

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA - UnB
FACULDADE DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS

**DINÂMICA NÃO-LINEAR EM MÁQUINAS
ROTATIVAS NA PRESENÇA DE CONTATOS ENTRE
ROTOR E ESTATOR**

ANDRÉ A. THOMAS E BRANDÃO

ORIENTADORA: Dr^a. ALINE SOUZA DE PAULA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS

PUBLICAÇÃO: ENM.DM-183A/2013
BRASÍLIA/DF: ABRIL - 2013

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA - UnB
FACULDADE DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS

**DINÂMICA NÃO-LINEAR EM MÁQUINAS
ROTATIVAS NA PRESENÇA DE CONTATOS ENTRE
ROTOR E ESTATOR**

ANDRÉ A. THOMAS E BRANDÃO

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS MECÂNICAS.

APROVADA POR:

Prof^ª. Aline Souza de Paula, Doutora (ENM-UnB)
(Orientadora)

Prof^º. Alberto C. G. C. Diniz, Doutor (ENM-UnB)
(Examinador Interno)

Prof^º. Marcelo Amorim Savi, Doutor (COPPE-UFRJ)
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 03 DE ABRIL DE 2013.

FICHA CATALOGRÁFICA

BRANDÃO, ANDRÉ A. THOMAS

Dinâmica Não-linear de Máquinas Rotativas na Presença de Contatos Entre Rotor e Estator, [Distrito Federal] 2013.

71p., 210 x 297 mm (FT/UnB, Mestre, Ciências Mecânicas, 2013). Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Programa de Pós-Graduação em Ciências Mecânicas.

1. Dinâmica não-linear 2. Máquinas Rotativas 3. Mecânica do contato 4. Contatos entre rotor e estator

I. ENM/FT/UnB

II. Título (MESTRE)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

BRANDÃO, A.T. (2013). Dinâmica Não-linear De Máquinas Rotativas na Presença de Contatos Entre Rotor e Estator. Dissertação de Mestrado em Ciências Mecânicas. Publicação ENM.DM - 183A/2013, Programa de Pós-Graduação em Ciências Mecânicas, Universidade de Brasília – Faculdade de Tecnologia, Brasília, DF, 71p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: André Albuquerque Thomas e Brandão

TÍTULO: Dinâmica Não-linear De Máquinas Rotativas na Presença de Contatos Entre Rotor e Estator.

GRAU: Mestre

ANO: 2013

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

André Albuquerque Thomas e Brandão

a.thomas.brandao@gmail.com

A meus pais Roberta e Marcelo e meu mano Matheus.

André Brandão.

Agradecimentos

Agradeço a todos da minha família, pelo apoio e carinho que sempre me deram em todas as etapas da minha vida. A minha mãe, que me ensinou a disciplina e o valor da honestidade; a meu pai, que sempre me mostrou o valor do engenheiro, sem esquecer da pureza da arte; a meu irmão, em quem sempre me espelhei e sempre se orgulhou de mim, talvez ele não saiba, mas também é ele meu maior orgulho.

A Rafaela, minha princesa, que tanto me ensina, deixa o mundo muito mais bonito e faz tudo valer a pena.

A meus amigos e amigas, os mais competentes engenheiros mecânicos ou futuros engenheiros mecânicos de que tenho notícia, pelas risadas, discussões inspiradas e os melhores momentos da minha vida.

A meus professores Alberto Diniz, Mário Olavo e Aline de Paula, no Brasil, e FabriceThouverez e Laurent Blanc, na França, por terem me mostrado o lindo universo da dinâmica de sistemas.

À Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (ANP), Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP) e ao Ministério da Ciência e Tecnologia (MCT) através do Programa de Recursos Humanos da ANP para o Setor Petróleo e Gás (PRH-PB/MCT), e também ao apoio da Petrobrás.

André Brandão.

RESUMO

O trabalho relatado neste documento apresenta a metodologia utilizada e os resultados obtidos para a simulação numérica de máquinas rotativas dando ênfase ao caso em que o rotor, devido a causas diversas, se choca com o estator, ou carcaça, do equipamento. São apresentados os modelos matemáticos utilizados para os sistemas analisados, o método numérico empregado e uma análise do comportamento não-linear dos sistemas por meio de ferramentas adequadas como diagramas de bifurcação, seção de Poincaré, bacias de atração e expoente de Lyapunov. O objetivo principal do trabalho é de analisar o comportamento dinâmico dos sistemas, aprofundando trabalhos anteriores, com a intenção de construir modelos robustos e confiáveis para a simulação numérica de sistemas industriais.

ABSTRACT

The study presented in this report shows the methodology and the obtained results for the numerical simulation of rotating machinery, emphasizing the cases where the rotor, due to different causes, touches the equipment's casing - the stator. It is presented the mathematical models for the analyzed systems, the numerical method used for the simulation and an analysis of the non-linear behavior of the systems through specific tools such as bifurcation diagrams, Poincaré sections, basins of attraction and Lyapunov exponent. The main goal of the study is to evaluate an analysis of system dynamics and to deepen the analysis of previous studies in order to build reliable models for the numerical simulations of industrial systems.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO E OBJETIVOS.....	1
1.1 Organização do Trabalho	1
2. DINÂMICA DE MÁQUINAS ROTATIVAS	2
2.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	2
2.2 DESCRIÇÃO MATEMÁTICA DE UM SISTEMA DINÂMICO	6
2.3 MÁQUINAS ROTATIVAS.....	7
2.4 MECÂNICA DO CONTATO.....	10
3. SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES	12
3.1 ESPAÇO DE FASE	12
3.2 SEÇÃO DE POINCARÉ	13
3.3 DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO.....	14
3.4 EXPOENTES DE LYAPUNOV.....	16
4. MODELO DE 4GDL.....	19
4.1 MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA	19
4.1.1 O método das diferenças finitas centrais.....	19
4.1.2 O Método de Runge-Kutta de quarta ordem	20
4.1.3 Método de variação do passo de tempo	21
4.2 SISTEMA DE 4 GRAUS DE LIBERDADE	22
4.2.1 Modelagem matemática.....	22
4.2.2 Simulação Numérica.....	25
5. MODELO DE TURBINA.....	44
5.1 MODELAGEM MATEMÁTICA.....	44
5.1.1 Modelo de rotor com pás flexíveis.....	44
5.1.2 Modelo de estator flexível	46
5.1.3 Modelagem do contato.....	48
5.2 O FENÔMENO DE INTERAÇÃO MODAL.....	51
5.3 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS	53
5.3.1 Sem atrito.....	53
5.3.2 Baixo e médio atrito.....	56
5.3.3 Alto atrito.....	60
6. CONCLUSÃO	68

LISTA DE FIGURAS

2.1	Representação gráfica do modelo de rotor de Jeffcott.....	8
2.2	Sistema massa mola simples com contato	10
3.1	Representação no espaço de fase. Órbita periódica e órbita caótica	13
3.2	Ilustração demonstrativa da Seção de Poincaré.....	14
3.3	Exemplo de diagrama de bifurcação.....	15
3.4	Sensibilidade às condições iniciais (de Paula, 2005).....	16
4.1	Ilustração do modelo eixo-mancal de quatro graus de liberdade.....	23
4.2	Ilustração do contato entre rotor e estator.....	24
4.3	Diagrama de bifurcação para os parâmetros da Tabela 4.2	26
4.4	Diagrama de bifurcação refinado indicando coexistência de órbitas para o estator.....	27
4.5	Diagrama de bifurcação refinado indicando coexistência de órbitas para o rotor.....	27
4.6	Órbitas de periodicidade 1 para com condições iniciais nulas	28
4.7	Órbitas de periodicidade 3 com condições iniciais modificadas	28
4.8	Bacia de atração para a frequência de 119.47 rad/s.....	29
4.9	Órbita de periodicidade 2 para a para o estator e o rotor.....	29
4.10	Distância g para a frequência de 119rad/s, e de 135 rad/s	30
4.11	Diagrama de bifurcação de \dot{X}_s para o sistema com parâmetros da Tabela 4.6.....	31
4.12	Diagrama de bifurcação de \dot{X}_r para o sistema com parâmetros da Tabela 4.6.....	31
4.13	Detalhe do diagrama da Fig. 4.13. Bifurcações global e local	32
4.14	Órbitas e seção de Poincaré do estator para duas frequências.....	32
4.15	Órbitas e seção de Poincaré do rotor para duas frequências.....	33
4.16	Evolução dos expoentes de Lyapunov para a frequência de 132.2rad/s.....	33
4.17	Evolução dos expoentes de Lyapunov para a frequência de 131.4rad/s.....	34
4.18	Seção de Poincaré para a frequência de 131.4rad/s.....	34
4.19	Detalhe do diagrama da Fig. 4.11. Regiões caóticas e de periodicidade 4.....	35
4.20	Órbita no espaço de fase e seção de Poincaré para a frequência de 134.2rad/s.....	35
4.21	Distância g , em m , em função do tempo para a frequência de 134.2rad/s.....	36
4.22	Evolução dos expoentes de Lyapunov para a frequência de 134.2rad/s.....	36
4.23	Detalhe da figura 4.14 evidenciando as janelas periódicas	37
4.24	Órbita periódica para 137.28rad/s	37
4.25	Evolução dos expoentes de Lyapunov para a frequência de 137.28rad/s.....	38
4.26	Seção de Poincaré do estator para a frequência de 135rad/s	38
4.27	Espaço de fase e seção de Poincaré do estator para a frequência de 135rad/s	39
4.28	Evolução dos expoentes de Lyapunov para a frequência de 135rad/s.....	39
4.29	Seção de Poincaré do estator para a frequência de 140rad/s	40
4.30	Espaço de fase e seção de Poincaré do estator para a frequência de 140rad/s	40
4.31	Seção de Poincaré do rotor para a frequência de 140rad/s	41
4.32	Evolução dos expoentes de Lyapunov para a frequência de 140rad/s.....	41
4.33	Bacia de atração para a frequência de 133rad/s.....	42
4.34	Órbitas coexistentes a 133rad/s. Periodicidade 5 (a) e periodicidade 4 (b).....	42
5.1	Ilustração do modelo de rotor com pás flexíveis	43

5.2	Modelo de pá como viga engastada com indicação de suas dimensões	44
5.3	Ilustração do modelo n-diâmetros para $n_d = 2$ e para $n_d = 3$	46
5.4	Ilustração do momento de contato entre a i -ésima pá e o estator	48
5.5	Ilustração do fenômeno de interação modal para $n_d = 2(a)$ e $n_d = 3(b)$	51
5.6	Distâncias g de cada uma das pás ao estator	53
5.7	Série temporal das variáveis A e B de flexão do estator.....	53
5.8	Deslocamentos horizontais do rotor e do estator	54
5.9	Deslocamento ortonormal w das pás	54
5.10	Força tangencial atuando na ponta de cada pá.....	55
5.11	Distâncias g de cada uma das pás ao estator para baixo atrito	56
5.12	Deslocamento ortonormal w das pás para baixo atrito.....	56
5.13	Força tangencial atuando na ponta de cada pá para baixo atrito	57
5.14	Deslocamento ortonormal w das pás para médio atrito.....	57
5.15	Força tangencial atuando na ponta de cada pá para médio atrito	58
5.16	Detalhe da distância g entre as pás e o estator para $\mu = 0.01$	58
5.17	Espaços de fase e seções de Poincaré para $\mu = 0.01$	59
5.18	Distâncias g de cada uma das pás ao estator para alto atrito.....	59
5.19	Distância g (em cm) e deslocamento w (em m) da pá contra	60
5.20	Distância g (em cm) e deslocamento w (em m) da pá a favor	60
5.21	Posições w das pás do rotor em função do tempo	61
5.22	Série temporal das variáveis A e B de flexão do estator para alto atrito	61
5.23	Espaço de fase e seção de Poincaré para o estator.....	62
5.24	Espaço de fase e seção de Poincaré para o rotor.....	62
5.25	Espaço de fase e seção de Poincaré para a pá contra.....	63
5.26	Espaço de fase e seção de Poincaré para a pá a favor.....	63
5.27	Espaço de fase e seção de Poincaré para o deslocamento horizontal do rotor	64
5.28	Espaço de fase e seção de Poincaré para o deslocamento horizontal do estator	64
5.29	Forças tangenciais na ponta das pás para alto atrito	65
5.31	Distâncias g , evidenciando a transição da configuração de interação modal.....	65

LISTA DE TABELAS

4.1	Parâmetros das simulações numéricas	25
4.2	Parâmetros para o primeiro caso analisado.....	26
4.3	Parâmetros para o segundo caso apresentado	30
5.1	Parâmetros das pás utilizados nas simulações	45
5.2	Parâmetros do estator flexível.....	47
5.3	Parâmetros para modelagem do contato	50

1. INTRODUÇÃO E OBJETIVOS

A grande maioria, se não a totalidade, dos equipamentos de aplicação de engenharia consiste em sistemas não-lineares complexos. As aproximações lineares utilizadas para o dimensionamento e descrição destes equipamentos são simplificações, por muitas vezes razoáveis em termos práticos, que tem como objetivo facilitar o estudo e previsão do comportamento de tais equipamentos. No entanto, nem sempre essas aproximações lineares são suficientes e a consideração de não-linearidades se faz necessária. Sistemas não-lineares podem apresentar comportamento dinâmico bastante complexo e sua análise requer uma modelagem matemática adequada, utilização de métodos numéricos apropriados e uma análise aprofundada.

Nesta dissertação é apresentada uma análise da dinâmica de máquinas rotativas. A vibração de máquinas rotativas pode, em princípio, parecer simples. A maior fonte de esforços é proveniente da rotação do rotor, portanto, há uma tendência natural à presença de excitações harmônicas; além disso, como a rigidez das estruturas é predominantemente linear e isotrópica, devido à simetria das peças, as análises normalmente são superficiais e consideram apenas componentes lineares. Contudo, um fenômeno muito comum neste tipo de máquinas pode mudar completamente a análise: o contato.

Os componentes rotativos de uma máquina, chamados de rotores, tem sempre uma interação muito próxima com componentes fixos do equipamento, chamados de estatores. O contato entre estes dois elementos gera uma mudança repentina das características do sistema, e essa descontinuidade torna o sistema não-linear. Essas situações de contato, permanente ou intermitente, é o foco da análise realizada neste estudo.

Diversos trabalhos já foram realizados nesta área e duas variações para modelagem de contato são utilizadas. O objetivo principal deste trabalho é reconsiderar estes modelos, porém utilizando outros métodos, tanto de integração numérica quanto de inclusão das forças de contato com o objetivo de encontrar resultados mais precisos e análises mais completas. A análise dinâmica é realizada a partir da utilização de ferramentas qualitativas e quantitativas adequadas para sistemas não-lineares, como diagramas de bifurcação, seções de Poincaré, bacias de atração e expoentes de Lyapunov.

1.1 Organização do Trabalho

O trabalho é dividido em 6 capítulos. Neste primeiro capítulo uma introdução é apresentada. No segundo, conceitos básicos da dinâmica de máquinas rotativas e mecânica do contato são apresentados. No terceiro, conceitos sobre a identificação, classificação e análise de sistemas não-lineares são descritos. No quarto, o método de integração utilizado é apresentado e o primeiro sistema que consiste em um rotor de Jeffcott com estator rígido é analisado. No quinto capítulo o modelo de turbina axial é descrito e os resultados de sua simulação são apresentados e analisados. No sexto e último capítulo são apresentadas as conclusões e perspectivas futuras do trabalho.

2. DINÂMICA DE MÁQUINAS ROTATIVAS

As máquinas rotativas são objeto recorrente do estudo de dinâmica. Toda e qualquer máquina que possua ao menos um elemento que gira com determinada velocidade sofrerá uma vibração com pelo menos um componente de frequência, igual àquela de seu elemento rotativo, uma vez que um rotor nunca será perfeitamente balanceado (Adams, 2000). O objetivo da análise de engenharia é manter os efeitos de tais vibrações dentro de limites que não prejudiquem as demais funcionalidades e interfaces da máquina. Vibrações excessivas podem prejudicar a estrutura da máquina e causar desgastes acelerados, ocasionando a diminuição da vida útil do equipamento. Além disso, no caso de um produto com interface humana, pode impossibilitar sua operação ou torná-la extremamente desconfortável.

Dentro dessa perspectiva, é importante que sejam analisadas as interações entre os elementos rotativos e os demais elementos de uma máquina, sendo tais interações a via que transmitirá os efeitos do forçamento harmônico causado pela rotação para todo o resto da estrutura. Um dos principais meios de interação entre o elemento rotativo - rotor - e as partes estáticas da máquina - estatores - é o contato.

Como resultado de desbalanceamento do rotor ou de situações acidentais que causem vibrações excessivas, o rotor pode impactar o estator, gerando, em primeira análise, forças de altíssima intensidade que podem solicitar a estrutura excessivamente e até levá-la à destruição. Analisando o fenômeno do impacto, tem-se que este representa a introdução de uma não-linearidade no sistema, podendo produzir fenômenos complexos em sua dinâmica.

Neste capítulo são introduzidas as primeiras noções que formam a base para o estudo de máquinas rotativas. Inicialmente é apresentada uma breve revisão bibliográfica de trabalhos relacionados à dinâmica de máquinas rotativas, incluindo o caso de contatos entre rotor e estator. Em seguida, a modelagem matemática de máquinas rotativas é apresentada.

2.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Trabalhos que abordam o assunto da dinâmica dos contatos, em diferentes contextos, não são raros na literatura. A seguir são apresentados alguns trabalhos neste campo.

Divenyi et al. (2008) desenvolveram um estudo do comportamento de um sistema não-linear com um grau de liberdade e contato intermitente. No trabalho são apresentadas análises teórica e experimental do sistema proposto, e os resultados são comparados. Os pesquisadores utilizaram um modelo particular para a gestão do contato que envolve uma hiper-superfície de transição do estado sem contato para o estado com contato. O método numérico utilizado nesta dissertação foi validado a partir dos resultados de Divenyi (2006), a comparação para esta validação é apresentada em Brandão (2011).

Para o caso específico desta dissertação, que trata de sistemas de máquinas rotativas, podem ser citados diversos estudos. Os trabalhos listados a seguir tratam de sistemas rotor/estator mais simples, como o apresentado no capítulo 4.

Popprath & Ecker (2007) apresentam resultados para um modelo de rotor de Jeffcott cilíndrico e um estator também cilíndrico e suspenso por rigidezes nas duas direções, fornecendo ao sistema combinado rotor/estator 4 graus de liberdade. Os autores apresentam no trabalho o modelo de Hertz para o cálculo das forças de contato e uma breve descrição do método numérico utilizado para resolver as equações de alta rigidez de contato.

Demilly (2003) e Lesaffre (2007b) apresentam como modelo para validação de seus métodos um sistema de rotor Jeffcott com estator suspenso, muito semelhante ao apresentado por Popprath & Ecker (2007). Como método de cálculo da força de contato Demilly (2003) utiliza um método de penalidade, que na realidade considera a força de contato proporcional à penetração entre os corpos através de uma alta rigidez de contato; Lesaffre (2007b) utiliza o método de multiplicadores de Lagrange, que considera que a distância entre rotor e estator é sempre maior ou igual a zero, ou seja, a penetração nunca assume valores positivos. Em ambos os trabalhos, o método de integração utilizado é o de diferenças finitas centrais com aproximações de primeira ordem na expansão em série de Taylor.

Feng et al. (2002) apresentam um modelo de rotor rígido sem desbalanceamento que sofre uma perturbação inicial na sua velocidade radial, provocando contato com o estator, também rígido e fixo. Devido ao efeito de atrito entre os corpos, em algumas situações o contato é mantido indefinidamente, fenômeno que caracteriza o *fullrub*. Nenhuma consideração em relação aos efeitos específicos das não-linearidades sobre a resposta do sistema é feita.

Lu et al. (2003) analisa o problema da existência de respostas periódicas em sistemas de um rotor com fricção e impacto. É apresentado um critério para esta condição de periodicidade e outros tipos de sistemas de impacto e fricção são considerados. Alguns resultados são obtidos através de análise teórica e o fenômeno de *grazing* é abordado.

Al-Bedoor (2000) considera um modelo mais completo para a análise de um rotor desbalanceado que impacta um estator. O rotor é modelado como um eixo de determinado comprimento que tem os movimentos de rotação de corpo rígido, flexão em duas direções e deformação torsional. O estator considerado é totalmente rígido. Resultados no domínio da frequência são analisados principalmente acerca da influência da presença do modo de vibração torsional.

Chu & Lu (2005) apresentam a análise experimental de um aparato experimental que é montado para a análise do fenômeno de *fullrub* para o caso do estator fixo. Todo o aparato experimental é detalhado, inclusive a configuração especial do estator para a simulação de *full rub*. Os espaços de fase

e seções de Poincaré são apresentados e considerações em relação à presença de bifurcações no comportamento do sistema são feitas. Comportamentos periódicos e caóticos são encontrados.

Sinou et al. (2004) apresentam em seu artigo uma análise profunda da estabilidade de um sistema não-linear complexo constituído de um sistema de freio com contato não-linear entre um rotor e um estator. O artigo apresenta uma forte base e descrição matemática, sendo uma boa fonte de referência para formulações matemáticas deste tipo de sistemas de alta complexidade. Diferentes análises são apresentadas, tanto no domínio da frequência quanto no domínio do tempo.

Sinou (2009) tratou um sistema que consiste de um rotor flexível suportado por dois mancais flexíveis e um rolamento de esferas, o qual é fonte da não-linearidade através de um folga e do modelo de contato de Hertz. A análise e apresentação de resultados são particularmente interessantes neste artigo, que analisa a trajetória transversal de vários pontos ao longo do eixo flexível.

Muszynska & Goldman (1995) apresentam a análise de um modelo de rotor desbalanceado que entra em contato com um estator rígido. O contato é modelado de maneira diferente, através de uma técnica apresentada pelos próprios autores em outros trabalhos. Resultados experimentais são brevemente apresentados e comparados com os numéricos.

Shang et al. (2011) analisam um sistema simples de rotor e estator com contato intermitente e leva em conta os efeitos do atrito seco, muitas vezes negligenciado em outros trabalhos anteriores. Efeitos de coexistência de órbitas são observados e analisados. Uma análise mais detalhada sobre os tipos de coexistência também é feita e a influência dos diferentes parâmetros sobre elas também é discutida.

Keogh (2012) apresenta uma análise geral dos fenômenos de contato entre rotor e estator. A principal contribuição do artigo é a discussão do fenômeno em mancais magnéticos. Uma formulação matemática completa é apresentada e resultados numéricos são mostrados e discutidos. A avaliação relativa entre os sistemas ativos (magnéticos) e passivos é feita.

Qinghua et al. (2011) apresentam a modelagem de um sistema complexo de 5 graus de liberdade que considera dois rotores com velocidades angulares diferentes e quatro rolamentos de esferas, sendo um deles de acoplamento entre os dois rotores. O modelo para os rolamentos de esfera e as deflexões dos rotores introduzem não-linearidades no sistema. Uma completa formulação matemática é apresentada e resultados no domínio do tempo e da frequência são analisados.

Patel & Darpe (2008), diferentemente da grande parte dos estudos de detecção de trincas em eixos, adotam a análise de sistemas de um eixo trincado ou de sistemas de contato entre rotor e estator separadamente. Os autores desse artigo fizeram análises numéricas e experimentais da situação na qual se observam a presença simultânea destes dois problemas. Alguns fenômenos interessantes são verificados, como órbitas de periodicidade múltipla e comportamentos caóticos.

Edwards et al. (1999) adicionam ao já conhecido problema de contato entre rotor e estator o grau de liberdade de torção do rotor. Este é de fato um comportamento importante em sistemas reais e os

autores mostram em seus resultados que a resposta é influenciada de maneira relevante pela adição deste aspecto ao modelo. Resultados no domínio da frequência e no domínio do tempo são apresentados, bem como órbitas no espaço de fase.

Sistemas mais complexos também são recorrentes na literatura. Os trabalhos a seguir apresentam modelos e resultados de sistemas de turbinas, com pás flexíveis, como o modelo apresentado no capítulo 5.

Grolet & Thouverez (2010) apresentam um modelo detalhado de rotor com pás flexíveis. Apesar do modelo levar em consideração apenas o movimento da ponta das pás, o que confere um grau de liberdade a cada uma, os valores de rigidez e inércia equivalentes são encontrados modelando a pá como uma viga Timoshenko de seção retangular, conferindo ao modelo robustez satisfatória.

Lesaffre et al. (2007a) apresentam um modelo de um rotor de turbina com pás e eixo flexíveis que entram em contato com o estator cilíndrico também flexível. Os modelos matemáticos para o sistema são descritos com alto rigor matemático e algumas análises de estabilidade são feitas. É verificado um fenômeno de interação modal entre as pás e o estator.

Brandão et al. (2011) apresentam um modelo de um rotor com pás flexíveis, semelhante ao apresentado por Lesaffre et al. (2007) porém com a utilização do modelo de pás flexíveis apresentado por Grolet & Thouverez (2010) com algumas simplificações em sua dinâmica e também levando em conta os efeitos de contato entre rotor e estator flexível. O fenômeno de interação modal é verificado e, para este caso, são estudados os efeitos térmicos desencadeados pelo atrito entre as estruturas. Os modelos dinâmicos e térmicos são apresentados, bem como as estratégias numéricas para a simulação e os resultados obtidos.

Batailly et al. (2010) apresentam um modelo de turbina com pás flexíveis e estator também flexível. Dois métodos diferentes de redução de ordem são apresentados e comparados para o fim de redução do custo computacional da simulação. O método de multiplicadores de Lagrange é utilizado para modelar o contato entre pás e estator, e o atrito é considerado dentro do mesmo contexto.

Hall & Mba (2004) apresentam os resultados e a técnica utilizada para a detecção precoce de problemas de atrito entre rotor e os elementos de vedação de turbinas de larga escala. É utilizado o método de emissões acústicas para a detecção de variações no comportamento dinâmico do sistema que podem indicar o problema de contato entre os elementos e causar danos severos à máquina.

Gu & Shillor (2001) analisam um modelo de viga engastada que tem sua outra extremidade em contato permanente com uma superfície deslizante. O atrito entre a extremidade da viga e a superfície gera calor, e o objetivo do trabalho é descrever matematicamente o problema. Resultados numéricos são apresentados. Esse modelo pode ser de grande utilidade na análise termomecânica do contato das pás de uma turbina, o que corresponde ao modelo de turbina do presente trabalho.

O estudo desenvolvido neste trabalho analisa, primeiramente, o mesmo sistema de 4gdl apresentado por Popprath&Ecker (2007), com a adição de análises mais profundas sobre a ocorrência de coexistência de órbitas estáveis e, principalmente, o cálculo dos expoentes de Lyapunov. Não foi verificado nenhum trabalho na literatura com a utilização dessa ferramenta quantitativa para o sistema 4gdl estudado. No segundo caso estudado, o fenômeno de interação modal é estudado para o modelo de turbina com pás flexíveis, mesmo sistema analisado por Lesaffre (2007a) e Brandão (2011), porém um desbalanceamento foi adicionado ao rotor.

O objetivo deste trabalho é de analisar os sistemas citados no parágrafo anterior, anteriormente estudados por Brandão et al. (2011), com modificações que tornem o modelo mais verossímil e a integração numérica com resultados mais confiáveis. Para isso, serão utilizados o método de penalidade na modelagem do contato, substituindo o método de multiplicadores de Lagrange, e o método de Runge-Kutta de quarta ordem com passo variável para a integração numérica, ao invés do método de diferenças finitas centrais. Além disso, serão feitas análises com o uso de ferramentas específicas para sistemas não-lineares, como a seção de Poincaré, diagrama de bifurcação, expoente de Lyapunov e bacia de atração. Desta forma, será alcançada a maior compreensão do comportamento desses sistemas, possibilitando a construção de modelos mais confiáveis e tornando o trabalho uma importante contribuição para a área.

2.2 DESCRIÇÃO MATEMÁTICA DE UM SISTEMA DINÂMICO

A modelagem de um sistema dinâmico é a formalização matemática do comportamento de um sistema que evolui segundo uma regra fundamental que liga seu estado presente a seus estados passados. Esta regra, ou conjunto de regras, deve ser organizada e armazenada em uma ferramenta matemática que possibilitará a previsão da evolução dos estados deste sistema no tempo. A isto se chamam, respectivamente, de modelagem e simulação de um sistema dinâmico.

Uma das ferramentas matemáticas utilizadas para realizar simulações de sistemas dinâmicos é a representação em espaço de estados. Para que se compreenda o conceito desta ferramenta é necessário que seja introduzido o conceito de variáveis de estado. As variáveis de estado de um sistema são o menor conjunto de variáveis suficiente para descrever completamente o estado deste em determinado instante. Para a maioria dos sistemas mecânicos estudados - descritos por equações diferenciais de segunda ordem -, e a totalidade dos que são tratados neste trabalho, este conjunto é representado pela posição e velocidade de cada um dos graus de liberdade do sistema. Desta forma, se o sistema possuir n graus de liberdade, este será descrito obrigatoriamente por $2n$ variáveis de estado, e cada equação diferencial de segunda ordem será reescrita como duas equações diferenciais de primeira ordem. É importante mencionar que o conjunto que forma as variáveis de estado não é único, e deve ser escolhido da maneira mais conveniente para o estudo desejado.

Voltando à representação de sistemas dinâmicos utilizando variáveis de estados, esta abordagem estabelece a derivada temporal das variáveis de estado como função das próprias variáveis de estado. A forma básica de um sistema linear definido no espaço de estados é apresentada na Eq. 2.1.

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B} \quad (2.1)$$

onde \mathbf{X} e $\dot{\mathbf{X}}$ representam, respectivamente, o vetor de variáveis de estado e sua primeira derivada, \mathbf{A} é a matriz que armazena todas as características internas do sistema e \mathbf{B} é a matriz de entrada, que representa os forçamentos externos impostos ao sistema e, no caso de sistemas não-lineares, introduz as não-linearidades à equação. Os subíndices em cada um dos elementos da Eq. 2.1 representam a dimensão da matriz ou vetor, onde N é o número de variáveis de estado que o sistema possui.

Grande parte do trabalho de modelagem de um sistema dinâmico está em representar da maneira mais precisa possível os elementos da matriz \mathbf{A} . Todas as características fundamentais de comportamento do sistema estão representadas nesta matriz e ela representa a base do processo de saber *para onde o sistema vai* a partir do conhecimento de *onde o sistema está*. Essas características internas do sistema podem ser variáveis no tempo, como em situações de envelhecimento de molas e amortecedores, por exemplo, porém, na maioria dos problemas, a matriz \mathbf{A} é constante.

Outra etapa imprescindível do processo de modelagem de um sistema é a definição das características externas a ele, ou seja, definir onde, quando e de que maneira o ambiente externo atua sobre o sistema. Este trabalho se traduz na definição da matriz \mathbf{B} , cujos elementos podem ser função do tempo e, por vezes, como em casos de contato intermitente, podem também ser função do estado do sistema.

2.3 MÁQUINAS ROTATIVAS

No contexto da modelagem matemática de máquinas rotativas é necessário ainda detalhar algumas nuances próprias do comportamento deste tipo de sistemas: forças de excitação mais comuns e o conceito de velocidade crítica do rotor são alguns exemplos.

O desbalanceamento constitui uma das causas de forçamento mais clássicas dentro do estudo de máquinas rotativas. Esta excitação é resultado da força gerada pela rotação de um rotor que tem seu centro de massa não coincidente com seu eixo de rotação. Escrevendo a energia cinética de uma massa m_u com uma excentricidade e em relação ao eixo de rotação, podemos, depois de aplicar as equações de Lagrange, obter as expressões das forças em função do tempo devidas a este desbalanceamento em um sistema de coordenadas ortonormal fixo, como mostra a Eq. 2.2.

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = m_u e \Omega^2 \begin{bmatrix} \cos(\Omega t + \alpha) \\ \sin(\Omega t + \alpha) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

onde α é posição angular do centro de massa do rotor em relação ao eixo das abscissas para $t = 0$ e Ω é a velocidade angular de rotação do rotor, considerada constante.

Uma outra fonte importante de forçamento em turbomáquinas é o acoplamento aeroelástico. Apesar destas forças aerodinâmicas não serem levadas em conta nos estudos aqui apresentados, o acoplamento aeroelástico é um fenômeno que origina diversos desdobramentos no comportamento dinâmico de turbomáquinas. No entanto, este fenômeno não representa grandes efeitos quando se estudam casos com impacto, pois estes originam forças de magnitudes muito maiores. Além disso, também devem ser incluídas as cargas acidentais que podem vir a ocorrer durante o funcionamento das máquinas rotativas. Impacto de objetos estranhos, manobras anormais, entre outras situações acidentais se incluem nesta classificação.

Um conceito importante em máquinas rotativas é o de velocidade crítica. Como o desbalanceamento é a principal fonte de forçamento em máquinas rotativas, que se trata, como vimos na seção anterior, de uma excitação harmônica de frequência Ω , devemos nos preocupar com fenômenos de ressonância da estrutura em certas velocidades de rotação. É precisamente isto que caracteriza a velocidade crítica de um elemento rotativo. Quando a velocidade de rotação coincide com a frequência natural de um dos modos de vibração do rotor temos um pico de amplitude de vibração da estrutura, que será limitada apenas pelo amortecimento do sistema.

O modelo mais simples e clássico de uma máquina rotativa é o rotor de Jeffcott, que é representado na Fig. 2.1.

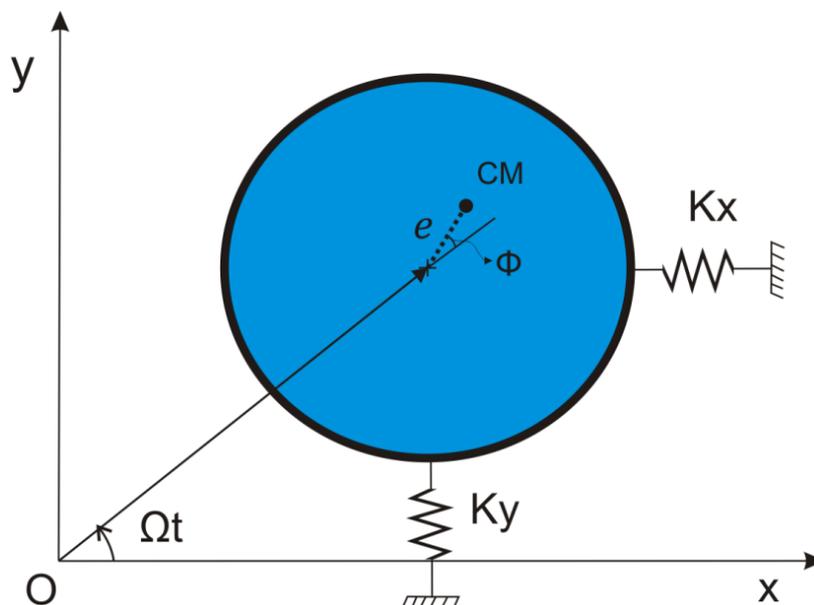


Figura 2.1 - Representação gráfica do modelo de rotor de Jeffcott.

O modelo de rotor de Jeffcott, representado na Figura 2.1, é constituído por um disco rígido de massa m_r suspenso por rigidezes nas duas direções - K_x e K_y - do plano e gira em torno do seu eixo com velocidade Ω . Na Figura 2.1 vemos representado o eixo de rotação pela origem do sistema fixo de coordenadas xOy e o centro de massa do rotor representado pelo ponto marcado com 'CM'.

