



**UM SISTEMA DE DETERMINAÇÃO E CONTROLE
DE ATITUDE DE ALTA PRECISÃO PARA O
NANOSSATÉLITE UCRANIANO UYS-1**

JEFFERSON ROYER CHAURIS

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ENGENHARIA DE SISTEMAS
ELETRÔNICOS E DE AUTOMAÇÃO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

**UM SISTEMA DE DETERMINAÇÃO E CONTROLE
DE ATITUDE DE ALTA PRECISÃO PARA O
NANOSSATÉLITE UCRANIANO UYS-1**

JEFFERSON ROYER CHAURAI

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO
DE ENGENHARIA ELÉTRICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSI-
DADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA
A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA DE SISTEMAS ELE-
TRÔNICOS E DE AUTOMAÇÃO.**

APROVADA POR:

**Prof. Dr. Henrique Cezar Ferreira, ENE/UnB
(Orientador)**

**Prof. Dr. João Yoshiyuki Ishihara, ENE/UnB
Examinador Interno**

**Dr. Jackson Max Furtunato Maia, INPE
Examinador Externo**

BRASÍLIA, 25 DE ABRIL DE 2013.

FICHA CATALOGRÁFICA

CHAURAIIS, JEFFERSON ROYER

Um Sistema de Determinação e Controle de Atitude de Alta Precisão para o Nanossatélite Ucrâniano UYS-1 [Distrito Federal] 2013.

xi, 62p., 210 x 297 mm (ENE/FT/UnB, Mestre, Engenharia Elétrica, 2013).

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Elétrica

1. Controle de Atitude

2. Determinação de Atitude

3. Nanossatélites

4. Sistema Subatuado

I. ENE/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

CHAURAIIS, J.R. (2013). Um Sistema de Determinação e Controle de Atitude de Alta Precisão para o Nanossatélite Ucrâniano UYS-1, Dissertação de Mestrado em Engenharia de Sistemas Eletrônicos e de Automação, Publicação PGEA.DM-522/2013, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 62p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Jefferson Royer Chaurais

TÍTULO: Um Sistema de Determinação e Controle de Atitude de Alta Precisão para o Nanossatélite Ucrâniano UYS-1.

GRAU: Mestre ANO: 2013

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Jefferson Royer Chaurais

Departamento de Eng. Elétrica (ENE) - FT

Universidade de Brasília (UnB)

Campus Darcy Ribeiro

CEP 70919-970 - Brasília - DF - Brasil

Dedico este trabalho ao meu pai Julio Cezar Chaurais, à minha mãe Marlise Royer e ao meu irmão Gustavo Royer Chaurais, que sempre estiveram comigo me dando força e me apoiando nos momentos mais difíceis deste mestrado.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos professores do LARA, pela oportunidade de participar deste programa de mestrado e pelos ensinamentos dados durante este período. Também agradeço aos professores Carlos Alberto Gurgel Veras, Manuel Nascimento Dias Barcelos Júnior e Paolo Gessini pelo acompanhamento e apoio dado ao longo de todo o programa.

Outros professores importantes são os ucranianos Anatoliy Kulabukhov, Vladimir Larin e Vladimir Belikov. Obrigado por me darem a oportunidade de ser um dos projetistas do nanossatélite UYS-1 e por toda a orientação neste processo.

Gostaria de agradecer, também, aos meus familiares, Julio Cezar Chaurais, Marlise Royer e Gustavo Royer Chaurais por todo o apoio que me deram desde muito jovem até os dias atuais. Me ajudando nos momentos mais difíceis, tanto financeiramente, quanto emocionalmente.

Também agradeço ao apoio dado pelos meus amigos Tiago Silva Rocha, André Augusto Geraldês, George Andrew Brindeiro, Joyce Silva Gabriel dos Santos. Eles estiveram do meu lado durante a minha graduação e durante este programa de mestrado.

Não poderia esquecer também dos meus amigos deste programa, que enfrentaram todas as dificuldades dele comigo. Principalmente no período em que estivemos juntos na Ucrânia dando apoio uns aos outros.

Também gostaria de agradecer às empresas Yuzhnoye e Yuzhmash e à Universidade Nacional de Dnipropetrovsk por toda a ajuda e pelos ensinamentos dados no período em que eu estava na Ucrânia.

Por fim eu gostaria de agradecer ao CNPq pelo apoio financeiro dado durante os 18 meses deste programa, à AEB pela ajuda financeira durante o intercâmbio na Ucrânia e à FINATEC pela ajuda dada à apresentação de um artigo nos EUA.

RESUMO

UM SISTEMA DE DETERMINAÇÃO E CONTROLE DE ATITUDE DE ALTA PRECISÃO PARA O NANOSSATÉLITE UCRANIANO UYS-1

Autor: Jefferson Royer Chaurais

Orientador: Prof. Henrique Cezar Ferreira, ENE/UnB

Co-orientadores: Prof. Renato Alves Borges, ENE/UnB

Prof. Anatoliy Mikhailovich Kulabukhov, Dep. de Controle e Automação/Universidade Nacional de Dnipropetrovsk

Prof. Vladimir Alekseyevich Larin, Dep. de Controle e Automação/Universidade Nacional de Dnipropetrovsk

Prof. Vladimir Viktorovich Belikov, Dep. de Controle e Automação/Universidade Nacional de Dnipropetrovsk

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas Eletrônicos e de Automação

Brasília, 25 de Abril de 2013

O UYS-1 é o primeiro nanossatélite ucraniano, o qual está sendo desenvolvido por um consórcio de quatro instituições ucranianas e pela Universidade de Brasília. Este satélite será utilizado para tirar fotografias de alta resolução da superfície terrestre e, para isso, disporá de um sistema de determinação e controle de atitude de alta precisão, cujo projeto é apresentado nesta dissertação.

Esse sistema compreende um sensor de estrela e três rodas de reação. Para a determinação da atitude, é implementado um Filtro de Kalman Estendido. Para o controle da atitude, são consideradas algumas situações envolvendo perturbações ou falhas. São projetados um controlador PD para o caso sem falhas e sem perturbações; controladores tipo-PD e tipo-PID robustos a perturbações (torques externos); e é proposto um controlador, para situações de falha total de uma das rodas de reação, com garantia da estabilidade do satélite.

ABSTRACT

A HIGH PRECISION ATTITUDE DETERMINATION AND CONTROL SYSTEM FOR THE UKRAINIAN UYS-1 NANOSATELLITE

Author: Jefferson Royer Chaurais

Advisor: Prof. Henrique Cezar Ferreira, ENE/UnB

Co-advisors: Prof. Renato Alves Borges, ENE/UnB

Prof. Anatoliy Mikhailovich Kulabukhov, Dept. of Automatic Control Systems/Dnipropetrovsk National University

Prof. Vladimir Alekseyevich Larin, Dept. of Automatic Control Systems/Dnipropetrovsk National University

Prof. Vladimir Viktorovich Belikov, Dept. of Automatic Control Systems/Dnipropetrovsk National University

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas Eletrônicos e de Automação

Brasilia, 25th April 2013

The UYS-1 is the first Ukrainian nanosatellite, which is being designed by a consortium of four Ukrainian institutions and by University of Brasilia. This satellite will take high resolution photos of Earth's surface. To do so, it will have a high precision attitude determination and control system, whose project is presented in this work.

This system comprises a star tracker and three reaction wheels. An Extended Kalman Filter is implemented to determine the attitude. Also, to control the attitude, different situations involving disturbances or failures are considered. A PD controller is designed for situations without disturbances and failures; a PD-type and a PID-type controllers robust to disturbances (external torques) are also designed; and a control law is proposed for the situation of total failure of one reaction wheel. This controller ensures the satellite stability.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	PEQUENOS SATÉLITES	1
1.2	NANOSATÉLITE UYS-1	2
1.3	SISTEMA DE DETERMINAÇÃO E CONTROLE DE ATITUDE	3
1.4	CONTROLE DE SISTEMAS SUBATUADOS	3
1.5	CONTRIBUIÇÕES	4
1.6	ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	5
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	6
2.1	REPRESENTAÇÃO DE ATITUDE	6
2.2	MODELO CINEMÁTICO	10
2.3	MODELO DINÂMICO	11
2.4	FILTRO DE KALMAN ESTENDIDO	13
2.5	TORQUES EXTERNOS	14
3	SISTEMA DE DETERMINAÇÃO E CONTROLE DE ATITUDE DE ALTA PRECISÃO (SDCAAP)	16
3.1	SELEÇÃO DE HARDWARE	16
3.1.1	SENSOR DE ESTRELA	17
3.1.2	RODAS DE REAÇÃO	18
3.2	DETERMINAÇÃO DE ATITUDE	20
3.2.1	FILTRO DE KALMAN ESTENDIDO	20
3.3	CONTROLE DE ATITUDE	21
3.3.1	PD-EMPÍRICO	21
3.3.2	CONTROLADORES ROBUSTOS	22
3.3.3	CONTROLE SUBATUADO	27
4	SIMULAÇÕES	32
4.1	PD EMPÍRICO	32
4.2	FILTRO DE KALMAN ESTENDIDO	35
4.3	CONTROLADORES ROBUSTOS	37
4.4	CONTROLE SUBATUADO	46
5	CONCLUSÕES	51
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	53
	ANEXOS	57

A	ANÁLISE DE ESTABILIDADE DO CONTROLADOR CNBQ.....	58
A.1	EQUAÇÕES DE MALHA FECHADA.....	58
A.2	ESTABILIDADE POR LYAPUNOV	59

LISTA DE FIGURAS

1.1	Modelo 3D do nanossatélite UYS-1.	2
2.1	Sistemas de coordenadas.....	6
2.2	Representação dos ângulos de <i>rolagem</i> , <i>arfagem</i> e <i>guinada</i>	8
3.1	Diagrama de blocos do SDCAAP do UYS-1.	16
4.1	Resposta transitória dos ângulos dos sistemas formados pelo PD empírico com e sem o uso do FKE.	36
4.2	Resposta em regime permanente dos ângulos dos sistemas formados pelo PD empírico com e sem o uso do FKE.	36
4.3	Resposta transitória da velocidade angular dos sistemas formados pelo PD empírico com e sem o uso do FKE.	37
4.4	Resposta em regime permanente da velocidade angular dos sistemas formados pelo PD empírico com e sem o uso do FKE.	37
4.5	Diagrama de blocos do SDCAAP do UYS-1.	38
4.6	Resposta transiente dos ângulos do controlador PD-empírico, do tipo-PD robusto e do tipo-PID robusto.	40
4.7	Resposta em estado estacionário dos ângulos do controlador PD-empírico, do tipo-PD robusto e do tipo-PID robusto.	40
4.8	Resposta transiente da velocidade angular do controlador PD-empírico, do tipo-PD robusto e do tipo-PID robusto.	41
4.9	Resposta em regime permanente da velocidade angular dos ângulos do controlador PD-empírico, do tipo-PD robusto e do tipo-PID robusto.	41
4.10	Resposta transiente dos ângulos do controlador PD-empírico, do tipo-PD robusto e do tipo-PID robusto na presença de perturbações.....	43
4.11	Resposta em regime permanente dos ângulos do controlador PD-empírico, do tipo-PD robusto e do tipo-PID robusto na presença de perturbações.	43
4.12	Resposta transiente da velocidade angular do controlador PD-empírico, do tipo-PD robusto e do tipo-PID robusto na presença de perturbações.	44
4.13	Resposta em regime permanente da velocidade angular do controlador PD-empírico, do tipo-PD robusto e do tipo-PID robusto na presença de perturbações.	44
4.14	Resposta temporal da parte vetorial do quatérnio, para a primeira simulação. ..	46
4.15	Resposta temporal de q_4 , para a primeira simulação.	47
4.16	Resposta transitória da parte vetorial do quatérnio, para a segunda simulação. ..	48
4.17	Resposta em regime permanente da parte vetorial do quatérnio, para a segunda simulação.	48

4.18	Resposta transitória de q_4 , para a segunda simulação.....	49
4.19	Resposta transitória de q_4 , para a terceira simulação.....	50
4.20	Resposta em regime permanente de q_4 , para a terceira simulação.....	50
A.1	Análise de estabilidade de Lyapunov.	59

LISTA DE TABELAS

1.1	Dados da missão do UYS-1.....	2
2.1	Máximos torques de perturbação durante voo.....	15
3.1	Sensores de Estrela comerciais para nanossatélites.....	18
3.2	Rodas de reação comerciais para nanossatélites.....	19
4.1	Tempo de assentamento para a primeira simulação do ajuste do PD empírico..	32
4.2	Tempo de assentamento para a segunda simulação.....	33
4.3	Tempo de assentamento e intervalos de oscilação para a terceira simulação.....	33
4.4	Tempo de assentamento e intervalo de oscilação para a quarta simulação.....	34
4.5	Tempo de assentamento e intervalo de oscilação para a sexta simulação.....	34
4.6	Parâmetros para o algoritmo de Recozimento Simulado.....	38

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

e	eixo de rotação
$A(\theta)$	Matriz de Cossenos Diretores de uma rotação θ em torno de e
\bar{q}	quatérnio
q	parte vetorial do quatérnio \bar{q}
q_i	i-ésimo elemento do quatérnio \bar{q}
τ	somatório de torques
H	somatório de momentos angulares
$S(\cdot)$	matriz produto vetorial
ω	vetor velocidade angular
J	matriz de inércia
h	momento de inércia total das rodas de reação
u	sinal de controle
x_k	vetor de estados do FKE
u_k	vetor de entradas do FKE
y_k	vetor de saídas do FKE
f	função não linear de processo do FKE
h	função não linear de medição do FKE
w_k	ruído branco de processo do FKE
v_k	ruído branco de medição do FKE
Q_k	matriz de covariância de processo do FKE
R_k	matriz de covariância de medição do FKE
$E(\cdot)$	função esperança
P_k	matriz de covariância do vetor de estados do FKE
μ	constante gravitacional da Terra
R	raio da órbita
F_s	constante solar
c	velocidade da luz
A_s	área da superfície do satélite iluminada pelo sol
r	fator de reflectância
c_{sp}	centro de pressão
c_g	centro de gravidade

α	ângulo de incidência solar
D	dipolo magnético residual do satélite
B	campo magnético da Terra
M	momento magnético da Terra
c_{pa}	centro de pressão aerodinâmica
I	matriz identidade

PD EMPÍRICO

K_p	matriz de ganho proporcional do controlador PD empírico
K_d	matriz de ganho derivativo do controlador PD empírico
k_p	ganho escalar proporcional do controlador PD empírico
k_d	ganho escalar derivativo do controlador PD empírico
Φ	vetor erro angular
$\dot{\Phi}$	derivada do vetor erro angular
ω_e	vetor erro velocidade angular
\bar{q}_e	quatérnio de erro

CONTROLADOR ROBUSTO

b_1	parâmetro do controlador
b_2	parâmetro do controlador
k_{p2}	ganho do controlador
K_{p1}	ganho do controlador
K_{d1}	ganho do controlador
k_i	ganho do controlador
σ_η	peso da saída do controlador
σ_ω	peso da saída do controlador
z	saída
γ	ganho da perturbação na saída

RECOZIMENTO SIMULADO

T	temperatura
ϵ	critério de erro
λ	vetor de parâmetros
δ	distribuição Gaussiana de média nula e covariância T
d	fator de decaimento

CONTROLADOR NÃO-LINEAR BASEADO EM QUATÉRNIOS

k	ganho do controlador de atitude
g	ganho do controlador de atitude
k_D	ganho do controlador de atitude
K	ganho do controlador de velocidade

SUBSCRITOS

k	instante de avaliação do FKE
e	erro
est	estimado
r	referência
c	controle
EXT	externo
mai	maior
men	menor

SOBRESCRITOS

–	valor a priori
+	valor a posteriori
\wedge	valor estimado
T	vetor ou matriz transposta
-1	matriz inversa
*	vetor ou matriz conjugado

SIGLAS

MCD	Matriz de Cossenos Diretores
FKE	Filtro de Kalman Estendido
SDCA	Sistema de Determinação e de Controle de Atitude
SDCABC	Sistema de Determinação e de Controle de Atitude de Baixo Custo
SDCAAP	Sistema de Determinação e de Controle de Atitude de Alta Precisão
ITAR	International Traffic in Arms Regulations
RS	Recozimento Simulado
IAE	Integral Absoluta do Erro
PD	Proporcional-Derivativo
PID	Proporcional-Integral-Derivativo
DML	Desigualdade Matricial Linear
CNBQ	Controlador Não-linear Baseado em Quatérnios
COTS	Commercial Off-The-Shelf

1 INTRODUÇÃO

Este capítulo mostra uma breve introdução a pequenos satélites e ao UYS-1, mostrando características do satélite e da missão. Também é apresentada uma introdução ao sistema de determinação e controle de atitude e aos sistemas com falhas. Por fim são apresentadas as contribuições desta dissertação, bem como a sua organização.

1.1 PEQUENOS SATÉLITES

Na atualidade é difícil pensar em um mundo sem tecnologia. As pessoas utilizam celulares, aparelhos equipados com GPS, fazem estudos sobre o desmatamento, clima, geologia e sobre outras galáxias e exoplanetas. Esses estudos e tecnologias podem ter em comum o uso de satélites. Mesmo que as pessoas não percebam, os satélites auxiliam os pesquisadores com imagens de amplos territórios, além de facilitar a comunicação entre pontos distantes na superfície terrestre e permitir que a tecnologia facilite a vida do homem moderno.

Estas facilidades, porém, vêm acompanhadas de um elevado custo. Para utilizar um satélite em órbita, muito dinheiro e tempo deve ser gasto, devido ao elevado custo dos equipamentos, das instalações necessárias para os testes e do lançamento. Porém, a miniaturização de equipamentos tem tornado viável a fabricação de pequenos satélites. Eles podem ser classificados por sua massa [1] como picosatélites ($0,1\text{kg} < m < 1\text{kg}$) e como nanosatélites ($1\text{kg} < m < 10\text{kg}$).

O custo de fabricação destes pequenos satélites pode ser reduzido pelo uso de equipamentos comerciais, pois estes possuem preço unitário reduzido quando fabricados em larga escala. Além disso, pequenos satélites podem ser lançados como carga secundária de satélites grandes, reduzindo o custo de lançamento.

Assim, por serem mais baratos, muitas universidades estão desenvolvendo seus próprios satélites para realizar diferentes estudos [2, 3]. Já existe, inclusive, um padrão de nanosatélite amplamente utilizado por universidades do mundo todo, o CubeSat¹, desenvolvido pela Universidade Nacional Politécnica da Califórnia² e pela Universidade de Standford³, o que facilita a produção de equipamentos em série. Assim, esta padronização permitiu a criação de equipamentos *COTS* (*commercial off-the-shelf*), os quais são produzidos em larga escala e vendidos comercialmente.

¹<http://www.cubesat.org/>

²<http://www.calpoly.edu/>

³<http://www.stanford.edu/>

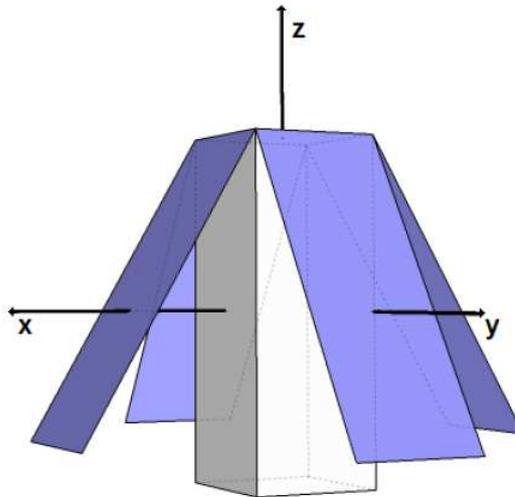


Figura 1.1: Modelo 3D do nanossatélite UYS-1.

Tabela 1.1: Dados da missão do UYS-1.

Missão Principal	Imageamento terrestre
Órbita	Circular e Heliossíncrona
Altitude	$\approx 700\text{km}$
Massa	$\approx 10\text{kg}$
Dimensões	$150 \times 150 \times 400\text{mm}$
Potência Disponível	$\approx 7\text{W}$ em 24h
Tempo da Missão	≈ 1 ano
Previsão de Lançamento	2014

1.2 NANOSSATÉLITE UYS-1

O UYS-1 é um nanossatélite ucraniano cujo nome é uma sigla para “O Primeiro Satélite Ucraniano de Jovens”. A Figura 1.1 mostra um modelo deste satélite e a Tabela 1.1 mostra os dados da missão do UYS-1.

O UYS-1 está sendo projetado por quatro instituições ucranianas (em tradução literal): Universidade Nacional de Dnipropetrovsk, Instituto Politécnico de Kyiv, Instituto de Aviação de Kharkiv e Universidade Nacional de Rádio e Eletrônica de Kharkiv. Recentemente, a Universidade de Brasília foi adicionada ao grupo de instituições que projetam este satélite, devido à parceria espacial entre Brasil e Ucrânia.

Apesar da semelhança de tamanhos, o UYS-1 não utiliza a estrutura de um CubeSat 3U. Este apresenta dimensões $100 \times 100 \times 300\text{mm}$ enquanto o UYS-1 tem dimensões $150 \times 150 \times 400\text{mm}$.

