## Universidade de Brasília

**FACE/Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Ciência da Informação e Documentação**
**ECO/Departamento de Economia**

# Leilão dos Aeroportos: uma análise da Restrição de Oferta Unitária.

**Antônio Ronieel Bezerra Belém**

**Brasília, 17 de maio de 2013**

**Antônio Ronieel Bezerra Belém**

# Leilão dos Aeroportos: uma análise da Restrição de Oferta Unitária.

Dissertação apresentada ao Departamento de Economia da Universidade de Brasília – UnB como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Economia.

Orientador: Prof. Dr. Maurício Soares Bugarin

**Brasília, 17 de maio de 2013**

# Resumo

Em 2012 o Governo Federal realizou a primeira concessão de aeroportos à iniciativa privada. Três aeroportos foram leiloados, os de Brasília, de Guarulhos e de Campinas. Tão interessante quanto a própria privatização dos aeroportos foi o mecanismo adotado para concedê-los, o leilão.

O leilão de concessão dos aeroportos teve o objetivo de arrecadar o maior valor possível pelo direito de exploração da infraestrutura aeroportuária e foi modelado com regras complexas. Os três aeroportos foram leiloados simultaneamente e o leilão teve um formato híbrido, iniciando como um leilão selado de 1º preço seguido de um leilão oral ascendente.

Dentre as regras do leilão destacou-se e analisou-se a regra que restringiu a alocação dos aeroportos a um por vencedor e que chamamos de Restrição de Oferta Unitária. Mostra-se, assumindo certas hipóteses, que essa regra tende a diminuir a receita esperada do leilão.

## Abstract

By the year of 2012, the Brazilian federal government carried out the first ever concession of airports to the private sector. Three airports were auctioned, the ones from Brasília, Guarulhos and Campinas. It turns out that the auction mechanism adopted in the process was as interesting as the privatization.

The airports concession auction aimed to generate the highest possible income out of the right to explore the airports infrastructure, and it was modeled with some complex rules. The auction for the three airports took place simultaneously and it had a hybrid format, starting with a sealed-bid first price auction followed by an Enghish auction.

Among the auction rules, we highlight and analyze the rule that restricted the allocation of airports by one to each winner, which we refer to as the Unitary Offer Constraint. We show, assuming certain assumptions, that such rule tends to reduce the expected revenue of the auction.

## Agradecimentos

Agradeço a Deus pela graça da vida. Espero poder vive-la bem.

Agradeço aos meus professores que tanto me ensinaram. Em especial, ao Prof. Maurício Bugarin pela ótima orientação e ao Prof. Gil Riella pelos "brainstorms".

Agradeço à Profª. Marilda Sotomayor pelo privilégio de tê-la como membro da banca da examinadora.

Agradeço à ANTT pelo apoio.

## Dedicatória

Dedico este trabalho à minha família, que é a base da minha vida; à minha namorada, que me traz paz e felicidade; e aos meus amigos, com quem sempre posso contar.

# Sumário

# 1. Introdução

Em 06 de fevereiro de 2012 a Agência Nacional de Aviação Civil – ANAC realizou na Bolsa de Valores de São Paulo leilão de privatização de três aeroportos, Guarulhos, Viracopos e Brasília. A privatização surge como solução à falta de capacidade do governo de realizar os investimentos necessários não somente na infraestrutura aeroportuária, mas na infraestrutura dos mais diversos setores da economia do país. O Brasil segue assim uma tendência de países desenvolvidos como alguns países europeus e os Estados Unidos.

Esta dissertação está interessada no mecanismo utilizado para privatizar os aeroportos, o leilão. Os leilões são usados frequentemente na venda de bens que não possuem um mercado estabelecido. Ele pode ser definido como um mecanismo utilizado para a comercialização de bens, cujos preços não têm uma referência estável.

Há dois pontos relevantes na utilização de leilão para a venda de um bem, primeiro, busca-se eficiência alocativa, ou seja, entregar o bem ao comprador que mais o valoriza; segundo, maximizar a receita do vendedor. Daí, a importância do formato do leilão como um mecanismo de incentivos que leve ao atingimento desses dois pontos.

O desenvolvimento formal da teoria de leilão teve inicio com o artigo de Vickrey (1961) que foi o primeiro a tratar leilão como um jogo de informação incompleta e forneceu um resultado inicial do teorema de equivalência das receitas, generalizado depois por Myerson (1981) e por Riley e Samuelson (1981).

Há quatro formatos básicos de leilão de um único objeto indivisível, o leilão selado de primeiro preço, o leilão selado de segundo preço (leilão de Vickrey), o leilão inglês (English Auction) e o leilão holândes (Dutch Auction). Em ambos os leilões selados cada comprador submete seu lance sem conhecer os lances dos demais compradores, a diferença entre os dois leilões é que no de primeiro preço o vencedor paga seu próprio lance enquanto que no de segundo preço paga o segundo maior lance. O leilão inglês é um leilão aberto ascendente, onde um leiloeiro começa a pedir as propostas dos compradores partindo de um determinado preço, os compradores dão os lances conhecendo o preço que o leiloeiro está cotando o objeto. Já o leilão holandês é um leilão aberto descendente. O leilão começa em um alto preço que diminui continuamente em um relógio automático. O leilão termina quando um dos participantes para o relógio. Este concorrente ganha o objeto e paga o preço pelo qual o relógio parou.

Um dos resultados mais importantes da teoria de leilões é o teorema da equivalência de receita que diz que, com valores privados independentes[1], esses quatro formatos de leilão geram a mesma receita esperada.

Em comparação à literatura de leilões de objetos unitários, que se apresenta bastante avançada, a literatura sobre leilões de múltiplos objetos ainda está pouco desenvolvida. Há vários possíveis formatos de leilão quando se vende múltiplos objetos que não estão disponíveis quando se vende um único objeto como, por exemplo, leilões sequenciais. Os tipos de leilão de múltiplos objetos mais comumente utilizados são os de preço uniforme e o leilão discriminatório.

O leilão que vendeu os direitos de exploração dos aeroportos brasileiros apresentou um formato bastante complexo, pois, além de ser um leilão simultâneo de três objetos heterogêneos, é também um híbrido de um leilão discriminatório e um leilão ascendente e cada comprador, mesmo disputando os três aeroportos, pode ser vencedor de somente um deles. Essa última regra que restringe a oferta dos aeroportos a um por comprador tem como justificativa garantir competição entre esses três aeroportos.

A proposta desta dissertação é analisar essa última regra, chamada aqui de Restrição de Oferta Unitária. Em particular, tem-se o intuito de avaliar qual o

[1] Valores privados independentes significam que o valor de objeto leiloado para um comprador depende somente de seu próprio tipo.

efeito da restrição de oferta unitária sobre a receita esperada do leilão.

Não há como mensurar o prejuízo de os três aeroportos terem um mesmo operador, mesmo porque essa seria uma mera possibilidade do leilão caso fosse permitido a um mesmo comprador ganhar mais de um aeroporto. Por isso, este trabalho não trata dessa questão.

Esta dissertação está dividida em três capítulos. O primeiro capítulo faz uma revisão da literatura de leilões de múltiplos objetos com o objetivo de mapear as principais contribuições teóricas. O segundo capítulo explica as regras do leilão dos aeroportos realizado pela ANAC fazendo considerações teóricas quando cabíveis, bem como apresenta o resultado do leilão.

No último capítulo, desenvolve-se um modelo de jogo simplificado que avalia o efeito da Restrição de Oferta Unitária. O resultado encontrado é que essa restrição tende a diminuir a receita esperada do leiloeiro.

# 2. Revisão de Literatura

Este capítulo tem o objetivo de revisar a literatura acerca dos leilões de múltiplos objetos. Esses leilões podem ser simultâneos ou sequenciais, bem como os objetos vendidos podem ser idênticos ou distintos.

Weber (1981) classifica os leilões de múltiplos objetos em três categorias: leilões simultâneos dependentes, em que o licitante toma uma única ação e em seguida as alocações e os pagamentos são feitos; leilões simultâneos independentes, em que os licitantes agem simultaneamente em diversos leilões de um objeto e em que a receita de cada um é independente dos demais; e, por fim, leilões sequenciais que, como o próprio nome sugere, são a venda de um objeto por vez, sendo os resultados anteriores conhecidos a cada nova rodada.

Aqui, divide-se os leilões de múltiplos objetos em três tipos: os leilões simultâneos de objetos idênticos e de objetos distintos e os leilões sequenciais.

## 2.1. Leilões simultâneos de objetos idênticos

Com relação à venda de vários objetos idênticos, supõe-se em geral que o valor marginal de uma unidade adicional do bem é decrescente. Inicialmente, considera-se os leilões selados, cujos leilões padrões diferem entre si com relação às regras de preço, ou seja, pode ser um leilão discriminatório, um leilão de preço uniforme ou um leilão de Vickrey.

Em um leilão discriminatório (*pay-your-bid*) de K objetos, o licitante paga o somatório dos lances dados aos objetos e que foram declarados vencedores. Quando há somente um objeto, esse leilão é equivalente ao leilão selado de primeiro preço, em outras palavras, o leilão discriminatório é uma extensão do leilão selado de primeiro preço.

Já nos leilões de preço uniforme, os objetos são vendidos ao preço que equilibra a quantidade ofertada e demanda dos objetos. De acordo com Krishna (2010), no caso discreto[2], há certa margem na determinação do preço que iguala a oferta e a demanda pelos objetos, que pode ser qualquer preço entre o maior lance perdedor e o menor lance vencedor.

Krishna (2010) diz que Vickrey (1961) já reconhecia a ineficiência dos leilões discriminatórios e de preço uniforme. O leilão de Vickey para um objeto apresentado nesse seu famoso artigo, também conhecido como leilão de 2º preço, aplica-se ao caso de múltiplos objetos idênticos e é eficiente. Nesse leilão, o licitante paga o maior lance perdedor dos outros jogadores para cada objeto em que seu lance foi vencedor.

Para diferenciar e entender melhor esses três leilões, apresenta-se a seguir um exemplo retirado de Krishna (2010). Suponha que estejam à venda seis unidades de um objeto e que haja três compradores. Os vetores de lances dos compradores para as seis unidades são: $\boldsymbol{b_1} = (50, 47, 40, 32, 15, 5), \boldsymbol{b_2} = (42, 28, 20, 12, 7, 3), \boldsymbol{b_3} = (45, 35, 24, 14, 9, 6)$. O maior lance para uma unidade do bem foi de 50, o segundo maior lance para uma unidade foi dado de 47, ambos os lances foram dados pelo jogador 1; o terceiro maior lance foi de 45, dado pelo jogador 3; o quarto maior lance foi de 42, dado pelo jogador 2; o quinto maior lance foi de 40, dado pelo jogador 1; e, por fim, o sexto maior lance foi de 35, dado pelo jogador 3. Desse modo, o vetor de lances vencedores é: $\boldsymbol{b_V} = (50, 47, 45, 42, 40, 35)$. O jogador 1 ganha 3 unidades do bem, o jogador 3 ganha duas unidades do bem e o jogador 2 ganha uma unidade.

Há outra forma de vislumbrar a regra de alocação desse exemplo e que será útil para diferenciar as regras de preços. Considere o vetor dos seis maiores lances dos jogadores 2 e 3, $\boldsymbol{c_{-1}} = (45, 42, 35, 28, 24, 20)$, esse vetor contém os lances contra os quais os lances do jogador 1 competem. Desse

[2] Os modelos de leilões podem ser discretos, quando há dado número K de unidades do bem a serem vendidos. Também podem ser contínuos, quando os objetos são considerados como um só e os jogadores decidem o percentual desse objeto que desejam comprar.

modo, se o jogador 1 quiser exatamente uma unidade do bem, seu maior lance precisa somente superar o menor lance do vetor $\boldsymbol{c}_{-1}$, enquanto que seu segundo maior lance não pode superar o segundo menor lance do vetor $\boldsymbol{c}_{-1}$. Se ele quiser duas unidades, seus dois maiores lances têm de superar os dois menores lances do vetor $\boldsymbol{c}_{-1}$, enquanto que seu terceiro maior lance não pode superar o terceiro menor do vetor $\boldsymbol{c}_{-1}$, e assim por diante. De modo análogo, os vetores de lances contra os quais os jogadores 2 e 3 competem são $\boldsymbol{c}_{-2} = (50, 47, 45, 40, 35, 32)$ e $\boldsymbol{c}_{-3} = (50, 47, 42, 40, 32, 28)$, respectivamente.

