Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientadora: Prof^a. Irina Sviridova

PI-expoente de Álgebras Associativas

Renata Alves da Silva

Brasília, 24 de janeiro de 2013

Aos meus pais, Nivaldo e Natália.

Agradecimentos

A Deus por mais esta conquista. Sem ele, nada disso seria possível.

À minha família pelo amor incondicional. Especialmente aos meus pais, Natália Alves de Souza Brito Pereira e Nivaldo Pereira da Silva, pelo carinho, pelo cuidado e pela confiança depositada em mim. Vocês são o meu maior amor.

Aos meus irmãos, Tailinny Alves da Silva e Rodrigo Alves da Silva, pelo amor, pela confiança e respeito.

Aos meus sobrinhos, João Victor e João Pedro, pela alegria que trouxeram à nossa família.

À minha cunhada, Taís, pela amizade e carinho.

Aos meus tios e primos que tanto me incentivaram e me ajudaram.

À minha tia Josa, pela confiança, pelo amor e pela amizade.

Ao grupo de oração pelo apoio, pela força e pelos momentos tão agradáveis que passamos juntos.

À minha orientadora, Irina Sviridova, exemplo de uma profissional íntegra e comprometida. Agradeço por respeitar as minhas limitações, por todos os ensinamentos, pela compreensão, pelo comprometimento e dedicação a este trabalho. Muito obrigada!

Aos professores da banca examinadora, Ana Cristina Vieira e José Antônio Oliveira de Freitas, pela atenção nas leituras e pelas contribuições feitas ao trabalho.

Aos professores do Departamneto de Matemática-UnB pelos ensinamentos e apoio. Em especial, aos professores Hemar e Marco Pellegrini.

Aos meus professores da graduação pelo incentivo, pelo carinho e pelo apoio. Em especial, aos professores Eudes Antônio, Adriano Rodrigues, Kaled Sulaiman Khidir, Dirley, Gisele, Waléria, Gilmar e Idemar Visolli.

Ao meu namorado, Rômulo, meu companheiro nesta trajetória, que soube compreender como ninguém esta fase tão importante. Agradeço pelo amor, pelo carinho e pela presença nos bons e maus momentos da minha vida.

Aos meus colegas e amigos da Pós-Graduação do Departamento de Matemática-UnB pela amizade e por todos momentos vivenciados. Em especial, a Saieny, Lauro, Mayra, Fábio, José Carlos, Otto, Bruno Trindade, Ilana, Keidna, Tiago Lima, Luiz Mateus, Emerson, Mayer, Marina, Aristóteles, Joaby, Thaynara, Kaliana, Kelem, Bruno Souza, Linniker Monteiro, Vinícius Martins, Vinícius Elias, Valdiego, Maria Leite, Raimundo e Edmilson.

Aos meus amigos da graduação pelo companheirismo e pelo carinho. Em especial, a Maristela, Cleidiane, Jaelton e Fábio.

Às minhas amigas de moradia, Kaliana, Maria, Thaynara e Solange, pela amizade, pela compreensão e pela convivência agradável.

A Saieny, Mayra, Lauro, Fábio, José Carlos e Otto. A amizade de vocês foi essencial para esta conquista.

A todos os funcionários do Colina. Em especial, a Dona Raimunda, Rose e Marcelo, pelo carinho e pela prestatividade.

A todos funcionários do Departamento de Matemática-UnB. Especialmente a Claúdia, William, Dona Irene, Marta, Bruna, Vivian, Luís, Eveline, Fabiana e Thiago.

À Capes pelo apoio financeiro.

Enfim, agradeço a todos os que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

Resumo

Sejam A uma PI-álgebra associativa sobre um corpo F de característica zero e $\{c_n(A)\}$ a sequência de codimensões de A. Neste trabalho vamos estudar o comportamento destas sequências. Regev mostrou que a sequência de codimensões é exponencialmente limitada. O nosso objetivo principal é apresentar os resultados obtidos por A. Giambruno e M. Zaicev em [4], onde demonstram que o PI-expoente de A, denotado por $exp(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$, sempre existe e é um inteiro. Daremos uma maneira explícita de calcular este expoente. Usaremos a teoria de representações do grupo simétrico para obtermos os resultados.

Abstract

Let A be an associative algebra over a field F of characteristic zero satisfying a polynomial identity (PI-algebra), and $\{c_n(A)\}$ be the sequence of codimensions of the A. In this paper we study the behavior of these sequences. Regev showed that a sequence is exponentially codimensions limited. Our main goal is to show the results obtained by A. Giambruno and M. Zaicev in [4], where they prove that the PI-exponent of A, denoted by $exp(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$, exists and is an integer. We will give an explicit way to calculate this exponent. We use the representation theory of the symetric group to obtain the results.

Sumário

Introdução

Sejam F um corpo de característica zero e $F\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre de posto enumerável no conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Consideraremos $F\langle X\rangle$ não unitária e todas as álgebra do texto associativas e não comutativas (exceto menção contrária) . Diremos que uma F-álgebra A é uma PI-álgebra se existe um polinômio não nulo $f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ tal que, $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$. Denotaremos por $Id(A)$ o conjunto de todas identidades polinomiais de A. Chamaremos um ideal I de $F\langle X\rangle$ de T-ideal, se I é invariante por $End_F(F\langle X\rangle)$. Para cada T-ideal I, existe álgebra A tal que $I = Id(A)$. Denotaremos por $var(I)$ ou $var(A)$ o conjunto de todas as álgebras associativas que tem I como identidades polinomiais.

Seja G um grupo qualquer. Uma álgebra A é dita G-graduada, se A pode ser escrita como soma direta de subespaços $A = \dot{+}_{g\in G} A^{(g)}$ tais que para todo $g,\ h \in G$, $A^{(g)}A^{(h)} \subseteq A^{(gh)}$. Dentre as álgebras G-graduadas consideradas no texto, enfatizaremos as álgebras Z_2-graduadas, também chamadas de superalgebras. Então, uma álgebra A é chamada de superalgebra com graduação $\left(A^{(0)},\ A^{(1)}\right)$, se $A = A^{(0)} \dot{+} A^{(1)}$ é soma direta de subespaços $A^{(0)}, A^{(1)}$ e satisfaz: $A^{(0)}A^{(1)} \dot{+} A^{(1)}A^{(0)} \subseteq A^{(1)}$ e $A^{(0)}A^{(0)} \dot{+} A^{(1)}A^{(1)} \subseteq A^{(0)}$. Observe que toda álgebra admite uma graduação trivial, onde $A^{(0)} = A,\ A^{(1)} = 0$. Um exemplo importante de superalgebra é a álgebra de Grassmann $G = G^{(0)} \dot{+} G^{(1)}$ de dimensão infinita gerada pelo conjunto $\{e_1, e_2, \ldots \mid e_ie_j = -e_je_i,\ i,j = 1, 2, \ldots\}$, onde $G^{(0)}$ e $G^{(1)}$ são os subespaços gerados pelos monômios em e_i de comprimento par e os monômios de comprimento ímpar, respectivamente. A superalgebra $G(A) = G^{(0)} \otimes A^{(0)} \dot{+} G^{(1)} \otimes A^{(1)}$ é chamada envolvente de Grassmann da álgebra A, em que A é uma superalgebra.

É bem conhecido que, se A é uma superalgebra simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero , então A é isomorfa a uma das seguintes superalgebras: $M_k(F),\ M_k(F \dot{+} cF)$ e $M_{k,l}(F)$, em que $c^2 = 1$. E toda superalgebra A de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero é escrita como $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \dot{+} J(A)$, em que $J = J(A)$ é o radical de Jacobson de A e $A_1, \ldots, A_n$ são superalgebras simples.

Uma álgebra A é dita verbalmente prima se para quaisquer T-ideais I_1 e I_2 de $F\langle X\rangle$ tais que $I_1 I_2 \subseteq I$ implica que $I_1 \subseteq I$ ou $I_2 \subseteq I$, onde I é um T-ideal primo de $F\langle X\rangle$. A. R. Kemer caracterizou todas as álgebras verbalmente primas sobre um corpo de característica zero: F, $F\langle X\rangle$, $M_k(F)$, $M_k(G)$, $M_{k,l}(G)$ $(k \geq l)$, em que $G = G_0 \dot{+} G_1$ é a álgebra de Grassmann; $M_k(F)$ e $M_k(G)$ são as álgebras de matrizes $k \times k$ sobre F e G respectivamente e

$$M_{k,l}(G) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} P & Q \\ R & S \end{array} \right) \middle| \; P \in M_k(G_0), Q \in M_{k\times l}(G_1), R \in M_{l\times k}(G_1) \text{ e } S \in M_l(G_0) \right\}.$$

Outro fato conhecido é que, sobre corpos de característica zero, todo polinômio não-nulo $f \in F\langle X\rangle$ é equivalente a um conjunto finito de polinômios multilineares. Denotaremos por P_n o F-espaço vetorial dos polinômios multilineares de grau n. Existe um isomorfismo de FS_n-módulos à esquerda entre P_n e a álgebra FS_n, em que S_n é o grupo simétrico sobre o conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Assim, o quociente $P_n / P_n \cap Id(A)$ tem uma estrutura de FS_n-módulo à esquerda. Definimos a n-ésima codimensão de A por $c_n(A) = dim_F(P_n / P_n \cap Id(A))$. Se A for uma PI-álgebra, então $c_n(A) < n!$ para algum n. Se A for nilpotente, então $c_n(A) = 0$, a partir de um certo n_0..

Em [6] A. Regev em 1972, provou que se A é uma PI-álgebra, então existem constantes α, β tais que $c_n(A) \leq \alpha\beta^n$, ou seja, a sequência de codimensões de A é exponencialmente limitada.

Se A é uma PI-álgebra, o seu PI-expoente é definido como $exp(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$. Na década de 1980, S. A. Amitsur conjecturou que o PI-expoente de uma PI-álgebra existe e é um inteiro não negativo.

Este trabalho foi baseado em [3] e [4], tendo com objetivo principal apresentar resultados demonstrados por A. Giambruno e M. Zaicev, onde eles deram uma resposta positiva para a conjectura de Amitsur, provando que se A é uma PI-álgebra sobre um corpo de característica zero, o PI-expoente de A, sempre existe e é um inteiro não negativo. Além disso, eles dão uma maneira explícita de calcular este expoente, mais precisamente, por um teorema bem conhecido de Kemer, dada qualquer PI-álgebra A existe uma superalgebra de dimensão finita B, cuja sua envolvente de Grassmann $G(B)$ satisfaz as mesmas identidades de A. Então $exp(A) = exp(G(B)) = dim(C^{(0)} + C^{(1)})$, onde $C^{(0)} + C^{(1)}$ é uma subálgebra Z_2-graduada semissimples maximal de B. Para demonstrar estes resultados recorremos a Teoria de Young de representações do grupo simétrico e a PI-teoria.

O PI-expoente das álgebras verbalmente primas, tem os seguintes valores: $exp\left(M_k\left(F\right)\right) = k^2$, $exp\left(M_k\left(G\right)\right) = 2k^2$ e $exp\left(M_{k,l}\left(G\right)\right) = \left(k+l\right)^2$.

Este trabalho está estruturado em quatro Capítulos. No **Capítulo 1** apresentaremos alguns conceitos, exemplos e resultados da teoria de PI-álgebras sobre um corpo de característica zero e da teoria de módulos e anéis que servirão como base para os Capítulos seguintes. Falaremos de anéis, álgebras simples e semissimples.

No **Capítulo 2** apresentaremos alguns resultados principais da teoria de representações de grupos finitos. Falaremos da teoria de Young de representações do grupo simétrico.

No **Capítulo 3** estudaremos o comportamento exponencial da sequência de codimensões $c_n(A)$ de uma PI-álgebra A sobre um corpo de característica zero. Falaremos de álgebras graduadas, álgebras verbalmente primas, envolvente de Grassmann e daremos algumas propriedades importantes destas álgebras.

No **Capítulo 4** definiremos o PI-expoente de uma PI-álgebra sobre um corpo F de característica zero. Em seguida mostraremos os resultados demonstrados por A. Giambruno e M. Zaicev em [3] e [4], que é nosso objetivo.

1

Identidades Polinomiais e PI-Álgebra

Neste Capítulo daremos alguns conceitos básicos e resultados importantes da teoria de álgebras que satisfazem identidades polinomiais (**PI-álgebras**). Falaremos de T-ideais, variedades de álgebras, polinômios homogêneos e multilineares. Daremos alguns resultados importantes de identidades polinomiais de álgebras sobre um corpo base F. Apresentaremos conceitos e resultados de anéis e álgebras simples e semissimples. Durante todo Capítulo, vamos considerar álgebras associativas e não comutativas (exceto menção contrária) e F um corpo de característica zero.

1.1 Álgebras

Definição 1.1. *Sejam F um corpo e A um F-espaço vetorial no qual é definido um produto bilinear sobre F. Suponha que para todo $c \in F$ e quaisquer $x, y, z \in A$, tem-se:*

1. $(x+y)z=xz + yz$

2. $z(x+y)=zx + zy$

3. $(cx)y= c(xy)= x(cy)$.

*Então A é uma F-**álgebra**.*

Observação 1.2. *Toda álgebra com relação à soma e ao produto é um anel.*

A dimensão da F-álgebra é a sua dimensão como F-espaço. Se a dimensão é finita, A chama-se álgebra de dimensão finita.

A seguir daremos alguns exemplos de álgebras.

Exemplo 1.3. *Seja $M_n(F)$ o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ com entradas em F. Munido do produto usual de matrizes $M_n(F)$ é uma álgebra com unidade, que é exatamente a matriz identidade $I_{n\times n}$. Destacaremos nesta álgebra as matrizes unitárias E_{ij}, com $1 \leq i, j \leq n$, onde E_{ij} é a matriz cuja única entrada não nula é na i-ésima linha e j-ésima coluna. Não é difícil verificar que as matrizes unitárias formam uma base para $M_n(F)$, donde $dim M_n(F) = n^2$.*
Generalizando, se A é uma F-álgebra e se considerarmos o espaço vetorial $M_n(A)$ de todas as matrizes $n \times n$ com entradas em A, definindo um produto em $M_n(A)$ análogo ao produto usual em $M_n(F)$, obtemos assim uma estrutura de F-álgebra em $M_n(A)$.

Exemplo 1.4. *Seja V um F-espaço vetorial. Então $End_F(V)$, o conjunto das transformações F-lineares de V munido da composição de funções, é uma F-álgebra com unidade (operador identidade).*

Exemplo 1.5. *Um corpo F possui naturalmente uma estrutura de espaço vetorial sobre si mesmo. Seja K uma extensão do corpo F, então K também possui uma estrutura de F-espaço vetorial. Não é difícil ver que, visto desta forma, F e K são F-álgebras comutativas, com unidade, cujos produtos são exatamente os produtos dos corpos F e K, respectivamente.*

Exemplo 1.6. *Sejam G um grupo e F um corpo. Denotamos por $FG = F[G]$ o conjunto de todas as somas formais finitas $\sum_{g\in G} \alpha_g g, \alpha_g \in F$, FG possui a estrutura de anel com respeito a*

$$+ : (\sum_{g\in G} \alpha_g g) + (\sum_{g\in G} \beta_g g) = \sum_{g\in G} (\alpha_g + \beta_g) g$$

$$0 = \sum_{g\in G} 0g$$

$$. : (\sum_{g\in G} \alpha_g g).(\sum_{h\in G} \beta_h h) = \sum_{g,h\in G} (\alpha_g.\beta_h) gh = \sum_{l\in G} \gamma_l l$$

$$\lambda(\sum_{g\in G} \alpha_g g) = \sum_{g\in G} (\lambda\alpha_g) g.$$

Assim munido destas operações temos que FG é uma F-álgebra associativa, unitária com unidade $1_F 1_G$, onde G (visto em FG) forma uma base para FG. Disto, segue que $dim_F FG = |G|$. A álgebra FG é dita de ***álgebra de grupo*** *sobre F. A álgebra FG é comutativa se, e somente se, G é comutativo.*

A álgebra FS_n construída à partir de S_n, o grupo das permutações de n elementos, será bastante útil para nosso trabalho.

Exemplo 1.7. *O F-espaço vetorial:*

$$M_{k,l}(F) = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$$

onde P, Q, R, S são matrizes $k \times k, k \times l, l \times k$ e $l \times l$, respectivamente com $k \geq l > 0$, é uma F-álgebra associativa, unitária, não comutativa de dimensão $(k+l)^2$, com produto usual de matriz em bloco.

Exemplo 1.8. *Seja G um grupo de ordem 2 gerado por c. O F-espaço vetorial $M_n(F + cF)$ com entradas na álgebra de grupo $F + cF$ é uma F-álgebra de dimensão $2n^2$.*

Definição 1.9. *Um subespaço B da álgebra A é chamado subálgebra se é fechado com respeito a multiplicação, ou seja, $b_1 \cdot b_2 \in B$ para quaisquer $b_1, b_2 \in B$. Dizemos também que um subespaço I de A é um ideal à esquerda (à direita) de A, se $ax \in I$ $(xa \in I)$ para quaisquer $x \in I$ e $a \in A$ respectivamente. Se I é um ideal à esquerda e à direita simultaneamente, dizemos que I é um ideal bilateral de A.*

Exemplo 1.10. ***(Centro de uma Álgebra)*** *Seja A uma álgebra. O conjunto $Z(A) = \{a \in A \mid ax = xa, \forall x \in A\}$ é uma subálgebra de A que chamamos de centro de A. Sabemos da álgebra linear que, fixado $n \in N$ as únicas matrizes que comutam com todas as matrizes, são as matrizes escalares. Temos então que $Z(M_n(F)) = \{\lambda I_{n\times n} \mid \lambda \in F\}$.*

Definição 1.11. *Sejam A_1 e A_2 F-álgebras. Uma transformação linear $\Phi : A_1 \to A_2$ é um* ***homomorfismo de F-álgebras*** *se:*

$$\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b), \ \forall a, b \in A_1.$$

Diremos que Φ é um isomorfismo de F-álgebras se Φ é um homomorfismo bijetivo de F-álgebras, neste caso, também dizemos que A_1 e A_2 são álgebras isomorfas. Se $\Phi : A_1 \to A_1$ é um homomorfismo, dizemos que Φ é um endomorfismo.

Exemplo 1.12. *Seja A uma F-álgebra. Então $M_n(F) \otimes A \cong M_n(A)$ como álgebras. De fato, a transformação linear assim definida*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : M_n(F) \otimes A & \to & M_n(A) \\ E_{ij} \otimes a & \mapsto & aE_{ij} \end{array}$$

é um isomorfismo de álgebras, onde $\{E_{ij}, \ i, j = 1, \ldots, n\}$ são as matrizes elementares que formam uma base para o espaço vetorial $M_n(F)$ e $a \in A$.

Observação 1.13. *Assim como na teoria de grupos e de anéis o teorema do homomorfismo também é válido para álgebras, ou seja, para um homomorfismo* $\Phi : A_1 \rightarrow A_2$ *temos*

$$Ker(\Phi) = \{a_1 \in A_1, \Phi(a_1) = 0\},$$

temos que o quociente $\frac{A_1}{Ker(\Phi)}$ *é isomorfo a imagem* $Im(\Phi) = \{\Phi(a) |\ a \in A_1\}$*.*

Note que a álgebra quociente $\frac{A_1}{Ker(\Phi)}$ está bem definida, pois $Ker(\Phi)$ é um ideal bilateral de A_1.

Definição 1.14. *Seja A uma álgebra sobre F.*
*(i) A é **associativa** se $(ab)c = a(bc)$ para todo a, b e $c \in A$.*
*(ii) A é **comutativa** se $ab = ba$, para todo $a, b \in A$.*
*(iii) A é **unitária** se A tem unidade, ou seja, se existe $1 \in A$ tal que $1a = a1 = a$, $\forall a \in A$.*

Definição 1.15. *Seja A uma F-álgebra. Dizemos que:*
*(i) Um elemento $a \in A$ chama-se **nil** (ou nilpotente) se existe $n \in N$ tal que $a^n = 0$. Se todos elementos de A são nilpotentes, dizemos que A é **nil**. Se existe $n \in N$ tal que para todo $a \in A$, tem-se $a^n = 0$, então A chama-se nil de grau limitado. O menor natural n com esta propriedade é chamado de **nil expoente** de A.*
*(ii) Uma álgebra A chama-se **nilpotente**, se existe $n \in N$ tal que $a_1 \ldots a_n = 0$ para todo $a_1, \ldots, a_n \in A$. Neste caso, dizemos que o menor natural n com esta propriedade é o **índice (ou grau) de nilpotência** de A.*

Definição 1.16. *Seja ϑ uma classe de F-álgebras e $A \in \vartheta$ uma F-álgebra gerada por um conjunto X. A F-álgebra A é chamada uma **F-álgebra livre** na classe ϑ livremente gerada pelo conjunto X, se para qualquer álgebra $B \in \vartheta$, qualquer aplicação $\psi : X \rightarrow B$ pode ser estendida a um homomorfismo de álgebras $\varphi : A \rightarrow B$. A cardinalidade $|X|$ do conjunto X é chamado **posto** de A.*

Exemplo 1.17. *Para qualquer conjunto X a álgebra polinomial $F[X]$ é livre na classe de todas álgebras associativas, comutativas e unitárias.*

Exemplo 1.18. *Seja $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ um conjunto infinito enumerável. Chamaremos os elementos de X de **variáveis ou indeterminadas**. Uma **palavra** de X é uma sequência $x_{i_1} \cdots x_{i_n}$, com $n \in \mathbb{N}$. A palavra $x_{i_1} \cdots x_{i_s}$, em que $s = 0$, é a palavra vazia que denotaremos por 1. Geralmente, iremos considerar $s \geq 1$ (salvo menção contrária). Chamaremos de **monômios** o produto de um escalar por uma palavra em X, ou seja, $\alpha x_{i_1} \cdots x_{i_n}$ onde $\alpha \in F$ e $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n} \in X$. Diremos que dois monômios $\alpha x_{i_1} \cdots x_{i_n} = \beta x_{j_1} \cdots x_{j_m}$ se, e somente se, $\alpha = \beta \in F$, $n = m$ e*

$i_t = j_t$, para todo t. O produto de dois monômios é dado por justaposição definida por $(x_{i_1} \cdots x_{i_m})(x_{j_1} \cdots x_{j_n}) = x_{i_1} \cdots x_{i_m} \cdot x_{j_1} \cdots x_{j_n}$, $x_{i_k}, x_{j_l} \in X$.

O F-espaço vetorial $F\langle X\rangle = \{\sum_{(i)} \alpha_i x_{i_1} \ldots x_{i_n} |\ \alpha_i \in F,\ n \geq 1\}$ é uma F-álgebra, não comutativa, associativa e sem unidade. Os elementos de $F\langle X\rangle$ são chamados de polinômios, ou seja, somas formais de monômios. Se $f \in F\langle X\rangle$, escreveremos $f = f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$ para indicar que $x_1, \ldots, x_n \in X$ são as únicas indeterminadas que aparecem em f, em que $\alpha_i \in F$ e w_i são palavras que dependem de $x_1, \ldots, x_n$.

De agora em diante vamos considerar a álgebra livre $F\langle X\rangle$ associativa, não comutativa, não unitária de posto enumerável no conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ (salvo menção contrária).

Observação 1.19. *No caso em que considerarmos a palavra vazia, então vamos obter a álgebra livre associativa, não comutativa, unitária, cuja identidade é a palavra vazia (monômio de comprimento nulo).*

1.2 Identidades Polinomiais

Nesta seção daremos algumas definições e exemplos de álgebras que satisfazem identidades polinomiais.

Definição 1.20. *Seja A uma F-álgebra e $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$. Dizemos que $f \equiv 0$ é uma **identidade polinomial** de A se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para todos $a_1, \ldots, a_n \in A$.*

Vamos denotar por $Id(A)$ o conjunto de todas identidades polinomiais de uma F-álgebra A.

Definição 1.21. *Se A satisfaz uma identidade polinomial não trivial $f \equiv 0$, dizemos que A é uma **PI-álgebra**.*

Definição 1.22. *Duas PI-álgebras A e B são ditas PI-equivalentes se $Id(A) = Id(B)$.*

Sejam A uma álgebra e $a, b \in A$ definimos $[a, b] = ab - ba$ o comutador de Lie de a e b. De um modo geral, definimos o comutador de comprimento n $[a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] = [[a_1, \ldots, a_{n-1}], a_n]$ para $a_i \in A$.
A seguir daremos alguns exemplos de PI-álgebras.

Exemplo 1.23. *Se A é uma álgebra comutativa, então A é uma PI-álgebra que satisfaz a identidade $[x, y] \equiv 0$.*

Exemplo 1.24. *Qualquer álgebra nilpotente é uma PI-álgebra. De fato temos que $A^n = 0$, para algum $n \geq 1$, então $x_1 \dots x_n \equiv 0$ é uma identidade polinomial de A.*

Exemplo 1.25. *Seja A uma álgebra nil de grau limitado, ou seja, existe um inteiro $n \geq 1$ tal que $a^n = 0$, para todo $a \in A$. Então o polinômio $x^n \equiv 0$ é uma identidade polinomial de A.*

Exemplo 1.26. *Seja A uma álgebra associativa de dimensão finita e seja $dim A < n$. Então A satisfaz a* ***identidade Standard*** *de posto n*

$$St_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (sign\ \sigma)\ x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} = 0$$

onde S_n é o grupo simétrico de grau n. A álgebra A também satisfaz a ***identidade de Capelli*** *de posto n*

$$Cap_n(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_{n+1}) = \sum_{\sigma \in S_n} (sign\ \sigma)\ y_1 x_{\sigma(1)} y_2 \dots y_n x_{\sigma(n)} y_{n+1} = 0.$$

A seguir daremos um exemplo de PI-álgebra que será importante para os nossos estudos adiante.

Exemplo 1.27. *Seja G a álgebra de Grassmann (ou álgebra exterior) não unitária em um espaço vetorial de dimensão enumerável sobre um corpo de $char F \neq 2$. A álgebra G pode ser construída da seguinte forma. Seja $F\langle X\rangle$ a álgebra livre associativa de posto enumerável em $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Se I é um ideal bilateral de $F\langle X\rangle$ gerado pelo conjunto de polinômios $\{x_i x_j + x_j x_i | i, j \geq 1\}$, então $G = \frac{F\langle X\rangle}{I}$. E escrevemos $e_i = x_i + I \in G$ para cada $i = 1, 2, \dots$. Como $char F \neq 2$ temos que $e_i^2 = 0$. Então G é gerado por:*

$$G = \langle e_1, e_2, \dots | e_i e_j = -e_j e_i,\ \forall\ i, j \geq 1\rangle.$$

Não é difícil verificar que o conjunto $B = \{e_{i_1} \dots e_{i_k} | 1 \leq i_1 < \dots < i_{i_k}\}$ é uma F-base para a álgebra de Grassmann não unitária. É conveniente escrever G como soma direta dos seguintes subespaços vetoriais:

$$\begin{aligned} G^{(0)} &= span\{e_{i_1} \dots e_{i_{2k}} | 1 \leq i_1 < \dots < i_{2k}, k > 0\} \\ G^{(1)} &= span\{e_{i_1} \dots e_{i_{2k+1}} | 1 \leq i_1 < \dots < i_{2k+1}, k \geq 0\} \end{aligned}$$

onde $G^{(0)}$ é o espaço gerado por todos monômios de comprimento par e $G^{(1)}$ é o espaço gerado por todos os monômios de comprimento ímpar. Segue de $e_ie_j = -e_je_i$ que $(e_{i_1}\dots e_{i_m}).(e_{j_1}\dots e_{j_k}) = (-1)^{mk}(e_{j_1}\dots e_{j_k}).(e_{i_1}\dots e_{i_m})$ para quaisquer $m, k \in \mathbb{N}$. Podemos concluir que $ax = xa$ para quaisquer $a \in G^{(0)}$ e $x \in G$ e $bc = -cb$ para quaisquer $b, c \in G^{(1)}$.

Agora faremos considerações importantes acerca desta álgebra:

1. $G^{(0)}G^{(0)} + G^{(1)}G^{(1)} \subseteq G^{(0)}$
2. $G^{(0)}G^{(1)} + G^{(1)}G^{(0)} \subseteq G^{(1)}$
3. $G^{(0)} = Z(G)$
4. *O primeiro e terceiro item, nos dão que $G^{(0)}$ é uma subálgebra de G.*
5. *G satisfaz a identidade polinomial $[x, y, z] = [[x, y], z] \equiv 0$. De fato como $G^{(0)} = Z(G)$, é claro que qualquer comutador de dois elementos de G pertence a $G^{(0)}$, ou seja, é uma combinação linear de monômios e_is de comprimento par. Assim $[[G, G], G] = 0$.*

Note que propriedades importantes de álgebras são expressas em linguagem de identidades polinomiais. Nos exemplos dados acima podemos perceber isto. De fato, vimos por exemplo que uma álgebra A é nil de grau limitado, se existe um $n \in N$ tal que $x^n \equiv 0$ é uma identidade para A.

1.3 T-ideais e Variedades de Álgebras

Nesta seção introduzimos os conceitos de T-ideal e de variedade de álgebras. Vamos mostrar que o conjunto de identidades polinomiais $Id(A)$ é um T-ideal. Além disso exibimos algumas propriedades importantes de álgebras que serão utilizadas ao longo do texto.

Uma identidade de uma álgebra A pode ainda ser uma identidade para outras álgebras diferentes. Por isso, dado um conjunto de polinômios S, vamos considerar a classe de todas álgebras que satisfazem as identidades de S. Isto leva a noção de variedades de álgebras.

Proposição 1.28. *Dada uma álgebra A, considere $Id(A) = \{f \in F\langle X\rangle \mid f \equiv 0 \text{ em } A\}$ o conjunto de identidades polinomiais de A. O conjunto $Id(A)$ é um ideal bilateral de $F\langle X\rangle$ e é fechado sob todos endomorfismos de $F\langle X\rangle$.*

Demonstração: Não é difícil ver que o conjunto $Id(A)$ é um ideal bilateral de $F\langle X\rangle$. Além disso, $Id(A)$ é fechado sob endomorfismos de $F\langle X\rangle$. De fato, sejam $f = f(x_1,\ldots,x_n) \in Id(A)$, $g_1,\ldots,g_n \in F\langle X\rangle$ e $\varphi \in End(F\langle X\rangle)$, tal que

$$\begin{array}{rcl} \varphi : F\langle X\rangle & \to & F\langle X\rangle \\ x_i & \mapsto & g_i. \end{array}$$

Segue que

$$\begin{aligned} \varphi(f(x_1,\ldots,x_n)) &= f(\varphi(x_1),\ldots,\varphi(x_n)) = f(g_1,\ldots,g_n) = \\ &= f(g_1(x_{i_1},\ldots,x_{i_n}),\ldots,g_n(x_{i_1},\ldots,x_{i_n})). \end{aligned}$$

Note que $f(g_1(x_{i_1},\ldots,x_{i_m}),\ldots,g_n(x_{i_1},\ldots,x_{i_m})) = 0$ em A, pois para quaisquer $a_1,\ldots,a_m \in A$, temos $g_i(a_1,\ldots,a_m) \in A$, $\forall i = 1,\ldots,m$ e como $f \in Id(A)$, então $f(g_1,\ldots,g_n) \in Id(A)$. Portanto $\varphi(Id(A)) \subseteq Id(A)$. $\square$

Temos que um ideal com esta propriedade é chamado de T-ideal.

Definição 1.29. *Um ideal I de $F\langle X\rangle$ é um **T-ideal** se $\varphi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo φ de $F\langle X\rangle$.*

Disto, segue que o conjunto $Id(A)$ é um T-ideal de $F\langle X\rangle$. Por outro lado não é difícil verificar que todo T-ideal de $F\langle X\rangle$ é de fato deste tipo.

