mathcal{G}$.*

Definição 3.1.1.3 *Um subgrupo de $\mathcal{G}$ é um grupo formado por elementos de $\mathcal{G}$, com a mesma lei de composição ϕ.*

3.1.2 Grupo de Transformações

Definição 3.1.2.1 *Seja $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$, numa região $D \subset \mathbf{R}^{\mathrm{n}}$. O conjunto de transformações $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}; \varepsilon)$, para cada $\mathbf{x} \in D$ e $\varepsilon \in S$, $S \subset \mathbf{R}$, com $\phi(\varepsilon, \delta)$ definindo uma lei de composição dos parâmetros ε e δ em S, forma um grupo de transformações a 1-parâmetro em D se:*

(i) *Para cada ε em S as transformações forem 1-1 em D (e então, $\tilde{\mathbf{x}} \in D$).*

(ii) *A lei de composição ϕ e S formarem um grupo $\mathcal{G}$.*

(iii) *Para cada $\mathbf{x} \in D$, $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$ quando $\varepsilon = \varepsilon_0$ corresponde à identidade e, ou seja, $\mathbf{X}(\mathbf{x}; \varepsilon_0) = \mathbf{x}$.*

(iv) *Se $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}; \varepsilon)$, $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{X}(\tilde{\mathbf{x}}; \delta)$, então $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{X}(\tilde{\mathbf{x}}; \phi(\varepsilon, \delta))$.*

3.1.3 Grupo de Transformações de Lie a 1-Parâmetro

Definição 3.1.3.1 *Para que um grupo $\mathcal{G}$ de transformações a 1-parâmetro seja um grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, $\mathcal{G}$ deve satisfazer aos axiomas da Definição*

3.1.2.1 e também aos seguintes:

(*v*) *ε é um parâmetro contínuo, ou seja, S é um intervalo de* $\mathbf{R}$. *Sem perda de generalidade, ε corresponde ao elemento de identidade e.*

(*vi*) $\mathbf{X}$ *é irrestritamente diferenciável em relação a* $\mathbf{x}$ *em D e é uma função analítica de ε em S.*

(*vii*) $\phi(\varepsilon, \delta)$ *é uma função analítica de ε e δ, para $\varepsilon \in S$ e $\delta \in S$.*

3.2 Transformações Infinitesimais

Considere um grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro,

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}; \varepsilon) \ , \tag{3.1}$$

com a identidade $\varepsilon = 0$ e lei de composição ϕ. Expandindo (3.1) em torno de $\varepsilon = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} + \varepsilon \left(\left.\frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x}; \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \right) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \left(\left.\frac{\partial^2 \mathbf{X}(\mathbf{x}; \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} \right) + \ldots \\
&= \mathbf{x} + \varepsilon \left(\left.\frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x}; \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \ . \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Seja

$$\xi(\mathbf{x}) = \left.\frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x}; \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} . \tag{3.3}$$

A transformação $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \varepsilon\xi(\mathbf{x})$ corresponde a uma *transformação infinitesimal* do grupo de transformações de Lie (3.1).

3.2.1 Primeiro Teorema Fundamental de Lie

O seguinte lema será útil:

Lemma 3.2.1.1 *O grupo de transformações a 1-parâmetro de Lie* (*3.1*) *satisfaz a condição*

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}; \varepsilon + \Delta\varepsilon) = \mathbf{X}(\mathbf{X}(\mathbf{x}; \varepsilon); \phi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \Delta\varepsilon)) \ . \tag{3.4}$$

Teorema 3.2.1.1 (Primeiro Teorema Fundamental de Lie.) *A parametrização $\tau(\varepsilon)$ existe e é tal que o grupo de transformações de Lie (3.1) equivale à solução de um problema de valor inicial para um sistema de EDO's de primeira ordem dado por*

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{d\tau} = \xi(\tilde{\mathbf{x}}) \ , \tag{3.5}$$

com

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \quad \textit{quando} \quad \tau = 0 \ . \tag{3.6}$$

Em particular,

$$\tau(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} \Gamma(\varepsilon')d\varepsilon', \tag{3.7}$$

onde

$$\Gamma(\varepsilon) = \left.\frac{\partial\phi(a,b)}{\partial b}\right|_{(a,b)=(\varepsilon^{-1},\varepsilon)} \quad e \quad \Gamma(0) = 1 \ . \tag{3.8}$$

(ε^{-1} denota o inverso de ε).

O Primeiro Teorema Fundamental de Lie mostra que as transformações infinitesimais contêm a informação essencial para determinar o grupo de transformações a 1-parâmetro de Lie. Uma vez que o sistema de EDO's de primeira ordem é invariante sob translações em τ, é possível reparametrizar um dado grupo em termos de um parâmetro τ tal que, para valores τ_1 e τ_2, a lei de composição seja $\phi(\tau_1, \tau_2) = \tau_1 + \tau_2$. Esse teorema também mostra que um grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro (3.1) define um fluxo estacionário dado pelas equações (3.5)-(3.6), e ainda que qualquer fluxo estacionário (3.5)-(3.6) define um grupo de transformações a 1-parâmetro de Lie.

3.2.2 Geradores Infinitesimais

De acordo com o Primeiro Teorema Fundamental de Lie, sem perda de generalidade, assumimos que um grupo de transformações a 1-parâmetro (ε) de Lie é parametrizado de modo que sua lei de composição é dada por $\phi(a, b) = a + b$, e então $\varepsilon^{-1} = -\varepsilon$ e $\Gamma(\varepsilon) = 1$.

Sendo assim, em termos dos infinitesimais $\xi(\mathbf{x})$, o grupo de transformações infinitesimais a 1-parâmetro de Lie (3.1) é dado por

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{d\varepsilon} = \xi(\tilde{\mathbf{x}}) \ , \tag{3.9}$$

com

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \quad \text{para} \quad \varepsilon = 0 \ . \tag{3.10}$$

Definição 3.2.2.1 *O gerador infinitesimal do grupo de transformações a 1-parâmetro de Lie (3.1) é o operador*

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \xi(\mathbf{x}) \cdot \bigtriangledown = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \ , \tag{3.11}$$

onde $\bigtriangledown$ *é o operador gradiente*

$$\bigtriangledown = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \ . \tag{3.12}$$

O teorema a seguir mostra que o uso do gerador infinitesimal (3.11) leva a um algorítimo para o cálculo da solução explícita do problema de valor inicial (3.9)-(3.10).

Teorema 3.2.2.1 *O grupo de transformações a 1-parâmetro de Lie (3.1) é equivalente a*

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} &= \mathrm{e}^{\varepsilon \mathrm{X}} \mathbf{x} \\ &= \left[1 + \varepsilon \mathrm{X} + \tfrac{1}{2} \varepsilon^2 \mathrm{X}^2 \right] \mathbf{x} + \ldots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \mathrm{X}^k \mathbf{x} \ , \end{aligned} \tag{3.13}$$

onde o operador $\mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathbf{x})$ *é definido por* (3.11) *e* $\mathrm{X}^k = \mathrm{X}^k(\mathbf{x})$ *é dado por* $\mathrm{X}^k = \mathrm{X}\mathrm{X}^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$. *Em particular,* $\mathrm{X}^k F(\mathbf{x})$ *é a função obtida ao se aplicar o operador* X *na função* $\mathrm{X}^{k-1} F(\mathbf{x})$, $k = 1, 2, \ldots$, *com* $\mathrm{X}^0 F(\mathbf{x}) \equiv F(\mathbf{x})$.

Assim, vemos que existem dois caminhos para encontrar explicitamente o grupo de transformações a 1-parâmetro de Lie:

- Expressando o grupo em termos de uma série de potências (3.13), conhecidas como *séries de Lie*, obtidas a partir do gerador infinitesimal (3.11) correspondente à transformação infinitesimal;
- Resolvendo o problema de valor inicial dado pela equações (3.9)-(3.10), encontrando explicitamente a solução geral do sistema de EDO's de primeira ordem (3.9).

O seguinte corolário resulta do Teorema 3.2.2.1:

Corolário 3.2.2.1 *Se $F(\mathbf{x})$ for irrestritamente diferenciável temos que, para um grupo de transformações a 1-parâmetro de Lie (3.1), com gerador infinitesimal (3.11),*

$$F(\tilde{\mathbf{x}}) = F(\mathrm{e}^{\varepsilon \mathrm{X}}\mathbf{x}) = \mathrm{e}^{\varepsilon \mathrm{X}} F(\mathbf{x}) \ . \tag{3.14}$$

3.2.3 Funções Invariantes

Definição 3.2.3.1 *Uma função irrestritamente diferenciável $F(\mathbf{x})$ é invariante sob o grupo de transformações de Lie se e somente se, para todo grupo de transformações (3.1),*

$$F(\tilde{\mathbf{x}}) \equiv F(\mathbf{x}) \ . \tag{3.15}$$

Se $F(\mathbf{x})$ é um invariante de (3.1), $F(\mathbf{x})$ é também invariante sob (3.1).

Teorema 3.2.3.1 *$F(\mathbf{x})$ é invariante sob um grupo de transformações de Lie (3.1) se e somente se*

$$\mathrm{X}F(\mathbf{x}) \equiv 0 \ . \tag{3.16}$$

Teorema 3.2.3.2 *Para um grupo de transformações de Lie (3.1), a identidade*

$$F(\tilde{\mathbf{x}}) \equiv F(\mathbf{x}) + \varepsilon \tag{3.17}$$

é válida se e somente se $F(\mathbf{x})$ é tal que

$$\mathrm{X}F(\mathbf{x}) \equiv 1 \ . \tag{3.18}$$

3.2.4 Coordenadas canônicas

Suponha que a seguinte mudança de coordenadas, 1-1 e diferenciável continuamente em algum domínio apropriado,

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}(\mathbf{x}) = (y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}), \ldots, y_n(\mathbf{x})) \ , \tag{3.19}$$

seja feita. Para o grupo de transformações de Lie (3.1), o gerador infinitesimal (3.11) em relação às coordenadas x $= (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ passa a ser o gerador infinitesimal

$$\mathrm{Y} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_i} \ , \tag{3.20}$$

com relação às coordenadas $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ definidas em (3.19). Portanto, é necessário que Y = X para se obter o mesmo grupo de ação. Então o infinitesimal é escrito como

$$\eta(\mathbf{y}) = (\eta_1(\mathbf{y}), \eta_2(\mathbf{y}), \ldots, \eta_n(\mathbf{y})) = \mathrm{Y}\mathbf{y} \ , \tag{3.21}$$

onde

$$\eta_j(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial y_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \mathbf{X} y_j \ , \quad j = 1, 2, \ldots, n \ . \tag{3.22}$$

Teorema 3.2.4.1 *Em relação às coordenadas (3.19), o grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro (3.1) passa a ser*

$$\tilde{\mathbf{y}} = e^{\varepsilon Y} \mathbf{y} \ . \tag{3.23}$$

Definição 3.2.4.1 *A mudança de coordenadas (3.19) define um conjunto de coordenadas canônicas para um grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro (3.1) se, em termos dessas coordenadas, o grupo (3.1) tornar-se*

$$\tilde{y}_i = y_i \ , \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \ , \tag{3.24}$$

$$\tilde{y}_n = y_n + \varepsilon \ . \tag{3.25}$$

Teorema 3.2.4.2 *Para todo grupo de transformações de Lie (3.1), existe um conjunto de coordenadas canônicas $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ tal que (3.19) é equivalente a (3.24)-(3.25).*

Do Teorema 3.2.3.2, temos que

$$\tilde{y}_n = y_n(\tilde{\mathbf{x}}) = y_n(\mathbf{x}) + \varepsilon \tag{3.26}$$

se e somente se

$$\mathbf{X}y_n \equiv 1 \ . \tag{3.27}$$

Portanto, $y_n(\mathbf{x})$ é definido por alguma solução particular $\nu(\mathbf{x})$ da equação diferencial parcial de primeira ordem não-homogênea

$$\mathrm{X}\nu(\mathbf{x}) = \xi_1(\mathbf{x})\frac{\partial \nu}{\partial x_1} + \xi_2(\mathbf{x})\frac{\partial \nu}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n(\mathbf{x})\frac{\partial \nu}{\partial x_n} = 1 \tag{3.28}$$

que é resolvida a partir de alguma solução particular do correspondente sistema de $n+1$ EDO's características

$$\frac{d\nu}{dt} = 1 \ , \qquad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \xi(\mathbf{x}) \ . \tag{3.29}$$

Teorema 3.2.4.3 *Em termos das coordenadas canônicas* $\mathbf{y} = (y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}), \ldots, y_n(\mathbf{x}))$, *o gerador infinitesimal do grupo de transformações a 1-parâmetro de Lie* (*3.1*) *é dado por*

$$Y = \frac{\partial}{\partial y_n} \ . \tag{3.30}$$

3.3 Transformações estendidas (*prolongações*) (e transformações infinitesimais estendidas)

Um grupo de transformações a 1-parâmetro de Lie (3.1) atuando no espaço de variáveis dependentes e independentes é naturalmente estendido (prolongado) para um grupo de transformações a 1-parâmetro de Lie atuando num espaço ampliado, *espaço de jato*, que inclui todas as derivadas das variáveis dependentes acima de uma ordem fixada. Para tanto, é necessário requerer que, sob a ação do grupo, haja preservação das relações de derivação ou, de maneira equivalente, que haja preservação das condições de contato que conectam as derivadas de ordem mais alta. Este requerimento leva a uma única prolongação do grupo de ação para qualquer espaço de jato. Consequentemente, os grupos de transformação a 1-parâmetro de Lie prolongados são totamente caracterizados por seus infinitesimais.

3.3.1 Prolongações

Definição 3.3.1.1 *Um grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro é um grupo de transformações da forma*

$$
\begin{aligned}
\tilde{x} &= X(x, u; \varepsilon) \ , && (3.31)\\
\tilde{u} &= U(x, u; \varepsilon) \ , && (3.32)
\end{aligned}
$$

atuando no espaço de $n + m$ variáveis

$$
\begin{aligned}
x &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) \ , && (3.33)\\
u &= u(u^1, u^2, \ldots, u^m) \ , && (3.34)
\end{aligned}
$$

em que x representa n variáveis independentes e u representa m variáveis dependentes.

Um grupo de transformações por ponto de Lie, como definido nas expressões (3.31)-(3.32), admitido por um sistema S de equações diferenciais, mapeia qualquer solução $u = \Theta(x)$ de S numa família de soluções a 1-parâmetro $u = \phi(x; \varepsilon)$ de S. De maneira equivalente, o grupo (3.31)-(3.32) deixa S invariante, ou seja, S é inalterável em termos das variáveis transformadas (3.31)-(3.32) para qualquer solução $u = \Theta(x)$ de S.

