

Sobre os Efeitos da Não-Comutatividade na Gravidade Entrópica

Carolina Matté Gregory

Orientador: Aleksandr Nikolaievich Pinzul

Instituto de Física - UnB

Dissertação de Mestrado

22 de abril de 2013

Resumo

Neste trabalho, analisamos a questão de possíveis correções quânticas no cenário entrópico da gravidade emergente. A geometria não-comutativa tem sido frequentemente usada para simular efeitos da gravidade quântica nas últimas décadas. Usamos aqui uma esfera fuzzy como uma aproximação quasiclássica para uma superfície holográfica esférica e então analisamos se há, a princípio, uma chance de observarmos correções quânticas para a lei da gravitação de Newton. Nosso método leva em consideração o cálculo do espectro do operador de Dirac associado à esfera não-comutativa e, utilizando técnicas de geometria espectral, nós obtemos a área da esfera fuzzy. Dada a área dessa superfície, deveria ser possível relacioná-la com a entropia do sistema e comparar esse resultado a outros obtidos utilizando diferentes técnicas. O maior resultado de nossa análise é que, sem ter completo conhecimento sobre a dinâmica quântica e sobre os graus de liberdade microscópicos do sistema, qualquer correção entrópica encontrada na escala de Planck será completamente mascarada por nossa ignorância sobre os processos de medida. Por outro lado, nos parece possível que as correções obtidas através das teorias de perturbação sejam confiáveis em escalas bem abaixo da escala de Planck.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, ao Professor Aleksandr Nikolaievich Pinzul, meu orientador, por toda a dedicação, apoio e paciência durante todo o processo de desenvolvimento desta pesquisa. Gostaria de agradecer também por todas as ideias, discussões e referências, que ajudaram não somente na pesquisa, mas me tornaram uma física melhor.

À minha família, por toda a atenção, apoio e incentivo; e a todos os meus amigos, que também me ajudaram a manter a sanidade. Em especial ao Igor, pela amizade, carinho e companhia, me fazendo em todos esses anos, mesmo em momentos de turbulência, uma pessoa muito feliz. Agradecer a alguns por ajudas mais práticas, como o Igor, minha mãe e irmão, que chegaram a me emprestar seus computadores na fase de finalização deste texto, e mais uma vez ao meu irmão pela paciência em me ajudar a corrigir erros gramaticais.

Aos demais professores e colegas do Instituto de Física da UnB, por todas as conversas, discussões físicas, descontrações e palavras de incentivo. Em especial aos professores do grupo de Física Matemática e meus amigos e colegas de sala.

Ao CNPq, pelo auxílio financeiro, sem o qual a produção desse trabalho seria inviável.

Sumário

1	Resumo	1
2	Agradecimentos	1
1	Introdução	3
2	Não-Comutatividade	6
2.1	Estrutura Quântica do Espaço-Tempo na Escala de Planck	6
2.1.1	Relações de Incerteza no Espaço-Tempo	7
2.2	Condições Quânticas e Emergência da Estrutura do Espaço-Tempo	13
3	Gravidade Entrópica	25
3.1	Sobre a Origem da Gravidade e as Leis de Newton - Revisão	25
3.1.1	Introdução	25
3.1.2	Força Entrópica	26
3.1.3	A Força Gravitacional de Newton	27
3.2	Correções para a Lei de Newton	29
4	Esfera Fuzzy	33
4.1	A Álgebra de uma Esfera Fuzzy	33
4.2	O Operador de Dirac da Esfera Fuzzy	34

5	Geometria Espectral: o Teorema de Weyl e o Seu Uso	41
5.1	Calculando a Dimensão e a Área de uma Esfera S_2	42
5.2	Calculando a Área de um Torus n-Dimensional	43
5.3	O Operador de Dirac para a Esfera S_2	45
5.4	O Caso Não-Comutativo: a Esfera Fuzzy	45
5.5	Limite Comutativo, $N \rightarrow \infty$	47
5.6	Caso de Não-Comutatividade Fraca	48
5.7	Não-Comutatividade Forte	50
6	Discussões e Conclusões	53
6.1	Discussão e Interpretação	53
6.2	Resumo e Conclusões	55
A	Informações Adicionais para o Teorema 2.2.1	57
B	O Efeito Unruh	59
C	Teorema de Weyl	68
D	Fórmula de Lichnerowics	70
	Referências	72

Capítulo 1

Introdução

A unificação da Teoria da Gravidade com a Teoria Quântica tem sido um grande desafio há pelo menos meio século. As duas maiores candidatas para a teoria da Gravidade Quântica (GQ), Teoria de (Super)Cordas ([1],[2]) e Loop Quantum Gravity (LQG) [3], apesar do progresso, ainda não são capazes de responder todas as perguntas (a simples existência de duas teorias tão diferentes de GQ significa que o problema está longe de ser resolvido). Assim, qualquer esforço nessa direção é bem-vindo. Em particular, dado um modelo para a GQ, é muito importante entender como o limite clássico da Relatividade Geral (RG) de Einstein aparece, assim como aprender como calcular possíveis correções quântico-gravitacionais.

No que diz respeito ao limite clássico, a Gravidade Entrópica [4], recentemente proposta, pode se tornar bastante importante. Neste modelo, E. Verlinde propõe que a gravidade, ao invés de ser uma força fundamental, tem uma origem emergente, entrópica. De maneira grosseira, a força gravitacional pode ser pensada como consequência da mudança da entropia de um sistema - superfície holográfica mais uma massa de prova. Sob algumas condições, esse modelo leva à RG clássica para uma dinâmica quântica bastante geral. Por exemplo, em [5], vemos que é possível, partindo dessa mesma abordagem, chegar à lei de Newton no cenário da LQG. Devido a essa universalidade, a questão das correções quântico-gravitacionais se torna bastante relevante, e a esperança é que isso eventualmente nos leve a diferenciar diferentes modelos de GQ. Nesse sentido, a observação seguinte é de grande importância [6]: independente de detalhes específicos da teoria final da GQ, o regime

quasi-clássico, i.e., quando a escala de energia está próxima da escala de Planck, deve ser descrito por uma teoria de campos em um espaço-tempo não-comutativo, e este deve capturar alguns dos efeitos não-perturbativos da GQ.

O objetivo maior dessa tese é analisar os possíveis efeitos da não-comutatividade na gravidade entrópica. Desde da publicação da teoria, o cenário entrópico gerou uma série de comentários e críticas. Uma das maiores objeções é de que o resultado obtido é consequência de uma análise dimensional e não de uma física fundamental (isso se aplica em especial para a lei de Newton). Isso faz com que a análise do processo de interação entre a partícula com a superfície holográfica, i.e., como a partícula se torna parte da superfície seja muito importante. Do nosso ponto de vista, esse é o ponto onde se encontram os maiores problemas do modelo em questão: uma superfície holográfica bem definida, uma esfera, como modelo, adequado para o limite da RG, é muito restritivo se tentamos ir além da aproximação clássica. Levando em conta a observação sobre a universalidade da não-comutatividade na GQ, nós consideramos uma esfera fuzzy como candidata natural para a superfície holográfica, de maneira a induzir uma origem quântica-gravitacional.

Uma vez que uma resposta detalhada para a pergunta acima depende profundamente do conhecimento sobre a dinâmica quântica dos graus de liberdade microscópicos de um sistema, nós estaremos interessados em um problema menos ambicioso: como a partícula de teste “enxerga” a superfície holográfica dada por uma esfera fuzzy? Como maior ferramenta de nossa análise, utilizaremos-nos de métodos de geometria espectral.

O plano para esta dissertação é o seguinte:

No primeiro capítulo, motivamos a ideia de que o espaço-tempo, na escala de Planck, deve ser pensado como um espaço-tempo não-comutativo. Essencialmente, fazemos uma revisão do chamado formalismo DFR, [6]. Nós relacionamos a não-comutatividade das coordenadas com relações de incerteza *a la* Heisenberg e derivamos alguns resultados úteis.

No segundo capítulo, fazemos uma breve revisão do cenário da Gravidade Entrópica, como proposto por Verlinde [4], além de apresentar alguns progressos recentes nessa direção.

No terceiro capítulo, motivamos nossa escolha de variedade não-comutativa para modelar o problema, a esfera fuzzy, como também damos uma introdução breve às suas propriedades algébricas.

Discutimos também a construção do operador de Dirac para a esfera não-comutativa e seu espectro, que é essencial para a nossa abordagem baseada em geometria espectral.

No quarto capítulo, introduzimos nossa mais importante ferramenta, o teorema de Weyl, aplicando-o a vários casos bem conhecidos, de modo a checar sua validade. Então, o usamos em nossa abordagem como uma definição para a área em um caso de uma geometria generalizada e calculamos a área para a esfera fuzzy em diferentes regimes de não-comutatividade (limite comutativo, não-comutatividade fraca e forte).

No último capítulo, discutimos a interpretação e as aplicações das correções para a área obtidas nos diferentes regimes da gravidade entrópica, assim como as comparamos com outras correções obtidas para a lei de Newton em outros modelos - incluindo um caso mais específico de não-comutatividade. Nossos maiores resultados foram:

1) Para discutir, de fato, correções quânticas próximas da escala de Planck, é necessário saber detalhes a respeito da dinâmica quântica de um sistema. Qualquer tentativa de obter tais correções sem o conhecimento de como a partícula de teste vê a superfície holográfica será destruída pelas incertezas devido à nossa ignorância sobre o processo de medida. Por outro lado, longe da escala de Planck, correções em um formato universal podem ser bem definidas, confirmando sua origem perturbativa.

2) Um ponto relacionado e mais importante: a partícula de teste assume um papel muito importante nesta construção, uma vez que, em princípio, não se pode removê-la do cenário. Nós veremos que, neste regime (mesmo que longe do alcance experimental) partículas de teste diferentes verão a superfície holográfica de maneiras diferentes. Assim, pode-se especular, nesse cenário, sobre uma possível violação do princípio da equivalência pela gravidade quântica.

Concluimos com um sumário e considerações finais.

Capítulo 2

Não-Comutatividade

Esse primeiro capítulo consiste na revisão do artigo [6], onde a estrutura quântica do espaço-tempo é discutida.

2.1 Estrutura Quântica do Espaço-Tempo na Escala de Planck

O que acontece com o espaço-tempo, como uma variedade, quando tentamos analisá-lo na escala da GQ não é claro. Nessa escala, o espaço de Minkowski não parece mais adequado para descrever o espaço-tempo, o que tomaria seu lugar seria um espaço-tempo com uma noção de eventos não muito bem definida.

É importante perceber que o que acontece em escalas tão pequenas poderia nos dar uma ideia do que a gravidade quântica realmente é. Muitas abordagens diferentes foram tomadas levando a diferentes realizações do espaço-tempo e, portanto diferentes limitações na álgebra de funções sobre o mesmo (discutida abaixo).

A proposta aqui é analisar o que acontece à variedade quando tentamos medir algo em uma escala muito pequena, quando a força gravitacional é grande o suficiente. Nós veremos que o espaço-tempo, sob tais condições, terá uma estrutura quântica implicando nas relações de incerteza. Nesse sentido, a impossibilidade de fazer medidas na escala de Planck é, portanto, devido à perda do sentido operacional do ponto no espaço-tempo.

Então, ao invés da álgebra comutativa de funções complexas contínuas $C_0(M)$ desaparecendo no infinito, que é apropriada para grandes escalas em nossa variedade M , nós teremos uma álgebra não-comutativa e um espaço-tempo descrevendo os efeitos da gravidade quântica. Desta maneira, a álgebra deverá ser substituída por uma álgebra não-comutativa \mathcal{E} , e os pontos em M por estados puros em \mathcal{E} .

2.1.1 Relações de Incerteza no Espaço-Tempo

Nossa intenção aqui é ver como a mecânica quântica combinada com a relatividade geral afeta o espaço-tempo de maneira que o espaço como nós conhecemos deixará de existir.

Tome uma medida de distância com precisão a . Essa medida causa uma incerteza no momento da ordem de $\frac{1}{a}$ (note que aqui estamos usando unidades naturais, i.e., $\hbar = c = G = 1$). Nós também podemos concluir que, devido a essa medida, a energia terá incerteza da ordem de $\frac{1}{a}$. A essa energia, há um tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$ associado gerando um campo gravitacional, que pode ser recuperado através das equações de Einstein para a métrica $g_{\mu\nu}$.

Quanto menor a incerteza Δx_μ fica, mais forte o campo gravitacional se torna. Esse procedimento poderia levar à situação onde o campo gravitacional na região é grande o suficiente a ponto de fazer com que a luz, ou qualquer outra informação, fique presa dentro dela, i.e., um buraco negro será formado. Neste ponto, nós podemos dizer que não há sentido operacional na localização da informação. Então, a questão a ser respondida é: qual a restrição na precisão de uma medida no espaço-tempo?

Para formular o problema, nós usaremos estados coerentes para modelar campos escalares livres neutros localizados. Para qualquer f , nós definimos

$$\Phi = e^{i\phi(f)}\Omega, \tag{2.1}$$

onde Ω é o estado de vácuo, e o operador $\phi(f)$ é dado por

$$\phi(f) := \int f(x)\phi(x)d^4x, \tag{2.2}$$

tal que, assumindo a relação de comutação entre os operadores de criação e aniquilação como

$[a_k^\dagger, a_{k'}] = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')$, nós temos

$$[a_k, \phi(f)] = f_k, \quad (2.3)$$

e

$$\phi(x) = \int (e^{ikx} a_k^\dagger + e^{-ikx} a_k) d^3k. \quad (2.4)$$

que tem como relações de comutação

$$[a_k, \phi(x)] = e^{ikx}, \quad (2.5)$$

e um análogo para a_k^\dagger que explica a equação (2.3).

A função f é real e suave com um suporte compacto onde o estado é localizado. Essa função precisa ser tal que Φ seja significativamente diferente de Ω na região Δx_μ do suporte de f . Gostaríamos também que ao ser transladado para fora da região de suporte de f , o estado também se torne significativamente diferente e essa condição pode ser expressa por

$$|(\Phi, P_\mu \Phi)| \geq (\Delta x_\mu)^{-1}. \quad (2.6)$$

O tensor energia-momento esperado para o estado dado é

$$t_{\mu\nu}(x; f) = (\Phi, : T_{\mu\nu}(x) : \Phi) \quad (2.7)$$

onde $: T_{\mu\nu} :$ é a forma normal da densidade de energia-momento, i.e.,

$$: T_{\mu\nu}(x) : = T_{\mu\nu}(x) - (\Omega, T_{\mu\nu}(x) \Omega). \quad (2.8)$$

Note que $T_{\mu\nu}$ pode ser obtido através da ação, i.e.,

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \\ &= \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde \mathcal{L} é a Lagrangeana do sistema, dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\lambda \varphi \partial^\lambda \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2. \quad (2.10)$$

De forma que

$$T_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \varphi(x) \partial_\nu \varphi(x) + \frac{1}{2} \left(m^2 \varphi(x)^2 - \partial_\lambda \varphi(x) \partial^\lambda \varphi(x) \right) g_{\mu\nu}. \quad (2.11)$$

O tensor de densidade de energia-momento coincide com o obtido de uma solução ψ_f da equação de Klein-Gordon, i.e., $(\square + m^2)\psi_f = 0$, usando (2.11) em teoria clássica de campos. Aqui

$$\psi_f(x) = \text{Im} \int_{\Omega_m^+} e^{-ikx} \hat{f}(k) d\Omega_m(k), \quad (2.12)$$

onde $d\Omega_m$ é a medida invariante da massa de energia positiva m hiperbólica Ω_m^+ e pode ser escrita como

$$\begin{aligned} d\Omega_m(k) &= \theta(k_0) \delta(k^2 - m^2) d^4k \\ &= \frac{\theta(k_0)}{\sqrt{k^2 + m^2}} d^3k, \end{aligned} \quad (2.13)$$

e f_k é a transformação de Fourier inversa, dada por

$$f_k = \int e^{iky} f(y) d^4y.$$

Então podemos reescrever a equação (2.12) como

$$\psi_f(x) = \int \Delta_m(x - y) f(y) d^4y, \quad (2.14)$$

onde Δ_m é a função de comutação para o campo escalar livre de massa m , i.e. $(\Omega, [\phi(x), \phi(y)]\Omega) = i\Delta_m(x - y)$, dada por

$$\Delta_m(x - y) = \int \frac{e^{ik(x-y)}}{\sqrt{k^2 + m^2}} d^3k \quad (2.15)$$

Logo ψ_f deve ser localizada em um certo tempo com precisão Δx_i como Φ . E por (2.14), ψ_f não pode ser uma solução de energia positiva, uma vez que f assume valores que diferem de zero somente na vizinhança do ponto. Ainda, ψ_f tem a mesma energia esperada que o campo Φ , i.e.,

$$(\psi_f, h\psi_f) = (\Phi, H\Phi), \quad (2.16)$$

onde h é a Hamiltoniana de uma partícula

$$h = \int a_k^\dagger a_k \sqrt{k^2 + m^2} d^3k, \quad (2.17)$$

enquanto H é a Hamiltoniana do campo livre. Então fica claro que o nosso problema sobre a estrutura do espaço-tempo é equivalente àquele que lida somente com funções de onda, e que pode

ser resolvido se substituirmos $T_{\mu\nu}$ na equação de Einstein $G_{\mu\nu}$. Ao invés de resolver o problema, o que é proposto em [6], é um ansatz para as relações de incerteza respeitadas pelo espaço-tempo

$$\Delta x_0 \sum_{j=1}^3 \Delta x_j \gtrsim \lambda_P^2 \quad (2.18)$$

$$\sum_{j<k=1}^3 \Delta x_j \Delta x_k \gtrsim \lambda_P^2, \quad (2.19)$$

que será motivado heurísticamente. Para tanto, utilizaremos as equações de Einstein linearizadas, que relembremos brevemente.

