Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Uma Introdução aos T-espaços Limites de $F\langle X\rangle$

Lauro Maycon Fernandes Ferreira

Brasília
2013

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Uma Introdução aos T-espaços Limites de $F\langle X\rangle$

Lauro Maycon Fernandes Ferreira

Dissertação apresentada como requisito parcial
para conclusão do Mestrado em Matemática

Orientador
Prof. Dr. Dimas José Gonçalves

Brasília
2013

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Uma Introdução aos T-espaços Limites de $F\langle X\rangle$

por

Lauro Maycon Fernandes Ferreira*

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 19 de fevereiro de 2013.

Comissão Examinadora:

Dimas José Gonçalves

Prof. Dr. Dimas José Gonçalves (Orientador)
MAT/UNB

Prof. Dr. Humberto Luiz Talpo (Membro Externo)
DM/UFSCAR

José Antônio O. Freitas

Prof. Dr. José Antônio de Oliveira Freitas (Membro Interno)
MAT/UNB

* O autor foi bolsista CNPq durante a elaboração desta dissertação.

Resumo

Sejam $\mathbb{F}$ um corpo infinito e G a álgebra de Grassmann infinitamente gerada. Nesta dissertação descrevemos os polinômios centrais de G, denotado por $C(G)$, quando $\mathrm{car}(F) \neq 2$. Mostramos que $C(G)$ é T-espaço limite quando $\mathrm{car}(F) > 2$ e finitamente gerado quando $\mathrm{car}(F) = 0$. O segundo resultado principal desta dissertação é a exibição de infinitos T-espaços limites quando $\mathrm{car}(F) > 2$.

Os resultados citados acima foram extraídos dos artigos [5] e [11].

Palavras-chave: PI-álgebras, identidades polinomiais, polinômios centrais, T-espaços.

Abstract

Let $\mathbb{F}$ be an infinite field and let G be the generated infinite Grassmann algebra. In this dissertation we describe the central polynomials of G, denoted by $C(G)$, when $\text{char}(F) \neq 2$. We show that $C(G)$ is limit T-space when $\text{char}(F) > 2$ and finitely generated when $\text{car}(F) = 0$. The second main result of this dissertation is the apresentation of infinite limit T-spaces.

The results cited above were extract from the papers [5] and [11].

Keywords: PI-algebras, polynomials identities, central polynomials, T-space.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me dar a cada dia a perseverança e a força para continuar. Agradeço sobretudo, pelas oportunidades que me deu e continua a dar.

Agradeço à minha mãe Ana, ao meu pai Rubens, aos meus irmãos Jackeline e Anderson e a minha namorada Rynelk, pelo apoio e por entender minha ausência nestes últimos anos.

Agradeço ao meu orientador, professor Dimas José Golçalves, pela paciência, atenção, dedicação e por ter me apresentado de forma interessante a PI-álgebra.

Agradeço ao professores do programa de Pós-graduação em matemática da UnB, que contribuiram para minha formação, em especial: Irina Sviridova e Elves Alves de Barros e Silva.

Agradeço ao professores José Antônio e Humberto Luíz, por terem aceito avaliar meu trabalho e pelas sugestões dadas.

Agradeço ao professor Antonio Carlos Tamarozzi, pelo incentivo e amizade nestes últimos 6 anos.

Agradeço aos meus colegas e amigos de graduação e Pós-gradução, pela atenção, conselhos e companheirismo, em especial: Alexandre, Alex (Teló), Fábio, Emerson, Ilana, Keidna, Marco Eduardo, Mayer, Mayra, Otto, Raildo Lima, Renata, Saieny, Tiago, Vinícius Martins, Vinícius Elias, Valdiego.

Agradeço ao meu amigo e colega de moradia Luis Aramis, pela amizade e convivência.

Agradeço ao Cnpq, pelo apoio financeiro.

Sumário

Introdução

O assunto estudado nesta dissertação está inserido na *Teoria de PI-álgebras*, isto é, álgebras que satisfazem identidades polinomiais. Mais especificamente, foi feito um estudo do tema *Polinômios Centrais* e também de *T-espaços*. Faremos abaixo um resumo dos termos e resultados principais desta dissertação.

Sejam $\mathbb{F}$ um corpo, $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto enumerável e $\mathbb{F}\langle X\rangle$ a $\mathbb{F}$-álgebra associativa livre com unidade, livremente gerada por X. Um *T-ideal* de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ é um ideal fechado por todo endomorfismo de $\mathbb{F}\langle X\rangle$. Similarmente, um *$T$-espaço* é um subespaço vetorial de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ fechado por todo endomorfismo de $\mathbb{F}\langle X\rangle$.

Seja I um T-ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle$. Um subconjunto $S \subset I$ *gera I como um T-ideal* se I é o menor T-ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ que contém S. Um T-espaço de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ gerado por S (como um T-espaço) é definido de uma maneira similar. Pode ser mostrado que o T-ideal (T-subespaço) gerado por S é o ideal (subespaço vetorial) gerado por todos polinômios

$$f(g_1, \ldots, g_m),$$

onde $f = f(x_1, \ldots, x_m) \in S$ e $g_i \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ para todo i.

Nós sugerimos ao leitor os livros [7, 8, 10] para um estudo mais detalhado a respeito de T-ideais e sugerimos [4, 5, 13, 12] para o estudo de T-espaços.

Se $\mathbb{F}$ é um corpo de característica 0, então todo T-ideal em $\mathbb{F}\langle X\rangle$ é finitamente gerado (como um T-ideal); esse é um famoso resultado de Kemer [14, 15] que resolv eu o Problema de Specht. Além disso, sobre tal corpo $\mathbb{F}$, todo T-espaço de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ é finitamente gerado; isso foi provado recentemente por Shchigolev [19]. No caso em que o corpo $\mathbb{F}$ é de característica $p > 0$, existem T-ideais e T-espaços de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ que não são finitamente gerados.

Um T-espaço V^* de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ é chamado *limite* se todo T-espaço maior $W \supsetneq V^*$ é finitamente gerado como um T-espaço mas V^* não é. Segue do Lema de Zorn que se um T-subespaço V não é finitamente gerado, então ele está contido em algum T-subespaço limite V^*.

A dissertação está dividida da seguinte maneira:

No Capítulo 1 estudamos os conceitos básicos da Teoria de PI-álgebras, conceitos necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

No Capítulo 2 reservamos uma seção para falar das identidades polinomiais da álgebra de Grassmann G. Estudamos um resultado de Krakowski e Regev [17] (ver também Giambruno e Koshlukov [9]) que descreve as identidades polinomiais de G quando o corpo $\mathbb{F}$ é infinito. Depois reservamos uma seção para falar dos polinômios centrais de G. Estudamos um resultado de Brandão Jr., Koshlukov, Krasilnikov e Silva [5] que descreve os polinômios centrais de G, denotado por $C(G)$, quando $\mathbb{F}$ é infinito. Nessa seção também é mostrado que $C(G)$ é um T-espaço limite.

No Capítulo 3 estudamos o artigo de Gonçalves, Krasilnikov e Sviridova [11], o qual trata da exibição de infinitos T-espaços limites.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

1.1 PI-álgebras

O objetivo desta seção é fornecer ao leitor a definição de PI-álgebra e alguns exemplos a respeito de tal tema.

Toda álgebra considerada nesta dissertação, salvo menção contrária, terá como corpo base um corpo infinito $\mathbb{F}$. Quando nos referirmos a uma álgebra A sobre $\mathbb{F}$, diremos simplesmente que A é uma álgebra. Tais álgebras serão sempre associativas e unitárias.

Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto enumerável. Chamamos de variáveis (letras) os elementos

$$x_1, x_2, \ldots$$

e dizemos que

$$m = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

é um monômio (palavra) de comprimento k. Denotaremos por $\mathbb{F}\langle X \rangle$ a álgebra associativa livre, livremente gerada por X. Uma base de $\mathbb{F}\langle X \rangle$ como espaço vetorial é o conjunto de todos os monômios e a multiplicação em $\mathbb{F}\langle X \rangle$ é definida a partir do produto dos elementos da base:

$$(x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m})(x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_n}) = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m} x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_n}.$$

Os elementos de $\mathbb{F}\langle X \rangle$ são chamados de polinômios, e se f é um elemento em $\mathbb{F}\langle X \rangle$, escreveremos $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ para indicar que somente as variáveis $x_1, \ldots, x_n$ aparecem em f.

Definimos o grau de um monômio u como sendo o seu comprimento e o denotamos por $\deg u$. Também definimos o grau de u na variável x_i como sendo o número de vezes que x_i aparece em u e denotamos $\deg_{x_i} u$. Analogamente, o grau de $f = f(x_1, \ldots, x_n)$, denotado por $\deg f$, é o maior dos números $\deg u$ para u monômio de f, e o grau de f em x_i, denotado por $\deg_{x_i} f$, é o maior dos números $\deg_{x_i} u$, onde u é um monômio de f.

Definição 1.1.1. *Sejam A uma álgebra e $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X \rangle$. Se para todos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$*

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0,$$

dizemos que f é uma identidade polinomial de A.

Note que o polinômio trivial $f = 0$ é uma identidade polinomial para toda álgebra.

Definição 1.1.2. *Se A é uma álgebra que satisfaz uma identidade polinomial não trivial, então dizemos que A é uma PI-álgebra.*

Antes de fornecermos alguns exemplos de PI-álgebras, fixaremos algumas notações. Sejam a e b elementos quaisquer de uma álgebra A. Definimos o comutador de a e b por

$$[a, b] = ab - ba.$$

Recursivamente, podemos definir o comutador de comprimento n da seguinte maneira:

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = [[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}], a_n],$$

onde $a_i \in A$. Por cálculo direto podemos mostrar que

$$[a_1, a_2, a_3] + [a_2, a_3, a_1] + [a_3, a_1, a_2] = 0, \text{ (Identidade de Jacobi)} \tag{1.1}$$

para quaisquer $a_1, a_2, a_3 \in A$ e

$$[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b \quad \text{e} \quad [a, bc] = b[a, c] + [a, b]c. \tag{1.2}$$

Por indução sobre n, a primeira identidade de (1.2) fica

$$[a_1 a_2 \cdots a_n, c] = \sum_{i=1}^{n} a_1 \cdots a_{i-1} [a_i, c] a_{i+1} \cdots a_n. \tag{1.3}$$

Exemplo 1. *Se A é uma álgebra comutativa, então o polinômio*

$$f(x, y) = [x, y]$$

é uma identidade polinomial de A. Portanto A é uma PI-álgebra.

Definição 1.1.3. *Defina*

$$St_n(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{\sigma\in S_n}(sgn\sigma)x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)},$$

onde S_n é o grupo das permutações do conjunto $\{1,\ldots,n\}$ e $(sgn\sigma)$ é o sinal de σ. St_n é chamado de polinômio Standard de grau n.

Segue da definição do polinômio Standard as seguintes propriedades:

1) Se um monômio

$$x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(j)}\cdots x_{\sigma(i)}\cdots x_{\sigma(n)}$$

aparece em St_n com coeficiente ∓ 1, então

$$x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(i)}\cdots x_{\sigma(j)}\cdots x_{\sigma(n)}$$

aparece em St_n com coeficiente ± 1;

2) $St_n(x_1,\ldots,y,\ldots,y,\ldots,x_n)=0$;

3) $St_n(x_1,\ldots,\alpha x_j,\ldots,x_n)=\alpha St_n(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n)$, onde $\alpha\in\mathbb{F}$;

4) $St_n(x_1,\ldots,y+z,\ldots,x_n) = St_n(x_1,\ldots,y,\ldots,x_n)+St_n(x_1,\ldots,z,\ldots,x_n)$, onde $y,z\in X=\{x_1,x_2,\ldots\}$.

Exemplo 2. *Se A é uma álgebra de dimensão finita, então A é PI-álgebra. Se $dimA<n$, então St_n é uma identidade polinomial para A.*

Demonstração: Seja $\{e_1,\ldots,e_m\}$ uma base para A. Logo $m<n$. Se $a_1,\ldots,a_n$ são elementos quaisquer de A, devemos provar que $St_n(a_1,\ldots,a_n)=0$. Como $a_i\in A$, temos

$$a_i=\sum_{j_i=1}^{m}\alpha_{ij_i}e_{j_i}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}St_n(a_1,\ldots,a_n) &= St_n(\sum_{j_1=1}^{m}\alpha_{1j_1}e_{j_1},\ldots,\sum_{j_n=1}^{m}\alpha_{nj_n}e_{j_n})\\ &= \sum_{j_1=1}^{m}\alpha_{1j_1}\cdots\sum_{j_n=1}^{m}\alpha_{nj_n}St_n(e_{j_1},\ldots,e_{j_n})\\ &= 0\end{aligned}$$

Observe que a segunda igualdade segue das Propriedades 3) e 4) anteriores e a terceira igualdade segue da Propriedade 2). □

Exemplo 3. *O polinômio Standard de grau n^2+1 é uma identidade polinomial para $M_n(\mathbb{F})$. Em particular St_5 é uma identidade para $M_2(\mathbb{F})$.*

Observação 1. *Chamamos a atenção do leitor para o fato que a álgebra $M_n(\mathbb{F})$ não satisfaz identidades polinomiais de grau $< 2n$. Além disso, o famoso Teorema de Amitsur-Levitzki (ver [1]) diz que o polinômio Standard St_{2n} é uma identidade polinomial para $M_n(\mathbb{F})$.*

Exemplo 4. *O polinômio de Hall*

$$f(x_1,x_2,x_3) = [[x_1,x_2]^2,x_3]$$

é uma identidade polinomial para $M_2(\mathbb{F})$.

Demonstração: Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e denote por $p(t)$ seu polinômio característico:

$$\begin{aligned} p(t) = \det(tI_2 - A) &= \begin{vmatrix} t-a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & t-a_{22} \end{vmatrix} = (t-a_{11})(t-a_{22}) - a_{12}a_{21} \\ &= t^2 - (a_{11}+a_{22})t + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= t^2 - \operatorname{tr}(A)t + \det(A). \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Cayley-Hamilton temos

$$p(A) = 0 = A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2.$$

Se $A_1, A_2 \in M_2(\mathbb{F})$, então para $A = [A_1, A_2]$ temos

$$[A_1,A_2]^2 = +\operatorname{tr}([A_1,A_2])[A_1,A_2] - \det([A_1,A_2])I_2.$$

Uma vez que

$$\operatorname{tr}([A_1,A_2]) = \operatorname{tr}(A_1A_2 - A_2A_1) = \operatorname{tr}(A_1A_2) - \operatorname{tr}(A_2A_1) = 0,$$

temos

$$[A_1,A_2]^2 = -\det([A_1,A_2])I_2 = \lambda I_2,$$

onde $\lambda = -\det([A_1,A_2])$. Se $A_3 \in M_2(\mathbb{F})$ então $[\lambda I_2, A_3] = 0$ e portanto

$$[[A_1, A_2]^2, A_3] = 0,$$

para quaisquer $A_1, A_2, A_3 \in M_2(\mathbb{F})$. □

Exemplo 5. *Seja V um espaço vetorial de dimensão infinita com base $\{e_1, e_2, \ldots\}$. A álgebra de Grassmann (ou álgebra Exterior) de V, denotada por G, é a álgebra gerada por $\{1, e_1, e_2, \ldots\}$ que satisfaz a seguinte relação:*

$$e_i e_j = -e_j e_i$$

para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$. O polinômio $f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3]$ é uma identidade polinomial para G.

Demonstração: Como f é multilinear é suficiente mostrar que $f(a_1, a_2, a_3) = 0$, onde a_1, a_2, a_3 são elementos quaisquer da base de G.

Uma base para tal álgebra é o conjunto

$$\{1\} \cup \{e_{i_1} e_{i_2} \ldots\ e_{i_m} \mid m \in \mathbb{N},\ i_1 < i_2 < \cdots < i_m\}.$$

Sejam a_1, a_2 elementos da base de G. Então

$$a_1 = e_{i_1} \cdots e_{i_m} \quad \text{e} \quad a_2 = e_{j_1} \cdots e_{j_n}.$$

Uma vez que $e_i e_j = -e_j e_i$, temos

$$[a_1, a_2] = [e_{i_1} \cdots e_{i_m}, e_{j_1} \cdots e_{j_n}] = (1 - (-1)^{mn}) e_{i_1} \cdots e_{i_m} e_{j_1} \cdots e_{j_n}.$$

Logo, $[a_1, a_2]$ está no centro de G e portanto $[[a_1, a_2], a_3] = 0$, onde a_3 é um elemento qualquer da base de G. Assim, f é uma identidade polinomial para G. □

Como podemos ver, são muitas as álgebras que satisfazem uma identidade polinomial. Agora surge a seguinte questão: Será que toda álgebra é uma PI-álgebra? A resposta é não. A álgebra $\mathbb{F}\langle X\rangle$, por exemplo, não é PI-álgebra. Para ver isto, suponhamos que $f(x_1, \ldots, x_n)$ seja uma identidade polinomial não nula de $\mathbb{F}\langle X\rangle$. Assim,

$$f(f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)) = 0,$$

onde $f_i(x_i) = x_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Absurdo.

Veremos agora outro exemplo: Seja A a álgebra

$$A = M_1(\mathbb{F}) \times M_2(\mathbb{F}) \times \cdots \times M_n(\mathbb{F}) \times \cdots$$

com operações definidas coordenada a coordenada. Se $f(x_1, \ldots, x_m)$ é uma identidade de grau d para A, então f é identidade polinomial de grau d para cada $M_n(\mathbb{F})$. De fato, isso segue da igualdade

$$f((a_{1n})_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (a_{mn})_{n\in\mathbb{N}}) = (f(a_{1n}, \ldots, a_{mn}))_{n\in\mathbb{N}},$$

onde $(a_{in})_{n\in\mathbb{N}} \in A$. Assim, para $n \in \mathbb{N}$ com $2n > d$ temos um absurdo pela Observação 1.

1.2 T-ideais

Nesta seção caracterizamos o conjunto das identidades polinomiais de uma álgebra. Ele é um T-ideal. Forneceremos esta definição e algumas propriedades de extensão de endomorfismos.

De agora em diante, denotaremos por $T(A)$ o conjunto das identidades polinomiais de uma álgebra A.

Problema 1. *Dado um conjunto S de identidades polinomiais de A, como construir novas identidades a partir de S?*

(a) Se $\alpha \in \mathbb{F}$ e $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$, então $\alpha f(x_1, \ldots, x_n) \in T(A)$;

(b) Se $f(x_1, \ldots, x_n), g(x_1, \ldots, x_m) \in S$, então

$$f(x_1, \ldots, x_n) + g(x_1, \ldots, x_m) \in T(A);$$

(c) Se $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$ e $g(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{F}\langle X \rangle$, então

$$f(x_1, \ldots, x_n)g(x_1, \ldots, x_m) \in T(A)$$

e

$$g(x_1, \ldots, x_m)f(x_1, \ldots, x_n) \in T(A);$$

(d) Se $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$ e $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{F}\langle X \rangle$, então

$$f(g_1, \ldots, g_n) \in T(A).$$

Definição 1.2.1. *Seja B uma álgebra e I um subespaço vetorial de B. Dizemos que I é um ideal à esquerda se,*

$$bi \in I$$

para todo $b \in B$ e $i \in I$. Dizemos que I é um ideal à direita se,

$$ib \in I$$

para todo $b \in B$ e $i \in I$. Dizemos que I é um ideal ou ideal bilateral se, I for simultaneamente ideal à esquerda e à direita.