Lema 1. *Seja I um T-ideal. Então $I = Id(\frac{F\langle X\rangle}{I})$.*

Demonstração:($\subseteq$) Seja $f(x_1,\ldots,x_n) \in I$. Considere n elementos quaisquer $\bar{g_1},\bar{g_2},\ldots,\bar{g_n} \in \frac{F\langle X\rangle}{I}$. Temos $f(\bar{g_1},\bar{g_2},\ldots,\bar{g_n}) = \overline{f(g_1,\ldots,g_n)} = \bar{0}$, pois $f(g_1,\ldots,g_n) \in I$. Logo $f \in Id(\frac{F\langle X\rangle}{I})$.
($\supseteq$) Seja $f(x_1,\ldots,x_n) \in Id(\frac{F\langle X\rangle}{I})$. Como $\bar{x_1},\ldots,\bar{x_n} \in \frac{F\langle X\rangle}{I}$, temos $\bar{0} = f(\bar{x_1},\ldots,\bar{x_n}) = \overline{f(x_1,\ldots,x_n)}$. Então $f(x_1,\ldots,x_n) \in I$. $\square$

Definição 1.30. *Seja A uma álgebra e $S \subseteq A$. O ideal gerado por S é o menor ideal de A que contém S.*

Observe que o ideal gerado por S existe, pois é a interseção de todos os ideais de A que contém S.

Definição 1.31. *Seja $S \subseteq F\langle X\rangle$. O T-ideal gerado por S é o menor T-ideal que contém S. Denotaremos ele por $\langle S\rangle^T$.*

Definição 1.32. *Seja S um conjunto de polinômios em $F\langle X\rangle$ e $f \in F\langle X\rangle$. Dizemos que f é uma consequência dos polinômios em S, se $f \in \langle S\rangle^T$, ou seja, f pertence ao T-ideal gerado pelo conjunto S.*

Exemplo 1.33. *Se A é uma F-álgebra comutativa e unitária, então $Id(A) = \langle [x_1, x_2]\rangle^T$.*

Exemplo 1.34. *Seja G a álgebra de Grassmann sobre um corpo F de char $\neq 2$. Então $Id(G) = \langle [x_1, x_2, x_3]\rangle^T$. Ver [7].*

Definição 1.35. *Dois conjuntos de polinômios são equivalentes se eles geram o mesmo T-ideal.*

Vimos que qualquer álgebra A determina um T-ideal de $F\langle X\rangle$. Por outro lado várias álgebras podem corresponder a um mesmo T-ideal, como o ideal de suas identidades.

Definição 1.36. *Dado um conjunto não vazio $S \subseteq F\langle X\rangle$, a classe de todas as álgebras A tais que $f \equiv 0$ em A para todo $f \in S$ é chamada de* ***variedade*** *$\nu = \nu(S)$ determinada por S.*

Diremos que ν é uma **variedade trivial** se $Id(\nu) = (0)$. Uma variedade ν é chamada **não trivial** se $S \neq 0$ e ν é dita **própria** se ela não é trivial e contém uma álgebra não-nula.

Note que se ν é a variedade determinada pelo conjunto S e $\langle S\rangle^T$ é o T-ideal de $F\langle X\rangle$ gerado por S, então $\nu(S) = \nu(\langle S\rangle^T)$ e $\langle S\rangle^T = \cap_{A\in\nu} Id(A)$. Sendo assim escrevemos $\langle S\rangle^T = Id(\nu)$. Quando existe uma álgebra A tal que $Id(A) = Id(\nu)$, denotaremos por $\nu = var(A)$, e diremos que ν é a **variedade gerada pela álgebra** A.

Definição 1.37. *A variedade $\tilde{\nu}$ é chamada de* ***subvariedade*** *de ν se $\tilde{\nu} \subseteq \nu$.*

Exemplo 1.38. *A classe de todas as álgebras comutativas formam uma variedade própria, com $S = \{[x, y]\}$.*

Exemplo 1.39. *A classe de todas as álgebras nil de grau limitado por n, formam uma variedade própria com $S = \{x^n\}$.*

Exemplo 1.40. *A classe de todas as álgebras associativas é também uma variedade definida pelo polinômio nulo.*

O teorema abaixo mostra que há uma correspondência biunívoca entre T-ideais e variedades.

Teorema 1.41. *Existe uma correspondência bijetiva φ entre T-ideais de $F\langle X\rangle$ e variedades de álgebras. Para quaisquer dois T-ideais I_1, I_2 a inclusão $I_1 \subset I_2$ é equivalente a $\varphi(I_1) \supset \varphi(I_2)$.*

Demonstração: Para cada T-ideal I, seja $V = \varphi(I)$ a variedade determinada pelo conjunto de polinômios I. É óbvio que φ é sobrejetiva, pela própria definição. Agora sejam $I_1 \neq I_2$ e $\varphi(I_i) = V_i, i = 1, 2$. Então existe um polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ que está em $I_1 \backslash I_2$ (ou em $I_2 \backslash I_1$). Suponha que $f \in I_1 \backslash I_2$, então $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$ é uma identidade polinomial para V_1 e não é uma identidade para a álgebra relativamente livre $\frac{F\langle X\rangle}{I_2} \in V_2$, pois $Id(\frac{F\langle X\rangle}{I_2}) = I_2$. segue que $V_1 \neq V_2$. Logo φ é injetiva. E assim mostramos que φ é bijetiva. Agora veja que, $V_1 \supset V_2$ se, e somente se, toda identidade polinomial de V_1 é também uma identidade para V_2, isto é, $Id(V_1) \subset Id(V_2)$. □

1.4 Polinômios Homogêneos e Multilineares

O estudo das identidades polinomiais de uma dada álgebra sobre um corpo base F infinito, pode ser reduzido ao estudo de polinômios homogêneos ou polinômios multilineares no caso em que o corpo base é de característica zero.

Seja $F_n = F\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ uma álgebra livre de posto $n \geq 1$ sobre F. Tal álgebra pode ser decomposta como:

$$F_n = F_n^{(1)} \oplus F_n^{(2)} \oplus \ldots$$

onde, para todo $k \geq 1$, $F_n^{(k)}$ é o subsespaço gerado por todos monômios de grau k. Desde de que $F_n^{(i)} F_n^{(j)} \subseteq F_n^{(i+j)}$, para todo $i, j \geq 1$, dizemos que F_n é graduada pelo grau ou que ela tem estrutura de álgebra graduada. As $F_n^{(i)}$ são chamadas de componentes homogêneas de F_n. Similarmente, introduzimos uma multigraduação em F_n, segue que para todo $k \geq 1$ escrevemos:

$$F_n^{(k)} = \oplus_{i_1+\cdots+i_n=k} F_n^{(i_1,\ldots,i_n)}$$

onde $F_n^{(i_1,\ldots,i_n)}$ é o subespaço gerado pelos polinômios de grau i_1 em $x_1, \ldots, i_n$ em x_n. Além disso $F_n^{(i_1,\ldots,i_n)} F_n^{(j_1,\ldots,j_n)} \subseteq F_n^{(i_1+j_1,\ldots,i_n+j_n)}$ e dizemos que F_n é multigraduada.

Definição 1.42. *Um polinômio f pertencente a $F_n^{(k)}$ para algum $k \geq 1$, é chamado **homogêneo** de grau k. Se f pertence à algum $F_n^{(i_1,\ldots,i_n)}$ ele é chamado **multihomogêneo** de multigrau $(i_1, \ldots, i_n)$. Também dizemos que o polinômio f é homogêneo na variável x_i, se x_i aparece com o mesmo grau em todo monômio de f.*

Exemplo 1.43. *O polinômio*

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^2 x_3 + x_2^2 x_1 x_3 + x_3 x_1 x_2^2$$

é multihomogêneo de multigrau (1,2,1).

Exemplo 1.44. *O polinômio*

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 + x_2 x_1$$

é homogêneo em x_1 *com* $deg_{x_1} = 1$.

Se $f \in F\langle X \rangle$, podemos sempre escrever

$$f = \sum_{i_1 \geq 0, \ldots, i_n \geq 0} f^{(i_1, \ldots, i_n)}$$

onde $f^{(i_1,\ldots,i_n)} \in F_n^{(i_1,\ldots,i_n)}$ é uma combinação linear de todos monômios em f onde x_1 aparece com grau $i_1, \ldots, x_n$ aparece com grau i_n. Os polinômios $f^{(i_1,\ldots,i_n)}$ que são não nulos, são chamados de componentes **multihomogêneas** de f com multigrau $(i_1, \ldots, i_n)$.

Exemplo 1.45.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1 x_2 + x_2^2 x_1 + 5 x_2 x_1 \\ &= \underbrace{x_1 x_2 + 5 x_2 x_1} + \underbrace{x_2^2 x_1} \\ &= f^{(1,1)} + f^{(1,2)}. \end{aligned}$$

Observação 1.46. *Uma propriedade importante de T-ideais é que se F é um corpo infinito, eles são homogêneos com respeito a multigraduação acima.*

Teorema 1.47. *Seja* F *um corpo infinito. Se* $f \equiv 0$ *é um identidade polinomial para uma álgebra* A*, então toda componente multihomogênea de* f *é ainda uma identidade polinomial para* A*.*

Demonstração: Note que para toda variável x_t, $1 \leq t \leq n$, podemos decompor $f = \sum_{i=0}^{m} f_i$, onde f_i é uma combinação linear de todos monômios de f em que x_1 aparece com grau i e $m = deg_{x_1} f$.

Como F é um corpo infinito, existem $m + 1$ elementos distintos em F: $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$. Por outro lado, como f_i é homogêneo em x_1, temos $f_i(\alpha x_1, \ldots, x_n) = \alpha^i f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $\forall \alpha \in$

F. Então $f(\alpha x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{m} \alpha^i f_i(x_1, \ldots, x_n)$.

Como f é uma identidade para A, temos que

$$f(\alpha_j x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_j^i f_i(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \tag{1.1}$$

em A, para todo $i = 0, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n+1$.

Assim obtemos um sistema homogêneo com $m+1$ variáveis $f_0, \ldots, f_m$. Agora vamos escrever a matriz de Vandermonde associada a este sistema

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \ldots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 \ldots & \alpha_m \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_0^m & \alpha_1^m \ldots & \alpha_n^m \end{pmatrix}.$$

Vamos denotar $f_i(a_1, \ldots, a_n) = \bar{f_i}$ para todo $a_1, \ldots, a_n \in A$, então de 1.1 temos que

$$(\bar{f_0} \ldots \bar{f_m})\Delta = 0.$$

Como o determinante $det(\Delta) = \prod_{0 \leq i < j \leq m} (\alpha_j - \alpha_i)$ é diferente de zero, pois escolhemos todos $\alpha's$ distintos, então Δ admite inversa. Segue que $f_0 \equiv 0, \ldots, f_m \equiv 0$ são identidades de A.

Por um argumento de indução sobre t, mostramos que para toda variável x_t, $f_i \equiv 0$ para todo $i \geq 0$. Portanto toda componente multihomogênea de f é ainda uma identidade polinomial para A. □

Corolário 1.48. *Sobre um corpo infinito todo T-ideal é gerado por seus polinômios multihomogêneos.*

Definição 1.49. *Se um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ é multihomogêneo com multigrau $(1, \ldots, 1)$ dizemos que f é **multilinear** de grau n nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$.*

Exemplo 1.50. *Os polinômios Standard e Capelli de posto n*

$$St_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \; x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$$

$$Cap_n(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_{n+1}) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \; y_1 x_{\sigma(1)} y_2 \cdots y_n x_{\sigma(n)} y_{n+1}$$

respectivamente, são multilineares de grau n.

Denote por P_n o espaço de todos polinômios multilineares de grau n nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Uma base para P_n é o conjunto das palavras

$$\{x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}.$$

Logo, a dimensão de P_n é $n!$.

Desde que em um polinômio multilinear $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n$ cada variável aparece em cada monômio com grau 1, fica claro que tal polinômio é sempre da forma

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}$$

, onde $\alpha_\sigma \in F$ e S_n é o grupo simétrico em $\{1, \ldots, n\}$.

Observação 1.51. *Se $f(x_1, \ldots, x_n)$ é linear em uma variável, digamos x_1, então*

$$f(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(y_i, x_2, \ldots, x_n)$$

onde $\alpha_i \in F$, $y_i, x_i \in X$.

Proposição 1.52. *Seja A uma F-álgebra gerada como espaço vetorial pelo conjunto B sobre F, e seja $f \in P_n$. Então, f é uma identidade de A se, e somente se, $f(b_1, \ldots, b_n) = 0$ para qualquer sequência de elementos $b_1, \ldots, b_n \in B$.*

Demonstração:($\Rightarrow$) Como f é uma identidade de A, então $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$. Em particular, para os elementos de B.
($\Leftarrow$) Temos que qualquer elemento de A pode ser escrito como combinação linear finita de elementos de B. Sejam $a_i = \sum_{j_i=1}^{t_i} \alpha_{j_i}^{(i)} u_{j_i}$ elementos de A, onde $\alpha_{j_i}^{(i)} \in F$, $u_{j_i} \in B$ com $i = 1, \ldots, n$. Então, desde que $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ é linear em cada variável, pela Observação 1.51

$$\begin{aligned} f(a_1, \ldots, a_n) &= f(\sum_{j_1=1}^{t_1} \alpha_{j_1}^{(1)} u_{j_1}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{t_n} \alpha_{j_n}^{(n)} u_{j_n}) \\ &= \sum_{j_1=1}^{t_1} \alpha_{j_1}^{(1)} \cdots \sum_{j_n=1}^{t_n} \alpha_{j_n}^{(n)} f(u_{j_1}, \ldots, u_{j_n}) \\ &= \sum_{j_1, \ldots, j_n=1}^{t_1, \ldots, t_n} \alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_n} 0 = 0 \end{aligned}$$

Portanto, f é uma identidade de A. $\square$

Teorema 1.53. *Se* $charF = 0$*, todo polinômio não nulo* $f \in F\langle X\rangle$ *é equivalente a um conjunto finito de polinômios multilineares.*

Demonstração: Ver [2] seção 1.3, página 8. □

Corolário 1.54. *Se* $charF = 0$*, todo T-ideal é gerado por polinômios multilineares.*

1.5 Tipos Especiais de Identidades Polinomiais

Nesta seção vamos caracterizar, expor resultados e dar exemplos de polinômios e identidades polinomiais que nos darão suporte para provarmos resultados importantes nos Capítulos adiante.

Vamos considerar F um corpo de característica zero.

Sejam A uma F-álgebra e C uma F-álgebra comutativa e considere a F-álgebra $A \otimes_F C$. Algumas das identidades polinomiais de A podem ainda ser identidades para $A \otimes_F C$.

Proposição 1.55. *Sejam* A *uma* F*-álgebra,* C *uma* F*-álgebra comutativa não nilpotente e* F *um corpo de característica zero. Então* $Id(A \otimes_F C) = Id(A)$.

Demonstração:($\subseteq$) Seja f um polinômio multilinear em $Id(A \otimes_F C)$. Como C é uma álgebra comutativa não nilpotente, existem $c_1, \ldots, c_n \in C$ tais que $c_1 \cdots c_n \neq 0$. Então, para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= f(a_1 \otimes c_1, \ldots, a_n \otimes c_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma (a_1 \otimes c_1) \cdots (a_n \otimes c_n) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma (a_1 \cdots a_n) \otimes (c_1 \cdots c_n) = f(a_1, \ldots, a_n) \otimes c_1 \cdots c_n. \end{aligned}$$

Segue que $f \in Id(A)$. Portanto $Id(A \otimes_F C) \subseteq Id(A)$.
($\supseteq$) Considere as bases B_A e B_C para A e C respectivamente. Então $B = \{a \otimes c,\ a \in B_A, c \in B_C\}$ é uma base para $A \otimes_F C$. Agora, seja f um polinômio multilinear em $Id(A)$. Se $a_1, \ldots, a_n \in B_A$ e $c_1, \ldots, c_n \in B_C$, temos

$$f(a_1 \otimes c_1, \ldots, a_n \otimes c_n) = f(a_1, \ldots, a_n) \otimes c_1 \cdots c_n = 0 \otimes c_1 \cdots c_n = 0.$$

Segue que $f \in Id(A \otimes C)$. Portanto $Id(A) \subseteq Id(A \otimes_F C)$ □

Corolário 1.56. *Sejam F um corpo de característica zero e K uma extensão do corpo F. Então as identidades polinomiais de A coincidem com as identidades da F-álgebra $A \otimes_F K$ consideradas sobre o corpo F.*

Mas do que isso, também podemos assumir que em algum sentido que, as identidades polinomiais de A sobre F coincidem com as identidades de $A \otimes_F K$ consideradas sobre K.

Sejam F um corpo de característica zero, K uma extensão de F e A uma F-álgebra. Note que definindo o seguinte produto $\lambda(a \otimes k) := a \otimes (\lambda k)$, $\forall \lambda \in K, a \in A$ e $k \in K$, podemos dar a $\bar{A} = A \otimes_F K$ uma estrutura de K-álgebra.

Proposição 1.57. *Sejam A uma PI-álgebra sobre um corpo F e $F \subseteq K$ uma extensão do corpo. Então*

$$Id^F(A) \otimes_F K = Id^K(A \otimes_F K),$$

onde $Id^F(A)$ é o ideal das identidades de A consideradas sobre o corpo F e $Id^K(A \otimes_F K)$ é o ideal das identidades de $A \otimes_F K$ consideradas sobre o corpo K.

Demonstração: Não é difícil verificar que $Id(A)^F \otimes_F K \subseteq Id^K(A \otimes_F K)$. Seja agora $f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{r} k_i M_i \in Id(A \otimes_F K)$ onde os $M_i's$ são monômios distintos no alfabeto X e $k_i \in K$. Seja $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ uma base do espaço vetorial K sobre F e seja $k_i = \Sigma \alpha_{ij} b_j$, $\alpha_{ij} \in F$ para todo $i = 1, \ldots, r$. Então

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} b_j M_i = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{r} \alpha_{ij} M_i) \otimes b_j.$$

Para quaisquer $a_1, \ldots, a_m \in A$ temos

$$0 = f(a_1 \otimes 1, \ldots, a_m \otimes 1) = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{r} \alpha_{ij} M_i(a_1, \ldots, a_m)) \otimes b_j.$$

Desde que os $b_j's$ são linearmente independentes sobre F, segue que $\sum_{i=1}^{r} \alpha_{ij} M_i$ é uma identidade polinomial para A para todo $j = 1, \ldots, n$. Consequentemente $Id^K(A \otimes_F K) \subseteq Id^F(A) \otimes K$. □

Agora vamos definir polinômio alternado e descrever algumas de suas propriedades.

Definição 1.58. *Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t) \in F\langle X \rangle$ linear nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Dizemos que f é **alternado** em $x_1, \ldots, x_n$, se para todos $1 \leq i < j \leq n$,*

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t).$$

Segue diretamente da definição que, se $f = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_t)$ é um polinômio linear em cada uma das variáveis $x_1, \dots, x_n$ e alternado nestas variáveis, então para quaisquer $1 \leq i < j \leq n$, o polinômio f torna-se nulo quando substituirmos x_i por x_j.

Observação 1.59. *Além disso escrevendo qualquer permutação σ de S_n como o produto de transposições temos que, se $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_t)$ é alternado em $x_1, \dots, x_n$, então,*

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, y_1, \dots, y_t) = (-1)^\sigma f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_t).$$

De fato, se $f = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_t)$ é um polinômio linear em cada variável $x_1, \dots, x_n$ e alternado nestas variáveis, tomando um monômio $\alpha x_{i_1} \dots x_{i_k} \dots x_{i_t} \dots x_{i_n}$ em f, então o monômio $x_{i_1} \dots x_{i_t} \dots x_{i_k} \dots x_{i_n}$ aparece em f com coeficiente $-\alpha$. Assim, por um processo de indução, para qualquer $\sigma \in S_n$ o monômio $u_1 x_{\sigma(1)} u_2 x_{\sigma(2)} \cdots u_n x_{\sigma(n)} u_{n+1}$ aparece em f com coeficiente $(-1)^\sigma \alpha$, onde α é o coeficiente do monômio $u_1 x_1 u_2 x_2 \cdots u_n x_n u_{n+1}$ e $u_i \in F\langle X \rangle$ são monômios em $y_1, \dots, y_t$ possivelmente vazios.

No caso em que f é alternado em n variáveis dizemos que f é n-alternado, e se f é alternado em todas variáveis, dizemos simplesmente que f é alternado.

Proposição 1.60. *Seja $f = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_t)$ um polinômio alternado em $x_1, \dots, x_n$ e seja A uma F-álgebra. Se $a_1, \dots, a_n \in A$ são elementos linearmentes dependentes sobre F, então $f(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_t) = 0$ para todos $b_1, \dots, b_t \in A$.*

Demonstração: Pela hipótese, um dos $a_i s$, digamos a_1 pode ser escrito como combinação linear dos outros, $a_1 = \sum_{i=2}^n \alpha_i a_i, \alpha_i \in F$. Então,

$$\begin{aligned} f(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_t) &= f(\sum_{i=2}^n \alpha_i a_i, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_t) \\ &= \sum_{i=2}^n \alpha_i f(a_i, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_t) = 0. \end{aligned}$$

Desde que f é alternado em $x_1, \dots, x_n$ e em cada termo $f(a_i, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_t)$ duas variáveis coincidem, daí segue o resultado. □

Corolário 1.61. *Seja A uma F-álgebra com $dim A < n$ e f um polinômio alternado em $x_1, \dots, x_n$. Então $f \equiv 0$ é uma identidade em A.*

Exemplo 1.62. *Os polinômios $Cap_n(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_{n+1})$ e $St_n(x_1, \dots, x_n)$ definidos no Exemplo 1.26, são alternados em $x_1, \dots, x_n$.*

Vamos mostrar adiante que todo polinômio que é alternado em $x_1, \ldots, x_n$, pode ser escrito como combinação linear de polinômios obtidos por substituições dos $y_i s$ no polinômio Capelli.

Nas seguintes definição e proposição vamos considerar que a álgebra livre $F\langle X\rangle$ seja unitária, ou seja, vamos também considerar o monômio vazio.

Definição 1.63. *Uma álgebra A satisfaz a identidade Capelli de posto n, se A satisfaz todo polinômio obtido de*

$$Cap_n(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_{n+1})$$

substituindo as variáveis y_i por 1 de todas as maneiras possíveis.

Assim, note que existem 2^{n+1} polinômios.

Proposição 1.64. *Se $f \in F\langle X\rangle$ é um polinômio alternado em $x_1, \ldots, x_n$, então*

$$f = \sum_{w_1,\ldots,w_{n+1}} \alpha_{w_1,\ldots,w_{n+1}} Cap_n(x_1, \ldots, x_n; w_1, \ldots, w_{n+1})$$

é uma combinação linear de polinômios Capelli, onde $w_1, \ldots, w_{n+1}$ são adequados monômios (possivelmente vazios) em $F\langle X\rangle$.

Demonstração: Tome um monômio qualquer $\beta w_1 x_1 w_2 x_2 \ldots x_n w_{n+1}$ de f, onde os $w_i s$ são monômios obtidos das variáveis restantes que aparecem em f. pela Observação 1.59, para toda permutação $\sigma \in S_n$, o monômio $w_1 x_{\sigma(1)} w_2 x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)} w_{n+1}$ aparece em f com coeficiente $(-1)^\sigma \beta$. Segue que $Cap_n(x_1, \ldots, x_n; w_1, \ldots, w_{n+1})$ é um somando de f com coeficiente $\pm\beta$ e f é uma combinação linear de tais polinômios. $\square$

Pela proposição acima, se uma álgebra A satisfaz a identidade Capelli de posto n, então ela satisfaz todo polinômio alternado em n variáveis.

O polinômio $Cap_n(x_1, \ldots, x_n; 1, \ldots, 1)$ obtido substituindo todos os $y_i s$ por 1 nos dá o polinômio Standard, e este têm algumas propriedades importantes. A seguir vamos dar algumas destas propriedades.

Primeiro vamos denotar por $f(x_1, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

Proposição 1.65. *1. Se $f(x_1, \ldots, x_n)$ é um polinômio alternado de grau n, então $f = \alpha St_n(x_1, \ldots, x_n)$ para algum $\alpha \in F$.*

2. $St_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}x_i St_n(x_1, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, x_{n+1})$. *Por isso se* $St_n \equiv 0$ *é uma identidade para uma álgebra* A, $St_{n+1} \equiv 0$ *é também uma identidade para* A.

Demonstração: Ver [2], Seção 1.5, página 14. □

1.6 Módulos, Anéis Semissimples e Radical de Jacobson

Nesta seção apresentaremos definições, exemplos e resultados importantes sobre R-módulos (módulo sobre um anel R), anéis e álgebras simples e semissimples e radical de Jacobson. Vamos considerar em todo trabalho R-módulos à esquerda, lembrando que todos resultados são válidos para R-módulos à direita.

Definição 1.66. *Seja* R *um anel. Um conjunto* $(M, +)$ *com operação binária* $+$ *definida nele, chama-se* R***-módulo à esquerda*** *(módulo sobre* R*) se:*

1. $(M, +)$ *é um grupo abeliano;*
2. *para quaisquer* $m \in M$ *e* $r \in R$ *existe um único* $rm \in M$*;*
3. $(r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m$ *para quaisquer* $m \in M$ *e* $r_1, r_2 \in R$*;*
4. $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$ *para quaisquer* $m_1, m_2 \in M$ *e* $r \in R$*;*
5. $(r_1r_2)m = r_1(r_2m)$ *para quaisquer* $m \in M$ *e* $r_1, r_2 \in R$.

Se R é um anel unitário, então um R- módulo chama-se **unitário** com unidade 1_R, se $1_Rm = m$ para qualquer $m \in M$.

Exemplo 1.67. *Se* $R = F$ *é um corpo, a definição de* R*-módulo unitário coincide com a definição de espaço vetorial. Assim uma* F*-álgebra é um* F*-módulo.*

Exemplo 1.68. *Sejam* $V = V(n, F)$ *(espaço vetorial sobre o corpo* F *de dimensão* n*) e* $R = Mat(n, F)$ *(anel das matrizes quadradas* $n \times n$ *sobre o corpo* F*). Defina uma multiplicação* $R \times V \to V$ *da seguinte maneira:* $B \cdot v \in V$*, para todo* $B \in R = Mat(n, F)$ *e para todo* $v \in V$*. Assim, temos que* V *é um* $Mat(n, F)$*-módulo à esquerda.*

Observação 1.69. *Temos que* $Mat(n, F) \cong End_F(V(n, F))$.

Definição 1.70. *Seja M um R-módulo. Um submódulo N de M é um subgrupo de M tal que $r \cdot n \in N$, para todo $r \in R$ e $n \in N$.*

Definição 1.71. *Sejam R um anel e M, N R-módulos à esquerda. Então a aplicação $\varphi : M \to N$ chama-se homomorfismo de R-módulos à esquerda se:*

1. *φ é homomorfismo de grupos abelianos;*

2. *$\varphi(r \cdot m) = r\varphi(m)$, para quaisquer $m \in M$ e $r \in R$.*

Exemplo 1.72. *Sejam V e W F-espaços vetoriais. Temos que homomorfismos de F-módulos são transformações lineares de V em W.*

Note que todo anel (álgebra) R é um R-módulo sobre si mesmo. Chamaremos tal módulo de **módulo regular à esquerda**, o qual denotaremos por ${}_RR$-módulo.

Definição 1.73. *Um R-módulo à esquerda $M \neq 0$ diz-se **simples** se não possui submódulos próprios (submódulos diferentes de 0 e M).*

Exemplo 1.74. *Seja $R = Mat(n, F)$ o anel de matrizes. Note que $M_1 = M_{n\times 1}(F)$ e $M_2 = M_{1\times n}(F)$ são R-módulos simples à esquerda e à direita, respectivamente.*

Observação 1.75. *Um subconjunto $I \subseteq R$ de um anel é um R-módulo regular à esquerda se, e somente se, I é um ideal à esquerda de R. Além disso, um ideal à esquerda é minimal se, e somente se, ele é simples como R-módulo regular à esquerda.*

A partir de agora, vamos considerar somente R-módulos à esquerda. Portanto, omitiremos a palavra à esquerda, ficando assim subentendido.

Definição 1.76. *Um R-módulo é **semissimples** se ele é uma soma direta finita de R-módulos simples.*

Exemplo 1.77. *Seja V um espaço vetorial (F-módulo). Então, para qualquer subespaço U de V, existe um subespaço W de V tal que $V = U \oplus W$. Portanto, V é um F-módulo semissimples.*

Note que todo módulo simples é semissimples.

Definição 1.78. *Um anel R chama-se **simples** se não possui ideais bilaterais próprios.*

Definição 1.79. *Um anel R é **semissimples** à esquerda se ele é semissimples como R-módulo regular à esquerda.*

Exemplo 1.80. *Seja $D \neq 0$ um anel (álgebra) de divisão. Temos que D é simples e $M_n(D)$ é simples.*

Proposição 1.81. *Seja R um anel unitário. R é semissimples à esquerda se, e somente se, R é semissimples à direita.*

Demonstração: Ver [10], Seção 8.3, página 563. □

Definição 1.82. *Sejam R um anel e M um R-módulo. O **anulador de** M em R é dado por $Ann_R(M) = \{r \in R \mid rm = 0, \forall m \in M\}$.*
Diremos que M é um R-módulo fiel se $Ann_R(M) = (0)$.

Não é difícil verificar que $Ann_R(M)$ é um ideal bilateral de R.

Definição 1.83. *O **radical de Jacobson**, o qual denotaremos por J, de um anel R é a interseção dos anuladores de todos os R-módulos simples.*

Sabemos que interseção de ideias é um ideal. Logo o radical de Jacobson J é um ideal bilateral de R. Se R for unitário então $J(R) \neq R$.

Observação 1.84. *O radical de Jacobson de uma álgebra A coincide com o radical de Jacobson de A como anel.*

Teorema 1.85. *Se A é uma álgebra de dimensão finita, então o radical de Jacobson de A é o maior ideal nilpotente de A.*

Demonstração: Ver [10], Seção 8.3, página 546. □

Teorema 1.86. *Um anel R é semissimples se, e somente se, ele é artiniano à esquerda e $J(R) = 0$.*

Demonstração: Ver [10], Seção 8.3, página 555. □

Agora, vamos expor alguns resultados importantes sobre módulos e anéis semissimples. A maioria das demonstrações será omitida. O leitor interessado poderá consultar [10].

Proposição 1.87. 1. *Todo submódulo e todo módulo quociente de um módulo M semissimples é semissimples.*

2. *Se R é um anel semissimples, então todo R-módulo M é um módulo semissimples.*

3. *Se I é um ideal bilateral em um anel semissimples R, então o anel quociente R/I é também um anel semissimples.*

Demonstração: Ver [10], Seção 8.3, página 553. □

Corolário 1.88. 1. *Um R-módulo finitamente gerado semissimples é uma soma direta finita de módulos simples. Em particular, um anel semissimples R é uma soma direta de um número finito de ideais minimais à esquerda.*

2. *Uma soma direta $R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$ de anéis semissimples $R_1, \ldots, R_n$ é também um anel semissimples.*

Demonstração: Ver [10], Seção 8.3,página 554. □

Vimos que se R é um anel semissimples, então R é uma soma direta de ideais minimais, ou seja, $R = \oplus_{j=1}^{n} I_j$ em que I_j são ideais à esquerda minimais de R.