Essas equações advêm de uma aproximação para um campo fraco, i.e., quando a métrica pode ser escrita como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.20)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e $h_{\mu\nu}$ alguma perturbação tal que $|h| \ll 1$. Expandindo as equações de campo em potências de $h_{\mu\nu}$ nesse sistema de coordenadas e mantendo somente os termos lineares, nós obtemos uma teoria da gravidade linearizada, para a qual nós temos

- Coeficientes de Conexão:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \equiv \frac{1}{2}(h_{\alpha}{}^{\mu}{}_{,\beta} + h_{\beta}{}^{\mu}{}_{,\alpha} - h_{\alpha\beta}{}^{,\mu}); \quad (2.21)$$

- Tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\nu\alpha} + h_{\nu}{}^{\alpha}{}_{,\mu\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - h_{\alpha}{}^{\alpha}{}_{,\mu\nu}); \quad (2.22)$$

- Escalar de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.23)$$

Todos os índices foram abaixados e levantados usando $\eta_{\mu\nu}$.

Usando essas expressões, construímos o tensor de Einstein, $G_{\mu\nu}$, tal que

$$\begin{aligned} 2G_{\mu\nu} &= 2(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) \\ &= h_{\mu\alpha,\nu}{}^{\alpha} + h_{\nu\alpha,\mu}{}^{\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}(h_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta} - h_{,\beta}{}^{\beta}) \\ &= 16\pi T_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde h é o traço da parte da métrica que diz respeito à perturbação.

Defina

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h. \quad (2.25)$$

e adote um calibre onde

$$\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0, \quad (2.26)$$

de modo que

$$-\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^\alpha = 16\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.27)$$

As equações (2.20), (2.25), (2.26) e (2.27) são as equações mais importantes da teoria da gravidade linearizada. A equação (2.26) é chamada de calibre de Lorentz.

Pela definição da função de Green, nós temos

$$\square G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')\delta(t - t'), \quad (2.28)$$

para a qual a solução da parte espacial é dada por

$$G(x, x') = \frac{1}{|x - x'|}. \quad (2.29)$$

Aplicando esta para (2.27), conseguimos recuperar a solução retardada para $\bar{h}_{\mu\nu}(\vec{x}, t)$, tal que

$$\bar{h}_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = \int \frac{4T_{\mu\nu}(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'. \quad (2.30)$$

No nosso caso, estamos interessados na energia, i.e., T_{00} , de maneira que possamos negligenciar termos onde $(\mu, \nu) \neq (0, 0)$. Daqui, a métrica, modificada por (2.25), fica dada por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}, \quad (2.31)$$

o que implica em

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \\ &= \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \bar{h}_{00}(dx^0)^2 - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \bar{h}_0^0 \\ &= -\left(1 - \frac{\bar{h}_{00}}{2}\right)(dx^0)^2 + \left(1 + \frac{\bar{h}_{00}}{2}\right)(dx^i)^2. \end{aligned} \quad (2.32)$$

De (2.30), nós temos \bar{h}_{00} dada por

$$\bar{h}_{00}(\vec{x}, t) = \int \frac{4T_{00}(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x',$$

onde T_{00} é a densidade de energia, que pode ser pensada com a densidade de massa ρ no espaço, e $|\vec{x} - \vec{x}'|$ é o raio que contém essa massa. considerando também o caso onde $v \ll c$, i.e., o limite não relativístico e onde nós temos uma massa que pode ser considerada como localizada em um ponto, nós vemos que

$$\bar{h}_{00} = 4\frac{M}{r}$$

onde podemos identificar $\phi = -\frac{M}{r}$ como o potencial newtoniano, tal que, de volta à equação (2.32), sejamos capazes de recuperar a solução pra a métrica correspondente ao exterior de um corpo estático esfericamente simétrico, i.e.,

$$ds^2 = -(1 + 2\phi)(dx^0)^2 + (1 - 2\phi)(dx^i)^2. \quad (2.33)$$

Voltando ao nosso problema, se Δx_0 é muito pequeno, temos $E \sim \frac{1}{\Delta x_0}$ que é distribuído com uma densidade constante $\rho(-t)$ no tempo negativo $x_0 = -t$, i.e., no passado, sobre um volume cúbico com lados $\Delta x_1 + t$, $\Delta x_2 + t$, $\Delta x_3 + t$, que é a nossa configuração no referencial retardado. Então consideramos sua energia como concentrada em torno da origem em $x_0 = 0$ em um volume dado por Δx_1 , Δx_2 e Δx_3 .

Relembrado como calcular o potencial ϕ para uma distribuição de energia, pela equação 2.30, temos

$$\phi = - \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x', \quad (2.34)$$

onde $\rho = \frac{E}{V}$, E e dado por $E \sim \frac{1}{\Delta x_0}$, o volume é dado por $(\Delta x_1 + r)(\Delta x_2 + r)(\Delta x_3 + r)$ em $t = -|\vec{x}'|$ e a parte angular da integral é simétrica e contribui somente por um fator numérico nas coordenadas esféricas, de modo que o potencial retardado se torna

$$\phi \sim -\frac{1}{\Delta x_0} \int \frac{1}{r} \frac{r^2 dr}{(\Delta x_1 + r)(\Delta x_2 + r)(\Delta x_3 + r)} \quad (2.35)$$

Aqui usamos a condição para o potencial onde $E + \phi E \leq 0$, onde E é a energia associada à massa, i.e., no limite onde o potencial está próximo de criar um buraco negro, de modo que a condição $\phi \leq -1$ valha. Assim, a equação pode ser analisada em três diferentes regimes, quando

1. $\Delta x_1 \sim \Delta x_2 \sim \Delta x_3$, tal que nossa integral se torne

$$\frac{1}{\Delta x_0} \int_0^\infty \frac{r}{(\Delta x_1 + r)^3} dr = \frac{1}{\Delta x_0} \frac{1}{2\Delta x_1} \quad (2.36)$$

que nos dá $\Delta x_0 \Delta x_1 \gtrsim 1$;

2. $\Delta x_1 \sim \Delta x_2 \gg \Delta x_3$, então a integral fica

$$\frac{1}{\Delta x_0} \int_0^\infty \frac{1}{(\Delta x_1 + r)^2} dr = \frac{1}{\Delta x_0} \frac{1}{\Delta x_1} \quad (2.37)$$

e também nos dá $\Delta x_0 \Delta x_1 \gtrsim 1$;

3. $\Delta x_1 \gg \Delta x_2 \sim \Delta x_3$,

$$\frac{1}{\Delta x_0} \int_0^\infty \frac{r dr}{(\Delta x_1 + r)(\Delta x_2 + r)^2} = \frac{1}{\Delta x_0} \frac{\ln \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}}{\Delta x_1} \quad (2.38)$$

onde nós obtemos $\Delta x_0 \Delta x_1 \gtrsim \ln \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}$. No limite onde $\ln \left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} \right) \sim 1$, nós recuperamos a condição dos dois primeiros casos.

Assim, as equações (2.18) e (2.19) ficam motivadas. Concluimos então que (2.18) é a relação de incerteza entre Δx_0 e Δx_j . É interessante notar que, no caso onde $\Delta x_j \ll \Delta x_0$ nós precisamos tomar $E \sim \frac{1}{\Delta x_j}$ de modo a recuperar (2.19) como uma condição.

2.2 Condições Quânticas e Emergência da Estrutura do Espaço-Tempo

Nessa seção, apresentaremos uma solução para as equações (2.18) e (2.19) em forma de uma álgebra não-comutativa.

Sejam A_1, A_2, \dots, A_n elementos de uma álgebra complexa, pode-se medir sua não-comutatividade pela quantidade

$$\begin{aligned} [A_1, \dots, A_n] &\equiv \sum \epsilon_{i_1 \dots i_n} A_{i_1} \dots A_{i_n} \\ &= \det \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_1 & \dots & A_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Quando $n = 4$, podemos pensar nos operadores como descrevendo as coordenadas no espaço-tempo quântico, q_0, q_1, q_2 e q_3 , formando um vetor de Lorentz. Definimos

$$iQ_{\mu\nu} = [q_\mu, q_\nu], \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (2.40)$$

a anti-simetria de ϵ gera

$$[q_0, q_1, q_2, q_3] = \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} q_\mu q_\nu q_\lambda q_\rho = -\frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} Q_{\mu\nu} Q_{\lambda\rho},$$

fazendo com que

$$(*Q)^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} Q_{\lambda\rho}$$

de modo que

$$[q_0, \dots, q_3] = -\frac{1}{2} Q_{\mu\nu} (*Q)^{\mu\nu} \quad (2.41)$$

Denotando a componente “elétrica” Q por \vec{e} e a componente “magnética” por \vec{m} , temos

$$\begin{aligned} Q_{0j} &= e_j = (*Q)^{lk}, \\ Q_{lk} &= m_j = (*Q)^{0j}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

para $(j, l, k) = (1, 2, 3)$ ou permutações cíclicas. Podemos então construir invariantes de Lorentz com os tensores $Q_{\mu\nu}$, como

$$\frac{1}{2} Q_{\mu\nu} Q^{\mu\nu} = \vec{m}^2 - \vec{e}^2, \quad (2.43)$$

$$\frac{1}{2} Q_{\mu\nu} (*Q)^{\mu\nu} = -[q_0, \dots, q_3] = \vec{e} \cdot \vec{m} + \vec{m} \cdot \vec{e}. \quad (2.44)$$

Essas expressões são invariantes sob transformações de Poincaré

$$q \rightarrow \Lambda q + a \cdot I,$$

onde $a \in \mathbb{R}^4$ e $\Lambda \in L_+^\uparrow$, i.e., matrizes de determinante igual a 1 e primeira entrada positiva, e I é o operador identidade.

É sugerido que as condições naturais, invariantes de Lorentz e simétricas em \vec{e} e \vec{m} , sejam as seguintes

$$\begin{aligned} Q_{\mu\nu} Q^{\mu\nu} &= 0, \\ \frac{1}{4} [q_0, q_1, q_2, q_3]^2 &= I. \end{aligned} \quad (2.45)$$

onde q_0, q_1, q_2 e q_3 serão assumidos como operadores auto-adjuntos agindo em um espaço de Hilbert \mathcal{H} , e operadores $-i[q_\mu, q_\nu]$ com fechos auto-adjuntos $Q_{\mu\nu}$. O operador I na segunda equação representa uma escolha de escala e poderia, em princípio, ser trocado para outros propósitos, como feito em [7].

Assumindo as condições (2.45), podemos recuperar as relações de incerteza (2.18) e (2.19). Levando em consideração que $Q_{\mu\nu}$ é central, i.e., que o comutador de duas coordenadas gera o operador $Q_{\mu\nu}$ que comuta com todos os outros elementos da álgebra, temos

$$[q_\lambda, Q_{\mu\nu}] = 0; \quad \lambda, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (2.46)$$

Chamamos eq. (2.45) e eq. (2.46) de *Condições Quânticas*.

Para a definição de um estado vetorial, nós diremos que, para cada operador A em \mathcal{H} e um vetor unitário $x \in \mathcal{H}$, o estado vetorial $\omega = \omega_x$ está no domínio de A se $x \in \mathcal{D}_A$, de modo que

$$\omega(A^2) \equiv (Ax, Ax) < \infty. \quad (2.47)$$

A incerteza $\Delta_\omega A$ associada a esse estado vetorial é definida por

$$\begin{aligned} (\Delta_\omega A)^2 &= \omega((A - \omega(A) \cdot I)^2) \\ &= \omega(A^2) - \omega(A)^2. \end{aligned} \quad (2.48)$$

ω é dito por ser definido em A se e somente se $\Delta_\omega A = 0$, i.e, quando x é um autovetor de A .

Teorema 2.2.1. *Sejam os quatro operadores de coordenadas auto-adjuntos q_0, \dots, q_3 que satisfazem as condições quânticas (2.45) e (2.46). Para cada estado ω no domínio de $[q_\mu, q_\nu]$, nós temos*

$$\Delta_\omega q_0 \sum_{j=1}^3 \Delta_\omega q_j \geq \frac{1}{2} \quad (2.49)$$

$$\sum_{1 \leq j \leq k \leq 3} \Delta_\omega q_j \Delta_\omega q_k \geq \frac{1}{2} \quad (2.50)$$

Este teorema terá sua prova feita mais facilmente após enunciarmos algumas proposições.

Proposição 2.2.2. *Seja q_0, \dots, q_3 satisfazendo (2.45) e ω um estado no domínio de $[q_\mu, q_\nu]$'s, que é definido em $[q_0, q_1, q_2, q_3]$. Então*

$$\Delta_\omega q_0 \cdot \sum_{j=1}^3 \Delta_\omega q_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \Delta_\omega e_j \geq \frac{1}{2} e \quad (2.51)$$

$$\sum_{1 \leq j \leq k \leq 3} \Delta_\omega q_j \Delta_\omega q_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \Delta_\omega m_j \geq \frac{1}{2} \quad (2.52)$$

Demonstração. Se A, B, C são operadores auto-adjuntos tal que $[A, B]^- = iC$, então para cada estado ω no domínio de $[A, B]$ nós temos, da definição de $\Delta_\omega C$,

$$\omega(C^2) = \omega(C)^2 + (\Delta_\omega(C))^2 \leq (2\Delta_\omega(A) \cdot \Delta_\omega(B))^2 + (\Delta_\omega C)^2.$$

Fazendo $C = Q_{\mu\nu}$, de modo que

$$\omega(Q_{\mu\nu}^2) \leq (2\Delta_\omega q_\mu \Delta_\omega q_\nu)^2 + (\Delta_\omega Q_{\mu\nu})^2.$$

Agora podemos dividir nossa equação em duas, uma delas com um dos índices com a coordenada temporal e outro com uma coordenada espacial, digamos $\mu = 0$ e $\nu = j$; e na outra nós consideramos ambos os índices como coordenadas espaciais, digamos $\mu = l$ e $\nu = k$.