Quando o leilão é discriminatório cada licitante paga o valor do seu lance para cada unidade que venceu, sendo assim, o jogador 1, que ganhou três unidades paga o valor dos seus três maiores lances, 50+47+40=137, o jogador 2 paga 42 e o jogador 3 paga 45+35=80. Se o leilão é uniforme, paga-se para todas as unidades ganhas o maior lance perdedor (ou o menor lance vencedor), então, o jogador 1 paga 32+32+32=96, o jogador 2 paga 28 e o jogador 3 paga 24+24=48. Se o leilão é de Vickrey, o licitante paga o maior lance perdedor dos outros jogadores, portanto o jogador 1 paga 28+24+20=72 que, conforme o vetor $\boldsymbol{c}_{-1}$ são os maiores lances concorrentes que não foram vencedores; como se vê pelos vetores $\boldsymbol{c}_{-2}$ e $\boldsymbol{c}_{-3}$, os jogadores 2 e 3 pagam, respectivamente, 32 e 32+28=60.

Esses três formatos de leilão selado têm correspondência com leilões abertos quando os valores são privados e independentes. Em termos de renda, o leilão discriminatório é equivalente ao leilão descendente multiunidade (*multiunit Dutch auction*), enquanto o leilão de preço uniforme é equivalente ao leilão ascendente (*multiunit English auction*). Já o leilão de Vickrey de múltiplos itens apresenta uma equivalência com o leilão Ausubel [3](Krishna 2010).

Há muito debate na literatura sobre o uso de leilão de preço uniforme e de leilão discriminatório motivado principalmente pelos leilões de títulos do tesouro americano. As vendas de Notas do Tesouro Americano eram

[3] Esse formato de leilão foi proposto por Ausubel (2004).

realizadas por meio de leilões discriminatórios desde a década de 70 até que, em 1992, passou-se a dotar leilão de preço uniforme.

Essa mudança teve suporte em várias expressões acadêmicas de que o leilão de preço uniforme geraria maior receita esperada ao leiloeiro. Back e Zender (1993) fazem um apanhado da teoria sobre essa ideia e, considerando que os valores dos objetos são comuns, afirmam que os leilões discriminatórios são mais propensos a gerarem maior receita para o vendedor do que os leilões de preço uniforme.

Eles apresentam duas vertentes de argumento acadêmico que davam base ao uso do formato de preço uniforme. Um argumento mais informal é que o leilão de preço uniforme é menos propenso à formação de conluio do que o leilão discriminatório. O ponto central dessa argumentação é que o leilão discriminatório desencoraja a participação de compradores pouco informados pelo risco de incorrer na maldição do vencedor[4], então os lances se concentram em poucos compradores mais bem informados, o que torna mais viável a formação de conluio. O artigo cita um trecho de Friedman (1960) como exemplo notável desse argumento.

*"(Having) different purchasers... pay different prices for the same security... estabilishes a strong tendency for the initial market to be limited to specialists and gives them a strong incentive to collude with respect to the bids submitted... A decidedly preferable alternative is to ask bidders to submit a schedule of the amounts that they will buy at a series of prices or coupons; to combine this bids, and set the price or coupon rate at the level at which the amount demanded equals or exceeds the amount offered."*

A outra linha surge da analogia que a teoria faz entre o leilão de preço uniforme com o leilão selado de 2º preço quando há uma unidade do objeto a

[4] A Maldição do Vencedor é um fenômeno que pode ocorrer nos leilões de valor comum com informações incompletas. Em suma, a maldição do vencedor diz que em um leilão, o vencedor tenderá a pagar a mais. O vencedor pode pagar a mais em uma de duas maneiras: primeiro, o lance vencedor pode ultrapassar o valor do bem leiloado; segundo, o valor do bem é menor do que o licitante previu, de modo que o licitante ainda pode ter um ganho líquido, mas vai ser menor do que o previsto

ser vendido ou quando há várias unidades, mas cada licitante só demanda uma unidade, aplicando as propriedades destes àquele.

De fato, o leilão de 2º preço apresentado por Vickrey (1961), sob certas hipóteses, induz o licitante a dar um lance sincero, pois essa é uma estratégia fracamente dominante. Quanto ao leilão de 1º preço, embora os lances de equilíbrio sejam abaixo dos valores dos objetos, Vickrey demonstrou que as receitas esperadas dos dois leilões são equivalentes quando licitantes simétricos empregam estratégias simétricas.

Em relação ao leilão de vários objetos idênticos com demanda unitária, Milgrom e Weber (1999) apresentam um exame apurado dele. Os autores, postulando crenças simétricas, valores privados e independentes, encontram que, em geral, o leilão discriminatório gera menor receita esperada do que o leilão de preço uniforme, que gera menos do que o leilão ascendente (*English Auction*). Maskin e Riley (1990) apresentam diversos resultados de equivalência de receita entre leilões de múltiplos objetos homogêneos em que cada comprador só demanda uma unidade.

Ausubel e Cramton (2002) também fazem referência e críticas a essa analogia entre o leilão uniforme e o de segundo preço que, citando palavras de Vickrey, eles chamam de 'falácia do leilão de preço uniforme'. Nesse artigo eles demonstram que em um leilão de preço uniforme com demanda por mais de um item, o licitante tem incentivo a dar lances abaixo do valor marginal gerado pela aquisição de um item a mais. A intuição por trás dessa redução dos lances quando o leilão é uniforme é que, quando o jogador deseja várias unidades do bem, há uma probabilidade positiva de que o seu lance para a segunda ou a quarta ou a última unidade, por exemplo, seja pivotal[5], passando a determinar o preço que o jogador pagará pelas unidades anteriores que ganhou, de modo que o jogador tem incentivo a reduzir seus lances a partir da segunda unidade do bem. Quando o leilão é discriminatório não há esse incentivo, pois o preço das unidades anteriores ganhas não diminui. Essa intuição é análoga à que

[5] Diz-se que um lance é pivotal quando há uma probabilidade positiva de ser o preço que equilibra a quantidade ofertada e demandada do bem.

está por trás da decisão do monopolista de produzir, nas palavras de Ausubel e Cramton (2002):

*"Just as monopoly without price discrimination leads to social inefficiency but a monopoly with perfect price discrimination may realize all gains from trade, a nondiscriminatory auction will lead to inefficiency but a discriminatory auction has the possibility of efficiency"*.

Eles também comparam o leilão discriminatório com o de preço uniforme em relação a gerar receita, mas chegam à conclusão de que os resultados encontrados são ambíguos em relação a qual dos dois gera maior receita esperada. Isso porque sob as hipóteses de os licitantes são simétricos *ex-ante* e os valores são independentes e identicamente distribuídos, o leilão discriminatório é superior ao uniforme, mas quando se retira as hipóteses de que os compradores são simétricos e os valores são identicamente distribuídos, o leilão uniforme se apresenta superior ao leilão discriminatório.

Em uma modelagem continua de um leilão em que a oferta fixa de bens é normalizada para uma unidade, mas que se supõe ser perfeitamente divisível, Wilson (1979) comparou a receita esperada dos leilões de preço uniforme e discriminatório com a receita esperada pela venda de toda a oferta como se fosse uma unidade indivisível e mostrou que esta é maior. Em relação ao leilão de preço uniforme, ele encontrou um equilíbrio de Nash que se assemelha a um equilíbrio com presença de conluio.

## 2.2. Leilões Simultâneos de Objetos Distintos

Além de a maioria da literatura de teoria de leilão tratar da venda de um único objeto, dentre a literatura de múltiplos objetos, a que trata de leilões de múltiplos objetos heterogêneos é mais escassa do que a que trata de objetos idênticos. Diferentemente do caso de objetos idênticos em que o valor de um determinado número de objetos é dado pela soma dos valores marginais de cada objeto adicional, no caso de objetos distintos, o valor dos objetos é a soma do valor de cada objeto individualmente.

O formato do leilão de Vickey é ampliado para um mecanismo chamado Vickey-Clarke-Groves (VCG) introduzido por Clarke (1971) e Groves (1973)[6]. Esse mecanismo apresenta a propriedade de alocar os objetos eficientemente quando os valores são privados. Segundo Zhan (2008) a eficiência do mecanismo VCG deriva da regra de pagamento em que o licitante vencedor paga o custo de oportunidade do objeto vencido.

Dasgupta e Maskin (2000) mostram que se a informação dos compradores é unidimensional o leilão de Vickrey pode ser generalizado mesmo quando há valores comuns. O leilão apresentado por eles se mantém eficiente independentemente da quantidade de objetos vendidos e da natureza deles. Entretanto, se os compradores têm sinais multidimensionais, a eficiência não é alcançada.

Krishna e Perry (2000) se concentraram no estudo mecanismos em situações em que a informação dos agentes é multidimensional, eles apresentaram uma generalização do mecanismo VCG que, dentre todos os mecanismos que têm compatibilidade de incentivo e são individualmente racionais, maximiza a receita esperada do leiloeiro.

Outro resultado apresentado por eles nesse artigo é que o teorema acima se aplica bem à situação em que os objetos não são idênticos e mesmo nos casos em que existe complementariedades entre os objetos.

Em leilões de objetos heterogêneos a literatura trata da venda dos objetos agrupados em pacotes[7]. Palfrey (1983) analisou as preferências do leiloeiro bem como dos compradores entre empacotar objetos heterogêneos ou vende-los individualmente. Ele mostrou que o incentivo do leiloeiro em

[6] Dentro teoria de desenho de mecanismos se destacam os mecanismos diretos que são compostos por uma regra de alocação e uma regra de pagamento. Para entender desenhos de mecanismos, ver Menezes (2002) e Krishna (2010).
[7] Em inglês o agrupamento dos objetos para venda se chama *bundling*.

empacotar os objetos diminui à medida que o número de licitantes aumenta. No caso extremo em que há somente dois compradores e pelo menos dois objetos à venda é unanimemente preferido pelo vendedor realizar o leilão dos objetos em um único pacote, enquanto para os compradores é preferível vender os objetos sem empacotar.

## 2.3. Leilões Sequenciais

Em leilões sequenciais os objetos são vendidos um de cada vez em leilões separados conduzidos separadamente. Milgrom e Weber (1982) são pioneiros na derivação de equilíbrio em leilões sequenciais. Além de leilões simultâneos, eles analisam três tipos de leilões sequenciais de objetos idênticos em que cada comprador só demanda uma unidade do objeto e o resultado de cada rodada é anunciado ou não aos compradores remanescentes. Os leilões são os seguintes: leilão sequencial de 1º preço sem anuncio, leilão sequencial de 1º preço com anuncio e leilão sequencial de 2º preço sem anuncio. Eles encontram que nesses três leilões, em equilíbrio, os lances dados são crescentes a cada rodada, ou seja, condicionado ao preço de cada rodada, o preço esperado da próxima rodada é ao menos tão grande quanto o da rodada anterior.

No artigo eles identificam uma discrepância entre esses resultados e o que se tem verificado na prática em que os preços se mostraram decrescentes a cada rodada. Ashenfelter (1989), por exemplo, relata que esse comportamento decrescente dos preços é frequente nos leilões de vinho. Ele sugere que essa trajetória decrescente dos preços é consistente com a aversão ao risco dos compradores, o preço esperado no primeiro período será igual ao preço esperado no segundo período mais um prêmio de risco pela aleatoriedade do período. McAffe e Vincent (1993) mostraram que quando há aversão ao risco, existe equilíbrio simétrico e os preços declinam a cada rodada, mas somente se a aversão ao risco absoluta é não decrescente.