Teorema 1.89. ***(Wedderburn-Artin)*** *Se R é um anel semissimples então R é isomorfo à uma soma direta de um número finito de anéis de matrizes sobre anéis de divisão, ou seja,*

$$R \simeq \oplus_{i=1}^{k} M_{n_i}(D_i),$$

onde cada D_i é um anel de divisão. Alem disso, $M_{n_i}(D_i) \cong \oplus_{j=1}^{n_i} M_{ij}$ onde M_{ij} são ideais minimais à esquerda de R. A coleção de pares (n_i, D_i) e o número k são definidos unicamente por R (salvo permutação e isomorfismo). O anel R tem exatamente k ideais simples à esquerda não isomorfos.

Demonstração: Ver [10], Seção 8.3, página 562. □

Pelo Teorema acima, segue que todo anel semissimples é soma direta finita de ideais minimais bilaterais, onde estes são simples e semissimples como anéis, pois são isomorfos à $M_{n_i}(D_i)$.

Definição 1.90. *Uma álgebra A é* ***simples*** *se não possui ideias bilaterais próprios e $A^2 \neq 0$.*

Definição 1.91. *Uma álgebra A é* ***semissimples*** *à esquerda se ela é uma soma direta de ideais à esquerda minimais.*

Exemplo 1.92. *As álgebras* $M_n(F)$ *e* $M_{k,l}(F)$ *são simples, pois não possuem ideais bilaterais próprios.*

Definição 1.93. *Seja* R *um anel, um elemento* $e \neq 0$ *em* R *diz-se* ***idempotente*** *se* $e^2 = e$.

Exemplo 1.94. *Se* R *é um anel unitário, então* 1_R *é idempotente.*

Observação 1.95. *Se* R *é um anel semissimples então todo ideal* I *à esquerda de* R *é da forma* $I = Re$, *onde* e *é idempotente.*

Teorema 1.96. *Seja* M *um* R*-módulo semissimples e seja* $\mu = \{M_i \mid i \in I\}$ *um conjunto completo de representantes das classes de isomorfismos dos submódulos simples de* M. *Seja* $M = \oplus_{j\in J} P_j$, *onde* P_j *são submódulos simples. Então definimos* ***componente de Wedderburn***

$$A_i = \oplus_{P_j \cong M_i} P_j,$$

para todo $i \in I$. *Assim, temos que:*

1. $M = \oplus_{i\in I} A_i$;
2. $\forall i \in I, A_i$ *é um submódulo de* M, *onde* A_i *é uma soma de todos os submódulos simples de* M *isomorfos a* M_i.

Demonstração:

1. Como $M = \oplus_{j\in J} P_j$, então $M = \oplus_{i\in I} A_i$.
2. Pela forma que M foi definido, é fácil ver que A_i é um submódulo de M. Vamos provar que todo submódulo Q isomorfo a M_i está contido em $A_i = \oplus_{P_j \cong M_i} P_j$. Note que $Q \leq M = \oplus_{j\in J} P_j = A_i \oplus \tilde{M}$, onde $\tilde{M} = \oplus_{l\in I} A_l$, com $l \neq i$. Então todo $q \in Q$ pode ser escrito como $q = \sum_{j\in J} p_j$, onde $p_j \in P_j$.
   Vamos considerar a projeção

$$\begin{aligned} \pi_j \ &: \ Q \to P_j \\ & \quad\ q \mapsto p_j \end{aligned}$$

   para todo $j \in J$ tal que $P_j \not\subseteq A_i$. Como $Q \cong M_i$ e $P_j \ncong M_i$, pois $P_j \not\subseteq A_i$, então $Q \ncong P_j$. Temos que Q e P_j são módulos simples, e π_j não é um isomorfismo, então

$\pi_j = 0$. Isso significa que $p_j = 0$ para todo $j \in J$ tal que $P_j \not\subseteq A_i$.

Seja

$$\begin{aligned} \pi \quad : \quad & Q \to \tilde{M} \\ & q \mapsto \sum_{\substack{j \in J \\ P_j \not\subseteq A_i}} p_j. \end{aligned}$$

Assim $\pi = \sum_{\substack{j \in J \\ P_j \not\subseteq A_i}} \pi_j = 0$. Logo $Q \leq A_i$.

Portanto a soma de todos submódulos simples isomorfos a M_i está contido em A_i.

□

Teorema 1.97. *Seja R um anel semissimples e seja $\{A_i \mid i \in I\}$ conjunto de componentes de Wedderburn de ${}_RR$ (módulo regular à esquerda), então:*

1. $\mid I \mid = k < \infty$ *e* $R = \oplus_{i=1}^{k} A_i$.
2. *Todo A_i é um ideal bilateral de R.*
3. *Se $i_1 \neq i_2$ então $A_{i_1} A_{i_2} = \{0\}$.*
4. *Todo A_i é um anel artiniano simples.*

Demonstração: Ver [10], Seção 8.3, página 565. □

Existe uma ligação entre o teorema acima e o Teorema 1.89. Note que, se considerarmos ${}_RR$-módulo regular à esquerda, então pelo Teorema 1.89, segue que $A_i \cong M_{n_i}(D_i)$.

O teorema a seguir é fundamental para a teoria de representação de grupos que será apresentada no próximo Capítulo.

Teorema 1.98. ***Maschke*** *Sejam G um grupo finito e F um corpo cuja característica não divide a ordem de G. Então FG é semissimples.*

Demonstração: Ver [9], Capítulo 1, página 4. □

2

S_n-Representações

Neste Capítulo vamos expor alguns resultados da teoria de representações de grupo, no qual restringiremos ao grupo simétrico S_n. Na terceira seção vamos introduzir uma ação do grupo simétrico no espaço dos polinômios multiliniares em n variáveis, que será denotado por P_n. Desta ação obtemos um isomorfismo de FS_n-módulos à esquerda entre a álgebra de grupo FS_n e P_n. Na última seção provaremos alguns resultados técnicos sobre a estrutura de polinômios do tipo $e_{T_\lambda}f$, onde $f \in P_n$, λ é uma partição de n e T_λ é uma tabela de Young do tipo λ. Em todo Capítulo F será um corpo de característica zero, G um grupo finito e A uma álgebra unitária.

2.1 Representações de Grupos

Iremos recordar nesta seção algumas definições básicas e resultados da teoria de representações de grupos finitos sobre um corpo F.

Definição 2.1. *Sejam A uma F-álgebra unitária com unidade 1_A e V um espaço vetorial sobre F. Então uma F-**representação** de A é um homomorfismo de F-álgebras:*

$$\varphi : A \to End_F(V)$$

1. $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$
2. $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$
3. $\varphi(1_A) = id$
4. $\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)$, $\lambda \in F, a \in A$.

Se $dim_F(V) = n$ *é finita, dizemos que* n *é o grau da* F*-representação* φ.

Definição 2.2. *Sejam* G *um grupo,* V *um* F*-espaço vetorial. Vamos denotar por* $GL(V)$ *o grupo das transformações lineares invertíveis de* V. *Um homomorfismo de grupos* $\psi : G \to GL(V)$ *é chamado de uma* F***-representação*** *de* G *com espaço de representação* V.

Se $dim_F(V) = n < \infty$, dizemos que n é o grau da F-representação ψ.

Definição 2.3. *Seja* A *uma* F*-álgebra. Duas representações* $\varphi : A \to End_F(V)$ *e* $\psi : A \to End_F(W)$ *em que* V, W *são* F*-espaços vetoriais, dizem-se* ***equivalentes****, se existe um isomorfismo de* F*-espaços* $\tau : V \to W$ *tal que* $\forall a \in A$, *temos* $\psi(a)\tau = \tau\varphi(a)$. *, ou seja,* $\psi(a) = \tau\varphi(a)\tau^{-1}$, *para todo* $a \in A$.

Definição 2.4. *Sejam* $f : G \to GL(V)$ *e* $h : G \to GL(W)$ *duas representações de um grupo* G. *Elas dizem-se* ***equivalentes*** *se existe um isomorfismo de* F*-espaços* $\tau : V \to W$ *tal que* $\forall g \in G$, $h(g)\tau = \tau f(g)$.

Como espaços de mesma dimensão são isomorfos, então para um espaço V com $dim_F(V) = n < \infty$, vamos denotar $GL(V) = GL(n, F)$.

Vamos considerar a álgebra de grupo FG definida anteriormente. Existe uma bijeção natural entre as representações do grupo G e as representações da álgebra FG.

Seja $\varphi : G \to GL(V)$ uma F-representação de G, podemos estender φ à FG. Vamos obter

$$\psi : FG \to End_F(V),$$

pondo $\psi(\sum_{g\in G} \alpha_g g) = \sum_{g\in G} \alpha_g \varphi(g)$, então ψ é uma F-representação de FG.

Reciprocamente, se $\psi : FG \to End_F(V)$ é uma F-representação de FG, podemos restringir ψ a G pela aplicação $\varphi : G \to GL(V)$ de tal modo que $\varphi(g) = \varphi(1_F g)$, onde $g \in G$.

2.2 Representações e FG-módulos

Seja M um FG-módulo. Podemos ver M como F-módulo, ou seja, um F-espaço vetorial. Primeiro note que $\forall \lambda \in F, \forall m \in M$ $\lambda m = (\lambda 1_G)m$, com $1_G \in G$. Agora para todo $\xi \in FG$, definimos a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi_\xi : M &\to M \\ m &\mapsto \xi m. \end{aligned}$$

Então $\varphi_\xi \in End_F(M)$. De fato, para $\lambda \in F$ temos $\varphi_\xi(\lambda m) = \varphi_\xi((\lambda 1_G)m) = (\xi\lambda 1_G)m = \lambda(\xi m) = \lambda\varphi_\xi(m)$, e a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : FG &\to End_F(M) \\ \xi &\mapsto \varphi_\xi \end{aligned}$$

é um homomorfismo de F-álgebras, ou seja, φ é uma representação de FG com espaço de representação M.

Portanto, cada FG-módulo M é associado a uma representação de FG. Por outro lado, dado $\varphi : FG \to End_F(M)$ uma representação de FG com espaço de representação M, podemos dar a M uma estrutura de FG-módulo, definindo para quaisquer $m \in M$, $\xi \in FG$, $\xi m := (\varphi(\xi))(m)$.

Observação 2.5. *Temos as seguintes correspondências:*

$$FG\textit{-módulos} \leftrightarrow \textit{representação de } FG \leftrightarrow \textit{representação de } G.$$

Assim quando o corpo F é fixo, vamos denotar FG-módulos também por G-módulos.

Observação 2.6. *Seja G um grupo. Duas representações $f : G \to GL(V)$ e $h : G \to GL(W)$ em que V, W são F-espaços vetoriais, são **equivalentes**, ou seja, $f \sim g$ se, e somente se, V e W são isomorfos como FG-módulos.*

Exemplo 2.7. *Sejam FG a álgebra de grupo e o FG-módulo regular $M = {}_{FG}FG$, a F-representação σ de G (ou de FG) subordinado a M é a seguinte:*
$\forall x \in G$, $\sigma(x)(\sum_{g\in G} \alpha_g g) = x(\sum_{g\in G} \alpha_g g) = \sum_{g\in G} \alpha_g(xg)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \sigma(x) : M &\to M \\ \xi &\mapsto x\xi. \end{aligned}$$

*A aplicação σ é chamada de F-representação **regular** (à esquerda).*

Considerando a hipótese do *teorema de Maschke*, podemos aplicar todos os resultados que sabemos para a álgebra semissimples FG. Em particular, seguem as seguintes afirmações:

(1) Todo FG-módulo é semissimples, ou seja, é uma soma direta de FG-módulos simples, onde todo FG-módulo simples é isomorfo a um ideal à esquerda minimal de FG.

(2) Seja $\{M_1, \ldots, M_k\}$ um conjunto completo de representantes das classes de isomorfismo de FG-módulos simples. Então $FG = \bigoplus_{i=1}^{k} A_i$, onde $A_i's$ são as **componentes de Wedderburn** definidas no Capítulo anterior, ou seja, $A_i = \bigoplus_{P_j \cong M_i} P_j$, $i = 1, \ldots, k$.

Definição 2.8. *Seja M um FG-módulo e seja $f : G \to GL(M)$ F-representação associada a M.*

- *Se M é semissimples, f diz-se* ***completamente redutível****;*
- *Se M é simples, f diz-se* ***irredutível****;*
- *Se M não é simples, f diz-se* ***redutível****.*

Como consequência do *teorema de Wedderburn* e sob a hipótese do *teorema de Maschke*, segue que

$$FG \cong M_{n_1}(D^{(1)}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(D^{(k)})$$

onde $D^{(1)}, \ldots, D^{(k)}$ são álgebras de divisão de dimensão finita sobre um corpo F. Acerca deste resultado, podemos classificar todas as representações irredutíveis de G: M é um G- módulo irredutível se, e somente se, M é um $M_{n_i}(D^{(i)})$-módulo irredutível, para algum i. Por outro lado $M_{n_i}(D^{(i)})$, a menos de isomorfismo, tem apenas um módulo irredutível isomorfo a $\sum_{j=1}^{n_i} D^{(i)}e_{j1}$. Lembrando que $A_i \cong M_{n_i}(D_i)$ para $i = 1, \ldots, k$.

Observação 2.9. *Visto isto, toda F-representação de G é completamente redutível e o número de F-representações irredutíveis não equivalentes de G é igual ao número de componentes simples na decomposição de Wedderburn da álgebra de grupo FG.*

A decomposição de FG pode ser formulada em termos de representações por meio da representação regular. Da decomposição de FG dada acima, segue que a representação regular tem a seguinte decomposição, que também é uma decomposição da álgebra de grupo FG:

$$FG \cong n_1 M_1 \oplus \ldots \oplus n_k M_k$$

onde $n_i Mi = M_i \oplus \ldots \oplus M_i$ (n_i vezes), n_i é chamado de **multiplicidade** de M_i em FG, e $M_i \cong \sum_{j=1}^{n_i} D^{(i)}e_{j1}$, é um ideal à esquerda minimal de $M_{n_i}(D^{(i)})$. Note que $n_i = dimM_i$ é o grau da representação M_i.

Observação 2.10. *Vimos que todo ideal unilateral de FG é gerado por um elemento idempotente. Além disso, todo ideal bilateral é gerado por um idempotente central. Dizemos que um idempotente é minimal (central) se ele gera um ideal minimal (bilateral), respectivamente.*

Proposição 2.11. *([2], proposição 2.1.7) Se M é uma representação irredutível de G, então $M \cong M_i$, um ideal minimal à esquerda de $M_{n_i}(D^{(i)})$, para algum $i = 1, \ldots, k$. Por isso, existe um elemento idempotente minimal $e \in FG$ tal que $M \cong FGe$.*

Definição 2.12. *Um corpo F é um* ***corpo de decomposição*** *ou* ***split*** *de um grupo G finito se a álgebra de grupo FG é isomorfo à uma soma direta de anéis de matrizes sobre F, isto é, $FG \cong \oplus_{i=1}^{k} M_{n_i}(F)$.*

De agora em diante vamos considerar a álgebra de grupo FG split.

Teorema 2.13. *Sejam G um grupo finito e F um corpo tal que FG seja semissimples e split. Seja $\mu = \{M_1, \ldots, M_k\}$ um conjunto completo das classes de isomorfismos de FG-módulos simples. Ponha-se $n_i = dim_F M_i$. Então:*

1) $|G| = \sum_{i=1}^{k} n_i^2;$

2) Todo M_i aparece como fator de decomposição do módulo regular ${}_{FG}FG$ com multiplicidade n_i;

3) k = número das classes de conjugação de G.

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [10]. □

Segue do teorema acima nas condições consideradas, que o número de representações irredutíveis não equivalentes de G é igual ao número de classes de conjugação de G.

Definição 2.14. *Seja $\varphi : G \to GL(V)$ uma representação de G de grau finito. A função*

$$\begin{aligned} \chi_\varphi &: G \to F \\ &: g \mapsto \chi_\varphi(g) = tr\varphi(g) \end{aligned}$$

é chamada de ***caracter*** *de φ e $\dim V = \deg \chi_\varphi$ é chamado o* ***grau*** *do caracter χ_φ.*

Se φ for uma representação irredutível dizemos que χ_φ é um caracter irredutível de G.

Exemplo 2.15. *Se $\varphi : G \to F^*$ é uma representação linear (de grau 1). Então $\chi_\varphi(g) = \varphi(g), \forall g \in G$.*

Lema 2.16. *1) Sejam f, g representações equivalentes de G. Então $\chi_g = \chi_f$.*

2) Caracteres são constantes nas classes de conjugação do grupo.

Demonstração:

1) Se φ, ψ são representações equivalentes de G, existe $P \in GL(n, F)$ tal que: $\varphi(a) = P^{-1}\psi(a)P$, $\forall\ a \in G$. Então, usando o fato que $tr(AB) = tr(BA)$ e chamando $A = P^{-1},\ B = \psi(a)P$, temos que

$$tr(\varphi(a)) = tr(P^{-1}\psi(a)P) = tr(\psi(a)PP^{-1}) = tr(\psi(a)).$$

Portanto os caracteres são iguais.

2) Seja φ uma representação de G. Como φ é um homomorfismo de grupo, segue que $\varphi(h^{-1}gh) = \varphi(h^{-1})\varphi(g)\varphi(h),\ \forall g, h \in G$. Logo por um raciocínio análogo ao que fizemos na demonstração acima, temos

$$tr(\varphi(h^{-1}gh)) = tr(\varphi(h^{-1})\varphi(g)\varphi(h)) = tr(\varphi(g)\varphi(h)\varphi(h^{-1})) = tr(\varphi(g)).$$

Portanto, caracteres são constantes nas classes de conjugação do grupo G.

□

Agora consideremos $Irr(FG) = \{\chi_1, \ldots, \chi_r\}$ o conjunto dos caracteres irredutíveis não equivalentes de um grupo G.

Corolário 2.17. *1. Todo caracter de FG é uma combinação linear de $Irr(FG)$ com coeficientes inteiros não-negativos.*

2. Inversamente, toda combinação linear de $Irr(FG)$ com coeficientes inteiros não-negativos não todos nulos é um caracter de FG.

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [10]. □

Pelo Teorema 2.13, para um grupo G, a ordem do conjunto $Irr(G)$ é igual ao número das classes de conjugação de G e $\displaystyle\sum_{\chi \in Irr(G)} \chi(1)^2 =\mid G \mid$, onde $\chi(1)$ é o grau do caracter χ.

Exemplo 2.18. *O grupo simétrico S_3 tem exatamente três classes de conjugação e $|S_3| = 6$. Assim, temos três caracteres irredutíveis de graus 1, 1 e 2. Logo,*

$$1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = |S_3|.$$

Definição 2.19. *Uma **função de classe** sobre um grupo G é uma função $f : G \to F$ que é constante sobre as classes de conjugação de G, ou seja, $g \sim g_1 \Rightarrow f(g) = f(g_1)$. Denotamos por $\mathcal{CF}(G)$ o conjunto das funções de classes de G.*

Vimos que os caracteres são constantes nas classes de conjugação de um grupo, então pertencem à $\mathcal{CF}(G)$. Podemos definir um produto em $\mathcal{CF}(G)$ do tipo, $(\chi, \psi) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\psi(g^{-1})$ para $\chi, \psi \in \mathcal{CF}(G)$. Uma proporiedade básica deste produto é que os caracteres irredutíveis do grupo G formam uma base ortonormal de $\mathcal{CF}(G)$.

Teorema 2.20. *Sejam M e $M^{'}$ dois R-módulos e χ e $\chi^{'}$ seus respectivos caracteres. Se $M \cong M'$ então $\chi = \chi'$.*

Demonstração: Ver [9], página 17, Capítulo 2. □

Pelo *teorema de Maschke* temos que FG é semissimples, ou seja, $FG = \oplus_{i=1}^{k} FGe_i$ em que e_i é um idempotente minimal central ortogonal. O teorema seguinte nos mostra como determinar e_i.

Teorema 2.21.

$$e_i = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(1_G)\chi_i(g^{-1})g$$

em que χ_i é um caracter irredutível.

Demonstração: Ver [9], página 19, Capítulo 2. □

Na proposição seguinte daremos propriedades básicas dos caracteres de um grupo G.

Proposição 2.22. *Seja F um corpo algebricamente fechado tal que $charF = 0$ e seja $\mu = \{M_1 \ldots M_k\}$ um conjunto completo de representações irredutíveis não-equivalentes de G com caracteres $\chi_1, \ldots, \chi_k$, respectivamente. Seja $\rho : G \to GL(M)$ uma representação de G e escreva $M \cong m_1M_1 \oplus \ldots \oplus m_kM_k$ com $m_i \geq 0$.*
Então:

(1) $\chi_\rho = \sum_{i=1}^{k} m_i\chi_i$;

(2) $(\chi_\rho, \chi_i) = m_i$, $\forall i = 1, \ldots, k$;

(3) $(\chi_\rho, \chi_\rho) = \sum_{i=1}^{k} m_i^2$;

(4) χ_ρ *é irredutível se, e somente se,* $(\chi_\rho, \chi_\rho) = 1$;

(5) Se ρ' *é outra* F*-representação de* G*, então* $\rho' \sim \rho \Leftrightarrow \chi_\rho = \chi_{\rho'}$.

Demonstração:A demonstração pode ser encontrada em [9]. □

2.3 S_n-representações e Tabelas de Young

Nesta seção vamos descrever a teoria de representação do grupo simétrico S_n sobre um corpo F de característica zero. Vamos também estabelecer alguns conceitos importantes da teoria de Young. Por um resultado clássico, temos que $\mathbb{Q}$ é um corpo de decomposição para S_n, então qualquer corpo de característica zero é corpo de decomposição para S_n, ver [8]. Assim, a álgebra de grupo FS_n tem uma decomposição em componentes simples, que são álgebras de matrizes sobre F. Em toda seção vamos considerar o corpo F sendo o corpo dos racionais $\mathbb{Q}$.

Definição 2.23. *Seja* $n \geq 1$ *um inteiro. Uma* ***partição*** λ *de* n *é uma sequência finita de inteiros* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ *tais que* $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_r > 0$ *e* $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n$*. Neste caso, escrevemos* $\lambda \vdash n$ *e* $|\lambda| = r$.

Antes de enunciar o próximo resultado, vamos relembrar alguns fatos básicos sobre permutações. Sabemos que as classes de conjugação de S_n são indexadas pelas partições de n. Se $\sigma \in S_n$, decompomos σ em produto de ciclos disjuntos, incluindo 1-ciclo. Esta decomposição é única se exigirmos que $\sigma = \pi_1\pi_2 \ldots \pi_r$, onde $\pi_1, \ldots, \pi_r$ são ciclos de comprimentos $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_r \geq 1$, respectivamente. Então a partição $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ determina unicamente a classe de conjugação de σ, pois duas permutações são conjugadas em S_n se, e somente se, possuem a mesma estrutura ciclíca.

Desta maneira, os caracteres irredutíveis de S_n são indexados pelas partições de n, já que são funções de classes. Sendo assim, denote por χ_λ o S_n-caracter irredutível correspondente à partição $\lambda \vdash n$. Usamos a notação $d_\lambda = \chi_\lambda(1)$ para o grau de χ_λ.

Definição 2.24. *Dizemos que um elemento* e *é* ***idempotente essencial*** *se ele satisfaz* $e^2 = \gamma e$*, para algum* $\gamma \in \mathbb{Q}$*,* $\gamma \neq 0$.

No próximo resultado determinamos um elemento idempotente essencial central usando o Teorema 2.21.

Lema 2.25. *O elemento* $e_\lambda = \sum_{\sigma\in S_n} \chi_\lambda(\sigma)\sigma$ *é um idempotente essencial central da álgebra* FS_n.

Demonstração: Note que $\chi_\lambda(\sigma^{-1}) = \chi_\lambda(\sigma)$ para todo $\sigma \in S_n$ e $\lambda \vdash n$, pois σ e σ^{-1} são conjugados em S_n. Considere $e = \frac{d_\lambda}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} \chi_\lambda(\sigma^{-1})\sigma = \frac{d_\lambda}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} \chi_\lambda(\sigma)\sigma = \frac{d_\lambda}{n!}e_\lambda$, o elemento idempotente visto no teorema 2.21, em que d_λ é o grau do caracter irredutível χ_λ associado à partição $\lambda \vdash n$. Logo

$$e^2 = e \Rightarrow (\frac{d_\lambda}{n!})^2 e_\lambda^2 = (\frac{d_\lambda}{n!})e_\lambda \Rightarrow e_\lambda^2 = \frac{n!}{d_\lambda}e_\lambda.$$

Portanto o elemento e_λ é um idempotente essencial. Agora resta mostrar que é central. Para isto é suficiente verificar que e_λ comuta com todos elementos de S_n. Seja $\tau \in S_n$ um elemento qualquer da base de FS_n,

$$\begin{aligned} \tau e_\lambda &= \tau \sum_{\sigma\in S_n} \chi_\lambda(\sigma)\sigma = \sum_{\sigma\in S_n} \chi_\lambda(\sigma)\tau\sigma = \sum_{\sigma\in S_n} \chi_\lambda(\sigma)\tau\sigma\tau^{-1}\tau \\ &= \sum_{\pi\in S_n} \chi_\lambda(\tau^{-1}\pi\tau)\pi\tau = \sum_{\pi\in S_n} \chi_\lambda(\pi)\pi\tau = e_\lambda\tau, \end{aligned}$$

já que $\chi_\lambda(\tau^{-1}\pi\tau) = \chi_\lambda(\pi)$. Portanto e_λ é idempotente essencial central. □

Proposição 2.26. *([2],proposição 2.2.2) Seja F um corpo de característica zero e $n \geq 1$. Então existe uma correspondência bijetiva entre S_n-caracteres irredutíveis e partições de n. Seja $\{\chi_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ um conjunto completo de caracteres irredutíveis de S_n e seja d_λ o grau de χ_λ, $\lambda \vdash n$. Então*

$$FS_n = \bigoplus_{\lambda\vdash n} I_\lambda \cong \bigoplus_{\lambda\vdash n} M_{d_\lambda}(F),$$

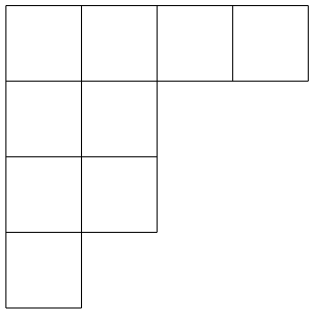
onde $I_\lambda = FS_n e_\lambda$, $e_\lambda = \sum_{\sigma\in S_n} \chi_\lambda(\sigma)\sigma$ é o elemento unidade de $I_\lambda \cong M_{d_\lambda(F)}$.

Definição 2.27. *Se $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \vdash n$, o* ***diagrama de Young*** *associado à λ é o subconjunto finito de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ definido como*

$$D_\lambda = \{(i, j) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} | i = 1, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, \lambda_i\}.$$

Em outras palavras, o diagrama de Young D_λ consiste de n boxes distribuidos em r linhas, de modo que a primeira coordenada i (linha indexada) aumenta de cima para baixo e a segunda coordenada j (coluna indexada) aumenta da esquerda para a direita e o número de boxes na i-ésima linha é exatamente λ_i.

Exemplo 2.28. *Seja* $\lambda = (4, 2, 2, 1)$ *partição de* $n = 9$. *Então*

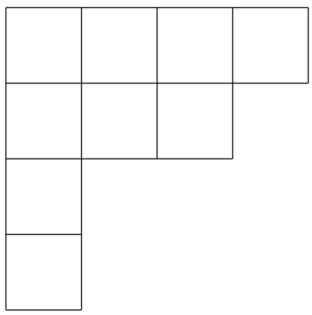
$D_{(4,2,2,1)} =$ 

em que $D_{(4,2,2,1)} = D_{(4,2^2,1)}$.

Definição 2.29. *Para uma partição* $\lambda \vdash n$, *vamos denotar por* λ' *a* ***partição conjugada*** *de* λ. *Então* $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s)$ *é a partição tal que* $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s$, *são os comprimentos das colunas de* D_λ, *com* $s = \lambda_1$.

Observe que o diagrama $D_{\lambda'}$ é obtido de D_λ trocando as linhas pelas colunas.

Exemplo 2.30. *Pelo exemplo anterior temos* $\lambda' = (4, 3, 1, 1)$. *Então* $D_{\lambda'}$ *seria:*

$D_{(4,3,1,1)} =$ 

em que $D_{(4,3,1,1)} = D_{(4,3,1^2)}$.

Definição 2.31. *Seja* $\lambda \vdash n$. *Uma* ***tabela de Young*** T_λ *do diagrama* D_λ *é um preenchimento dos boxes de* D_λ *com os inteiros* $1, \ldots, n$. *Dizemos também que* T_λ *é uma tabela do tipo* λ. *Vamos escrever* $T_\lambda = D_\lambda(a_{ij})$ *onde* a_{ij} *é o inteiro no box* (i, j).

Note que existem $n!$ tabelas distintas do tipo λ.

Definição 2.32. *Uma tabela* T_λ *do tipo* λ *é* ***standard***, *se os inteiros em cada linha e em cada coluna de* T_λ *aumentam da esquerda para a direita e de cima para baixo, respectivamente.*

Exemplo 2.33. *Considere as seguintes tabelas*

$$T_{(5,2,1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 & 7 & 8 \\ \hline 5 & 2 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

não é uma tabela standard. Enquanto que a tabela

$$T_{(4,4,1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 & 6 \\ \hline 3 & 5 & 8 & 9 \\ \hline 7 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

é standard. Em que $T_{(4,4,1)} = T_{(4^2,1)}$.

Existe uma relação entre tabelas standard e o grau dos S_n-caracteres irredutíveis.

Teorema 2.34. *([2],teorema 2.2.6) Dada uma partição $\lambda \vdash n$, o número de tabelas standard do tipo λ é igual a d_λ, o grau de χ_λ, o caráter irredutível correspondente à λ.*

O inteiro d_λ pode ser calculado pela conhecida **fórmula do gancho**. A fim de explicitá-la introduziremos mais algumas definições. Dado um diagrama D_λ, $\lambda \vdash n$, identificamos um box de D_λ com o correspondente ponto (i, j).

Exemplo 2.35. *O terceiro box da primeira linha tem coordenada* $(1, 3)$.

Definição 2.36. *Para qualquer box $(i, j) \in D_\lambda$, definimos o* ***número de gancho*** *com extremidades em (i, j) como*

$$h_{i,j} = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$$

onde $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s)$ é a partição conjugada de λ.

Note que h_{ij} conta com os números dos boxes no "gancho"com extremidades em (i, j), ou seja, os boxes à direita e abaixo de (i, j) junto com o box (i, j). No exemplo seguinte temos uma tabela de Young com os boxes preenchidos com seus respectivos números de gancho.

Exemplo 2.37. *Considere a seguinte tabela, cujo preenchimento dos boxes são os seus respectivos números de gancho.*

$$T_{(4,3,1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 4 & 3 & 1 \\ \hline 4 & 2 & 1 & \\ \cline{1-3} 1 & & & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Proposição 2.38. ***(Formúla do Gancho)***

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod\limits_{(i,j)\in D_\lambda} h_{i,j}}$$

onde o produto percorre todos os boxes de D_λ*.*

Vale destacar que, conforme mencionamos anteriormente d_λ é exatamente o número de tabelas standard do tipo λ.