Exemplo 6. *Se A é uma PI-álgebra, então o conjunto $T(A)$ é um ideal de $\mathbb{F}\langle X \rangle$.*

Demonstração: Segue dos itens (a),(b) e (c) anteriores. □

Definição 1.2.2. *Seja I um ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle$. Dizemos que I é um T-ideal se, para todos $f(x_1,\dots,x_n)\in I$ e quaisquer $g_1,\dots,g_n\in\mathbb{F}\langle X\rangle$ temos $f(g_1,\dots,g_n)\in I$.*

Exemplo 7. *Se A é uma PI-álgebra, então $T(A)$ é um T-ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle$.*

Demonstração: Consequência do Exemplo 6 e item (d). $\square$

Em contraste com Exemplo 7, podemos fazer a seguinte pergunta: Se I é um T-ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle$, será que $I=T(A)$ para alguma álgebra A?

Definição 1.2.3. *Seja A uma álgebra e I um ideal de A. Defina a relação de equivalência em A da seguinte maneira:*

$$a\sim b\Longleftrightarrow (a-b)\in I.$$

Denotamos a classe que contém $a\in A$ por $\overline{a}$. Observe que:

$$\overline{a}=a+I=\{a+i\mid i\in I\}.$$

Denote por A/I o conjunto das classes de equivalência. Defina as seguintes operações em A/I:

- $\overline{a_1}+\overline{a_2}=\overline{a_1+a_2}$;
- $\alpha\overline{a_1}=\overline{\alpha a_1}$;
- $\overline{a_1}\cdot\overline{a_2}=\overline{a_1a_2}$;

onde $\alpha\in\mathbb{F}$ e $a_1,a_2\in A$. Com essas operações, A/I é uma álgebra.

Em resposta a questão anterior temos o seguinte:

Lema 1.2.1. *Seja I um T-ideal. Então*

$$I=T(\mathbb{F}\langle X\rangle/I).$$

Demonstração: Seja $f(x_1,\dots,x_n)\in I$. Considere n elementos quaisquer $\overline{g_1},\overline{g_2},\dots,\overline{g_n}$ no quociente $\mathbb{F}\langle X\rangle/I$. Temos

$$f(\overline{g_1},\dots,\overline{g_n})=\overline{f(g_1,\dots,g_n)}=\overline{0},$$

pois $f(g_1,\dots,g_n)\in I$. Logo $f\in T(\mathbb{F}\langle X\rangle/I)$.

Tome agora $f(x_1,\dots,x_n)\in T(\mathbb{F}\langle X\rangle/I)$. Como $\overline{x_1},\dots,\overline{x_n}\in\mathbb{F}\langle X\rangle/I$ temos

$$\overline{0}=f(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n})=\overline{f(x_1,\dots,x_n)}$$

e portanto $f(x_1,\dots,x_n)\in I$. $\square$

Definição 1.2.4. *Sejam A e B duas álgebras. Uma transformação linear $\rho : A \longrightarrow B$ é chamada de homomorfismo se,*

$$\rho(a_1 a_2) = \rho(a_1)\rho(a_2)$$

para quaisquer $a_1, a_2 \in A$. Se o homomorfismo ρ for bijetivo, dizemos que ρ é um isomorfismo. Neste caso, também dizemos que A e B são álgebras isomorfas. Se $\rho : A \longrightarrow A$ é um homomorfismo, dizemos que ρ é um endomorfismo.

Lema 1.2.2. *Seja A uma álgebra. Se $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ é uma sequência de elementos em A, então existe um único homomorfismo*

$$\rho : \mathbb{F}\langle X\rangle \longrightarrow A$$

tal que

$$\begin{cases} \rho(x_1) & = & a_1 \\ \rho(x_2) & = & a_2 \\ & \vdots & \\ \rho(x_n) & = & a_n \\ & \vdots & \end{cases}$$

Demonstração: A função $\rho : \mathbb{F}\langle X\rangle \longrightarrow A$ definida por

$$\rho(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(a_1, \ldots, a_n)$$

é um homomorfismo e satisfaz

$$\rho(x_i) = a_i, \text{ para todo } i.$$

Suponha que exista outro homomorfismo ψ com tal propriedade, isto é ,

$$\psi(x_i) = a_i.$$

Se $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X\rangle$, então

$$\begin{aligned} \psi(f(x_1, \ldots, x_n)) &= f(\psi(x_1), \ldots, \psi(x_n)) \\ &= f(a_1, \ldots, a_n) \\ &= \rho(f(x_1, \ldots, x_n)). \end{aligned}$$

Logo $\psi = \rho$. □

Observação 2. *Se $\rho : \mathbb{F}\langle X\rangle \longrightarrow \mathbb{F}\langle X\rangle$ é um endomorfismo, então*

$$\rho(f(x_1,\ldots,x_n)) = f(\rho(x_1),\ldots,\rho(x_n)).$$

Corolário 1.2.3. *Fixe $n \in \mathbb{N}$. Se $g_1,\ldots,g_n \in \mathbb{F}\langle X\rangle$, então existe um endomorfismo $\rho : \mathbb{F}\langle X\rangle \longrightarrow \mathbb{F}\langle X\rangle$ tal que*

$$\begin{cases} \rho(x_1) & = & g_1 \\ & \vdots & \\ \rho(x_n) & = & g_n \end{cases}.$$

Demonstração: De fato, pelo lema anterior, existe um endomorfismo ρ tal que

$$\begin{cases} \rho(x_1) & = & g_1 \\ & \vdots & \\ \rho(x_n) & = & g_n \\ \rho(x_{n+1}) & = & 0 \\ \rho(x_{n+2}) & = & 0 \\ & \vdots & \end{cases}$$

□

Proposição 1.2.4. *Seja I um ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle$. Então I é um T-ideal se, e somente se, $\rho(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo ρ de $\mathbb{F}\langle X\rangle$.*

Demonstração:($\Rightarrow$) Seja ρ um endomorfismo de $\mathbb{F}\langle X\rangle$. Se $f(x_1,\ldots,x_n) \in I$, então

$$\rho(f(x_1,\ldots,x_n)) = f(\rho(x_1),\ldots,\rho(x_n)) \in I.$$

($\Leftarrow$) Seja $f(x_1,\ldots,x_n) \in I$ e $g_1,\ldots,g_n \in \mathbb{F}\langle X\rangle$. Queremos provar que $f(g_1,\ldots,g_n) \in I$. Considere um endomorfismo ρ de $\mathbb{F}\langle X\rangle$, tal que

$$\begin{cases} \rho(x_1) & = & g_1 \\ & \vdots & \\ \rho(x_n) & = & g_n \end{cases}.$$

Logo, $f(g_1,\ldots,g_n) = f(\rho(x_1),\ldots,\rho(x_n)) = \rho(f(x_1,\ldots,x_n)) \in I$. □

Definição 1.2.5. *Seja A uma álgebra e $S \subseteq A$. O ideal gerado por S é o menor ideal de A que contém S.*

Observe que o ideal gerado por S existe, pois é a intersecção de todos os ideais de A que contêm S.

Lema 1.2.5. *Seja A uma álgebra e $S \subseteq A$. O ideal gerado por S é o subespaço vetorial de A gerado pelos elementos*

$$a_1 s a_2, \tag{1.4}$$

onde $a_1, a_2 \in A$ e $s \in S$.

Demonstração: Seja I o espaço vetorial gerado pelos elementos da forma (1.4). Temos que I é um ideal que contém S. Agora, se J é um ideal qualquer que contém S, então é claro que J contém os elementos da forma (1.4). Portanto $I \subseteq J$. Logo I é o menor ideal que contém S. □

Definição 1.2.6. *Seja $S \subseteq \mathbb{F}\langle X\rangle$. O T-ideal gerado por S é o menor T- ideal que contém S. Denotamos ele por $\langle S\rangle^T$.*

Proposição 1.2.6. *Seja $S \subseteq \mathbb{F}\langle X\rangle$. O T-ideal gerado por S é o ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ gerado pelos elementos*

$$f(g_1, \ldots, g_n),$$

onde $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$ e $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{F}\langle X\rangle$.

Demonstração: Pelo Lema 1.2.5 o ideal gerado pelos elementos $f(g_1, \ldots, g_n)$ é o espaço vetorial gerado pelos elementos

$$g_0 f(g_1, \ldots, g_n) g_{n+1}, \tag{1.5}$$

onde $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$ e $g_0, \ldots, g_{n+1} \in \mathbb{F}\langle X\rangle$. Denotando por W o espaço vetorial gerado pelos elementos da forma (1.5), mostraremos que W é um T-ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle$. Para isso, é suficiente mostrar que $\forall\ \varphi \in End(\mathbb{F}\langle X\rangle)$ vale

$$\varphi(g_0 f(g_1, \ldots, g_n) g_{n+1}) \in W.$$

Mas

$$\begin{aligned} \varphi(g_0 f(g_1, \ldots, g_n) g_{n+1}) &= \varphi(g_0)\varphi(f(g_1, \ldots, g_n))\varphi(g_{n+1}) \\ &= \underbrace{\varphi(g_0)}_{\in \mathbb{F}\langle X\rangle} f(\varphi(g_1), \ldots, \varphi(g_n)) \underbrace{\varphi(g_{n+1})}_{\in \mathbb{F}\langle X\rangle}. \end{aligned}$$

Logo $\varphi(g_0 f(g_1, \ldots, g_n) g_{n+1}) \in W$, $\forall\ \varphi \in End(\mathbb{F}\langle X\rangle)$. É claro que se U é um T-ideal que contém S, então $W \subseteq U$. Portanto $W = \langle S\rangle^T$. □

Corolário 1.2.7. *Se $S \subseteq \mathbb{F}\langle X\rangle$, então o T-ideal gerado por S é o espaço vetorial gerado pelos elementos*

$$g_0 f(g_1, \ldots, g_n) g_{n+1}$$

onde $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$ e $g_0, \ldots, g_{n+1} \in \mathbb{F}\langle X\rangle$.

Demonstração: Consequência direta do Lema 1.2.5 e da Proposição 1.2.6. □

1.3 Polinômios multi-homogêneos

Dado um T-ideal I, existe o interesse em encontrar um conjunto S "bom" de geradores para ele. Nesta seção, mostraremos que dependendo do corpo, S pode ser formado por elementos multi-homogêneos (corpo infinito) ou multilineares (corpo de característica 0).

Seja $m = m(x_1, \ldots, x_n)$ um monômio em $\mathbb{F}\langle X\rangle$. Dizemos que m tem multigrau $(d_1, \ldots, d_n)$ se a variável x_i aparece d_i vezes em m.

Exemplo 8. *$x_1^2 x_3^5 x_2^2 x_1 = m$ tem multigrau (3,2,5).*

Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio onde todos os monômios de f tem multigrau $(d_1, \ldots, d_n)$, dizemos que f é multi-homogêneo com multigrau $(d_1, \ldots, d_n)$.

Exemplo 9. *$x_1^2 x_2^3 + 5x_1 x_2^2 x_1 x_2 + 7x_2^3 x_1^2$ é multi-homogêneo com multigrau (2,3).*

Se um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ é multi-homôgeneo com multigrau $(1, \ldots, 1)$, dizemos que f é multilinear de grau n nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

Exemplo 10. *O polinômio Standard*

$$St_n = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$$

é multilinear de grau n.

Denote por P_n o conjunto dos polinômios multilineares de grau n. Uma base para P_n é o conjunto dos monômios

$$x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)},$$

onde $\sigma \in S_n$. Logo, $\dim P_n = n!$. Assim, um elemento qualquer em P_n tem a cara

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)},$$

onde $\alpha_\sigma \in \mathbb{F}$.

Dado um polinômio qualquer $f = f(x_1, \ldots, x_n)$, sempre podemos escrever

$$f = \sum_{d_1 \geq 0, \ldots, d_n \geq 0} f^{(d_1, \ldots, d_n)},$$

onde $f^{(d_1,\ldots,d_n)}$ é a componente multi-homogênea de f com multigrau $(d_1, \ldots, d_n)$.

Exemplo 11. *Considere o polinômio* $f(x_1, x_2) = x_1x_2 + x_2^2x_1 + 5x_2x_1$*. Temos*

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1x_2 + x_2^2x_1 + 5x_2x_1 \\ &= \underbrace{x_1x_2 + 5x_2x_1}_{} + \underbrace{x_2^2x_1}_{} \\ &= \quad f^{(1,1)} \quad + f^{(1,2)}. \end{aligned}$$

Teorema 1.3.1. *Seja* $\mathbb{F}$ *um corpo infinito. Se* $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{d_1 \geq 0, \ldots, d_n \geq 0} f^{(d_1, \ldots, d_n)}$*, então*

$$\langle f \rangle^T = \langle f^{(d_1, \ldots, d_n)} \mid d_1 \geq 0, \ldots, d_n \geq 0 \rangle^T.$$

Em particular, todo T*-ideal é gerado por seus elementos multi-homogêneos.*

Demonstração: Escreva

$$f = f^{(0)} + f^{(1)} + \cdots + f^{(n_1)} = \sum_{i=0}^{n_1} f^{(i)},$$

onde $f^{(i)}$ é formado pelos monômios de f, onde a variável x_1 aparece i vezes.

Como $\mathbb{F}$ é infinito, existem $n_1 + 1$ elementos distintos em $\mathbb{F}$: $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1}$. Temos

$$f(\alpha_j x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad = \quad \sum_{i=0}^{n_1} \alpha_j^i f^{(i)} \in \langle f \rangle^T.$$

Considere o seguinte sistema de equações:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f(\alpha_0 x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f(\alpha_1 x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f(\alpha_{n_1} x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \alpha_0^1 & \cdots & \alpha_0^{n_1} \\ 1 & \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_1^{n_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_{n_1}^1 & \cdots & \alpha_{n_1}^{n_1} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} f^{(0)} \\ f^{(1)} \\ \vdots \\ f^{(n_1)} \end{bmatrix}}_{U},$$

onde A é a matriz de Vandermonde e $\det(A) = \prod_{i>j}(\alpha_i - \alpha_j) \neq 0$. Logo A tem inversa e $A^{-1}B = U$. Assim f^0,f^1,...,f^{n_1} são combinações lineares de

$$f(\alpha_0 x_1, x_2, \ldots, x_n), f(\alpha_1 x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f(\alpha_{n_1} x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Como $\langle f \rangle^T$ é, em particular, um espaço vetorial, segue que

$$f^{(0)}, f^{(1)}, \dots, f^{(n_1)} \in \langle f \rangle^T.$$

Por indução sobre n, temos que

$$f^{(d_1,\dots,d_n)} \in \langle f \rangle^T,$$

para todos $d_1 \geq 0, \dots, d_n \geq 0$. Assim,

$$\langle f^{(d_1,\dots,d_n)} \mid d_1 \geq 0, \dots, d_n \geq 0 \rangle^T \subseteq \langle f \rangle^T.$$

Como $f = \displaystyle\sum_{d_1 \geq 0, \dots, d_n \geq 0} f^{(d_1,\dots,d_n)}$, segue a outra inclusão $\supseteq$. □

Em corpos de característica zero, polinômios multilineares são muito importantes para T-ideais devido ao seguinte:

Teorema 1.3.2. *Seja $\mathbb{F}$ um corpo de característica zero. Se $f \in \mathbb{F}\langle X \rangle$, então existe $S \subseteq \mathbb{F}\langle X \rangle$ formado por polinômios multilineares tal que*

$$\langle f \rangle^T = \langle S \rangle^T.$$

Em particular, todo T-ideal é gerado por seus elementos multilineares.

Demonstração: Seja $f = \displaystyle\sum_{d_1 \geq 0, \dots, d_n \geq 0} f^{(d_1,\dots,d_n)}$. Como $\mathbb{F}$ é infinito, temos pelo Teorema 1.3.1 que

$$\langle f \rangle^T = \langle f^{(d_1,\dots,d_n)} \mid d_1 \geq 0, \dots, d_n \geq 0 \rangle^T.$$

Considere $f_m^{(d_1,\dots,d_n)}$ a componente multilinear de

$$g = f^{(d_1,\dots,d_n)}(x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1d_1}, \dots, x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nd_n}).$$

Então $f_m^{(d_1,\dots,d_n)} \in \langle g \rangle^T \subseteq \langle f^{(d_1,\dots,d_n)} \rangle^T$ e portanto

$$\langle f_m^{(d_1,\dots,d_n)} \rangle^T \subseteq \langle f^{(d_1,\dots,d_n)} \rangle^T.$$

Fazendo $f_m^{(d_1,\dots,d_n)} = f_m^{(d_1,\dots,d_n)}(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1d_1}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nd_n})$, temos

$$f_m^{(d_1,\dots,d_n)}(\underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{d_1 \text{ vezes}}, \dots, \underbrace{x_n, x_n, \dots, x_n}_{d_n \text{ vezes}}) = \underbrace{d_1! d_2! \cdots d_n!}_{\alpha} f^{(d_1,\dots,d_n)}.$$

Como $car(\mathbb{F}) = 0$, temos $\alpha \neq 0$ e portanto $f^{(d_1,\dots,d_n)} \in \langle f_m^{(d_1,\dots,d_n)} \rangle^T$. Logo $\langle f^{(d_1,\dots,d_n)} \rangle^T = \langle f_m^{(d_1,\dots,d_n)} \rangle^T$. Portanto, $\langle f \rangle^T = \langle f_m^{(d_1,\dots,d_n)} \mid d_1 \geq 0, \dots, d_n \geq 0 \rangle^T$. □

1.4 Polinômios próprios

Nesta seção introduzimos o conceito de "Polinômio Próprio" e enunciamos alguns resultados importantes que serão utilizados durante a dissertação.

Definição 1.4.1. *Um polinômio é dito ser próprio se ele for uma combinação linear de produtos de comutadores.*

Assim, um polinômio próprio é combinação linear de elementos do tipo

$$[x_{i_{11}}, x_{i_{12}} \ldots, x_{i_{1t_1}}][x_{i_{21}}, x_{i_{22}}, \ldots, x_{i_{2t_2}}] \cdots [x_{i_{n1}}, x_{i_{n2}}, \ldots, x_{i_{nt_n}}].$$

Exemplo 12. *Um exemplo simples é o polinômio*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2][x_3, x_4] - 3[x_1, x_2, x_3][x_1, x_2, x_2, x_2][x_1, x_3, x_4].$$

Denote por B o conjunto dos polinômios próprios de $\mathbb{F}\langle X\rangle$. Seja $L(X)$ o espaço vetorial gerado pelos elementos $x_1, x_2, \ldots$ e por todos os comutadores de comprimento ≥ 2. Denote por β uma base para $L(X)$ formada por X e por "alguns" comutadores. Ordene os elementos de β de modo que

$$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < (\text{comut. de comp. } 2) < (\text{comut. de comp. } 3) < \cdots . \tag{1.6}$$

O próximo teorema é bem conhecido em PI-álgebra. Uma demonstração para o mesmo pode ser encontrado em [7] página 42.