Leilões sequenciais em que os compradores demandam mais de uma unidade dos bem têm o problema de que mesmo se os compradores forem simétricos *ex-ante,* a demanda por múltiplos itens introduz assimetria nos leilões seguintes. Katzman (1999) apresenta um caso em que isso não ocorre, é quando há somente duas unidades sendo vendidas em dois leilões sequenciais de segundo preço.

# 3. O leilão dos Aeroportos

O Governo Federal publicou, em 15 de dezembro de 2011, o edital com as regras para a concessão dos aeroportos internacionais de Brasília, Campinas e Guarulhos. Os três aeroportos foram incluídos no Plano Nacional de Desestatização em 21 de julho de 2011, por meio do Decreto nº 7.531/2011.

A concessão contempla a ampliação, manutenção e exploração dos aeroportos e foi feito por meio de um leilão simultâneo, ocorrido em 06 de fevereiro de 2012, em que as empresas participantes do certame poderão concorrer pelos três aeroportos, mas somente poderão ganhar o direito de exploração de um deles.

Ao longo deste capítulo serão apresentadas as regras relevantes do leilão e seu resultado.

## 3.1. Principais Regras do Leilão

O modelo de leilão adotado na privatização dos aeroportos é relativamente complexo. Primeiramente, trata-se de um leilão múltiplo, em que os três aeroportos são leiloados simultaneamente. Além disso, o leilão é do tipo híbrido, composto por duas etapas distintas, onde a primeira é um leilão selado de primeiro preço e a segunda é um leilão oral de preços ascendentes em que os lances são dados por viva-voz, também conhecido como leilão inglês.

Outra regra importante do leilão, e que é o principal aspecto do leilão discutido nesta dissertação, é que cada participante, apesar de poder dar lances pelos três aeroportos, somente pode ser declarado vencedor de um deles, mesmo que ao final do certame um mesmo participante tenha dado os maiores lances em dois ou três aeroportos.

Sendo assim, os vencedores do leilão para cada aeroporto são definidos pela combinação de lances que gera a maior receita pelos três aeroportos conjuntamente. Em outras palavras, essa regra consiste em escolher os vencedores pelos lances dados de forma a maximizar o valor total da receita do leilão.

A primeira fase tem o objetivo de definir os titulares de cada aeroporto, que são aqueles cujos lances, para cada aeroporto, resultam em um maior valor global de contribuição fixa[8]. Outro definição importante é a de proposta ativa, que é aquela proposta acima de 90% do lance titular em cada aeroporto, desde que o proponente não seja titular em outro aeroporto, caso em que sua oferta fica inativa. Poderão disputar determinado aeroporto na segunda etapa a proposta titular e as propostas de pelo menos 90% dela, ativas ou inativas[9].

A tabela abaixo apresenta um exemplo que simula lances dados na primeira etapa do leilão para um melhor entendimento do modelo adotado.

**Tabela 1.**

| GUARULHOS | | VIRACOPOS | | BRASÍLIA | |
|---|---|---|---|---|---|
| Proponente | Lance | Proponente | Lance | Proponente | Lance |
| Consórcio 3 | 10.000 | Consórcio 5 | 10.000 | Consórcio 3 | 10.000 |
| Consórcio 4 | 9.500 | Consórcio 6 | 9.800 | Consórcio 1 | 9.000 |
| Consórcio 5 | 8.000 | Consórcio 9 | 8.000 | Consórcio 9 | 8.000 |
| Consórcio 6 | 7.000 | Consórcio 7 | 7.000 | Consórcio 2 | 7.000 |
| Consórcio 2 | 6.000 | Consórcio 3 | 6.000 | Consórcio 7 | 6.000 |
| Consórcio 1 | 5.000 | Consórcio 4 | 5.000 | Consórcio 6 | 5.000 |
| Consórcio 9 | 4.000 | Consórcio 1 | 4.000 | | |
| Consórcio 8 | 3.000 | Consórcio 2 | 3.000 | | |
| Consórcio 10 | 2.000 | Consórcio 8 | 2.000 | | |
| Consórcio 7 | 500 | | | | |

Legenda:

Oferta titular do aeroporto;

Ofertas inativas do aeroporto;

Ofertas ativas do aeroporto.

[8] Contribuição fixa é como o edital de licitação denomina o lance dado pelo licitante a um aeroporto.
[9] Se além da proposta titular houver menos de três propostas para o aeroporto, todos continuarão na disputa na próxima fase.

A regra do leilão diz que seguem para a próxima etapa os proponentes cujas ofertas sejam de no mínimo 90% da oferta titular, ativas ou não, mais a oferta titular. Conforme a Tabela 1, disputarão na próxima etapa, em ordem decrescente:

| Guarulhos | Viracopos | Brasília |
|---|---|---|
| Consórcio 4 – Titular | Consórcio 5 – Titular | Consórcio 3 – Titular |
| Consórcio 6 – Oferta Ativa | Consórcio 6 – Oferta Ativa | Consórcio 1 – Oferta Ativa |
| Consórcio 2 – Oferta Ativa | Consórcio 9 – Oferta Ativa | Consórcio 9 – Oferta Ativa |
| Consórcio 3 – Inativo | | |
| Consórcio 5 – Inativo | | |

Os consórcios 4, 5 e 3 são titulares dos aeroportos de Guarulhos, Viracopos e Brasília, respectivamente, porque essa é a combinação de lances que gera o maior valor global pelos três aeroportos, 29.500. Logo, os lances desses consórcios para os demais aeroportos são considerados inativos.

Iniciado o leilão ascendente, os proponentes classificados poderão ofertar lances para todos os aeroportos para os quais foram classificados na etapa anterior. Contudo, o lance deverá necessariamente alterar a ordem de classificação da proponente no resultado provisório do leilão. Lembrando que a combinação das proponentes titulares será determinada pelo maior Valor Global de contribuição fixa.

Um proponente que tenha uma oferta inativa em um aeroporto, mas que é alto o suficiente para torna-la ativa caso não fosse titular em outro aeroporto, pode ativá-la dando um lance que o torne titular desse aeroporto e, automaticamente, ele deixa de ser o titular do outro. No exemplo acima, o Consórcio 3 pode ativar sua oferta para o aeroporto de Guarulhos e se tornar seu titular se der um novo lance maior do que 10.500 para esse aeroporto, o que faria com que o Consórcio 1 se tornasse titular do aeroporto de Brasília e o valor global dos lances titulares fosse maior do que 29.500.

Na hipótese de uma mesma proponente ofertar o maior lance para mais de um aeroporto, somente será considerado o que representar a maior diferença em relação à segunda maior oferta para o mesmo aeroporto. No entanto quando as diferenças entre esses lances forem iguais, a proponente com o maior lance deverá indicar aquele que permanecerá sendo considerado. Será considerada vencedora do Aeroporto a proponente que permanecer titular dele ao final da segunda etapa.

## 3.2. O leilão na prática

Leilões são frequentemente citados como exemplo de aplicação prática da teoria econômica, mas mesmo em leilões há certo distanciamento entre a teoria e a prática. Boa parte da extensa literatura sobre leilão deixa em segundo plano seus aspectos práticos.

Como exemplo de um resultado teórico que pode não ter tanta relevância na pratica, Klemperer (2002b)[10] cita o Teorema da Equivalência de Receita. Segundo esse teorema, já comentado na introdução deste trabalho, quando os valores são privados e independentes os quatro leilões padrões geram a mesma receita esperada e os compradores são então indiferentes entre esses mecanismos. Já quando os valores privados são afiliados, ou seja, têm correlação positiva, o leilão ascendente é mais lucrativo do que o leilão selado de primeiro preço[11]. Sendo assim, uma orientação que se poderia deduzir da teoria acerca de que tipo de formato escolher seria que quando os valores são independentes qualquer um dos leilões é igualmente bom, enquanto que, se os valores forem afiliados, o leilão ascendente é melhor. Klemperer questiona esse tipo de interpretação de resultados teóricos e argumenta que são outros fatores que dão robustez ao funcionamento prático de um leilão.

Segundo Klemperer (2002a) o que realmente importa no desenho de um leilão são o desencorajamento de conluio e a entrada de participantes no certame. Ele afirma que tanto o leilão de preço uniforme quanto o leilão

[10] Klemperer (2002b) foi escrito baseado em Klemperer (2000a).

[11] Esse resultado de que o leilão ascendente é superior ao selado de primeiro preço quando os valores são afiliados foi apresentado por Milgrom e Weber (1982)

ascendente são vulneráveis a conluio, quando os participantes explicitamente ou tacitamente impedem que os lances cresçam. Isso porque esses leilões oferecem um mecanismo que permite punir os rivais.

Um exemplo de um conluio tácito foi o leilão simultâneo ascendente para a venda de 10 blocos de espectro de telecomunicações realizado pela Alemanha em 1999 onde os blocos foram agrupados em dois pacotes – blocos de 1 a 5 e blocos de 6 a 10 – com a regra de que qualquer novo lance tinha de ultrapassar o lance vencedor em 10%. Havia na ocasião dois concorrentes sérios, a empresa Mannesman e a T-Mobil. Os primeiros lances da Mannesman foram de 18,18 milhões de marcos alemães pelos blocos 1 a 5 e de 20 milhões de marcos pelos blocos de 6 a 10, que superaram os lances iniciais da T-Mobil. Ocorre que 10% de 18,18 milhões levam a um valor total de aproximadamente 20 milhões e, segundo um dirigente da T-Mobil, apesar de não ter havido qualquer acordo entre as duas empresas, a T-Mobil interpretou os lances iniciais da Mannesman como um convite a dividirem os blocos. Ocorreu que a T-Mobil deu outro lance de aproximadamente 20 milhões pelos blocos 1 a 5 e não deu mais lance pelos outros blocos. Cada empresa levou metade dos blocos por preços semelhantes e baixos.

Em relação ao leilão de preço uniforme os participantes podem dar lances que garantam que qualquer desvio de um acordo de conluio, tácito ou explicito, seja punido. Dada uma cota de conluio, cada participante dá lances altos para cotas menores do que a cota do acordo, então, se um licitante desviar e tentar obter uma cota maior do que a do conluio irá diminuir a cota dos demais participantes e todos pagarão preços muito altos. Aderir ao acordo faz com que esses preços altos demais nunca sejam pagos e desviar não é lucrativo.

Em contrapartida, leilões simultâneos selados de primeiro preço onde os participantes têm uma única oportunidade de dar lances torna o conluio mais difícil de ocorrer, pois os participantes não têm oportunidade de retaliar quem não está cooperando.

O leilão ascendente é um formato desfavorável em relação a estimular a entrada de participantes no certame, ao contrário do leilão selado de primeiro preço. A justificativa disso é que no leilão ascendente há uma forte presunção de que se um participante valoriza muito ganhar o leilão ele certamente vencerá, pois, mesmo que seu lance inicial não seja o maior, ele pode aumenta-lo posteriormente. Sabendo disso, um participante mais fraco pode preferir não arcar com os custos de entrar no leilão, mesmo que moderados. Já no leilão selado o lance é único e é dado sem qualquer informação sobre os lances rivais. Isso dá ao participante mais fraco alguma chance de sair vitorioso.

Ainda de acordo com Klemperer (2002a), a vantagem do leilão ascendente é ser mais eficiente do que o leilão selado de primeiro preço.