Definição 2.39. *O* ***estabilizador de linhas de*** T_λ *é*

$$R_{T_\lambda} = S_{\lambda_1}(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1\lambda_1}) \times \cdots \times S_{\lambda_r}(a_{r1}, a_{r2}, \cdots, a_{r\lambda_r}),$$

onde $S_{\lambda_i}(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i\lambda_i})$ *denota o grupo simétrico agindo nos inteiros* a_{i1}, a_{i2}, $\ldots$, $a_{i\lambda_i}$*. Por isso,* R_{T_λ} *é um subgrupo de* S_n *consistindo de todas as permutações estabilizando as linhas de* T_λ*.*

Definição 2.40. *O* ***estabilizador de colunas de*** T_λ *é*

$$C_{T_\lambda} = S_{\lambda'_1}(a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{\lambda'_1 1}) \times \cdots \times S_{\lambda'_s}(a_{1s}, a_{2s}, \cdots, a_{\lambda'_s s}),$$

onde $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s)$ *é uma partição conjugada de* λ *e* $\lambda_1 = s$*. Por isso,* C_{T_λ} *é um subgrupo de* S_n *consistindo de todas as permutações estabilizando as colunas de* T_λ*.*

Exemplo 2.41. *Dada a seguinte tabela standard* $T_{(2,1)}$

$$T_{(2,1)} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1} \end{array} .$$

Obtemos os respectivos estabilizadores de linhas e colunas:

$$R_{T_{(2,1)}} = S_2(1,2) \times S_1(3) = \{(1)(2)(3), (12)(3)\}$$

$$C_{T_{(2,1)}} = S_2(1,3) \times S_1(2) = \{(1)(3)(2), (13)(2)\}$$

Fixando uma partição $\lambda \vdash n$ e uma tabela de Young T_λ, podemos usar estes subgrupos para definir o seguinte elemento de FS_n.

Definição 2.42. *Para qualquer T_λ, definimos o elemento idempotente essencial correspondente por*

$$e_{T_\lambda} = \sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (-1)^\tau \ \sigma\tau,$$

onde $(-1)^\tau$ é o sinal da permutação τ.

Pode-se mostrar que $e_{T_\lambda}^2 = ae_{T_\lambda}$, onde $a = \dfrac{n!}{d_\lambda}$

Exemplo 2.43. *Pelo Exemplo 2.41, temos*

$$\begin{aligned} e_{T_{(2,1)}} &= \sum_{\sigma \in R_{T_{(2,1)}}} \sum_{\tau \in C_{T_{(2,1)}}} ((-1)^\tau) \ \sigma\tau \\ &= (1)(2)(3) + (12) - (13) - (12)(13) \\ &= (1)(2)(3) + (12) - (13) - (132). \end{aligned}$$

Exemplo 2.44. *Seja $\lambda = (1^n) \vdash n$. Para λ obtemos somente uma tabela standard. Pelo Teorema 2.34, $d_\lambda = 1$. Temos também que $C_{T_\lambda} \cong S_n(1,2,\ldots,n)$ e $R_{T_\lambda} \cong \varepsilon_n$, em que ε_n é a identidade de S_n. E isto implica que $e_{T_\lambda} = \sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} ((-1)^\tau)\tau = \sum_{\tau \in S_n} ((-1)^\tau)\tau$.*

Dada uma partição $\lambda \vdash n$, o grupo simétrico S_n age no conjunto de tabelas de Young do tipo λ da seguinte maneira: se $\sigma \in S_n$ e $T_\lambda = D_\lambda(a_{ij})$, então $\sigma T_\lambda = D_\lambda(\sigma(a_{ij}))$.

Exemplo 2.45. *Considere a seguinte tabela:*

$$T_{(3,2,1)} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline 5 & 4 & \\ \cline{1-2} 6 & & \\ \cline{1-1} \end{array} .$$

observe que T_λ não é standard. Tome $\sigma = (23456) \in S_6$, então

$$\sigma T_{(3,2,1)} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 6 & 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} 2 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}.$$

Esta ação tem algumas propriedades:

1. $R_{\sigma T_\lambda} = \sigma R_{T_\lambda}\sigma^{-1}$;

2. $C_{\sigma T_\lambda} = \sigma C_{T_\lambda}\sigma^{-1}$;

3. $\sigma e_{T_\lambda}\sigma^{-1} = e_{\sigma T_\lambda}$.

Agora vamos apresentar alguns resultados importantes acerca deste elemento e_{T_λ}.

Proposição 2.46. *([2], proposição 2.2.13) Para toda tabela de Young T_λ do tipo $\lambda \vdash n$, o elemento e_{T_λ} é um idempotente essencial minimal de FS_n e $FS_n e_{T_\lambda}$ é um ideal à esquerda minimal de FS_n com caracter χ_λ. Se T_λ e T_λ^* são tabelas de Young de mesmo tipo λ, então e_{T_λ} e $e_{T_\lambda^*}$ são conjugados em FS_n para algum $\sigma \in S_n$, ou seja, $e_{\sigma T_\lambda} = \sigma e_{T_\lambda}\sigma^{-1} = e_{T_\lambda^*}$.*

A proposição acima nos diz que para quaisquer duas tabelas T_λ, T_λ^* do mesmo tipo λ, temos que $FS_n e_{T_\lambda} \cong FS_n e_{T_\lambda^*}$, ou seja, os FS_n-módulos minimais gerados por e_{T_λ} e $e_{T_\lambda^*}$ são isomorfos.

Observe que, se $\sigma \in R_{T_\lambda} \cap C_{T_\lambda}$ então $e_{\sigma T_\lambda} = e_{T_\lambda}$ e $FS_n e_{\sigma T_\lambda} = FS_n e_{T_\lambda}$. Além disso, cada tabela standard T_λ corresponde ao FS_n-módulo simples $FS_n e_{T_\lambda}$. Se T_λ e T_λ^* são duas tabelas standard distintas, então os módulos simples correspondentes $FS_n e_{T_\lambda} \cong FS_n e_{T_\lambda^*}$, mas não coincidem. Agora, se $\lambda \neq \mu$ então $FS_n e_{T_\lambda} \ncong FS_n e_{T_\mu}$. As tabelas standard fornecem uma lista completa de somandos diretos simples de componentes I_λ.

Note que se $e_{T_\lambda}^2 = a e_{T_\lambda}$, então $\dfrac{e_{T_\lambda}}{a}$ é um elemento idempotente que gera o mesmo ideal à esquerda $FS_n e_{T_\lambda} = FS_n \dfrac{e_{T_\lambda}}{a}$.

Proposição 2.47. *([2], proposição 2.2.14) Se $T_1, \ldots, T_{d_\lambda}$ são todas tabelas standard do tipo λ, então I_λ, o ideal bilateral de FS_n correspondente à λ, tem a seguinte decomposição*

$$I_\lambda = \bigoplus_{i=1}^{d_\lambda} FS_n e_{T_i}.$$

A seguir daremos dois resultados importantes, que servirão de ferramenta para a demonstração de resultados que utilizaremos na prova do teorema principal, no Capítulo 4.

No próximo teorema, damos uma decomposição em S_{n+1}-módulos irredutíveis de qualquer S_n-módulo induzido até $S_{(n+1)}$. Note que o grupo S_n pode ser imerso em S_{n+1}, ou seja, ele pode ser visto como o subgrupo de todas as permutações fixando o inteiro $n+1$. Sendo assim, denote por M_λ um S_n-módulo irredutível correspondente à partição $\lambda \vdash n$. Denotamos por $M_\lambda \uparrow S_{n+1}$ a indução de M_λ em S_{n+1}. Então M_λ é considerado como S_{n+1}-módulo.

Agora, seja M_μ um S_{n+1}-módulo irredutível correspondente à partição $\mu \vdash n+1$, e seja $S_n \leq S_{n+1}$. Denotamos por $M_\mu \downarrow S_n$ a restrição de M_μ a S_n. Então M_μ é considerado como S_n-módulo.

Teorema 2.48 (Branching rule). *([2], teorema 2.3.1) Considere o grupo S_n imerso em S_{n+1} como o subgrupo fixando o inteiro $n+1$. Então:*

1) Se $\lambda \vdash n$, então

$$M_\lambda \uparrow S_{n+1} \cong \sum_{\mu \in \lambda^+} M_\mu$$

onde λ^+ é o conjunto de todas as partições de $n+1$ cujo diagrama é obtido de D_λ adicionando um box;

2) Se $\mu \vdash n+1$, então

$$M_\mu \downarrow S_n \cong \sum_{\lambda \in \mu^-} M_\lambda$$

onde μ^- é o conjunto de todas as partições de n cujo diagrama é obtido de D_μ retirando um box.

Observação 2.49. *Note que podemos imergir o grupo $S_n \times S_m$ em S_{n+m} definindo uma ação de S_m em $\{n+1, \ldots, n+m\}$. Lembre-se que, se M é um S_n-módulo e N é um S_m-módulo, então $M \otimes_F N$ tem uma estrutura de $S_n \times S_m$-módulo.*

Definição 2.50. *Se M é um S_n-módulo e N um S_m-módulo, então o* ***produto tensorial externo*** *de M e N é definido como*

$$M \hat{\otimes} N = (M \otimes N) \uparrow S_{n+m}.$$

Considere as seguintes partições $\lambda \vdash n$, $\mu \vdash m$ e $\gamma \vdash n+m$. Agora vamos exibir um algoritmo chamado de **Regra de Littlewood-Richardson**. O algoritmo mostra como obter o diagrama associado à partição $\gamma = \lambda\widehat{\otimes}\mu$. O diagrama da partição γ é construído à partir dos diagramas correspondentes as partições λ e μ. A regra de Littlewood-Richardson é a seguinte: considere $T_\mu = D_\mu(a_{ij})$ em que os $a_{ij}'s$ são símbolos. Então

1. Adicione para D_λ todos os boxes com os símbolos a_{1j}. Após a adição, nenhuma linha da nova tabela pode ter mais boxes que a linha anterior.
2. Em seguida, adicione todos os boxes com os símbolos a_{2j}, de acordo com a mesma regra, e assim por diante, até todos os boxes com os símbolos serem adicionados.
3. Esses acréscimos devem ser tais que para todos i, se $y < j$, então a_{iy} aparece em uma coluna posterior que a_{ij}, e para todo j, se $x < i$, então a_{xj} aparece em uma linha anterior à de a_{ij}.

2.4 S_n-ação em Polinômios Multilineares

Nesta seção vamos dar alguns resultados importantes sobre S_n-módulos irredutíveis. Também introduzimos a ação do grupo simétrico S_n no espaço dos polinômios multilineares P_n em n variáveis fixadas. Assim, obtemos um isomorfismo de FS_n-módulos entre a álgebra de grupo FS_n e P_n.

Lema 2.51. *Seja M um S_n-módulo irredutível com caracter $\chi(M) = \chi_\lambda$, $\lambda \vdash n$. Então M pode ser gerado como um S_n-módulo por um elemento do tipo $e_{T_\lambda} f$ para algum $f \in M$ e alguma tabela de Young T_λ do tipo λ. Além disso, para qualquer tabela de Young T_λ^* do tipo λ, existe $f' \in M$ tal que $M = FS_n e_{T_\lambda^*} f'$.*

Demonstração: Considere $FS_n = \bigoplus_{\mu\vdash n} I_\mu$, onde $I_\mu = FS_n e_\mu$ é um ideal bilateral de FS_n correspondente à partição μ, em que e_μ é um elemento idempotente central. Vimos pela Proposição 2.47 que $I_\mu = FS_n e_\mu = \oplus_{i=1}^{d_\mu} FS_n e_{T_i}$, onde $T_1, \ldots, T_\mu$ são tabelas standard do tipo μ.

Como os elementos idempotentes são ortogonais, temos $e_\lambda e_\mu = 0$ para $\lambda \neq \mu$. Assim, $0 \neq M = FS_n M = \oplus_{\mu\vdash n} I_\mu M$. Por hipótese M é irredutível com caracter $\chi(M) = \chi_\lambda$, então $M = I_\lambda M = \oplus_{i=1}^{d_\lambda} FS_n e_{T_i} M$. Pela irredutibilidade de M, existe uma única tabela standard T_λ tal que $M = FS_n e_{T_\lambda} M$. Se $0 \neq e_{T_\lambda} f \in M$, novamente pela irredutibilidade de M, segue que $FS_n e_{T_\lambda} f = M$.

Agora suponha que T_λ^* é outra tabela de Young do mesmo tipo λ, vimos pela Proposição 2.46, que $e_{T_\lambda} = \sigma e_{T_\lambda^*} \sigma^{-1}$ para algum $\sigma \in S_n$. Tomando $f' = \sigma^{-1} f$, segue que $M = FS_n e_{T_\lambda} f = FS_n \sigma e_{T_\lambda^*} \sigma^{-1} f = FS_n \sigma e_{T_\lambda^*} f' = FS_n e_{T_\lambda^*} f'$. $\square$

O lema anterior diz que, dada uma partição $\lambda \vdash n$ e uma tabela de Young do tipo λ, qualquer S_n-módulo irredutível M tal que $\chi(M) = \chi_\lambda$ pode ser gerado por um elemento do tipo $e_{T_\lambda} f$ para algum $f \in M$.

Pela definição de R_{T_λ}, para qualquer $\sigma \in R_{T_\lambda}$ temos que $\sigma e_{T_\lambda} f = e_{T_\lambda} f$, ou seja, $e_{T_\lambda} f$ é invariante pela R_{T_λ}-ação. De fato, tome $\sigma \in R_{T_\lambda}$ então

$$\sigma e_{T_\lambda} f = \sigma(\sum_{\substack{\tilde{\sigma} \in R_{T_\lambda} \\ \tau \in C_{T_\lambda}}} (-1)^\tau \tilde{\sigma}\tau) f = (\sum_{\substack{\tilde{\sigma} \in R_{T_\lambda} \\ \tau \in C_{T_\lambda}}} (-1)^\tau \sigma\tilde{\sigma}\tau) f.$$

Como σ, $\tilde{\sigma} \in R_{T_\lambda}$ então $\sigma\tilde{\sigma} \in R_{T_\lambda}$, pois $R_{T_\lambda} \leq S_n$. Tome $\sigma\tilde{\sigma} = \beta \in R_{T_\lambda}$,

$$\sigma e_{T_\lambda} f = (\sum_{\substack{\beta \in R_{T_\lambda} \\ \tau \in C_{T_\lambda}}} (-1)^\tau \beta\tau) f = e_{T_\lambda} f.$$

Observação 2.52. *O elemento idempotente essencial e_{T_λ} é invariante por multiplicação de qualquer $\sigma \in R_{T_\lambda}$.*

A partir de agora vamos considerar A uma PI-álgebra e $Id(A)$ seu T-ideal de identidades. Sabemos que se F é um corpo de característica zero, o conjunto $Id(A)$ é determinado por seus polinômios multilineares.

Vimos na *Seção 1.4* que P_n é o espaço de todos os polinômios multilineares de grau n nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, cuja base é dada pelo conjunto das palavras

$$\{x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}.$$

Observação 2.53. *P_n é um FS_n-módulo à esquerda ou simplesmente S_n-módulo à esquerda. Vamos considerar o seguinte produto bilinear*

$$\begin{array}{rcl} FS_n \times P_n & \to & P_n \\ (\sigma, f) & \mapsto & \sigma f \end{array}$$

onde $\sigma f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ para toda $\sigma \in S_n$ e para todo $f \in P_n$. Assim, P_n munido deste produto é um FS_n-módulo.

Vamos considerar a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & FS_n & \to & P_n \\ & \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma & \mapsto & \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)} \end{array}$$

tal que $\varphi(a) = a(x_1 \cdots x_n)$, para todo $a \in FS_n$. É possível verificar que φ é um isomorfismo de FS_n-módulo à esquerda. Assim, temos uma correspondência biunívoca entre FS_n e P_n. Diante deste isomorfismo podemos tratar os elementos de FS_n como polinômios em P_n e vice-versa.

Além disso, como T-ideais são invariantes por permutações de variáveis temos

$$\sigma f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma_n}) \in P_n \cap Id(A),$$

para todo $f \in P_n \cap Id(A)$ e para toda $\sigma \in S_n$. Logo, $P_n \cap Id(A)$ é um S_n-submódulo à esquerda de P_n. E assim o quociente $P_n(A) = \dfrac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$ é um S_n-módulo à esquerda. Se $F\langle X\rangle$ é uma álgebra livre de posto enumerável em $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, então $P_n(A)$ é o espaço dos elementos multilineares nas n primeiras variáveis da álgebra relativamente livre $\dfrac{F\langle X\rangle}{Id(A)}$. Neste caso para $V = var(A)$ também escrevemos $P_n(V) = P_n(A)$.

Definição 2.54. *O S_n-caracter de $P_n(A) = \dfrac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$ é chamado de **cocaracter** de A, e é denotado por $\chi_n(A)$, para $n \geq 1$.*

Vamos decompor o cocaracter de A em caracteres irredutíveis

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda,$$

onde χ_λ é o S_n-caracter irredutível associado à partição $\lambda \vdash n$ e $m_\lambda \geq 0$ é a correspondente multiplicidade. Escrevendo $P_n(A)$ como soma direta de submódulos irredutíveis, m_λ é exatamente o número de submódulos isomorfos à M_λ nesta decomposição.

Teorema 2.55. *Seja A uma PI-álgebra com cocaracter $\chi_n(A)$. Para uma partição $\mu \vdash n$, a multiplicidade m_μ é igual a zero se, e somente se, para qualquer tabela de Young T_μ do tipo μ e para qualquer polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n$, a álgebra A satisfaz a identidade $e_{T_\mu} f \equiv 0$.*

Demonstração: Considere a seguinte decomposição de FS_n,

$$FS_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda,$$

onde $I_\lambda = FS_n e_\lambda$ é um ideal bilateral de FS_n.

Considere $P_n \cong Q \oplus J$, onde $Q = P_n \cap Id(A)$ e $J \cong \dfrac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$. Fixe uma partição $\mu \vdash n$. Seja M_μ um FS_n-módulo irredutível correspondente à partição μ. Segue que $m_\mu = 0$ se, e somente se, M_μ não aparece na decomposição de $J \cong \dfrac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$.

Para a decomposição do módulo J temos a seguinte afirmação, $J \subseteq FS_n\bar{e}_1 \oplus \cdots \oplus FS_n\bar{e}_\nu$, onde $\bar{e}_i$, com $i = 1, \ldots, \nu$, são elementos idempotentes minimais centrais correspondentes a algumas partições $\lambda \neq \mu$, definidos no Lema 2.25.

Seja $I_\mu = FS_ne_\mu$, onde e_μ é idempotente minimal central. Então

$$I_\mu J \subseteq FS_ne_\mu(FS_n\bar{e}_1 \oplus \cdots \oplus FS_n\bar{e}_\nu) = FS_ne_\mu FS_n\bar{e}_1 \oplus \cdots \oplus FS_ne_\mu FS_n\bar{e}_\nu = 0,$$

pois os elementos idempotentes são ortogonais, ou seja, $e_\mu\bar{e}_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, \nu$. Logo $m_\mu = 0$ se, e somente se, $I_\mu J = 0$.

Como $I_\mu J = 0$, então $I_\mu(\dfrac{P_n}{P_n \cap Id(A)}) = (0)$, ou seja, $I_\mu P_n \subseteq P_n \cap Id(A) = Q$. Pela Proposição 2.47, temos $I_\mu = (\bigoplus_{i=1}^{d_\mu} FS_ne_{T_{i,\mu}})$, então $(\bigoplus_{i=1}^{d_\mu} FS_ne_{T_{i,\mu}})P_n \subseteq Q$. Portanto, $e_{T_\mu}f \in Q$ para qualquer $f \in P_n$ e para qualquer tabela T_μ.

□

Teorema 2.56. *Para qualquer polinômio multilinear $f \in P_n$, existe um conjunto finito de polinômios $g_1, \ldots, g_r \in P_n$ e partições $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ de n tais que*

$$FS_nf = FS_ne_{T_1}g_1 + \cdots + FS_ne_{T_r}g_r.$$

Demonstração: Escreva $M = FS_nf$. Como pelo *teorema de Maschke* todo FS_n-módulo é semissimples, vamos decompor $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_r$ em uma soma de FS_n-módulos irredutíveis. Pelo Lema 2.51 existe $g_1 \in M_1, \ldots, g_r \in M_r$ e tabelas de Young $T_1, \ldots, T_r$ tais que, $FS_nf = FS_ne_{T_1}g_1 \oplus \cdots \oplus FS_ne_{T_r}g_r$. □

2.5 S_n-Representações e Ganchos

Nesta seção mostraremos como obter polinômios simétricos e alternados através de tabelas de Young contidas em ganchos. Mas antes disto relembraremos algumas definições e daremos mais alguns resultados úteis.

Sejam $\lambda \vdash n$ e D_λ o correspondente diagrama de Young. Para $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \vdash n$ e $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_t) \vdash m$, dizemos que $\lambda \geq \mu$ se, e somente se, $k \geq t$ e $\lambda_i \geq \mu_i$, $\forall i$. Portanto se $\lambda \geq \mu$ significa que D_μ é um subdiagrama de D_λ. Temos que se $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \vdash n$ então $h(\lambda) = k$ é a altura de λ e $l(\lambda) = \lambda_1$ é o comprimento de λ.

Sejam T_λ uma tabela de Young e

$$e_{T_\lambda} = \sum_{\substack{\sigma \in R_{T_\lambda} \\ \tau \in C_{T_\lambda}}} (-1)^\tau \sigma\tau = \left(\sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sigma \right) \left(\sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (-1)^\tau \tau \right)$$

o correspondente elemento idempotente essencial de FS_n, onde R_{T_λ} é um subgrupo de S_n que estabiliza as linhas de T_λ e C_{T_λ} é um subgrupo que estabiliza as colunas de T_λ.

Lema 2.57. *Sejam H um subgrupo de C_{T_λ}, M um FS_n-módulo e $e_{T_\lambda}u \neq 0$ para algum $u \in M$. Então*

$$\left(\sum_{\sigma \in H} (-1)^\sigma \sigma \right) e_{T_\lambda} u \neq 0.$$

Demonstração: Escreva $C_{T_\lambda} = a_1H \cup a_2H \cup \cdots \cup a_mH$, onde $a_1 = 1, a_2, \ldots, a_m$ são representantes em um tranversal à esquerda de H em C_{T_λ}. Denotaremos $r = \sum_{\sigma \in H} (-1)^\sigma \sigma$. Se $re_{T_\lambda}u = 0$ então $a_i re_{T_\lambda}u = 0$ em M para todo $i = 1, \ldots, m$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} e_{T_\lambda}^2 u &= \left(\sum_{\tau \in R_{T_\lambda}} \tau \right) \left(\sum_{\sigma \in C_{T_\lambda}} (-1)^\sigma \sigma \right) e_{T_\lambda} u \\ &= \left(\sum_{\tau \in R_{T_\lambda}} \tau \right) (a_1 re_{T_\lambda} u \pm \cdots \pm a_m re_{T_\lambda} u) = 0, \end{aligned}$$

uma contradição, desde que $e_{T_\lambda}^2 = \gamma e_{T_\lambda}$ para algum inteiro $\gamma \neq 0$ e $e_{T_\lambda}u \neq 0$. □

De modo análogo e fazendo algumas modificações do argumento anterior provamos o seguinte lema.

Lema 2.58. *Sejam H um subgrupo de R_{T_λ}, M um FS_n-módulo e $e_{T_\lambda}u \neq 0$ para algum $u \in M$. Então,*

$$\left(\sum_{\sigma \in H} \sigma \right) \left(\sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (-1)^\tau \tau \right) e_{T_\lambda} u \neq 0.$$

De agora em diante vamos considerar $\lambda \vdash n$ e T_λ uma tabela associada à λ.

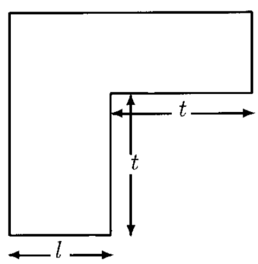
Definição 2.59. *Dizemos que um polinômio multilinear $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ corresponde à T_λ, se $f = e_{T_\lambda} f_0$ para algum polinômio multilinear $f_0 \in P_n$.*

Observação 2.60. *Se $f \neq 0$ é um polinômio correspondente à tabela T_λ então FS_nf é um S_n-módulo irredutível. Temos que $FS_ne_{T_\lambda}$ é um FS_n-módulo irredutível.*

Definição 2.61. *Dados os inteiros $l, d, t \geq 0$ definimos a partição*

$$h(d, l, t) = (\underbrace{l + t, \ldots, l + t}_{d}, \underbrace{l, \ldots, l}_{t}).$$

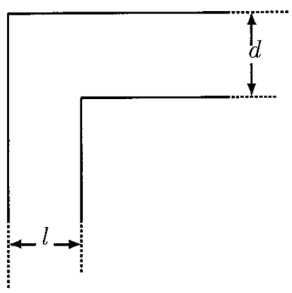
O diagrama associado a partição $h(d, l, t)$ é dado pelo gancho abaixo



Definição 2.62. *Definimos o gancho infinito $H(d, l)$ da seguinte forma:*

$$H(d, l) = \bigcup_{t \geq 1} h(d, l, t)$$

Assim, o gancho infinito pode ser dado como o conjunto de todos diagramas cuja forma encontra-se na região em forma de gancho, dado na figura abaixo.



O inteiro d é chamado de **braço** e l de **pé** do gancho. Dizemos que uma partição $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ encontra-se no gancho $H(d, l)$ e escrevemos $\lambda \in H(d, l)$, se o diagrama de Young D_λ correspondente está contido em $H(d, l)$, o que significa que $\lambda_{d+1} \leq l$. Analogamente, para M um S_n-módulo com caracter $\chi(M) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$, escrevemos $\chi(M) \subseteq H(d, l)$ quando $\lambda \in H(d, l)$ para toda partição λ tal que $m_\lambda \neq 0$.

Os dois lemas seguintes apresentam propriedades importantes dos ganchos. Eles nos mostram como obter polinômios simétricos e alternados em certas variáveis a partir de tabelas de Young.

Lema 2.63. *Seja* $\lambda \vdash n$ *tal que* $\lambda \geq h(d,l,t)$ *para alguns* l,d,t, *e seja* $f(x_1,\ldots,x_n)$ *um polinômio multilinear correspondente à uma tabela* T_λ. *Então existe* $r \in FS_n$ *tal que* $rf \neq 0$ *e um subconjunto* Y *de* $\{x_1,\ldots,x_n\}$ *tal que:*

1. $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_d$, rf é simétrico em cada conjunto de variáveis Y_j, $j = 1,\ldots,d$, e $|Y_j| = t + l$;

2. rf pode ser decomposto em uma soma de polinômios multilineares $rf = f_1 + f_2 + \cdots + f_k$ tais que para todo f_j existe uma partição $Y = Y_1' \cup \cdots \cup Y_{t+l}'$ com $|Y_i'| = d$, e f_j é alternado em cada conjunto de variáveis Y_i', $i = 1,\ldots,t+d$.

Demonstração: Por hipótese, a tabela T_λ contém uma tabela retangular T_0 com d linhas e $t+l$ colunas. Sejam N_j, $(j = 1,\ldots,d)$ o conjunto dos inteiros na j-ésima linha de T_0, N_i', $(i = 1,\ldots,t+l)$, o conjunto dos inteiros na i-ésima coluna de T_0 e $N = N_1 \cup \cdots \cup N_d$. Sejam $H = \{\sigma \in R_{T_\lambda} |\ \sigma(i) = i \text{ para todo } i \notin N\}$, o conjunto que permuta somente os elementos das linhas de T_0, e

$$r_0 = \sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (-1)^\tau \tau, \qquad r = \left(\sum_{\sigma \in H} \sigma\right) r_0.$$

Sejam $Y_j = \{x_s |\ s \in N_j\}$ e $Z_i = \{x_s |\ s \in N_i'\}$.

Pode se mostrar que o elemento $g = rf$ é simétrico nas variáveis de Y_j para cada j. De fato, tome $\beta \in H$

$$\beta g = \beta r f = \beta \left(\sum_{\sigma \in H} \sigma\right) r_0 f = \left(\sum_{\sigma \in H} \beta\sigma\right) r_0 f = \left(\sum_{\tau \in H} \tau\right) r_0 f = rf = g.$$

Denotamos por $\tau = \beta\sigma \in H$, para toda permutação $\sigma \in H$.

Por outro lado, para cada $\beta \in C_{T_\lambda}$ temos

$$\beta\,(r_0 f) = \beta \left(\sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (-1)^\tau \tau f\right) = \sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (-1)^\tau\ \beta\tau f = (-1)^\beta \left(\sum_{\tilde{\beta} \in C_{T_\lambda}} (-1)^{\tilde{\beta}} \tilde{\beta} f\right) = (-1)^\beta\,(r_0 f)\,,$$

em que $\beta\tau = \tilde{\beta}$. Então o polinômio $r_0 f$ é alternado nas variáveis de cada Z_i. Logo para todo $\sigma \in H$ o elemento $\sigma r_0 f$ é alternado nas variáveis de cada $Y_i' = \sigma(Z_i)$ para todo $i = 1,\ldots,t+l$. Portanto, rf é o polinômio desejado e pelo Lema 4.10, obtemos que rf é não-nulo. □

Lema 2.64. *Seja* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *um polinômio multilinear correspondente à tabela de Young* T_λ *e suponha que* $\lambda \geq h(d, l, t)$. *Então para algum* $r \in FS_n, rf \neq 0$ *e existe um subconjunto* Y *de* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *tal que:*

1. $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_l$, rf *é alternado em cada conjunto de variáveis* $Y_j, j = 1, \ldots, l$, *e* $|Y_j| = t + d$;

2. rf *pode ser decomposto em uma soma de polinômios multilineares* $rf = f_1 + \cdots + f_k$ *tal que para todo* f_j *existe uma partição* $Y = Y_1^{'} \cup \cdots \cup Y_{t+d}^{'}$, *com* $|Y_i^{'}| = l$ *e* f_j *é simétrico em cada conjunto de variáveis* $Y_i^{'}$, $i = 1, \ldots, t + l$.

Demonstração: Como no lema anterior, T_λ contém uma tabela retangular T_0 com $d + t$ linhas e l colunas. Sejam N_j, $(j = 1, \ldots, l)$ um conjunto de inteiros na j-ésima coluna de T_0, $N_i^{'}$, $(i = 1, \ldots, t + d)$, o conjunto de inteiros na i-ésima linha de T_0 e $N = N_1 \cup \cdots \cup N_l$. Denote por $H = \{\sigma \in C_{T_\lambda} | \ \sigma(i) = i, \text{ para todo } i \notin N\}$, o conjunto que permuta somente os elementos das colunas de T_0 e

$$r = \left(\sum_{\sigma \in H} (-1)^\sigma \sigma \right).$$

Sejam $Y_j = \{x_s | \ s \in N_j\}$ e $Z_i = \{x_s | s \in N_i^{'}\}$. pela Observação 2.52, o elemento $f = e_{T_\lambda} f_0$ com $f_0 \in P_n$, é simétrico nas variáveis de Z_i. consequentemente, para todo $\sigma \in H$ o polinômio σf é simétrico nas variáveis de $Y_i^{'} = \sigma(Z_i)$. Isto implica a segunda parte do lema. Além disto, o polinômio rf é não-nulo pelo Lema 4.9, é alternado nas variáveis de Y_j para todo $j = 1, \ldots, l$. $\square$

Observação 2.65. *Seja* $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ *um conjunto de variáveis. Observe que se* f *é um polinômio multilinear alternado nas variáveis* y_i, $i = 1, \ldots, n$, *então multiplicando* f *por* $\sum_{\sigma \in S_m} \sigma$, *onde* S_m *age em pelo menos duas variáveis do conjunto* Y, *obtemos que* $(\sum_{\sigma \in S_m} \sigma) f$ *é nulo. De forma análoga, se* f *é simétrico nas variáveis do conjunto* Y, *e se multiplicarmos* f *por* $\sum_{\sigma \in S_m} (-1)^\sigma \sigma$, *então* $(\sum_{\sigma \in S_m} (-1)^\sigma \sigma) f$ *é nulo.*

3

Sequência de Codimensões de Álgebras e Álgebras Graduadas

Neste capítulo falaremos de álgebras graduadas, álgebras verbalmente primas, envolvente de Grassmann e daremos algumas propriedades importantes destas álgebras. Vamos também estudar o comportamento da sequência de codimensões $c_n(A)$ de A. Em todo Capítulo F denotará um corpo de característica zero e A uma PI-álgebra.