Teorema 1.4.1. *Uma base para $\mathbb{F}\langle X\rangle$ é o conjunto dos elementos formados por 1 e*

$$u_1 u_2 \cdots u_t, \tag{1.7}$$

onde $u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_t$ estão em β.

Assim, um polinômio da base de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ tem a forma:

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m} \cdots [x_{i_1}, x_{i_2}]^{n_{i_1 i_2}} \cdots [x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}]^{n_{i_1 i_2 i_3}} \cdots [x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_t}]^{n_{i_1 i_2 \cdots i_t}},$$

onde $n_{i_1 i_2 \ldots i_t} \geq 0$ para todo $i = (i_1, i_2, \ldots, i_t)$ e $m \geq 0$.

Exemplo 13. *Sejam $\mathbb{F}$ um corpo infinito e*

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3 [x_2, x_1][x_2, x_1, x_1].$$

Temos que

$$f(1+x_1, x_2) = (1+x_1)^2 x_2^3 [x_2, 1+x_1][x_2, 1+x_1, 1+x_1] = (1+2x_1+x_1^2) x_2^3 [x_2, x_1][x_2, x_1, x_1].$$

A componente multi-homogênea de multigrau $(3,5)$ *do polinômio acima é*

$$g(x_1,x_2) = x_2^3[x_2,x_1][x_2,x_1,x_1].$$

A componente multi-homogênea de $g(x_1, 1+x_2)$ *com multigrau* $(3,2)$ *é*

$$h(x_1,x_2) = [x_2,x_1][x_2,x_1,x_1].$$

Logo $h \in \langle f \rangle^T$. *Como* $f = x_1^2x_2^3h$, *temos* $f \in \langle h \rangle^T$ *e portanto* $\langle h \rangle^T = \langle f \rangle^T$.

Mostramos no exemplo acima que o T-ideal gerado por f é exatamente o T-ideal gerado por um polinômio próprio h. De um modo geral, quando o corpo é infinito temos:

Teorema 1.4.2. *Seja* $\mathbb{F}$ *um corpo infinito. Se* I *é um* T*-ideal, então* I *é gerado por seus elementos próprios multi-homogêneos. Se car* $(\mathbb{F}) = 0$, *então* I *é gerado por seus elementos próprios multilineares.*

Uma aplicação do teorema acima é o seguinte exemplo.

Exemplo 14. *Seja* $\mathbb{F}$ *um corpo infinito. Se* A *é uma álgebra comutativa, então*

$$T(A) = \langle [x_1,x_2] \rangle^T.$$

Demonstração: Vimos no Exemplo 1 que $[x_1,x_2]$ é uma identidade polinomial de A. Logo $\langle [x_1,x_2] \rangle \subseteq T(A)$. Para provar a outra inclusão, basta mostrar que cada polinômio próprio f de $T(A)$ está em $\langle [x_1,x_2] \rangle^T$. Como f é combinação linear de elementos do tipo

$$\underbrace{[x_{i_{11}}, x_{i_{12}}, ..., x_{i_{1n_1}}]}_{\text{está em}\langle [x_1,x_2] \rangle^T} \cdots [x_{i_{m1}}, x_{i_{m2}}, ..., x_{i_{mn_m}}],$$

temos que $f \in \langle [x_1,x_2] \rangle^T$. $\square$

Se A é uma PI-álgebra, considere o homomorfismo canônico $\phi : \mathbb{F}\langle X \rangle \longrightarrow \mathbb{F}\langle X \rangle / T(A)$. Denote por $B(A)$ a imagem de B por ϕ, onde B é o conjunto dos polinômios próprios de $\mathbb{F}\langle X \rangle$. Observe que

$$B(A) = \{p + T(A) \mid p \in B\}.$$

Omitiremos a demonstração da próxima proposição, mas mesma pode ser encontrada em [7] página 46.

Proposição 1.4.3. *Sejam A uma PI-álgebra e $\mathbb{F}$ um corpo infinito. Seja Ω um subconjunto de B formado por polinômios multi-homogêneos tal que*

$$\Omega(A) = \{p + T(A) \mid p \in \Omega\}$$

seja uma base para $B(A)$. Então os elementos

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m} p(x_1, x_2, \ldots, x_m) + T(A),$$

onde $p \in \Omega$, formam uma base para $\mathbb{F}\langle X\rangle/T(A)$.

1.5 Polinômios Centrais e T-espaços

Nesta seção introduziremos os objetos centrais desta dissertação: **polinômios centrais e T-espaços**. Mostraremos que alguns resultados sobre T-ideais continuam válidos para T-espaços e demonstraremos outros que servirão de ferramentas para os próximos capítulos.

Se A é uma álgebra, denote por

$$Z(A) = \{z \in A \mid za = az, \ \forall a \in A\}$$

o seu centro.

Definição 1.5.1. *Seja A uma álgebra. Um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ é chamado de polinômio central se, para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$ temos*

$$f(a_1, \ldots, a_n) \in Z(A).$$

Denotamos por $C(A)$ o conjunto dos polinômios centrais de A.

Note que $f(x_1, \ldots, x_n) \in C(A)$ se, e somente se,

$$[f(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}] \in T(A).$$

Podemos ainda afirmar o seguinte: $f \in C(A)$ se, e somente se, $f + T(A)$ está no centro de $\mathbb{F}\langle X\rangle/T(A)$.

Exemplo 15. *O polinômio*

$$[x_1, x_2]^2$$

é um polinômio central para $M_2(\mathbb{F})$.

Demonstração: Pela observação acima, basta mostrar que $[[x_1, x_2]^2, x_3] \in T\left(M_2(\mathbb{F})\right)$. Pelo Exemplo 4 isto realmento ocorre. $\square$

Definição 1.5.2. *Seja V um subespaço de $\mathbb{F}\langle X\rangle$. Dizemos que V é um T-espaço se, para todos $f(x_1,\ldots,x_n)\in V$ e quaisquer $g_1,\ldots,g_n\in\mathbb{F}\langle X\rangle$ temos*

$$f(g_1,\ldots,g_n)\in V.$$

Exemplo 16. *Se A é uma álgebra, então $C(A)$ é um T-espaço.*

Exemplo 17. *Todo T-ideal é um T-espaço.*

Definição 1.5.3. *Seja $S\subset\mathbb{F}\langle X\rangle$. O T-espaço gerado por S é o menor T-espaço que contém S.*

Denotamos o T-espaço gerado por S por $\langle S\rangle^{TS}$. Observe que $\langle S\rangle^{TS}$ sempre existe e é a intersecção de todos T-espaços de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ que contêm S.

Proposição 1.5.1. *O T-espaço gerado por S é o subespaço vetorial de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ gerado pelos elementos*

$$f(g_1,\ldots,g_n),$$

onde $g_1,\ldots,g_n\in\mathbb{F}\langle X\rangle$ e $f(x_1,\ldots,x_n)\in S$.

Demonstração: A demonstração deste resultado é análoga a Proposição 1.2.6. □

Observe que se I é o T-ideal gerado por um conjunto S e

$$S_1=\{x_0f(x_1,\ldots,x_n)x_{n+1};\ f\in S\},$$

então I é exatamente o T-espaço gerado por S_1. Assim, a partir de um conjunto gerador de um T-ideal I, podemos construir um conjunto capaz de gerá-lo como um T-espaço.

Proposição 1.5.2. *Seja V um subespaço de $\mathbb{F}\langle X\rangle$. Então V é um T-espaço se, e somente se, $\varphi(V)\subseteq V$ para todo $\varphi\in End(\mathbb{F}\langle X\rangle)$.*

Demonstração: É análoga a Proposição 1.2.4 □

A demonstração dos próximos resultados são as mesmas feitas na Seção 1.3 quando trocamos a palavra T-ideal por T-espaço.

Teorema 1.5.3. *Seja $\mathbb{F}$ um corpo infinito. Se $f(x_1,\ldots,x_n)=\sum\limits_{d_1\geq 0,\ldots,d_n\geq 0}f^{(d_1,\ldots,d_n)}$ então*

$$\langle f\rangle^{TS}=\langle f^{(d_1,\ldots,d_n)}\mid d_1\geq 0,\ldots,d_n\geq 0\rangle^{TS}.$$

Em particular todo T-espaço é gerado por seus elementos multi-homogêneos.

Teorema 1.5.4. *Seja $\mathbb{F}$ um corpo de característica zero. Se $f\in\mathbb{F}\langle X\rangle$, então existe $S\subseteq\mathbb{F}\langle X\rangle$, onde*

$$\langle f\rangle^{TS}=\langle S\rangle^{TS}$$

e os elementos de S são multilineares. Em particular todo T-espaço é gerado por seus elementos multilineares.

Capítulo 2

Polinômios Centrais para Álgebra de Grassmann

2.1 O T-ideal T(G)

Nesta seção descreveremos o T-ideal $T(G)$ das identidades polinomiais da álgebra de Grassmann G. Mostraremos que $T(G)$ é gerado pelo comutador triplo $[x_1, x_2, x_3]$. Ao longo de todo capítulo, $\mathbb{F}$ será um corpo infinito de característica $\neq 2$.

Seja V um espaço vetorial de dimensão infinita com base $\{e_1, e_2, \ldots\}$. A álgebra de Grassmann (ou álgebra Exterior) de V, denotada por G, é a álgebra gerada por $\{1, e_1, e_2, \ldots\}$ que satisfaz a seguinte relação:

$$e_i e_j = -e_j e_i$$

para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$. Uma base para tal álgebra é o conjunto

$$\{1\} \cup \{e_{i_1} e_{i_2} \ldots\ e_{i_m} \mid m \in \mathbb{N},\ i_1 < i_2 < \cdots < i_m\}.$$

Considere a álgebra associativa livre $\mathbb{F}\langle X\rangle$. Seja J o ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ gerado pelo conjunto

$$\{x_i x_j + x_j x_i \mid i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Note que se identificarmos o elemento $x_i + J$ da álgebra quociente $\mathbb{F}\langle X\rangle/J$ ao elemento e_i da álgebra de Grassmann G, vemos que G é isomorfa a álgebra quociente $\mathbb{F}\langle X\rangle/J$. Destacamos em G os subespaços:

$$\begin{aligned} G_0 &= \langle 1, e_{i_1} e_{i_2} \ldots\ e_{i_m} \mid m \text{ é par},\ i_1 < i_2 < \cdots < i_m\rangle, \\ G_1 &= \langle e_{i_1} e_{i_2} \ldots\ e_{i_m} \mid m \text{ é ímpar},\ i_1 < i_2 < \cdots < i_m\rangle. \end{aligned}$$

Pode-se mostrar que $G = G_0 \oplus G_1$ e $Z(G) = G_0$.

Denote por T o T-ideal gerado pelo comutador triplo, ou seja,

$$T = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T.$$

Lema 2.1.1. *Para todos $g_1, g_2, g_3, g_4 \in \mathbb{F}\langle X \rangle$ temos:*

i) O elemento $[g_1, g_2] + T$ está no centro da álgebra quociente $\mathbb{F}\langle X \rangle / T$;

ii) $[g_1, g_2][g_2, g_3] + T = T$;

iii) $[g_1, g_2][g_3, g_4] + T = -[g_1, g_3][g_2, g_4] + T$.

Demonstração:

ii) Como $T = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$ é um T-ideal, temos $[x_1, x_2^2, x_3] \in T$. Pelas identidades (1.2) segue que

$$\begin{aligned} [x_1, x_2^2, x_3] &= [[x_1, x_2^2], x_3] = [x_2[x_1, x_2] + [x_1, x_2]x_2, x_3] = \\ &= x_2[x_1, x_2, x_3] + [x_2, x_3][x_1, x_2] + [x_1, x_2][x_2, x_3] + [x_1, x_2, x_3]x_2 \in T. \end{aligned}$$

Daí $[x_2, x_3][x_1, x_2] + [x_1, x_2][x_2, x_3] \in T$. Já que

$$[x_2, x_3][x_1, x_2] = [x_1, x_2][x_2, x_3] + [[x_2, x_3], [x_1, x_2]],$$

temos $2[x_1, x_2][x_2, x_3] \in T$ e portanto $[x_1, x_2][x_2, x_3] \in T$, pois $car(\mathbb{F}) \neq 2$. Concluímos assim a demonstração de ii).

iii) Fazendo $x_2 = y_1 + y_2$ em $[x_1, x_2][x_2, x_3]$, temos que a componente multilinear de $[x_1, y_1 + y_2][y_1 + y_2, x_3]$ é

$$[x_1, y_1][y_2, x_3] + [x_1, y_2][y_1, x_3].$$

Como $\mathbb{F}$ é infinito, segue que

$$[x_1, y_1][y_2, x_3] + [x_1, y_2][y_1, x_3] \in T$$

e portanto $[g_1, g_2][g_3, g_4] + T = -[g_1, g_3][g_2, g_4] + T$ para todos $g_1, g_2, g_3, g_4 \in \mathbb{F}\langle X \rangle$. $\square$

Observação 3. *Seja σ um elemento qualquer de S_{2k}. Pelo item iii) do lema anterior e pelo fato que $[x_i, x_j] = -[x_j, x_i]$, segue que*

$$[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] \cdots [x_{\sigma(2k-1)}, x_{\sigma(2k)}] + T = (sgn\sigma)[x_1, x_2] \cdots [x_{2k-1}, x_{2k}] + T.$$

Uma consequência deste fato e do item ii) do lema anterior é que

$$[g_1, g_2] \cdots [g_{2k-1}, g_{2k}] + T = T$$

se $g_i = g_j$ para algum $i \neq j$.

Lema 2.1.2. *Seja I um T-ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ tal que $T \subsetneq I$. Então*

$$I = \langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2][x_3, x_4] \dots [x_{2N-1}, x_{2N}]\rangle^T,$$

para algum $N \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Como $\mathbb{F}$ é infinito e $T \subsetneq I$, existe $f \in I$ próprio multi-homogêneo que não está em T. Escreva f como combinação linear de elementos do tipo

$$w = [x_{i_{11}}, \dots, x_{i_{1n_1}}] \cdots [x_{i_{m1}}, \dots, x_{i_{mn_m}}].$$

Se algum n_j (comprimento do j-ésimo comutador) for ≥ 3, então $w + T = T$. Podemos então supor que $n_1 = n_2 = \cdots = n_m = 2$. Se em w existir $x_{i_p} = x_{i_q}$, para algum $p \neq q$, então também $w + T = T$. Portanto, f é uma combinação linear de elementos do tipo

$$w = [x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}],$$

onde não ocorre repetições de variáveis. Logo, f é multilinear. Sem perda de generalidade podemos supor f multilinear nas variáveis $x_1, x_2, \dots, x_{2k}$. Então f é uma combinação linear de elementos da forma

$$[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] \cdots [x_{\sigma(2k-1)}, x_{\sigma(2k)}],$$

onde $\sigma \in S_{2k}$. Pela observação anterior, segue que

$$f + T = \alpha[x_1, x_2] \cdots [x_{2k-1}, x_{2k}] + T,$$

para algum $0 \neq \alpha \in \mathbb{F}$ e $k \in \mathbb{N}$. Logo,

$$f = \alpha[x_1, x_2] \cdots [x_{2k-1}, x_{2k}] + h,$$

onde $h \in T$. Portanto, se

$$N = min\{k \in \mathbb{N} \mid [x_1, x_2] \cdots [x_{2k-1}, x_{2k}] \in I\},$$

então

$$I = \langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2][x_3, x_4] \dots [x_{2N-1}, x_{2N}]\rangle^T.$$

□

O próximo resultado pode ser obtido em [17].

Proposição 2.1.3. *Seja $\mathbb{F}$ um corpo infinito. Então $T(G) = T$.*

Demonstração: Como $[x_1, x_2, x_3] \in T(G)$, temos $T \subseteq T(G)$. Suponhamos, por absurdo, que $T \subsetneq T(G)$. Segue do Lema 2.1.2 que

$$T(G) = \langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2][x_3, x_4] \dots [x_{2N-1}, x_{2N}] \rangle^T,$$

para algum $N \in \mathbb{N}$. Mas

$$[e_1, e_2][e_3, e_4] \dots [e_{2N-1}, e_{2N}] = 2^N e_1 e_2 e_3 e_4 \dots e_{2N-1} e_{2N} \neq 0$$

em G. Logo $T(G) = T$. $\square$

Proposição 2.1.4. *O espaço vetorial $\mathbb{F}\langle X \rangle / T$ tem uma base*

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m} [x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}] + T, \tag{2.1}$$

onde $r, m \geq 0$, $j_1 < j_2 < \cdots < j_{2r}$, $n_k \geq 0$ para todo k.

Demonstração: Pela Proposição 1.4.3 é suficiente mostrar que os elementos

$$[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}] + T \tag{2.2}$$

onde $j_1 < j_2 < \cdots < j_{2r}$, formam um base para $B(G)$, lembrando que

$$B(G) = \{p + T(G) \,|\, p \in B\},$$

onde B é o conjunto dos polinômios próprios. É claro que os elementos (2.2) geram $B(G)$ (ver a demonstração da Proposição 2.1.2). Mostraremos que tais elementos são linearmente independentes. Para isso, considere a seguinte combinação linear

$$\sum_j \alpha_j [x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}] + T = T,$$

onde algum $\alpha_j \neq 0$. Então

$$\sum_j \alpha_j [x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}] \in T.$$

Para este $\alpha_j \neq 0$, $[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}] \in T(G)$ (componente multi-homogênea). Absurdo. Portanto, tais elementos formam uma base para $B(G)$. $\square$

Outro fato que usaremos nas próximas seções é o próximo lema. Para uma demonstração detalhada, ver por exemplo [6].

Lema 2.1.5. *Seja $\mathbb{F}$ um corpo infinito de característica $p > 2$. Para todo $g, g_1, g_2 \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ temos o seguinte:*

i) Os elementos $g^p + T$ são centrais em $\mathbb{F}\langle X\rangle/T$;

ii) $(g_1g_2)^p + T = g_1^p g_2^p + T$;

iii) $(g_1 + g_2)^p + T = g_1^p + g_2^p + T$.

2.2 O T-espaço C(G)

O objetivo desta seção é descrever os polinômios centrais da álgebra de Grassmann G. Mostraremos que $C(G)$ é um T-espaço limite se $\mathrm{car}(\mathbb{F}) = p > 2$ e finitamente gerado se $\mathrm{car}(\mathbb{F}) = 0$. Relembramos que $\mathbb{F}$ é um corpo infinito de $\mathrm{car}(\mathbb{F}) = p \neq 2$. Os resultados aqui apresentados encontram-se em [5].