A excentricidade e do rotor é a única fonte de excitação neste sistema. Na Figura 2.1, o ângulo ϕ representa o ângulo de fase entre a força de desbalanceamento e o deslocamento do rotor. Este ângulo varia entre 0 e π de acordo com a velocidade de rotação Ω , de maneira que chega-se em $\phi = 0$ quando $\Omega = 0$, em $\phi = \pi$ quando $\Omega \rightarrow \infty$ e finalmente em $\phi = \frac{\pi}{2}$ quando temos Ω igual à frequência natural do sistema.

Para representar o modelo da Figura 2.1 no espaço de estados, o conjunto de variáveis de estado representado na Eq. 2.3 é o mais conveniente.

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

onde x e y representam, respectivamente, os deslocamentos horizontal e vertical do rotor e \dot{x} e \dot{y} suas respectivas derivadas temporais. Aplicando a segunda lei de Newton e considerando $K_x = K_y = K_r$ rigidezes lineares que geram forças elásticas proporcionais aos deslocamentos x e y , temos que a matriz \mathbf{A} , que descreve as características internas do sistema é como mostra a Eq. 2.4.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K_r}{m_r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{K_r}{m_r} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Utilizando a expressão apresentada na Eq. 2.2 para as forças devidas ao desbalanceamento, pode-se obter o vetor de forçamento \mathbf{B} representado no espaço de estados da maneira mostrada na Eq. 2.5.

$$\mathbf{B} = \begin{Bmatrix} 0 \\ e\Omega^2 \cos(\Omega t + \alpha) \\ 0 \\ e\Omega^2 \sin(\Omega t + \alpha) - g \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

A gravidade g pode ser considerada ou não neste caso, sendo que a única influência de sua inclusão é a mudança do ponto de equilíbrio do sistema. Desta forma, o sistema da Fig. 2.1 está completamente definido e as equações de movimento são apresentadas no espaço de estados, na forma da Eq. 2.1.

Quando existem corpos adjacentes ao rotor que podem se chocar com este, deve-se modelar a situação de contato. Assim, o estudo da mecânica do contato é essencial para a descrição adequada do sistema.

2.4 MECÂNICA DO CONTATO

Em problemas computacionais que envolvem contato entre corpos sólidos, o ponto crítico da análise é a transição entre os dois modos: com e sem contato. Esta transição repentina das características do sistema, fonte da não-linearidade do problema, deve ser tratada com atenção.

Para que esta transição seja modelada de maneira correta é necessário que se estabeleça precisamente a condição de contato, que é definida por uma inequação que estabelece o ponto a partir do qual as forças de contato surgirão e farão efeito sobre os elementos do sistema. Na figura 2.2, por exemplo temos um sistema massa mola com uma restrição rígida que limita o deslocamento da massa.

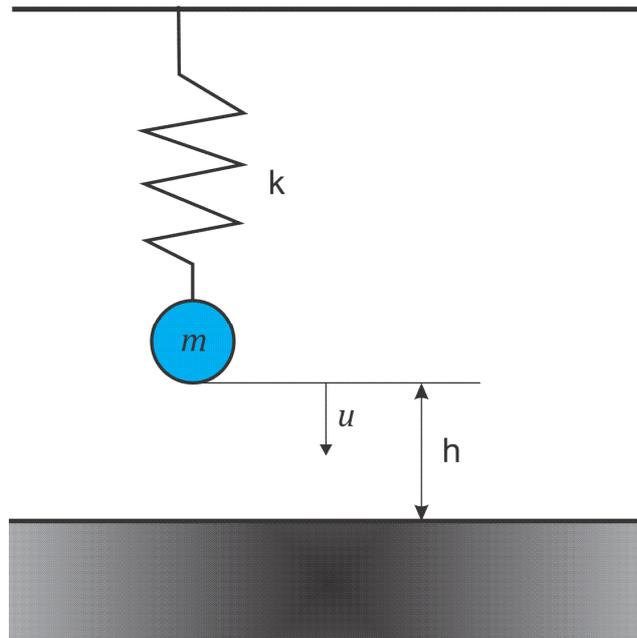


Figura 2.2 - Sistema massa mola com contato.

Neste sistema pode-se criar uma função simples da posição u que represente a distância d entre a massa m e o chão como $d(u) = h - u$. Assim, tem-se que haverá contato sempre que $d \leq 0$, sendo esta a condição de contato que deve ser estabelecida para o problema. Assim sendo, as equações do movimento do sistema são descritas mostra a Eq. 2.6.

$$\begin{cases} m\ddot{u} + ku - mg = 0 & , \quad d > 0 \\ m\ddot{u} + ku - mg + F_c = 0 & , \quad d \leq 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

onde o termo F_c representa a força de contato que deve ser calculada. Wriggers (2002) apresenta dois métodos diferentes de cálculo da força de contato: o método de multiplicadores de Lagrange e o método de penalidade.

O método de multiplicadores de Lagrange considera que a restrição $d \geq 0$ deve ser sempre satisfeita. Desta forma, obtêm-se a força de contato necessária para atender tal condição. Assim, sempre se verifica a igualdade $F_c d = 0$, uma vez que a força de contato é nula quando $d > 0$ e, quando há contato e $F_c > 0$ a distância chega a seu valor mínimo $d = 0$. Este método oferece maior

estabilidade numérica por limitar explicitamente o valor do deslocamento. Porém não descreve o sistema real com a precisão necessária. O modelo que utiliza este método negligencia a deformação dos corpos durante o contato e não é capaz de reproduzir fenômenos de *rebound*, por exemplo, que é a situação na qual a intensa força no momento do impacto força a perda de contato, e, em seguida, um novo impacto, causando uma sucessão de impactos em um curto período de tempo, o que pode vir a apresentar um efeito importante na resposta destes sistemas.

O segundo método, chamado método de penalidade, é matematicamente mais simples. Além disso, a partir da utilização deste método para calcular a força de contato, a modelagem do sistema descreve o sistema real com mais precisão. Neste caso, a força de contato é calculada como uma função da penetração - também chamada de indentação - entre os corpos, ponderada por um coeficiente de penalidade ϵ . A indentação pode ser descrita como o negativo da distância, ou seja, $-d$.

$$F_c = \epsilon f(-d) \quad (2.7)$$

Para o caso da Fig. 2.2, onde as superfícies em contato possuem raios de curvatura muito diferentes, a teoria de contato de Hertz é válida e a relação $F_c = \epsilon (-d)^{\frac{3}{2}}$ pode ser utilizada (Wriggers, 2002). Porém, esta relação pode assumir diversas formas. Como Popprath & Ecker (2007) mencionam em seu trabalho, para superfícies com raios de curvatura muito semelhantes, as relações da Eq. 2.8 podem ser utilizadas.

$$F_c = \epsilon (d)^2 \quad ; \quad F_c = \epsilon (-d) \quad (2.8)$$

A segunda versão da força na Eq. (2.8), linear, é aplicável para menores valores de indentação e é também proposta por Wriggers (2002). Com estas equações, fica claro que o coeficiente de penalidade ϵ atua como uma rigidez de contato, uma vez que a força de contato será proporcional à indentação multiplicada por este coeficiente. Percebe-se que ϵ apresentará valores muito altos já que tem o papel de representar a rigidez de contato entre superfícies sólidas. A descontinuidade do sistema combinada com mudanças bruscas de rigidez pode acarretar instabilidade numérica na simulação computacional e consiste em um obstáculo a ser vencido.

Existem alternativas para reduzir erros numéricos nas simulações do contato entre corpos sólidos. Divenyi et al. (2008) utilizam uma alternativa que inclui a utilização de uma superfície de transição com o objetivo de reduzir o peso computacional do problema.

3. SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES

Sistemas dinâmicos não-lineares são sistemas nos quais não se verifica o princípio da superposição, ou seja, um sistema no qual *não* se verificam as condições (1) e (2) abaixo, onde \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} são vetores quaisquer e α um escalar:

$$1. f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$$

$$2. f(\alpha \mathbf{z}) = \alpha f(\mathbf{z})$$

Sistemas não-lineares podem apresentar uma diversidade de respostas, incluindo comportamentos periódico, quase-periódico e caótico, assim como a coexistência desses tipos de respostas. Nos casos de comportamento caótico ou coexistências, pequenas variações nas condições iniciais ou pequenas perturbações sobre o sistema são extremamente determinantes em sua resposta. Por isso, a solução numérica de sistemas não-lineares demanda um método de integração robusto e uma escolha adequada de passo de integração.

Em sistemas cuja não-linearidade é devida à presença de contato intermitente os efeitos das não-linearidades ficam ainda mais notáveis. A alta rigidez no contato gera componentes de alta frequência na solução, o que demanda um passo de integração pequeno. Além disso, a transição repentina entre uma situação e outra, transforma o problema em um caso singular em termos de simulação numérica, onde tanto o modelo quanto o método de integração devem ser escolhidos e aplicados de forma adequada. Outro ponto relevante em uma análise de sistemas dinâmicos não-lineares é a utilização de ferramentas adequadas que permitam conclusões relevantes sobre o comportamento do sistema. Neste capítulo são apresentadas algumas dessas ferramentas para análise de sistemas não-lineares.

3.1 ESPAÇO DE FASE

O espaço de fase é o espaço vetorial de um sistema dinâmico, representado no plano cartesiano por suas variáveis de estado. Cada ponto no espaço de fase representa um estado do sistema, e a sucessão de estados de um sistema que evolui no tempo forma uma curva no espaço de fase, definindo uma trajetória.

Se o comportamento do sistema na situação estudada for periódico esta trajetória se formará na configuração de um caminho fechado, passando sempre pelos mesmos pontos. Existe também o caso das respostas quase-periódicas e caóticas, que são melhor identificadas com mais outras ferramentas, tais como seção de Poincaré (vide seção 3.2) e expoentes de Lyapunov (vide seção 3.4).

A Fig. 3.1 mostra duas órbitas no espaço de fase. Em ambos os casos os eixos da abcissa e ordenada são representados pela posição e velocidade de um dos graus de liberdade do sistema respectivamente.

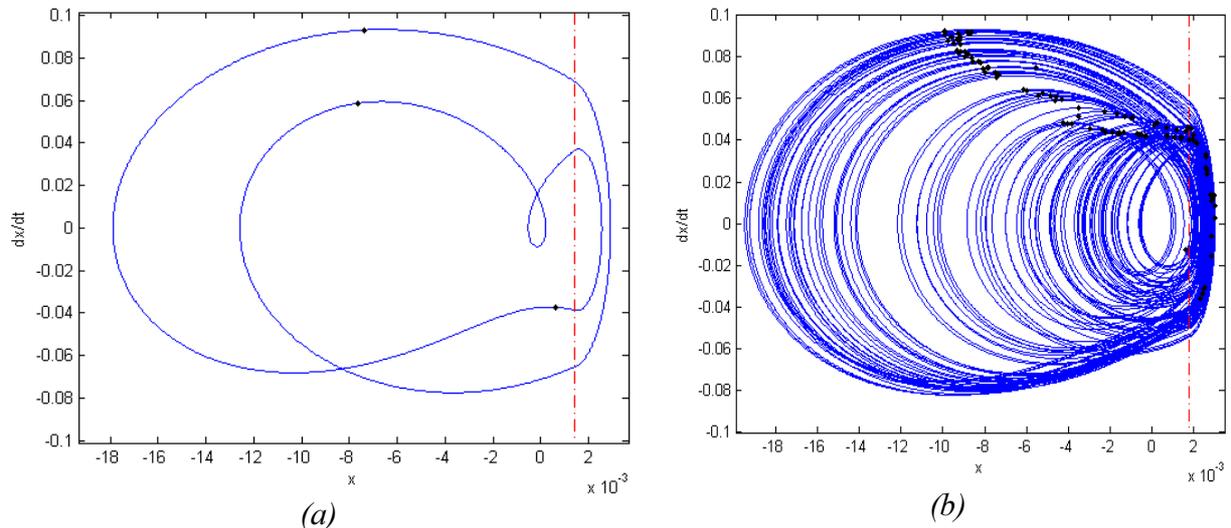


Figura 3.1 - Representação no espaço de fase. Órbita periódica (a) e órbita caótica (b) Brandão (2011).

3.2 SEÇÃO DE POINCARÉ

A seção de Poincaré é uma ferramenta extremamente útil e muito utilizada na análise de sistemas não-lineares. Ela consiste, em essência, em uma redução dimensional do problema, transformando-o de contínuo em discreto. Esta redução nos permite avaliar a trajetória do espaço de fase em termos de algum outro parâmetro escolhido, originando uma informação organizada de maneira conveniente, permitindo análises que não são possíveis no espaço contínuo.

A Seção de Poincaré é o conjunto de interseções entre uma órbita definida no espaço de estados com um subespaço de menor dimensão. Portanto, define-se arbitrariamente um hiperplano de acordo com algum parâmetro do sistema e encontram-se os pontos nos quais a trajetória de um dos espaços de fase intercepta este hiperplano. A coleção de pontos encontrados é chamada de seção ou mapa de Poincaré.

A Fig. 3.2 ilustra o processo de construção da seção de Poincaré para um sistema de um grau de liberdade com contato intermitente. Neste caso, como é de costume em casos com forçamento harmônico, o parâmetro utilizado para construção do hiperplano a ser interceptado pela órbita do espaço de fase é a própria fase da força de excitação. A posição exata do plano é arbitrária, mas o importante é que ela define um ponto específico do ciclo completo de forçamento como, por exemplo, seu ponto máximo ou seu ponto mínimo, ou ainda em qualquer outro ponto da senóide que define o forçamento.

A Fig. 3.2 apresenta o espaço de fase nos eixos horizontais da abscissa e da ordenada e o forçamento variando entre 1 e -1 no eixo vertical z . O plano marcado como 'Seção 1' define uma seção onde o forçamento é igual a 0.4 e tem derivada positiva, ou seja, define um ponto específico no ciclo de forçamento. Por outro lado, o plano assinalado como 'Seção 2' define uma seção de Poincaré para um forçamento de -0.4 e com derivada negativa.

Desta forma, a construção da seção de Poincaré é definida pelas interseções assinaladas em vermelho. A órbita traçada em azul na Fig. 3.2 é periódica e se repete *ad infinitum*. Percebe-se, portanto, que enquanto o forçamento completa dois ciclos, a órbita completa apenas um, o que a configura como uma órbita de periodicidade 2. Esta periodicidade é facilmente identificada pela presença de dois pontos diferentes em cada uma das seções de Poincaré construídas. Esta é uma das principais funções desta ferramenta no caso de comportamentos periódicos: a identificação da periodicidade da órbita.

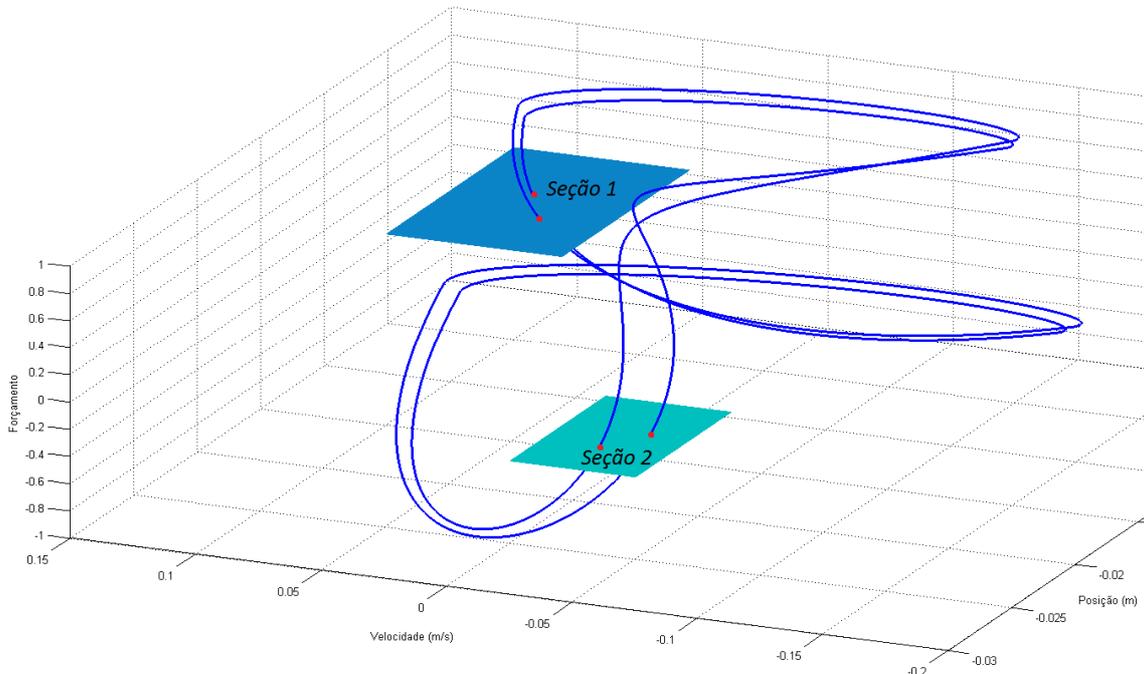


Figura 3.2 - Ilustração demonstrativa da Seção de Poincaré.

A seção de Poincaré pode assumir três diferentes formas principais, que indicam o tipo de comportamento do sistema:

- Número finito n de pontos: indica que a órbita tem periodicidade n ;
- Diversos pontos sem repetição: acusa um comportamento caótico ou hipercaótico;
- Diversos pontos sem recorrência que formam uma curva fechada: neste caso a órbita é chamada de quase-periódica.

3.3 DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO

O termo bifurcação está associado a uma mudança qualitativa na natureza da resposta do sistema como consequência da variação de qualquer um de seus parâmetros. Os diagramas de bifurcação são bastante utilizados para analisar o comportamento global do sistema, avaliando onde e como ocorrem mudanças na sua resposta (de Paula, 2005).

Assim sendo, na construção de um diagrama de bifurcação deve variar-se um dos parâmetros do sistema de maneira *quasi*-estática enquanto se monitora algum outro parâmetro de interesse. Nos

diagramas de bifurcação construídos neste trabalho as características monitoradas são as variáveis de estado do sistema na seção de Poincaré, enquanto o parâmetro variável é a frequência de rotação do rotor.

A função principal do diagrama de bifurcação é identificar o comportamento global do sistema, incluindo pontos de interesse da chamada rota para o caos, que pode apresentar bifurcações locais, como a transição de periodicidade 1 para periodicidade 2, e bifurcações globais, como a transição de um comportamento periódico para um comportamento caótico ou vice-versa. Outra situação peculiar que o diagrama de bifurcação nos permite identificar é a de coexistência de órbitas. Em alguns casos, para um mesmo conjunto de parâmetros, existe mais de uma órbita estável, o que gera comportamentos singulares que podem ser identificado pelo diagrama de bifurcação.

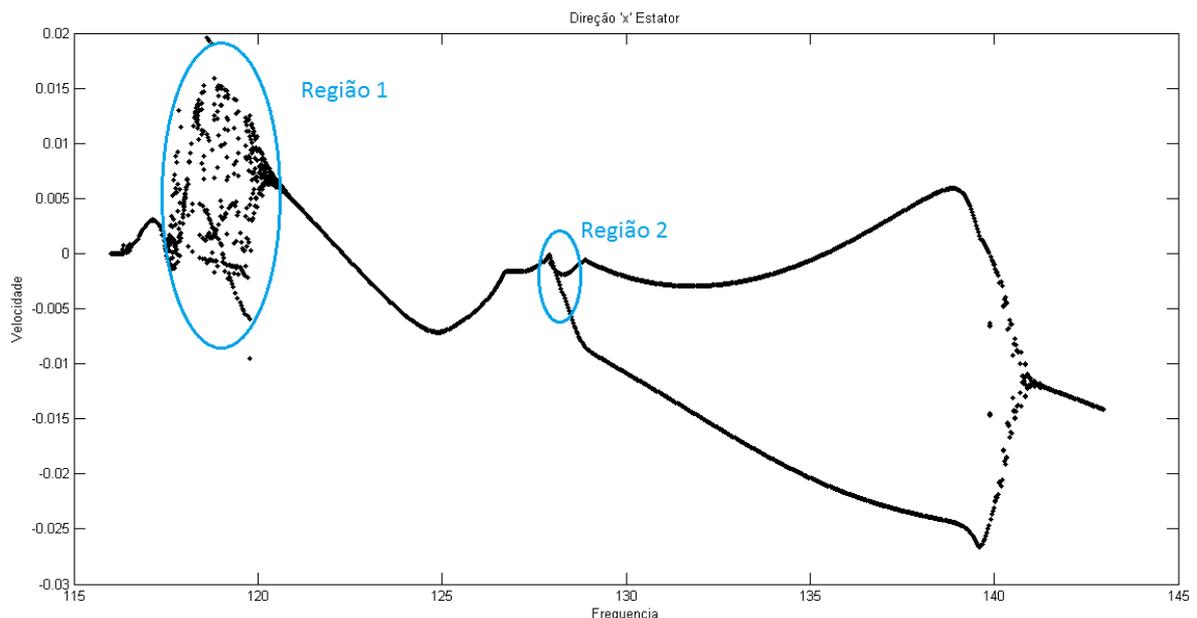


Figura 3.3 - Exemplo de diagrama de bifurcação. Região 1 indeterminada; região 2 bifurcação local.

A Fig. 3.3 apresenta um exemplo de diagrama de bifurcação que usa como característica monitorada a velocidade de um dos gdl's na seção de Poincaré quando a frequência de forçamento é variada. Podemos ver duas regiões de interesse:

- Região 1: região sem definição suficiente dos pontos do diagrama. A dispersão dos pontos sugere que seja uma região caótica. Um diagrama mais detalhado deve ser construído para que se chegue a uma conclusão definitiva;
- Região 2: Bifurcação local que evidencia a transição de uma órbita de periodicidade 1 para um comportamento de periodicidade 2.

3.4 EXPOENTES DE LYAPUNOV

Sistemas com comportamento caótico têm como principal característica a sensibilidade às condições iniciais. Duas trajetórias percorridas no espaço de fase com condições iniciais ligeiramente diferentes se afastam gradualmente até um ponto que se tornam completamente diferentes.

Na Figura 3.4 (de Paula, 2005) são apresentadas duas séries temporais para sistemas com comportamento caótico. Na figura à esquerda uma simulação numérica mostra duas trajetórias com condições iniciais muito próximas divergindo. Na figura à direita são mostrados os dados experimentais para um sistema também caótico, no qual apenas as incertezas e irregularidades do aparato experimental são suficientes para gerar duas trajetórias divergentes mesmo com condições iniciais aparentemente idênticas.

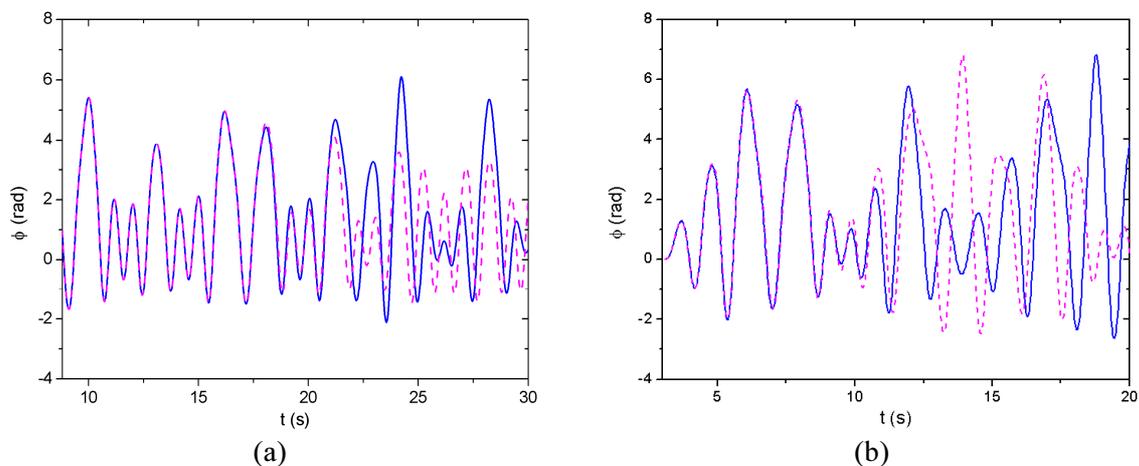


Figura 3.4: Sensibilidade às condições iniciais (de Paula, 2005).

Os expoentes de Lyapunov avaliam a sensibilidade às condições iniciais, verificando a divergência local no tempo de duas trajetórias vizinhas, e representam um dos critérios mais importantes utilizados para definir o caos em sistemas dinâmicos. Assim, considera-se uma dada trajetória $\Phi(x_1, t)$, onde $\Phi(x, t)$ é o fluxo de um sistema dinâmico, e sua vizinhança em um instante inicial. Esta vizinhança pode ser definida através de uma esfera de raio r_0 . Considerando-se uma outra trajetória, $\Phi(x_2, t)$, inicialmente na fronteira da vizinhança definida, tem-se que a separação $r(t)$ no tempo entre essas duas trajetórias corresponde à evolução no tempo dos eixos de uma esfera suficiente pequena de estados do sistema dinâmico, e é expressa por:

$$r(t) = r_0 e^{\lambda t} \quad (3.1)$$

onde λ representa o espectro dos expoentes de Lyapunov. Se o expoente λ for negativo ou nulo, a trajetória $\Phi(x_2, t)$ não diverge com relação a $\Phi(x_1, t)$. Se por outro lado, λ for positivo, indica que a trajetória $\Phi(x_2, t)$ diverge exponencialmente da órbita original, caracterizando o caos.

Como a esfera inicial de raio r_0 é infinitesimal, a sua distorção é governada pela parte linear do fluxo que a transforma em um elipsoide. Como os eixos principais do elipsoide no tempo t possuem um comprimento $r_i(t)$, define-se o espectro dos expoentes de Lyapunov como:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log_2 \frac{r_i(t)}{r(0)}, \text{ para } 1 \leq i \leq N, \quad (3.2)$$

onde N é a dimensão do sistema (Wolf *et al.*, 1985). Desta forma, as trajetórias em um espaço de fase N -dimensional possuem N expoentes de Lyapunov. A análise dos sinais destes expoentes define as características da estabilidade local de uma trajetória.

Portanto, os expoentes de Lyapunov fornecem uma medida invariante sob uma transformação de coordenadas da estabilidade local de uma dada trajetória, sendo considerado um invariante do sistema. A presença de pelo menos um expoente de Lyapunov positivo, caracteriza o comportamento caótico. Para situações de existência de mais de um expoente positivo, tem-se o chamado hipercaos.

Neste trabalho, o cálculo dos expoentes de Lyapunov é realizado a partir do algoritmo de Wolf *et al* (1985) com a modificação sugerida por Müller (1995) para sistemas descontínuos. Neste algoritmo, utiliza-se uma linearização do sistema para gerar a trajetória perturbada e compará-la com a trajetória de referência, não perturbada. Esta linearização é obtida através da matriz Jacobiana J do sistema, definida pela Eq. (3.3).

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) \quad ; \quad J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (3.3)$$

Uma vez calculada a matriz Jacobiana do sistema, forma-se um sistema linearizado como apresentado na Eq. (3.4) que será utilizado para obter os expoentes de Lyapunov.

$$\dot{\Phi} = J \Phi \quad (3.4)$$

Onde Φ é uma matriz $N \times N$, sendo N a dimensão do sistema. Integra-se esta equação, utilizando como condição inicial Φ igual à matriz identidade. Segundo o desenvolvimento de Müller (1995), para sistemas com o tipo de descontinuidade presente nos problemas estudados neste trabalho, basta que sejam calculadas duas diferentes matrizes J - com e sem contato - e utilizá-las nas condições correspondentes.

Sendo esta uma linearização, ela não é válida para estados longe da trajetória de referência do sistema. Portanto, deve-se realizar em intervalos regulares uma ortonormalização da matriz Φ , transformando suas colunas em uma base de vetores ortonormais. Na sequência das Eqs. (3.5) a (3.9) é mostrado o algoritmo para ortonormalização da matriz e cálculo dos expoentes de Lyapunov através dos módulos de seus vetores coluna.

$$\Phi = \{\phi_1 \quad \dots \quad \phi_i \quad \dots \quad \phi_N\} \quad (3.5)$$

$$\varphi_i = \phi_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\phi_i \cdot \phi_j) * \phi_j \quad (3.6)$$

$$\bar{\Phi} = \left\{ \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|} \quad \dots \quad \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|} \quad \dots \quad \frac{\varphi_N}{\|\varphi_N\|} \right\} \quad (3.7)$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i + \log_2 \|\varphi_i\| \quad (3.9)$$

Onde ϕ_i são os vetores que formam a matriz Φ antes da ortonormalização; $\bar{\Phi}$ é a matriz ortonormalizada e λ_i são os expoentes de Lyapunov. É importante notar que a variável ε_i é cumulativa, sendo adicionada uma nova quantidade a ela a cada ortonormalização. Quanto maior o tempo de integração t , mais o valor de λ_i deve se estabilizar em seu valor real para o sistema analisado. O valor aceitável para t pode ser grande, sobretudo em sistemas com transientes mais significativos.

4. MODELO DE 4GDL

Neste capítulo são apresentados dois métodos de integração numérica relevantes para o estudo deste trabalho: o método das diferenças finitas centrais e o método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Também são apresentados neste capítulo os resultados para a simulação do modelo de 4 graus de liberdade, que consiste em um rotor de Jeffcott com um estator cilíndrico suspenso, assim como o estudado por Lesaffre (2007b) e por Demailly (2003).

4.1 MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Como explicado na seção 2.2, um sistema dinâmico pode ser representado por uma equação diferencial de primeira ordem na forma da Eq. 2.1, que traz toda a informação necessária para obter a evolução temporal do sistema a partir de um conjunto de valores iniciais. O próximo passo a ser dado é definir uma ferramenta matemática adequada para fazer essa integração numérica. Neste procedimento realiza-se uma discretização temporal, ou seja, a evolução real contínua do sistema é aproximada por uma evolução discreta, na qual calcula-se ponto a ponto no tempo o estado do sistema.

Um cálculo deste tipo nunca é exato, uma vez que, quando calcula-se a evolução de um ponto a outro, faz-se um truncamento da série de Taylor que descreveria o caminho exato do sistema entre os pontos. Assim, é intuitivo que quanto menor for o passo de tempo mais próximo este caminho será de uma reta, e melhor será a aproximação, uma vez que os termos de alta ordem da série de Taylor terão pouco impacto no valor da função. Também conclui-se daí que sistemas cuja resposta contiver componentes de alta frequência - altos valores da derivadas de ordem superior - demandarão um passo de tempo menor.

Desta forma, o estudo dos métodos numéricos para solução de equações diferenciais é sempre um domínio ao qual é dada atenção especial em trabalhos de simulação numérica de sistemas dinâmicos. Diversas análises são feitas para avaliar o comportamento destas ferramentas em determinadas situações.

Nesta seção apresentaremos dois destes métodos: o método das diferenças finitas centrais e o método de Runge-Kutta de quarta ordem.

4.1.1 O método das diferenças finitas centrais

A ideia básica do método de diferenças finitas centrais é a de aproximar a derivada do vetor \mathbf{X} no tempo t_i através dos valores de \mathbf{X} nos tempos t_{i-1} e t_{i+1} , como mostra a Eq. 4.1.

$$\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}\right)_i = \frac{(\mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}_{i-1})}{2 dt} + \mathcal{O}(dt^2) \quad (4.1)$$

onde dt representa o passo de tempo, os índices subscritos indicam a que ponto no tempo a variável se refere e $\mathcal{O}(dt^2)$ representa o erro de truncamento da série de Taylor que é da ordem de dt^2 . Da mesma forma, podem-se calcular derivadas de ordens mais elevadas, se o problema assim exigir. Mas para um sistema representado na forma da Eq. 2.1 basta estimar a primeira derivada.

Assim, utilizando a Eq. 2.1, obtém-se a relação para o cálculo do vetor \mathbf{X}_{i+1} a partir de \mathbf{X}_i e \mathbf{X}_{i-1} como mostrado na Eq. 4.2.

$$\mathbf{X}_{i+1} = 2 dt [\mathbf{A} \mathbf{X}_i + \mathbf{B}_i] + \mathbf{X}_{i-1} + \mathcal{O}(dt^3) \quad (4.2)$$

Este método é utilizado nos trabalhos por Lesaffre (2007a, 2007b) e Demailly (2003). Porém, este método centrais não é tradicionalmente utilizado em sistemas não-lineares como os problemas de contato, que apresentam alta sensibilidade à pequenas variações, devida à variações repentinas do comportamento e da alta rigidez de contato. Além disso, nos trabalhos mencionados não houve um estudo da convergência do método. O método das diferenças finitas centrais, que deriva do método de Euler, apresenta, por vezes, apresenta, de acordo com Dahlquist&Björk (2003), um comportamento localmente instável que pode prejudicar sistemas com alta sensibilidade como aqueles com contato.

Como mencionam Conte & de Boor (1980) e Dahlquist&Björk (2003), os métodos mais frequentemente utilizados para sistemas não-lineares de tal complexidade, e que oferecem mais estabilidade para tais, são os métodos de Runge-Kutta de quarta ordem.

4.1.2 O Método de Runge-Kutta de quarta ordem

O método de Runge-Kutta de quarta ordem é um método que avalia a derivada da função \mathbf{X}_i no tempo t_i , aqui denotada por $\mathbf{f}(t_i, \mathbf{X}_i)$, em quatro pontos estrategicamente localizados para que se obtenha uma melhor precisão no cálculo.

O procedimento para se obter o valor de \mathbf{X}_{i+1} é mostrado nas Eqs. 4.3 e 4.4.

$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{X}_i + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} \mathbf{k}_1 = dt \mathbf{f}(t_i, \mathbf{X}_i) \\ \mathbf{k}_2 = dt \mathbf{f}\left(t_i + \frac{dt}{2}, \mathbf{X}_i + \frac{\mathbf{k}_1}{2}\right) \\ \mathbf{k}_3 = dt \mathbf{f}\left(t_i + \frac{dt}{2}, \mathbf{X}_i + \frac{\mathbf{k}_2}{2}\right) \\ \mathbf{k}_4 = dt \mathbf{f}(t_i + dt, \mathbf{X}_i + \mathbf{k}_3) \end{cases} \quad (4.4)$$

É importante notar que as derivadas $\mathbf{f}(t_i, \mathbf{X}_i)$ são calculadas diretamente com o uso da Eq. 2.1.

O método de Runge-Kutta apresentado nas Eqs. 4.3 e 4.4 são de fácil aplicação em qualquer linguagem de programação e apresenta a vantagem de ser auto-iniciado, ou seja, necessita apenas de um ponto \mathbf{X}_0 pra que os cálculos sejam iniciados.

Outras variantes deste método também são utilizadas, como o método de Runge-Kutta-Fehlberg de quarta ordem, que utiliza coeficientes que otimizam a localização dos pontos de avaliação das derivadas, aumentando ainda mais a precisão do método.

4.1.3 Estratégia de variação do passo de tempo

Como os sistemas estudados neste trabalho apresentam dois regimes diferentes bem definidos - com e sem contato -, é interessante que se utilize uma estratégia de variação do passo de tempo para que seja reduzido o custo computacional das simulações realizadas.

O método utilizado é semelhante ao apresentado por Conte & de Boor (1980), que faz o controle do passo de tempo através do monitoramento do erro estimado para o método de Runge-Kutta. A estimativa do erro é feita calculando-se a posição \mathbf{X}_{i+1} de duas maneiras: a primeira normalmente, utilizando-se um passo de tempo dt e a segunda integra-se o sistema duas vezes com passo de tempo de $\frac{dt}{2}$. Como mostram Conte & de Boor (1980), o erro para o método de Runge-Kutta de quarta ordem pode ser estimado pela Eq. (4.5).

$$E_{i+1} = \frac{|\mathbf{X}_{dt/2}(t_{i+1}) - \mathbf{X}_{dt}(t_{i+1})|}{15} \quad (4.5)$$

onde $\mathbf{X}_{dt/2}(t_{i+1})$ representa o valor calculado integrando-se o sistema duas vezes com passo de tempo $\frac{dt}{2}$ e $\mathbf{X}_{dt}(t_{i+1})$ o cálculo integrando-se o sistema apenas uma vez com passo de tempo dt .