Seja ∂u o conjunto das nm coordenadas correspondentes a todas as derivadas de primeira ordem de u em relação a x:

$$\partial u = \left(\frac{\partial u^1}{\partial x_1}, \frac{\partial u^1}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u^1}{\partial x_n}, \frac{\partial u^2}{\partial x_1}, \frac{\partial u^2}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u^2}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial u^m}{\partial x_1}, \frac{\partial u^m}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u^m}{\partial x_n} \right) \ . \tag{3.35}$$

Em geral, para $k \geq 1$, $\partial^k u$ representa o conjunto de coordenadas

$$u^\mu_{i_1, i_2, \ldots, i_k} = \frac{\partial^k u^\mu}{\partial_{x_{i_1}} \partial_{x_{i_2}} \ldots \partial_{x_{i_k}}} \ ,$$

com $\mu = 1, 2, \ldots, m$ e $i_j = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, k$, correspondendo a todas as derivadas parciais de k-ésima ordem de u em relação a x. Então as transformações infinitesimais (3.31)-(3.32) são prolongadas para transformações infinitesimais atuando no espaço $(x, u, \partial u, \ldots, \partial^l u)$, $l = 1, 2, \ldots, k$.

3.3.2 Prolongações: uma variável dependente e n variáveis independentes

No estudo das propriedades de invariância de uma EDO de ordem k com uma variável dependente u e n variáveis independentes $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, precisamos encontrar as extensões (prolongações) das transformações no espaço (x, u) para o espaço de jato $(x, u, \partial u, \ldots, \partial^k u)$, onde $\partial^k u$ representam as componentes de todas as derivadas parciais de k-ésima ordem de u em relação a x.

Primeiro, consideremos as prolongações de uma transformação por ponto qualquer, que não necessariamente seja um grupo de transformações,

$$
\begin{aligned}
x' &= X(x,u) \ , && (3.36)\\
u' &= U(x,u) \ . && (3.37)
\end{aligned}
$$

As transformações (3.36)-(3.37) são do tipo 1-1 em algum domínio D no espaço (x, u), com funções $X(x, u)$ e $U(x, u)$ diferenciáveis k vezes em D. Além disso, as condições de contato são preservadas, ou seja,

$$
\begin{aligned}
du &= \partial u \, dx \ , && (3.38)\\
&\vdots \\
d\,\partial^{k-1}u &= \partial^k u \, dx \ , && (3.39)
\end{aligned}
$$

em algum domínio D do espaço $(x, u, \partial u, \ldots, \partial^k u)$ se e somente se

$$
\begin{aligned}
du' &= \partial u' \, dx' \ , && (3.40)\\
&\vdots \\
d\,\partial^{k-1}u' &= \partial^k u' \, dx' \ , && (3.41)
\end{aligned}
$$

no correspondente domínio D' do espaço $(x', u', \partial u', \ldots, \partial^k u')$. As condições de contato são denotadas por

$$
u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \ , \qquad u'_i = \frac{\partial u'}{\partial x'_i} = \frac{\partial U}{\partial X_i} \ , \qquad \text{etc}
$$

(e um somatório sobre um índice repetido está implícito). As condições (3.38)-(3.39) são dadas pelo conjunto de equações[1]

$$
\begin{aligned}
du &= u_j \, dx_j \ , \\
du_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} &= u_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} j} dx_j \ , \quad i_l = 1, 2, \ldots, n \ \text{ para } \ l = 1, 2, \ldots, k-1 \ .
\end{aligned}
$$

Introduzimos os operadores de derivada total

$$
\mathrm{D}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + u_i \, \frac{\partial}{\partial u} + u_{ij} \, \frac{\partial}{\partial u_j} + \ldots + u_{i i_1 i_2 \ldots i_n} \, \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \ldots i_n}} + \ldots \ , \qquad i = 1, 2, \ldots, n \ . \tag{3.42}
$$

Para uma dada função diferenciável $F(x, u, \partial u, \ldots, \partial^l u)$, temos

$$
\mathrm{D}_i F = \frac{\partial F}{\partial x_i} + u_i \, \frac{\partial F}{\partial u} + u_{ij} \, \frac{\partial F}{\partial u_j} + \ldots + u_{i i_1 i_2 \ldots i_l} \, \frac{\partial F}{\partial u_{i_1 i_2 \ldots i_l}} + \ldots \ , \qquad i = 1, 2, \ldots, n \ .
$$

Agora podemos determinar as prolongações

$$
u'_j = U_j(x, u, \partial u) \ , \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.43}
$$

Das condições (3.38)-(3.39), obtemos

$$
\begin{aligned}
du' &= u'_i \, dx'_i = (\mathrm{D}_i U) dx_i \ , \\
dx'_j &= (\mathrm{D}_i X_j) dx_i \ , \qquad j = 1, 2, \ldots, n \ ,
\end{aligned}
$$

onde D_i é definido por (3.42), $i = 1, 2, \ldots, n$. Assim,

$$
(\mathrm{D}_i X_j) u'_j = \mathrm{D}_i U \ , \qquad i = 1, 2, \ldots, n \ .
$$

Seja A uma matriz $n \times n$

$$
A = \begin{bmatrix} \mathrm{D}_1 X_1 & \ldots & \mathrm{D}_1 X_n \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{D}_n X_1 & \ldots & \mathrm{D}_n X_n \end{bmatrix} .
$$

[1]Representações similares são válidas para as condições (3.40)-(3.41).

Assumindo que A^{-1} exista, temos

$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ \vdots \\ u'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{D}_1 U \\ \mathrm{D}_2 U \\ \vdots \\ \mathrm{D}_n U \end{bmatrix} .$$

Isso leva à prolongação no espaço $(x, u, \partial u)$ dada por

$$\begin{aligned} x' &= X(x,u) \ , \\ u' &= U(x,u) \ , \\ \partial u' &= \partial U(x,u,\partial u) \ . \end{aligned}$$

É possível mostrar que a prolongação para o espaço $(x, u, \partial u, \ldots, \partial^k u)$ é dada por

$$\begin{aligned} x' &= X(x,u) \ , \\ u' &= U(x,u) \ , \\ \partial u' &= \partial U(x,u,\partial u) \ , \\ &\vdots \\ \partial^k u' &= \partial^k U(x,u,\partial u,\ldots,\partial^k u) \ , \end{aligned}$$

onde as componentes de $\partial^k u'$ são determinadas por

$$\begin{bmatrix} u'_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 1} \\ u'_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 2} \\ \vdots \\ u'_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 1} \\ U_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 2} \\ \vdots \\ U_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} n} \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{D}_1 U_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} \\ \mathrm{D}_2 U_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} \\ \vdots \\ \mathrm{D}_n U_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} \end{bmatrix} ,$$

onde $i_l = 1, 2, \ldots, n$ para $l = 1, 2, \ldots, k-1$, com $k \geq 2$.

Agora vamos considerar o caso em que as transformações (3.36)-(3.37) definem um grupo de transformações por ponto de Lie (3.31)-(3.32) atuando no espaço (x, u). Então é possível mostrar que sua k-ésima prolongação para o espaço $(x, u, \partial u, \ldots, \partial^k u)$, dada por

$$\tilde{x} = X(x,u;\varepsilon) \ , \tag{3.44}$$

$$\tilde{u} = U(x,u;\varepsilon) \ , \tag{3.45}$$

$$
\begin{aligned}
\partial\tilde{u} &= \partial U(x,u,\partial u;\varepsilon)\ , && (3.46)\\
&\vdots \\
\partial^k\tilde{u} &= \partial^k U(x,u,\partial u,\ldots,\partial^k u;\varepsilon)\ , && (3.47)
\end{aligned}
$$

define um k-ésimo grupo de transformações de Lie, a 1-parâmetro, prolongado. Nas expressões (3.44)-(3.47), temos

$$
\begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \vdots \\ \tilde{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{D}_1 U \\ \mathrm{D}_2 U \\ \vdots \\ \mathrm{D}_n U \end{bmatrix} , \tag{3.48}
$$

$$
\begin{bmatrix} \tilde{u}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 1} \\ \tilde{u}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 2} \\ \vdots \\ \tilde{u}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 1} \\ U_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 2} \\ \vdots \\ U_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} n} \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{D}_1 U_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} \\ \mathrm{D}_2 U_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} \\ \vdots \\ \mathrm{D}_n U_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} \end{bmatrix} , \tag{3.49}
$$

onde $\tilde{u}_i = U_i$ são as componentes de $\partial\tilde{u} = \partial U$, enquanto $\tilde{u}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i} = U_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i}$ são as componentes de $\partial^k\tilde{u} = \partial^k U$. Em (3.49), $i_l = 1, 2, \ldots, n$ para $l = 1, 2, \ldots, k-1$, com $k \geq 2$.

3.3.3 Prolongações infinitesimais: uma variável dependente e n variáveis independentes

O grupo de transformações por ponto a 1-parâmetro de Lie

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}_i = X_i(x,u;\varepsilon) &= x_i + \varepsilon\xi_i(x,u) + O(\varepsilon^2)\ , && (3.50)\\
\tilde{u} = U(x,u;\varepsilon) &= u + \varepsilon\eta(x,u) + O(\varepsilon^2)\ , && (3.51)
\end{aligned}
$$

com $i = 1, 2, \ldots, n$, atuando no espaço (x,u), tem gerador infinitesimal dado por

$$
\mathrm{X} = \xi_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u}\ . \tag{3.52}
$$

A k-ésima prolongação de (3.50)-(3.51) é dada por

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}_i &= X_i(x,u;\varepsilon) = x_i + \varepsilon\xi_i(x,u) + O(\varepsilon^2)\ , && (3.53)\\
\tilde{u} &= U(x,u;\varepsilon) = u + \varepsilon\eta(x,u) + O(\varepsilon^2)\ , && (3.54)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}_i &= U_i(x,u,\partial u;\varepsilon) = u_i + \varepsilon\eta_i^{(1)}(x,u,\partial u) + O(\varepsilon^2)\ , && (3.55)\\
&\vdots\\
\tilde{u}_{i_1 i_2\ldots i_k} &= U_{i_1 i_2\ldots i_k}(x,u,\partial u,\ldots,\partial^k u;\varepsilon) = u_{i_1 i_2\ldots i_k} + \varepsilon\eta^{(k)}_{i_1 i_2\ldots i_k}(x,u,\partial u,\ldots,\partial^k u) + O(\varepsilon^2)\ , && (3.56)
\end{aligned}
$$

onde $i = 1,2,\ldots,n$ e $i_l = 1,2,\ldots,n$ para $l = 1,2,\ldots,k$ com $k \geq 1$. Suas correspondentes k-ésimas prolongações infinitesimais são

$$
\xi(x,u), \eta(x,u), \eta^{(1)}(x,u,\partial u), \ldots, \eta^{(k)}(x,u,\partial u,\ldots,\partial^k u)\ , \qquad (3.57)
$$

com o correspondente k-ésimo gerador infinitesimal prolongado

$$
\mathrm{X}^{(k)} = \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \eta_i^{(1)}\frac{\partial}{\partial u_i} + \ldots + \eta^{(k)}_{i_1 i_2\ldots i_k}\frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2\ldots i_k}}\ , \quad k \geq 1\ . \qquad (3.58)
$$

Fórmulas explícitas para os infinitesimais prolongados $\eta^{(k)}$ resultam do seguinte teorema:

Teorema 3.3.3.1 *Os infinitesimais prolongados satisfazem às relações de recorrência*

$$
\begin{aligned}
\eta_i^{(1)} &= \mathrm{D}_i\eta - (\mathrm{D}_i\xi_j)u_j\ , \quad i = 1,2,\ldots,n\ , && (3.59)\\
\eta^{(k)}_{i_1 i_2\ldots i_k} &= \mathrm{D}_{i_k}\eta^{(k-1)}_{i_1 i_2\ldots i_{k-1}} - (\mathrm{D}_{i_k}\xi_j)u_{i_1 i_2\ldots i_{k-1}j},\ i = 1,2,\ldots,n,\ l = 1,2,\ldots,k,\ k \geq 2. && (3.60)
\end{aligned}
$$

Vejamos a aplicação do Teorema 3.3.3.1 para o caso de uma variável dependente, u, e duas variáveis independentes, x_1 e x_2, pois esse resultado será útil mais adiante[2]. O correspondente grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro prolongado é dado por

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}_i &= X_i(x_1,x_2,u;\varepsilon) = x_i + \varepsilon\xi_i(x_1,x_2,u) + O(\varepsilon^2)\ ,\ i = 1,2, && (3.61)\\
\tilde{u} &= U(x_1,x_2,u;\varepsilon) = u + \varepsilon\eta(x_1,x_2,u) + O(\varepsilon^2)\ , && (3.62)\\
\tilde{u}_i &= U_i(x_1,x_2,u,u_1,u_2;\varepsilon) = u_i + \varepsilon\eta_i^{(1)}(x_1,x_2,u,u_1,u_2) + O(\varepsilon^2)\ ,\ i = 1,2, && (3.63)\\
\tilde{u}_{ij} &= U_{ij}(x_1,x_2,u,u_1,u_2,u_{11},u_{12},u_{22};\varepsilon)\\
&= u_{ij} + \varepsilon\eta_{ij}^{(2)}(x_1,x_2,u,u_1,u_2,u_{11},u_{12},u_{22}) + O(\varepsilon^2)\ ,\ i,j = 1,2, && (3.64)
\end{aligned}
$$

[2] No capítulo 5, lidamos com equações de transporte que têm uma variável dependente, u, e duas variáveis independentes: uma coordenada espacial, x, e outra temporal, t.

etc., e seu infinitesimal prolongado é dado por

$$
\begin{aligned}
\eta_1^{(1)} &= \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\right] u_1 - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} u_2 - \frac{\partial \xi_1}{\partial u}(u_1)^2 - \frac{\partial \xi_2}{\partial u} u_1 u_2 \ , && (3.65) \\
\eta_2^{(1)} &= \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\right] u_2 - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} u_1 - \frac{\partial \xi_2}{\partial u}(u_2)^2 - \frac{\partial \xi_1}{\partial u} u_1 u_2 \ , && (3.66) \\
\eta_{11}^{(2)} &= \frac{\partial^2 \eta}{\partial {x_1}^2} + \left[2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial u} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial {x_1}^2}\right] u_1 - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial {x_1}^2} u_2 + \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} - 2\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\right] u_{11} - 2\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} u_{12} \\
&+ \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial u}\right](u_1)^2 - 2\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1 \partial u} u_1 u_2 - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u^2}(u_1)^3 - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial u^2}(u_1)^2 u_2 \\
&- 3\frac{\partial \xi_1}{\partial u} u_1 u_{11} - \frac{\partial \xi_2}{\partial u} u_2 u_{11} - 2\frac{\partial \xi_2}{\partial u} u_1 u_{12} \ , && (3.67) \\
\eta_{12}^{(2)} &= \eta_{21}^{(2)} \\
&= \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial x_2} + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial u} - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right] u_2 + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2 \partial u} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2}\right] u_1 - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} u_{22} \\
&+ \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\right] u_{12} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} u_{11} - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1 \partial u}(u_2)^2 \\
&+ \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial u} - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_2 \partial u}\right] u_1 u_2 - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2 \partial u}(u_1)^2 - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial u^2} u_1 (u_2)^2 - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u^2}(u_1)^2 u_2 \\
&- 2\frac{\partial \xi_2}{\partial u} u_2 u_{12} - 2\frac{\partial \xi_1}{\partial u} u_1 u_{12} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u} u_2 u_{11} - \frac{\partial \xi_2}{\partial u} u_1 u_{22} \ , && (3.68) \\
\eta_{22}^{(2)} &= \frac{\partial^2 \eta}{\partial {x_2}^2} + \left[2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2 \partial u} - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial {x_2}^2}\right] u_2 - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial {x_2}^2} u_1 + \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} - 2\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\right] u_{22} - 2\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} u_{12} \\
&+ \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_2 \partial u}\right](u_2)^2 - 2\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2 \partial u} u_1 u_2 - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial u^2}(u_2)^3 - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial u^2} u_1 (u_2)^2 \\
&- 3\frac{\partial \xi_2}{\partial u} u_2 u_{22} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u} u_1 u_{22} - 2\frac{\partial \xi_1}{\partial u} u_2 u_{12} \ , && (3.69)
\end{aligned}
$$

etc. Esse procedimento é naturalmente estendido para o caso de m variáveis dependentes e n variáveis independentes [17].