Com relação à órbita, o UYS-1 será um satélite de órbita baixa em torno de 700km de

altura, aproximadamente circular e Heliossíncrona, ou seja, órbita polar com 98° de inclinação. Estas órbitas tem como característica principal a revisita do satélite à estação base em um horário fixo do dia. Ou seja, ele deverá passar pela mesma posição da superfície terrestre, aproximadamente no mesmo horário, todos os dias da sua missão de cerca de 1 ano de duração.

1.3 SISTEMA DE DETERMINAÇÃO E CONTROLE DE ATITUDE

Imediatamente após ser lançado, a orientação e a velocidade de rotação inicial do satélite são desconhecidas. Porém, para tirar fotos da superfície da Terra, ele precisa estar estabilizado em 3 eixos, ou seja, estar com velocidade angular nula e com atitude (orientação, posição angular) tal que a câmera esteja apontada para o nadir (para o centro da Terra, no caso deste trabalho). Para isso, o satélite dispõe de um Sistema de Determinação e Controle de Atitude (SDCA).

No caso específico do UYS-1, este sistema é dividido em dois subsistemas, um de baixo custo (SDCABC) e um de alta precisão (SDCAAP). O primeiro possibilita o satélite atingir atitudes com menores restrições, como apontar o satélite para o sol, para recarregar as baterias, ou para tirar fotos de baixa resolução da superfície terrestre. Porém, quando são requeridas fotos com maior resolução, é necessário o uso do SDCAAP, o qual é de alta precisão por possibilitar ao satélite a obtenção de fotos com maior resolução que o SDCABC.

Como o UYS-1 é um nanossatélite com tamanho próximo ao de um microssatélite, algumas missões destes foram analisadas. Por exemplo, o REIMEI [4], cuja missão era bater fotos de auroras, possuía o requisito de erros angulares menores que $0,5^\circ$. Por sua vez, o KITSAT-3 [5], projetado para bater fotos da superfície terrestre, tinha o mesmo requisito de erros angulares menores que $0,5^\circ$. Outros satélites apresentam requisitos mais rigorosos, como o RISING-2 [6], cujos erros angulares não podem ser maiores que $0,1^\circ$. Assim, dado o histórico de missões destes microssatélites (os quais são maiores que o UYS-1), definiu-se que o SDCAAP do UYS-1 deverá seguir atitudes de referência com erros angulares menores que $0,5^\circ$.

1.4 CONTROLE DE SISTEMAS SUBATUADOS

Os satélites são projetados e testados para cumprirem uma determinada missão. Porém, falhas no sistema podem compromete-la, como é o caso de falhas em um dos componentes do SDCA. Um estudo realizado em 2005 [7] mostra que cerca de 20% das falhas que ocorrem em SDCA são em dispositivos de troca de momento (rodas de reação, rodas de momento e giroscópios de controle de momento). Por exemplo, duas das três rodas de reação do satélite

FUSE [8] falharam durante a sua operação. A solução desses autores foi a de utilizar as barras de torque magnético para gerar o torque nos eixos sem atuação. Porém, esta solução não permite manobras rápidas, uma vez que estes componentes dependem da posição do satélite na órbita.

Outra possível solução para controlar um satélite com falha nos atuadores é usar redundâncias, como quatro rodas de reação em uma configuração piramidal. Neste caso, o satélite ainda pode ser controlado caso duas das quatro rodas falhem [9, 10]. O uso de atuadores extras, porém, é uma solução que adiciona massa extra ao satélite, além de ser mais cara do que sem o uso desses atuadores.

No caso de ocorrer uma falha em um dos atuadores e o satélite não estar equipado com atuadores extras, o sistema se tornará subatuado. Neste caso, Brockett [11] mostrou que sistemas não-holonômicos, dos quais o satélite subatuado é um exemplo, não são controláveis por meio de controladores contínuos e invariantes no tempo. Por esta razão foram propostas soluções não-contínuas, por exemplo, as referências [12, 13, 14] apresentam soluções não contínuas para o problema de controle de velocidade angular. Já o problema de controle de atitude de sistemas subatuados foi tratado para satélites equipados com propulsores [15], com rodas de momento [16], com rodas de reação baseados em ângulos de Euler [17] e com rodas de reação baseados em parâmetros de Rodrigues [18].

Alguns controladores de atitude e de velocidade angular são projetados na condição de momento angular total nulo [19, 20, 21]. Esta restrição é comumente usada e [18] mostra que, quando o momento angular do eixo sem atuação não é nulo, a resposta do sistema apresenta oscilações. Uma vez que ângulos de Euler e parâmetros de Rodrigues apresentam singularidades [22], Horri e Palmer [23] apresentam um controlador de atitude baseado na condição de momento angular total nulo e na representação por quatérnios, o qual foi testado no satélite Uosat-12. Este controlador pode ser simulado no UYS-1 para a situação em que ocorra a falha de uma das três rodas de reação. Além disso, nesta dissertação é proposta uma modificação deste controlador a fim de melhorar a resposta temporal do sistema em malha fechada.

1.5 CONTRIBUIÇÕES

Como contribuições desta dissertação, podemos citar o estudo de diferentes SDCAAPs para o UYS-1, consistindo de uma etapa de determinação de atitude via Filtro de Kalman Estendido, e três alternativas para a etapa de controle de atitude:

1. um controlador PD para o caso sem falhas e sem perturbações;
2. controladores tipo-PD e tipo-PID robustos a perturbações (torques externos);

3. um controlador, para situações de falha total de uma das rodas de reação, com garantia da estabilidade do satélite.

O controlador tolerante a falhas é uma proposta desta dissertação, que engloba o controlador de [23] como caso particular. O controlador possui um parâmetro extra, que permite maior flexibilidade ao projetista e a possibilidade de se obter um acompanhamento mais rápido das atitudes de referência.

Desta dissertação resultaram:

- artigo no congresso internacional *2013 IEEE Aerospace Conference* [24] intitulado “A High Precision Attitude Determination and Control System for the UYS-1 Nanosatellite”, cujo escopo é o projeto do SDCAAP com controladores robustos a perturbações.
- apresentação do trabalho intitulado “Attitude Determination, Control and Stabilization of a Nanosatellite Using Reaction Wheels” na conferência ucraniana *XIV Human and Space*, publicado na “Revista da Universidade de Dnipropetrovsk” (em tradução literal do ucraniano) [25]. Neste trabalho é apresentado o projeto do SDCAAP do UYS-1 para situações sem perturbações e sem falhas.

Ao longo da pesquisa, também foram publicados trabalhos com temas relacionados, porém fora do escopo desta dissertação:

- artigo intitulado “An Electromagnetic System for Attitude Determination and Control of a Nanosatellite”, publicado na “Revista da Universidade de Dnipropetrovsk” (em tradução literal do ucraniano) [26]. Neste trabalho é apresentado o projeto inicial do SDCABC do UYS-1.
- artigo intitulado “Design of Ground Communication Antenna Control System for Nanosatellite Mission”, publicado na “Revista da Universidade de Dnipropetrovsk” (em tradução literal do ucraniano) [27]. Este trabalho mostra o sistema de controle da antena de rastreamento do satélite UYS-1.

1.6 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação está dividida em 5 capítulos, sendo este o primeiro deles. O capítulo 2 mostra a fundamentação teórica necessária para o entendimento do projeto do SDCAAP. O capítulo 3 mostra o projeto deste sistema para diferentes situações. O capítulo 4 apresenta os resultados simulados dos sistemas propostos no capítulo 3. Por fim, o capítulo 5 apresenta as conclusões e sugestões de trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo são apresentadas as noções matemáticas e físicas básicas utilizadas nesta dissertação. São apresentadas noções de representação de coordenadas, dinâmica e cinemática de corpos rígidos e de Filtro de Kalman Estendido. Por fim são apresentados os torques externos mais significativos que podem atuar no UYS-1.

O conteúdo abordado nas seções 2.1, 2.2 e 2.3 pode ser encontrado nas referências [28, 29, 30]. O conteúdo referente ao Filtro de Kalman Estendido (seção 2.4) aplicado a satélites é abordado pela referência [31]. Por fim, o conteúdo referente aos torques externos pode ser encontrado em [32, 28].

2.1 REPRESENTAÇÃO DE ATITUDE

Considere um corpo rígido com um sistema de coordenadas fixo, regido pela regra da mão direita, descrito pelos vetores unitários u , v e w . Considere também um sistema de referência descrito pelos vetores unitários x , y e z , regido pela regra da mão direita, como mostra a Figura 2.1.

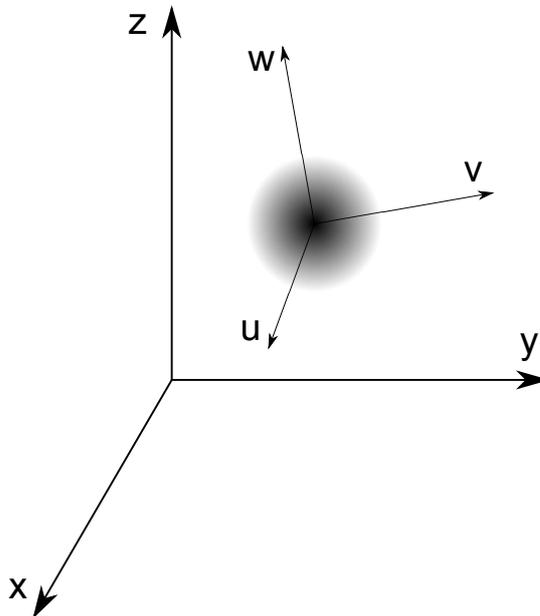


Figura 2.1: Sistemas de coordenadas.

Uma forma de se representar a atitude do corpo rígido, ou seja, a rotação do sistema fixo no corpo com relação ao sistema de referência, é por meio de uma *matriz de cossenos diretores* (MCD)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

onde cada elemento da matriz \mathbf{A} é dado pelo cosseno do ângulo entre um vetor unitário do sistema de coordenadas do corpo e um do sistema de coordenadas de referência. Por exemplo, u_x é o cosseno do ângulo formado pelo vetor unitário do corpo \mathbf{u} e o vetor unitário do sistema de referência \mathbf{x} .

A matriz \mathbf{A} pode ser vista como a matriz de rotação do sistema de referência para o sistema do corpo. Por exemplo, considere o vetor $\mathbf{a}_r = (a_x, a_y, a_z)$ descrito no sistema de referência. A representação deste vetor no sistema de coordenadas do corpo $\mathbf{a}_b = (a_u, a_v, a_w)$ pode ser obtida por

$$\mathbf{a}_b = \mathbf{A}\mathbf{a}_r = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_u \\ a_v \\ a_w \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Considere, agora, três matrizes de rotação, cada uma de um ângulo θ em torno de um dos três eixos principais do sistema de referência \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} . As MCDs resultantes são dadas por

$$\mathbf{A}_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ 0 & -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad (2.3a)$$

$$\mathbf{A}_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad (2.3b)$$

$$\mathbf{A}_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.3c)$$

Leonard Euler (1707-1783) propôs e provou um teorema que garante que dois sistemas de coordenadas ortogonais independentes podem ser relacionados por uma sequência de não mais que três rotações em torno dos eixos coordenados. Esta sequência, porém, não pode ter duas rotações seguidas em torno do mesmo eixo, totalizando 12 possíveis sequências. Desta forma, a rotação do sistema de referência para o sistema do corpo pode ser obtida pela multiplicação de três das rotações da equação (2.3), com duas matrizes consecutivas em torno de eixos diferentes. Cada um dos três ângulos de rotação é chamado de *Ângulo de Euler*, enquanto que a sequência completa é chamada de *Sequência de Ângulos de Euler*.

Usualmente, o ângulo em torno do eixo longitudinal do corpo é chamado de *rolagem*, enquanto que os ângulo em torno dos eixos perpendiculares a este são chamados de *arfagem* e *guinada*, como mostra a Figura 2.2.

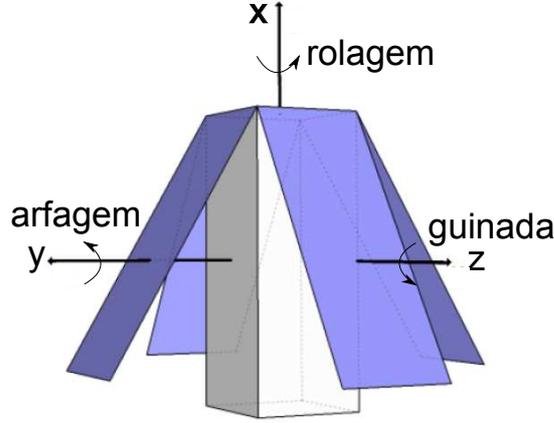


Figura 2.2: Representação dos ângulos de *rolagem*, *arfagem* e *guinada*.

Estes ângulos são medidos em torno dos eixos principais do corpo. Desta forma, estes três ângulos podem ser considerados ângulos de Euler e podem representar a atitude do corpo com relação ao referencial inercial.

As três rotações dos ângulos de Euler podem ser consideradas apenas uma única rotação em torno de um vetor unitário $e = (e_x, e_y, e_z)^T$. Neste caso, a MCD é dada por

$$\mathbf{A}_e(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) + e_x^2(1 - \cos(\theta)) & & & \\ e_x e_y(1 - \cos(\theta)) - e_z \sin(\theta) & \cdots & & \\ e_x e_z(1 - \cos(\theta)) + e_y \sin(\theta) & & & \\ e_x e_y(1 - \cos(\theta)) + e_z \sin(\theta) & e_x e_z(1 - \cos(\theta)) - e_y \sin(\theta) & & \\ \cdots & \cos(\theta) + e_y^2(1 - \cos(\theta)) & e_y e_z(1 - \cos(\theta)) + e_x \sin(\theta) & \\ e_y e_z(1 - \cos(\theta)) - e_x \sin(\theta) & e_y e_z(1 - \cos(\theta)) + e_x \sin(\theta) & \cos(\theta) + e_z^2(1 - \cos(\theta)) & \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Esta rotação também pode ser representada pelo uso de *quatérnios* [33]. Em 1843, William Rowan Hamilton inventou os números hiper-complexos, os quais são extensões dos números complexos ordinários. Um quatérnio é um número hiper-complexo de classe 4, ou seja, ele é formado por quatro escalares, sendo que três destes compõem um vetor no espaço \mathfrak{R}^3 . Desta forma, um quatérnio é uma soma de um escalar com um vetor. Para trabalhar com esta notação, Hamilton propôs a seguinte regra

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \quad (2.5)$$

onde i , j e k formam uma base ortonormal do espaço \mathfrak{R}^3 .

Sendo o quatérnio uma soma de um vetor $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$ com um escalar q_4 , ele é representado por

$$\bar{\mathbf{q}} = q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} + q_4. \quad (2.6)$$

Para representar rotações, o quatérnio correspondente deve ter norma unitária, ou seja

$$\|\bar{\mathbf{q}}\| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2} = 1. \quad (2.7)$$

Com a notação descrita pela equação (2.6), o quatérnio unitário correspondente à matriz de rotação (2.4) é dado por

$$\bar{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_x \text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ e_y \text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ e_z \text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Assim, a substituição dos vetores unitários e_x , e_y e e_z e das relações trigonométricas $\text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right)$ e $\cos \left(\frac{\theta}{2} \right)$, dadas pela equação (2.8), na equação (2.4), permite a obtenção da relação entre a matriz de cossenos diretores e o quatérnio unitário correspondente

$$\mathbf{A}(\bar{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1 q_2 + q_3 q_4) & 2(q_1 q_3 - q_2 q_4) \\ 2(q_1 q_2 - q_3 q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2 q_3 + q_1 q_4) \\ 2(q_1 q_3 + q_2 q_4) & 2(q_2 q_3 - q_1 q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

A composição das rotações dadas pelos quatérnios $\bar{\mathbf{q}}$ e $\bar{\mathbf{q}}'$,

$$\bar{\mathbf{q}}'' = \bar{\mathbf{q}} \otimes \bar{\mathbf{q}}', \quad (2.10)$$

corresponde, em termos de MCD, a

$$\mathbf{A}(\bar{\mathbf{q}}'') = \mathbf{A}(\bar{\mathbf{q}}') \mathbf{A}(\bar{\mathbf{q}}), \quad (2.11)$$

e pode ser calculada via álgebra matricial por

$$\bar{\mathbf{q}}'' = \begin{pmatrix} q'_4 & q'_3 & -q'_2 & q'_1 \\ -q'_3 & q'_4 & q'_1 & q'_2 \\ q'_2 & -q'_1 & q'_4 & q'_3 \\ -q'_1 & -q'_2 & -q'_3 & q'_4 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{q}}. \quad (2.12)$$

Outra definição importante da álgebra de quatérnios é a do inverso de um quatérnio, que no caso particular do quatérnio de norma unitária, corresponde ao seu conjugado:

$$\bar{\mathbf{q}}^{-1} = \bar{\mathbf{q}}^* = \begin{pmatrix} -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \\ q_4 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Ao longo do restante da dissertação, quatérnios unitários serão designados apenas por quatérnios, a menos que seja expressamente mencionado o contrário.

2.2 MODELO CINEMÁTICO

Considere um corpo rígido, cuja atitude no instante t é dada por $\bar{\mathbf{q}}(t)$. Uma pequena variação da atitude em um pequeno intervalo de tempo Δt é dada por $\tilde{\mathbf{q}}(\Delta t)$. Assim, a atitude do corpo no instante $t + \Delta t$ é dada por

$$\mathbf{A}(\bar{\mathbf{q}}(t + \Delta t)) = \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{q}}(\Delta t)) \mathbf{A}(\bar{\mathbf{q}}(t)). \quad (2.14)$$

Considerando Δt pequeno, pode-se fazer as seguintes aproximações $\sin(\Delta\theta) \approx \Delta\theta$, $\cos(\Delta\theta) \approx 1$ e, sendo ω dado pela derivada temporal de θ , $\Delta\theta \approx \omega\Delta t$. Assim, o quatérnio $\tilde{\mathbf{q}}(\Delta t)$, segundo a equação (2.8), passa a ser dado por

$$\tilde{\mathbf{q}}(\Delta t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e_x\omega\Delta t \\ \frac{1}{2}e_y\omega\Delta t \\ \frac{1}{2}e_z\omega\Delta t \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Dado que a expressão (2.14) pode ser calculada por (2.12), tem-se

$$\bar{\mathbf{q}}(t + \Delta t) = \left(I_4 + \frac{1}{2}\Omega\Delta t \right) \bar{\mathbf{q}}(t), \quad (2.16)$$

onde I_4 é a matriz identidade 4×4 e Ω é dado por

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

em que $[\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T = [e_x\omega, e_y\omega, e_z\omega]^T$.

Rearranjando os termos da equação (2.16) e obtendo o limite com $\Delta t \rightarrow 0$, a equação cinemática que descreve o movimento de um corpo rígido é dada por

$$\begin{aligned}\dot{\bar{q}}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{q}(t + \Delta t) - \bar{q}(t)}{\Delta t}, \\ \dot{\bar{q}}(t) &= \frac{1}{2} \Omega \bar{q}(t).\end{aligned}\quad (2.18)$$

Este modelo, porém, precisa ser discretizado para ser implementado em processadores digitais. Para isso, [31] utiliza séries de potência para obter o seguinte modelo

$$q_{k+1} = \Omega(\omega_k) q_k, \quad (2.19)$$

$$\Omega(\omega_k) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{2}\|\omega_k\|T\right) I_{3 \times 3} - S(\Psi_k) & \Psi_k \\ -\Psi_k^T & \cos\left(\frac{1}{2}\|\omega_k\|T\right) \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

$$\Psi_k = \frac{\text{sen}\left(\frac{1}{2}\|\omega_k\|T\right) \omega_k}{\|\omega_k\|}, \quad (2.21)$$

onde T é o intervalo de tempo entre duas amostras consecutivas k e $k+1$ e $S(\Psi_k)$ é a matriz que representa o produto vetorial do vetor Ψ_k pela esquerda, dada por

$$S(\Psi_k) = \begin{pmatrix} 0 & -\Psi_{3,k} & \Psi_{2,k} \\ \Psi_{3,k} & 0 & -\Psi_{1,k} \\ -\Psi_{2,k} & \Psi_{1,k} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

2.3 MODELO DINÂMICO

Considere um corpo rígido. O somatório de torques externos que agem sobre ele τ_{EXT} é dado por

$$\tau_{EXT} = \frac{d\mathbf{H}}{dt}, \quad (2.23)$$

onde \mathbf{H} é o vetor momento angular resultante do corpo.

De acordo com [29], a derivada de um vetor genérico \mathbf{v} é dada por

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \frac{\mathbf{v}}{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \quad (2.24)$$

onde v é o módulo do vetor genérico \mathbf{v} e $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$ é a velocidade angular de \mathbf{v} com relação a um sistema de coordenadas inercial.

Substituindo a equação (2.24) na equação (2.23) tem-se a expressão geral do modelo dinâmico de um corpo rígido

$$\boldsymbol{\tau}_{EXT} = \dot{\mathbf{H}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}, \quad (2.25)$$

onde $\boldsymbol{\omega}$ é representado no sistema de coordenadas do corpo.

