Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

A confirmação da Conjectura de Artin para pares de formas aditivas de graus $2^\tau \cdot 3$ e $3^\tau \cdot 2$

por

Luciana Lima Ventura

Brasília
Fevereiro de 2013

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

A confirmação da Conjectura de Artin para pares de formas aditivas de graus $2^\tau \cdot 3$ e $3^\tau \cdot 2$

por

Luciana Lima Ventura*

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

Doutora em Matemática

Brasília, 28 de fevereiro de 2013.

Comissão Examinadora:

____
Prof. Dr. Hemar Teixeira Godinho - Orientador (MAT/UnB)

____
Prof.ª Dr.ª Daniela Amorim Amato - Membro (MAT/UnB)

____
Prof. Dr. Diego Marques Ferreira - Membro (MAT/UnB)

____
Prof. Dr. Cícero Fernandes de Carvalho - Membro (UFU)

____
Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues - Membro (IME/UFG)

*A autora foi bolsista da CAPES e do CNPq durante parte da elaboração deste trabalho.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por mais essa conquista.

Agradeço os meus pais e familiares pela educação e pelos ensinamentos que me deram, além do suporte que sempre me ofereceram.

Agradeço ao professor Hemar Godinho, não só pelas orientações no PET, no mestrado e no doutorado, mas principalmente por todos os ensinamentos de elocução, postura, comportamento, humildade, respeito e simpatia ao longo desses anos. Agradeço ainda sua compreensão e paciência nas diversas situações.

Agradeço aos professores, Paulo Henrique, Cícero, Daniela e Diego, por terem aceitado compor a banca e pelas palavras.

Agradeço a todos os meus professores por colaborarem na formação da pessoa e da profissional que sou hoje.

Agradeço aos meus colegas e amigos da matemática, em particular Thiago, Simone, Thaynara, Andréia, Ana Paula, Kaliana, Magno e Miguel que estiveram ao meu lado durante esse percurso me dando apoio e promovendo momentos de descontração.

Agradeço ao Pedro pelas palavras de incentivo, por estar ao meu lado nas horas de aperto e pela paciência.

Agradeço aos meus colegas e amigos do IFB que viabilizaram a conciliação entre o estudo e o trabalho e me acompanharam na reta final.

E, por fim, mas não menos importante, agradeço a todos os que estiveram comigo nessa jornada, mesmo que longe geograficamente, porém perto na torcida, nas vibrações positivas e no estímulo.

Resumo

Uma versão da Conjectura de Artin afirma que para um sistema homogêneo com duas equações diagonais de grau k, cujos coeficientes são inteiros, ter solução p-ádica não trivial é suficiente que o número de variáveis seja maior que $2k^2$. Nesse trabalho, vamos mostrar que a conjectura é verdadeira quando o grau é $2^\tau \cdot 3$ ou $3^\tau \cdot 2$, para $\tau \geqslant 2$.

Palavras-chaves: Conjectura de Artin; par de equações diagonais; par de formas aditivas; p-normalização; solução p-ádica; solução não trivial.

Abstract

One version of Artin's Conjecture states that for a homogeneous system with two diagonal equations of degree k, whose coefficients are integers, exists a nontrivial p-adic solution provided the number of variables is greater than $2k^2$. In this paper, we show that the conjecture is true when the degree is $2^\tau \cdot 3$ or $3^\tau \cdot 2$, for $\tau \geqslant 2$.

Key words: Artin's conjecture; pair of diagonal equations; pair of additive forms; p-normalization; p-adic solution; nontrivial solution.

Índice

Introdução **1**

Contextualização histórica do problema 1

O problema 3

1 p-normalização **5**

2 Sequências de elementos de grupos abelianos **13**

2.1 Sequências inteiras 14

2.2 Sequências em $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ 16

2.3 Elementos primários e secundários 20

2.3.1 Resultados para $p = 2$ 21

2.3.2 Resultados para $p = 3$ 22

3 Pares de formas de grau $2^\tau \cdot 3$ **26**

4 Pares de formas de grau $3^\tau \cdot 2$ **34**

Referências Bibliográficas **71**

Introdução

A existência, ou não, de soluções para equações é um tema frequente na matemática. Alguns desses problemas já desafiaram matemáticos por séculos até serem provados, como o Último Teorema de Fermat, e outros desafiam até hoje. Existe inclusive um instituto localizado em Massachusetts, Clay Mathematics Institute, que premia quem desvenda determinados problemas.

O tema desse trabalho é a busca de condições suficientes para que um par de formas aditivas de grau $3 \cdot 2^\tau$ ou $3^\tau \cdot 2$, com $\tau \geqslant 2$, tenha zero não trivial dentro do corpo dos números p-ádicos, teoria proposta por Kurt Hensel em 1897.

Contextualização histórica do problema

Em 1920, o matemático austríaco Artin fez a seguinte conjectura

Conjectura 1. *Seja F é um corpo completo com respeito a um valor absoluto discreto, cujo corpo residual é finito. Então toda forma homogênea com coeficientes inteiros de F e de grau k com pelo menos $k^2 + 1$ variáveis tem zero não trivial.*

Sendo F um corpo de série de potências, Lang [22] mostrou que a conjectura é válida. No entanto, se F é um corpo p-ádico já não podemos dizer o mesmo como mostrou o francês Terjanian em [26]. Em 1966, ele exibiu um exemplo de uma forma de grau 4 com 18 variáveis e sem soluções não triviais sobre $\mathbb{Q}_2$.

Muitos outros contra-exemplos, todos de grau par, foram encontrados depois. Mas, um ano antes do trabalho de Terjanian, Ax e Kochen [1] tinham mostrado que quando $[F : \mathbb{Q}_p] = n < \infty$, para qualquer grau $k \geqslant 1$, existe um número $p(k, n)$ tal que a conjectura vale para todo $p > p(k, n)$, sem explicitar os valores de $p(k, n)$. Assim, um novo desafio estava lançado: dados k e n, determinar precisamente para quais primos a conjectura de Artin falha em corpos p-ádicos.

Antes do resultado de Ax e Kochen já tínhamos a validade da conjectura para graus 2 e 3. O primeiro foi mostrado por Hasse [20] em 1924 e o segundo por Demyanov [12] (quando os corpos residuais tem caracretística diferente de 3) em 1950 e por Lewis [23] em 1952.

Já em 1963, Davenport e Lewis [8], provaram a seguinte versão da conjectura

> *Toda forma aditiva (ou diagonal) de grau k em $n > k^2$ variáveis possui zeros p-ádicos não triviais.*

Esses dois autores ainda estudaram os pares de formas aditivas de grau 3 e, em 1966, eles publicaram que 18 variáveis eram suficientes para garantir solução p-ádica não trivial nesse caso (ver [9]). Anos mais tarde, ambos provaram a validade da versão da conjectura para duas formas aditivas quando o grau é ímpar [10]. Para grau par, eles mostraram que $n \geqslant 7k^3$ variáveis é suficiente para que se tenha solução não trivial.

Com isso, temos a seguinte releitura da conjectura

Conjectura 2. *Um sistema com r formas aditivas de grau k com n variáveis sobre um corpo p-ádico F tem zeros não triviais em F se $n \geqslant rk^2 + 1$.*

Nesse sentido, temos resultados que dão cotas inferiores para o número de variáveis, mesmo que ainda distantes da proposta pela conjectura. Alguns desses resultados foram obtidos por Davenport e Lewis [11]

$$n \geqslant \begin{cases} [9r^2k \ \log(3rk)], & \text{se } k \text{ é ímpar} \\ [48r^2k^3 \ \log(3rk^2)], & \text{se } k \text{ é par diferente de 2} \end{cases};$$

Knapp [21]

$$n > r^2 k^{2+2N\tau}, \quad \text{onde} \quad k = p^\tau m \quad \text{e} \quad N = [F : \mathbb{Q}_p]$$

e Brink, Godinho e Rodrigues [2]

$$n > 4Nr^2k^2, \quad \text{onde} \quad N = [F : \mathbb{Q}_p]$$

ou

$$n > (rk)^{2\tau+5}, \quad \text{onde} \quad k = p^\tau m.$$

Quando temos um par de forma aditivas os resultados são mais animadores. Nos seus trabalhos [13], [14] e [15], Godinho mostrou que, para uma par de formas aditivas de grau 4, $n \geqslant 33$ é suficiente para que haja solução p-ádica não trivial desde que $p \neq 2$. No caso em que p é 2, precisamos de $n \geqslant 61$ variáveis. E se o grau for uma potência de 2, com expoente maior que 1, então o número de variáveis deve ser $n \geqslant 16k^2 - 26k + 1$. Por último, se o grau for da forma $k = p^\tau(p-1)k_0$ onde $(k_0, p) = 1$ ele provou que devemos ter $n \geqslant 2k^{2+\omega(p,\tau)}$ onde

$$\omega(p,\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{\log p + \dfrac{1}{\tau}\log(p-1)}, & \text{se } k_0 < 2^\tau \\ 0, & \text{se } k_0 \geqslant 2^\tau \end{cases}$$

Observe que para p suficientemente grande essa cota é bem próxima a da conjectura. Pouco tempo depois, Godinho e Ripoll [17] chegaram a $n \geqslant 2k^{5/2}$.

Em 1999, Brüdern e Godinho [3], utilizando a teoria combinatória e os resultados de Olson [24] e [25] para sequências de soma zero em grupos finitos, provaram que se o grau não é potência de 2 então $n \geqslant 6k^2$ variáveis é condição suficiente para termos a solução desejada.

Até aqui temos que, em geral, o número mínimo de variáveis no par de formas deve ser

$$n \geqslant \begin{cases} 6k^2, & \text{se } k \neq 2^\tau \\ 16k^2 - 26k + 1, & \text{se } k = 2^\tau \end{cases}$$

o que ainda não é o resultado esperado, mas note que pelo menos já temos a ordem de grandeza k^2 como aparece na conjectura.

Alguns anos depois, Brüdern e Godinho [4] melhoraram a sua cota e mostraram que $n > 2k^2$ é suficiente a menos que $k = p^\tau(p-1)$ ou $k = 2^\tau \cdot k_0$ com $\tau \geqslant 1$ e $k_0 \in \{1, 3\}$. Se $k = p^\tau(p-1)$ então eles mostraram que $n \geqslant 4k^2$ variáveis é suficiente, se $k = 2^\tau \cdot 3$, basta que $n \geqslant \frac{8}{3}k^2$ e se $k = 2^\tau$ então devemos ter $n \geqslant 8k^2$. A única intersecção desses dois casos para os quais não foi provada a conjectura por eles é $k = 6$. E, para esse caso particular, temos a prova de Godinho, Knapp e Rodrigues [16].

Por fim, Godinho e Souza, ver [18] e [19], mostraram que para o grau $k = p^\tau(p-1)$ quando $p \in \{3, 5\}$ ou $p \geqslant 7$ com $\tau \geqslant (p-1)/2$, então $n > 2\left(\frac{p}{p-1}\right)k^2 - 2k$ variáveis para um par de forma aditivas é suficiente para que haja zero p-ádico não trivial.

Existem trabalhos que mostram que o número mínimo de variáveis para um par de formas, $2k^2 + 1$, exigido pela Conjectura 2 nem sempre é o melhor possível. Vaughan [27] provou que bastam 16 variáveis para que um par de grau 3 tenha solução não trivial e esse sim seria o melhor resultado para esse caso uma vez que Davenport e Lewis [9] exibiram um par de grau 3 com 15 variáveis que possui apenas a solução trivial. E se considerarmos $p \neq 7$ então Cook [5] mostrou que um par de grau 3 tem solução não trivial desde que possua pelo menos 13 variáveis, para os pares com 12 variáveis o resultado falha para infinitos primos. Cook [6] ainda mostrou que um par de formas aditivas de grau 5 tem solução não trivial se $n \geqslant 31$, a menos de um número finito de corpos p-ádicos.

O problema

Considere o sistema de equações

$$\begin{array}{l} f = a_1x_1^k + \cdots + a_nx_n^k = 0 \\ g = b_1x_1^k + \cdots + b_nx_n^k = 0 \end{array}, \tag{1}$$

onde $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, para todo $1 \leqslant i \leqslant n$.

Como dito inicialmente, a nossa proposta é demonstrar os seguintes resultados:

Teorema 1. *O par de equações (1) possui solução p-ádica não trivial para qualquer primo p se $k = 2^\tau \cdot 3$ com $\tau \geqslant 2$ e $n \geqslant 2k^2 + 1$.*

Teorema 2. *O par de equações (1) possui solução p-ádica não trivial para qualquer primo p se $k = 3^\tau \cdot 2$ com $\tau \geqslant 2$ e $n \geqslant 2k^2 + 1$.*

As provas desses teoremas se resumirão aos casos $p = 2$ se $k = 2^\tau \cdot 3$ e $p = 3$ se $k = 3^\tau \cdot 2$, uma vez que os resultados de Brüdern e Godinho [4] garantem a sua veracidade para os outros casos, como podemos verificar a seguir.

Teorema. *Seja $p \geqslant 3$ um primo. Então o par (1) tem solução p-ádica não trivial desde que $n \geqslant 2k^2 + 1$ e $k \neq p^\tau(p-1)$. Para os demais casos, a condição $n \geqslant 4k^2$ garante a existência de solução p-ádica não trivial para o par (1).*

Teorema. *Suponha que $k = 2^\tau k_0$ com $\tau \geqslant 0$ e k_0 ímpar. Então o par (1) tem solução 2-ádica não trivial desde que $n \geqslant \max\{8k^2 k_0^{-1}, 2k^2 + 1\}$.*

Lema. *Se $p \nmid k$ e $n \geqslant 2k^2 + 1$, o par de equações (1) tem solução não trivial em $\mathbb{Q}_p$ para qualquer escolha de coeficientes racionais.*

Este trabalho está dividido em quatro capítulos, dos quais os dois primeiros são dedicados à apresentação da base teórica a ser utilizada nas provas dos Teoremas 1 e 2 e nos dois últimos capítulos detalhamos as demonstrações dos teoremas.

No primeiro capítulo definimos o que são sistemas p-normalizados e obtemos informações interessantes como a divisão das variáveis dos pares em níveis. Falamos ainda de solução não singular para o sistema, o que nos indicará um caminho a ser seguido.

No capítulo 2, faremos um breve estudo de sequências de elementos de grupos abelianos finitos com o objetivo de obter condições suficientes para termos subsequências de soma zero. Isso será importante pois os coeficientes do sistema serão identificados como elementos de $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ e definiremos elementos primários e secundários que serão fundamentais na prova. Por fim, veremos formas de construir tais elementos utilizando as subsequências de soma zero.

No Capítulo 3, mostramos o resultado para o Teorema 1, já no Capítulo 4, fazemos a demonstração para o Teorema 2. As duas provas seguem a mesma linha, redução da cota superior do número mínimo de variáveis no primeiro nível que têm coeficientes não divisíveis por p em qualquer combinação linear do par f, g (obviamente desde que as constantes dessa combinação não sejam ambas divisíveis por p), então colocamos o caso $k = 2^\tau \cdot 3$ primeiro pois essa redução é mais simples, com poucos casos a serem considerados, o que nos permite fazer a prova em seis lemas. Para o caso $k = 3^\tau \cdot 2$ temos o auxílio de vinte e sete lemas para a demonstração pois a redução da cota nesse caso é mais lenta e precisamos considerar mais casos, no entanto, uma vez entendido o que foi feito no Capítulo 3 a leitura do último capítulo se torna mais fácil.

Capítulo 1

p-NORMALIZAÇÃO

Os resultados apresentados ao longo deste capítulo são clássicos, mas as demonstrações serão apresentadas somente para manter este trabalho o mais autossuficiente possível.

Seja

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_n) &= a_1x_1^k+\cdots+a_nx_n^k \\ g(x_1,\ldots,x_n) &= b_1x_1^k+\cdots+b_nx_n^k \end{aligned} \tag{1.1}$$

um par de formas aditivas cujos coeficientes são todos racionais.

Dizemos que dois pares de formas aditivas como em (1.1) são p-equivalentes se um pode ser obtido a partir do outro através de uma combinação finita das seguintes operações

$$\begin{aligned} f_1(x_1,\ldots,x_n) &= f(p^{\alpha_1}x_1,\ldots,p^{\alpha_n}x_n) \\ g_1(x_1,\ldots,x_n) &= g(p^{\alpha_1}x_1,\ldots,p^{\alpha_n}x_n) \end{aligned}, \tag{1.2}$$

onde $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ são inteiros; e

$$\begin{aligned} f_2(x_1,\ldots,x_n) &= Af+Bg \\ g_2(x_1,\ldots,x_n) &= Cf+Dg \end{aligned}, \tag{1.3}$$

onde A, B, C e D são números racionais com $AD-BC\neq 0$.

Note que se existir um zero p-ádico não trivial para um par f, g então todo par p-equivalente a ele também possuirá um zero p-ádico não trivial.

A cada par de equações f, g associamos um número racional

$$\vartheta(f,g)=\prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq j}}(a_ib_j-a_jb_i).$$

Se f_1, g_1 é dado por (1.2), temos

$$\begin{aligned} f_1 &= c_1x_1^k+\cdots+c_nx_n^k \\ g_1 &= d_1x_1^k+\cdots+d_nx_n^k \end{aligned},$$

com $c_i = p^{k\alpha_i}a_i$ e $d_i = p^{k\alpha_i}b_i$, daí

$$c_id_j - c_jd_i = p^{k(\alpha_i+\alpha_j)}(a_ib_j - a_jb_i).$$

Cada α_i aparece em $2(n-1)$ termos de $\vartheta(f_1, g_1)$. Somando os $n(n-1)$ $(\alpha_i+\alpha_j)$'s referentes aos pares de índices i, j em ϑ, temos

$$\vartheta(f_1, g_1) = p^{2k(n-1)\alpha}\vartheta(f, g), \text{ para } \alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

E se f_2, g_2 é dado por (1.3), temos

$$\begin{array}{l} f_2 = c_1x_1^k + \cdots + c_nx_n^k \\ g_2 = d_1x_1^k + \cdots + d_nx_n^k \end{array},$$

com $c_i = Aa_i + Bb_i$ e $d_i = Ca_i + Db_i$, daí

$$c_id_j - c_jd_i = (AD - BC)(a_ib_j - a_jb_i).$$

Como em ϑ existem $n(n-1)$ termos, segue que

$$\vartheta(f_2, g_2) = (AD - BC)^{n(n-1)}\vartheta(f, g).$$

Portanto, $\vartheta(f, g) \neq 0$ se, e somente se, $\vartheta(\tilde{f}, \tilde{g}) \neq 0$ para todo par $\tilde{f}, \tilde{g}$ p-equivalente a f, g.

Um par de formas aditivas f, g cujos coeficientes são inteiros é dito p-normalizado se $\vartheta(f, g) \neq 0$ e a potência de p que divide $\vartheta(f, g)$ é menor ou igual a potência de p que divide $\vartheta(\tilde{f}, \tilde{g})$ para todo par $\tilde{f}, \tilde{g}$ p-equivalente a f, g. Observe que todo par f, g com $\vartheta(f, g) \neq 0$ é p-equivalente a um par p-normalizado.

Nesse ponto, é importante explicarmos o nosso interesse em p-normalização. Essa teoria nos diz que é suficiente provarmos os Teoremas 1 e 2 para pares p-normalizados e isso se deve ao seguinte fato, que pode ser encontrado em [10]:

Lema 1.1. *Se todos os pares de formas p-normalizadas dados por*

$$\begin{array}{l} c_1x_1^k + \cdots + c_nx_n^k \\ d_1x_1^k + \cdots + d_nx_n^k \end{array}$$

possuirem zeros p-ádicos não triviais, então, para quaisquer coeficientes racionais a_i, b_i, o par de equações (1.1) tem zeros p-ádicos não triviais;

Demonstração. Suponha que já tenhamos mostrado os Teoremas 1 e 2 para os casos em que $\vartheta \neq 0$. Tome um par f, g como em (1.1) tal que $\vartheta(f, g) = 0$. Para cada inteiro μ, existem formas

$$\begin{array}{l} f^{(\mu)} = a_1^{(\mu)}x_1^k + \cdots + a_n^{(\mu)}x_n^k \\ g^{(\mu)} = b_1^{(\mu)}x_1^k + \cdots + b_n^{(\mu)}x_n^k \end{array}$$

com coeficientes inteiros racionais tais que $\vartheta(f^{(\mu)}, g^{(\mu)}) \neq 0$ e, para cada i, p^μ divide $a_i - a_i^{(\mu)}$ e $b_i - b_i^{(\mu)}$. Pela nossa suposição inicial, o sistema $f^{(\mu)} = g^{(\mu)} = 0$ possui solução p-ádica não trivial $\xi^{(\mu)}$. Como o sistema é homogêneo, podemos supor que todas as coordenadas de $\xi^{(\mu)}$ são inteiros p-ádicos e que pelo menos uma delas não é divisível por p. O conjunto dos inteiros p-ádicos é compacto, então existe uma subsequência $(\xi^{(\mu)})_{\mu \in N_1}$ convergente, com $N_1 \subset \mathbb{N}$ infinito. Se ξ é o limite dessa subsequência então ξ é diferente da origem, uma vez que supomos que pelo menos uma coordenada de $\xi^{(\mu)}$ não é divisível por p, para todo μ inteiro. Assim, tomando $\mu \in N_1$ temos

$$|f(\xi^{(\mu)})|_p = |f(\xi^{(\mu)}) - f^{(\mu)}(\xi^{(\mu)})|_p = \left|\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_i^{(\mu)})\xi_i^{(\mu)k}\right|_p \leqslant p^{-\mu},$$

onde $|\cdot|_p$ denota o valor absoluto p-ádico. Segue pela continuidade de f que $f(\xi) = 0$. Analogamente, $g(\xi) = 0$. Logo ξ é uma solução p-ádica não trivial para o sistema $f = g = 0$. Assim, é suficiente provar os resultados com a hipótese adicional $\vartheta(f, g) \neq 0$. ■

Além disso, para um par de formas aditivas p-normalizadas temos algumas propriedades importantes e bem úteis ao nosso trabalho descritas no Lema 1.2 que veremos adiante.

Dizemos que uma variável x_i está no nível l se p^l divide a_i e b_i, mas p^{l+1} não divide a_i ou não divide b_i. Num sistema p-normalizado todas a variáveis estão em níveis menores que k. De fato, se algum x_j estivesse no nível $l \geqslant k$, então as formas

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= f(x_1, \ldots, x_{j-1}, p^{-1}x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) \\ \tilde{g} &= g(x_1, \ldots, x_{j-1}, p^{-1}x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) \end{aligned},$$

teriam coeficientes inteiros e $\vartheta(\tilde{f}, \tilde{g})$ seria igual a

$$p^{-2k(n-1)}\vartheta(f, g)$$

contradizendo a p-normalidade de f, g. Isso demonstra a primeira afirmação do resultado a seguir.

Lema 1.2 (Davenport & Lewis). *Suponha que o par de formas aditivas (1.1) seja p-normalizado. Podemos reescrever os polinômios f e g como*

$$f = \sum_{j=0}^{k-1} p^j f_j, \quad g = \sum_{j=0}^{k-1} p^j g_j \tag{1.4}$$

onde para cada j, as funções f_j e g_j são formas aditivas com coeficientes inteiros e para cada variável envolvida no par f_j, g_j o coeficiente dessa variável não é divisível por p em pelo menos uma das formas. Para cada j, m_j representa o número total de variáveis no par f_j, g_j e q_j representa o número mínimo de variáveis com coeficientes não divisíveis por p em qualquer combinação linear $\lambda f_j + \mu g_j$ com λ, μ não ambos divisíveis por p. Então podemos assumir, para $0 \leqslant j \leqslant k-1$, que

$$q_0 \geqslant \frac{n}{2k}, \quad m_0 + \cdots + m_j \geqslant (j+1)\frac{n}{k} \tag{1.5}$$

e

$$m_0 + \cdots + m_{j-1} + q_j \geqslant (2j+1)\frac{n}{2k}. \tag{1.6}$$

Mais que isso, podemos assumir que g_0 contém exatamente q_0 variáveis com coeficientes não divisíveis por p, e que se t representa o número de variáveis em g_0 com coeficientes divisíveis por p^2, então

$$\frac{m_0 - q_0}{p} \leqslant t \leqslant m_0 + u(g_1) - \frac{n}{k}, \tag{1.7}$$

onde $u(g_1)$ representa o número de variáveis em g_1 cujos coeficientes são não nulos módulo p.

Demonstração. Como reescrever as formas em k níveis já foi mostrado anteriormente. Então vamos supor f, g escritas como em (1.4), com $x_1, \ldots, x_{m_0}$ variáveis em f_0, g_0 e $x_{m_0+\cdots+m_{j-1}+1}, \ldots, x_{m_0+\cdots+m_j}$ variáveis em f_j, g_j, e começar a prova demonstrando as desigualdades (1.5). Considere as formas

$$\begin{array}{l} p^{-(j+1)} f(p\,x_1, \ldots, p\,x_{m_0+\cdots+m_j}, x_{m_0+\cdots+m_j+1}, \ldots, x_n) \\ p^{-(j+1)} g(p\,x_1, \ldots, p\,x_{m_0+\cdots+m_j}, x_{m_0+\cdots+m_j+1}, \ldots, x_n) \end{array}, j = 0, \ldots, k-1,$$

obtidas por uma combinação das operações (1.2) e (1.3), com $\alpha = m_0 + \cdots + m_j$ e $(AD - BC) = p^{-2(j+1)}$. Então o valor de ϑ das novas formas é igual a

$$p^{-2(j+1)n(n-1)+2k(n-1)\alpha}\vartheta(f, g).$$

Como os coeficientes das novas formas são inteiros e f, g é p-normalizado, temos

$$-2(j+1)n(n-1) + 2k(n-1)\alpha \geqslant 0$$

e, portanto,

$$m_0 + \cdots + m_j \geqslant (j+1)\frac{n}{k}.$$

Agora, considere uma combinação linear $\lambda f_j + \mu g_j$ com λ ou μ não divisível por p. Seja q_j o número de variáveis em $\lambda f_j + \mu g_j$ com coeficientes não divisíveis por p. Se $j = 0$ então vamos supor que $x_1, \cdots, x_{q_0}$ são tais variáveis e se $j = 1, \ldots, k-1$ então supomos que $x_{m_0+\cdots+m_{j-1}+1}, \ldots, x_{m_0+\cdots+m_{j-1}+q_j}$ são as variáveis de $\lambda f_j + \mu g_j$ com coeficientes não divisíveis por p. Vamos supor que $p \nmid \lambda$. Considere o par

$$\begin{array}{r} p^{-1}(\lambda f + \mu g)(p\,x_1, \ldots, p\,x_{q_0}, x_{q_0+1}, \ldots, x_n) \\ g(p\,x_1, \ldots, p\,x_{q_0}, x_{q_0+1}, \ldots, x_n) \end{array}$$

com $\alpha = q_0$ e $(AD - BC) = p^{-1}\lambda$. Então o valor de ϑ desse novo par é

$$p^{2k(n-1)q_0 - n(n-1)}\lambda^{n(n-1)}\vartheta(f, g).$$

Como os coeficientes do novo par são inteiros e f, g é p-normalizado,

$$2k(n-1)q_0 - n(n-1) \geqslant 0$$

o que implica em

$$q_0 \geqslant \frac{n}{2k}.$$

Se λ é múltiplo de p então tomamos o par $f, p^{-1}(\lambda f + \mu g)$ e procedemos de forma análoga.

Se tivermos

$$\begin{aligned} p^{-(j+1)}(\lambda f + \mu g)(p\, x_1, \ldots, p\, x_{m_0+\cdots+m_{j-1}+q_j}, x_{m_0+\cdots+m_{j-1}+q_j+1}, \ldots, x_n) \\ p^{-j} g(p\, x_1, \ldots, p\, x_{m_0+\cdots+m_{j-1}+q_j}, x_{m_0+\cdots+m_{j-1}+q_j+1}, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

com $\alpha = m_0 + \cdots m_{j-1} + q_j$ e $(AD - BC) = p^{-(2j+1)}\lambda$, para $j = 1, \ldots, k-1$. Então o valor de ϑ desse último par é

$$p^{2k(n-1)\alpha-(2j+1)n(n-1)}\lambda^{n(n-1)}\vartheta(f, g).$$

Novamente, os coeficientes do novo par são inteiros e f, g é p-normalizado, assim

$$m_0 + \cdots m_{j-1} + q_j \geqslant (2j+1)\frac{n}{2k}.$$

Cada par de formas aditivas com $\vartheta \neq 0$ é p-equivalente a um par p-normalizado. Se f, g é um par p-normalizado, então existe λ_0, μ_0 com $p \nmid \lambda_0$ ou $p \nmid \mu_0$ tal que $\lambda_0 f + \mu_0 g$ contém exatamente q_0 variáveis com coeficientes não divisíveis por p. Nesse caso, um dos dois pares p-equivalentes $f, \lambda_0 f + \mu_0 g$ ou $\lambda_0 f + \mu_0 g, g$ também é p-normalizado. Assim, renomeando as formas aditivas, se necessário, podemos assumir que g_0 tem exatamente q_0 variáveis com coeficientes não divisíveis por p.