3.4 Grupos de transformações a r-parâmetros e álgebras de Lie

Cada parâmetro de um grupo de transformações de Lie a r-parâmetros leva a um gerador infinitesimal. Os geradores infinitesimais pertencem a um espaço vetorial r-dimensional que possui uma estrutura adicional, chamada *comutador*. Este espaço vetorial especial por sua vez é chamado *álgebra de Lie r-dimensional*.

Para nossos propósitos, estudar um grupo de transformações de Lie a r-parâmetros equivale a estudar seus geradores infinitesimais e sua estrutura de álgebra de Lie. A exponenciação de um gerador infinitesimal corresponde a um grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, que é um *subgrupo* do grupo de transformações de Lie a r-parâmetros.

3.4.1 Grupos de transformações a r-parâmetros

Considere um *grupo de transformações por ponto de Lie a r-parâmetros*

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x};\varepsilon)\ , \tag{3.70}$$

com $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e parâmetros $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r)$. Seja a lei de composição dos parâmetros denotada por

$$\phi(\varepsilon,\delta) = (\phi_1(\varepsilon,\delta), \phi_2(\varepsilon,\delta), \ldots, \phi_n(\varepsilon,\delta))\ , \tag{3.71}$$

com $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$, onde $\phi(\varepsilon,\delta)$ satisfazem os axiomas com $\varepsilon = 0$ correspondendo à identidade $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_r = 0$, e $\phi(\varepsilon,\delta)$ analítica em seu domínio de definição.

Considere a matriz infinitesimal $\mathbf{\Xi}(\mathbf{x})$ uma matriz $r \times r$ com elementos

$$\xi_{\alpha j} = \left.\frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial \varepsilon_\alpha}\right|_{\varepsilon=0}\ , \quad \alpha = 1, 2, \ldots, r,\ j = 1, 2, \ldots, n\ . \tag{3.72}$$

Seja $\mathbf{\Theta}(\varepsilon)$ uma uma matriz $r \times r$ com elementos

$$\Theta_{\alpha\beta} = \left.\frac{\partial \phi_\beta(\varepsilon,\delta)}{\partial \delta_\alpha}\right|_{\delta=0}\ , \tag{3.73}$$

e seja a matriz inversa de $\mathbf{\Theta}(\varepsilon)$ dada por

$$\mathbf{\Psi}(\varepsilon) = \mathbf{\Theta}^{\mathbf{-1}}(\varepsilon)\ . \tag{3.74}$$

De acordo com o Primeiro Teorema Fundamental de Lie, para um grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro em alguma vizinhança de $\varepsilon = 0$, o grupo definido em (3.70) equivale à solução do problema de valor inicial para o sistema de nr EDP's de primeira ordem dado por

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial \varepsilon_1} & \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial \varepsilon_1} & \cdots & \frac{\partial \tilde{x}_n}{\partial \varepsilon_1} \\ \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial \varepsilon_2} & \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial \varepsilon_2} & \cdots & \frac{\partial \tilde{x}_n}{\partial \varepsilon_2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial \varepsilon_r} & \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial \varepsilon_r} & \cdots & \frac{\partial \tilde{x}_n}{\partial \varepsilon_r} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Psi}(\varepsilon)\boldsymbol{\Xi}(\tilde{\mathbf{x}}) \ , \quad \text{com } \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \ \text{ em } \ \varepsilon = 0 \ .$$

Definição 3.4.1.1 *O gerador infinitesimal* X_α*, que corresponde ao parâmetro* ε_α *do grupo de transformações de Lie a* r*-parâmetros, definido por* (*3.70*)*, é dado por*

$$\mathrm{X}_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \xi_{\alpha j}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} \ , \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, r \ . \tag{3.75}$$

É possível mostrar que o grupo de transformações de Lie a r-parâmetros (3.70) equivale a

$$\tilde{\mathbf{x}} = \prod_{\alpha=1}^{r} e^{\mu_\alpha \mathrm{X}_\alpha} \mathbf{x} = e^{\mu_1 \mathrm{X}_1} e^{\mu_2 \mathrm{X}_2} \ldots e^{\mu_r \mathrm{X}_r} \mathbf{x} \ ,$$

onde $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ são constantes reais arbitrárias. Além disso, o grupo de transformações a 1-parâmetro de Lie

$$\tilde{\mathbf{x}} = e^{\varepsilon \mathrm{X}} \mathbf{x} = \exp\left(\sum_{\alpha=1}^{r} \sigma_\alpha \mathrm{X}_\alpha \right) \mathbf{x} \ ,$$

obtido pela exponenciação do gerador infinitesimal

$$\mathrm{X} = \sum_{\alpha=1}^{r} \sigma_\alpha \mathrm{X}_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \varsigma(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} \ ,$$

onde

$$\varsigma_j(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{r} \sigma_\alpha \xi_{\alpha j}(\mathbf{x}) \ , \quad j = 1, 2, \ldots, n \ ,$$

define um subgrupo a 1-parâmetro (ε) do grupo de transformações a r-parâmetros (3.70) em termos das constantes reais $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$.

3.4.2 Álgebras de Lie

Definição 3.4.2.1 *Considere um grupo de transformações de Lie a* r*-parâmetros dado pela expressão* (*3.70*)*, com geradores infinitesimais* X_α*,* $\alpha = 1, 2, \ldots, r$*, definido por* (*3.71*) *e* (*3.75*)*. O comutador de* X_α *e* X_β *é um operador tal que*

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_\beta] &= \mathrm{X}_\alpha \mathrm{X}_\beta - \mathrm{X}_\beta \mathrm{X}_\alpha \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left[\left(\xi_{\alpha i}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\xi_{\beta j}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \left(\xi_{\beta i}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\xi_{\alpha j}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \eta_j(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} \ , \qquad (3.76)
\end{aligned}
$$

com

$$
\eta_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\xi_{\alpha i}(\mathbf{x}) \frac{\partial \xi_{\beta j}(\mathbf{x})}{\partial x_i} - \xi_{\beta i}(\mathbf{x}) \frac{\partial \xi_{\alpha j}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) \ , \qquad (3.77)
$$

de onde resulta que

$$
[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_\beta] = - [\mathrm{X}_\beta, \mathrm{X}_\alpha] \ . \qquad (3.78)
$$

Teorema 3.4.2.1 (Segundo Teorema Fundamental de Lie.) *O comutador de dois geradores infinitesimais quaisquer de um grupo de transformações de Lie a* r*-parâmetros também é um gerador infinitesimal. Em particular,*

$$
[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{r} C_{\alpha\beta}^{\gamma} \mathrm{X}_\gamma \ , \qquad (3.79)
$$

onde os coeficientes $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$ *são as constantes de estrutura, com* $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, r$*.*

Definição 3.4.2.2 *As equações dadas por* (*3.79*) *são chamadas de "relações de comutação" de um grupo de transformações a* r*-parâmetros* (*3.70*)*, com geradores infinitesimais dados por* (*3.75*)*.*

Para três geradores infinitesimais quaisquer, $\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_\beta, \mathrm{X}_\gamma$, é possível provar a validade da *Identidade de Jacobi*:

$$
[\mathrm{X}_\alpha, [\mathrm{X}_\beta, \mathrm{X}_\gamma]] + [\mathrm{X}_\beta, [\mathrm{X}_\gamma, \mathrm{X}_\alpha]] + [\mathrm{X}_\gamma, [\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_\beta]] = 0 \ . \qquad (3.80)
$$

Das expressões (3.78), (3.79) e (3.80), resulta o seguinte teorema:

Teorema 3.4.2.2 (Terceiro Teorema Fundamental de Lie.) *$C^{\gamma}_{\alpha\beta}$, as constantes de estrutura definidas pelas relações de comutação (3.79), satisfazem às relações*

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta} = C^{\gamma}_{\beta\alpha} \ , \tag{3.81}$$

$$\sum_{\rho=1}^{r} \left[C^{\rho}_{\alpha\beta} C^{\delta}_{\rho\gamma} + C^{\rho}_{\beta\gamma} C^{\delta}_{\rho\alpha} + C^{\rho}_{\gamma\alpha} C^{\delta}_{\rho\beta} \right] = 0 \ . \tag{3.82}$$

Em particular, a relação (3.81) equivale à propriedade de antissimetria do comutador dada por (3.78), enquanto que a relação (3.82) é equivalente à Identidade de Jacobi (3.80).

Definição 3.4.2.3 *Uma álgebra de Lie $\mathcal{L}$ é um espaço vetorial sobre* **R** *ou* **C**, *com uma operação bilinear, o comutador, que satisfaz às propriedades (3.78), (3.80) e, mais importante, à relação (3.79). Em particular, o conjunto de geradores infinitesimais $\{\mathrm{X}_{\alpha}\}$, com $\alpha = 1, 2, \ldots, r$, de um grupo de transformações de Lie a r-parâmetros (3.70), formam uma àlgebra de Lie r-dimensional sobre* **R**.

Teorema 3.4.2.3 *Sejam $X^{(k)}_{\alpha}$ e $X^{(k)}_{\beta}$ os k-ésimos geradores infinitesimais prolongados dos geradores infinitesimais X_{α} e X_{β}, e seja $[X_{\alpha}, X_{\beta}]^{(k)}$ o k-ésimo gerador infinitesimal prolongado do comutador $[X_{\alpha}, X_{\beta}]$. Então,*

$$[X_{\alpha}, X_{\beta}]^{(k)} = \left[X^{(k)}_{\alpha}, X^{(k)}_{\beta} \right] \ , \quad k \geq 1 \ . \tag{3.83}$$

Portanto, se $[X_{\alpha}, X_{\beta}] = X_{\gamma}$, então

$$\left[X^{(k)}_{\alpha}, X^{(k)}_{\beta} \right] = X^{(k)}_{\gamma} \ , \quad k \geq 1 \ . \tag{3.84}$$

Definição 3.4.2.4 *Um subespaço $\mathcal{J} \subset \mathcal{L}$ é chamado "subálgebra" da álgebra de Lie $\mathcal{L}$ se $[X_{\alpha}, X_{\beta}] \in \mathcal{J}$ para todo $X_{\alpha}, X_{\beta} \in \mathcal{J}$.*

3.5 Equações diferenciais parciais

Nesta seção mostramos como obter soluções de equações diferenciais parciais (EDP's) a partir da invariância sob grupos de transformação de Lie. Considerando o caso de EDP's escalares, veremos que o critério infinitesimal para a invariância de uma EDP leva diretamente a um algorítimo para determinar os geradores infinitesimais do grupo de transformações de Lie admitido por uma dada EDP. As superfícies invariantes do grupo de transformações de Lie levam a *soluções invariantes*. Essas soluções, por sua vez, são obtidas ao se resolver EDP's com um número menor de variáveis independentes do que no caso da EDP de origem.

3.5.1 Invariância de uma equação diferencial parcial

Seja uma EDP escalar de k-ésima ordem dada por

$$F(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u) = 0 \ , \tag{3.85}$$

onde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ são as coordenadas correspondentes às n variáveis independentes, u é a coordenada correspondente à variável dependente e $\partial^j u$ são as coordenadas com componentes $\partial^j u/\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_j}$, $i_j = 1, 2, \ldots, n$, para $j = 1, 2, \ldots, k$, correspondentes a todas as derivadas parciais de j-ésima ordem de u em relação a x.

Vamos assumir que a EDP (3.85) pode ser escrita em termos de algumas componentes específicas das derivadas de l-ésima ordem de u, ou seja

$$F(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u) = u_{i_1 i_2 \ldots i_l} - f(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u) = 0 \ , \tag{3.86}$$

em que o termo $f(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u)$ não depende explicitamente de $u_{i_1 i_2 \ldots i_l}$.

Definição 3.5.1.1 *O grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, definido em (3.31)-(3.32), deixa a EDP (3.85) invariante, ou seja, é uma simetria de ponto admitida por essa equação, se e somente se sua k-ésima prolongação, descrita pelas expressões (3.44)-(3.47) e (3.48)-(3.49), deixa a superfície (3.85) invariante.*

Uma solução $u = \Theta(x)$ da equação (3.85) situa-se na superfície de (3.85), com

$$u_{i_1 i_2 \ldots i_l} = \frac{\partial^j \Theta(x)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_j}} \ , \quad i_j = 1, 2, \ldots, n \ , \quad j = 1, 2, \ldots, k \ .$$

A invariância da superfície (3.85) sob a k-ésima prolongação (3.31)-(3.32) significa que qualquer solução $u = \Theta(x)$ é mapeada em outra solução $u = \Theta(x, \varepsilon)$ sob a ação do grupo de transformações (3.31)-(3.32) para qualquer parâmetro ε. Em outras palavras, isso significa que o conjunto de todas as soluções da equação (3.85) é invariante sob o grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro (3.31)-(3.32) se e somente se a EDP (3.85) admitir (3.31)-(3.32).

Teorema 3.5.1.1 (Critério Infinitesimal para a Invariância de uma EDP.) *Seja*

$$\mathrm{X} = \xi_i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u} \tag{3.87}$$

o gerador infinitesimal do grupo de transformações por ponto de Lie (3.31)-(3.32). Seja

$$\begin{aligned} \mathrm{X}^{(k)} &= \xi_i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u} + \eta_i^{(1)}(x, u, \partial u) \frac{\partial}{\partial u_i} + \ldots \\ &+ \eta^{(k)}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u) \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \ldots i_l}} \end{aligned} \tag{3.88}$$

o k-ésimo gerador infinitesimal prolongado de (3.87), em que $\eta_i^{(1)}$ é dado por (3.59) e $\eta^{(j)}_{i_1 i_2 \ldots i_j}$ é descrito por (3.60), $i_j = 1, 2, \ldots, n$, para $j = 1, 2, \ldots, k$, em termos de

$$\xi(x, u) = (\xi_1(x, u) \xi_2(x, u), \ldots, \xi_n(x, u), \eta(x, u)) \ .$$

Então o grupo de transformações (3.31)-(3.32) é admitido pela EDP (3.85), ou seja, é uma simetria por ponto de (3.85), se e somente se

$$\mathrm{X}^{(k)} F(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u) = 0 \quad \text{quando} \quad F(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u) = 0 \ . \tag{3.89}$$

3.5.2 Soluções invariantes

Considere uma EDP (3.85) de k-ésima ordem, com $k \geq 2$, que admita um grupo de transformações por ponto com gerador infinitesimal dado por (3.87). Assumimos que $\xi(x, u) \neq 0$.

Definição 3.5.2.1 *A solução $u = \Theta(x)$ é uma solução invariante da equação (3.85) resultante de sua simetria admitida com o gerador infinitesimal (3.87) se e somente se:*

(i) $u = \Theta(x)$ é uma superfície invariante de (3.87);

(ii) $u = \Theta(x)$ soluciona (3.85).