Considere que o corpo apresente partes móveis capazes de adquirir velocidade angular, como atuadores do tipo rodas de reação. Neste caso, o momento angular total do corpo é dado por

$$\mathbf{H} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}, \quad (2.26)$$

onde \mathbf{h} é o momento angular total das partes móveis e \mathbf{J} é a matriz de inércia do corpo sem essas partes, dada por

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & -\int (xy) dm & -\int (xz) dm \\ -\int (xy) dm & \int (x^2 + z^2) dm & -\int (yz) dm \\ -\int (xz) dm & -\int (yz) dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

onde x , y e z são as dimensões do corpo e m é a sua massa.

Assim, o modelo dinâmico deste corpo é dado por

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}) + \mathbf{u} + \boldsymbol{\tau}_{EXT}, \quad (2.28)$$

onde $\mathbf{u} = -\dot{\mathbf{h}}$ é o torque das partes móveis e

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

é a matriz que representa o produto vetorial do vetor $\boldsymbol{\omega}$ pela esquerda.

O modelo dinâmico é, então, discretizado por meio da aproximação de Euler e passa a ser dado por

$$\boldsymbol{\omega}_k = \boldsymbol{\omega}_{k-1} + T\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{u}_{k-1} + \boldsymbol{\tau}_{EXT,k-1} - \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{k-1})(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{k-1} + \mathbf{h}_{k-1})). \quad (2.30)$$

2.4 FILTRO DE KALMAN ESTENDIDO

A etapa de determinação de atitude do SDCA é responsável por obter uma estimativa da atitude do satélite, tendo como base os dados dos sensores. Para isso, pode-se fazer uso de estimadores.

O Filtro de Kalman é um estimador ótimo para sistemas lineares [31]. Porém, quando o sistema é não-linear, uma variação deste filtro pode ser utilizada. O Filtro de Kalman Estendido (FKE) é uma dessas variações, o qual utiliza séries de Taylor de primeira ordem para linearizar o modelo do sistema em cada ponto de operação. Para exemplificar o filtro, considere um sistema não-linear dado por

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = f_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}), \\ \mathbf{y}_k = h_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k), \\ \mathbf{w}_k \sim (0, \mathbf{Q}_k), \\ \mathbf{v}_k \sim (0, \mathbf{R}_k), \end{cases} \quad (2.31)$$

onde \mathbf{x}_k é o vetor de estados, \mathbf{u}_k o vetor de entradas, \mathbf{y}_k o vetor de saídas, f e h são funções não-lineares e \mathbf{w}_k e \mathbf{v}_k são ruídos brancos não-correlacionados de média zero com matrizes de covariância \mathbf{Q}_k e \mathbf{R}_k , respectivamente. O subscrito k representa o instante em que os vetores e as matrizes são avaliados.

A primeira etapa do FKE é a inicialização dos parâmetros, dados por

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_0^+ = E(\mathbf{x}_0), \\ \mathbf{P}_0^+ = E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)^T], \end{cases} \quad (2.32)$$

onde $E(\cdot)$ é a função esperança, \mathbf{P}_k é a matriz de covariância do vetor \mathbf{x}_k e os sobrescritos \wedge e $+$ representam um valor estimado e a etapa de estimação *a posteriori*, respectivamente.

Após a inicialização dos parâmetros do filtro, são feitas duas estimativas, *a priori* e *a posteriori*. Para calcular os valores *a priori*, primeiro devem ser calculadas as seguintes derivadas, correspondentes à linearização da função de processo

$$\mathbf{F}_{k-1} = \left. \frac{\partial f_{k-1}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+}, \quad (2.33)$$

$$\mathbf{L}_{k-1} = \left. \frac{\partial h_{k-1}}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+}. \quad (2.34)$$

Em seguida, os parâmetros *a priori* podem ser calculados por

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = f_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \mathbf{u}_{k-1}, 0). \quad (2.35)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{L}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{L}_{k-1}^T, \quad (2.36)$$

Para se calcular os parâmetros *a posteriori*, as seguintes derivadas parciais, providas do processo de linearização da função de medição, devem ser calculadas por

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial h_k}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k^-}, \quad (2.37)$$

$$\mathbf{M}_k = \left. \frac{\partial h_k}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k^-}. \quad (2.38)$$

Por fim, os parâmetros *a posteriori* podem ser calculados por

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k [\mathbf{y}_k - h_k(\hat{\mathbf{x}}_k^-, 0)], \quad (2.39)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{M}_k \mathbf{R}_k \mathbf{M}_k^T \mathbf{K}_k^T, \quad (2.40)$$

onde \mathbf{K}_k é chamado *ganho de Kalman* e dado por

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{M}_k \mathbf{R}_k \mathbf{M}_k^T)^{-1}. \quad (2.41)$$

2.5 TORQUES EXTERNOS

Os torques externos que mais podem influenciar um satélite de órbita baixa, como o UYS-1, são devido ao gradiente de gravidade, à pressão solar, ao dipolo magnético residual e ao arrasto aerodinâmico.

O torque de perturbação máximo devido ao gradiente de gravidade é calculado por

$$\tau_g = \frac{3\mu}{2R^3} |J_{big} - J_{small}| \text{sen}(2\theta), \quad (2.42)$$

onde μ é a constante gravitacional da Terra ($3,986 \times 10^{14} \text{m}^3 \text{s}^{-2}$), R é o raio da órbita, J_{mai} e J_{men} são o maior e o menor momento de inércia e θ é o ângulo entre um eixo do satélite e a direção do nadir.

Por sua vez, o torque de perturbação devido à pressão solar pode ser calculado por

$$\tau_{sp} = \frac{F_s}{c} A_s (1 + r) (\mathbf{c}_{ps} - \mathbf{c}_g) \cos(\alpha), \quad (2.43)$$

onde F_s é a constante solar (1367Wm^{-2}), c é a velocidade da luz, A_s é a área da superfície do satélite iluminada pelo sol, r é o fator de reflectância, c_{sp} é a localização do centro de pressão, c_g é a localização do centro de gravidade e α é o ângulo de incidência solar.

O torque de perturbação devido ao dipolo magnético residual pode ser calculado por

$$\tau_{rd} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}, \quad (2.44)$$

onde \mathbf{D} é o dipolo magnético residual¹ do satélite e \mathbf{B} é o campo magnético da Terra passando pelo satélite.

A magnitude de \mathbf{D} é normalmente obtida de forma experimental, porém o valor de $0,1\text{Am}^2$ é uma aproximação superestimada, a qual garante segurança para satélites similares ao UYS-1 [32].

A magnitude do campo magnético da Terra pode ser aproximado por

$$B = \frac{2M}{R^3},$$

onde M é o momento magnético da Terra ($7,96 \times 10^{15}\text{Tm}^3$).

Para o cálculo do máximo torque devido a este dipolo residual, o ângulo formado entre os vetores \mathbf{D} e \mathbf{B} é considerado de 90° , a fim de maximizar este produto.

Por fim, o torque devido ao arrasto aerodinâmico pode ser calculado por

$$\tau_a = 0,5\rho C_d A V^2 (\mathbf{c}_{pa} - \mathbf{c}_g), \quad (2.46)$$

onde ρ é a densidade atmosférica, C_d é o coeficiente de arrasto, A é a área da superfície do satélite, V é a velocidade linear e \mathbf{c}_{pa} é o centro de pressão aerodinâmica.

Considerando os dados do UYS-1, mostrados na Tabela 1.1, os torques externos máximos que atuam em cada eixo do satélite são mostrados na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Máximos torques de perturbação durante voo.

Gradiente de Gravidade	$1,9976 \times 10^{-7}\text{Nm}$
Pressão Solar	$8,7 \times 10^{-8}\text{Nm}$
Resíduo Magnético	$2,25 \times 10^{-6}\text{Nm}$
Arrasto Aerodinâmico	$2,67 \times 10^{-8}\text{Nm}$
Total	$2,56 \times 10^{-6}\text{Nm}$

¹Algumas fontes de origem deste dipolo residual são a corrente elétrica passando pelos cabos do satélite, o campo magnético gerado pelas rodas de reação e a histerese dos materiais ferromagnéticos. A determinação do seu valor máximo depende de testes com um protótipo do satélite.

3 SISTEMA DE DETERMINAÇÃO E CONTROLE DE ATITUDE DE ALTA PRECISÃO (SDCAAP)

Este capítulo mostra o projeto do SDCAAP do satélite UYS-1, incluindo a seleção de sensores e atuadores, algoritmos de determinação e de controle de atitude. A Figura 3.1 ilustra este sistema.

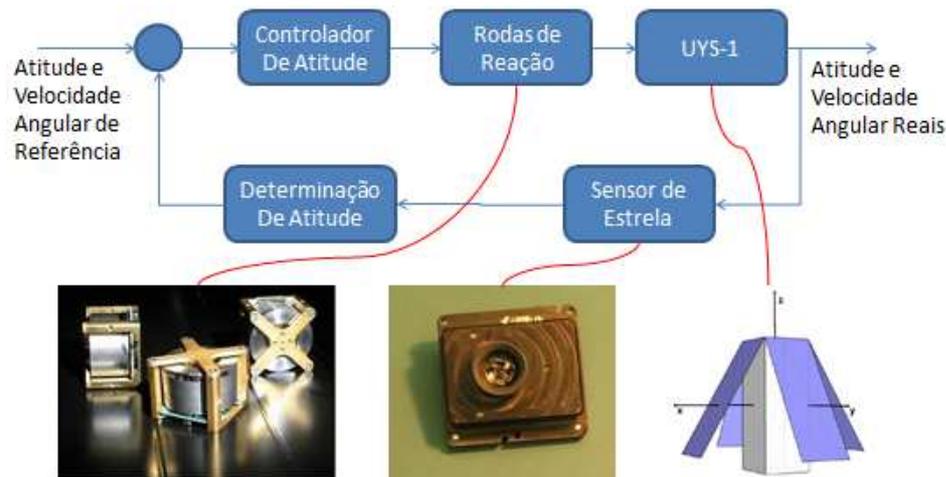


Figura 3.1: Diagrama de blocos do SDCAAP do UYS-1.

Em um instante de tempo arbitrário, o UYS-1 está com uma atitude e uma velocidade angular. Estas variáveis são medidas por um sensor de estrela. Porém estas medidas são ruidosas e podem ser tratadas para se estimar a atitude real do satélite, o que é feito pelo bloco de determinação de atitude. Em seguida, a atitude estimada e a velocidade angular medidas são comparadas com as de referência, o que gera erros a serem utilizados pelo controlador. Este, por sua vez, calcula o torque requerido a ser aplicado no satélite a fim de se anular estes erros. Este torque de referência é aplicado pelas rodas de reação ao UYS-1, alterando a sua atitude e velocidade angular.

O bloco UYS-1 representa próprio satélite, porém, em ambiente de simulação, ele é simplificado por modelos. No caso do UYS-1, ele é modelado como sendo um corpo rígido regido pelos modelos cinemático e dinâmico das seções 2.2 e 2.3, respectivamente.

3.1 SELEÇÃO DE HARDWARE

Um SDCAAP necessita de equipamentos capazes de fazer o satélite atingir a atitude desejada com elevada precisão. Para isso, é necessário escolher sensores e atuadores capazes de atender tal requisito.

Com a alta procura de universidades pela fabricação de pequenos satélites, várias empresas começaram a produzir e a vender equipamentos comerciais para tais satélites, como, por exemplo, a empresa canadense Sinclair Interplanetary¹ e a holandesa ISIS², criada a partir do projeto do nanosatélite Delfi-C3 pela Universidade Técnica de Delft. Com essa comercialização de equipamentos, o desenvolvimento de sensores e atuadores específicos para cada satélite deixou de ser necessário.

3.1.1 Sensor de Estrela

Dentre os sensores comerciais normalmente usados em pequenos satélites, podem-se citar sensores de sol, magnetômetros, girômetros, GPS e sensor de estrela. Este último é considerado um sensor de elevada precisão. Na Figura 3.1, o sensor de estrela é o responsável por realizar as medições de atitude e de velocidade angular, as quais serão passadas para o bloco de determinação de atitude. Para realizar esta tarefa, este sensor é formado por uma câmera fotográfica, que bate fotos da esfera celeste, e por um processador, que compara a imagem com um banco de dados de estrelas, armazenado em memória interna ao sensor. Desta forma, o processador é capaz de verificar quais estrelas da memória interna estão sendo fotografadas e qual a atitude da câmera com relação a um referencial inercial. Por meio da comparação de duas imagens subsequentes, alguns destes sensores utilizam técnicas de processamento de imagens para medir a velocidade de rotação da câmera.

Considerando que o modelo cinemático apresenta a evolução temporal da atitude de um corpo rígido e que o modelo dinâmico apresenta a evolução temporal da velocidade angular de um corpo rígido, o sensor de estrela com medições de velocidade é considerado completo e de elevada precisão, não sendo necessário, a princípio, a adição de outros sensores ao sistema. Assim, a Tabela 3.1 apresenta uma comparação de alguns destes sensores comerciais, onde X e Y são os eixos perpendiculares ao eixo de visada Z do sensor.

No caso dos sensores de estrela, o tamanho não é um fator crucial, pois ele será colocado do lado de fora do satélite. De acordo com a Tabela 3.1, o Sinclair S3S consome menos energia e é mais preciso que o Comtech MST, além de medir a velocidade angular. Este sensor é capaz de retornar medidas com uma frequência de 2Hz. Assim, este é o sensor escolhido no projeto do UYS-1.

A compra de um sensor de estrela pode ser um problema para a Ucrânia. Como ele pode ser utilizado em mísseis balísticos intercontinentais, uma análise detalhada do projeto deve ser feita pelo governo canadense antes de aprovar a venda. Isto ocorre devido a um conjunto de regras estipuladas pelo governo do EUA para a importação e exportação de artigos e serviços relacionados a defesa, o *ITAR*. Este conjunto de regulamentações também é adotado por países como o Canadá e a compra pode não ser realizada. Assim, não se descarta a

¹<http://www.sinclairinterplanetary.com/>

²<http://www.isispace.nl/>

Tabela 3.1: Sensores de Estrela comerciais para nanossatélites.

	Sinclair S3S ^a [34]	Comtech MST ^b [35]
Fabricante	Sinclair Interplanetary	Comtech AeroAstro
País de Origem	Canadá	EUA
Medidas	59 × 56 × 32,5 mm	60 × 76,2 × 76,2 mm
Massa	90 g	375 g
Acurácia de Atitude	X, Y < 0,002° Z < 0,02°	X, Y < 0,02° Z < 0,042°
Acurácia de Velocidade	X, Y < 0,03°/s Z < 0,3°/s	-
Potência	< 1,0 W	< 2,0 W

^a<http://www.sinclairinterplanetary.com/startrackers>

^bhttp://www.spacemicro.com/Comtech_Areoastro/CAA_div.htm

possibilidade de fabricação um sensor de estrela na Ucrânia. Neste trabalho, porém, não se dispõe de tempo para utilizar dados de um sensor que venha a ser fabricado. Assim, os dados do Sinclair S3S foram utilizados nas simulações.

3.1.2 Rodas de Reação

Vários são os possíveis atuadores utilizados em satélites. Um deles é a bobina magnética, porém ela é lenta e não gera muito torque, pois interage com o campo magnético da Terra. No caso das rodas de momento, elas são usadas, normalmente, para manter um momento angular em algum eixo do satélite. Outro atuador capaz de gerar grandes torques e que não depende da posição do satélite em sua órbita é a roda de reação. De acordo com a Figura 3.1, estas rodas recebem um torque de referência, calculado pelo controlador, e atuam no satélite. Para realizar esta tarefa, este atuador é composto por um processador próprio, um motor fixo no satélite e uma roda interna. Quando uma tensão é aplicada, a roda gira em um sentido e, pela conservação do momento angular, o satélite roda no sentido oposto. Algumas rodas de reação comerciais são apresentadas na Tabela 3.2.

Considerando que as rodas de reação são montadas nos eixos principais do UYS-1 e que ele é um bloco homogêneo de dimensões 150 × 150 × 400 mm e massa 10 kg, a matriz de inércia resultante é dada por

$$J = \begin{pmatrix} 0,1521 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1521 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0375 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Assim, dada a velocidade máxima de cada roda, é possível calcular a velocidade ini-

Tabela 3.2: Rodas de reação comerciais para nanossatélites.

	MAI-101 ^a [36]	Sinclair RW-0.03 ^b [37]	AstroFein RW35 ^c [38]
Fabricante	Maryland Aerospace, Inc.	Sinclair Interplanetary	Astro- und Feinwerktechnik Adlershof GmbH
País de Origem	EUA	Canadá	Alemanha
Tamanho	76,2 × 76,2 × 69,85 mm	50 × 50 × 40 mm	95 × 95 × 40 mm
Massa	620 g	185 g	500 g
Torque	< 0,635 mNm	2 mNm	5 mNm
Momento Angular	1,1 mNms	30 mNms	100 mNms
Potência	< 10 W ^d	< 1,5 W	< 5 W
Velocidade Inicial	≈ 0,4°/s	≈ 11,3°/s	≈ 37,7°/s
Número de Rodas	caixa com 3 rodas	1 roda	1 roda

^a<http://www.imicro.biz/space.html>

^b<http://www.sinclairinterplanetary.com/reactionwheels>

^c<http://www.astrofein.com/astro-und-feinwerktechnik-adlershof/products/raumfahrt/75/rw-35-eng/>

^dEste dado foi calculado a partir da tensão máxima aplicada (28V) e da corrente máxima (0,36A).

cial máxima do satélite, pela equação de transferência de momento, na ausência de torques externos

$$J\omega = h. \quad (3.2)$$

Analisando a Tabela 3.2, o conjunto de três rodas de reação MAI-101 é a melhor escolha, se for considerado o tamanho. Porém ela não consegue gerar tanto torque quanto as demais, consome muita potência e, para o UYS-1, ela consegue controlar velocidades iniciais de até 0,4°/s apenas. Ela também é fabricada em uma caixa com três rodas, que deveria ser colocada no centro de massa do satélite, mas, no projeto inicial, a placa do processador se encontra nesta posição, assim seria necessária uma mudança estrutural do projeto.

A AstroFein RW35 consiste em uma única roda de reação e um conjunto de três delas consegue gerar torque suficiente para o UYS-1, mas é maior e consome mais potência que a roda Sinclair RW-0.03, cujo conjunto de três rodas também é capaz de gerar o torque necessário. Assim, foram selecionadas três rodas Sinclair RW-0.03 para as simulações, posicionadas uma em cada eixo principal do satélite.

As rodas escolhidas possuem um processador interno com um controlador implemen-

tado. Assim, valores de referência de velocidade angular, ou de torque requerido, podem ser enviados ao processador e o controlador interno assegurará a convergência a esses valores requeridos.

Este tipo de atuador, porém, apresenta saturações quando a velocidade de rotação da roda atinge o valor máximo. Assim, o SDCABC pode ser utilizado em operação conjunta com este para frear as rodas, uma vez que ele utiliza atuadores magnéticos para o controle de atitude.

É importante ressaltar que a compra destes equipamentos necessita da aprovação do governo do país que os fabrica e o tempo para entrega pode levar até três meses. Assim, como no caso do sensor de estrela, não se descarta a possibilidade de se desenvolver uma roda de reação própria para o UYS-1 na Ucrânia.

3.2 DETERMINAÇÃO DE ATITUDE

As medidas feitas pelos sensores podem ser utilizadas pelo SDCA de forma direta, sem tratamento, ou um estimador pode ser utilizado. Na figura 3.1, este tratamento das medidas é feito pelo bloco de determinação de atitude, o qual recebe as medidas do sensor de estrela e realiza estimativas da atitude real do satélite. Analisando outros satélites [2, 39, 40, 41], verifica-se o uso frequente do Filtro de Kalman Estendido (FKE) utilizado para a etapa de determinação de atitude. Assim, o FKE foi escolhido como estimador de atitude para o UYS-1.

3.2.1 Filtro de Kalman Estendido

Para projetar o FKE, primeiramente definem-se os vetores de estados e de entradas

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} q_{1,k} \\ q_{2,k} \\ q_{3,k} \\ q_{4,k} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} \omega_{1,k} \\ \omega_{2,k} \\ \omega_{3,k} \end{bmatrix}.$$

Como o quatérnio é completamente medido pelo sensor de estrela, a função de saída é dada pela matriz identidade

$$h_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) = \mathbf{I}_4 \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k.$$

É importante ressaltar que, como os quatro termos do quatérnio são estimados, este é normalizado após as etapas de estimação *a priori* e *a posteriori*.

O ruído \mathbf{v}_k é o termo que considera que as medidas do sensor de estrela são ruidosas. Então, devido a este termo, o FKE filtra as medições de atitude.

Calculando as matrizes dadas pelas derivadas parciais do modelo, \mathbf{F}_k é dada pela matriz $\Omega(\omega_k)$ da equação (2.20),

$$\mathbf{F}_k = \Omega(\omega_k).$$

As demais matrizes, calculadas por derivadas parciais, são dadas pela matriz identidade,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_k &= \left. \frac{\partial f_{k-1}}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+} = \mathbf{I}_4, \\ \mathbf{H}_k &= \left. \frac{\partial h_k}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k^-} = \mathbf{I}_4, \\ \mathbf{M}_k &= \left. \frac{\partial h_k}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k^-} = \mathbf{I}_4. \end{aligned}$$

Os últimos parâmetros a serem determinados são as matrizes de covariância \mathbf{Q}_k e \mathbf{R}_k , ajustados por meio de simulações.