Lema 2.2.1. *Suponha que $g = g(x_2, \ldots, x_l) \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ é um polinômio que não depende de x_1. Se $x_1g + T$ é central em $\mathbb{F}\langle X\rangle/T$, então $g \in T$.*

Demonstração: Supondo que $x_1g + T$ é central em $\mathbb{F}\langle X\rangle/T$, temos que $x_1g \in C(G)$ e portanto $[x_1g, x_0] \in T$. Seja $f(x_1, x_2, \ldots, x_l) = x_1g(x_2, \ldots, x_l)$. Já que $C(G)$ é um T-espaço de $\mathbb{F}\langle X\rangle$, temos

$$f(1, x_2, \ldots, x_l) = g(x_2, \ldots, x_l) \in C(G).$$

Logo, $x_1[g, x_0] \in T$. Usando a identidade (1.2) temos

$$[x_1g, x_0] = x_1[g, x_0] + [x_1, x_0]g,$$

e portanto $[x_1, x_0]g \in T$. Para finalizar a demonstração, suponha que $g \notin T$. Então existem $w_2, \ldots, w_l \in G$ tais que $0 \neq g(w_2, \ldots, w_l)$. Já que

$$\beta = \{e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$$

é uma base para G, podemos escrever $g(w_2, \ldots, w_l)$ como uma combinação linear de elementos de β. Suponha

$$g(w_2, \ldots, w_l) = \sum_a \alpha_a e_1^{a_1} e_2^{a_2} \ldots e_t^{a_t}$$

em que $a_j \in \{0, 1\}$. Fazendo $x_1 = e_{t+1}$ e $x_0 = e_{t+2}$ temos

$$[e_{t+1}, e_{t+2}]g(w_2, \ldots, w_l) = 2e_{t+1}e_{t+2}g(w_2, \ldots, w_l) \neq 0,$$

donde concluímos que $[x_1, x_0]g \notin T$. Absurdo! $\square$

Embora tenhamos definido T-espaço para subespaços de $\mathbb{F}\langle X\rangle$, podemos estender este conceito para subespaços da álgebra quociente $\mathbb{F}\langle X\rangle/T$ de uma maneira natural. Usaremos isso no próximo lema.

Lema 2.2.2. *Seja $f(x_1, x_2, \ldots, x_l) \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ um polinômio homogêneo de grau 1 em x_1 . Se $f+T$ é central em $\mathbb{F}\langle X\rangle/T$, então $f+T$ pertence ao T-espaço de $\mathbb{F}\langle X\rangle/T$ gerado por $[x_1, x_2]+T$.*

Demonstração: Escreva

$$f = \sum_i \alpha_i a_i x_1 b_i,$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{F}$ e a_i, b_i são monômios em $\mathbb{F}\langle X\rangle$ (alguns deles podem ser iguais a 1). Como $ax_1b = x_1ba + [a, x_1b]$ para todo $a, b \in \mathbb{F}\langle X\rangle$, temos

$$\begin{aligned} f &= \sum_i \alpha_i x_1 b_i a_i + \sum_i \alpha_i [a_i, x_1 b_i] \\ &= x_1 g(x_2, \ldots, x_l) + h(x_1, \ldots, x_l), \end{aligned}$$

onde $h(x_1, \ldots, x_l) = \sum_i \alpha_i [a_i, x_1 b_i]$ está no T-espaço gerado por $[x_1, x_2]$ e $g = g(x_2, \ldots, x_l)$ não depende de x_1. Como $f+T$ e $h+T$ são centrais em $\mathbb{F}\langle X\rangle/T$, segue que x_1g+T é central em $\mathbb{F}\langle X\rangle/T$. Então, pelo Lema 2.2.1, temos que $g \in T$ e portanto $x_1g+T = T$ com

$$f+T = h+T = \sum_i \alpha_i [a_i, x_1 b_i] + T.$$

Assim, $f+T$ pertence ao T-espaço de $\mathbb{F}\langle X\rangle/T$ gerado por $[x_1, x_2]+T$. $\square$

Lema 2.2.3. *Se $car(\mathbb{F}) = p > 2$, então $x_0^p[x_1, x_2]+T$ pertence ao T-espaço de $\mathbb{F}\langle X\rangle/T$ gerado por $[x_1, x_2]+T$.*

Demonstração: De fato,

$$[x_0^p x_1, x_2] + T = (x_0^p[x_1, x_2] + T) + ([x_0^p, x_2]x_1 + T) = x_0^p[x_1, x_2] + T,$$

pois pelo Lema 2.1.5 temos que $x_0^p + T \in Z(\mathbb{F}\langle X\rangle/T)$. $\square$

Lema 2.2.4. *Sejam $car(\mathbb{F}) = p > 2$ e $f(x_1, \ldots, x_l) \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ um polinômio homogêneo de grau m_1 em x_1. Se $f+T$ é central em $\mathbb{F}\langle X\rangle/T$ e m_1 não é múltiplo de p, então $f+T$ pertence ao T-espaço de $\mathbb{F}\langle X\rangle/T$ gerado por $[x_1, x_2]+T$.*

Demonstração: Se $m_1 = 1$, então este lema corresponde ao Lema 2.2.2.

Suponha que $m_1 > 1$ e $p \nmid m_1$. Escreva $m_1 = pq+m$, onde $0 < m < p$. Pela Proposição 2.1.4, $f + T$ é combinação linear de elementos da forma

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_l^{n_l} [x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}] + T,$$

onde $r \geq 0$, $j_1 < \cdots < j_{2r}$, $n_k \geq 0$ para todo k. Temos duas possibilidades para n_1:

1) Existem polinômios em que $n_1 = m_1$. Neste caso, $j_1 \neq 1$ e

$$\begin{aligned} & x_1^{m_1} x_2^{n_2} \cdots x_l^{n_l} [x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}] + T \\ = \; & x_1^{pq} (x_1^{m} x_2^{n_2} \cdots x_l^{n_l} [x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}]) + T. \end{aligned}$$

2) Existem monômios em que $n_1 = m_1 - 1$. Neste caso, $j_1 = 1$ e

$$\begin{aligned} & x_1^{m_1-1} x_2^{n_2} \cdots x_l^{n_l} [x_1, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}] + T \\ = \; & x_1^{pq} (x_1^{m-1} x_2^{n_2} \cdots x_l^{n_l} [x_1, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}]) + T. \end{aligned}$$

Pelos dois itens fica claro que podemos escrever

$$f + T = x_1^{pq} g + T,$$

onde $g = g(x_1, \ldots, x_l)$ tem grau m em x_1.

Seja

$$g_1 = f(1 + x_1, x_2, \ldots, x_l) + T = (1 + x_1)^{pq} g(1 + x_1, x_2, \ldots, x_l) + T.$$

Pelo Lema 2.1.5,

$$g_1 = (1 + x_1^p)^q g(1 + x_1, x_2, \ldots, x_l) + T.$$

Assim, a componente homogênea de g_1 com grau m em x_1 é $g(x_1, x_2, \ldots, x_l) + T$. Segue que $g + T$ pertence ao T-espaço de $\mathbb{F}\langle X\rangle/T$ gerado por $f + T$. Como $f + T$ é central em $\mathbb{F}\langle X\rangle/T$, qualquer elemento que pertence ao T-espaço gerado por $f + T$ também o é. Em particular, $g + T$ é central em $\mathbb{F}\langle X\rangle/T$.

Seja $h = h(y_1, y_2, \ldots, y_m, x_2, \ldots, x_l)$ a linearização completa de g em relação a x_1. Isto significa que $h(y_1, y_2, \ldots, y_m, x_2, \ldots, x_l)$ é a componente homogênea de

$$g(y_1 + y_2 + \ldots + y_m, x_2, \ldots, x_l)$$

que é multilinear em $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Então

$$h(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{\text{m vezes}}, x_2, \ldots, x_l) = (m!) g(x_1, \ldots, x_l).$$

O polinômio h é de grau 1 em y_1 e $h + T$ é central em $\mathbb{F}\langle X\rangle/T$, pois está no T-espaço gerado pelo elemento central $g+T$. Portanto, pelo Lema 2.2.2, $h+T$ pertence ao T-espaço de $\mathbb{F}\langle X\rangle/T$ gerado por $[x_1, x_2] + T$. O mesmo ocorre com

$$g(x_1,\ldots,x_l)+T=(m!)^{-1}h(\underbrace{x_1,\ldots,x_1}_{\text{m vezes}},x_2,\ldots,x_l)+T.$$

Segue então que $f+T=(x_1^q)^p g+T$ pertence ao T-espaço gerado por $x_0^p[x_1,x_2]+T$. Este último, pelo Lema 2.2.3, está contido no T-espaço gerado por $[x_1,x_2]+T$. Portanto, $f+T$ pertence ao T-espaço gerado por $[x_1,x_2]+T$. □

Uma consequência deste resultado é o seguinte:

Corolário 2.2.5. *Sejam $car(\mathbb{F})=p>2$ e $f(x_1,\ldots,x_l)\in\mathbb{F}\langle X\rangle$ um polinômio multi-homogêneo com multigrau $(m_1,\ldots,m_l)$. Suponha que $f+T$ é central em $\mathbb{F}\langle X\rangle/T$ e que algum m_i não é múltiplo de p. Então $f+T$ pertence ao T-espaço de $\mathbb{F}\langle X\rangle/T$ gerado por $[x_1,x_2]+T$.*

Antes de enunciarmos o próximo resultado, faremos alguns comentários: O T-ideal T é gerado como um T-espaço pelo polinômio $x_1[x_2,x_3,x_4]$, ou seja,

$$\langle[x_1,x_2,x_3]\rangle^T=\langle x_1[x_2,x_3,x_4]\rangle^{TS}.$$

De fato, é claro que

$$\langle x_1[x_2,x_3,x_4]\rangle^{TS}\subseteq\langle[x_1,x_2,x_3]\rangle^T.$$

Usando que $ba=ab+[b,a]$, temos

$$\begin{aligned} x_1[x_2,x_3,x_4]x_5 &= x_1x_5[x_2,x_3,x_4]+x_1[[x_2,x_3,x_4],x_5]\\ &= x_1x_5[x_2,x_3,x_4]+x_1[[x_2,x_3],x_4,x_5]. \end{aligned}$$

Portanto, $\langle[x_1,x_2,x_3]\rangle^T\subseteq\langle x_1[x_2,x_3,x_4]\rangle^{TS}$ e a demonstração está concluída.

Definição 2.2.1. *Considere o seguinte polinômio*

$$q(x_1,x_2)=x_1^{p-1}[x_1,x_2]x_2^{p-1}$$

e defina para cada $n\geq 1$

$$q_n(x_1,\ldots,x_{2n})=q(x_1,x_2)q(x_3,x_4)\ldots q(x_{2n-1},x_{2n}).$$

Lema 2.2.6. *Para cada $n\geq 1$, $q_n\in C(G)$.*

Demonstração: Com efeito, para ver isto basta provar que

$$q(x_1,x_2)=x_1^{p-1}[x_1,x_2]x_2^{p-1}\in C(G).$$

A demonstração deste fato será obtida a partir da identidade (1.3) e Lema 2.1.1:

$$[q(x_1,x_2),x_3]+T=[x_1^{p-1}[x_1,x_2]x_2^{p-1},x_3]+T=$$

$$([x_1,x_3]x_1\dots x_1[x_1,x_2]x_2^{p-1})+\dots+(x_1\dots x_1[x_1,x_3][x_1,x_2]x_2^{p-1})+$$

$$x_1^{p-1}[x_1,x_2,x_3]x_2^{p-1}+$$

$$(x_1^{p-1}[x_1,x_2][x_2,x_3]x_2\dots x_2)+\dots+(x_1^{p-1}[x_1,x_2]x_2\dots x_2[x_2,x_3])+T=$$

$$(p-1)(x_1\dots x_1[x_1,x_3][x_1,x_2]x_2^{p-1})+(p-1)(x_1^{p-1}[x_1,x_2][x_2,x_3]x_2\dots x_2)+T=T.$$

Como $[q(x_1,x_2),x_3]\in T(G)$, segue que $q(x_1,x_2)\in C(G)$. □

Teorema 2.2.7. *Seja $\mathbb{F}$ um corpo infinito de car$(\mathbb{F})=p>2$. O T-espaço $C(G)$ é gerado pelo polinômio*

$$x_1[x_2,x_3,x_4] \tag{2.3}$$

e pelos polinômios

$$x_0^p,\ x_0^pq_1,\ x_0^pq_2,\ \dots,\ x_0^pq_n,\ \dots. \tag{2.4}$$

Demonstração: Seja U o T-espaço gerado pelos polinômios (2.3) e (2.4). Uma vez que $T(G)\subset C(G)$, obtemos $x_1[x_2,x_3,x_4]\in C(G)$. Pelo Lema 2.2.6 temos que $q_n\in C(G)$. Como x_0^p também pertence a $C(G)$, temos que $x_0^pq_n\in C(G)$. Assim acabamos de mostrar que $U\subseteq C(G)$.

Provaremos agora a outra inclusão. Seja $f(x_1,\dots,x_l)\in C(G)$. Como $\mathbb{F}$ é um corpo infinito, podemos supor que f é um polinômio multi-homogêneo com multigrau $(m_1,\dots,m_l)$. Temos duas possibilidades: $f\in T$ ou $f\notin T$.

Se $f\in T$, então f pertence ao T-espaço gerado por (2.3) (ver comentários na página anterior).

Suponha agora que $f\notin T$. Vamos analisar duas situações:

a) Algum m_i não é múltiplo de p. Pelo Corolário 2.2.5 temos que $f+T$ pertence ao T-espaço de $\mathbb{F}\langle X\rangle/T$ gerado por $[x_1,x_2]+T$. Logo, f pertence ao T-espaço gerado por (2.3) e $[x_1,x_2]$. Como a componente multi-homogênea de multigrau $(0,1,1)$ do polinômio

$$(1+x_0)^p(1+x_1)^{p-1}[1+x_1,1+x_2](1+x_2)^{p-1}$$

é $[x_1,x_2]$, temos que

$$\langle[x_1,x_2]\rangle^{TS}\subseteq\langle x_0^px_1^{p-1}[x_1,x_2]x_2^{p-1}\rangle^{TS}=\langle x_0^pq_1\rangle^{TS}.$$

Portanto, $f \in U$.

b) m_i é múltiplo de p para todo i. Escreva $m_i = pq_i$ e $f + T$ como combinação linear de elementos da forma

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_l^{n_l} [x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}] + T,$$

onde $k \geq 0$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_{2k}$, $n_j \geq 0$. Reescrevemos o elemento acima como

$$x_1^{pq_1} \cdots x_{i_1}^{pq_{i_1}-1} \cdots x_{i_{2k}}^{pq_{i_{2k}}-1} \cdots x_l^{pq_l} [x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}] + T.$$

Observando que $pq_i - 1 = p(q_i - 1) + (p - 1)$, temos a nova expressão

$$x_1^{pq_1} \cdots x_{i_1}^{p(q_{i_1}-1)} x_{i_1}^{p-1} \cdots x_{i_{2k}}^{p(q_{i_{2k}}-1)} x_{i_{2k}}^{p-1} \cdots x_l^{pq_l} [x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}] + T.$$

Pelos Lemas 2.1.1 e 2.1.5, os elementos $x_i^p + T$, $[x_i, x_j] + T \in Z(\mathbb{F}\langle X \rangle / T)$ e $(x_1 x_2)^p + T = x_1^p x_2^p + T$. Logo,

$$\begin{aligned}
& (x_1^{q_1})^p \cdots (x_{i_1}^{(q_{i_1}-1)})^p x_{i_1}^{p-1} \cdots (x_{i_{2k}}^{(q_{i_{2k}}-1)})^p x_{i_{2k}}^{p-1} \cdots (x_l^{q_l})^p [x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}] + T \\
= \; & (x_1^{q_1})^p \cdots (x_{i_1}^{(q_{i_1}-1)})^p \cdots (x_{i_{2k}}^{(q_{i_{2k}}-1)})^p \cdots (x_l^{q_l})^p q(x_{i_1}, x_{i_2}) \cdots q(x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}) + T \\
= \; & (x_1^{q_1} \cdots x_{i_1}^{(q_{i_1}-1)} \cdots x_{i_{2k}}^{(q_{i_{2k}}-1)} \cdots x_l^{q_l})^p q(x_{i_1}, x_{i_2}) \cdots q(x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}) + T \\
= \; & x_0^p q_k(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{2k}}) + T,
\end{aligned}$$

onde $x_1^{q_1} \cdots x_{i_1}^{(q_{i_1}-1)} \cdots x_{i_{2k}}^{(q_{i_{2k}}-1)} \cdots x_l^{q_l} = x_0$. Portanto $f \in U$ e o teorema está provado. $\square$

Seja I o ideal de $\mathbb{F}\langle X \rangle$ gerado pelos elementos f^p, onde $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X \rangle$ não tem termo escalar:

$$f(0, \ldots, 0) = 0.$$

Denotaremos por V_n o T-espaço gerado por

$$q_1, \ldots, q_n$$

e denotaremos por W_n o T-espaço gerado por

$$x_0^p, \; x_0^p q_1, \; \ldots, \; x_0^p q_n.$$

A seguinte proposição é uma reformulação de [[18], Lema 13].

Proposição 2.2.8 ([18]). *Se $n \in \mathbb{N}$, então existe $k(n) > n$ tal que $q_{k(n)} \notin V_n + T + I$.*

Na verdade, segue da demonstração de [[18], lema 13] que podemos assumir $k(n) = n + 1$.

Lema 2.2.9. *Se $n \in \mathbb{N}$, então $V_n + \mathbb{F} + I = W_n + I$.*

Demonstração: Primeiramente mostraremos que $V_n + \mathbb{F} + I \subseteq W_n + I$. Observe que é suficiente mostrar que $V_n + \mathbb{F} \subseteq W_n$. Note que para todo $i \leq n$ temos $q_i \in W_n$, pois definindo

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{2i}) = x_0^p q_i(x_1, \ldots, x_{2i})$$

temos $f(1, x_1, \ldots, x_{2i}) = q_i$. Além disso, para $h(x_0) = x_0^p$ temos $h(1) = 1$. Logo $V_n + \mathbb{F} \subseteq W_n$ como queríamos.

Agora vamos provar que $W_n + I \subseteq V_n + \mathbb{F} + I$. Para isto, é suficiente mostrar que $W_n \subseteq V_n + \mathbb{F} + I$. Sejam $g_0, g_1, \ldots, g_{2i}$ polinômios quaisquer em $\mathbb{F}\langle X\rangle$. Suponha que $g_0 = \alpha + f$, onde $\alpha \in \mathbb{F}$ e f é um polinômio sem termo escalar. Como $\mathrm{car}(\mathbb{F}) = p$, temos

$$g_0^p = \alpha^p + f^p \in \mathbb{F} + I.$$

Por outro lado,

$$g_0^p q_i(g_1, \ldots, g_{2i}) = (\alpha^p + f^p) q_i(g_1, \ldots, g_{2i}) = \alpha^p q_i(g_1, \ldots, g_{2i}) + h,$$

onde $h \in I$. Segue que $g_0^p q_i(g_1, \ldots, g_{2i}) \in V_i + I$ para todo i. Como W_n é gerado como subespaço pelos elementos g_0^p e $g_0^p q_i(g_1, \ldots, g_{2i})$, onde $i \leq n$ e $g_0, g_1, \ldots, g_{2i} \in \mathbb{F}\langle X\rangle$, segue que $W_n \subseteq V_n + \mathbb{F} + I$ como queríamos. □

Usando conceitos básicos de álgebra linear, pode-se mostrar facilmente a próxima observação.