Para casos de problemas com contato, este método de estimativa do erro funciona especialmente bem, pois na interface do contato a força só é levada em conta para o cálculo de \mathbf{X}_{i+1} quando já se verificou o contato para a condição de \mathbf{X}_i , negligenciando-se, assim, um trecho da situação de contato no caso em que \mathbf{X}_i não satisfaz a condição de contato mas está muito próximo disso. Quando calcula-se o erro, porém, leva-se em conta, no segundo passo de $\frac{dt}{2}$, a força de contato.

Para os exemplos aqui descritos, o erro é estimado apenas nestas situações - quando \mathbf{X}_i não acusa contato enquanto \mathbf{X}_{i+1} o faz. Neste ponto, que é o mais crítico durante todo o percurso, reduz-se o passo de tempo, e mantêm-se esta redução para todo o período com contato, voltando ao passo de tempo padrão apenas quando a condição de contato não mais se verifica.

Desta forma, pode-se, sempre que for necessário, estimar o erro e compará-lo com um erro máximo previamente estipulado, e, a partir da distância entre erro calculado e erro máximo desejado, recalcula-se o novo passo de tempo reduzido dt_r de acordo com a Eq. 4.6.

$$dt_r = dt \left(\frac{E_{máx}}{E_i} \right)^\alpha \quad (4.6)$$

Este é um processo iterativo, que é repetido até que a condição $E_i \leq E_{máx}$ seja satisfeita. Onde $E_{máx}$ representa o erro máximo estipulado, dt o passo de tempo anterior e E_i o erro estimado pela Eq.

4.5. O expoente α é uma constante que determina a velocidade com a qual o passo de tempo será diminuído a cada iteração, e ele é calibrado empiricamente de maneira a minimizar o tempo de cálculo, que será na condição em que o mínimo possível de iterações será feito sem que o passo de tempo seja diminuído excessivamente. Na maioria das simulações realizadas neste trabalho obteve-se $\alpha \approx 1$, sendo necessárias de 1 a 3 iterações pra que se atingisse o erro desejado.

4.2 SISTEMA DE 4 GRAUS DE LIBERDADE

O sistema que será analisado neste capítulo é um problema de muita importância dentro da dinâmica de máquinas rotativas, que é o sistema de eixo - mancal. O eixo é modelado como um rotor de Jeffcott desbalanceado e o mancal é um estator cilíndrico rígido suspenso por duas molas, assim como o rotor.

Nesta seção será descrito este sistema que é de grande relevância para a indústria e, por causa de sua simplicidade, foi largamente estudado na literatura. Lesaffre (2007b) utilizou este modelo para validar os métodos apresentados, que eram um método de integração por diferenças finitas centrais e o método de multiplicadores de Lagrange para simular o contato.

Demailly (2003) também estudou este mesmo sistema na etapa inicial da apresentação de seus estudos, utilizando o método de penalidade para o cálculo das forças de contato e também o método de diferenças finitas centrais para a integração numérica. Em seu trabalho ele analisa mais profundamente alguns aspectos da dinâmica não-linear do sistema, encontrando alguns pontos de comportamento *quase*-periódico.

Popprath & Ecker (2007) também estudaram o mesmo sistema de 4 graus de liberdade, porém as ferramentas utilizadas no estudo não incluíam análises quantitativas com os expoentes de Lyapunov.

4.2.1 Modelagem matemática

A Fig. 4.1 ilustra o modelo descrito em sua posição de equilíbrio. As rigidezes K_r e K_s são conectadas ao rotor, de massa m_r , e ao estator, de massa m_s , respectivamente, e estes são inicialmente separados por uma distância radial δ , indicada na ilustração. Denota-se aqui os deslocamentos horizontal e vertical do rotor por x_r e y_r e os deslocamentos do estator por x_s e y_s .

Pode-se representar este sistema na forma de variáveis de estados. Além disso, considerando que há um amortecimento viscoso linear de coeficiente c_r associado a cada rigidez k_r e outro de coeficiente c_s associado a cada k_s , as equações que governam o sistema são apresentadas na Eq. 4.7.

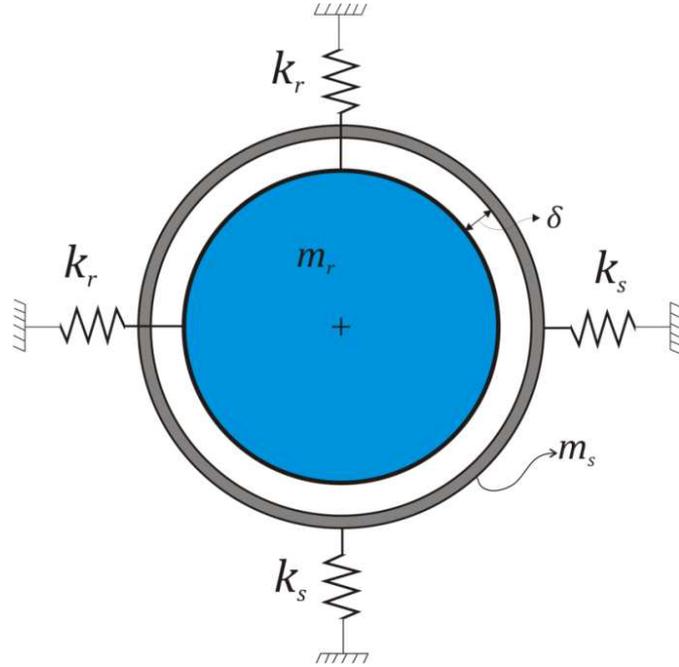


Figura 4.1 - Ilustração do modelo eixo-mancal de quatro graus de liberdade.

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_r \\ \ddot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \ddot{y}_r \\ \dot{x}_s \\ \ddot{x}_s \\ \dot{y}_s \\ \ddot{y}_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_r}{m_r} & -\frac{c_r}{m_r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k_r}{m_r} & -\frac{c_r}{m_r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} x_r \\ \dot{x}_r \\ y_r \\ \dot{y}_r \\ x_s \\ \dot{x}_s \\ y_s \\ \dot{y}_s \end{Bmatrix} + \mathbf{B} \quad (4.7)$$

onde x_r e y_r são respectivamente os deslocamentos horizontal e vertical do rotor, x_s e y_s são respectivamente os deslocamentos horizontal e vertical do estator e $\mathbf{B} = \mathbf{B}_d + \mathbf{B}_c$ é o vetor de forçamento composto por um componente de desbalanceamento \mathbf{B}_d e outra de contato \mathbf{B}_c , que para ser calculada necessita que antes sejam feitas considerações sobre o contato entre rotor e estator.

Como mencionado na Seção 2.4, o primeiro passo a ser dado em um problema desta natureza é a condição de contato, ou seja, uma inequação que define, a partir das variáveis do problema, o ponto a partir do qual as forças de contato começam a atuar. A Fig. 4.2 ilustra o momento do contato entre rotor e estator, e auxilia na compreensão da geometria do problema. Nesta figura, as forças de contato indicadas por f_n e f_t são, respectivamente, as forças normal e tangencial aplicadas pelo rotor sobre o estator, para a rotação no sentido horário, e cujos módulos são relacionados pelo coeficiente de atrito seco μ de maneira que $|f_t| = \mu |f_n|$.

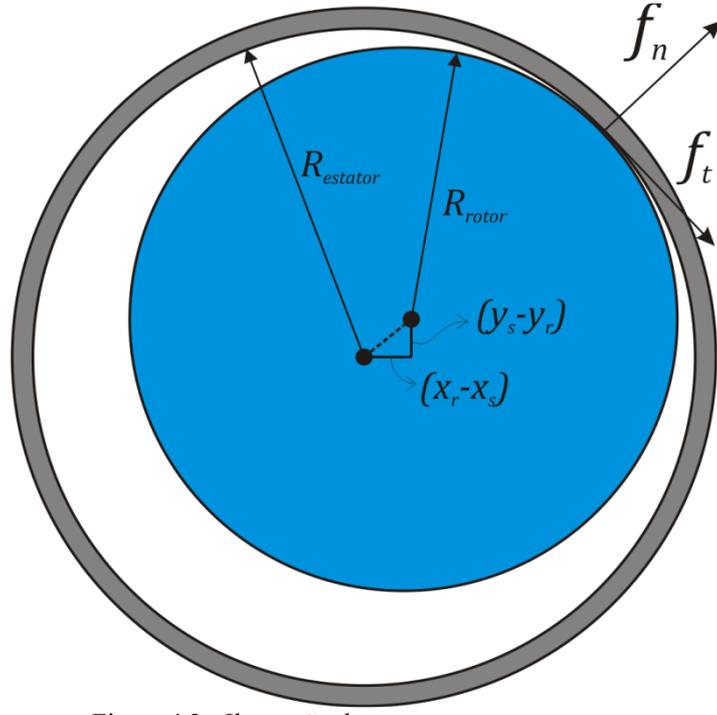


Figura 4.2 - Ilustração do contato entre rotor e estator.

Para a construção da condição de contato, será utilizada uma variável auxiliar que corresponde à penetração do rotor no estator, g , que é calculada como mostra a Eq. 4.8. Assim, tem-se que, sempre que $g > 0$, a componente da força de contato é diferente de zero, $\mathbf{B}_c \neq \mathbf{0}$, enquanto que, quando $g \leq 0$, tem-se que $B_c = 0$. O vetor de força \mathbf{B} , da Eq. 4.7 é dada pelas Eqs. 4.9 e 4.10.

$$g = \sqrt{(x_r - x_s)^2 + (y_r - y_s)^2} - \delta \quad (4.8)$$

$$\mathbf{B} = \begin{Bmatrix} 0 \\ e\Omega^2 \cos(\Omega t + \alpha) \\ 0 \\ e\Omega^2 \sin(\Omega t + \alpha) - a_{gr} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad g \leq 0 \quad (4.9)$$

$$\mathbf{B} = \begin{Bmatrix} 0 \\ e\Omega^2 \cos(\Omega t) \\ 0 \\ e\Omega^2 \sin(\Omega t) - a_g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{g k_c}{g + \delta} \begin{Bmatrix} 0 \\ x_s - x_r \\ 0 \\ y_s - y_r \\ 0 \\ x_r - x_s \\ 0 \\ y_r - y_s \end{Bmatrix} + \mu \begin{Bmatrix} 0 \\ y_r - y_s \\ 0 \\ x_s - x_r \\ 0 \\ y_s - y_r \\ 0 \\ x_r - x_s \end{Bmatrix}, \quad g > 0 \quad (4.10)$$

onde a_{gr} é a aceleração da gravidade. Nota-se que a grandeza $g + \delta$ corresponde ao módulo do deslocamento relativo entre rotor e estator, e os vetores entre colchetes na Eq. 4.10, quando divididos por $g + \delta$, formam os conjuntos de cossenos diretores das forças f_n e f_t .

Para o cálculo do expoente de Lyapunov é necessário o cálculo da matriz Jacobiana que lineariza o sistema através da fórmula da Eq. 3.3. Para o sistema apresentado acima, na situação com contato, a matriz Jacobiana que será utilizada é mostrada na Eq. 4.11.

$$J(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_r}{m_r} - \left(\frac{\delta(x_r - x_s)^2}{(g + \delta)^3} + \frac{g}{g + \delta} \right) \frac{k_c}{m_r} & -\frac{c_r}{m_r} & \frac{\delta(x_s - x_r)(y_r - y_s)}{(g + \delta)^3} \frac{k_c}{m_r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\delta(x_r - x_s)(y_s - y_r)}{(g + \delta)^3} \frac{k_c}{m_r} & 0 & -\frac{k_r}{m_r} - \left(\frac{\delta(y_r - y_s)^2}{(g + \delta)^3} + \frac{g}{g + \delta} \right) \frac{k_c}{m_r} & -\frac{c_r}{m_r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\delta(x_r - x_s)^2}{(g + \delta)^3} + \frac{g}{g + \delta} \right) \frac{k_c}{m_s} & 0 & \frac{\delta(x_r - x_s)(y_r - y_s)}{(g + \delta)^3} \frac{k_c}{m_s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\delta(x_r - x_s)(y_r - y_s)}{(g + \delta)^3} \frac{k_c}{m_s} & 0 & \left(\frac{\delta(y_r - y_s)^2}{(g + \delta)^3} + \frac{g}{g + \delta} \right) \frac{k_c}{m_s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\delta(x_r - x_s)^2}{(g + \delta)^3} + \frac{g}{g + \delta} \right) \frac{k_c}{m_r} & 0 & \frac{\delta(x_s - x_r)(y_s - y_r)}{(g + \delta)^3} \frac{k_c}{m_r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\delta(x_s - x_r)(y_s - y_r)}{(g + \delta)^3} \frac{k_c}{m_r} & 0 & \left(\frac{\delta(y_r - y_s)^2}{(g + \delta)^3} + \frac{g}{g + \delta} \right) \frac{k_c}{m_r} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_s}{m_s} - \left(\frac{\delta(x_r - x_s)^2}{(g + \delta)^3} + \frac{g}{g + \delta} \right) \frac{k_c}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & \frac{\delta(x_r - x_s)(y_s - y_r)}{(g + \delta)^3} \frac{k_c}{m_s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\delta(x_s - x_r)(y_r - y_s)}{(g + \delta)^3} \frac{k_c}{m_s} & 0 & -\frac{k_s}{m_s} - \left(\frac{\delta(y_r - y_s)^2}{(g + \delta)^3} + \frac{g}{g + \delta} \right) \frac{k_c}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

4.2.2 Simulação Numérica

Um algoritmo em linguagem Fortran foi desenvolvido para a simulação do sistema. Para a solução numérica, uma representação alternativa da Eq (4.7) é utilizada onde são utilizadas as variáveis adimensionais apresentadas na Eq. (4.12).

$$\omega_s = \sqrt{\frac{k_s}{m_s}} \quad ; \quad \omega_r = \sqrt{\frac{k_r}{m_r}} \quad ; \quad \xi_s = \frac{c_s}{2\sqrt{k_s m_s}} \quad ; \quad \xi_r = \frac{c_r}{2\sqrt{k_r m_r}} \quad (4.12)$$

Em todos os casos analisados foi utilizado o conjunto de parâmetros apresentado na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 - Parâmetros utilizados nas simulações numéricas.

$\omega_s \left(\frac{rad}{s} \right)$	$\omega_r \left(\frac{rad}{s} \right)$	ξ_s	ξ_r	$\delta(m)$	μ	$m_r(kg)$	$m_s(kg)$
540	140	0.05	0.02	0.006	0	50	50

Dois casos são analisados, em cada um são modificados apenas o desbalanceamento, e , a rigidez de contato, k_c , e o erro máximo admitido, $E_{máx}$. Na primeira situação, foram adotados valores baseados no trabalho de Demailly (2003) com algumas mudanças, como a redução da rigidez de contato, para diminuir o custo computacional das simulações. No segundo caso, os parâmetros

utilizados são iguais aos apresentados na análise apresentada por Demailly (2003). A Tabela 4.2 mostra os parâmetros do primeiro caso.

Tabela 4.2 - Parâmetros para o primeiro caso analisado.

$e(m)$	$k_c \left(\frac{N}{m}\right)$	$E_{máx}(m)$
0.0025	10^7	10^{-6}

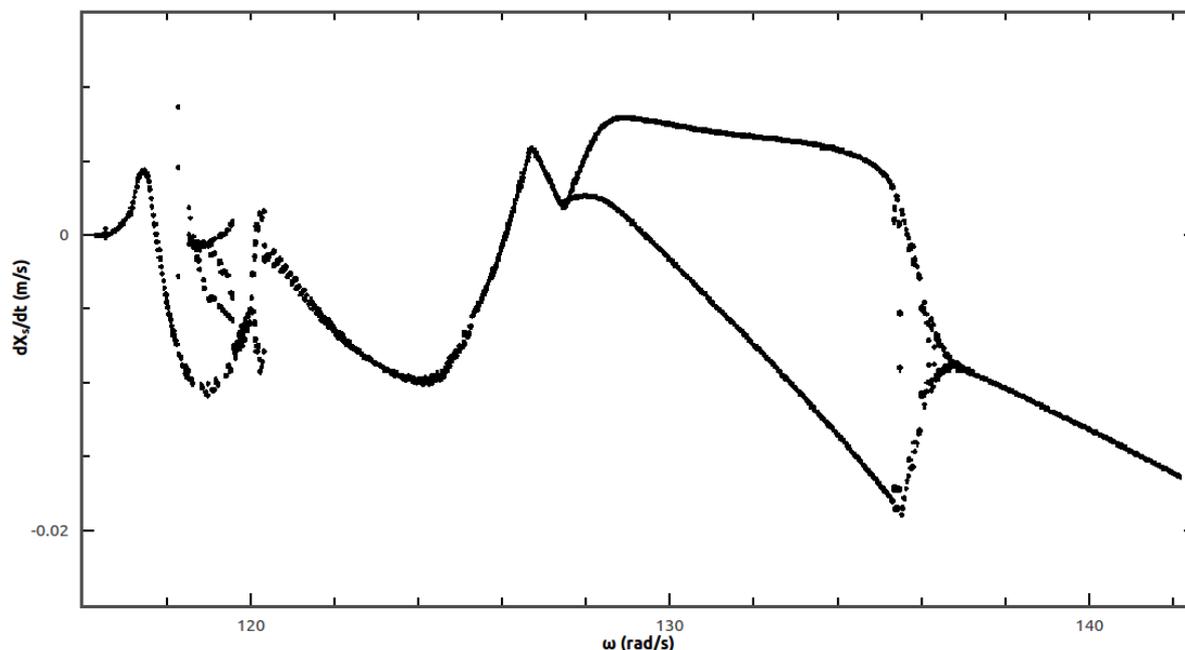


Figura 4.3 - Diagrama de bifurcação para os parâmetros da Tabela 4.2.

A Figura 4.3 mostra o diagrama de bifurcação para o intervalo de frequência de rotação de 116rad/s a 140rad/s com incremento de 0.03rad/s . Para a construção do diagrama, em cada frequência de rotação o sistema é integrado por 5s e apenas os 10 últimos períodos de integração são considerados para cada frequência, descartando-se, assim, o regime transiente. Além disso, como condições iniciais para cada frequência é considerado o último estado do sistema para a frequência anterior, com exceção da primeira frequência analisada quando todas as condições iniciais são nulas.

O diagrama de bifurcação da Figura 4.3 apresenta no eixo das ordenadas a velocidade da coordenada x do estator na seção de Poincaré. Este intervalo de frequência não foi escolhido ao acaso, ele corresponde ao intervalo no qual o contato entre rotor e estator é intermitente. Para frequências inferiores a 116rad/s o deslocamento do rotor não é suficiente para gerar contato, e para frequências superiores a 138rad/s o contato entre as partes é permanente. Cabe ressaltar que são essas transições entre ausência de contato e contato permanente e vice-versa, que dão origem às não-linearidades. Nas situações particulares em que o sistema encontra-se sempre sem contato ou sempre com contato permanente o sistema é linear.

Pode-se observar, na Figura 4.3, três diferentes comportamentos do sistema. Por vezes o diagrama de bifurcação aponta um comportamento periódico de periodicidade 1; na região entre 127rad/s até

137rad/s verifica-se uma periodicidade 2; e de 118rad/s a 120rad/s verifica-se uma região indeterminada, que necessita de uma análise mais refinada para que seja caracterizada com clareza. Com este objetivo, três medidas são tomadas: diminuir o incremento da frequência no diagrama de bifurcação, passando de 0.03rad/s para 0.01rad/s; aumentar o tempo de relaxamento do sistema, deixando-o estabilizar-se por 10s ao invés de apenas 5s; e aplicar uma interpolação para o aumento da precisão na construção da seção de Poincaré.

A necessidade desta interpolação vem do fato de que, sendo o método de integração numérico discreto, muitas vezes o estado do sistema no instante necessário para a construção da seção de Poincaré não é conhecido. Uma interpolação linear é suficiente pra refinar os dados da seção de Poincaré e, conseqüentemente, do diagrama de bifurcação.

As Figuras 4.4 e 4.5 mostram uma região do diagrama da Figura 4.3 com as melhorias descritas.

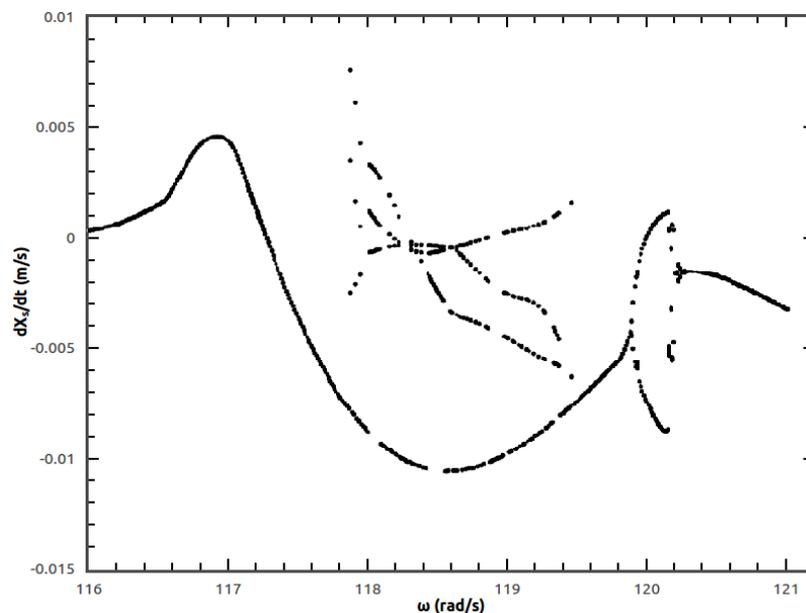


Figura 4.4 - Diagrama de bifurcação refinado indicando coexistência de órbitas para o estator.

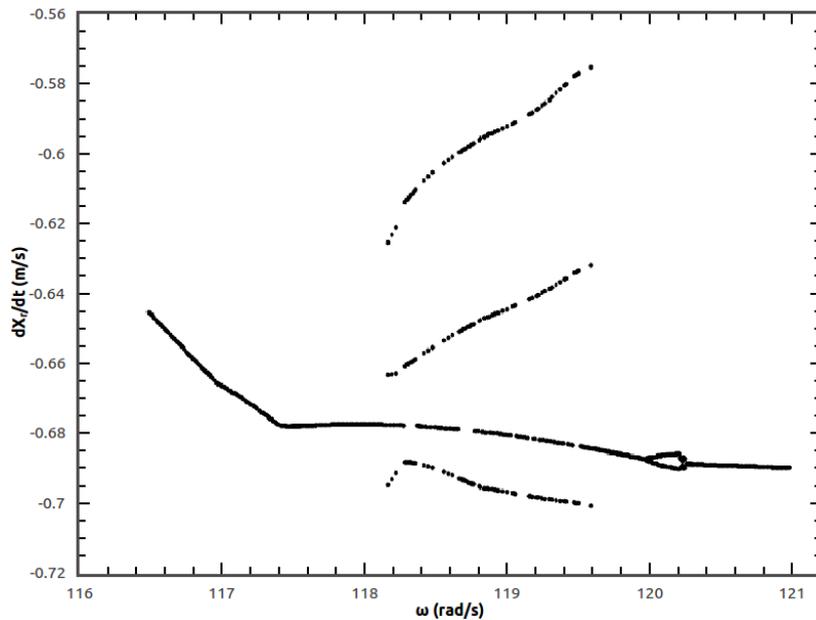


Figura 4.5 - Diagrama de bifurcação refinado indicando coexistência de órbitas para o rotor.

Pode-se perceber que aparentemente existem dois caminhos possíveis a serem seguidos pelo diagrama de bifurcação entre as frequências de 118rad/s e 119.7rad/s : um com periodicidade 1 e um segundo caminho com periodicidade 3. Este segundo caminho não se manifesta além deste intervalo mencionado. Verifica-se também uma bifurcação local para periodicidade 2 para valores próximos a 120rad/s .

Para verificar com mais clareza o que ocorre para a região com aparente coexistência de comportamentos, apresenta-se o espaço de fase junto com a seção de Poincaré para alguns valores de frequência dentro do intervalo de interesse. As Figuras 4.6 e 4.7 mostram as duas órbitas coexistentes, que foram obtidas na mesma frequência de rotação, porém uma delas utilizando-se condições iniciais nulas e a segunda utilizando $\mathbf{X}(0) = \{-0,004; -0,6; 0; 0; 0; -0,002; 0; 0\}$.

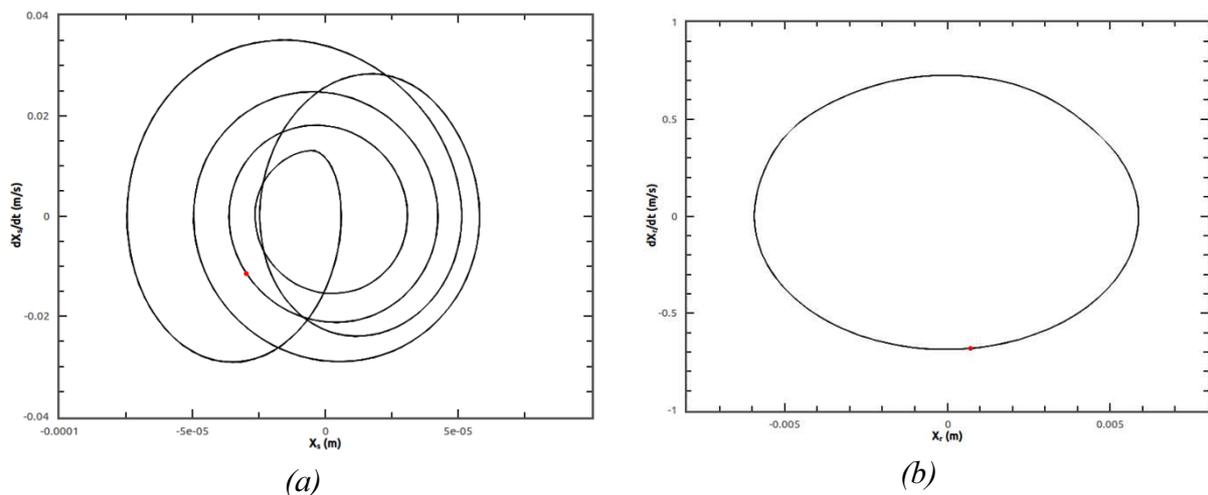


Figura 4.6 - Órbitas de periodicidade 1 para a frequência de 119rad/s para o estator (a) e o rotor (b) utilizando-se condições iniciais nulas.

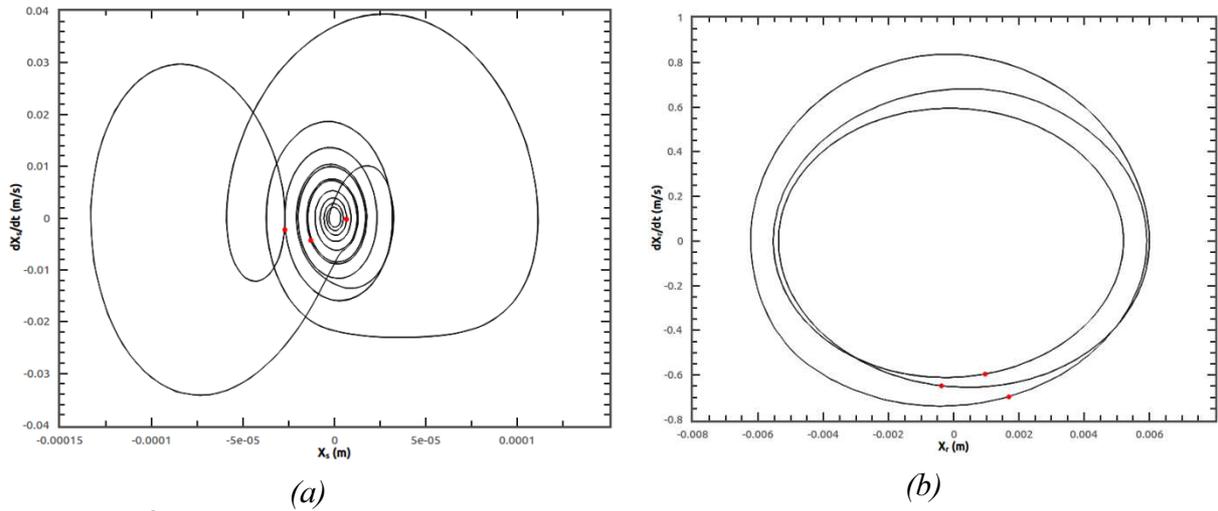


Figura 4.7 - Órbitas de periodicidade 3 para a frequência de 119rad/s para o estator(a) e o rotor (b) utilizando-se $X(0) = \{-0,004; -0,6; 0; 0; 0; -0,002; 0; 0\}$.

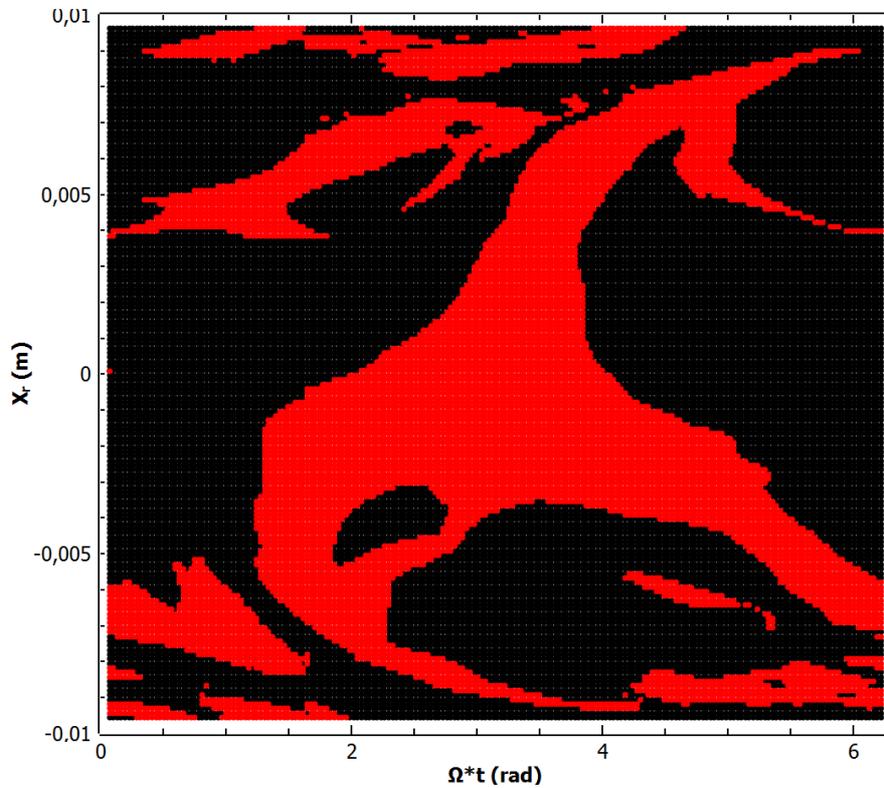


Figura 1.8 - Bacia de atração para a frequência de 119.47 rad/s.

A Fig. 4.8 mostra a bacia de atração para a frequência de 119.47 rad/s, definindo o perfil da coexistência de órbitas. No gráfico foram variadas as condições iniciais do ângulo de fase, nas ordenadas, e do deslocamento horizontal do rotor x_r . As regiões em vermelho representam a órbita de periodicidade 3, e as regiões em preto representam órbitas de periodicidade 1.

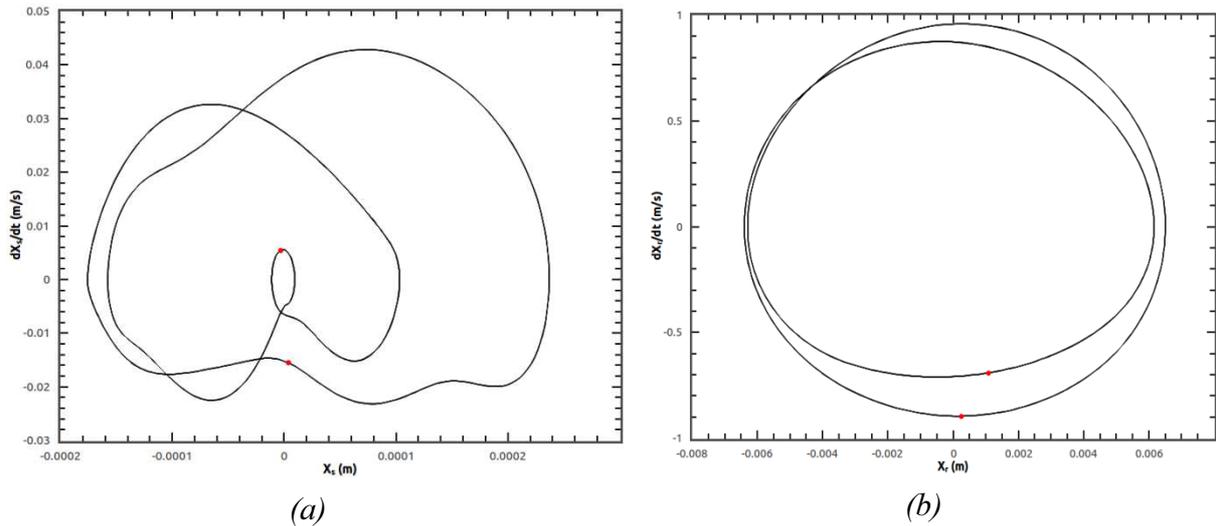


Figura 4.9 - Órbita de periodicidade 2 para a frequência de 135rad/s para o estator(a) e o rotor (b).

A Figura 4.9 mostra a órbita no espaço de fase e a seção de Poincaré para a frequência de 135rad/s associada à outra região de interesse da Figura 4.3. Pode-se ver nesta situação que a órbita é periódica de periodicidade 2 e apresenta uma aparência bem diferente das órbitas anteriormente apresentadas. Percebe-se que as órbitas apresentadas nas Figs. 4.6 e 4.7 possuem estruturas recorrentes em forma de uma espiral que converge para a origem. Estas estruturas correspondem à parcela da trajetória na qual não há contato entre rotor e estator e, conseqüentemente, as estruturas vibram em movimento harmônico livre sub-amortecido, fonte das espirais. Já na órbita apresentada para a frequência de 135rad/s o sistema está muito próximo do ponto de contato permanente, e o trecho da trajetória onde não se verifica contato é muito curto. Por isso não se vêem as estruturas espiraladas na órbita da Figura 4.7. A Figura 4.10 ratifica este fato, mostrando, através do gráfico da distância g para as frequências de 119rad/s e 135rad/s, que o tempo com contato, ou seja, o tempo que g passa tendo valores negativos, no segundo caso é muito maior.