Agora, podemos supor

$$\begin{aligned} f_0 &= a_1 x_1^k + \cdots + a_{m_0-q_0} x_{m_0-q_0}^k + a_{m_0-q_0+1} x_{m_0-q_0+1}^k + \cdots + a_{m_0} x_{m_0}^k \\ g_0 &= p(c_1 x_1^k + \cdots + c_{m_0-q_0} x_{m_0-q_0}^k) + b_{m_0-q_0+1} x_{m_0-q_0+1}^k + \cdots + b_{m_0} x_{m_0}^k \end{aligned}$$

onde $a_1, \ldots, a_{m_0-q_0}, b_{m_0-q_0+1}, \ldots, b_{m_0}$ não são divisíveis por p. As razões $c_i/a_i \pmod p$ estão em, no máximo, p blocos. Renomeando as variáveis, se necessário, podemos supor que $c_1/a_1, \ldots, c_t/a_t$ é o bloco com maior cardinalidade. Assim,

$$t \geqslant \frac{m_0 - q_0}{p}.$$

Além disso, $f, g' = a_1 g - c_1 p f$ é um par p-normalizado que é p-equivalente a f, g e g_0' tem exatamente q_0 variáveis com coeficientes não divisíveis por p. A forma g_0' tem a forma

$$g_0' = p^2 \sum_{i=1}^{t} \alpha_i x_i^k + p \sum_{i=t+1}^{m_0-q_0} \beta_i x_i^k + \sum_{i=m_0-q_0+1}^{m_0} \gamma_i x_i^k$$

com $p\,\alpha_i = (a_1 c_i - a_i c_1)$, para $i = 1, \ldots, t$, e $\beta_{t+1} = (a_1 c_{t+1} - a_{t+1} c_1), \ldots, \beta_{m_0-q_0} = (a_1 c_{m_0-q_0} - a_{m_0-q_0} c_1), \gamma_{m_0-q_0+1} = (a_1 b_{m_0-q_0+1} - p\, a_{m_0-q_0+1} c_1), \ldots, \gamma_{m_0} = (a_1 b_{m_0} - p\, a_{m_0} c_1)$ não divisíveis por p. Multiplicamos as $m_0 - t + u(g_1)$ variáveis por p, onde $t+1 \leqslant i \leqslant m_0$ ou x_i é uma das $u(g_1)$ variáveis com coeficientes em g_1' não divisíveis por p. Então

$$g' = p^2 g'',$$

onde g'' é uma forma aditiva com coeficientes inteiros e

$$\vartheta(f, g'') = p^{-2n(n-1)+2k(n-1)(m_0-t+u(g_1))}\vartheta(f, g).$$

Como f, g é um par de forma p-normalizado, segue que

$$-2n(n-1) + 2k(n-1)(m_0 - t + u(g_1)) \geqslant 0$$

então

$$t \leqslant m_0 + u(g_1) - \frac{n}{k}.$$

■

O Lema acima nos dá um perfil de um par p-normalizado, mas não nos diz nada sobre solução das equações. Para facilitar a busca por solução p-ádica não trivial, vamos utilizar uma versão do Lema de Hensel que pode ser encontrada no artigo de Davenport e Lewis [10] e a enunciaremos a seguir, logo após definirmos solução não singular.

O posto de uma matriz é definido como o número máximo de linhas linearmente independentes ou , equivalentemente, de colunas linearmente independentes. Uma matriz $M \times N$ é não singular se tiver posto igual a $\min\{M, N\}$.

Dizemos que a solução $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ para o sistema

$$\begin{aligned} f = a_1x_1^k + \cdots + a_nx_n^k = 0 \\ g = b_1x_1^k + \cdots + b_nx_n^k = 0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

é não singular se a matriz

$$\begin{pmatrix} a_1\xi_1 & \cdots & a_n\xi_n \\ b_1\xi_1 & \cdots & b_n\xi_n \end{pmatrix}$$

tem posto 2. Isto quer dizer que existem índices i, j para os quais

$$(a_ib_j - a_jb_i)\xi_i\xi_j \neq 0.$$

Lema 1.3. *Considere o sistema (1.8) com coeficientes inteiros racionais. Fixe um primo p e escreva $k = p^\tau k_0$, onde $(p, k_0) = 1$. Defina o número $\gamma = \gamma(k, p)$ por*

$$\gamma = \begin{cases} \tau + 2 & \textit{se} \ \ p = 2 \ \ \textit{e} \ \ \tau > 0 \\ \tau + 1 & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Suponha que exista uma solução não singular módulo p para o sistema

$$f \equiv g \equiv 0 \pmod{p^\gamma} \tag{1.9}$$

ou seja, tal que existam índices i, j com

$$(a_ib_j - a_jb_i)x_ix_j \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Então essa solução de congruência pode ser levantada a uma solução p-ádica não trivial do sistema.

Demonstração. Para essa prova utilizaremos o resultado abaixo que pode ser encontrado em [7].

Afirmação. *A solubulidade de $x^k \equiv m \pmod{p^\gamma}$, com γ definido anteriormente e $p \nmid m$, implica na solubilidade de $y^k \equiv m \pmod{p^\nu}$ para todo inteiro ν com $y \equiv x \pmod{p}$.*

Seja ξ uma solução não singular das congruências (1.9), então existem i, j tais que $\xi_i\xi_j(a_ib_j - a_jb_i) \not\equiv 0 \pmod{p}$, digamos $i = 1$ e $j = 2$. Faça

$$f' = b_1f - a_1g \quad \text{e} \quad g' = b_2f - a_2g$$

então ξ é solução das congruências $f' \equiv g' \equiv 0 \pmod{p^\gamma}$ e

$$\begin{aligned} f' &= c_2x_2^k + c_3x_3^k + \cdots + c_nx_n^k \\ g' &= d_1x_1^k + d_3x_3^k + \cdots + d_nx_n^k \end{aligned}$$

onde $c_2d_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$. Considere

$$m_1 = -\frac{c_3x_3^k + \cdots + c_nx_n^k}{c_2} \quad \text{e} \quad m_2 = -\frac{d_3x_3^k + \cdots + d_nx_n^k}{d_1}.$$

Obviamente, $m_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$ e $m_2 \not\equiv 0 \pmod{p}$. Portanto, podemos encontrar η_1, η_2, para cada inteiro ν, tais que

$$f'(\eta_1, \eta_2, \xi_3, \ldots, \xi_n) \equiv g'(\eta_1, \eta_2, \xi_3, \ldots, \xi_n) \equiv 0 \pmod{p^\nu}$$

com $\eta_1 \equiv \xi_1 \pmod{p}$ e $\eta_2 \equiv \xi_2 \pmod{p}$. Pela compacidade dos inteiros p-ádicos, segue que as equações $f' = 0$, $g' = 0$ tem solução não trivial nos inteiros p-ádicos que também é solução para $f = 0$, $g = 0$. ■

Esse resultado é interessante pois, junto com o Lema 1.2, nos diz que o problema de encontrar uma solução não trivial em $\mathbb{Q}_p$ para o sistema

$$\begin{aligned} f &= a_1x_1^k + \cdots + a_nx_n^k = 0 \\ g &= b_1x_1^k + \cdots + b_nx_n^k = 0 \end{aligned}, \tag{1.10}$$

cujos coeficientes são inteiros racionais, é equivalente ao de buscar por solução não singular módulo p para o sistema

$$\begin{aligned} f_0 + pf_1 + \cdots + p^{\gamma-1}f_{\gamma-1} &\equiv 0 \pmod{p^\gamma} \\ g_0 + pg_1 + \cdots + p^{\gamma-1}g_{\gamma-1} &\equiv 0 \pmod{p^\gamma} \end{aligned} \tag{1.11}$$

para o qual podemos assumir que o número de variáveis em cada par de subformas f_i, g_i satisfaz as desigualdades (1.5), (1.6) e (1.7). Portanto, já sabemos que vamos buscar uma solução envolvendo pelo menos duas variáveis do par f_0, g_0.

Para o próximo capítulo, vamos identificar o sistema (1.10) pela matriz de coeficientes

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

e considerar a sequência das submatrizes colunas

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

a fim de obter propriedades de suas subsequências que nos auxiliarão na demostração dos resultados principais.

Capítulo 2

Sequências de elementos de grupos abelianos

Seja $G = (G, +)$ um grupo abeliano finito e $S = (g_1, \ldots, g_r) = g_1 \cdot \ldots \cdot g_r$ uma sequência de elementos de G, com possíveis repetições. Definimos $v_g(S)$ como sendo o número de vezes em que g aparece na sequência S, para cada $g \in G$. Assim, utilizando a notação multiplicativa, descrevemos a sequência S como

$$S = \prod_{g \in G} g^{v_g(S)}.$$

Se tivermos uma sequência T de forma que $v_g(T) \leqslant v_g(S)$, para todo $g \in G$, então diremos que T é subsequência de S e denotamos isso por $T|S$.

Definimos também o suporte de S em G como o conjunto de todos os elementos distintos de G que aparecem em S, ou seja, $supp(S) = \{g \in G\,;\, v_g(S) \neq 0\}$. E o comprimento de S, $|S|$, é o número de elementos da sequência, considerando as multiplicidades, logo

$$|S| = \sum_{g \in G} v_g(S).$$

Convencionamos para a sequência vazia que seu comprimento é zero.

Considere $S = g_1 \cdot \ldots \cdot g_r$ uma sequência de G. A soma de S é dada por

$$\sigma(S) = \sum_{i=1}^{r} g_i,$$

e o conjunto das somas de subsequências não vazias de S por

$$\begin{aligned} \Sigma(S) &= \{\sigma(T)\,;\, T|S \quad \text{e} \quad T \neq \varnothing\} \\ &= \left\{\varepsilon_1 g_1 + \cdots + \varepsilon_r g_r\,;\, \varepsilon_i \in \{0,1\} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i > 0\right\}. \end{aligned}$$

Note que $\sigma(S) \in G$ e $\Sigma(S) \subseteq G$.

Se $\sigma(S) = 0$, dizemos que S é uma sequência de soma zero e se, além de disso, o comprimento de S é no máximo o expoente de G ($\exp(G)$) dizemos que S é uma sequência curta de soma zero. E, para o caso em que $0 \notin \Sigma(S)$, dizemos que S é uma sequência livre de soma zero.

A constante de Davenport de G, $D(G)$, é o menor inteiro positivo r de forma que toda sequência S de comprimento r em G possui uma subsequência não vazia de soma zero. E o invariante $\eta(G)$ é o menor inteiro r tal que toda sequência S de comprimento r possui uma subsequência curta de soma zero.

Em [24] e [25] podemos encontrar o seguinte resultado:

Lema 2.1 (Olson). *Seja p um primo fixo e C_p um grupo cíclico de ordem p. Então*

(i) $D(C_p \oplus C_p) = 2p - 1$;

(ii) $\eta(C_p \oplus C_p) = 3p - 2$.

2.1 Sequências inteiras

Se $S = (c_1, \ldots, c_r)$ é uma sequência de números inteiros, diremos que S é uma sequência inteira.

Para p primo e m natural, tome o epimorfismo canônico $\pi_m = \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$,

$$\pi_m(a) \equiv a \pmod{p^m},$$

e defina a sequência imagem de $S = g_1 \cdot ... \cdot g_r$, onde S é uma sequência inteira, por $\pi_m(S) = \pi_m(g_1) \cdot ... \cdot \pi_m(g_r)$.

Sejam A e B subconjuntos não vazios de um grupo abeliano G. Vamos definir o conjunto-soma de A e B por

$$A + B = \{a + b\, ;\, a \in A \quad \text{e} \quad b \in B\}.$$

Se $m \geqslant 3$, definimos o conjunto-soma de forma recursiva

$$A_1 + \cdots + A_m = (A_1 + \cdots + A_{m-1}) + A_m = \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i\, ;\, a_i \in A_i \right\}.$$

A seguir, enunciamos uma generalização do Teorema de Cauchy-Davenport que nos será útil em algumas demonstrações. O teorema original é para $m = 2$ e a prova para $m > 2$ segue por indução sobre o número de conjuntos.

Lema 2.2. *Seja $m \geqslant 2$, p um primo e $A_1, \ldots, A_m$ subconjuntos não vazios de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Então*

$$|A_1 + \cdots + A_m| \geqslant \min\left\{p, \sum_{i=1}^{m} |A_i| - m + 1\right\}.$$

Lema 2.3. *Seja $S = (c_1, \ldots, c_r)$ uma sequência de inteiros coprimos com p e comprimento $r > p$. Se pelo menos p elementos de S são congruentes módulo p, então existe uma subsequência $T|S$ tal que $\pi_1(T)$ é uma sequência curta de soma zero mas $\pi_2(T)$ não é sequência de soma zero.*

Demonstração. Suponha $\pi_1(c_1) = \cdots = \pi_1(c_p)$. Então temos uma subsequência curta de soma zero módulo p. Se tivermos $\pi_2(c_1) = \cdots = \pi_2(c_p)$, então

$$\pi_2\left(\sum_{j=1}^{p} c_j\right) = \sum_{j=1}^{p} \pi_2(c_j) = p\pi_2(c_1) \neq 0,$$

pois $\pi_1(c_j) \neq 0$ para todo $c_j \in supp(S)$. E segue o resultado.

Agora, suponha $\pi_2(c_1) \neq \pi_2(c_2)$. Se $\pi_1(c_{p+1}) = \pi_1(c_p)$, então $T = c_1c_3 \ldots c_pc_{p+1}$ ou $T = c_2c_3 \ldots c_pc_{p+1}$ tem as propriedades desejadas. Assim, suponha $\pi_1(c_{p+1}) \neq \pi_1(c_p)$. Definimos os conjuntos $A_1 = \{\pi_1(c_{p+1})\}$ e $A_i = \{0, \pi_1(c_i)\}$, para $i = 2, \ldots, p$, e aplicamos o Teorema 2.2 para $A_1 + \cdots + A_p$. Então existe $t \in \{2, \ldots, p\}$ para o qual $\pi_1(T)$ seja sequência de soma zero com

$$T = c_{p+1} \prod_{j=2}^{t} c_j.$$

Se $\pi_2(T)$ for sequência de soma zero então trocamos c_2 por c_1 na sequência T. ■

Lema 2.4. *Se $p = 5$ e $\pi_1(S)$ é uma das seguintes sequências*

$$(1,1,1,2,2), \quad (1,1,3,3,3), \quad (3,3,4,4,4), \quad ou \quad (1,1,1,2,4,4)$$

então existe uma subsequência $T|S$ tal que $\pi_1(T)$ é uma sequência curta de soma zero mas $\pi_2(T)$ não é sequência de soma zero.

Demonstração. Vamos exibir a demonstração apenas para a sequência (1,1,1,2,2), uma vez que as outras se dão de forma análoga. Considere as subsequências $T_1|S$ e $T_2|S$ tais que $\pi_1(T_1) = (1,1,1,2)$ e $\pi_1(T_2) = (1,2,2)$. Então $\pi_1(T_1)$ e $\pi_1(T_2)$ são sequências curtas de soma zero.

Vamos supor que não exista subsequência $T|S$ com $\sigma(\pi_2(T)) \neq 0$. Escreva $c_i = a_i + 5b_i$, com $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ e $a_4 = a_5 = 2$. Para que $\pi_2(T_1)$ e $\pi_2(T_2)$ sejam sequências de soma zero, independente das escolhas dos seus termos, devemos ter $\pi_1(b_1) = \pi_1(b_2) = \pi_1(b_3) = b$ e $\pi_1(b_4) = \pi_1(b_5) = b'$. Assim, $\pi_2(\sigma(T_1)) = 5 + 5(3b + b')$ e $\pi_2(\sigma(T_2)) = 5 + 5(b + 2b')$ e temos o seguinte sistema

$$\begin{array}{c} 5 + 5(3b + b') \equiv 0 \pmod{25} \\ 5 + 5(b + 2b') \equiv 0 \pmod{25} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} 5(3b + b') \equiv 20 \pmod{25} \\ 5(b + 2b') \equiv 20 \pmod{25} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} 3b + b' \equiv 4 \pmod{5} \\ b + 2b' \equiv 4 \pmod{5} \end{array}$$

Se multiplicarmos a primeira equação por 2, obtemos $b + 2b' \equiv 3 \pmod 5$, o que contradiz a segunda equação. Portanto, não podemos ter, simultaneamente, $\pi_2(T_1)$ e $\pi_2(T_2)$ sequências de soma zero. ∎

Proposição 2.5. *Seja $p = 3$ ou 5. Se S é uma sequência de inteiros coprimos com p e $|S| \geqslant 2p - 1$, então $\pi_1(S)$ tem uma subsequência $\pi_1(T)$ que é sequência curta de soma zero mas $\pi_2(T)$ não é sequência de soma zero.*

Demonstração. Se $p = 3$, então toda sequência de elementos não nulos de tamanho 5 tem pelo menos 3 elementos congruentes módulo 3. Neste caso, o resultado segue pelo Lema 2.3.

Suponha $p = 5$. Podemos assumir que o elemento c com maior frequência em S satisfaz $\pi_1(c) = 1$, então, pelo Lema 2.3, podemos supor que ele ocorre 3 ou 4 vezes. Nessas condições, S possui subsequência T com $\pi_1(T)$ tendo uma das seguintes formas

$$(1,1,1,2,2), \quad (1,1,3,3,3), \quad (3,3,4,4,4), \text{ ou } \quad (1,1,1,2,4,4).$$

O resultado segue pelo Lema 2.4. ∎

2.2 Sequências em $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$

Seja f, g um par de formas aditivas, como em (1.4), p-normalizado e com todas as propriedades descritas no Lema 1.2. Como falado no final do capítulo anterior, vamos identificar esse par pela matriz de coeficientes (1.12). Considere a sequência das submatrizes

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

dos coeficientes do par de formas. Podemos reescrevê-la como

$$\mathscr{A} = \mathscr{M}_0 \mathscr{M}_1 \cdots \mathscr{M}_{k-1},$$

onde $\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$ está na subsequência $\mathscr{M}_l$ se a variável x_i está no nível l.

Estamos fazendo esse paralelo entre pares de formas aditivas e sequências pois o nosso propósito neste capítulo é construir elementos primários e secundários, a serem definidos na próxima seção, a partir de sequências de soma zero.

Defina

$$\mathscr{L}_0 = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \lambda \in \{1, \ldots, p-1\} \right\}$$

e, para $i = 1, \ldots, p$,

$$\mathscr{L}_i = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} ; \lambda \in \{1, \ldots, p-1\} \right\}.$$

Observe que $\mathbb{F}_p^2\backslash\{(0,0)\}$ pode ser escrito como uma união disjunta dos $p+1$ conjuntos definidos acima.

Agora, considere o epimorfismo

$$\varphi_m : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$$

definido por

$$\varphi_m\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_m(a) \\ \pi_m(b) \end{pmatrix}.$$

Seja S uma subsequência de $\mathscr{M}_0$. Defina a subsequência de S

$$I_j(S) = \prod_{g\in B_j} g^{v_g(S)}, \text{ onde } B_j = \{g \in \mathscr{M}_0\,;\, \varphi_1(g) \in \mathscr{L}_j\},$$

para $j = 0,\ldots,p$. Temos que

$$S = \prod_{j=0}^{p} I_j(S) \quad \text{e} \quad |S| = \sum_{j=0}^{p} \mathfrak{i}_j(S),$$

para $\mathfrak{i}_j(S) = |I_j(S)|$. Além disso, dizemos que o elemento g de S tem cor j se $g \in B_j$. Usaremos a mesma notação $I_j(S)$ para subsequências S de $\mathscr{M}_l$, com $l = 1,\ldots,k-1$. Dessa forma, se S é uma subsequência de $\mathscr{M}_l$, definimos

$$I_j(S) = \prod_{g\in C_j} g^{v_g(S)}, \text{ onde } C_j = \{g \in \mathscr{M}_l\,;\, \varphi_1(p^{-l}g) \in \mathscr{L}_j\},$$

e dizemos que o elemento g tem cor j (no nível l) se $g \in C_j$. Este pequeno abuso de notação não causará prejuízos pois sempre estará claro em que nível estamos.

Para uma subsequência S de $\mathscr{M}_l$, podemos assumir

$$\mathfrak{i}_0(S) \geqslant \mathfrak{i}_p(S) \geqslant \mathfrak{i}_j(S), \text{ para todo } j \in \{1,2,\ldots,p-1\}, \tag{2.1}$$

uma vez que todo par p-normalizado pode ser transformado em um p-equivalente, pelas transformações (1.2) e (1.3).

Com isso, temos por (2.1)

$$q_l = \mathfrak{i}_1(\mathscr{M}_l) + \cdots + \mathfrak{i}_p(\mathscr{M}_l)$$

e

$$m_l = |\mathscr{M}_l| = \mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_l) + q_l,$$

para $l = 0,1,\ldots,k-1$ (ver Lema 1.2).

Lema 2.6. *Seja γ definido como no Lema 1.3. Se duas cores distintas no nível zero possuem subsequências $T_1|B_{k_1}$ e $T_2|B_{k_2}$ ($k_1 \neq k_2$), tais que $\varphi_\gamma(T_1)$ e $\varphi_\gamma(T_2)$ são sequências de soma zero, então temos uma solução não singular para o sistema (1.9).*

Demonstração. Suponha $\binom{a_i}{b_i}$ de cor k_1 e $\binom{a_j}{b_j}$ de cor k_2, com $k_1 \neq k_2$. Temos duas situações:

(i) $k_1 \cdot k_2 \neq 0$: Nesse caso,

$$\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \equiv \lambda \begin{pmatrix} k_1 \\ 1 \end{pmatrix} \pmod{p} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} \equiv \delta \begin{pmatrix} k_2 \\ 1 \end{pmatrix} \pmod{p}$$

para $\lambda, \delta \in \{1, \dots, p-1\}$. Então,

$$(a_i b_j - a_j b_i)\xi_i \xi_j \equiv (\lambda k_1 \delta - \delta k_2 \lambda)\xi_i \xi_j \equiv \lambda\delta(k_1 - k_2)\xi_i \xi_j \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

(ii) $k_1 = 0$: Análogo. ■

Além disso, a partir dessas definições, podemos concluir que uma sequência formada por dois elementos de cores distintas (num determinado nível l) é livre de soma zero em $\mathbb{Z}/p^{l+1}\mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z}/p^{l+1}\mathbb{Z}$. De fato, tome a sequência $S = g_1 \cdot g_2$ no nível l com g_1 da cor k_1 e g_2 da cor k_2, $k_1 \neq k_2$. Temos as seguintes situações:

(i) $k_1 = 0$: Então

$$\varphi_1(p^{-l}S) = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \delta \begin{pmatrix} k_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{onde} \quad \lambda, \delta \in \{1, \dots, p-1\},$$

e obviamente a soma desses elementos não é zero em $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Consequentemente, $g_1 + g_2$ não é zero em $\mathbb{Z}/p^{l+1}\mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z}/p^{l+1}\mathbb{Z}$.

(ii) $k_1 \cdot k_2 \neq 0$: Então

$$\varphi_1(p^{-l}S) = \lambda \begin{pmatrix} k_1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \delta \begin{pmatrix} k_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{onde} \quad \lambda, \delta \in \{1, \dots, p-1\},$$

e temos

$$\lambda \begin{pmatrix} k_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} k_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda k_1 + \delta k_2 \\ \lambda + \delta \end{pmatrix}.$$

Supondo S sequência de soma zero módulo p^{l+1}, temos $\lambda + \delta = \lambda k_1 + \delta k_2 = 0$ em $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Logo, $\lambda = -\delta$ e, substituindo na outra igualdade, obtemos

$$-\delta k_1 + \delta k_2 = 0 \Leftrightarrow \delta(-k_1 + k_2) = 0 \Leftrightarrow -k_1 + k_2 = 0 \Leftrightarrow k_2 = k_1,$$

o que contradiz a hipótese inicial. Portanto, $\varphi_{l+1}(S)$ é livre de soma zero.

Nesses termos, podemos reescrever o Lema 2.1 da seguinte forma:

Lema 2.7 (Olson)**.** *Sejam p um primo fixo e S uma subsequência de $\mathscr{M}_l$. Temos*

(i) se $|S| \geqslant 2p - 1$, então S tem subsequência T tal que $\varphi_{l+1}(T)$ é uma sequência de soma zero;

(ii) se $|S| \geqslant 3p-2$, entaõ S tem subsequência T tal que $\varphi_{l+1}(T)$ é uma sequência curta de soma zero.

O Lema 1.2 nos dá uma cota inferior para valor de q_0 enquanto o resultado a seguir, encontrado em [4], nos fornece uma cota superior de q_0 para a qual as provas dos Teoremas 1 e 2 ainda são necessárias. Esse lema é importante pois a nossa demostração utiliza a redução dessa cota superior de q_0, assim, o Lema 2.8 será um dos nossos pontos de partida.

Lema 2.8. *Se $q_0 \geqslant 2p^\gamma - 1$ então o sistema (1.11) possui uma solução não singular módulo p.*

A fim de provar esse lema, vamos admitir um caso especial do Teorema de Olson em [24].

Lema 2.9. *Sejam $\tau \geqslant \sigma \geqslant 1$, $s \geqslant p^\tau + p^\sigma - 1$ e $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$. Então, o sistema de congruências*

$$\sum_{j=1}^{s} \varepsilon_j a_j \equiv 0 \pmod{p^\tau} \ ; \ \sum_{j=1}^{s} \varepsilon_j b_j \equiv 0 \pmod{p^\sigma}$$

tem solução com $\varepsilon_j \in \{0,1\}$ para $1 \leqslant j \leqslant s$ e $\sum_{j=1}^{s} \varepsilon_j > 0$.

Demonstração do Lema 2.8. Se duas cores distintas tiverem subsequências de soma zero módulo p^γ, então não há o que provar. Primeiro, suponha que apenas a cor $u \in \{0, \ldots, p\}$ possua tal subsequência e tome a sequência

$$S = \bigcup_{\substack{0 \leqslant v \leqslant p \\ v \neq u}} I_v(\mathscr{M}_0).$$

Assim, $|S| = m_0 - \mathfrak{i}_u(\mathscr{M}_0) \geqslant m_0 - \mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) = q_0$.

Agora, suponha que não haja nenhuma cor com subsequência que some zero módulo p^γ e tome a sequência

$$S = \bigcup_{0 \leqslant v \leqslant p} I_v(\mathscr{M}_0).$$

Então $|S| = m_0 > q_0$.

Em todo caso, $|S| \geqslant 2p^\gamma - 1$ e, pelo Lema 2.9,

$$\sum_{j \in \mathscr{K}} a_j x_j^k \equiv \sum_{j \in \mathscr{K}} b_j x_j^k \equiv 0 \pmod{p^\gamma}, \text{ para } \mathscr{K} = \left\{ j; \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} \in S \right\},$$

tem solução não trivial com $x_j \in \{0,1\}$. ∎

Lema 2.10 (Godinho & Souza Neto). *Sejam p um primo fixo e S uma subsequência de $\mathscr{M}_l$.*

(i) Se tivermos $\mathfrak{i}_j(S) \geqslant p$ *para algum* j*, então para qualquer elemento* v *da sequência, podemos encontrar* $T|S$ *que inclua o elemento* v *tal que* $\varphi_{l+1}(T)$ *é sequência de soma zero.*

(ii) Se $p = 2, 3$ *ou 5 e temos* $\mathfrak{i}_j(S) \geqslant 2p - 1$ *para algum* j*, então podemos encontrar* $T|S$ *tal que* $\varphi_{l+1}(T)$ *é sequência curta de soma zero, mas* $\varphi_{l+2}(T)$ *não é sequência de soma zero.*

Demonstração.

(i) Podemos supor $\mathfrak{i}_0(S) \geqslant p$ e consideramos a subsequência

$$\varphi_1(p^{-l}S') = \binom{a_1}{0} \cdots \binom{a_p}{0},$$

de forma que S' contenha v. Para $\varphi_1(p^{-l}v) = \binom{a_1}{0}$, defina os conjuntos $A_1 = \{a_1\}$ e $A_i = \{0, a_i\}$, com $i = 2, \ldots, p$. Pelo Lema 2.2, temos

$$|A_1 + \cdots + A_p| \geqslant \min\left\{p, \sum_{i=1}^{p} A_i - p + 1\right\} = p,$$

ou seja, $A_1 + \cdots + A_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ e podemos encontrar uma subsequência que contém a_1 e soma zero. Portanto, existe uma subsequência $T|S'$, contendo v, que é sequência de soma zero módulo $l + 1$

(ii) Novamente, vamos supor $\mathfrak{i}_0(S) \geqslant 2p - 1$ e considerar a subsequência

$$\varphi_1(p^{-l}S') = \binom{a_1}{0} \cdots \binom{a_{2p-1}}{0}.$$

Se $p = 3$ ou 5, basta aplicarmos a Proposição 2.5 à sequência $(a_1, \ldots, a_{2p-1})$, para obtermos o resultado.