3.3 CONTROLE DE ATITUDE

Nesta seção são apresentados controladores para as situações: sem perturbação e sem falhas; com perturbações; e com falhas. De acordo com o digrama de blocos da Figura 3.1, o controlador de atitude recebe, como entrada, o erro de atitude e o de velocidade angular. Estes erros representam a diferença entre os valores de referência e os estimados pelo bloco de determinação de atitude. Como saída, o controlador deve fornecer um torque de referência para as rodas de reação.

3.3.1 PD-Empírico

Para a situação em que o satélite não está sujeito a perturbações e a falhas significativas, considere um controlador PD (proporcional-derivativo). Como os modelos cinemático (2.18) e dinâmico (2.28) são não-lineares, seu ajuste se dá de forma empírica por meio de simulações. Assim, este controlador será designado por PD-empírico ao longo do texto.

De acordo com [29], esta lei de controle é dada por

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_p \Phi_e + \mathbf{K}_d \dot{\Phi}_e, \quad (3.7)$$

onde \mathbf{u} é o torque de controle, \mathbf{K}_p é a matriz de ganho proporcional ao erro de atitude Φ_e e \mathbf{K}_d é a matriz de ganho proporcional ao erro de velocidade angular $\dot{\Phi}_e$. Como o sistema é não-linear, estes ganhos podem ser ajustados de forma empírica por meio de simulações.

Considerando a situação em que as matrizes \mathbf{K}_p e \mathbf{K}_d são diagonais, utilizando a representação por quatérnios para o erro de atitude Φ_e , a equação (3.7) pode ser simplificada para

$$\begin{cases} \tau_{cx} = 2k_{px}q_{e1}q_{e4} + k_{dx}\omega_{ex}, \\ \tau_{cy} = 2k_{py}q_{e2}q_{e4} + k_{dy}\omega_{ey}, \\ \tau_{cz} = 2k_{pz}q_{e3}q_{e4} + k_{dz}\omega_{ez}, \end{cases} \quad (3.8)$$

onde $\omega_e = \dot{\Phi}_e$ é o erro de velocidade angular e \bar{q}_e é o quatérnio de erro calculado por

$$\begin{aligned} \bar{q}_e &= \bar{q}_{est}^{-1} \otimes \bar{q}_r \\ &= \begin{pmatrix} q_{r4} & q_{r3} & -q_{r2} & q_{r1} \\ -q_{r3} & q_{r4} & q_{r1} & q_{r2} \\ q_{r2} & -q_{r1} & q_{r4} & q_{r3} \\ -q_{r1} & -q_{r2} & -q_{r3} & q_{r4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -q_{est1} \\ -q_{est2} \\ -q_{est3} \\ q_{est4} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde \bar{q}_r é o quatérnio de referência e \bar{q}_{est} é o quatérnio estimado, ou medido.

A relação entre o quatérnio de erro \bar{q}_e e o erro angular Φ_e é dada por uma aproximação por pequenos ângulos e pela equação (2.8)

$$\Phi_{ei} = e_i \Phi_e \approx e_i \text{sen}(\Phi_e) = 2e_i \text{sen}\left(\frac{\Phi_e}{2}\right) \cos\left(\frac{\Phi_e}{2}\right) = 2q_{ei}q_{e4}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.10)$$

Na equação (3.8), seis ganhos escalares devem ser determinados. Porém, segundo [30], a escolha dos ganhos $\mathbf{K}_p = k_p \mathbf{J}$ e $\mathbf{K}_d = k_d \mathbf{J}$ garantem a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada (com realização de medidas de atitude e de velocidade angular). Esta escolha também reduz o número de parâmetros a serem ajustados para dois, uma vez que k_p e k_d são escalares e \mathbf{K}_p e \mathbf{K}_d são matrizes 3×3 . Assim, em ambiente de simulação, juntam-se k_p e k_d .

3.3.2 Controladores Robustos

Visando melhorar a performance dos controladores PD e PID na presença de perturbações externas, Ikeda, Kida e Nagashio [42] propõem uma forma robusta de ajustar os ganhos

de controladores tipo-PD e tipo-PID. Para isso, eles utilizam técnicas de otimização convexa para a solução de problemas de Desigualdade Matricial Linear (DML). Estes problemas compreendem matrizes bloco diagonais com variáveis descorrelacionadas, o que leva a tarefas descorrelacionadas (controle de rastreamento e de atitude). Nesta dissertação somente a tarefa de controle de atitude é considerada. Assim, os problemas de DML apresentados são apenas partes dos problemas propostos em [42].

3.3.2.1 Controlador tipo-PD H_∞ com Realimentação de Estados

Considere a seguinte lei de controle

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{b_2} (\mathbf{K}(\bar{\mathbf{q}}_e) \mathbf{q}_e + \mathbf{K}_{d1} \boldsymbol{\omega}_e), \quad (3.11)$$

$$\mathbf{K}(\bar{\mathbf{q}}_e) = (q_{4e} \mathbf{I}_3 - S(\mathbf{q}_e)) \mathbf{K}_{p1} + k_{p2} (1 - q_{4e}) \mathbf{I}_3, \quad (3.12)$$

onde $b_2 \in \mathfrak{R}$ é um parâmetro de projeto, \mathbf{I}_3 é a matriz identidade com dimensões 3×3 e o subscrito e representa valores de erro. Considerando que $\mathbf{M} > 0$ e $\mathbf{M} \geq 0$ representam matrizes definida e semidefinida positiva, respectivamente, os ganhos em (3.11) e (3.12) estão restritos a

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{p1} > 0, \\ k_{p2} > 0, \\ \mathbf{K}_{d1} > 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

onde $k_{p2} \in \mathfrak{R}$ e $\mathbf{K}_{p1}, \mathbf{K}_{d1} \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$.

Em (3.11), o ganho proporcional (3.12) depende do erro atual de atitude, o que não acontece com um controlador PD clássico, por isso o nome tipo-PD.

A saída a ser controlada é dada por

$$\begin{cases} z = \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\zeta}, \\ \boldsymbol{\Sigma} = \text{diag} \{ \sigma_\eta, \boldsymbol{\sigma}_\omega \}, \\ \boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} 2 \cos^{-1}(|q_{4e}|) & \boldsymbol{\omega}_e^T \end{bmatrix}^T, \end{cases} \quad (3.14)$$

onde $\sigma_\eta \in \mathfrak{R}$ e $\boldsymbol{\sigma}_\omega \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ são pesos de saída.

De acordo com [42], dados $b_1, b_2, \gamma \in \mathfrak{R}_+^*$, então o sistema de malha fechada, definido pelas equações (2.18), (2.28) e (3.11), terá ganho \mathcal{L}_2 [43] da perturbação τ_{EXT} para a saída z menor ou igual a γ se as seguintes condições forem satisfeitas

$$\begin{cases} \mathcal{F} > 0, \\ 2k_{p2}\mathbf{I}_3 > \mathbf{K}_{p1} > k_{p2}\mathbf{I}_3, \\ \mathcal{R} > 0, \\ \mathcal{R} - \bar{\Sigma}^T \bar{\Sigma} - \frac{1}{4\gamma^2} \mathbf{W}^T \mathbf{W} \geq 0, \end{cases} \quad (3.15)$$

onde

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} 2\mathbf{K}_{p1} & b_1\mathbf{J} \\ \star & b_2\mathbf{J} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{b_2}(2k_{p2}\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_{p1}) & \frac{b_1}{2b_2}\mathbf{K}_{d1} \\ \star & \mathbf{K}_{d1} - \frac{3}{2}b_1\|\mathbf{J}\|_2\mathbf{I}_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} b_1\mathbf{I}_3 & b_2\mathbf{I}_3 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Sigma} = \text{diag} \{ \pi\sigma_\eta\mathbf{I}_3, \sigma_\omega \}.$$

As desigualdades (3.13) e (3.15) compreendem um problema de DML, o qual pode ser resolvido por meio de algoritmos de otimização convexa.

3.3.2.2 Controlador tipo-PID H_∞ com Realimentação de Estados

Este controlador, também proposto por [42], é uma extensão do controlador tipo-PD, onde um termo integrativo é adicionado ao sinal de controle (3.11)

$$\begin{cases} \mathbf{u} = -\frac{1}{b_2}(\mathbf{K}(\bar{\mathbf{q}}_e)\mathbf{q}_e + \mathbf{K}_d\boldsymbol{\omega}_e) - k_i\boldsymbol{\eta}, \\ \boldsymbol{\eta} = \int_0^t \left(\mathbf{q}_e + \frac{b_2}{2b_1}[(2 - q_{4e})\mathbf{I}_3 - S(\mathbf{q}_e)]\boldsymbol{\omega}_e \right) dt, \end{cases} \quad (3.20)$$

onde $k_i \in \mathfrak{R}$ e

$$k_i > 0. \quad (3.21)$$

A saída a ser controlada, da mesma forma que para o controlador tipo-PD, é dada pela equação (3.14). Assim, o sistema de malha fechada, definido pelas equações (2.18), (2.28) e (3.20), terá ganho \mathcal{L}_2 da perturbação τ_{EXT} para a saída z menor ou igual a γ se as seguintes condições forem satisfeitas

$$\begin{cases} \mathcal{F}' > 0, \\ 2k_{p2}\mathbf{I}_3 > \mathbf{K}_{p1} > k_{p2}\mathbf{I}_3, \\ \mathcal{R}' > 0, \\ \mathcal{R}' - \bar{\Sigma}^T \bar{\Sigma} - \frac{1}{4\gamma^2} \mathbf{W}^T \mathbf{W} \geq 0, \end{cases} \quad (3.22)$$

onde

$$\mathcal{F}' = \begin{bmatrix} 2\mathbf{K}_{p1} & b_1\mathbf{J} & b_2k_i\mathbf{I}_3 \\ \star & b_2\mathbf{J} & 0 \\ \star & \star & b_1k_i\mathbf{I}_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{R}' = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{b_2}(2k_{p2}\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_{p1}) - \left(b_2 + \frac{b_2^2}{4b_1}\right)k_i\mathbf{I}_3 & \frac{b_1}{2b_2}\mathbf{K}_{d1} \\ \star & \mathbf{K}_{d1} - \frac{3}{2}b_1\|\mathbf{J}\|_2\mathbf{I}_3 - \frac{b_2^2}{16b_1}k_i\mathbf{I}_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} b_1\mathbf{I}_3 & b_2\mathbf{I}_3 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Sigma} = \text{diag} \{ \pi\sigma_\eta\mathbf{I}_3, \sigma_\omega \}.$$

3.3.2.3 Problema de Otimização

Os ganhos dos controladores robustos tipo-PD e tipo-PID podem ser ajustados pela solução dos problemas de DML descritos pelas desigualdades (3.13) e (3.15) para o primeiro e por (3.13), (3.21) e (3.22) para o segundo controlador. Porém, para se resolver esses problemas de DML, necessita-se do conhecimento prévio dos parâmetros b_1 , b_2 , γ , σ_η e σ_ω . Por simplificação, considere $\sigma_\omega = \sigma_\omega\mathbf{I}_3$, assim, os parâmetros a serem escolhidos são todos escalares.

Para a escolha desses parâmetros, primeiramente define-se um problema de otimização:

$$\begin{aligned}
\min_{b_1, b_2, \gamma, \sigma_\eta, \sigma_\omega} \quad & \text{IAE} = \sum_{i=1}^3 \int_{T_{MIN}}^{T_{MAX}} |\bar{q}_{e,i}(t)| dt \\
\text{sujeito a} \quad & b_1 > 0 \\
& b_2 > 0 \\
& \gamma > 0 \\
& \sigma_\eta > 0 \\
& \sigma_\omega > 0 \\
& \dot{\bar{q}}(t) = \frac{1}{2} \Omega \bar{q}(t) \\
& \mathbf{J}\dot{\omega} = -\mathbf{S}(\omega)(\mathbf{J}\omega + \mathbf{h}) + \mathbf{u} + \boldsymbol{\tau}_{EXT} \\
& \bar{q}(0) = (0, 4619; 0, 1913; 0, 4619; 0, 7325) \\
& \omega(0) = (2; 2; 2)^\circ /s
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Este problema consiste na minimização de uma Integral Absoluta do Erro (IAE). Este valor é calculado pela soma das integrais dos erros em regime permanente dos três primeiros termos do quatérnio de erro. Este quatérnio é resultante de uma simulação do sistema por um intervalo de tempo T_{MAX} . Assim, considerando que o tempo de assentamento é menor que T_{MIN} , a integral do erro em regime permanente se dá de T_{MIN} a T_{MAX} .

3.3.2.4 Recozimento Simulado (RS)

Definido o problema de otimização, os parâmetros b_1 , b_2 , γ , σ_η e σ_ω podem ser escolhidos. Para isso, a técnica de busca Recozimento Simulado (*Simulated Annealing* em inglês) pode ser utilizada. Esta técnica heurística de otimização foi proposta em 1983 [44]. Algumas características importantes dela são o baixo esforço computacional e a capacidade de desviar de mínimos locais. Esta técnica, quando aplicada ao UYS-1 para resolver os problemas de DML supracitados, resulta no seguinte algoritmo:

1. Defina uma matriz diagonal de temperatura³ inicial \mathbf{T}

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^{(0)}$$

e um critério de erro ϵ (com valor inicial $\epsilon(0) \rightarrow \infty$), dado pela IAE do problema de otimização (3.27).

Considere, também, a matriz diagonal de parâmetros

$$\boldsymbol{\lambda}^{(0)} = \text{diag} \left\{ b_1 \quad b_2 \quad \gamma \quad \sigma_\eta \quad \sigma_\omega \right\},$$

a qual gera uma solução factível para o problema de DML.

³O termo *temperatura* é utilizado, pois este algoritmo foi formulado para o problema de tratamento térmico de materiais.

2. Calcule um novo vetor de parâmetros $\lambda^{(novo)}$, pela aplicação da função de perturbação

$$\lambda^{(novo)} = R(\lambda) = \lambda + \delta,$$

onde $\delta \sim \mathcal{N}(0, T)$ é uma distribuição Gaussiana com média nula e matriz de covariância T .

3. Simule o sistema por um tempo $t = T_{MAX}$ e calcule o novo valor do critério de erro $\epsilon^{(novo)}$.
4. Defina a função energia

$$\Delta E = \epsilon^{(novo)} - \epsilon.$$

Defina também uma função de aceitação dos novos parâmetros

$$\lambda = \begin{cases} \lambda^{(novo)}, & \text{se } \Delta E \leq 0, \\ \lambda^{(novo)}, & \text{se } \Delta E > 0 \text{ com probabilidade } P, \\ \lambda & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $P = \exp\left(-\frac{\Delta E}{\text{traço}(T)}\right)$.

5. Calcule a nova temperatura por

$$T = \beta(k) T^{(0)},$$

onde $\beta(k) = \exp\left(-\frac{k}{d}\right)$, k é a iteração atual e d é o fator de decaimento

6. Se o número de iterações chegar a um limite máximo, pare o algoritmo. Caso contrário, faça $k = k + 1$ e retorne ao passo 2.

3.3.3 Controle Subatuado

Os controladores definidos nas seções anteriores consideram que o sistema possui três rodas de reação, uma em cada eixo do satélite, funcionando sem falhas que inutilizem as rodas. Porém, se uma roda falha completamente, pela não-linearidade do sistema, o satélite continua sendo controlável [18, 23], como discutido na Seção 1.4.

3.3.3.1 Modelo Dinâmico

Considere, sem perda de generalidade, uma falha total na roda do terceiro eixo do satélite. Isto leva a $\dot{h}_3 = 0$, pois ela não pode mais aplicar torque. Assumindo que a velocidade angular desta roda é nula, tem-se

$$h_3 = 0. \tag{3.34}$$

De acordo com [23], um satélite subatuado somente é controlável no caso de momento angular total nulo, isto é

$$\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{h} = 0. \quad (3.35)$$

Como $\mathbf{J} = \text{diag} \{J_1, J_2, J_3\}$,

$$\omega_3 = 0. \quad (3.36)$$

Caso esta condição não seja satisfeita, o SDCABC pode ser utilizado para deixar o vetor velocidade angular do satélite aproximadamente nulo.

Considerando $\boldsymbol{\tau}_{EXT} = 0$ e substituindo (3.35), (3.36) e (3.34) em (2.28), o modelo dinâmico do sistema subatuado passa a ser descrito por

$$\begin{cases} J_1\dot{\omega}_1 = u_1, \\ J_2\dot{\omega}_2 = u_2, \\ J_3\dot{\omega}_3 = 0. \end{cases} \quad (3.37)$$

3.3.3.2 Modelo Cinemático

O modelo cinemático descrito pela equação (2.18) pode ser escrito de forma expandida como

$$\dot{q}_1 = \frac{1}{2}(\omega_3 q_2 - \omega_2 q_3 + \omega_1 q_4), \quad (3.38a)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{1}{2}(\omega_1 q_3 - \omega_3 q_1 + \omega_2 q_4), \quad (3.38b)$$

$$\dot{q}_3 = \frac{1}{2}(\omega_2 q_1 - \omega_1 q_2 + \omega_3 q_4), \quad (3.38c)$$

$$\dot{q}_4 = \frac{1}{2}(-\omega_1 q_1 - \omega_2 q_2 - \omega_3 q_3). \quad (3.38d)$$

Considerando a equação (3.36), o modelo cinemático pode ser simplificado para

$$\dot{q}_1 = \frac{1}{2}\omega_1 q_4 - \frac{1}{2}\omega_2 q_3, \quad (3.39a)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{1}{2}\omega_1 q_3 + \frac{1}{2}\omega_2 q_4, \quad (3.39b)$$

$$\dot{q}_3 = \frac{1}{2}\omega_2 q_1 - \frac{1}{2}\omega_1 q_2, \quad (3.39c)$$

$$\dot{q}_4 = -\frac{1}{2}\omega_1 q_1 - \frac{1}{2}\omega_2 q_2. \quad (3.39d)$$

As velocidades ω_1 e ω_2 podem ser vistas como entradas deste modelo. Assim, elas podem ser substituídas por valores a serem controlados ω_{d1} e ω_{d2} , a fim de se obter uma lei de controle para elas e as equações do sistema em malha fechada.

3.3.3.3 Controlador Não-linear Baseado em Quatérnios (CNBQ)

Para controlar o sistema subatuado, Horri e Palmer [23] propõem a utilização da lei de controle

$$\omega_{d1} = -kq_1 + g \frac{q_2 q_3}{q_1^2 + q_2^2}, \quad (3.40a)$$

$$\omega_{d2} = -kq_2 - g \frac{q_1 q_3}{q_1^2 + q_2^2}, \quad (3.40b)$$

onde $k > 0$ e $g > 0$ são constantes positivas a serem ajustadas.

Para evitar valores muito elevados dos termos que multiplicam g , nas equações (3.40), quando $q_1 \rightarrow 0$ e $q_2 \rightarrow 0$, estes termos podem ser saturados por valores a_1 e a_2 . A forma saturada deste controlador é, então, dada por

$$\begin{aligned} \omega_{d1} &= -kq_1 + g \text{sat} \left(\frac{q_2 q_3}{q_1^2 + q_2^2}, a_1 \right), \\ \omega_{d2} &= -kq_2 - g \text{sat} \left(\frac{q_1 q_3}{q_1^2 + q_2^2}, a_2 \right), \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde sat é a função saturação definida por

$$\text{sat}(x, a) = \begin{cases} a, & x > a, \\ -a, & x < -a, \\ x, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.42)$$

Este controlador é utilizado como controlador de referência nas simulações, porém, apresenta resposta lenta para o satélite simulado. Assim, propõe-se a utilização da seguinte lei de controle para se obter as velocidades desejadas ω_{d1} e ω_{d2}

$$\omega_{d1} = -kq_1 + g \frac{q_2 q_3}{q_1^2 + q_2^2} - k_D \frac{q_1 \dot{q}_3}{q_1^2 + q_2^2}, \quad (3.43a)$$

$$\omega_{d2} = -kq_2 - g \frac{q_1 q_3}{q_1^2 + q_2^2} - k_D \frac{q_2 \dot{q}_3}{q_1^2 + q_2^2}, \quad (3.43b)$$

onde os termos em vermelho são adicionados à lei de controle (3.40) a fim de criar uma relação entre as velocidades desejadas e a variação temporal de q_3 . Neste controlador, o ganho k_D é definido por

$$k_D = k'_D \text{sign}(q_3) \text{sign}(q_4), \quad (3.44)$$

onde $k'_D > 0$ é uma constante positiva a ser ajustada e $\text{sign}(x)$ é a função sinal, que retorna o sinal do escalar x .