3.1 Codimensões de uma Álgebra

Considere P_n o conjunto de todos os polinômios multilineares de $F\langle X\rangle$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Como vimos na Seção 2.4, o conjunto $\{x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(n)} | \sigma \in S_n\}$ é uma base de P_n como espaço vetorial. Assim $dim P_n = n!$. Se A é uma álgebra sobre um corpo de característica zero, vimos que o estudo de $Id(A)$ é equivalente ao estudo de $P_n \cap Id(A)$ para todo $n \geq 1$. Vimos ainda, como P_n e $P_n \cap Id(A)$ são FS_n-módulos então $\frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$ também é um FS_n-módulo, a partir de agora o denotaremos por $P_n(A)$.

Definição 3.1. *O inteiro não-negativo*

$$c_n(A) = dim P_n(A) = dim \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$$

é chamado a n-ésima codimensão da álgebra A. Se ν é uma variedade de álgebras e $\nu = var(A)$, então definimos $c_n(\nu) = c_n(A)$.

Temos que $c_n(A) = n! - dim(P_n \cap Id(A)) \leq n!$.

Observação 3.2. *A é uma PI-álgebra se, e somente se, para algum $n \in N$, $dim(P_n \cap Id(A)) \geq 1$.*

Observe que se $c_m(A) < m!$, para algum $m \in N$, então existe $0 \neq f(x_1, \ldots, x_m) \in P_m \cap Id(A)$, e assim, $f(x_1, \ldots, x_m)x_{m+1} \cdots x_n \in P_n \cap Id(A)$. Logo $c_n(A) < n!$ para todo $n \geq m$.

Exemplo 3.3. *Seja A uma álgebra nilpotente de grau m. Assim $a_1 \cdots a_m = 0$ para quaisquer $a_1, \ldots, a_m \in A$. Segue que $x_1 \cdots x_m \in Id(A)$, e assim $x_1 \cdots x_n \in Id(A)$ para todo $n \geq m$. Portanto $P_n \cap Id(A) = P_n$ e daí $c_n(A) = 0$ para todo $n \geq m$.*

Sejam F um corpo de característica zero, K uma extensão de F e A uma F-álgebra. Na Seção 1.5 vimos que, definindo o seguinte produto $\lambda(a \otimes k) := a \otimes (\lambda k)$, $\forall \lambda \in K, a \in A$ e $k \in K$, podemos dar a $\bar{A} = A \otimes_F K$ uma estrutura de K-álgebra. Temos pela Proposição 1.57 que $Id(A)^F \otimes_F K = Id^K(A \otimes_F K)$, e assim podemos considerar álgebras sobre corpos algebricamente fechados, pois é suficiente tomar K o fecho algébrico de F e como vimos as identidades serão as mesmas.

O teorema seguinte nos diz que a sequência de codimensões de A sobre F coincide com a sequência de codimensões de $\bar{A}$ sobre K.

Teorema 3.4. *Se A é uma F-álgebra e K é uma extensão de F, então*

$$c_n^K(\bar{A}) = c_n^F(A), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Demonstração: Ver [2], seção 4.1, página 93. □

Para finalizar esta seção apresentaremos alguns conceitos e resultados fundamentais para demonstrar o *teorema de Regev*, que nos mostra que se A é uma PI-álgebra então sua sequência de codimensões é exponencialmente limitada.

Definição 3.5. *Sejam $d, n \in N$ tais que $2 \leq d \leq n$. Uma permutação $\sigma \in S_n$ é d-ruim se existe $1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n$ tal que $\sigma(i_1) > \cdots > \sigma(i_d)$. No caso em que σ não é d-ruim dizemos que σ é d-boa. Chamamos um monômio $x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)}$ de d-ruim (respectivamente de d-bom) se σ é uma permutação d-ruim (respectivamente d-boa).*

Exemplo 3.6. *A permutação identidade é d-boa para $d = 2$ e todo $n \geq 2$.*

Lema 3.7. *O número total de d-boas permutações em S_n não excede $(d-1)^{2n}$.*

Demonstração: Ver [2], seção 4.2, página 94. □

Teorema 3.8. ***(Regev)*** *Se uma álgebra A satisfaz uma identidade de grau $d \geq 1$, então $c_n(A) \leq (d-1)^{2n}$.*

Demonstração: Podemos assumir que A satisfaz uma identidade multilinear de grau d da forma

$$x_1 \cdots x_d - \sum_{\sigma \in S_d,\ \sigma \neq 1} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(d)} \equiv 0. \tag{3.1}$$

Afirmamos que o espaço $\frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$ é gerado por monômios d-bons $x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)}$. Suponha por absurdo, que existe um monômio $x_{\rho(1)} \cdots x_{\rho(n)} = f$ multilinear d-ruim que não é combinação linear módulo $(P_n \cap Id(A))$ de monômios d-bons em P_n, sendo este, minimal na ordem lexicográfica. Como ρ é uma permutação d-ruim, existem $1 \leq j_1 < \cdots < j_d \leq n$ tais que $\rho(j_1) > \cdots > \rho(j_d)$. Agora vamos denotar por $a_0 = x_{\rho(1)} \cdots x_{\rho(j_1 - 1)}$, $a_1 = x_{\rho(j_1)} \cdots x_{\rho(j_2 - 1)}$, $\ldots$, $a_d = x_{\rho(j_d)} \cdots x_{\rho(n)}$. Então $a_1 > \cdots > a_d$ pela ordem lexicográfica de monômios, e assim,

$$a_0 a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(d)} < a_0 a_1 \cdots a_d = f$$

para qualquer $\sigma \in S_d$, $\sigma \neq 1$. Pela minimalidade de f, segue que qualquer monômio $a_0 a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(d)}$ com $\sigma \neq 1$ é uma combinação linear módulo $(P_n \cap Id(A))$ de monômios d-bons $x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)}$. Mas então, desde que

$$f = a_0 a_1 \cdots a_d = \sum_{\sigma \in S_d,\ \sigma \neq 1} \alpha_\sigma a_0 a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(d)} \quad (mod P_n \cap Id(A)),$$

obtemos que f é uma combinação linear módulo $(P_n \cap Id(A))$ de monômios d-bons, o que é uma contradição. Portanto temos que o espaço $\frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$ é gerado por monômios d-bons. Pelo Lema 3.7, $c_n(A)$ é limitada por $(d-1)^{2n}$. □

3.2 Álgebras G-Graduadas

Nesta seção falaremos de álgebras graduadas por um grupo qualquer e daremos alguns exemplos. Vamos considerar A uma F-álgebra e G um grupo qualquer.

Definição 3.9. *A álgebra A é G-**graduada** se A pode ser escrita como soma direta de subespaços $A = \oplus_{g \in G} A^{(g)}$, tais que para todo $g, h \in G$, $A^{(g)} A^{(h)} \subseteq A^{(gh)}$.*

Pela definição é claro que, qualquer $a \in A$ pode ser escrito unicamente como uma soma finita $a = \sum_{g \in G} a_g$ com $a_g \in A^{(g)}$. Os subespaços $A^{(g)}$ são chamados de componentes homogêneas de A. Um elemento $a \in A$ é homogêneo se $a \in A^{(g)}$ para algum $g \in G$. Um subespaço $B \subseteq A$ é graduado ou homogêneo se $B = \oplus_{g \in G} (B \cap A^{(g)})$. Por outro lado, B é graduado se para qualquer $b \in B, b = \sum_{g \in G} b_g$ implica que $b_g \in B, \forall\ g \in G$.

Exemplo 3.10. *Qualquer álgebra A pode ser graduada por um grupo G definindo $A^{(e)} = A$ e $A^{(g)} = 0$ para qualquer $g \neq e$, onde e denota o elemento neutro de G. Tal graduação é chamada* ***graduação trivial****.*

Exemplo 3.11. *Seja $A = F\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre, não unitária gerada por X. Defina $A^{(n)} = 0$ se $n \leq 0$ e $A^{(n)} = span_F\{m \in F\langle X\rangle; m$ é monômio de grau total $n\}$, se $n > 0$. Então $A = \oplus_{n\in Z}A^{(n)}$ é uma $\mathbb{Z}$-graduação de $F\langle X\rangle$.*

Se $X_k = \{x_1, \ldots, x_k\}$ é um conjunto finito, então $A = F\langle X_k\rangle$, a álgebra associativa livre de posto k, pode ser graduada pelo grupo $Z^k = Z \oplus \cdots \oplus Z$ definindo $A^{(n_1,\ldots,n_k)} = \{f \in F\langle X_k\rangle \mid deg_{x_i}f = n_i, i = 1, \ldots, k\}$. Assim $f \in A^{(n_1,\ldots,n_k)}$ é multihomogêneo.

Exemplo 3.12. *A álgebra de grupo $A = FG$ é naturalmente graduada por G definindo $A^{(g)} = span\{g\}$.*

Sejam G um grupo finito e X um conjunto infinito e enumerável. Se $X = \cup_{g\in G}X_g$ é uma decomposição de X como uma união disjunta, onde $X_g = \{x_1^{(g)}, x_2^{(g)}, \ldots\}$, dizemos que as indeterminadas de X_g possuem grau homogêneo g. O grau homogêneo de um monômio $x_{i_1}^{(g_1)} \ldots x_{i_t}^{(g_t)} \in F\langle X\rangle$ é definido por $g_1 \ldots g_t$. Denote por $F\langle X\rangle^{(g)}$ o subespaço de $F\langle X\rangle$ gerado por todos monômios com grau homogêneo g. Note que $F\langle X\rangle^{(g)}F\langle X\rangle^{(h)} \subseteq F\langle X\rangle^{(gh)}, \forall g, h \in G$. Assim, $F\langle X\rangle = \oplus_{g\in G}F\langle X\rangle^{(g)}$ determina uma G-graduação em $F\langle X\rangle$. Esta álgebra é denotada por $F\langle X\rangle^{gr}$ e denominada a **álgebra livre G-graduada** de posto enumerável sobre F. Temos também que os elementos de $F\langle X\rangle^{gr}$ são chamados de polinômios G-graduados.

Definição 3.13. *Sejam $A = \oplus_{g\in G}A^{(g)}$ e $B = \oplus_{g\in G}B^{(g)}$ álgebras G-graduadas. Dizemos que a aplicação $\psi : A \to B$ é homomorfismo de álgebras G-graduadas se $\psi(A^{(g)}) \subseteq B^{(g)}$ para todo $g \in G$.*

Observação 3.14. *Um isomorfismo de álgebras G-graduadas é um homomorfimo de álgebras G-graduadas bijetivo.*

A álgebra $F\langle X\rangle^{gr}$ têm a seguinte proporiedade universal: se A é uma álgebra G-graduada e $\varphi : X \to A$ é uma aplicação satisfazendo $\varphi(X_g) \subseteq A^{(g)}$, para todo $g \in G$, então φ pode ser extendida unicamente até um homomorfismo $\bar{\varphi} : F\langle X\rangle^{gr} \to A$ de álgebras G-graduadas.

Definição 3.15. *Seja $A = \oplus_{g\in G}A^{(g)}$ uma álgebra G-graduada.*

1. *Dizemos que um polinômio G-graduado $f(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_n^{(g_n)}) \in F\langle X\rangle^{gr}$ é uma* ***identidade G-graduada de*** *A, se $f(a_1^{(g_1)}, \ldots, a_n^{(g_n)}) = 0$ para todo $a_1^{(g_1)} \in A^{(g_1)}, \ldots, a_n^{(g_n)} \in A^{(g_n)}$. Assim, escrevemos $f \equiv 0$ em A.*

2. *O conjunto* $Id^{(gr)}(A) = \{f \in F\langle X\rangle^{gr} | f \equiv 0 \text{ em } A\}$ *é dito o* ***ideal de identidades*** G***-graduadas de*** A.

Observação 3.16. *As identidades polinomiais ordinárias não graduadas podem ser consideradas como graduadas. Assim* $Id(A) \subseteq Id^{gr}(A)$.

Agora vamos denotar por $End^{gr}(F\langle X\rangle)$ o conjunto de todos endomorfismos G-graduados ϕ de $F\langle X\rangle^{gr}$, ou seja, endomorfismos ϕ de $F\langle X\rangle^{gr}$ tais que $\phi(F\langle X\rangle^{(g)}) \subseteq F\langle X\rangle^{(g)}$ para todo $g \in G$.

Definição 3.17. *Dizemos que um ideal* I *da álgebra livre* G*-graduada* $F\langle X\rangle^{gr}$ *é um* T_G*-ideal, se* $\phi(I) \subseteq I$*, para todo* $\phi \in End^{gr}(F\langle X\rangle)$*, ou seja,* I *é um ideal invariante sob todos os endomorfimos* ϕ *de* $F\langle X\rangle^{gr}$ *que preservam a* G*-graduação.*

Note que, fixada uma álgebra G-graduada $A = \oplus_{g\in G}A^{(g)}$, temos que $Id^{(gr)}(A)$ é um T_G-ideal de A.

3.3 Superalgebra e Envolvente de Grassmann

Dentre as álgebras G-graduadas se destacam as $\mathbb{Z}_2$-graduadas, também denominadas **superalgebras**.

Definição 3.18. *Uma* F*-álgebra* A *é dita superalgebra (ou álgebra* $\mathbb{Z}_2$*-graduada) se* $A = A^{(0)} \dot{+} A^{(1)}$*, é uma soma direta de subespaços tais que, os subespaços* $A^{(0)}$ *e* $A^{(1)}$ *satisfazem*

$$A^{(0)}A^{(0)} + A^{(1)}A^{(1)} \subseteq A^{(0)} \qquad e \qquad A^{(0)}A^{(1)} + A^{(1)}A^{(0)} \subseteq A^{(1)}.$$

Note que $A^{(0)}$ é uma F-subálgebra. Os subespaços $A^{(0)}$ e $A^{(1)}$ são chamados de componentes par e ímpar, respectivamente. Os elementos de $A^{(0)}$ são homogêneos de grau 0 e os elementos de $A^{(1)}$ são homogêneos de grau 1.

Exemplo 3.19. *Toda álgebra admite uma* $\mathbb{Z}_2$*-graduação trivial.*

Exemplo 3.20. *A álgebra de Grassmann definida no Exemplo 1.27 é uma superalgebra com* ***graduação canônica****, dada por* $G = G^{(0)} \dot{+} G^{(1)}$.

Exemplo 3.21. *A álgebra* $A = M_n(F)$ *é* $\mathbb{Z}_2$*-graduada, com graduação trivial* $A = A^{(0)} = M_n(F), A^{(1)} = 0$.

Exemplo 3.22. *Considere $A = M_n(F)$ e $k \geq l > 0$ dois inteiros tais que $k + l = n$, podemos definir em A uma $\mathbb{Z}_2$-graduação $A = A^{(0)} + A^{(1)}$ dada por*

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}, \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & Q \\ R & 0 \end{pmatrix}.$$

Onde $P \in M_k(F)$, $Q \in M_{k\times l}(F)$, $R \in M_{l\times k}(F)$, $S \in M_l(F)$. A álgebra de matrizes $M_n(F)$ dotada desta graduação é chamada de álgebra de matrizes $M_{k,l}(F)$.

Exemplo 3.23. *Considere G um grupo de ordem 2 e c o seu gerador, onde $G \cong \mathbb{Z}_2$. A álgebra de grupo FG é uma superalgebra com a seguinte $\mathbb{Z}_2$-graduação:*

$$(F, cF).$$

Exemplo 3.24. *A álgebra $A = M_n(F + cF)$ é $\mathbb{Z}_2$-graduada com graduação $A^{(0)} = M_n(F)$, $A^{(1)} = cM_n(F)$.*

As superalgebras $M_n(F)$, $M_{k,l}(F)$ e $M_n(F \oplus cF)$ são particularmente muito importantes para o nosso trabalho. No *Capítulo 4* vamos determinar o PI-expoente destas álgebras.

Definição 3.25. *Uma superalgebra A é dita simples se não possui ideais graduados não triviais e $A^2 \neq 0$.*

Observação 3.26. *Se A é simples como álgebra, então A é simples como superalgebra.*

Exemplo 3.27. *Como álgebras de matrizes são simples, então as superalgebras $M_n(F)$ e $M_{k,l}(F)$ são simples.*

Exemplo 3.28. *A álgebra $M_n(F + cF)$ é uma álgebra semissimples e uma superalgebra simples.*

Os teoremas seguintes nos dão uma descrição das superalgebras simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado F de caracteristica zero.

Teorema 3.29. *Seja A uma superalgebra simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado F de característica zero. Então A é isomorfo a uma das superalgebras $M_n(F), M_{k,l}(F)$, e $M_n(F + cF)$, $c^2 = 1$.*

Demonstração: Ver [2], seção 3.5, página 75. □

Note que as superalgebras simples de dimensão finita são unitárias e a unidade pertence à parte par da graduação. Consequentemente, as álgebras semissimples de dimensão finita são unitárias.

Teorema 3.30. *Sejam A uma superalgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado F de característica zero e $J(A)$ seu radical de Jacobson. Então existe uma F-subálgebra graduada semissimples maximal $B \subseteq A$ tal que $A = B + J(A)$. Além disso B é uma soma direta finita de superalgebras simples isomorfas a uma das seguintes superalgebras: $M_k(F)$ ou $M_{k,l}(F)$ com $k \geq l > 0$ ou $M_n(F + cF)$, $c^2 = 1$.*

Demonstração: Ver [2], seção 3.5, página 77. □

A subálgebra graduada semissimples B da superalgebra A é maximal quando não existe uma subálgebra graduada semissimples B' de A tal que B' é maior que B, isto é, $B' \supsetneqq B$. Assim, para alguma subálgebra graduada semissimples maximal B, temos que $B + J(A)$ coincide com toda superalgebra A de dimensão finita.

Vamos considerar a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : A & \to & A \\ a_0 + a_1 & \mapsto & a_0 - a_1, \end{array}$$

onde $a_0 \in A^{(0)}$ e $a_1 \in A^{(1)}$.

Observe que φ é um homomorfismo de álgebras em que $A = A^{(0)} \dot{+} A^{(1)}$ é uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada, e $\varphi^2 = \varphi$. Então φ é um automorfismo da álgebra A de ordem 2.

Vamos mostrar que o radical de Jacobson $J(A)$ de uma superalgebra A de dimensão finita sobre um corpo de característica zero é $\mathbb{Z}_2$-graduado. Para isso, vamos considerar o automorfismo definido acima.

Proposição 3.31. *O radical de Jacobson $J(A)$ é $\mathbb{Z}_2$-graduado se, e somente se, $\varphi(J(A)) \subseteq J(A)$.*

Demonstração: Suponha que $J(A)$ é $\mathbb{Z}_2$-graduado. Então para todo elemento $a \in J(A)$ temos $a = a_0 + a_1$, onde os elementos homogêneos $a_0, a_1 \in J(A)$. Logo $a_0 - a_1 = \varphi(a_0 + a_1) \in J(A)$ e, assim, temos que $\varphi(J(A)) \subseteq J(A)$.
Suponha agora que $\varphi(J(A)) \subseteq J(A)$. Segue que $\varphi(a) = a_0 - a_1 \in J(A)$ e $a = a_0 + a_1 \in J(A)$. Então $a_0 = \frac{a+\varphi(a)}{2} \in J(A)$ e $a_1 = \frac{a-\varphi(a)}{2} \in J(A)$. □

Proposição 3.32. *O radical de Jacobson $J(A)$ é $\mathbb{Z}_2$-graduado.*

Demonstração: Como φ é um automorfismo e $J(A)$ é um ideal bilateral de A, temos que $\varphi(J(A))$ é um ideal bilateral de A. Para uma superalgebra A de dimensão finita, o $J(A)$ é o maior ideal nilpotente. Logo, $\varphi(J(A))$ também é nilpotente. Portanto $\varphi(J(A)) \subseteq J(A)$. Pela proposição 3.32, segue que $J(A)$ é $\mathbb{Z}_2$-graduado. $\square$

Seja $X = Y \cup Z$ a união de dois conjuntos disjuntos enumeráveis de indeterminadas $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ e $Z = \{z_1, z_2, \dots\}$. A álgebra associativa livre $F\langle X\rangle = F\langle Y, Z\rangle$ sobre F tem uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural $F\langle Y, Z\rangle^{(0)} \oplus F\langle Y, Z\rangle^{(1)}$, onde $F\langle Y, Z\rangle^{(0)}$ (resp. $F\langle Y, Z\rangle^{(1)}$) é o subespaço de $F\langle Y, Z\rangle$ gerado por todos os monômios nas variáveis X tendo um número par (resp. ímpar) de variáveis Z.

Definição 3.33. *$F\langle Y, Z\rangle$ é chamada **superalgebra livre** em Y e Z sobre F.*

Lembremos que um polinômio $f(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m) \in F\langle Y, Z\rangle$ é um identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada da superalgebra A se $f(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) \equiv 0$ para todo $a_1, \dots, a_n \in A^{(0)}$, $b_1, \dots, b_m \in A^{(1)}$.

Definição 3.34. *Um ideal graduado $I = I^{(0)} \oplus I^{(1)}$ de $F\langle Y, Z\rangle$ é chamado de T_2-ideal se $\varphi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo graduado φ de $F\langle Y, Z\rangle$.*

Note que $Id^{gr}(A)$ é um T_2-ideal de $F\langle Y, Z\rangle$, isto é, um ideal fechado por todos endomorfismos de $F\langle Y, Z\rangle$ que preservam a $\mathbb{Z}_2$-graduação.

Agora vamos denotar P_{n_1,n_2} o espaço dos polinômios multilineares graduados em $y_1, \dots, y_{n_1}, z_1, \dots, z_{n_2}$. Os grupos simétricos S_{n_1} e S_{n_2} agem independentemente sobre P_{n_1,n_2}, isto é, S_{n_1} age sobre $y_1, \dots, y_{n_1}$ e S_{n_2} age sobre $z_1, \dots, z_{n_2}$.

Sejam M_1 um S_{n_1}-módulo irredutível e M_2 um S_{n_2}-módulo irredutível, pela Obseravação 2.49, temos que $M_1 \otimes M_2$ é um $S_{n_1} \times S_{n_2}$-módulo irredutível. Pela definição de produto externo 2.50, temos que $M_1 \hat{\otimes} M_2 = (M_1 \otimes M_2) \uparrow S_{n_1+n_2}$. Então, considerando os polinômios multilineares graduados que dependem das variáveis $y_1, \dots, y_{n_1}$, $z_1, \dots, z_{n_2}$ de grau n, temos que eles formam um subespaço em P_n.

Definição 3.35. *Dado um conjunto não vazio $S = S^{(0)} \cup S^{(1)}$, $S^{(0)} \subseteq F\langle Y, Z\rangle^{(0)}$, $S^{(1)} \subseteq F\langle Y, Z\rangle^{(1)}$, a classe de todas as superalgebras $A^{(0)} + A^{(1)}$ tais que $f \equiv 0$ em A para todo $f \in S$ é chamado de **supervariedade determinada por** S.*

Analogamente ao que ocorre com PI-álgebras, o estudo das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de uma superalgebra A sobre um corpo de característica zero se reduz ao estudo das identidades multilineares $\mathbb{Z}_2$-graduadas. Da mesma forma podemos obter todos resultados feitos no Capítulo 1 sobre polinômios multilineares relativos à álgebra associativa livre $F\langle X\rangle$ para a álgebra $F\langle Y, Z\rangle$.

Observação 3.36. *Dada qualquer superalgebra A pode-se formar uma nova superalgebra com a ajuda da álgebra de Grassmann G definida no primeiro Capítulo $G = G^{(0)} + G^{(1)}$.*

Definição 3.37. *Seja $A = A^{(0)} + A^{(1)}$ uma superalgebra e G a álgebra de Grassmann. A álgebra $G(A) = (A^{(0)} \otimes G^{(0)}) + (A^{(1)} \otimes G^{(1)})$ é chamada a **envolvente de Grassmann** de A.*

Observe que a envolvente de Grassamann $C = G(A)$ tem uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural, onde $C^{(0)} = A^{(0)} \otimes G^{(0)}$ e $C^{(1)} = A^{(1)} \otimes G^{(1)}$.

Se A possui uma graduação trivial, temos que $G(A) = A \otimes G^{(0)}$. Neste caso, $Id(A) = Id(A \otimes G^{(0)})$, já que $G^{(0)}$ é uma álgebra comutativa e não nilpotente.

Exemplo 3.38. *Vimos que $M_n(F)$ possui graduação trivial, então $G(M_n(F)) = M_n(F) \otimes G^{(0)} \cong M_n(G^{(0)})$.*

Exemplo 3.39. *$G(M_n(F + cF)) = G^{(0)} \otimes M_n(F) + G^{(1)} \otimes cM_n(F) \cong M_k(G)$ como álgebras (onde $c^2 = 1$).*

Definição 3.40. *A álgebra de matrizes $M_{k,l}(G)$ é definida por*

$$M_{k,l}(G) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} k & l \end{array} \\ \begin{array}{c} k \\ l \end{array} & \begin{pmatrix} G^{(0)} & G^{(1)} \\ G^{(1)} & G^{(0)} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Exemplo 3.41. *$G(M_{k,l}(F)) = G^{(0)} \otimes M_{k,l}(F)^{(0)} + G^{(1)} \otimes M_{k,l}(F)^{(1)} \cong M_{k,l}(G)$ como álgebras.*

Os resultados seguintes mostram a importância da envolvente de Grassmann de superálgebras.

Seja V uma variedade de álgebras. Denote por V^* a classe de todas superalgebras $A = A^{(0)} \dot{+} A^{(1)}$ tal que $G(A) \in V$.

Teorema 3.42. *Para qualquer variedade de álgebras V a classe V^* é uma supervariedade.*

Demonstração: Ver [2], seção 3.7, página 82. □

O teorema seguinte é fundamental para a teoria de PI-álgebras. Este resultado será útil para calcular o PI-expoente de uma PI-álgebra qualquer, como veremos no *Capítulo 4*.

Teorema 3.43. ***(Kemer)*** *Para qualquer variedade própria ν existe uma superalgebra de dimensão finita $A = A^{(0)} \dot{+} A^{(1)}$ tal que $\nu = var(G(A))$.*

Demonstração: Ver [5]. $\square$

4

O PI-expoente de uma álgebra

Neste Capítulo vamos definir o PI-expoente de uma PI-álgebra A sobre um corpo de característica zero. Provaremos a conjectura de Amitsur que diz, que para qualquer PI-álgebra o **PI-expoente**, o qual denotaremos por $exp(A)$, existe e é um inteiro não negativo. Este inteiro vai ser definido na Seção 4.2, pela estrutura de algumas superalgebras de dimensão finita relacionadas a A. Apresentaremos uma maneira explícita de calcular este expoente e calcularemos o **PI-expoente** de algumas álgebras. Em todo o Capítulo vamos considerar G sendo a álgebra de Grassmann e $G(B)$ a envolvente de Grassmann de uma superalgebra B sobre um corpo F de caracterítica zero. Todas dimensões e bases consideradas de agora em diante serão sobre um corpo base F.

4.1 PI-expoente

Seja A uma PI-álgebra sobre um corpo F de característica zero e seja $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ sua sequência de codimensões. Vimos que se A é uma álgebra nilpotente, ou seja, $x_1 \cdots x_N \equiv 0$ é uma identidade polinomial de A para algum $N \geq 1$, então $c_n(A) = 0$ para qualquer $n \geq N$. Mas se A não é uma álgebra nilpotente então $c_n(A) \neq 0$ para todo $n \geq 1$ e pelo Teorema 3.8, temos que $c_n(A)$ é exponencialmente limitada, ou seja, $1 \leq c_n(A) \leq a^n$ para alguma constante a. Por isso a sequência da n-ésima raiz $\sqrt[n]{c_n(A)}, n = 1, 2, \ldots,$ é limitada e assim podemos considerar seus limites inferior e superior.

Definição 4.1. *Seja A uma PI-álgebra. Então*

$$\underline{exp}(A) = \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$$

*é chamado de **expoente inferior** de A, e*

$$\overline{exp}(A) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$$

*é chamado de **expoente superior** de A.*

Para uma sequência limitada arbitrária os seus limites inferior e superior podem não coincidir. No caso em que estes limites coincidem, podemos definir o expoente ou PI-expoente de A. A partir de agora diremos simplesmente o expoente de A.

Definição 4.2. *Seja A uma PI-álgebra. Então o expoente de A é*

$$exp(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}.$$

Se o expoente existe então $\underline{exp}(A) = \overline{exp}(A)$. No caso em que $V = Var(A)$ é uma variedade de álgebras gerada por A, escrevemos $exp(V) = exp(A)$ e chamamos $exp(A)$ o expoente da variedade V.

Teorema 4.3. *Seja A uma álgebra de dimensão finita $dimA = d$. Então $c_n(A) \leq d^n$.*

Demonstração: Ver [2], seção 6.1, página 145. □

Como consequência do Teorema 4.3 para uma álgebra associativa temos o seguinte corolário.

Corolário 4.4. *Se $dimA = d < \infty$, então $\overline{exp}(A) \leq d$.*

Demonstração: Pelo teorema acima $\sqrt[n]{c_n(A)} \leq d$ para todo $n \geq 1$. Aplicando o $\limsup$ em ambos os lados desta desigualdade temos

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)} &\leq \limsup_{n\to\infty} d \\ \overline{exp}(A) &\leq d. \end{aligned}$$

□

4.2 Um candidato para PI-expoente

A partir de agora vamos considerar F um corpo algebricamente fechado de característica zero e $A = A^{(0)} \dot{+} A^{(1)}$ uma superalgebra, isto é, uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada de dimensão finita sobre F. Ao longo desta seção vamos definir um inteiro relacionado à estrutura de A. Nas seções seguintes vamos provar que este inteiro coincide com o expoente de uma PI-álgebra A qualquer sobre um corpo de característica zero.

Seja A uma superalgebra de dimensão finita sobre F. Pelo Teorema 3.30, $A = B + J$ onde B é uma subálgebra maximal semissimples $\mathbb{Z}_2$-graduada de A, ou seja, $B = A_1 \oplus \cdots \oplus A_r$ em que $A_1, \ldots, A_r$ são subálgebras simples homogêneas $\mathbb{Z}_2$-graduadas de A e para cada $i = 1, \ldots, r$, $A_i = A_i^{(0)} \dot{+} A_i^{(1)}$, e $J = J(A)$ é o radical de Jacobson de A que também é $\mathbb{Z}_2$-graduado, como vimos na Proposição 3.32. Vamos fixar as seguintes notações $m = dimA$ e q é o grau de nilpotência de J, ou seja, $J^q = 0$.
Consideremos todos os produtos do tipo

$$B_1 J B_2 J \ldots J B_k \neq 0, \tag{4.1}$$

onde $B_1, \ldots, B_k$ são distintas subálgebras retiradas do conjunto $\{A_1, \ldots, A_r\}$. E sejam

$$\begin{aligned} p^{(0)} &= dim(B_1^{(0)} \oplus \cdots \oplus B_k^{(0)}), \\ p^{(1)} &= dim(B_1^{(1)} \oplus \cdots \oplus B_k^{(1)}). \end{aligned}$$

Agora denotaremos por p o valor máximo de $p^{(0)} + p^{(1)}$ onde $B_1, \ldots, B_k$ satisfaz (4.1).

Lema 4.5. *Sejam $B_1, \ldots, B_t$ subálgebras não necessariamente distintas do conjunto $\{A_1, \ldots, A_r\}$. Se*

$$B_1 J B_2 J \ldots J B_t \neq 0 \tag{4.2}$$

então a $dim(B_1^{(0)} + \cdots + B_t^{(0)}) + dim(B_1^{(1)} + \cdots + B_t^{(1)}) \leq p$.