*"But while sealed-bid auctions have many advantages, they are not without flaws. Mainly, by giving some chance of victory to weaker bidders, sealed-bid auctions are less likely than ascending auctions to lead to efficient outcomes".*

Em face às vantagens e desvantagens de cada formato de leilão, Klemperer propõe um formato de leilão hibrido do leilão ascendente e selado de primeiro preço, nessa ordem, chamado de "*Anglo-Dutch Auction",* que teria as melhores características dos dois leilões.

Inspirados nesse leilão hibrido, Menezes e Dutra (2001) propõem outro leilão hibrido, mas de ordem inversa, que combina um leilão selado de primeiro preço com um leilão ascendente[12]. Na venda de um único objeto, considerando tanto o caso de valores privados independentes quanto o caso de valores comuns, eles chegam ao resultado de que esse leilão hibrido gera mais receita do que qualquer outro leilão padrão e esse resultado se mantem robusto

[12] O modelo de leilão hibrido desenvolvido por Menezes e Joíza é um leilão selado de primeiro preço seguindo por um leilão selado de segundo preço (leilão de Vickrey), isso porque o leilão inglês e o selado de segundo preço são equivalentes e este é mais fácil de modelar do que aquele.

mesmo relaxando as hipóteses de simetria entre compradores e neutralidade ao risco.

Contudo, o resultado de Menezes e Dutra (2001) foi objeto de reanálise por Colnago Jr. (2004) em sua dissertação de mestrado, chegou-se à conclusão de que o leilão hibrido de Menezes e Dutra não gera uma expectativa de receita superior a dos leilões padrões no caso de valores privados independentes e, em várias situações, não apresenta nem mesmo equilíbrio.

Percebe-se que o leilão dos aeroportos se assemelha ao leilão hibrido proposto por Menezes e Joísa, com a diferença de que se trata de um leilão de três objetos distintos ao invés de um. Essa semelhança não é coincidência, visto que Joísa C, Dutra prestou consultoria à ANAC para a formulação do leilão.

## 3.3. Como transcorreu o leilão dos aeroportos

Esta seção apresenta o resultado do leilão dos aeroportos ocorrido em 06 de fevereiro de 2012. As condições iniciais do leilão para cada aeroporto são as seguintes:

- Aeroporto Internacional Governador André Franco Montoro (Guarulhos/SP)
  Preço mínimo: R$ 3,4 bilhões
  Prazo de concessão: 20 anos
  Investimentos até a Copa do Mundo: R$ 1,42 bilhão
  Investimentos totais: R$ 4,70 bilhões

- Aeroporto Internacional Juscelino Kubistchek (Brasília/DF)
  Preço mínimo: R$ 582 milhões
  Prazo de concessão: 25 anos

Investimentos até a Copa do Mundo: R$ 640 milhões
Investimentos totais: R$ 2,85 bilhões

- Aeroporto Internacional de Viracopos (Campinas/SP)
  Preço mínimo: R$ 1,5 bilhão
  Prazo de concessão: 30 anos
  Investimentos até a Copa do Mundo: R$ 1,18 bilhões
  Investimentos totais: R$ 8,72 bilhões

Na primeira fase, o aeroporto de Guarulhos obteve 10 propostas, enquanto o aeroporto de Brasília obteve 8 propostas e o aeroporto de Viracopos 4 propostas. Abaixo as tabelas 2, 3 e 4 apresentam os lances de cada proponente a cada aeroporto.

**Tabela 2**

| GUARULHOS | | |
|---|---|---|
| Classificação | Consórcio | Proposta |
| 1 | CONSÓRCIO INVEPAR - ACSA GRADUAL | 16.213.000.000,00 |
| 2 | CONSÓRCIO AEROPORTOS DO BRASIL ATIVA | 12.863.000.000,00 |
| 3 | CONSÓRCIO OBA - OPERADORA BRASILEIRA DE AEROPORTOS VOTORANTIM | 12.000.000.000,00 |
| 4 | CONSÓRCIO AERONÁUTICO OPERADOR LINK | 8.872.500.000,00 |
| 5 | CONSÓRCIO ADVENT-ASUR BRADESCO | 8.530.000.000,00 |
| 6 | CONSÓRCIO NOVAS ROTAS SAFRA | 8.321.777.000,23 |
| 7 | CONSÓRCIO SÓCRATES HSBC | 6.120.000.000,00 |
| 8 | CONSÓRCIO AEROPORTOS DO BRASIL BTG PACTUAL | 6.010.000.000,00 |

**Tabela 3**

| BRASÍLIA | | |
|---|---|---|
| Classificação | Consórcio | Proposta |
| 1 | CONSÓRCIO INFRAMERICA AEROPORTOS CITI | 4.501.132.500,00 |
| 2 | CONSÓRCIO OBA - OPERADORA BRASILEIRA DE AEROPORTOS VOTORANTIM | 4.400.000.000,00 |
| 3 | CONSÓRCIO ADC & HAS-FIDENS-MILLSTREAM MUNDINVEST | 3.901.000.000,00 |
| 4 | CONSÓRCIO AEROPORTOS DO BRASIL BTG PACTUAL | 2.500.000.000,00 |
| 5 | CONSÓRCIO AERONÁUTICO OPERADOR LINK | 982.800.000,00 |
| 6 | CONSÓRCIO NOVAS ROTAS SAFRA | 582.000.001,00 |

**Tabela 4**

| VIRACOPOS | | |
|---|---|---|
| Classificação | Consórcio | Proposta |
| 1 | CONSÓRCIO AEROPORTOS BRASIL PLANNER | 3.821.000.000,00 |
| 2 | CONSÓRCIO NOVAS ROTAS SAFRA | 2.524.555.000,18 |
| 3 | CONSÓRCIO OBA - OPERADORA BRASILEIRA DE AEROPORTOS VOTORANTIM | 1.700.000.000,00 |

As ofertas vencedoras do leilão dos aeroportos somaram R$ 24,535 bilhões, segundo dados apresentados na própria bolsa. O ágio total do leilão foi de 347%, quase cinco vezes o valor mínimo total de R$ 5,477 bilhões estipulado pelo governo. O maior ágio ficou com o Aeroporto de Brasília, que obteve oferta de R$ 4,51 bilhões pelo consórcio Inframérica, que reúne as empresas Infravix Participações S/A e Corporación América S/A, com ágio 673,39% superior ao preço mínimo.

Em segundo lugar ficou o Aeroporto de Guarulhos, com ágio de 373,51%, oferecido pelo consórcio Invepar ACSA, que reúne as empresas Investimentos e Participações em Infraestrutura S/A – Invepar e a Airports Company South Africa SOC Limited, cuja proposta foi de R$ 16,213 bilhões.

O Consórcio Aeroportos Brasil composto pelas empresas TPI-Triunfo Participações e Investimentos S/A, UTC Participações S/A e pela francesa EGIS Airport Operation foi o vencedor da disputa pelo Aeroporto de Campinas, com oferta de R$ 3,821 bilhões, 159,75% acima do preço mínimo.

Somente para o aeroporto de Brasília, houve disputa na segunda etapa do leilão, com somente um lance dado.  Este interessante resultado evidencia a grande importância da primeira fase no resultado final do leilão híbrido.

# 4. Modelagem e avaliação da restrição de oferta unitária

Conforme visto na seção anterior, o leilão adotado pela ANAC para a primeira privatização de aeroportos tem regras complexas que o torna de difícil modelagem. Contudo, chama atenção a restrição aos licitantes de poderem ganhar somente um aeroporto, chamada aqui de restrição de oferta unitária (ROU). Visualizam-se duas possíveis razões para essa restrição, a primeira, e a que parece ter motivado o governo a implantar essa regra no leilão, é evitar qualquer possível concentração no mercado de serviços aeroportuários do qual possa resultar exercício de poder de mercado; outra possível razão seria evitar um problema de restrição orçamentária, dado os montantes bilionários envolvidos tanto na aquisição da concessão quanto nos investimentos previstos em contrato a serem realizados pelo vencedor do certame, talvez se queira prevenir que uma empresa ou consórcio leve mais de um aeroporto e não tenha recursos suficientes para cumprir suas obrigações.

A fim de avaliar qual o efeito da restrição de oferta unitária sobre as estratégias simétricas ótimas dos jogadores, nesta seção, vamos apresentar um modelo simplificado de leilão selado de 1º preço simultâneo de 2 objetos e 2 jogadores com oferta unitária, achar o equilíbrio simétrico do jogo e compará-lo com o equilíbrio simétrico do jogo em que não há essa restrição.

É considerado aqui somente o leilão selado de primeiro preço pelos seguintes motivos: assim como discutido na seção 3.2, não é passivo na literatura que o formato de leilão hibrido seja superior aos leilões padrões em relação à receita esperada gerada, além do que, o fato de que durante a segunda fase do leilão dos aeroportos houve somente um lance evidencia a importância da primeira fase na geração dos lances em detrimento da segunda; o leilão selado de primeiro preço é mais fácil de modelar do que o ascendente.

As hipóteses adotadas, com o intuito de simplificar a análise, são as de que os jogadores têm valores privados e independentes[13] em relação aos objetos e são simétricos *ex-ante*. Supõe-se que o valor de um objeto para cada jogador tem distribuição uniforme no intervalo [0,1] e essa distribuição de probabilidade é de conhecimento de todos os jogadores. Supõe-se também que os objetos têm valor zero para o leiloeiro, de modo que ele não estabelece lance mínimo.

Outra questão a se levar em conta é a existência de sinergia, que ocorre quando, ao se adquirir um pacote com mais de um objeto, seu valor é maior do que a soma dos valores dos objetos que o compõem. A ocorrência de sinérgia está associada principalmente à existência de complementariedades entre os objetos que poderiam gerar economias de escala e escopo[14]. Exemplificando para o caso de dois objetos, seja $\alpha$ uma constante, se um comprador obtém o objeto A, ele recebe o valor do objeto A, $v_A$. Se obtiver o objeto B, recebe $v_B$. Se obtiver os dois objetos, ele recebe $\alpha(v_A + v_B)$. Há sinergia se $\alpha$>1, quando $\alpha = 1$ não há sinergia. Neste trabalho, adota-se a hipótese de que não há sinergia.

## 4.1. O jogo sem a Restrição de Oferta Unitária

Primeiramente, vamos desconsiderar a restrição de oferta unitária no modelo de leilão selado de primeiro preço para a venda simultânea de dois objetos em que concorrem dois jogadores. Define-se $i = 1{,}2$ o índice subscrito que indica os jogadores e $j = A, B$ o índice sobrescrito que indica os dois objetos.

Busca-se encontrar os lances ótimos de Equilíbrio de Nash simétricos do leilão selado de 1º preço para a venda simultânea de dois objetos e com 2 jogadores. Define-se esse leilão como o seguinte jogo Bayesiano:

---

[13] A hipótese de que os valores são privados e independentes é razoável quando se pensa que a valor do aeroporto são as receitas futuras a serem geradas e que dependem da capacidade de gerenciamento do consórcio vencedor. Essa capacidade somente o próprio consórcio conhece.

[14] Para saber mais sobre a literatura de leilões com sinergia ver Xu, Levin e Ye (2010).

$$\Gamma = \left(I = (1,2);\ J = (A,B); \left((v_1^A, v_1^B), (v_2^A, v_2^B)\right); f(\cdot); \left((b_1^A, b_1^B), (b_2^A, b_2^B)\right); (\pi_1, \pi_2)\right).$$

Em que $I = (1,2)$ é o conjunto dos jogadores e $J = (A,B)$ o conjunto dos objetos.

O valor do objeto $j \in J$ para o jogador $i \in I$ pertence ao conjunto $v_i^j = v = [0,1]$. Desse modo, o par de conjuntos $(v_1^A, v_1^B)$ representa o tipo do jogador 1 e o par de conjuntos $(v_2^A, v_2^B)$ representa o tipo do jogador 2.

A função $f(\cdot)$ é uma função de distribuição de probabilidades, que se supõe ser uniforme, $f: v \rightarrow [0,1]$ de modo que $f(\bar{v}) = Prob(v_i^j \leq \bar{v})$.