Se $p = 2$ então

$$\varphi_2(p^{-l}S') = \binom{a_1}{b_1}\binom{a_2}{b_2}\binom{a_3}{b_3},$$

com $a_i = 1$ ou 3 e $b_i = 0$ ou 2. Como existem três elementos na sequência acima, devemos ter dois com $a_i = a_j$. Somando esses dois elementos, temos uma soma zero módulo 2, mas que não é soma zero módulo 4. ∎

2.3 Elementos primários e secundários

Vimos que, pelo Lema 1.3, para encontrar solução p-ádica não trivial para o sistema (1.10) é suficiente encontrar solução não singular para o sistema (1.9). Se uma solução

$(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ para o par de congruência (1.9) tiver pelo menos dois elementos ξ_i e ξ_j coprimos com p cujos coeficientes a_i, b_i e a_j, b_j formam elementos $\binom{a_i}{b_i}$ e $\binom{a_j}{b_j}$ que estão em $\mathscr{M}_0$ e têm cores distintas, então essa solução é não singular.

Esse fato nos motiva a fazer as definições seguintes.

Seja S uma subsequência de $\mathscr{A} = \mathscr{M}_0\mathscr{M}_1 \cdots \mathscr{M}_{k-1}$. Dizemos que S é uma sequência não singular de soma zero módulo p^i se $\varphi_i(S)$ é sequência de soma zero e $supp(\varphi_1(S)) \cap supp(\varphi_1(\mathscr{M}_0))$ contém pelo menos dois elementos de cores distintas.

Se S é uma sequência não singular de soma zero módulo p^l, dizemos que $\sigma(S)$ é um elemento primário no nível l, ou superior. Se S é uma sequência de soma zero (que não seja não singular) módulo p^l de forma que $\varphi_{l+1}(S)$ não seja sequência de soma zero, dizemos que $\sigma(S)$ é um elemento secundário no nível l. Note que para $S = g \in \mathscr{M}_l$ essa condição é satisfeita, logo todo elemento de $\mathscr{M}_l$ é um elemento secundário no nível l.

Dessa forma, se conseguirmos construir um elemento primário $\sigma(S)$ no nível γ ou superior, basta tomarmos $x_i = 1$, para todo i tal que $\binom{a_i}{b_i}$ faz parte de S, para termos uma solução do sistema (1.11) não singular módulo p.

Denotamos por $\mathcal{P}_l$ a sequência de elementos primários no nível l e por $\mathcal{S}_l$ a sequência de elementos secundários no nível l. Lembrando que em $\mathcal{S}_l$ temos todos os elementos de $\mathscr{M}_l$ mais os elementos $\sigma(S)$ tais que S contenha apenas elementos de $\mathscr{M}_0 \ldots \mathscr{M}_{l-1}$. Tome

$$p_l = |\mathcal{P}_l| \quad \text{e} \quad s_l = |\mathcal{S}_l|.$$

Lema 2.11 (Davenport & Lewis)**.** *Seja $\delta = (k, p-1)$. Então*

$$p_1 \geqslant \min\left\{\left\lfloor \frac{m_0}{2\delta+1} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{q_0}{\delta+1} \right\rfloor\right\}.$$

Mais que isso, em cada uma dessas construções, utilizamos no máximo $\delta + 1$ elementos da cor com maior número de elementos no nível 0.

2.3.1 Resultados para $p = 2$

Nosso interesse é construir um elemento primário no nível γ, como já foi dito anteriormente. Mas quando tomamos uma sequência de soma zero não temos muito controle sobre qual o maior nível em que ela pode estar. Assim, sempre vamos trabalhar com o pior caso que é estar com uma sequência no nível l e termos o elemento primário de nível superior gerado por ela exatamente no nível $l + 1$. Já no caso da construção de elementos secundários, precisamos saber exatamente onde eles estão, sem fazer suposições, pois estes serão utilizados como auxiliares na construção dos elementos primários em níveis superiores.

Proposição 2.12. *Suponha que $p_l \geqslant 2$ e $s_l \geqslant 1$, para $l \geqslant 1$. Então podemos construir um elemento primário no nível (pelo menos) $l + 1$.*

Demonstração. Pelo Lema 2.7 (i), essa sequência possui subsequência de soma zero módulo $l+1$. Como essa subsequência envolve pelo menos dois elementos, um deles tem que ser primário, então o resultado é um elemento primário no nível $l+1$ (ou maior). ∎

Proposição 2.13 (Godinho, Knapp & Rodrigues)**.** *Suponha que existam dois elementos secundários de cores distintas e um primário no nível l. Então podemos construir um elemento primário no nível (pelo menos) $l+1$.*

Demonstração. Se o elemento primário tem a mesma cor de um dos secundários, então a soma desses dois elementos forma um elemento primário no nível $l+1$ (ou maior). Caso contrário, temos uma sequência de três elementos com cores distintas e a soma desses elementos produz um elemento primário no nível $l+1$ (ou maior). ∎

Proposição 2.14. *Se tivermos três vetores cujos coeficientes são da forma* $\left\{ {* \atop 4} \right\}$ (mod 4) *no nível 0, onde o asterisco representa qualquer número ímpar e pode assumir valores diferentes para vetores diferentes, então podemos contruir um elemento tendo cor 0 e no nível exatamente 1. E essa construção utiliza dois desses vetores.*

Demonstração. Durante toda a demonstração vamos considerar os vetores módulo 4. Os vetores que compõem a sequência são da forma $\left\{ {1 \atop 4} \right\}$ ou $\left\{ {3 \atop 4} \right\}$. Como temos três deles, pelo menos dois devem ser iguais. Então somamos esses dois elementos o que nos dá

$$2\begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \end{Bmatrix} \text{ ou } 2\begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

que está no nível 1 e tem cor 0. ∎

Proposição 2.15. *Se tivermos um vetor cujo coeficiente é da forma* $\left\{ {* \atop 4} \right\}$ (mod 4) *no nível 0 e também um vetor de cor 0 que não é dessa forma, então podemos construir um elemento no nível exatamente 1 que não tem cor 0.*

Demonstração. Um vetor da cor 0 que não é da forma $\left\{ {* \atop 4} \right\}$, deve ser da forma $\left\{ {* \atop 2} \right\}$ módulo 4. Pelo Lema 2.10, esses dois elementos somam zero módulo 2. Como a entrada inferior de um dos vetores não é divisível por 4, o coeficiente inferior do vetor soma também não será divisível por 4. Assim, produzimos um elemento no nível 1 (exatamente) de cor diferente de 0. ∎

2.3.2 Resultados para $p = 3$

O próximo resultado pode ser encontrado em [18], de qualquer forma apresentaremos uma demonstração aqui.

Lema 2.16. *Seja $l \geqslant 1$. Suponha $p_l \geqslant 3$ e $s_l \geqslant 2$, então podemos construir um elemento primário no nível $l+1$ (ou superior) utilizando no máximo 3 elementos primários e 2 secundários.*

Demonstração. Seja

$$S = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

uma subsequência cujos três primeiros elementos são primários e os outros dois são secundários, todos no nível l.

Se

$$\varphi_{l+1}\left(\begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}\right) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

então a subsequência T de S que é sequência de soma zero módulo 3^{l+1}, garantida pelo Lema 2.7 (i), deve conter pelo menos um elemento primário. Assim, $\sigma(T)$ é um elemnto primário no nível $l+1$ (ou superior).

Se

$$\varphi_{l+1}\left(\begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

então os elementos secundários devem ser da mesma cor. Podemos supor que eles sejam elementos de cor 0, ou seja, fazem parte de $I_0(S)$. Tome

$$\varphi_1(3^{-l}S) = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

uma sequência em $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Note que $C_1, C_2 \in \{1, 2\}$, com $C_1 \neq C_2$ pois eles somam zero em $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Caso exista algum i para o qual $B_i = 0$, devemos ter $-A_i = C_1$ ou $-A_i = C_2$, o que nos dá o elemento primário no nivel $l+1$, ou superior. E se $B_i \neq 0$, para todo i, então existem $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0, 1\}$ tais que $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0$ e $-B_3 = \varepsilon_1 B_1 + \varepsilon_2 B_2$. Assim,

$$\varepsilon_1 \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} + \varepsilon_2 \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se $A = 0$, já temos o elemento primário no nível $l+1$. Caso contrário, temos $-A = C_i$, para algum i, e procedemos como anteriormente. ■

Os resultados a seguir podem ser encontrados em [16], mas exibimos suas demonstrações nas próximas linhas.

Proposição 2.17. *Suponha que tenhamos uma sequência de três elementos não nulos no nível l que não tem subsequência de soma zero. Se adicionarmos dois elementos primários a essa sequência, então podemos construir um elemento primário no nível pelo menos $l+1$.*

Demonstração. Segue diretamente do Lema 2.7 parte (i). ■

Proposição 2.18. *Suponha que tenhamos uma sequência de quatro elementos no mesmo nível. Se essa sequência contém elementos de pelo menos três cores distintas, então podemos achar uma subsequência com três elementos que não tem subsequência de soma zero.*

Demonstração. Primeiro vamos analisar o caso em que a sequência possui um elemento de cada cor. Escolhemos para a nossa subsequência os elementos da forma $\binom{1}{0}$ e $\binom{0}{1}$. Se somarmos esses elementos, os resultados possíveis são $\binom{1}{1}$ e $\binom{2}{1}$. Então completamos a nossa subsequência escolhendo o elemento que não seja o resultado dessa soma.

Agora vamos considerar que a sequência tenha exatamente três cores. Podemos supor que dois elementos são da forma $\binom{1}{0}$, o terceiro é $\binom{0}{1}$ e o quarto pode ser qualquer um entre $\binom{1}{1}$ e $\binom{2}{1}$. Se os elementos da cor zero têm os mesmos coeficientes então eles não somam zero e podemos colocá-los na subsequência junto com qualquer um dos outros elementos. Caso contrário, escolhemos para a nossa subsequência o terceiro elemento ($\binom{0}{1}$) e o quarto ($\binom{1}{1}$ ou $\binom{2}{1}$). Apenas um dos elementos de cor zero forma uma sequência de soma zero com esses dois elementos. Assim, escolhemos o outro para compor nossa subsequência. ■

Proposição 2.19. *Suponha que tenhamos uma sequência de quatro elementos no mesmo nível e que essa sequência possua elementos de exatamente duas cores distintas. Então existe uma subsequência de três elementos não contendo soma zero ou se adicionarmos qualquer elemento a essa sequência então podemos fazer uma soma zero utilizando esse novo elemento.*

Demonstração. Vamos supor que nossa sequência S, no nível l, seja formada por elementos das cores zero e três, ou seja, que tenham a forma $\binom{1}{0}$ e $\binom{0}{1}$. Além disso, podemos supor que $\mathfrak{i}_0(S) \geqslant \mathfrak{i}_3(S)$. Se tivermos três elementos da cor zero em S, então temos pelo menos dois deles com os mesmos coeficientes, logo não somam zero. Escolhemos para a subsequência esses dois elementos e o de cor 3.

Agora, considere S com dois elementos de cor zero e dois de cor três. Se existir dois elementos com os mesmos coeficientes, procedemos como anteriormente. Caso contrário,

$$\varphi_1(p^{-l}S) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}.$$

Para qualquer elemento no nível l que adicionarmos a essa sequência, basta escolhermos (no máximo) dois elementos da sequência original que teremos uma soma zero módulo p^{l+1}. ■

Proposição 2.20. *Suponha que tenhamos pelo menos quatro elementos secundários no nível l e que $q_l \geqslant 1$. Se conseguirmos produzir dois elementos primários de nível l, então podemos construir um elemento primário no nível pelo menos $l+1$.*

Demonstração. Se $q_l \geqslant 1$, isso quer dizer que temos elementos secundários de pelo menos duas cores distintas no nível l. Pelas Proposições 2.18 e 2.19, podemos escolher uma subsequência livre de soma zero com três elementos. Essa subsequência junto com os dois elementos primários no nível l nos dão um elemento primário no nível $l+1$ (ou superior), de acordo com a Proposição 2.17. Ou podemos escolher no máximo dois elementos secundários para, junto com um dos elementos primários, formamos uma subsequência de soma zero, ou seja, temos um elemento primário no nível $l+1$ ou (superior). ■

Proposição 2.21. *Suponha que tenhamos cinco vetores no nível 0 cujos coeficientes tem a forma* $\left\{{* \atop 9}\right\}$ (mod 9), *onde o asterisco representa qualquer número que é não nulo módulo 3 e pode assumir valores diferentes para vetores diferentes. Então podemos construir um elemento tendo cor 0 e no nível (exatamente) 1. E essa construção utiliza no máximo três desses vetores.*

Demonstração. Durante toda a demostração, vamos considerar os vetores módulo 9. Podemos assumir que o vetor que mais aparece é da forma $\left\{{1 \atop 9}\right\}$. Se ele aparece pelo menos três vezes, então

$$\begin{Bmatrix}1\\9\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1\\9\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1\\9\end{Bmatrix}=3\begin{Bmatrix}1\\9\end{Bmatrix},$$

que está no nível 1 e tem cor 0.

Suponha que o vetor $\left\{{1 \atop 9}\right\}$ aparece exatamente duas vezes. Se qualquer um dos vetores $\left\{{2 \atop 9}\right\}$, $\left\{{4 \atop 9}\right\}$ ou $\left\{{5 \atop 9}\right\}$ está entre os cinco então podemos escolher três cuja a soma está exatamente no nível 1 e tem cor 0. Caso contrário, os vetores $\left\{{7 \atop 9}\right\}$ e $\left\{{8 \atop 9}\right\}$ estão entre os cinco e temos $\left\{{7 \atop 9}\right\} + \left\{{8 \atop 9}\right\} = 3\left\{{5 \atop 6}\right\}$, que está no nível 1 e tem cor 0.

Agora, suponha que $\left\{{1 \atop 9}\right\}$ aparece uma única vez, então cada um dos outros vetores aparece uma vez também. Assim, pelo Princípio da Casa dos Pombos, um dos vetores $\left\{{2 \atop 9}\right\}$ ou $\left\{{5 \atop 9}\right\}$ deve estar entre os cinco. Somando esse vetor com $\left\{{1 \atop 9}\right\}$ produzimos um elemento de cor 0 no nível 1 (exatamente). ■

Proposição 2.22. *Suponha que tenhamos dois vetores no nível 0 da forma* $\left\{{* \atop 9}\right\}$ (mod 9) *e também um vetor de cor 0 que não é dessa forma. Então podemos construir um elemento no nível 1 que não é da cor 0.*

Demonstração. Um vetor da cor 0 que não é da forma $\left\{{* \atop 9}\right\}$, deve ser da forma $\left\{{* \atop 3}\right\}$ ou $\left\{{* \atop 6}\right\}$ módulo 9. Pelo Lema 2.10, existe uma subsequência que soma zero módulo 3, incluindo esse elemento. Como a entrada inferior desse vetor não é divisível por 9, o coeficiente inferior do vetor soma também não será divisível por 9. Assim, produzimos um elemento no nível 1 (exatamente) de cor diferente de 0. ■

Capítulo 3

Pares de formas de grau $2^\tau \cdot 3$

Nos capítulos anteriores vimos que para mostrar a existência de solução não trivial para o sistema (1) é suficiente mostrar que esse mesmo sistema módulo p^γ possui solução não singular módulo p, segundo o Lema 1.3. Além disso, garantimos tal solução não singular módulo p no caso em que temos um elemento primário no nível γ ou superior. Portanto, a fim de provarmos o Teorema 1, vamos mostrar que sempre existe um elemento primário no nível γ. Com esse objetivo, vamos construir elementos primários e secundários de níveis superiores utilizando os resultados do Capítulo 2.

Neste capítulo vamos considerar que o sistema (1) com $k = 2^\tau \cdot 3$ ($\tau \geqslant 2$) é 2-normalizado. Então, pelo Lema 1.2, assumimos que

$$q_0 \geqslant 2^\tau \cdot 3 + 1,$$

$$m_0 + \cdots + m_j \geqslant (j+1)2^{\tau+1} \cdot 3 + 1$$

e

$$m_0 + \cdots + m_{j-1} + q_j \geqslant (2j+1)2^\tau \cdot 3 + 1.$$

Além disso, o Lema 2.8 garante solução não singular módulo 2 para o sistema (1) quando considerado módulo 2^γ se $q_0 \geqslant 2^{\tau+3} - 1$. Logo, pelo Lema 1.3, podemos assumir que $q_0 \leqslant 2^{\tau+3} - 2$.

Pelo Lema 2.11, temos que

$$p_1 \geqslant \min\left\{\left\lfloor \frac{m_0}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{q_0}{2} \right\rfloor\right\}.$$

Além disso, definimos s_j como o número de elementos secundários no nível j então

$$s_1 \geqslant m_1 + \mathfrak{s}_1,$$

onde

$$\mathfrak{s}_1 \geqslant \max\left\{0, \left\lfloor \frac{\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) - 2p_1 - 1}{2} \right\rfloor\right\} = \max\left\{0, \left\lfloor \frac{m_0 - q_0 - 2p_1 - 1}{2} \right\rfloor\right\},$$

e, para $j \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} s_j &\geqslant m_j + \frac{s_{j-1} - 6}{2} \\ &\geqslant \sum_{i=0}^{j-1} \frac{m_{j-i}}{2^i} + \frac{1}{2^{j-1}} \left\lfloor \frac{m_0 - q_0 - 2p_1 - 1}{2} \right\rfloor - 6 \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{2^i} \\ &\geqslant \frac{1}{2^j} \sum_{i=0}^{j} m_{j-i} - \frac{q_0 + 2p_1 + 2}{2^j} - 6 + \frac{3}{2^{j-2}}. \end{aligned}$$

Observe que na cota de $\mathfrak{s}_1$ aparece q_0 e, quanto menor esse valor, mais elementos secundários conseguimos produzir no nível 1. Por isso, nossa prova do Teorema 1 utiliza a redução da cota superior de q_0, uma vez que quanto menor o valor de q_0, menos elementos primários o Lema 2.11 nos dá e se faz necessário um número grande de elementos secundários para levantarmos os primários ao nível γ.

Ao longo desse capítulo, toda vez que provarmos o Teorema 1 para $q_0 \geqslant M$, nos resultados seguintes vamos considerar $q_0 \leqslant M - 1$.

Lema 3.1. *Se $q_0 \geqslant 2^\tau \cdot 6 - 2$ então é possível construir um elemento primário no nível γ.*

Demonstração. Temos que $m_0 \geqslant 3(2^\tau \cdot 3 - 1)$ então $p_1 \geqslant 2^\tau \cdot 3 - 1$. Utilizando o Lema 2.7 (ii) e (i), respectivamente e sucessivamente, obtemos

$$p_j \geqslant \frac{p_{j-1} - 3}{2} + 1 \geqslant 2^{\tau+1-j} \cdot 3 - 1.$$

Assim, $p_{\tau+1} \geqslant 2$. Além disso,

$$\begin{aligned} s_{\tau+1} &\geqslant \frac{(\tau+2)2^{\tau+1} \cdot 3 + 1}{2^{\tau+1}} - \frac{(2^{\tau+3} - 2) + (2^\tau \cdot 6 - 2) + 2}{2^{\tau+1}} - 6 + \frac{3}{2^{\tau-1}} \\ &= 3\tau - 7 + \frac{15}{2^{\tau+1}} > 0,8, \end{aligned}$$

onde essa última desigualdade provém do fato que $\tau \geqslant 2$. Portanto, $s_{\tau+1} \geqslant 1$ e então é possível construir um elemento primário no nível $\gamma = \tau + 2$, pela Proposição 2.12. ∎

Lema 3.2. *Se $q_0 \geqslant 2^\tau \cdot 5 - 2$ então é possível construir um elemento primário no nível γ.*

Demonstração. Temos que $m_0 \geqslant 3(2^{\tau-1} \cdot 5 - 1)$ então $p_1 \geqslant 2^{\tau-1} \cdot 5 - 1$. Pelo Lema 2.7 (ii) e (i), obtemos

$$p_j \geqslant \frac{p_{j-1} - 3}{2} + 1 \geqslant 2^{\tau-j} \cdot 5 - 1.$$

Assim, $p_\tau \geqslant 4$. Além disso,

$$\begin{aligned} s_\tau &\geqslant \frac{(\tau+1)2^{\tau+1} \cdot 3 + 1}{2^\tau} - \frac{(2^\tau \cdot 6 - 3) + (2^\tau \cdot 5 - 2) + 2}{2^\tau} - 6 + \frac{3}{2^{\tau-2}} \\ &= 6\tau - 11 + \frac{1}{2^{\tau-4}} \geqslant 5 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} s_{\tau+1} &\geqslant \frac{(\tau+2)2^{\tau+1}\cdot 3+1}{2^{\tau+1}} - \frac{(2^\tau\cdot 6-3)+(2^\tau\cdot 5-2)+2}{2^{\tau+1}} - 6 + \frac{3}{2^{\tau-1}} \\ &= 3\tau - \frac{11}{2} + \frac{1}{2^{\tau-3}} > 2. \end{aligned}$$

Então formamos dois conjuntos disjuntos com dois elementos primários e um secundário no nível τ. Cada conjunto desse produz um elemento primário no nível $\tau+1$ que, junto com o elemento secundário no nível $\tau+1$, nos dá um elemento primário no nível γ. ∎

Lema 3.3. *Se $q_0 \geqslant 2^\tau \cdot 4 - 2$ e $q_1 \geqslant 1$ então é possível construir um elemento primário no nível γ.*

Demonstração. Temos que $m_0 \geqslant 3(2^{\tau+1}-1)$, $m_1 \geqslant 2$ e $p_1 \geqslant 2^{\tau+1}-1$. Suponha que $s_1 \geqslant 3$, $s_j \geqslant 2$, para $2 \leqslant j \leqslant \tau$, e $s_{\tau+1} \geqslant 1$. Construimos elementos primários no nível 2 até que nos restem três no nível 1, pelo Lema 2.7 (ii), então formamos um conjunto com dois secundários de cores distintas e um primário no nível 1 e outro conjunto com dois primários e um secundário no nível 1. Cada conjunto desse nos dá um primário no nível 2 pelas Proposições 2.13 e 2.12, respectivamente. Assim,

$$p_2 \geqslant \frac{2^{\tau+1}-4}{2} + 2 = 2^\tau.$$

Para $2 \leqslant j \leqslant \tau$, utilizamos o Lema 2.7 (ii) para construir primários no nível $j+1$ até que nos restem quatro primários no nível j. Então formamos dois conjuntos disjuntos com dois elementos primários e um secundário no nível j. Cada conjunto desse nos dá um elemento primário no nível j. Assim,

$$p_j \geqslant \frac{p_{j-1}-4}{2} + 2 \geqslant 2^{\tau+2-j}$$

e temos $p_{\tau+1} \geqslant 2$. Esses dois elementos primários com o secundário no nível $\tau+1$ produzem um primário no nível γ.

Falta mostrar que temos os elementos secundários necessários. De fato,

$$\begin{aligned} s_1 &\geqslant \frac{2^{\tau+2}\cdot 3+1}{2} - \frac{(2^\tau\cdot 5-3)+(2^{\tau+2}-2)+2}{2} \\ &= 2^{\tau-1}\cdot 3+2 \geqslant 8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_j &\geqslant \frac{(j+1)2^{\tau+1}\cdot 3+1}{2^j} - \frac{(2^\tau\cdot 5-3)+(2^{\tau+2}-2)+2}{2^j} - 6 + \frac{3}{2^{j-2}} \\ &= 2^{\tau-j}\cdot 3(2j-1) - 6 + \frac{1}{2^{j-4}} > 7 \end{aligned}$$

e

$$s_{\tau+1} \geqslant 3(\tau+2) - \frac{9}{2} - 6 + \frac{1}{2^{\tau-3}} > 2.$$

∎

Lema 3.4. *Se $q_0 \geqslant 2^\tau \cdot 4 - 2$ e $q_1 = 0$ então é possível construir um elemento primário no nível γ.*

Demonstração. Temos que $m_0 \geqslant 2^\tau \cdot 9 + 1$ e $p_1 \geqslant 2^{\tau+1} - 1$.

caso 1: Suponha $m_1 \geqslant 1$.

1.1) Se o elemento no nível 1 é da cor 0 então $u(g_1) = 0$ e

$$2^{\tau+1} + 2 = \frac{(2^\tau \cdot 9 + 1) - (2^\tau \cdot 5 - 3)}{2} \leqslant t \leqslant m_0 - (2^{\tau+1} \cdot 3 + 1).$$

Como $\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) \geqslant m_0 - (2^\tau \cdot 5 - 3) > m_0 - (2^{\tau+1} \cdot 3 + 1)$, existem elementos da cor 0 que não são da forma $\left\{ {* \atop 4} \right\}$ (mod 4). E existem elementos da cor 0 que são da forma $\left\{ {* \atop 4} \right\}$ (mod 4). Pela Proposição 2.15, podemos construir 1 elemento secundário no nível exatamente 1 e cor diferente de 0. Logo,

$$m_0^* \geqslant 2^\tau \cdot 9 - 1, \; m_1^* \geqslant 2, \; q_1^* \geqslant 1 \;\text{ e }\; q_0^* \geqslant 2^\tau \cdot 4 - 2.$$

Os novos valores m_0^*, m_1^* e q_1^* são óbvios, mas precisamos mostrar que q_0^* continua com a mesma cota inferior de antes. Antes da construção do elemento secundário no nível 1 tínhamos $\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) \geqslant 2^{\tau+2} + 4$ e $q_0 \geqslant 2^\tau \cdot 4 - 2$. Após a construção ficamos com $\mathfrak{i}_0^*(\mathscr{M}_0) \geqslant 2^{\tau+2} + 2 > q_0$ e as outras duas cores ainda somam q_0.

Basta mostrar que $s_1 \geqslant 3$, $s_j \geqslant 2$, para $2 \leqslant j \leqslant \tau$, e $s_{\tau+1} \geqslant 1$ para o resultado seguir como no Lema 3.3. De fato,

$$\begin{aligned} s_1 &\geqslant 2 + \frac{(m_0^* + m_1^* - 2) - q_0^* - 2p_1 - 2}{2} \\ &\geqslant 2 + \frac{2^{\tau+2} \cdot 3 - 2 - (2^\tau \cdot 5 - 3) - (2^{\tau+2} - 2) - 2}{2} \\ &= 2 + 2^{\tau-1} \cdot 3 + \frac{1}{2} > 8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_j &\geqslant \frac{\sum_{i=0}^{j} m_{j-i}^*}{2^j} - \frac{q_0^* + 2p_1 + 2}{2^j} - 6 + \frac{3}{2^{j-2}} \\ &\geqslant \frac{(j+1)2^{\tau+1} \cdot 3}{2^j} - \frac{(2^\tau \cdot 5 - 3) + (2^{\tau+2} - 2) + 2}{2^j} - 6 + \frac{3}{2^{j-2}} \\ &= (2j-1)2^{\tau-j} \cdot 3 - 6 + \frac{15}{2^j} > 3 \end{aligned}$$

e

$$s_{\tau+1} \geqslant (\tau + 2) \cdot 3 - \frac{9}{2} - 6 + \frac{15}{2^{\tau+1}} = 3\tau - \frac{9}{2} + \frac{15}{2^{\tau+1}} > 2.$$

1.2) Se o elemento no nível 1 é de cor diferente de 0 então ainda temos $t \geqslant 2^{\tau+1} + 2$. Logo, existem três elementos no nível 0 de cor 0 que são da forma $\left\{ {* \atop 4} \right\}$ (mod 4) e podemos utilizar dois deles para construir 1 elemento secundário no nível exatamente 1 e cor 0, pela Proposição 2.14. Assim, $m_0^* \geqslant 2^\tau \cdot 9 - 1$, $m_1^* \geqslant 2$, $q_1^* \geqslant 1$ e $q_0^* \geqslant 2^\tau \cdot 4 - 2$. e o resultado segue como no caso 1.1.

caso 2: Suponha $m_1 = 0$. Então $u(g_1) = 0$, $m_0 \geqslant 2^{\tau+2} \cdot 3 + 1$ e

$$2^{\tau-1} \cdot 7 + 2 = \frac{(2^{\tau+2} \cdot 3 + 1) - (2^\tau \cdot 5 - 3)}{2} \leqslant t \leqslant m_0 - (2^{\tau+1} \cdot 3 + 1).$$

Como $\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) \geqslant m_0 - (2^\tau \cdot 5 - 3) > m_0 - (2^{\tau+1} \cdot 3 + 1)$, existem elementos da cor 0 que não são da forma $\left\{ {* \atop 4} \right\}$ (mod 4). E existem, pelo menos, 16 elementos da cor 0 que são da forma $\left\{ {* \atop 4} \right\}$ (mod 4). Pelas Proposições 2.14 e 2.15, podemos construir 1 elemento secundário no nível exatamente 1 e cor 0 e outro também no nível 1 e cor diferente de 0, respectivamente. Logo,

$$m_0^* \geqslant 2^{\tau+2} \cdot 3 - 3, \; m_1^* \geqslant 2, \; q_1^* \geqslant 1 \;\; \text{e} \;\; q_0^* \geqslant 2^\tau \cdot 4 - 2.$$

Antes da construção dos elementos secundários no nível 1 tínhamos $\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) \geqslant 2^\tau \cdot 7 + 4$ e $q_0 \geqslant 2^\tau \cdot 4 - 2$. Após a construção ficamos com $\mathfrak{i}_0^*(\mathscr{M}_0) \geqslant 2^\tau \cdot 7 > q_0$ e as outras duas cores ainda somam q_0.