Começando pelo primeiro caso, para $\mu = 0$ e $\nu = j$, temos

$$\omega(e_j^2) \leq (2\Delta_\omega q_0 \Delta_\omega q_j)^2 + (\Delta_\omega e_j)^2.$$

Por desigualdade triangular, sabemos que números positivos elevados ao quadrado e somados serão sempre menores que a soma desses números positivos elevados ao quadrado, então podemos escrever, com uma soma sobre o índice j em ambos os lados, a seguinte expressão

$$\omega(\bar{e}^2) \leq (2\Delta_\omega q_0 \sum_{j=1}^3 \Delta_\omega q_j)^2 + (\sum_{j=1}^3 \Delta_\omega e_j)^2,$$

que, pelo mesmo argumento, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \omega(\bar{e}^2) &\leq (2\Delta_\omega q_0 \sum_{j=1}^3 \Delta_\omega q_j + \sum_{j=1}^3 \Delta_\omega e_j)^2 \\ \frac{1}{2} \sqrt{\omega(\bar{e}^2)} &\leq \Delta_\omega q_0 \sum_{j=1}^3 \Delta_\omega q_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \Delta_\omega e_j. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Da mesma maneira, para o segundo caso, onde $\mu = l$ e $\nu = k$, somado sobre l e k , e trocando l por k depois da soma, como são todos índices mudos, nós temos

$$\frac{1}{2}\sqrt{\omega(\vec{m}^2)} \leq \sum_{1 \leq j < k \leq 3} \Delta_\omega q_j \Delta_\omega q_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \Delta_\omega m_j. \quad (2.54)$$

Da equação (2.45), sabemos que

$$\omega([q_0, q_1, q_2, q_3]^2) = \omega(4), \quad (2.55)$$

mas como

$$\Delta_\omega([q_0, q_1, q_2, q_3]^2) = 0,$$

e da definição dada na equação (2.48), a equação (2.55) se torna

$$\begin{aligned} \omega([q_0, q_1, q_2, q_3]^2) &= 4 \\ \omega([q_0, q_1, q_2, q_3]) &= \pm 2. \end{aligned}$$

Pela equação (2.44) podemos ver que

$$\omega([q_0, q_1, q_2, q_3]) = 2Re(\vec{e} \cdot \vec{m}) = \pm 2,$$

assim $|\omega(\vec{e} \cdot \vec{m})| \geq 1$, e pela desigualdade de Schwarz

$$\begin{aligned} |\omega(\vec{e} \cdot \vec{m})| &\leq \sum_{j=1}^3 \sqrt{\omega(e_j^2)\omega(m_j^2)} \\ &\leq \left(\sum_j \omega(e_j^2) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_j \omega(m_j^2) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Então encontramos que

$$\omega(\vec{e}^2) \cdot \omega(\vec{m}^2) \geq 1.$$

Lembrando que $Q_{\mu\nu}Q^{\mu\nu} = 2(\vec{m}^2 - \vec{e}^2)$ e também, pelas condições naturais, que $Q_{\mu\nu}Q^{\mu\nu} = 0$, nós temos $\vec{m}^2 = \vec{e}^2$, e portanto

$$\omega(\vec{e}^2) \geq 1 \quad \text{e} \quad \omega(\vec{m}^2) \geq 1. \quad (2.56)$$

Aplicando esses resultados para as equações (2.53) e (2.54), nós recuperamos as equações (2.51) e (2.52) respectivamente. \square

Proposição 2.2.3. *Seja \mathfrak{A} uma C^* -álgebra com unidade I e ν uma medida de probabilidade (regular) no estado espacial $\mathcal{S}(\mathfrak{A})$ com baricentro $\omega \in \mathcal{S}(\mathfrak{A})$, i.e.,*

$$\omega(A) = \int_{\mathcal{S}(\mathfrak{A})} \phi(A) d\nu(\phi), \quad A \in \mathfrak{A}. \quad (2.57)$$

Para qualquer elemento auto-adjunto $A, B \in \mathfrak{A}$ nós temos

$$\Delta_\omega(A) \geq \int_{\mathcal{S}(\mathfrak{A})} \Delta_\phi(A) d\nu(\phi), \quad (2.58)$$

$$\Delta_\omega(A) \cdot \Delta_\omega(B) \geq \int_{\mathcal{S}(\mathfrak{A})} \Delta_\phi(A) \Delta_\phi(B) d\nu(\phi). \quad (2.59)$$

Demonstração. Seja $X \in \mathfrak{A}$, $X = X^*$, nos temos, por hipótese, que

$$\Delta_\omega(X)^2 = \omega((X - \omega(X) \cdot I)^2) = \int \varphi((X - \omega(X) \cdot I)^2) d\nu(\varphi).$$

E para cada $\psi \in \mathcal{S}(\mathfrak{A})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ nós temos

$$\begin{aligned} \psi((X - \lambda \cdot I)^2) &= \psi((X - \psi(X) \cdot I)^2) + (\lambda - \psi(X))^2 \\ &\geq \psi((X - \psi(X) \cdot I)^2), \end{aligned}$$

Então

$$\Delta_\omega(X)^2 \geq \int \varphi((X - \varphi(X) \cdot I)^2) d\nu(\varphi),$$

e portanto

$$\Delta_\omega(X)^2 \geq \int (\Delta_\varphi X)^2 d\nu(\varphi). \quad (2.60)$$

Como ν é a medida de probabilidade, podemos manipular a expressão acima de maneira a obter

$$\begin{aligned} \int \Delta_\varphi X d\nu(\varphi) &\leq \left(\int (\Delta_\varphi X)^2 d\nu(\varphi) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \Delta_\omega X, \\ \int \Delta_\varphi A \cdot \Delta_\varphi B d\nu(\varphi) &\leq \left(\int (\Delta_\varphi A)^2 d\nu(\varphi) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int (\Delta_\varphi B)^2 d\nu(\varphi) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \Delta_\omega A \cdot \Delta_\omega B, \end{aligned} \quad (2.61)$$

onde a desigualdade de Schwarz foi usada. □

E finalmente, a prova para o teorema é dado.

Demonstração. Se o estado ω é definido em cada $Q_{\mu\nu}$, então ω é definido em $[q_0, q_1, q_2, q_3]$ e então $\Delta_\omega(e_j) = \Delta_\omega(m_j) = 0$, e portanto as equações (2.51) e (2.52) pela preposição (2.2.2) se torna (2.49) e (2.50) respectivamente.

Se ω é qualquer estado no domínio de $[q_\mu, q_\nu]$'s, então é suficiente, pela preposição (2.2.3) e pelo apêndice A, escrever ω como o baricentro de uma medida de probabilidade (regular) carregada pelos estados definidos em $Q_{\mu\nu}$'s. \square

Considerando a C^* -álgebra \mathfrak{A} gerada por $f(Q_{\mu\nu})$ e $g(q_\mu)$, com $f, g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, $f(Q_{\mu\nu})$ estarão em seu centro, uma vez que $Q_{\mu\nu}$ são centrais. E para cada estado ω em \mathfrak{A} no domínio de $[q_\mu, q_\nu]$'s, a decomposição central de ω gerará uma medida regular carregada por estados fatoriais, e, portanto, definidos em $f(Q_{\mu\nu})$ e no domínio de $[q_\mu, q_\nu]$ pelo apêndice A.

Nosso objetivo agora é utilizar todo esse formalismo de modo a gerar um espaço-tempo quântico. Para fazê-lo, vamos considerar as realizações das condições (2.45) e (2.46) como as relações entre operadores no espaço de Hilbert. Os q_μ serão operadores auto-adjuntos tais que $-i[q_\mu, q_\nu]$ possuem fechos auto-adjuntos $Q_{\mu\nu}$ comutando com q_λ . Vamos impor que essas relações de comutação podem ser integradas na *forma de Weyl*:

$$e^{i\alpha_\mu q^\mu} e^{i\beta_\nu q^\nu} = e^{-(i/2)\alpha_\nu Q^{\mu\nu} \beta_\nu} e^{i(\alpha+\beta)_\mu q^\mu}; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^4, \quad (2.62)$$

que serão chamadas realizações *regulares*.

Tomando a mecânica quântica como guia, vamos considerar o espectro dos operadores auto-adjuntos $Q_{\mu\nu}$ tal que, pela equação (2.45),

$$\sigma_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} = 0; \quad \frac{1}{4} \sigma_{\mu\nu} (*\sigma)^{\mu\nu} = \pm 1 \quad (2.63)$$

onde $\sigma_{0j} = e_j$ e $\sigma_{lk} = m_j$, e nós escrevemos $\sigma = (\vec{e}, \vec{m})$, i.e.,

$$\sigma_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ -e_1 & 0 & m_3 & -m_2 \\ -e_2 & -m_3 & 0 & m_1 \\ -e_3 & m_2 & -m_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

Dessas condições, podemos concluir que

$$\vec{e}^2 = \vec{m}^2 ; \quad (\vec{e} \cdot \vec{m})^2 = 1. \quad (2.65)$$

O conjunto Σ é o conjunto de todos σ reais e anti-simétricos, onde $\Sigma = \Sigma_+ \cup \Sigma_-$, tal que

$$\Sigma_{\pm} = \{\sigma = (\vec{e}, \vec{m}) / \vec{e}^2 = \vec{m}^2, \quad \vec{e} \cdot \vec{m} = \pm 1\}. \quad (2.66)$$

E nós podemos introduzir a norma Euclideana em Σ por

$$\|\sigma\|^2 \equiv \frac{1}{2} \sum_{\mu < \nu} \sigma_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{2} (\vec{e}^2 + \vec{m}^2) = \vec{e}^2 = \vec{m}^2.$$

de maneira que $\|\sigma\| \geq 1$ para cada $\sigma \in \Sigma$, e nós definimos a esfera unitária $\Sigma^{(1)}$ e Σ para ser uma variedade compacta

$$\Sigma^{(1)} = \{\sigma \in \Sigma / \|\sigma\| = 1\} = \{\sigma = (\vec{e}, \vec{m}) \in \Sigma / \vec{e} = \pm \vec{m}\} = \Sigma_+^{(1)} \cup \Sigma_-^{(1)},$$

então $\Sigma_{\pm}^{(1)}$ é homeomórfico a S^2 .

Se as equações (2.45) e (2.46) são obedecidas e ω é um estado no domínio de $Q_{\mu\nu}$ então, pelo teorema Espectral, ω define uma medida de probabilidade regular μ_{ω} em Σ tal que

$$\omega(f(Q)) = \int_{\Sigma} f(\sigma) d\mu_{\omega}(\sigma), \quad f \in \mathcal{C}_0(\Sigma). \quad (2.67)$$

Proposição 2.2.4. *De acordo com o teorema 2.2.1, temos*

$$\sum_{\mu} (\Delta_{\omega} q_{\mu})^2 \geq \sqrt{2} \int_{\Sigma} (\|\sigma\|^2 + 1)^{1/2} d\mu_{\omega}(\sigma). \quad (2.68)$$

Demonstração. Pela equação (2.60) é suficiente provar a desigualdade acima para um estado ω puro no centro. A medida μ_{ω} no ponto $\sigma \in \Sigma$ é tal que $|\omega(Q_{\mu\nu})| = |\sigma_{\mu\nu}|$. Seja $q'_{\mu} = \pi_{\omega}(q_{\mu}) - \omega(q_{\mu})$ a diferença entre dois estados. Para $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, base ortonormal em \mathbb{R}^3 , $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$, nós temos as relações de comutação

$$[q'_0, \vec{a} \cdot \vec{q}'] = i\vec{a} \cdot \vec{e} \cdot I, \quad [\vec{a} \cdot \vec{q}', \vec{b} \cdot \vec{q}'] = i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{m} \cdot I.$$

Então

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu} (\Delta_{\omega}(q_{\mu}))^2 &= \omega(q_0'^2 + (\vec{a} \cdot \vec{q}')^2 + (\vec{b} \cdot \vec{q}')^2 + (\vec{c} \cdot \vec{q}')^2) \\
&\geq 2\Delta_{\omega}(q_0') \Delta_{\omega}(\vec{a} \cdot \vec{q}') + 2\Delta_{\omega}(\vec{b} \cdot \vec{q}') \Delta_{\omega}(\vec{c} \cdot \vec{q}') \\
&\geq |\omega([q_0', \vec{a} \cdot \vec{q}'])| + |\omega([\vec{a} \cdot \vec{q}', \vec{b} \cdot \vec{q}'])| \\
&= |\vec{a} \cdot \vec{e}| + |(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{m}| \\
&= |\vec{a} \cdot \vec{e}| + |\vec{a} \cdot \vec{m}| \geq |\vec{a} \cdot (\vec{e} \pm \vec{m})|,
\end{aligned}$$

Para $\sigma \in \Sigma_{\pm}$ respectivamente.

O máximo para esta expressão se dá quando temos $\vec{a} = \frac{\vec{e} \pm \vec{m}}{\|\vec{e} \pm \vec{m}\|}$, portanto

$$\sum_{\mu} (\Delta_{\omega}(q_{\mu}))^2 \geq \|\vec{e} \pm \vec{m}\| = \sqrt{2(\|\vec{e}\|^2 + 1)} = \sqrt{2(\|\sigma\|^2 + 1)},$$

o que também é o máximo para a integral na proposição. \square

Essa proposição nos dá informação sobre a variedade Σ . Ela nos diz que medidas com bastante precisão nas coordenadas q_{μ} nos dão estados ω para os quais μ_{ω} está essencialmente concentrado na esfera unitária $\Sigma^{(1)}$. Se considerarmos o sistema novamente em unidades gerais, $\Sigma^{(1)}$ se torna a esfera dobrada de raio λ_P^2 .

Agora apresentamos alguns resultados na variedade Σ :

- Σ é um espaço homogêneo para a ação do grupo de Lorentz

$$\begin{aligned}
\Lambda \in L, \quad \sigma \in \Sigma \rightarrow \Lambda \sigma \Lambda^T = \sigma' \in \Sigma \\
\sigma'_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\mu'} \Lambda_{\nu}^{\nu'} \sigma_{\mu'\nu'}
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Sob esta ação, Σ_{\pm} são espaços L_+^{\uparrow} -homogêneos e conectados. Se $\vec{e} = \vec{m}$, o estabilizador de $\sigma = (\vec{e}, \vec{m})$ in L_+^{\uparrow} consiste de boosts ao longo de \vec{e} combinado com rotações em torno de \vec{e} . Se $\vec{e} = \vec{m}$ é escolhido como o terceiro eixo, o estabilizador de σ é a imagem do subgrupo D de matrizes diagonais sob o mapa de recobrimento usual $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow L_+^{\uparrow}$. Assim, temos homeomorfismos e isomorfismos de espaços L_+^{\uparrow} -homogêneos

$$\Sigma_+ \sim \Sigma_- \sim SL(2, \mathbb{C})/D. \tag{2.70}$$

- Σ_+ é homeomórfico a TS^2 , o feixe tangente à esfera unitária em \mathbb{R}^3 , de maneira que a esfera S^2 mergulhada em TS^2 é precisamente a esfera unitária $\Sigma_+^{(1)}$. Em particular, S^2 é uma deformação por retração de Σ_+ .

Demonstração. Denote por $\{\vec{n}, \vec{v}\}$ um ponto genérico TS^2 , onde $\vec{n} \in S^2$ é um vetor unitário \mathbb{R}^3 e $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, tal que $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$. Para cada $\sigma \in \Sigma_+$, $\sigma = (\vec{e}, \vec{m})$, onde $\vec{e}^2 = \vec{m}^2$ e $\vec{e} \cdot \vec{m} = 1$, portanto $\vec{e} + \vec{m} \neq 0$. Defina

$$\vec{n}_\sigma := \frac{\vec{e} + \vec{m}}{\|\vec{e} + \vec{m}\|}.$$

Se $\sigma \in \Sigma_+$, $\sigma = (\vec{e}, \vec{m})$, com $\vec{e} = \vec{m}$, seja $h(\sigma) \in TS^2$ definido por

$$h(\sigma) = \{\vec{n}_\sigma, 0\} = \{\vec{e}, 0\} = \{\vec{m}, 0\}. \quad (2.71)$$

Se $\vec{e} \neq \vec{m}$, seja $\vec{u}_\sigma = \vec{e} \times \vec{m} \|\vec{e} \times \vec{m}\|^{-1}$ e L_σ o boost ao longo de \vec{u}_σ com velocidade $\beta > 0$ tal que

$$\vec{e} = \vec{m} = \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}, \quad (2.72)$$

de modo que

$$\begin{aligned} L_\sigma : \quad \Sigma_+ &\longrightarrow \Sigma_+ \\ \sigma' = (\vec{n}_\sigma, \vec{n}_\sigma) &\longmapsto \sigma = (\vec{e}, \vec{m}) \end{aligned}$$

i.e.,

$$L_\sigma \sigma' L_\sigma^T = \sigma. \quad (2.73)$$

Escolhendo $\chi \in [0, \infty)$ tal que $\vec{e}^2 = \vec{m}^2 = \cosh 4\chi$, i.e., $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = \cosh 2\chi$. Então nós definimos o homeomorfismo $h : \sigma \in \Sigma_+ \longrightarrow h(\sigma) \in TS^2$ fazendo

$$h(\sigma) = \{\vec{n}_\sigma, \vec{v}_\sigma\}; \quad \vec{v}_\sigma = \chi \vec{u}_\sigma. \quad (2.74)$$

□

Se Escolhemos $\sigma_0 \in \Sigma_+$ tal que $\sigma_0 = (\vec{e}, \vec{m})$, $\vec{e} = \vec{m} = (0, 1, 0)$, nós temos

$$\sigma_0^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.75)$$

Para um ponto de vista mais físico, podemos pensar a respeito das representações e realizações deste formalismo e álgebra. A realização regular $Q_{\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu} \cdot I$ é dada pelos operadores de Schrödinger em $L^2(\mathbb{R}^2, d^2s) = H$, Q_j iguais à multiplicação por s_j e $P_j = -i\frac{\partial}{\partial s_j}$, com $j = 1, 2$, tais que

$$q_0^{\sigma_0} = P_1, \quad q_1^{\sigma_0} = P_2, \quad q_2^{\sigma_0} = Q_1, \quad q_3^{\sigma_0} = Q_2, \quad (2.76)$$

que é, pelo teorema da unicidade de Neumann, uma transformação de Lorentz (imprópria), q^σ de q^{σ_0} , i.e., $\sigma = \Lambda\sigma_0\Lambda^T$, para algum $\Lambda \in L$.