Supõe-se que $b(\cdot)$ é uma função-lance simétrica, crescente e diferenciável em relação à $v_i^j$, de modo que $b: v \rightarrow [0,1]$. Sendo assim, $((b_1^A, b_1^B), (b_2^A, b_2^B))$ são as estratégias dos 1 e 2.

O par $(\pi_1, \pi_2)$ é o *payoff* dos jogadores 1 e 2, conforme definido abaixo:

$$\pi_1 = \begin{cases} v_1^A + v_1^B - b_1^A - b_1^B, & se\ b_1^A > b_2^A\ e\ b_1^B > b_2^B \\ v_1^A - b_1^A, & se\ b_1^A > b_2^A\ e\ b_1^B < b_2^B \\ v_1^B - b_1^B, & se\ b_1^A < b_2^A\ e\ b_1^B > b_2^B \end{cases}$$

Analogamente,

$$\pi_2 = \begin{cases} v_2^A + v_2^B - b_2^A - b_2^B, & se\ b_1^A < b_2^A\ e\ b_1^B < b_2^B \\ v_2^A - b_2^A, & se\ b_1^A < b_2^A\ e\ b_1^B > b_2^B \\ v_2^B - b_2^B, & se\ b_1^A > b_2^A\ e\ b_1^B < b_2^B \end{cases}$$

**Proposição 1.** Quando não há sinergia e os valores são privados e independentes, os lances ótimos de equilíbrio simétrico para o jogador $i$ do leilão selado de 1º preço de lances simultâneos de dois objetos e com dois jogadores são iguais aos lances ótimos de equilíbrio simétrico quando os objetos são vendidos separadamente em dois leilões selados de 1º preço.

Demonstração. Os *payoffs* do jogador 1 no leilão selado de primeiro preço para a venda simultânea de dois objetos a dois jogadores são:

$$\pi_1 = \begin{cases} \left(v_1^A + v_1^B - b_1^A - b_1^b\right), se\ b_1^A > b_2^A e\ b_1^B > b_2^B \\ (v_1^A - b_1^A), \qquad se\ b_1^A > b_2^A e\ b_1^B < b_2^B \\ (v_1^B - b_1^B), \qquad se\ b_1^A < b_2^A e\ b_1^B > b_2^B \end{cases}$$

Portanto, o ganho esperado do jogador 1 é dado pela soma dos ganhos que ele obtém se levar o objeto A ou o objeto B ou ambos, ponderados por suas respectivas probabilidades. Ou seja:

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_1 = {} & \left(v_1^A + v_1^B - b_1^A - b_1^b\right) \Pr(b_1^A > b_2^A e\ b_1^B > b_2^B) \\ & + (v_1^A - b_1^A) \Pr(b_1^A > b_2^A e\ b_1^B < b_2^B) \\ & + \left(v_1^B - b_1^b\right) \Pr(b_1^A < b_2^A e\ b_1^B > b_2^B) \end{aligned}$$

A hipótese de que os valores são privados e independentes implica que os lances são independentes, de modo que a probabilidade conjunta dos lances é igual ao produto das probabilidades.

$$\begin{aligned} = {} & \left(v_1^A + v_1^B - b_1^A - b_1^b\right)\Pr(b_1^A > b_2^A)\Pr(b_1^B > b_2^B) \\ & + (v_1^A - b_1^A) \Pr(b_1^A > b_2^A)[1 - \Pr(b_1^B > b_2^B)] \\ & + (v_1^B - b_1^B) [1 - \Pr(b_1^A > b_2^A)]\Pr(b_1^B > b_2^B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = {} & (v_1^A - b_1^A)[\Pr(b_1^A > b_2^A)\Pr(b_1^B > b_2^B) + \Pr(b_1^A > b_2^A) - \Pr(b_1^A > b_2^A)\Pr(b_1^B > b_2^B)] \\ & + \left(v_1^B - b_1^b\right)[\Pr(b_1^A > b_2^A)\Pr(b_1^B > b_2^B) + \Pr(b_1^B > b_2^B) \\ & - \Pr(b_1^A > b_2^A)\Pr(b_1^B > b_2^B)] \end{aligned}$$

$$= (v_1^A - b_1^A) \Pr(b_1^A > b_2^A) + (v_1^B - b_1^B) \Pr(b_1^B > b_2^B).$$

Essa última equação é exatamente o ganho esperado do jogador 1 em dois leilões simultâneos selados de 1º preço de um objeto, o que demonstra a equivalência.

O lance ótimo de equilíbrio simétrico do jogador $i$ para o objeto $j$ quando não há a Restrição de Oferta Unitária é então:

$$b_i^J = \frac{\int_0^{v_i^J} zf(z)dz}{F(v_i^J)}, em\ que\ i = 1,2; J = A, B.$$

Sendo a função densidade probabilidade uniforme em $[0,1]$, então as estratégias de equilíbrio simétricas são[15]:

$$b(v^A) = \frac{v^A}{2};\ \ b(v^B) = \frac{v^B}{2}.$$

**Observação.** Menezes e Monteiro (2005) apresentam o caso em que os dois objetos são idênticos e há sinergia positiva. O artigo mostra que em uma estratégia simétrica de equilíbrio os lances pelos dois objetos são idênticos e iguais a:

$$b(v) = \frac{\gamma_2}{2}\frac{\int_0^{v} zf(z)dz}{F(v)}, em\ que\ \gamma_2 > 2.$$

Se $\gamma_2 = 2$, então é o caso em que não há sinergia e a estratégia de equilíbrio corresponde ao resultado anterior[16]. Ou seja, os jogadores dão lances como se estivessem em um leilão selado de 1º preço de um objeto com valor $\gamma_2 v$.

## 4.2. O jogo com a Restrição de Oferta Unitária

Adiciona-se aqui a restrição de oferta unitária. A definição de qual jogador leva qual objeto obedece à regra de maximização da soma dos lances, ou seja, o jogador 1 leva o objeto A e o jogador 2 leva o objeto B se $b_1^A + b_2^B > b_1^B + b_2^A$. O outro caso em que o jogador 1 leva o objeto B e o jogador 2 leva o objeto A é

[15] Ver Apêndice A

[16] Ver o Apêndice B.

simétrico. A diferença deste jogo para o jogo sem a Restrição de Oferta Unitária está nas funções *payoff* que, para o jogador 1, é:

$$\pi_1 = \begin{cases} (v_1^A - b_1^A), & se\ b_1^A + b_2^B > b_1^B + b_2^A \\ (v_1^B - b_1^B), & se\ b_1^A + b_2^B < b_1^B + b_2^A \end{cases}$$

E, de forma análoga e simétrica, para o jogador 2:

$$\pi_2 = \begin{cases} (v_2^A - b_2^A), & se\ b_1^A + b_2^B < b_1^B + b_2^A \\ (v_2^B - b_2^B), & se\ b_1^A + b_2^B > b_1^B + b_2^A \end{cases}$$

Desse modo, considere o caso em que o jogador 1 valoriza mais o objeto A do que o objeto B, ou seja, $v_1^A > v_1^B$. O ganho esperado do jogador 1 será:

$$\pi_1 = (v_1^A - b_1^A)\Pr(b_1^A + b_2^B > b_2^A + b_1^B) + (v_1^B - b_1^B)[1 - \Pr(b_1^A + b_2^B > b_2^A + b_1^B)]$$

**Lema.** Se $v_1^A > v_1^B$, então qualquer estratégia em que $b_1^A > v_1^A - v_1^B$ e $b_1^B > 0$ é estritamente dominada pela estratégia $(b_1^A, b_1^B) = (0{,}0)$. Se $b_1^B = 0$, então a estratégia é fracamente dominada. Logo, em qualquer Equilíbrio de Nash $b_1^A \leq v_1^A - v_1^B$.

Demonstração. Suponha que $b_1^A > v_1^A - v_1^B$, isso implica que $v_1^A - b_1^A < v_1^B$ e $v_1^B - b_1^B \leq v_1^B$. Nesse caso, é melhor para o jogador 1 desviar e dar os lances $(b_1^A, b_1^B) = (0{,}0)$ e assim garantir que ganhe $v_1^A$, que é maior do que $v_1^B$, ou ganhe $v_1^B$, que é maior ou igual a $v_1^B - b_1^B$.

**Corolário.** Se $v_1^A > v_1^B$, então em qualquer Equilíbrio de Nash $b_1^{*B} = 0$.

Demonstração. Considere um Equilíbrio de Nash qualquer do jogo $(b_1^{*A}, b_1^{*B})$ e $v_1^A, v_1^B$ tais que $v_1^A > v_1^B$. Se $b_1^{*B} > 0$, então o **Lema** acima implica que $v_1^A - b_1^{*A} \geq v_1^B > v_1^B - b_1^{*B}$. Mas então, se o jogador desviar para a estratégia $(b_1^{*A}, 0)$, ele aumenta a probabilidade de obter o maior dos dois ganhos, obtendo o objeto A, e aumenta estritamente o seu ganho quando ele obtém o objeto B. Ou seja, $(b_1^{*A}, 0)$ dá um ganho estritamente maior do que $(b_1^{*A}, b_1^{*B})$. Logo, em qualquer Equilíbrio de Nash do jogo $b_1^{*B} = 0$.

Para achar o lance ótimo de equilíbrio simétrico do jogador 1 para o objeto A, deve-se analisar os casos em que o jogador 2 valoriza mais o objeto A ou valoriza mais o objeto B.

No 1º caso, se $v_2^A > v_2^B$, então, por simetria, $b_2^A \leq v_2^A - v_2^B$ e $b_2^B = 0$. Logo, o *payoff* do ganho do jogador 1 é $(v_1^A - b_1^A)\Pr(b_1^A > b_2^A) + v_1^B[1 - \Pr(b_1^A > b_2^A)]$.

No 2º caso, se $v_2^A < v_2^B$, então, $b_2^A = 0$, logo, o *payoff* do jogador 1 é $(v_1^A - b_1^A)\Pr(b_1^A > -b_2^B) + v_1^B[1 - \Pr(b_1^A > -b_2^B)]$. Como, nesse caso, $v_2^A < v_2^B \ e \ v_1^A > v_1^B$, e como os lances $b_1^A \ e \ b_2^B$ não podem assumir valores negativos, então $\Pr(b_1^A > -b_2^B) = 1 \ e \ [1 - (\Pr(b_1^A > -b_2^B)] = 0$. O *payoff* do jogador 1 é $v_1^A - b_1^A$.

O ganho esperado do jogador 1 é então o payoff que ele recebe no 1º caso (jogador 2 valoriza mais o objeto A do que o B, $v_2^A > v_2^B$) vezes a probabilidade de $v_2^A > v_2^B$ mais o payoff que ele recebe no 2º caso (jogador 2 valoriza mais o objeto B do que o A, $v_2^A < v_2^B$) vezes a probabilidade de $v_2^A < v_2^B$. Ou seja, o ganho esperado do jogador 1 é: $P(v_2^A > v_2^B)\{(v_1^A - b_1^A)\Pr(b_1^A > b_2^A) + v_1^B[1 - \Pr(b_1^A > b_2^A)]\} + P(v_2^A < v_2^B)(v_1^A - b_1^A)$. Como $v_2^A e \ v_2^B$ seguem distribuição uniforme no intervalo $[0,1]$, então $\Pr(v_2^A > v_2^B) = \Pr(v_2^A < v_2^B) = \frac{1}{2}$, pois $v_2^A < v_2^B$ e $v_2^A > v_2^B$ são eventos disjuntos e equiprováveis. Desse modo, o ganho esperado do jogador 1 será:

$$\pi_1 = \frac{1}{2}\{(v_1^A - b_1^A)\Pr(b_1^A > b_2^A) + v_1^B[1 - \Pr(b_1^A > b_2^A)]\} + \frac{1}{2}(v_1^A - b_1^A)$$

A equação acima pode ser manipulada de modo a evidenciar a diferença $v_1^A - v_1^B$.

$$\pi_1 = \frac{1}{2}\{(v_1^A - v_1^B)\Pr(b_1^A > b_2^A) - b_1^A[1 + \Pr(b_1^A > b_2^A)]\} + \frac{1}{2}(v_1^A + v_1^B)$$

$$\pi_1 = \frac{1}{2}\{(v_1^A - v_1^B - b_1^A)\Pr(b_1^A > b_2^A) - b_1^A\} + \frac{1}{2}(v_1^A + v_1^B) \qquad (1)$$

O segundo termo da Equação 1, $\frac{1}{2}(v_1^A + v_1^B)$, representa o componente do ganho esperado do jogador 1 que independe do seu lance, ou ele ganhará o objeto A ou ele ganhará o objeto B. O primeiro termo representa o componente do ganho esperado incremental que depende do lance do jogador 1 para o objeto A.