Basta mostrar que $s_1 \geqslant 3$, $s_j \geqslant 2$, para $2 \leqslant j \leqslant \tau$, e $s_{\tau+1} \geqslant 1$ para o resultado seguir como no Lema 3.3. De fato,

$$\begin{aligned} s_1 &\geqslant 2 + \frac{(m_0^* + m_1^* - 2) - q_0^* - 2p_1 - 2}{2} \\ &\geqslant 2 + \frac{2^{\tau+2} \cdot 3 - 3 - (2^\tau \cdot 5 - 3) - (2^{\tau+2} - 2) - 2}{2} \\ &= 2 + 2^{\tau-1} \cdot 3 \geqslant 8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_j &\geqslant \frac{\sum_{i=0}^{j} m_{j-i}^*}{2^j} - \frac{q_0^* + 2p_1 + 2}{2^j} - 6 + \frac{3}{2^{j-2}} \\ &\geqslant \frac{(j+1)2^{\tau+1} \cdot 3 - 1}{2^j} - \frac{(2^\tau \cdot 5 - 3) + (2^{\tau+2} - 2) + 2}{2^j} - 6 + \frac{3}{2^{j-2}} \\ &= (2j-1)2^{\tau-j} \cdot 3 - 6 + \frac{7}{2^{j-1}} > 3 \end{aligned}$$

e

$$s_{\tau+1} \geqslant (\tau+2) \cdot 3 - \frac{9}{2} - 6 + \frac{7}{2^\tau} = 3\tau - \frac{9}{2} + \frac{7}{2^\tau} > 2.$$

■

Lema 3.5. *Se $q_0 \geqslant 2^\tau \cdot 3 + 1$ e $q_1 \geqslant 2^{\tau-1}$ então é possível construir um elemento primário no nível γ.*

Demonstração. Temos que $p_1 \geqslant 2^{\tau-1} \cdot 3$. Suponha $s_1 \geqslant 2^\tau$, $s_j \geqslant 2$, para $2 \leqslant j \leqslant \tau$, e $s_{\tau+1} \geqslant 1$. Construimos elementos primários no nível 2 até que nos restem $2^{\tau-1}$ no nível 1, pelo Lema 2.7 (ii), então formamos $2^{\tau-1}$ conjuntos disjuntos com dois elementos secundários de cores distintas e um primário no nível 1. Cada conjunto desse nos dá um primário no nível 2 pela Proposição 2.13. Assim,

$$p_2 \geqslant \frac{2^{\tau-1} \cdot 3 - 2^{\tau-1}}{2} + 2^{\tau-1} = 2^\tau.$$

Para $2 \leqslant j \leqslant \tau$, utilizamos o Lema 2.7 (ii) para construir primários no nível $j+1$ até que nos restem quatro primários no nível j. Então formamos dois conjuntos disjuntos com dois elementos primários e um secundário no nível j. Cada conjunto desse nos dá um elemento primário no nível $j+1$. Assim,

$$p_j \geqslant \frac{p_{j-1} - 4}{2} + 2 \geqslant 2^{\tau+2-j}$$

e temos $p_{\tau+1} \geqslant 2$. Esses dois elementos primários com o secundário no nível $\tau+1$ produzem um primário no nível γ.

Falta mostrar que temos os elementos secundários necessários. De fato,

$$\begin{aligned} s_1 &\geqslant \frac{2^{\tau+2} \cdot 3 + 1}{2} - \frac{(2^{\tau+2} - 3) + 2^\tau \cdot 3 + 2}{2} \\ &= 2^{\tau-1} \cdot 5 + 1 > 2^\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_j &\geqslant \frac{(j+1)2^{\tau+1} \cdot 3 + 1 - 2^\tau}{2^j} - \frac{(2^{\tau+2} - 3) + 2^\tau \cdot 3 + 2}{2^j} - 6 + \frac{3}{2^{j-2}} \\ &= 2^{\tau+1-j}(3j-1) - 6 + \frac{7}{2^{j-1}} > 4 \end{aligned}$$

e

$$s_{\tau+1} \geqslant 3(\tau+2) - 4 - 6 + \frac{7}{2^\tau} > 2.$$

■

Lema 3.6. *Se $q_0 \geqslant 2^\tau \cdot 3 + 1$ e $q_1 \leqslant 2^{\tau-1} - 1$ então é possível construir um elemento primário no nível γ.*

Demonstração. Temos que

$$m_0 \geqslant 2^\tau \cdot 9 + 1 - (2^{\tau-1} - 1) = 2^{\tau-1} \cdot 17 + 2$$

e

$$p_1 \geqslant 2^{\tau-1} \cdot 3.$$

caso 1: Suponha $m_1 \geqslant 2^\tau - 1$. Como $q_1 \leqslant 2^{\tau-1} - 1$, temos pelo menos $2^{\tau-1}$ elementos da mesma cor no nível 1.

1.1) Se os $m_1 - 2^{\tau-1} + 1$ elementos no nível 1 que são da mesma cor são da cor 0 então $u(g_1) \leqslant 2^{\tau-1} - 1$ e

$$\frac{2^{\tau-1} \cdot 9 + 5}{2} = \frac{(2^{\tau-1} \cdot 17 + 2) - (2^{\tau+2} - 3)}{2} \leqslant t \leqslant m_0 + (2^{\tau-1} - 1) - (2^{\tau+1} \cdot 3 + 1),$$

ou seja,

$$2^{\tau-2} \cdot 9 + 3 \leqslant t \leqslant m_0 - (2^{\tau-1} \cdot 11 + 2).$$

Como $\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) \geqslant m_0 - (2^{\tau+2} - 3) > m_0 - (2^{\tau-1} \cdot 11 + 2)$, existem pelo menos $2^{\tau-1} \cdot 3 + 5$ elementos da cor 0 que não são da forma $\left\{{* \atop 4}\right\}$ (mod 4). E existem, pelo menos, $2^{\tau-2} \cdot 9 + 3$ elementos da cor 0 que são da forma $\left\{{* \atop 4}\right\}$ (mod 4). Pela Proposição 2.15, podemos construir $2^{\tau-1}$ elementos secundários no nível exatamente 1 e cor diferente de 0. Logo,

$$m_0^* \geqslant 2^{\tau-1} \cdot 17 + 2 - 2^\tau = 2^{\tau-1} \cdot 15 + 2,$$

$$m_1^* \geqslant 2^\tau - 1 + 2^{\tau-1} = 2^{\tau-1} \cdot 3 - 1,$$

$$q_1^* \geqslant 2^{\tau-1} \quad \text{e} \quad q_0^* \geqslant 2^\tau \cdot 3 + 1.$$

Antes da construção dos elementos secundários no nível 1 tínhamos $\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) \geqslant 2^{\tau-1} \cdot 9 + 5$ e $q_0 \geqslant 2^\tau \cdot 3 + 1$. Após a construção ficamos com $\mathfrak{i}_0^*(\mathscr{M}_0) \geqslant 2^{\tau-1} \cdot 7 + 5 > q_0$ e as outras duas cores ainda somam q_0.

Temos ainda, para $2 \leqslant j \leqslant \tau$,

$$\begin{aligned} s_j &\geqslant \frac{\sum_{i=0}^{j} m_{j-i}^* - 2^\tau}{2^j} - \frac{q_0^* + 2p_1 + 2}{2^j} - 6 + \frac{3}{2^{j-2}} \\ &\geqslant \frac{(j+1)2^{\tau+1} \cdot 3 + 1 - 2^{\tau-1} \cdot 3}{2^j} - \frac{(2^{\tau+2} - 3) + 2^\tau \cdot 3 + 2}{2^j} - 6 + \frac{3}{2^{j-2}} \\ &= (12j - 5)2^{\tau-1-j} - 6 + \frac{7}{2^{j-1}} > 3 \end{aligned}$$

e

$$s_{\tau+1} \geqslant (\tau + 2) \cdot 3 - \frac{17}{4} - 6 + \frac{7}{2^\tau} = 3\tau - \frac{17}{4} + \frac{7}{2^\tau} > 2.$$

O resultado segue pelo Lema 3.5.

1.2) Se os $m_1 - 2^{\tau-1} + 1$ elementos no nível 1 que são da mesma cor são de cor diferente de 0, ainda temos $t \geqslant 2^{\tau-2} \cdot 9 + 3$. Pela Proposição 2.14, podemos construir $2^{\tau-1}$ elementos secundários no nível exatamente 1 e cor 0. Logo, $m_0^* \geqslant 2^{\tau-1} \cdot 15 + 2$, $m_1^* \geqslant 2^{\tau-1} \cdot 3 - 1$, $q_1^* \geqslant 2^{\tau-1}$ e $q_0^* \geqslant 2^\tau \cdot 3 + 1$. O resultado segue como no caso 1.1.

caso 2: Suponha $m_1 \leqslant 2^\tau - 2$ então $u(g_1) \leqslant 2^\tau - 2$,

$$m_0 \geqslant 2^{\tau+2} \cdot 3 + 1 - (2^\tau - 2) = 2^\tau \cdot 11 + 3$$

e

$$\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) \geqslant 2^\tau \cdot 11 + 3 - (2^{\tau+2} - 3) = 2^\tau \cdot 7 + 6.$$

Portanto,

$$\frac{2^\tau \cdot 7 + 6}{2} \leqslant t \leqslant m_0 + (2^\tau - 2) - (2^{\tau+1} \cdot 3 + 1),$$

ou seja,

$$2^{\tau-1} \cdot 7 + 3 \leqslant t \leqslant m_0 - (2^\tau \cdot 5 + 3).$$

Como $\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) \geqslant m_0 - (2^{\tau+2} - 3) > m_0 - (2^\tau \cdot 5 + 3)$, existem pelo menos $2^\tau + 6$ elementos da cor 0 que não são da forma $\left\{{* \atop 4}\right\}$ (mod 4). E existem, pelo menos, $2^{\tau-1} \cdot 7 + 3$ elementos da cor 0 que são da forma $\left\{ {* \atop 4} \right\}$ (mod 4). Pelas Proposições 2.14 e 2.15, podemos construir $2^{\tau-1}$ elementos secundários no nível exatamente 1 e cor 0 e outros $2^{\tau-1}$ no nível exatamente 1 e cor diferente de 0, respectivamente. Logo,

$$m_0^* \geqslant 2^\tau \cdot 11 + 3 - 2^{\tau+1} = 2^\tau \cdot 9 + 3,$$

$$m_1^* \geqslant 2^\tau, \; q_1^* \geqslant 2^{\tau-1} \;\text{ e }\; q_0^* \geqslant 2^\tau \cdot 3 + 1.$$

Vamos verificar o limite inferior de q_0^*. Inicialmente tínhamos $\mathfrak{i}(\mathscr{M}_0) \geqslant 2^\tau \cdot 7 + 6$ e $q_0 \geqslant 2^\tau \cdot 3 + 1$. Após a construção dos elementos secundários no nível 1 ficamos com $\mathfrak{i}_0^*(\mathscr{M}_0) \geqslant 2^\tau \cdot 5 + 6 > q_0$ e as outras duas cores ainda somam q_0.

Já temos que $s_1 \geqslant 2^\tau$, então basta mostrar que $s_j \geqslant 2$, para $2 \leqslant j \leqslant \tau$, e $s_{\tau+1} \geqslant 1$ para o resultado seguir como no Lema 3.5. De fato,

$$\begin{aligned} s_j &\geqslant \frac{\sum_{i=0}^{j} m_{j-i}^* - 2^\tau}{2^j} - \frac{q_0^* + 2p_1 + 2}{2^j} - 6 + \frac{3}{2^{j-2}} \\ &\geqslant \frac{(j+1)2^{\tau+1} \cdot 3 + 1 - 2^{\tau+1}}{2^j} - \frac{(2^{\tau+2} - 3) + 2^\tau \cdot 3 + 2}{2^j} - 6 + \frac{3}{2^{j-2}} \\ &= (2j-1)2^{\tau-j} \cdot 3 - 6 + \frac{7}{2^{j-1}} > 3 \end{aligned}$$

e

$$s_{\tau+1} \geqslant (\tau+2) \cdot 3 - \frac{9}{2} - 6 + \frac{7}{2^\tau} = 3\tau - \frac{9}{2} + \frac{7}{2^\tau} > 2.$$

■

Capítulo 4

Pares de formas de grau $3^\tau \cdot 2$

Como feito no capítulo anterior, para completar a demonstração do Teorema 2, é suficiente provar que sempre é possível construirmos um elemento primário no nível γ pois isso implica na existência de uma solução não singular módulo p o que, pelo Lema 1.3, garante solução não trivial.

A demonstração feita aqui é similar a do Capítulo 3, mas como a análise deve ser feita agora em relação ao primo 3, mais variáveis são necessárias para a construção dos elementos primários e secundários, logo uma análise mais detalhada se faz necessária.

Podemos considerar que o par (1) com $k = 3^\tau \cdot 2$ ($\tau \geqslant 2$) é 3-normalizado. Então, pelo Lema 1.2, assumimos que

$$q_0 \geqslant 3^\tau \cdot 2 + 1,$$

$$m_0 + \cdots + m_j \geqslant (j+1)3^\tau \cdot 4 + 1$$

e

$$m_0 + \cdots + m_{j-1} + q_j \geqslant (2j+1)3^\tau \cdot 2 + 1.$$

Além disso, se $q_0 \geqslant 2 \cdot 3^{\tau+1} - 1$ o Lema 2.8 garante solução não singular módulo 3 para o sistema (1) quando considerado módulo 3^γ. Portanto, podemos assumir que $q_0 \leqslant 2 \cdot 3^{\tau+1} - 2$, pelo Lema 1.3.

Pelo Lema 2.11, temos que

$$p_1 \geqslant \min\left\{\left\lfloor \frac{m_0}{5} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{q_0}{3} \right\rfloor\right\}.$$

Além disso, definimos s_j como o número de elementos secundários no nível j então

$$s_1 \geqslant m_1 + \mathfrak{s}_1,$$

onde

$$\mathfrak{s}_1 \geqslant \max\left\{0, \left\lfloor \frac{\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) - 3p_1 - 2}{3} \right\rfloor\right\} = \max\left\{0, \left\lfloor \frac{m_0 - q_0 - 3p_1 - 2}{3} \right\rfloor\right\},$$

e, para $j \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} s_j &\geqslant m_j + \frac{s_{j-1} - 16}{3} \\ &\geqslant \sum_{i=0}^{j-1} \frac{m_{j-i}}{3^i} + \frac{\mathfrak{s}_1}{3^{j-1}} - 16 \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{3^i} \\ &\geqslant \frac{1}{3^{j-1}} \sum_{i=0}^{j-1} m_{j-i} + \frac{\mathfrak{s}_1}{3^{j-1}} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}}. \end{aligned}$$

Caso $\mathfrak{s}_1 > 0$, segue que

$$s_j \geqslant \frac{1}{3^j} \sum_{i=0}^{j} m_{j-i} - \frac{q_0 + 3p_1 + 4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}}.$$

No decorrer desse capítulo, toda vez que provarmos o Teorema 2 para $q_0 \geqslant M$, nas contas seguintes já consideraremos $q_0 \leqslant M - 1$.

Lema 4.1. *Se $q_0 \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 17 - 3$ e $m_0 \geqslant 5(3^{\tau-2} \cdot 17 - 1)$ então é possível construir um elemento primário no nível γ.*

Demonstração. Nessas condições temos

$$p_1 \geqslant \min \left\{ \left\lfloor \frac{5(3^{\tau-2} \cdot 17 - 1)}{5} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{3^{\tau-1} \cdot 17 - 3}{3} \right\rfloor \right\} = 3^{\tau-2} \cdot 17 - 1.$$

Pelo Lema 2.7 (ii) e (i), respectivamente, podemos construir

$$\frac{3^{\tau-2} \cdot 17 - 1 - 5}{3} + 1 = 3^{\tau-3} \cdot 17 - 1$$

elementos primários no nível 2. Utilizando esse mesmo lema sucessivamente, chegamos a 16 primários no nível $\tau - 1$ e, consequentemente, a 4 primários no nível τ, nos restando 4 primários no nível $\tau - 1$.

(i) Se $s_\tau \geqslant 1$ então o resultado segue pelo Lema 2.7 (i).

(ii) Se $s_{\tau-1} \geqslant 1$ então construimos mais 1 elemento primário no nível τ, pelo Lema 2.7 (i). E o resultado segue por esse mesmo lema.

Vamos supor $m_\tau = m_{\tau-1} = 0$ então $m_0 + \cdots + m_{\tau-2} \geqslant (\tau + 1)3^\tau \cdot 4 + 1$ e

$$\begin{aligned} s_{\tau-1} &\geqslant \frac{(\tau+1)3^\tau \cdot 4 + 1}{3^{\tau-1}} - \frac{(3^{\tau+1} \cdot 2 - 2) + 3(3^{\tau-2} \cdot 17 - 1) + 4}{3^{\tau-1}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\ &= 12\tau - 31 + \frac{26}{3^{\tau-1}} > 1, \end{aligned}$$

onde essa última desigualdade se deve ao fato de que $\tau \geqslant 2$. Assim, temos o caso (ii). ∎

Lema 4.2. *Se* $q_0 \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 17 - 3$ *e* $3^{\tau-2} \cdot 68 - 4 \leqslant m_0 \leqslant 3^{\tau-2} \cdot 85 - 6$ *então é possível construir um elemento primário no nível* γ.

Demonstração. Nessas condições temos

$$p_1 \geqslant \left\lfloor \frac{3^{\tau-2} \cdot 68 - 4}{5} \right\rfloor \geqslant \frac{3^{\tau-2} \cdot 68 - 8}{5}.$$

Aplicando o Lema 2.7 (ii) sucessivamente, encontramos

$$p_j \geqslant \frac{p_{j-1} - 4}{3} \geqslant \frac{3^{\tau-j} \cdot \frac{68}{5} + \frac{2}{5 \cdot 3^{j-2}} - 2 - 4}{3} = 3^{\tau-j-1} \cdot \frac{68}{5} + \frac{2}{5 \cdot 3^{j-1}} - 2.$$

Assim,

$$p_\tau \geqslant \frac{68}{15} + \frac{2}{5 \cdot 3^{\tau-1}} - 2 > 2,5.$$

Ou seja, conseguimos produzir 3 elementos primários no nível τ. Temos também

$$m_1 + \cdots + m_\tau \geqslant (\tau + 1)3^\tau \cdot 4 - 3^{\tau-2} \cdot 85 + 7$$

Portanto,

$$\begin{aligned} s_\tau &\geqslant \frac{1}{3^{\tau-1}} \sum_{i=0}^{\tau-1} m_{\tau-i} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-1}} \\ &\geqslant \frac{(\tau+1)3^\tau \cdot 4 - 3^{\tau-2} \cdot 85 + 7}{3^{\tau-1}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-1}} \\ &= 12\tau - 24 - \frac{1}{3} + \frac{5}{3^{\tau-2}} > 4. \end{aligned}$$

O resultado segue pelo Lema 2.16. ■

Lema 4.3. *Se* $q_0 \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 16 - 3$ *e* $m_0 \geqslant 5(3^{\tau-2} \cdot 16 - 1)$ *então é possível construir um elemento primário no nível* γ.

Demonstração. Nessas condições temos $p_1 \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 16 - 1$. Aplicando o Lema 2.7 (ii) e (i) sucessivamente, encontramos

$$p_j \geqslant \frac{p_{j-1} - 5}{3} + 1 \geqslant \frac{3^{\tau-j} \cdot 16 - 1 - 5}{3} + 1 = 3^{\tau-j-1} \cdot 16 - 1.$$

Assim, $p_{\tau-1} \geqslant 15$.

(i) Se $s_{\tau-1} \geqslant 4$ então utilizamos o Lema 2.7 (ii) para produzir 3 elementos primários no nível τ, nos restando 6 no nível $\tau - 1$. Formamos dois conjuntos disjuntos com 3 elementos primários e 2 secundários. Pelo Lema 2.16, cada conjunto desse nos dá 1 primário no nível τ. O resultado segue pelo Lema 2.7 (i).

(ii) Se $s_\tau \geqslant 1$ então utilizamos o Lema 2.7 (ii) e (i) para produzir 4 elementos primários no nível τ. O resultado segue pelo Lema 2.7 (i).

Vamos supor $m_{\tau-1} \leqslant 3$ e $m_\tau = 0$ então $m_0 + \cdots + m_{\tau-1} \geqslant (\tau+1)3^\tau \cdot 4 + 1$ e

$$\begin{aligned} s_{\tau-1} &\geqslant \frac{1}{3^{\tau-1}} \sum_{i=0}^{\tau-1} m_{\tau-1-i} - \frac{q_0 + 3p_1 + 4}{3^{\tau-1}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\ &\geqslant \frac{(\tau+1)3^\tau \cdot 4 + 1}{3^{\tau-1}} - \frac{(3^{\tau-1} \cdot 17 - 4) + 3(3^{\tau-2} \cdot 16 - 1) + 4}{3^{\tau-1}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\ &= 12\tau - 29 + \frac{28}{3^{\tau-1}} > 4. \end{aligned}$$

Logo, temos o caso (i). ■

Lema 4.4. *Se* $q_0 \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 16 - 3$ *e* $3^{\tau-2} \cdot 64 - 4 \leqslant m_0 \leqslant 3^{\tau-2} \cdot 80 - 6$ *então é possível construir um elemento primário no nível* γ.

Demonstração. Nessas condições temos

$$p_1 \geqslant \left\lfloor \frac{3^{\tau-2} \cdot 64 - 4}{5} \right\rfloor \geqslant \frac{3^{\tau-2} \cdot 64 - 8}{5}.$$

Aplicando o Lema 2.7 (ii) sucessivamente, encontramos

$$p_j \geqslant \frac{3^{\tau-j}\frac{64}{5} + \frac{2}{5 \cdot 3^{j-2}} - 2 - 4}{3} = 3^{\tau-j-1}\frac{64}{5} + \frac{2}{5 \cdot 3^{j-1}} - 2.$$

Assim,

$$p_\tau \geqslant \frac{64}{15} + \frac{2}{5 \cdot 3^{\tau-1}} - 2 > 2,2,$$

ou seja, conseguimos produzir 3 elementos primários no nível τ. Temos também

$$m_1 + \cdots + m_\tau \geqslant (\tau+1)3^\tau \cdot 4 - 3^{\tau-2} \cdot 80 + 7$$

Portanto,

$$\begin{aligned} s_\tau &\geqslant \frac{1}{3^{\tau-1}} \sum_{i=0}^{\tau-1} m_{\tau-i} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-1}} \\ &\geqslant \frac{(\tau+1)3^\tau \cdot 4 - 3^{\tau-2} \cdot 80 + 7}{3^{\tau-1}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-1}} \\ &= 12\tau - 22 - \frac{2}{3} + \frac{5}{3^{\tau-2}} > 6. \end{aligned}$$

O resultado segue pelo Lema 2.16. ■

Lema 4.5. *Se* $q_0 \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 15 - 3$ *e* $m_0 \geqslant 5(3^{\tau-2} \cdot 15 - 1)$ *então é possível construir um elemento primário no nível* γ.

Demonstração. Nessas condições temos $p_1 \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 15 - 1$. Aplicando o Lema 2.7 (ii) e (i) sucessivamente, encontramos

$$p_j \geqslant \frac{3^{\tau-j} \cdot 15 - 1 - 5}{3} + 1 = 3^{\tau-j-1} \cdot 15 - 1.$$

Assim, $p_{\tau-1} \geqslant 14$.

(i) Se $s_\tau \geqslant 1$ então utilizamos o Lema 2.7 (ii) para construir 3 elementos primários no nível τ e em seguida o Lema 2.7 (i) para construir mais 1 elemento primário no nível τ. O resultado segue pelo Lema 2.7 (i).

(ii) Se $s_{\tau-1} \geqslant 6$ então construimos 3 elementos primários no nível τ pelo Lema 2.7 (ii), nos restando 5 no nível $\tau - 1$. Se pelo menos 5 dos 6 elementos secundários no nível $\tau - 1$ forem da mesma cor, construimos 1 elemento secundário no nível τ, pelo Lema 2.10 (ii), caindo no caso (i). Caso contrário, podemos formar um conjunto com 4 elementos secundários de pelo menos duas cores distintas e um conjunto com 2 secundários de cores distintas. Ao primeiro conjunto acrescentamos 2 elementos primários e ao segundo 3 primários. Cada conjunto nos dá 1 elemento primário no nível τ, segundo a Proposição 2.20 e o Lema 2.16, respectivamente. O resultado segue pelo Lema 2.7 (i).

Vamos supor $m_{\tau-1} \leqslant 5$ e $m_\tau = 0$ então $m_0 + \cdots + m_{\tau-1} \geqslant (\tau+1)3^\tau \cdot 4 + 1$ e

$$\begin{aligned}
s_{\tau-1} &\geqslant \frac{1}{3^{\tau-1}} \sum_{i=0}^{\tau-1} m_{\tau-1-i} - \frac{q_0 + 3p_1 + 4}{3^{\tau-1}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\
&\geqslant \frac{(\tau+1)3^\tau \cdot 4 + 1}{3^{\tau-1}} - \frac{(3^{\tau-1} \cdot 16 - 4) + 3(3^{\tau-2} \cdot 15 - 1) + 4}{3^{\tau-1}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\
&= 12\tau - 27 + \frac{28}{3^{\tau-1}} > 6.
\end{aligned}$$

Logo, temos o caso (ii). ∎

Lema 4.6. *Se $q_0 \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 15 - 3$ e $3^{\tau-2} \cdot 60 - 4 \leqslant m_0 \leqslant 3^{\tau-2} \cdot 75 - 6$ então é possível construir um elemento primário no nível γ.*

Demonstração. Nessas condições temos

$$p_1 \geqslant \left\lfloor \frac{3^{\tau-2} \cdot 60 - 4}{5} \right\rfloor = 3^{\tau-2} \cdot 12 - 1.$$

Aplicando o Lema 2.7 (ii) e (i) sucessivamente, obtemos

$$p_j \geqslant \frac{3^{\tau-j} \cdot 12 - 1 - 5}{3} + 1 = 3^{\tau-j-1} \cdot 12 - 1.$$

Assim,

$$p_\tau \geqslant 3^{-1} \cdot 12 - 1 = 3.$$

Temos também

$$m_1 + \cdots + m_\tau \geqslant (\tau+1)3^\tau \cdot 4 - 3^{\tau-2} \cdot 75 + 7,$$

logo

$$\begin{aligned} s_\tau &\geqslant \frac{1}{3^{\tau-1}} \sum_{i=0}^{\tau-1} m_{\tau-i} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-1}} \\ &\geqslant \frac{(\tau+1)3^\tau \cdot 4 - 3^{\tau-2} \cdot 75 + 7}{3^{\tau-1}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-1}} \\ &= 12\tau - 21 + \frac{5}{3^{\tau-2}} \geqslant 8. \end{aligned}$$

O resultado segue pelo Lema 2.16. ■

Lema 4.7. *Se $q_0 \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 14 - 3$ e $m_0 \geqslant 5(3^{\tau-2} \cdot 14 - 1)$ então é possível construir um elemento primário no nível γ.*

Demonstração. Nessas condições temos $p_1 \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 14 - 1$. Aplicando o Lema 2.7 (ii) e (i) sucessivamente, encontramos

$$p_j \geqslant \frac{3^{\tau-j} \cdot 14 - 1 - 5}{3} + 1 = 3^{\tau-j-1} \cdot 14 - 1.$$

Assim, $p_{\tau-1} \geqslant 13$. Pelo Lema 2.7 (ii), construimos 3 elementos primários no nível τ, restando 4 primários no nível $\tau - 1$.

(i) Se $s_\tau \geqslant 2$, então o resultado segue pelo Lema 2.16.

(ii) Se $s_{\tau-1} \geqslant 8$ e pelo menos 5 desses elementos são da mesma cor então construimos 1 elemento secundário no nível exatamente τ, pelo Lema 2.10 (ii). Juntamos 1 elemento secundário aos 4 primários de nível $\tau - 1$ e construimos mais 1 primário no nível τ, pelo Lema 2.7 (i). O resultado segue por esse mesmo lema.

Se $s_{\tau-1} \geqslant 8$ e no máximo 4 desses elementos secundáries são da mesma cor então formamos dois conjuntos disjuntos com 4 elementos secundários de pelo menos duas cores distintas e 2 primários. Cada conjunto desse nos dá 1 elemento primário no nível τ, pela Proposição 2.20. O resultado segue pelo Lema 2.7 (i).

Vamos supor $m_\tau \leqslant 1$ e $m_{\tau-1} \leqslant 7$ então $m_0 + \cdots + m_{\tau-1} \geqslant (\tau+1)3^\tau \cdot 4$ e

$$\begin{aligned} s_{\tau-1} &\geqslant \frac{1}{3^{\tau-1}} \sum_{i=0}^{\tau-1} m_{\tau-1-i} - \frac{q_0 + 3p_1 + 4}{3^{\tau-1}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\ &\geqslant \frac{(\tau+1)3^\tau \cdot 4}{3^{\tau-1}} - \frac{(3^{\tau-1} \cdot 15 - 4) + 3(3^{\tau-2} \cdot 14 - 1) + 4}{3^{\tau-1}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\ &= 12\tau - 25 + \frac{9}{3^{\tau-2}} \geqslant 8. \end{aligned}$$

caindo no caso (ii). ■

Lema 4.8. *Se* $q_0 \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 14 - 3$ *e* $3^{\tau-2} \cdot 56 - 4 \leqslant m_0 \leqslant 3^{\tau-2} \cdot 70 - 6$ *então é possível construir um elemento primário no nível* γ.