Semelhante à equação (3.41), o controlador proposto também possui sua forma saturada por valores a_1, a_2, a_3 e a_4 , dada por

$$\begin{aligned} \omega_{d1} &= -kq_1 + g \text{sat} \left(\frac{q_2 q_3}{q_1^2 + q_2^2}, a_1 \right) - k_D \text{sat} \left(\frac{q_1 \dot{q}_3}{q_1^2 + q_2^2}, a_3 \right), \\ \omega_{d2} &= -kq_2 - g \text{sat} \left(\frac{q_1 q_3}{q_1^2 + q_2^2}, a_2 \right) - k_D \text{sat} \left(\frac{q_2 \dot{q}_3}{q_1^2 + q_2^2}, a_4 \right). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Aplicando as equações do controlador (3.43) ao modelo cinemático simplificado (3.39), tem-se

$$\dot{q}_3 = -\frac{g}{2} q_3, \quad (3.46)$$

cuja resposta temporal é dada por

$$q_3(t) = q_3(0) e^{(-g/2)t}. \quad (3.47)$$

Assim, a lei de controle pode ser reescrita por

$$\omega_{d1} = -kq_1 + g \frac{q_2 q_3}{q_1^2 + q_2^2} + \frac{gk_D}{2} \frac{q_1 q_3}{q_1^2 + q_2^2}, \quad (3.48a)$$

$$\omega_{d2} = -kq_2 - g \frac{q_1 q_3}{q_1^2 + q_2^2} + \frac{gk_D}{2} \frac{q_2 q_3}{q_1^2 + q_2^2}, \quad (3.48b)$$

e por sua versão saturada

$$\begin{aligned} \omega_{d1} &= -kq_1 + g \text{sat} \left(\frac{q_2 q_3}{q_1^2 + q_2^2}, a_1 \right) + \frac{gk_D}{2} \text{sat} \left(\frac{q_1 q_3}{q_1^2 + q_2^2}, a_2 \right), \\ \omega_{d2} &= -kq_2 - g \text{sat} \left(\frac{q_1 q_3}{q_1^2 + q_2^2}, a_2 \right) + \frac{gk_D}{2} \text{sat} \left(\frac{q_2 q_3}{q_1^2 + q_2^2}, a_1 \right). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Fazendo $k_D = 0$, este controlador é o mesmo que o apresentado por [23], que será utilizado como controlador de referência, para fins de comparação. Assim, o controlador aqui proposto é uma generalização desta lei de controle já existente, porém com um termo a

mais que adiciona uma relação extra do eixo sem atuação com os eixos atuados. Isto permite uma maior flexibilidade no ajuste dos ganhos, o que pode melhorar a resposta do sistema.

O controlador proposto CNBQ considera que a velocidade angular desejada é rapidamente obtida pela dinâmica rápida das rodas de reação. Porém, a atuação que se tem sobre o satélite é por meio do torque gerado pelos atuadores. Assim, se torna necessário controlar a velocidade angular para que ela atinja a velocidade desejada. O controlador utilizado aqui, proposto por [23], é uma lei de controle proporcional ao erro de velocidade

$$\mathbf{u} = \mathbf{J} (-\mathbf{K} (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_d) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_d), \quad (3.50)$$

onde $\boldsymbol{\omega}_d$ é obtido pelas equações (3.48) e \mathbf{K} é um ganho escalar constante. O último termo desta lei de controle é inserido apenas para facilitar na prova de estabilidade (apresentada no apêndice A).

4 SIMULAÇÕES

Este capítulo mostra as simulações¹ realizadas dos sistemas projetados no capítulo 3, bem como as análises dos resultados obtidos.

4.1 PD EMPÍRICO

Considere a situação em que as perturbações e falhas são desprezíveis. Assim, projeta-se um controlador do tipo PD-empírico (seção 3.3.1). Com o sensor e os atuadores escolhidos e com a matriz de inércia calculada pela equação (3.1), o satélite já pode ser simulado, sem torques externos, para o ajuste dos ganhos k_p e k_d .

Primeira Simulação

Considere uma primeira simulação com erro de arfagem de 90° , sem velocidade inicial. Para esta simulação, considere o ganho proporcional $k_p = 1$ e o ganho derivativo variante $k_d = i$, $i = 1, 2, \dots, 10$. A Tabela 4.1 mostra os tempos de assentamento para o sistema entrar em um erro em regime permanente de $\pm 1^\circ$ para arfagem e guinada e de $\pm 3^\circ$ para rolagem.

Tabela 4.1: Tempo de assentamento para a primeira simulação do ajuste do PD empírico.

k_d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tempo (s)	167,13	69,29	46,12	37,16	24,17	31,95	35,80	40,44	42,05	46,03

Comparando os resultados, o controlador com $k_d = 5$ foi o mais rápido. Porém, ao analisar as oscilações em regime permanente, verificou-se que, para $k_d < 4$, os ângulos de arfagem e guinada têm a resposta oscilando entre $\pm 0,04^\circ$, enquanto que o ângulo de rolagem oscila no intervalo $\pm 0,3^\circ$. Quando $k_d = 4$, as oscilações aumentam para $\pm 0,05^\circ$ e para $\pm 0,35^\circ$. Para $k_d = 5$, elas chegam a $\pm 0,2^\circ$ e $\pm 0,8^\circ$.

Esta Tabela também mostra que, para ganhos $k_d \leq 5$, quanto maior o ganho, mais rápida é a resposta. Porém, quando o ganho derivativo aumenta, o sistema oscila mais. Assim, $k_d = 5$ é mais rápido, mas $k_d = 4$ apresenta menores oscilações.

¹As simulações foram todas feitas em Matlab® e os códigos utilizados podem ser encontrados no CD em anexo.

Segunda Simulação

Considere agora uma segunda simulação, onde o erro inicial de posição é nulo e o de velocidade é de $2^\circ/\text{s}$ para o ângulo de arfagem. Considere, também, a variação dos ganhos como apresentada na primeira simulação. Neste caso, o sistema se torna instável para ganhos $k_d \geq 7$. A Tabela 4.2 mostra o tempo de assentamento, para os ganhos estáveis, para o sistema oscilar no intervalo $\pm 0,35^\circ$.

Tabela 4.2: Tempo de assentamento para a segunda simulação.

k_d	1	2	3	4	5	6
Tempo (s)	7,82	6,45	8,68	10,50	11,49	349,76

Estes resultados mostram que, para se controlar erros iniciais de velocidade, $k_d = 2$ apresenta a melhor resposta dentre os ganhos considerados.

Com relação às oscilações em regime permanente, para $k_d < 4$, os ângulos de arfagem e guinada oscilam entre $\pm 0,03^\circ$ e o de rolagem entre $\pm 0,3^\circ$. Para $k_d = 4$, entre $\pm 0,04^\circ$ e $\pm 0,4^\circ$, e para $k_d = 5$, entre $\pm 0,2^\circ$ e $\pm 0,8^\circ$. Similar à resposta da primeira simulação.

Terceira Simulação

A terceira simulação é uma combinação das duas primeiras, com um erro angular inicial de 90° e de velocidade de $2^\circ/\text{s}$ para o ângulo de arfagem. O ganho derivativo, porém, foi variado com uma precisão dez vezes maior, para um ajuste fino do controlador.

A Tabela 4.3 mostra uma primeira análise com ganhos $k_d = 2$, $k_d = 3$, $k_d = 4$, $k_d = 5$ and $k_d = 6$. Neste caso, o tempo de assentamento foi verificado para o sistema oscilar entre $\pm 0,38^\circ$.

Tabela 4.3: Tempo de assentamento e intervalos de oscilação para a terceira simulação.

k_d	Tempo (s)	Oscilações de Arfagem e Guinada ($^\circ$)	Oscilações de Rolagem ($^\circ$)
2	61,15	$\pm 0,025$	$\pm 0,27$
3	48,32	$\pm 0,030$	$\pm 0,31$
4	45,50	$\pm 0,060$	$\pm 0,43$
5	37,41	$\pm 0,190$	$\pm 0,70$
6	40,65	$\pm 0,380$	$\pm 1,00$

Esta Tabela mostra que a resposta criticamente amortecida é para ganhos próximos a $k_d = 5$. Também mostra que o erro em regime permanente aumenta gradativamente para $k_d \geq 3$. De fato, o erro permanece o mesmo para ganhos até aproximadamente $k_d = 2.7$ ($\pm 0,028^\circ$), cujo tempo de assentamento é de 59,66s.

Quarta Simulação

Estendendo a simulação anterior, considere o caso em que todos os ângulos apresentam erro angular inicial de 45° . Além disso, todos eles apresentam erro inicial de velocidade angular de $2^\circ/\text{s}$. Assim, tem-se a quarta simulação. A Tabela 4.4 mostra o resultado para alguns ganhos próximos ao encontrado na simulação anterior.

Tabela 4.4: Tempo de assentamento e intervalo de oscilação para a quarta simulação.

k_d	Tempo (s)	Oscilações de Arfagem e Guinada ($^\circ$)	Oscilações de Rolagem ($^\circ$)
2,5	33,75	$\pm 0,024$	$\pm 0,27$
3	35,63	$\pm 0,024$	$\pm 0,33$
3,5	31,64	$\pm 0,036$	$\pm 0,25$
4	29,93	$\pm 0,053$	$\pm 0,36$

Assim, uma resposta boa é encontrada com $k_d = 2,5$. Este controlador apresenta pequeno erro em regime permanente, tempo de assentamento pequeno, comparado aos tempos correspondentes a ganhos maiores de k_d , e uma certa margem de segurança até $k_d = 3,5$ onde o erro em regime permanente começa a crescer, além de estar próximo do valor encontrado na simulação anterior.

Quinta Simulação

O último ajuste a ser feito é com a escolha da proporção entre k_p e k_d . Até agora o ganho proporcional foi sempre o mesmo $k_p = 1$. Então, nesta quinta simulação, a proporção $k_d = 2,5k_p$ é mantida e k_p varia de $k_p = 0,5$ até $k_p = 3$. Esta simulação mostra que, para ganhos $k_p \geq 1,5$, o erro em regime permanente começa a aumentar. Assim, a escolha $k_p = 1$ e $k_d = 2,5$ mantém uma margem de segurança de $k_p = 1,5$ e apresenta bons resultados.

Sexta Simulação

Assim, uma última simulação é feita com erro de arfagem inicial de 180° e de velocidade angular de $2^\circ/\text{s}$ neste ângulo. O resultado é mostrado pela Tabela 4.5.

Tabela 4.5: Tempo de assentamento e intervalo de oscilação para a sexta simulação.

Tempo (s)	Oscilações de Arfagem e Guinada ($^\circ$)	Oscilações de Rolagem ($^\circ$)
90,70	$\pm 0,025$	$\pm 0,37$

Esta simulação mostra que o controlador projetado foi capaz de manter o erro do satélite no intervalo requerido de $0,5^\circ$ pelas especificações de projeto. Porém, nenhuma etapa de

determinação foi aplicada para filtrar as medidas do sensor de estrela, ou seja, as medidas dos sensores foram diretamente utilizadas para o cálculo dos erros de atitude e de velocidade angular. Assim, o erro de atitude em regime permanente pode ser reduzido se um estimador for utilizado para filtrar as medidas do sensor de estrela.

4.2 FILTRO DE KALMAN ESTENDIDO

Considere o FKE (seção 3.2.1) com as matrizes \mathbf{Q}_k e \mathbf{R}_k ajustadas empiricamente. A primeira representa a covariância do ruído de modelo e a segunda, a covariância das medições. Um bom palpite inicial para \mathbf{Q}_k é considerar a máxima variação da atitude em uma iteração. Para a matriz \mathbf{R}_k , pode-se iniciar com a covariância das medições. Em seguida, essas matrizes são ajustadas por simulação, até que o intervalo 6σ (dado pela matriz \mathbf{P}_k) inclua o erro do filtro ao longo do tempo, mas sem ser muito maior que este erro. Assim, elas são dadas por

$$\mathbf{Q}_k = \begin{pmatrix} 1,3538 \times 10^{-12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,3538 \times 10^{-12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,1662 \times 10^{-11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{R}_k = \begin{pmatrix} 3,3847 \times 10^{-7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3,3847 \times 10^{-7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0154 \times 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,1458 \times 10^{-11} \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

As Figuras 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4 mostram a resposta do SDCA resultante comparado ao sistema sem determinação de atitude, onde a estimação da atitude é dada pela medida direta do sensor de estrela. As Figuras 4.1 e 4.3 mostram os primeiros 50s da simulação, enquanto as Figuras 4.2 e 4.4 mostram a mesma simulação no intervalo de tempo $t \in [200 \ 1000]$ s.

Desconsiderando perturbações externas ($\tau_{ext} = 0$), o SDCAAP é capaz de controlar a atitude em menos de 40s, como mostra a Figura 4.1. Este gráfico também mostra que o FKE não melhorou significativamente a resposta transitória, uma vez que as duas curvas praticamente se sobrepõem. Porém, a Figura 4.2 mostra que ele atenua a ruidosa resposta em regime permanente, uma vez que os elementos do quatérnio são estimados pelo FKE. Ela também mostra que ambos os controladores mantiveram o erro em regime permanente dentro da margem de $\pm 0,5^\circ$.

Na Figura 4.3, a resposta transitória para a velocidade angular não foi muito afetada pelo FKE, como no caso da atitude. Além disso, na Figura 4.4, verifica-se que o FKE praticamente não reduziu o erro em regime permanente da velocidade angular. Isto se deve

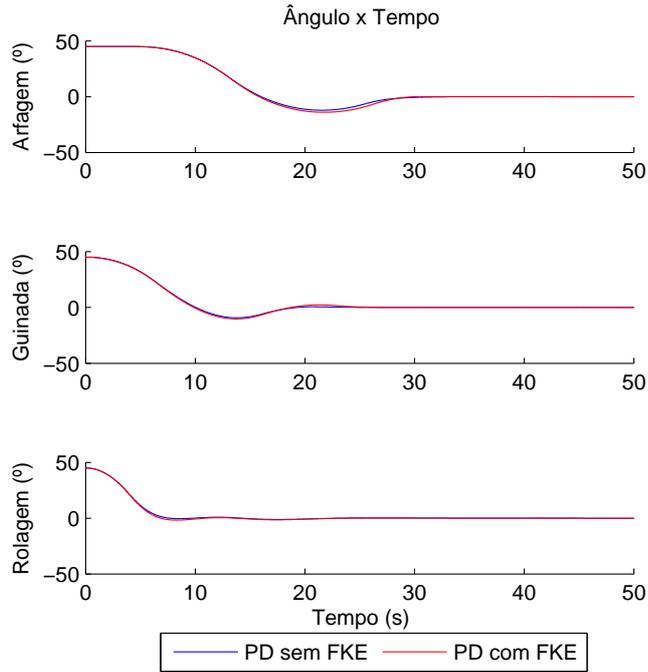


Figura 4.1: Resposta transitória dos ângulos dos sistemas formados pelo PD empírico com e sem o uso do FKE.

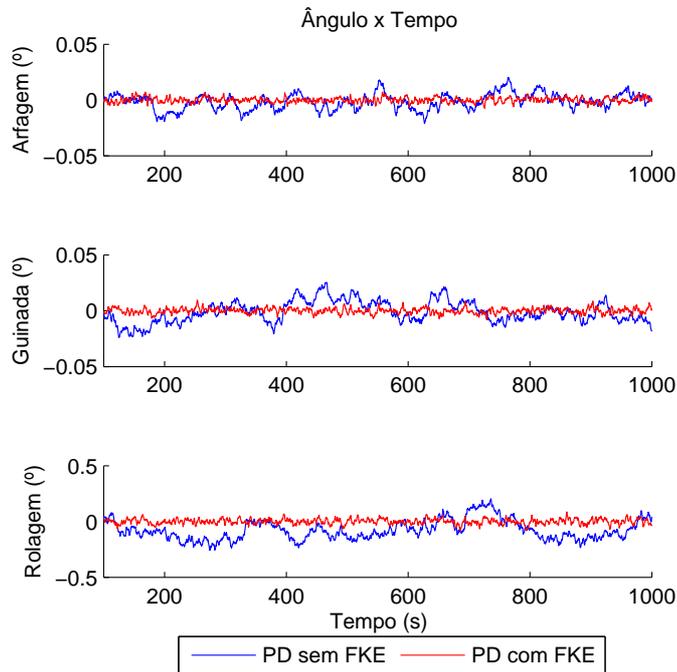


Figura 4.2: Resposta em regime permanente dos ângulos dos sistemas formados pelo PD empírico com e sem o uso do FKE.

ao fato de que o FKE foi implementado com o vetor de estados sendo apenas os elementos do quatérnio e com as velocidades angulares sendo a entrada do filtro. Assim, essas medidas não são filtradas e são utilizadas como medidas diretas do sensor de estrela.

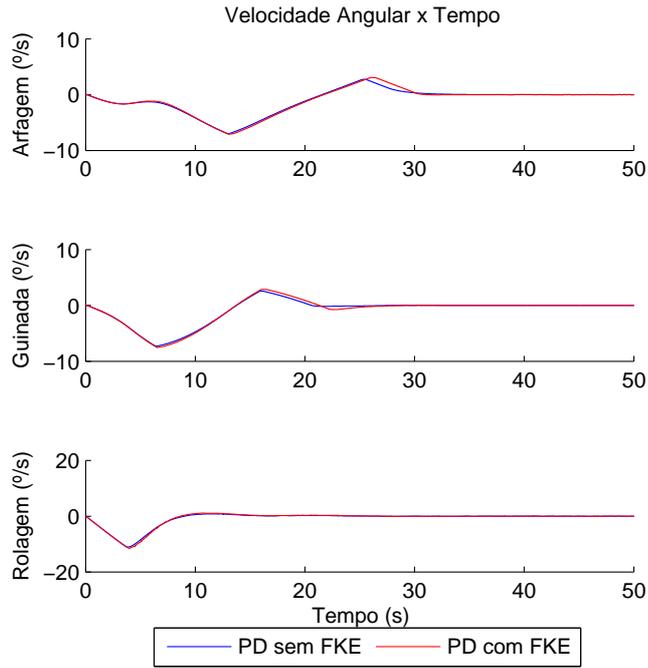


Figura 4.3: Resposta transitória da velocidade angular dos sistemas formados pelo PD empírico com e sem o uso do FKE.

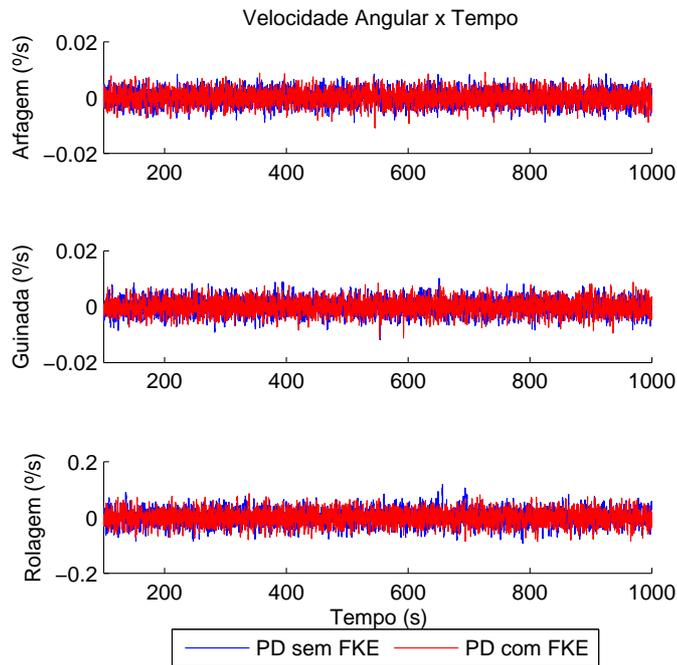


Figura 4.4: Resposta em regime permanente da velocidade angular dos sistemas formados pelo PD empírico com e sem o uso do FKE.

4.3 CONTROLADORES ROBUSTOS

Para o caso em que são consideradas perturbações no sistema, controladores robustos a elas podem ser utilizados. Para ajustar os ganhos dos controladores tipo-PD e tipo-PID

(seção 3.3.2), considere a Tabela 4.6 de parâmetros do algoritmo RS.

Tabela 4.6: Parâmetros para o algoritmo de Recozimento Simulado.

$\lambda^{(0)}$	$\text{diag} \left\{ 4 \quad 40 \quad 0,4 \quad 3 \quad \mathbf{I}_3 \right\}$
Temperatura Inicial	$\text{diag} \left\{ \frac{\lambda^{(0)}}{3} \right\}$
T_{MAX}	300s
T_{MIN}	100s
Critério de Erro	Integral Absoluta do Erro (IAE)
Número de Iterações	120
Fator de Decaimento	10

O valor inicial do vetor de parâmetros $\lambda^{(0)}$ foi escolhido a partir da última simulação apresentada em [42]. Os demais valores da Tabela 4.6 foram escolhidos arbitrariamente.

A convergência deste algoritmo é mostrada na Figura 4.5.

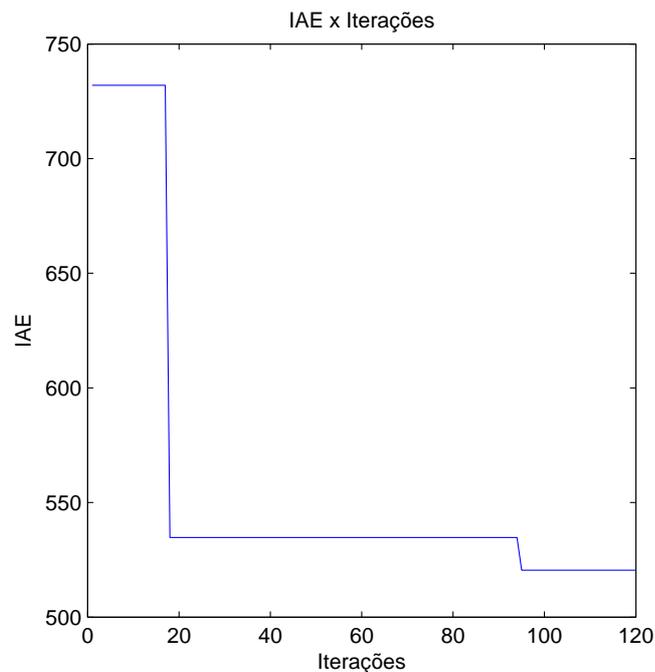


Figura 4.5: Diagrama de blocos do SDCAAP do UYS-1.