Uma realização covariante de Poincaré pode ser construída como segue: tomando o complexo conjugado de $x \in H$ e o operador linear A em H , $\bar{x} \in \bar{H}$ e \bar{A} , defina

$$\begin{aligned} \tilde{q}^\sigma &= q^\sigma \otimes I \quad \text{em } H \otimes \bar{H} \\ P_\mu &= -((\sigma^{-1}q^\sigma)_\mu \otimes I + I \otimes (\sigma^{-1}\bar{q}^\sigma)_\mu), \end{aligned} \quad (2.77)$$

onde $P_m u$ pode ser visto como o gerador de translações na representação \mathcal{U}_σ de \mathbb{R}^4 , $\mathcal{U}_\sigma(a) = e^{iP_\mu a^\mu}$, tal que

$$\mathcal{U}_\sigma(a)^{-1} \tilde{q}_\mu^\sigma \mathcal{U}_\sigma(a) = \tilde{q}_\mu^\sigma + a_\mu \cdot I. \quad (2.78)$$

Podemos definir, no espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \int_{\oplus} H \otimes \bar{H} d\Lambda \simeq H \otimes \bar{H} \otimes L^2$, os operadores

$$\begin{aligned} q_\mu &\equiv \int_{\oplus} (\Lambda q^\sigma)_\mu, d\Lambda \quad (2.79) \\ \mathcal{U}(a, I) &\equiv \int_{\oplus} \mathcal{U}(\Lambda^{-1}a) d\Lambda, \quad a \in \mathbb{R}^4, \\ \mathcal{U}(0, \Lambda) &: (\mathcal{U}(0, \Lambda)x)(\Lambda') = x(\Lambda^{-1}\Lambda'), \quad \Lambda, \Lambda' \in L, \quad x \in \mathcal{H}, \\ \mathcal{U}(a, \Lambda) &\equiv \mathcal{U}(a, I)\mathcal{U}(0, \Lambda). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Essa última equação, (2.80), define um representação contínua unitária do grupo de Poincaré completo e uma representação regular onde

$$\mathcal{U}(a, \Lambda)^{-1} q_\mu \mathcal{U}(a, \Lambda) = (\Lambda q)_\mu + a_\mu \cdot I. \quad (2.81)$$

Como uma observação final neste capítulo, vamos analisar o que acontece a este formalismo se mudamos a combinação de operadores centrais $Q_{\mu\nu}$ aparecendo na primeira condição quântica,

pela equação (2.45), para coincidir com os múltiplos da identidade, i.e., $Q_{\mu\nu}Q^{\mu\nu} = 2b \cdot I$ e $(\frac{1}{4}Q_{\mu\nu}(*Q)^{\mu\nu})^2 = (a^2 - b^2) \cdot I$, com $a \geq |b|$. Dessa maneira, para cada estado ω , os números $\eta \equiv \omega(\vec{e}^2)$ e $\gamma \equiv \omega(\vec{m}^2)$ obedecem $\gamma\eta \geq a^2 - b^2$ e $\gamma - \eta = 2b$, e portanto $\eta \geq a - b$ e $\gamma \geq a + b$. O que nos leva a

$$\begin{aligned} \Delta x_0 \sum_{j=1}^3 \Delta x_j &\geq \frac{1}{2}(a - b) \\ \sum_{j < k=1}^3 \Delta x_j \Delta x_k &\geq \frac{1}{2}(a + b), \end{aligned} \tag{2.82}$$

uma forma alternativa para as relações de incerteza.

Capítulo 3

Gravidade Entrópica

3.1 Sobre a Origem da Gravidade e as Leis de Newton - Revisão

Nesta primeira parte do capítulo, nós revisamos o artigo “Sobre a Origem da Gravidade e as Leis de Newton” [4] de Erik Verlinde. Aqui a ideia é mostrar que, partindo de princípios termodinâmicos e do princípio holográfico, a origem da gravidade pode ser vista como entrópica. Desta maneira, em um cenário emergente, a gravidade pode ser pensada como uma força causada por mudanças na informação associada à posição das massas. Ainda neste artigo, Verlinde mostra que, ao assumir o princípio da equivalência para uma generalização relativística, é possível extrair as equações de Einstein, o que não será relevante para esta dissertação.

3.1.1 Introdução

A gravidade foi uma das primeiras forças observadas na natureza e também uma das mais importantes. Ela influencia e é influenciada por absolutamente tudo que possui energia e se relaciona de maneira muito íntima com o espaço-tempo como o conhecemos.

Alguns pensam na gravidade e no espaço-tempo como emergentes e, como estes são universais, isso sugere que a gravidade deveria ser descrita não por detalhes microscópicos, mas de considerações macroscópicas, que, por sua vez, sugere que a entropia deve ter um papel especial, de maneira que a mudança dessa quando há um deslocamento de massa poderia nos mostrar como a gravidade se

comporta.

Assumindo que o espaço-tempo obedece o princípio holográfico, i.e., que toda a informação a respeito de um sistema pode ser armazenado em forma de dados em uma superfície fechada que engloba o sistema, conseguimos obter algumas propriedades interessantes. Um exemplo bem conhecido deste processo na física são os buracos negros, dos quais, toda a informação que temos a respeito, advém de seu horizonte de eventos.

Aqui, tentaremos fazer uma correlação entre mudanças na entropia e a gravidade, para então, nessa nova abordagem, estudarmos seus efeitos na teoria.

3.1.2 Força Entrópica

Entropia é a medida do grau de probabilidades para qual um sistema de variáveis macroscópicas pode se espalhar em diferentes microestados possíveis. Ao invés de caracterizar a média de quantidades, como é feito em um macroestado, o microestado dá detalhes a respeito das partículas que compõe o sistema, tais como velocidade e posição de cada partícula. A entropia, portanto, crescerá com o aumento do número de estados disponíveis no sistema.

A entropia pode ser vista como a medida do logaritmo da densidade de estados

$$S = -k_B \sum_i P_i \log P_i. \quad (3.1)$$

A soma é sobre todos os possíveis microestados do sistema e P_i é a probabilidade com a qual o sistema pode ser encontrado no estado i . Esta pode ser tomada como a definição fundamental da entropia, uma vez que todas as outras formas de se expressar S podem ser matematicamente deduzidas desta primeira, mas não o contrário. Em algumas situações, a generalização dessa fórmula pode ser necessária para levar em consideração efeitos quânticos, mas em um cenário onde a noção clássica de probabilidade faz sentido, a equação acima descreve perfeitamente a entropia do sistema.

Se um sistema está em equilíbrio, assumimos que a todas as probabilidades de cada microestado são iguais, de acordo com o postulado fundamental em mecânica estatística. Assumindo que os parâmetros disponíveis sejam E , a energia do sistema, e x , um parâmetro macroscópico geral, a equação (3.1) se torna

$$S(E, x) = k_B \log \Omega(E, x), \quad (3.2)$$

onde $\Omega(E, x)$ é o número de estados possíveis para o sistema.

A diferencial da energia é dada por

$$dE = TdS - PdV \quad (3.3)$$

onde T é a temperatura absoluta, dada por $(\frac{\partial E}{\partial S})_V$ e P é a pressão do sistema definida pela derivada parcial $-(\frac{\partial E}{\partial V})_S$. Também dS é a diferencial da entropia e dV é a diferencial do volume, que pode ser pensada como $dV = Adx$, se pensamos no volume como mudando em apenas uma dimensão. Dessa maneira, é possível reescrever a equação como

$$dS = \frac{1}{T}dE + \frac{F}{T}dx, \quad (3.4)$$

de maneira que a temperatura e a força possam ser extraídas da entropia como

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_x \quad \frac{F}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_E, \quad (3.5)$$

tal que a força entrópica definida na segunda equação será na direção do aumento da entropia e será proporcional à temperatura.

3.1.3 A Força Gravitacional de Newton

Para obter a lei de Newton, precisamos do princípio holográfico como ferramenta e também da temperatura e da energia desse sistema.

Suponha que uma tela separa nosso sistema do resto do universo, essa tela será a nossa superfície holográfica e será composta por bits capazes de armazenar a informação a respeito do mundo interior. Há, para essa tela, uma direção preferencial emergente apontando para fora e, a esta, podemos associar uma temperatura e energia, de acordo com os bits.

Em seu experimento mental, que o levou à formula da entropia de buracos negros, Bekenstein considera que, quando uma partícula se aproxima do horizonte de eventos, de maneira que sua distância até ele seja de um comprimento de onda de Compton, essa partícula pode ser considerada parte do sistema de maneira que a área desse horizonte cresça um pouco. Motivados por esse argumento, em nosso sistema anterior, podemos dizer que a partícula passa a fazer parte da

superfície holográfica quando a distancia entre elas for de um comprimento de onda de Compton dessa partícula. Nessa situação, postulamos que a mudança na entropia do sistema será dada por

$$\delta S = 2\pi k_B,$$

onde a constante de Boltzmann vem da consideração da variação da energia $\varepsilon = k_B T$ na primeira parte da equação (3.5), e a presença do fator 2π ficará clara mais tarde. Essa mudança na entropia acontecerá quando

$$\delta x = \frac{\hbar}{mc} = \lambda_c,$$

onde λ_c é o comprimento de onda de Compton. Por essa razão, quando a partícula está a distância λ_c , podemos escrever a mudança na entropia devido a inclusão da partícula como

$$\delta S = 2\pi k_B \frac{mc}{\hbar} \delta x. \quad (3.6)$$

Essa partícula experimentará uma força dada pela segunda equação em (3.5),

$$F\delta x = T\delta S \quad (3.7)$$

Definimos a aceleração associada à temperatura de acordo com o efeito Unruh (veja o apêndice C para mais detalhes), o que significa que a partícula pode ser vista como acelerada em direção a superfície,

$$k_B T = \frac{1}{2\pi} \frac{\hbar a}{c}. \quad (3.8)$$

(Motivado por essa expressão, pode-se usar (3.6) na equação (3.7) de maneira a recuperar a segunda lei de Newton, $F = ma$.)

De volta à superfície holográfica, vamos impor que o número de bits é proporcional à sua área. Ainda mais, podemos dizer que cada bit de informação terá uma área igual à área de Planck, de modo que o número bits será dado por

$$N = \frac{Ac^3}{G\hbar}. \quad (3.9)$$

Supondo que a energia do sistema é igualmente dividida entre os bits

$$E = \frac{1}{2} k_B T N. \quad (3.10)$$

E nós consideramos toda a energia do sistema como a associada à massa que se encontra dentro dele, i.e.,

$$E = Mc^2. \quad (3.11)$$

Assumindo que nossa superfície holográfica seja uma casca esférica englobando o sistema, podemos tomar a equação (3.7) e usar como temperatura a que encontramos em (3.10) e como mudança da entropia a equação (3.6), de maneira que

$$F\delta x = \frac{2E}{Nk_B} 2\pi k_B \frac{mc}{\hbar} \delta x,$$

onde podemos incluir a equação (3.11) para E e (3.9) para N , substituir a área pela da esfera, de forma que

$$F = 4\pi Mc^2 \frac{mc}{\hbar} \frac{G\hbar}{4\pi R^2 c^3},$$

assim

$$F = G \frac{Mm}{R^2}, \quad (3.12)$$

que é a lei da gravitação de Newton.

Este procedimento nos faz pensar na origem da gravidade como sendo entrópica.

3.2 Correções para a Lei de Newton

Dado um sistema de partículas distinguíveis, para cada estado ν de energia definida, existe uma energia total associada a esse estado, dada por E_ν , um determinado número de partículas N_ν associado a esse estado, a energia de cada partícula ϵ_ν , e uma possível degenerescência g_ν . Cada estado tem uma probabilidade associada dada por

$$P_\nu = \frac{e^{-\beta(E_\nu - \mu N_\nu)}}{Z}, \quad (3.13)$$

onde Z é a função de partição dada por

$$\begin{aligned}
Z &= \sum_{\nu} e^{-\beta(E_{\nu} - \mu N_{\nu})} \\
&= \sum_{N=1}^{\infty} e^{\beta\mu N} \sum_{n_i} \prod_{i=1}^N g_{n_i} e^{-\beta\epsilon_{n_i}} \\
&= \frac{fz}{1 - fz},
\end{aligned} \tag{3.14}$$

com

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{-\beta\epsilon_n}. \tag{3.15}$$

Dessa maneira, o número esperado de partículas em um dado estado pode ser visto como

$$\langle N \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \log Z}{\partial \mu} = \frac{1}{1 - fz}. \tag{3.16}$$

Se tomarmos o limite de energias muito baixas, onde a gravidade se encontra, podemos considerar todas as partículas do sistema como no estado fundamental, i.e., a energia esperada do sistema pode ser escrita como

$$\langle E \rangle = \epsilon_1 \langle N \rangle. \tag{3.17}$$

Também podemos pensar na área do sistema como uma função do número de partículas compondo-o. Se considerarmos que cada partícula no estado fundamental ocupa uma área dada por $\langle a \rangle_1$, teremos

$$\langle A \rangle = \langle a \rangle_1 \langle N \rangle. \tag{3.18}$$

A entropia associada ao sistema em condições gerais é dada por

$$\begin{aligned}
S &= -k_B \sum_{\nu} P_{\nu} \log P_{\nu} \\
&= -k_B \sum_{\nu} P_{\nu} [-\beta(E_{\nu} - \mu N_{\nu}) - \log Z] \\
&= k_B \beta \sum_{\nu} P_{\nu} E_{\nu} - k_B \beta \mu \sum_{\nu} P_{\nu} N_{\nu} + k_B \log Z \sum_{\nu} P_{\nu} \\
&= k_B [\beta \langle E \rangle - \beta \mu \langle N \rangle + \log Z].
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Mas Z pode ser reescrito substituindo a equação (3.16) em (3.14), de maneira que

$$Z = \langle N \rangle - 1,$$

e portanto,

$$S = k_B[\beta\langle E\rangle - \beta\mu\langle N\rangle + \log(\langle N\rangle - 1)]. \quad (3.20)$$

No limite de baixas temperaturas, encontramos que

$$S \simeq k_B \log g_1 \langle N\rangle + k_B \log \langle N\rangle - k_B \log \left(1 - \frac{1}{\langle N\rangle}\right) (\langle N\rangle - 1), \quad (3.21)$$

que pode ser escrito em termos do valor esperado da área, i.e.,

$$S \simeq k_B (\log g_1) \frac{\langle A\rangle}{\langle a\rangle_1} + k_B \log \left(\frac{\langle A\rangle}{\langle a\rangle_1}\right) - k_B \log \left(1 - \frac{\langle a\rangle_1}{\langle A\rangle}\right) \left(\frac{\langle A\rangle}{\langle a\rangle_1} - 1\right). \quad (3.22)$$

Assim, para sistemas macroscópicos, onde $\langle A\rangle \gg \langle a\rangle_1$, a expressão pode ser aproximada para

$$S \simeq k_B (\log g_1) \frac{\langle A\rangle}{\langle a\rangle_1} + k_B \log \left(\frac{\langle A\rangle}{\langle a\rangle_1}\right). \quad (3.23)$$

A entropia associada à superfície holográfica discutida em trabalhos recentes ([10], [11]) assume esse formato de correções, identificando o primeiro termo a entropia de Hawking para um buraco negro e deixando que o segundo termo seja uma função geral $s(A)$, de tal maneira que a mudança na entropia do sistema seja dada por

$$\begin{aligned} \Delta S &= k_B \frac{\Delta A}{4l_P^2} + k_B \frac{\partial s}{\partial A} \Delta A \\ &= \Delta A \left(\frac{c^3}{4\hbar G} + \frac{\partial s}{\partial A} \right) k_B. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Partindo desse formato de mudança na entropia, a lei da gravitação de Newton pode ser escrita na forma

$$F = -\frac{GMm}{R^2} \left[1 + 4l_P^2 \frac{\partial s}{\partial A} \right]. \quad (3.25)$$

Em [10], Loop Quantum Gravity inspirou correções na forma de

$$S = \frac{Ak_B}{4l_P^2} - ak_B \ln \left(\frac{A}{l_P^2}\right) + bk_B \left(\frac{A}{l_P^2}\right)^{3/2}, \quad (3.26)$$

onde a e b são constantes da ordem da unidade. Enquanto o primeiro termo em (3.26) é a entropia usual de Bekenstein, os demais representam correções. A correção logarítmica é bastante universal

(veja (3.23)), enquanto a correção que diz respeito ao volume é motivada pela LQG. A utilização de (3.26) leva às seguintes correções para a lei de Newton:

$$F = -\frac{GMm}{R^2} \left(1 - a \frac{l_P^2}{\pi R^2} + 12b\sqrt{\pi} \frac{R}{l_P} \right). \quad (3.27)$$

Devido à universalidade da correção logarítmica (3.26), a primeira correção para a lei de Newton também se faz bastante universal e segue de diferentes modelos para correções quânticas. A correção volumétrica é interessante uma vez que essa leva a uma gravidade muito mais forte em grandes distâncias, o que tem potencial para explicar as anômalas curvas rotacionais das galáxias [10] (muito embora uma inspeção rápida mostre que, neste caso, os valores dos parâmetros a e b não são nada naturais).