Demonstração. Nessas condições, temos

$$p_1 \geqslant \left\lfloor \frac{3^{\tau-2} \cdot 56 - 4}{5} \right\rfloor \geqslant \frac{3^{\tau-2} \cdot 56 - 8}{5}.$$

Aplicando o Lema 2.7 (ii) sucessivamente, obtemos

$$p_j \geqslant \frac{3^{\tau-j} \cdot \frac{56}{5} + \frac{2}{5 \cdot 3^{j-2}} - 2 - 4}{3} = 3^{\tau-j-1} \cdot \frac{56}{5} + \frac{2}{5 \cdot 3^{j-1}} - 2.$$

Assim,

$$p_{\tau-1} \geqslant \frac{46}{5} + \frac{2}{5 \cdot 3^{\tau-2}} \geqslant 9,2.$$

Ou seja, temos 10 elementos primários no nível $\tau - 1$. Construimos 2 elementos primários no nível τ, restando 4 primários no nível $\tau - 1$, pelo Lema 2.7 (ii).

(i) Suponha $m_\tau \geqslant 2$. Temos

$$m_1 + \cdots + m_{\tau-1} \geqslant \tau \cdot 3^\tau \cdot 4 - 3^{\tau-2} \cdot 70 + 7,$$

logo

$$\begin{aligned} s_{\tau-1} &\geqslant \frac{1}{3^{\tau-2}} \sum_{i=0}^{\tau-2} m_{\tau-1-i} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\ &\geqslant \frac{\tau \cdot 3^\tau \cdot 4 - 3^{\tau-2} \cdot 70 + 7}{3^{\tau-2}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\ &= 36\tau - 78 + \frac{15}{3^{\tau-2}} \geqslant 9. \end{aligned}$$

Assim, juntamos 1 elemento secundário no nível $\tau - 1$ com os 4 primários restantes nesse nível para produzir mais 1 elemento primário no nível τ, pelo Lema 2.7 (i). O resultado segue pelo Lema 2.16.

(ii) Suponha $m_\tau \leqslant 1$. Temos

$$m_1 + \cdots + m_{\tau-1} \geqslant (\tau + 1)3^\tau \cdot 4 - 3^{\tau-2} \cdot 70 + 6,$$

logo

$$\begin{aligned} s_{\tau-1} &\geqslant \frac{(\tau+1)3^\tau \cdot 4 - 3^{\tau-2} \cdot 70 + 6}{3^{\tau-2}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\ &= 36(\tau + 1) - 78 + \frac{14}{3^{\tau-2}} \geqslant 44. \end{aligned}$$

Produzimos 1 elemento primário como no caso anterior, ficando com $s^*_{\tau-1} \geqslant 43$. Desses elementos secundários, pelo menos 11 são da mesma cor, então podemos construir 2 elementos secundários no nível exatamente τ, pelo Lema 2.10 (ii). O resultado segue pelo Lema 2.16.

■

Lema 4.9. *Se* $q_0 \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 13 - 3$ *e* $m_0 \geqslant 5(3^{\tau-2} \cdot 13 - 1)$ *então é possível construir um elemento primário no nível* γ.

Demonstração. Nessas condições temos $p_1 \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 13 - 1$. Aplicando o Lema 2.7 (ii) e (i) sucessivamente, encontramos

$$p_j \geqslant \frac{3^{\tau-j} \cdot 13 - 1 - 5}{3} + 1 = 3^{\tau-j-1} \cdot 13 - 1.$$

Assim, $p_{\tau-1} \geqslant 12$. Construimos 2 elementos primários no nível τ, utilizando 6 dos 12 elementos primários no nível $\tau - 1$, pelo Lema 2.7 (ii).

(i) Se $s_\tau \geqslant 2$ então utilizamos o Lema 2.7 (i) para produzir mais 1 primário no nível τ a partir dos 5 restantes no nível $\tau - 1$. O resultado segue pelo Lema 2.16.

(ii) Se $s_{\tau-1} \geqslant 11$ e pelo menos 5 desses elementos secundários são da mesma cor então construimos 1 secundário no nível exatamente τ, pelo Lema 2.10, restando 8 secundários no nível $\tau - 1$. Formamos dois conjuntos disjuntos com 3 elementos primários e 2 secundários no nível $\tau - 1$. Cada conjunto desse nos dá 1 elemento primário de nível τ, pelo Lema 2.16. O resultado segue pelo Lema 2.7 (i).

   Se $s_{\tau-1} \geqslant 11$ e no máximo 4 desses elementos secundários são da mesma cor então podemos formar dois conjuntos disjuntos com 4 elementos secundários de pelo menos três cores distintas e um conjunto com 3 elementos secundários de pelo menos duas cores distintas. A cada conjunto desses acrescentamos 2 elementos primários no nível $\tau - 1$. Os dois primeiros nos dão 2 primários de nível τ e deixam 1 elemento secundário no nível $\tau - 1$, pela Proposição 2.18. Juntamos 1 desses elementos secundários restantes ao terceiro conjunto o que nos dá mais 1 elemento primário no nível τ, pela Proposição 2.20. O resultado segue pelo Lema 2.7 (i).

Vamos supor $m_{\tau-1} \leqslant 10$ e $m_\tau = 0$ então $m_0 + \cdots + m_{\tau-1} \geqslant (\tau + 1)3^\tau \cdot 4 + 1$ e

$$\begin{aligned}
s_{\tau-1} &\geqslant \frac{1}{3^{\tau-1}} \sum_{i=0}^{\tau-1} m_{\tau-1-i} - \frac{q_0 + 3p_1 + 4}{3^{\tau-1}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\
&\geqslant \frac{(\tau + 1)3^\tau \cdot 4 + 1}{3^{\tau-1}} - \frac{(3^{\tau-1} \cdot 14 - 4) + 3(3^{\tau-2} \cdot 13 - 1) + 4}{3^{\tau-1}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\
&= 12\tau - 23 + \frac{28}{3^{\tau-1}} > 10.
\end{aligned}$$

Portanto, $s_{\tau-1} \geqslant 11$ e temos o caso (ii).

Agora, vamos supor $m_{\tau-1} \leqslant 10$ e $m_\tau = 1$ então $m_0 + \cdots + m_{\tau-1} \geqslant (\tau + 1)3^\tau \cdot 4$ e

$$\begin{aligned}
s_{\tau-1} &\geqslant \frac{(\tau + 1)3^\tau \cdot 4}{3^{\tau-1}} - \frac{(3^{\tau-1} \cdot 14 - 4) + 3(3^{\tau-2} \cdot 13 - 1) + 4}{3^{\tau-1}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\
&= 12\tau - 23 + \frac{9}{3^{\tau-2}} \geqslant 10.
\end{aligned}$$

Portanto, temos a primeira parte do caso (ii). ■

Lema 4.10. *Se* $q_0 \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 13 - 3$ *e* $3^{\tau-2} \cdot 52 - 4 \leqslant m_0 \leqslant 3^{\tau-2} \cdot 65 - 6$ *então é possível construir um elemento primário no nível* γ.

Demonstração. Nessas condições temos

$$p_1 \geqslant \left\lfloor \frac{3^{\tau-2} \cdot 52 - 4}{5} \right\rfloor \geqslant \frac{3^{\tau-2} \cdot 52 - 8}{5}.$$

Aplicando o Lema 2.7 (ii) e (i) sucessivamente, obtemos

$$p_j \geqslant \frac{3^{\tau-j}\frac{52}{5} + \frac{2}{5 \cdot 3^{j-2}} - 2 - 4}{3} = 3^{\tau-j-1}\frac{52}{5} + \frac{2}{5 \cdot 3^{j-1}} - 2.$$

Assim, $p_{\tau-1} \geqslant 9$.

(i) Suponha $m_\tau \geqslant 2$. Temos

$$m_1 + \cdots + m_{\tau-1} \geqslant \tau \cdot 3^\tau \cdot 4 - 3^{\tau-2} \cdot 65 + 7,$$

logo

$$\begin{aligned} s_{\tau-1} &\geqslant \frac{1}{3^{\tau-2}} \sum_{i=0}^{\tau-2} m_{\tau-1-i} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\ &\geqslant \frac{\tau \cdot 3^\tau \cdot 4 - 3^{\tau-2} \cdot 65 + 7}{3^{\tau-2}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\ &= 36\tau - 73 + \frac{15}{3^{\tau-2}} \geqslant 14. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.7 (ii), construimos 1 elemento primário no nível τ, restando 6 primários no nível $\tau - 1$. Formamos dois conjuntos disjuntos com 3 elementos primários e 2 secundários de nível $\tau - 1$. Cada conjunto desse nos dá 1 elemento primário no nível τ, pelo Lema 2.16. O resultado segue por esse mesmo lema.

(ii) Suponha $m_\tau \leqslant 1$. Temos

$$m_1 + \cdots + m_{\tau-1} \geqslant (\tau + 1)3^\tau \cdot 4 - 3^{\tau-2} \cdot 65 + 6,$$

logo

$$\begin{aligned} s_{\tau-1} &\geqslant \frac{(\tau + 1) \cdot 3^\tau \cdot 4 - 3^{\tau-2} \cdot 65 + 6}{3^{\tau-2}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\ &= 36\tau - 37 + \frac{14}{3^{\tau-2}} \geqslant 49. \end{aligned}$$

Pelo menos 13 desses 49 elementos secundários são da mesma cor, então podemos construir 2 elementos secundários no nível exatamente τ pelo Lema 2.10 (ii) e ainda temos $s^*_{\tau-1} \geqslant 43$. Procedemos como no caso anterior. ∎

Lema 4.11. *Se* $q_0 \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 12 - 3$ *e* $m_0 \geqslant 5(3^{\tau-2} \cdot 12 - 1)$ *então é possível construir um elemento primário no nível* γ.

Demonstração. Nessas condições temos $p_1 \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 12 - 1$. Aplicando o Lema 2.7 (ii) e (i) sucessivamente, encontramos

$$p_j \geqslant \frac{3^{\tau-j} \cdot 12 - 1 - 5}{3} + 1 = 3^{\tau-j-1} \cdot 12 - 1.$$

Assim, $p_{\tau-1} \geqslant 11$.

(i) Se $s_\tau \geqslant 2$ então construimos 3 elementos primários no nível τ, pelo Lema 2.7. O resultado segue pelo Lema 2.16.

(ii) Se $s_{\tau-1} \geqslant 13$ e pelo menos 8 desses elementos secundários são da mesma cor então construimos 2 elementos secundários no nível exatamente τ, pelo Lema 2.10 (ii), caindo no caso anterior.

Se $s_{\tau-1} \geqslant 13$ e pelo menos 5 (e no máximo 7) desses elementos secundários são da mesma cor então construimos 1 elemento secundário no nível exatamente τ, pelo Lema 2.10 (ii). Nos restam 10 secundários no nível $\tau - 1$ dos quais no máximo 7 são da mesma cor. Pelo Lema 2.7 (ii), construimos 2 elementos primários no nível τ, nos restando 5 no nível $\tau - 1$. Formamos dois conjuntos disjuntos com 4 secundários de pelo menos duas cores distintas e 2 primários de nível $\tau - 1$. Cada conjunto desse nos dá 1 elemento primário no nível τ, pela Proposição 2.20. O resultado segue pelo Lema 2.7 (i).

Se $s_{\tau-1} \geqslant 13$ e no máximo 4 desses elementos secundários são da mesma cor então construimos 1 primário no nível τ, pelo Lema 2.7 (ii). Formamos três conjuntos disjuntos com 4 elementos secundários de pelo menos três cores distintas, deixando o secundário de cor minoritária. Acrescentamos 2 primários no nível $\tau - 1$ a cada conjunto desse, o que nos dá 3 primários no nível τ e deixa 3 secundários no nível $\tau - 1$, pela Proposição 2.18. Assim, ficamos com 4 secundários de pelo menos duas cores distintas e 2 primários no nível $\tau - 1$. Pela Proposição 2.20, temos mais um elemento primário no nível τ. O resultado segue pelo Lema 2.7 (i).

Vamos supor $m_{\tau-1} \leqslant 12$ e $m_\tau = 1$ então $m_0 + \cdots + m_{\tau-1} \geqslant (\tau + 1)3^\tau \cdot 4$ e

$$\begin{aligned} s_{\tau-1} &\geqslant \frac{1}{3^{\tau-1}} \sum_{i=0}^{\tau-1} m_{\tau-1-i} - \frac{q_0 + 3p_1 + 4}{3^{\tau-1}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\ &\geqslant \frac{(\tau+1)3^\tau \cdot 4}{3^{\tau-1}} - \frac{(3^{\tau-1} \cdot 13 - 4) + 3(3^{\tau-2} \cdot 12 - 1) + 4}{3^{\tau-1}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\ &= 12\tau - 21 + \frac{9}{3^{\tau-2}} \geqslant 12. \end{aligned}$$

Portanto, temos o caso (ii) primeira ou segunda parte.

Agora, vamos supor $m_{\tau-1} \leqslant 12$ e $m_\tau = 0$ então $m_0 + \cdots + m_{\tau-1} \geqslant (\tau+1)3^\tau \cdot 4 + 1$ e

$$\begin{aligned} s_{\tau-1} &\geqslant \frac{(\tau+1)3^\tau \cdot 4 + 1}{3^{\tau-1}} - \frac{(3^{\tau-1} \cdot 13 - 4) + 3(3^{\tau-2} \cdot 12 - 1) + 4}{3^{\tau-1}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\ &= 12\tau - 21 + \frac{28}{3^{\tau-1}} > 12. \end{aligned}$$

Ou seja, $s_{\tau-1} \geqslant 13$, caindo no caso (ii). ■

Lema 4.12. *Se $q_0 \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 12 - 3$ e $3^{\tau-2} \cdot 48 - 4 \leqslant m_0 \leqslant 3^{\tau-2} \cdot 60 - 6$ então é possível construir um elemento primário no nível γ.*

Demonstração. Nessas condições temos

$$p_1 \geqslant \left\lfloor \frac{3^{\tau-2} \cdot 48 - 4}{5} \right\rfloor \geqslant \frac{3^{\tau-2} \cdot 48 - 8}{5}.$$

Aplicando o Lema 2.7 (ii) sucessivamente, obtemos

$$p_j \geqslant \frac{3^{\tau-j}\frac{48}{5} + \frac{2}{5 \cdot 3^{j-2}} - 2 - 4}{3} = 3^{\tau-j-1}\frac{48}{5} + \frac{2}{5 \cdot 3^{j-1}} - 2.$$

(i) Para $\tau = 2$ temos $p_1 \geqslant 8$. Além disso, $m_1 \geqslant 19$ e $q_1 \geqslant 1$. Desses 19 elementos secundários, pelo menos 5 são da mesma cor então construimos 1 secundário no nível exatamente 2, pelo Lema 2.10(ii), nos restando 16 secundários no nível $\tau - 1$. Construimos 1 primário no nível 2, pelo Lema 2.7 (ii), nos restando 5 primários no nível 1. Formamos um conjunto com 4 secundários de pelo menos duas cores distintas e 2 primários. Esse conjunto nos dá 1 elemento primário no nível 2, pela Proposição 2.20. Juntamos os 3 primários restantes com 2 secundários produzindo mais 1 elemento primário no nível 2. Como

$$m_2 \geqslant 109 - (m_0 + m_1) \geqslant 109 - 2 \cdot 54 = 1,$$

onde a segunda desigualdade se deve ao fato que $m_1 \leqslant m_0$, o resultado segue pelo Lema 2.16.

(ii) Para $\tau \geqslant 3$ temos $p_{\tau-2} \geqslant 27$. Pelo Lema 2.7 (ii), produzimos 7 elementos primários no nível $\tau - 1$, sobrando 6 primários no nível $\tau - 2$. Temos também

$$m_1 + \cdots + m_{\tau-2} \geqslant (\tau-1)3^\tau \cdot 4 - 3^{\tau-2} \cdot 60 + 7$$

e

$$m_1 + \cdots + m_{\tau-1} \geqslant \tau \cdot 3^\tau \cdot 4 - 3^{\tau-2} \cdot 60 + 7,$$

assim

$$\begin{aligned} s_{\tau-2} &\geqslant \frac{1}{3^{\tau-3}} \sum_{i=0}^{\tau-3} m_{\tau-2-i} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-3}} \\ &\geqslant \frac{(\tau-1)3^\tau \cdot 4 - 3^{\tau-2} \cdot 60 + 7}{3^{\tau-3}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-3}} \\ &= 108(\tau-1) - 188 + \frac{15}{3^{\tau-3}} \geqslant 43. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} s_{\tau-1} &\geqslant \frac{1}{3^{\tau-2}}\sum_{i=0}^{\tau-2} m_{\tau-1-i} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\ &\geqslant \frac{\tau\cdot 3^\tau\cdot 4 - 3^{\tau-2}\cdot 60 + 7}{3^{\tau-2}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\ &= 36\tau - 68 + \frac{15}{3^{\tau-2}} \geqslant 45. \end{aligned}$$

Utilizamos 4 elementos secundários no nível $\tau - 2$ para, junto com os 6 primários desse mesmo nível, produzir mais 2 primários no nível $\tau - 1$. Essas construções são feitas após a obtenção dos elementos secundários no nível $\tau - 1$. Assim, esses 4 secundários estão entre os 16 deixados para trás ($s_{\tau-1} \geqslant m_{\tau-1} + \frac{s_{\tau-2}-16}{3}$). Dos 45 secundários no nível $\tau - 1$, pelo menos 12 são da mesma cor então podemos produzir 2 secundários no nível exatamente τ pelo Lema 2.10 (ii). A cada 3 primários no nível $\tau - 1$ juntamos 2 secundários no mesmo nível, produzindo 3 primários no nível τ, pelo Lema 2.16. O resultado segue pelo Lema 2.16. ∎

Lema 4.13. *Se $q_0 \geqslant 3^{\tau-1}\cdot 11 - 3$ e $m_0 \geqslant 5(3^{\tau-2}\cdot 11 - 1)$ então é possível construir um elemento primário no nível γ.*

Demonstração. Nessas condições temos $p_1 \geqslant 3^{\tau-2}\cdot 11 - 1$. Aplicando o Lema 2.7 (ii) e (i) sucessivamente, temos

$$p_j \geqslant \frac{3^{\tau-j}\cdot 11 - 1 - 5}{3} + 1 = 3^{\tau-j-1}\cdot 11 - 1.$$

Assim, $p_{\tau-1} \geqslant 10$.

(i) Se $s_\tau \geqslant 2$ e $s_{\tau-1} \geqslant 1$ então pelo Lema 2.7 (ii) construimos 2 elementos primários no nível τ, nos restando 4 primários no nível $\tau - 1$. Esses 4 primários junto com o secundário no nível $\tau - 1$ nos dá mais 1 primário no nível τ, pelo Lema 2.7 (i). O resultado segue pelo Lema 2.16.

(ii) Se $s_{\tau-1} \geqslant 14$ e pelo menos 8 desses elementos secundários são da mesma cor então construimos 2 secundários no nível τ, pelo Lema 2.10 (ii), ficando com $s^*_{\tau-1} \geqslant 8$ e $s^*_\tau \geqslant 2$, caindo no caso (i).

Se $s_{\tau-1} \geqslant 14$ e pelo menos 5 (no máximo 7) desses elementos secundários são da mesma cor então construimos 1 secundário no nível τ, pelo Lema 2.10 (ii), nos restando 11 secundários no nível $\tau - 1$ dos quais no máximo 7 são da mesma cor. Construimos 2 primários de nível τ, pelo Lema 2.7 (ii), nos restando 4 no nível $\tau - 1$. Formamos dois conjuntos disjuntos com 4 secundários de pelo menos duas cores distintas e 2 primários. Cada conjunto desse nos dá 1 primário no nível τ, pela Proposição 2.20. O resultado segue pelo Lema 2.7 (i).

Se $s_{\tau-1} \geqslant 14$ e no máximo 4 desses elementos secundários são da mesma cor então temos as quatro cores representadas (4+4+4+2 ou 4+4+3+3). Como $p_{\tau-1} \geqslant 10$, pelo menos 2 elementos primários são da mesma cor a. Então juntamos esses 2 primários com 1 secundário de cor a e o Lema 2.10 (i) diz que esses 3 elementos produzem 1 primário no nível τ. Assim, ficamos com 8 primários no nível $\tau - 1$ e 13 secundários que ainda representam as quatro cores (4+4+4+1 ou 4+4+3+2 ou 4+3+3+3). Dos 8 primários, pelo menos 2 são da mesma cor b, então juntamos esses 2 primários com 1 secundário de cor b, produzindo 1 primário no nível τ, pelo Lema 2.10 (i). Nos restam no nível $\tau - 1$, 6 primários e 12 secundários que representam pelo menos três cores. Formamos três conjuntos disjuntos com 4 secundários de pelo menos duas cores distintas e 2 primários. Cada conjunto desse nos dá 1 elemento primário, pela Proposição 2.20. O resultado segue pelo Lema 2.7 (i).

Vamos supor $m_{\tau-1} \leqslant 13$ e $m_\tau \leqslant 1$ então $m_0 + \cdots + m_{\tau-1} \geqslant (\tau+1)3^\tau \cdot 4$ e

$$\begin{aligned} s_{\tau-1} &\geqslant \frac{1}{3^{\tau-1}}\sum_{i=0}^{\tau-1} m_{\tau-1-i} - \frac{q_0+3p_1+4}{3^{\tau-1}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\ &\geqslant \frac{(\tau+1)3^\tau\cdot 4}{3^{\tau-1}} - \frac{(3^{\tau-1}\cdot 12-4)+3(3^{\tau-2}\cdot 11-1)+4}{3^{\tau-1}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\ &= 12\tau - 19 + \frac{9}{3^{\tau-2}} \geqslant 14. \end{aligned}$$

Logo, temos o caso (ii).

Agora, vamos supor $m_{\tau-1} = 0$ e $m_\tau \geqslant 2$ então $m_0 + \cdots + m_{\tau-2} \geqslant \tau \cdot 3^\tau \cdot 4 + 1$ e

$$\begin{aligned} s_{\tau-1} &\geqslant \frac{\tau\cdot 3^\tau\cdot 4+1}{3^{\tau-1}} - \frac{(3^{\tau-1}\cdot 12-4)+3(3^{\tau-2}\cdot 11-1)+4}{3^{\tau-1}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\ &= 12\tau - 23 - 8 + \frac{28}{3^{\tau-1}} > 2. \end{aligned}$$

Logo, temos o caso (i). ■

Lema 4.14. *Se* $q_0 \geqslant 3^{\tau-1}\cdot 11 - 3$ *e* $3^{\tau-2}\cdot 44 - 4 \leqslant m_0 \leqslant 3^{\tau-2}\cdot 55 - 6$ *então é possível construir um elemento primário no nível* γ.

Demonstração.

(i) Suponha $\tau = 2$ ou 3. Nessas condições, temos

$$p_1 \geqslant \left\lfloor \frac{3^{\tau-2}\cdot 44-4}{5} \right\rfloor = \begin{cases} 8 & \text{se } \tau = 2 \\ 25 & \text{se } \tau = 3 \end{cases},$$

$$q_1 \geqslant 3^{\tau+1}\cdot 2 - 3^{\tau-2}\cdot 55 + 7 = 3^{\tau-2}\cdot(-1) + 7,$$

$$m_1 \geqslant 3^\tau \cdot 8 - 3^{\tau-2}\cdot 55 + 7 = 3^{\tau-2}\cdot 17 + 7$$

e

$$m_2 \geqslant 3^{\tau+1}\cdot 4 + 1 - 2(3^{\tau-2}\cdot 55 - 6) = 3^{\tau-2}\cdot(-2) + 13.$$

Se $\tau = 2$, podemos formar quatro conjuntos disjuntos com 4 secundários de pelo menos duas cores distintas e 2 primários no nível 1. Pela Proposição 2.20, cada conjunto desse nos dá 1 primário no nível 2. Como $m_2 > 1$, o resultado segue pelo Lema 2.7 (i).

Se $\tau = 3$, construimos 5 primários no nível 2 pelo Lema 2.7 (ii), nos restando 10 primários no nível 1. Formamos quatro conjuntos disjuntos com 4 secundários de pelo menos duas cores distintas e 2 primários no nível 1. Pela Proposição 2.20, cada conjunto nos dá 1 primário no nível 2. Pelo Lema 2.7 (ii), construimos 1 primário no nível 3 nos restando 6 no nível 2. Formamos dois conjuntos disjuntos com 3 primários e 2 secundários de nível 2 que nos dão 2 primários no nível 3 pelo Lema 2.16. Como os elementos secundários são construídos antes dos elementos primários, temos

$$s_3 \geqslant \frac{m_3 + m_2 + m_1}{3^2} - 8 + \frac{8}{3^2} \geqslant \frac{3^3 \cdot 16 + 1 - 159}{9} - 8 + \frac{8}{9} \geqslant 23.$$

Então o resultado segue pelo Lema 2.16.

(ii) Suponha $\tau \geqslant 4$ e $3^{\tau-2} \cdot 53 + 2 \leqslant m_0 \leqslant 3^{\tau-2} \cdot 55 - 6$. Nessas condições, temos

$$p_1 \geqslant \left\lfloor \frac{3^{\tau-2} \cdot 53 + 2}{5} \right\rfloor \geqslant \frac{3^{\tau-2} \cdot 53 - 2}{5}.$$

Aplicando o Lema 2.7 (ii) sucessivamente, encontramos

$$p_j \geqslant \frac{3^{\tau-j}\frac{53}{5} + \frac{8}{5 \cdot 3^{j-2}} - 2 - 4}{3} = 3^{\tau-j-1}\frac{53}{5} + \frac{8}{5 \cdot 3^{j-1}} - 2.$$

Assim, $p_{\tau-1} \geqslant 9$. Além disso,

$$m_1 + \cdots + m_{\tau-1} \geqslant \tau \cdot 3^\tau \cdot 4 - 3^{\tau-2} \cdot 55 + 7,$$

logo

$$\begin{aligned} s_{\tau-1} &\geqslant \frac{1}{3^{\tau-2}} \sum_{i=0}^{\tau-2} m_{\tau-1-i} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\ &\geqslant \frac{\tau \cdot 3^\tau \cdot 4 - 3^{\tau-2} \cdot 55 + 7}{3^{\tau-2}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\ &= 36\tau - 63 + \frac{15}{3^{\tau-2}} \geqslant 82. \end{aligned}$$

Desses 82 elementos secundários, pelo menos 21 são da mesma cor então podemos construir 2 secundários no nível exatamente τ, pelo Lema 2.10 (ii). Formamos três conjuntos disjuntos com 3 primários e 2 secundários no nível $\tau - 1$. Cada conjunto produz 1 primário no nível τ pelo Lema 2.16. O resultado segue por esse mesmo lema.

(iii) Suponha $\tau \geqslant 4$ e $3^{\tau-2} \cdot 44 - 4 \leqslant m_0 \leqslant 3^{\tau-2} \cdot 53 + 1$. Nessas condições, temos

$$p_1 \geqslant \left\lfloor \frac{3^{\tau-2} \cdot 44 - 4}{5} \right\rfloor \geqslant \frac{3^{\tau-2} \cdot 44 - 8}{5},$$

$$q_1 \geqslant 3^{\tau+1} \cdot 2 - 3^{\tau-2} \cdot 53 = 3^{\tau-2}$$

e

$$m_1 \geqslant 3^\tau \cdot 8 - 3^{\tau-2} \cdot 53 = 3^{\tau-2} \cdot 19.$$

Aplicamos o Lema 2.7 (ii) para produzir os elementos primários no nível 2 até que nos restem entre $3^{\tau-2} \cdot 2$ e $3^{\tau-2} \cdot 2 + 2$ primários no nível 1, daí formamos $3^{\tau-2}$ conjuntos disjuntos com 4 secundários de pelo menos duas cores distintas e 2 primários no nível 1. Cada conjunto nos dá 1 primário no nível 2, pela Proposição 2.20. Assim,

$$p_2 \geqslant \frac{\frac{3^{\tau-2} \cdot 44 - 8}{5} - 3^{\tau-2} \cdot 2 - 2}{3} + 3^{\tau-2} = 3^{\tau-3}\frac{49}{5} - \frac{6}{5}.$$

Utilizamos o Lema 2.7 (ii) sucessivamente, obtendo

$$p_j \geqslant \frac{3^{\tau-j}\frac{49}{5} + \frac{4}{5 \cdot 3^{j-3}} - 2 - 4}{3} = 3^{\tau-j-1}\frac{49}{5} + \frac{4}{5 \cdot 3^{j-2}} - 2.$$

Logo $p_{\tau-2} \geqslant 28$. Além disso,

$$m_1 + \cdots + m_{\tau-2} \geqslant (\tau - 1)3^\tau \cdot 4 - 3^{\tau-2} \cdot 53,$$

consequentemente

$$\begin{aligned} s_{\tau-2} &\geqslant \frac{1}{3^{\tau-3}} \sum_{i=0}^{\tau-3} m_{\tau-2-i} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-3}} \\ &\geqslant \frac{(\tau-1)3^\tau \cdot 4 - 3^{\tau-2} \cdot 53}{3^{\tau-3}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-3}} \\ &= 108(\tau - 1) - 167 + \frac{8}{3^{\tau-3}} \geqslant 159. \end{aligned}$$

Desses 159 elementos secundários, pelo menos 40 são da mesma cor. Então, pelo Lema 2.10 (ii), podemos construir 12 secundários no nível exatamente $\tau - 1$, nos restando 123 secundários no nível $\tau - 2$. Desses 123 elementos secundários, pelo menos 31 são da mesma cor. Então podemos construir, pelo Lema 2.10 (ii), mais 9 secundários no nível exatamente $\tau - 1$ nos restando 96 secundários no nível $\tau - 2$.