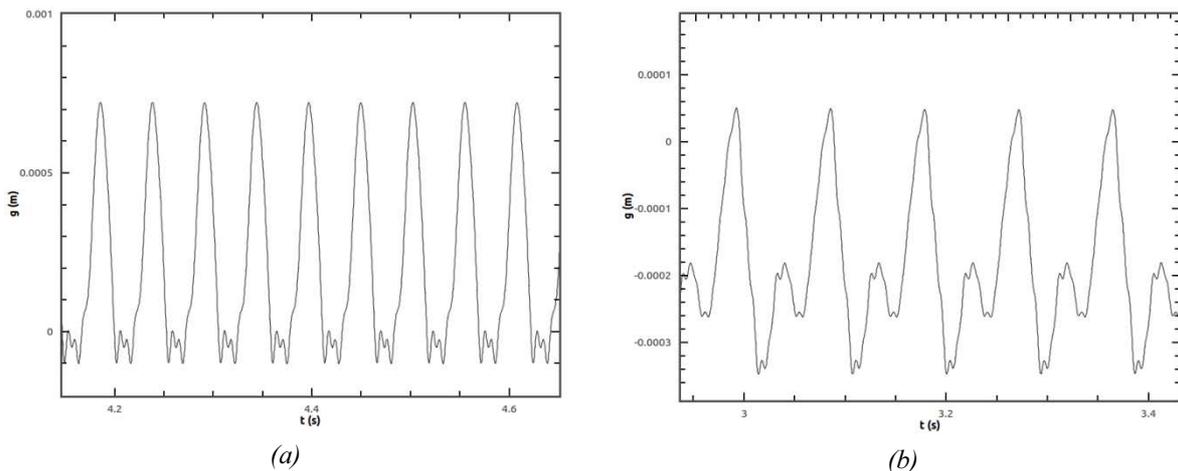


Figura 4.10 - Distância g em função do tempo para a frequência de 119rad/s(a), e de 135 rad/s(b).

Para o segundo caso a ser estudado, foram utilizados os parâmetros das simulações apresentadas por Demailly (2003). Neste caso, a simulação do sistema exige a aplicação de um erro $E_{máx}$ bem

menor para que a solução seja correta devido à alta rigidez de contato utilizada. A Tabela 4.3 mostra os parâmetros utilizados na simulação.

Tabela 4.3 - Parâmetros para o segundo caso apresentado.

$e(m)$	$k_c \left(\frac{N}{m}\right)$	$E_{m\acute{a}x}(m)$
0.001	10^8	10^{-9}

Apesar de ser muito semelhante ao primeiro caso apresentado, o segundo sistema apresenta um comportamento muito mais complexo. A começar pelo fato de sua alta rigidez de contato, que gera componentes de alta frequência na resposta do sistema quando há contato, o que exige a utilização de passos de tempo muito pequenos. Além disso, por este sistema apresentar o mesmo valor de $\delta = 0.006m$ com um valor de desbalanceamento e menor, as velocidades de rotação que gerarão o contato serão obrigatoriamente maiores, gerando mais uma dificuldade à simulação numérica.

Analisando o comportamento dinâmico deste segundo sistema, pode-se perceber ainda mais peculiaridades. Como mostram as Figs. 4.11 e 4.12, que apresentam os diagramas de bifurcação para a varredura em frequência do sistema, o comportamento dinâmico neste caso apresenta vastas regiões que indicam caoticidade, apresentando também, em algumas regiões, janelas periódicas.

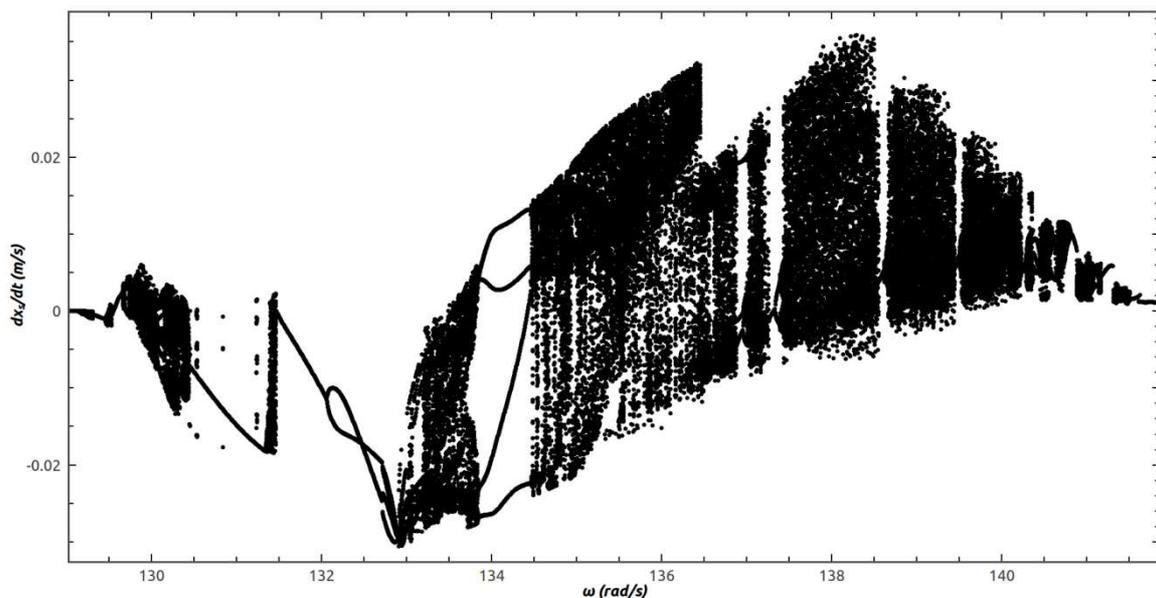


Figura 4.11 - Diagrama de bifurcação de \dot{X}_s para o sistema com parâmetros da Tabela 4.6.

A Figura 4.11 apresenta o diagrama de bifurcação para a velocidade da coordenada x do estator enquanto a Figura 4.12 apresenta o mesmo diagrama para a coordenada x do rotor. Pode-se observar diversos comportamentos nesta faixa de frequência, incluindo órbitas de períodos 1, 2, 3 e 4; regiões que indicam comportamento caótico e a ocorrência de janelas periódicas.

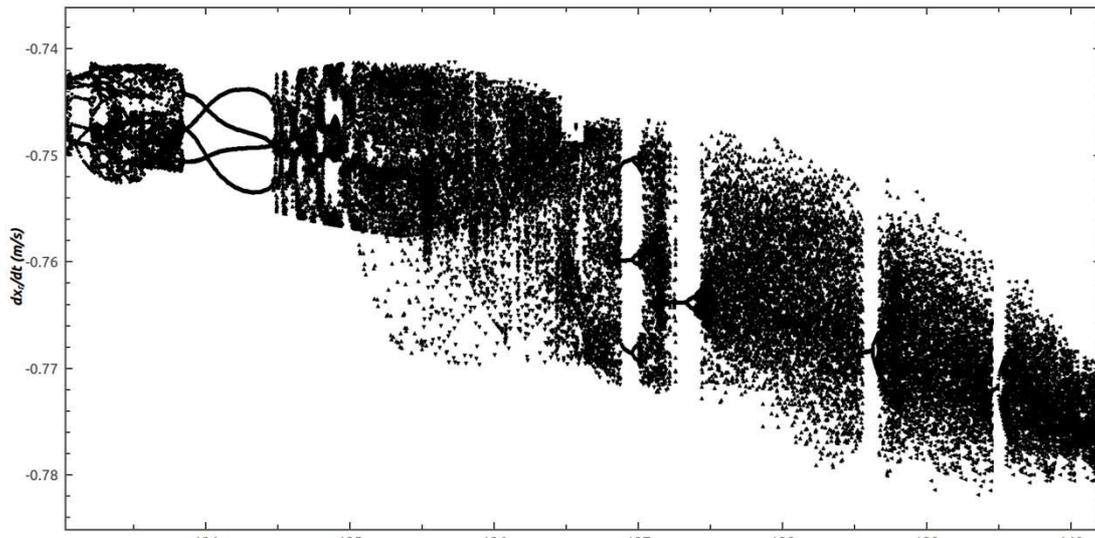


Figura 4.12 - Diagrama de bifurcação de \dot{X}_r para o sistema com parâmetros da Tabela 4.6.

A Figura 4.13 mostra um detalhe do diagrama da Figura 4.11 aonde podem ser vistas uma região caótica curta e, logo em seguida, uma bifurcação local de periodicidade 2. A Figura 4.14 mostra duas órbitas situadas nesta região, a primeira de periodicidade 1 a $131.7rad/s$ e a segunda de periodicidade 2 a $132.2rad/s$.

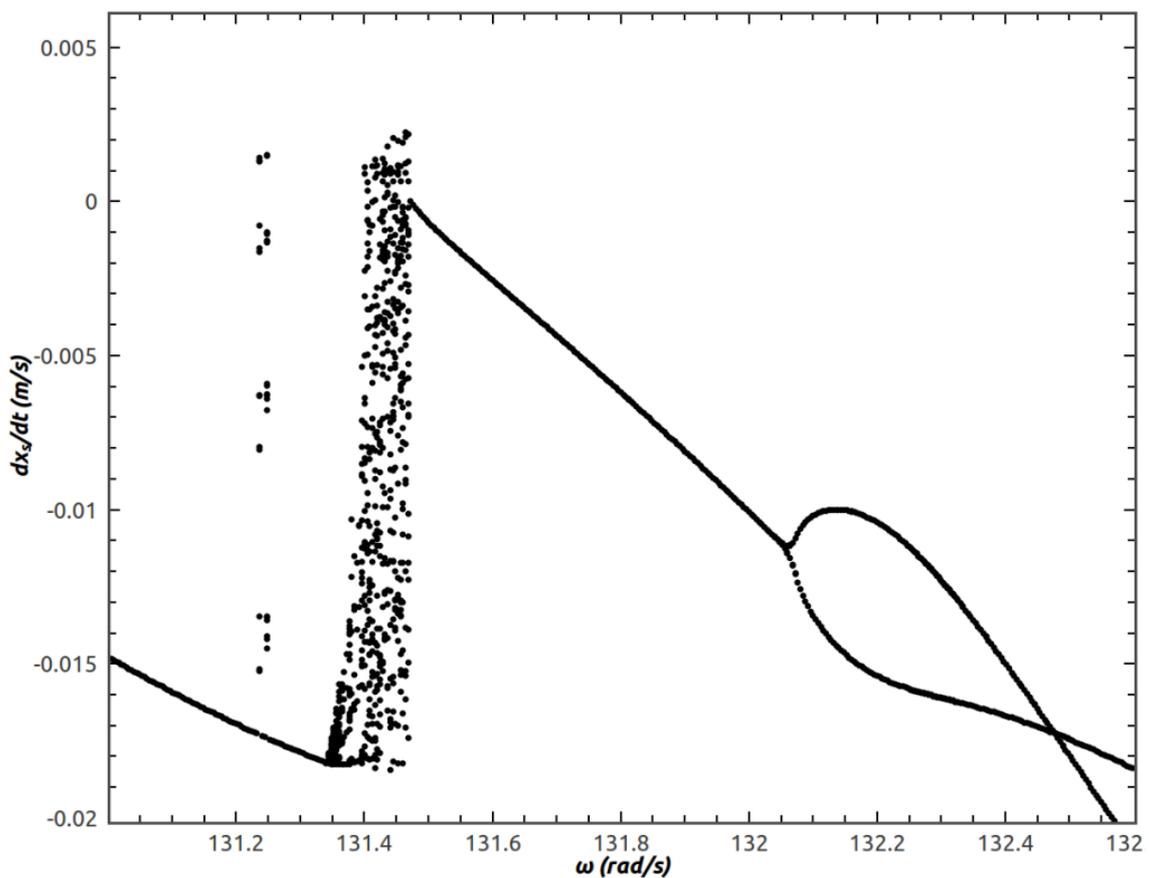


Figura 4.13 - Detalhe do diagrama da Fig. 4.13. Bifurcações global e local.

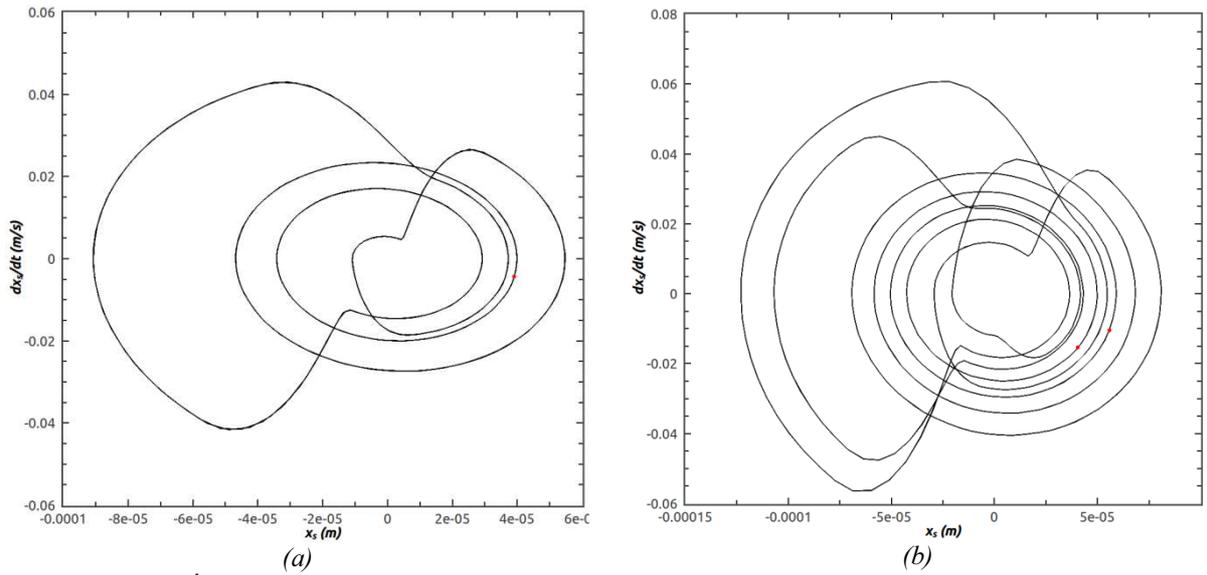


Figura 4.14 - Órbitas e seção de Poincaré do estator para as frequências de 131.7rad/s (a) e 132.2rad/s (b).

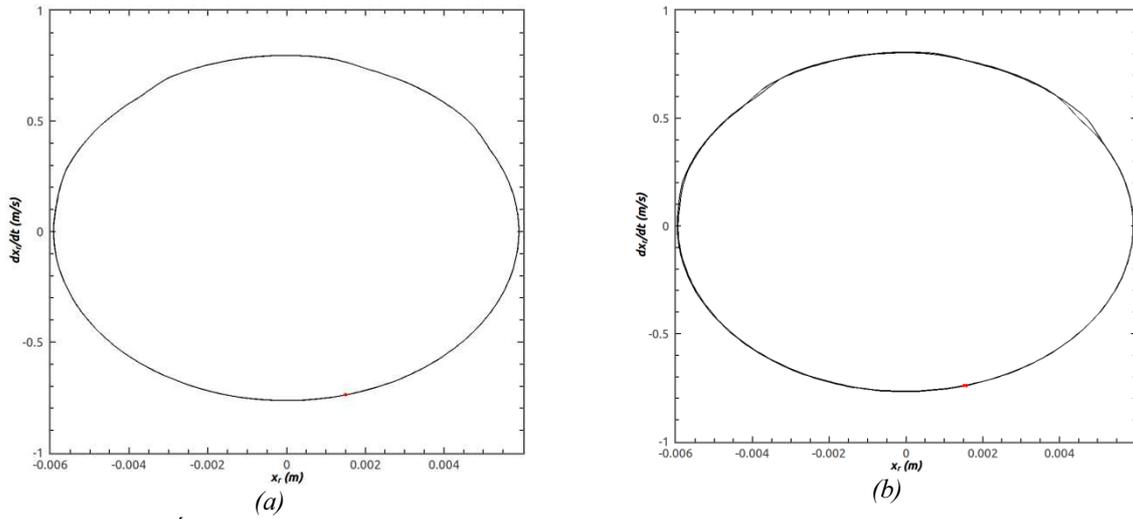


Figura 4.15 - Órbitas e seção de Poincaré do rotor para as frequências de 131.7rad/s (a) e 132.2rad/s (b).

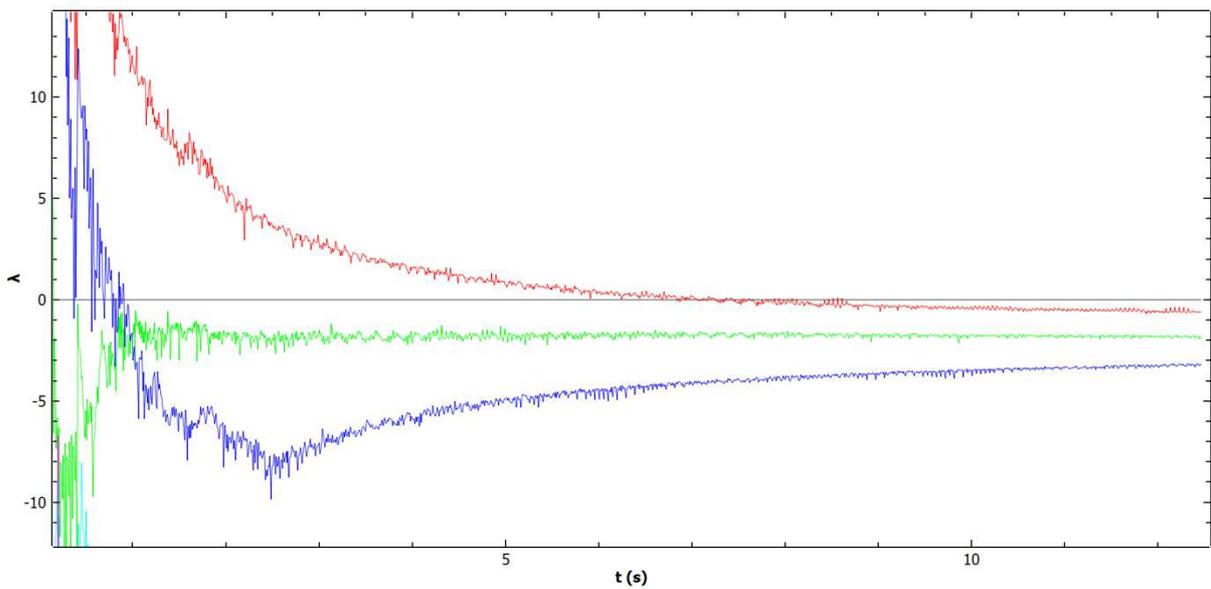


Figura 4.16 - Evolução dos expoentes de Lyapunov para a frequência de 132.2rad/s.

Percebe-se na Figura 4.15 que as órbitas correspondentes ao rotor assumem uma forma elíptica para todos os casos. E inclusive em periodicidades mais altas, como a região de periodicidade 4, e até mesmo em regiões caóticas este comportamento é recorrente. Isto se dá pelo fato de que os deslocamentos induzidos pelas forças de impacto, sobretudo neste caso de alta rigidez de contato, são muito pequenos quando comparados aos deslocamentos provocados pela força de desbalanceamento que se impõe sobre o rotor. Esta força de desbalanceamento, além de presente durante todo o tempo da simulação, também se dá, nesta faixa de frequência analisada, muito próximo da frequência natural do rotor - 140rad/s-, produzindo, assim, grandes deslocamentos.

A Fig. 4.16 mostra a evolução dos maiores expoentes de Lyapunov do sistema para a frequência de 132.2 rad/s, confirmando o comportamento periódico, uma vez que todos os expoentes se estabilizam em valores negativos. Para a frequência de 131.4 rad/s, mostrada no digrama da Fig. 4.13 como aparentemente caótica, é confirmada como tal como mostrado na Fig. 4.17, que mostra o expoente de Lyapunov estabilizando-se em um valor positivo. A Fig. 4.18 apresenta a seção de Poincaré para esta mesma frequência, com a presença de lamelas, reforçando a presença da resposta caótica.

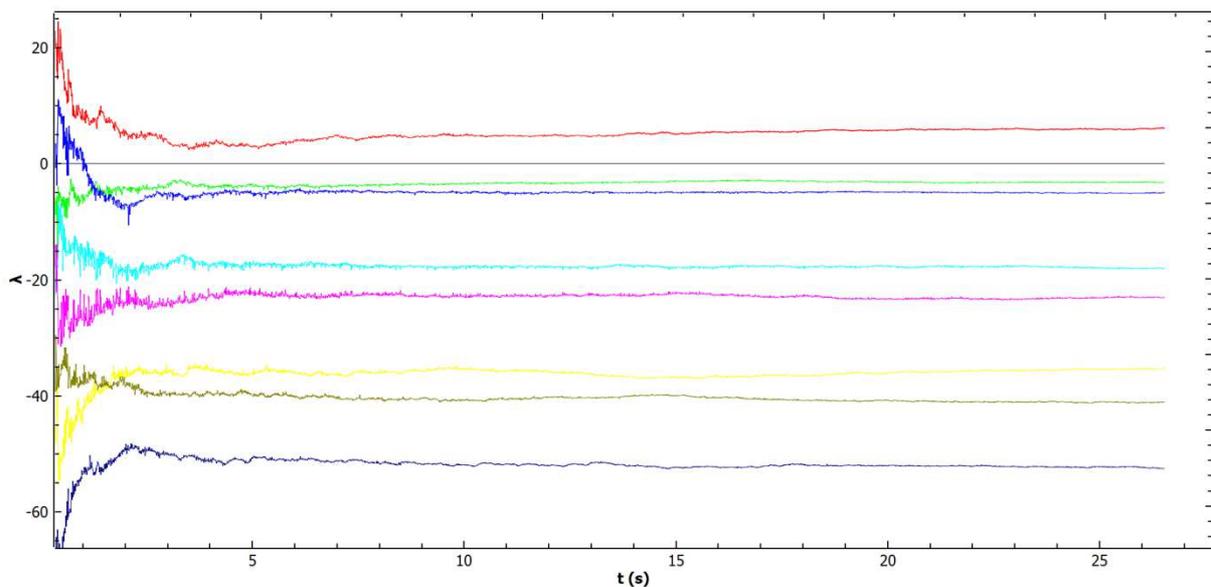


Figura 4.17 - Evolução do expoente de Lyapunov para a frequência de 131.4 rad/s.

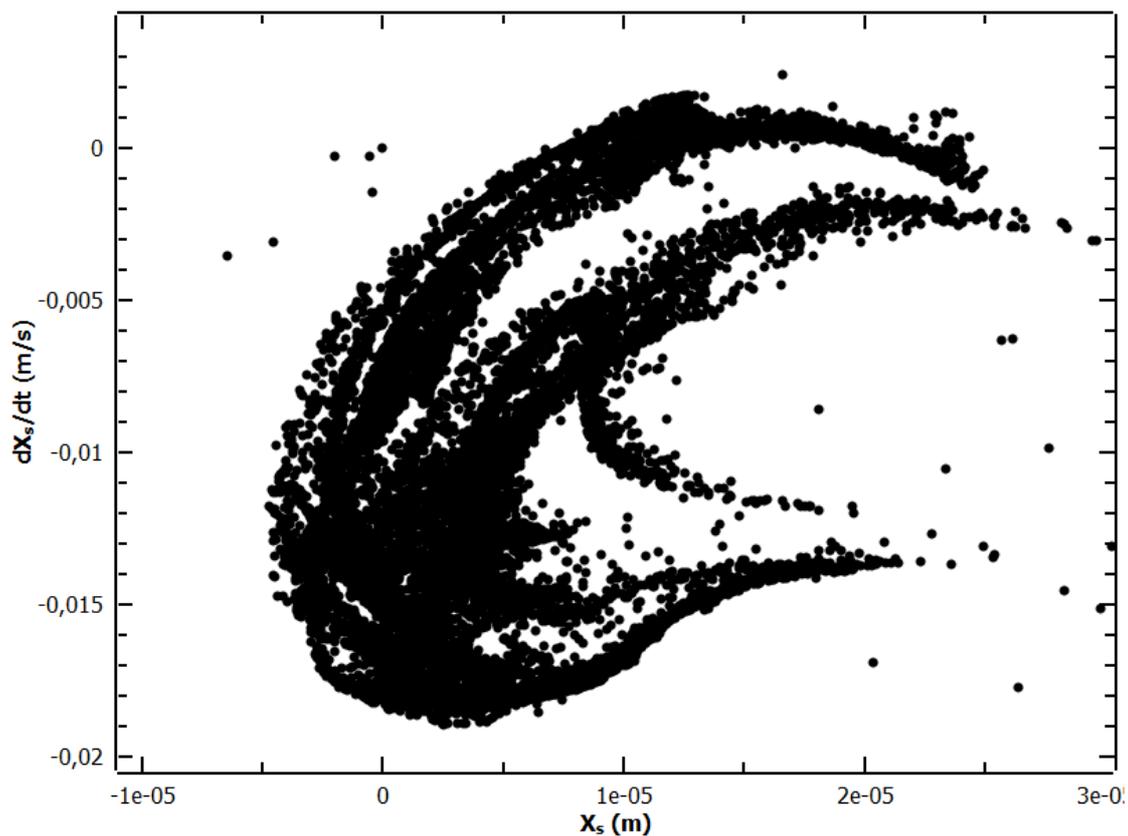


Figura 4.18 - Seção de Poincaré para a frequência de 131.4rad/s.

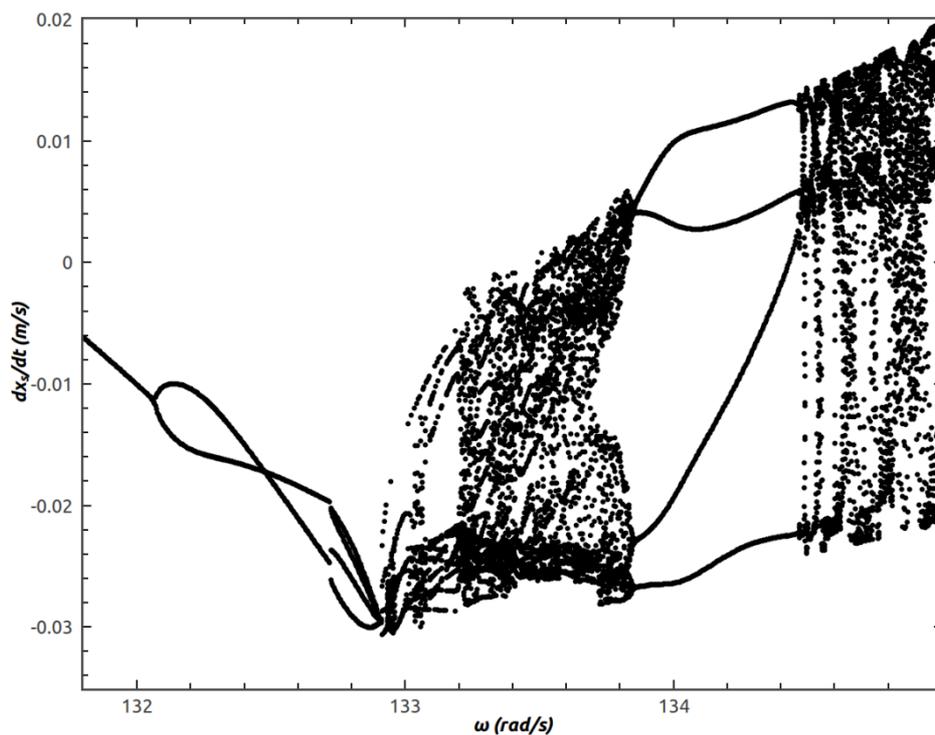


Figura 4.19 - Detalhe do diagrama da Fig. 4.11. Regiões caóticas e de periodicidade 4.

A Figura 4.19 exibe o detalhe da região de periodicidade 4, assim como regiões que indicam resposta caótica. As figuras 4.20 e 4.21 mostram respectivamente a órbita do sistema no espaço de

fase e um detalhe do gráfico da distância g em função do tempo para esta mesma situação, onde podemos verificar a periodicidade 4 do movimento para a frequência de 134.2rad/s.

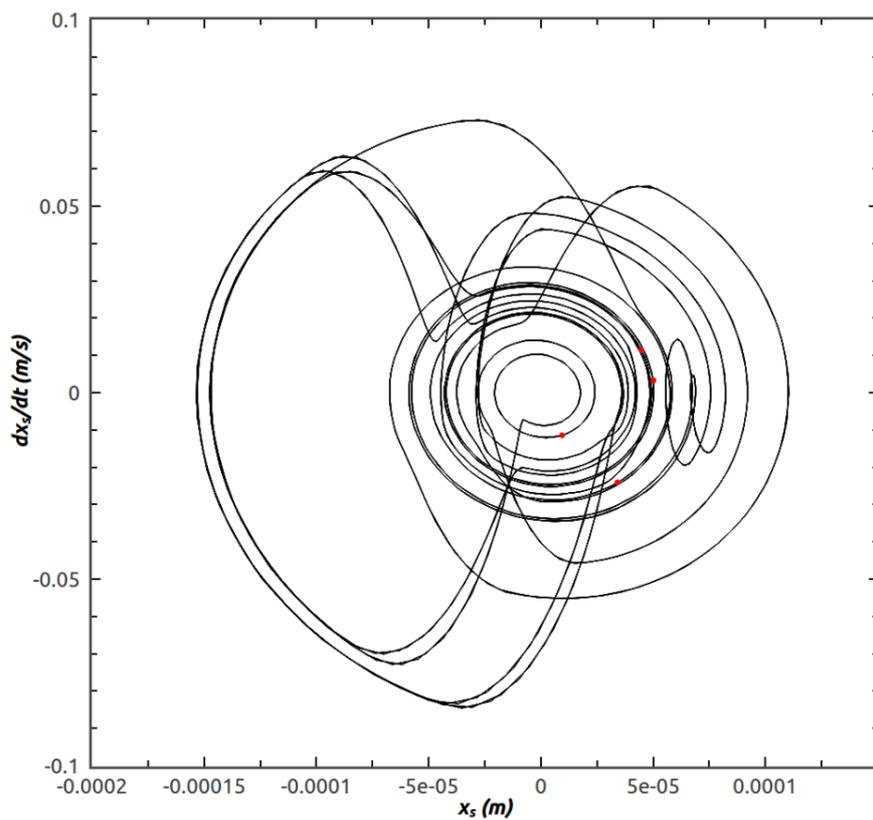


Figura 4.20 - Órbita no espaço de fase e seção de Poincaré para a frequência de 134.2rad/s.

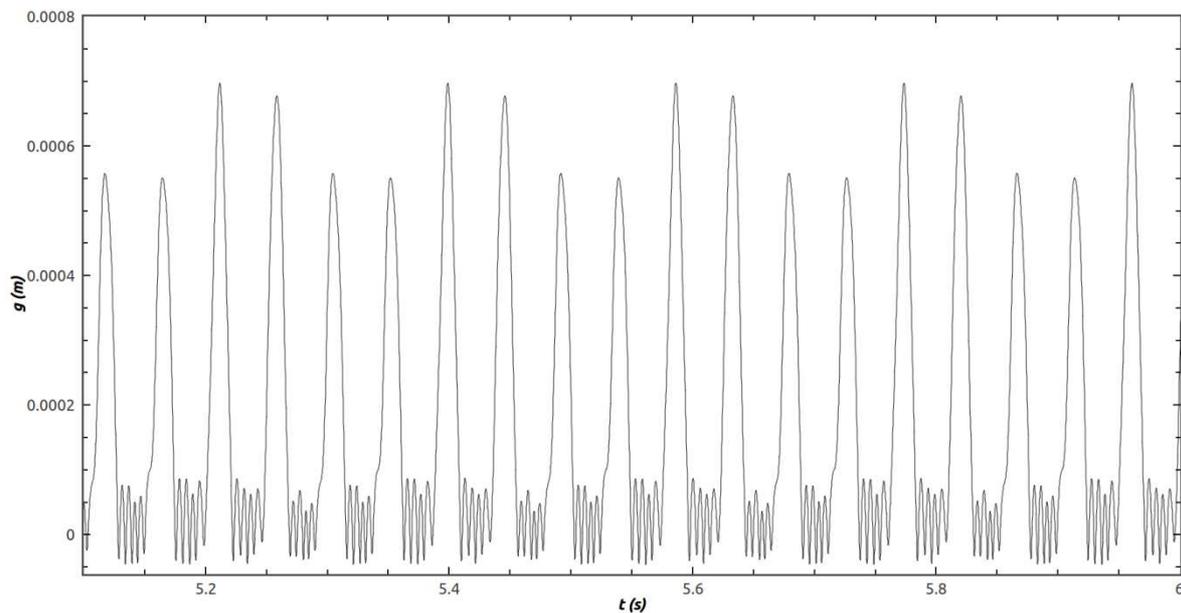


Figura 4.21 - Distância g , em m , em função do tempo para a frequência de 134.2rad/s.

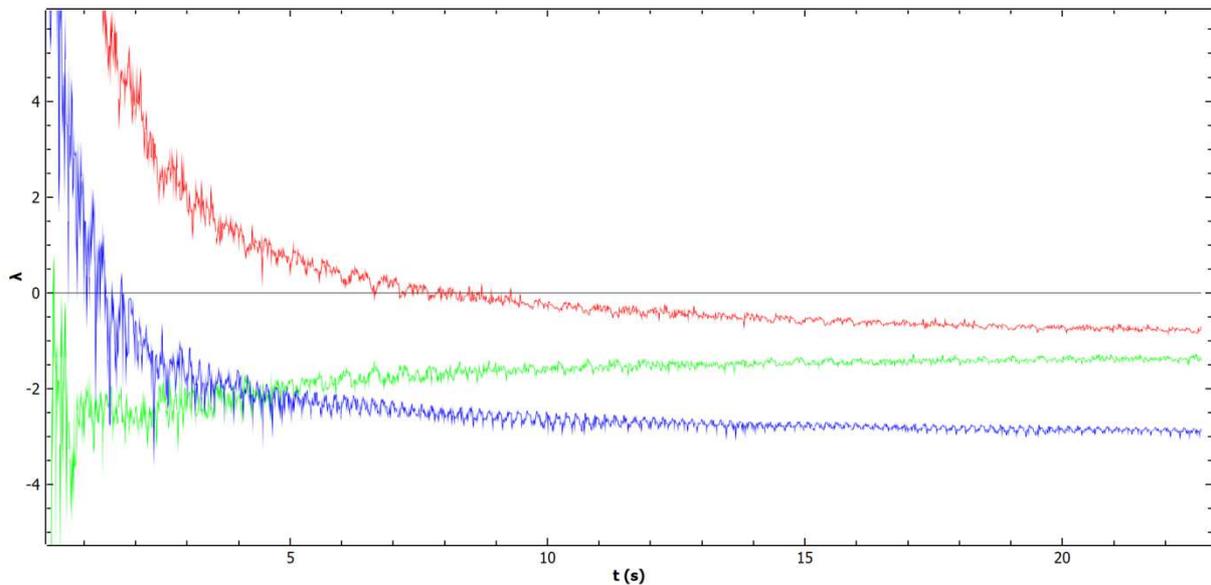


Figura 4.22 - Evolução do expoente de Lyapunov para a frequência de 134.2 rad/s.

Novamente a periodicidade observada no espaço de fase é confirmada pelo cálculo do expoente de Lyapunov. A Fig. 4.22 mostra os maiores expoentes para a frequência de 134.2rad/s, sendo o maior deles negativo.

A Figura 4.23 mostra em detalhe a ocorrência do fenômeno de janelas periódicas no diagrama da Figura 4.11.