Maximizar a função acima em relação a $b_1^A$ é equivalente ao seguinte problema:

$$\max_{b_1^A}(v_1^D - b_1^A)\Pr(b_1^A > b_2^A) - b_1^A \;\; em\; que\; v_1^D = v_1^A - v_1^B.$$

Portanto, a solução do problema $b_1^A$ é função de $v_1^D = v_1^A - v_1^B$.

Suponha que exista uma função $b_1^A(v_1^D)$ estritamente crescente e diferenciável que é solução do problema acima.

Então, busca-se calcular o lance ótimo de equilíbrio simétrico para o objeto A. Suponha que o jogador 1 dê um lance $x$ qualquer para o objeto A. Ele ganha o objeto se $x > b_2^A(v_2^D)$ ou, de modo equivalente, se $b_A^{-1}(x) > \; (v_2^D)$. [17]

$$\pi_1 = (v_1^D - x)\Pr(b_A^{-1}(x) > v_2^D) - x$$

A probabilidade de $b_A^{-1}(x) > v_2^D$ é igual à Função de Distribuição Acumulada de $v_2^D$em $b_A^{-1}(x)$, ou seja, $\mathrm{F}(b_A^{-1}(x))$. Assim, tem-se que:

[17] Com relação à nomenclatura $b_A^{-1}$ significa a inversa da função lance do jogador 1 para o objeto A, a inversa de $b_1^A$.

$$\pi_1 = (v_1^D - x)\mathrm{F}(b_A^{-1}(x)) - x \qquad (2)$$

O problema do jogador 1 passa a ser:

$$\max_x \pi_1 = (v_1^D - x)\mathrm{F}(b_A^{-1}(x)) - x$$

Suponha que a função objetivo $(v_1^D - x)\mathrm{F}(b_A^{-1}(x)) - x$ é diferenciável em relação a $x$. Da Condição de Primeira Ordem (CPO) do problema acima nós obtemos:

$$\frac{d\pi_1}{dx} = (v_1^D - x)\frac{f\left(b_A^{-1}(x)\right)}{b'\left(b_A^{-1}(x)\right)} - \mathrm{F}\left(b_A^{-1}(x)\right) - 1 = 0.$$

$$(v_1^D - x)\frac{f\left(b_A^{-1}(x)\right)}{b'\left(b_A^{-1}(x)\right)} - \mathrm{F}\left(b_A^{-1}(x)\right) = 1$$

$$v_1^D \frac{f\left(b_A^{-1}(x)\right)}{b'(b_A^{-1}(x))} = 1 + \mathrm{F}\left(b_A^{-1}(x)\right) + x\frac{f\left(b_A^{-1}(x)\right)}{b'(b_A^{-1}(x))}.$$

Em um equilíbrio simétrico $x = b_A(v_1^D)$.

$$\Rightarrow v_1^D \frac{f(v_1^D)}{b'(v_1^D)} = 1 + \mathrm{F}(v_1^D) + b_A(v_1^D)\frac{f(v_1^D)}{b'(v_1^D)}.$$

$$\Rightarrow v_1^D f(v_1^D) = b'(v_1^D) + \mathrm{F}(v_1^D)\, b'(v_1^D) + b_A(v_1^D) f(v_1^D).$$

$$\Rightarrow b'(v_1^D) + [b_A(v_1^D)\,\mathrm{F}(v_1^D)]' = (v_1^D) f(v_1^D).$$

$$\Rightarrow b_A(v_1^D) + b_A(v_1^D)\,\mathrm{F}(v_1^D) = \int_0^{v_1^D} z f(z) dz.$$

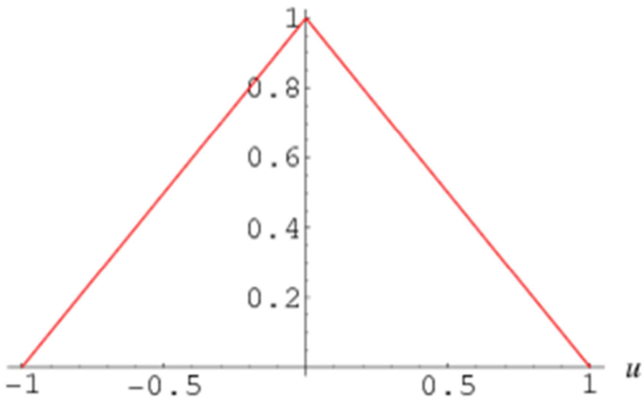
$$\Rightarrow b_A^*(v_1^D) = \begin{cases} \dfrac{\int_0^{v_1^D} z\, f(z)dz}{1 + \mathrm{F}(v_1^D)}, & se\ \ v_1^A > v_1^B. \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases} \quad (3)$$

**Proposição 2.** O lance $(b_A^*, b_B^*)$ é único Equilíbrio de Nash Simétrico em que as funções lances são funções crescentes, contínuas e diferenciáveis de $v_1^D = v_1^A - v_1^B$.

Assumindo que $v_1^A$ e $v_1^B$ têm distribuição uniforme entre 0 e 1, então $v_1^D$ tem distribuição triangular no intervalo [-1,1], cuja função densidade de probabilidade (f.d.p.) é:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + v_1^D, & se\ v_1^D \leq 0 \\ 1 - v_1^D, & se\ v_1^D > 0 \end{cases}$$

**Gráfico 1.** F.d.p. da Distribuição Triangular no intervalo [-1,1] de uma variável aleatória u.




Aplicando a distribuição triangular ao lance ótimo de equilíbrio simétrico, tem-se:

$$\Rightarrow b_A(v_1^D) = \begin{cases} \dfrac{\int_0^{v_1^D} z\,(1-z)dz}{1 + \mathrm{F}(v_1^D)}, & se\ \ v_1^D > 0. \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases} \quad (4)$$

A função de distribuição acumulada da variável aleatória $v_1^D$ é:

$$\mathrm{F}(v_1^D) = \int_0^{v_1^D} (1 - z)dz = v_1^D - \frac{(v_1^D)^2}{2} \qquad (5)$$

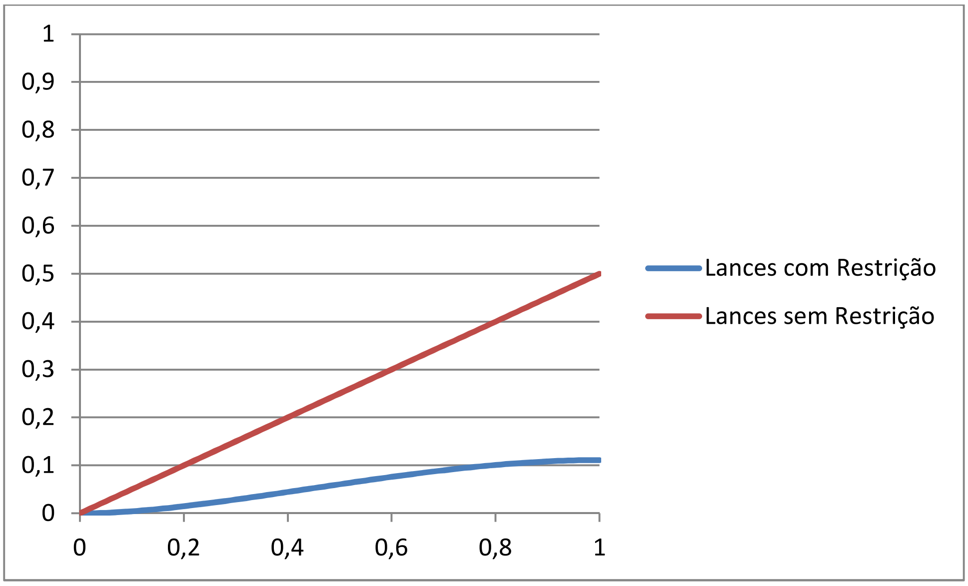
Substituindo na equação (5) na equação (4), tem-se:

$$\Rightarrow b_A^*(v_1^D) = \frac{\frac{(v_1^D)^2}{2} - \frac{(v_1^D)^3}{3}}{1 + v_1^D - \frac{(v_1^D)^2}{2}}. = \frac{\frac{3(v_1^D)^2 - 2(v_1^D)^3}{6}}{\frac{2 + 2(v_1^D) - (v_1^D)^2}{2}}$$

$$b_A^*(v_1^D) = \frac{3(v_1^D)^2 - 2(v_1^D)^3}{6 + 6(v_1^D) - 3(v_1^D)^2}.$$

O gráfico abaixo mostra o comportamento das funções lances simétricas quando há a restrição de oferta unitária e quando não há. Observe que, com a restrição, se para um objeto o licitante ofertar um valor conforme a função lance $b^*(\cdot)$, para o outro objeto ele ofertará zero.

**Gráfico 2**



Como deixa claro o gráfico 2, a inclusão da Restrição de Oferta Unitária (R.O.U) reduziu bastante a função lance ótima dos jogadores. Quando não há a restrição para ambos os objetos é adotada a mesma estratégia ótima de dar um lance que corresponde à metade do valor do objeto. Já quando há a R.O.U. a estratégia ótima é dar lance zero para o objeto de menor valor e um lance para o objeto mais valioso menor do que a diferença entre os valores dos objetos.

O motivo dessa diminuição nos lances ótimos simétricos é que, com a adição da R.O.U., há uma diminuição na competição pelos objetos. Mais especificamente, o jogador não compete pelo objeto de menor valor, que já está garantido por ele bastando ofertar o seu lance mínimo, que no modelo assume valor zero. O jogador compete somente pelo objeto que considera de maior valor e o seu lance é diminuído porque o valor do outro objeto entra como um custo de oportunidade de adquirir o objeto que lhe é mais valioso.

No modelo desenvolvido, percebe-se que o jogador tem como estratégia ótima ofertar o lance mínimo para o objeto ao qual dá menor valor. Como o modelo supõe exatamente dois objetos e dois jogadores, esse lance mínimo é zero. Se o número de jogadores aumenta, há um aumento da competição, tanto quando não se tem a Restrição de Oferta Unitária como quando essa restrição está presente e, consequentemente, os lances tendem a ser mais elevados.

No entanto, espera-se que a diminuição dos lances ótimos se mantenha quando a R.O.U. é acrescentada, mas que a magnitude dessa diminuição seja menor à medida em que aumenta o número de jogadores. A intuição por trás é que a restrição de oferta unitária retira da competição o jogador que já ganhou um objeto. Fica como sugestão para trabalhos futuros achar os equilíbrios simétricos do jogo com dois objetos e N jogadores quando há a Restrição de Oferta Unitária.

Outro ponto importante diz respeito à eficiência alocativa do leilão. A adição da Restrição de Oferta Unitária torna o leilão ineficiente. Enquanto que no leilão sem a restrição os objetos são alocados aos jogadores que lhes dão mais valor, quando se adiciona a restrição isso não ocorre. Considere o caso em que $v_1^A > v_2^A e\ v_1^B > v_2^B$, ou seja, o jogador 1 valora ambos os objetos mais do que o jogador 2. Sem a R.O.U. o jogador 1 ganha os objetos A e B, com a R.O.U. ele só ganha um, o que vale mais para ele, enquanto que o outro objeto é alocado ao jogador para o qual vale menos.