Demonstração: Se no produto (4.2) alguma subálgebra B_i aparece mais do que uma vez, e como $JB_iJ \subseteq J$, pois J é um ideal bilateral de A, então podemos reduzir este produto até obter um produto não nulo do tipo (4.2) com todos B_is distintos. Mas então, como p é o máximo das dimensões de todas somas diretas das subálgebras B_is distintas retiradas do conjunto $\{A_1, \ldots, A_r\}$, onde o produto (4.2) é satisfeito, obtemos o resultado desejado. □

O lema seguinte nos dá condições para que um polinômio multilinear associado à uma tabela de Young seja uma identidade para a envolvente de Grassmann $G(A) = (G^{(0)} \otimes A^{(0)}) \oplus (G^{(1)} \otimes A^{(1)})$ de uma superalgebra A.

Lema 4.6. *Seja f um polinômio multilinear correspondente à tabela T_λ, e seja C uma PI-álgebra. Então $f \in Id(C)$ se, e somente se, $af \in Id(C)$ para um elemento arbitrário $a \in FS_n$ tal que $af \neq 0$.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ É imediato.
$(\Leftarrow)$ Suponha que $af \in Id(C)$ para algum $a \in FS_n$ com $af \neq 0$. Então $(0) \neq FS_n af \subseteq FS_n f$ e $FS_n af \subseteq Id(C)$. Como $FS_n f$ é FS_n-módulo irredutível então $FS_n af = FS_n f$. Logo $f \in Id(C)$. □

Lema 4.7. *Seja $\lambda \geq h(d,l,t)$ onde $d+l > p$ e $t > (d+l)m+q$. Se f é um polinômio multilinear correspondente à tabela T_λ, então $f \in Id(G(A))$.*

Demonstração: Vamos considerar uma superalgebra $D_1 = P_1 + J$ de A, onde $P_1 = B_1 \oplus \cdots \oplus B_k$ tais que $B_1, \ldots, B_k \in \{A_1, \ldots, A_r\}$, e $P_1 = P_1^{(0)} \oplus P_1^{(1)}$ é uma superalgebra semissimples que satisfaz a seguinte condição: $dimP_1^{(0)} \leq d-1$. Pelo Lema 2.63, existe $r_1 \in FS_n$ e um conjunto de variáveis $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_d$, tal que o polinômio $r_1 f \neq 0$ é simétrico em cada conjunto Y_j para qualquer j, e há também uma decomposição $r_1 f = f_1 + f_2 + \ldots$, onde $f_1, f_2, \ldots$ são polinômios alternados em subconjuntos disjuntos adequados de Y. Suponha que existe alguma substituição em $r_1 f$ dando um valor não nulo em $G(A)$. Então pelo menos um dos somandos f_i deve ter uma avaliação não nula. Suponha que seja f_1, então pelo Lema 2.63, o conjunto Y pode ser particionado como $Y = Y_1^{'} \cup \cdots \cup Y_{t+l}^{'}$ com $|Y_i^{'}| = d$ e f_1 é alternado nas variáveis de cada conjunto $Y_i^{'}$, $i = 1, \ldots, t+l$. Segue que, se para duas variáveis $y_1^{'}, y_2^{'}$ de algum $Y_i^{'}$ definimos $y_1^{'} = c^{'} \otimes g_1$ e $y_2^{'} = c^{'} \otimes g_2$, onde $c^{'} \in P_1^{(0)}, g_1, g_2 \in G^{(0)}$. Como os elementos de $G^{(0)}$ comutam com todos os elementos de G, e f_1 é alternado em $y_1^{'}$ e $y_2^{'}$, obtemos que f_1 será nulo nestas substituições.

Por outro lado, como a $dimP_1^{(0)} \leq d-1$, a fim de obter um valor não nulo em $r_1 f$, precisamos substituir no máximo $d-1$ elementos do tipo $c^{'} \otimes g, c^{'} \in P_1^{(0)}, g \in G^{(0)}$ em cada conjunto de variáveis $Y_i^{'}$. Isto significa que para obtermos um valor diferente de zero precisamos substituir em $r_1 f$ ao menos $t+l$ elementos do tipo $c \otimes g, c \in P_1^{(1)}, g \in G^{(1)}$ ou $c \in J, g \in G$ nas variáveis de Y, pois temos $t+l$ conjuntos de ordem d, em que f_1 é alternado nas variáveis de cada conjunto. Mas $J^q = 0$. Por isso, devemos substituir ao menos $l+t-(q-1) = l+t-q+1 > dm$ elementos do tipo $c \otimes g$ com $c \in P_1^{(1)}$ e $g \in G^{(1)}$. A desigualdade acima é obtida usando a hipótese do teorema. Logo, para algum $1 \leq i \leq d$, vamos substituir mais que m variáveis em Y_j com elementos $c \otimes g$, onde

c é um elemento da base de $P_1^{(1)}$, e $g \in G^1$. Desde que $m \geq dimD_1^{(1)} \geq dimP_1^{(1)}$, então existem ao menos duas variáveis $y_1, y_2 \in Y_j$ tomando valores $c \otimes g_1$ e $c \otimes g_2$ respectivamente, onde $c \in P_1^{(1)}, g_1, g_2 \in G^{(1)}$. Mas como $r_1 f$ é simétrico em y_1, y_2, e os elementos de $G^{(1)}$ anticomutam entre si, obtemos que o valor correspondente a essas substituições deve ser nulo. Concluímos que $r_1 f \in Id(G(D_1))$ e pelo Lema 4.6, $f \in Id(G(D_1))$.

Agora vamos considerar outra subálgebra $D_2 = P_2 + J$ de A, onde $P_2 = B_1 \oplus \cdots \oplus B_k$ tais que $B_1, \ldots, B_k \in \{A_1, \ldots, A_r\}$, e $P_2 = P_2^{(0)} \oplus P_2^{(1)}$ é uma superalgebra semissimples que satisfaz a seguinte condição: $dimP_2^{(1)} \leq l - 1$. Pelo Lema 2.64, existe $r_2 \in FS_n$ e um conjunto de variáveis Y para $r_2 f$, tais que $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_l$, $r_2 f$ é alternado em cada $Y_j, j = 1, \ldots, l$, e $r_2 f = f_1 + f_2 + \ldots$, onde para qualquer f_i existe uma partição $Y = Y_1^{'} \cup \cdots \cup Y_{t+d}^{'}$ em subconjuntos simétricos de ordem l. Por um raciocínio análogo ao que fizemos acima, se $f_1 \neq 0$ para alguma substituição, então devemos substituir não menos que $t + d - q + 1 > lm$ variáveis de Y por alguns $c \otimes g, c \in P_2^{(0)}, g \in G^{(0)}$.

Desde que $m \geq dimD_2^{(0)} \geq dimP_2^{(O)}$, então existe ao menos duas variáveis y_1, y_2 do mesmo conjunto Y_j que serão substituídas pelos elementos $c \otimes g_1, c \otimes g_2$ respectivamente, onde $g_1, g_2 \in G^{(0)}$ e c é um elemento da base de $P_2^{(0)}$. Como $r_2 f$ é alternado em Y_j, segue que $r_2 f$ deve ser nulo nestas substituições. E assim concluímos que $r_2 f \in Id(G(D_2))$ e novamente pelo Lema 4.6, temos $f \in Id(G(D_2))$. Assim, mostramos que $f \in Id(G(D_1)) \cap Id(G(D_2))$.

Queremos mostrar que $f \in Id(G(A))$. Para isso fixe uma base homogênea $C = C^{(0)} \cup C^{(1)}$, que é uma união disjunta de bases homogêneas de B e de J respectivamente, onde $B = A_1 \oplus \cdots \oplus A_r$. Agora para mostrar que f é uma identidade de $G(A)$ é suficiente mostrar que f se anula em todos os elementos do tipo $c \otimes g, c^{'} \otimes g^{'}, c \in C^{(0)}$, $c^{'} \in C^{(1)}, g \in G^{(0)}, g^{'} \in G^{(1)}$.

Sejam $c_1, \ldots, c_s$ elementos distintos da base de $C \cap B$ e considere $s > p$. Então, qualquer produto de elementos de A contendo todos os $c_1, \ldots, c_s$ e talvez outros elementos de A é igual a zero, como resulta do Lema 4.5. De fato, podemos tomar $c_1, \ldots, c_s \in B_1, \ldots, B_s$ respectivamente, onde $B_1, \ldots, B_s \in \{A_1, \ldots, A_r\}$ não são necessariamente distintas. Assim $dim(B_1 + \cdots + B_s) \geq s > p$, e com isso obtemos um produto do tipo (4.2) nulo. Por isso, se substituirmos $c_1 \otimes g_1, \ldots, c_s \otimes g_s$ em vez de algumas variáveis em f, o resultado da avaliação de f em $G(A)$ será nulo. Portanto, dada qualquer subálgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada semissimples $P = P^{(0)} + P^{(1)}$ de A com $dimP^{(0)} + dimP^{(1)} \leq p$, é suficiente provar que f se anula nos elementos do tipo $c_1 \otimes g_1, \ldots, c_s \otimes g_s, e_1 \otimes h_1, e_2 \otimes h_2, \ldots$, onde $c_1, \ldots, c_s$ são elementos da base de $C \cap P$, e $e_1, e_2 \cdots \in J, g_i, h_j \in G$, são todos elementos homogêneos. Mas, por hipótese temos que $dimP^{(0)} + dimP^{(1)} \leq p < l + d$ então $dimP^{(0)} \leq d - 1$ ou $dimP^{(1)} \leq l - 1$. Vamos analisar os dois casos.

Note que se ocorre o primeiro caso, ou seja, que $dimP^{(0)} \leq d - 1$, então a subálgebra

$\hat{P} = P + J$ de A é do tipo D_1 e pelo que vimos f é nulo nestas substituições. Agora se ocorre que $dimP^{(1)} \leq l - 1$, então temos uma substituição de uma subálgebra do tipo D_2, que por sinal f também se anula nestas substituições. Portanto em todos os casos $f \in Id(G(A))$. $\square$

Recordemos a decomposição $P_n \cong FS_n = \oplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda$ da álgebra de grupo FS_n em seus ideais bilaterais minimais I_λ. Pelo lema acima temos o seguinte corolário.

Corolário 4.8. *Sejam* $l + d = p + 1$ *e* $t = 2(m + 1)m + 1$ *onde* $m = dimA$. *Então* $\oplus_{\lambda \geq h(d,l,t)} I_\lambda \subseteq Id(G(A))$.

Demonstração: Seja $\lambda \geq h(d, l, t)$. Desde que $2m + 1 \geq 2p + 1 > p + 1$ e $q \leq m$ onde $J^q = 0$, temos $t = (2m+1)m+m+1 > (2m+1)m+q > (p+1)m+q = (l+d)m+q$. Pelo Lema 4.7, para qualquer tabela T_λ, $FS_n e_{T_\lambda} \subseteq Id(G(A))$. Segue que $I_\lambda = FS_n e_{T_\lambda} FS_n \subseteq Id(G(A))$. Portanto $\oplus_{\lambda \geq h(d,l,t)} I_\lambda \subseteq Id(G(A))$. $\square$

A seguir daremos dois resultados importantes, que serão fundamentais para demonstrarmos adiante que $c_n(G(A))$ é limitada superiormente.

Lembre-se que para toda partição $\lambda \vdash n, d_\lambda = \chi_\lambda(1)$ é o grau do S_n-caracter irredutível associado a λ. O próximo resultado segue da fórmula do gancho para d_λ e do Teorema 2.48.

Lema 4.9. *Seja* $\lambda \vdash n, \mu \vdash n'$, *tal que* $\mu \leq \lambda$. *Se* $n - n' \leq c$ *então* $d_\mu \leq d_\lambda \leq n^c d_\mu$.

Demonstração: Primeiro note que é suficiente mostrarmos para $c = 1$, de fato, note que se tivermos $n' = n - 1$, $n'' = n - 2$ e $\lambda \vdash n$, $\mu \vdash n'$ e $\eta \vdash n''$ temos $d_\mu \leq d_\lambda$, $d_\eta \leq d_\mu$ então $d_\eta \leq d_\mu \leq d_\lambda$. Agora veja que $d_\lambda \leq nd_\mu \leq nd_\lambda$ e $d_\eta \leq d_\lambda \leq nd_\mu$. Da fórmula do gancho temos

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod_{i,j} h_{ij}}$$

onde h_{ij} é o comprimento do (i, j)-gancho de D_λ.

Como vimos é suficiente provar o lema para o caso $c = 1$, por isso podemos assumir que $n' = n - 1$ então:

$$d_\mu = \frac{(n-1)!}{\prod_{i,j} h'_{ij}}$$

onde os $h'_{ij}s$ são os números dos ganchos de D_μ. Desde que $\mu \leq \lambda$ segue que $\prod h'_{ij} < \prod h_{ij}$ e $\frac{1}{\prod h'_{ij}} > \frac{1}{\prod h_{ij}}$. Logo,

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod h_{ij}} < \frac{n!}{\prod h'_{ij}} = \frac{n(n-1)!}{\prod h'_{ij}} = nd_\mu$$

Portanto uma das desigualdades é satisfeita.

Para obtermos a outra desigualdade, vamos usar a segunda condição da regra de **Branching** do Teorema 2.48. Vamos mostrar que $d_\mu \leq d_\lambda$.

Seja $S_{n-1} \leq S_n$ e tome χ_λ o caracter irredutível de S_n associado à partição $\lambda \vdash n$. Considere a restrição de χ_λ a S_{n-1}, então $\chi_\lambda \downarrow_{S_{n-1}} \cong \sum_{\mu \in \lambda^-} \phi_\mu$, onde ϕ_μ são todos os caracteres irredutíveis associados as partições $\mu \vdash n-1$, e λ^- é o conjunto das partições de $n-1$ cujo diagrama é obtido a partir de D_λ retirando um box. Agora tome o grau destes caracteres, então

$$\begin{aligned} \chi_\lambda \downarrow_{S_{n-1}} (1) &= \sum_{\mu \in \lambda^-} \phi_\mu(1) \\ d_\lambda &= d_\mu + \ldots \\ d_\lambda &= \sum_{\mu \in \lambda^-} d_\mu. \end{aligned}$$

E assim obtemos que $d_\mu \leq d_\lambda$ para toda partição $\mu \in \lambda^-$, ou seja, para toda partição $\mu \vdash n-1$, $\mu \leq \lambda$. Logo, a outra desigualdade é satisfeita. □

Lema 4.10. *Para algumas constantes $C, r > 0$ vale a seguinte desigualdade*

$$\sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \in H(d,l)}} d_\lambda \leq C n^r (d+l)^n.$$

Além disso, para algumas constantes a, b temos a seguinte igualdade assintótica

$$d_{h(d,l,k)} \simeq_{n \to \infty} a n^b (d+l)^n$$

onde $h(d,l,k) \vdash n$.

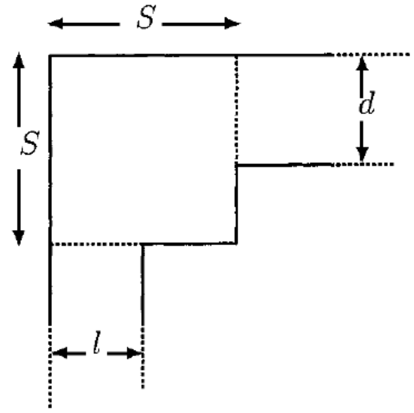
Demonstração: Ver [2], seção 6.2, página 149. □

Proposição 4.11. *Seja A uma superalgebra de dimensão finita e seja $p = max(p^{(0)} + p^{(1)})$ como definido anteriormente em (4.2) no Lema 4.5. Então existem constantes $C_1, r_1 > 0$ dependendo apenas da dim A tais que $c_n(G(A)) \leq C_1 n^{r_1} p^n$.*

Demonstração: Considere a decomposição do n-ésimo cocaracter

$$\chi_n(G(A)) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda. \tag{4.3}$$

Suponha que $\lambda \vdash n$ é tal que $\lambda \geq h(d,l,t)$ com $l+d = p+1$ e $t = 2(m+1)m+1$ onde $m = dimA$. Então pelo Corolário 4.8, $m_\lambda = 0$ para este λ, então $I_\lambda \subseteq Id(G(A))$. Segue que qualquer diagrama D_λ com $m_\lambda \neq 0$ em (4.3) encontra-se na união de alguns ganchos infinitos $H(d,l)$, com $l+d = p$ e um quadrado $S \times S$ onde $S = 2(m+1)m+1+m = t+m$ é uma constante que não depende de n, (veja a figura abaixo).



De fato, seja $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ e suponha primeiro que $\lambda_i > t+m$ para algum i. Seja d o maior inteiro tal que $\lambda_d > t+m$. Se $d > p$ então $\lambda \geq h(p+1, 0, t)$ e temos uma contradição pelo Corolário 4.8, pois $d + l = p+1+0 = p+1$ e $t = 2(m+1)m+1$ então $m_\lambda = 0$, o que é um absurdo, pois estamos supondo $m_\lambda \neq 0$. Portanto $d \leq p$.
Se $\lambda_{t+m+1} \geq p-d+1$ então o diagrama D_λ contém um subdiagrama D_μ, onde

$$\mu = (\underbrace{t+m+1, \dots, t+m+1}_{d}, \underbrace{p-d+1, \dots, p-d+1}_{t+m+1-d})$$

Desde que $t+m+1-(p-d+1) \geq t$ e $t+m+1-d \geq t$ não é difícil verificar que $\mu \geq h(d, p-d+1, t)$, então $D_\mu \supseteq D_{h(d,p-d+1,t)}$, e pelo Corolário 4.8 chegamos num absurdo, pois $d+p-d+1 = p+1$ e $t = 2(m+1)m+1$ então $m_\lambda = 0$. Logo $\lambda_{t+m+1} < p-d+1 < p-d$ então λ está contido em $H(d, p-d) \cup (S \times S)$ como desejado.

Agora suponha que não existe maior inteiro d tal que $\lambda_d > t+m$. Assim podemos assumir que $\lambda_1 \leq t+m$. Agora observe que $\lambda_{t+m+1} \leq p$, pois caso contrário teríamos $\lambda \geq h(0, p+1, t)$ e novamente pelo Corolário 4.8 temos uma contradição, pois $d+l = p+1$ e $t = 2(m+1)m+1$ então $m_\lambda = 0$. Logo $\lambda_{t+m+1} \leq p$, e isto nos diz que λ está contido no gancho $H(0,p) \cup S \times S$ e segue o desejado.

A propriedade acima provada diz que se $m_\lambda \neq 0$, então o diagrama D_λ contém um subdiagrama D_μ tal que $D_\mu \subseteq H(d, p-d)$ e, se $\lambda \vdash n$, $\mu \vdash n'$ e $\mu \leq \lambda$ temos que $n - n' \leq T = S^2$. Pelo Lema 4.9 $d_\lambda \leq n^T d_\mu$. Denote por P o conjunto de todas partições $\lambda \vdash n$ tais que $m_\lambda \neq 0$ em (4.3). Temos ainda que A. Berele e A. Regev em [1] mostraram que m_λ é polinomialmente limitado, ou seja, existe $k > 0$ tal que $m_\lambda \leq n^k$ para toda partição $\lambda \in P$, $\lambda \vdash n$. Usando os Lemas 4.9 e 4.10, obtemos

$$\begin{aligned} c_n(G(A)) &= \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda d_\lambda \leq n^k \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \in P}} d_\lambda \leq n^k n^T \sum_{i=0}^{p} \sum_{n'=0}^{n} \sum_{\substack{\mu \vdash n' \\ \mu \in H(i,p-i)}} d_\mu \\ &\leq n^{k+T} \sum_{i=0}^{p} \sum_{n'=1}^{n} C(n')^r p^{n'} \leq n^{k+T} C n^r p^n n(p+1). \end{aligned}$$

Então $c_n(G(A)) \leq C_1 n^{r_1} p^n$ onde $C_1 = (p+1)C,\ r_1 = k+T+r+1$. Logo $c_n(G(A))$ é limitada superiormente. $\square$

4.3 Identidades e Identidades Graduadas

Nesta seção vamos explorar as relações entre as identidades multilineares graduadas de uma superalgebra A e de sua envolvente de Grassmann $G(A)$.

Vamos considerar a álgebra livre $\mathbb{Z}_2$-graduada $F\langle X\rangle$ definida no Capítulo 3, onde o conjunto $X = Y \cup Z$, em que $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ e $Z = \{z_1, z_2, \dots\}$ são conjuntos disjuntos enumeráveis. Considere $F\langle Y, Z\rangle^{(0)}$ o subespaço de $F\langle Y, Z\rangle$ gerado por todos os monômios em X de grau par nas variáveis de Z e $F\langle Y, Z\rangle^{(1)}$ é o subespaço gerado por todos os monômios de grau ímpar nas variáveis de Z. Então $F\langle X\rangle = F\langle Y, Z\rangle^{(0)} \dot{+} F\langle Y, Z\rangle^{(1)}$.

Seja $P_{n_1,n_2},\ n_1, n_2 \geq 0$ o espaço de todos os polinômios multilineares de $F\langle Y, Z\rangle$ nas variáveis $y_1, \dots, y_{n_1}, z_1, \dots, z_{n_2}$. A interseção $P_{n_1,n_2} \cap Id^{(gr)}(A)$ consiste de todas identidades multilineares graduadas da superalgebra A, tendo grau n_1 nas variáveis pares e grau n_2 nas variáveis ímpares. Definimos o seguinte isomorfismo de espaços vetoriais,

$$\sim : P_{n_1,n_2} \to P_{n_1,n_2}$$

pela regra: Seja $f \in P_{n_1,n_2}$ e escreva f como

$$f = \sum_{\substack{\sigma \in S_{n_2} \\ W}} \alpha_{\sigma,W}\ w_0 z_{\sigma(1)} w_1 \dots w_{n_2-1} z_{\sigma(n_2)} w_{n_2},$$

com $W = (w_0, w_1, \dots, w_{n_2})$, onde $w_0, w_1, \dots, w_{n_2}$ são monômios possivelmente vazios em

$y_1, \ldots, y_{n_1}$ e $\alpha_{\sigma,W} \in F$. Então

$$\widetilde{f} = \sum_{\substack{\sigma \in S_{n_2} \\ W}} (-1)^\sigma \alpha_{\sigma,W}\ w_0 z_{\sigma(1)} w_1 \ldots w_{n_2-1} z_{\sigma(n_2)} w_{n_2}.$$

Os grupos simétricos S_{n_1} e S_{n_2} agem de forma independente à esquerda sobre o espaço P_{n_1,n_2}, onde S_{n_1} permuta as variáveis $y_1, \ldots, y_{n_1}$ e S_{n_2} permuta as variáveis $z_1, \ldots, z_{n_2}$. Assim, sejam $R_1 = FS_{n_1}$, $R_2 = FS_{n_2}$ as álgebras de grupos correspondentes. Consideremos M_1 um S_{n_1}-módulo irredutível e M_2 um S_{n_2}-módulo irredutível. Para $b = \sum_{\sigma \in S_{n_2}} \beta_\sigma \sigma$ escrevemos $\widetilde{b} = \sum_{\sigma \in S_{n_2}} (-1)^\sigma \beta_\sigma \sigma$.

Lema 4.12. *Sejam $a \in R_1, b \in R_2, f \in P_{n_1,n_2}$. Então:*

1. *$f \equiv 0$ é uma identidade graduada de $G(A)$ se, e somente se, $\widetilde{f} \equiv 0$ é uma identidade graduada de A;*
2. *$\widetilde{bf} = \widetilde{b}\widetilde{f}$, $\widetilde{af} = a\widetilde{f}$, $\widetilde{\widetilde{b}} = b$, $\widetilde{\widetilde{f}} = f$;*
3. *f é alternado em algumas variáveis $z_1, \ldots, z_m$ se, e somente se, $\tilde{f}$ é simétrico em $z_1, \ldots, z_m$.*

Demonstração:

1. Sejam $u_1, \ldots, u_{n_1} \in A^{(0)}$, $v_1, \ldots, v_{n_2} \in A^{(1)}$, elementos arbitrários homogêneos de A e $g_1, \ldots, g_{n_1} \in G^{(0)}$, $h_1, \ldots, h_{n_2} \in G^{(1)}$ elementos arbitrários de G. Fixemos um monômio pertencente a P_{n_1,n_2}

$$w = w_0(y_1, \ldots, y_{n_1}) z_{\sigma(1)} \ldots z_{\sigma_{n_2}} w_{n_2}(y_1, \ldots, y_{n_1})$$

e calculemos seu valor nos elementos, $u_1 \otimes g_1, \ldots, u_{n_1} \otimes g_{n_1}, v_1 \otimes h_1, \ldots, v_{n_2} \otimes h_{n_2}$ de $G(A)$. Desde que os elementos $g_1, \ldots, g_{n_1}$ encontram-se no centro de G e $h_1, \ldots, h_{n_2} \in G^{(1)}$ anti-comutam entre si, obtemos

$$\begin{aligned} & w(u_1 \otimes g_1, \ldots, v_{n_2} \otimes h_{n_2}) = \\ & w_0(u_1, \ldots, u_{n_1}) v_{\sigma(1)} \ldots v_{\sigma(n_2)} w_m(u_1, \ldots, u_{n_1}) \otimes g_1 \ldots g_{n_1} h_{\sigma(1)} \ldots h_{\sigma(n_2)} = \\ & (-1)^\sigma w_0(u_1, \ldots, u_{n_1}) v_{\sigma(1)} \ldots v_{\sigma(n_2)} w_m(u_1, \ldots, u_{n_1}) \otimes g_1 \ldots g_{n_1} h_1 \ldots h_{n_2}. \end{aligned}$$

Desta igualdade e pelo isomorfismo visto acima, segue que

$$\begin{aligned} & f(u_1 \otimes g_1, \ldots, u_{n_1} \otimes g_{n_1}, v_1 \otimes h_1, \ldots, v_{n_2} \otimes h_{n_2}) = \\ & \widetilde{f}(u_1, \ldots, u_{n_1}, v_1, \ldots, v_{n_2}) \otimes g_1 \ldots g_{n_1} h_1 \ldots h_{n_2} = 0 \end{aligned}$$

se, e somente se, $\widetilde{f}(u_1, \ldots, u_{n_1}, v_1, \ldots, v_{n_2}) = 0$, pois podemos escolher $g_1, h_j \in G$ tais que $g_1 \ldots g_{n_1} h_1 \ldots h_{n_2} \neq 0$. Portanto concluímos que f é uma identidade de $G(A)$ se, e somente se, $\widetilde{f} \equiv 0$ em A.

2. Vamos considerar $f = \sum\limits_{\substack{\sigma \in S_{n_2} \\ W}} \alpha_{\sigma,W}\ w_0 z_{\sigma(1)} w_1 \cdots w_{n_2-1} z_{\sigma(n_2)} w_{n_2}$

   e $b = \sum_{\tau \in S_{n_2}} \beta_\tau \tau \in R_2$. Então

$$\begin{aligned} bf &= \left(\sum_{\tau \in S_{n_2}} \beta_\tau \tau\right) \left(\sum_{\substack{\sigma \in S_{n_2} \\ W}} \alpha_{\sigma,W}\ w_0 z_{\sigma(1)} w_1 \cdots w_{n_2-1} z_{\sigma(n_2)} w_{n_2}\right) \\ &= \sum_{\substack{\sigma,\tau \in S_{n_2} \\ W}} \alpha_{\sigma,W} \beta_\tau\ w_0 z_{\tau\sigma(1)} w_1 \ldots w_{n_2-1} z_{\tau\sigma(n_2)} w_{n_2}, \end{aligned}$$

   e

$$\begin{aligned} \widetilde{bf} &= \sum_{\substack{\sigma,\tau \in S_{n_2} \\ W}} (-1)^{\tau\sigma} \alpha_{\sigma,W} \beta_\tau\ w_0 z_{\tau\sigma(1)} w_1 \ldots w_{n_2-1} z_{\tau\sigma(n_2)} w_{n_2} \\ &= \sum_{\substack{\sigma,\tau \in S_{n_2} \\ W}} (-1)^{\tau} (-1)^{\sigma} \alpha_{\sigma,W} \beta_\tau\ w_0 z_{\tau\sigma(1)} w_1 \ldots w_{n_2-1} z_{\tau\sigma(n_2)} w_{n_2} \\ &= \sum_{\substack{\sigma,\tau \in S_{n_2} \\ W}} (-1)^{\tau} (-1)^{\sigma} \alpha_{\sigma,W} \beta_\tau\ \tau \left(w_0 z_{\sigma(1)} w_1 \ldots w_{n_2-1} z_{\sigma(n_2)} w_{n_2}\right) \\ &= \left(\sum_{\tau \in S_{n_2}} (-1)^{\tau} \beta_\tau \tau\right) \times \left(\sum_{\substack{\sigma \in S_{n_2} \\ W}} (-1)^{\sigma} \alpha_{\sigma,W}\ w_0 z_{\sigma(1)} w_1 \ldots w_{n_2-1} z_{\sigma(n_2)} w_{n_2}\right) = \widetilde{b}\widetilde{f}. \end{aligned}$$

   Note ainda que

$$\begin{aligned} \widetilde{\widetilde{f}} &= \sum_{\substack{\sigma \in S_{n_2} \\ W}} (-1)^{\sigma} (-1)^{\sigma} \alpha_{\sigma,W}\ w_0 z_{\sigma(1)} w_1 \ldots w_{n_2-1} z_{\sigma(n_2)} w_{n_2} \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in S_{n_2} \\ W}} \alpha_{\sigma,W}\ w_0 z_{\sigma(1)} w_1 \ldots w_{n_2-1} z_{\sigma(n_2)} w_{n_2} = f. \end{aligned}$$

   As outras afirmações no item (2) seguem de forma análoga.

3. Para demonstrar a última parte do lema observamos que, se f é alternado nas variáveis $z_1, \ldots, z_m$, temos $\tau(f(z_1, \ldots, z_m, \ldots)) = (-1)^\tau f(z_1, \ldots, z_m, \ldots)$, para toda $\tau \in S_m$. Sejam $\tau \in S_m$ uma permutação que age nas variáveis $z_1, \ldots, z_m$, e $\tilde{\tau} \in S_{n_2}$ tais que $\tilde{\tau}(z_i) = \tau(z_i)$ para todo $i = 1, \ldots, m$ e $\tilde{\tau}(z_j) = z_j$ para todo

$j = m+1, \ldots, n_2$. Assim, $(-1)^{\tau} = (-1)^{\tilde{\tau}}$. Note que

$$\begin{aligned}\tau f(z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}, \ldots, z_{n_2}, y_1, \ldots, y_{n_1}) &= \\ f(z_{\tau(1)}, \ldots, z_{\tau(m)}, z_{m+1}, \ldots, z_{n_2}, y_1, \ldots, y_{n_1}) &= \\ f(z_{\tilde{\tau}(1)}, \ldots, z_{\tilde{\tau}(m)}, z_{\tilde{\tau}(m+1)}, \ldots, z_{\tilde{\tau}(n_2)}, y_1, \ldots, y_{n_1}) &= \\ \tilde{\tau} f(z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}, \ldots, z_{n_2}, y_1, \ldots, y_{n_1}).\end{aligned}$$

Considere $f = \sum_{\substack{\sigma \in S_{n_2} \\ W}} \alpha_{\sigma,W}\ w_0 z_{\sigma(1)} w_1 \cdots w_{n_2-1} z_{\sigma(n_2)} w_{n_2}$. Aplicando $\tilde{\tau}$ em f e observando que $\tau f = \tilde{\tau} f$ e $\tilde{\tau} f = (-1)^{\tilde{\tau}} f$, temos

$$\begin{aligned}\tilde{\tau} f &= \sum_{\substack{\sigma \in S_{n_2} \\ W}} \alpha_{\sigma,W}\ w_0 z_{\tilde{\tau}\sigma(1)} w_1 \cdots w_{n_2-1} z_{\tilde{\tau}\sigma(n_2)} w_{n_2} \\ &= \sum_{\substack{\tilde{\tau}^{-1}\tilde{\sigma} \in S_{n_2} \\ W}} \alpha_{\tilde{\tau}^{-1}\tilde{\sigma},W}\ w_0 z_{\tilde{\sigma}(1)} w_1 \cdots w_{n_2-1} z_{\tilde{\sigma}(n_2)} w_{n_2} \\ &= \sum_{\substack{\tilde{\sigma} \in S_{n_2} \\ W}} (-1)^{\tilde{\tau}} \alpha_{\tilde{\sigma},W}\ w_0 z_{\tilde{\sigma}(1)} w_1 \cdots w_{n_2-1} z_{\tilde{\sigma}(n_2)} w_{n_2},\end{aligned}$$

tais que $\tilde{\tau}\sigma = \tilde{\sigma}$ e $\sigma = \tilde{\tau}^{-1}\tilde{\sigma}$. Assim, obtemos que os coeficientes $\alpha_{\tilde{\tau}^{-1}\tilde{\sigma},W} = (-1)^{\tilde{\tau}} \alpha_{\tilde{\sigma},W}$, para toda $\tilde{\sigma} \in S_{n_2}$.