A abordagem tomada em [11] utiliza-se de um modelo específico para calcular as correções para a entropia devido a presença de um espaço-tempo não-comutativo. E então pode-se obter a seguinte lei de Newton corrigida

$$F = -\frac{GMm}{R^2} \left(1 + \frac{R e^{-R^2/(4\alpha l_P^2)}}{\sqrt{\pi\alpha} l_P} + \frac{R^2 e^{-R^2/(2\alpha l_P^2)}}{2\alpha\sqrt{\pi} l_P^2} \right). \quad (3.28)$$

Note que, neste caso, as correções são exponencialmente suprimidas por $\frac{R^2}{l_P^2}$. Isso significa que mesmo a possibilidade hipotética de medir tais correções se torna ainda mais evasiva.

Mencionamos esses dois trabalhos porque, do nosso ponto de vista, eles fazem referência a dois problemas muito importantes do cenário entrópico original: enquanto [10] tem algo a dizer a respeito do processo que faz a partícula se tornar parte da superfície holográfica, [11] considera um espaço-tempo não-comutativo, que parece mais natural do ponto de vista da gravidade quântica [6].

Capítulo 4

Esfera Fuzzy

A esfera fuzzy é um dos exemplos mais simples e canônicos da geometria não-comutativa.

4.1 A Álgebra de uma Esfera Fuzzy

Nós estamos interessados na álgebra de funções nessa esfera não-comutativa, uma vez que a noção usual de vetores deixa de ser adequada e o que toma seu lugar são derivadas parciais de matrizes. Na esfera S_2 a álgebra de funções pode ser sempre aproximada por uma expansão infinita na forma

$$f(x_i) = f^0 + f^i x_i + \frac{1}{2} f^{ij} x_i x_j + \dots,$$

onde f^0 , f^i , f^{ij} , e $\sum_i x_i x_i = R^2$, etc., são constantes. Se nós truncarmos a expansão depois de um determinado número de termos, então teremos uma aproximação do que a esfera é.

Note, no entanto, que, para transformar essa aproximação em álgebra, nós precisamos deformar o produto, de maneira que, quando aplicado, ele não produzirá termos de ordem mais alta. Também é natural desejar que após esse procedimento a álgebra continue respeitando a invariância rotacional. Ambas as condições podem ser satisfeitas se considerarmos os esféricos harmônicos como uma representação de $SU(2)$, onde o raio da esfera fará o papel do Casimir.

Podemos fazer a mudança $\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{L}_i$, onde \mathbf{L}_i são os geradores de qualquer representação irredutível da álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$. De modo que

$$x_i \rightarrow \mathbf{x}_i := \kappa \mathbf{L}_i.$$

Isso nos permite escolher o tamanho da representação. Aumentar seu tamanho leva a uma melhor resolução da esfera - se aproximando do limite comutativo.

Portanto podemos deixar de lado a álgebra de funções trucadas de uma álgebra comutativa representada por um número de cópias de \mathcal{C} (dada pelas constantes f^0, f^i, f^{ij} , etc) para ir para uma álgebra matricial não-comutativa.

Note que, neste formalismo, a equação da esfera ainda funciona, de maneira que

$$\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2 + \mathbf{x}_3^2 = \kappa^2 + \kappa^2 + \kappa^2 = \mathbf{R}^2,$$

i.e., há uma relação entre o parâmetro κ e o raio da nossa esfera, $\kappa^2 = \frac{R^2}{3}$. Então podemos dizer que, diferente da esfera comum S_2 , que tem uma álgebra comutativa de funções com uma base formada por esféricos harmônicos, álgebra de funções da esfera fuzzy é não-comutativa, gerada por esféricos harmônicos cujo spin tem um valor máximo l .

Resumindo, a álgebra de funções na esfera fuzzy de raio R é gerada por três matrizes $N \times N$ com $\mathbf{x}_i, i = 1, 2, 3$ satisfazendo $\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i = R^2 \mathbf{1}$. Os agora operadores \mathbf{x}_i são proporcionais aos geradores \mathbf{L}_i de $SU(2)$, i.e.,

$$[\mathbf{L}_i, \mathbf{L}_j] = i\varepsilon_{ijk} \mathbf{L}_k; \quad \mathbf{L}_i \mathbf{L}_i = k(k+1) \mathbf{1}, \quad (4.1)$$

de onde nós deduzimos que

$$\mathbf{x}_i = \lambda_k \mathbf{L}_i \Rightarrow [\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j] = i\lambda_k \varepsilon_{ijk} \mathbf{x}_k, \quad (4.2)$$

onde λ_k é o parâmetro de não-comutatividade dado por

$$\lambda_k = \frac{R}{\sqrt{k(k+1)}}, \quad (4.3)$$

onde k é dado pela dimensão N , i.e., $N = 2k + 1$.

4.2 O Operador de Dirac da Esfera Fuzzy

Este é um dos dois operadores mais importantes na geometria não-comutativa (sendo o segundo o operador de quiralidade). Ele é essencial para a construção do cálculo diferencial e integral. Como tal, ele é restrito a várias condições naturais (veja [16] sobre o papel do operador de Dirac na

geometria não-comutativa). No caso da esfera fuzzy, nós temos uma condição extra: devido a sua invariância rotacional, é desejável que o operador de Dirac correspondente também respeite essa simetria. Existem duas propostas para a obtenção de tal operador [17, 18] (veja também [19] para o tratamento de um caso mais geral de uma esfera q -deformada, que se reduz a [17] em um limite especial). Trabalharemos aqui com o operador definido em [17]¹.

Como no caso comutativo, escolheremos um operador de Dirac de maneira que este anticomute com o operador de quiralidade, neste caso, começaremos por analisar este segundo em uma esfera fuzzy. Na esfera usual, o operador de quiralidade é dado por

$$\gamma_\infty = \frac{1}{l} \sum_i x_i \otimes \sigma_i, \quad (4.4)$$

onde l é o raio da esfera e σ_i são as matrizes de Pauli. Note que, uma vez que $\sum_i x_i x_i = l^2$, então $\gamma_\infty^2 = 1$. Se substituirmos x_i , coordenadas da esfera comutativa, por \mathbf{x}_i , coordenadas da esfera fuzzy, então o quadrado do operador resultante deixa de ser unitário. Devemos procurar então pelo operador unitário mais parecido no caso não-comutativo.

Em primeiro lugar, vamos definir outros operadores que também respeitam a simetria $SU(2)$. Eles são

$$\chi = \sum_i (\mathbf{x}_i \otimes \sigma_i), \quad (4.5)$$

$$\Lambda = \sum_i (\mathbf{L}_i \otimes \sigma_i), \quad (4.6)$$

$$\Sigma = -i \sum_{ij} \varepsilon_{ijk} (\mathbf{x}_i \mathbf{L}_j \otimes \sigma_k). \quad (4.7)$$

Note que um operador constante também seria $SU(2)$ invariante.

A equação (4.5) é, obviamente, a que mais se assemelha ao operador de quiralidade no caso comutativo. Começamos nossa busca tentando modificar esse operador de maneira a obter um

¹Outras possíveis escolhas não mudariam seriamente nossas conclusões (veja a sessão de discussões).

operador unitário. O quadrado do operador,

$$\begin{aligned}
\chi\chi &= \sum_{ij} (\mathbf{x}_i \otimes \sigma_i)(\mathbf{x}_j \otimes \sigma_j) \\
&= \sum_{ij} (\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \otimes \sigma_i \sigma_j) \\
&= \sum_{ij} (\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \otimes \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \otimes \sigma_k) \\
&= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) \otimes \mathbf{1} - \sum_k (\alpha \mathbf{x}_k \otimes \sigma_k) \\
&= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) \otimes \mathbf{1} - \alpha\chi,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

onde α é o parâmetro não-comutativo aqui dado por

$$\alpha = \frac{2l}{\sqrt{N(N+2)}} \tag{4.9}$$

com N sendo o tamanho da representação, autovalor do operador número. A equação (4.8) é claramente não unitária. Reescrevendo-o na forma

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) \otimes \mathbf{1} + \frac{1}{4}\alpha^2 &= \chi^2 + \alpha\chi + \frac{1}{4}\alpha^2 \\
&= \left(\chi + \frac{1}{2}\alpha\right)^2,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

e renormalizando-o, temos

$$\gamma_\chi = \frac{1}{\mathcal{N}_N} \left(\chi + \frac{1}{2}\alpha\right), \tag{4.11}$$

que a nossa escolha natural para o operador de quiralidade, onde o fator de renormalização é dado por

$$\mathcal{N}_N^2 = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) \otimes \mathbf{1} + \frac{1}{4}\alpha^2, \tag{4.12}$$

de maneira que

$$\gamma_\chi^2 = 1. \tag{4.13}$$

Dado o operador de quiralidade, podemos encontrar um operador de Dirac exigindo apenas que eles anticomutem. Para tanto, vamos em primeiro lugar obter relações de comutação entre os

operadores que nós temos até então, que são $SU(2)$ invariantes, além do quadrado dos outros dois operadores remanescentes,

$$\Lambda\Lambda = (\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}) \otimes \mathbf{1} - \Lambda, \quad (4.14)$$

$$\Sigma\Sigma = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{L}) - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}) + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{L})(\mathbf{x} \cdot \mathbf{L}) - \alpha\Sigma + \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{L})\Lambda - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})\Lambda, \quad (4.15)$$

e as relações de comutação e anticomutação entre eles

$$\{\chi, \Lambda\} = 2[(\mathbf{x} \cdot \mathbf{L}) \otimes \mathbf{1} - \chi], \quad (4.16)$$

$$[\chi, \Lambda] = 2[\chi - \Sigma], \quad (4.17)$$

$$\{\Sigma, \chi\} = 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) \otimes \mathbf{1} - \alpha[\chi + \Sigma], \quad (4.18)$$

$$[\Sigma, \chi] = 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})(\Lambda + \mathbf{1}) - 2\alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{L}) \otimes \mathbf{1} - \{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{L}), \chi\}, \quad (4.19)$$

$$\{\Sigma, \Lambda\} = 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{L}) \otimes \mathbf{1} + 2\Sigma, \quad (4.20)$$

$$[\Sigma, \Lambda] = 2(\Lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{L}) - \chi(\mathbf{L} \cdot \mathbf{L})). \quad (4.21)$$

Combinando essas relações, encontramos que

$$\{\chi - \Sigma, \Lambda\} = 2(\Sigma - \chi), \quad (4.22)$$

$$\{\chi - \Sigma, \chi\} = \alpha(\Sigma - \chi). \quad (4.23)$$

da qual podemos obter

$$\left\{ \chi - \Sigma, \chi + \frac{1}{2}\alpha \right\} = 0, \quad (4.24)$$

que nos dá dois candidatos independentes para o operador de Dirac,

$$D' = (\Sigma - \chi), \quad (4.25)$$

e

$$D'' = \gamma_\chi(\Sigma - \chi). \quad (4.26)$$

Precisamos agora testar essas duas possibilidades. Note que

$$\begin{aligned}
D'^2 &= \gamma_\chi(\Sigma - \chi)\gamma_\chi(\Sigma - \chi) \\
&= -(\Sigma - \chi)\gamma_\chi\gamma_\chi(\Sigma - \chi) \\
&= -(\Sigma - \chi)(\Sigma - \chi) \\
&= -D'^2,
\end{aligned} \tag{4.27}$$

de onde concluímos que, quaisquer que sejam os autovalores de D' , eles serão os mesmos autovalores do operador D'' multiplicados pela unidade imaginária. Nós estamos interessados em operadores Hermitianos, uma vez que não existem medidas complexas no regime comutativo, então, note que, mesmo que γ_χ seja hermitiano, já que depende apenas de χ , o operador $(\Sigma - \chi)$ não o é, já que Σ carrega o símbolo de Levi-Civita. Felizmente, $\gamma_\chi(\Sigma - \chi)$ é Hermitiano, o que pode ser visto pela relação de anticomutação

$$\begin{aligned}
[\gamma_\chi(\Sigma - \chi)]^\dagger &= -(\Sigma - \chi)\gamma_\chi \\
&= \gamma_\chi(\Sigma - \chi),
\end{aligned} \tag{4.28}$$

e é, portanto, nossa escolha para o operador de Dirac.

Então escolhemos com o operador D'' e definimos o operador de Dirac como

$$D = \frac{1}{l}\gamma_\chi(\Sigma - \chi) \tag{4.29}$$

$$= \frac{1}{\mathcal{N}_N} \left[(\Lambda + \mathbf{1}) - \frac{1}{2l^2} \{\chi, (\mathbf{x} \cdot \mathbf{L})\} - \frac{\alpha}{l^2} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{L}) \right]. \tag{4.30}$$

Pela definição de (4.30), é óbvio que o operador de Dirac opera, como no caso comutativo, no espaço de espinores de 2 componentes. Assim, ainda temos a relação entre a dimensão do espaço e a dimensão do feixe de espinores, que será importante para nossa discussão futura.

O Espectro do Operador de Dirac

A maneira mais fácil de se obter o espectro do operador de Dirac é utilizando o operador D^2 , i.e, se

$$D^2\psi = \lambda^2\psi, \tag{4.31}$$

então

$$D\psi = \pm\lambda\psi. \quad (4.32)$$

Começamos calculando D^2 . Temos que

$$\begin{aligned} D^2 &= \frac{-1}{l^2}(\Sigma - \chi)^2 \\ &= \frac{-1}{l^2}[\Sigma\Sigma - \{\Sigma, \chi\} + \chi\chi] \\ &= \frac{l^2}{l^2}[(\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}) + 1 + \Lambda] - \frac{1}{l^2}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{L})[\alpha + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{L}) + \alpha\Lambda] \\ &= [(\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}) + 1 + \Lambda - \frac{1}{l^2}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{L})[\alpha(\Lambda + 1) + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{L})]]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Fazendo $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{L}) = \frac{\alpha}{2}\mathbf{L}^2$, isso se torna

$$D^2 = \mathbf{L}^2 + 1 + \Lambda - \frac{\alpha^2}{4l^2}\mathbf{L}^2[\mathbf{L}^2 + 2(\Lambda + 1)]. \quad (4.34)$$

Agora, esperando extrair o espectro desse operador, introduzimos o operador de momento angular total

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{1}{2}\sigma, \quad (4.35)$$

uma vez que os autovalores de seu quadrado são bem conhecidos $j(j+1)$ onde j será restrito pelo tamanho da representação, i.e., $0 \leq j \leq \frac{N+1}{2}$, e então

$$\Lambda = \mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \frac{3}{4}. \quad (4.36)$$

Assim, tendo em mente os seguintes autovalores para os operadores

$$\mathbf{J}^2 \rightarrow j(j+1), \quad (4.37)$$

$$\mathbf{L}^2 \rightarrow (j+s)(j+s+1), \quad (4.38)$$

podemos substituí-los na equação (4.34), substituir α e levar em consideração que $s^2 = \frac{1}{4}$, já que $s = \pm\frac{1}{2}$, para obter o espectro

$$\lambda^2 = \left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{N(N+2)} \left\{ \left(j + \frac{1}{2}\right)^4 - \left(j + \frac{1}{2}\right)^2 \right\}, \quad (4.39)$$

dependendo somente de j .

Ainda melhor, podemos escrever o espectro da seguinte forma

$$\lambda^2 = \left(j + \frac{1}{2}\right)^2 \left\{ 1 - \frac{1}{N(N+2)} \left[\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - 1 \right] \right\}, \quad (4.40)$$

e, portanto, o espectro para D é

$$\lambda = \pm \left(j + \frac{1}{2}\right) \left\{ 1 - \frac{1}{N(N+2)} \left[\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (4.41)$$

que vai para o espectro do operador de Dirac da esfera S_2 no limite comutativo².

²Em [17], eles argumentam que, para obter o limite comutativo correto, é necessário manter o caso de apenas N 's pares, mas isso não será importante em nossos cálculos. Ainda mais, nós acreditamos que se a esfera fuzzy vier fundamentalmente de uma teoria para a gravidade quântica, ambas as representações devem ser permitidas.