Pelo Lema 2.7 (ii), produzimos 8 elementos primários no nível $\tau - 1$, nos restando 4 primários no nível $\tau - 2$. A esses 4 primários juntamos 1 secundário do mesmo nível, produzindo o nono primário no nível $\tau - 1$. Pelo Lema 2.7 (ii), produzimos 1 primário no nível τ, nos restando 6 primários no nível $\tau - 1$.

Dos 21 elementos secundários no nível $\tau - 1$, pelo menos 5 são da mesma cor então podemos produzir 1 secundário no nível exatamente τ pelo Lema 2.10 (ii), nos restando 18 secundários no nível $\tau - 1$. Desses 18 secundários, pelo menos 5 são da mesma cor então podemos produzir mais 1 secundário no nível exatamente τ, pelo Lema 2.10 (ii). Ainda nos restam 15 secundários no nível $\tau - 1$.

Formamos dois conjuntos disjuntos com 3 primários e 2 secundários de nível $\tau - 1$. Cada conjunto desse produz 1 primário no nível τ, pelo Lema 2.16. O resultado segue por esse mesmo lema. ■

Lema 4.15. *Se* $q_0 \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 10 - 3$ *e* $m_0 \geqslant 5(3^{\tau-2} \cdot 10 - 1)$ *então é possível construir um elemento primário no nível* γ.

Demonstração. Nessas condições temos $p_1 \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 10 - 1$. Aplicando o Lema 2.7 (ii) e (i) sucessivamente, obtemos

$$p_j \geqslant \frac{3^{\tau-j} \cdot 10 - 1 - 5}{3} + 1 = 3^{\tau-j-1} \cdot 10 - 1.$$

Assim, $p_{\tau-1} \geqslant 9$.

(i) Se $s_{\tau-1} \geqslant 4$ e $s_\tau \geqslant 2$ então construimos 1 primário no nível τ, pelo Lema 2.7 (ii), nos restando 6 no nível $\tau - 1$. A cada 3 desses primários juntamos 2 secundários o que nos dá mais 2 primários no nível τ, pelo Lema 2.16. O resultado segue por esse mesmo lema.

(ii) Se $s_{\tau-1} \geqslant 17$ então pelo menos 5 desses elementos secundários são da mesma cor, logo podemos construir 1 secundário no nível τ, pelo Lema 2.10 (ii). Se dos 14 elementos secundários restantes pelo menos 5 forem da mesma cor, construimos mais 1 secundário no nível τ, caindo no caso (i).

Caso contrário, temos as quatro cores representadas (4+4+4+2 ou 4+4+3+3). Construimos 1 primário no nível τ, pelo Lema 2.7 (ii), nos restando 6 no nível $\tau - 1$. Formamos três conjuntos disjuntos com 4 secundários de pelo menos três cores distintas e 2 primários. Cada conjunto desse nos dá 1 primário no nível τ, pela Proposição 2.20. O resultado segue pelo Lema 2.7 (i).

Vamos supor $m_{\tau-1} \leqslant 3$ e $m_\tau \geqslant 2$ então $m_0 + \cdots + m_{\tau-1} \geqslant \tau \cdot 3^\tau \cdot 4 + 1$ e

$$\begin{aligned}
s_{\tau-1} &\geqslant \frac{1}{3^{\tau-1}} \sum_{i=0}^{\tau-1} m_{\tau-1-i} - \frac{q_0 + 3p_1 + 4}{3^{\tau-1}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\
&\geqslant \frac{\tau \cdot 3^\tau \cdot 4 + 1}{3^{\tau-1}} - \frac{(3^{\tau-1} \cdot 11 - 4) + 3(3^{\tau-2} \cdot 10 - 1) + 4}{3^{\tau-1}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\
&= 12\tau - 21 - 8 + \frac{28}{3^{\tau-1}} > 4.
\end{aligned}$$

Portanto, temos o caso (i).

Vamos supor $m_{\tau-1} \leqslant 16$ e $m_\tau = 1$ então $m_0 + \cdots + m_{\tau-1} \geqslant (\tau + 1)3^\tau \cdot 4$ e

$$\begin{aligned}
s_{\tau-1} &\geqslant \frac{(\tau+1)3^\tau \cdot 4}{3^{\tau-1}} - \frac{(3^{\tau-1} \cdot 11 - 4) + 3(3^{\tau-2} \cdot 10 - 1) + 4}{3^{\tau-1}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\
&= 12\tau - 17 + \frac{9}{3^{\tau-2}} \geqslant 16.
\end{aligned}$$

Portanto, temos o caso (ii).

Vamos supor $m_{\tau-1} \leqslant 16$ e $m_\tau = 0$ então $m_0 + \cdots + m_{\tau-1} \geqslant \tau \cdot 3^\tau \cdot 4 + 1$ e

$$\begin{aligned} s_{\tau-1} &\geqslant \frac{(\tau+1)3^\tau \cdot 4 + 1}{3^{\tau-1}} - \frac{(3^{\tau-1} \cdot 11 - 4) + 3(3^{\tau-2} \cdot 10 - 1) + 4}{3^{\tau-1}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\ &= 12\tau - 17 + \frac{28}{3^{\tau-1}} > 16. \end{aligned}$$

Portanto, temos o caso (ii). ■

Lema 4.16. *Se* $q_0 \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 10 - 3$ *e* $3^{\tau-2} \cdot 40 - 4 \leqslant m_0 \leqslant 3^{\tau-2} \cdot 50 - 6$ *então é possível construir um elemento primário no nível* γ.

Demonstração. Nessas condições temos

$$p_1 \geqslant \left\lfloor \frac{3^{\tau-2} \cdot 40 - 4}{5} \right\rfloor = 3^{\tau-2} \cdot 8 - 1,$$

$$q_1 \geqslant 3^{\tau+1} \cdot 2 - 3^{\tau-2} \cdot 50 + 7 = 3^{\tau-2} \cdot 4 + 7$$

e

$$m_1 \geqslant 3^\tau \cdot 8 - 3^{\tau-2} \cdot 50 + 7 = 3^{\tau-2} \cdot 22 + 7.$$

Formamos $3^{\tau-2} \cdot 4 - 1$ conjuntos disjuntos com 4 secundários de pelo menos duas cores distintas e 2 primários no nível 1. Pela Proposição 2.20, cada conjunto nos dá 1 primário no nível 2. Assim, $p_2 \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 4 - 1$. Aplicando o Lema 2.7 (ii) e (1) sucessivamente, encontramos

$$p_j \geqslant \frac{3^{\tau-j+1} \cdot 4 - 1 - 5}{3} + 1 = 3^{\tau-j} \cdot 4 - 1.$$

Assim, $p_\tau \geqslant 3$. Se $m_\tau \geqslant 2$ então a prova segue pelo Lema 2.16. Caso contrário,

$$m_1 + \cdots + m_\tau \geqslant (\tau+1)3^\tau \cdot 4 - 3^{\tau-2} \cdot 50 + 6$$

e

$$\begin{aligned} s_\tau &\geqslant \frac{1}{3^{\tau-2}} \sum_{i=0}^{\tau-2} m_{\tau-i} + \frac{m_1 - 4(3^{\tau-2} \cdot 4 - 1)}{3^{\tau-1}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-1}} \\ &\geqslant \frac{1}{3^{\tau-1}} \sum_{i=0}^{\tau-1} m_{\tau-i} - \frac{4(3^{\tau-2} \cdot 4 - 1)}{3^{\tau-1}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-1}} \\ &\geqslant \frac{(\tau+1)3^\tau \cdot 4 - 3^{\tau-2} \cdot 50 + 6}{3^{\tau-1}} - \frac{16}{3} - 8 + \frac{4}{3^{\tau-2}} \\ &= 12\tau - 18 + \frac{6}{3^{\tau-2}} \geqslant 12. \end{aligned}$$

O resultado segue pelo Lema 2.16. ■

Lema 4.17. *Se* $q_0 \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 9 - 3$ *e* $3^\tau \cdot 4 + 1 \leqslant m_0 \leqslant 3^{\tau-2} \cdot 45 - 6$ *então é possível construir um elemento primário no nível* γ.

Demonstração. Nessas condições temos

$$p_1 \geqslant \left\lfloor \frac{3^\tau \cdot 4 + 1}{5} \right\rfloor,$$

$$q_1 \geqslant 3^{\tau+1} \cdot 2 - 3^{\tau-2} \cdot 45 + 7 = 3^\tau + 7,$$

$$m_1 \geqslant 3^\tau \cdot 8 - 3^{\tau-2} \cdot 45 + 7 = 3^{\tau+1} + 7,$$

$$q_2 \geqslant 3^\tau \cdot 10 + 1 - (m_0 + m_1) \geqslant 3^\tau \cdot 10 + 1 - 2(3^{\tau-2} \cdot 45 - 6) = 13$$

e

$$m_2 \geqslant 3^{\tau+1} \cdot 4 + 1 - (m_0 + m_1) \geqslant 3^{\tau+1} \cdot 4 + 1 - 2(3^{\tau-2} \cdot 45 - 6) = 3^\tau \cdot 2 + 13.$$

Formamos $\left\lfloor \frac{3^\tau \cdot 4+1}{10} \right\rfloor$ conjuntos com 4 secundários de pelo menos duas cores distintas e 2 primários no nível 1. Pela Proposição 2.20, cada conjunto nos dá 1 primário no nível 2. Assim, $p_2 \geqslant \left\lfloor \frac{3^\tau \cdot 4+1}{10} \right\rfloor$.

Se $\tau = 2$ então $p_2 \geqslant 3$ e $m_2 \geqslant 31$. O resultado segue pelo Lema 2.16.

Se $\tau = 3$ então $p_2 \geqslant 10$, $m_2 \geqslant 67$ e $q_2 \geqslant 13$. Podemos formar 5 conjuntos disjuntos com 4 secundários e 2 primários no nível 2. Pela Proposição 2.20, cada conjunto nos dá 1 elemento primário no nível 3. O resultado segue pelo Lema 2.7 (i).

Se $\tau \geqslant 4$ então utilizamos o Lema 2.7 (ii) para produzir elementos primários no nível 3 até que nos restem de 26 a 28 primários no nível 2. Daí formamos treze conjuntos disjuntos com 4 secundários de pelo menos duas cores distintas e 2 primários. Cada conjunto desse nos dá 1 primário no nível 3 pela Proposição 2.20. Assim,

$$p_3 \geqslant \frac{\frac{3^\tau \cdot 4 - 8}{10} - 28}{3} + 13 = 3^{\tau-1}\frac{2}{5} + \frac{1}{5 \cdot 3^{-3}} - 2.$$

Aplicando o Lema 2.7 (ii) sucessivamente, encontramos

$$p_j \geqslant \frac{3^{\tau-j+3}\frac{2}{5} + \frac{1}{5 \cdot 3^{j-7}} - 2 - 4}{3} = 3^{\tau-j+2}\frac{2}{5} + \frac{1}{5 \cdot 3^{j-6}} - 2.$$

Assim, $p_{\tau-1} \geqslant 9$. Temos também

$$m_1 + \cdots + m_{\tau-1} \geqslant \tau \cdot 3^\tau \cdot 4 - 3^{\tau-2} \cdot 45 + 7,$$

consequentemente

$$\begin{aligned}
s_{\tau-1} &\geqslant \sum_{i=0}^{\tau-4} \frac{m_{\tau-1-i}}{3^i} + \frac{m_2 - 4 \cdot 13}{3^{\tau-3}} + \frac{m_1 - 4(\frac{3^\tau \cdot 4+1}{10})}{3^{\tau-2}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\
&= \sum_{i=0}^{\tau-2} \frac{m_{\tau-1-i}}{3^i} - \frac{52}{3^{\tau-3}} - \frac{2(3^\tau \cdot 4 + 1)}{5 \cdot 3^{\tau-2}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\
&\geqslant \frac{\tau \cdot 3^\tau \cdot 4 - 3^{\tau-2} \cdot 45 + 7}{3^{\tau-2}} - \frac{52}{3^{\tau-3}} - \frac{72}{5} - \frac{2}{5 \cdot 3^{\tau-2}} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-2}} \\
&= 36\tau - 67 - \frac{2}{5} - \frac{707}{5 \cdot 3^{\tau-2}} > 60.
\end{aligned}$$

Desses 60 elementos secundários no nível $\tau - 1$ pelo menos 15 são da mesma cor então podemos construir 2 secundários no nível exatamente τ, pelo Lema 2.10 (ii). Formamos três conjuntos disjuntos com 3 primários e 2 secundários no nível $\tau - 1$. Cada conjunto desse produz 1 primário no nível τ segundo o Lema 2.16. O resultado segue por esse mesmo lema. ∎

Lema 4.18. *Se $q_0 \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 9 - 3$, $q_1 \geqslant 1$ e $m_0 \geqslant 5(3^{\tau-2} \cdot 9 - 1)$ então é possível construir um elemento primário no nível γ.*

Demonstração. Temos que $m_1 \geqslant 2$ e $p_1 \geqslant 3^\tau - 1$.

Suponha $s_1 \geqslant 6$, $s_\tau \geqslant 2$ e $s_j \geqslant 4$ (para $2 \leqslant j \leqslant \tau - 1$ e $\tau \geqslant 3$). Aplicamos o Lema 2.7 (ii) para produzir $3^{\tau-1} - 2$ elementos primários no nível 2, nos restando 5 no nível 1. Formamos um conjunto com 4 secundários de pelo menos duas cores distintas e 2 primários no nível 1 e outro conjunto com 3 primários e 2 secundários. Cada conjunto produz 1 elemento primário no nível 2 pela Proposição 2.20 e pelo Lema 2.16, respectivamente. Então $p_2 \geqslant 3^{\tau-1}$.

Aplicamos o Lema 2.7 (ii) para produzir elementos primários no nível maior até que nos restem 6 no nível em questão. Então formamos dois conjuntos disjuntos com 3 primários e 2 secundários que nos dão mais 2 primários no nível maior pelo Lema 2.16. Assim,

$$p_j \geqslant 3^{\tau-j+1}$$

e temos $p_\tau \geqslant 3$. O resultado segue pelo Lema 2.16.

Falta mostrar que temos os elementos secundários necessários. De fato,

$$\begin{aligned} s_1 &\geqslant 2 + \frac{(m_0 + m_1 - 2) - q_0 - 3p_1 - 4}{3} \\ &\geqslant 2 + \frac{(3^\tau \cdot 8 - 1) - (3^{\tau-1} \cdot 10 - 4) - 3(3^\tau - 1) - 4}{3} \\ &= 2 + 3^{\tau-2} \cdot 5 + \frac{2}{3} > 7. \end{aligned}$$

Para $2 \leqslant j \leqslant \tau - 1$ e $\tau \geqslant 3$:

$$\begin{aligned} s_j &\geqslant \frac{\sum_{i=0}^{j} m_{j-i} - 2}{3^j} + \frac{2}{3^{j-1}} - \frac{q_0 + 3p_1 + 4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\ &\geqslant \frac{(j+1)3^\tau \cdot 4 - 1}{3^j} - \frac{(3^{\tau-1} \cdot 10 - 4) + 3(3^\tau - 1) + 4}{3^j} - 8 + \frac{10}{3^{j-1}} \\ &= 3^{\tau-1-j}(12j - 7) - 8 + \frac{32}{3^j} > 12 \end{aligned}$$

e

$$s_\tau \geqslant (\tau + 1)4 - \frac{19}{3} - 8 + \frac{32}{3^\tau} \geqslant 1,2.$$

∎

Lema 4.19. *Se $q_0 \geqslant 3^{\tau-1}\cdot 9-3$ e $q_1 = 0$ então é possível construir um elemento primário no nível γ.*

Demonstração. Temos que $m_0 \geqslant 3^{\tau+1}\cdot 2+1$.

(i) Vamos supor $q_0 \geqslant 3^{\tau+1}$ e $\tau \geqslant 3$, uma vez que para $\tau = 2$ temos $3^{\tau+1} = 27$ e esse caso já foi considerado nos Lemas 4.15 e 4.16. Então $p_1 \geqslant 3^\tau$ e temos também, para $1 \leqslant j \leqslant \tau - 1$,

$$\begin{aligned} s_j &\geqslant \frac{1}{3^j}\sum_{i=0}^{j} m_{j-i} - \frac{q_0+3p_1+4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\ &\geqslant \frac{(j+1)3^\tau\cdot 4+1}{3^j} - \frac{(3^{\tau-1}\cdot 10-4)+3\cdot 3^\tau+4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\ &= 3^{\tau-1-j}(12j-7) - 8 + \frac{25}{3^j} > 5 \end{aligned}$$

e

$$s_\tau \geqslant (\tau+1)4 - \frac{19}{3} - 8 + \frac{25}{3^\tau} > 2.$$

Aplicamos o Lema 2.7 (ii) para produzir elementos primários no nível maior até que nos restem 6 primários no nível em questão. Então formamos dois conjuntos disjuntos com 3 primários e 2 secundários que nos dão mais 2 primários no nível maior pelo Lema 2.16. Assim,

$$p_j \geqslant \frac{3^{\tau-j+2}-6}{3} + 2 = 3^{\tau-j+1}$$

e temos $p_\tau \geqslant 3$. O resultado segue pelo Lema 2.16.

(ii) Suponha $3^{\tau+1}-3 \leqslant q_0 \leqslant 3^{\tau+1}-1$, então $p_1 \geqslant 3^\tau - 1$.

caso 1: Suponha $m_1 \geqslant 5$. Como $q_1 = 0$, todos os m_1 elementos no nível 1 são da mesma cor.

1.1) Se esses elementos são da cor 0 então $u(g_1) = 0$ e temos

$$\frac{3^{\tau+1}+2}{3} \leqslant \frac{(3^{\tau+1}\cdot 2+1)-(3^{\tau+1}-1)}{3} \leqslant t \leqslant m_0 - \frac{n}{k} \leqslant m_0 - (3^\tau\cdot 4+1),$$

isto é,

$$3^\tau + 1 \leqslant t \leqslant m_0 - (3^\tau\cdot 4+1).$$

Como $\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) = m_0 - q_0 \geqslant m_0 - (3^{\tau+1}-1) > m_0 - (3^\tau\cdot 4+1)$, existem elementos da cor 0 que não são da forma $\left\{ {* \atop 9} \right\}$ (mod 9). E existem, pelo menos, $3^\tau + 1$ elementos da cor 0 que são da forma $\left\{ {* \atop 9} \right\}$ (mod 9). Pela Proposição 2.22, podemos construir 1 elemento secundário no nível exatamente 1 que não tem cor 0. Assim, $m_0^* \geqslant 3^{\tau+1}\cdot 2-2$, $m_1^* \geqslant 6$, $q_1^* = 1$ e $q_0^* \geqslant 3^{\tau+1}-3$.

Os novos valores m_0^*, m_1^* e q_1^* são óbvios, mas devemos verificar que $q_0^* \geqslant 3^{\tau+1}-3$. De fato, inicialmente tínhamos $\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) \geqslant 3^{\tau+1}+2$ e $3^{\tau+1}-3 \leqslant q_0 \leqslant 3^{\tau+1}-1$. Após a construção do elemento secundário no nível 1 ficamos com $\mathfrak{i}_0^*(\mathscr{M}_0) \geqslant 3^{\tau+1} - 1 \geqslant q_0$ e as outras três cores ainda somam q_0.

Só precisamos mostrar que $s_j \geqslant 4$, para $2 \leqslant j \leqslant \tau - 1$ e $\tau \geqslant 3$, e $s_\tau \geqslant 2$ que o resultado seguirá como no Lema 4.18. Temos

$$\begin{aligned} s_j &\geqslant \frac{1}{3^j}\sum_{i=0}^{j} m_{j-i}^* - \frac{q_0^* + 3p_1 + 4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{j} m_{j-i} - 2}{3^j} - \frac{q_0^* + 3p_1 + 4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\ &\geqslant \frac{(j+1)3^\tau \cdot 4 - 1}{3^j} - \frac{(3^{\tau+1} - 1) + 3(3^\tau - 1) + 4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\ &= 3^{\tau-j}(4j - 2) - 8 + \frac{23}{3^j} \geqslant 10 \end{aligned}$$

e

$$s_\tau \geqslant (\tau + 1)4 - 14 + \frac{23}{3^\tau} > 2.$$

E, para $\tau = 2$, se $m_2 \leqslant 1$ temos

$$\begin{aligned} s_1 &\geqslant 6 + \frac{(m_0^* + m_1^* - 6) - q_0^* - 3p_1 - 4}{3} \\ &\geqslant 6 + \frac{100 - 26 - 24 - 4}{3} > 21. \end{aligned}$$

Logo, podemos construir 2 elementos secundários no nível exatamente 2, pelo Lema 2.10 (ii).

1.2) Se esses elementos são de cor diferente de 0 então construimos 1 elemento secundário no nível exatamente 1 e cor 0 pela Proposição 2.21, uma vez que $t \geqslant 3^\tau + 1$. Assim, $m_0^* \geqslant 3^{\tau+1} \cdot 2 - 2$, $m_1^* \geqslant 6$, $q_1^* = 1$ e $q_0^* \geqslant 3^{\tau+1} - 3$. Analogamente ao caso 1.1, chegamos a $s_\tau \geqslant 2$ e $s_j \geqslant 4$ (para $2 \leqslant j \leqslant \tau - 1$ e $\tau \geqslant 3$), caindo no Lema 4.18.

caso 2: Suponha $m_1 \leqslant 4$, então $u(g_1) \leqslant 4$ e $m_0 \geqslant 3^\tau \cdot 8 - 3$. Temos

$$\frac{3^\tau \cdot 5 - 2}{3} \leqslant \frac{(3^\tau \cdot 8 - 3) - (3^{\tau+1} - 1)}{3} \leqslant t \leqslant m_0 + 4 - (3^\tau \cdot 4 + 1),$$

ou seja,

$$3^{\tau-1} \cdot 5 \leqslant t \leqslant m_0 - (3^\tau \cdot 4 - 3).$$

Como $\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) \geqslant m_0 - (3^{\tau+1} - 1) > m_0 - (3^\tau \cdot 4 - 3)$, existem elementos da cor 0 que não são da forma $\left\{{* \atop 9}\right\}$ (mod 9). E existem, pelo menos, $3^{\tau-1} \cdot 5$ elementos da cor 0 que são da forma $\left\{{* \atop 9}\right\}$ (mod 9). Pelas Proposições 2.22 e 2.21, podemos construir 2 elementos secundários no nível exatamente 1 cujas cores são: diferente de 0 e igual a 0, respectivamente. Assim, $m_0^* \geqslant 3^\tau \cdot 8 - 9$, $m_1^* \geqslant 2$, $q_1^* \geqslant 1$ e $q_0^* \geqslant 3^{\tau+1} - 3$.

De fato, inicialmente tínhamos $\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) \geqslant 3^\tau \cdot 5 - 2$ e $3^{\tau+1} - 3 \leqslant q_0 \leqslant 3^{\tau+1} - 1$. Após a construção dos elementos secundários no nível 1 ficamos com $\mathfrak{i}_0^*(\mathscr{M}_0) \geqslant 3^\tau \cdot 5 - 8 > q_0$ e as outras três cores ainda somam q_0.

Temos ainda

$$\begin{aligned} s_1 &\geqslant 2 + \frac{(m_0^* + m_1^* - 2) - q_0^* - 3p_1 - 4}{3} \\ &\geqslant 2 + \frac{3^\tau \cdot 8 - 5 - (3^{\tau+1} - 1) - 3(3^\tau - 1) - 4}{3} \\ &= 2 + 3^{\tau-1} \cdot 2 - \frac{5}{3} > 6 \end{aligned}$$

e, para $2 \leqslant j \leqslant \tau - 1$ e $\tau \geqslant 3$,

$$\begin{aligned} s_j &\geqslant \frac{1}{3^j}\sum_{i=0}^{j} m_{j-i}^* - \frac{q_0^* + 3p_1 + 4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{j} m_{j-i} - 4}{3^j} - \frac{q_0^* + 3p_1 + 4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\ &\geqslant \frac{(j+1)3^\tau \cdot 4 - 3}{3^j} - \frac{(3^{\tau+1} - 1) + 3(3^\tau - 1) + 4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\ &= 3^{\tau-j}(4j - 2) - 8 + \frac{7}{3^{j-1}} \geqslant 10. \end{aligned}$$

Se $\tau \geqslant 3$ então

$$s_\tau \geqslant (\tau + 1)4 - 14 + \frac{7}{3^{\tau-1}} \geqslant 2$$

e temos o Lema 4.18.

Se $\tau = 2$ então $p_1 \geqslant 8$. Temos $m_2 \geqslant 2$ ou $m_0 + m_1 \geqslant 108$ e

$$\begin{aligned} s_1 &\geqslant 2 + \frac{(m_0^* + m_1^* - 2) - q_0^* - 3p_1 - 4}{3} \\ &\geqslant 2 + \frac{(108 - 6) - 26 - 24 - 4}{3} = 18. \end{aligned}$$

Desses 18 elementos secundários, pelo menos 5 são da mesma cor, logo podemos produzir 1 elemento secundário no nível exatamente 2, pelo Lema 2.10 (ii). Se dos 15 elementos secundários restantes pelo menos 5 forem da mesma cor então produzimos mais um secundário no nível exatamente 2 e o resultado segue pelo Lema 4.18. Caso contrário, as quatro cores estão representadas (4+4+4+3). Formamos três conjuntos disjuntos com 4 secundários de pelo menos três cores distintas, de forma que sobre o elemento cuja cor tem menos representantes, e 2 primários no nível 1. Cada conjunto desse nos dá 1 elemento primário no nível 2 e deixa 1 secundário no nível 1. Formamos um conjunto com 4 secundários de pelo menos duas cores distintas e 2 primários no nível 1. Esse conjunto produz o quarto elemento primário no nível 2 pela Proposição 2.20. O resultado segue pelo Lema 2.7 (i). ∎

Lema 4.20. *Se $\tau \geqslant 3$, $q_0 \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 8 - 3$ e $3^\tau \cdot 4 + 1 \leqslant m_0 \leqslant 3^{\tau-2} \cdot 40 - 6$ então é possível construir um elemento primário no nível γ.*

Demonstração. Nessas condições temos

$$p_1 \geqslant \left\lfloor \frac{3^\tau \cdot 4 + 1}{5} \right\rfloor,$$

$$q_1 \geqslant 3^{\tau+1} \cdot 2 - 3^{\tau-2} \cdot 40 + 7 = 3^{\tau-2} \cdot 14 + 7,$$
$$m_1 \geqslant 3^\tau \cdot 8 - 3^{\tau-2} \cdot 40 + 7 = 3^{\tau-2} \cdot 32 + 7,$$
$$q_2 \geqslant 3^\tau \cdot 10 + 1 - 2(3^{\tau-2} \cdot 40 - 6) = 3^{\tau-2} \cdot 10 + 13,$$
$$m_2 \geqslant 3^{\tau+1} \cdot 4 + 1 - 2(3^{\tau-2} \cdot 40 - 6) = 3^{\tau-2} \cdot 28 + 13,$$
$$q_3 \geqslant 3^\tau \cdot 14 + 1 - 3(3^{\tau-2} \cdot 40 - 6) = 3^{\tau-1} \cdot 2 + 19$$

e

$$m_3 \geqslant 3^\tau \cdot 16 + 1 - 3(3^{\tau-2} \cdot 40 - 6) = 3^{\tau-1} \cdot 8 + 19.$$

Formamos $\left\lfloor \frac{3^\tau \cdot 4+1}{10} \right\rfloor$ conjuntos disjuntos com 4 secundários de pelo menos duas cores distintas e 2 primários no nível 1. Pela Proposição 2.20, cada conjunto desse nos dá 1 primário no nível 2. Assim, $p_2 \geqslant \left\lfloor \frac{3^\tau \cdot 4+1}{10} \right\rfloor$. Podemos formar $\left\lfloor \frac{3^\tau \cdot 4+1}{20} \right\rfloor$ conjuntos com 4 secundários de pelo menos duas cores distintas e 2 primários no nível 2. Pela Proposição 2.20, cada conjunto desse produz 1 primário no nível 3. Então $p_3 \geqslant \left\lfloor \frac{3^\tau \cdot 4+1}{20} \right\rfloor$. Formamos $\left\lfloor \frac{3^\tau \cdot 4+1}{40} \right\rfloor$ conjuntos disjuntos com 4 secundários de pelo menos duas cores distintas e 2 primários no nível 3. Pela Proposição 2.20, cada conjunto desse produz 1 primário no nível 4. Portanto,

$$p_4 \geqslant \left\lfloor \frac{3^\tau \cdot 4 + 1}{40} \right\rfloor \geqslant \frac{3^\tau \cdot 4 - 38}{40}.$$

Se $\tau = 3$ então $p_4 \geqslant 2$ e temos o resultado. Se $\tau \geqslant 4$ então aplicamos o Lema 2.7 (ii) sucessivamente, obtendo

$$p_j \geqslant \frac{3^{\tau-j+5}\frac{1}{10} + \frac{21}{20 \cdot 3^{j-5}} - 2 - 4}{3} = 3^{\tau-j+4}\frac{1}{10} + \frac{21}{20 \cdot 3^{j-4}} - 2.$$

Assim, $p_\gamma = p_{\tau+1} \geqslant 1$. ∎

Lema 4.21. *Se $q_0 \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 8 - 3$, $q_1 \geqslant 3^{\tau-2} + 1$ e*

$$m_0 \geqslant \begin{cases} 5(3^{\tau-2} \cdot 8 - 1), & se \quad \tau \geqslant 3 \\ 3^\tau \cdot 4 + 1, & se \quad \tau = 2 \end{cases}$$

então é possível construir um elemento primário no nível γ.