A partir dessa definição é possível afirmar que $u = \Theta(x)$ também deve satisfazer às seguintes condições:

(iii) $\mathrm{X}(u - \Theta(x)) = 0$ quando $u = \Theta(x)$, ou seja,

$$\xi_i(x, \Theta(x))\frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} = \eta(x, \Theta(x)) \ ; \tag{3.90}$$

(iv) $F(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u) = 0$ quando $u = \Theta(x)$, ou seja,

$$F(x, u, \partial\Theta(x), \partial^2\Theta(x), \ldots, \partial^k\Theta(x)) = 0 \ . \tag{3.91}$$

A equação (3.90) é conhecida como *condição de superfície invariante* para as soluções invariantes resultantes da invariância sob a simetria por ponto (3.87). As classes de soluções invariantes foram primeiramente considerada por Lie em 1879 [96], e podem ser obtidas através do seguinte método[3].

Método da Forma Invariante. Primeiro, resolvemos a condição de superfície, ou seja, a equação diferencial de primeira ordem (3.90), através da resolução das equações características correspondentes para $u = \Theta(x)$:

$$\frac{dx_1}{d\xi_1(x,u)} = \frac{dx_2}{d\xi_2(x,u)} = \ldots = \frac{dx_n}{d\xi_n(x,u)} = \frac{du}{d\eta(x,u)} \ . \tag{3.92}$$

Sendo $y_1(x,u), y_2(x,u), \ldots, y_{n-1}(x,u), \nu(x,u)$ as n constantes independentes provenientes da solução do sistema de n EDO's de primeira ordem (3.92), com $\partial\nu/\partial u \not\equiv 0$, então a solução geral $u = \Theta(x)$ da EDP (3.90) é dada, implicitamente, pela forma invariante

$$\nu(x,u) = \Theta(y_1(x,u), y_2(x,u), \ldots, y_{n-1}(x,u)) \ , \tag{3.93}$$

[3]Maiores detalhes deste e de outro método proposto na literatura podem ser encontrados em [17].

onde Θ é uma função diferenciável arbitrária das variáveis $y_1(x,u), y_2(x,u), \ldots, y_{n-1}(x,u)$ (também chamadas de *variáveis de similaridade*). Note que as variáveis

$$y_1(x,u), y_2(x,u), \ldots, y_{n-1}(x,u), \nu(x,u)$$

correspondem às n coordenadas canônicas (3.19) para o grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro (3.31)-(3.32). Assim, a EDP (3.85) tem soluções invariantes que são expressas de maneira implícita na forma invariante dada por (3.93). Essas soluções são obtidas a partir da resolução de uma equação diferencial reduzida, com $n-1$ variáveis independentes, $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, e uma variável dependente, ν. Por sua vez, a equação diferencial reduzida é obtida com a substituição da forma invariante (3.93) na EDP (3.85) (assumimos que essa substituição não acarreta numa equação diferencial singular para ν).

Para obter algumas soluções invariantes de equações de transporte que constituem o objeto de nosso estudo, utilizamos o aplicativo Maple e subrotinas do pacote SADE [79]. Analogamente, também utilizamos esse recurso computacional para resolver sitemas de equações determinantes, a fim de encontrar equações de transporte generalizadas que admitem uma álgebra de simetria conhecida de uma classe de equações mais restritiva. A próxima seção aborda alguns aspectos do procedimento de resolução de equações determinantes.

3.5.3 Equações determinantes

Considere uma EDP de k-ésima ordem, com $k \geq 2$, $l \leq k$

$$u_{i_1,i_2,\ldots,i_l} = f(x,u,\partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u) \ , \tag{3.94}$$

onde $f(x,u,\partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u)$ não depende explicitamente de $u_{i_1,i_2,\ldots,i_l}$. O Teorema 3.5.1.1 estabelece que a EDP (3.94) admite o grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro com gerador infinitesimal descrito por (3.87), e com sua k-ésima prolongação dada por (3.88), se e somente se $\xi(x,u)$ e $\eta(x,u)$ satisfaz à equação determinante de simetria

$$\eta^{l}_{i_1,i_2,\ldots,i_l} = \xi_j \frac{\partial f}{\partial x_j} + \eta \frac{\partial f}{\partial u} + \eta^{(1)}_j \frac{\partial f}{\partial u_j} + \ldots + \eta^{(k)}_{j_1,j_2,\ldots,j_k} \frac{\partial f}{\partial u_{j_1,j_2,\ldots,j_k}} \ , \tag{3.95}$$

quando u satisfaz à condição (3.94). É importante destacar os seguintes aspectos:

(i) $\eta^{p}_{j_1,j_2,\ldots,j_p}$ é linear nas componentes das coordenadas $\partial^p u$, se $p \geq 2$;

(ii) $\eta^{p}_{j_1,j_2,\ldots,j_p}$ é um polinômio nas componentes das coordenadas $\partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^p u$, com coeficientes que são homogêneos e lineares em $\xi(x,u), \eta(x,u)$ e em suas derivadas de ordem p em relação a x e u.

Das condições (i) e (ii), tem-se que $f(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u)$ é um polinômio nas componentes $\partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u$, e então o sistema de equações determinantes (3.95) é uma equação polinomial nos componentes de $\partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u$, com coeficientes homogêneos e lineares em $\xi(x,u), \eta(x,u)$ e em suas derivadas de ordem k.

Além disso, para qualquer ponto x, é possível atribuir valores arbitrários a cada componente de $\partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u$, desde que a equação (3.94) seja satisfeita. Em particular, após substituir $u_{i_1,i_2,\ldots,i_l}$ por $f(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u)$ no sistema de equações determinantes descrito por (3.95), a expressão resultante deve ser válida para valores arbitrários das componentes remanescentes das coordenadas $x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u$. Sendo essa expressão resultante uma equação polinomial nas componentes remanescentes $\partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u$, como consequência, os coeficientes dessa equação polinomial devem tender a zero de maneira independente. Isto leva a um sistema de EDP's homogêneo e linear para as $n+1$ funções $\xi(x,u), \eta(x,u)$, conhecido como *sistema de equações determinantes* para os geradores infinitesimais (3.87) admitidos pela equação (3.94). Usualmente, o conjunto de equações determinantes é um *sistema superdeterminado* de EDP's para $\xi(x,u), \eta(x,u)$ pois, em geral, existem mais de $n+1$ equações determinantes.

Capítulo 4

Equações de transporte não-lineares

Este capítulo apresenta uma revisão de aspectos das classes de equações de transporte não-lineares do tipo parabólicas, na qual estão inseridas as equações de difusão em meio poroso. A estrutura de sua apresentação é a seguinte. Uma breve revisão de elementos históricos e de motivações físicas e matemáticas que impulsionaram o desenvolvimento da teoria de equações parabólicas é apresentada na seção 4.1. Na seção 4.2, apresentamos a classe de equações de difusão em meio poroso, juntamente com as definições dos processos de difusão lenta e de difusão rápida. As referências utilizadas nessa revisão estão indicadas ao longo do capítulo.

4.1 Equações diferenciais parabólicas não-lineares

A equação de calor é umas das três equações diferenciais de segunda ordem clássicas que formam a base de uma introdução elementar na área de equações diferenciais. A partir dela, no período de 1822 a 1950, um grande número de equações correlatas foi proposto na literatura [81, 82]. Em uma primeira extensão desse campo, a teoria das equações parabólicas lineares foi desenvolvida, com coeficientes constantes e variáveis. A teoria linear progrediu muito, mas é conhecido que as equações que descrevem fenômenos físicos, sem que haja uma simplificação excessiva, são não-lineares. Entretando, as dificuldades matemáticas na construição de versões não-lineares das três equações diferenciais clássicas (equação de Laplace, equação de calor e equação de onda) tornaram impossível um progresso significativo na área até meados do século XX. Essa observação se aplica a outras equações diferenciais parciais importantes, como as equações de Navier-Stokes.

Nos últimos cinqüenta anos, com as facilidades advindas dos avanços computacionais, uma grande ênfase tem sido dada no estudo de processos descritos por equações não-lineares. O fato de a matemática envolvida ser mais complexa é compensado pelo fato desta ser mais realística, e o reconhecimento da relevância das equações diferenciais não-lineares é refletida neste trecho de um artigo de John Nash, publicado em 1958 [97]:

> *The open problems in the area of nonlinear p.d.e. are very relevant to applied mathematics and science as a whole, perhaps more so that the open problems in any other area of mathematics, and the field seems poised for rapid development. It seems clear, however, that fresh methods must be employed...*

Atualmente podemos observar um progresso significativo da aplicação de simetrias no estudo equações diferenciais parciais não-lineares de grande importância física, bem como no seu uso para encontrar soluções exatas para essas equações [13, 14, 16, 17]. As simetrias clássicas de Lie admitidas por equações diferenciais parciais não-lineares são úteis tanto na busca por soluções invariantes quanto na identificação de equações que podem ser linearizadas através de um mapeamento invertível. E no contexto de equações parabólicas não-lineares, as técnicas de simetrias de Lie vêm sendo amplamente utilizadas [89, 90, 91, 92, 98, 99, 100, 101].

4.2 Equações de difusão em meio poroso

A classe de equações parabólicas com não-linearidade em leis de potência

$$u_t = \bigtriangledown^2 u^n = \text{div}\ [D(u) \bigtriangledown u]\ , \tag{4.1}$$

com $D(u) = u^{n-1}$, é conhecida como *equação de difusão em meio poroso* [81]. Essa expressão é um dos exemplos mais simples de equações de evolução parabólicas não-lineares. Ela aparece na descrição de vários fenômenos naturais, e sua teoria e propriedades provêm fortemente da equação de calor, $u_t = \bigtriangledown^2 u$, que pode ser considerada como o limite $n \to 1$ em (4.1).

De acordo com a teoria de equações parabólicas não-lineares, a equação (4.1) é parabólica somente nos pontos em que $u \neq 0$, ou seja, é uma equação *parabólica degenerada*, o que traz consequências matemáticas profundas. Os desdobramentos desse aspecto matemático podem ser traduzidos na identificação das seguintes sub-classes de processos:

- $u_t = \bigtriangledown^2 u^n$ é *degenerada* em $u = 0$, se $n > 1 \;\Rightarrow$ *processos de difusão lenta,*
- $u_t = \bigtriangledown^2 u^n$ é *singular* em $u = 0$, se $n < 1 \;\Rightarrow$ *processos de difusão rápida.*

Essa classificação é válida para pequenos valores de u e se inverte à medida em que $u \to \infty$, um problema típido criado por funções de potência que deve ser levado em conta na interpretação de resultados deduzidos, por exemplo, da comparação de taxas de decaimento [82].

A equação (4.1) aparece naturalmente na descrição de processos que envolvem fluxo de fuidos, transferência de calor e difusão. Talvez a mais conhecida seja a descrição do fluxo de um gás isentrópico através de um meio poroso, modelado independentemente por Muskat [85] e Leibenzon [86]. Outra aplicação importante, devida a Zel'dovich *et al* [83], refere-se à radiação em plasmas. De fato, essa última aplicação foi a base para o desenvolvimento matemático rigosoro da teoria de equações de difusão em meio poroso. Outras aplicações têm sido propostas em áreas como biologia matemática, espalhamento de fuidos viscosos, propagação de populações (*self-avoid diffusion*), teoria de filmes finos sob gravidade (na ausência de tensão superficial), teoria de limites cinéticos (teoria de Carleman), dentre outras (ver [81, 82] e referências). Na descrição desses fenômenos, muitas vezes são adicionados termos de natureza convectiva, de absorção ou de arraste, generalizando assim a equação (4.1). Um exemplo disso é fornecido pela a equação parabólica quase-linear unidimensional

$$u_t = [\Phi(u,x)]_{xx} + F(u,u_x,x) \ , \tag{4.2}$$

que serve como um modelo matemático simples para vários problemas físicos. Talvez seu uso mais comum seja, até o momento, para descrever o fluxo de líquidos em meios porosos, ou o transporte de energia térmica em plasmas. Em ambos os casos, a forma mais comum empregada para F é

$$F(u,u_x,x) = g(x)u^m + f(x)u^s u_x \ , \tag{4.3}$$

de modo que temos a *equação de difusão em meio poroso generalizada*:

$$u_t = [\Phi(u,x)]_{xx} + g(x)u^m + f(x)u^s u_x \ . \tag{4.4}$$

A teoria para equações que possuem tal grau de generalidade tem sido construída nas últimas décadas, mas a riqueza de fenômenos incluídos nos diferentes exemplos abrangidos nessa formulação tão geral exclui uma teoria com informação suficientemente detalhada. Nesse sentido, temos interesse em estudar classes de equações de difusão em meio poroso obtidas através da imposição de simetrias conhecidas de uma equação de reação-difusão com termo difusivo logarítmico. Isto será considerado no capítulo 5.

4.2.1 Processos de difusão lenta

Conforme mencionado na seção anterior, para pequenos valores da densidade u, e $n \geq 1$, a equação de difusão em meio poroso (4.1) descreve os chamados processos de difusão lenta. Essa condição se estende naturalmente para a equação generalizada (4.4).

Considerando que várias equações de transporte conhecidas na literatura e utilizadas na descrição de processos de difusão emergem de (4.4), destacamos os seguintes processos pertencentes à classe de equações de difusão em meio poroso generalizada [81, 89]:

Processos de difusão não-lineares com convecção

Os processos de difusão não-lineares podem descritos pela equação

$$u_t = (u^n)_{xx} + f(x)u^s u_x \ , \tag{4.5}$$

cujo segundo termo é de natureza convectiva. Na teoria de meio poroso insaturado, a parte convectiva representa o efeito da gravidade. Tomando os devidos valores para os expoentes e coeficientes de (4.5), obtemos algumas equações importantes associadas a essa classe de processos difusivo-convectivos:

$$\begin{aligned}
\textit{Eq. de Boussinesq } (f(x) = c = \text{const.}): &\qquad u_t = (u^n)_{xx} + cu^s u_x \ , &(4.6)\\
\textit{Eq. de Burgers } (n = 1): &\qquad u_t = u_{xx} + f(x)u^s u_x \ , &(4.7)\\
\textit{Eq. de Hopf generalizada } (s = 1): &\qquad u_t = (u^n)_{xx} + f(x)uu_x \ . &(4.8)
\end{aligned}$$

Boussinesq propôs o modelo (4.6) para descrever a filtragem de um fluido incompressível (como a água) através de um estrato poroso [81, 84]. Por outro lado, a equação de Burgers (4.7) foi a primeira equação não-linear com significado físico a ser resolvida de maneira exata, e foi mapeada na equação de calor através de uma transformação simples [88]. Apesar de não possuir sólitons ou muitas leis de conservação, a equação (4.7) possui muitas simetrias [13]. A expressão (4.8) é uma generalização da equação de Hopf [87], obtida para $n = f(x) = 1$, que também é conhecida como *equação de Burgers sem viscosidade.*

Processos de difusão não-lineares com absorção

Os processos de difusão com termo de absorção são descritos pela equação

$$u_t = (u^n)_{xx} + g(x)u^m \ , \tag{4.9}$$

que tem se mostrado útil no estudo de fenômenos em que a estrutura física do meio varia com a concentração $u(x,t)$. O segundo termo de (4.9) representa a absorção volumétrica, que no caso de um plasma é causada pela radiação para a qual este é transparente [89]. Essa mesma equação aparece no contexto de condução não-linear de calor, com um termo de fonte. Por exemplo, materiais aquecidos por radiação de microondas têm suas condutividades térmicas e aquecimento corporal fortemente dependentes da temperatura. Em (4.9), supõe-se que os termos de difusividade e de absorção dependam da concentração $u(x,t)$ através de uma lei de potência. Os processos de difusão não-linear com absorsão são caracterizados por fenômenos de explosão, extinção e tempos de espera, e os índices n e m abrangem um vasto conjunto de comportamentos físicos [89, 90].