Seja $\widetilde{f} = \sum_{\substack{\sigma \in S_{n_2} \\ W}} (-1)^{\sigma} \alpha_{\sigma,W}\ w_0 z_{\sigma(1)} w_1 \ldots w_{n_2-1} z_{\sigma(n_2)} w_{n_2}$. Então

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}\widetilde{f} &= \sum_{\substack{\sigma \in S_{n_2} \\ W}} (-1)^{\sigma} \alpha_{\sigma,W}\ w_0 z_{\tilde{\tau}\sigma(1)} w_1 \cdots w_{n_2-1} z_{\tilde{\tau}\sigma(n_2)} w_{n_2} \\ &= \sum_{\substack{\tilde{\sigma} \in S_{n_2} \\ W}} (-1)^{\tilde{\tau}^{-1}\tilde{\sigma}} \alpha_{\tilde{\tau}^{-1}\tilde{\sigma},W}\ w_0 z_{\tilde{\sigma}(1)} w_1 \cdots w_{n_2-1} z_{\tilde{\sigma}(n_2)} w_{n_2} \\ &= \sum_{\substack{\tilde{\sigma} \in S_{n_2} \\ W}} (-1)^{\tilde{\tau}^{-1}} (-1)^{\tilde{\sigma}} (-1)^{\tilde{\tau}} \alpha_{\tilde{\sigma},W}\ w_0 z_{\tilde{\sigma}(1)} w_1 \cdots w_{n_2-1} z_{\tilde{\sigma}(n_2)} w_{n_2} \\ &= \sum_{\substack{\tilde{\sigma} \in S_{n_2} \\ W}} (-1)^{\tilde{\sigma}} \alpha_{\tilde{\sigma},W}\ w_0 z_{\tilde{\sigma}(1)} w_1 \cdots w_{n_2-1} z_{\tilde{\sigma}(n_2)} w_{n_2} = \widetilde{f}.\end{aligned}$$

Portanto $\widetilde{f}$ é simétrico em $z_1, \ldots, z_m$.

Analogamente, se $\widetilde{f}$ é simétrico nas variáveis $z_1, \ldots, z_m$, então f é alternado nas variáveis $z_1, \ldots, z_m$.

□

No lema seguinte construímos polinômios multilineares associados a tabelas de Young que não são identidades para a envolvente de Grassmann de alguma superalgebra sobre um corpo F.

Lema 4.13. *Seja $B = B^{(0)} + B^{(1)}$ uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada sobre F e $d = dimB^{(0)}$, $l = dimB^{(1)}$. Seja $f(y_1, \ldots, y_{dr}, z_1, \ldots, z_{ls}) \in P_{dr,ls}$ um polinômio que é alternado em r subconjuntos disjuntos de variáveis $\{y_1^i, \ldots, y_d^i\} \subseteq \{y_1, \ldots, y_{dr}\}$, $1 \leq i \leq r$, e simétrico em s subconjuntos disjuntos de variáveis $\{z_1^i, \ldots, z_l^i\} \subseteq \{z_1, \ldots, y_{ls}\}$, $1 \leq i \leq s$. Se $f \notin Id^{gr}(G(B))$, então existem elementos idempotentes $e_{T_\lambda} \in FS_{dr}$ e $e_{T_\mu} \in FS_{ls}$ associados as partições $\lambda = (r^d), \mu = (l^s)$ respectivamente, tais que $e_{T_\lambda} e_{T_\mu} f \notin Id^{gr}(G(B))$, onde e_{T_λ} age sobre $y_1, \ldots, y_{dr}$ e e_{T_μ} age sobre $z_1, \ldots, z_{ls}$.*

Demonstração: Sejam $n_1 = dr$ e $n_2 = ls$ tais que $f \in P_{n_1,n_2}$. Considere o FS_{n_1}-módulo à esquerda gerado por $f \in P_{n_1,n_2}$ e sua decomposição em soma direta de FS_{n_1}-submódulos irredutíveis. Desde que $f \notin Id^{gr}(G(B))$, existe uma tabela de Young $T_\lambda, \lambda \vdash n_1$, tal que $e_{T_\lambda} f \not\equiv 0$ em $G(B)$. Vamos considerar a ação de e_{T_λ} sobre as variáveis $y_1, \ldots, y_{n_1}$. Se $\lambda_1 \geq r+1$ então $e_{T_\lambda} f$ é simétrico em pelo menos $r+1$ variáveis entre $y_1, \ldots, y_{dr}$. Mas f é alternado em r subconjuntos disjuntos das variáveis $y_i^{'}$s. Então

$$e_{T_\lambda} f = \left(\sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sigma \right) \left(\sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (-1)^\tau \tau \right) f = \left(\sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sigma \right) f^{'}$$

onde $f^{'} = \left(\sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (-1)^\tau \tau \right) f$. Pelo Teorema 2.63 temos que o polinômio $f^{'} = f_1 + \cdots + f_k$, onde cada f_i, $i = 1, \ldots, k$ é alternado nas variáveis $y_1, \ldots, y_d$ em r conjuntos disjuntos, mas então

$$\begin{aligned} &= \left(\sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sigma \right) f^{'} = \left(\sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sigma \right) (f_1 + \cdots + f_k) \\ &= \left(\sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sigma f_1 + \cdots + \sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sigma f_k \right). \end{aligned}$$

Note que pela Observação 2.65 cada parcela $\sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sigma f_i$ é nula. Portanto o polinômio $e_{T_\lambda} f = 0$ em $F\langle Y, Z \rangle$. O que é uma contradição, pois $e_{T_\lambda} f \not\equiv 0$ em $G(B)$.

Vamos assumir agora que $h(T_\lambda) \geq d+1$, onde $h(T_\lambda)$ é altura do diagrama de λ.

Neste caso escrevemos $e_{T_\lambda} = e_1e_2$, onde $e_1 = \sum_{\sigma\in R_{T_\lambda}} \sigma, e_2 = \sum_{\tau\in C_{T_\lambda}} (-1)^\tau\tau$. Desde que o polinômio e_2f é alternado em algumas $d+1$ variáveis $y_i^{'}$s, então também o polinômio $e_2\tilde{f}$ é alternado nas mesmas variáveis. Visto que $dimB^{(0)} = d$, segue que $e_2\tilde{f} \in Id^{gr}(B)$. Consequentemente $e_{T_\lambda}\tilde{f} \equiv 0$ é também uma identidade graduada de B. Pelo Lema 4.12, temos $\widetilde{e_{T_\lambda}\tilde{f}} = e_{T_\lambda}\tilde{\tilde{f}} = e_{T_\lambda}f \equiv 0$, é uma indentidade graduada de $G(B)$.

Como $n_1 = dr$, concluimos que $e_{T_\lambda}f \notin Id^{gr}(G(B))$ apenas se D_λ o diagrama correspondente à λ é um retângulo de d linhas e r colunas, isto é, $\lambda = (r^d)$.

Agora, considere o FS_{n_2}-submódulo à esquerda de P_{n_1,n_2} gerado por f. De forma análoga ao que fizemos acima, existe uma tabela de Young T_μ com $\mu \vdash n_2$ tal que $e_{T_\mu}f \not\equiv 0$ em $G(B)$. Vamos considerar a ação de e_{T_μ} em f sobre as variáveis $z_1, \ldots, z_{n_2}$.

Suponha primeiro que $h(T_\mu) \geq s+1$ e escreva, como antes, $e_{T_\mu} = e_1e_2$ onde $e_1 = \sum_{\sigma\in R_{T_\mu}} \sigma, e_2 = \sum_{\tau\in C_{T_\mu}} (-1)^\tau\tau$. Neste caso a ação de e_2 em $f \in P_{n_1,n_2}$ nos dá um polinômio alternado em pelo menos $s+1$ variáveis $z_i^{'}$s. Mas todas as variáveis $\{z_1, \ldots, z_{n_2}\}$ em f são divididas em s subconjuntos simétricos disjuntos. Novamente pela Observação 2.65, temos que o polinômio $e_2f = 0$ em $F\langle Y, Z\rangle$ e $e_{T_\mu}f$ também é nulo.

Se por outro lado $l(T_\mu) \geq l+1$, então $g = e_{T_\mu}f$ é simétrico em $l+1$ variáveis $z_i^{'}s$. Pelo Lema 4.12, $\tilde{g}$ é alternado nas mesmas $l+1$ variáveis ímpares. Desde que $dimB^{(1)} = l$, temos que $\tilde{g} \in Id^{gr}(B)$ então $\tilde{\tilde{g}} = g = e_{T_\mu}f \in Id^{gr}(G(B))$, é uma identidade graduada de $G(B)$.

Logo, $e_{T_\mu}f \notin Id^{gr}(G(B))$ somente se D_μ é um retangulo com s linhas e l colunas, isto é, $\mu = (l^s)$. Provamos que se $f \notin Id^{gr}(G(B))$ implica $e_{T_\lambda}e_{T_\mu}f \notin Id^{gr}(G(B))$, onde D_λ e D_μ são dois retângulos de tamanho $r \times d$ e $l \times s$ respectivamente. □

4.4 superalgebras simples e suas envolventes de Grassmann

Nesta seção vamos exibir condições para que a envolvente de Grassmann de uma superalgebra simples sobre um corpo algebricamente fechado não satisfaça identidades correspondentes à tabelas de Young.

Lema 4.14. *Seja $B = B^{(0)} + B^{(1)}$ uma superalgebra simples sobre um corpo algebricamente fechado F, onde $d = dimB^{(0)}, l = dimB^{(1)}$. Então para qualquer inteiro positivo t existe uma partição λ tal que $h(d, l, 2t-s) \leq \lambda \leq h(d, l, 2t), s = dimB$, e uma tabela de Young T_λ tal que $G(B)$ não satisfaz uma identidade $f \equiv 0$ correspondente à T_λ (isto é: $I_\lambda \nsubseteq Id(G(B))$).*

Demonstração: Pelo Teorema 3.29, B é isomorfa a $M_{n,m}(F)$ com $n \geq m \geq 0$ ou a $M_n(F + cF)$ onde $c^2 = 1$.

Suponha primeiro que $B \cong M_{n,m}(F)$. Por hipótese temos $d = dimB^{(0)}, l = dimB^{(1)}$, então $dimB = (n+m)^2 = l+d$. Desde que B é a álgebra de $(n+m)\times(n+m)$-matrizes sobre F, para todo $t \geq 1$ existe um polinômio multilinear $f = f(x_1^1, \ldots, x_{d+l}^1, \ldots, x_1^{2t}, \ldots, x_{d+l}^{2t})$ em $2t(d+l)$ variáveis tal que f é alternado nas variáveis $x_1^i, \ldots, x_{d+l}^i$ para todo $i = 1, \ldots, 2t$ e $f \notin Id(B)$ (ver **[2], teorema 5.7.4**). Esta referência nos mostra que existe um polinômio central de $M_{n,m}(F)$, que não é uma identidade polinomial com $2(n+m)^2$ variáveis. Seja E uma base homogênea da álgebra $\mathbb{Z}_2$-gradauada B. Então $|E| = d + l$ e, para todo i, precisamos substituir todos os elementos de E nas variáveis $x_1^i, \ldots, x_{d+l}^i$, a fim de obter um valor não-nulo para f. As variáveis x_j^i com $j = 1, \ldots, d+l$, devem ser substituídas por elementos diferentes. Vamos considerar as variáveis que serão substituídas por elementos pares (ímpares) de E como variáveis pares (ímpares) respectivamente. Isto significa que após reordenarmos e renomearmos todas as variáveis de f, podemos dizer que

$$f = f(y_1^1, \ldots, y_d^1, \ldots, y_1^{2t}, \ldots, y_d^{2t}, z_1^1, \ldots, z_l^1, \ldots, z_1^{2t}, \ldots, z_l^{2t})$$

não é uma identidade graduada de B onde y_i^j são variáveis pares e z_i^j são variáveis ímpares. Pelo Lema 4.12, $\tilde{f}$ não é uma identidade graduada de $G(B)$. Além disso para cada $i = 1, \ldots, 2t$, desde que f é alternado em $y_1^i, \ldots, y_d^i$ e em $z_1^i, \ldots, z_l^i$, o polinômio $\tilde{f}$ é alternado nas variáveis $y_1^i, \ldots, y_d^i$ e simétrico nas variáveis $z_1^i, \ldots, z_l^i$.

Sejam $n_1 = 2td,\ n_2 = 2tl$. Então $\tilde{f} \in P_{n_1,n_2}$ e pelo Lema 4.13 existem $e_{T_{\hat{\lambda}}} \in R_1 = FS_{n_1}, e_{T_{\hat{\mu}}} \in R_2 = FS_{n_2}, \hat{\lambda} = ((2t)^d), \hat{\mu} = (l^{2t})$ tais que $g = e_{T_{\hat{\lambda}}} e_{T_{\hat{\mu}}} \tilde{f} \not\equiv 0$ em $G(B)$.

Se $l = 0$ então $g = e_{T_{\hat{\lambda}}} \tilde{f} = e_{T_{\hat{\lambda}}} f$ é a não-identidade desejada, desde que $\hat{\lambda} = ((2t)^d) = h(d, 0, 2t)$. Portanto, podemos assumir que $l > 0$.

Seja M o $R_1 \otimes R_2$ submódulo de P_{n_1,n_2} gerado por g. Então M é isomorfo ao produto tensorial $M_1 \otimes M_2$ onde $M_1 = R_1 e_{T_{\hat{\lambda}}}$, $M_2 = R_2 e_{T_{\hat{\mu}}}$. Se escrevermos $n = n_1 + n_2$, então $P_{n_1,n_2} \subseteq P_n$. Vamos considerar $\bar{M}$ o FS_n-submódulo de P_n gerado por M. Seja

$$\bar{M} = \bar{M}_1 \oplus \cdots \oplus \bar{M}_k$$

sua decomposição em FS_n-módulos irredutíveis. Além disso $\bar{M} \cong (M_1 \otimes M_2) \uparrow FS_n = M_1 \hat{\otimes} M_2$. Usando análise combinatória e aplicando a regra de Littlewood-Richardson (ver [1]), podemos obter que todo $\bar{M}_i$ é associado ao diagrama de Young D_λ, tal que $h(d, l, 2t - s) \leq \lambda \leq h(d, l, 2t)$, onde $s = max(l, d)$. Portanto, $\lambda \geq h(d, l, 2t - s)$ para $s = dimB$. Uma vez que $\bar{M}$ não está contido no T-ideal de identidades ordinárias (não graduadas) de $G(B)$, segue que para algum polinômio multilinear $u \in \bar{M}$ e alguma tabela T_λ, devemos ter $e_{T_\lambda} u \not\equiv 0$ em $G(B)$. Assim completamos a prova do lema para o caso

$B = M_{n,m}(F)$.

O próximo caso vamos considerar $B = M_n(F + cF), B^{(0)} = M_n(F),\ B^{(1)} = cM_n(F)$ onde $c^2 = 1$. Então $l = d = n^2 = dim M_n(F)$, e $dim B = 2n^2 = 2d$. Como no caso anterior seja,

$$f_0 = f_0(x_1^1, \ldots, x_d^1, \ldots, x_1^{2t}, \ldots, x_d^{2t})$$

um polinômio multilinear que é alternado nas variáveis $x_1^i, \ldots, x_d^i, i = 1, \ldots, 2t$ e $f_0 \notin Id(M_n(F))$. Além disso f_0 é um polinômio central. Se definirmos,

$$f = f_0(y_1^1, \ldots, y_d^1, \ldots, y_1^{2t}, \ldots, y_d^{2t}) f_0(z_1^1, \ldots, z_l^1, \ldots, z_1^{2t}, \ldots, z_l^{2t}),$$

obtemos que f não é uma identidade graduada de B. Portanto $\tilde{f}$ não é uma identidade de $G(B)$. Utilizando os mesmos argumentos para o polinômio f como no caso anterior completamos a prova. $\square$

Lema 4.15. *Seja $B = B^{(0)} + B^{(1)}$ uma superalgebra simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado F. Se $B = M_{n,m}(F)$, então para qualquer elemento homogêneo não-nulo $b \in B$ e para qualquer matriz unitária E_{ij}, existem elementos homogêneos $a_1, d_1 \in B$ tais que $a_1 b d_1 = E_{ij}$. Se $B = M_n(F + cF)$, $c^2 = 1$, podemos encontar elementos homogêneos $a_1, a_2, d_1, d_2 \in B = M_n(F + cF)$ tais que $a_1 b d_1 = E_{ij} \in B^{(0)}$ e $a_2 b d_2 = cE_{ij} \in B^{(1)}$.*

Demonstração: Primeiro suponha que $B = M_{n,m}(F)$, tome $b \in B$, $b \neq 0$, então $b = \sum_{\sigma,\tau=1}^{n} \gamma_{\sigma\tau} E_{\sigma\tau} \neq 0$, ou seja, existem α, β tais que $\gamma_{\alpha\beta} \neq 0$. Considere os elementos $a_1 = \frac{E_{i\alpha}}{\gamma_{\alpha\beta}}$, $d_1 = E_{\beta j} \in B$, veja que

$$\begin{aligned} a_1 b d_1 &= \frac{E_{i\alpha}}{\gamma_{\alpha\beta}} \left(\sum_{\sigma,\tau=1}^{n} \gamma_{\sigma\tau} E_{\sigma\tau} \right) E_{\beta j} \\ &= \sum_{\sigma,\tau=1}^{n} \gamma_{\sigma\tau} \frac{E_{i\alpha}}{\gamma_{\alpha\beta}} E_{\sigma\tau} E_{\beta j} = E_{ij}. \end{aligned}$$

Para o caso em que $B = M_n(F + cF)$, podemos determinar elementos $a_1, d_1 \in M_n(F + cF)$ tais que $a_1 b d_1 = E_{ij}$.

Tome $b \in B$, com $b \neq 0$, então $b = \sum\limits_{\sigma,\tau=1}^{n} (\delta_{\sigma\tau} + c\gamma_{\sigma\tau}) E_{\sigma\tau} \neq 0$. Observamos que se b é homogêneo então para alguns α, β temos $\delta_{\alpha\beta}^2 - \gamma_{\alpha\beta}^2 \neq 0$.

Considerando os seguintes elementos $a_1 = \frac{E_{i\alpha}(\delta_{\alpha\beta} - c\gamma_{\alpha\beta})}{\delta^2_{\alpha\beta} - \gamma^2_{\alpha\beta}}$, $d_1 = E_{\beta j}$, obtemos

$$\begin{aligned}
a_1 b d_1 &= \frac{E_{i\alpha}(\delta_{\alpha\beta} - c\gamma_{\alpha\beta})}{\delta^2_{\alpha\beta} - \gamma^2_{\alpha\beta}} \sum_{\sigma,\tau=1}^{n} (\delta_{\sigma\tau} + c\gamma_{\sigma\tau}) E_{\sigma\tau} E_{\beta j} \\
&= \sum_{\sigma,\tau=1}^{n} \frac{(\delta_{\alpha\beta} - c\gamma_{\alpha\beta})}{\delta^2_{\alpha\beta} - \gamma^2_{\alpha\beta}} (\delta_{\sigma\tau} + c\gamma_{\sigma\tau}) E_{i\alpha} E_{\sigma\tau} E_{\beta j} \\
&= \sum_{\sigma,\tau=1}^{n} \frac{(\delta^2_{\alpha\beta} - \gamma^2_{\alpha\beta})}{(\delta^2_{\alpha\beta} - \gamma^2_{\alpha\beta})} E_{i\alpha} E_{\sigma\tau} E_{\beta j} \\
&= \sum_{\sigma,\tau=1}^{n} E_{i\alpha} E_{\sigma\tau} E_{\beta j} = E_{ij}.
\end{aligned}$$

E consequentemente, podemos determinar elementos $a_2, d_2 \in M_n(F + cF)$ tais que $a_2 b d_2 = cE_{ij}$, onde $a_2 = a_1$ e $d_2 = cd_1$.

□

Observação 4.16. *Temos que o conjunto* $\{E_{ij} \mid i, j = 1, \ldots, n + m\}$ *forma uma base para a superalgebra* $B = M_{n,m}(F)$ *e o conjunto* $\{E_{ij},\ cE_{ij} \mid i, j = 1, \ldots, n\}$ *forma uma base para a superalgebra* $B = M_n(F + cF)$.

Se A é uma álgebra Z_2-graduada de dimensão finita sobre F, então $A = B + J$, $B = A_1 \oplus \cdots \oplus A_r$ onde $A_1, \ldots, A_r$ são subálgebras Z_2-graduadas simples de A e J é o radical de Jacobson de A. Como vimos antes, consideremos um produto não-nulo

$$B_1 J B_2 J \ldots J B_k \neq 0 \tag{4.4}$$

onde $B_1, \ldots, B_k$ são subálgebras distintas do conjunto $\{A_1, \ldots, A_r\}$.

Lema 4.17. *Seja* A *uma álgebra* Z_2*-graduada de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado* F*. Suponha que* $B_1 J B_2 J \ldots J B_k \neq 0$*. Sejam* $f_1, \ldots, f_k$ *polinômios multilineares em conjuntos distintos de variáveis tais que para todo* $i = 1, \ldots, k$, $f_i \notin Id(G(B_i))$*. Então o polinômio multilinear*

$$u_1 f_1 v_1 w_1 u_2 f_2 v_2 w_2 \ldots w_{k-1} u_k f_k v_k$$

onde $u_1, v_1, w_1, \ldots, w_{k-1}, u_k, v_k$ *são novas variáveis, não é um identidade de* $G(A)$*.*

Demonstração: Por (4.4) existem elementos homogêneos $b_1 \in B_1, \ldots, b_k \in B_k$, $e_1, \ldots, e_{k-1} \in J$ tais que:

$$b_1 e_1 b_2 e_2 \ldots e_{k-1} b_k \neq 0. \tag{4.5}$$

em A. Como as álgebras B_i, $i = 1, \dots, k$ são superalgebras simples de dimensão finita, então pelo Teorema 3.29 estas álgebras são tais que $B_i \cong M_{s_i}(F)$, $B_i \cong M_{s_i,t_i}(F)$ ou $B_i \cong M_{s_i}(F + cF)$. Então podemos escolher os elementos $b_i's$ como sendo as matrizes elementares E_{ij} no caso em que $B = M_s(F)$ ou $B = M_{s,t}(F)$, e E_{ij} ou cE_{ij} no caso em que $B = M_s(F + cF)$, que por sua vez formam uma base para estas álgebras. Para todo $i = 1, \dots, k$, escreva $f_i = f_i(x_1^i, \dots, x_{n_i}^i)$. Uma vez que f_i não é uma identidade de $G(B_i)$, existem elementos homogêneos $\bar{x}_1^i, \dots, \bar{x}_{n_i}^i \in B_i$, $g_j^i \in G$ tais que $f_i(\bar{x}_1^i \otimes g_1^i, \dots, \bar{x}_{n_i}^i \otimes g_{n_i}^i) \neq 0$.

Suponha que x_j^i seja uma variável par no polinômio f_i se $\bar{x}_j^i \in B_i^{(0)}$ e x_j^i seja uma variável ímpar no caso em que $\bar{x}_j^i \in B_i^{(1)}$. A partir do polinômio f_i vamos obter assim o polinômio graduado correspondente a cada uma substituição. Recordando a definição de $\tilde{f}_i$, temos

$$f_i(\bar{x}_1^i \otimes g_1^i, \dots, \bar{x}_{n_i}^i \otimes g_{n_i}^i) = \tilde{f}_i(\bar{x}_1^i, \dots, \bar{x}_{n_i}^i) \otimes g_1^i \dots g_{n_i}^i.$$

Desde que $f_i \notin Id(G(B_i))$ segue que $\tilde{f}_i(\bar{x}_1^i, \dots, \bar{x}_{n_i}^i) = \bar{b}_i \neq 0$, para algum $\bar{b}_i \in B_i$. Temos que $\bar{b}_i$ é um elemento homogêneo com respeito a $\mathbb{Z}_2$-graduação. Pelo Lema 4.15, podemos escolher elementos homogêneos $a_i, d_i \in B_i$ tais que $a_i\bar{b}_i d_i = b_i$. Assim o polinômio $u_i\tilde{f}_i v_i$ assume o valor b_i avaliando $u_i, x_1^i, \dots, x_{n_i}^i, v_i$ em $a_i, \bar{x}_1^i, \dots, \bar{x}_{n_i}^i, d_i$, respectivamente. Sejam h_i, h_i', t_i elementos de G de mesmo grau homogêneo que a_i, d_i, e_i na $\mathbb{Z}_2$-graduação, respectivamente. Então para $i = 1, \dots, k-1$, obtemos

$$\begin{aligned}
(a_i \otimes h_i) f_i(\bar{x}_1^i \otimes g_1^i, \dots, \bar{x}_{n_i}^i \otimes g_{n_i}^i)(d_i \otimes h_i')(e_i \otimes t_i) &= \\
(a_i \otimes h_i)(\tilde{f}_i(\bar{x}_1^i, \dots, \bar{x}_{n_i}^i) \otimes g_1^i \dots g_{n_i}^i)(d_i \otimes h_i')(e_i \otimes t_i) &= \\
\underbrace{a_i \tilde{f}_i(\bar{x}_1^i, \dots, \bar{x}_{n_i}^i) d_i}_{b_i} e_i \otimes h_i g_1^i \dots g_{n_i}^i h_i' t_i &= b_i e_i \otimes h_i g_1^i \dots g_{n_i}^i h_i' t_i.
\end{aligned}$$

De forma análoga para $i = k$ obtemos

$$\begin{aligned}
(a_k \otimes h_k) f_k(\bar{x}_1^k \otimes g_1^k, \dots, \bar{x}_{n_k}^k \otimes g_{n_k}^k)(d_k \otimes h_k') &= \\
\underbrace{a_k \tilde{f}_k(\bar{x}_1^k, \dots, \bar{x}_{n_k}^k) d_k}_{b_k} \otimes h_k g_1^k \dots g_{n_k}^k h_k' &= b_k \otimes h_k g_1^k \dots g_{n_k}^k h_k'.
\end{aligned}$$

Como G é a álgebra de Grassmann de posto infinito, podemos escolher elementos homogêneos $h_i, h_i', t_i, g_i^j \in G$ tais que

$$h_1 g_1^1 \dots g_{n_1}^1 h_1' t_1 h_2 g_1^2 \dots g_{n_2}^2 h_2' t_2 \dots t_{k-1} h_k g_1^k \dots g_{n_k}^k h_k' \neq 0. \tag{4.6}$$

Consequentemente, por (4.5) e (4.6) o polinômio $u_1 f_1 v_1 w_1 u_2 f_2 v_2 w_2 \dots w_{k-1} u_k f_k v_k$ assume um valor não-nulo em $u_i = a_i \otimes h_i$, $v_i = d_i \otimes h_i'$, $w_i = e_i \otimes t_i$, $x_i^j = \bar{x}_i^j \otimes g_i^j$, pois depois da substituição obtemos o seguinte produto:

$$b_1e_1b_2e_2\dots e_{k-1}b_k\otimes h_1g_1^1\dots g_{n_1}^1h_1^{'}t_1h_2g_1^2\dots g_{n_2}^2h_2^{'}t_2\dots t_{k-1}h_kg_1^k\dots g_{n_k}^kh_k^{'}$$

que é não-nulo. E assim completamos a prova. □

4.5 Colando tabelas de Young

Sejam $\lambda_1\vdash n_1,\lambda_2\vdash n_2,\dots,\lambda_k\vdash n_k$ partições dadas e suponha que elas satisfazem as seguintes condições

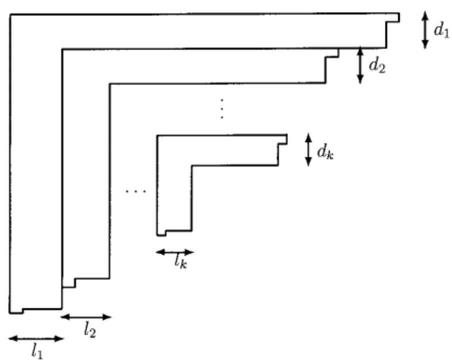
$$h(d_i,l_i,t_i-s_i)\le\lambda_i\le h(d_i,l_i,t_i),\ i=1,\dots,k, \tag{4.7}$$

e

$$t_i-s_i\ge t_{i+1}+l_{i+1},\quad t_{i+1}+d_{i+1},\ i=1,\dots,k-1. \tag{4.8}$$

Sejam $D_1=D_{\lambda_1},D_2=D_{\lambda_2},\dots,D_k=D_{\lambda_k}$ os correspondentes diagramas de Young. Por (4.7), o comprimento das primeiras d_i linhas de D_i é maior que $l_i+t_i-s_i$ e menor que l_i+t_i. De modo análogo, o comprimento das primeiras l_i colunas (se $l_i>0$) é maior que $d_i+t_i-s_i$ e não maior que d_i+t_i. A desigualdade (4.8) significa que se colarmos as primeiras linhas de D_{i+1} à (d_i+1)-ésima linha de D_i e a segunda linha de D_{i+1} à (d_i+2)-ésima linha de D_i e assim por diante, então vamos obter como resultado um novo diagrama de Young $D_i\bigstar D_{i+1}$ com n_i+n_{i+1} boxes.

Considere o diagrama $D_\lambda=D_1\bigstar D_2\bigstar\dots\bigstar D_k$ obtido pela "colagem"dos $D_1,D_2,\dots,D_k$ como segue abaixo (veja a figura). Note que, $\lambda\le h(d,l,t)$ onde



$l=l_1+\dots+l_k$, $d=d_1+\dots+d_k$ e $t\ge t_1+l_1-l,\ t_1+d_1-d$. Por outro lado, $\lambda\ge h(d,l,t_k-s_k)$.