Capítulo 5

Geometria Espectral: o Teorema de Weyl e o Seu Uso

Desejando obter a área de uma esfera fuzzy, decidimos utilizar o teorema de Weyl¹. Esse teorema nos permite saber não somente a respeito da dimensão da variedade para a qual conhecemos o operador de Laplace, mas também a respeito de seu volume [14]. O teorema é dado por

Teorema 5.0.1. *Seja Δ o operador de Laplace em uma variedade Riemanniana fechada \mathcal{M} de dimensão n . Seja $N_\Delta(\lambda)$ o número de autovalores de Δ , contando multiplicidades, menores que λ , i.e. $N_\Delta(\lambda)$ é a função de contagem*

$$N_\Delta(\lambda) := \#\{\lambda_k(\Delta) \ : \ \lambda_k(\Delta) \leq \lambda\}. \quad (5.1)$$

Então

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_\Delta(\lambda)}{\lambda^{\frac{n}{2}}} = \frac{Vol(\mathcal{M})}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2} + 1)}, \quad (5.2)$$

onde $Vol(\mathcal{M})$ é o volume total da variedade \mathcal{M} .

Sua prova para um caso mais simples é dada no apêndice C.

¹Existem outras maneiras de se obter a área para uma variedade não-comutativa, como a integral do traço de uma matriz unitária. Nessa dissertação, decidimos por utilizar técnicas de geometria espectral.

Utilizando a fórmula de Lichnerowics (veja o apêndice D)

$$\mathcal{D}^2 = \Delta^S + \frac{1}{4}R, \quad (5.3)$$

onde R é o escalar de curvatura, Δ^S é o Laplaciano espinorial, podemos obter o teorema de Weyl para o operador de Dirac

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_{|\mathcal{D}|}(\lambda)}{\lambda^n} = \frac{2^m \text{Vol}(\mathcal{M})}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2} + 1)}, \quad (5.4)$$

para espinores m -dimensionais, ou variedades $(2m + 1)$ -dimensionais.

Para ilustrar esse teorema, vamos utilizar exemplos. Começaremos com a esfera S_2 e um torus n -dimensional, utilizando o operador Laplaciano.

5.1 Calculando a Dimensão e a Área de uma Esfera S_2

Vamos começar relembrando o operador Laplaciano em coordenadas esféricas, i.e.,

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad (5.5)$$

que pode ser reescrito em termos do operador de momento angular, de modo que

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\mathbf{L}^2}{r^2}. \quad (5.6)$$

Da parte angular, esperamos obter a área no teorema de Weyl, então trabalharemos apenas com essa parte. Fica claro, pelo segundo termo do lado direito da equação (5.6), que os autovalores associados $\lambda(l)$ serão dados por

$$\lambda(l) = \frac{l(l+1)}{r^2}. \quad (5.7)$$

Contamos agora o número de autovalores. Cada l tem associada a multiplicidade $(2l + 1)$, então,

ao somar todos os autovalores, nós obtemos

$$\begin{aligned}
 N_{\Delta}(\lambda(l)) &= \sum_{l'=0}^l (2l' + 1) \\
 &= l + 1 + 2 \sum_{l'=0}^l l' \\
 &= l + 1 + 2 \frac{l(l+1)}{2} \\
 &= (l+1)^2.
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Dessa expressão é possível perceber que estamos tratando de um caso de dimensão 2.

Substituindo as equações (5.7) e (5.8) em (5.2), e notando que quando $\lambda \rightarrow \infty$ também $l \rightarrow \infty$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{(l+1)^2}{\frac{l(l+1)}{r^2}} &= \frac{Area(S_2)}{4\pi \Gamma(2)} \\
 r^2 &= \frac{Area(S_2)}{4\pi \cdot 1!}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Area(S_2) = 4\pi r^2, \tag{5.9}$$

que é a conhecida área de uma esfera.

5.2 Calculando a Área de um Torus n-Dimensional

Vamos considerar um torus de dimensão $n = D + 1$, i.e., na forma de $T^{D+1} = S^1 \times \dots \times S^1$, onde o raio do primeiro círculo, equivalente ao tempo Euclidiano, é igual a T e o raio dos demais D círculos é R .

Para um torus, podemos usar um Laplaciano geral para um espaço-tempo plano, dado por

$$\Delta_T = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \tag{5.10}$$

onde Δ é o Laplaciano espacial usual. Essa equação leva a um espectro dado por

$$sp(\Delta_T) = \left\{ \frac{n_0^2}{T^2} + \frac{1}{R^2} \sum_{i=1}^D n_i^2, \quad n_o, n_i \in \mathbb{R} \right\}. \quad (5.11)$$

A função de contagem para o espectro pode ser pensada no caso contínuo em forma da integral

$$\begin{aligned} N_{\Delta_T}(\lambda) &\sim \int_{-T\sqrt{\lambda}}^{T\sqrt{\lambda}} dn_o \int_0^{R\left(\lambda - \frac{n_o^2}{T^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \Omega_D n^{D-1} dn \\ &= \frac{\Omega_D R^D}{D} \int_{-T\sqrt{\lambda}}^{T\sqrt{\lambda}} \left(\lambda - \frac{n_o^2}{T^2}\right)^{\frac{1}{2}} dn_o \\ &= \frac{\Omega_D R^D}{D} \left[n_o \left(\lambda - \frac{n_o^2}{T^2}\right)^{\frac{D}{2}} \left(1 - \frac{n_o^2}{\lambda T^2}\right)^{-\frac{D}{2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{-D}{2}; \frac{3}{2}; \frac{n_o^2}{\lambda T^2}\right) \right]_{-T\sqrt{\lambda}}^{T\sqrt{\lambda}} \\ &= \frac{\Omega_D R^D}{D} 2T\sqrt{\lambda} \lambda^{\frac{D}{2}} \left(1 - \frac{n_o^2}{\lambda T^2}\right)^{\frac{D}{2}} \left(1 - \frac{n_o^2}{\lambda T^2}\right)^{-\frac{D}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{D}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - 12\right)\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{D}{2}\right)} \\ &= \frac{\Omega_D R^D}{D} T\sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{D}{2} + \frac{3}{2}\right)} \lambda^{\frac{D+1}{2}} \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde $\Omega_D = Vol(S^{D-1}) = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}$, então

$$\begin{aligned} N_{\Delta_T}(\lambda) &\sim \frac{2T\pi^{\frac{D+1}{2}} \frac{D}{2} R^D \Gamma\left(\frac{D}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \frac{D}{2} D \Gamma\left(\frac{D}{2} + \frac{3}{2}\right)} \lambda^{\frac{D+1}{2}} \\ &= \frac{\pi^{\frac{D+1}{2}} R^D T \lambda^{\frac{D+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D}{2} + \frac{3}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Substituindo (5.13) no teorema de Weyl, equação(5.2), nós obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\pi^{\frac{D+1}{2}} R^D T \lambda^{\frac{D+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D}{2} + \frac{3}{2}\right)} \frac{1}{\lambda^{\frac{D+1}{2}}} &= \frac{Area(T^{D+1})}{(4\pi)^{\frac{D+1}{2}} \Gamma\left(\frac{D+1}{2} + 1\right)} \\ \pi^{D+1} 2^{D+1} R^D T &= Area(T^{D+1}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Area(T^{D+1}) = (2\pi R)^D (2\pi T), \quad (5.14)$$

que é a área de um torus n-dimensional.

5.3 O Operador de Dirac para a Esfera S_2

Para calcular a área da esfera fuzzy, vamos usar a abordagem do operador de Dirac. Faremos em primeiro lugar o caso da esfera comutativa com este operador, de modo que possamos comparar com resultados futuros.

O operador de Dirac pode ser escrito como

$$\mathcal{D}^2 = \Delta^S + \frac{1}{4}R. \quad (5.15)$$

Para ele, encontraremos os esféricos harmônicos como autovetores, cujos autovalores são dados por $(l + 1/2)^2$ para $l \in \{\mathbb{N} + 1/2\}$, de modo que os autovalores de \mathcal{D} sejam $sp|\mathcal{D}| = \pm(l + 1/2)$. E no teorema de Weyl nós recuperamos $Area(S_2) = 4\pi R^2$.

5.4 O Caso Não-Comutativo: a Esfera Fuzzy

Em um primeiro momento, a simples aplicação do teorema de Weyl em uma geometria representada por uma álgebra finita de matrizes (como no nosso caso), não parece um procedimento correto. Todavia, nós vamos argumentar que usar este teorema, mas agora como uma *definição*, ainda faz sentido neste caso. Porém, como veremos, aqui é necessário fazer a distinção clara entre as abordagens da matemática formal e da física aplicada.

- A aplicação do teorema de Weyl matematicamente significativa para um modelo de matrizes finitas parece bastante duvidoso. Essa aplicação deve ser entendida da seguinte maneira: quando o espectro é não-limitado (em particular $N_\Delta(\omega) \rightarrow \infty$), podemos requerer que o lado direito de (5.4) faça sentido fixando unicamente a dimensão n , que, por sua vez, nos permite determinar $Vol(\mathcal{M})$. Mas, para o caso de um modelo finito, o espectro é finito, como em (4.41), e $N_\Delta(\omega)$ também é finito. Como resultado, não podemos requerer que n ou $Vol(\mathcal{M})$ sejam fixados. Aqui é crucial que ω possa (e deva) ser tomado arbitrariamente grande. Veremos em seguida como essa situação será alterada na presença de um “cut-off” fisicamente motivado.

- Usaremos agora o teorema de Weyl como uma ferramenta física para medir a dimensão e a área de algum espaço possivelmente não-comutativo. Para tanto, usaremos o espectro experimental do operador de Dirac correspondente. Nessa situação, o espectro do operador só poderá ser medido até um determinado “cut-off” ω_{co} , determinado pela precisão do experimento. Tipicamente, mesmo no caso de um modelo finito, este “cut-off” fica abaixo do autovalor máximo do operador, de maneira que o aparelho utilizado para provar a geometria não saberá se o espectro é finito ou não. Assim, podemos continuar usando o teorema de Weyl, mas agora, ao invés de um limite matemático, $\omega \rightarrow \infty$, nós devemos tomar um limite “físico”, $\omega \leq \omega_{\text{co}}$. Para que isso aconteça, em geral, teremos uma dimensão e um volume dependendo não trivialmente do “cut-off” e, sem mais restrições físicas, seria impossível determinar ambos. Se assumirmos o valor clássico para a dimensão, como faremos aqui, então conseguimos derivar correções para o volume clássico dependentes do valor do “cut-off”. Em [14], essa abordagem foi utilizada para analisar o comportamento UV/IR da dimensão espectral nos modelos gravitacionais de Hořava-Lifshits (veja também [14], especialmente na sessão de conclusão para uma maior discussão e interpretação física desta abordagem).

Depois dos comentários acima, vamos aplicar o teorema no caso da esfera fuzzy. Em primeiro lugar, gostaríamos de dar dois argumentos em favor da utilização da dimensão da esfera fuzzy igual à dimensão da esfera clássica, $n = 2$. Primeiramente, como comentado após a equação (4.30), o operador de Dirac para a esfera não-comutativa age, como no caso clássico, em espaços de espinores de duas componentes. Isso significa que na passagem do teorema de Weyl com a utilização do operador de Laplace para o operador de Dirac, continuamos no mesmo caso $n = 2$. Em segundo lugar, se observarmos o processo do ponto de vista físico, quando medimos o espectro de \mathcal{D} (ou Δ), já estamos assumindo medir o espectro de um operador que está definido em uma superfície bidimensional. Assim, qualquer desvio no resultado obtido, quando comparado com o resultado clássico, será tratado como correções geométricas quânticas para a área. Tendo tais argumentos em mente, podemos prosseguir.

Como um primeiro passo, vamos calcular a função de contagem (5.1). Para tal, precisamos calcular j como uma função de ω . Invertendo a equação (4.41), obtemos

$$\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{(N+1)^2 \pm [(N+1)^4 - 4\omega^2 R^2 N(N+2)]^{1/2}}{2}. \quad (5.16)$$

Para escolher o sinal correto em (5.16), basta notar que $(j + \frac{1}{2})^2 \leq \frac{(N+2)^2}{4}$. Isso nos leva a escolha do sinal negativo. Nós possuímos portanto um valor máximo para j correspondente a escala do cut-off $\omega_{\mathbf{co}}$:

$$\left(j_{max} + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{(N+1)^2 - [(N+1)^4 - 4\omega_{\mathbf{co}}^2 R^2 N(N+2)]^{1/2}}{2}. \quad (5.17)$$

Levando em consideração que a degenerescência de cada valor é de $(2j+1)$, podemos escrever a função de contagem como

$$N_{|\mathcal{H}|}(\omega_{\mathbf{co}}) = 2 \sum^{j_{max}} (2j+1). \quad (5.18)$$

O coeficiente 2 vem do sinal de mais ou menos em (4.41). Tomando, por definição, j para ser meio inteiro, i.e. N para ser par (olhar a nota de rodapé da página 40), obtemos a seguinte expressão exata para a função de contagem

$$\begin{aligned} N_{|\mathcal{H}|}(\omega_{\mathbf{co}}) &= 2\left(j_{max} + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(j_{max} + \frac{1}{2}\right) \\ &= (N+1)^2 \left[1 - \left(1 - \frac{4\omega_{\mathbf{co}}^2 R^2 (N+2)N}{(N+1)^4}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + \sqrt{2}(N+1) \left[1 - \left(1 - \frac{4\omega_{\mathbf{co}}^2 R^2 (N+2)N}{(N+1)^4}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

5.5 Limite Comutativo, $N \rightarrow \infty$

Primeiro usaremos (5.19) para reproduzir o resultado comutativo para a área da esfera. Isso mais tarde nos ajudará a clarificar alguns pontos a respeito da aplicabilidade desse método, além de nos reafirmar a eficiência do teorema de Weyl neste caso.

O limite comutativo corresponde a mandar a dimensão da representação, N , para o infinito, enquanto mantemos $\omega_{\mathbf{co}}$ finito (para ser mandado para o infinito somente no final - ou ainda feito “grande o suficiente” ao final). Nesse limite, teremos

$$\left(j_{max} + \frac{1}{2}\right)^2 = R^2 \omega_{\mathbf{co}}^2. \quad (5.19)$$

Então, a função de contagem (5.19) se torna

$$N_{|\mathcal{D}|}(\omega_{\mathbf{co}}) = 2R^2\omega_{\mathbf{co}}^2 + 2R\omega_{\mathbf{co}} . \quad (5.20)$$

Agora desejamos utilizar o teorema de Weyl (5.4) na forma apropriada para o operador de Dirac, \mathcal{D} (fazendo $n = 2$)

$$\lim_{\omega_{\mathbf{co}} \rightarrow \infty} \frac{N_{|\mathcal{D}|}(\omega_{\mathbf{co}})}{\omega_{\mathbf{co}}^2} = \frac{2Area(\mathcal{M})}{4\pi\Gamma(2)} , \quad (5.21)$$

onde o fator 2 representa a dimensão dos espinores (ver a discussão após (5.4)). Utilizando (5.20) e (5.21) pode-se obter imediatamente o resultado conhecido para a esfera S_2 comutativa

$$Area(S_2) = 4\pi R^2 . \quad (5.22)$$

O que acontece se tomarmos ao invés do limite exato em (5.21) somente um limite “físico”, i.e. tomar $\omega_{\mathbf{co}}$ muito grande, porém finito? Quão grande precisa ser $\omega_{\mathbf{co}}$ para que ainda possamos concluir que a área, com uma determinada incerteza experimental, é dada pela fórmula (5.22)? Da equação (5.20), nós temos

$$\frac{N_{|\mathcal{D}|}(\omega_{\mathbf{co}})}{\omega_{\mathbf{co}}^2} = 2R^2 + \frac{2R}{\omega_{\mathbf{co}}} . \quad (5.23)$$

Então se $\omega_{\mathbf{co}} \gg 1/R$, ou $j_{max} \gg 1$, a área “física” será exatamente dada por (5.22). O segundo termo em (5.23), que é a correção da área com respeito à comutativa, não deve ser nada além da incerteza na medida de R usando uma partícula teste de massa m como aparato. De fato, nós temos: $\Delta R \sim \lambda_m \Rightarrow \Delta S \sim \lambda_m R$ ou, assumindo que $\lambda_m \sim \frac{1}{\omega_{\mathbf{co}}}$, obtemos a correção necessária. Isso deve deixar mais claro que nossa definição é uma definição física, i.e., o resultado realmente depende de como a partícula vê e prova a superfície holográfica. Esse ponto se tornará ainda mais importante assim que chegarmos na discussões sobre as possíveis correções.