Processos de difusão não-lineares com termo de arraste

Além dos fenômenos já citados, a equação de difusão em meio poroso generalizada (4.4) compreende outros processos de reação-difusão usualmente descritos por equações de transporte amplamente conhecidas na literatura, o que pode ser visto mais facilmente a partir de uma reestruturação em seu formato. Tomando $s = m - 1$ e $f_x = mg(x)$ na equação (4.4), temos

$$u_t = \left[(u^n)_x + \frac{f(x)}{m} u^m \right]_x \ , \tag{4.10}$$

de onde obtemos, para $n = m = 1$, uma equação de *Fokker-Planck* linear [63]

$$u_t = [u_x + f(x)u]_x \ , \tag{4.11}$$

com termo de arraste $f(x)$ e coeficiente de difusão $D = 1$. Para outros valores de n e m obtemos variações, ditas não-lineares, da equação de Fokker-Planck que descrevem, por exemplo, os chamados processos de difusão anômala (ver [102] e referências). É importante ressaltar que essas equações não constituem meros casos particulares de (4.4). Existe na literatura uma gama de trabalhos voltados para suas especificidades, dada a importância dessas equações nas teorias de fenomenologia e de processos estocásticos [1, 4, 5, 63, 102].

Até o momento, todos os processos derivados da equação (4.4) que mencionamos levam em conta que o coeficiente de difusão é constante, ou seja, $D = 1$. Considerando que a equação (4.4) também pode ter coeficiente de difusão com dependêcia espacial, $D(x)$, temos em vista uma classe de equações de difusão não-linear ainda mais geral. De fato, partindo de (4.2), não há uma razão fundamental para assumirmos que os coeficientes de (4.4) sejam constantes, uma vez que sua dependência espacial nos permite incorporar fatores adicionais de grande importância para o estudo de processos não-lineares. Por exemplo, para um meio poroso, a dependência espacial dos coeficientes pode representar fatores estacionários, como a contaminação do meio por outro material ou, em um plasma, o impacto de impurezas sólidas [89, 90], dentre outros aspectos relacionados à difusão. Pode ser visto em [98] que Vaneeva e co-autores exploram a análise de grupos e de leis de conservação para equações de reação-difusão não-lineares com coeficientes variáveis. Nesse sentido, como será visto no capítulo 5, consideramos importante estudar uma classe de equações de meio poroso que tenham coeficientes com dependência espacial.

4.2.2 Processos de difusão rápida

Os processos de difusão rápida estão presentes na física de plasmas, na teoria cinética dos gases, na física do estado sólido, no transporte em meio poroso [81, 82, 91, 92] e são descritos pela equação de meio poroso com potências n tais que

$$u_t = \bigtriangledown^2 u^n \ , \quad n < 1 \ . \tag{4.12}$$

Existe uma teoria de existência e unicidade para a equação (4.12) na região de $n \leq 0$, sob a condição de que ela seja escrita na forma ligeiramente modificada

$$u_t = \text{div}\ [u^{n-1} \bigtriangledown u] \tag{4.13}$$

a fim de preservar a parabolicidade da equação nesse intervalo de valores de n (ver maiores detalhes em [82]). Para o caso unidimensional, essa expressão correspondente a

$$u_t = [u^{n-1} u_x]_x = [D(u) u_x]_x\ , \tag{4.14}$$

onde $D(u) = u^{n-1}$ é o coeficiente de difusidade. A equação (4.14) é comumente chamada de *equação de difusão rápida*.

Em muitos materiais metálicos e cerâmicos, o coeficiente térmico ou de condutividade (ou de difusão, se u representar concentração de massa), $D(u)$, pode ser aproximado por $u^{-\alpha}$ para um vasto conjunto de valores de temperaturas (nessa nova notação $\alpha = 1 - n$, ou seja, a equação (4.14) passa a ser definida para $\alpha > 0$). É a divergência em $D(u)$ para pequenos valores de u a responsável por um espalhamento de calor (massa) muito mais rápido do que no caso linear ($\alpha = 0$), o que explica essa terminologia.

Em alguns trabalhos podemos encontrar investigações de características relevantes dos processos de difusão rápida. Rosenau [91] mostrou que, para o intervalo $1 \leq \alpha \leq 2$, a família de difusões rápidas (4.14) coexiste com uma sub-classe denominada *difusões super-rápidas*, em que o processo inteiro termina num período de tempo finito. O caso especial com $\alpha = 1$,

$$u_t = [\ln(u)]_{xx}\ , \tag{4.15}$$

emerge em física de plasmas e na aproximação do limite central do modelo de Carleman para a equação de Boltzmann [103]. A acessbilidade matemática de (4.15), conhecida como *equação de difusão logarítmica*, revela grande riqueza de aspectos físico-matemáticos, fazendo com que essa equação seja chave no entendimento de processos de difusão rápida. O trabalho de Carlson *et al* [104] mostrou que, para uma grande variedade de sistemas, é esperado que o fenômeno de criticalidade auto-organizada (*self organized criticality*, SOC) ocorra como resultado da singularidade no coeficiente de difusão $D(u)$. Em outra linha de trabalho, Gandarias [92] e Popovych *et al* [99] derivam simetrias potenciais e apresentam soluções não-invariantes por grupos de Lie admitidos por equações do tipo (4.14). Por fim, conforme Ibragimov e Sophocleous [100], existem outras equações propostas para descrever processos de difusão rápida, como

$$u_t = [h(x)D(u)u_x]_x \ , \tag{4.16}$$

onde a difusidade também apresenta dependência espacial, o que nos motiva a investigar a ocorrência desse tipo de coeficiente em uma dada classe de equações de reação-difusão. Além disso, a equação (4.16) também pode ser generalizada se considerarmos um termo adicional de fonte, $z(x, u)$, de modo que a equação

$$u_t = [h(x)D(u)u_x]_x + z(x, u) \tag{4.17}$$

descreva processos de difusão rápida mais abrangentes. Esse aspecto também será considerado neste trabalho.

Apesar dos processos de difusão rápida ocorrerem frequentemente em sistemas físicos complexos como, por exemplo, no transporte de plasma sujeito a um campo magnético forte, de maneira geral sua análise se limita a estudos numéricos. Acreditamos que estudar as peculiaridades da difusão rápida isoladamente constitui um passo crucial no entendimento desses fenômenos, o que justifica nosso interesse em analisar a possibilidade de ocorrência desses processos numa classe de equações de reação-difusão ainda pouco explorada, como será mostrado na sequência deste trabalho.

Capítulo 5

Equações de transporte com coeficientes logarítmicos

Este capítulo trata do estudo de equações de transporte com coeficientes logarítmicos e está estruturado da seguinte maneira. Na seção 5.1, apresentamos um resumo das motivações que nos levaram a estudar essa classe de equações. Na seção 5.2 encontram-se as classes de equações de Fokker-Planck generalizadas obtidas a partir da imposição da álgebra de simetrias de uma equação de reação-difusão com coeficiente logarítmico. Na seção 5.3, são apresentadas as equações de difusão em meio poroso generalizadas obtidas pelo mesmo procedimento da seção anterior. Na seção 5.4, apresentamos algumas soluções invariantes para casos particulares das equações de transporte encontradas. Parte dos resultados aqui obtidos estão apresentados na referência [80].

5.1 Motivação

Equações de transporte com coeficientes variáveis têm sido estudadas e aplicadas em diversos contextos, abrangedo, por exemplo, problemas em física de plasmas [105], caos quântico [106], difusão em colóides [107] e reações químicas [108]. Recentemente, equações de Fokker-Planck com coeficientes de arraste [74] e de difusão [75] com dependência logarítmica foram apresentadas na literatura. Em particular, Pesz [75] chamou a atenção para classes de equações de reação-difusão não-lineares [109] que têm coeficientes de difusão com inomogeneidades logarítmica e quadrática combinadas, $D(x) \sim x^2 \ln(x)$. Tal dependência foi observada em diferentes contextos: em processos de difusão de esferas pesadas [76], em caos quântico [77] e em processos que descrevem o comportamento de mercados de câmbio exterior [110]. Além disso, é natural supor que sistemas com confinamento, como um plasma em cromodinâmica quântica, sejam descritos por equações de transporte com coeficientes de arraste e de difusão que tenham comportamento descrito por funções logarítmicas, ou seja, que tendam a zero, ou divirjam, numa certa região de confinamento. Apesar disso, a ocorrência de dependência logarítmica em processos de difusão é pouco abordada na literatura, o que nos motivou a iniciar um estudo sistemático de classes de equações com essa característica.

Como já apontamos na Introdução desta tese, o método de simetrias de Lie tem sido empregado na obtenção de soluções e também na generalização de equações de transporte com coeficientes não-triviais [64, 65, 66, 67, 69, 70, 73, 111]. No procedimento padrão para obter equações generalizadas, o ingrediente central consiste na escolha da simetria inicial, que geralmente é considerada como a simetria de um conjunto mais restritivo de equações.

Interessados em obter equações de transporte mais gerais que também apresentem coeficiente de difusão do tipo $D(x) \sim x^2 \ln(x)$, utilizamos o método de simetrias de Lie para encontrar todas as equações invariantes a uma dada álgebra de simetria. Partimos de uma equação de reação-difusão apresentada em [75], com álgebra de simetria conhecida, e iniciamos nosso estudo obtendo generalizações para classes de equações de Fokker-Planck com termo de fonte não-linear [80]. Em seguida, estendemos essa análise para a classe de equações de difusão em meio poroso [81, 82] e encontramos equações de transporte não-linares, com alto grau de generalidade. A aplicação consistente do formalismo de grupos de Lie nos permitiu verificar que a dependência espacial dos coeficientes de difusão das equações generalizadas obtidas também é logarítmica.

5.2 Equações de Fokker-Planck

Como foi dito na introdução deste capítulo, vamos considerar a equação de reação-difusão com coeficiente de difusão logarítmico [75]

$$u_t + \Big[4x^2 \ln(x) u_x\Big]_x = 0 \ , \tag{5.1}$$

definida em $0 < x \leq 1$. Efetuando uma mudança de variáveis simples, essa equação pode ser reescrita de modo a descrever um processo de Rayleigh [75, 112]. Sua forma expandida é dada por

$$u_t + (8x\ln(x) + 4x)u_x + (4x^2\ln(x))u_{xx} = 0 \ . \tag{5.2}$$

A partir dos métodos apresentados no capítulo 3, verificamos que, para a EDP (5.1), descrita pela variável dependente u e pelas variáveis dependentes x_1 e x_2, os geradores infinitesimais definidos em (3.11),

$$\mathrm{X} = \xi_i(x_1, x_2, u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x_1, x_2, u)\frac{\partial}{\partial u} \ , \quad i = 1, 2 \ ,$$

correspondentes às simetrias de Lie pontuais, com $x_1 = x$ e $x_2 = t$, são

$$\begin{aligned}
\mathrm{X}_1 &= \mathrm{e}^{4t}4x\ln(x)\ \frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{e}^{4t}\ \frac{\partial}{\partial t}\ , \\
\mathrm{X}_2 &= u\ \frac{\partial}{\partial u}\ , \\
\mathrm{X}_3 &= \frac{\partial}{\partial t}\ , \\
\mathrm{X}_4 &= \mathrm{e}^{-4t}4x\ln(x)\ \frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{e}^{-4t}\ \frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{e}^{-4t}(4\ln(x)+4)u\ \frac{\partial}{\partial u}\ .
\end{aligned} \tag{5.3}$$

As relações de comutação, definidas em (3.79), para os geradores X_i, $i = 1, 2, 3, 4$ do espaço vetorial 4-dimensional são dadas por

$$\begin{aligned}
[\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_3] &= -4\mathrm{X}_1\ , \\
[\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_4] &= 16\mathrm{X}_2 + 8\mathrm{X}_3\ , \\
[\mathrm{X}_3, \mathrm{X}_4] &= -4\mathrm{X}_4\ , \\
[\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2] &= [\mathrm{X}_3, \mathrm{X}_2] = [\mathrm{X}_4, \mathrm{X}_2] = 0\ .
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Vemos que os geradores X_2 e X_3 correspondem, respectivamente, aos operadores de dilatação e de translação, enquanto que X_1 e X_4 são geradores que têm coeficientes $\xi_i(x_1, x_2, u)$, $i = 1, 2$, e $\eta(x_1, x_2, u)$ não triviais.