Observação 4. *Seja U um espaço vetorial e considere U_1, U_2 e U_3 subespaços vetoriais de U tais que $U_1 \subsetneq U_2$ e $U_2 \cap U_3 = \{0\}$. Então $U_1 + U_3 \subsetneq U_2 + U_3$.*

Teorema 2.2.10. *Seja $\mathbb{F}$ um corpo infinito com car$(\mathbb{F}) = p > 2$. Então $C(G)$ não é finitamente gerado como um T-espaço.*

Demonstração: Convém notar que pelo Teorema 2.2.7 temos

$$C(G) = \bigcup_{n\geq 1}(W_n + T).$$

Assim, para mostrar que $C(G)$ não é finitamente gerado como T-espaço é suficiente verificar que

$$W_n + T \subsetneq W_{n+1} + T$$

para todo n. Por definição, $V_n \subseteq V_{n+1}$. Então $V_n + T + I \subseteq V_{n+1} + T + I$. Pela Proposição 2.2.8 esta inclusão é estrita, ou seja, $V_n + T + I \subsetneq V_{n+1} + T + I$. Agora, para cada l, se $f \in V_l + T + I$, então $f(0, \ldots, 0) = 0$. Logo

$$(V_l + T + I) \cap \mathbb{F} = \{0\}.$$

Pela Observação 4 temos

$$V_n + T + I + \mathbb{F} \subsetneq V_{n+1} + T + I + \mathbb{F}.$$

Portanto, pelo Lema 2.2.9

$$W_n + T + I \subsetneq W_{n+1} + T + I$$

para todo n. Consequentemente $W_n + T \subsetneq W_{n+1} + T$.

Agora suponha que $C(G)$ é finitamente gerado como T-espaço, isto é, existem $g_1, \ldots, g_l$ tais que

$$C(G) = \langle g_1, \ldots, g_l \rangle^{TS}.$$

Então $g_1 \in W_{n_1} + T, \ldots, g_l \in W_{n_l} + T$ para alguns $n_1, \ldots, n_l$, pois

$$C(G) = \bigcup_{n \geq 1} (W_n + T).$$

Se $k = max\{n_1, \ldots, n_l\}$, então $g_1, \ldots, g_l \in W_k + T$. Logo $C(G) = W_k + T$ e em particular $W_{k+1} + T \subset C(G) = W_k + T$. Absurdo! Portanto $C(G)$ não é finitamente gerado como T-espaço. □

Proposição 2.2.11. *Seja W um T-espaço de $\mathbb{F}\langle X \rangle$ tal que $C(G) \subsetneq W$. Então existe um T-ideal $I \supsetneq T$ tal que $W = C(G) + I$.*

Demonstração: Seja I o maior T-ideal contido em W, tal que $T \subseteq I$. Então temos $I + C(G) \subseteq W$. Mostraremos que $W \subseteq I + C(G)$. Seja $f(x_1, \ldots, x_l)$ um elemento qualquer de W. Como $\mathbb{F}$ é infinito, podemos assumir que f é multi-homogêneo de multigrau $(m_1, \ldots, m_l)$.

Se cada m_i é múltiplo de p, então $f \in C(G) \subseteq C(G) + I$. Para mais detalhes, ver a demonstração do Teorema 2.2.7 - item b).

Suponha que algum m_i não é múltiplo de p. A menos de uma permutação das variáveis, podemos assumir que $i = 1$. Assim $m_1 = pq + m$, onde $0 < m < p$. Os argumentos que utilizaremos de agora em diante nesta demonstração são praticamente os mesmos que foram utilizados na demonstração do Lema 2.2.4. Caso haja alguma dúvida nas afirmações feitas aqui, sugerimos que o leitor releia tal lema. Pelas considerações feitas anteriormente temos

$$f + T = x_1^{pq} g(x_1, \ldots, x_l) + T,$$

onde g é a componente homogênea de grau m em x_1. Logo $g \in W$. Seja

$$h = h(y_1, \ldots, y_m, x_2, \ldots, x_l)$$

a componente multilinear em $y_1, \ldots, y_m$ de $g(y_1 + \ldots + y_m, x_2, \ldots, x_l)$. Então $h \in W$. Já que h é linear em y_1, podemos escrever

$$h = h(y_1, \ldots, y_m, x_2, \ldots, x_l) = \sum_i \alpha_i a_i y_1 b_i,$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{F}$ e a_i, b_i são monômios (alguns deles podem ser iguais a 1) que não dependem de y_1. Como

$$a_i y_1 b_i = y_1 b_i a_i + [a_i, y_1 b_i],$$

temos $h = y_1 h_1 + h_2$, onde h_1 não depende de y_1 e $h_2 \in \langle [x_1, x_2] \rangle^{TS}$. Logo $h_2 \in W$ e portanto $y_1 h_1 \in W$. Note que como W é um T-espaço, $z_1 y_1 h_1 \in W$ para qualquer $z_1 \in \mathbb{F}\langle X \rangle$ (basta colocar $y_1 = z_1 y_1$ em $y_1 h_1$). Uma vez que $\langle [x_1, x_2] \rangle^{TS} \subset W$, segue que $[y_1 h_1, z_1] \in W$. Assim temos

$$y_1 h_1 z_1 = z_1 y_1 h_1 + [y_1 h_1, z_1] \in W.$$

Acabamos de mostrar que o T-ideal gerado por h_1 está contido em W. Como I é o maior T-ideal contido em W, segue que $h_1 \in I$. Assim $h \in I + C(G)$. Uma vez que

$$h(x_1, \ldots, x_1, x_2, \ldots, x_l) = (m!) g(x_1, x_2, \ldots, x_l)$$

e $0 < m < p$, segue que

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_l) = (m!)^{-1} h(x_1, \ldots, x_1, x_2, \ldots, x_l) \in I + C(G).$$

Assim $x_1^{pq} g \in I + C(G)$. Como $f + T = x_1^{pq} g(x_1, \ldots, x_l) + T$, temos $f = x_1^{pq} g + f_1$, onde $f_1 \in T \subset C(G)$. Portanto $f \in I + C(G)$. □

Definição 2.2.2. *Um T-espaço V não finitamente gerado é dito um T-espaço limite se, para qualquer T-espaço W de $\mathbb{F}\langle X \rangle$ tal que $V \subsetneq W$ temos que W é finitamente gerado.*

Lema 2.2.12. *Se V é um T-subespaço não finitamente gerado, então V está contido em algum T subespaço limite V^*.*

Demonstração: Seja X o conjunto de todos os T-subespaços de $\mathbb{F}\langle X \rangle$ que não são finitamente gerados e que contêm V, isto é,

$$X = \{W \subset \mathbb{F}\langle X \rangle \mid V \subset W,\ W \text{ é } T\text{-subespaço não finitamente gerado}\}.$$

Note que X é um conjunto parcialmente ordenado pela inclusão. Tome agora uma cadeia C em X e considere P como sendo a união dos elementos de C. Observe que $P \in X$ e todo elemento de C é menor que P. Assim, P é um limitante superior para C. Logo, pelo Lema de Zorn, X possui um elemento maximal V^*. Observe que V^* é um T-espaço limite. De fato, suponha que V^* não é um T-espaço limite, então existe um T-espaço W tal que $V \subset V^* \subsetneq W$ e W não é finitamente gerado. Consequentemente temos W está em X, e é "maior"que V^*. Absurdo, pois V^* é um elemento maximal.

□

Teorema 2.2.13. *Se $\mathbb{F}$ é corpo infinito de car$(\mathbb{F}) = p > 2$, então $C(G)$ é T-espaço limite.*

Demonstração: Segue do Teorema 2.2.10 que $C(G)$ não é finitamente gerado como T-espaço. Portanto, se $C(G) \subsetneq W$, basta mostrar que W é finitamente gerado como T-espaço.

Pela Proposição 2.2.11, temos $W = I + C(G)$ para algum T-ideal I de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ com $T \subsetneq I$. Pelo Lema 2.1.2, I é gerado como um T-ideal por

$$[x_1, x_2, x_3] \text{ e } [x_1, x_2][x_3, x_4]\cdots[x_{2N-1}, x_{2N}],$$

para algum $N \in \mathbb{N}$. Portanto, I é gerado como T-espaço por

$$x_0[x_1, x_2, x_3]x_4 \tag{2.5}$$

e

$$x_0[x_1, x_2][x_3, x_4]\cdots[x_{2N-1}, x_{2N}]x_{2N+1}. \tag{2.6}$$

Uma vez que o T-espaço $C(G)$ é gerado por (2.5) e pelos elementos

$$x_0^p,\ x_0^p q_1,\ x_0^p q_2, \ldots,\ x_0^p q_N,\ x_0^p q_{N+1}, \ldots \tag{2.7}$$

segue que o T-espaço $W = I + C(G)$ é gerado por (2.5), (2.6) e (2.7). Se $s \geq N$, então

$$\begin{aligned} x_0^p q_s + T &= x_0 x_1^{p-1}[x_1, x_2]x_2^{p-1}\cdots x_{2N-1}^{p-1}[x_{2N-1}, x_{2N}]x_{2N}^{p-1}\cdots x_{2s-1}^{p-1}[x_{2s-1}, x_{2s}]x_{2s}^{p-1} + T \\ &= (x_0 x_1^{p-1} x_2^{p-1}\cdots x_{2s}^{p-1})[x_1, x_2]\cdots[x_{2N-1}, x_{2N}](\cdots[x_{2s-1}, x_{2s}]) + T, \end{aligned}$$

pois os elementos $[x_i, x_j] + T$ são centrais em $\mathbb{F}\langle X\rangle/T$. Logo $x_0^p q_s \in I$ para todo $s \geq N$. Segue que W é gerado como um T-espaço pelos polinômios (2.5), (2.6) e

$$x_0^p,\ x_0^p q_1, \ldots, x_0^p q_{N-1}.$$

Portanto W é um T-espaço finitamente gerado. □

Proposição 2.2.14. *Se $car(\mathbb{F}) = 0$, então o T-espaço $C(G)$ é gerado por* 1 *e pelos polinômios*

$$x_1[x_2, x_3, x_4] \text{ e } [x_1, x_2].$$

Demonstração: Denote por W o T-espaço gerado pelos polinômios do enunciado. Já sabemos que $W \subseteq C(G)$. Agora, como $car(\mathbb{F}) = 0$ segue que $C(G)$ é gerado por seus polinômios multilineares. Seja $f \in C(G)$ um polinômio multilinear. Se f é um polinômio com grau nulo, então $f \in \mathbb{F}$. Se o grau de f é não nulo, então como $f \in C(G)$, temos do Lema 2.2.2 que f está no T-espaço gerado pelos polinômios $x_1[x_2, x_3, x_4]$ e $[x_1, x_2]$. Logo, $C(G) \subseteq W$. □

Capítulo 3

T-espaços Limites

3.1 O T-espaço C(G) para n variáveis fixadas

Ao longo de toda a seção, $\mathbb{F}$ será um corpo infinito de $\mathrm{car}(\mathbb{F}) = p > 2$. Relembramos que $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$. Agora, denote por X_n o conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ e denote por C_n o conjunto dos polinômios centrais da álgebra de Grassmann G nas n variáveis $x_1, \ldots, x_n$, isto é,

$$C_n = C(G) \cap \mathbb{F}\langle X_n \rangle.$$

O objetivo principal desta seção é mostrar que C_n é um T-espaço limite de $\mathbb{F}\langle X_n \rangle$ quando n é par e finitamente gerado quando n é ímpar.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $T^{(3,k)}$ o T-ideal de $\mathbb{F}\langle X \rangle$ gerado pelos polinômios

$$[x_1, x_2, x_3] \text{ e } [x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2k-1}, x_{2k}].$$

Relembramos que

$$q(x_1, x_2) = x_1^{p-1}[x_1, x_2]x_2^{p-1} \quad \text{e} \quad q_k(x_1, \ldots, x_{2k}) = q(x_1, x_2) \cdots q(x_{2k-1}, x_{2k}).$$

Defina, para cada $l \geq 0$,

$$q^{(l)}(x_1, x_2) = x_1^{p^l-1}[x_1, x_2]x_2^{p^l-1} \quad \text{e} \quad q_k^{(l)}(x_1, \ldots, x_{2k}) = q^{(l)}(x_1, x_2) \cdots q^{(l)}(x_{2k-1}, x_{2k}).$$

Nos capítulos anteriores, a notação T era designada para o T-ideal $T = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$. Para manter a notação do artigo [11], denotaremos tal T-ideal por $T^{(3)}$, isto é,

$$T^{(3)} = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T.$$

Defina $T_n^{(3)} = T^{(3)} \cap \mathbb{F}\langle X_n \rangle$.

Lema 3.1.1. *Se $n < 2i$, então*

$$T^{(3,i)} \cap \mathbb{F}\langle X_n \rangle = T_n^{(3)}. \tag{3.1}$$

Demonstração: Sejam $g_0, \ldots, g_{2i+1}$ polinômios em $\mathbb{F}\langle X_n \rangle$. Por linearidade, podemos escrever

$$g_0[g_1, g_2] \ldots [g_{2i-1}, g_{2i}]g_{2i+1}$$

como combinação linear de elementos

$$m_0[m_1, m_2] \ldots [m_{2i-1}, m_{2i}]m_{2i+1},$$

onde $m_0, \ldots, m_{2i+1}$ são monômios. Estes, por sua vez, são combinação linear de elementos do tipo

$$u_0[x_{j_1}, x_{j_2}]u_1 \ldots u_{i-1}[x_{j_{2i-1}}, x_{j_{2i}}]u_i,$$

onde $u_0, \ldots, u_i$ são monômios. Agora,

$$u_0[x_{j_1}, x_{j_2}]u_1 \ldots u_{i-1}[x_{j_{2i-1}}, x_{j_{2i}}]u_i + T_n^{(3)} = u_0u_1 \ldots u_i[x_{j_1}, x_{j_2}] \ldots [x_{j_{2i-1}}, x_{j_{2i}}] + T_n^{(3)} = T_n^{(3)}.$$

A última igualdade segue do fato que temos a repetição de dois $x's$. Concluímos assim o resultado. □

Outro lema que será usado posteriormente é o seguinte:

Lema 3.1.2. *Se $r \geq i$, então*

$$x_0^p q_r(x_1, \ldots, x_{2r}) \in T^{(3,i)}.$$

Demonstração: Como $[a, b] + T^{(3,i)}$ está no centro de $\mathbb{F}\langle X \rangle / T^{(3,i)}$, segue que

$$x_0^p q_r + T^{(3,i)} = x_0^p x_1^{p-1} \ldots x_{2r}^{p-1}[x_1, x_2] \ldots [x_{2i-1}, x_{2i}] \ldots [x_{2r-1}, x_{2r}] + T^{(3,i)} = T^{(3,i)}.$$

A demonstração está concluída. □

Denotamos por $Q^{(k,l)}$ o T-espaço de $\mathbb{F}\langle X \rangle$ gerado por $q_k^{(l)}$, isto é,

$$Q^{(k,l)} = \langle q_k^{(l)}(x_1, \ldots, x_{2k}) \rangle^{TS}.$$

A componente multi-homogênea com multigrau $(p^{l-1}, \ldots, p^{l-1})$ do polinômio

$$\begin{aligned} & q_k^{(l)}(1+x_1, \ldots, 1+x_{2k}) \\ = \; & (1+x_1)^{p^l-1}[x_1, x_2](1+x_2)^{p^l-1} \cdots (1+x_{2k-1})^{p^l-1}[x_{2k-1}, x_{2k}](1+x_{2k})^{p^l-1} \end{aligned}$$

é igual a

$$\gamma q_k^{(l-1)}(x_1, \ldots, x_{2k}) = \gamma x_1^{p^{l-1}-1}[x_1, x_2]x_2^{p^{l-1}-1} \cdots x_{2k-1}^{p^{l-1}-1}[x_{2k-1}, x_{2k}]x_{2k}^{p^{l-1}-1},$$

onde

$$\gamma = \binom{p^l - 1}{p^{l-1} - 1}^{2k} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Assim $Q^{(k,l-1)} \subset Q^{(k,l)}$ e portanto

$$\sum_{i=0}^{l} Q^{(k,i)} = Q^{(k,l)}. \tag{3.2}$$

O seguinte lema é uma reformulação de um resultado de Grishin e Tsybulya [13, Teorema 1.3, item 1)] e será usado para demonstrar a próxima proposição.

Lema 3.1.3. *Seja*

$$m = x_1^{a_1-1}x_2^{a_2-1} \cdots x_{2k}^{a_{2k}-1}[x_1, x_2] \cdots [x_{2k-1}, x_{2k}],$$

onde $a_i \geq 1$ para todo i. Se p^l (onde $l \geq 0$) é a maior potência de p que divide a_i para todo i, então

$$\langle m \rangle^{TS} + T^{(3)} = Q^{(k,l)} + T^{(3)}.$$

Proposição 3.1.4. *Se $n = 2k$, $k \geq 1$, então $C_n/T_n^{(3)}$ é gerado como um T-espaço de $\mathbb{F}\langle X_n \rangle / T_n^{(3)}$ pelos polinômios*

$$x_1^p + T_n^{(3)}, x_1^p q_1(x_2, x_3) + T_n^{(3)}, \ldots, x_1^p q_{k-1}(x_2, \ldots, x_{2k-1}) + T_n^{(3)} \tag{3.3}$$

juntamente com os polinômios

$$\{q_k^{(l)}(x_1, \ldots, x_{2k}) + T_n^{(3)} \mid l = 1, 2, \ldots\}. \tag{3.4}$$

Se $n = 2k+1,\ k \geq 1,$ então $C_n/T_n^{(3)}$ é gerado como um T-espaço de $\mathbb{F}\langle X_n\rangle/T_n^{(3)}$ pelos polinômios

$$x_1^p + T_n^{(3)}, x_1^p q_1(x_2, x_3) + T_n^{(3)}, \ldots, x_1^p q_k(x_2, \ldots, x_{2k+1}) + T_n^{(3)}. \tag{3.5}$$

Demonstração: Seja U o T-espaço de $\mathbb{F}\langle X_n\rangle$ definido da seguinte maneira:

i) $T_n^{(3)} \subset U$;

ii) o T-espaço $U/T_n^{(3)}$ de $\mathbb{F}\langle X_n\rangle/T_n^{(3)}$ é gerado pelos polinômios (3.3) e (3.4) se $n = 2k$, e pelos polinômios (3.5) se $n = 2k+1$.

Para provar a proposição, mostraremos que $C_n/T_n^{(3)} = U/T_n^{(3)}$ (equivalentemente, $C_n = U$). É fácil ver que $U/T_n^{(3)} \subseteq C_n/T_n^{(3)}$. Resta então provar que $C_n/T_n^{(3)} \subseteq U/T_n^{(3)}$ (equivalentemente, $C_n \subseteq U$).