Nesta figura é possível ver que o erro reduz mais no início do algoritmo do que no final. Isto mostra que o algoritmo convergiu para um mínimo (local ou global), ou para um valor próximo dele.

O controlador tipo-PD, resultante do processo de otimização, possui os seguintes parâmetros

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}_{p1} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 1,8721 & -0,1969 & -0,1969 \\ -0,1969 & 1,8721 & -0,1969 \\ -0,1969 & -0,1969 & 1,8721 \end{bmatrix}, \\ k_{p2} = 1,3787 \times 10^6, \\ \mathbf{K}_d = 10^6 \times \begin{bmatrix} 1,8261 & 1,0435 & 1,0435 \\ 1,0435 & 1,8261 & 1,0435 \\ 1,0435 & 1,0435 & 1,8261 \end{bmatrix}, \\ b_2 = 16,1222. \end{array} \right. \quad (4.3)$$

No caso do controlador tipo-PID, os parâmetros são dados por

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}_{p1} = 10^9 \times \begin{bmatrix} 1,1004 & -0,0968 & -0,0968 \\ -0,0968 & 1,1004 & -0,0968 \\ -0,0968 & -0,0968 & 1,1004 \end{bmatrix}, \\ k_{p2} = 8,6713 \times 10^8, \\ \mathbf{K}_d = 10^9 \times \begin{bmatrix} 1,3318 & 0,8636 & 0,8636 \\ 0,8636 & 1,3318 & 0,8636 \\ 0,8636 & 0,8636 & 1,3318 \end{bmatrix}, \\ k_i = 13324, \\ b_1 = 19,2771, \\ b_2 = 265,8488. \end{array} \right. \quad (4.4)$$

Primeira Simulação

As Figuras 4.6, 4.7, 4.8 e 4.9 mostram a resposta temporal dos três SDCAAP projetados (os três controladores descritos com FKE para determinação) sem torque externos influenciando o sistema.

A Figura 4.6 mostra que as respostas transitórias dos controladores tipo-PD e PD-empírico são semelhantes. O controlador tipo-PD apresenta a resposta mais rápida para a arfagem e o PD-empírico apresenta a mais rápida para os ângulos de guinada e de rolagem. Ela também mostra que o tempo de assentamento do tipo-PID é o maior dentre os três controladores. Isto ocorre devido ao termo integrativo deste controlador.

Na Figura 4.7 é possível perceber que os três controladores têm respostas em regime permanente semelhantes, que cumprem os requisitos da missão.

A Figura 4.8 mostra a resposta transitória da velocidade angular. Verifica-se que o controlador PD-empírico apresenta picos de velocidade maiores que os demais controladores, o que é mais visível para o ângulo de guinada.

Por fim, a Figura 4.9 mostra que o controlador PD-empírico apresenta menor erro em regime permanente. De fato, a utilização dos controladores robustos aumenta significativa-

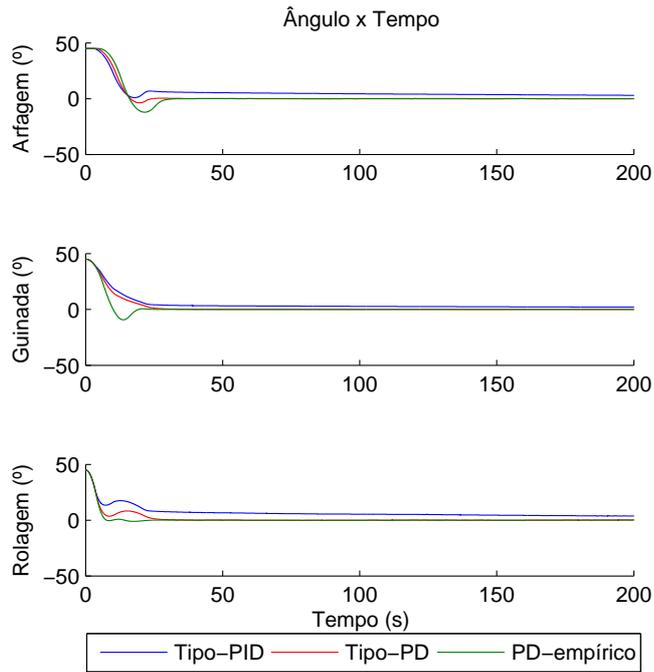


Figura 4.6: Resposta transiente dos ângulos do controlador PD-empírico, do tipo-PD robusto e do tipo-PID robusto.

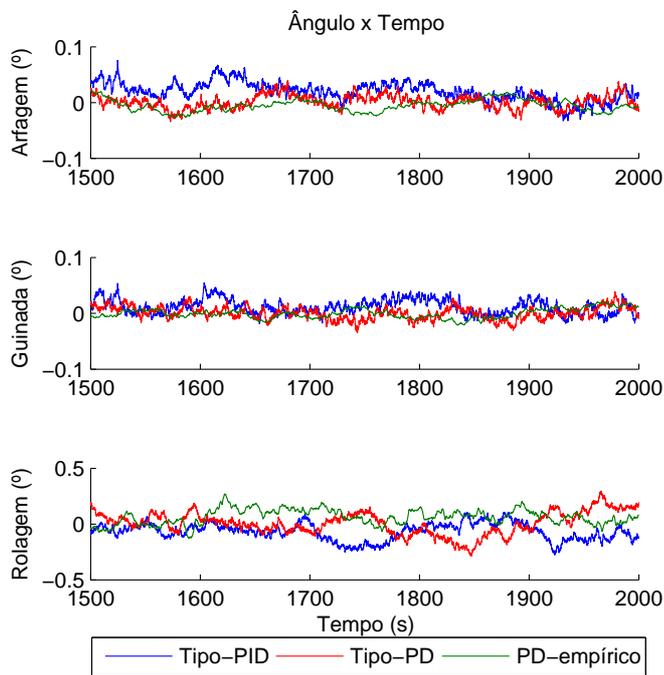


Figura 4.7: Resposta em estado estacionário dos ângulos do controlador PD-empírico, do tipo-PD robusto e do tipo-PID robusto.

mente este erro.

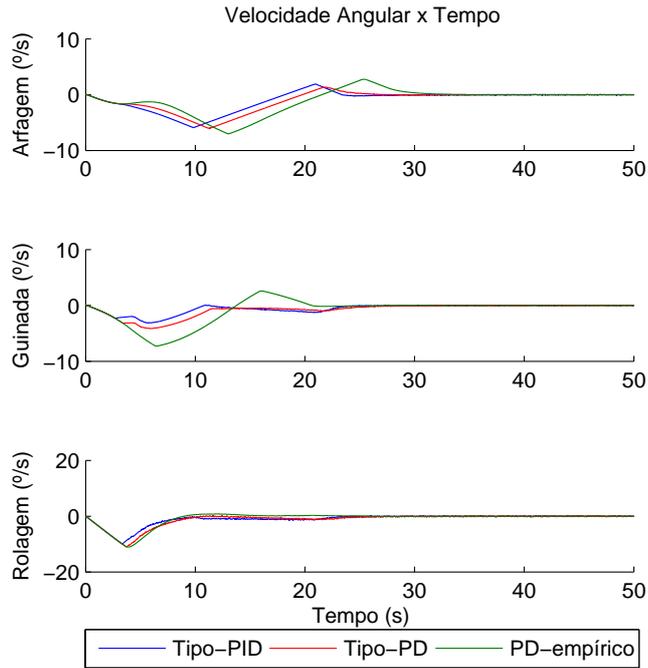


Figura 4.8: Resposta transiente da velocidade angular do controlador PD-empírico, do tipo-PD robusto e do tipo-PID robusto.

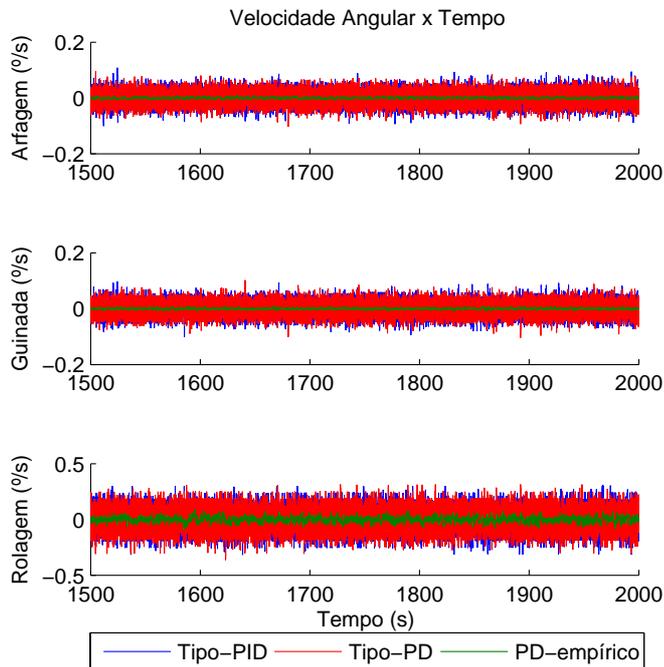


Figura 4.9: Resposta em regime permanente da velocidade angular dos ângulos do controlador PD-empírico, do tipo-PD robusto e do tipo-PID robusto.

Segunda Simulação

A primeira simulação mostra que o controlador PD-empírico apresenta melhor resposta que os demais controladores para o caso ideal, em que perturbações externas não são consi-

deradas. Porém elas devem ser levadas em consideração. As primeiras perturbações consideradas são os torques externos, resumidos na Tabela 2.1.

Superestimando os torques de perturbação, eles são simulados como uma onda senoidal de amplitude 1×10^{-5} Nm e período 10s, uma vez que alguns desses torques são dependentes da atitude do satélite, e por um torque constante com magnitude de 1×10^{-5} Nm.

Outra perturbação importante que pode ocorrer é a falha dos atuadores. Uma possível falha é o surgimento de um viés constante nos atuadores, considerado com magnitude de 4×10^{-4} Nm nas três rodas, o que corresponde a 20% do torque máximo que elas podem produzir.

Outro problema que pode ocorrer é um erro de abertura dos painéis do satélite. Com isso, as rodas de reação podem não estar posicionadas exatamente sobre os eixos principais do satélite, o que gera erros na matriz de inércia. Considerando um desvio de metade das dimensões do satélite, a matriz de inércia passa a ser dada por

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0,6083 & -0,15 & -0,15 \\ -0,15 & 0,6083 & -0,0562 \\ -0,15 & -0,0562 & 0,15 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Por fim, o sensor de estrela, por ser uma câmera, quando apontado para o sol não retorna medidas. Assim, em ambiente de simulação, o sol é posicionado na região em que os ângulos de arfagem e de guinada se encontram no intervalo $[0, 5^\circ \quad 3^\circ]$.

Estas perturbações foram superestimadas para se simular um cenário pior que o real, a fim de se verificar os controladores com uma margem de segurança. As Figuras 4.10, 4.11, 4.12 e 4.13 mostram a resposta temporal dos três sistemas projetados, na presença das perturbações supracitadas.

A Figura 4.10 mostra que todos os controladores convergem para a atitude de referência. Esta figura também mostra que o controlador PD-empírico apresenta a resposta mais rápida para o ângulo de guinada, enquanto o tipo-PD apresenta a mais rápida para os demais ângulos. Ela também mostra que o controlador tipo-PID apresenta a resposta mais lenta, como verificado na simulação anterior.

Por sua vez, a Figura 4.11 mostra que ambos os controladores robustos convergem para a atitude requerida sem influência significativa das perturbações. Porém, o PD-empírico apresenta grande influência destas perturbações, principalmente das do tipo viés constante, e apresenta erro constante em regime permanente. No caso do ângulo de rolagem, este erro é maior que o permitido para a missão.

A Figura 4.12 mostra a resposta transitória da velocidade angular e, como na simulação anterior, o controlador PD-empírico apresenta maiores picos de velocidade, o que poderia comprometer a resposta do sistema caso rodas de reação com menores valores de momento

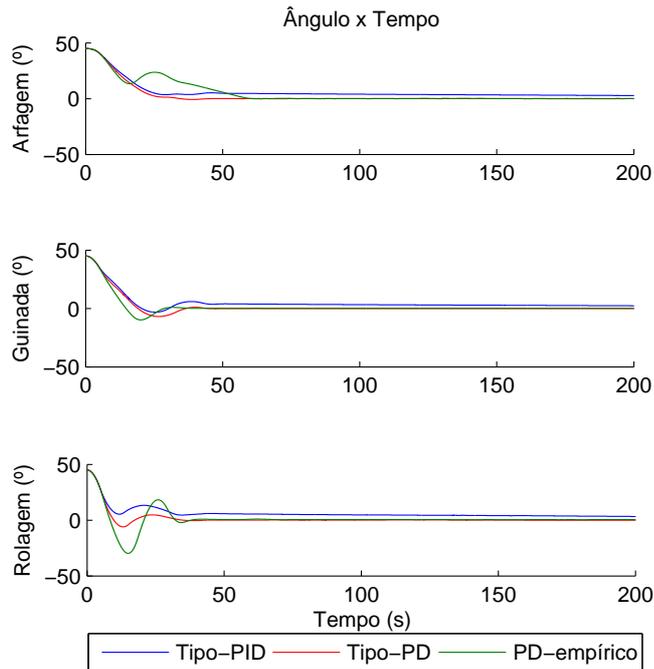


Figura 4.10: Resposta transiente dos ângulos do controlador PD-empírico, do tipo-PD robusto e do tipo-PID robusto na presença de perturbações.

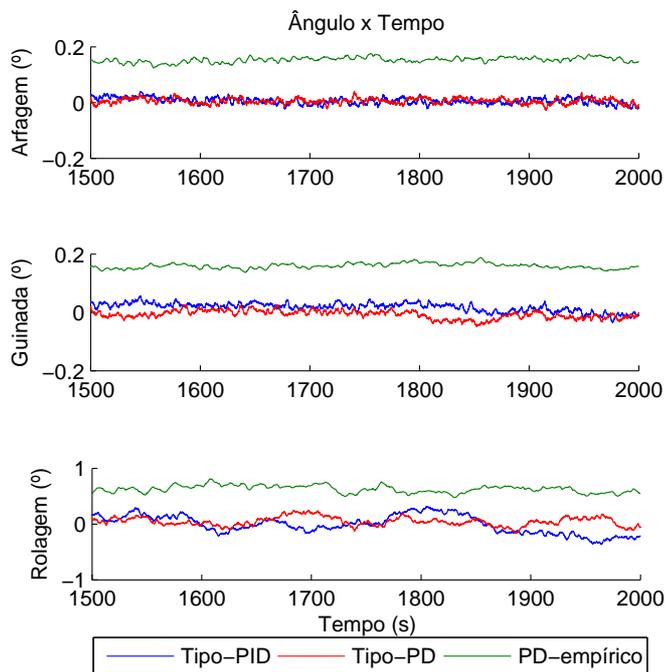


Figura 4.11: Resposta em regime permanente dos ângulos do controlador PD-empírico, do tipo-PD robusto e do tipo-PID robusto na presença de perturbações.

máximo sejam utilizadas.

Por fim, a Figura 4.13 mostra a resposta em regime permanente da velocidade angular

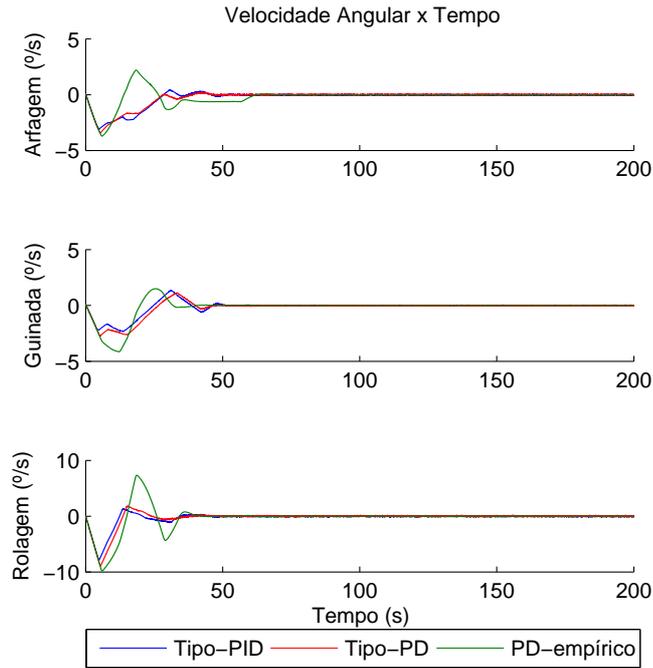


Figura 4.12: Resposta transiente da velocidade angular do controlador PD-empírico, do tipo-PD robusto e do tipo-PID robusto na presença de perturbações.

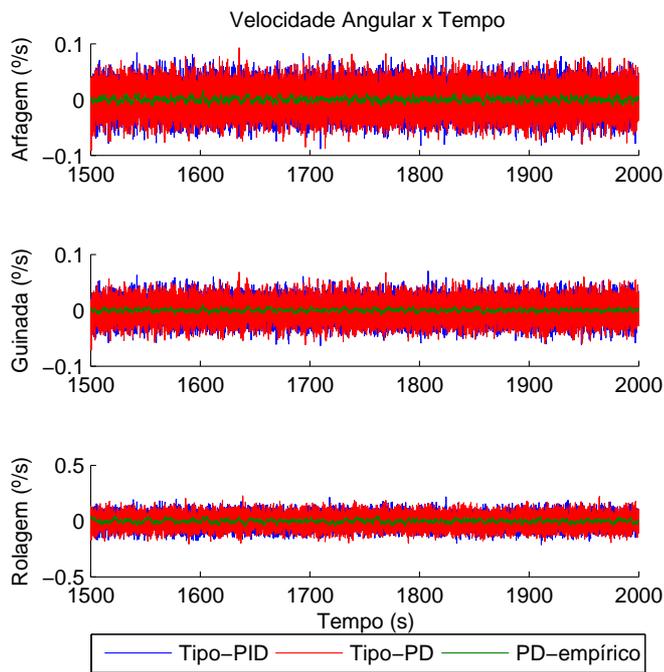


Figura 4.13: Resposta em regime permanente da velocidade angular do controlador PD-empírico, do tipo-PD robusto e do tipo-PID robusto na presença de perturbações.

para os três controladores. Ela mostra que, apesar de o controlador PD-empírico apresentar o maior erro de atitude, o de velocidade foi o menor dentre estes três controladores, como na

simulação anterior.

A potência consumida pelos atuadores também deve ser analisada. Ela pode ser calculada com base em dados experimentais com as rodas. O fabricante fornece tabelas com testes e, durante as simulações, a potência consumida foi calculada por meio da interpolação destes dados. Para esta última simulação, a potência média consumida em regime permanente por todas as três rodas foi de cerca de 0,47W para o PD-empírico, 0,43W para o tipo-PD e 0,39W para o controlador tipo-PID. Além disso, o máximo de potência consumida pelos três controladores foi de 0,836W, 0,738W e 0,678W, respectivamente. Considerando a potência diária média de 7W para todo o satélite, estes valores são razoáveis, uma vez que este sistema somente será ligado nos momentos em que se desejar bater fotos de alta resolução.

Resumidamente, o PD-empírico apresentou o menor erro de velocidade, porém foi o mais afetado pelas perturbações.

O tipo-PID apresentou a resposta mais lenta dentre os controladores simulados. Porém foi pouco afetado pelas perturbações e apresentou o menor consumo de potência.

O tipo-PD apresentou não a resposta mais rápida, mas uma resposta transitória similar à do PD-empírico, e foi pouco afetado pelas perturbações consideradas. Ele, também, foi capaz de cumprir os requisitos da missão com consumo de potência similar e com tempo de assentamento muito menor que o tipo-PID.

Para esta missão, o único requisito é o erro angular menor que $0,5^\circ$. Outra missão similar é a do microsatélite RISING-2 [6] com erro angular máximo de $0,1^\circ$ e erro e velocidade menor que $0,02^\circ/\text{s}$, porém ainda não foi lançado. Outro microsatélite com missão similar é o KITSAT-3 [5], com requisitos de erro angular menor que $0,5^\circ$ e erro de velocidade angular menor que $0,016^\circ/\text{s}$. Este satélite foi lançado em 1999 e seguiu os requisitos de missão batendo fotos multi-espectrais de alta qualidade da superfície terrestre.

O microsatélite Alsat-1 [45] foi lançado em 2002 com os requisitos de missão de erro angular menor que 3° para rolagem e arfagem e menor que $1,5^\circ$ para o ângulo de guinada. Os erros de velocidade deveriam ser menores que $(15 \times 10^{-3})^\circ/\text{s}$. Porém, durante o voo, ele foi capaz de atingir erros angulares menores que $0,3^\circ$ (rolagem), $0,15^\circ$ (arfagem) e $0,14^\circ$ (guinada) e erros de velocidade angular menores que $(0,06 \times 10^{-3})^\circ/\text{s}$ (rolagem), $(0,15 \times 10^{-3})^\circ/\text{s}$ (arfagem) e $(1,5 \times 10^{-3})^\circ/\text{s}$ (guinada).