Com o intuito de obter outras equações de transporte que admitam as simetrias (5.3), como uma equação de Fokker-Planck com termo de fonte, vamos impor que os quatro vetores de campo X_i, $i = 1, 2, 3, 4$ sejam geradores de simetria de uma equação de transporte mais abrangente. A título de ilustração do método, comecemos com a equação de transporte geral

$$u_t + a_0 u + a_1 u_x + a_2 u_{xx} = 0 \ , \tag{5.5}$$

onde os coeficientes a_i, $i = 0, 1, 2$, apresentam dependência espacial, ou seja, $a_i = a_i(x)$. As expressões encontradas para esses coeficientes foram

$$\begin{aligned} a_0 &= d_0 \ \ln(x)^{-1}, \\ a_1 &= d_1 \ x \ln(x) + d_2 \ x, \\ a_2 &= d_2 \ x^2 \ln(x), \end{aligned}$$

onde d_i, $i = 0, 1, 2$ são constantes arbitrárias. Considerando $d_0 = 0$, $d_1 = 8$, e $d_2 = 4$ e substituindo esses coeficientes em (5.5), chegamos à equação original (5.2), como esperado. Uma vez entendido o procedimento, vamos agora de fato considerar uma equação de transporte que tenha um termo de fonte não-linear adicional

$$u_t + a_0 u + a_1 u_x + a_2 u_{xx} + a_3 u^{\alpha} = 0 \ . \tag{5.6}$$

Voltando ao capítulo 3, lembramos que um vetor de campo da forma (3.11),

$$\mathrm{X} = \xi_i(x_1, x_2, u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x_1, x_2, u)\frac{\partial}{\partial u} \ , \quad i = 1, 2 \ , \tag{5.7}$$

é um gerador de simetria da equação (5.1) se esta for invariante por forma sob a ação do grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro (ε) definido pelas expressões (3.50) e (3.51), a saber

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= x + \varepsilon \xi_1(x, t, u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \ , \\ \tilde{x}_2 &= t + \varepsilon \xi_2(x, t, u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \ , \\ \tilde{u} &= u + \varepsilon \eta(x, t, u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \ . \end{aligned} \tag{5.8}$$

De acordo com o Teorema 3.5.1.1, para que a EDP (5.6) admita o grupo de transformações infinitesimais a 1-parâmetro (5.8), com gerador infinitesimal (5.7), os coeficientes $\xi_i(x, t, u)$, $i = 1, 2$, e $\eta(x, t, u)$ devem satisfazer ao sitema de equações determinantes de simetria definido em (3.95). Fazendo uso dos recursos de computação simbólica com o pacote SADE [79], chegamos ao correspondente sistema

$$
\begin{aligned}
eq_1 &= 2a_2\partial^2_{ux}\eta + (3a_0u\partial_u - a_2\partial^2_{xx}\xi_1 + 3a_3u^\alpha\partial_u - \partial_t)\xi_1 + \xi_1\frac{d}{dx}a_1 - \frac{a_1}{a_2}\xi_1\frac{d}{dx}a_2 = 0,\\
eq_2 &= -a_2\partial^2_{uu}\xi_1 = 0,\\
eq_3 &= -2a_2\partial_u\xi_2 = 0,\\
eq_4 &= -2a_2\partial_x\xi_2 = 0,\\
eq_5 &= 2\partial_x\xi_1 + (a_0u\partial_u - a_1\partial_x - a_2\partial^2_{xx} + a_3u^\alpha\partial_u - \partial_t)\xi_2 - \frac{\xi_1}{a_2}\frac{d}{dx}a_2 = 0,\\
eq_6 &= 2\partial_u\xi_1 - 2a_2\partial^2_{ux}\xi_2 = 0,\\
eq_7 &= -a_2\partial^2_{uu}\xi_2 = 0,\\
eq_8 &= a_2\partial^2_{uu}\eta + (2a_1\partial_u - 2a_2\partial^2_{ux})\xi_1 = 0,\\
eq_9 &= (a_0(1-u\partial_u) + a_1\partial_x + a_2\partial^2_{xx} + a_3(u^{\alpha-1}\alpha - u^\alpha\partial_u) + \partial_t)\eta + (2a_0u\partial_x + 2a_3u^\alpha\partial_x)\xi_1\\
&\quad + \xi_1u\frac{d}{dx}a_0 - \left(\frac{a_0}{a_2}\xi_1u + \frac{a_3}{a_2}\xi_1u^\alpha\right)\frac{d}{dx}a_2 + \xi_1u^\alpha\frac{d}{dx}a_3 = 0. \qquad (5.9)
\end{aligned}
$$

Comparando a equação de transporte (5.6) a uma equação de Fokker-Planck com coeficiente de difusão $D(x)$ e coeficiente de arraste $f(x)$ independentes do tempo,

$$u_t + [fu + (Du)_x]_x = 0, \qquad (5.10)$$

que também pode ser escrita como

$$u_t + fu_x + uf_x + Du_{xx} + 2u_xD_x + uD_{xx} = 0\ , \qquad (5.11)$$

chegamos às seguintes expressões para as funções a_i, $i = 0, 1, 2$:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= f_x + D_{xx}\ , && (5.12)\\
a_1 &= f + 2D_x\ , && (5.13)\\
a_2 &= D\ . && (5.14)
\end{aligned}
$$

Vamos agora obter o coeficiente de difusão D e verificar em que situações o coeficiente de arraste f e o termo de fonte não-linear da equação (5.6) sobrevivem para alguma simetria. Para tanto, precisamos impor que a equação (5.6) admita como álgebra de simetrias de Lie uma subálgebra da álgebra expandida pelos geradores X_i, $i = 1, 2, 3, 4$.

Substituindo os componentes de cada gerador de simetria admitido no sistema de equações determinantes (5.9), chegaremos a um conjunto superdeterminado de equações diferenciais não-lineares para as funções a_i, $i = 0, 1, 2, 3$.

Levando em conta o Teorema 3.4.2.1 e a Definição 3.4.2.4, vemos que as relações de comutação (5.4) fornecem as seguintes subálgebras: $\{\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \mathbf{X_3}, \mathbf{X_4}\}$, $\{\mathbf{X_1}\}$, $\{\mathbf{X_2}\}$, $\{\mathbf{X_3}\}$, $\{\mathbf{X_4}\}$, $\{\mathbf{X_1}, \mathbf{X_3}\}$, $\{\mathbf{X_1}, \mathbf{X_4}\}$ e $\{\mathbf{X_1}, \mathbf{2X_2} + \mathbf{X_3}, \mathbf{X_4}\}$. Ao impor que a equação (5.6) admite essas simetrias (desconsiderando as simetrias triviais $\{\mathbf{X_2}\}$ e $\{\mathbf{X_3}\}$), chegamos aos seguintes resultados.

Simetrias $\{\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \mathbf{X_3}, \mathbf{X_4}\}$: Substituindo separadamente os coeficientes de cada um dos geradores X_i, $i = 1, 2, 3, 4$ nas equações (5.9), temos

$$\left(\ln(x) + 1 - \frac{x\ln(x)}{a_2}\frac{d}{dx}a_2\right)(a_0 u + a_3 u^\alpha) + x\ln(x)\left(u\frac{d}{dx}a_0 + u^\alpha \frac{d}{dx}a_3\right) = 0,$$

$$\left(\ln(x) + 1 - \frac{x\ln(x)}{a_2}\frac{d}{dx}a_2\right)a_1 - \frac{a_2}{x} + x\ln(x)\left(\frac{d}{dx}a_1 - 4\right) = 0,$$

$$\left(3\ln(x) + 3 - \frac{x\ln(x)}{a_2}\frac{d}{dx}a_2\right)(a_0(x)u + a_3(x)u^\alpha) - \frac{a_1 u}{x} + \frac{a_2 u}{x^2}$$
$$- u(\ln(x)+1)(a_0 - 1 + a_3\alpha u^{\alpha-1}) + x\ln(x)\left(u\frac{d}{dx}a_0 + u^\alpha\frac{d}{dx}a_3\right) = 0,$$

$$(\alpha - 1)a_3 u^\alpha = 0,$$

$$1 - \left(\frac{x}{a_2}\frac{d}{dx}a_2 + 2\right)\ln(x) = 0,$$

$$-\frac{3a_2}{x} - \left(\frac{a_1}{a_2}\frac{d}{dx}a_2 - 4 - \frac{d}{dx}a_1\right)x\ln(x) + a_1(\ln(x)+1) = 0,$$

com solução geral

$$\begin{aligned}
a_0 &= d_0\ \ln(x)^{-1},\\
a_1 &= (d_1 + 4)x\ln(x) + d_2\ x,\\
a_2 &= d_2\ x^2\ln(x),\\
a_3 &= 0,
\end{aligned}$$

onde d_i, $i = 0, 1, 2$ são constantes arbitrárias. Substituindo as expressões acima nas equações (5.12)-(5.14), obtemos $d_0 = 0$, $d_1 = d_2 = 4$ e coeficientes de arraste e difusão dados, respectivamente, por

$$f(x) = 8x\ln(x) + 4x \quad \text{e} \quad D(x) = 4x^2\ln(x) \ .$$

O resultado é uma classe de equações de Fokker-Planck com coeficientes logarítmicos que abrange a classe de equações de reação-difusão (5.1), ou seja

$$u_t + [(8x\ln(x) + 4x)u + (4x^2\ln(x)u)_x]_x = 0. \tag{5.15}$$

Simetria $\{\mathbf{X_1}\}$: Seguindo o procedimento descrito anteriormente para o gerador X_1, chegamos a

$$\begin{aligned}
a_0 &= d_0\ \ln(x)^{-1}\ , \\
a_1 &= (d_1 + 4)x\ln(x) + d_2\ x\ , \\
a_2 &= d_2\ x^2\ln(x)\ , \\
a_3 &= d_3\ \ln(x)^{-1}\ ,
\end{aligned}$$

e obtemos uma equação do tipo Fokker-Planck com termo de fonte não-linear:

$$u_t + [(8x\ln(x) + 4x)u + (4x^2\ln(x)u)_x]_x + d_3\ \ln(x)^{-1}u^\alpha = 0\ , \tag{5.16}$$

onde d_3 é uma constante arbitrária. As subalgebras $\{\mathbf{X_1}, \mathbf{X_3}\}$ e $\{\mathbf{X_1}, \mathbf{2X_2} + \mathbf{X_3}, \mathbf{X_4}\}$ levam a essa mesma classe de equações.

Simetria $\{\mathbf{X_4}\}$: No presente caso, temos

$$\begin{aligned}
a_0 &= d_0\ \ln(x)^{-1} + (d_1 - 4)\ln(x) + d_2 - 4\ , \\
a_1 &= (3d_1 - 4)x\ln(x) + d_2\ x\ , \\
a_2 &= d_2\ x^2\ln(x)\ , \\
a_3 &= d_3\ x^{\alpha-1}\ln(x)^{\alpha-2}\ ,
\end{aligned}$$

e o resultado é uma outra equação do tipo Fokker-Planck com uma não-linearidade no termo de fonte, que também é obtida a partir da imposição da subálgebra $\{\mathbf{X_3}, \mathbf{X_4}\}$:

$$u_t + [(8x\ln(x) + 4x)u + (4x^2\ln(x)u)_x]_x + d_3\ x^{\alpha-1}\ln(x)^{\alpha-2}u^\alpha = 0\ . \tag{5.17}$$

5.3 Equações de difusão em meio poroso

No capítulo 4 apresentamos equações da classe de equações de difusão em meio poroso que têm coeficiente de difusão constante, $D = 1$. Nosso interesse aqui é obter classes de equações com coeficiente de difusão variáveis, dadas as motivações físicas já discutidas. Mais especificamente, queremos obter classes de equações de difusão em meio poroso com coeficientes difusivos logarítmicos. Para isso, utilizamos o procedimento apresentado na seção anterior, ou seja, impuzemos subálgebras da álgebra 4-dimensional (5.3) a equações de transporte gerais e resolvemos os correspondentes sistemas de equações determinantes. Seguindo o escopo do capítulo 4, bem como a notação já estabelecida, listamos a seguir as equações de transporte generalizadas obtidas.

5.3.1 Processos de difusão lenta

Em nosso estudo, consideramos os seguintes processos de difusão lenta:

Processos de difusão não-lineares com convecção

A equação (4.5), com dependência espacial no coeficiente de difusão, é dada por

$$u_t = [D(x)(u^n)_x]_x + f(x)u^s u_x \ . \tag{5.18}$$

Ao comparar a equação (5.18) com a equação de transporte geral

$$u_t + a_0 \ u^{n-1}u_x + a_1 \ u^{n-2}(u_x)^2 + a_2 \ u^{n-1}u_{xx} + a_3 \ u^s u_x = 0 \ , \tag{5.19}$$

obtivemos as expressões para as funções a_i, $i = 0, 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} a_0 &= n \ D_x \ , \\ a_1 &= n(n-1) \ D \ , \\ a_2 &= n \ D \ , \\ a_3 &= f(x) \ . \end{aligned}$$

Com a imposição de subálgebras da álgebra (5.3) à equação (5.19), obtivemos os seguintes resultados.

Simetrias $\{\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \mathbf{X_3}, \mathbf{X_4}\}$, $\{\mathbf{X_1}\}$, $\{\mathbf{X_1}, \mathbf{X_3}\}$ e $\{\mathbf{X_1}, \mathbf{2X_2} + \mathbf{X_3}, \mathbf{X_4}\}$:

$$u_t + [4x^2 \ln(x)(u^n)_x]_x + [x\ (c + 4\ \ln(x)u^{-s})]\ u^s u_x = 0\ . \tag{5.20}$$

Simetrias $\{\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \mathbf{X_3}, \mathbf{X_4}\}$, $\{\mathbf{X_4}\}$, $\{\mathbf{X_1}, \mathbf{X_4}\}$ e $\{\mathbf{X_1}, \mathbf{2X_2} + \mathbf{X_3}, \mathbf{X_4}\}$:

$$u_t + [4x^{1+n} \ln(x)^n (u^n)_x]_x + [x\ (4 + 4\ \ln(x))u^{-s}]\ u^s u_x = 0\ . \tag{5.21}$$

Note que, para $n = 1$, $s = 0$ e $c = 4$ as equações (5.20) e (5.21) são equivalentes.

Processos de difusão não-lineares com termo de absorção

A equação de transporte geral

$$u_t + a_0\ u^{n-1} u_x + a_1\ u^{n-2}(u_x)^2 + a_2\ u^{n-1} u_{xx} + a_3\ u^m = 0\ , \tag{5.22}$$

quando comparada à equação (4.9) generalizada com dependência espacial no coeficiente de difusão,

$$u_t = [D(x)(u^n)_x]_x + g(x)u^m\ , \tag{5.23}$$

fornece as seguintes expressões para as funções a_i, $i = 0, 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
a_0 &= n\ D_x\ , \\
a_1 &= n(n-1)\ D\ , \\
a_2 &= n\ D\ , \\
a_3 &= g(x)\ .
\end{aligned}$$

Ao impor que a equação (5.22) admite subálgebras da álgebra (5.3), obtivemos as equações a seguir.

Simetrias $\{\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \mathbf{X_3}, \mathbf{X_4}\}$, $\{\mathbf{X_1}\}$, $\{\mathbf{X_1}, \mathbf{X_3}\}$ e $\{\mathbf{X_1}, \mathbf{2X_2} + \mathbf{X_3}, \mathbf{X_4}\}$:

$$u_t + [4x^2 \ln(x)(u^n)_x]_x + c\ \ln(x)^{-1}\ u^m = 0\ . \tag{5.24}$$

Simetrias $\{\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \mathbf{X_3}, \mathbf{X_4}\}$, $\{\mathbf{X_4}\}$, $\{\mathbf{X_1}, \mathbf{X_4}\}$ e $\{\mathbf{X_1}, \mathbf{2X_2} + \mathbf{X_3}, \mathbf{X_4}\}$:

$$u_t + [4x^{1+n} \ln(x)^n \ (u^n)_x]_x + c \ x^{m-1} \ln(x)^{m-2} \ u^m = 0 \ . \tag{5.25}$$

Observemos que, para $n = m = 1$, as equações (5.24) e (5.25) são equivalentes.

Processos de difusão não-lineares com termo de arraste

Consideramos que esse caso está contemplado com nosso estudo feito para classes de equações de Fokker-Planck [80], apresentado na seção 5.2.

5.3.2 Processos de difusão rápida

No capítulo 4 mencionamos nosso interesse em encontrar uma classe de processos de difusão rápida descrita pela equação (4.17), que contempla um termo de fonte não-linear, ou seja

$$\begin{aligned} u_t &= [\mathcal{D}(x,u)u_x]_x + z(x,u) \\ &= [h(x)D(u)u_x]_x + f(x)u^\beta \ , \\ &= [h(x)u^{-\alpha}u_x]_x + f(x)u^\beta \ , \quad \alpha \geq 0 \ . \end{aligned} \tag{5.26}$$

Comparando a expressão (5.26) com a equação de transporte geral

$$u_t + a_0 \ u^{-\alpha}u_x + a_1 \ u^{-\alpha-1}(u_x)^2 + a_2 \ u^{-\alpha}u_{xx} + a_3 \ u^\beta = 0 \ , \tag{5.27}$$

temos as funções a_i, $i = 0, 1, 2, 3$, dadas por

$$\begin{aligned} a_0 &= h_x \ , \\ a_1 &= -\alpha h \ , \\ a_2 &= h \ , \\ a_3 &= f(x) \ . \end{aligned}$$

Impondo subálgebras da álgebra 4-dimensional (5.3) à equação geral (5.27), encontramos as seguintes equações de transporte generalizadas.