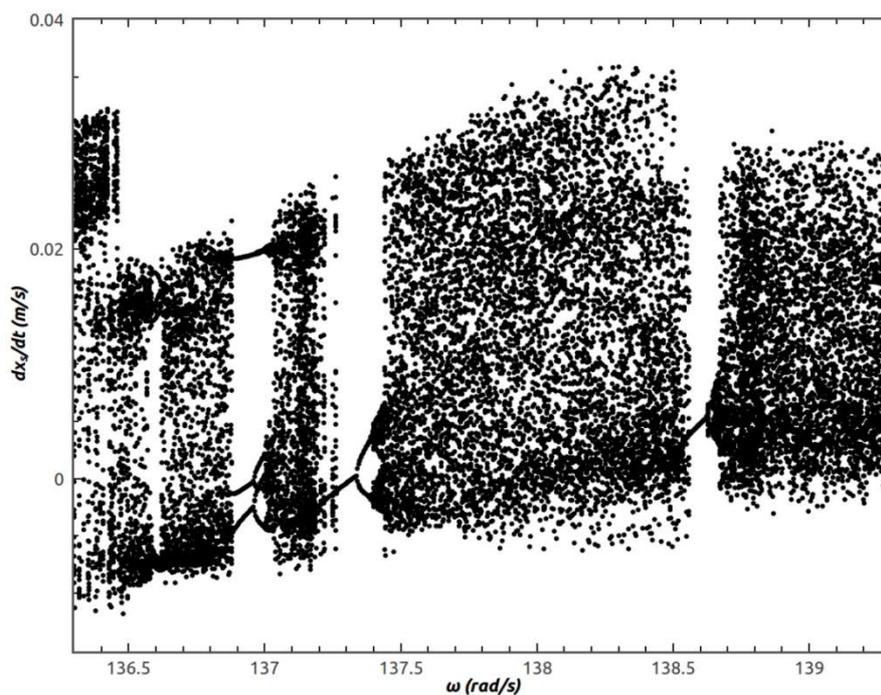


Figura 4.23 - Detalhe da figura 4.14 evidenciando as janelas periódicas.

O fenômeno de janelas periódicas consiste em curtos trechos de periodicidade que se manifestam entre regiões caóticas. Estes são fenômenos muito instáveis e sensíveis às condições iniciais. A Figura 4.24 mostra a órbita periódica da janela situada em 137.28rad/s.

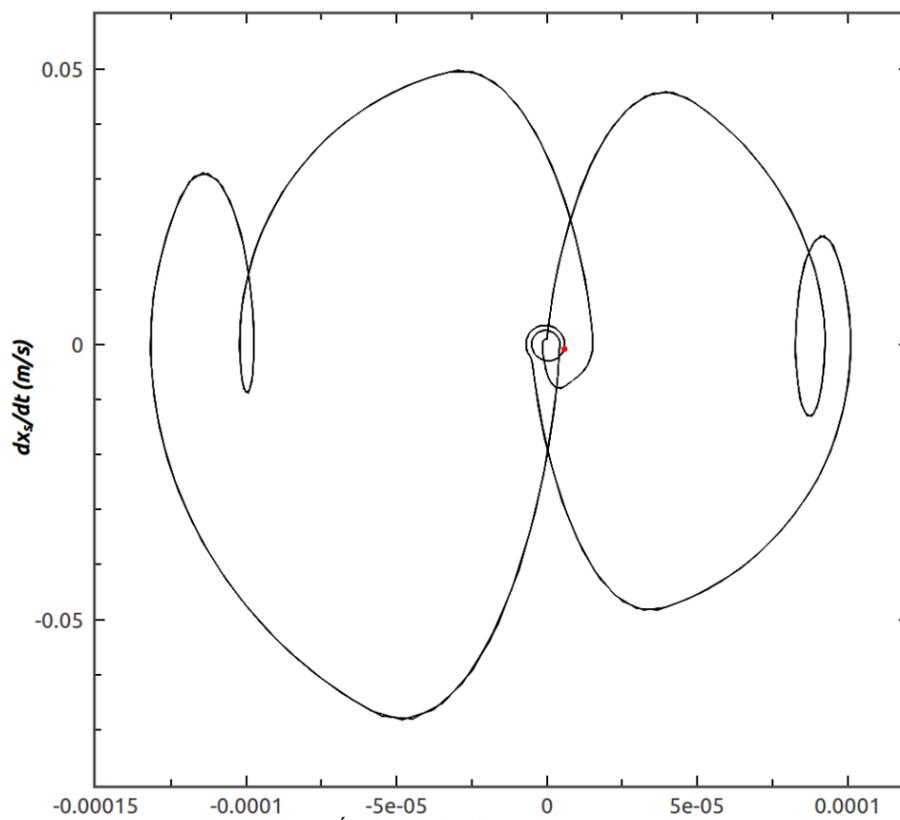


Figura 4.24 - Órbita periódica para **137.28rad/s**.

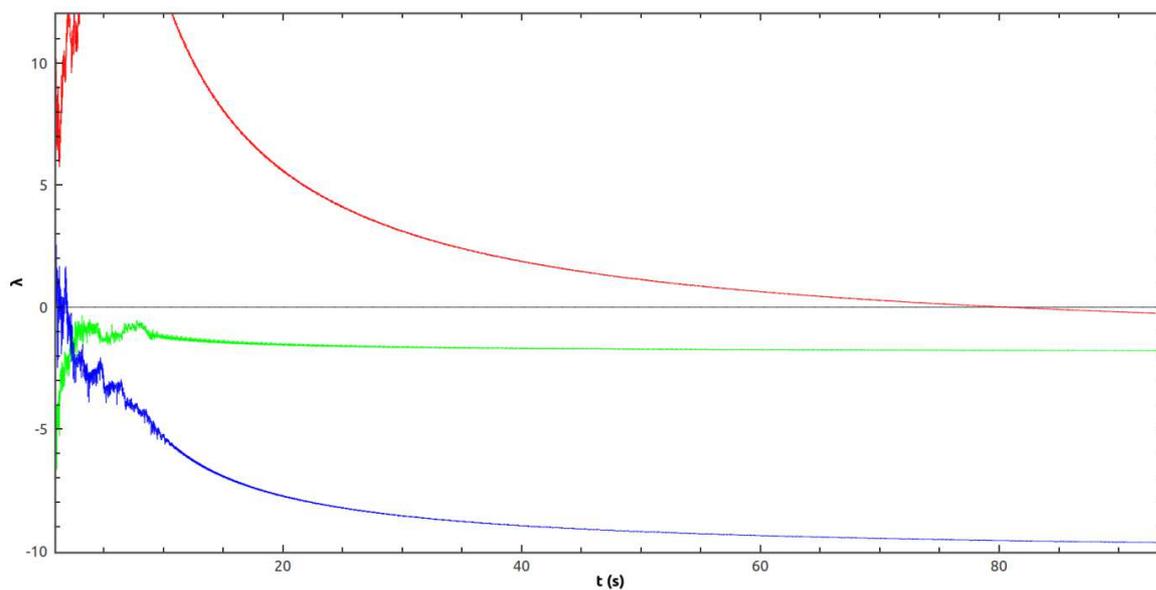


Figura 4.25 - Evolução do expoente de Lyapunov para a frequência de 137.28 rad/s.

Pode-se perceber através da Fig. 4.25 que o expoente de Lyapunov para esta frequência de 137.28 estabiliza-se eventualmente em um valor negativo, confirmando a periodicidade.

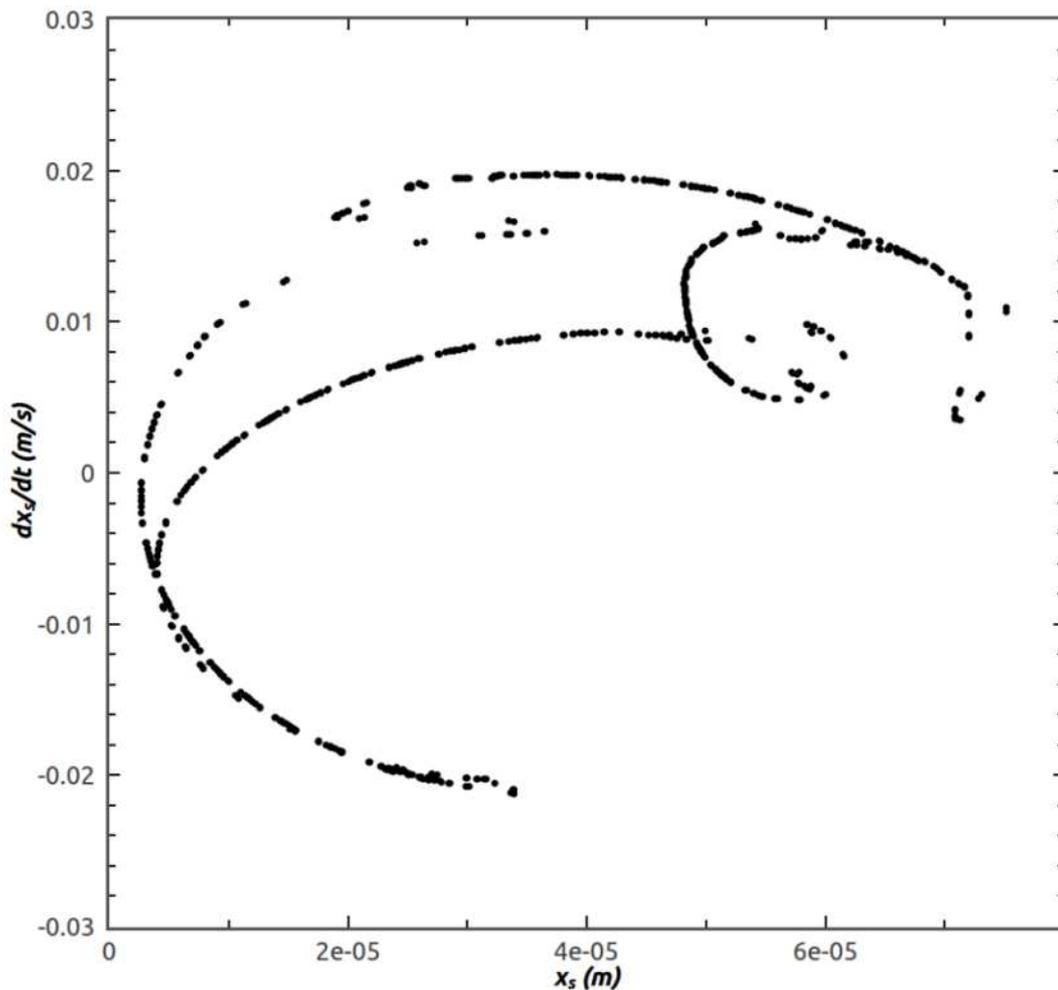


Figura 4.26 - Seção de Poincaré do estator para a frequência de 135rad/s.

As Figuras 4.26 e 4.27 mostram a seção de Poincaré e a órbita no espaço de fase para a frequência de 135 rad/s , que tem comportamento aparente caótico se forem analisados os diagramas de bifurcação apresentados. Porém, na seção de Poincarés pontos apresentam um caminho fechado, sugerindo um comportamento quase-periódico do sistema, mas que só pode ser confirmado a partir do cálculo dos expoentes de Lyapunov, apresentado a seguir.

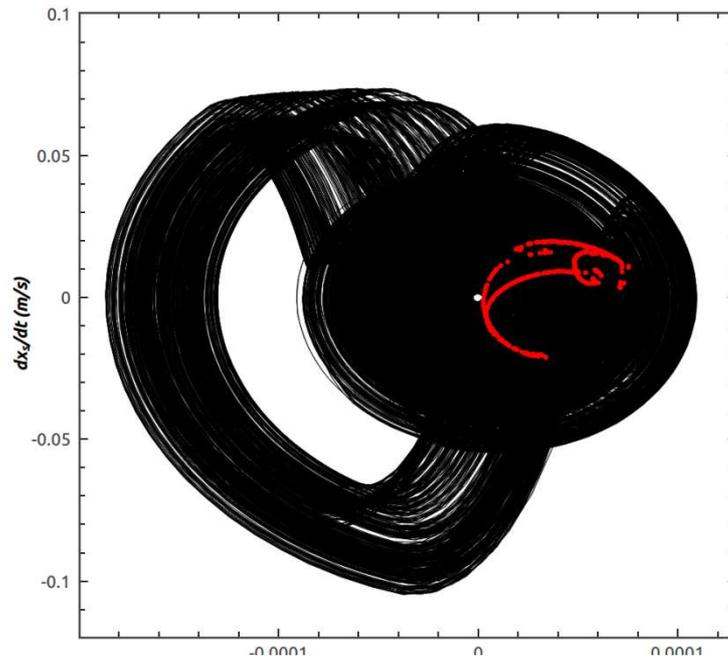


Figura 4.27 - Espaço de fase e seção de Poincaré do estator para a frequência de 135rad/s.

A Fig. 4.28 apresenta a evolução dos expoentes de Lyapunov confirmando que o comportamento do sistema na frequência de 135rad/s é *quase*-periódico, uma vez que o maior expoente estabiliza-se em zero.

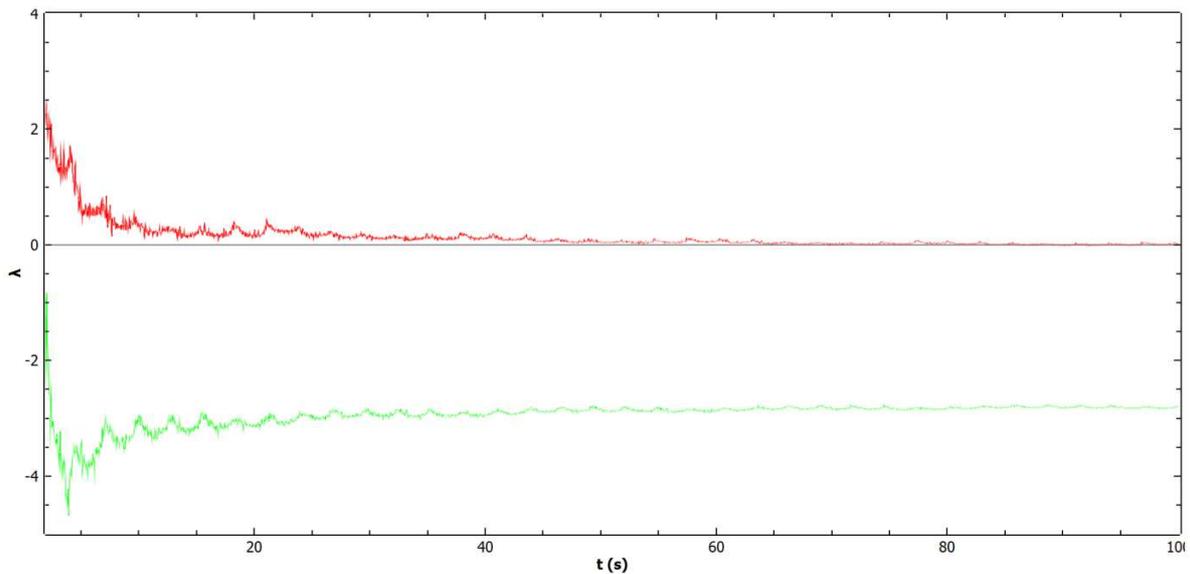


Figura 4.28 - Evolução do expoente de Lyapunov para a frequência de 135 rad/s.

Já para a frequência de 140rad/s os pontos da seção de Poincaré, mostrada na Fig. 4.28, não se dispõem em forma de uma curva fechada, e sim de pontos esparsos. A figura 4.29 mostra a órbita caótica correspondente à frequências de 140rad/s.

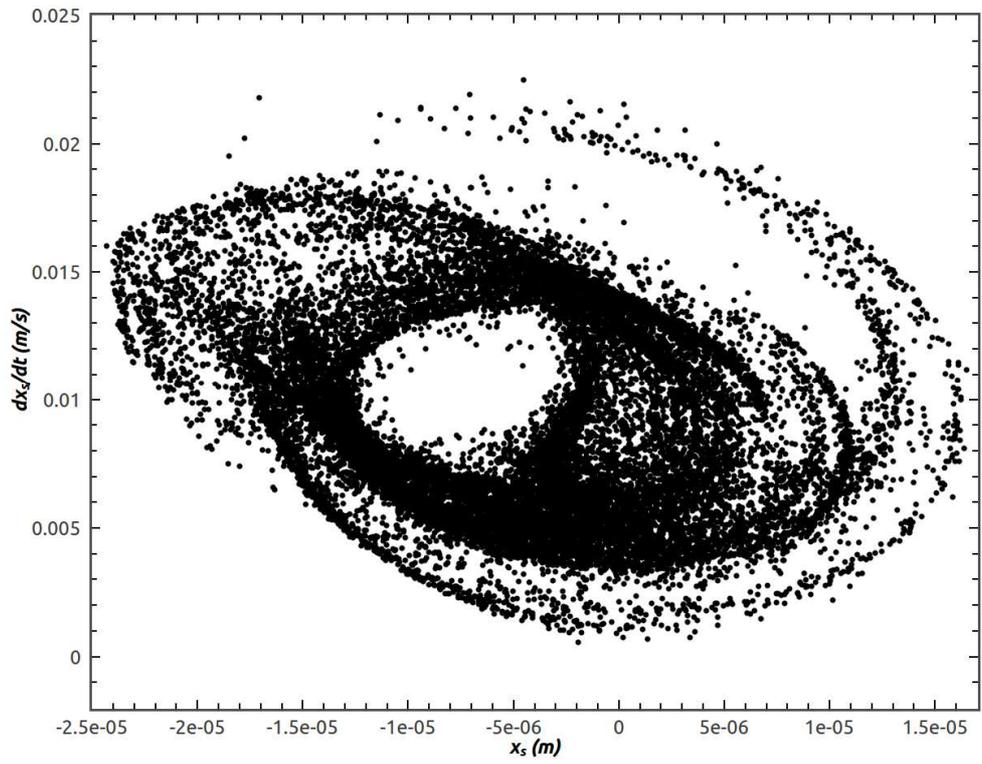


Figura 4.29 - Seção de Poincaré do estator para a frequência de 140rad/s.

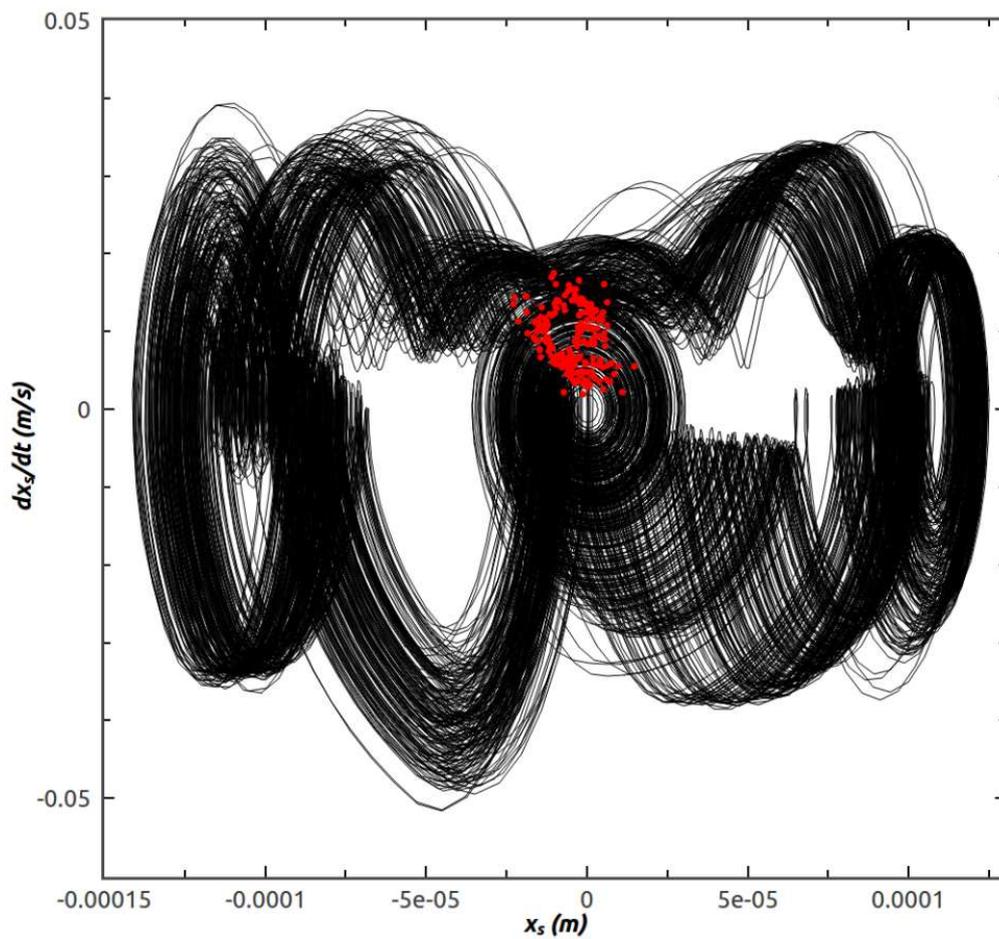


Figura 4.30 - Espaço de fase e seção de Poincaré do estator para a frequência de 140rad/s.

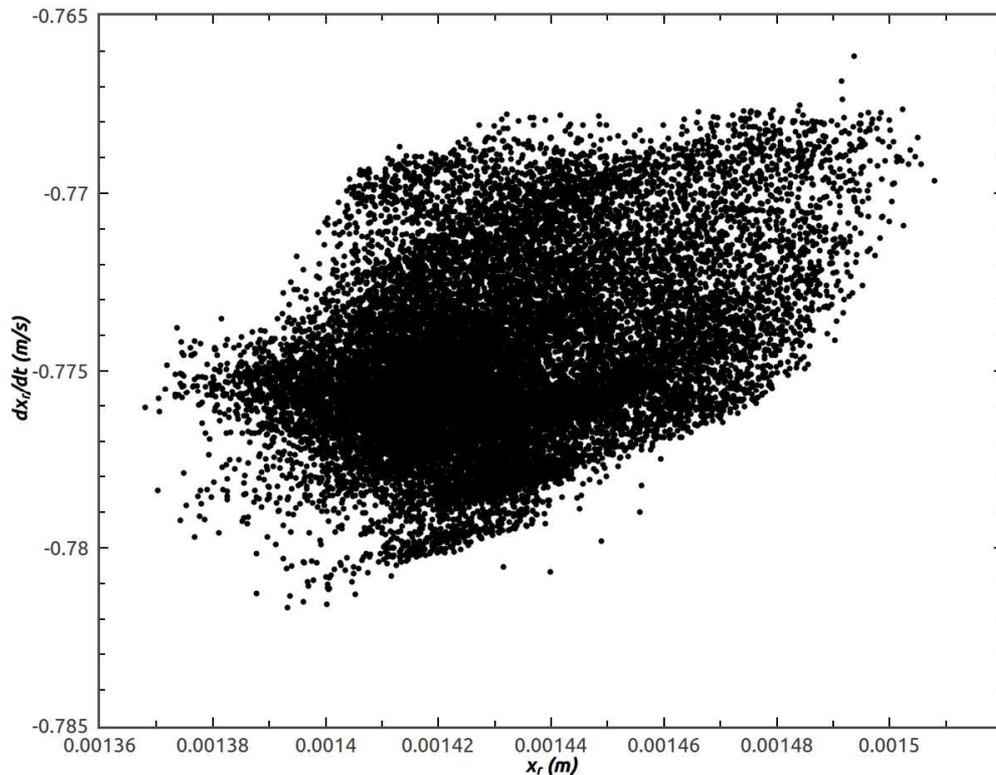


Figura 4.31 -Seção de Poincaré do rotor para a frequência de 140rad/s.

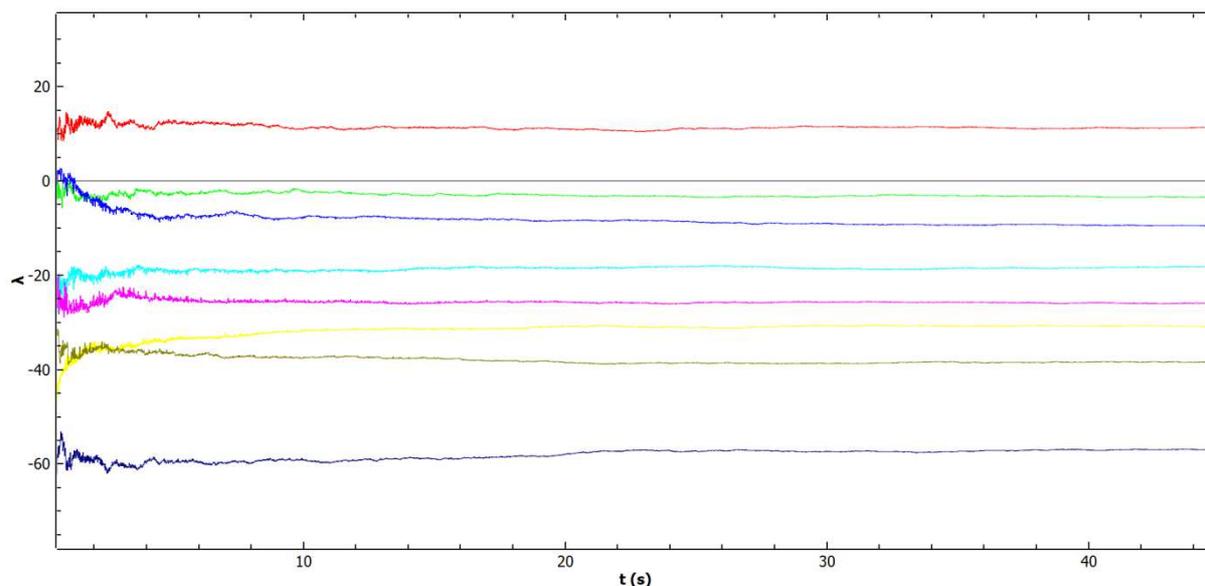


Figura 4.32 - Evolução do expoente de Lyapunov para a frequência de 140 rad/s.

A Fig. 4.32 confirma que o comportamento é mesmo caótico, apresentando um expoente de Lyapunov positivo.

Foi realizada também a construção da bacia de atração para o sistema com a frequência de 133rad/s, região mostrada no diagrama da Fig. 4.19, mostrando que existem, nesta região, duas órbitas estáveis coexistentes. A Fig. 4.33 mostra a bacia de atração construída. Onde a região vermelha corresponde à órbita de periodicidade 5 - Fig.4.34a - e a região preta corresponde à periodicidade 4 - Fig. 4.34b.

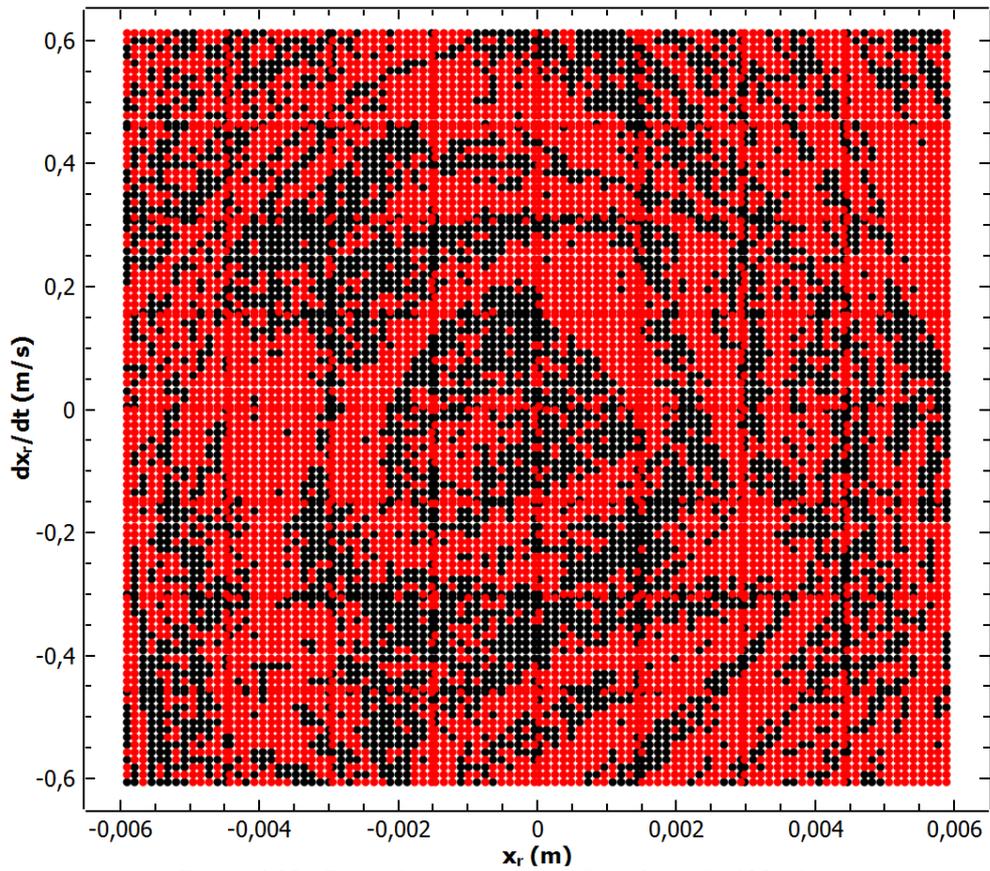


Figura 4.33 - Bacia de atração para a frequência de 133rad/s.

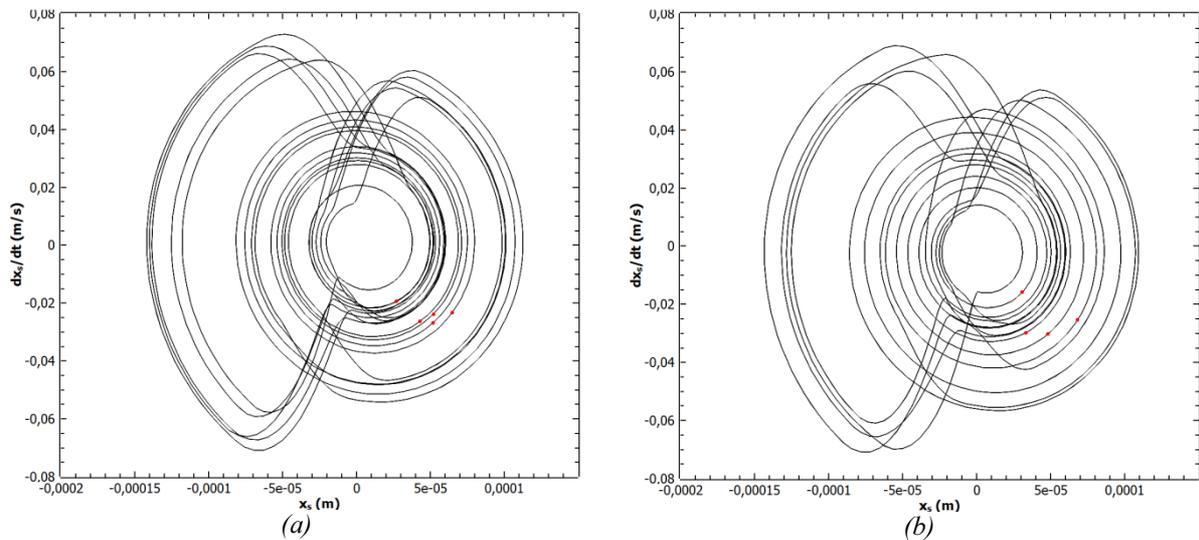


Figura 4.34 - Órbitas coexistentes a 133rad/s. Periodicidade 5(a) e periodicidade 4 (b).

Os resultados apresentados por Demailly (2003) não incluem diagramas de bifurcação e nenhuma análise mais profunda do comportamento caótico do sistema.

5. MODELO DE TURBINA

Neste capítulo é apresentado o modelo de turbina com pás flexíveis estudado, que consiste em um modelo de turbina axial com pás flexíveis e de um estator cilíndrico também flexível. Os métodos de integração numérica e de gestão do contato são os mesmos apresentados no capítulo anterior e validado em trabalho anterior (Brandão, 2011).

O sistema é de grande relevância para aplicações de engenharia, sobretudo para o estudo de turbomáquinas de aeronaves em situações acidentais, já que a fonte de excitação utilizada para obtenção dos resultados é um impacto pontual no estator, semelhante ao disparo de um projétil. Neste capítulo, são apresentados a modelagem matemática completa do sistema e os resultados obtidos, juntamente com a análise destes.

5.1 MODELAGEM MATEMÁTICA

5.1.1 Modelo de rotor com pás flexíveis

Para a modelagem do rotor com pás flexíveis foi utilizado um modelo linear simplificado apresentado por Grolet & Thouverez (2010). Este modelo, ilustrado na Fig. 5.1, considera pás rígidas ligadas ao cubo do rotor através de rigidezes torcionais e ligadas entre si por rigidezes lineares.

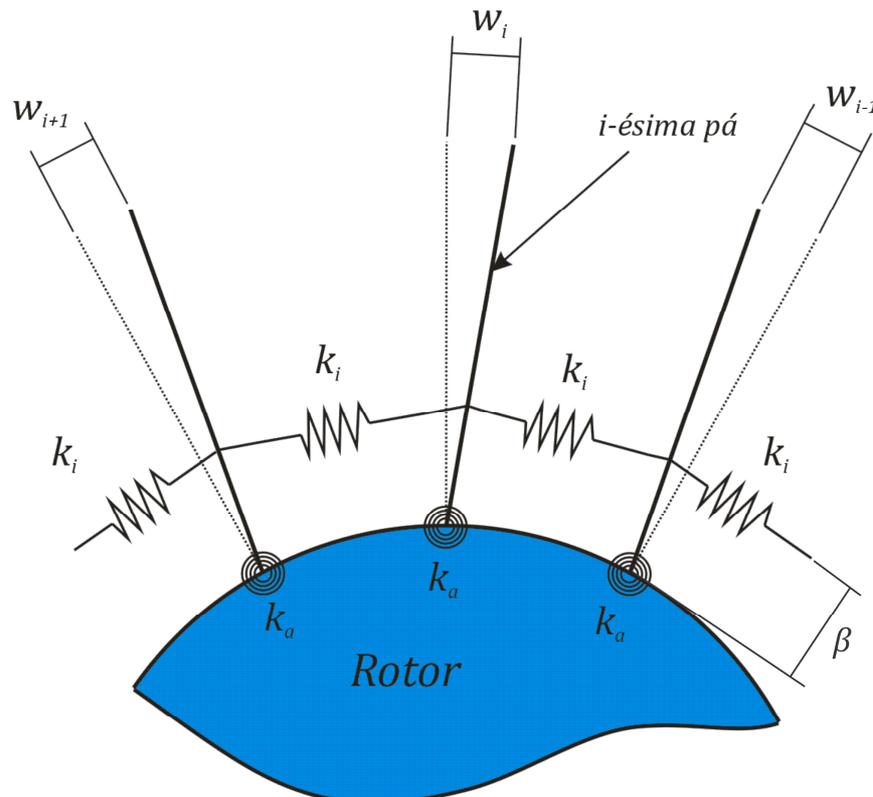


Figura 5.1 - Ilustração do modelo de rotor com pás flexíveis.

O acoplamento entre as pás se faz pelas rigidezes lineares montadas entre elas. Este acoplamento se verifica em turbinas devido ao fato das pás muitas vezes serem montadas por meio de um encaixe

no cubo, o que gera uma conexão com as pás adjacentes. Em turbinas que são fundidas como uma peça inteira esse acoplamento não existe, ou é desprezível, sendo $k_i = 0$.

A Eq. 5.1 apresenta a matriz A da representação no espaço de estados para um rotor com 4 pás flexíveis. É importante notar que as equações de movimento são escritas para os deslocamentos ortonormais w_i das pontas de cada pá - positivos para deslocamentos no sentido anti-horário -, e não de seus deslocamentos angulares.

$$A = \frac{1}{M_a} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b-c & -C_a-C_i & c & C_i & 0 & 0 & c & C_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & C_i & -b-c & -C_a-C_i & c & C_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & C_i & -b-c & -C_a-C_i & c & C_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c & C_i & 0 & 0 & c & C_i & -b-c & -C_a-C_i \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

onde b representa a rigidez torcional k_a corrigida para os deslocamentos ortonormais w_i ; c representa as rigidezes lineares k_i , também corrigidas; C_a representa o amortecimento associado a k_a ; C_i o amortecimento associado a k_i e M_a representa a massa corrigida da pá.