Outra missão similar é a do microsatélite REIMEI [4], lançado em 2005. Os requisitos de missão são erros menores que $0,5^\circ$ e $0,03^\circ/\text{s}$, porém conseguiu atingir erros menores que $0,2^\circ$ e $0,004^\circ/\text{s}$.

Todas essas missões apresentam limite máximo para a velocidade angular. Os controladores robustos apresentados não são capazes de cumprir esses requisitos, quando aplicados ao UYS-1. Assim, como a câmera que tirará fotos da superfície terrestre ainda não foi definida, o UYS-1 ainda não possui o requisito de erro de velocidade angular. Porém, quando

quando ela for especificada, será possível definir qual o melhor controlador a ser usado, o PD-empírico, o tipo-PD ou ambos, em diferentes momentos de voo.

4.4 CONTROLE SUBATUADO

Considere a situação em que ocorre a falha total de uma das rodas de reação do UYS-1. Neste caso, os controladores supracitados não serão capazes de controlar a atitude do satélite, sendo necessário o uso de outra abordagem. Assim, considere os controladores mostrados na seção 3.3.3 e os seguintes parâmetros de simulação: $J = \text{diag}(0,1521; 0,1521; 0,0375)$, $a_1 = 0,04$, $a_2 = 0,04$, $k = 0,4$, $g = 1,2$, $K = \text{diag}(10,10,0)$, $k_D = 0,5$, taxa de amostragem $\Delta t = 0,01\text{s}$ e torque máximo $u_{MAX} = 0,002\text{Nm}$. A condição inicial utilizada é $(\bar{q}, \omega) = (0,2236; 0,2236; 0,2236; 0,9220; 0; 0; 0)$.

Primeira Simulação

Para uma primeira simulação, considere as equações (3.37), (3.39), (3.50) e (3.49) e nenhuma perturbação. As Figuras 4.14 e 4.15 mostram a resposta temporal do quatérnio para ambos os controladores (referência com $k_D = 0$ e CNBQ).

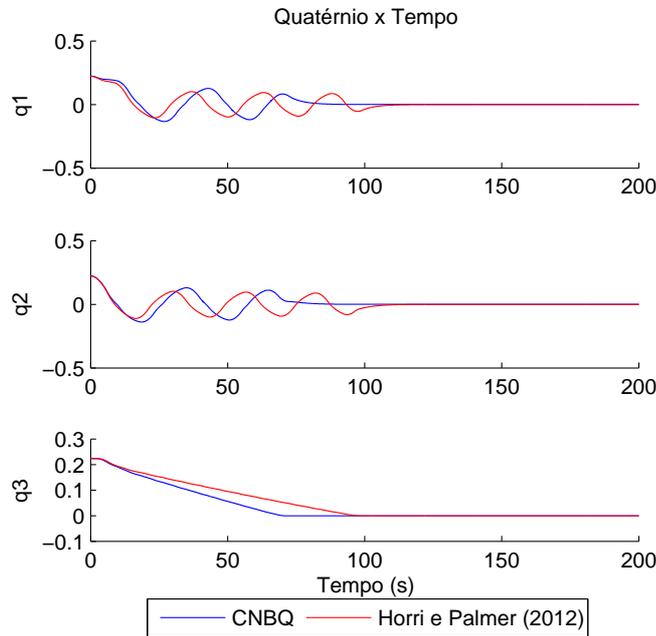


Figura 4.14: Resposta temporal da parte vetorial do quatérnio, para a primeira simulação.

A Figura 4.14 mostra que os controladores apresentam oscilações em q_1 e q_2 para estabilizar q_3 . Também é possível perceber que o CNBQ estabiliza mais rápido que o controlador de referência de Horri e Palmer [23]. Por sua vez, a Figura 4.15 mostra que o CNBQ levou cerca de 80s para estabilizar, enquanto o controlador de referência levou cerca de 105s.

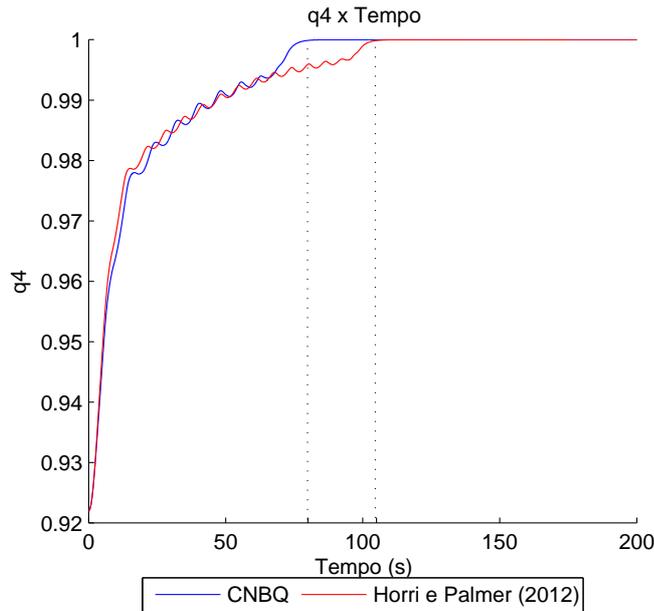


Figura 4.15: Resposta temporal de q_4 , para a primeira simulação.

Segunda Simulação

Em um satélite real, porém, as leituras dos sensores são ruidosas, há saturações de momento dos atuadores e torques externos. Considere os dados do sensor de estrela do UYS-1 produzindo sinais ruidosos, filtrados pelo FKE projetado e com atuação limitada pelas características das rodas de reação escolhidas. Considere, também, um torque externo senoidal com período $T = 6000\text{s}$ (correspondente ao período orbital do UYS-1) e amplitude $A = 5 \times 10^{-7}\text{Nm}$ (valor aproximado de torques externos sem superestimções, considerando o dipolo magnético residual dado por $0,01\text{Am}^2$). Este torque pode gerar velocidade angular indesejada no eixo sem atuação, assim, as equações utilizadas para esta simulação são (2.28), (2.18), (3.50) e (3.49). Os resultados são mostrados nas Figuras 4.16, 4.17 e 4.18.

A Figura 4.16 mostra que o sistema apresenta oscilações nos eixos atuados e que o CNBQ apresenta menor tempo de assentamento. Esta verificação é mais fácil de ser verificada pela análise da resposta do eixo sem atuação direta (q_3). A resposta em regime permanente da Figura 4.17 mostra que as oscilações do CNBQ são um pouco maiores que as do controlador de referência, para q_1 e q_2 . Verifica-se, também, que este erro aumenta e diminui segundo a periodicidade da perturbação aplicada. Isto sugere a possibilidade de um estudo da máxima perturbação suportada até a perda da controlabilidade do satélite, o que não é realizado nesta dissertação.

A Figura 4.18 mostra que o tempo de assentamento para o CNBQ é de cerca de 80s, enquanto o do controlador de referência é de cerca de 105s, como no caso sem ruídos, o que corresponde a uma melhoria de cerca de 24%.

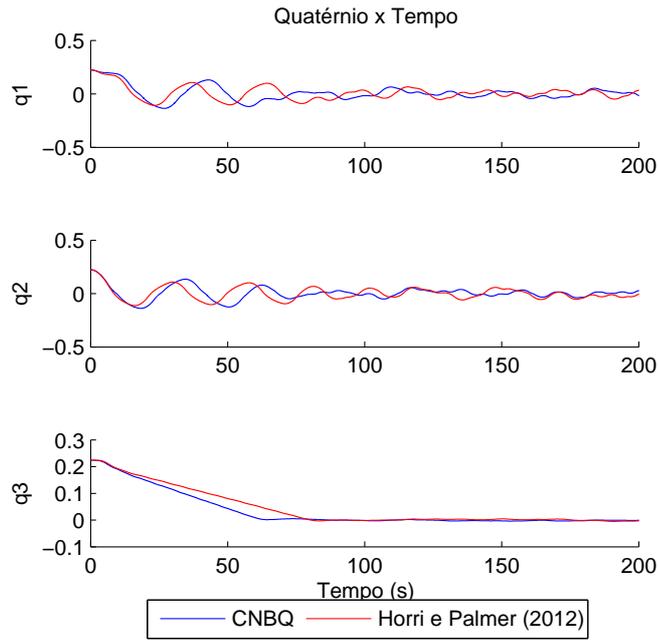


Figura 4.16: Resposta transitória da parte vetorial do quatérnio, para a segunda simulação.

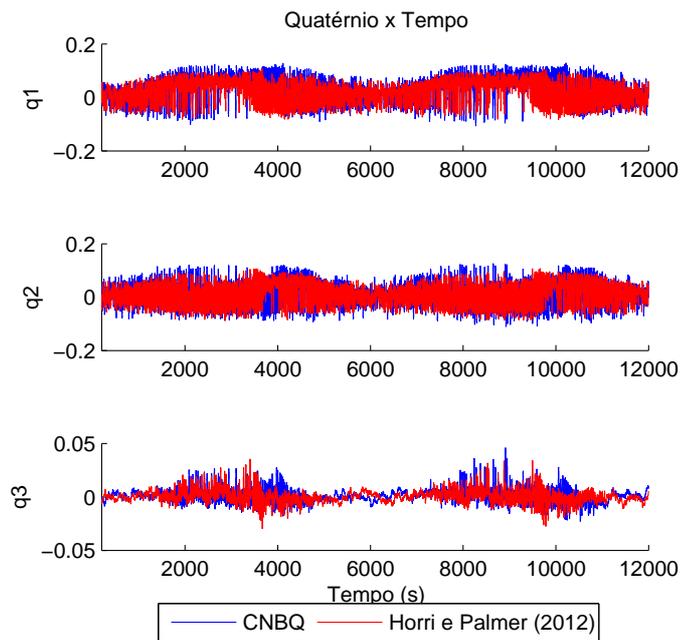


Figura 4.17: Resposta em regime permanente da parte vetorial do quatérnio, para a segunda simulação.

Terceira Simulação

Estes resultados mostram que, como o controlador de referência é um caso particular do CNBQ com $k_D = 0$, uma combinação adequada destes dois controladores pode ser usada para reduzir o tempo de assentamento sem aumentar o erro em regime permanente. Consi-

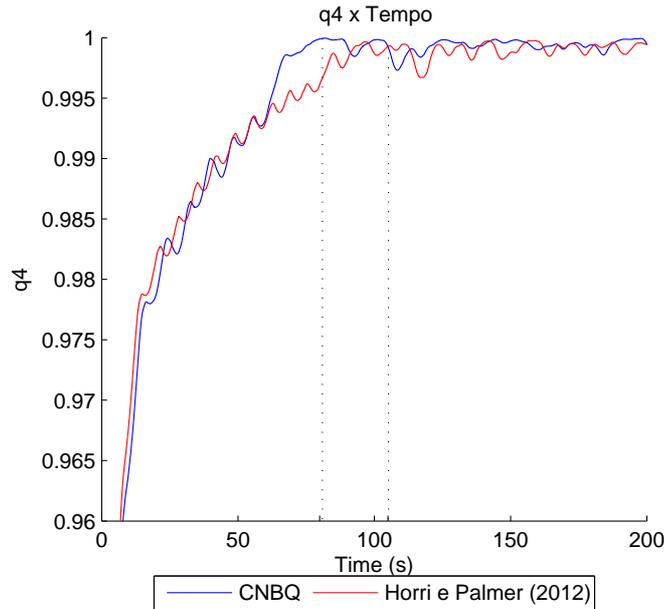


Figura 4.18: Resposta transitória de q_4 , para a segunda simulação.

dere, então, um controlador (aqui chamado de híbrido, pois depende do estado do sistema) com ganho $k_D(t)$ variante no tempo e valor inicial $k_D(0) = 0,5$. Quando $|1 - q_4| \leq 0.0001$, o sistema passa de um estado de convergência, para um estado em regime permanente. Assim, esse ganho é alterado para $k_D(t) = 0$. Ou seja, considerando T_e o primeiro instante em que $|1 - q_4| \leq 0.0001$,

$$k_D(t) = \begin{cases} 0,5, & t < T_e, \\ 0, & t \geq T_e. \end{cases} \quad (4.6)$$

As Figuras 4.19 e 4.20 mostram uma terceira simulação, com as mesmas características da segunda simulação, porém com a adição deste terceiro controlador híbrido.

A Figura 4.19 mostra que o controlador híbrido manteve praticamente a mesma resposta do CNBQ, porém levemente diferentes. Esta diferença se deve aos ruídos aplicados que, por serem aleatórios, são diferentes a cada simulação. Porém, como o ganho é mesmo, o tempo de assentamento destes dois controladores é praticamente o mesmo, o qual é menor que o do controlador de Horri e Palmer. Por sua vez, a Figura 4.20 mostra que a resposta do controlador híbrido em regime permanente é similar à do controlador de referência.

Esta terceira simulação mostra que é possível realizar uma combinação dos dois controladores (referência e CNBQ) para se obter uma resposta rápida com pequeno erro em regime permanente. Porém, ao se fazer esta combinação, torna-se necessária a prova de estabilidade do sistema híbrido, o que é deixado como sugestão de trabalho futuro.

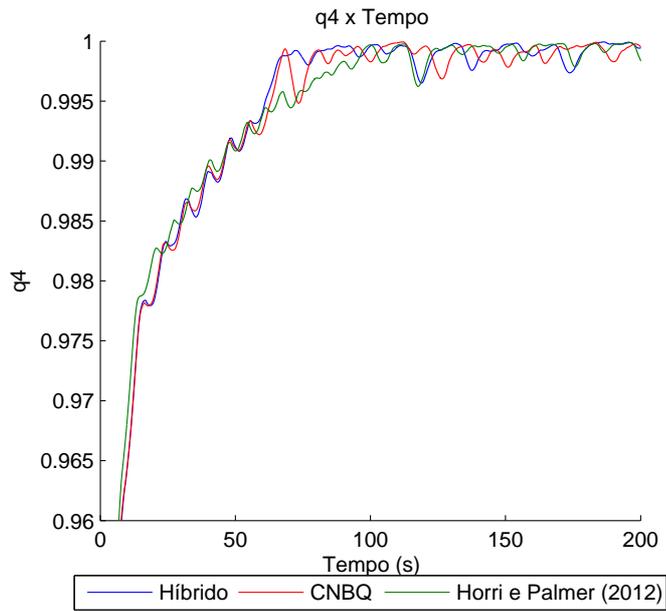


Figura 4.19: Resposta transitória de q_4 , para a terceira simulação.

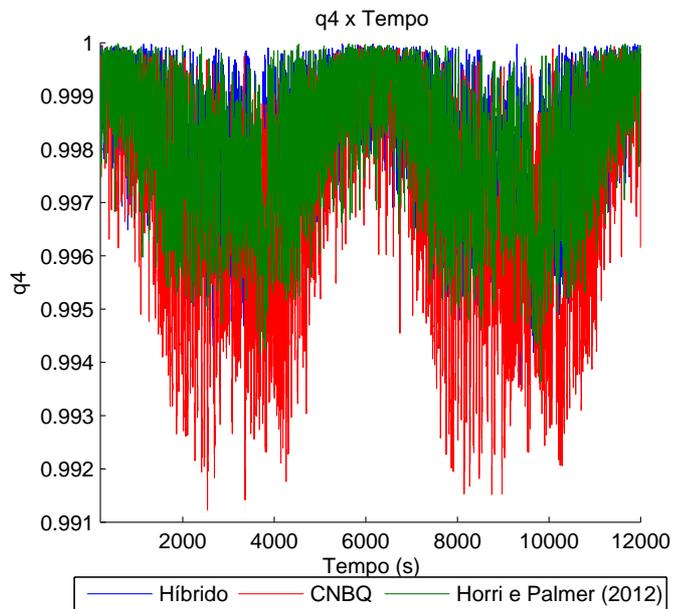


Figura 4.20: Resposta em regime permanente de q_4 , para a terceira simulação.

5 CONCLUSÕES

O UYS-1 é o primeiro nanossatélite universitário ucraniano, o qual está sendo projetado por um consórcio de instituições ucranianas e pela Universidade de Brasília. Este satélite possui dois SDCAs, um de baixo custo (SDCABC) e um de alta precisão (SDCAAP). Este trabalho mostra o projeto do SDCAAP.

Para obter uma resposta de alta precisão, foram comparados e escolhidos sensores de estrela comerciais, bem como rodas de reação comerciais.

Para a etapa de determinação de atitude, um FKE foi projetado e simulado. Os resultados mostraram que ele reduz significativamente o erro de atitude, com relação à atitude de referência, quando comparado a um sistema em que a determinação é feita por meio de medições diretas do sensor.

Considerando a situação em que as perturbações e falhas que ocorrem são desprezíveis, um controlador do tipo PD clássico foi empiricamente ajustado, utilizando, em simulação, os dados fornecidos pelos fabricantes do sensor e dos atuadores escolhidos.

Para a situação em que as perturbações externas são significativas, foi proposta uma forma de escolha, por meio do algoritmo RS, dos parâmetros utilizados pelos problemas de DML no ajuste dos ganhos dos controladores tipo-PD e um tipo-PID.

Os sistemas com os três diferentes controladores foram simulados sob as hipóteses de ação de torques externos, vieses nas rodas de reação, erro de montagem e falta de medições quando o sensor aponta para o sol. Os resultados mostraram que o controlador PD-empírico foi mais afetado pelas perturbações que os controladores robustos. Também mostraram que o tipo-PID apresentou o maior tempo de assentamento e uma resposta em regime permanente semelhante à do tipo-PD. Porém, apesar de menos sensíveis às perturbações, os erros de velocidade dos controladores robustos foram consideravelmente maiores que os do controlador PD-empírico.

Como a câmera que baterá fotos da superfície terrestre ainda não foi especificada para o UYS-1, não se pode definir a restrição de erro de velocidade e, assim, o controlador que será utilizado. Porém foram apresentadas diferentes opções de controladores a serem testados em um futuro protótipo do satélite.

Além destes controladores, para o caso de falha total de um dos atuadores, foi proposta lei de controle, a partir da generalização de um dos controladores apresentado por Horri e Palmer [23], utilizado como referência para simulações. Este controlador de referência foi apresentado recentemente na literatura (2012) e, segundo o autor, apresenta uma lei de controle de velocidade que pode ser alterada, consistindo em um potencial para futuras melhorias. Assim, foi escolhido para ser utilizado neste trabalho.

O controlador proposto mostrou respostas mais rápidas e permite ao projetista uma maior flexibilidade no projeto do controlador do sistema subatuado, uma vez que ele adiciona um termo à lei de controle apresentada por Horri e Palmer [23].

Sugestões de trabalhos futuros incluem:

- Realizar testes dos algoritmos propostos em um protótipo do satélite;
- Estudar a influência do uso de girômetros no erro de velocidade angular;
- Estudar outros algoritmos de determinação de atitude;
- Estudar outras leis de controle de velocidade com o controlador proposto CNBQ;
- Realizar análises de estabilidade de um controlador híbrido para o sistema subatuado;
- Realizar operações conjuntas dos dois sistemas (SDCAAP e SDCABC), para a etapa de descarregamento das rodas de reação;
- Estudar formas de controle do sistema subatuado, as quais utilizam os dois sistemas, e comparar os resultados com o controlador proposto;
- Realizar análises para verificar qual a amplitude de perturbação máxima suportada pelos controladores do sistema subatuado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] J. Bouwmeester and J. Guo, “Survey of worldwide pico- and nanosatellite missions, distributions and subsystem technology,” *Acta Astronautica*, vol. 67, no. 7-8, pp. 854–862, 2010.
- [2] T. Xiang, T. Meng, H. Wang, K. Han, and Z.-H. Jin, “Design and on-orbit performance of the attitude determination and control system for the ZDPS-1A pico-satellite,” *Acta Astronautica*, vol. 77, pp. 182–196, 2012.
- [3] R. Lehmsiek, “Using the physical structure of a passive aerodynamic attitude- stabilization system as a multi-frequency antenna on nano-satellites,” *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 54, no. 3, pp. 39–49, 2012.
- [4] S.-i. Sakai, Y. Fukushima, and H. Saito, “Design and on-orbit evaluation of magnetic attitude control system for the REIMEI microsatellite,” in *Advanced Motion Control, 2008. AMC '08. 10th IEEE International Workshop on*, march 2008, pp. 584 –589.
- [5] H. Kim, T. Chung, N. Sung, and H. Lee, “Design concept for autonomous operation of KITSAT-3, an experimental LEO microsatellite,” in *Aerospace Conference Proceedings, 2000 IEEE*, vol. 2, 2000, pp. 459 –465 vol.2.
- [6] K. Fukuda, Y. Sakamoto, T. Kuwahara, K. Yoshida, and Y. Takahashi, “Static closed loop test system for attitude control system of micro satellite RISING-2,” *2011 IEEE/SICE International Symposium on System Integration, SII 2011*, pp. 890–895, 2011.
- [7] M. Tafazoli, “A study of on-orbit spacecraft failures,” *Acta Astronautica*, vol. 64, pp. 195 – 205, 2009.
- [8] D. Sahnou, J. Kruk, T. Ake, B.-G. Andersson, A. Berman, W. Blair, R. Boyer, J. Cappingler, H. Calvani, T. Civeit, W. Van Dyke Dixon, M. England, M. Kaiser, M. Kochte, H. Moos, and B. Roberts, “Operations with the new fuse observatory: Three-axis control with one reaction wheel,” in *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, vol. 6266 I, 2006.
- [9] Q. Lam and M. Xin, “Robustness evaluation of theta-d technique for spacecraft attitude control subject to reaction wheel failures,” in *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, 2010.
- [10] Q. Hu, X. Huo, and B. Xiao, “Reaction wheel fault tolerant control for spacecraft attitude stabilization with finite-time convergence,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2012.