Seja h um elemento qualquer de $C_n = C(G) \cap \mathbb{F}\langle X_n\rangle$. Vamos mostrar que $h + T_n^{(3)} \in U/T_n^{(3)}$.

Uma vez que $h \in C(G)$, segue do Teorema 2.2.7 que

$$h = \sum_j \alpha_j v_j^p + \sum_{(i,j)} \alpha_{i,j} w_{i,j}^p q_i(f_1^{(i,j)}, \ldots, f_{2i}^{(i,j)}) + h',$$

onde $v_j, w_{i,j}, f_s^{(i,j)} \in \mathbb{F}\langle X\rangle$, $\alpha_j, \alpha_{i,j} \in \mathbb{F}$, $h' \in T^{(3)}$. Como $h \in \mathbb{F}\langle X_n\rangle$, podemos assumir que $v_j, w_{i,j}, f_s^{(i,j)}, h' \in \mathbb{F}\langle X_n\rangle$ para todo i, j, s. Logo

$$h + T^3 = \sum_j \alpha_j v_j^p + \sum_{(i,j)} \alpha_{i,j} w_{i,j}^p q_i(f_1^{(i,j)}, \ldots, f_{2i}^{(i,j)}) + T_n^{(3)}.$$

Relembramos que $T^{(3,i)}$ é o T-ideal em $\mathbb{F}\langle X\rangle$ gerado pelos polinômios

$$[x_1, x_2, x_3] \ \text{ e } \ [x_1, x_2] \cdots [x_{2i-1}, x_{2i}].$$

Pelo Lema 3.1.1, se $2i > n$, então $T^{(3,i)} \cap \mathbb{F}\langle X_n\rangle = T_n^{(3)}$. Além disso, pelo Lema 3.1.2,

$$w_{i,j}^p q_i(f_1^{(i,j)}, \ldots, f_{2i}^{(i,j)}) \in T^{(3,i)}.$$

Logo,

$$\sum_{i > \frac{n}{2}} \sum_j \alpha_{i,j} w_{i,j}^p q_i(f_1^{(i,j)}, \ldots, f_{2i}^{(i,j)}) \in T^{(3,i)} \cap \mathbb{F}\langle X_n\rangle = T_n^{(3)}.$$

Segue que

$$h + T_n^{(3)} = \sum_j \alpha_j v_j^p + \sum_{i \leq \frac{n}{2}} \sum_j \alpha_{i,j} w_{i,j}^p q_i(f_1^{(i,j)}, \ldots, f_{2i}^{(i,j)}) + T_n^{(3)}.$$

Vamos analisar agora a paridade de n:

a) Se $n = 2k + 1$ ($k \geq 1$), então

$$h + T_n^{(3)} = \sum_j \alpha_j v_j^p + \sum_{i=1}^{k} \sum_j \alpha_{i,j} w_{i,j}^p q_i(f_1^{(i,j)}, \ldots, f_{2i}^{(i,j)}) + T_n^{(3)}.$$

Assim, $h + T_n^{(3)} \in U/T_n^{(3)}$ como era o desejado.

b) Se $n = 2k$ ($k \geq 1$), então

$$h + T_n^{(3)} = h_1 + h_2 + T_n^{(3)},$$

onde

$$h_1 = \sum_j \alpha_j v_j^p + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_j \alpha_{i,j} w_{i,j}^p q_i(f_1^{(i,j)}, \ldots, f_{2i}^{(i,j)}),$$

$$h_2 = \sum_j \alpha_{k,j} w_{k,j}^p q_k(f_1^{(k,j)}, \ldots, f_{2k}^{(k,j)}).$$

Como $h_1 + T_n^{(3)}$ pertence ao T-espaço gerado pelos polinômios (3.3), então segue que $h_1 + T_n^{(3)} \in U/T_n^{(3)}$. Por outro lado, pode ser mostrado que $h_2 + T_n^{(3)}$ é combinação linear de polinômios da forma $m + T_n^{(3)}$, onde

$$m = x_1^{b_1} \cdots x_{2k}^{b_{2k}} [x_1, x_2] \cdots [x_{2k-1}, x_{2k}].$$

Afirmamos que, para cada m desta forma, o polinômio $m + T_{2k}^{(3)} \in U/T_{2k}^{(3)}$. De fato, pelo Lema 3.1.3,

$$\langle m \rangle^{TS} + T^{(3)} = Q^{(k,l)} + T^{(3)}$$

para algum $l \geq 0$. Como $Q^{(k,0)} \subset Q^{(k,1)}$, podemos assumir que $l \geq 1$. Temos

$$m = g_1 + g_2,$$

onde $g_1 \in Q^{(k,l)}$ e $g_2 \in T^{(3)}$. Como $Q^{(k,l)} = \langle q_k^{(l)} \rangle^{TS}$ e $T^{(3)} = \langle x_1[x_2, x_3, x_4]x_5 \rangle^{TS}$, temos

$$g_1 = \sum_i \alpha_i q_k^{(l)}(u_1^{(i)}, \ldots, u_{2k}^{(i)}) \text{ e } g_2 = \sum_j \beta_j v_1^{(j)}[v_2^{(j)}, v_3^{(j)}, v_4^{(j)}]v_5^{(j)}$$

para alguns $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{F}, u_s^{(i)}, v_s^{(j)} \in \mathbb{F}\langle X \rangle$. Substituindo, se necessário, algumas variáveis por 0, podemos assumir que $u_s^{(i)}, v_s^{(j)} \in \mathbb{F}\langle X_{2k} \rangle$ e $g_2 \in T_{2k}^{(3)}$. Segue que $m + T_{2k}^{(3)}$ pertence ao T-espaço de $\mathbb{F}\langle X_{2k} \rangle / T_{2k}^{(3)}$ gerado por $q_k^{(l)} + T_{2k}^{(3)}$ para algum $l \geq 1$. Logo, $m + T_{2k}^{(3)} \in U/T_{2k}^{(3)}$ e portanto $h + T_{2k}^{(3)} \in U/T_{2k}^{(3)}$ como era desejado.

Completamos assim a demonstração da proposição. □

Proposição 3.1.5. *Se $n = 2k,\ k > 1$, então C_n é gerado como um T-espaço de $\mathbb{F}\langle X_n \rangle$ pelos polinômios*

$$x_1[x_2, x_3, x_4],\ x_1^p,\ x_1^p q_1(x_2, x_3),\ \ldots,\ x_1^p q_{k-1}(x_2, \ldots, x_{2k-1})$$

juntamente com os polinômios

$$\{q_k^{(l)}(x_1, \ldots, x_{2k}) \mid l = 1, 2, \ldots\}.$$

Se $n = 2k + 1,\ k > 1$, então C_n é gerado como um T-espaço de $\mathbb{F}\langle X_n \rangle$ pelos polinômios

$$x_1[x_2, x_3, x_4],\ x_1^p,\ x_1^p q_1(x_2, x_3),\ \ldots,\ x_1^p q_k(x_2, \ldots, x_{2k+1}).$$

Demonstração: Pelos comentários após o Corolário 2.2.5, temos que

$$\langle x_1[x_2, x_3, x_4] \rangle^{TS} = T^{(3)}.$$

Segue então que $x_1[x_2, x_3, x_4]$ gera $T_n^{(3)}$ como um T-espaço de $\mathbb{F}\langle X_n \rangle$ para cada $n \geq 4$. Agora o resultado segue da proposição anterior. □

Seja $U^{(k-1)}$ o T-espaço de $\mathbb{F}\langle X \rangle$ gerado pelos polinômios

$$x_1^p,\ x_1^p q_1(x_2, x_3), \ldots, x_1^p q_{k-1}(x_2, \ldots, x_{2k-1}).$$

A próxima proposição é um caso particular de [13, Teorema 3.1].

Proposição 3.1.6. *Para cada $l \geq 1$,*

$$(Q^{(k,l+1)} + T^{(3)})/T^{(3)} \nsubseteq (U^{(k-1)} + Q^{(k,l)} + T^{(3,k+1)})/T^{(3)}.$$

Observação 5. *Os T-espaços $(U^{(k-1)} + T^{(3)})/T^{(3)}$, $(Q^{(k,l)} + T^{(3)})/T^{(3)}$ e $T^{(3,k+1)}/T^{(3)}$ são denotados em [13] por $\sum_{i<k} CD_p^{(i)}$, $C_{p^l}^{(k)}$ e $C^{(k+1)}$, respectivamente.*

Corolário 3.1.7. *Para cada $l \geq 1$, $q_k^{(l+1)} \notin U^{(k-1)} + Q^{(k,l)} + T^{(3,k+1)}$.*

Demonstração: Sabemos que $Q^{(k,l+1)}$ é gerado pelo polinômio $q_k^{(l+1)}$ e $T^{(3)} \subset T^{(3,k+1)}$. Se $q_k^{(l+1)} \in U^{(k-1)} + Q^{(k,l)} + T^{(3,k+1)}$, então

$$(Q^{(k,l+1)} + T^{(3)})/T^{(3)} \subseteq (U^{(k-1)} + Q^{(k,l)} + T^{(3,k+1)})/T^{(3)}.$$

O que contradiz a Proposição 3.1.6. Portanto, $q_k^{(l+1)} \notin U^{(k-1)} + Q^{(k,l)} + T^{(3,k+1)}$. □

Proposição 3.1.8. *Para todo $k \geq 1$, C_{2k} não é finitamente gerado como um T-espaço de $\mathbb{F}\langle X_{2k}\rangle$.*

Demonstração: Pela Proposição 3.1.4, C_{2k} é gerado como um T-espaço por $T_{2k}^{(3)}$ juntamente com os polinômios

$$x_1^p,\ x_1^p q_1(x_2, x_3), \ldots, x_1^p q_{k-1}(x_2, \ldots, x_{2k-1}) \tag{3.6}$$

e

$$\{q_k^{(l)}(x_1, \ldots, x_{2k}) \mid l = 1, 2, \ldots\}.$$

Vamos denotar por V_l o T-espaço de $\mathbb{F}\langle X_{2k}\rangle$ gerado por $T_{2k}^{(3)}$, pelos polinômios (3.6) e por $\{q_k^{(i)}(x_1, \ldots, x_{2k}) \mid i \leq l\}$. Segue da definição de V_l que

$$C_{2k} = \bigcup_{l \geq 1} V_l \tag{3.7}$$

e também $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq V_l \subseteq \cdots$.

Afirmamos que para todo $l \geq 1$ vale $V_l \subsetneq V_{l+1}$.

De fato, pelo Corolário 3.1.7 temos

$$q_k^{(l+1)} \notin U^{(k-1)} + Q^{(k,l)} + T^{(3,k+1)},$$

e por (3.2) temos $\sum_{i \leq l} Q^{(k,i)} = Q^{(k,l)}$. Logo

$$V_l \subset U^{(k-1)} + \sum_{i \leq l} Q^{(k,i)} + T^{(3,k+1)} = U^{(k-1)} + Q^{(k,l)} + T^{(3,k+1)},$$

e consequentemente $q_k^{(l+1)} \notin V_l$. Portanto,

$$V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_l \subsetneq \cdots. \tag{3.8}$$

Segue de (3.7) e (3.8) que C_{2k} não é finitamente gerado como um T-espaço de $\mathbb{F}\langle X_{2k}\rangle$. □

Para quaisquer $1 \leq i_1 < \cdots < i_t \leq n$ e $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ tais que $a_{i_1}, \ldots, a_{i_t} \geq 1$, defina $\dfrac{x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}}{x_{i_1} \cdots x_{i_t}}$ como sendo o monômio

$$\frac{x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}}{x_{i_1} \cdots x_{i_t}} = x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n},$$

onde $b_j = a_j - 1$ se $j \in \{i_1, \ldots, i_t\}$ e $a_j = b_j$ caso contrário.

Lema 3.1.9. *Seja $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X \rangle$ um polinômio multi-homogêneo da forma*

$$f = \alpha x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} + \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{2t} \leq n} \alpha_{(i_1, \ldots, i_{2t})} \frac{x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}}{x_{i_1} \cdots x_{i_{2t}}} [x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}] \tag{3.9}$$

onde α, $\alpha_{(i_1, \ldots, i_{2t})} \in \mathbb{F}$. Seja $L = \langle f \rangle^{TS} + \langle [x_1, x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)}$. Suponha que $a_i = 1$ para algum i. Então $L = \mathbb{F}\langle X \rangle$ ou

$$L = \langle [x_1, x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)} \quad ou \quad L = \langle x_1 [x_2, x_3] \cdots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}] \rangle^{TS} + \langle [x_1, x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)}$$

para algum $\theta \leq \frac{n-1}{2}$.

Demonstração: Segue da Proposição 2.1.4, que qualquer polinômio multi-homogêneo $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X \rangle$ pode ser escrito, módulo $T^{(3)}$, na forma (3.9). Podemos assumir (permutando os geradores livres $x_1, \ldots, x_n$ se necessário) que $a_1 = 1$.

Observe que se $\alpha \neq 0$, então $f(x_1, 1, \ldots, 1) = \alpha x_1 \in L$. Assim, $L = \langle x_1 \rangle^{TS} = \mathbb{F}\langle X \rangle$. Suponha que $\alpha = 0$.

Afirmação: podemos assumir, sem perda de generalidade, que f tem a forma $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 g(x_2, \ldots, x_n)$, onde

$$g = \sum_{\substack{2 \leq i_1 < \cdots < i_{2t} \leq n \\ t \geq 1}} \alpha_{(i_1, \ldots, i_{2t})} \frac{x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}}{x_{i_1} \cdots x_{i_{2t}}} [x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}]. \tag{3.10}$$

De fato, considere um termo $m = \frac{x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}}{x_{i_1} \cdots x_{i_{2t}}} [x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}]$ em (3.9).

Se $i_1 > 1$, então

$$m = x_1 \frac{x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}}{x_{i_1} \cdots x_{i_{2t}}} [x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}]. \tag{3.11}$$

Se $i_1 = 1$, então $m = m'[x_1, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}]$, onde $m' = \frac{x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}}{x_{i_2} \cdots x_{i_{2t}}}$. Usando a identidade (1.2) e usando o fato que $[g_1, g_2] + T^{(3)}$ está no centro de $\mathbb{F}\langle X \rangle / T^{(3)}$, temos

$$\begin{aligned}
m + T^{(3)} &= m'[x_1, x_{i_2}]\cdots[x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}] + T^{(3)} \\
&= [m'x_1, x_{i_2}]\cdots[x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}] - x_1[m', x_{i_2}]\cdots[x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}] + T^{(3)} \\
&= (m'x_1x_{i_2} - x_{i_2}m'x_1)[x_{i_3}, x_{i_4}]\cdots[x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}] - x_1[m', x_{i_2}]\cdots[x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}] + T^{(3)} \\
&= m'x_1x_{i_2}[x_{i_3}, x_{i_4}]\cdots[x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}] - x_{i_2}m'x_1[x_{i_3}, x_{i_4}]\cdots[x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}] - \\
&\quad -x_1[m', x_{i_2}]\cdots[x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}] + T^{(3)} \\
&= m'x_1[x_{i_3}, x_{i_4}]\cdots[x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}]x_{i_2} - x_{i_2}m'x_1[x_{i_3}, x_{i_4}]\cdots[x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}] - \\
&\quad -x_1[m', x_{i_2}]\cdots[x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}] + T^{(3)} \\
&= [m'x_1[x_{i_3}, x_{i_4}]\cdots[x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}], x_{i_2}] - x_1[m', x_{i_2}]\cdots[x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}] + T^{(3)}.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$m = -x_1[m', x_{i_2}]\cdots[x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}] + h, \tag{3.12}$$

onde $h \in \langle [x_1, x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)}$.

Por (3.11) e (3.12) existe um polinômio multi-homogêneo $g_1 = g_1(x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X \rangle$, tal que $f = x_1g_1 + h_1$, onde $h_1 \in \langle [x_1, x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)}$. Além disso, pela nossa observação no começo da demonstração, segue que existe um polinômio multi-homogêneo g da forma (3.10), tal que $g + T^{(3)} = g_1 + T^{(3)}$. Logo $f = x_1g + h_2$, onde $h_2 \in \langle [x_1, x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)}$. Concluímos que $L = \langle x_1g(x_2, \ldots, x_n) \rangle^{TS} + \langle [x_1, x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)}$. Portanto, podemos assumir sem perda de generalidade que $f = x_1g(x_2, \ldots, x_n)$, onde g é da forma (3.10), como havíamos afirmado.

Se $f = 0$, então $L = \langle [x_1, x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)}$. Suponha que $f \neq 0$. Seja

$$\theta = \min\{t \mid \alpha_{(i_1,\ldots,i_{2t})} \neq 0\}.$$

Como $f = x_1g(x_2, \ldots, x_n)$, segue que $2\theta < n$. Logo $2\theta + 1 \leq n$ e portanto $\theta \leq \frac{n-1}{2}$. Podemos assumir que $\alpha_{(2,\ldots,2\theta+1)} \neq 0$. Então

$$\begin{aligned}
f &= x_1 \Bigg(\alpha_{(2,\ldots,2\theta+1)} \frac{x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}}{x_2\cdots x_{2\theta+1}}[x_2, x_3]\cdots[x_{2\theta}, x_{2\theta+1}] \\
&\quad + \sum_{\substack{2\leq i_1<\cdots<i_{2t}\leq n \\ t\geq\theta,\, i_{2t}>2\theta+1}} \alpha_{(i_1,\ldots,i_{2t})} \frac{x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}}{x_{i_1}\cdots x_{i_{2t}}}[x_{i_1}, x_{i_2}]\cdots[x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}] \Bigg).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Seja $f_1(x_1, \ldots, x_{2\theta+1}) = f(x_1, \ldots, x_{2\theta+1}, 1, \ldots, 1) \in L$. Então

$$f_1 = \alpha_{(2,\ldots,2\theta+1)} x_1 \frac{x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}}{x_2 \cdots x_{2\theta+1}} [x_2, x_3] \cdots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}].$$

A componente multilinear do polinômio $f_1(x_1, x_2+1, \ldots, x_{2\theta+1}+1)$ nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_{2\theta+1}$ é

$$\alpha_{(2,\ldots,2\theta+1)} x_1 [x_2, x_3] \cdots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}].$$

Logo, $x_1[x_2, x_3] \cdots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}] \in L$ e portanto

$$\langle x_1[x_2, x_3] \cdots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}] \rangle^{TS} + \langle [x_1, x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)} \subseteq L.$$

Por outro lado, é claro que o polinômio f da forma (3.13) pertence ao T-espaço de $\mathbb{F}\langle X \rangle$ gerado por $x_1[x_2, x_3] \cdots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}]$. Logo, $\langle f \rangle^{TS} \subseteq \langle x_1[x_2, x_3] \cdots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}] \rangle^{TS}$ e, consequentemente,

$$L \subseteq \langle x_1[x_2, x_3] \cdots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}] \rangle^{TS} + \langle [x_1, x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)}.$$

Portanto, $L = \langle x_1[x_2, x_3] \cdots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}] \rangle^{TS} + \langle [x_1, x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)}$. □

Proposição 3.1.10. *Seja W um T-espaço de $\mathbb{F}\langle X_{2k} \rangle$ tal que $C_{2k} \subsetneq W$. Então $W = \mathbb{F}\langle X_{2k} \rangle$ ou W é gerado como um T-espaço pelos polinômios*

$$x_1^p,\ x_1^p q_1(x_2, x_3), \ldots, x_1^p q_{\lambda-1}(x_2, \ldots, x_{2\lambda-1}),$$
$$x_1[x_2, x_3, x_4],\ x_1[x_2, x_3] \cdots [x_{2\lambda}, x_{2\lambda+1}],$$

para algum $\lambda \leq k-1$.