A Figura 5.2 ilustra a pá com as dimensões utilizadas para sua modelagem como uma viga engastada (Grolet & Thouverez, 2010).

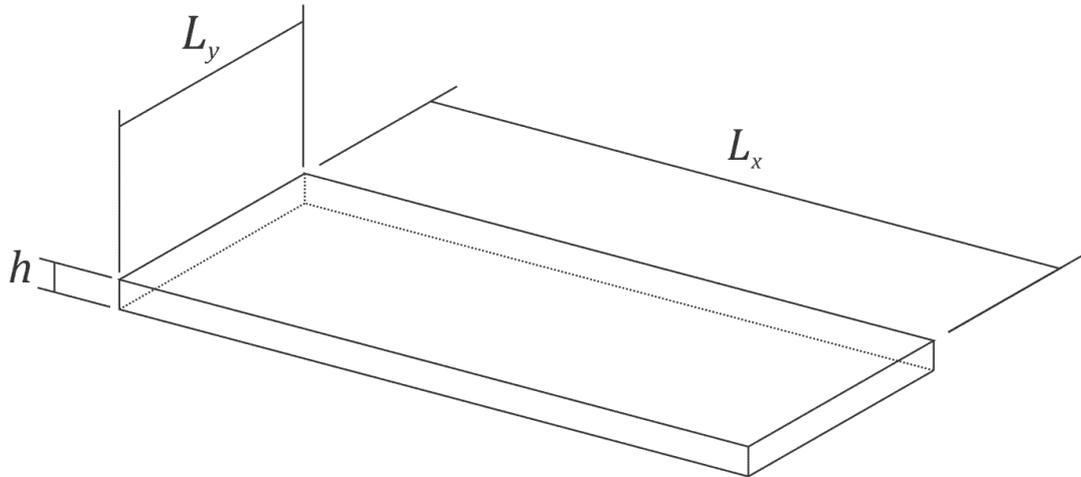


Figura 5.2 - Modelo de pá como viga engastada com indicação de suas dimensões.

Assim, M_a , b e c se tornam função dos parâmetros geométricos e físicos da pá. O desenvolvimento analítico realizado por Grolet&Thouverez (2010) chega às equações que são apresentadas na Eq. 5.2 para os parâmetros da pá.

$$M_a = \frac{\rho h L_x L_y}{5} \quad ; \quad b = \frac{k_a}{L_x^2} = \frac{E h^3 L_y}{3 L_x^3 (1 - \nu^2)} \quad ; \quad c = k_i * \frac{\beta}{L_x} \quad (5.2)$$

onde ρ é a densidade do material da pá, E é seu módulo de elasticidade, ν é seu coeficiente de Poisson e β é a distância entre a base da pá e a rigidez k_i , como indicado na Fig. 5.1. A Tabela 5.1

apresenta os valores utilizados nas simulações apresentadas neste estudo, onde, é importante ressaltar, o parâmetro indicado como ω_r , corresponde à frequência natural do modo de corpo rígido.

Tabela 5.1 - Parâmetros das pás utilizados nas simulações.

L_x	L_y	h	ρ	E	ν	k_i	β	ω_r	ξ
0.5m	0.3m	1cm	7800kg/m ³	210GPa	0.3	800kN/m	2mm	140rad/s	0.05

Os parâmetros de amortecimento são calculados como mostra a Eq. 5.3.

$$C_a = 2\xi\sqrt{b M_a} \quad ; \quad C_i = 2\xi\sqrt{c M_a} \quad (5.3)$$

Além disso, tanto o rotor quanto o estator são modelados também como corpos suspenso nas duas direções, gerando modos de vibração de corpo rígido e uma equação de movimento idêntica à apresentada na Eq. 4.7.

5.1.2 Modelo de estator flexível

O estator é descrito matematicamente por um modelo conhecido como n -diâmetros, em que se descreve a casca cilíndrica a partir de suas coordenadas principais, isolando os modos de vibrações. Este modelo é bastante conveniente para os fins deste estudo pois permite que o movimento do estator seja descrito em função de apenas um de seus modos separadamente, o que se mostra bastante útil para o fenômeno de interação modal, descrito mais adiante.

O modelo n -diâmetros considera primeiramente a deformação tangencial $s(\phi, t)$ da casca cilíndrica como descreve a Eq. 5.4, sendo t o tempo e ϕ a posição angular de um ponto do estator.

$$s(\phi, t) = A_{n_d}(t) \cos(n_d\phi) + B_{n_d} \sin(n_d\phi), \quad n_d \in \mathbb{N}, n_d \geq 2 \quad (5.4)$$

Utilizando ainda a condição de inextensibilidade para a estrutura, tem-se como condição que $u_s(\phi, t) = \partial s(\phi, t) / \partial \phi$, onde $u_s(\phi, t)$ representa o deslocamento radial de um ponto do estator. Desta forma, obtem-se a expressão de interesse que descreve a deformação do estator como mostra a Eq. 5.5.

$$u_s(\phi, t) = -n_d A_{n_d}(t) \sin(n_d\phi) + n_d B_{n_d}(t) \cos(n_d\phi), \quad n_d \in \mathbb{N}, n_d \geq 2 \quad (5.5)$$

É importante notar que a restrição de $n_d \geq 2$ serve para que sejam excluídos os modos de vibração de corpo rígido do estator, que são modelados separadamente.

A Figura 5.3 ilustra dois modos de vibração do estator flexível modelado a partir da equação 5.5. A ilustração à esquerda utiliza $n_d = 2$ e à direita vê-se a deformação para $n_d = 3$. Em vermelho se observa a forma circular não deformada do estator e em azul a configuração deformada.

Vale ressaltar que este modelo considera dois graus de liberdade - A_{n_d} e B_{n_d} - para cada modo de vibração. Na realidade, se trata de uma situação de dois modos de vibração de mesma frequência, cada modo descreve o mesmo tipo de deformação, porém em orientações diferentes.

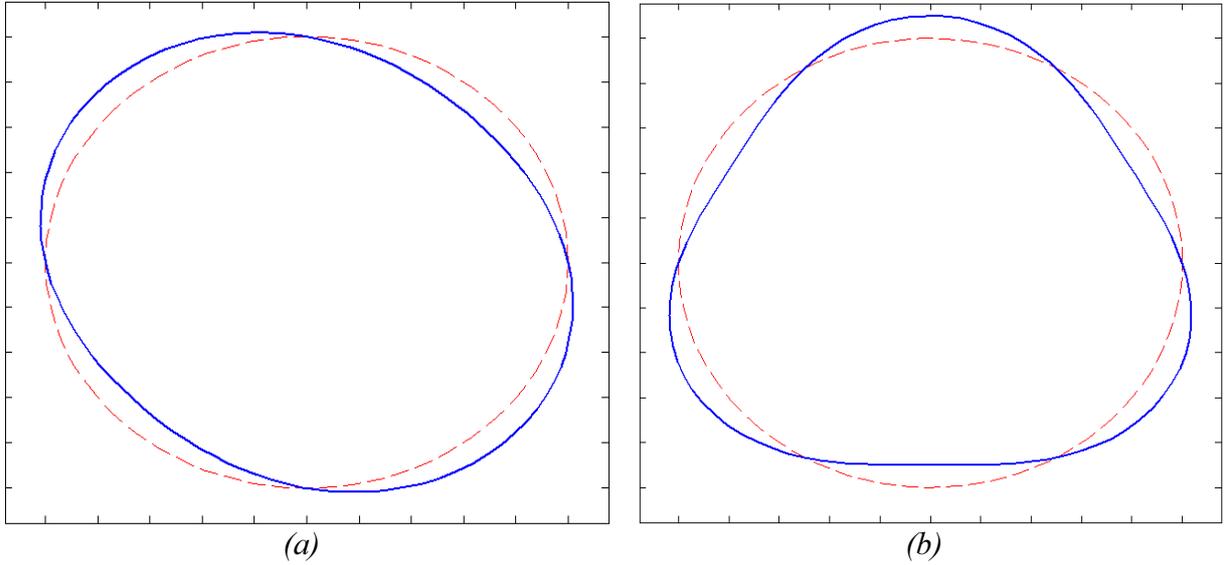


Figura 5.3 - Ilustração do modelo n-diâmetros para (a) $n_d = 2$ e para (b) $n_d = 3$.

Para a obtenção das equações do movimento do estator flexível, calcula-se as energias cinética T e potencial U a partir das Eqs. 5.4 e 5.5. Deve-se integrar em toda a extensão do estator para a obtenção da expressão das energias como mostram as Eqs. 5.6 e 5.7.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho_{stat} S_{stat} [\dot{u}_s(\phi, t)^2 + \dot{w}(\phi, t)^2] R_{stat} d\phi \quad (5.6)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{E_{stat} I_{stat}}{R_{stat}^3} \left[\frac{\partial u_s}{\partial \phi}(\phi, t) + u_s(\phi, t) \right]^2 d\phi \quad (5.7)$$

onde ρ_{stat} , S_{stat} , E_{stat} e I_{stat} são, respectivamente, a densidade volumétrica do estator, a área de seção transversal, o módulo de elasticidade do material e o momento de inércia da seção transversal. Utilizando as equações de Lagrange (Eq. 5.8) obtém-se então a equação do movimento para as variáveis A_{n_d} e B_{n_d} como apresentado na Eq. 5.9.

$$L = T - U \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial u_s} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_s} \right) = 0 \quad (5.8)$$

$$\begin{bmatrix} (n_d^2 + 1)M_s & 0 \\ 0 & (n_d^2 + 1)M_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{A}_{n_d} \\ \ddot{B}_{n_d} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2n_d^2(n_d^2 + 1)K_s & 0 \\ 0 & 2n_d^2(n_d^2 + 1)K_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{n_d} \\ B_{n_d} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

onde $K_s = \frac{E_{stat} I_{stat}}{R_{stat}^3}$ e $M_s = 2\pi\rho R_{stat} S_{stat}$. Assim, simplificando os termos de massa e rigidez de maneira que $M_s^* = (n_d^2 + 1)M_s$ e $K_s^* = 2n_d^2(n_d^2 + 1)K_s$, obtém-se a matriz da representação no espaço de estados como mostrado na Eq. 5.10.

$$\begin{Bmatrix} \dot{A}_{n_d} \\ \ddot{A}_{n_d} \\ \dot{B}_{n_d} \\ \ddot{B}_{n_d} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K_s^*}{M_s^*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{K_s^*}{M_s^*} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{n_d} \\ \dot{A}_{n_d} \\ B_{n_d} \\ \dot{B}_{n_d} \end{Bmatrix} + \mathbf{B} \quad (5.10)$$

Também é importante notar que uma força F_0 - em N - aplicada em um ponto ϕ do estator pelo lado interno deste será incluída pela uma matriz \mathbf{B} na forma apresentada pela Eq. 5.11.

$$\mathbf{B} = \frac{F_0}{M_s^*} \begin{pmatrix} 0 \\ n_d \sin(n_d \phi) \\ 0 \\ -n_d \cos(n_d \phi) \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

A Tabela 5.2 apresenta os dados do estator utilizados nas simulações apresentadas neste estudo. As propriedades mecânicas dos materiais utilizados são as mesmas da tabela 5.1 e um amortecimento proporcional foi incluído, com coeficiente de amortecimento ξ_{stat} .

Table 5.2 - Parâmetros do estator flexível.

S_{stat}	I_{stat}	δ	R_{stat}	ω_s	ξ_{stat}
$4 \times 10^{-3} m^2$	$5.3 \times 10^{-7} m^4$	0.5mm	0.5005m	540rad/s	0.01

5.1.3 Modelagem do contato

A mecânica do contato para este modelo de turbina axial com pás e estator flexíveis deve ser estudada com especial atenção. Como visto na seção 2.4, os pontos chave de uma análise de mecânica do contato é a definição precisa da condição matemática de contato e, posteriormente, da definição da direção da força de contato, para que seu efeito seja sentido por cada um dos elementos envolvidos da maneira correta. No modelo apresentado, a sua geometria complexa torna estes dois passos principais da análise ainda mais delicados, visto que a definição exata da distância da ponta de uma pá ao estator não é simples e a determinação da direção do contato e de sua contribuição para o movimento de cada elemento é ainda mais complexa.

Como encontram-se normalmente valores muito pequenos de δ - distância inicial entre pás e estator - podemos considerar diversas simplificações, já que temos $L_x \approx R_{stat}$. Assim, como é apresentado adiante, as equações para a consideração das forças de contato são obtidas.

A Figura 5.4 ilustra o momento do contato entre a pá i e o posição angular ϕ do estator. Na Figura 5.4 as posições não-deformadas do estator e da i -ésima pá são mostradas em linhas pontilhadas, e as características geométricas do sistema nessa situação são indicadas.

Assim, a indentação g_i apresentada pela pá pode ser calculada através da Eq. 5.12. A restrição que servirá como condição de contato para este caso é $g_i > 0$.

$$g_i = u_s(\phi_i) + X_r \cos(\phi_i) + Y_r \sin(\phi_i) - X_s \cos(\phi_i) - Y_s \sin(\phi_i) - \delta \quad (5.12)$$

onde $u_s(\phi_i)$ é calculado pela Eq. 5.5 e X_r, Y_r, X_s e Y_s são respectivamente os deslocamentos de corpo rígido horizontal e vertical do rotor e do estator. A posição ϕ_i angular da pá i no tempo t é dada pela Eq. 5.13.

$$\phi_i = \frac{2\pi}{N_a} (i - 1) + \tan^{-1} \left(\frac{w_i}{L_x} \right) + \Omega t \quad (5.13)$$

onde N_a é o número de pás do rotor e Ω sua velocidade angular de rotação, em rad/s .

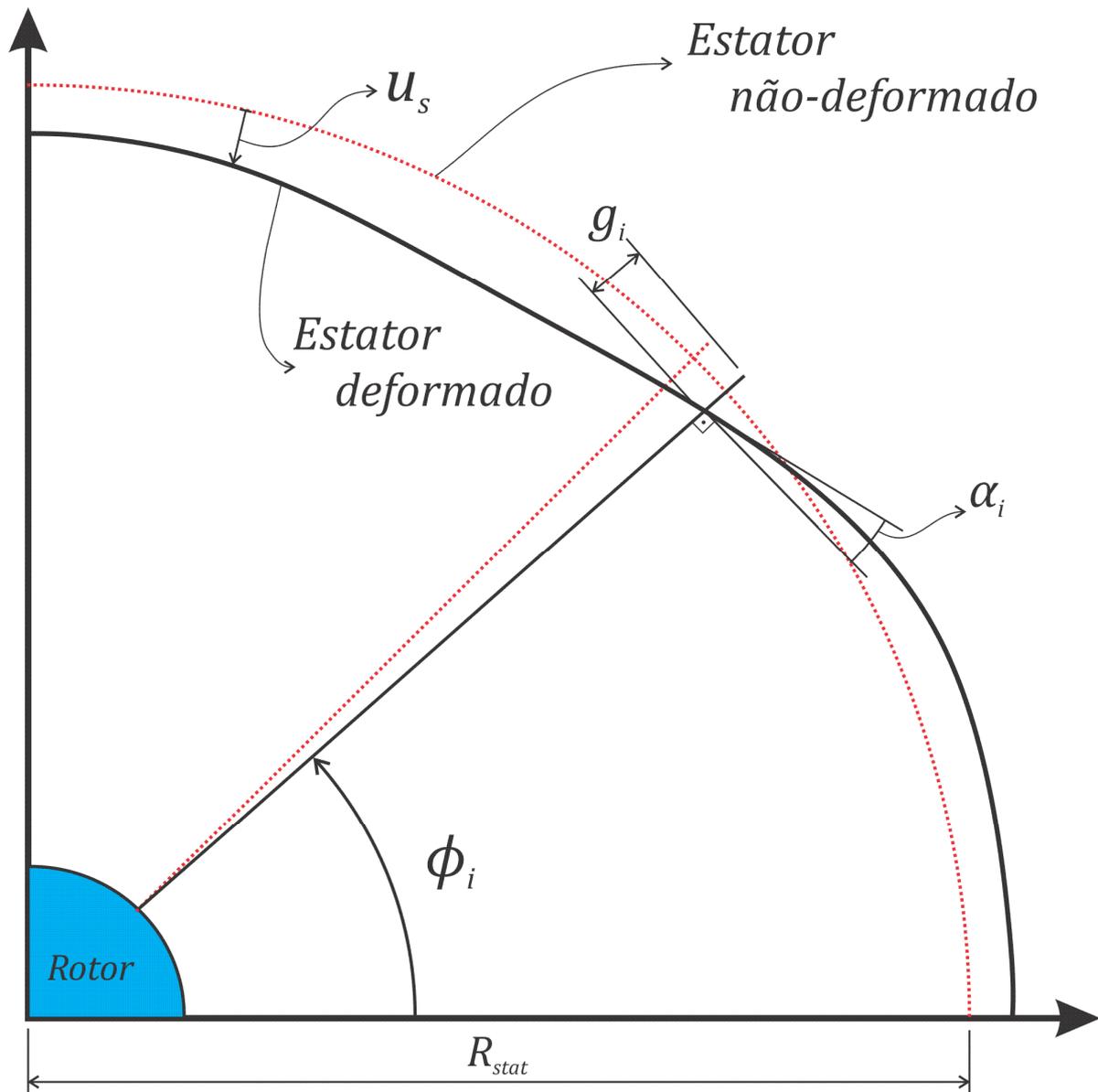


Figura 5.4 - Ilustração do momento de contato entre a i -ésima pá e o estator.

O ângulo α_i indicado na Figura 5.4 representa a inclinação do estator na posição angular ϕ_i em relação à seu estado não-deformado. Para pequenas deformações, podemos descrever α_i como função apenas de $\frac{\partial u_s}{\partial \phi}$, como mostra a Eq. 5.14.

$$\alpha_i = \tan^{-1} \left(\frac{1}{R_{stat}} \frac{\partial u_s}{\partial \phi} (\phi, t) \right) \quad (5.14)$$

Nos diversos testes realizados com a simulação deste sistema, é verificada a grande importância da introdução de um amortecimento de contato no sistema. Como a força de contato é introduzida como uma rigidez de valor elevado, nos momentos durante o contato é verificada uma vibração de altíssima frequência e isso prejudica significativamente a estabilidade do método numérico. Sendo assim, a presença de um amortecimento de contato - presente em sistemas reais - é considerada para dissipar

parte da energia armazenada durante o contato e assim reduzir as componentes de alta frequência da resposta, tornando a solução mais estável.

Foi desenvolvido um modelo de amortecimento viscoso para o amortecimento de contato, o que necessita que seja calculada a velocidade relativa, V_{rel}^i , entre a ponta da pá e a parede do estator no momento do contato. Neste calculo é importante notar que deve ser considerada a derivada $\frac{d\phi}{dt} = \Omega$, referente à velocidade de rotação das pás. Isso dará origem, utilizando-se a regra da cadeia para derivar a Eq. 5.12, à componente $\frac{du_s}{d\phi} \Omega$ presente na Eq. 5.15, onde foi considerado que $X_s \approx X_r$ e $Y_r \approx Y_s$, devido ao reduzido valor de δ .

$$V_{rel}^i = \frac{dg_i}{dt} = \dot{u}_s(\phi_i) + \frac{du_s}{d\phi} \Omega + \dot{X}_r \cos(\phi_i) + \dot{Y}_r \sin(\phi_i) - \dot{X}_s \cos(\phi_i) - Y_s \sin(\phi_i) \quad (5.15)$$

Define-se, então, um coeficiente de amortecimento de contato c_{cont} como mostra a Eq. 5.16.

$$c_{cont} = 2\xi_{cont} \sqrt{k_c \left(\frac{M_r + M_s}{2} \right)} \quad (5.16)$$

onde ξ_{cont} é um fator de amortecimento de contato, M_r e M_s são, respectivamente, as massas do rotor e do estator e k_c é a rigidez de contato do sistema.

A Eq. 5.17 apresenta a expressão para o cálculo da razão entre força de amortecimento e força de contato, γ . Tal razão é conveniente para a construção do vetor força, descrito mais à frente.

$$\gamma = \frac{F_{am}}{F_{el}} = \frac{c_{cont} V_{rel}^i}{g_i k_c} \quad (5.17)$$

Para a inclusão das forças de atrito foi considerado que, devido às altas velocidades de rotação, a direção deste é sempre a mesma, contrária à rotação. Sendo assim, para os graus de liberdade de corpo rígido, basta que as forças normais de contato sejam multiplicadas pelo coeficiente de atrito μ e sofram uma rotação de 90° do sentido anti-horário. Para as pás, a força de atrito tem efeito máximo, enquanto para a flexão do estator, considerada sempre radial, o atrito não causa efeito algum.

Assim, com as informações de geometria e das outras informações pertinentes ao cálculo da força de contato, pode-se obter o vetor \mathbf{B} que introduz as forças de contato na representação em espaço de estados, como mostrado na Eq. 5.18.

É importante notar que o somatório na variável j considera todas as pás em contato em um determinado momento, somando as forças exercidas por todas cada uma delas para que seja contabilizada a força resultante nos cálculos. A componente $-\tan(\alpha_j)$ de esforço nas pás leva o sinal negativo pelo fato de os deslocamentos radiais do estator u_s são positivos para dentro e os deslocamentos ortormais das pás w_j são positivos no sentido anti-horário. As componentes de força de atrito são mostradas para $\Omega > 0$, no sentido anti-horário, para uma inversão no sentido de rotação

devem-se trocar os sinais de todas as componentes de atrito. Os parâmetros utilizados nas simulações são apresentados na Tabela 5.3.

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} A_{nd} \\ \dot{A}_{nd} \\ \dot{B}_{nd} \\ B_{nd} \\ X_r \\ \dot{X}_r \\ Y_r \\ \dot{Y}_r \\ X_s \\ \dot{X}_s \\ Y_s \\ \dot{Y}_s \\ w_1 \\ \dot{w}_1 \\ \vdots \\ w_j \\ \dot{w}_j \\ \vdots \\ w_{N_a} \\ \dot{w}_{N_a} \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B} = \sum_j g_j k_c \begin{Bmatrix} 0 \\ -(1 + \gamma) \frac{n_d \sin(n_d \phi_j)}{M_s^*} \\ 0 \\ (1 + \gamma) \frac{n_d \cos(n_d \phi_j)}{M_s^*} \\ 0 \\ \frac{-(1 + \gamma) \cos(\phi_j) + \mu \sin(\phi_j)}{M_r} \\ 0 \\ \frac{-(1 + \gamma) \sin(\phi_j) - \mu \cos(\phi_j)}{M_r} \\ 0 \\ \frac{(1 + \gamma) \cos(\phi_j) - \mu \sin(\phi_j)}{M_s} \\ 0 \\ \frac{(1 + \gamma) \sin(\phi_j) + \mu \cos(\phi_j)}{M_s} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{-(1 + \gamma) \tan(\alpha_j) - \mu}{M_a} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.18)$$

Table 5.3 - Parâmetros para modelagem do contato.

k_c	ξ_{cont}	μ
$10^{10} N/m$	0.1	0 - 0.02

5.2 O FENÔMENO DE INTERAÇÃO MODAL

No modelo de turbina axial apresentado a fricção entre as pontas das pás e a parte interna do estator é motivo de grande preocupação. Dadas as altíssimas velocidades envolvidas, a fricção pode ocasionar sérios danos à estrutura da turbina, elevadas temperaturas que podem ocasionar a fusão dos materiais e o desgaste excessivo das peças.

Assim, o fenômeno de interação modal é particularmente interessante neste sistema, uma vez que proporciona o contato permanente entre rotor e estator através de um acoplamento modal entre os corpos. Neste estado, as pás do rotor assumem uma posição que coincide com a deformação do estator

flexível, promovendo um encaixe dinâmico perfeito entre as estruturas. Três condições básicas devem ser satisfeitas para que ocorra a interação modal:

1. As duas estruturas devem adquirir estados de deformação propícios para uma troca de energia, ou seja, elas devem vibrar cada uma segundo um modo de mesma simetria diametral;
2. Cada uma das estruturas deve vibrar na frequência natural do modo considerado;
3. As velocidades de propagação dos modos rotativos devem coincidir no referencial fixo.

Assim, quando essas condições forem satisfeitas, a troca de energia entre as estruturas sustentará o movimento com contato permanente. A condição matemática para este fenômeno é dada na Eq. 5.19.

$$\omega_{sf} = n_d \Omega - \omega_{pá} \quad (5.19)$$

onde ω_{sf} e $\omega_{pá}$ são, respectivamente, as frequências naturais do estator flexível e do modo correspondente das pás. Estas frequências são obtidas das equações do movimento descritas neste capítulo.

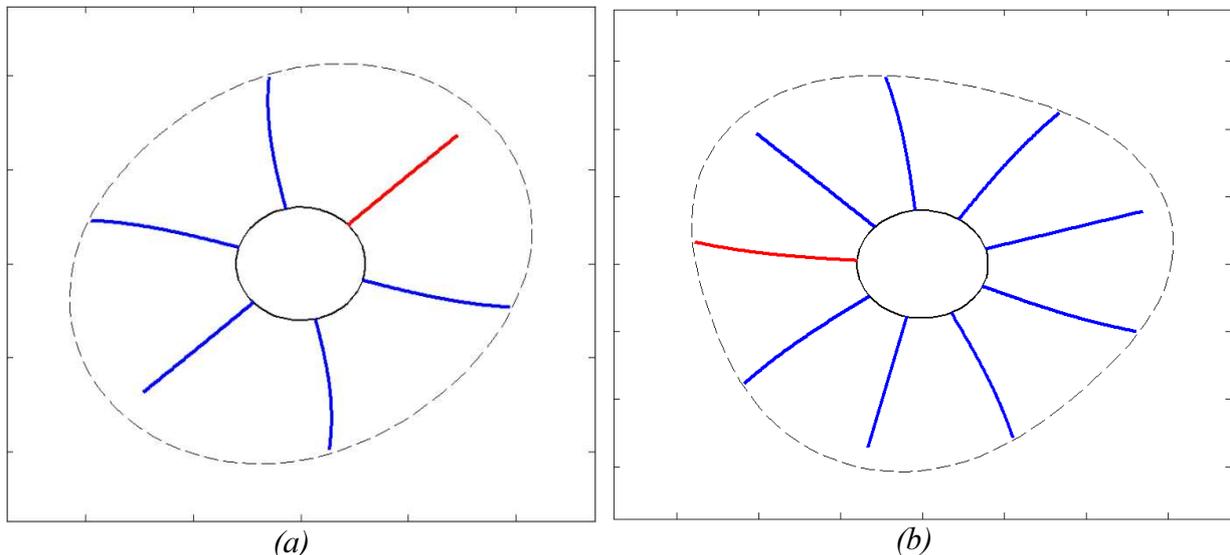


Figura 5.5 - Ilustração do fenômeno de interação modal para $n_d = 2(a)$ e $n_d = 3(b)$.

A Fig. 5.5 mostra a configuração que ocorre durante a interação. Através das ilustrações é possível perceber a maneira como as estruturas se encaixam e como o movimento se dá. Nota-se também que, para cada duas pás em contato permanente existe sempre uma que fica perde contato completamente com o estator. Podemos então classificar as pás do rotor em situação de interação modal em três tipos, que são úteis para futuras referências:

Pá livre: a pá que não tem contato com o estator;

Pá a favor: a pá que tem contato permanente e cuja deformação natural se dá a favor do deslizamento entre as superfícies;

Pá contra: a pá que tem contato permanente e cuja deformação natural se dá contra o deslizamento entre as superfícies.

A pá livre sempre estará submetida apenas aos efeitos do movimento das pás adjacentes através do acoplamento elástico, pois nenhuma força externa atuará nela. A pá a favor tem a força normal de contato no mesmo sentido da força de atrito, tendo assim uma deflexão maior e um comportamento mais estável. A pá contra é o ponto crítico da dinâmica deste tipo de sistema, como iremos confirmar nas seções seguintes. As forças normal e de atrito se dão em sentidos contrários, forçando a pá para fora de sua posição ideal para a interação modal. Isso pode causar um comportamento particular que será estudado na seção 5.3.3.

Na ocorrência deste fenômeno, o problema dinâmico se transforma em um problema estático e linear no referencial rotativo, no qual todas as variáveis de posição tendem a um valor fixo e todas as variáveis de velocidade tendem a zero. Exceto por situações particulares onde o atrito gera determinados comportamentos que fogem deste comportamento estático. Tais casos serão analisados na próxima seção.

5.3 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS

Nesta seção são apresentados os resultados das simulações realizadas. Três casos principais foram analisados:

1. Sem atrito;
2. Com baixo e médio atrito;
3. Com alto atrito.

O primeiro caso mostra a interação modal na sua forma mais pura, com simetria perfeita e com resposta do sistema perfeitamente periódica. O segundo caso mostra os efeitos da inclusão de um nível moderado de atrito, que quebra a simetria do fenômeno de interação modal, ainda que a periodicidade do sistema se mantenha. No terceiro caso o nível de atrito chega a um ponto crítico no qual é quebrada a situação de contato permanente, e verifica-se um comportamento *quase*-periódico com contato intermitente.

Diferentemente do que é feito por Brandão (2011), os contatos são resultantes do desbalanceamento do rotor. O desbalanceamento utilizado para as simulações é de $e = 0.0005kg.m$.

5.3.1 Sem atrito

Nesta primeira situação são consideradas nulas as forças de atrito, sendo $\mu = 0$, $n_a = 3$ e o rotor com 9 pás. Assim, temos a ocorrência do fenômeno de interação modal ideal, com a troca de energia se fazendo apenas através das forças normais de contato. A velocidade de rotação é de $\Omega = 496,4rad/s$. Neste caso, as pás contra e a favor tem comportamentos simétricos e as demais variáveis de estado se estabilizam rapidamente, como mostram as Figs. 5.6 a 5.10.

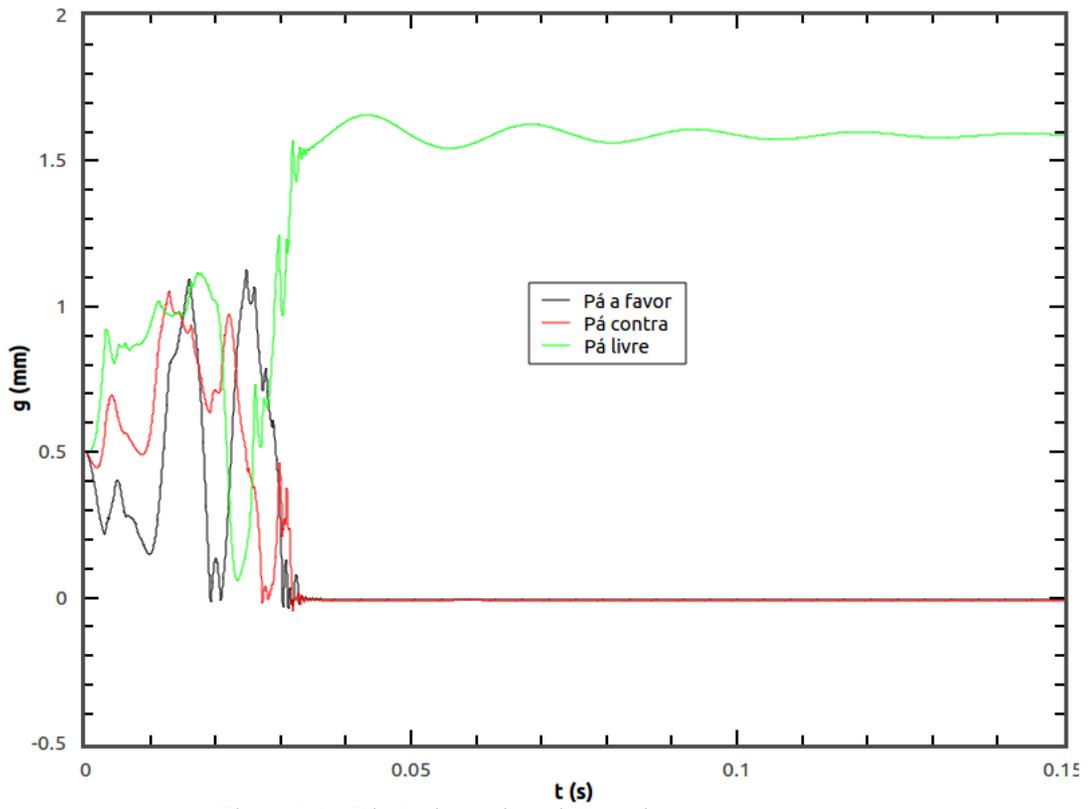


Figura 5.6 - Distâncias g de cada uma das pás ao estator.

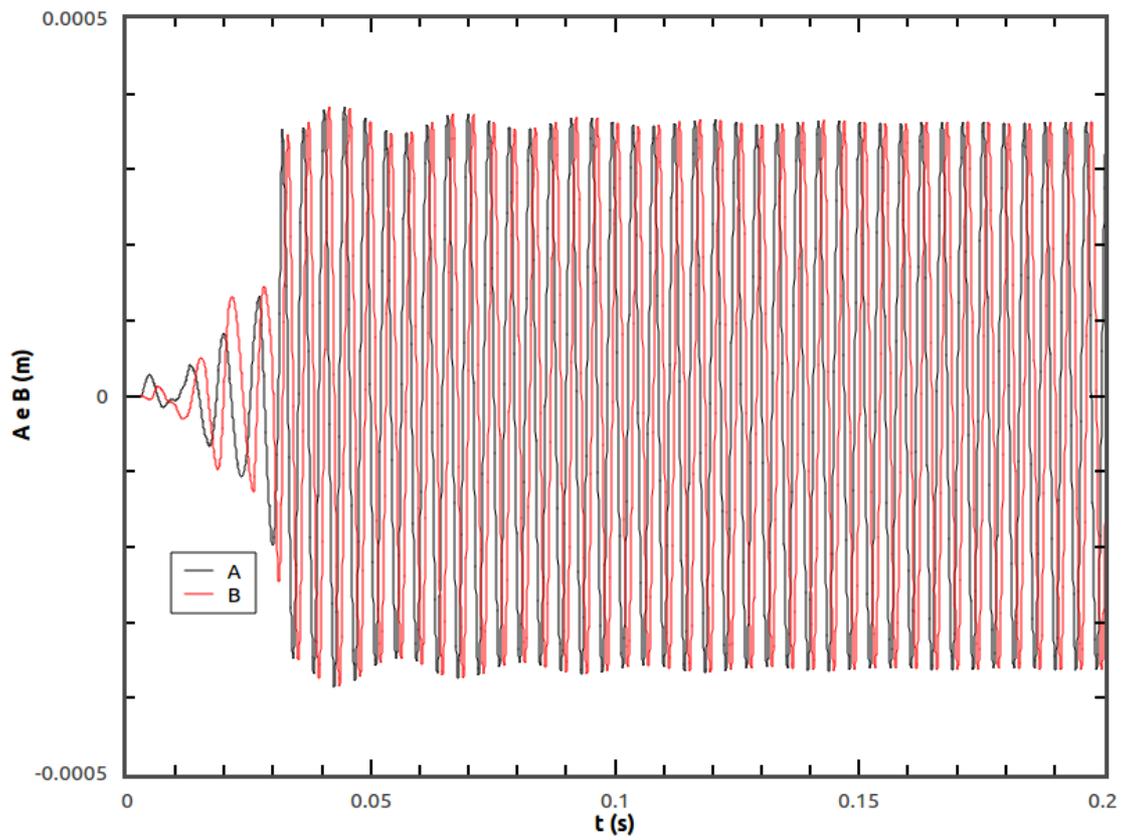


Figura 5.7 - Série temporal das variáveis A e B de flexão do estator.