Demonstração. Temos que $p_1 \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 8 - 1$. Além disso,

$$\begin{aligned} s_1 &\geqslant \frac{(m_0 + m_1) - q_0 - 3p_1 - 4}{3} \\ &\geqslant \frac{(3^\tau \cdot 8 + 1) - (3^{\tau+1} - 4) - 3(3^{\tau-2} \cdot 8 - 1) - 4}{3} \\ &= 3^{\tau-2} \cdot 7 + \frac{4}{3} > 4(3^{\tau-2} + 1). \end{aligned}$$

para $2 \leqslant j \leqslant \tau - 1$ e $\tau \geqslant 3$:

$$\begin{aligned}
s_j &\geqslant \frac{\sum_{i=0}^{j} m_{j-i} - 4(3^{\tau-2}+1)}{3^j} - \frac{q_0 + 3p_1 + 4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\
&\geqslant \frac{(j+1)3^\tau \cdot 4 + 1 - 4(3^{\tau-2}+1)}{3^j} - \frac{(3^{\tau+1}-4) + 3(3^{\tau-2}\cdot 8 - 1) + 4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\
&= 3^{\tau-2-j}(36j - 19) - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} > 12,
\end{aligned}$$

$$s_\tau \geqslant (\tau+1)4 - \frac{55}{9} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-1}} \geqslant 1,8.$$

e, para $\tau = 2$:

$$\begin{aligned}
s_2 &\geqslant \frac{(m_0 + m_1 + m_2) - q_0 - 3p_1 - 4}{9} - \frac{16}{3} \\
&\geqslant \frac{109 - 23 - 21 - 4}{9} - \frac{48}{9} > 1,4.
\end{aligned}$$

(i) Suponha $\tau = 2$ então $p_1 \geqslant 7$, $s_1 \geqslant 8$ com $q_1 \geqslant 2$ e $s_2 \geqslant 2$. Pelo Lema 2.7 (ii), construimos 1 elemento primário no nível 2, restando 4 no nível 1. Formamos dois conjuntos disjuntos com 4 secundários de pelo menos duas cores distintas e 2 primários no nível 1. A Proposição 2.20 nos garante que cada conjunto desse produz 1 primário no nível 2. O resultado segue pelo Lema 2.16.

(ii) Suponha $\tau \geqslant 3$ então $p_1 \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 8 - 1$, $s_1 \geqslant 4(3^{\tau-2}+1)$ com $q_1 \geqslant 3^{\tau-2}+1$, $s_j \geqslant 4$ (para $2 \leqslant j \leqslant \tau - 1$) e $s_\tau \geqslant 2$.

Aplicamos o Lema 2.7 (ii) para produzir $3^{\tau-2} \cdot 2 - 1$ elementos primários no nível 2 nos restando $2(3^{\tau-2}+1)$ primários no nível 1. Formamos $(3^{\tau-2}+1)$ conjuntos disjuntos com 4 secundários de pelo menos duas cores distintas e 2 primários no nível 1. Pela Proposição 2.20, cada conjunto desse produz 1 primário no nível 2. Assim,

$$p_2 \geqslant \frac{(3^{\tau-2}\cdot 8 - 1) - 2(3^{\tau-2}+1)}{3} + (3^{\tau-2}+1) = 3^{\tau-1}.$$

Aplicamos o Lema 2.7 (ii) para produzir primários em um nível maior até que nos restem 6 primários no nível em questão. Formamos dois conjuntos disjuntos com 3 primários e 2 secundários. Cada conjunto desse nos dá 1 primário no nível maior, pelo Lema 2.16. Assim,

$$p_j \geqslant \frac{3^{\tau-j+2} - 6}{3} + 2 = 3^{\tau-j+1}$$

e temos $p_\tau \geqslant 3$. O resultado segue pelo Lema 2.16. ∎

Lema 4.22. *Se $q_0 \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 8 - 3$ e $q_1 \leqslant 3^{\tau-2}$ então é possível construir um elemento primário no nível γ.*

Demonstração. **caso 1:** Suponha $m_1 \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 2 + 1$. Como $q_1 \leqslant 3^{\tau-2}$, temos pelo menos $3^{\tau-2} + 1$ elementos da mesma cor no nível 1.

1.1) Se os $m_1 - 3^{\tau-2}$ elementos no nível 1 que tem as mesma cor são da cor 0 então $u(g_1) \leqslant 3^{\tau-2}$.

Para $\tau \geqslant 3$ e $3^{\tau-l-1} + 1 \leqslant q_1 \leqslant 3^{\tau-l}$ com $2 \leqslant l \leqslant \tau - 1$ temos

$$m_0 \geqslant 3^{\tau+1} \cdot 2 - 3^{\tau-l} + 1$$

e

$$\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) \geqslant 3^{\tau+1} \cdot 2 - 3^{\tau-l} + 1 - (3^{\tau+1} - 4) = 3^{\tau+1} - 3^{\tau-l} + 5.$$

Assim,

$$\frac{3^{\tau+1} - 3^{\tau-l} + 5}{3} \leqslant \frac{m_0 - q_0}{3} \leqslant t \leqslant m_0 + u(g_1) - \frac{n}{k} \leqslant m_0 + 3^{\tau-2} - (3^\tau \cdot 4 + 1),$$

ou seja,

$$3^\tau - 3^{\tau-l-1} + 2 \leqslant t \leqslant m_0 - (3^{\tau-2} \cdot 35 + 1).$$

Como $\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) \geqslant m_0 - (3^{\tau+1} - 4) > m_0 - (3^{\tau-2} \cdot 35 + 1)$, existem pelo menos $3^{\tau-2} \cdot 8 + 5$ variáveis da cor 0 que não são da forma $\left\{ {* \atop 9} \right\}$ (mod 9). E existem, pelo menos, $3^\tau - 3^{\tau-l-1} + 2$ elementos da cor 0 que são da forma $\left\{ {* \atop 9} \right\}$ (mod 9). Pela Proposição 2.22, podemos construir $3^{\tau-2} - 3^{\tau-l-1}$ elementos secundários no nível exatamente 1 que não tem cor 0. Assim,

$$m_0^* \geqslant 3^{\tau+1} \cdot 2 - 3^{\tau-l} + 1 - 3(3^{\tau-2} - 3^{\tau-l-1}) = 3^{\tau-1} \cdot 17 + 1,$$

$$m_1^* \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 2 + 1 + (3^{\tau-2} - 3^{\tau-l-1}) = 3^{\tau-1} - 3^{\tau-l-1} + 1,$$

$$q_1^* \geqslant 3^{\tau-2} + 1 \quad \text{e} \quad q_0^* \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 8 - 3.$$

Vamos verificar que $q_0^* \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 8 - 3$. De fato, inicialmente tínhamos $\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) \geqslant 3^{\tau+1} - 3^{\tau-l} + 5$ e $3^{\tau-1} \cdot 8 - 3 \leqslant q_0 \leqslant 3^{\tau+1} - 4$. Após a construção dos $3^{\tau-2} - 3^{\tau-l-1}$ elementos secundários no nível 1 ficamos com $\mathfrak{i}_0^*(\mathscr{M}_0) \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 8 + 5 > 3^{\tau-1} \cdot 8 - 3$ e as outras três cores ainda somam q_0.

Só precisamos mostrar que $s_1 \geqslant 4(3^{\tau-2} + 1)$, $s_j \geqslant 4$, para $2 \leqslant j \leqslant \tau - 1$, e $s_\tau \geqslant 2$ que o resultado seguirá como no Lema 4.21. De fato,

$$\begin{aligned}
s_1 &\geqslant m_1^* + \frac{m_0^* - q_0^* - 3p_1 - 4}{3} \\
&\geqslant 3^{\tau-1} - 3^{\tau-l-1} + 1 + \frac{(3^\tau \cdot 8 + 1 - 2(3^{\tau-2} - 3^{\tau-l-1}) - (3^{\tau-1} - 3^{\tau-l-1} + 1))}{3} \\
&\quad - \frac{(3^{\tau+1} - 4) + 3(3^{\tau-2} \cdot 8 - 1) + 4}{3} \\
&= 3^{\tau-3} \cdot 25 + 2 > 4(3^{\tau-2} + 1),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
s_j &\geqslant \frac{\sum_{i=0}^{j} m^*_{j-i} - 4(3^{\tau-2}+1)}{3^j} - \frac{q_0^* + 3p_1 + 4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\
&\geqslant \frac{\sum_{i=0}^{j} m_{j-i} - (3^{\tau-2}\cdot 5 - 3^{\tau-l}+1) - 4(3^{\tau-2}+1)}{3^j} \\
&\quad + \frac{3^{\tau-1} - 3^{\tau-l-1}+1}{3^{j-1}} - \frac{q_0^* + 3p_1 + 4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\
&\geqslant \frac{(j+1)3^\tau\cdot 4 + 1 - 3^\tau + 3^{\tau-l}}{3^j} + \frac{3^{\tau-1} - 3^{\tau-l-1}+1}{3^{j-1}} \\
&\quad - \frac{(3^{\tau+1}-4) + 3(3^{\tau-2}\cdot 8 - 1) + 4}{3^j} - 8 + \frac{19}{3^j} \\
&= 3^{\tau-1-j}(12j-5) - 8 + \frac{26}{3^j} \geqslant 11
\end{aligned}
$$

e

$$s_\tau \geqslant (\tau+1)4 - \frac{17}{3} - 8 + \frac{26}{3^\tau} > 2.$$

Para $\tau \geqslant 2$ e $0 \leqslant q_1 \leqslant 1$ temos $u(g_1) \leqslant 1$. Assim,

$$m_0 \geqslant 3^{\tau+1}\cdot 2,$$

$$\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) \geqslant 3^{\tau+1}\cdot 2 - (3^{\tau+1}-4) = 3^{\tau+1}+4$$

e

$$\frac{3^{\tau+1}+4}{3} \leqslant t \leqslant m_0 + 1 - (3^\tau\cdot 4 + 1),$$

ou seja,

$$3^\tau + 2 \leqslant t \leqslant m_0 - 3^\tau \cdot 4.$$

Temos $\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) \geqslant m_0 - (3^{\tau+1}-4) > m_0 - 3^\tau\cdot 4$. Então existem pelo menos $3^\tau+2$ elementos da cor 0 no nível 0 que são da forma $\left\{ {* \atop 9} \right\}$ e $3^\tau+4$ elementos da cor 0 no nível 0 que não são da forma $\left\{ {* \atop 9} \right\}$. Pela proposição 2.22, podemos construir $3^{\tau-2}+1$ elementos secundários no nível exatamente 1 e cor diferente de 0. Assim,

$$m_0^* \geqslant 3^{\tau+1}\cdot 2 - 3(3^{\tau-2}+1) = 3^{\tau-1}\cdot 17 - 3,$$

$$m_1^* \geqslant 3^{\tau-2}\cdot 2 + 1 + (3^{\tau-2}+1) = 3^{\tau-1}+2,$$

$$q_1 \geqslant 3^{\tau-2}+1 \ \text{ e } \ q_0^* \geqslant 3^{\tau-1}\cdot 8 - 3.$$

De fato, inicialmente tínhamos $\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) \geqslant 3^{\tau+1}+4$ e $3^{\tau-1}\cdot 8 - 3 \leqslant q_0 \leqslant 3^{\tau+1}-4$. Após a construção dos $3^{\tau-2}+1$ secundários ficamos com $\mathfrak{i}_0^*(\mathscr{M}_0) \geqslant 3^\tau\cdot 8 + 1 > 3^{\tau-1}\cdot 8 - 3$ e as outras três cores ainda somam q_0.

Só precisamos mostrar que $s_1 \geqslant 4(3^{\tau-2}+1)$, $s_j \geqslant 4$, para $2 \leqslant j \leqslant \tau-1$, e $s_\tau \geqslant 2$ que o resultado seguirá como no Lema 4.21. De fato,

$$\begin{aligned}
s_1 &\geqslant m_1^* + \frac{m_0^* - q_0^* - 3p_1 - 4}{3} \\
&\geqslant 3^{\tau-1} + 2 + \frac{3^\tau \cdot 8 + 1 - 2(3^{\tau-2}+1) - (3^{\tau-1}+2)}{3} \\
&\quad - \frac{(3^{\tau+1} - 4) + 3(3^{\tau-2} \cdot 8 - 1) + 4}{3} \\
&= 3^{\tau-3} \cdot 25 + 2 > 4(3^{\tau-2}+1)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
s_j &\geqslant \frac{\sum_{i=0}^{j} m_{j-i}^* - 4(3^{\tau-2}+1)}{3^j} - \frac{q_0^* + 3p_1 + 4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\
&\geqslant \frac{\sum_{i=0}^{j} m_{j-i} - (3^{\tau-2} \cdot 5 + 4) - 4(3^{\tau-2}+1)}{3^j} + \frac{3^{\tau-1}+2}{3^{j-1}} \\
&\quad - \frac{q_0^* + 3p_1 + 4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\
&\geqslant \frac{(j+1)3^\tau \cdot 4 + 1 - 3^\tau}{3^j} + \frac{3^{\tau-1}+2}{3^{j-1}} \\
&\quad - \frac{(3^{\tau+1} - 4) + 3(3^{\tau-2} \cdot 8 - 1) + 4}{3^j} - 8 + \frac{16}{3^j} \\
&= 3^{\tau-1-j}(12j - 5) - 8 + \frac{26}{3^j} \geqslant 11.
\end{aligned}$$

Se $\tau \geqslant 3$, então

$$s_\tau \geqslant (\tau+1)4 - \frac{17}{3} - 8 + \frac{26}{3^\tau} > 2.$$

E para $\tau = 2$, se $m_2 \leqslant 1$ então

$$\begin{aligned}
s_1 &\geqslant 5 + \frac{(m_0^* + m_1^* - 5) - q_0 - 3p_1 - 4}{3} \\
&\geqslant 5 + \frac{(109 - 10) - 23 - 21 - 4}{3} = 22.
\end{aligned}$$

Logo podemos construir 2 secundários no nível exatamente 2 pelo Lema 2.10 (ii), nos restando 16 secundários no nível 1 com $q_1^* \geqslant 2$.

1.2) Se os $m_1 - 3^{\tau-2}$ elementos no nível 1 que têm a mesma cor são de cor diferente de 0 então:

Para $\tau \geqslant 3$ e $3^{\tau-l-1} + 1 \leqslant q_1 \leqslant 3^{\tau-l}$ com $2 \leqslant l \leqslant \tau - 1$ temos $t \geqslant 3^\tau - 3^{\tau-l-1} + 1$. Pela Proposição 2.21 podemos construir $3^{\tau-2} - 3^{\tau-l-1}$ elementos secundários no nível exatamente 1 e cor 0. Analogamente ao caso 1.1, chegamos a $q_0^* \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 8 - 3$, $q_1^* \geqslant 3^{\tau-2} + 1$, $s_1 \geqslant 4(3^{\tau-2}+1)$, $s_\tau \geqslant 2$ e $s_j \geqslant 4$ (para $2 \leqslant j \leqslant \tau - 1$), caindo no Lema 4.21.

Para $\tau \geqslant 2$ e $0 \leqslant q_1 \leqslant 1$ temos $t \geqslant 3^\tau + 2$. Pela Proposição 2.21, podemos construir $3^{\tau-2} + 1$ elementos secundários de cor 0 e nível exatamente 1. Analogamente ao caso 1.1, o resultado segue pelo Lema 4.21.

caso 2: Suponha $m_1 \leqslant 3^{\tau-2} \cdot 2$, então $u(g_1) \leqslant 3^{\tau-2} \cdot 2$,

$$m_0 \geqslant 3^\tau \cdot 8 - 3^{\tau-2} \cdot 2 + 1 = 3^{\tau-2} \cdot 70 + 1$$

e

$$\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 70 + 1 - (3^{\tau+1} - 4) = 3^{\tau-2} \cdot 43 + 5.$$

Desta maneira,

$$\frac{3^{\tau-2} \cdot 43 + 5}{3} \leqslant t \leqslant m_0 + 3^{\tau-2} \cdot 2 - (3^\tau \cdot 4 + 1),$$

ou seja,

$$3^{\tau-3} \cdot 43 + \beta \leqslant t \leqslant m_0 - (3^{\tau-2} \cdot 34 + 1),$$

com $\beta = 1$, se $\tau = 2$, e $\beta = 2$ caso contrário. Como $\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) \geqslant m_0 - (3^{\tau+1} - 4) > m_0 - (3^{\tau-2} \cdot 34 + 1)$, existem pelo menos $3^{\tau-2} \cdot 7 + 4$ elementos da cor 0 que não são da forma $\left\{ {* \atop 9} \right\}$ (mod 9). E existem, pelo menos, $3^{\tau-3} \cdot 43 + 1$ elementos da cor 0 que são da forma $\left\{ {* \atop 9} \right\}$ (mod 9). Pelas Proposições 2.21 e 2.22, podemos construir $3^{\tau-2} + 1$ elementos secundários no nível exatamente 1 e cor 0 e outros $3^{\tau-2} + 1$ secundários no nível exatamente 1 e cor diferente de 0, respectivamente. Assim,

$$m_0^* \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 70 + 1 - 6(3^{\tau-2} + 1) = 3^{\tau-2} \cdot 64 - 5,$$

$$m_1^* \geqslant 2(3^{\tau-2} + 1),$$

$$q_1^* \geqslant 3^{\tau-2} + 1 \quad \text{e} \quad q_0^* \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 8 - 3.$$

De fato, inicialmente tínhamos $\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 43 + 5$ e $3^{\tau-1} \cdot 8 - 3 \leqslant q_0 \leqslant 3^{\tau+1} - 4$. Após a construção dos secundários no nível 1 ficamos com $\mathfrak{i}_0^*(\mathscr{M}_0) \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 37 - 1 > q_0$ e as outras três cores ainda somam q_0.

Temos ainda

$$\begin{aligned} s_1 &\geqslant 2(3^{\tau-2} + 1) + \frac{m_0^* + m_1^* - 2(3^{\tau-2} + 1) - q_0^* - 3p_1 - 4}{3} \\ &\geqslant 3^{\tau-2} \cdot 2 + 2 + \frac{3^\tau \cdot 8 + 1 - 6(3^{\tau-2} + 1) - (3^{\tau+1} - 4) - 3(3^{\tau-2} \cdot 8 - 1) - 4}{3} \\ &= 3^{\tau-2} \cdot 2 + 3^{\tau-2} \cdot 5 + \frac{4}{3} > 4(3^{\tau-2} + 1) \end{aligned}$$

e, para $2 \leqslant j \leqslant \tau - 1$ e $\tau \geqslant 3$,

$$\begin{aligned} s_j &\geqslant \frac{\sum_{i=0}^{j} m_{j-i}^* - 6(3^{\tau-2} + 1)}{3^j} + \frac{2(3^{\tau-2} + 1)}{3^{j-1}} - \frac{q_0^* + 3p_1 + 4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\ &\geqslant \frac{\sum_{i=0}^{j} m_{j-i} - 10(3^{\tau-2} + 1)}{3^j} + \frac{6(3^{\tau-2} + 1)}{3^j} - \frac{q_0^* + 3p_1 + 4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\ &\geqslant \frac{(j+1)3^\tau \cdot 4 + 1 - 4(3^{\tau-2} + 1)}{3^j} - \frac{(3^{\tau+1} - 4) + 3(3^{\tau-2} \cdot 8 - 1) + 4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\ &= 3^{\tau-2-j}(36j - 19) - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} > 11. \end{aligned}$$

Se $\tau \geqslant 3$ então
$$s_\tau \geqslant (\tau+1)4 - \frac{55}{9} - 8 + \frac{20}{3^\tau} > 2$$
e temos o Lema 4.21.

Se $\tau = 2$ então $m_2 \geqslant 2$ ou $m_0^* + m_1^* \geqslant 100$ e
$$\begin{aligned} s_1 &\geqslant 4 + \frac{(m_0^* + m_1^* - 4) - q_0^* - 3p_1 - 4}{3} \\ &\geqslant 4 + \frac{96 - 23 - 21 - 4}{3} = 20. \end{aligned}$$
Podemos construir 2 elementos secundários no nível exatamente 2 pelo Lema 2.10 (ii) e ainda nos restam 14 secundários no nível 1. ■

Lema 4.23. *Se* $q_0 \geqslant \begin{cases} 3^{\tau-1} \cdot 7 - 3, & se \quad \tau \geqslant 3 \\ 19, se & \tau = 2 \end{cases}$ *e* $q_1 \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 2 + 1$ *então é possível construir um elemento primário no nível* γ.

Demonstração. Temos que $m_1 \geqslant 3^{\tau-3} \cdot 8 + 1$ e $p_1 \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 7 - 1$. Além disso,
$$\begin{aligned} s_1 &\geqslant (3^{\tau-3} \cdot 8 + 1) + \frac{(m_0 + m_1 - 3^{\tau-3} \cdot 8 - 1) - q_0 - 3p_1 - 4}{3} \\ &\geqslant (3^{\tau-3} \cdot 8 + 1) + \frac{(3^\tau \cdot 8 + 1 - 3^{\tau-3} \cdot 8 - 1) - (3^{\tau-1} \cdot 8 - 4) - 3(3^{\tau-2} \cdot 7 - 1) - 4}{3} \\ &= 3^{\tau-4} \cdot 97 + 2 > 4(3^{\tau-2} \cdot 2 + 1), \end{aligned}$$
para $2 \leqslant j \leqslant \tau - 1$ e $\tau \geqslant 3$:
$$\begin{aligned} s_j &\geqslant \frac{\sum_{i=0}^{j} m_{j-i} - 4(3^{\tau-2} \cdot 2 + 1)}{3^j} - \frac{q_0 + 3p_1 + 4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\ &\geqslant \frac{(j+1)3^\tau \cdot 4 + 1 - 4(3^{\tau-2} \cdot 2 + 1)}{3^j} - \frac{(3^{\tau-1} \cdot 8 - 4) + 3(3^{\tau-2} \cdot 7 - 1) + 4}{3^j} \\ &\quad -8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\ &= 3^{\tau-2-j}(36j - 17) - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \geqslant 13, \end{aligned}$$
$$s_\tau \geqslant (\tau+1)4 - \frac{53}{9} - 8 + \frac{8}{3^{\tau-1}} > 2$$
e, para $\tau = 2$:
$$\begin{aligned} s_2 &\geqslant \frac{(m_0 + m_1 + m_2) - q_0 - 3p_1 - 4}{9} - \frac{16}{3} \\ &\geqslant \frac{109 - 20 - 18 - 4}{9} - \frac{48}{9} > 2. \end{aligned}$$

(i) Se $\tau = 2$ então $p_1 \geqslant 6$, $s_1 \geqslant 12$ com $q_1 \geqslant 3$ e $s_2 \geqslant 2$. Formamos três conjuntos disjuntos com 4 secundários de pelo menos duas cores distintas e 2 primários no nível 1. Cada conjunto desse nos dá 1 primário no nível 2 pela Proposição 2.20. O resultado segue pelo Lema 2.16.

(ii) Suponha $\tau \geqslant 3$ então $p_1 \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 7 - 1$, $s_1 \geqslant 4(3^{\tau-2} \cdot 2 + 1)$ com $q_1 \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 2 + 1$, $s_j \geqslant 4$, para $2 \leqslant j \leqslant \tau - 1$, e $s_\tau \geqslant 2$.

Aplicamos o Lema 2.7 (ii) para produzir $3^{\tau-2} - 1$ elementos primários no nível 2, nos restando $2(3^{\tau-2} \cdot 2 + 1)$ primários no nível 1. Formamos $3^{\tau-2} \cdot 2 + 1$ conjuntos disjuntos com 4 secundários de pelo menos duas cores distintas e 2 primários no nível 1. Pela Proposição 2.20, cada conjunto desse produz 1 primário no nível 2. Assim,

$$p_2 \geqslant \frac{3^{\tau-2} \cdot 7 - 1 - 2(3^{\tau-2} \cdot 2 + 1)}{3} + (3^{\tau-2} \cdot 2 + 1) = 3^{\tau-1}.$$

Aplicamos o Lema 2.7 (ii) para produzir elementos primários no nível maior até que nos restem 6 primários no nível em questão. Formamos dois conjuntos disjuntos com 3 primários e 2 secundários. Cada conjunto desse produz 1 primário em um nível maior pelo Lema 2.16. Assim,

$$p_j \geqslant \frac{3^{\tau-j+2} - 6}{3} + 2 = 3^{\tau-j+1}$$

e temos $p_\tau \geqslant 3$. O resultado segue pelo Lema 2.16. ∎

Lema 4.24. *Se* $q_0 \geqslant \begin{cases} 3^{\tau-1} \cdot 7 - 3, & se \quad \tau \geqslant 3 \\ 19, se & \tau = 2 \end{cases}$ *e* $q_1 \leqslant 3^{\tau-2} \cdot 2$ *então é possível construir um elemento primário no nível* γ.

Demonstração. Nessas condições temos

$$m_0 \geqslant 3^{\tau+1} \cdot 2 + 1 - 3^{\tau-2} \cdot 2 = 3^{\tau-2} \cdot 52 + 1$$

e

$$p_1 \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 7 - 1.$$

caso 1: Suponha $m_1 \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 4 + 1$. Como $q_1 \leqslant 3^{\tau-2} \cdot 2$, temos pelo menos $3^{\tau-2} \cdot 2 + 1$ elementos da mesma cor no nível 1.

1.1) Se os $m_1 - 3^{\tau-2} \cdot 2$ elementos no nível 1 que tem as mesma cor são da cor 0 então $u(g_1) \leqslant 3^{\tau-2} \cdot 2$ e

$$\frac{3^{\tau-2} \cdot 28 + 5}{3} = \frac{(3^{\tau-2} \cdot 52 + 1) - (3^{\tau-1} \cdot 8 - 4)}{3} \leqslant t \leqslant m_0 + 3^{\tau-2} \cdot 2 - (3^\tau \cdot 4 + 1),$$

ou seja,

$$3^{\tau-3} \cdot 28 + \beta \leqslant t \leqslant m_0 - (3^{\tau-2} \cdot 34 + 1),$$

com $\beta = 1$, se $\tau = 2$, e $\beta = 2$ caso contrário. Como $\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) \geqslant m_0 - (3^{\tau-1} \cdot 8 - 4) > m_0 - (3^{\tau-2} \cdot 34 + 1)$, existem pelo menos $3^{\tau-2} \cdot 10 + 5$ elementos da cor 0 que não são da forma $\left\{ {* \atop 9} \right\}$ (mod 9). E existem, pelo menos, $3^{\tau-3} \cdot 28 + 1$ elementos da cor 0 que são da forma $\left\{ {* \atop 9} \right\}$ (mod 9). Pela Proposição 2.22, podemos construir $3^{\tau-2} \cdot 2 + 1$ elementos secundários no nível exatamente 1 que não tem cor 0. Assim,

$$m_0^* \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 52 + 1 - 3(3^{\tau-2} \cdot 2 + 1) = 3^{\tau-2} \cdot 46 - 2,$$

$$m_1^* \geqslant 3^{\tau-2}\cdot 4+1+(3^{\tau-2}\cdot 2+1)=3^{\tau-1}\cdot 2+2,$$

$$q_1^* \geqslant 3^{\tau-2}\cdot 2+1 \quad \text{e} \quad q_0^* \geqslant \begin{cases} 3^{\tau-1}\cdot 7-3, & \text{se} \quad \tau\geqslant 3 \\ 19, & \text{se} \quad \tau=2 \end{cases}.$$

Vamos verificar o limite inferior de q_0^*. Inicialmente tínhamos $\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0)\geqslant 3^{\tau-2}\cdot 28+5$ e $3^{\tau-1}\cdot 7-3\leqslant q_0\leqslant 3^{\tau-1}\cdot 8-4$. Após a construção dos $3^{\tau-2}\cdot 2+1$ elementos secundários no nível 1 ficamos com $\mathfrak{i}_0^*(\mathscr{M}_0)\geqslant 3^{\tau-2}\cdot 22+2\geqslant q_0$ e as outras três cores ainda somam q_0.