Demonstração: Sobre um corpo infinito de característica $p > 0$, todo T-ideal de $\mathbb{F}\langle X \rangle$ é gerado pelos seus polinômios multi-homogêneos $f(x_1, \ldots, x_n)$ com multigrau $(p^{s_1}, \ldots, p^{s_n})$ para alguns $s_i \geq 0$ (veja, por exemplo [2]). O mesmo vale para T-espaços de $\mathbb{F}\langle X \rangle$.

Seja $f(x_1, \ldots, x_{2k}) \in W \setminus C_{2k}$ um polinômio multi-homogêneo. Podemos assumir que $\deg_{x_i} f = p^{s_i}$ para $i = 1, \ldots, l$ e $\deg_{x_i} f = 0$ para $i = l+1, \ldots, 2k$ (isto é, $f = f(x_1, \ldots, x_l)$). Então

$$f + T_{2k}^{(3)} = \alpha m + \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{2t} \leq l} \alpha_{(i_1,\ldots,i_{2t})} \frac{m}{x_{i_1} \cdots x_{i_{2t}}} [x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}] + T_{2K}^{(3)},$$

onde $\alpha, \alpha_{(i_1,\ldots,i_{2t})} \in \mathbb{F},\ m = x_1^{p^{s_1}} \cdots x_l^{p^{s_l}}$.

Se $s_i > 0$ para todo $i = 1, \ldots, l$, pode ser mostrado que $f \in C(G)$. Assim $f \in C_{2k}$ e temos uma contradição com a escolha de f. Portanto $s_i = 0$ para algum i, $1 \leq i \leq l$. Seja L_f o T-espaço de $\mathbb{F}\langle X \rangle$ gerado por $f, [x_1, x_2]$ e $T^{(3)}$. Pelo Lema 3.1.9, ou $L_f = \mathbb{F}\langle X \rangle$ ou $L_f = \langle [x_1, x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)}$ ou

$$L_f = \langle x_1[x_2, x_3] \cdots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}] \rangle^{TS} + \langle [x_1, x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)}$$

para algum $\theta < k$.

Se $L_f = \langle [x_1, x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)}$, então $f \in C_{2k}$. Absurdo. Se $k = 1$ (isto é, $f = f(x_1, x_2)$), então a única possibilidade é $L_f = \mathbb{F}\langle X \rangle$.

Se $L_f = \mathbb{F}\langle X \rangle$ para algum $f \in W \setminus C_{2k}$, então $x_1 \in W$ e assim $W = \mathbb{F}\langle X_{2k} \rangle$. Suponha que $W \neq \mathbb{F}\langle X_{2k} \rangle$. Então $k > 1$ e $L_f \neq \mathbb{F}\langle X \rangle$ para qualquer $f \in W \setminus C_{2k}$. Para cada $f \in W \setminus C_{2k}$ satisfazendo as condições do Lema 3.1.9, o T-espaço L_f de $\mathbb{F}\langle X \rangle$ é gerado pelos polinômios

$$[x_1, x_2], x_1[x_2, x_3, x_4] \text{ e } x_1[x_2, x_3] \cdots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}] \tag{3.14}$$

para algum $\theta = \theta_f < k$. Uma vez que os polinômios (3.14) pertencem a $\mathbb{F}\langle X_{2k} \rangle$ (relembramos que $k > 1$), o T-espaço de $\mathbb{F}\langle X_{2k} \rangle$ gerado por $f, [x_1, x_2]$ e $T^{(3)}$ é também gerado (como T-espaço) pelos polinômios (3.14). Observe que $[x_1, x_2] e x_1[x_2, x_3, x_4]$ pertencem a C_{2k}. Assim o T-espaço V_f de $\mathbb{F}\langle X_{2k} \rangle$ gerado por f e C_{2k} é também gerado por C_{2k} e $x_1[x_2, x_3] \cdots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}]$ para algum $\theta = \theta_f < k$.

Seja

$$\lambda = \min\{\theta \mid x_1[x_2, x_3] \cdots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}] \in W\}.$$

Uma vez que W é soma de T-espaços V_f para convenientes polinômios multi-homogêneos $f \in W \setminus C_{2k}$ e cada V_f é gerado por C_{2k} e $x_1[x_2, x_3] \cdots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}]$ para algum $\theta = \theta_f < k$, segue que W é gerado como um T-espaço de $\mathbb{F}\langle X_{2k} \rangle$ por C_{2k} e $x_1[x_2, x_3] \cdots [x_{2\lambda}, x_{2\lambda+1}]$. Agora temos da Proposição 3.1.5 que W é gerado pelos polinômios

$$x_1^p, x_1^p q_1(x_2, x_3), \ldots, x_1^p q_{\lambda-1}(x_2, \ldots, x_{2\lambda-1})$$

juntamente com os polinômios

$$x_1[x_2, x_3, x_4], x_1[x_2, x_3] \cdots [x_{2\lambda}, x_{2\lambda+1}],$$

onde $\lambda < k$. □

Corolário 3.1.11. *Seja $k \geq 1$ e W um T-espaço de $\mathbb{F}\langle X_{2k}\rangle$ tal que $C_{2k} \subsetneq W$. Então W é um T-espaço de $\mathbb{F}\langle X_{2k}\rangle$ finitamente gerado.*

Demonstração: Segue imediatamente da Proposição 3.1.10. □

Teorema 3.1.12. *Seja $\mathbb{F}$ um corpo infinito de característica $p > 2$. Se $n = 2k$, $k \geq 1$, então C_n é um T-espaço limite de $\mathbb{F}\langle X_n\rangle$. Se $n = 2k+1$, $k > 1$, então C_n é finitamente gerado como T-espaço de $\mathbb{F}\langle X_n\rangle$.*

Demonstração: Se $n = 2k$, o teorema é consequência imediata da Proposição 3.1.8 e do Corolário 3.1.11. Se $n = 2k+1$, $k > 1$, o teorema segue da Proposição 3.1.5. □

3.2 Infinitos T-espaços limites

Ao longo de toda a seção, $\mathbb{F}$ será um corpo infinito de $\mathrm{car}(\mathbb{F}) = p > 2$. Mostraremos que a álgebra $\mathbb{F}\langle X\rangle$ possui infinitos T-espaços limites.

Para cada $k \geq 1$, denote por R_k o T-espaço de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ gerado por C_{2k} e por $T^{(3,k+1)}$. Mostraremos que R_k é um T-espaço limite de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ e também $R_k \neq R_l$ para $k \neq l$.

Proposição 3.2.1. *R_k não é finitamente gerado como um T-espaço de $\mathbb{F}\langle X\rangle$.*

Demonstração: Defina $U^{(k-1)}$ como sendo o T-espaço de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ gerado pelos polinômios

$$x_1^p,\ x_1^p q_1(x_2, x_3), \ldots, x_1^p q_{k-1}(x_2, \ldots, x_{2k-1})$$

. Relembre agora que $Q^{(k,l)} = \langle q_k^{(l)}(x_1, \ldots, x_{2k})\rangle^{TS}$. Então, pela Proposição 3.1.5, temos

$$R_k = U^{(k-1)} + \sum_{l\geq 1} Q^{(k,l)} + T^{(3,k+1)}.$$

Seja $V_l = U^{(k-1)} + \sum_{i\leq l} Q^{(k,i)} + T^{(3,k+1)}$. Então

$$R_k = \bigcup_{l\geq 1} V_l \tag{3.15}$$

e $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots$. Por (3.2), $\sum_{i\leq l} Q^{(k,i)} = Q^{(k,l)}$. Portanto, $V_l = U^{(k-1)} + Q^{(k,l)} + T^{(3,k+1)}$. Pelo Corolário 3.1.7, $Q^{(k,l+1)} \nsubseteq V_l$ para todo $l \geq 1$. Assim,

$$V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \ldots . \tag{3.16}$$

Logo segue de (3.15) e (3.16) que R_k não é finitamente gerado como um T-espaço de $\mathbb{F}\langle X\rangle$. □

Lema 3.2.2. *Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ um polinômio da forma*

$$f = \alpha x_1^{p^{s_1}} \cdots x_n^{p^{s_n}} + \sum_{i_1<\cdots<i_{2t}} \alpha_{(i_1,\ldots,i_{2t})} \frac{x_1^{p^{s_1}} \cdots x_n^{p^{s_n}}}{x_{i_1} \cdots x_{i_{2t}}} [x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}] \tag{3.17}$$

onde α, $\alpha_{(i_1,\ldots,i_{2t})} \in \mathbb{F}$, $s_i \geq 0$ para todo i. Seja $L = \langle f\rangle^{TS} + R_k$, $k \geq 1$. Então ocorre apenas um dos seguintes casos:

1) $L = \mathbb{F}\langle X\rangle$;

2) $L = R_k$;

3) $L = \langle x_1[x_2, x_3] \cdots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}]\rangle^{TS} + R_k$ para algum θ, $1 \leq \theta \leq k$;

4) $L = \langle x_1^{p^s} q_k^{(s)}(x_2, \ldots, x_{2k+1})\rangle^{TS} + R_k$ para algum $s \geq 1$.

Demonstração: Seja $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ de grau p^{s_i} em x_i $(1 \leq i \leq n)$. Então f pode ser escrito, módulo $T^{(3)}$, na forma (3.17). Portanto, podemos assumir sem perda de generalidade (permutando os geradores livres $x_1, \ldots, x_n$ se necessário) que $s_1 \leq s_i$ para todo i. Escreva $s = s_1$.

Suponha que $s = 0$. Então, pelo Lema 3.1.9 temos que

$$\langle f\rangle^{TS} + \langle [x_1, x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)} = \mathbb{F}\langle X\rangle$$

ou

$$\langle f\rangle^{TS} + \langle [x_1, x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)} = \langle [x_1, x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)}$$

ou

$$\langle f\rangle^{TS} + \langle [x_1, x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)} = \langle x_1[x_2, x_3] \cdots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}]\rangle^{TS} + \langle [x_1, x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)}$$

para algum θ. Uma vez que $\langle [x_1, x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)} \subset R_k$ e $x_1[x_2, x_3] \cdots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}] \in R_k$, se $\theta > k$, segue que $L = \mathbb{F}\langle X\rangle$ ou $L = R_k$ ou

$$L = \langle x_1[x_2, x_3] \cdots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}]\rangle^{TS} + R_k$$

para algum $\theta \leq k$.

Agora suponha $s > 0$. Então $s_i > 0$ para todo i, $1 \leq i \leq n$. Pelo Lema 2.1.5,

$$(x_1^{p^{s_1-1}} \cdots x_n^{p^{s_n-1}})^p + T^{(3)} = x_1^{p^{s_1}} \cdots x_n^{p^{s_n}} + T^{(3)}.$$

Consequentemente, $x_1^{p^{s_1}} \cdots x_n^{p^{s_n}} \in (\langle x_1^p \rangle^{TS} + T^{(3)}) \subset R_k$. Observando que $p^{s_j} - 1 = (p-1) + p(p^{s_j-1} - 1)$, defina $b_i = p^{s_i}$. Então para todo $t < k$

$$\begin{aligned}
&\frac{x_1^{p^{s_1}} \cdots x_n^{p^{s_n}}}{x_{i_1} \cdots x_{i_{2t}}}[x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}] + T^{(3)} \\
&= x_{j_1}^{b_{j_1}} \cdots x_{j_l}^{b_{j_l}} x_{i_1}^{b_{i_1}-1} \cdots x_{i_{2t}}^{b_{i_{2t}}-1}[x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}] + T^{(3)} \\
&= y_1^p x_{i_1}^{p-1}[x_{i_1}, x_{i_2}] x_{i_2}^{p-1} \cdots x_{i_{2t-1}}^{p-1}[x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}] x_{i_{2t}}^{p-1} + T^{(3)},
\end{aligned}$$

onde

$$y_1 = x_{j_1}^{p^{(s_{j_1}-1)}} \cdots x_{j_l}^{p^{(s_{j_l}-1)}} x_{i_1}^{(p^{s_{i_1}-1}-1)} \cdots x_{i_{2t}}^{(p^{s_{i_{2t}}-1}-1)}$$

e $\{j_1, \ldots, j_l\} = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_{2t}\}$. Assim

$$\frac{x_1^{p^{s_1}} \cdots x_n^{p^{s_n}}}{x_{i_1} \cdots x_{i_{2t}}}[x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}] \in (\langle x_1^p q_t(x_2, \ldots, x_{2t+1}) \rangle^{TS} + T^{(3)}) \subset R_k.$$

Também temos $\frac{x_1^{p^{s_1}} \cdots x_n^{p^{s_n}}}{x_{i_1} \cdots x_{i_{2t}}}[x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}] \in T^{(3,k+1)} \subset R_k$ para todo $t > k$. Podemos então assumir, sem perda de generalidade, que o polinômio f é da forma

$$f = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{2k} \leq n} \alpha_{(i_1, \ldots, i_{2k})} \frac{x_1^{p^{s_1}} \cdots x_n^{p^{s_n}}}{x_{i_1} \cdots x_{i_{2k}}}[x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}]. \tag{3.18}$$

Observe que se $n < 2k$ então $f = 0$. Se $n = 2k$, então

$$f = \alpha_{(1,2,\ldots,2k)} \frac{x_1^{p^{s_1}} \cdots x_{2k}^{p^{s_{2k}}}}{x_1 x_2 \cdots x_{2k}}[x_1, x_2] \cdots [x_{2k-1}, x_{2k}],$$

e pelo Lema 3.1.3, segue que $f \in Q^{(k,s)} + T^{(3)}$, onde $s = s_1 > 0$. Em ambos os casos temos que $f \in R_k$ e $L = R_k$.

Suponha que $n > 2k$.

Afirmação: podemos assumir que f é da forma

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{p^s} g(x_2, \ldots, x_n), \tag{3.19}$$

onde

$$g = \sum_{2\le i_1<\cdots<i_{2k}\le n} \alpha_{(i_1,\ldots,i_{2k})}\frac{x_2^{p_{s_2}}\cdots x_n^{p_{s_n}}}{x_{i_1}\cdots x_{i_{2k}}}[x_{i_1},x_{i_2}]\cdots[x_{i_{2k-1}},x_{i_{2k}}].$$

De fato, considere um termo $m = \frac{x_1^{p_{s_1}}\cdots x_n^{p_{s_n}}}{x_{i_1}\cdots x_{i_{2k}}}[x_{i_1},x_{i_2}]\cdots[x_{i_{2k-1}},x_{i_{2k}}]$ em (3.18).

Se $i_1 > 1$, então

$$m = x_1^{p_s}\frac{x_2^{p_{s_2}}\cdots x_n^{p_{s_n}}}{x_{i_1}\cdots x_{i_{2k}}}[x_{i_1},x_{i_2}]\cdots[x_{i_{2k-1}},x_{i_{2k}}]. \tag{3.20}$$

Suponha $i_1 = 1$. Escreva $a_i = p^{s_i}$ para todo i. Então

$$\begin{aligned} m + T^{(3,k+1)} &= x_1^{p^s-1}\frac{x_2^{p^{s_2}}\cdots x_n^{p^{s_n}}}{x_{i_2}\cdots x_{i_{2k}}}[x_1,x_{i_2}]\cdots[x_{i_{2k-1}},x_{i_{2k}}] + T^{(3,k+1)} \\ &= x_{j_1}^{a_{j_1}}\cdots x_{j_l}^{a_{j_l}}x_1^{a_1-1}\cdots x_{i_{2k}}^{a_{i_{2k}}-1}[x_1,x_{i_2}]\cdots[x_{i_{2k-1}},x_{i_{2k}}] + T^{(3,k+1)} \\ &= x_1^{a_1-1}x_{j_1}^{a_{j_1}}\cdots x_{j_l}^{a_{j_l}}[x_1,x_{i_2}]x_{i_2}^{a_{i_2}-1}m' + T^{(3,k+1)}, \end{aligned}$$

onde

$$m' = x_{i_3}^{a_{i_3}-1}[x_{i_3},x_{i_4}]x_{i_4}^{a_{i_4}-1}\cdots x_{i_{2k-1}}^{a_{i_{2k-1}}-1}[x_{i_{2k-1}},x_{i_{2k}}]x_{i_{2k}}^{a_{i_{2k}}-1},$$

$\{j_1,\ldots,j_l\} = \{1,\ldots,n\}\setminus\{1,i_2,\ldots,i_{2k}\}$, $l = n-2k > 0$. Suponha que

$$a_1 = a_{j_1} = a_{j_2} = \ldots = a_{j_z} \ \text{ e } \ a_{j_{z+1}}, a_{j_{z+2}}, \ldots, a_{j_l} > a_1.$$

Seja

$$u = x_1x_{j_1}\ldots x_{j_z}x_{j_{z+1}}^{a'_{j_{z+1}}}\cdots x_{j_l}^{a'_{j_l}},$$

onde $a'_i = a_i/p^s$ para todo i. Seja

$$h = h(x_1,\ldots,x_{2k}) = x_1^{a_1-1}[x_1,x_2]x_2^{a_{i_2}-1}\cdots x_{2k-1}^{a_{i_{2k-1}}-1}[x_{2k-1},x_{2k}]x_{2k}^{a_{i_{2k}}-1}.$$