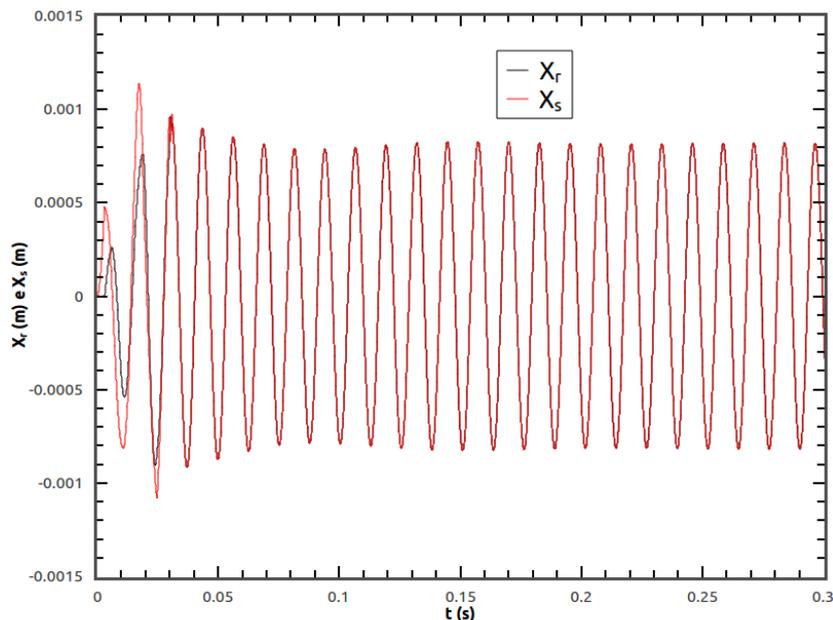


Figura 5.8 - Deslocamentos horizontais do rotor e do estator, que se estabilizam em movimento harmônico após o acoplamento modal.

Percebe-se, pela Fig. 5.6, que a interação modal inicia-se por volta de $0.035s$ após o início do movimento, quando duas das pás ficam em contato permanente com o estator e a pá livre se afasta, alcançando uma distância de $g \approx 1.5mm = 3\delta$. A Fig. 5.7 mostra a evolução das variáveis A e B que definem a deformação do estator. Após o início da interação modal, A e B assumem um movimento periódico com uma pequena defasagem, de aproximadamente 45° . A Fig. 5.8 mostra que, após o início da interação modal, o rotor e o estator se acoplam, e passam a vibrar como um só corpo sob efeito do desbalanceamento.

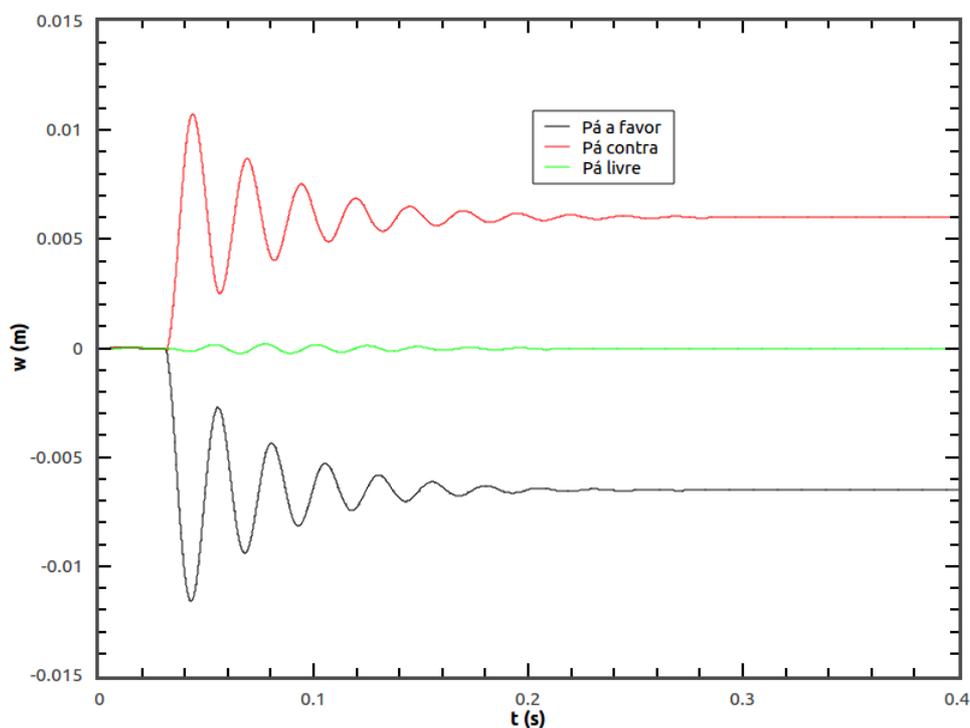


Figura 5.9 - Deslocamento ortnormal w das pás.

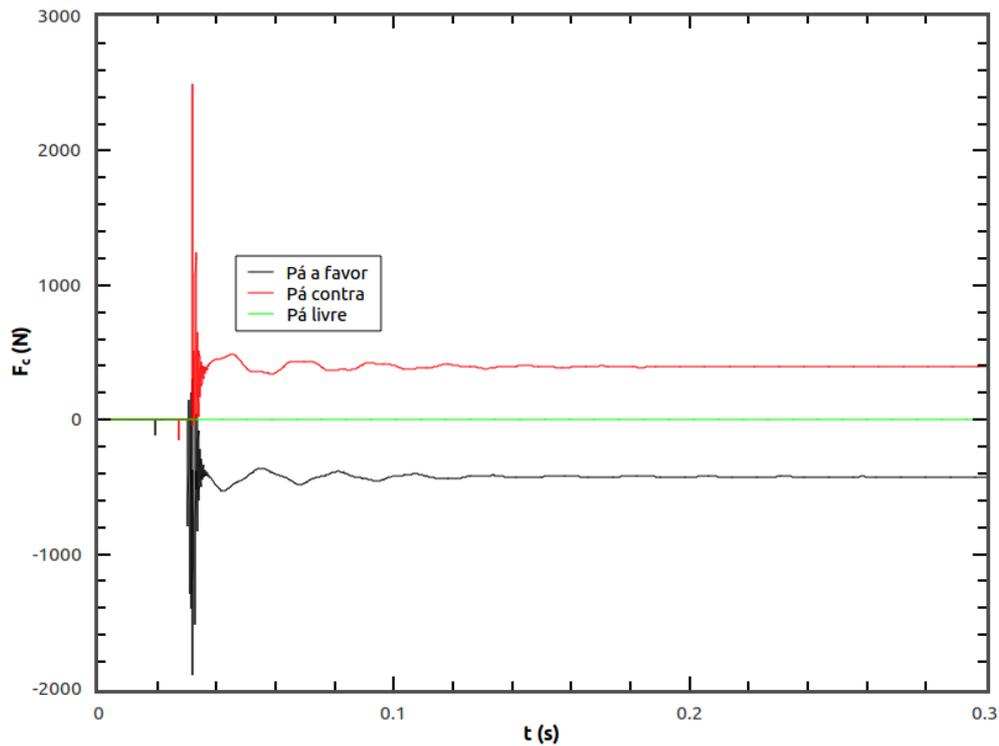


Figura 5.10 - Força tangencial atuando na ponta de cada pá.

A Fig. 5.9 mostra que as pás em contato tendem a um estado de equilíbrio diferente de zero e com sinais contrários. Como não há forças de atrito, as forças atuantes nas pás em contato dependem apenas da geometria do estator deformado, sendo, portanto, simétricas e de sinais opostos. O deslocamento das pás se estabiliza em torno de 6mm .

A Fig. 5.10 apresenta o gráfico das forças tangenciais atuantes na ponta de cada uma das pás. Percebe-se que o momento em que esta força atinge os valores mais elevados é durante o início do acoplamento modal, quando as estruturas entram em um processo de acomodação para assumirem a configuração própria do acoplamento. Neste momento as forças chegam a quase 2000N .

Como já dito anteriormente, a fonte da não-linearidade neste sistema é a transição entre as situações com e sem contato. Neste caso de interação modal, na qual não ocorre a transição entre as duas situações, o sistema é perfeitamente linear, e deve se comportar como tal. Por isso verifica-se um comportamento periódico nas variáveis de estado do sistema neste caso.

5.3.2 Baixo e médio atrito

Neste segundo caso estudado será compreendida a influência do atrito sobre a simetria do fenômeno de interação modal. Dois níveis de atrito serão considerados: um baixo nível de atrito com $\mu = 0.004$ e um nível moderado de atrito com $\mu = 0.01$. A mesma configuração anterior de $n_d = 3$ e $N_a = 9$ é utilizada.

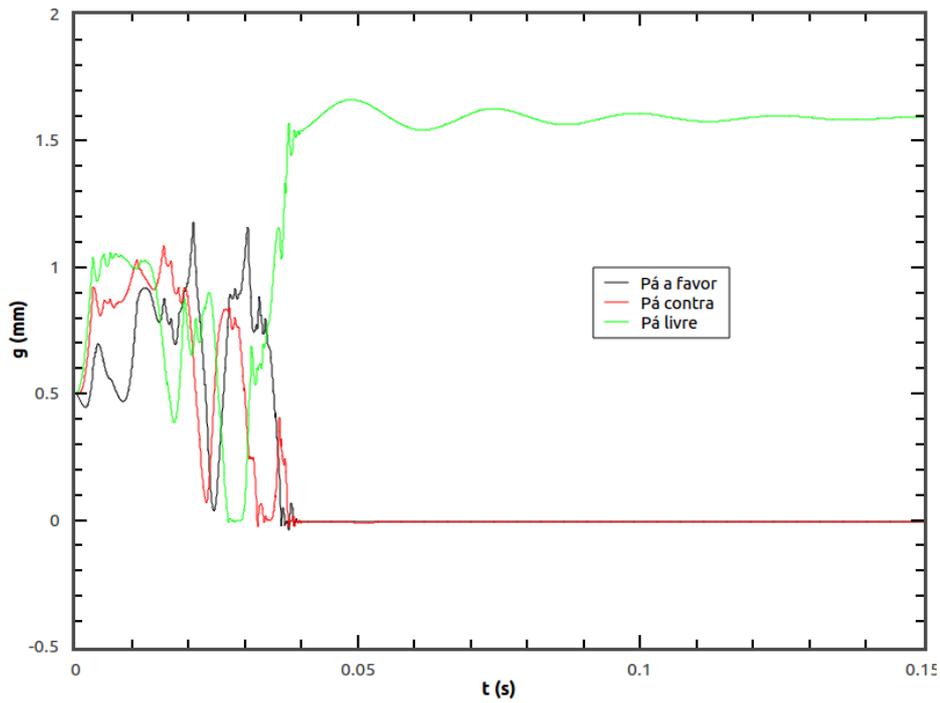


Figura 5.11 - Distâncias g de cada uma das pás ao estator para baixo atrito.

Inicialmente considera-se $\mu = 0.004$. Através da Fig. 5.11 percebe-se que a inclusão do atrito no sistema não modificou o tempo necessário para o início do acoplamento modal. O comportamento das variáveis A e B é o mesmo do caso sem atrito.

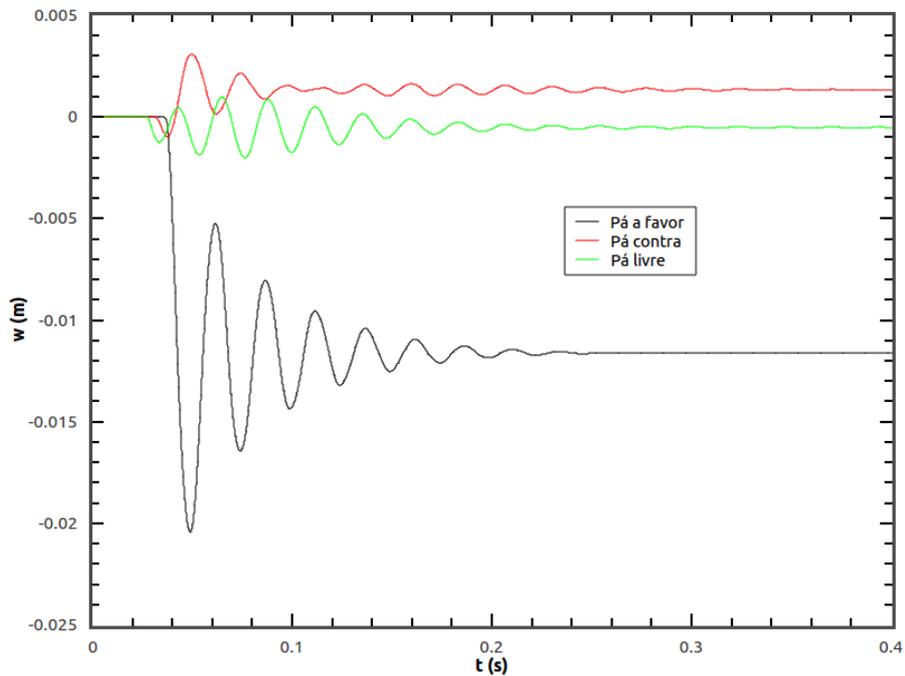


Figura 5.12 - Deslocamento ortogonal w das pás para baixo atrito.

Na Fig. 5.12 percebe-se a assimetria gerada pelo atrito. A pá a favor se estabiliza agora em 12mm no sentido negativo e a pá contra por volta de 1.5mm no sentido positivo. A rotação estando no sentido positivo (anti-horário) gera um atrito no sentido negativo das pás, assim gerando a assimetria

para o lado negativo. O mesmo se verifica no gráfico das forças na Fig. 5.13, onde percebe-se que as forças são predominantemente negativas, o estado de equilíbrio é assimétrico para o lado negativo e força máximo é em torno de $4000N$.

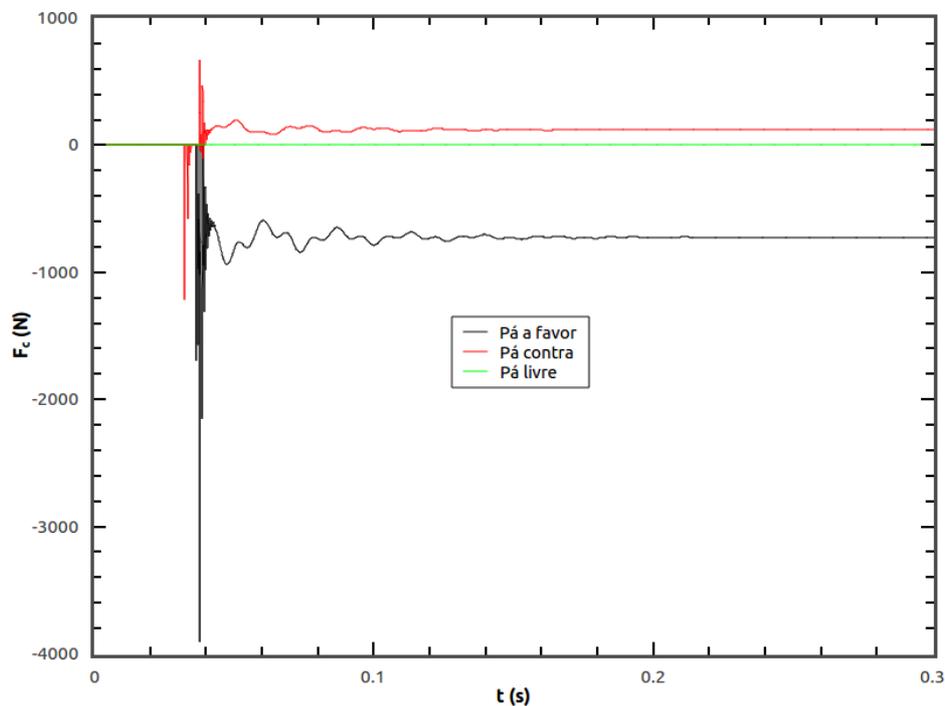


Figura 5.13 - Força tangencial atuando na ponta de cada pá para baixo atrito.

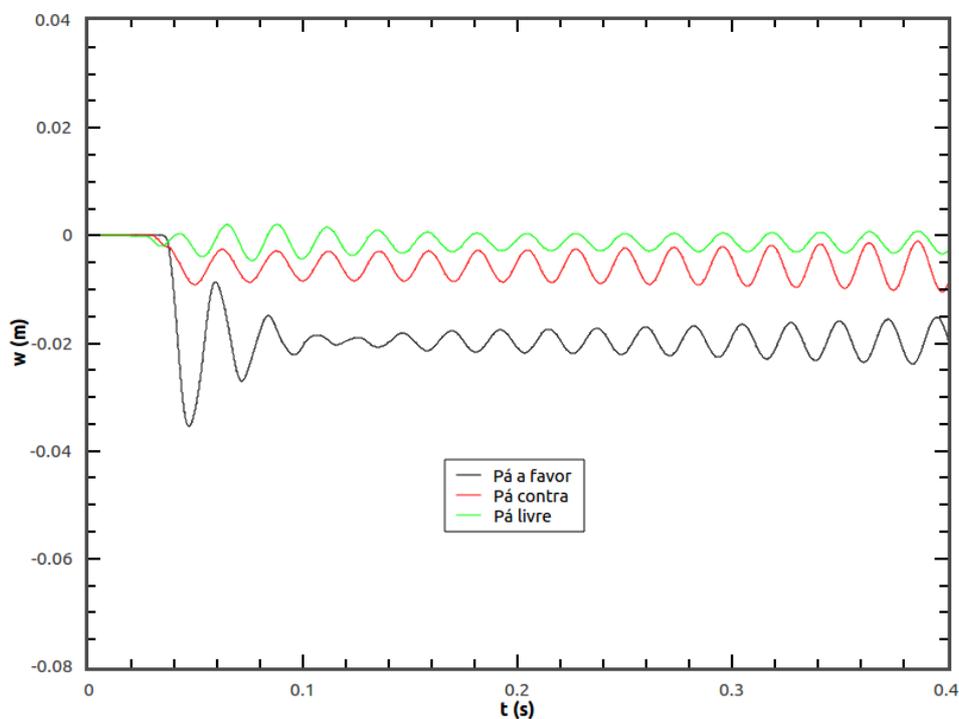


Figura 5.14 - Deslocamento ortogonal w das pás para médio atrito.

As Figs. 5.14 e 5.15 mostram os deslocamentos das pás e a força tangencial para o caso com nível médio de atrito, $\mu = 0.01$. Percebe-se que o torque da força de atrito na pá contra é suficiente para superar a força normal, e o deslocamento médio de ambas as pás em contato passa a ser negativo. A

configuração de equilíbrio neste caso difere significativamente da situação ideal de interação modal mostrada na Fig. 5.5, mas ainda assim o contato se mantém. As forças negativas se tornam ainda mais predominantes e a força máxima passa dos 5000N.

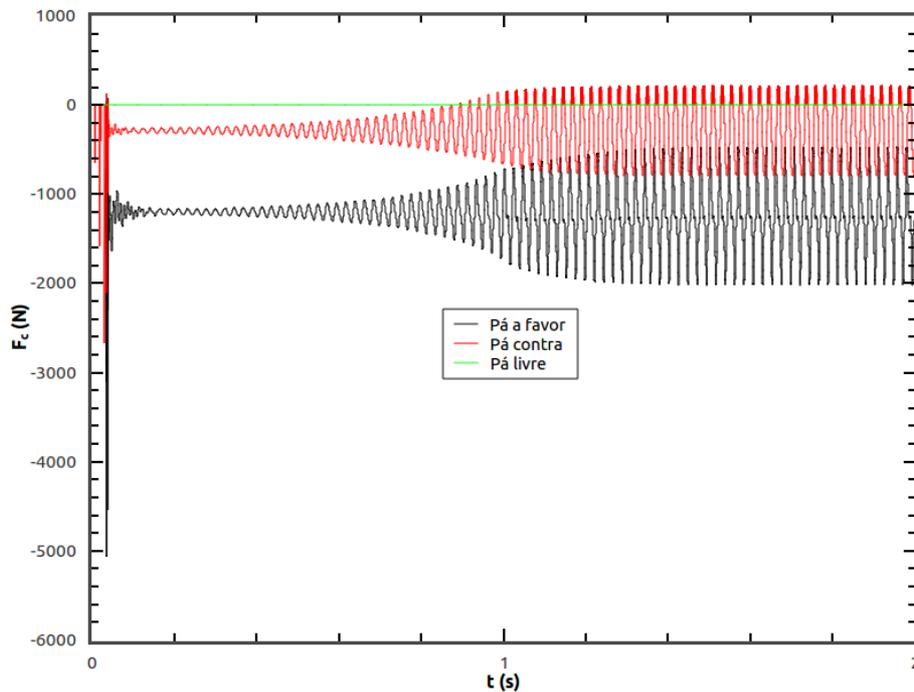


Figura 5.15 - Força tangencial atuando na ponta de cada pá para médio atrito.

Neste caso podemos perceber que o equilíbrio da posição de interação modal não é mais estático como antes. A Fig. 5.16 mostra o detalhe da distância g entre as pás que estão em contato neste caso, onde pode-se perceber que, apesar do contato ser permanente, os valores não se estabilizam.

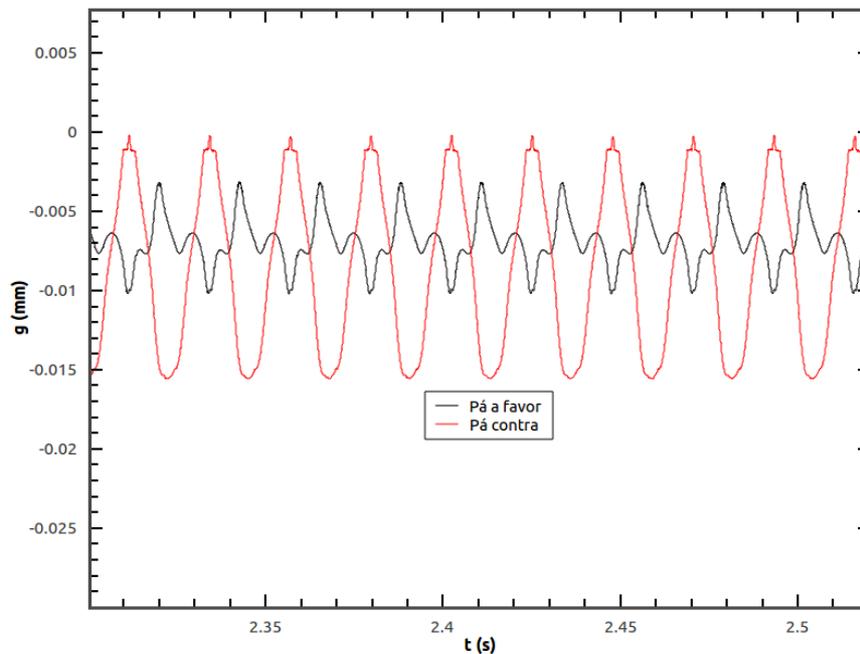


Figura 5.16 - Detalhe da distância g entre as pás e o estator para $\mu = 0.01$.

A Fig. 5.17 apresenta os espaços de fase e seções de Poincaré para posição vs velocidade do rotor e também para posição do rotor vs posição do estator. Na Fig. 5.17(a) percebemos que a seção de Poincaré indica um comportamento quase-periódico, pois apresenta um perfil de pontos que formam uma curva fechada. E a Fig. 5.17(b) mostra que os deslocamentos do rotor e do estator são similares.

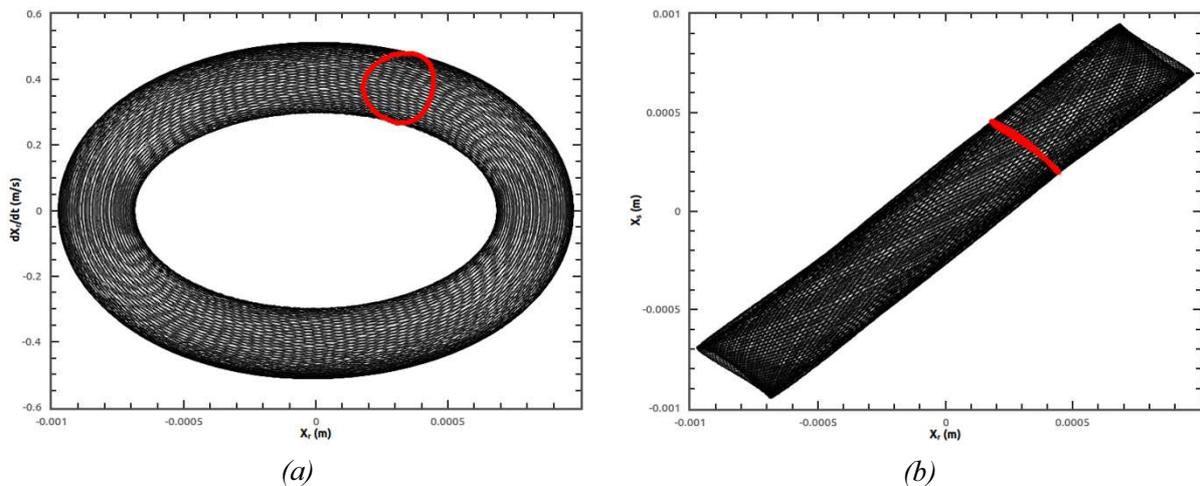


Figura 5.17 - Espaço de fase e seção de Poincaré para dois pares de variáveis de estado com $\mu = 0.01$.

5.3.3 Alto atrito

Para a análise de alto nível de atrito foram utilizados $\mu = 0.02$, $n_d = 3$ e $N_a = 9$.

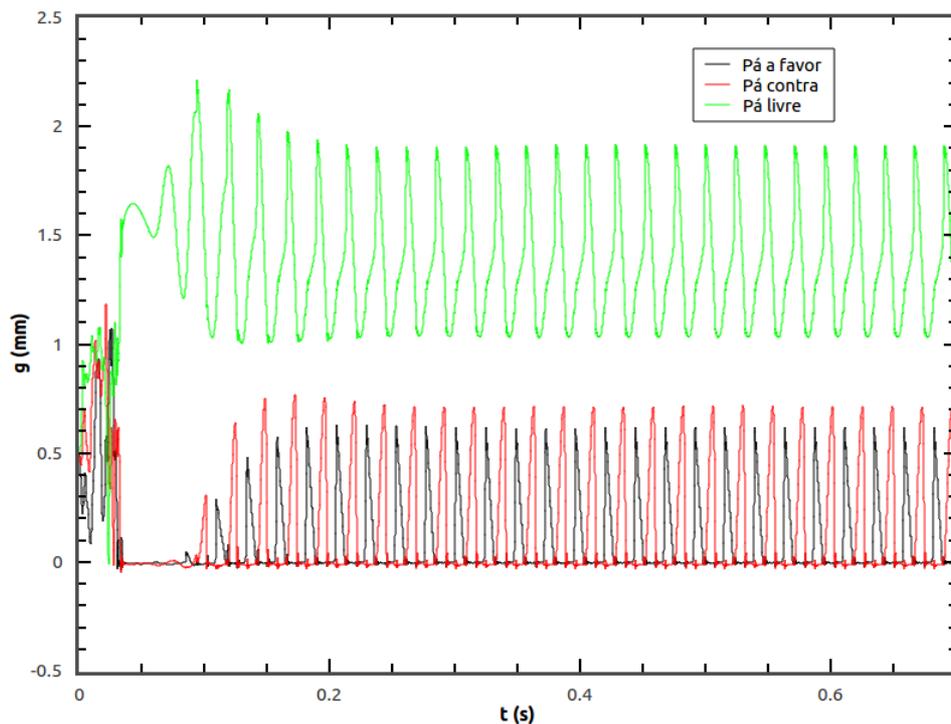


Figura 5.18 - Distâncias g de cada uma das pás ao estator para alto atrito.

Percebe-se através da Fig. 5.18 que o fenômeno de interação modal como foi visto até então não se verifica. O sistema não apresenta um contato permanente entre rotor e estator. Se analisarmos o gráfico da Fig. 5.18 mais de perto, poderemos ver que, na realidade, sempre há ao menos uma pá em contato com o estator, mas elas se alternam, estando ora a pá contra em contato, ora a pá a favor em contato e ora ambas as pás tocam o estator.

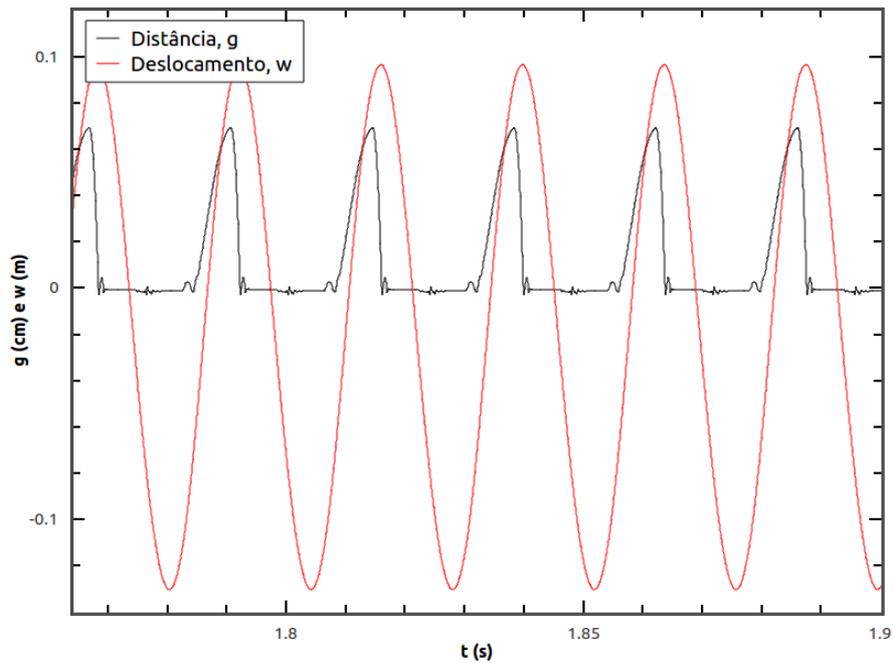


Figura 5.19 - Distância g (em cm) e deslocamento w (em m) da pá contra.

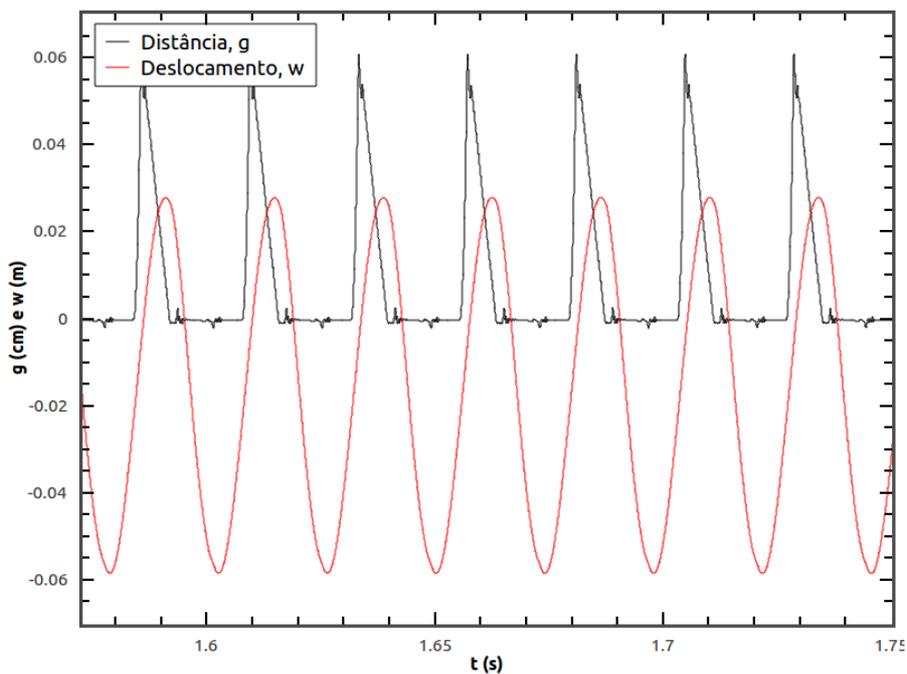


Figura 5.20 - Distância g (em cm) e deslocamento w (em m) da pá a favor.

A partir da Fig. 5.19 percebe-se o que acontece simultaneamente com o deslocamento e a distância g da pá contra no tempo. Percebe-se que, quando a pá entra em contato com o estator, seu deslocamento vai para o lado negativo, como consequência da intensa força de atrito, mas esse deslocamento a tira da posição de interação modal, e o contato se perde. A perda do contato ocasiona, por inércia e forças elásticas, a volta da pá para posições positivas, e o contato é restabelecido. Este movimento se repete indefinidamente e ocorre na frequência natural da pá, que entra em ressonância e

mantém o movimento. A Fig. 5.20 apresenta o mesmo gráfico para a pá a favor. A análise é semelhante.

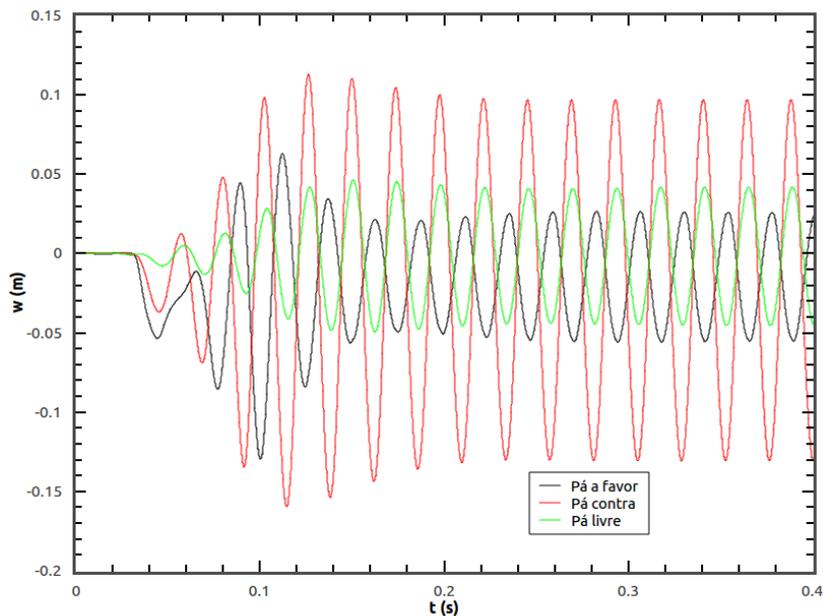


Figura 5.21 - Posições w das pás do rotor em função do tempo.