Seja agora $T_1, \ldots, T_k$ quaisquer tabelas de Young associadas à $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ respectivamente. Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ satisfazem (4.7) e (4.8) acima, podemos colar as tabelas de uma forma semelhante: se α_{uv} é a entrada aparecendo na posição (u, v) de T_i, escrevemos $T_i = D_i(\alpha_{uv})$. Para todo $i = 2, \ldots, k$ adicionamos agora $n_1 + \cdots + n_{i-1}$ à todas as entradas de T_i, obtendo desta maneira uma nova tabela $D_i(\alpha_{uv} + n_1 + \cdots + n_{i-1})$. Se $T_1 = D_1(\alpha_{uv})$, $T_2 = D_2(\beta_{uv}), \ldots, T_k = D_k(\gamma_{uv})$, definimos então

$$\begin{aligned} T_\lambda &= T_1 \bigstar T_2 \bigstar \ldots \bigstar T_k \\ &= D_1(\alpha_{uv}) \bigstar D_2(\beta_{uv} + n_1) \bigstar \ldots \bigstar D_k(\gamma_{uv} + n_1 + \cdots + n_{k-1}). \end{aligned}$$

É evidente que a tabela assim obtida tem como entradas os números distintos $1, 2, \ldots, n$, onde $n = n_1 + \cdots + n_k$.

Defina $N_1 = \{1, \ldots, n_1\}$ e para $2 \leq i \leq k$, $N_i = \{n_1 + \ldots n_{i-1} + 1, \ldots, n_1 + \cdots + n_i\}$. Assim, $N = \{1, \ldots, n\}$ é a união disjunta $N = N_1 \cup \cdots \cup N_k$. Para $i = 1, \ldots, k$, tomamos S_{n_i} como o grupo de permutação agindo sobre o conjunto N_i, de modo que podemos considerar as álgebras de grupo $FS_{n_1}, \ldots, FS_{n_k}$ imersas em FS_n, $FS_{n_1} \otimes \cdots \otimes FS_{n_k} \subseteq FS_n$.

Precisamos relacionar o elemento idempotente essencial e_{T_λ} à $e_{T_1}, \ldots, e_{T_k}$, isto será feito no lema seguinte.

Lema 4.18. *Suponha que $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ satisfazem as condições (4.7) e (4.8) e sejam $T_1, \ldots, T_k$ as tabelas de Young correspondentes. Se $T_\lambda = T_1 \bigstar \ldots \bigstar T_k$, então*

$$e_{T_\lambda} = e_{T_1} \cdots e_{T_k} + b$$

onde b é uma combinação linear de elementos $\sigma \in S_n$ tais que $\sigma(N_i) \not\subseteq N_i$ para algum $1 \leq i \leq k$.

Demonstração: Seja $E = \{\sigma \in S_n | \ \sigma(N_i) \subseteq N_i$ para todo $i = 1, \ldots, k\}$. Claro que $E \cong S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_k}$, S_{n_i} age sobre N_i para todo $i = 1, \ldots, n_k$. Precisamos verificar que $e_{T_\lambda} - e_{T_1} \ldots e_{T_k} = \sum_{\sigma \in S_n \setminus E} \alpha_\sigma \sigma$ para adequados $\alpha_\sigma \in F$. Recordamos que

$$e_{T_\lambda} = \sum_{\substack{\sigma \in R_{T_\lambda} \\ \tau \in C_{T_\lambda}}} (-1)^\tau \sigma\tau, \tag{4.9}$$

onde R_{T_λ} é um subgrupo de S_n das permutações nas linhas de T_λ e C_{T_λ} é o subgrupo das permutações nas colunas de T_λ. Denote por $R = R_{T_\lambda} \cap E$, $C = C_{T_\lambda} \cap E$ e

$$\begin{aligned} R_i &= \{\sigma \in R_{T_\lambda} | \ \sigma(x) = x, \ \forall x \ \in \ N \backslash N_i\}, \\ C_i &= \{\sigma \in C_{T_\lambda} | \ \sigma(x) = x, \ \forall x \ \in \ N \backslash N_i\}. \end{aligned}$$

Podemos dividir a soma (4.9) em duas partes, $e_{T_\lambda} = u + w$, onde

$$u = \sum_{\substack{\sigma \in R \\ \tau \in C}} (-1)^\tau \sigma\tau = \left(\sum_{\sigma \in R} \sigma \right) \left(\sum_{\tau \in C} (-1)^\tau \tau \right)$$

e w contém todos os termos restantes do lado direito de (4.9). Vamos mostrar que $u = e_{T_1} \dots e_{T_k}$ e w é uma combinação linear de $\sigma \notin E$.

Primeiramente note que qualquer $\sigma \in R$ tem uma decomposição única $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_k$ onde $\sigma_i \in R_i, \ i = 1, \dots, k$.

Por outro lado, se $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ são algumas permutações de $R_1, \dots, R_k$ respectivamente, então $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_k$ encontra-se em R. De fato, $\sigma_i \in R_{T_\lambda}$ para todo $i = 1, \dots, k$, como R_{T_λ} é um subgrupo, então $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_k \in R_{T_\lambda}$, e é claro que $\sigma \in E$. Consequentemente,

$$\sum_{\sigma \in R} \sigma = \sum_{\sigma_1 \in R_1, \dots, \sigma_k \in R_k} \sigma_1 \dots \sigma_k = \left(\sum_{\sigma_1 \in R_1} \sigma_1 \right) \dots \left(\sum_{\sigma_k \in R_k} \sigma_k \right).$$

De modo análogo,

$$\begin{aligned} \sum_{\tau \in C} (-1)^\tau \tau &= \sum_{\tau_1 \in C_1, \dots, \tau_k \in C_k} (-1)^{\tau_1 \dots \tau_k} \tau_1 \dots \tau_k = \sum_{\tau_1 \in C_1, \dots, \tau_k \in C_k} (-1)^{\tau_1} \dots (-1)^{\tau_k} \tau_1 \dots \tau_k \\ &= \left(\sum_{\tau_1 \in C_1} (-1)^{\tau_1} \tau_1 \right) \dots \left(\sum_{\tau_k \in C_k} (-1)^{\tau_k} \tau_k \right). \end{aligned}$$

Desde que, se $a_i \in FS_{n_i}$ e $a_j \in FS_{n_j}$, então $a_i a_j = a_j a_i$, para quaisquer $1 \leq i, j \leq k$ tais que $i \neq j$, segue que

$$\begin{aligned} u &= \left(\sum_{\sigma \in R} \sigma \right) \left(\sum_{\tau \in C} (-1)^\tau \tau \right) \\ &= \left[\left(\sum_{\sigma_1 \in R_1} \sigma_1 \right) \dots \left(\sum_{\sigma_k \in R_k} \sigma_k \right) \right] \left[\left(\sum_{\tau_1 \in C_1} (-1)^{\tau_1} \tau_1 \right) \dots \left(\sum_{\tau_k \in C_k} (-1)^{\tau_k} \tau_k \right) \right] \\ &= \left[\left(\sum_{\sigma_1 \in R_1} \sigma_1 \right) \left(\sum_{\tau_1 \in C_1} (-1)^{\tau_1} \tau_1 \right) \right] \dots \left[\left(\sum_{\sigma_k \in R_k} \sigma_k \right) \left(\sum_{\tau_k \in C_k} (-1)^{\tau_k} \tau_k \right) \right] = e_{T_1} \dots e_{T_k}. \end{aligned}$$

Vamos considerar

$$w = \left(\sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sigma\right)\left(\sum_{\tau \in C_{T_\lambda}\backslash E} (-1)^\tau \tau\right) + \left(\sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}\backslash E} \sigma\right)\left(\sum_{\tau \in C} (-1)^\tau \tau\right).$$

Tome $\tau \in C_{T_\lambda}\backslash E$ e $\sigma \in R_{T_\lambda}$. Então para este τ existe i tal que $\tau(x) \in N_j$ para algum $x \in N_i$, com $j < i$. Suponha que x encontra-se na m-ésima linha de T_λ. Então como $\tau \in C_{T_\lambda}$, $\tau(x)$ fica na mesma coluna que x, então $\tau(x)$ encontra-se em uma linha superior (digamos n-ésima linha) de T_λ, desde que $\tau(x) \in N_j$ e $j < i$. Pela construção de T_λ todas as entradas da q-ésima linha pertencem $N_1 \cup \cdots \cup N_j$. Assim $\sigma\tau(x) = \sigma(\tau(x)) \in N_1 \cup \cdots \cup N_j$, então $\sigma\tau(x) \notin N_i$ para todo $\sigma \in R_{T_\lambda}$. Logo $\sigma\tau \notin E$.

Por outro lado, se $\tau \in C_{T_\lambda} \cap E$ e $\sigma \in R_{T_\lambda}\backslash E$, então $\sigma\tau \notin E$ visto que E é um subgrupo de S_n e $\tau \in E$. Deste modo, temos $w = \sum_{\tilde{\sigma} \notin E} \alpha_{\tilde{\sigma}} \tilde{\sigma}$ e assim completamos a prova. □

4.6 Calculando o limite inferior da $c_n(G(A))$.

Nesta seção vamos determinar um limite inferior para a sequência de codimensões da envolvente de Grassmann $G(A)$ de uma superalgebra A de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado F de característica zero. Como antes, vamos assumir sempre que quando o grupo simétrico S_n age sobre um polinômio multilinear em $m \geq n$ variáveis, ele age apenas nas primeiras n variáveis.

Lema 4.19. *Seja A uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado com radical de Jacobson J. Sejam $B_1, \ldots, B_k$ distintas subálgebras Z_2-graduadas simples de A tais que $B_1 J B_2 \ldots J B_k \neq 0$ e sejam $d = dim(B_1^{(0)} \oplus \cdots \oplus B_k^{(0)})$, $l = dim(B_1^{(1)} \oplus \cdots \oplus B_k^{(1)})$. Então, para qualquer inteiro positivo $t \geq 2\ dimA$ existe $\lambda \vdash n$ tal que $h(d, l, 2t - s) \leq \lambda \leq h(d, l, 2t)$, $s = 4\ dimA$, e para alguma tabela T_λ, $e_{T_\lambda} f \notin Id(G(A))$ para algum polinômio multilinear f com $n \leq degf \leq n + 3\ dimA$.*

Demonstração: Denotemos por $d_i = dimB_i^{(0)}$, $l_i = dimB_i^{(1)}$, para $i = 1, \ldots, k$. Então $d = d_1 + \cdots + d_k, l = l_1 + \cdots + l_k$. Pelo Lema 4.14, temos que, para qualquer inteiro t_i, existem uma partição λ_i tal que $h(d_i, l_i, 2t_i - s_i) \leq \lambda_i \leq h(d_i, l_i, 2t_i)$, onde $d_i, l_i \leq s_i = dimB_i$, e uma tabela T_i correspondente à λ_i, tal que $g_i \notin Id(G(B_i))$ para algum polinômio multilinear g_i correspondente à T_i, com $i = 1, \ldots, k$.

Escolhemos $t_1, \ldots, t_k$ pela seguinte regra. Seja $t_1 = t \geq 2\ dimA$ arbitrário. Denote

$q_i = s_{i-1} + max\ \{l_i, d_i\}$, $i = 2, \ldots, k$, e seja $q_i^{'} = q_i$ se q_i é par e $q_i^{'} = q_i + 1$ se q_i é ímpar. Então defina $2t_{i+1} = 2t_i - q_{i+1}^{'}$, $i = 1, \ldots, k-1$. Segue que

$$2t_i - s_i = 2t_{i+1} + q_{i+1}^{'} - s_i \geq 2t_{i+1} + max\{l_{i+1}, d_{i+1}\}.$$

Pelas escolhas feitas acima, vejamos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ satisfazem as desigualdades (4.7) e (4.8) com $t_1, \ldots, t_k$ substituídos por $2t_1, \ldots, 2t_k$, respectivamente.

Agora colamos as tabelas $T_1, \ldots, T_k$ correspondentes as partições $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ respectivamente, como mostrado na seção anterior. Obtemos assim uma tabela $T_\lambda = T_1 \bigstar \ldots \bigstar T_k$ associada à particão λ, satisfazendo $h(d, l, 2t_k - s_k) \leq \lambda \leq h(d, l, u)$ para todo $u \geq 2t_1 + l_1 - l, 2t_1 + d_1 - d$. Podemos agora calcular

$$\begin{aligned} 2t_1 - 2t_k &= \sum_{i=1}^{k-1}(2t_i - 2t_{i+1}) = \sum_{i=1}^{k-1}(q_{i+1}^{'}) \leq k + \sum_{i=1}^{k-1} q_{i+1} \leq k + \sum_{i=1}^{k-1}(s_i + s_{i+1}) \\ &\leq k + 2dim(B_1 \oplus \cdots \oplus B_k) \leq 3dimA. \end{aligned}$$

Por isso, $2t_k - s_k \geq 2t - 3\ dimA - s_k \geq 2t - 4\ dimA$. Então, λ satisfaz as desigualdades $h(l, d, 2t - 4\ dimA) \leq \lambda \leq h(d, l, 2t)$, pois $2t \geq 2t_1 + l_1 - l$ e $2t \geq 2t_1 + d_1 - d$, já que $l_1 \leq l$, $d_1 \leq d$ e $t = t_1$.

Para todo $i = 1, \ldots, k$, seja T_i a tabela correspondente à λ_i tal que $g_i \notin Id(G(B_i))$, para algum polinômio multilinear correspondente à T_i (ver Lema 4.14) e seja $n_i = deg\ g_i$. Escreva $n = n_1 + \cdots + n_k$ e seja $\{1, \ldots, n\} = N_1 \cup \cdots \cup N_k$, onde os $N_i^{'}$s são definidos como na seção anterior. Para todo $i = 1, \ldots, k$, denotemos por f_i o polinômio multilinear g_i escrito nas novas variáveis do conjunto $\{x_j |\ j \in N_i\}$, ou seja, $f_1 = g_1(x_1, \ldots, x_{n_1})$, $f_2 = g_2(x_{n_1+1}, \ldots, x_{n_1+n_2}), \ldots, f_k = g_k(x_{n_1+\cdots+n_{r-1}+1}, \ldots, x_{n_1+\cdots+n_{r-1}+n_k})$.

Agora construímos o seguinte polinômio multilinear

$$f = u_1 f_1 v_1 w_1 u_2 f_2 v_2 w_2 \ldots w_{k-1} u_k f_k v_k,$$

obtido pela colagem das tabelas T_i, onde u_i, v_i, w_i são novas variáveis. Pelo Lema 4.17 $f \notin Id(G(A))$, segue que f é não-nulo em algumas substituições $\theta(w_i) = \bar{w}_i$, $\theta(u_i) = \bar{u}_i$, $\theta(v_i) = \bar{v}_i$, $\theta(x_i) = \bar{x}_i$ onde $\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_{k-1} \in J \otimes G, \bar{u}_i$, $\bar{v}_i \in B_i \otimes G$ e $\bar{x}_j \in B_i \otimes G$ se $j \in N_i$. Tal que $\theta(f) \neq 0$. Note que $degf = n + 3k - 1 \leq n + 3\ dimA$, e assim obtemos o grau desejado.

Para completar a prova do lema devemos mostrar que $e_{T_\lambda} f \notin Id(G(A))$. De fato, considere para o polinômio $e_{T_\lambda} f$ a mesma substituição θ. Então pelo Lema 4.18

$$e_{T_\lambda} f = (e_{T_1} \ldots e_{T_k} f) + (bf)$$

e assim,

$$\theta(e_{T_\lambda} f) = \theta(e_{T_1} \cdots e_{T_k} f) + \theta(bf),$$

onde b é uma combinação linear de elementos $\sigma \in S_n$ que "embaralham"os conjuntos $N_1, \ldots, N_k$. Desde que e_{T_i} é um elemento idempotente essencial, isto é, $e_{T_i}^2 = \mu_i e_{T_i}$ para algum $\mu_i \in \mathbb{Q}$, $\mu_i \neq 0$ e como f_i é um polinômio multilinear correspondente à T_i, então $f_i = e_{T_i} f_i'$ para algum $f_i' \in P_n$. Assim obtemos $e_{T_i} f_i = e_{T_i}^2 f_i' = \mu_i e_{T_i} f_i' = \mu_i f_i$. Como cada e_{T_i} age independentemente em f_i, segue que $\theta(e_{T_1} \ldots e_{T_k} f) = \mu_1 \cdots \mu_k \theta(f) \neq 0$, pois $\mu_i \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, k$ e $\theta(f) \neq 0$.

Por outro lado, precisamos mostrar que o elemento $\theta(bf)$ é igual a zero em $G(A)$. Seja $\sigma \in S_n$ tal que $\sigma(N_i) \not\subset N_i$ para algum $1 \leq i \leq k$. Então $\sigma(j) \in N_q$ para algum $j \in N_i, q \neq i$. Isto significa que $\theta(\sigma f_i)$ pertence à $G(B_q)$. Temos que

$$\theta(\sigma f) = \bar{u}_1 \theta(\sigma f_1) \bar{v}_1 \bar{w}_1 \cdots \theta(\sigma f_k) \bar{v}_k = 0,$$

desde que $\bar{u}_i \theta(\sigma f_i) \in G(B_i) G(B_q) \subseteq B_i B_q \otimes G = 0,\ i \neq q$. Portanto, $\theta(bf) = 0$ em $G(A)$ e assim completamos a prova. $\square$

Como resultado do lema anterior temos a seguinte proposição. Vamos mostrar que $c_n(G(A))$ de uma álgebra A de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado é limitada inferiormente.

Proposição 4.20. *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero. Seja $p = max\ (p^{(0)} + p^{(1)})$ como definido em (4.1). Então existem constantes $C_2, r_2 > 0$ dependendo somente da $dim A$ tais que $c_n(G(A)) \geq C_2 n^{r_2} p^n$, para n suficientemente grande.*

Demonstração: Recorde que $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_r + J$ onde $A_1, \ldots, A_r$ são superalgebras simples, e $p = max\ dim_F(B_1 \oplus \cdots \oplus B_k)$, onde $B_1, \ldots, B_k$ são superalgebras distintas do conjunto $\{A_1, \ldots, A_r\}$ com $B_1 J B_2 J \ldots J B_k \neq 0$. Sejam

$$d = dim(B_1^{(0)} \oplus \cdots \oplus B_k^{(0)})\ ,\ l = dim(B_1^{(1)} \oplus \cdots \oplus B_k^{(1)})$$

e $m = dim A$. Para qualquer $N > 5m^2 + 3m$, ao dividir $N - dl - 3m$ por $2p$ obtemos $N = 2tp + dl + 3m + r$, para algum $t > 2m$ e $0 \leq r < 2p$, onde t é o quociente e r é o resto da divisão. Notemos que de fato ocorre $t > 2m$, pois $N - dl - 3m \geq N - m^2 - 3m > 4m^2$ e $t = \frac{N-dl-3m}{2p} > \frac{4m^2}{2m} = 2m$, já que $2p < 2m$ então $\frac{1}{2p} > \frac{1}{2m}$.

Considere as partições

$$h(d,l,2t) = (\underbrace{l+2t,\ldots,l+2t}_{d},\underbrace{l,\ldots,l}_{2t}),$$

do número $|h(d,l,2t)| = d(l+2t)+2tl = dl+2t(d+l) = dl+2tp$, e $h(d,l,2t-4m)$ do número $|h(d,l,2t-4m)| = 2tp+dl-4mp$.

Pelo Lema 4.19, existem n com $2tp+dl-4mp \leq n \leq 2tp+dl$, e uma partição $\lambda \vdash n$ com $h(d,l,2t-4m) \leq \lambda \leq h(d,l,2t)$, tal que $e_{T_\lambda} f \notin Id(G(A))$, para alguma tabela T_λ e um polinômio multilinear f com $n \leq degf = c \leq n+3m$. Temos que $c \leq N$, pois $c \leq n+3m \leq 2tp+dl+3m = N-r \leq N$, $(r \geq 0)$.

Agora construímos o polinômio $f^{'} = fx_{c+1}\cdots x_N$, onde $x_{c+1},\ldots,x_N$ são novas variáveis distintas em f. Pelo prova do Lema 4.17 e pelo Lema 4.19, existe uma substituição em $e_{T_\lambda} f$ tal que $\theta(e_{T_\lambda} f) = a \otimes g$, com $a \in B_1JB_2J\ldots JB_k \neq 0$ e $0 \neq g \in G$. Vamos considerar as mesmas substituições θ para variáveis $x_1,\ldots,x_c$ do polinômio f, e para $x_{c+1} = 1_B \otimes g_{c+1},\ldots,x_N = 1_B \otimes g_N$, $g_i \in G^{(0)}$. Esta substituição para o polinômio $e_{T_\lambda} f^{'}$ nos dá o resultado

$$\theta(e_{T_\lambda} f^{'}) = \theta(e_{T_\lambda} f)\theta(x_{c+1}\cdots x_N) = (a\otimes g)(1_B\otimes g_{c+1})\cdots(1_B\otimes g_N) = a\otimes gg_{c+1}\cdots g_N \neq 0,$$

pois podemos escolher g_i de forma que $gg_{c+1}\cdots g_N \neq 0$. Assim, temos que $e_{T_\lambda} f^{'} \notin Id(G(A))$. Então $FS_n e_{T_\lambda} f^{'} \not\subseteq Id(G(A))$. Pelo Teorema 2.48 Branching rule, temos

$$FS_N e_{T_\lambda} f^{'} \subseteq \bigoplus_{\substack{\mu \vdash N \\ \mu \geq \lambda}} I_\mu f^{'},$$

onde I_μ é o ideal bilateral de FS_N correspondente a μ. Por isso, existe $\mu \geq \lambda$ e uma tabela T_μ tal que $FS_N e_{T_\mu} f^{'} \not\subseteq Id(G(A))$. Se d_μ denota o grau do caracter χ_μ, segue que

$$c_N(G(A)) = \sum_{\mu \vdash N} m_\mu d_\mu \geq d_\mu \geq d_{h(d,l,2t-4m)},$$

pois temos $\mu \vdash N$, $\lambda \vdash n$ e $\mu \geq \lambda \geq h(d,l,2t-4m)$, consequentemente $d_\mu \geq d_{h(d,l,2t-4m)}$. Note que, $N- \mid h(d,l,2t-4m) \mid= 2tp+dl+3m+r-(2tp-4mp+dl) = 4mp+3m+r < 4m^2+3m+2p < 4m^2+3m+2m = 4m^2+5m$. Como $h(d,l,2t-4m) \leq \mu$ e $N-|h(d,l,2t-4m)| < 4m^2+5m$, pelo Lema 4.9

$$d_{h(d,l,2t-4m)} \leq d_\mu \leq N^{4m^2+5m} d_{h(d,l,2t-4m)}.$$

E pelo Lema 4.10 obtemos a seguinte igualdade assintótica,

$$d_{h(d,l,2t-4m)} \simeq_{N\to\infty} aN^b(d+l)^N = aN^bp^N$$

para algumas constantes a, b. Agora relacionando estes dois resultados, temos que a partir de um N suficientemente grande

$$\begin{aligned} c_N(G(A)) &= \sum_{\mu\vdash N} m_\mu d_\mu \geq d_\mu \geq d_{h(d,l,2t-4m)} \\ &\simeq aN^bp^N. \end{aligned}$$

Portanto $c_N(G(A)) \geq C_2N^{r_2}p^N$, para algumas constantes C_2, r_2 dependendo de m, onde $C_2 = a,\ r_2 = b$. □

Observação 4.21. *No Lema 4.5 mostramos que $c_n(G(A))$ é limitada superiormente e no Lema 4.20 que é limitada inferiormente.*

4.7 Resultado principal. Existência do PI-expoente.

Nesta seção vamos provar o resultado principal do trabalho. Provaremos que o expoente de qualquer PI-ágebra sobre um corpo de característica zero coincide com o inteiro definido em (4.2), e vamos calcular o expoente de algumas álgebras importantes.

Teorema 4.22. *Seja A uma PI-álgebra sobre qualquer corpo F de característica zero. Então $exp(A)$ existe e é um inteiro.*

Demonstração: Se K é uma extensão do corpo F, pelo Teorema 3.4 temos $c_n(A) = c_n^K(A\otimes_F K)$. Portanto podemos assumir sem perda de generalidade que F é um corpo algebricamente fechado, pois assim teremos $c_n(A) = c_n^{\bar{F}}(A\otimes_F \bar{F})$, onde $\bar{F}$ é o fecho algébrico de F. pelo Teorema 3.43 existe uma superalgebra de dimensão finita B sobre F tal que $Id(A) = Id(G(B))$. Então $c_n(A) = c_n(G(B))$ para todo $n \geq 1$. pelas Proposições 4.11 e 4.20 temos que $c_n(G(B))$ é limitada inferiormente e superiormente, ou seja, existem constantes C_1, C_2, r_1, r_2 que dependem somente da dimensão de B tais que $C_2n^{r_2}p^n \leq c_n(G(B)) \leq C_1n^{r_1}p^n$. Agora, aplicando em ambos lados das desigualdade $\sqrt[n]{}$ e depois calculando $\lim\limits_{n\to\infty}$, obtemos $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n(G(B))} = p$. Mas isto corresponde ao PI-expoente de $G(B)$. Portanto o expoente de A existe e é um inteiro. □

Observe que expoente da envolvente de Grassmann de uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado é igual ao inteiro definido em 4.1.

A seguir vamos calcular o expoente para algumas álgebras importantes.

Uma álgebra A é dita verbalmente prima, se ela gera uma variedade prima, isto é, se $Id(A)$ é verbalmente primo, ou seja, para quaisquer T-ideais I_1, I_2 o fato $I_1 I_2 \subseteq Id(A)$ implica que $I_1 \subseteq Id(A)$ ou $I_2 \subseteq Id(A)$. É conhecido que as álgebras $F\langle X \rangle$, $M_k(F)$, $M_k(G)$ e $M_{k,l}(G)$, $l, k > 0$ são verbalmentes primas.

A.R.Kemer em [5], caracterizou os T-ideais verbalmente primos sobre um corpo de característica zero, e provou que o estudo de T-ideais verbalmente primos pode ser reduzido a T-ideais de identidades das álgebras verbalmente primas definidas acima.

Observação 4.23. 1. *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre F. Então A pode ser considerada como uma álgebra com $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial. Neste caso*

$$G(A) = A \otimes G^{(0)} + 0 \otimes G^{(1)} = A \otimes G^{(0)}.$$

Então $Id(A) = Id(G(A))$, uma vez que $G^{(0)} = Z(G)$ é uma álgebra comutativa, não nilpotente sobre F. Segue que $c_n(A) = c_n(G(A)) \Rightarrow exp(A) = exp(G(A))$.

2. *Se $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_r$ é uma superalgebra semissimples de dimensão finita então $J(A) = 0$, onde $A_1, \ldots, A_r$ são superalgebras simples. Para que a equação (4.1) seja setisfeita, temos que $r = 1$. Assim $exp(A) = max_{1 \leq i \leq r}\{dim_F A_i\}$.*

3. *Se A é uma superalgebra simples de dimensão finita, o PI-expoente $exp(G(A)) = dim_F A$.*

Vamos calcular o PI-expoente das álgebras verbalmentes primas.

Exemplo 4.24. $exp(M_k(F)) = exp(G(M_k(F))) = exp(M_k(G^{(0)})) = dim(M_k(F)) = k^2$, *onde $M_k(F)$ é uma superalgebra simples.*

Exemplo 4.25. $M_k(G) = M_k(F) \otimes G^{(0)} + M_k(F) \otimes G^{(1)}$ *é a envolvente de Grassmann da superalgebra $M_n(F + cF)$, com $c^2 = 1$. Assim, $exp(M_k(G)) = dim(M_k(F) + cM_k(F)) = 2k^2$.*

Exemplo 4.26. *Particularmente no Exemplo 4.25, para o caso em que $k = 1$, temos $exp(M_1(G)) = exp(G) = 2$.*

Exemplo 4.27. $M_{k,l}(G) \cong M_{k,l}^{(0)}(F) \otimes G^{(0)} + M_{k,l}^{(1)}(F) \otimes G^{(1)}$ *é a envolvente de Grassmann da superalgebra simples $M_{k,l}(F)$ com graduação $(M_{k,l}^{(0)}(F),\ M_{k,l}^{(1)}(F))$. Assim, $exp(M_{k,l}(G)) = dim M_{k,l}^{(0)}(F) + dim M_{k,l}^{(1)}(F) = (k+l)^2$, pois $M_{k,l}(F)$ é uma superalgebra simples.*

Exemplo 4.28. *Seja*

$$UT(d_1,\ldots,d_m)=\begin{pmatrix} M_{d_1}(F) & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ 0 & M_{d_2}(F) & \cdots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_{d_m}(F) \end{pmatrix},$$

em que

$$B_{ij}=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d_j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2d_j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{d_i1} & a_{d_i2} & \cdots & a_{d_id_j} \end{pmatrix}\right\},$$

em que $a_{kt}\in F$ *para qualquer* $k=1,\ldots,d_i$, $t=1,\ldots,d_j$ *e* $i<j$. *A álgebra* $UT(d_1,\ldots,d_m)$ *é uma subálgebra de* $M_d(F)$, *em que* $d=d_1+\ldots+d_m$. *Observe ainda que*

$$B=B_{12}\dot{+}\ldots\dot{+}B_{1m}\dot{+}B_{23}\dot{+}\ldots\dot{+}B_{2m}\dot{+}\ldots\dot{+}B_{(m-1)m}$$

é um ideal bilateral e nilpotente de $UT(d_1,\ldots,d_m)$.

Corolário 4.29. $exp(UT(d_1,\ldots,d_m))=d_1^2+\ldots+d_m^2$.

Demonstração: $B=UT(d_1,\ldots,d_m)\cong M_{d_1}(F)\oplus\ldots\oplus M_{d_m}(F)\dot{+}J(B)$. Considere $q_i=d_1+\ldots+d_i$ e observe que o seguinte produto:

$$e_{q_1,q_1}e_{q_1,q_1+1}e_{q_1+1,q_2}e_{q_2,q_2+1}\cdots e_{q_{m-1},q_{m-1}+1}e_{q_{m-1}+1,q_m}\neq 0$$

é não nulo, em que $e_{q_1,q_1}\in M_{q_1}(F)$, $e_{q_i,q_i+1}\in J$, $\forall\ i=1,\ldots,m-1$, $e_{q_{i-1}+1,q_i}\in M_{d_i}(F)$, $\forall\ i=1,\ldots,m$. Logo,

$$d_1{}^2+\ldots+d_m{}^2=dim_F(M_{d_1}(F)\oplus\ldots\oplus M_{d_m}(F))=exp(B).$$

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] A. BERELE and A. REGEV. Applications of hook Young diagrams to P.I-algebra. *Journal of Algebras* **82** (1983), 559-567.

[2] A. GIAMBRUNO and M. ZAICEV. *Polynomial identities and asymptotic methods.* AMS Mathematical Surveys and monographs, vol 122-Povidence R.I., (2005).

[3] A. GIAMBRUNO and M. ZAICEV. On codimension growth of finitely generated associative algebras. *Advances in Mathematics* **140** (1998), 145-155.

[4] A. GIAMBRUNO and M. ZAICEV. Exponential codimension growth of PI algebras: an exact estimate. *Advances in Mathematics* **142** (1999), 142, 221-243.

[5] A. R. KEMER. *Ideals of identities of associatives algebras.* American Mathematical Society Translations of Mathematical Monographs 87, Providence, RI, (1988).

[6] A. REGEV, Existence of Identities in $A \otimes B$, Israel J. Math. 11 (1972), 131-152.

[7] D. KRAKOWSKI and A. REGEV. The polynomial identities of the Grassmann algebra, Trans. Amer. Math. Soc. 181 (1973), 429-438.

[8] G. JAMES and A. KERBER. *The representation theory of the symmetric group.* In Encyclopedia of Mathematics and its Application, vol 16, Addison-Wesley, Londdon, (1981).

[9] I. M. ISAACS. *Character theory of finite groups.* Pure and Applied Mathematics. A series of Monographs and Textbooks, Academic Press, (1970).

[10] J. J. ROTMAN. *Advanced modern algebra.* Prentice Hall, (2002).

[11] K. HOFFMAN. *Linear Algebra.* Prentice Hall, (1971).