Pelo Lema 2.1.1, $h \in C(G)$; assim $h \in C_{2k} \subset R_k$. Então $h(u,x_{i_2},\ldots,x_{i_{2k}}) \in R_k$, isto é,

$$u^{p^s-1}[u,x_{i_2}]x_{i_2}^{a_{i_2}-1}m' \in R_k. \tag{3.21}$$

Uma vez que (ver Lema 2.1.5) $[v_1^p, v_2] \in T^{(3)} \subset T^{(3,k+1)}$ para quaisquer $v_1, v_2 \in \mathbb{F}\langle X\rangle$, temos pela identidade (1.2) que

$$\begin{aligned}
&u^{p^s-1}[u, x_{i_2}]x_{i_2}^{a_{i_2}-1}m' + T^{(3,k+1)}\\
&= (x_1 x_{j_1} \dots x_{j_z} x_{j_{z+1}}^{a'_{j_{z+1}}} \cdots x_{j_l}^{a'_{j_l}})^{p^s-1}[x_1 x_{j_1} \dots x_{j_z} x_{j_{z+1}}^{a'_{j_{z+1}}} \cdots x_{j_l}^{a'_{j_l}}, x_{i_2}]x_{i_2}^{a_{i_2}-1}m' + T^{(3,k+1)}\\
&= (x_1 x_{j_1} \dots x_{j_z} x_{j_{z+1}}^{a'_{j_{z+1}}} \cdots x_{j_l}^{a'_{j_l}})^{p^s-1} x_1 x_{j_1} \dots x_{j_z}[x_{j_{z+1}}^{a'_{j_{z+1}}} \cdots x_{j_l}^{a'_{j_l}}, x_{i_2}]x_{i_2}^{a_{i_2}-1}m' +\\
&\quad + (x_1 x_{j_1} \dots x_{j_z} x_{j_{z+1}}^{a'_{j_{z+1}}} \cdots x_{j_l}^{a'_{j_l}})^{p^s-1}[x_1 x_{j_1} \dots x_{j_z}, x_{i_2}]x_{j_{z+1}}^{a'_{j_{z+1}}} \cdots x_{j_l}^{a'_{j_l}} x_{i_2}^{a_{i_2}-1}m' + T^{(3,k+1)}\\
&= (x_1 x_{j_1} \dots x_{j_z})^{p^s-1}(x_{j_{z+1}}^{a'_{j_{z+1}}} \cdots x_{j_l}^{a'_{j_l}})^{p^s}[x_1 x_{j_1} \dots x_{j_z}, x_{i_2}]x_{i_2}^{a_{i_2}-1}m' + T^{(3,k+1)}\\
&= (x_1 x_{j_1} \dots x_{j_z})^{p^s-1} x_{j_{z+1}}^{a_{j_{z+1}}} \cdots x_{j_l}^{a_{j_l}}[x_1 x_{j_1} \dots x_{j_z}, x_{i_2}]x_{i_2}^{a_{i_2}-1}m' + T^{(3,k+1)}\\
&= (x_1 x_{j_1} \dots x_{j_z})^{p^s-1} x_{j_{z+1}}^{a_{j_{z+1}}} \cdots x_{j_l}^{a_{j_l}}[x_1, x_{i_2}]x_{j_1} \dots x_{j_z} x_{i_2}^{a_{i_2}-1}m' +\\
&\quad + (x_1 x_{j_1} \dots x_{j_z})^{p^s-1} x_{j_{z+1}}^{a_{j_{z+1}}} \cdots x_{j_l}^{a_{j_l}} x_1[x_{j_1} \dots x_{j_z}, x_{i_2}]x_{i_2}^{a_{i_2}-1}m' + T^{(3,k+1)}\\
&= m + x_1^{p^s} x_{j_1}^{p^s-1} \dots x_{j_z}^{p^s-1} x_{j_{z+1}}^{a_{j_{z+1}}} \cdots x_{j_l}^{a_{j_l}}[x_{j_1} \dots x_{j_z}, x_{i_2}]x_{i_2}^{a_{i_2}-1}m' + T^{(3,k+1)}.
\end{aligned}$$

Se $z = 0$, então $m \in R_k$. Suponha $z > 0$. Como

$$\begin{aligned}
&x_1^{p^s} x_{j_1}^{p^s-1} \dots x_{j_z}^{p^s-1} x_{j_{z+1}}^{a_{j_{z+1}}} \cdots x_{j_l}^{a_{j_l}}[x_{j_1} \dots x_{j_z}, x_{i_2}]x_{i_2}^{a_{i_2}-1}m' + T^{(3,k+1)}\\
&= x_1^{p^s} \sum_{2 \le i_1 < \cdots < i_{2k} \le n} \beta_{(i_1,\dots,i_{2k})} \frac{x_2^{p^{s_2}} \cdots x_n^{p^{s_n}}}{x_{i_1} \cdots x_{i_{2k}}}[x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}] + T^{(3,k+1)}
\end{aligned}$$

para alguns $\beta_{(i_1,\dots,i_{2k})} \in \mathbb{F}$, segue que

$$m + x_1^{p^s} \sum_{2 \le i_1 < \cdots < i_{2k} \le n} \beta_{(i_1,\dots,i_{2k})} \frac{x_2^{p^{s_2}} \cdots x_n^{p^{s_n}}}{x_{i_1} \cdots x_{i_{2k}}}[x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}] \in R_k. \qquad (3.22)$$

Logo, usando (3.20) e (3.22), podemos escrever $f = f_1 + f_2$, onde

$$f_1 = x_1^{p^s} \left(\sum_{2 \le i_1 < \cdots < i_{2k} \le n} \beta_{(i_1,\dots,i_{2k})} \frac{x_2^{p^{s_2}} \cdots x_n^{p^{s_n}}}{x_{i_1} \cdots x_{i_{2k}}}[x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}] \right)$$

é da forma (3.19) e $f_2 \in R_k$. Então temos $\langle f_1\rangle^{TS} + R_k = \langle f\rangle^{TS} + R_k$. Portanto, podemos assumir (substituindo f por f_1) que o polinômio f é da forma (3.19), como afirmamos.

Se $f = 0$, então $L = R_k$. Suponha $f \neq 0$. Então podemos assumir sem perda de generalidade que $\alpha_{(2,3,\dots,2k+1)} \neq 0$. Segue que o T-espaço $\langle f\rangle^{TS} + R_k$ contém o polinômio

$$\begin{aligned}
h(x_1, \dots x_{2k+1}) &= \alpha^{-1}_{(2,3,\dots,2k+1)} f(x_1, \dots x_{2k+1}, 1, \dots, 1)\\
&= x_1^{p^s} x_2^{p^{s_2}-1} \cdots x_{2k+1}^{p^{s_{2k+1}}-1}[x_2, x_3] \cdots [x_{2k}, x_{2k+1}].
\end{aligned}$$

Então $\langle f\rangle^{TS} + R_k$ também contém a componente multi-homogênea do polinômio $h(x_1+1,\ldots,x_{2k+1}+1)$ de grau p^s em cada variável x_i $(i=1,2,\ldots,2k+1)$, que módulo $T^{(3)}$, é igual ao polinômio

$$\gamma x_1^{p^s} x_2^{p^s-1}\cdots x_{2k+1}^{p^s-1}[x_2,x_3]\cdots[x_{2k},x_{2k+1}],$$

onde $\gamma = \prod_{i=2}^{2k+1}\binom{p^{s_i}-1}{p^s-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Concluímos que

$$x_1^{p^s} q_k^{(s)}(x_2,\ldots,x_{2k+1}) \in \langle f\rangle^{TS} + R_k.$$

Por outro lado, para todos $i_1,\ldots,i_{2k}$ tais que $2\le i_1<\cdots<i_{2k}\le n$, temos

$$x_1^{p^s}\frac{x_2^{p^{s_2}}\cdots x_n^{p^{s_n}}}{x_{i_1}\cdots x_{i_{2k}}}[x_{i_1},x_{i_2}]\cdots[x_{i_{2k-1}},x_{i_{2k}}] \in \langle x_1^{p^s} q_k^{(s)}(x_2,\ldots,x_{2k+1})\rangle^{TS} + T^{(3,k+1)}$$

(relembramos que $s_i \ge s$, para todo i) e portanto

$$f \in \langle x_1^{p^s} q_k^{(s)}(x_2,\ldots,x_{2k+1})\rangle^{TS} + T^{(3,k+1)}.$$

Logo,

$$\langle f\rangle^{TS} + R_k = \langle x_1^{p^s} q_k^{(s)}(x_2,\ldots,x_{2k+1})\rangle^{TS} + R_k,$$

onde $s\ge 1$. □

Proposição 3.2.3. *Seja W um T-espaço de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ tal que $R_k \subsetneq W$. Então ocorre um dos seguintes casos:*

1) $W = \mathbb{F}\langle X\rangle$;

2) W é gerado como um T-espaço pelos polinômios

$$x_1^p,\ x_1^p q_1(x_2,x_3),\ldots,x_1^p q_{\lambda-1}(x_2,\ldots,x_{2\lambda-1}),$$
$$x_1[x_2,x_3,x_4],\ x_1[x_2,x_3]\cdots[x_{2\lambda},x_{2\lambda+1}]$$

para algum $\lambda \le k$;

3) W é gerado como um T-espaço pelos polinômios

$$x_1^p,\ x_1^p q_1(x_2,x_3),\ldots,x_1^p q_{k-1}(x_2,\ldots,x_{2k-1}),$$
$$\{q_k^{(l)}(x_1,\ldots,x_{2k}) \mid 1\le l\le \mu-1\},\ x_1^{p^\mu} q_k^{(\mu)}(x_2,\ldots,x_{2k+1}),$$
$$x_1[x_2,x_3,x_4],\ x_1[x_2,x_3]\cdots[x_{2k+2},x_{2k+3}]$$

para algum $\mu \geq 1$.

Demonstração: Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio qualquer em $W \setminus R_k$ satisfazendo as condições do Lema 3.2.2, isto é, um polinômio multi-homogêneo tal que o grau de f em x_i é p^{s_i}, para alguns $s_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq n)$. Seja $L_f = \langle f \rangle^{TS} + R_k$. Pelo Lema 3.2.2 segue que $L_f = \mathbb{F}\langle X \rangle$ ou

$$L_f = \langle x_1[x_2, x_3] \cdots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}] \rangle^{TS} + R_k$$

para algum $\theta \leq k$ ou

$$L_f = \langle x_1^{p^s} q_k^{(s)}(x_2, \ldots, x_{2k+1}) \rangle^{TS} + R_k$$

para algum $s \geq 1$.

Note que W é gerado como um T-espaço de $\mathbb{F}\langle X \rangle$ por R_k juntamente com os polinômios $f \in W \setminus R_k$ satisfazendo as condições do Lema 3.2.2. Logo, $W = \sum L_f$, onde a soma é tomada sobre todos os polinômios $f \in W \setminus R_k$ satisfazendo tais condições.

Naturalmente, se $L_f = \mathbb{F}\langle X \rangle$ para algum $f \in W \setminus R_k$, então $W = \mathbb{F}\langle X \rangle$. Suponhamos que $L_f \neq \mathbb{F}\langle X \rangle$ para qualquer $f \in W \setminus R_k$. Se para algum $f \in W \setminus R_k$ temos $L_f = \langle x_1[x_2, x_3] \cdots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}] \rangle^{TS} + R_k$, onde $\theta \leq k$, então defina

$$\lambda = \min\{\theta \mid x_1[x_2, x_3] \cdots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}] \in W\}.$$

Note que $\lambda \leq k$. Então

$$x_1[x_2, x_3] \cdots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}] \in \langle x_1[x_2, x_3] \cdots [x_{2\lambda}, x_{2\lambda+1}] \rangle^{TS}$$

para todo $\theta \geq \lambda$ e

$$x_1^{p^s} q_k^{(s)}(x_2, \ldots, x_{2k+1}) \in \langle x_1[x_2, x_3] \cdots [x_{2\lambda}, x_{2\lambda+1}] \rangle^{TS} + T^{(3)}$$

para todo s. Portanto, $W = \langle x_1[x_2, x_3] \cdots [x_{2\lambda}, x_{2\lambda+1}] \rangle^{TS} + R_k$, onde $\lambda \leq k$. Consequentemente W é gerado como um T-espaço de $\mathbb{F}\langle X \rangle$ pelos polinômios

$$x_1^p, x_1^p q_1(x_2, x_3), \ldots, x_1^p q_{\lambda-1}(x_1, \ldots, x_{2\lambda-1}),$$
$$x_1[x_2, x_3, x_4], x_1[x_2, x_3] \cdots [x_{2\lambda}, x_{2\lambda+1}]$$

para algum $\lambda \leq k$.

Suponhamos agora que para qualquer $f \in W \setminus R_k$, nas condições do Lema 3.2.2, temos

$$L_f = \langle x_1^{p^s} q_k^{(s)}(x_2, \ldots, x_{2k+1})\rangle^{TS} + R_k$$

para algum $s = s_f \geq 1$. Note que, se $s \leq r$, então

$$x_1^{p^r} q_k^{(r)}(x_2, \ldots, x_{2k+1}) \in \langle x_1^{p^s} q_k^{(s)}(x_2, \ldots, x_{2k+1})\rangle^{TS} + T^{(3)}.$$

Tome $\mu = \min\{s \mid x_1^{p^s} q_k^{(s)}(x_2, \ldots, x_{2k+1}) \in W\}$. Então $W = R_k + \langle x_1^{p^\mu} q_k^{(\mu)}(x_2, \ldots, x_{2k+1})\rangle^{TS}$. Logo, W é gerado como um T-espaço de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ pelos polinômios

$$x_1^p, x_1^p q_1(x_2, x_3), \ldots, x_1^p q_{k-1}(x_2, \ldots, x_{2k-1})$$

e os polinômios $\{q_k^{(l)}(x_1, \ldots, x_{2k}) \mid 1 \leq l \leq \mu - 1\}$, $x_1^{p^\mu} q_k^{(\mu)}(x_2, \ldots, x_{2k+1})$ juntamente com os polinômios

$$x_1[x_2, x_3, x_4] \quad \text{e} \quad x_1[x_2, x_3] \cdots [x_{2k+2}, x_{2k+3}].$$

Finalizamos assim a demonstração da proposição. □

Corolário 3.2.4. *Seja W um T-espaço de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ tal que $R_k \subsetneq W$. Então W é um T-espaço finitamente gerado.*

Demonstração: Consequência imediata da Proposição 3.2.3. □

Proposição 3.2.5. *Se $k \neq l$, então $R_k \neq R_l$.*

Demonstração: Suponhamos que $R_k = R_l$ para algum $k < l$. Então $C(G) \subseteq R_l$.

De fato, pelo Teorema 2.2.7, o T-espaço $C(G)$ é gerado pelo polinômio $x_1[x_2, x_3, x_4]$ e pelos polinômios $x_1^p, x_1^p q_1(x_2, x_3), \ldots, x_1^p q_n(x_2, \ldots, x_{2n+1}), \ldots$. Claramente

$$x_1[x_2, x_3, x_4] \in T^{(3)} \subset R_l.$$

Além do mais, pela Proposição 3.1.5

$$x_1^p, x_1^p q_1(x_2, x_3), \ldots, x_1^p q_{l-1}(x_2, \ldots, x_{2l-1}) \in C_{2l} \subset R_l$$

Pelo Lema 3.1.2

$$x_1^p q_{k+1}(x_2, \ldots, x_{2k+3}), x_1^p q_{k+2}(x_2, \ldots, x_{2k+5}), \ldots \in T^{(3,k+1)} \subset R_k = R_l.$$

Uma vez que $k < l$, temos

$$x_1^p, x_1^p q_1(x_2, x_3), \ldots, x_1^p q_k(x_2, \ldots, x_{2+1}), x_1^p q_{k+1}(x_2, \ldots, x_{2k+3}), \ldots \in R_l.$$

Logo, todos os geradores do T-espaço $C(G)$ pertencem a R_l e portanto $C(G) \subset R_l$, como havíamos afirmado.

Como $T^{(3,k+1)} \subseteq R_l$ e $T^{(3,k+1)} \nsubseteq C(G)$, temos $C(G) \subsetneq R_l$. Pelo Teorema 2.2.13, $C(G)$ é um T-espaço limite. Assim todo T-espaço W, tal que $C(G) \subsetneq W$, é finitamente gerado. Em particular, R_l é um T-espaço finitamente gerado. Absurdo pela Proposição 3.2.1.

Portanto, $R_k \neq R_l$, se $k \neq l$. □

Teorema 3.2.6. *R_k é um T-espaço limite de $\mathbb{F}\langle X\rangle$. Se $k \neq l$, então $R_k \neq R_l$.*

Demonstração: O teorema segue imediatamente da Proposição 3.2.1, Corolário 3.2.4 e Proposição 3.2.5. □

Referências Bibliográficas

[1] S. A. Amitsur, J. Levitzki, *Minimal identities for algebras*, Proc. Amer. Math. Society **1**, (1950), 449–463. 4

[2] Yu. A. Bahturin, *Identical Relations in Lie Algebras*, VNU Science Press, b.v., Utrecht, 1987 (translated from the Russian). **200** (2009) 1299-1338. 42

[3] C. Bekh-Ochir, S.A Rankin, *The central polynomials of the finite dimensional unitary and nonunitary Grassmann algebra*, Asian-Eur. J. Math **3** (2010) 235-249.

[4] C. Bekh-Ochir, S.A. Rankin, *The central polynomials of the infinite dimensional unitary and nonunitary Grassmann algebras*, J. Algebra Appl. **9** (2010), 687–704. v

[5] A. Brandão Jr., P. Koshlukov, A. Krasilnikov and E.A. Silva, *The central polynomials for the Grassmann algebra,* Israel J. Math. **179** (2010), 127-144. i, ii, v, vi, 22

[6] C. W. G. Dias Jr, *Polinômios Centrais*, Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília (2011). 21

[7] V. Drensky, *Free algebras and PI-algebras.* Graduate course in algebra, Springer, Singapore, 1999. v, 14, 15

[8] V. Drensky, E. Formanek, *Polynomial identity rings.* Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. Birkhäuser Verlag, Basel, 2004. v

[9] A. Giambruno, P. Koshlukov, *On the identities of the Grassmann algebras in characteristic* $p > 0$, Israel J. Math. **122** (2001), 305–316. vi

[10] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial identities and asymptotic methods.* Mathematical Surveys and Monographs, **122**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. v

[11] D. J. Gonçalves, A. Krasilnikov, I. Sviridova, *Limit T-subspaces and the central polynomials in* n *variables of the Grassmann algebra*, Journal of Algebra **371** (2012), 156–174. i, ii, vi, 33

[12] A.V. Grishin, V.V. Shchigolev, *T-spaces and their applications.*, J. Math. Sci. (N. Y.) **134** (2006), 1799–1878. v

[13] A.V. Grishin, L.M. Tsybulya, *On the multiplicative and T-space structure of the relatively free Grassmann algebra* (Russian), Mat. Sb. **200** (2009), no. 9, 41–80. English translation in Sb.: Math. **200** (2009), 1299–1338. v, 35, 38

[14] A.R. Kemer, *Finite basability of identities of associative algebras*, Algebra i Logika **26** (1987), 597–641 (Russian). English translation in Algebra and Logic **26** (1987), 362–397. v

[15] A.R. Kemer, *Ideal of identities of associative algebras*, Translations of Mathematical Monographs, **87**. American Mathematical Society, Providence, RI, 1991. v

[16] P. Koshlukov, A. Krasilnikov, E.A. Silva, *The central polynomials for the finite dimensional Grasmann algebra*, Algebbra Discreta Math. **3** (2009) 69-76.

[17] D. Krakowski, A. Regev, *The polynomial identities of the Grassmann algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **181** (1973), 429–438. vi, 20

[18] V. V. Shchigolev *Examples of infinitely T-spaces (Russian)*, Matematicheskii Sbornik **191** (2000), 143-160; English translation:Sbornik Mathematics **191** (2000), 459-476. 27

[19] V.V. Shchigolev, *Finite basis property of T-spaces over fields of characteristic zero.* (Russian) Izv. RAN: Ser. Mat. **65** (2001), no. 5, 191–224; English translation in Izv. Math. **65** (2001), 1041–1071. v