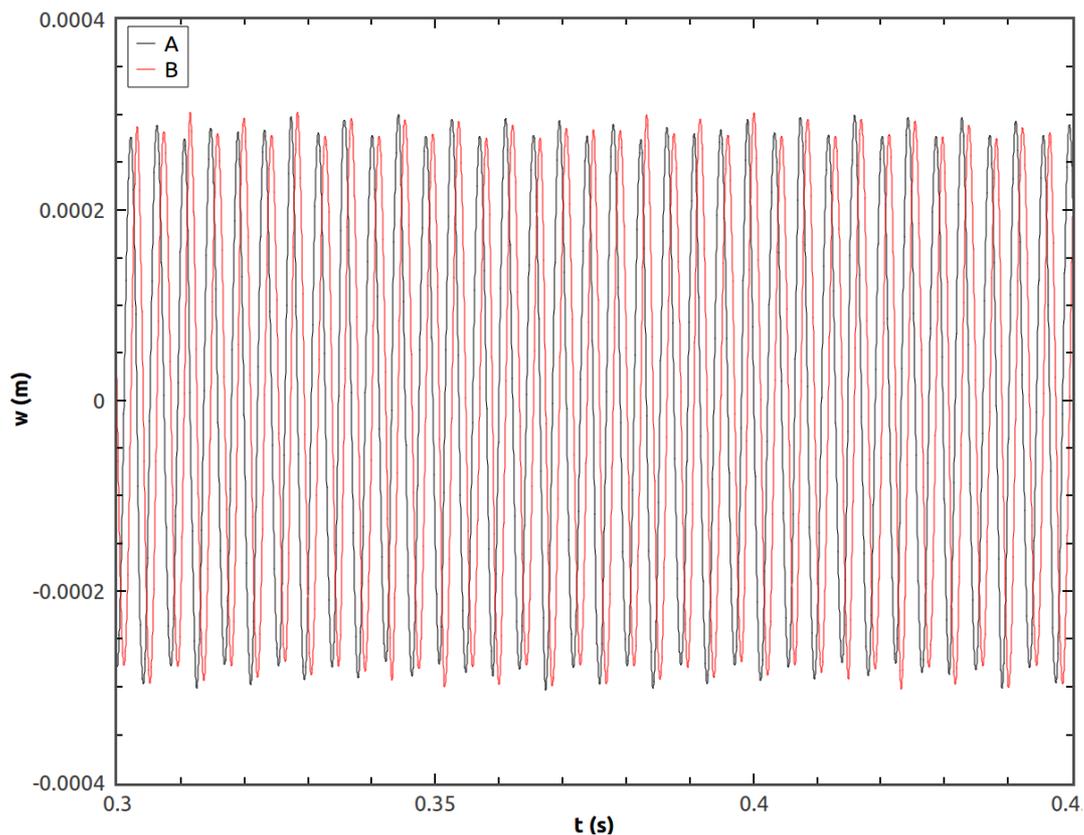


Figura 5.22 - Série temporal das variáveis A e B de flexão do estator para alto atrito.

Na Fig. 5.22 percebe-se que o comportamento das variáveis A e B não é tão regular quanto nos outros casos apresentados anteriormente. A defasagem de aproximadamente 45° ainda se verifica, porém uma pequena variação na amplitude sugere um comportamento distinto.

Através da análise das demais respostas do sistema, encontram-se indicações de que este tem característica de *quase*-periódico. As Figs. 5.23 a 5.26 mostram espaços de fase com as respectivas seções de Poincaré que também indicam o comportamento *quase*-periódico.

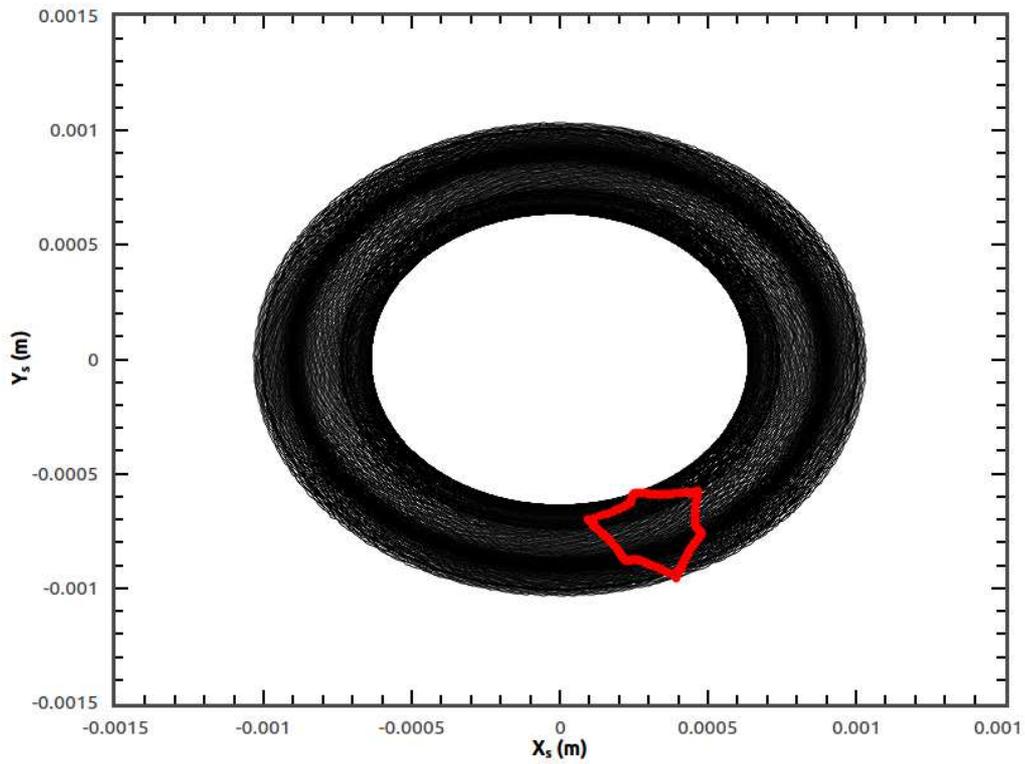


Figura 5.23 - Espaço de fase e seção de Poincaré para as variáveis de deslocamento do estator.

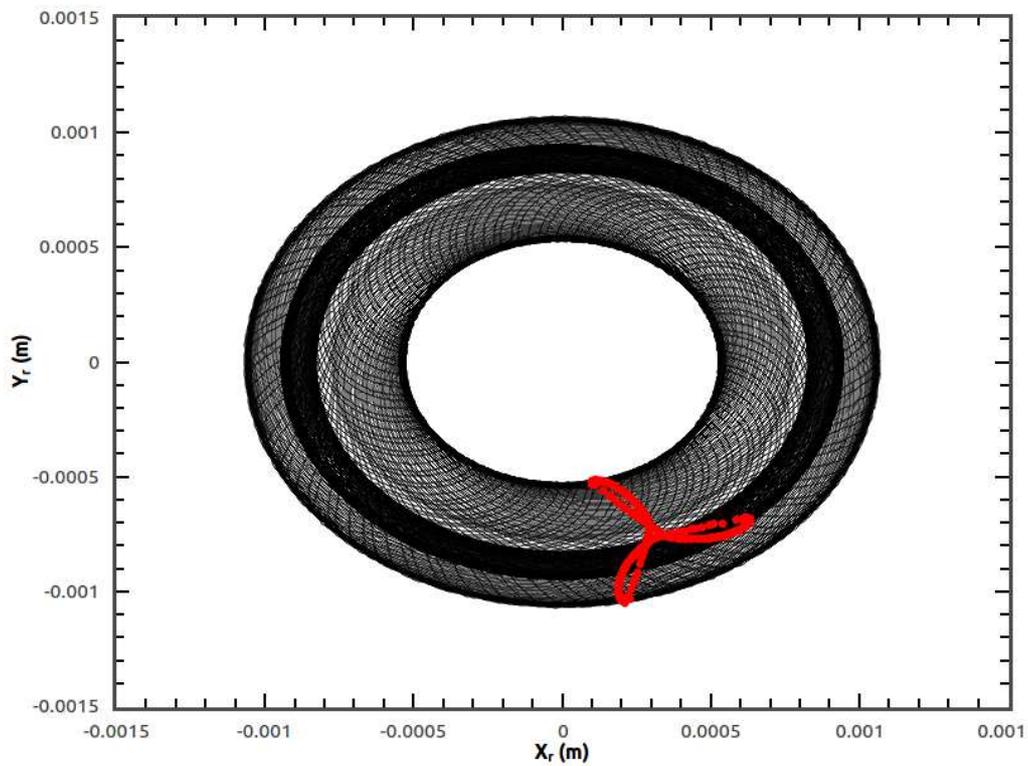


Figura 5.24 - Espaço de fase e seção de Poincaré para as variáveis de deslocamento do rotor.

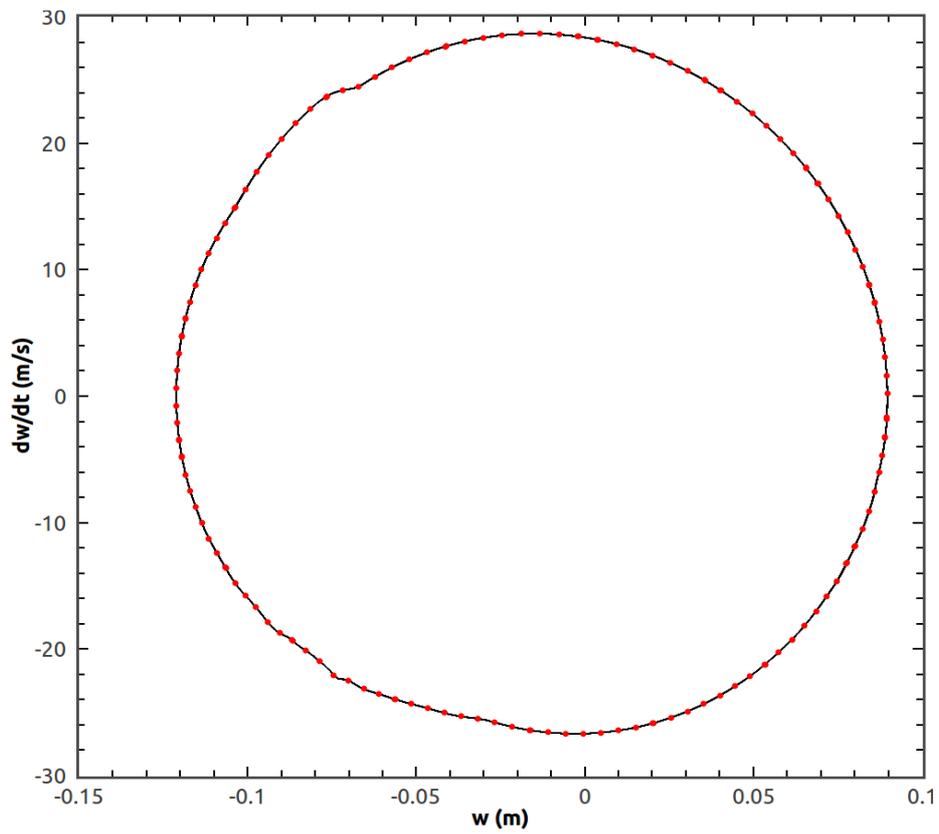


Figura 5.25 - Espaço de fase e seção de Poincaré para a pá contra.

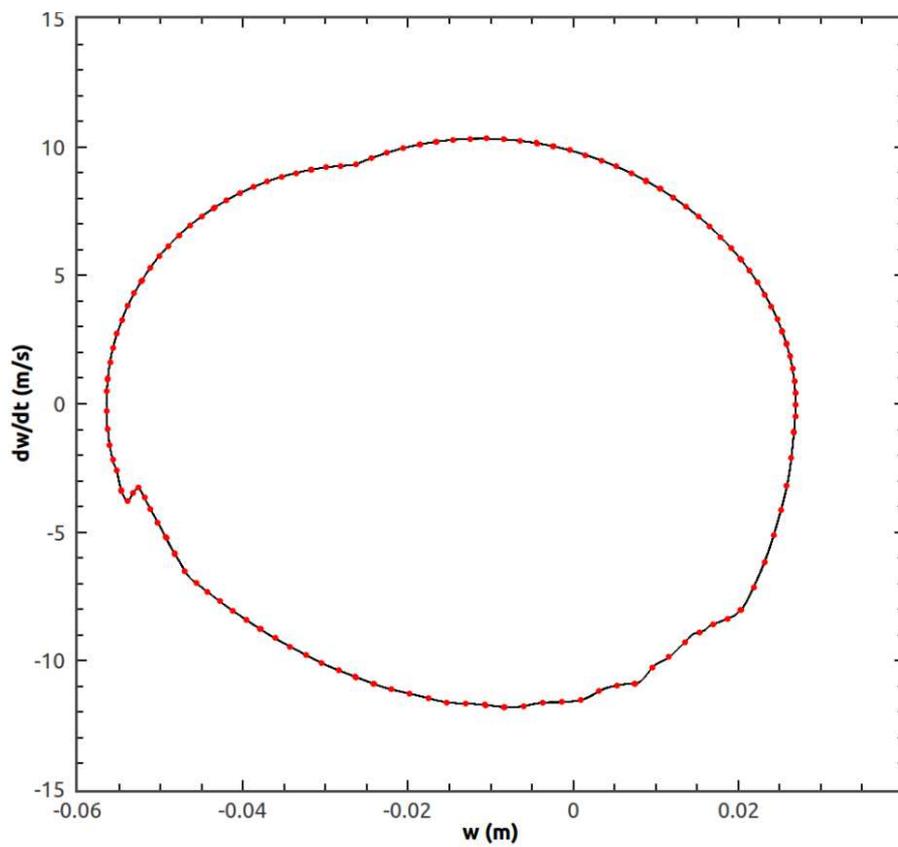


Figura 5.26 - Espaço de fase e seção de Poincaré para a pá a favor.

As Figuras 5.27 e 5.28 mostram os espaços de fase e seções de Poincaré para as variáveis de posição e velocidade horizontais do rotor e do estator, onde também pode-se notar indícios de *quase-*

periodicidade, ainda que não tão evidentes quanto nos exemplos acima. Para a caracterização do tipo de comportamento apresentado, uma ferramenta quantitativa deve ser utilizada, como, por exemplo, o expoente de Lyapunov.

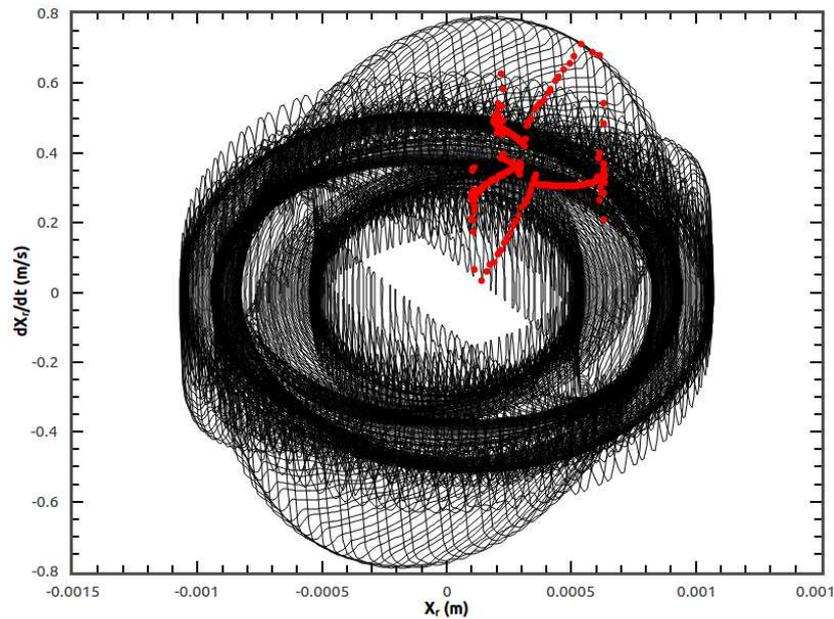


Figura 5.27 - Espaço de fase e seção de Poincaré para o deslocamento horizontal do rotor.

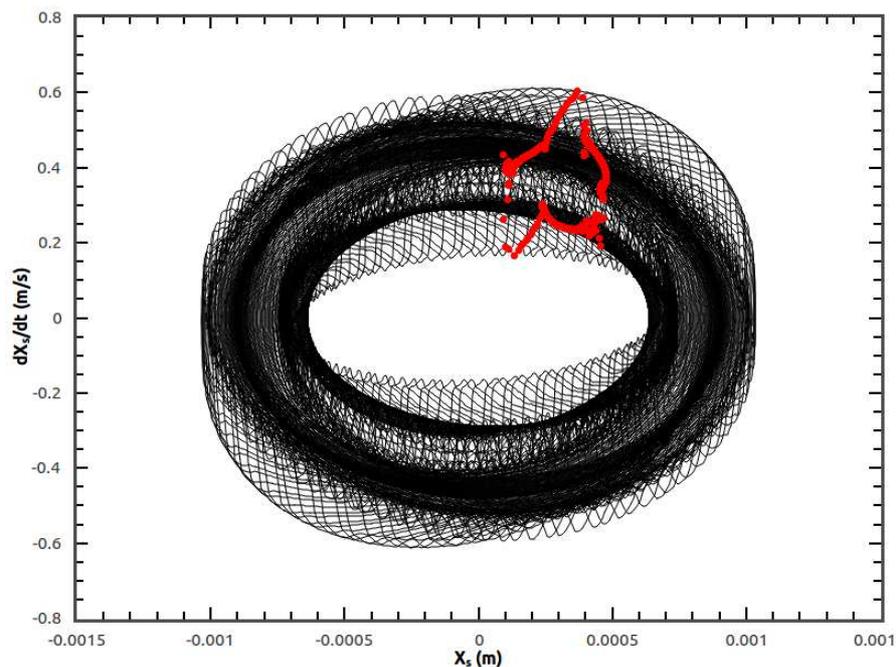


Figura 5.28 - Espaço de fase e seção de Poincaré para o deslocamento horizontal do estator.

A Fig. 5.30 apresenta o gráfico das forças tangenciais na ponta das pás, onde podemos perceber que a força de atrito, negativas, dominam as forças de contato. Os impactos recorrente e constantes geram intensos picos de força que passam de $5000N$ e, no momento de início do acoplamento modal os esforços chegam a $10kN$.

É possível perceber, fazendo um paralelo entre os resultados obtidos em Brandão (2011) e os aqui apresentados, que o comportamento do sistema para alto atrito com desbalanceamento é a aparente

superposição do comportamento verificado sem desbalanceamento e o movimento circular simples promovido pelas forças de desbalanceamento. Podemos perceber que as seções de Poincaré são idênticas àquelas do caso sem desbalanceamento, e as órbitas no espaço de fase tem formato elíptico, característico do movimento de desbalanceamento, acrescidos das variações causadas pelos contatos intermitentes verificados no caso de Brandão (2011). Este comportamento é peculiar e inesperado, uma vez que não se espera um efeito de superposição em um sistema com fontes tão fortes de não-linearidades.

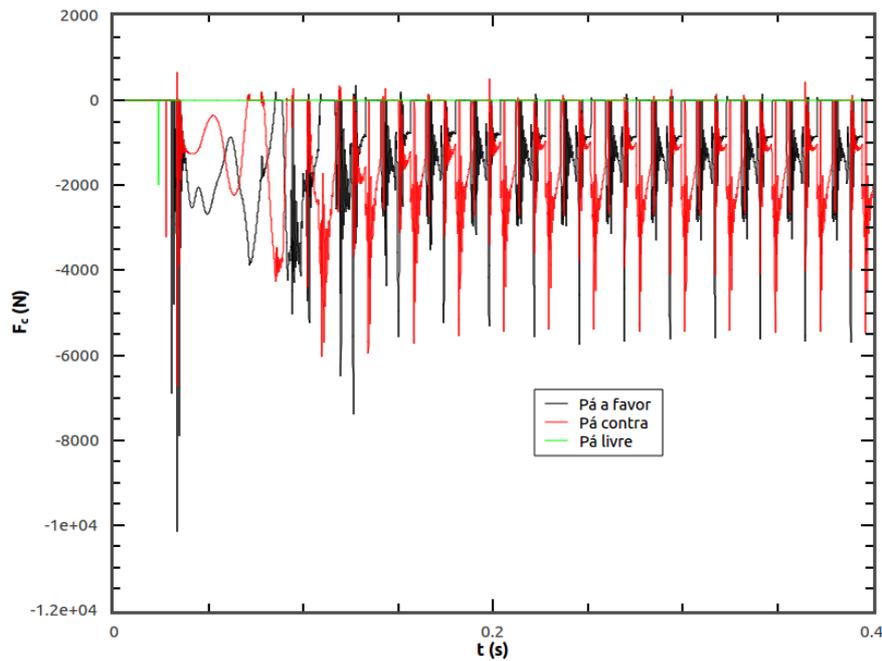


Figura 5.29 - Forças tangenciais na ponta das pás para alto atrito.

Um outro comportamento interessante foi observado. Uma vez que existem 9 pás no modelo de turbina e elas se arranjam 3 a 3, é natural que tenhamos 3 configurações possíveis para a interação modal, o que se traduz na coexistência de 3 orbitas estáveis. A Fig. 5.30 mostra a distância entre três pás consecutivas em um sistema com alto coeficiente de atrito. Podemos perceber que a pá representada pela cor verde é inicialmente a pá livre. Por volta dos 5s a pá mostrada em preto passa a ser a pá livre e, logo em seguida a pá vermelha se estabiliza como a pá livre. Essa transição é espontânea e pode ocorrer em virtude de qualquer pequena perturbação no sistema.

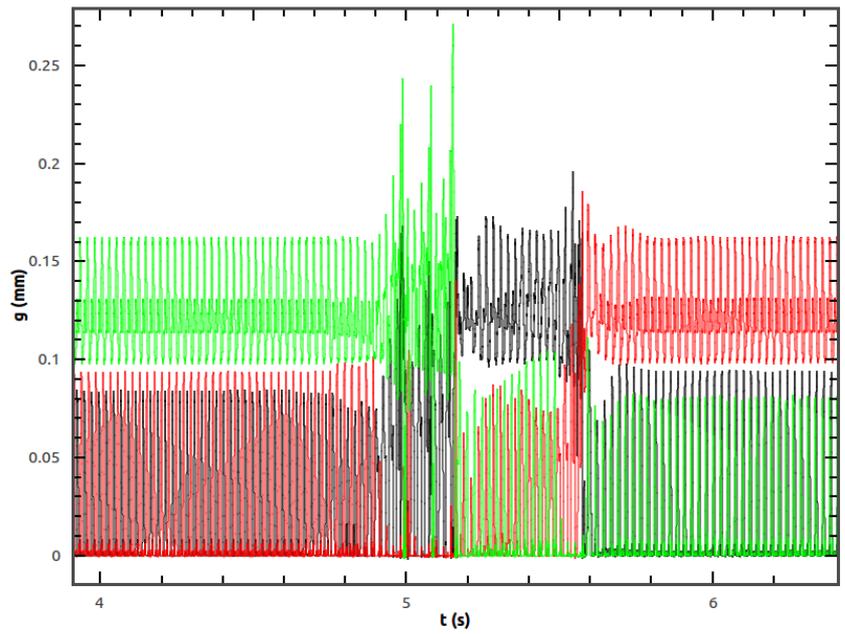


Figura 5.30 - Distância entre as pás e o estator, evidenciando a transição da configuração de interação modal.

6. CONCLUSÃO

Dois sistemas dinâmicos descontínuos foram analisados neste trabalho: um sistema rotor-estator com 4gdl e um sistema de turbina axial com pás flexíveis e estator cilíndrico também flexível. Em linhas gerais, a utilização das equações de movimento no espaço de estados se mostrou conveniente para a representação do sistema, incluindo as forças de contato, além de facilitar a construção do espaço de fase e seções de Poincaré. A utilização do método Runge-Kutta de quarta ordem com passo variável para a integração numérica, apesar de demandar um maior custo computacional se comparado ao método de diferenças finitas centrais, gerou resultados mais confiáveis tendo em vista a análise de convergência realizada. O uso do método de penalidade para o cálculo das forças de contato, ao invés do método de multiplicadores de Lagrange, possibilitou obter um modelo que representa melhor a realidade, com uma maior precisão nas estimativas de forças de contato e das componentes de alta frequência na resposta que surgem durante o contato. Esta última característica, no entanto, torna o método mais instável do ponto de vista numérico. O procedimento proposto por Müller (1995) para o cálculo dos expoentes de Lyapunov em sistemas descontínuos foi implementado e apresentou bons resultados. Este procedimento se resume a calcular uma matriz Jacobiana para o caso sem contato e outra para o caso com contato e utilizá-las normalmente no método proposto por Wolf *et al.* (1985).

Na análise do sistema de 4 gdl, dois conjuntos de parâmetros foram avaliados. No primeiro caso, com rigidez de contato menor, foi verificada a presença de uma região de coexistência de duas órbitas periódicas estáveis. Essa coexistência se deu em uma faixa de frequência de transição entre ausência de contato e contato intermitente, e foi confirmada através da construção de bacias de atração. A transição entre estes comportamentos é algo que deve ser analisado com especial atenção, pois representa um ponto crítico para o sistema e, na maioria das aplicações práticas, deve ser evitado. Além disso, devido a essa coexistência, em determinadas faixas de frequência, uma variação pequena na velocidade de rotação pode ocasionar grandes mudanças na resposta de uma máquina rotativa. Essa análise reforça a importância do estudo do comportamento dinâmico do sistema a partir de modelos matemáticos confiáveis.

No segundo caso analisado para o mesmo sistema 4gdl foram considerados os parâmetros utilizados por Demailly (2003) e Lesaffre (2007b). A presença de uma rigidez de contato maior ocasionou a presença de uma dinâmica mais complexa, com comportamentos caótico, periódico e quase-periódico, confirmados pelo cálculo dos expoentes de Lyapunov. Além disso, uma faixa com coexistência de órbitas periódicas foi identificada e caracterizada através da construção da bacia de atração. Demailly (2003) apresenta comportamentos diferentes dos encontrados no presente trabalho apesar de analisar o mesmo sistema com os mesmos parâmetros. Duas diferenças importantes devem ser ressaltadas: o método de integração utilizado por Demailly(2003) foi o diferenças finitas centrais e o método de Lagrange foi utilizado para representar a força de contato. Uma vez que os métodos e modelo utilizados no presente estudo foram validados a partir de resultados experimentais, conforme

apresentado em Brandão (2011), pode-se concluir que os resultados aqui apresentados - e que divergem em relação àqueles obtidos por Demailly (2003) - estão corretos.

Na análise do modelo da turbina com pás flexíveis com estator, quatro situações foram consideradas: sem atrito e baixo, médio e alto atritos.

A partir dos resultados obtidos no caso sem atrito, notou-se uma situação de contato permanente entre pás e estator em regime permanente. Desta forma, as não-linearidades que ocorrem devido às transições entre as situações com e sem contato não se manifestam e o sistema se comporta como um sistema linear. Logo, os modos de vibração de corpo rígido são perturbados apenas pelo desbalanceamento, apresentando comportamento de vibração com excitação harmônica. Neste caso, a troca de energia entre as pás do rotor e o estator flexível é perfeita e o movimento se estabiliza em um estado de movimento harmônico simples.

No caso da presença de atrito surge outra fonte de não-linearidade – além das transições entre as situações sem e com contato – relacionado a essa fonte de dissipação de energia. Para o caso analisado de baixo atrito novamente foi verificado o contato permanente em regime permanente. Além disso, como não foi verificada inversão de sentido na velocidade de deslizamento, as não-linearidades devido ao atrito seco também não se manifestam. Portanto, o sistema se comportou como um sistema linear e apresentou comportamento periódico.

Já no caso de médio atrito, com $\mu = 0.01$, verificou-se um comportamento não-linear do sistema. Apesar do sistema entrar em interação modal, a deformação das pás não mais se estabiliza, e passam a oscilar. Esta instabilidade é causada pela inversão da velocidade de deslizamento das pás, o que manifesta a não-linearidade proveniente do atrito seco.

No caso de alto atrito o fenômeno de perdas e restabelecimento do contato repetindo-se indefinidamente gerou comportamentos particularmente interessantes. Os sucessivos impactos das pás no estator causaram picos de força de contato muito intensas - cerca de $5kN$ - que poderiam levar a máquina a destruição e a desgastes extremamente graves.

Percebeu-se ainda que a interação modal se estabeleceu pouco depois, quando comparado com o caso de impacto acidental, conforme apresentado em Brandão (2011). Neste, o tempo para o acoplamento era de aproximadamente $5ms$, enquanto com desbalanceamento a interação se inicia por volta de $35ms$, um tempo 6 vezes maior. Pouco depois do início de funcionamento da máquina, no momento exato quando as duas estruturas estão entrando na configuração de acoplamento as forças de contato sofrem um aumento dramático, chegando a $5kN$ para atrito médio e $10kN$ para alto atrito. Em um equipamento real este acoplamento dificilmente se manteria por muito tempo pois o pico de força de contato já seria suficiente para causar avarias graves tanto nas pás quanto no estator, mudando as características do sistema e absorvendo energia, o que muito provavelmente impediria a continuidade do acoplamento, mas também impossibilitaria o funcionamento da máquina. Novamente, o período de

transição para a situação de interação modal é o ponto crítico, sendo este o momento de maior dano potencial à máquina.

No estudo desenvolvido por Brandão (2011) para o modelo de turbina é utilizado um impacto pontual no estator para gerar o deslocamento inicial que provoca os contatos. Nesta dissertação, no entanto, a excitação que gera os deslocamentos é um desbalanceamento do rotor. Uma vez que toda máquina rotativa apresenta algum tipo de desbalanceamento, elas estão sujeitas, como foi constatado nas análises realizadas neste trabalho, à ocorrência do fenômeno de interação modal, dependendo dos valores dos demais parâmetros. Este é um resultado de extrema importância para as aplicações reais, uma vez que nas avaliações anteriores foi verificada a ocorrência deste fenômeno apenas para situações acidentais, quando o estator sofria um forte impacto e não havia desbalanceamento. O fato da interação modal se iniciar e se manter apenas com o desbalanceamento do rotor mostra que este fenômeno pode ocorrer sob as mais diversas condições, incluindo condições reais de operação, o que traria um grande risco para o funcionamento da máquina. Estes resultados são de grande importância para as indústrias como, por exemplo, a do petróleo e a aeronáutica.

O objetivo deste trabalho consistia na análise do comportamento dinâmico complexo de máquinas rotativas a partir de modelos matemáticos confiáveis e métodos numéricos robustos para a simulação de sistemas reais. Pode-se dizer que o trabalho cumpriu esta tarefa e ainda deixa em aberto diferentes possibilidades de aprofundamento. Como exemplos de trabalhos futuros têm-se a análise do acoplamento termo-mecânico na situação de contato e a modelagem estocástica que pode representar melhor o comportamento de sistemas reais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADAMS, M.; *Rotating Machinery Vibration*. Marcel Dekker, Inc., (2000). ISBN - 0-8247-0258-1.
- AL-BEDOOR, B. O.; *Transient torsional and lateral vibrations of unbalanced rotors with rotor-to-stator rubbing*. Journal of Sound and Vibration (2000) 229(3), 627-645.
- BATAILLY, A., LEGRAND, M., CARTRAUD, P., PIÈRE, C.; *Assessment of reduced models for the detection of modal interaction through rotor stator contacts*. Journal of Sound and Vibration 329 (2010) 5546–5562.
- BRANDÃO, A., THOUVEREZ, F., BLANC, L.; *Thermal and Dynamic Analysis of the Rotor/Stator Contact in Turbomachinery*. XIV International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics (DINAME) (2011).
- BRANDÃO, A.; *Não-linearidades nos contatos entre rotor e estator em máquinas rotativas*. Projeto de fim de curso, Universidade de Brasília. (2011).
- CHU, F., LU, W.; *Experimental observation of non linear vibrations in a rub-impact rotor system*. Journal of Sound and Vibration 283 (2005) 621–643.
- CONTE, S., DE BOOR, C.; *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach*. McGraw-Hill Book Company. (1980).
- DAHLQUIST, G., BJÖRK, Å.; *Numerical Methods*. Dover Publications, Inc. (2003).
- DEMAILLY, D.; *Étude du comportement Non-Linéaire dans le Domaine Fréquentielle: Application à la Dynamique Rotor*. Tese de doutorado pela École Centrale de Lyon. (2003).
- DE PAULA, A.; *Caos em Sistemas Mecânicos: Análise Experimental em um Pêndulo Não-linear*. Projeto de fim de curso, Universidade Federal do Rio de Janeiro. (2005).
- EDWARDS, S., LEES, A. W., FRISWELL, M. I.; *The influence of torsion on rotor/stator contact in rotating machinery*. Journal of Sound and Vibration (1999) 225(4), 767-778.
- FENG, Z. C., ZHANG, X.-Z.; *Rubbing phenomena in rotor-stator contact*. Chaos, Solitons and Fractals 14 (2002) 257–267.
- GROLET, A., THOUVEREZ, F.; *Vibration analysis of a nonlinear system with cyclic symmetry*. Preprint submitted to Elsevier April 8, (2010).
- GU, R. J., SHILLOR, M.; *Thermal and wear analysis of an elastic beam in sliding contact*. International Journal of Solids and Structures 38 (2001) 2323-2333.
- HALL, L. D., MBA, D.; *Diagnosis of continuous rotor-stator rubbing in large scale turbine units using acoustic emissions*. Ultrasonics 41 (2004) 765–773.
- KEOGH, P. S.; *Contact dynamic phenomena in rotating machines: Active/passive considerations*. Mechanical Systems and Signal Processing 29 (2012) 19–33.
- LESAFFRE, N., SINOUE, J.-J., THOUVEREZ, F.; *Contact analysis of a flexible bladed-rotor*. European Journal of Mechanics A/Solids 26 (2007a) 541–557.
- LESAFFRE, N.; *Stabilité et Analyse Non-linéaire du Contact Rotor-Stator*. Tese de doutorado pela École Centrale de Lyon. (2007b).
- LU, Q.-S., LI, Q.-H., TWIZELL, E. H.; *The existence of periodic motions in rub-impact rotor systems*. Journal of Sound and Vibration 264 (2003) 1127–1137.

- MÜLLER, P. C.; *Calculation of Lyapunov Exponents for Dynamic Systems with Discontinuities*. Chaos, Solitons & Fractals Vol. 5, No. 9, pp. 1671-1681, (1995).
- MUSZYNSKA, A., GOLDMAN, P.; *Chaotic responses of unbalanced rotor/bearing/stator systems with looseness or rubs*. Chaos, Solitons & Fractals Vol. 5, No. 9, pp. 1683-1704, (1995).
- PATEL, T. H., DARPE, A. K.; *Vibration response of a cracked rotor in presence of rotor-stator rub*. Journal of Sound and Vibration 317 (2008) 841–865.
- POPPRATH, S., ECKER, H.; *Nonlinear dynamics of a rotor contacting an elastically suspended stator*. Journal of Sound and Vibration 308 (2007) 767–784.
- QINGHUA, H., SIER, D., HONGFEI, T.; *A 5-DOF model for aeroengine spindle dual-rotor system analysis*. Chinese Journal of Aeronautics 24 (2011) 224-234.
- DIVENYI, S.; *Investigações Experimentais e Numéricas da Dinâmica Linear e Caos em Sistemas Não-Suaves*. Projeto de fim de curso, Universidade Federal do Rio de Janeiro. (2006).
- DIVENYI, S., SAVI, M., WEBER, H., FRANCA, L. F.; *Experimental investigation of an oscillator with discontinuous support considering different system aspects*. Chaos, Solitons & Fractals, Volume 38, Issue 3, (685-695). (2008).
- SHANG, Z., JIANG, J., HONG, L.; *The global responses characteristics of a rotor/stator rubbing system with dry friction effects*. Journal of Sound and Vibration 330 (2011) 2150–2160.
- SINOUE, J.-J.; *Non-linear dynamics and contacts of an unbalanced flexible rotor supported on ball bearings*. Mechanism and Machine Theory 44 (2009) 1713–1732.
- SINOUE, J.-J., THOUVEREZ, F., JEZEQUEL, L.; *Non-linear stability analysis of a complex rotor/stator contact system*. Journal of Sound and Vibration 278 (2004) 1095–1129.
- WRIGGERS, P.; *Computational Contact Mechanics*. John Wiley & Sons, Ltd. (2002). ISBN - 0-471-49680-4.