Basta mostrar que $s_1\geqslant 4(3^{\tau-2}\cdot 2+1)$, $s_j\geqslant 4$, para $2\leqslant j\leqslant \tau-1$, e $s_\tau\geqslant 2$ para o resultado seguir como no Lema 4.23. De fato,

$$\begin{aligned} s_1 &\geqslant m_1^*+\frac{m_0^*-q_0^*-3p_1-4}{3} \\ &\geqslant 3^{\tau-1}\cdot 2+2+\frac{(3^\tau\cdot 8+1-2(3^{\tau-2}\cdot 2+1)-(3^{\tau-1}\cdot 2+2))}{3} \\ &\quad -\frac{(3^{\tau-1}\cdot 8-4)+3(3^{\tau-2}\cdot 7-1)+4}{3} \\ &= 3^{\tau-3}\cdot 35+2>4(3^{\tau-2}\cdot 2+1) \end{aligned}$$

e, para $\tau\geqslant 3$ e $2\leqslant j\leqslant \tau-1$,

$$\begin{aligned} s_j &\geqslant \frac{\sum_{i=0}^{j} m_{j-i}^*-4(3^{\tau-2}\cdot 2+1)}{3^j}-\frac{q_0^*+3p_1+4}{3^j}-8+\frac{8}{3^{j-1}} \\ &\geqslant \frac{\sum_{i=0}^{j} m_{j-i}-6(3^{\tau-2}\cdot 2+1)}{3^j}-\frac{q_0^*+3p_1+4}{3^j}-8+\frac{8}{3^{j-1}} \\ &\geqslant \frac{(j+1)3^\tau\cdot 4+1-3^{\tau-1}\cdot 4-6}{3^j} \\ &\quad -\frac{(3^{\tau-1}\cdot 8-4)+3(3^{\tau-2}\cdot 7-1)+4}{3^j}-8+\frac{8}{3^{j-1}} \\ &= 3^{\tau-1-j}(12j-7)-8+\frac{22}{3^j}>9. \end{aligned}$$

Se $\tau\geqslant 3$ então

$$s_\tau\geqslant(\tau+1)4-\frac{19}{3}-8+\frac{22}{3^\tau}>2.$$

E para $\tau=2$, se $m_2\leqslant 1$ então

$$\begin{aligned} s_1 &\geqslant 8+\frac{(m_0^*+m_1^*-8)-q_0-3p_1-4}{3} \\ &\geqslant 8+\frac{(108-14)-20-18-4}{3}>25. \end{aligned}$$

Então podemos construir 2 elementos secundários no nível exatamente 2 pelo Lema 2.10 (ii), nos restando 20 secundários no nível 1 com $q_1^*\geqslant 3$.

1.2) Se os $m_1-3^{\tau-2}\cdot 2$ elementos no nível 1 que têm a mesma cor são de cor diferente de 0, ainda temos $t\geqslant 3^{\tau-3}\cdot 28+1$. Então, pela Proposição 2.21, podemos construir $3^{\tau-2}\cdot 2+1$ secundários de cor 0 e nível exatamente 1. O resultado segue análogo ao caso 1.1.

caso 2: Suponha $m_1 \leqslant 3^{\tau-2} \cdot 4$, então $u(g_1) \leqslant 3^{\tau-2} \cdot 4$,

$$m_0 \geqslant 3^\tau \cdot 8 - 3^{\tau-2} \cdot 4 + 1 = 3^{\tau-2} \cdot 68 + 1$$

e

$$\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 68 + 1 - (3^{\tau-1} \cdot 8 - 4) = 3^{\tau-2} \cdot 44 + 5.$$

Logo,

$$\frac{3^{\tau-2} \cdot 44 + 5}{3} \leqslant t \leqslant m_0 + 3^{\tau-2} \cdot 4 - (3^\tau \cdot 4 + 1),$$

ou seja,

$$3^{\tau-3} \cdot 44 + 2 \leqslant t \leqslant m_0 - (3^{\tau-2} \cdot 32 + 1).$$

Como $\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) \geqslant m_0 - (3^{\tau-1} \cdot 8 - 4) > m_0 - (3^{\tau-2} \cdot 34 + 1)$, existem pelo menos $3^{\tau-2} \cdot 8 + 5$ elementos da cor 0 no nível 0 que não são da forma $\left\{ {* \atop 9} \right\}$ (mod 9). E existem, pelo menos, $3^{\tau-3} \cdot 44 + 2$ elementos da cor 0 no nível 0 que são da forma $\left\{ {* \atop 9} \right\}$ (mod 9). Pelas Proposições 2.21 e 2.22, podemos construir $3^{\tau-2} \cdot 2 + 1$ elementos secundários no nível exatamente 1 e cor 0 e outros $3^{\tau-2} \cdot 2 + 1$ secundários no nível exatamente 1 e cor diferente de 0, respectivamente. Assim,

$$m_0^* \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 68 + 1 - 6(3^{\tau-2} \cdot 2 + 1) = 3^{\tau-2} \cdot 56 - 5,$$

$$m_1^* \geqslant 2(3^{\tau-2} \cdot 2 + 1),$$

$$q_1^* \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 2 + 1 \quad \text{e} \quad q_0^* \geqslant \begin{cases} 3^{\tau-1} \cdot 7 - 3, & \text{se} \quad \tau \geqslant 3 \\ 19, & \text{se} \quad \tau = 2 \end{cases}.$$

De fato, inicialmente tínhamos $\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 44 + 5$ e $3^{\tau-1} \cdot 7 - 3 \leqslant q_0 \leqslant 3^{\tau-1} \cdot 8 - 4$. Após a construção dos secundários no nível 1 ficamos com $\mathfrak{i}_0^*(\mathscr{M}_0) \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 32 - 1 > q_0$ e as outras três cores ainda somam q_0.

Para $\tau \geqslant 3$, basta mostrarmos que $s_1 \geqslant 4(3^{\tau-2} \cdot 2 + 1)$, $s_j \geqslant 4$ $(2 \leqslant j \leqslant \tau - 1)$ e $s_\tau \geqslant 2$. De fato,

$$\begin{aligned} s_1 &\geqslant 2(3^{\tau-2} \cdot 2 + 1) + \frac{m_0^* + m_1^* - 2(3^{\tau-2} \cdot 2 + 1) - q_0^* - 3p_1 - 4}{3} \\ &\geqslant 3^{\tau-2} \cdot 4 + 2 + \frac{3^\tau \cdot 8 + 1 - 6(3^{\tau-2} \cdot 2 + 1) - (3^{\tau-1} \cdot 8 - 4) - 3(3^{\tau-2} \cdot 7 - 1) - 4}{3} \\ &= 3^{\tau-2} \cdot 4 + 2 + 3^{\tau-2} \cdot 5 - \frac{2}{3} > 4(3^{\tau-2} + 1), \end{aligned}$$

para $2 \leqslant j \leqslant \tau - 1$,

$$\begin{aligned} s_j &\geqslant \frac{\sum_{i=0}^{j} m_{j-i}^* - 4(3^{\tau-2} \cdot 2 + 1)}{3^j} - \frac{q_0^* + 3p_1 + 4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\ &\geqslant \frac{\sum_{i=0}^{j} m_{j-i} - 8(3^{\tau-2} \cdot 2 + 1)}{3^j} - \frac{q_0^* + 3p_1 + 4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\ &\geqslant \frac{(j+1)3^\tau \cdot 4 + 1 - 8(3^{\tau-2} \cdot 2 + 1)}{3^j} - \frac{(3^{\tau-1} \cdot 8 - 4) + 3(3^{\tau-2} \cdot 7 - 1) + 4}{3^j} \\ &\quad -8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\ &= 3^{\tau-2-j}(36j - 25) - 8 + \frac{20}{3^j} > 9 \end{aligned}$$

e

$$s_\tau \geqslant (\tau+1)4 - \frac{61}{9} - 8 + \frac{20}{3^\tau} \geqslant 1,2.$$

Se $\tau = 2$ e $q_2 \geqslant 1$, então $p_1 \geqslant 6$ e $m_2 \geqslant 2$. Se $m_2 \geqslant 4$, então construimos 2 elementos primários no nível 2 a partir dos primários no nível 1 e 4 secundários no nível 1 (pois $s_1 \geqslant 8$, como vimos acima), pelo Lema 2.16. O resultado segue pela Proposição 2.20. Caso contrário, $2 \leqslant m_2 \leqslant 3$, temos $m_0 + m_1 \geqslant 109 - 3 = 106$ e, consequentemente,

$$s_1 \geqslant \frac{106 - 20 - 18 - 4}{3} > 21.$$

Podemos construir 2 secundários de nível exatamente 2 nos restando 16 no nível 1. Caímos no caso anterior.

Agora, vamos supor $\tau = 2$, $q_1 \leqslant 2$ e $q_2 = 0$. Após as construções de secundários de cores distintas feitas acima, temos $m_0^* + m_1^* \geqslant 91 - 12 = 79$,

$$\begin{aligned} s_1 &\geqslant 6 + \frac{(m_0^* + m_1^* - 6) - q_0^* - 3p_1 - 4}{3} \\ &\geqslant 6 + \frac{73 - 20 - 18 - 4}{3} > 16. \end{aligned}$$

E, caso $m_2 \leqslant 1$, $m_0^* + m_1^* \geqslant 108 - 12 = 96$ e

$$s_1 \geqslant 6 + \frac{90 - 20 - 18 - 4}{3} = 22.$$

Podemos construir 2 elementos secundários no nível exatamente 2 pelo Lema 2.10 (ii) e ainda nos restam 16 secundários no nível 1. Logo, temos o Lema 4.23. ■

Quando $\tau = 2$, os casos a serem analisados terminam com esse último lema, pois o menor valor para q_0 é $3^2 \cdot 2 + 1 = 19$, segundo o Lema 1.2, e já foi considerado nos últimos dois lemas. A partir daqui temos $\tau \geqslant 3$.

Lema 4.25. *Se $\tau \geqslant 3$, $q_0 \geqslant 3^\tau \cdot 2 + 1$ e $q_1 \geqslant 3^{\tau-1}$ então é possível construir um elemento primário no nível γ.*

Demonstração. Temos que $m_1 \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 4$, $p_1 \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 2$ e

$$\begin{aligned} s_1 &\geqslant (3^{\tau-2} \cdot 4) + \frac{(m_0 + m_1 - 3^{\tau-2} \cdot 4) - q_0 - 3p_1 - 4}{3} \\ &\geqslant (3^{\tau-2} \cdot 4) + \frac{(3^\tau \cdot 8 + 1 - 3^{\tau-2} \cdot 4) - (3^{\tau-1} \cdot 7 - 4) - 3(3^{\tau-1} \cdot 2) - 4}{3} \\ &= 3^{\tau-3} \cdot 41 + \frac{1}{3} > 4 \cdot 3^{\tau-1}, \end{aligned}$$

para $2 \leqslant j \leqslant \tau - 1$:

$$\begin{aligned} s_j &\geqslant \frac{\sum_{i=0}^{j} m_{j-i} - 4 \cdot 3^{\tau-1}}{3^j} - \frac{q_0 + 3p_1 + 4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\ &\geqslant \frac{(j+1)3^\tau \cdot 4 + 1 - 4 \cdot 3^{\tau-1}}{3^j} - \frac{(3^{\tau-1} \cdot 7 - 4) + 3(3^{\tau-1} \cdot 2) + 4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\ &= 3^{\tau-1-j}(12j - 5) - 8 + \frac{25}{3^j} \geqslant 13 \end{aligned}$$

e

$$s_\tau \geqslant (\tau+1)4 - \frac{17}{3} - 8 + \frac{25}{3^\tau} > 2.$$

Formamos $3^{\tau-1}$ conjuntos disjuntos com 4 secundários de pelo menos duas cores distintas e 2 primários no nível 1. Pela Proposição 2.20, cada conjunto desse produz 1 primário no nível 2. Assim, $p_2 \geqslant 3^{\tau-1}$. Como $s_j \geqslant 4$, para $2 \leqslant j \leqslant \tau - 1$, e $s_\tau \geqslant 2$, procedemos analogamente à demonstração do Lema 4.23 caso (ii). ■

Lema 4.26. *Se $\tau \geqslant 3$, $q_0 \geqslant 3^\tau \cdot 2 + 1$ e $q_2 \geqslant 3^{\tau-2}$ então é possível construir um elemento primário no nível γ.*

Demonstração. Temos que $p_1 \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 2$ e

$$\begin{aligned} s_1 &\geqslant \frac{(m_0+m_1) - q_0 - 3p_1 - 4}{3} \\ &\geqslant \frac{(3^\tau \cdot 8 + 1) - (3^{\tau-1}\cdot 7 - 4) - 3(3^{\tau-1}\cdot 2) - 4}{3} \\ &= 3^{\tau-2}\cdot 11 + \frac{1}{3} > 33. \end{aligned}$$

Aplicamos o Lema 2.7 (ii) para produzir $3^{\tau-2} \cdot 2 - 2$ elementos primários no nível 2, nos restando 6 no nível 1. Formamos dois conjuntos disjuntos com 3 primários e 2 secundários no nível 1. Pelo Lema 2.16, cada conjunto desse produz 1 primário no nível 2. Assim,

$$p_2 \geqslant \frac{3^{\tau-1}\cdot 2 - 6}{3} + 2 = 3^{\tau-2} \cdot 2.$$

Temos também $m_2 \geqslant 3^{\tau-3} \cdot 4$ e

$$\begin{aligned} s_2 &\geqslant 3^{\tau-3}\cdot 4 + \frac{\sum_{i=0}^{2} m_{2-i} - 3^{\tau-3}\cdot 4}{3^2} - \frac{q_0 + 3p_1 + 4}{3^2} - \frac{16}{3} \\ &\geqslant 3^{\tau-3}\cdot 4 + \frac{3^{\tau+1}\cdot 4 + 1 - 3^{\tau-3}\cdot 4}{9} - \frac{(3^{\tau-1}\cdot 7 - 4) + 3(3^{\tau-1}\cdot 2) + 4}{9} - \frac{16}{3} \\ &= 3^{\tau-4}\cdot 53 - 5 - \frac{2}{9} > 3^{\tau-2}\cdot 4. \end{aligned}$$

Formamos $3^{\tau-2}$ conjuntos disjuntos com 4 secundários de pelo menos duas cores distintas e 2 primários no nível 2. Pela Proposição 2.20, cada conjunto desse nos dá 1 primário no nível 3. Assim, $p_3 \geqslant 3^{\tau-2}$.

Vamos mostrar que $s_j \geqslant 4$, para $3 \leqslant j \leqslant \tau - 1$ e $\tau \geqslant 4$, e $s_\tau \geqslant 2$. Daí o resultado segue análogo à demonstração do Lema 4.23 caso (ii). De fato, para $3 \leqslant j \leqslant \tau - 1$ e $\tau \geqslant 4$ temos

$$\begin{aligned} s_j &\geqslant \frac{\sum_{i=0}^{j} m_{j-i} - 4\cdot 3^{\tau-2}}{3^j} - \frac{q_0 + 3p_1 + 4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\ &\geqslant \frac{(j+1)3^\tau\cdot 4 + 1 - 4\cdot 3^{\tau-2}}{3^j} - \frac{(3^{\tau-1}\cdot 7 - 4) + 3(3^{\tau-1}\cdot 2) + 4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\ &= 3^{\tau-2-j}(36j - 7) - 8 + \frac{25}{3^j} > 25 \end{aligned}$$

e

$$s_\tau \geqslant (\tau+1)4 - \frac{43}{9} - 8 + \frac{25}{3^\tau} > 3.$$

■

Lema 4.27. *Se $\tau \geqslant 3$, $q_0 \geqslant 3^\tau \cdot 2 + 1$, $q_1 \leqslant 3^{\tau-1} - 1$ e $q_2 \leqslant 3^{\tau-2} - 1$ então é possível construir um elemento primário no nível γ.*

Demonstração. Nessas condições, temos $p_1 \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 2$,

$$m_0 \geqslant 3^{\tau+1} \cdot 2 + 1 - (3^{\tau-1} - 1) = 3^{\tau-1} \cdot 17 + 2$$

e

$$m_0 + m_1 \geqslant 3^\tau \cdot 10 + 1 - (3^{\tau-2} - 1) = 3^{\tau-2} \cdot 89 + 2.$$

caso 1: Suponha $m_1 \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 2 - 1$. Como $q_1 \leqslant 3^{\tau-1} - 1$, temos pelo menos $3^{\tau-1}$ elementos da mesma cor no nível 1.

1.1) Se os $m_1 - 3^{\tau-1} + 1$ elementos no nível 1 que tem as mesma cor são da cor 0 então $u(g_1) \leqslant 3^{\tau-1} - 1$ e

$$\frac{3^{\tau-1} \cdot 10 + 6}{3} = \frac{(3^{\tau-1} \cdot 17 + 2) - (3^{\tau-1} \cdot 7 - 4)}{3} \leqslant t \leqslant m_0 + 3^{\tau-1} - 1 - (3^\tau \cdot 4 + 1),$$

ou seja,

$$3^{\tau-2} \cdot 10 + 2 \leqslant t \leqslant m_0 - (3^{\tau-1} \cdot 11 + 2).$$

Como $\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) \geqslant m_0 - (3^{\tau-1} \cdot 7 - 4) > m_0 - (3^{\tau-1} \cdot 11 + 2)$, existem pelo menos $3^{\tau-1} \cdot 4 + 6$ elementos da cor 0 que não são da forma $\left\{ {* \atop 9} \right\}$ (mod 9). E existem, pelo menos, $3^{\tau-2} \cdot 10 + 2$ elementos da cor 0 que são da forma $\left\{ {* \atop 9} \right\}$ (mod 9). Pela Proposição 2.22, podemos construir $3^{\tau-1}$ elementos secundários no nível exatamente 1 que não tem cor 0. Assim,

$$m_0^* \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 17 + 2 - 3(3^{\tau-1}) = 3^{\tau-1} \cdot 14 + 2,$$

$$m_1^* \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 2 - 1 + 3^{\tau-1} = 3^\tau - 1,$$

$$q_1^* \geqslant 3^{\tau-1} \quad \text{e} \quad q_0^* \geqslant 3^\tau \cdot 2 + 1.$$

Vamos verificar o limite inferior de q_0^*. Inicialmente tínhamos $\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 10 + 6$ e $3^\tau \cdot 2 + 1 \leqslant q_0 \leqslant 3^{\tau-1} \cdot 7 - 4$. Após a construção dos $3^{\tau-1}$ elementos secundários no nível 1 ficamos com $\mathfrak{i}_0^*(\mathscr{M}_0) \geqslant 3^{\tau-1} \cdot 7 + 6 \geqslant q_0$ e as outras três cores ainda somam q_0.

Basta mostrar que $s_1 \geqslant 4 \cdot 3^{\tau-1}$, $s_j \geqslant 4$, para $2 \leqslant j \leqslant \tau - 1$, e $s_\tau \geqslant 2$ para o resultado seguir como no Lema 4.25. De fato,

$$\begin{aligned} s_1 &\geqslant m_1^* + \frac{m_0^* - q_0^* - 3p_1 - 4}{3} \\ &\geqslant 3^\tau - 1 + \frac{3^\tau \cdot 8 + 1 - 2 \cdot 3^{\tau-1} - (3^\tau - 1)}{3} - \frac{(3^{\tau-1} \cdot 7 - 4) + 3(3^{\tau-1} \cdot 2) + 4}{3} \\ &= 3^{\tau-1} \cdot 5 - \frac{1}{3} > 4 \cdot 3^{\tau-1}, \end{aligned}$$

para $2 \leqslant j \leqslant \tau - 1$,

$$\begin{aligned}
s_j &\geqslant \frac{\sum_{i=0}^{j} m_{j-i}^* - 4 \cdot 3^{\tau-1}}{3^j} - \frac{q_0^* + 3p_1 + 4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\
&\geqslant \frac{\sum_{i=0}^{j} m_{j-i} - 6 \cdot 3^{\tau-1}}{3^j} - \frac{q_0^* + 3p_1 + 4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\
&\geqslant \frac{(j+1)3^\tau \cdot 4 + 1 - 3^\tau \cdot 2}{3^j} \\
&\quad - \frac{(3^{\tau-1} \cdot 7 - 4) + 3(3^{\tau-1} \cdot 2) + 4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\
&= 3^{\tau-1-j}(12j - 7) - 8 + \frac{25}{3^j} > 9
\end{aligned}$$

e

$$s_\tau \geqslant (\tau + 1)4 - \frac{19}{3} - 8 + \frac{25}{3^\tau} > 2.$$

1.2) Se os $m_1 - 3^{\tau-1} + 1$ elementos no nível 1 que têm a mesma cor são de cor diferente de 0, ainda temos $t \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 10 + 2$. Então, pela Proposição 2.21, podemos construir $3^{\tau-1}$ elementos secundários de cor 0 e nível exatamente 1. O resultado segue análogo ao caso 1.1.

caso 2: Suponha $m_1 \leqslant 3^{\tau-1} \cdot 2 - 2$, então $u(g_1) \leqslant 3^{\tau-1} \cdot 2 - 2$,

$$m_0 \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 89 + 2 - (3^{\tau-1} \cdot 2 - 2) = 3^{\tau-2} \cdot 83 + 4$$

e

$$\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 83 + 4 - (3^{\tau-1} \cdot 7 - 4) = 3^{\tau-2} \cdot 62 + 8$$

Logo,

$$\frac{3^{\tau-2} \cdot 62 + 8}{3} \leqslant t \leqslant m_0 + 3^{\tau-1} \cdot 2 - 2 - (3^\tau \cdot 4 + 1),$$

ou seja,

$$3^{\tau-3} \cdot 62 + 3 \leqslant t \leqslant m_0 - (3^{\tau-1} \cdot 10 + 3).$$

Como $\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) \geqslant m_0 - (3^{\tau-1} \cdot 7 - 4) > m_0 - (3^{\tau-1} \cdot 10 + 3)$, existem pelo menos $3^\tau + 7$ elementos da cor 0 no nível 0 que não são da forma $\left\{ {* \atop 9} \right\}$ (mod 9). E existem, pelo menos, $3^{\tau-3} \cdot 62 + 3$ elementos da cor 0 no nível 0 que são da forma $\left\{ {* \atop 9} \right\}$ (mod 9). Pelas Proposições 2.21 e 2.22, podemos construir $3^{\tau-1}$ elementos secundários no nível exatamente 1 e cor 0 e outros $3^{\tau-1}$ secundários no nível exatamente 1 e cor diferente de 0, respectivamente. Assim,

$$m_0^* \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 83 + 4 - 6 \cdot 3^{\tau-1} = 3^{\tau-2} \cdot 65 + 4,$$

$$m_1^* \geqslant 2 \cdot 3^{\tau-1},$$

$$q_1^* \geqslant 3^{\tau-1} \quad \text{e} \quad q_0^* \geqslant 3^\tau + 2.$$

De fato, inicialmente tínhamos $\mathfrak{i}_0(\mathscr{M}_0) \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 62 + 8$ e $3^\tau + 2 \leqslant q_0 \leqslant 3^{\tau-1} \cdot 7 - 4$. Após a construção dos elementos secundários no nível 1 ficamos com $\mathfrak{i}_0^*(\mathscr{M}_0) \geqslant 3^{\tau-2} \cdot 44 + 8 > q_0$ e as outras três cores ainda somam q_0.

Basta mostrarmos que $s_1 \geqslant 4 \cdot 3^{\tau-1}$, $s_j \geqslant 4$ $(2 \leqslant j \leqslant \tau - 1)$ e $s_\tau \geqslant 2$. De fato,

$$\begin{aligned}
s_1 &\geqslant 3^{\tau-1} \cdot 2 + \frac{m_0^* - q_0^* - 3p_1 - 4}{3} \\
&\geqslant 3^{\tau-1} \cdot 2 + \frac{3^{\tau-2} \cdot 65 + 4 - (3^{\tau-1} \cdot 7 - 4) - 3(3^{\tau-1} \cdot 2) - 4}{3} \\
&= 3^{\tau-3} \cdot 44 + \frac{4}{3} > 4 \cdot 3^{\tau-1},
\end{aligned}$$

para $2 \leqslant j \leqslant \tau - 1$,

$$\begin{aligned}
s_j &\geqslant \frac{\sum_{i=0}^{j} m_{j-i}^* - 4 \cdot 3^{\tau-1}}{3^j} - \frac{q_0^* + 3p_1 + 4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\
&\geqslant \frac{\sum_{i=0}^{j} m_{j-i} - 8 \cdot 3^{\tau-1}}{3^j} - \frac{q_0^* + 3p_1 + 4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\
&\geqslant \frac{(j+1)3^\tau \cdot 4 + 1 - 8 \cdot 3^{\tau-1}}{3^j} - \frac{(3^{\tau-1} \cdot 7 - 4) + 3(3^{\tau-1} \cdot 2) + 4}{3^j} - 8 + \frac{8}{3^{j-1}} \\
&= 3^{\tau-j}(4j-3) - 8 + \frac{25}{3^j} > 9
\end{aligned}$$

e

$$s_\tau \geqslant (\tau+1)4 - 15 + \frac{25}{3^\tau} > 1,9.$$

■

Referências Bibliográficas

[1] J. Ax & S. Kochen, *Diophantine problems over local fields I*, American Journal of Mathematics **87** (1965), 605–630.

[2] D. Brink, H. Godinho & P. H. Rodrigues, *Simultaneous diagonal equations over $\mathfrak{p}$-adic fields*, Acta Arithmetica **132.4** (2008), 393–399.

[3] J. Brüdern & H. Godinho, *On Artin's Conjecture, I: Systems of diagonal forms*, Bulletin of the London Mathematical Society **31** (1999), 305–313.

[4] J. Brüdern & H. Godinho, *On Artin's Conjecture, II: Pairs of additive forms*, Proceedings of the London Mathematical Society (3) **84** (2002), 513–538.

[5] R. J. Cook, *Pairs of additive congruences: cubic congruences*, Mathematika **32** (1985), 286–300.

[6] R. J. Cook, *Pairs of additive congruences: quintic congruences*, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics **17** (1986), 786–799.

[7] H. Davenport, *Analytic methods for Diophantine equations and Diophantine inequalities*, Campus Publishers, Ann Arbor, Michigan (1962).

[8] H. Davenport & D. J. Lewis, *Homogeneous additive equation*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A. **274** (1963), 443–460.

[9] H. Davenport & D. J. Lewis, *Cubic equations of additive type*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences **261** (1966), 97–136.

[10] H. Davenport & D. J. Lewis, *Two additive equations*, Number Theory (ed. W. J. LeVeque and E. G. Strauss), Proceedings of the Symposium on Pure Mathematics **12** (1969), 74–98.

[11] H. Davenport & D. J. Lewis, *Simultaneous equations of additive type*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A **264** (1969), 557–595.

[12] V. B. Demyanov, *On cubic forms in discretely normed fields*, Doklady Akademii Nauk SSSR **74** (1950), 889–891.

[13] H. Godinho, *A pair of additive quartic forms*, PhD thesis, University of Michigan, 1992.

[14] H. Godinho, *Additive forms of degree* 2^l, Journal of Number Theory **46** (1994) 391–408.

[15] H. Godinho, *On p-adic zeros of additive forms of even degree*, Journal of Number Theory **68** (1998) 1–20.

[16] H. Godinho, M. P. Knapp & P. H. Rodrigues, *Pairs of additive sextic forms*, Journal of Number Theory (Print) **133** (2013) 176–194.

[17] H. Godinho, & C. Ripoll, *Pairs of additive forms and Artin's conjecture*, Acta Arithmetica **90** (1999) 203–216.

[18] H. Godinho & T. C. Souza Neto, *Pairs of additive forms of degrees* 2.3^τ *and* 4.5^τ, Journal of Combinatorics and Number Theory **03** (2011) 87–102.

[19] H. Godinho & T. C. Souza Neto, *Pairs of additive form of degree* $p^m(p-1)$, Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici (Preprint) (2013).

[20] H. Hasse, *Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **153** (1924), 557–595.

[21] M. P. Knapp, *Systems of diagonal equations over* $\mathfrak{p}$*-adic fields*, Journal of the London Mathematical Society (2) **63** (2001), no. 2, 257–267.

[22] S. Lang, *On quasi-algebraic closure*, The Annals of Mathematics, Second Series **55** (1952), 373–390.

[23] D. J. Lewis, *Cubic homogeneous polynomials over p-adic fields*, The Annals of Mathematics, Second Series **56** (1952), 473–478.

[24] J. E. Olson, *A combinatorial problem on finite abelian groups I*, Journal of Number Theory **1** (1969), 8–10.

[25] J. E. Olson, *A combinatorial problem on finite abelian groups II*, Journal of Number Theory **1** (1969), 195–199.

[26] G. Terjanian, *Une contre-exemple à une conjecture d'Artin*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris Séries A-B, Mathématique, **262** (1966), 612.

[27] R. C. Vaughan, *On pairs of additive cubic equations*, Proceedings of the London Mathematical Society **34** (1977), 354–364.