## 4.3. Receita Esperada do Leiloeiro

Estima-se nesta seção a receita esperada quando não há a Restrição de Oferta Unitária e quando há a restrição. A receita esperada no primeiro caso será denominada por $R^S$ e no segundo $R^C$.

A receita esperada do leiloeiro é simplesmente o valor esperado do lance mais alto. Para o caso em que não há a restrição de oferta unitária, a receita esperada do leiloeiro é a somado das receitas esperadas de dois leilões simultâneos selados de 1º preço de um objeto.

$$R^S = E[\max\{b^*(v_1^A), b^*(v_2^A)\}] + E[\max\{b^*(v_1^B), b^*(v_2^B)\}]$$

$$= E[b^*(\max\{v_1^A, v_2^A\})] + E[b^*(\max\{v_1^B, v_2^B\})]$$

Para o leiloeiro, *ex-ante,* os jogadores são idênticos. Logo, a probabilidade de que os valores do objeto A para os jogadores 1 e 2, $v_1^A$ e $v_2^A$, estejam abaixo de um dado valor $v_A$ é $\Pr(v_1^A < v_A e\ v_2^A < v_A) = F(v_A)^2$, cuja função de densidade é $\frac{dF(v_A)^2}{dv_A} = 2F(v_A)f(v_A)$. A receita esperada do leiloeiro é então:

$$R^S = \int_0^1 2b^*(v_A)F(v_A)f(v_A)dv_A + \int_0^1 2b^*(v_B)F(v_B)f(v_B)dv_B.$$

$$R^S = \int_0^1 v_A^2 dv_A + \int_0^1 v_B^2 dv_B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Em relação à existência da restrição, deve-se considerar quatro casos que têm probabilidades idênticas e complementares, são eles: 1º) $v_1^A > v_1^B\ e\ v_2^A > v_2^B$; 2º) $v_1^A > v_1^B\ e\ v_2^A < v_2^B$; 3º) $v_1^A < v_1^B\ e\ v_2^A > v_2^B$; 4º) $v_1^A < v_1^B\ e\ v_2^A < v_2^B$. Os dois primeiros casos são considerados nas estratégias de equilíbrio encontradas, enquanto que os dois últimos casos simétricos aos dois primeiros. Então, a análise da receita esperada leva em conta dois casos simétricos e equiprováveis, com probabilidade $\frac{1}{2}$ cada, primeiro, $v_1^A > v_1^B\ e\ (v_2^A > v_2^B ou\ v_2^A < v_2^B)$, quando os lances positivos são ofertados para o objeto A; segundo, $v_1^A < v_1^B\ e\ (v_2^A > v_2^B ou\ v_2^A < v_2^B)$, quando os lances positivos são ofertados para o objeto B.

A receita esperada do leiloeiro para o objeto A é equivalente à receita esperada para o objeto B, logo, pode-se encontrar a receita esperado do leilão calculando somente para um dos objetos e multiplicando por dois. A receita esperada do leilão com restrição de oferta unitária, $R^C$, é:

$$R^C = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{\frac{(v_A - v_B)^2}{2} - \frac{(v_A - v_B)^3}{3}}{1 + v_A - v_B - \frac{(v_A - v_B)^2}{2}.} \cdot 2 \cdot [v_A - v_B - \frac{(v_A - v_B)^2}{2}]$$
$$\cdot [1 - v_A + v_B] d(v_A - v_B).$$

Em que $2F(v_A - v_B)f(v_A - v_B) = 2 \cdot [v_A - v_B - \frac{(v_A - v_B)^2}{2}] \cdot [1 - v_A + v_B]$.

A integral acima é de complexa resolução, por isso, vamos considerar $\widehat{R^C} > R^C$, em que:

$$\widehat{R^C} = 2 \int_0^1 \frac{\frac{(v_A - v_B)^2}{2} - \frac{(v_A - v_B)^3}{3}}{v_A - v_B - \frac{(v_A - v_B)^2}{2}.} \cdot [v_A - v_B - \frac{(v_A - v_B)^2}{2}]$$
$$\cdot [1 - v_A + v_B] d(v_A - v_B).$$

$$\widehat{R^C} = 2\int_0^1 \frac{(v_A - v_B)^2}{2} - \frac{(v_A - v_B)^3}{3} \cdot (1 - v_A + v_B) d(v_A - v_B).$$

$$\widehat{R^C} = \int_0^1 (v_A - v_B)^2 \, d(v_A - v_B) - \frac{5}{3}\int_0^1 (v_A - v_B)^3 d(v_A - v_B) + \frac{2}{3}\int_0^1 (v_A - v_B)^4 \, d(v_A - v_B).$$

$$\widehat{R^C} = \frac{1}{3} - \frac{5}{12} + \frac{2}{15} = \frac{1}{20}.$$

Conforme os cálculos, $R^S = \frac{2}{3}$ e $\widehat{R^C} = \frac{1}{20}$, logo, $R^S > \widehat{R^C} > R^C$. Não só a receita esperada do leiloeiro é menor quando há restrição em relação a quando não há a restrição, como a diferença é bastante considerável, a receita esperada do leiloeiro na presença da R.O.U. é menor do que 15% da receita esperada quando não há a R.O.U. Essa diminuição da receita esperada reflete a redução dos lances ótimos, entretanto, o montante expressivo da redução se deve à consideração do jogo com 2 jogadores e 2 objetos. Se mais jogadores forem adicionados, espera-se que a diminuição da receita esperada seja menor.

# 5. Conclusão

Esta dissertação abordou a primeira concessão dos aeroportos brasileiros realizada pelo governo e operacionalizado pela Agência Nacional de Aviação Civil – ANAC. Foram concedidos ao setor privado três aeroportos, o de Brasília/Df, Guarulhos/SP e Viracopos/SP.  Contudo, a abordagem feita não tratou dos motivos que levaram o governo a privatizar os aeroportos, mas, sim, do mecanismo utilizado para realizar essas concessões, o leilão.

O leilão adotado pela ANAC apresentou características peculiares. Primeiramente, tratou-se de um leilão para a venda simultânea dos três aeroportos em que os participantes vencedores pagam o próprio lance. Segundo, o leilão foi composto por duas etapas, a primeira etapa é um leilão selado e a segunda etapa é um leilão oral com lances ascendentes. E, por fim, restringiu-se a alocação dos aeroportos a um por consórcio de empresas.

Essas regras do leilão o tornaram bastante complexo para analisar e modelar, entretanto, somente o fato de o leilão ter contemplado os três aeroportos simultaneamente traz dificuldades à qualquer modelagem que se queira fazer. Menezes e Monteiro (2005) diz que a dificuldade em se desenvolver a teoria sobre leilões de múltiplos objetos advém considerações estratégicas adicionais quando os jogadores têm de dar lances para vários objetos.

Dada a complexidade do mecanismo do leilão adotado, focou-se na análise da regra que restringiu a alocação dos aeroportos a um por vencedor, chamada aqui de restrição de Oferta Unitária. Como já foi dito, a inserção dessa restrição teve como motivação garantir a concorrência entre esses aeroportos.

Para analisar a Restrição de Oferta Unitária, apresentou-se aqui um modelo de leilão simplificado para a venda simultânea de dois objetos e com dois jogadores, em que cada jogador paga o valor do seu lance a cada objeto, comparando o modelo quando a restrição não está presente com o modelo com a restrição.

Demonstrou-se, sob certas hipóteses[18], que o leilão para a venda simultânea de dois objetos sem a Restrição de Oferta Unitária é equivalente a dois leilões de um objeto que ocorrem simultaneamente. Esse resultado foi importante por facilitar o cálculo dos lances ótimos de equilíbrio simétrico, que são simplesmente os lances ótimos dos dois leilões de um objeto.

Em seguida, calcularam-se os lances ótimos de equilíbrio simétrico quando a Restrição de Oferta Unitária está presente. Chegou-se ao resultado de que restringir a oferta dos objetos a um por licitante tende a reduzir o lance ótimo dos licitantes e a receita esperada do leiloeiro.

A diminuição nos lances ótimos simétricos se justifica pela diminuição na competição pelos objetos com a adição da Restrição de Oferta Unitária. De forma intuitiva, o jogador que ganhou um objeto deixa de competir pelo outro.

Uma observação que se faz é que a acentuada redução dos lances ótimos e da receita esperada se deve ao modelo, que supôs haver somente dois jogadores, sendo, portanto, um caso extremo, mas que deixa evidente o efeito dessa restrição sobre o leilão. Espera-se que à medida que o número de jogadores aumenta, diminui-se a magnitude da redução dos lances ótimos com o acréscimo da Restrição de Oferta Unitária, de modo que se houver muitos jogadores, essa restrição perde sua relevância. A verificação disso, por meio da extensão do modelo para N jogadores, fica como sugestão para trabalhos futuros.

Outro ponto interessante é que a Restrição de Oferta Unitária traz ineficiência alocativa ao leilão, visto que pode ocorrer de um objeto ir para o jogador que o valoriza menos. Esse é caso em que ambas os objetos valem

[18] Valores privados e identicamente distribuídos e ausência de sinergia, principalmente.

mais para um jogador do que para o outro, com a restrição esse jogador não pode ganhar ambos os objetos.

A contribuição desse trabalho para futuros leilões a serem adotados nas privatizações é que se o governo valoriza garantir que não haja concentração em mercados, como o aeroportuário, e adotam esse tipo de restrição, o primeiro custo em que ele poderá incorrer tende a ser exatamente na arrecadação de receita do leilão.

# Apêndice A

Neste apêndice é apresentado o cálculo dos lances ótimos de equilíbrio simétrico do leilão de primeiro preço de um objeto quando há N jogadores (compradores) e os valores são privados e independentes uniformemente distribuídos no intervalo [0,1]. As funções de lance, b(v), são simétricos, crescentes e diferenciáveis.

Em um leilão selado de 1º preço, cada jogador submete seu lance em um envelope selado. Seja um jogador i qualquer, o objeto em leilão vale $v_i$ para ele, que submete seu lance $b_i$. dado os lances de todos os jogadores, os *payoffs* são:

$$\pi_i = \begin{cases} v_i - b_i, & se\ b_i > max_{j\neq i} b_j \\ 0, & se\ b_i < max_{j\neq i} b_j \end{cases}$$

Ou seja, o jogador i vence o leilão se o seu lance for o maior e pagará pelo objeto o valor de seu lance. O payoff esperado do jogador i é:

$$\overline{\pi_i} = (v_i - b_i) Pr\big(\ b_i > max_{j\neq i} b_j\big).$$

No leilão selado de 1º preço o jogador enfrenta um *trade-off,* aumentando seu lance, o jogador aumenta a probabilidade de ganhar o leilão ao mesmo tempo em que diminui o valor que receberá se ganhar.