- [11] R. W. Brockett, "Asymptotic stability and feedback stabilization," *Differential geometric control theory*, vol. 27, pp. 181–191, 1983.
- [12] N. Reyhanoglu, "Discontinuous feedback stabilization of the angular velocity of a rigid body with two control torques," in *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 3, dec 1996, pp. 2692–2694 vol.3.
- [13] P. Morin, "Robust stabilisation of the angular velocity of a rigid body with two controls," *European Journal of Control*, vol. 2, no. 1, pp. 51–56, 1996.
- [14] A. Astolfi and A. Rapaport, "Robust stabilization of the angular velocity of a rigid body," *Systems and Control Letters*, vol. 34, no. 5, pp. 257–264, 1998.
- [15] Godard and K. D. Kumar, "Robust attitude stabilization of spacecraft subject to actuator failures," *Acta Astronautica*, vol. 68, pp. 1242 – 1259, 2011.
- [16] A. Mehrabian, S. Tafazoli, and K. Khorasani, "On the attitude recovery of an underactuated spacecraft using two control moment gyroscopes," in *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 2009, pp. 1463–1470.
- [17] H. Krishnan, N. McClamroch, and M. Reyhanoglu, "Attitude stabilization of a rigid spacecraft using two momentum wheel actuators," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 18, no. 2, pp. 256–263, 1995.
- [18] N. Horri and S. Hodgart, "Attitude stabilization of an underactuated satellite using two wheels," in *Proceedings of the IEEE Aerospace Conference*, vol. 6, 8-15, 2003, pp. 2629 – 2635.
- [19] H. Krishnan, H. McClamroch, and M. Reyhanoglu, "On the attitude stabilization of a rigid spacecraft using two control torques," in *Proceedings of the American Control Conference*, vol. 3, 1992, pp. 1990–1995.
- [20] P. Tsiotras, M. Corless, and J. Longuski, "A novel approach to the attitude control of axisymmetric spacecraft," *Automatica*, vol. 31, no. 8, pp. 1099–1112, 1995.
- [21] P. Tsiotras and V. Doumchenko, "Control of spacecraft subject to actuator failures: State-of-the-art and open problems," *Journal of the Astronautical Sciences*, vol. 48, no. 2-3, pp. 337–358, 2000.
- [22] J. Hall, M. Romano, and R. Cristi, "Quaternion feedback regulator for large angle maneuvers of underactuated spacecraft," in *American Control Conference (ACC), 2010*, 30 2010-july 2 2010, pp. 2867 –2872.
- [23] N. Horri and P. Palmer, "Practical implementation of attitude-control algorithms for an underactuated satellite," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 35, no. 1, pp. 40–50, 2012.

- [24] J. R. Chaurais, H. C. Ferreira, J. Y. Ishihara, R. A. Borges, A. M. Kulabukhov, V. A. Larin, and V. V. Belikov, “A High Precision Attitude Determination and Control System for the UYS-1 Nanosatellite,” in *IEEE Aerospace Conference*, 2013, pp. 1 – 12.
- [25] J. R. Chaurais, A. L. G. Souza, G. F. Oliveira, V. A. Larin, V. V. Belikov, and A. M. Kulabukhov, “Attitude Determination, Control and Stabilization of a Nanosatellite Using Reaction Wheels,” *Journal of Dnepropetrovsk University (Traduzido do russo)*, vol. 20, no. 4, pp. 130 – 136, 2012.
- [26] G. F. Oliveira, J. R. Chaurais, A. L. G. Souza, A. M. Kulabukhov, V. A. Larin, and V. V. Belikov, “An Electromagnetic System for Attitude Determination and Control of a Nanosatellite,” *Journal of Dnepropetrovsk University (Traduzido do russo)*, vol. 20, no. 4, pp. 137 – 144, 2012.
- [27] A. L. G. Souza, G. F. Oliveira, J. R. Chaurais, V. V. Belikov, A. M. Kulabukhov, and V. A. Larin, “Design of Ground Communication Antenna Control System for Nanosatellite Mission,” *Journal of Dnepropetrovsk University (Traduzido do russo)*, vol. 20, no. 4, pp. 144 – 152, 2012.
- [28] J. Wertz, *Spacecraft Attitude Determination and Control*, ser. Astrophysics and Space Science Library : Vol 73. Reidel, 1978.
- [29] A. Tewari, *Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modeling and Simulation with MATLAB® and Simulink®*, ser. Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology. Birkhäuser Boston, 2007.
- [30] B. Wie, *Space Vehicle Dynamics and Control*, 2nd ed. Reston, VA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2008.
- [31] J. Crassidis and J. Junkins, *Optimal Estimation of Dynamic Systems*, ser. Chapman & Hall/CRC Applied Mathematics & Nonlinear Science. Taylor & Francis, 2004.
- [32] A. M. C. Garza, “Reaction wheels for picosatellites,” Master’s thesis, Lulea University of Technology, 2009, disponível em: <http://epubl.ltu.se/1653-0187/2009/013/LTU-PB-EX-09013-SE.pdf> (acessado em 05/05/2013).
- [33] J. B. Kuipers, *Quaternions and Rotation Sequences: A Primer with Applications to Orbits, Aerospace and Virtual Reality*. Princeton University Press, 1999.
- [34] “Data Sheet do Sinclair S3S,” Sinclair Interplanetary, disponível em <http://www.sinclairinterplanetary.com/startrackers> (acessado em 12/04/2013).
- [35] “Data Sheet do Comtech MST,” Comtech AeroAstro.
- [36] “Data Sheet do MAI-101,” Maryland Aerospace, Inc., disponível em <http://www.miniadacs.com/linked/mai-101> (acessado em 12/04/2013).

- [37] “Data Sheet do Sinclair RW-0.03,” Sinclair Interplanetary, disponível em <http://www.sinclairinterplanetary.com/reactionwheels> (acessado em 12/04/2013).
- [38] “Data Sheet do AstroFein RW35,” Astro- und Feinwerktechnik Adlershof GmbH, disponível em http://www.astrofein.com/2728/dwnld/admin/Datenblatt_RW35.pdf (acessado em 12/04/2013).
- [39] Y. Ishijima, N. Inaba, A. Matsumoto, K. Terada, H. Yonechi, H. Ebisutani, S. Ukawa, and T. Okamoto, “Design and development of the first quasi-zenith satellite attitude and orbit control system,” in *IEEE Aerospace Conference Proceedings*, 2009.
- [40] T. Inamori, N. Sako, and S. Nakasuka, “Compensation of time-variable magnetic moments for a precise attitude control in nano- and micro-satellite missions,” *Advances in Space Research*, vol. 48, no. 3, pp. 432–440, 2011.
- [41] A. Mohd Poin Keui, M. Fadly, O. Sidek, and M. Md Said, “EKF implementation on S3CEV40 for InnoSAT attitude determination system,” in *International Conference on Computer Applications and Industrial Electronics*, 2011, pp. 373–378.
- [42] Y. Ikeda, T. Kida, and T. Nagashio, “Nonlinear tracking control of rigid spacecraft under disturbance using PD and PID type H_∞ state feedback,” *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 6184–6191, 2011.
- [43] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover, *Robust and Optimal Control*, 1st ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1995.
- [44] S. Kirkpatrick, C. Gelatt Jr., and M. Vecchi, “Optimization by simulated annealing,” *Science*, vol. 220, pp. 671–680, 1983.
- [45] A. Si Mohammed, M. Benyettou, A. Boudjema, S. Chouraqui, Y. Hashida, J. Cooksley, and M. Sweeting, “Alsat-1 first algerian low earth orbit observation microsatellite in orbit,” in *Information and Communication Technologies, 2006. ICTTA '06. 2nd*, vol. 2, 0-0 2006, pp. 2518 –2523.
- [46] J. Lasalle, “Some extensions of liapunov’s second method,” *Circuit Theory, IRE Transactions on*, vol. 7, no. 4, pp. 520 – 527, dec 1960.
- [47] H. Khalil, *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2001.

ANEXOS

A. ANÁLISE DE ESTABILIDADE DO CONTROLADOR CNBQ

Este anexo apresenta a prova de estabilidade do controlador proposto CNBQ. Para isso, são apresentadas as equações de malha fechada do sistema controlado e a análise de estabilidade por Lyapunov.

A.1 EQUAÇÕES DE MALHA FECHADA

Antes de analisar a estabilidade do controlador CNBQ, as equações deste controlador (3.48) são substituídas nas equações do modelo cinemático simplificado (3.39), constituindo o sistema de malha fechada, dado por

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 = & \frac{1}{2} \left(k(q_2q_3 - q_1q_4) + \frac{gq_3}{q_1^2 + q_2^2} (q_2q_4 + q_1q_3) + \right. \\ & \left. + \frac{gk_Dq_3}{2(q_1^2 + q_2^2)} (q_1q_4 - q_2q_3) \right), \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_2 = & \frac{1}{2} \left(-k(q_1q_3 + q_2q_4) + \frac{gq_3}{q_1^2 + q_2^2} (q_2q_3 - q_1q_4) + \right. \\ & \left. + \frac{gk_Dq_3}{2(q_1^2 + q_2^2)} (q_1q_3 + q_2q_4) \right), \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\dot{q}_4 = \frac{1}{2}k(q_1^2 + q_2^2) - \frac{1}{4}gk_Dq_3. \quad (\text{A.3})$$

Considere, também, a variável

$$H_q(t) = q_1^2(t) + q_2^2(t) \quad (\text{A.4})$$

e a sua derivada temporal

$$\begin{aligned} \dot{H}_q &= 2q_1\dot{q}_1 + 2q_2\dot{q}_2, \\ \dot{H}_q &= -kq_4H_q + gq_3^2 + \frac{1}{2}gk_Dq_3q_4. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

A.2 ESTABILIDADE POR LYAPUNOV

Para provar a estabilidade do sistema em malha fechada, considere a análise de estabilidade de Lyapunov. A Figura¹ A.1 ilustra o conceito de energia utilizado para se realizar esta análise.

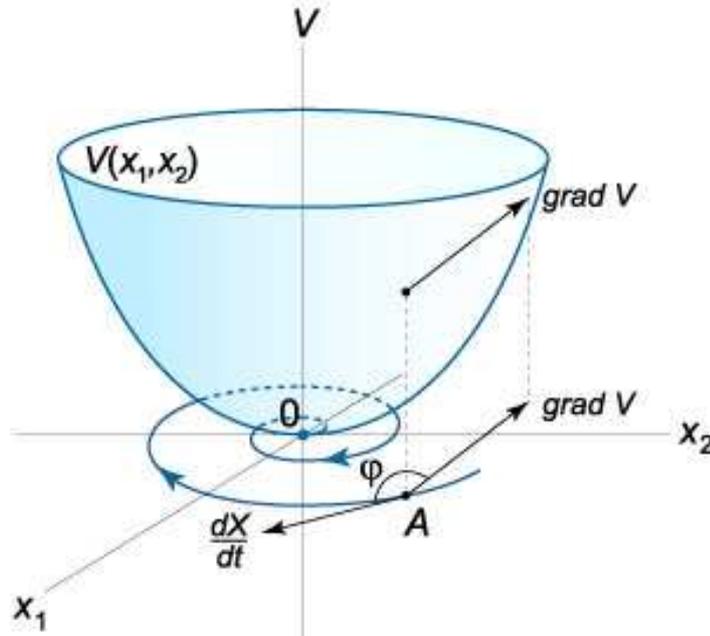


Figura A.1: Análise de estabilidade de Lyapunov.

Esta figura mostra um sistema com dois estados x_1 e x_2 e uma função energia $V(x_1, x_2)$. O sistema entra em equilíbrio quando $x_1 \rightarrow 0$ e $x_2 \rightarrow 0$, a função energia $V > 0$ se anula apenas no ponto de equilíbrio e possui derivada $\dot{V} < 0$. Desta forma, a energia decresce e o sistema converge para o ponto de equilíbrio.

A grande dificuldade desta análise é a determinação da função energia, por não existir uma forma definida dela. Para o caso do CNBQ, considere a função de Lyapunov

$$V(\bar{q}, \omega) = 2(\mathbf{q}^T \mathbf{q} + (1 - q_4)^2) + \frac{1}{2}(\omega - \omega_d)^T (\omega - \omega_d) + \left(\frac{q_3}{H_q}\right)^2 + 2k_D q_3 q_4 + |k_D| q_3^2 \quad (\text{A.6})$$

$$= 4(1 - q_4) + \frac{1}{2}(\omega - \omega_d)^T (\omega - \omega_d) + \left(\frac{q_3}{H_q}\right)^2 + 2k_D q_3 q_4 + |k_D| q_3^2. \quad (\text{A.7})$$

A equação (A.6) é utilizada para melhor visualizar o ponto de equilíbrio em que $V \rightarrow 0$, enquanto que a equação (A.7) é utilizada para os cálculos de \dot{V} .

¹Figura disponível em: <http://www.math24.net/method-of-lyapunov-functions.html> (acessado em 06/05/2013)

Perceba que, como $|q_4| \leq 1$ e $\text{sign}(k_D) = \text{sign}(q_3) \text{sign}(q_4)$ (equação (3.44)), $V > 0$. Além disso, $V \rightarrow 0$ somente quando $\boldsymbol{\omega} \rightarrow \boldsymbol{\omega}_d$, $\frac{q_3}{H_q} \rightarrow 0$, $q_3 \rightarrow 0$ e $q_4 \rightarrow 1$, o que implica em $q_1 \rightarrow 0$, $q_2 \rightarrow 0$ e $\boldsymbol{\omega}_d \rightarrow 0$ (de acordo com a equação (3.48)) e, assim, $\boldsymbol{\omega} \rightarrow 0$. Resumidamente, $V \rightarrow 0$ somente quando $(q_1, q_2, q_3, q_4, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \rightarrow (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$.

Para provar a estabilidade, a derivada temporal desta função é dada por

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 4(-\dot{q}_4) + \frac{1}{2}2(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_d)^T (\dot{\boldsymbol{\omega}} - \dot{\boldsymbol{\omega}}_d) + \frac{2q_3}{H_q} \left(\frac{\dot{q}_3 H_q - q_3 \dot{H}_q}{H_q^2} \right) + 2k_D (\dot{q}_3 q_4 + q_3 \dot{q}_4) + \\ &\quad + 2|k_D| q_3 \dot{q}_3, \\ \dot{V} &= -2kH_q + gk_D q_3 - \frac{gq_3^2}{H_q^2} + \frac{2kq_3^2 q_4}{H_q^2} - \frac{2gq_3^4}{H_q^3} - \frac{gk_D q_3^3 q_4}{H_q^3} - gk_D q_3 q_4 + \\ &\quad + k_D q_3 k H_q - \frac{1}{2} g k_D^2 q_3^2 - g|k_D| q_3^2 + \\ &\quad + (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_d)^T \left(-\mathbf{I}^{-1} \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}) - \mathbf{K} (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_d) \right),\end{aligned}\tag{A.8}$$

onde $\mathbf{K} = \text{diag}(K_1, K_2, 0)$, $K_1 > 0$ e $K_2 > 0$.

Sob a condição de momento angular total nulo (3.35), a derivada de V pode ser simplificada para

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 + \dot{V}_4,$$

onde

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= -\frac{2gq_3^4}{H_q^3} - \frac{gk_D q_3^3 q_4}{H_q^3} - \frac{1}{2} g k_D^2 q_3^2, \\ \dot{V}_2 &= -\frac{gq_3^2}{H_q^2} + \frac{2kq_3^2 q_4}{H_q^2}, \\ \dot{V}_3 &= -2kH_q + gk_D q_3 - gk_D q_3 q_4 + k_D q_3 k H_q - g|k_D| q_3^2, \\ \dot{V}_4 &= -(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_d)^T \mathbf{K} (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_d).\end{aligned}$$

Como $k > 0$, $g > 0$ e $k_D q_3 q_4 \geq 0$ (equação (3.44)), $\dot{V}_1 \leq 0$.

Considere a restrição $g \geq 2k$. Como $2k \geq 2kq_4$ e $-\frac{gq_3^2}{H_q^2} \leq 0$, $\frac{gq_3^2}{H_q^2} \geq \frac{2kq_3^2 q_4}{H_q^2}$ e, então, $\dot{V}_2 \leq 0$.

Agora considere a restrição $|k_D| \leq \frac{2k}{k+g}$. Multiplicando ambos os lados por H_q e rearranjando os termos, esta restrição se torna

$$|k_D| H_q (k + g) - 2k H_q \leq 0.$$

Somando e subtraindo o termo $g|k_D|q_3^2$, a desigualdade se torna

$$|k_D|kH_q + g|k_D|H_q + g|k_D|q_3^2 - 2kH_q - g|k_D|q_3^2 \leq 0. \quad (\text{A.9})$$

Como $|q_3| \leq 1$, $k_Dq_3kH_q < |k_D|kH_q$, $g|k_D||q_3| < g|k_D|$ e $q_3^2 + H_q = 1 - q_4^2$, a desigualdade (A.9) se torna

$$k_Dq_3kH_q + g|k_D||q_3|(1 - q_4^2) - 2kH_q - g|k_D|q_3^2 \leq 0.$$

Como $|q_4| \leq 1$, $g|k_D||q_3|q_4^2 < g|k_D||q_3|q_4$,

$$k_Dq_3kH_q + gk_Dq_3 - gk_Dq_3q_4 - 2kH_q - g|k_D|q_3^2 \leq 0.$$

Assim, $\dot{V}_3 \leq 0$.

Por fim, $\dot{V}_4 \leq 0$, pois $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ e \dot{V}_4 é um termo quadrático. Então, $\dot{V} \leq 0$. Como \dot{V} pode ser nulo, o Princípio de LaSalle, proposto em [46], pode ser utilizado para se provar a estabilidade do sistema. Este teorema é aqui traduzido a partir de [47]. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [46] e em [47]. Para isso, considere um sistema autônomo descrito por

$$\dot{x} = f(x), \quad (\text{A.10})$$

onde $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um mapeamento localmente Lipschitz de um domínio $D \subset \mathbb{R}^n$ em \mathbb{R}^n .

Teorema A.2.1. (Princípio de Invariância de LaSalle) *Seja $\Omega \subset D$ um conjunto compacto positivo invariante com respeito ao sistema (A.10). Seja $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável tal que $\dot{V}(x) \leq 0$ em Ω . Seja E o conjunto de todos os pontos em Ω em que $\dot{V}(x) = 0$. Seja M o maior conjunto invariante em E . Então toda solução iniciada em Ω se aproxima de M quando $t \rightarrow \infty$. ■*

Assim, torna-se necessário analisar os pontos em que $\dot{V} \rightarrow 0$. Considerando $\mathbf{a} = \left(H_q, q_3, q_4, \frac{q_3}{H_q}\right)$, $\dot{V}_1 \rightarrow 0$ para as seguintes três configurações:

- $\mathbf{a}_1 \rightarrow (1, 0, 0, 0)$,
- $\mathbf{a}_2 \rightarrow (0, 0, 1, 0)$,
- $\mathbf{a}_3 \rightarrow (0, 0, -1, 0)$.

Por sua vez, $\dot{V}_2 \rightarrow 0$ para as três configurações \mathbf{a} . Porém, $\dot{V}_3 \rightarrow 0$ somente para os pontos de equilíbrio \mathbf{a}_2 e \mathbf{a}_3 . Para \mathbf{a}_1 , $\dot{V}_3 \rightarrow -2k$ e, como $k > 0$, \dot{V}_3 não tende a zero. Por fim, $\dot{V}_4 \rightarrow 0$ somente quando $\boldsymbol{\omega} \rightarrow \boldsymbol{\omega}_d$.

Assim, $\dot{V} \leq 0$ e $\dot{V} \rightarrow 0$ quando $H_q \rightarrow 0$, $\boldsymbol{\omega} \rightarrow \boldsymbol{\omega}_d$, $\frac{q_3}{H_q} \rightarrow 0$, $q_3 \rightarrow 0$ e $q_4 \rightarrow \pm 1$. Além disso, de acordo com a equação (3.48), quando o sistema converge para uma destas configurações, $\boldsymbol{\omega}_d \rightarrow 0$ e $\boldsymbol{\omega} \rightarrow 0$. De acordo com o Princípio de LaSalle (Teorema A.2.1), o sistema pode convergir para o ponto de equilíbrio com $q_4 \rightarrow -1$ ao invés de $q_4 \rightarrow 1$ (ponto em que $V \rightarrow 0$). Porém, ambas as configurações correspondem à mesma atitude, o que conclui a prova da estabilidade.