5.6 Caso de Não-Comutatividade Fraca

Passamos agora para o cálculo das correções não-comutativas para a fórmula (5.22) para o caso quando a não-comutatividade não é tão forte Para começar, nós gostaríamos de discutir o alcance

da aplicabilidade do nosso método. Da seção anterior, nós já sabemos que a escala do cut-off, $\omega_{\mathbf{co}}$, deve ser muito maior que $1/R$ se nós quisermos ver alguma correção com relação ao resultado comutativo (de outra maneira, qualquer correção será mascarada pelo erro experimental). Mas há outra limitação em $\omega_{\mathbf{co}}$ vindo do fato que esse cut-off deve ainda ser menor que N/R , que pode ser explicado uma vez que, embora estejamos em busca de uma esfera fuzzy para modelar o problema, ainda assim não queremos que essa esfera seja tão fuzzy, i.e., queremos que N seja muito maior que 1. Assim, N/R é apenas a ordem de grandeza do maior autovalor do operador (veja a equação (4.41)), e, para estar no regime de correções, nós precisamos que $\omega_{\mathbf{co}}$ seja muito menor que o autovalor máximo. Então, combinando tais restrições, nós temos o seguinte alcance de para o cut-off, onde esperamos ver correções para a área devido a não-comutatividade:

$$1 \ll R\omega_{\mathbf{co}} \ll N . \quad (5.24)$$

Assumindo que (5.24) vale, nós temos a seguinte correção para o limite clássico (5.19)

$$\left(j_{max} + \frac{1}{2}\right)^2 = R^2\omega_{\mathbf{co}}^2 \left(1 + \frac{R^2\omega_{\mathbf{co}}^2}{N^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}, \frac{R^2\omega_{\mathbf{co}}^2}{N^3}\right)\right) . \quad (5.25)$$

Usando esse resultado em (5.19), obtemos as seguintes correções para (5.22):

$$Area(S_F) \approx 4\pi R^2 \left(1 + \frac{R^2\omega_{\mathbf{co}}^2}{N^2}\right) . \quad (5.26)$$

Vamos analisar o resultado (5.26). Em primeiro lugar, precisamos ter certeza de que essas correções são vistas ainda sobre o erro clássico, veja (5.23) e a discussão que segue. Isso é equivalente a negligenciar o segundo termo em (5.19). O que significa que, ao mesmo tempo que satisfaz (5.24), $\omega_{\mathbf{co}}$ também deve respeitar o seguinte

$$\frac{R^2\omega_{\mathbf{co}}^2}{N^2} \gg \frac{1}{R\omega_{\mathbf{co}}} . \quad (5.27)$$

Combinado com (5.24), temos restrições bastante irrealistas para a observação dessas correções não-comutativas. Para que possamos observar isso, é necessário entender quem são $\omega_{\mathbf{co}}$ e N . Nós assumimos que $\omega_{\mathbf{co}}$ deve ser da ordem do inverso do comprimento de onda de Compton da partícula que é usada para provar a esfera fuzzy. Essa suposição parece bastante natural, considerando que a partícula é o aparato que usamos para provar a superfície holográfica no cenário entrópico. Para N ,

fazemos outra suposição natural, que é considerar N como o mesmo utilizado no cenário proposto por Verlinde, i.e., o número de bits da área, $N \sim A/l_P^2$. Agora, se exigirmos que as correções quânticas (5.26) sejam vistas acima do erro experimental clássico (5.23), vemos imediatamente que isso é equivalente a

$$\left(\frac{l_P}{\lambda_m}\right)^4 \gg \frac{R}{l_P}. \quad (5.28)$$

Fica claro que (5.28) poderia ser satisfeito somente no caso da não-comutatividade forte, que fica longe da suposição da não-comutatividade fraca para a esfera. Então precisamos analisar o modelo não-comutativo completo, i.e., a equação (5.19), sem assumir (5.24).

5.7 Não-Comutatividade Forte

Uma vez que é difícil esperar que nosso modelo seja capaz de descrever corretamente efeitos quânticos para a gravitação neste regime, faremos aqui apenas uma análise qualitativa. Para tanto, traçamos o gráfico do comportamento da área, A_F , como vista pela partícula, com relação a escala do cut-off, ω_{co} . O resultado na figura 5.1. O que esse gráfico nos diz exatamente?

Em primeiro lugar, não podemos nos iludir por N “grande o suficiente”, uma vez que $N = 100000$ corresponde a uma não-comutatividade muito alta (i.e., regime quântico). Isso ocorre porque para esse valor de N , o raio da superfície (usando a suposição de que $N \sim \frac{A}{l_P^2}$) é somente três ordens abaixo da escala de Planck.

Em segundo lugar, podemos analisar onde fica a escala de Planck, $\omega_P \sim \frac{1}{l_P}$, nesta figura. Com as mesmas suposições acima, podemos facilmente ver que

$$\frac{\omega_P}{\omega_{max}} \sim \frac{1}{\sqrt{\omega_{max}R}} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}. \quad (5.29)$$

De modo que, mesmo para um regime altamente quântico, $\frac{\omega_P}{\omega_{max}} \sim 10^{-3}$, i.e., a escala de Planck fica bem abaixo de ω_{max} .

Em terceiro lugar, podemos ver na figura 5.2 que os desvios da área clássica (mais o erro experimental) definidos por (5.23) começam em um cut-off bem alto, que, nesse caso específico, fica bem acima da escala de Planck. Isso concorda perfeitamente com (5.24), que poderia ser reescrita

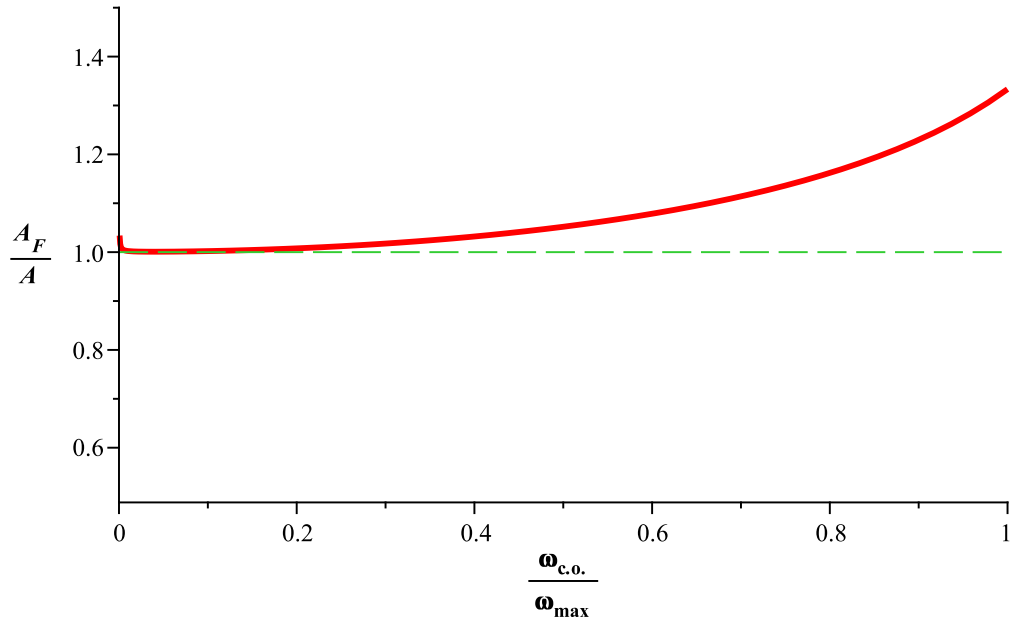


Figura 5.1: O exemplo de A_F/A vs ω_{co} , onde $A = 4\pi R^2$ e ω_{max} é determinado por (5.17) e $N = 100000$.

como $\frac{1}{N} \ll \frac{\omega_{co}}{\omega_{max}} \ll 1$, e a conclusão ao final do próximo capítulo é que, para esse alcance, as correções não-comutativas não serão vistas sobre a incerteza experimental. Assim, podemos dizer que, mesmo que uma partícula teste pudesse provar a superfície holográfica na escala de Planck², ela verá a área como praticamente clássica (para esse valor de N). Podemos ver que, devido a (5.29), a situação mudaria completamente se conseguíssemos ir mais profundamente no regime quântico, i.e., para N menor (veja a discussão no próximo capítulo).

As considerações acima parecem indicar que não existem correções físicas significantes para a área da superfície holográfica (i.e., vistas pela partícula de teste) devido a não-comutatividade dessa superfície. Como resultado, é possível concluir que as únicas correções para a lei de Newton no cenário entrópico serão devido a correções da entropia como em (3.26-3.28). No próximo capítulo discutiremos se isso é ou não verdade.

²Podemos imaginar a utilização do maximon [20] como uma partícula teste, i.e., uma partícula cujo comprimento de onda de Compton é igual ao seu raio gravitacional.

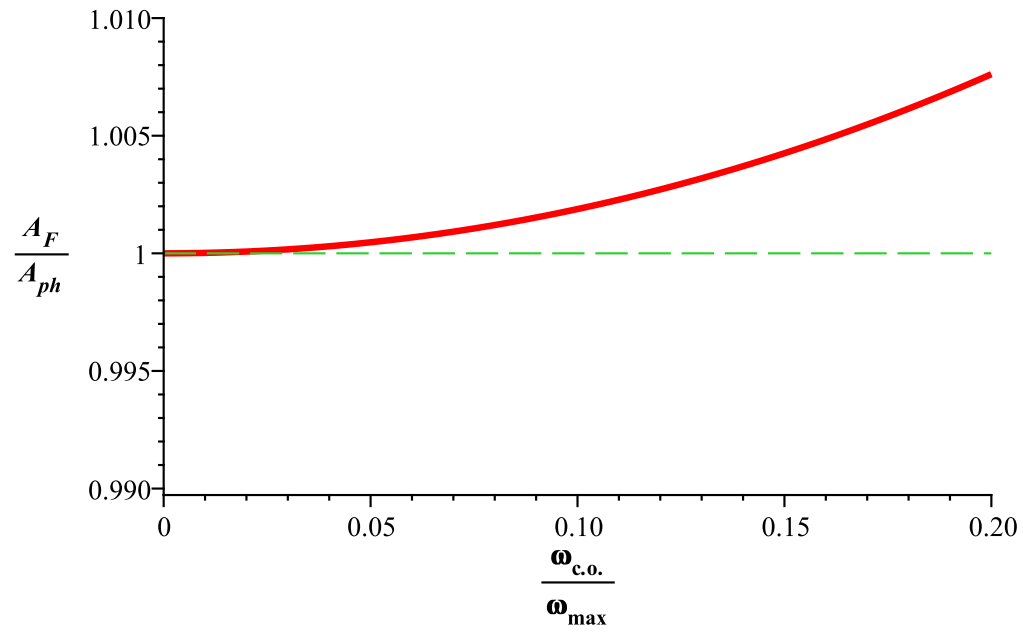


Figura 5.2: Área não-comutativa (normalizada por A_{ph} - a área física, que inclui o erro experimental (5.23)) como uma função da escala do cut-off. Desvios significantes são vistos bem abaixo do cut-off.

Capítulo 6

Discussões e Conclusões

6.1 Discussão e Interpretação

Vamos começar analisando o que obtivemos até então. Começaremos confrontando nosso resultado com (3.28), também obtido em um cenário não-comutativo. Olhando para este, notamos imediatamente que a única maneira de observar correções é quando aproximamos a partícula da massa M por uma distância da ordem da escala de Planck, de outra maneira, qualquer correção seria suprimida exponencialmente. Qual o regime em nossa abordagem? Não é difícil perceber que este regime corresponde a $N \sim 1$. Mas, de acordo com (5.29), esse será exatamente onde a escala de cut-off maximal ω_{max} será da ordem da escala de Planck. Então é natural que as correções quânticas da área sejam bem significantes. Por exemplo, se $N = 100$, as correções em (3.28) serão suprimidas por um fator da ordem de e^{-100} , enquanto, olhando para a figura 5.2 (que continua com o mesmo comportamento para $N = 100$, mas agora a escala de Planck fica perto de $0.2\omega_{max}$) vemos que as correções para a área devido a não-comutatividade serão da ordem de 1%. Neste caso, é importante perceber que, para ver tais correções, é necessário ter uma partícula teste capaz de provar a escala de Planck. Mas, enquanto (3.28) produz correções apenas a uma distância de Planck da massa M , as correções não comutativas para a área são diferentes de zero mesmo longe da origem. Isso nos leva à conclusão de que essas correções não-comutativas podem obscurecer completamente os efeitos devido as correções para a entropia (dadas por (3.28)).

Vamos olhar agora para (3.27). Esse tipo de correções nos parecem muito mais confiáveis. Vamos começar considerando a primeira correção (devido ao termo logarítmico em (3.26)). De nossa análise até então, fica claro que para um determinado alcance, esse termo será dominante na correção da área. Isso acontece porque esse termo se comporta como $1/N$ e não depende do comprimento de onda de Compton da partícula de teste. Então, quando a partícula de teste tem um comprimento de onda de Compton grande quando comparada com a escala de Planck (mas ainda pequeno o suficiente para provar tais distâncias, i.e., $\lambda_m \ll R$, veja (5.24) e a discussão após (5.23)), pode-se obter correções bastante grandes para a lei de Newton, enquanto as correções para a área são praticamente negligenciáveis (veja a figura 5.2 e a equação (5.29)). Porém, perto da escala de Planck, essas correções serão completamente mascaradas pelas correções para a área. Isso pode ser interpretado da seguinte maneira: é um resultado bastante conhecido que as mesmas correções podem ser obtidas de uma gravidade quântica perturbativa [10], então é razoável acreditar que essas correções possam ser confiáveis em escalas bem menores que a escala de Planck. Aproximando-se da escala de Planck, os cálculos perturbativos falhariam e neste domínio teríamos uma maior importância dos efeitos da não-comutatividade, que são traços não-perturbativos da GQ¹.

Essa consideração nos leva a um ponto bastante importante - a dependência não-trivial das possíveis correções na partícula de teste. A partícula de teste passa a ser uma parte essencial da definição da gravidade. Ela é necessária não somente para revelar a gravidade já existente (na forma da curvatura do espaço-tempo na RG) mas para produzi-la mudando a entropia da superfície holográfica, o que leva a força entrópica. Ao olhar para a superfície holográfica do ponto de vista da geometria não-comutativa, vemos o papel da partícula de teste como ainda mais evidente: a superfície será vista de maneira diferente por diferentes partículas. Tal resultado implicaria em uma possível violação do princípio da equivalência pelos efeitos quântico-gravitacionais. Em nossa abordagem, isso se reflete no resultado de que as correções para a dependem em um cut-off físico, que é uma função da massa da partícula de teste, $\omega_{\text{co}} \sim m$.

¹É interessante lembrar que (5.23) foi calculada para uma escolha bem específica de um operador de Dirac. Como resultado, o fato de não obtermos correções do tipo $1/N$ em (5.26) é puramente acidental. Outras escolhas para o operador de Dirac poderiam produzir tais correções, levando-nos a um desvio muito maior da área clássica. Neste caso, mesmo o termo de correção logarítmica na lei de Newton poderia ser mascarado pelas correções da área.

Antes de fechar essa seção, gostaríamos de reforçar a suposição que fizemos previamente de que a escala do cut-off está sempre abaixo do fim do espectro do operador de Dirac. Utilizando considerações como em [21], é possível argumentar que a escala do cut-off deve ser menor ou igual a escala de Planck. Vimos, porém, que a escala de Planck está sempre abaixo do autovalor máximo (em nosso modelo), dessa maneira, do ponto de vista de qualquer experimento (i.e., do ponto de vista operacional) seria impossível dizer se o espectro é finito ou não. O que pode ser feito é medir possíveis desvios em quantidades geométricas baseadas no desvio da parte *observada* do espectro para os resultados clássicos.

6.2 Resumo e Conclusões

Decidimos neste trabalho utilizar uma abordagem não-comutativa como um retrato natural para a escala quântica, e, nesse sentido, uma introdução foi dada na estrutura quântica do espaço-tempo e, em seguida, uma pincelada na álgebra da esfera fuzzy, tomada como um caso especial. Fizemos ainda uma revisão da teoria da Gravidade Entrópica proposta por Erik Verlinde ([4]), olhamos a relação entre a área e a entropia de um sistema ([9]), e também trabalhos recentes que tentam obter correções para a lei da gravitação de Newton ([10], [11]). Em seguida, analisamos possíveis efeitos da não-comutatividade no cenário entrópico da gravidade ao assumirmos a superfície holográfica como sendo uma esfera fuzzy. Em contraste com os outros trabalhos nessa mesma direção, que lidam com correções para a entropia (e, como consequência, para a força gravitacional aparente), devido aos resultados obtidos no capítulo anterior, nós concentramos nossa atenção na questão da interação da partícula de teste com a superfície holográfica. Consideramos este ponto importante devido ao papel representado pela partícula neste cenário entrópico, que é bastante diferente daquele na Relatividade Geral, baseado no princípio da equivalência².