Simetrias $\{\mathbf{X_1},\mathbf{X_2},\mathbf{X_3},\mathbf{X_4}\}$, $\{\mathbf{X_1}\}$, $\{\mathbf{X_1},\mathbf{X_3}\}$ e $\{\mathbf{X_1},\mathbf{2X_2}+\mathbf{X_3},\mathbf{X_4}\}$:

$$u_t + [4x^2\ln(x)u^{-\alpha}u_x]_x + c\ \ln(x)^{-1}\ u^\beta = 0\ . \tag{5.28}$$

Simetrias $\{\mathbf{X_1},\mathbf{X_2},\mathbf{X_3},\mathbf{X_4}\}$, $\{\mathbf{X_4}\}$, $\{\mathbf{X_1},\mathbf{X_4}\}$ e $\{\mathbf{X_1},\mathbf{2X_2}+\mathbf{X_3},\mathbf{X_4}\}$:

$$u_t + [4x^{2-\alpha}\ln(x)^{1-\alpha}u^{-\alpha}u_x]_x + c\ x^{\beta-1}\ln(x)^{\beta-2}\ u^\beta = 0\ . \tag{5.29}$$

5.4 Soluções invariantes

Uma das vantagens de se trabalhar com os métodos de simetria de Lie é a possibilidade de encontrar soluções invariantes, conforme destacado no capítulo 3, seção 3.5. Utilizando o aplicativo Maple e subrotinas do pacote SADE [79], buscamos por soluções invariantes para as equações de transporte estudadas. Consideramos especialmente os geradores de simetria não-triviais, $\{\mathbf{X_1}\}$ e $\{\mathbf{X_4}\}$, e algumas combinações simples dos geradores de simetria (5.3). Os resultados obtidos são apresentados a seguir.

5.4.1 Equações de reação-difusão

Para a classe de equações de reação-difusão (5.1),

$$u_t + \Big[(4x^2\ln(x))u_x\Big]_x = 0\ ,$$

obtivemos

Simetrias	Soluções invariantes
$\{\mathbf{X_1}\}$:	$u(x,t) = c_1 + c_2\Big[t - \frac{1}{4}\ln(\ln(x))\Big]$
$\{\mathbf{X_4}\}$:	$u(x,t) = \frac{1}{x}\ e^{4t}\Big[c_1 + c_2\Big(t + \frac{1}{4}\ln(\ln(x))\Big)\Big]$
$\{\mathbf{X_1}+\mathbf{X_2}\}$:	$u(x,t) = \exp\left(-\frac{1}{4}e^{-4t}\right)\left[c_1\ J_\nu\left(e^{-2t}\ln(x)\right) + c_2\ Y_\nu\left(e^{-2t}\ln(x)\right)\right]\ ,\quad \nu = 0$
$\{\mathbf{X_2}+\mathbf{X_4}\}$:	$u(x,t) = \frac{1}{x}\ \exp(4t + \frac{1}{4}e^{4t})\left[c_1\ J_\nu\left(e^{2t}\ln(x)\right) + c_2\ Y_\nu\left(e^{2t}\ln(x)\right)\right]\ ,\quad \nu = 0$

onde J_ν e Y_ν são funções de Bessel com parâmetro ν; c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

5.4.2 Equações de difusão com termo convecção

Para as equações (5.20) e (5.21), tomamos $n = 1$, $s = 0$ e $c = 4$ e buscamos por soluções para a equação resultante

$$u_t + [4x^2 \ln(x) u_x]_x + [x\ (4 + 4\ \ln(x))]\ u_x = 0\ ,$$

Simetrias	Soluções invariantes
$\{\mathbf{X_1}\}$:	$u(x,t) = c_1 + c_2 \exp(4t - \ln(\ln(x)))\ x^{4t}\ \ln(x)^{-\ln(x)}$
$\{\mathbf{X_4}\}$:	$u(x,t) = \frac{1}{x\ \ln(x)} \left[c_1 \exp\left[\frac{4t+\ln(\ln(x))}{8}\right] \left[-4\ln(x)+4\sqrt{4+20\ln(x)}\sqrt{4+4\ln(x)}\right]\right] + \frac{1}{x\ \ln(x)} \left[c_2 \exp\left[\frac{-4t-\ln(\ln(x))}{8}\right] \left[-4\ln(x)+4\sqrt{4+20\ln(x)}\sqrt{4+4\ln(x)}\right]\right]$
$\{\mathbf{X_1} + \mathbf{X_2}\}$:	$u(x,t) = x^{2t} \ln(x)^{\frac{-1}{2}(\ln(x)+1)} e^{2t-\frac{e^{-4t}}{4}} \left[c_1 J_\nu\big(\ln(x)+1\big) + c_2 Y_\nu\big(\ln(x)+1\big)\right]\ ,\ \nu=e^{-2t}\sqrt{\ln(x)}$
$\{\mathbf{X_2} + \mathbf{X_4}\}$:	$u(x,t) = x^{-2t-1} \ln(x)^{\frac{-1}{2}(\ln(x)+4)} e^{2t+\frac{e^{4t}}{4}} \Big[c_1 J_\nu\big(\tfrac{1}{4}\sqrt{20\ln(x)+4}\ \sqrt{4\ln(x)+4}\big) + c_2 Y_\nu\big(\tfrac{1}{4}\sqrt{20\ln(x)+4}\ \sqrt{4\ln(x)+4}\big)\Big]\ ,\ \nu=e^{2t}\sqrt{\ln(x)}$

onde J_ν e Y_ν são funções de Bessel com parâmetro ν; c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

5.4.3 Equações de difusão com termo de absorção

Para as equações (5.24) e (5.25), tomamos $n = m = 1$ e buscamos por soluções para a equação resultante

$$u_t + [4x^2 \ln(x) u_x]_x + c\ \ln(x)^{-1}\ u = 0\ ,$$

Simetrias	Soluções invariantes
$\{\mathbf{X_1}\}$:	$u(x,t) = c_1\ \operatorname{sen}\Big(\frac{1}{2}\sqrt{c}\ [4t - \ln(\ln(x))]\Big) + c_2\ \cos\Big(\frac{1}{2}\sqrt{c}\ [4t - \ln(\ln(x))]\Big)$
$\{\mathbf{X_4}\}$:	$u(x,t) = c_1\ \frac{1}{x\ \ln(x)}\Big[\exp\Big(\frac{1}{2}\left(\ln(\ln(x)) + 4t\right)(2 + i\sqrt{c})\Big)\Big] + c_2\ \frac{1}{x\ \ln(x)}\Big[\exp\Big(-\frac{1}{2}\left(\ln(\ln(x)) + 4t\right)(-2 + i\sqrt{c})\Big)\Big]$
$\{\mathbf{X_1} + \mathbf{X_2}\}$:	$u(x,t) = \exp(-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4t})\Big[c_1\ J_\nu\left(\mathrm{e}^{-2t}\sqrt{\ln(x)}\right) + c_2\ Y_\nu\left(\mathrm{e}^{-2t}\sqrt{\ln(x)}\right)\Big],\ \nu = i\sqrt{c}$
$\{\mathbf{X_2} + \mathbf{X_4}\}$:	$u(x,t) = \frac{1}{x}\ \exp(4t + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{4t})\Big[c_1\ J_\nu\left(\mathrm{e}^{2t}\sqrt{\ln(x)}\right) + c_2\ Y_\nu\left(\mathrm{e}^{2t}\sqrt{\ln(x)}\right)\Big],\quad \nu = i\sqrt{c}$

onde J_ν e Y_ν são funções de Bessel com parâmetro ν; c, c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

5.4.4 Equações de difusão com termo de arraste (equações de Fokker-Planck)

Considerando $\alpha = 1$ nas equações de Fokker-Planck não-lineares (5.16) e (5.17), obtemos as seguintes soluções para a equação resultante

$$u_t + \Big[(4x^2\ln(x)u)_x + (8x\ \ln(x) + 4x)\ u\Big]_x + c\ \ln(x)^{-1}u = 0\ ,$$

Simetrias	Soluções invariantes
$\{\mathbf{X_1}\}$:	$u(x,t) = c_1\ \exp\Big[\Big(-\frac{1}{2}\ \ln(\ln(x)){+}2t\Big)\Big(4\ \ln(x){+}2{+}(-8\ \ln(x){+}4{-}c)^{\frac{1}{2}}\Big)\Big] + c_2\ \exp\Big[\Big(-\frac{1}{2}\ \ln(\ln(x)){+}2t\Big)\Big(4\ \ln(x){+}2{-}(-8\ \ln(x){+}4{-}c)^{\frac{1}{2}}\Big)\Big]$
$\{\mathbf{X_4}\}$:	$u(x,t) = \frac{c_1}{x\ln(x)}\ \exp\Big(\Big[-\frac{1}{2}\ \ln(\ln(x)){-}2t\Big]\Big[4\ \ln(x){-}\sqrt{16\ \ln^2(x){+}4{-}c}\Big]\Big) + \frac{c_2}{x\ln(x)}\ \exp\Big(\Big[-\frac{1}{2}\ \ln(\ln(x)){-}2t\Big]\Big[4\ \ln(x){+}\sqrt{16\ \ln^2(x){+}4{-}c}\Big]\Big)$
$\{\mathbf{X_1} + \mathbf{X_2}\}$:	$u(x,t) = \exp(-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4t}{+}4t)\ln(x)^{-1-2\ln(x)}x^{8t}[c_1 J_\nu(\sqrt{-8\ln(x){+}4{-}c}) + c_2 Y_\nu(\sqrt{-8\ln(x){+}4{-}c})]\ ,\quad \nu{=}e^{-2t}\sqrt{\ln(x)}$
$\{\mathbf{X_2} + \mathbf{X_4}\}$:	$u(x,t) = \exp(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{4t})\ln(x)^{-1-2\ln(x)}x^{-8t-1}[c_1 J_\nu(\sqrt{16\ln(x)^2{+}4{-}c}) + c_2 Y_\nu(\sqrt{16\ln(x)^2{+}4{-}c})]\ ,\quad \nu{=}e^{2t}\sqrt{\ln(x)}$

onde J_ν e Y_ν são funções de Bessel com parâmetro ν; c, c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

5.4.5 Equação de difusão logarítmica

Voltando às equações de difusão rápida, vemos que, para $\alpha = 1$ temos uma classe chamada de equações de difusão logarítmica[1]. Considerando $\alpha = \beta = 1$, a equação (5.28) fica expressa por

$$u_t + [4x^2 \ln(x) \ln(u)]_x + c \ \ln(x)^{-1} \ u = 0 \ ,$$

e possui algumas soluções invariantes, como

Simetrias	Soluções invariantes
$\{\mathbf{X_1}\}, \{\mathbf{X_1} + \mathbf{X_2}\}$:	$u(x,t) = c_1 \ \exp\left(\frac{c}{4}\left[\frac{\ln(\ln(x))-4t}{\ln(x)}\right]\right) - \frac{1}{c}\,(2 \ \ln(x) + 1)\,(4x \ \ln(x) \ \ln(u))$
$\{\mathbf{X_4}\}, \{\mathbf{X_2} + \mathbf{X_4}\}$:	$u(x,t) = c_1 \ \frac{1}{x\ln(x)} \ \exp\left(-\frac{c}{4}\left[\frac{\ln(\ln(x))+4t}{\ln(x)}\right]\right) - \frac{1}{c}\,(2 \ \ln(x) + 1)\,(4x \ \ln(x) \ \ln(u))$

onde c e c_1 são constantes arbitrárias.

Analogamente, particularizando a equação (5.29) com $\alpha = \beta = 1$, temos

$$u_t + [4x \ln(u)]_x + c \ \ln(x)^{-1} \ u = 0 \ ,$$

e algumas de suas soluções invariantes são dadas por

Simetrias	Soluções invariantes
$\{\mathbf{X_1}\}$:	$u(x,t) = \frac{1}{c}\left[-4\ln(x)\ln(u) + \exp\left(\frac{-4ct+\ln(\ln(x))}{4\ln(x)}\right) \ c_1 c\right]$
$\{\mathbf{X_1} + \mathbf{X_2}\}$:	$u(x,t) = \left[-4e^{\frac{e^{-4t}}{4}} \ln(x)\ln(u) + c_1 \exp\left(\frac{e^{-4t}\ln(x)-4ct+c\ln(\ln(x))}{4\ln(x)}\right) c\right]^{\frac{-e^{-4t}}{4c}}$
$\{\mathbf{X_4}\}$:	$u(x,t) = \frac{1}{c \ x\ln(x)}\left[4x\ln(u)\ln(x)^2 - \exp\left(\frac{-4ct-\ln(\ln(x))}{4\ln(x)}\right) \ c_1 c\right]$
$\{\mathbf{X_2} + \mathbf{X_4}\}$:	$u(x,t) = \frac{-e^{\frac{e^{4t}}{4}}}{c \ x\ln(x)}[-4e^{\frac{-e^{4t}}{4}} x \ \ln(x)^2 \ \ln(u)$ $-c_1 c\exp[(-e^{4t}\ln(x) - 4ct + c\ln(\ln(x)))/4\ln(x)]]$

onde c e c_1 são constantes arbitrárias.

[1]De acordo com a literatura [82], uma equação de transporte é classificada como *equação de difusão logarítmica* se houver a presença do fator $u^{-1}u_x = [\ln(u)]_x$.

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho, estudamos classes de processos estocásticos de não-equilíbrio utilizando ferramentas fundadas em simetria: exploramos a noção de espaço de Fock (representação número) na descrição de redes de spin estocásticas e usamos métodos de simetria de Lie para obter equações de transporte generalizadas.

Na primeira parte do trabalho, apresentamos o desenvolvimento do formalismo baseado no espaço de Fock para tratar redes fermiônicas. Os resultados gerais foram deduzidos em paralelo ao caso de bósons, com exceção de algumas peculiaridades como, por exemplo, na definição do propagador ou da função geradora de momentos, onde utilizamos variáveis de Grassmann. Alguns resultados sobre integral de trajetória para férmions, apesar conhecidos na literatura de teoria quântica de campos, foram apresentados aqui para especificar as características da rede. O ingrediente central desse formalismo consiste na definição de um operador de densidade de probabilidade, que leva a um procedimento geral para tratar equações estocásticas no contexto da representação número de ocupação para bósons e férmions. Aplicamos o presente formalismo para estudar o modelo de Glauber linear d-dimensional, deduzindo as equações de evolução temporal para a magnetização, $\langle \widehat{n}_m \rangle$, e para a função de correlação por pares, $\langle \widehat{n}_m \widehat{n}_n \rangle$, em termos dos operadores de criação e aniquilação. Essa análise mostra que tais quantidades físicas podem ser associadas diretamente com o propagador no limite contínuo e aponta, em particular, para o fato de que esse procedimento também pode ser utilizado no estudo da dinâmica de Glauber não-linear. Como perspectiva futura, pretendemos aplicar esse procedimento a outros sistemas estocásticos de spins como, por exemplo, fazendo uso do formalismo de integral de trajetória para tratar o problema da renormalização em percolação direcionada.