Suponha que o jogador i dê um lance x qualquer, ele vencerá o leilão se $x > max_{j\neq i} b(v_j)$. Como $b(\cdot)$ é crescente, $max_{j\neq i} b\big(v_j\big) = b(max_{j\neq i} v_j)$, ou seja, $x > b(max_{j\neq i} v_j)$ o que implica que $b^{-1}(x) > max_{j\neq i} v_j$ . Tem-se que $Pr\big(\ b_i > max_{j\neq i} b_j\big) = Pr\big(b^{-1}(x) > max_{j\neq i} v_j\big) = F(b^{-1}(x))^{N-1}$. Lembrando que $F(\cdot)$ é a função de distribuição acumulada, que está elevada a potência N-1 porque há N-1 outros jogadores além do jogador i. Logo, o *payoff* esperado do jogador i é:

$$\bar{\pi}_i = (v_i - x)F(b^{-1}(x))^{N-1}$$

O problema de maximização do jogador i é, então:

$$\max_x \bar{\pi}_i = (v_i - x)F(b^{-1}(x))^{N-1}$$

$$\frac{d\bar{\pi}_i}{dx} = (v_i - x)(N-1)\frac{f\left(b^{-1}(x)\right)F\left(b^{-1}(x)\right)^{N-2}}{b'\left(b^{-1}(x)\right)} - F\left(b^{-1}(x)\right)^{N-1} = 0$$

Em um equilíbrio simétrico, $x = b(v_i)$. Logo,

$$(v_i - b(v_i))(N-1)\frac{f\left(b^{-1}\left(b(v_i)\right)\right)F\left(b^{-1}\left(b(v_i)\right)\right)^{N-2}}{b'\left(b^{-1}(b(v_i))\right)} - F\left(b^{-1}(b(v_i))\right)^{N-1} = 0$$

$$(v_i - b(v_i))(N-1)\frac{f(v_i)F(v_i)^{N-2}}{b'(v_i)} - F(v_i)^{N-1} = 0$$

$$(v_i - b(v_i))(N-1)f(v_i)F(v_i)^{N-2} = b'(v_i)F(v_i)^{N-1}$$

$$v_i(N-1)f(v_i)F(v_i)^{N-2} - b(v_i)(N-1)f(v_i)F(v_i)^{N-2} = b'(v_i)F(v_i)^{N-1}$$

$$b'(v_i)F(v_i)^{N-1} + \ b(v_i)(N-1)f(v_i)F(v_i)^{N-2} = v_i(N-1)f(v_i)F(v_i)^{N-2}$$

$$(b(v_i)F(v_i)^{N-1})' = v_i(N-1)f(v_i)F(v_i)^{N-2}$$

$$b(v_i)F(v_i)^{N-1} = \int_0^{v_i} z(N-1)f(z)F(z)^{N-2}dz$$

$$b^*(v_i) = \begin{cases} \dfrac{\int_0^{v_i} z(N-1)f(z)F(z)^{N-2}dz}{F(v_i)^{N-1}} & se\ 0 < v_i \leq 1 \\ 0 & se\ v_i = 0 \end{cases}$$

Quando há somente dois jogadores, então N=2, logo:

$$b^*(v) = \begin{cases} \dfrac{\int_0^v zf(z)dz}{F(v)} & se\ 0 < v \leq 1 \\ 0 & se\ v = 0 \end{cases}$$

Supondo a distribuição uniforme entre 0 e 1, tem-se que $F(v) = v$ e $f(z) = 1$. Assim:

$$b^*(v) = \begin{cases} \dfrac{\int_0^v zdz}{v} & se\ 0 < v \leq 1 \\ 0 & se\ v = 0 \end{cases}$$

$$b^*(v) = \frac{v^2}{2}\frac{1}{v} = \frac{v}{2}.$$

## Apêndice B

Este apêndice reproduz o cálculo dos lances simétricos de equilíbrios do leilão apresentado por Menezes e Monteiro (2005) em que há dois objetos idênticos e dois jogadores. Nesse leilão, considera-se a presença de sinergia. Seja $x$ o objeto, se um jogador levar as duas unidades desse objeto seu ganho será de $\gamma_2 x$. Se não houver sinergia, então $\gamma_2 = 2$. Se houver sinergia positiva, então $\gamma_2$>2.

Menezes e Monteiro(2005) apresentam o seguinte teorema (tradução própria): se $\gamma_2 \geq 2$, então uma estratégia de equilíbrio simétrico em um leilão discriminatório de dois objetos é dar lances iguais for cada objeto, $b(x) = c(x)$, onde $b(x) = \frac{\gamma_2}{2}\frac{\int_0^x y f_Y(y)dy}{F_Y(x)}$.

Note-se que $b(x)$ definido acima satisfaz a equação diferencial

$$b'(x)F_Y(x) + b(x)f_Y(x) = \frac{\gamma_2}{2}xf_Y(x)$$

Demonstração:

Considerando dois jogadores, 1 e 2, suponha que o jogador 1 b e c, com $b \geq c$, para a primeira unidade e para a segunda unidade do objeto, respectivamente. O ganho esperado do jogador 1 será então:

$$\emptyset(b,c) = (\gamma_2 x - b - c)\mathrm{Pr}(c > b(Y)) + (x - b)\mathrm{Pr}(b > b(Y) > c)$$

Ou seja, o jogador 1 leva as duas unidades do objeto se seu menor lance, c, for maior dos dois lances do outro jogador, b(Y). O jogador 1 leva somente uma unidade do objeto se o maior lance do outro jogador ficar no intervalo entre os seus lances, [c,b].

Pode-se supor que $b = b(\alpha)$ e $c = b(\beta)$, onde $1 \geq \alpha \geq \beta \geq 0$. Desse modo, pode-se reescrever o ganho esperado do jogador 1:

$$\psi(\alpha,\beta) = (\gamma_2 x - b(\alpha) - b(\beta))\Pr(\beta > Y) + (x - b(\alpha))\Pr(\alpha > Y > \beta)$$

$$\psi(\alpha,\beta) = (\gamma_2 x - b(\alpha) - b(\beta))\mathrm{F}_Y(\beta) + (x - b(\alpha))(\mathrm{F}_Y(\alpha) - \mathrm{F}_Y(\beta))$$

$$\psi(\alpha,\beta) = (\gamma_2 - 1)x - b(\beta)\mathrm{F}_Y(\beta) + (x - b(\alpha))\mathrm{F}_Y(\alpha)$$

O problema de maximização do jogador 1 é $\max_{\alpha \geq \beta} \psi(\alpha,\beta)$, que pode ser resolvido usando Kuhn-Tucker. Se $\lambda$ é o multiplicador de Kuhn-Tucker, então:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = -b'(\alpha)F_Y(\alpha) + \big(x - b(\alpha)\big)f_Y(\alpha) = \lambda$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \beta} = -b'(\beta)F_Y(\beta) + \big(\alpha_2 - 1)x - b(\beta)\big)f_Y(\beta) = -\lambda$$

$$\lambda(\alpha - \beta) = 0$$

A equação diferencial $b'(x)F_Y(x) + b(x)f_Y(x) = \frac{\gamma_2}{2}xf_Y(x)$ permite reescrever $\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}$ e $\frac{\partial \psi}{\partial \beta}$ e obter as seguintes equações.

$$\left(x - \frac{\gamma_2 \alpha}{2}\right) f_Y(\beta) = \lambda$$

$$\left((\gamma_2 - 1)x - \frac{\gamma_2 \beta}{2}\right) f_Y(\beta) = -\lambda$$

$$\lambda(\alpha - \beta) = 0$$

No ótimo, tem-se que $\alpha = \beta$. Para ver o porquê, suponha que $\alpha \neq \beta$; então $\lambda = 0$ e, portanto, $x - \left(\frac{\gamma_2 \alpha}{2}\right) = 0$ e $0 = (\gamma_2 - 1)x - \frac{\gamma_2 \gamma}{2} = (\gamma_2 - 2)x > 0$.

Sendo $\alpha = \beta$, obtém-se que $\left(x - \frac{\gamma_2 \alpha}{2} + (\gamma_2 - 1)x - \frac{\gamma_2 \alpha}{2}\right) f_Y(\alpha) = 0$. Disso resulta que $\alpha = x = \beta$. Fim da prova.

## Referências Bibliográficas


Ashenfelter, O. **How Auctions Work for Wine and Art**. Journal of Economic Perspectives, 3(3), p. 23-36, 1989.

Ausubel, Lawrence M. **An Efficient Ascending-Bid Auction for Multiple Objects**. American Economic Review, 94(5), p. 1452-1475, 2004.

Ausubel, Lawrence M. e Cramton, Peter. **Demand Reduction and Ineficiency in Multi-Unit Auctions**. Working Paper. University of Maryland, 2002.

Ausubel, Lawrence M., Cramton, Peter e McAfee, Preston. **Synergy in Wireless Telephony: Evidence from the Broadband PCS Auctions**. Journal of Economics and Management Strategy, nº 06, p. 497-527, 1997.

Back, Kerry e Zender, Jaime F. **Auctions of divisible goods: on the rationale for the Treasury experiment**. Review of Financial Studies 6, p. 733–764, 1993.

Clarke, Edward H. **Multipart Pricing of Public Goods**. Public Choice, 2, p. 19-33, 1971.Disponível em: http://bbs.cenet.org.cn/UploadImages/200642020355785817.pdf.

Colnago Jr., Esteves P. **PROES: Um modelo de leilão híbrido**. Dissertação de Mestrado. Departamento de Economia, Universidade de Brasília, 2004.

Dasgupta, P. S. e Maskin, E. **Efficient Auctions**. Quartely Journal of Economics, 115, p. 341-388, 2000.

Groves, T. **Incentives in Teams**. Econometrica, 41, p. 617-631, 1973.

Katzman, B. **A Two Stage Sequential Auction with Multi-unit Demands**. Journal of Economic Theory, 86(1), p. 77-99, 1999.

Klemperer, Paul. **What Really Matters in Auction Design**. Journal of Economic Perspectives, Vol. 16, Nº 1, p. 169–189, 2002a.

Klemperer, Paul. **Using and Abusing Auction Theory**. Working Paper, University of Oxford, 2002b. Disponível em: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=379242.

Krishna, Vijay. **Auction Theory**. 2ª Ed., Pennsylvania State University, Ed. Elsevier, 2010.

Krishna, Vijay e Perry, Motty. **Efficient Mechanism Design**. The Hebrew University of Jerusalem, 2000. Disponível em: http://econ.la.psu.edu/~vkrishna/papers/vcg20.pdf.

Maskin, E. and J. Riley. **Optimal Multi-unit Auctions**. The Economics of Missing Markets, Information and Games, Oxford University Press, p. 312-335, 1990.

McAffe, P. e Vincent, D. **The Declining Price Anomaly**. Journal of Economic Theory, 60(1), p. 191-212, 1993.

Menezes, Flávio M. e Monteiro, Paulo K. **An Introduction to Auction Theory**. Oxford University Press, 2005.

Menezes, Flávio M. e Dutra, Joísa C. **Hybrid auctions I: theory.** The Australian National University, Working Paper Nº 393, 25p, abr, 2001.

Milgrom, P., and R. Weber. **A Theory of Auctions and Competitive Bidding**. Econometrica, 50, p. 1089-1122, 1982.

Milgrom, P., and R. Weber. **A Theory of Auctions and Competitive Bidding, II,** em The Economic Theory of Auctions, ed. por P. Klemperer. Cheltenham, U.K.: Edward Elgar, 1999.

Myerson, Roger B. **Optimal Auction Design**. Mathematics of Operations Research, Vol. 6, Nº. 1. p. 58-73, 1981

Palfrey, Thomas R. **Bundling Decisions by a Multiproduct Monopolist with Incomplete Information**. Econometrica, Vol. 51, nº 2. P. 463-483, 1983.

Riley, John G. e Samuelson, William F. **Optimal Auctions**. The American Economic Review, Vol. 71, Nº 3, p. 381-392, 1981.

Vickey, William. **Counterspeculation, Auctions and Competitive Sealed Tenders**. Journal of Finance, 16(1), p. 8-37, 1961.

Weber, Robert J. **Multiple-object Auctions**. Working Paper, Northwestern University, 1981.

Xu, Xiaoshu; Levin, Dan e Ye, Lixin. **Auctions with Synergy and Resale**. The Ohio State University, Maio, 2010,

Zhan, Roer L. **Optimality and efficiency in auctions design: a survey**. (English) Chinchuluun, Altannar (ed.) et al., Pareto optimality, game theory and equilibria. New York, NY: Springer. Springer Optimization and Its Applications 17, p. 437-459, 2008.