A segunda parte do trabalho é referente ao estudo de classes de equações de difusão com coeficiente de difusão logarítmico. Esse tipo de dependência espacial nos coeficientes foi observada na descrição fenomenológica de sistemas físicos distintos, mas ainda tem sido pouco explorada, o que nos motivou a investigar a possibilidade de sua ocorrência em classes de equações de transporte mais abrangentes. Para isso, utilizamos os métodos de simetria de Lie, usualmente empregados no estudo de equações difereciais. Partindo de uma equação de reação-difusão com álgebra de simetria conhecida, encontramos todas as equações de uma certa classe que são invariantes por essa álgebra de simetria. A classe que consideramos primariamente foi a de equações de Fokker-Planck não-lineares em que o termo de fonte é um monômio na função de distribuição. Encontramos equações de Fokker-Planck com dependência logarítmica nos termos de arraste, difusão e fonte. Como uma extensão dessa análise, consideramos a classe de equações parabólicas não-lineares, na qual se encontram as classes de equações de difusão em meio poroso. Pela imposição de subálgebras a equações de transporte gerais, encontramos classes de equações de processos de difusão lenta, com termos de absorção e convecção, e também equações que descrevem processos de difusão rápida. A aplicação consistente do formalismo de grupos de Lie nos permitiu verificar que a dependência espacial dos coeficientes de difusão das equações de transporte generalizadas também é logarítmica. Para algumas simetrias da álgebra 4-dimensional considerada, tomamos casos particulares das classes de equações de difusão não-lineares encontradas e obtivemos soluções invariantes que descrevem distribuições algébricas e log-algébricas. As classes de equações estudadas têm coeficientes de difusão com inomogeneidades logarítmica e quadrática combinadas, $D(x) \sim x^2 \ln(x)$. Como sequência para esse trabalho, apontamos para a possibilidade de estudar essas equações através de uma transformação de equivalência, uma vez que esta consiste em uma mudança nas variáveis dependente e independentes que mapeia equações em outras equações da mesma família, porém, com os coeficientes descritos por funções distintas. Também é possível estudar essas classes de equações com a abordagem de simetrias não-clássicas, conhecidas como simetrias potenciais, que permitem encontrar soluções invariantes que não são acessíveis a partir de simetrias de ponto. Outro aspecto interessante a ser explorado é a extensão desse estudo unidimensional para o caso de dimensões superiores.

Referências

[1] T. Tomé e M. J. de Oliveira, *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade* (EdUSP, São Paulo, 2001).

[2] J. Marro e R. Dickman, *Nonequilibrium Phase Transtions in Lattice Models* (Cambridge University Press, New York, 1999).

[3] R. Dickman e R. R. Vidigal, Braz. J. Phys. **33** (2003) 73; R. R. Vidigal, *Expansão em Série para o Processo de Pilha de Areia Estocástica*, Tese de Doutoramento, ICEx - Instituto de Ciências Exatas, Depto. de Física, UFMG, 2004.

[4] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods* (Springer-Verlang, Berlin , 1990).

[5] N. G. Van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (North-Holland, Amsterdam, 1992).

[6] M. Droz e A. Lipowski, Braz. J. Phys. **33** (2003) 526.

[7] A. Vespignani, R. Dickman, M. A. Munoz e S. Zapperi, Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 5676.

[8] M. J. Howard e U. C. Täuber, J. Phys. A **30** (1997) 7721.

[9] N. G. Van Kampem, J. Stat. Phys. **24** (1981) 175.

[10] M. Schönberg, Il Nuovo Cimento **9** (1952) 1139; **10** (1953) 419; **10** (1953) 697.

[11] M. Doi, J. Phys. A: Math. Gen. **9** (1976) 1465; **9** (1976) 1479.

[12] U. C. Täuber: Field-Theory Approaches to Nonequilibrium Dynamics. Em: *Ageing and the Glass Transition, Lecture Notes in Physics*, vol. **716**, 295-348, ed. M. Henkel, M. Pleimling e R. Sanctuary (Springer, Heidelberg, 2007).

[13] P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations* (Springer, Berlin, 1986).

[14] H. Stephani, *Differential Equations: Their Solution using Symmetries* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).

[15] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications* (Dover, New York, 2005).

[16] P. E. Hydon, *Symmetry Methods for Differential Equations: A Beginner's Guide* (Cambridge University Press, New York, 2000).

[17] G. W. Bluman, S. C. Anco *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations* (Springer, New York, 2002).

[18] A. L. Fetter e J. D. Walecka*, Quantum Theory of Many-Particles Systems* (McGraw-Hill, New York, 1971).

[19] H. N. Nazareno, *Mecânica Estatística e Funções de Green* (Editora Universidade de Brasília, Brasília, 1986).

[20] D. C. Mattis e M. L. Glasse, Rev. Mod. Phys. **70** (1998) 979.

[21] C. Martin, E. D. Siggia e H. A. Rose, Phys. Rev. A **8** (1973) 423.

[22] L. Peliti, J. Physique **46** (1985) 1469.

[23] J. Cardy, Int. J. Mod. Phys. B **8** (1994) 3463.

[24] P. Grassberger e M. Scheunert, Fort. Phys. **28** (1980) 547.

[25] H. C. Andersen, J. Math. Phys. **41** (2000) 1979.

[26] P. T. Muzy, S. R. Salinas, A. E. Santana e T. Tomé, Rev. Bras. Ens. Fís. **27** (2005) 447; P. T. Muzy, *Inomogeneidades no Espaço (desordem fraca; modelos de p spins) e Representação no Espaço de Fock em Problemas da Física Estatística*, Tese de Doutoramento, IFUSP - Instituto de Física da Universidade de São Paulo, 2004.

[27] A. Loinger, Ann. Phys. (NY) **20** (1962) 132.

[28] G. Della Riccia e N. Wiener, J. Math. Phys. **7** (1966) 1372.

[29] G. Lugarini e M. Pauri, Ann. Phys. (NY) **44** (1967) 226.

[30] J. J. Hopfield e A. J. F. Bastini, Phys. Rev. **168** (1968) 193.

[31] E. C. G. Sudarshan e N. Mukunda, *Classical Dynamics: A modern Perspective* (John Wiley and Sons, New York, 1974).

[32] T. Ali e E. Prugovečki, Physica A **89** (1977) 501.

[33] T. N. Sherry e E. C. G. Sudarshan, Phys. Rev. D **18** (1978) 4580.

[34] B. Misra, Proc. Natl. Acad. Sciences USA **17** (1978) 315.

[35] C. George e I. Prigogine, Physica A **99** (1979) 369.

[36] D. Bohm e B. J. Hiley, Found. Phys. **11** (1981) 179.

[37] R. Paul, *Field Theoretical Methods in Chemical Physics* (Elsevier, Amsterdam, 1982).

[38] B. Misra e I. Prigogine, Lett. Math. Phys. **7** (1983) 421.

[39] A. Matos Neto e J. D. M. Vianna, Il Nuovo Cimento B **86** (1985) 117.

[40] P. R. Holland, Found. Phys. **16** (1986) 701; M. C. B. Fernandes e J. D. M. Vianna, Found. Phys. **29** (1999) 201.

[41] L. M. Abreu, A. E. Santana e A. Ribeiro Filho, Ann. Phys. (NY) **297** (2002) 396.

[42] A. E. Santana, F. C. Khanna, H. Chu e Y. C. Chang, Ann. Phys. (NY) **246** (1996) 481.

[43] T. D. Schultz, D. C. Mattis e E. H. Lieb, Rev. Mod. Phys. **36** (1964) 856.

[44] F. C. Alcaraz, M. Droz, M. Henkel e V. Rittenberg, Ann. Phys. (NY) **230** (1994) 250.

[45] T. Tomé e M. J. de Oliveira, Phys. Rev. E **58** (1998) 4242.

[46] R. Dickman, J. Stat. Phys. **55** (1989) 997.

[47] M. J. de Oliveira, T. Tomé e R. Dickman, Phys. Rev. A **46** (1992) 273.

[48] C. Godrèche e J. M. Luck, J. Phys. A: Math. Gen. **33** (2000) 1151.

[49] M. D. Grynberg e R. B. Stinchcombe, Phys. Rev. E **71** (2005) 066104.

[50] T. Michael, S. Trimper e M. Schulz, Phys. Rev. E **73** (2006) 062101.

[51] V. Brunel, K. Oerding e F. van Wijland, J. Phys. A: Math. Gen. **33** (2000) 1085.

[52] L. Erdős, M. Salmhofer e H. T. Yau, J. Stat. Phys. **116** (2004) 367.

[53] A. H. Ali, J. Math. Phys. **47** (2006) 083302.

[54] M. J. de Oliveira, Phys. Rev. E **67** (2003) 066101.

[55] I. Dornic, H. Chaté, J. Chave e H. Hinrichsen, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 045701.

[56] L. Franchebourg e P. L. Krapivsky, Phys. Rev. E **53** (1996) R3009.

[57] A. Mehta e J. M. Luck, Phys. Rev. E **60** (1999) 5218.

[58] M. O. Hase, S. R. Salinas, T. Tomé e M. J. de Oliveira, Phys. Rev. E **73** (2006) 056117.

[59] P. L. Krapivsky, Phys. Rev. A **45** (1992) 1067.

[60] M. J. de Oliveira, J. F. F. Mendes e M. A. Santos, J. Phys. A: Math. Gen. **26** (1993) 2317.

[61] M.-J. Drouffe e C. Godrèche, J. Phys. A: Math. Gen. **32** (1999) 249.

[62] É. M. Silva, P. T. Muzy e A. E. Santana, Physica A **387** (2008) 5101.

[63] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications* (Springer, New York, 1996).

[64] I. An, S. Chen e H-Y. Guo, Physica A **128** (1984) 520.

[65] G. Cicogna e D. Vitali, J. Phys. A: Math. Gen. **22** (1989) L453.

[66] W. M. Shtelen e V. I. Stogny, J. Phys. A: Math. Gen. **22** (1989) L539.

[67] P. Rudra, J. Phys. A: Math. Gen. **23** (1990) 1663.

[68] G. Cicogna e D. Vitali, J. Phys. A: Math. Gen. **23** (1990) L85.

[69] S. Spichak e V. Stognii, J. Phys. A: Math. Gen. **32** (1999) 8341.

[70] J. A. Cardeal, T. M. Rocha-Filho e A. E. Santana, Physica A **308** (2002) 292.

[71] M. de Montigny, F. C. Khanna e A. E. Santana, Physica A **323** (2003) 327.

[72] J. A. Cardeal, M. de Montigny, F. C. Khanna, T. M. Rocha Filho e A. E. Santana, J. Phys. A: Math. Gen. **40** (2007) 13467.

[73] V. Cherkasenko, Nonlinear Math. Phys. **2** (1995) 416.

[74] S. H. Lehnik, J. Math. Phys. **30** (1989) 953.

[75] K. Pesz, J. Phys. A: Math. Gen. **35** (2002) 1827.

[76] D. J. Jeffrey e Y. Onishi, J. Fluid Mech. **139** (1984) 261.

[77] C. P. Dettman e E. G. D. Cohen, J. Stat. Phys. **101** (2000) 775.

[78] C. F. Lo, Phys. Lett. A **319** (2003) 110.

[79] T. M. Rocha Filho e A. Figueiredo, *[SADE] A Maple package for the symmetry analysis of differential equations*, Computer Physics Communications, in press; http://ares.fis.unb.br/fismat/sade.html

[80] E. M. Silva, T. M. Rocha Filho e A. E. Santana, J. Phys.: Conf. Series **40** (2006) 150.

[81] J. L. Vázquez, *The Porous Medium Equation: Mathematical Theory* (Clarendon Press, Oxford, 2007).

[82] J. L. Vázquez, *Smooothing and Decay Estimates for Nonlinear Diffusion Equations: Equations of Porous Medium Type* (Oxford University Press, New York, 2006).

[83] Ya. B. Zel'dovich, *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodinamic Phenomena* II (Academic Press, New York, 1966).

[84] J. Boussinesq, *Théorie Analitique de la Chaleur* (Gathier-Villars, Paris, 1903)

[85] M. Muskat, *The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media* (McGraw-Hill, New York, 1937).

[86] L. S. Leibenzon, *The Motion of Natural Liquids and Gases in a Porous Medium* (Gostekhizdat, Moscow-Leningrad, 1947).

[87] E. Hopf, Comm. Pure Appl. Math. **3** (1950) 201.

[88] J. D. Cole, Quart. Appl. Math. **9** (1951) 225.

[89] M. L. Gandarias, J. Phys. A: Math. Gen. **29** (1996) 607.

[90] M. L. Gandarias, J. Phys. A: Math. Gen. **29**(1996) 5919.

[91] P. Rosenau, Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 1056.

[92] M. L. Gandarias, Phys. Lett. A **286** (2001) 153.

[93] C. Itzykson e J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York, 1980).

[94] C. E. I. Carneiro e M. T. Thomaz, Rev. Bras. Ens. Fís. **22** (2000) 474; K. E. Cahill, Phys. Rev. A **59** (1999) 1528.

[95] K. E. Cahill e R. J. Glauber, Phys. Rev. A **59** (1999) 1538.

[96] M. S. Lie, Math. Ann. 8 (1879) 215.

[97] J. Nash, Amer. J. Math. **80** (1958) 931.

[98] O. O. Vaneeva, A. G. Johnpillai, R. O. Popovych e C. Sophocleous, J. Math. Anal. Appl. **330** (2007) 1363; O. O. Vaneeva, R. O. Popovych e C. Sophocleous, arXiv: math-ph/0708.3457v2.

[99] R. O. Popovych, O. O. Vaneeva e N. M. Ivanova, Phys. Lett. A **362** (2007) 166.

[100] N. H. Ibragimov e C. Sophocleous, *Invariants for evolution equations* Proc. 5th Int. Conf. Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics, Kiev (2003) 142.

[101] M. Gandarias, J. Phys. A: Math. Gen. **40** (2007) 8803.

[102] T. D. Frank, *Nonlinear Fokker-Planck Equations: Fundamentals and Applications* (Springer, Heidelberg, 2005).

[103] J. G. Berryman e C. J. Holland, J. Math. Phys. **23** (1982) 983; T. G. Kurtz, Tran. Am. Math. Soc. **186** (1973) 259; H. P. McKean, Israel J. Math. **21** (1975) 54.

[104] J. M. Carlson, E. R. Grannan, C. Singh e G. H. Swindle, Phys. Rev. B **48** (1993) 668.

[105] G. A. Navratil, Phys. Lett. A **64** (1997) 223.

[106] B. V. Chirikov: The problem of quantum chaos. Em: *Chaos and Quantum Chaos, Lecture Notes in Physics*, vol. , 1-56, ed. W. Dieter Heiss (Springer, Berlin, 1992).

[107] P. N. Segrè e P. N. Pusey, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 771.

[108] W. Dong e J. C. Andre, J. Chem. Phys. **101** (1994) 299.

[109] A. H. Kara, F. M. Mahomed e Qu Changzheng, J. Phys. A: Math. Gen. **33** (2000) 6601.

[110] R. Friedrich, J. Peinke e Ch Renner, Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 5224.

[111] M. Suzuki, Physica A **117** (1983) 103.

[112] J. H. Li e Z. Q. Huang, Phys. Rev. E **57** (1998) 3917.