²Para mostrar o papel especial da partícula de teste neste cenário, assim como a importância do conhecimento da dinâmica microscópica da interação entre a partícula e a superfície holográfica, podemos realizar o seguinte Gedankenexperiment: considerar uma partícula de teste com m comprimento de onda de Compton λ_m . No sistema a ser provado por ela, existirão várias superfícies holográficas neste espaço (em nosso caso, poderíamos estimar um número de telas por $\frac{\lambda_m R}{l_p^2}$, que é bem distante da escala de Planck). Então a questão é: a partícula contribuirá a entropia de qual dessas superfícies? E essa resposta só poderia ser respondida se tivéssemos detalhes sobre a dinâmica

Na ausência do aparato necessário para estudar diretamente o processo no qual a partícula passa a fazer parte da superfície holográfica, nós tentamos estudar como essa superfície é vista pela partícula. Para isso, adotamos como modelo uma superfície não-comutativa que, como argumentado, deve capturar alguns efeitos não-perturbativos da GQ. Como maior ferramenta, utilizamos uma generalização do teorema de Weyl, que provou-se bastante eficiente no estudo de geometrias deformadas.

O que concluímos desse estudo é que enquanto correções perturbativas (como no segundo termo de (3.27)) podem ser confiáveis bem abaixo da escala de Planck (uma vez que são independentes de um modelo universal), nenhuma correção deve ser confiável em escalas perto da escala de Planck. Em particular, correções dadas por (3.28), parecem ser irrelevantes quando comparadas às incertezas devido a nossa ignorância sobre os detalhes na interação entre a superfície e a partícula.

Nossa discussão abre o caminho para a especulação sobre possíveis violações do princípio da equivalência, embora isso pudesse acontecer somente em escalas próximas à de Planck, e, portanto, é difícil acreditar na possibilidade de qualquer confronto com resultados experimentais.

Para concluir, nosso estudo mostrou que nenhum efeito da não-comutatividade (que inclui pelo menos alguns dos efeitos não-perturbativos da gravidade quântica) será visto abaixo da escala de Planck, mas quando nos aproximamos dela, eles passarão a dominar as correções, mascarando as correções perturbativas. Para ir além no controle desses efeitos, seria necessário utilizar uma teoria completa para a gravidade quântica, como na forma de cordas, loops ou alguma outra.

microscópica do sistema partícula-superfície.

Apêndice A

Informações Adicionais para o

Teorema 2.2.1

Para uma \mathfrak{A} C^* -álgebra com unidade I , o operador auto-adjunto A afiliado à \mathfrak{A} é definido por um $*$ -homeomorfismo (com suporte não limitado se A também é não limitado) de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{A}$, i.e.,

$$f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \rightarrow f(A) \in \mathfrak{A}, \quad (\text{A.1})$$

cujos suporte da projeção $E \in \mathfrak{A}^{**}$, o dual do dual de \mathfrak{A} , é central.

Equivalentemente, pode-se definir a sequência $\{f_n; n = 0, 1, 2, \dots\} \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R})_+$ na bola unitária convergindo ponto a ponto para I , então para cada $B \in \mathfrak{A}$

$$\|[f_n(A), B]\|_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad (\text{A.2})$$

um vez que I é obviamente central.

Se a C^* -álgebra \mathfrak{A} não tem unidade, o operador auto-adjunto A é dito afiliado a \mathfrak{A} se ele é afiliado à álgebra multiplicativa $M(\mathfrak{A})$.

Um estado ω de \mathfrak{A} está no suporte de A se $\tilde{\omega}(E) = 1$, onde $\tilde{\omega}$ denota a extensão normal para \mathfrak{A}^{**} . Uma representação $\tilde{\pi}$ na mesma condição leva a $\tilde{\pi}(E) = I$.

A extensão normal de $f \rightarrow f(A) \in \mathfrak{A}$ para funções de Borel limitadas f em \mathbb{R} também serão denotadas $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow f(A) \in \mathfrak{A}^{**}$. Se $E(\lambda) \equiv \chi_{(-\infty, \lambda]}(A)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e o limite mais forte de $E(\lambda)$ é E como $\lambda \rightarrow \infty$, e $\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \tilde{\pi}(E(\lambda))$ é uma família espectral para todo π no suporte de A .

Nós dizemos que um operador auto-adjunto A afiliado à álgebra \mathfrak{A} , com unidade I é central se $f(A)$ está no centro de \mathfrak{A} . Se \mathfrak{A} não tem unidade, A é central se $f(A)$ está no centro de $M(\mathfrak{A})$. Ambos são verdade $\forall f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, i.e., para todo π no domínio de A nós temos $\pi(A)$ é afiliado a $\pi(\mathfrak{A})' \cup \pi(\mathfrak{A})''$.

O estado $\omega \in \mathcal{S}(\mathfrak{A})$ é dito no domínio de A se ele está no suporte de A e

$$\sup\{\omega(f(A)); f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})_+, f(\lambda) \leq \lambda^2, \lambda \in \mathbb{R}\} \equiv \omega(A^2) < \infty.$$

Neste caso, escrevemos

$$\omega(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\tilde{\omega}(E(\lambda)). \quad (\text{A.3})$$

Então seja ν uma medida de probabilidade regular em $\mathcal{S}(\mathfrak{A})$ com baricentro $\omega \in \mathcal{S}(\mathfrak{A})$, então ω está no suporte de A se e somente se ν é carregado pelos estados no suporte de A .

O estado ω está no domínio de A se e somente se ν é carregado pelos estados no domínio de A e $\phi \rightarrow \phi(A)^2$ é ν -integrável. E como $\phi(A)^2 \leq \phi(A^2)$, nós temos que $\phi \rightarrow \phi(A)$ é ν -quadrado-integrável. Portanto $\phi \rightarrow \phi(A)$ é integrável e $\phi \rightarrow \Delta_\phi A$ é quadrado-integrável.

Se $\omega \in \mathcal{D}(B)$, onde B é também um operador afiliado a \mathfrak{A} , temos, como na proposição 2.2.3,

$$\Delta_\omega(A) \geq \int_{\mathcal{S}(\mathfrak{A})} \Delta_\phi(A) d\nu(\phi), \quad (\text{A.4})$$

$$\Delta_\omega(A) \cdot \Delta_\omega(B) \geq \int_{\mathcal{S}(\mathfrak{A})} \Delta_\phi(A) \Delta_\phi(B) d\nu(\phi). \quad (\text{A.5})$$

Apêndice B

O Efeito Unruh

Em 1976, Willian Unruh demonstrou que a noção de vácuo depende do movimento descrito pelo observador, i.e., se está acelerado, o observador vê, ao invés do vácuo do observador inercial, um estado com várias partículas em equilíbrio térmico. Unruh propôs então que há uma temperatura definida associada com um detector acelerado.

Nas coordenadas de Minkowski, em duas dimensões, nós teríamos, como métrica

$$ds^2 = d\bar{u}d\bar{v} = dt^2 - dx^2, \quad (\text{B.1})$$

Onde \bar{u} e \bar{v} são eixos bissetores. Porém, desejando utilizar um referencial acelerado, podemos escolher as *coordenadas de Rindler* η e ξ , usando as transformações

$$\begin{aligned} t &= a^{-1}e^{a\xi} \sinh a\eta \\ x &= a^{-1}e^{a\xi} \cosh a\eta, \end{aligned}$$

tais que

$$\begin{aligned} \bar{u} &= -a^{-1}e^{-a\eta} \\ \bar{v} &= a^{-1}e^{a\eta} \end{aligned}$$

e

$$u = \eta - \xi \quad \text{e} \quad v = \eta + \xi,$$

então podemos escrever a métrica B.1 como

$$ds^2 = e^{2a\xi} dudv = e^{2a\xi}(d\eta^2 - d\xi^2). \quad (\text{B.2})$$

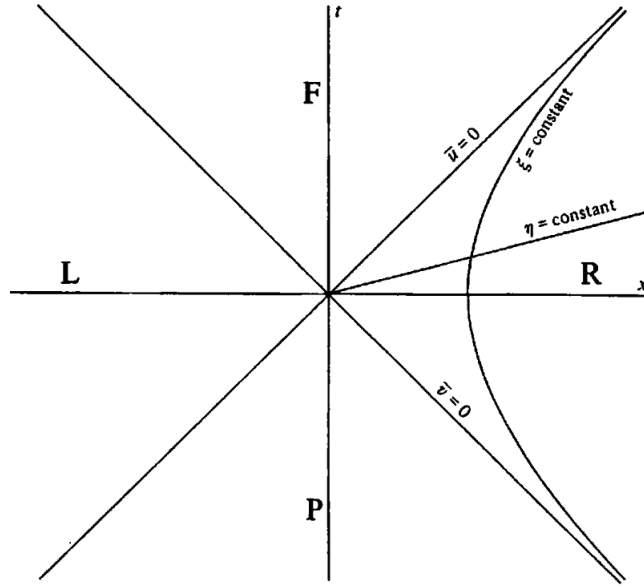


Figura B.1: Coordinatização de Rindler no espaço-tempo de Minkowski.

O par (η, ξ) define a linha mundo dos observadores acelerados, e a aceleração própria, a_p , tomada ao longo da curva onde $\xi = \text{constante}$, será a segunda derivada com respeito ao tempo próprio, i.e.,

$$\begin{aligned} u^i &= \frac{dx^i}{ds} = \left. \frac{dx^i}{d\xi} \frac{d\xi}{ds} \right|_{\xi+\text{const}} + \left. \frac{dx^i}{d\eta} \frac{d\eta}{ds} \right|_{\xi+\text{const}} \\ &= \left. \frac{dx^i}{d\eta} \frac{d\eta}{ds} \right|_{\xi+\text{const}} = ae^{-a\xi}(x, t) \end{aligned}$$

e então

$$w^i = \left. \frac{du^i}{d\eta} \frac{d\eta}{ds} \right|_{\xi+\text{const}} = a^2 e^{-2a\xi}(t, x),$$

e a aceleração própria será dada por

$$\begin{aligned} a_p^2 &= w^i w_i = a^4 e^{-4a\xi}(t^2 - x^2) = a^2 e^{-2a\xi} \\ \therefore a_p &= ae^{-a\xi} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

de onde podemos ver que, para grandes $\xi > 0$, temos uma aceleração própria fraca, e, para grandes $\xi < 0$, uma alta aceleração própria. O observador acelerado se aproxima da velocidade da luz c quando $\eta \rightarrow \pm\infty$. O tempo próprio é dado por $\tau = e^{a\xi}\eta$.

Chamamos a região onde $x > |t|$ a cunha direita de Rindler, denotada na figura (B.1) por R, e a região onde $x < |t|$ a cunha esquerda de Rindler, denotada por L. As linhas \bar{u} e \bar{v} funcionam como horizontes de eventos, de modo que R e L são dois universos casualmente disjuntos.

A dinâmica clássica de um campo sem massa ϕ no espaço-tempo bidimensional de Minkowski é dado pela equação de Klein-Gordon

$$\square\phi \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}} = 0,$$

que tem soluções proporcionais a ondas planas

$$\bar{u}_k \propto e^{i(kx - \omega t)},$$

i.e., $\bar{u}_k = A^2 e^{i(kx - \omega t)}$, onde $\omega = |k| > 0$ e $-\infty < k < \infty$. Usando o produto escalar, definido por

$$(\psi_1, \psi_2) = -i \int_{t=\text{constant}} \psi_1(x) \overleftrightarrow{\partial}_t \psi_2(x) d^{n-1}x, \quad (\text{B.4})$$

onde n é o número de dimensões, no nosso caso 2. Podemos normalizar nossas soluções usando $(\bar{u}_k, \bar{u}_{k'}) = \delta(k - k')$, digamos em $t = 0$, de modo que

$$\begin{aligned} (\bar{u}_k, \bar{u}_{k'}) &= \delta(k - k') \\ -i \int A^2 e^{ikx} (\omega' i) e^{-ik'x} - A^2 (-i\omega) e^{ikx} e^{-ik'x} &= \delta(k - k') \\ 2\pi(\omega + \omega') A^2 \int \frac{e^{i(k-k')x}}{2\pi} dx &= \delta(k - k') \\ 4\pi\omega A^2 &= 1 \\ A &= (4\pi\omega)^{1/2}, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

e a solução se torna

$$\bar{u}_k = (4\pi\omega)^{-1/2} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (\text{B.6})$$

É necessário notar que, neste formalismo, para $(\bar{u}_k^*, \bar{u}_{k'}^*)$, temos

$$\begin{aligned}
(\bar{u}_k^*, \bar{u}_{k'}^*) &= \frac{-i}{4\pi\omega} \int e^{-ikx} (-i\omega') e^{ik'x} - (i\omega) e^{-ikx} e^{ik'x} dx \\
&= \frac{-(\omega + \omega') 2\pi}{4\pi\omega} \int \frac{e^{i(k'-k)x}}{2\pi} dx \\
&= -\delta(k - k')
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Esses modos \bar{u}_k tem frequência positiva com respeito ao vetor de Killing do tipo tempo ∂_t , de modo que

$$\mathcal{L}_{\partial_t} \bar{u}_k = -i\omega \bar{u}_k. \tag{B.8}$$

Para $k > 0$, temos ondas se movendo para a direita $(4\pi\omega)^{-1/2} e^{-i\omega\bar{u}}$ e, para $k < 0$, temos ondas se movendo para a esquerda $(4\pi\omega)^{-1/2} e^{-i\omega\bar{v}}$. E o estado de vácuo do espaço-tempo de Minkowski $|O_M\rangle$ é construído sob a condição

$$a_k |O_M\rangle = 0, \tag{B.9}$$

onde a_k é o operador de aniquilação, de modo que possamos promover os coeficientes de Fourier da expansão de ϕ em termos de \bar{u}_k para os operadores de criação e aniquilação.

No espaço-tempo de Rindler, temos, pela métrica na equação (B.2), a equação de Klein-Gordon modificada e as derivadas parciais com respeito a u e v ao invés de \bar{u} e \bar{v} , portanto

$$e^{2a\xi} \square \phi e^{2a\xi} = \left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \right) \phi = e^{2a\xi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} = 0,$$

que tem como soluções

$$u_k = (4\pi\omega)^{-1/2} e^{i(k\xi \pm \omega\eta)}, \tag{B.10}$$

onde a constante de normalização é obtida de maneira análoga a que possuíamos anteriormente, e os sinais \pm são para as regiões L e R respectivamente, uma vez que na região R temos $0 < x < \infty$ e na região L temos $-\infty < x < 0$. Aqui temos também $\omega = |k| > 0$ e $-\infty < k < \infty$. E os vetores de Killing com respeito a R, ∂_η , e a L, $-\partial_\eta$, são tais que

$$\mathcal{L}_{\pm\partial_\eta} u_k = -i\omega u_k. \tag{B.11}$$

Nós definimos

$$R_{u_k} = \begin{cases} (4\pi\omega)^{-1/2} e^{i(k\xi - \omega\eta)} & \text{in R} \\ 0 & \text{in L,} \end{cases}$$

e

$$L_{u_k} = \begin{cases} (4\pi\omega)^{-1/2} e^{i(k\xi + \omega\eta)} & \text{in L} \\ 0 & \text{in R.} \end{cases}$$

Note que aqui o estado de vácuo é definido como

$$b_k^{(1)}|0_R\rangle = b_k^{(2)}|0_R\rangle = 0, \quad (\text{B.12})$$

E, novamente, os coeficientes de Fourier da expansão de ϕ em termos de R_{u_k} e L_{u_k} podem ser promovidos a operadores de criação e aniquilação.

O campo ϕ na base, pode ser escrito então na base de Minkowski como

$$\phi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_k \bar{u}_k + a_k^\dagger \bar{u}_k^*) \quad (\text{B.13})$$

ou na base de Rindler como

$$\phi_R = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (b_k^{(1)} L_{u_k} + b_k^{(1)\dagger} L_{u_k}^* + b_k^{(2)} R_{u_k} + b_k^{(2)\dagger} R_{u_k}^*). \quad (\text{B.14})$$

Para ver quais partículas de Rindler estão presentes no vácuo de Minkowski, é necessário determinar a transformação e Bogoliubov entre os dois modos. Estamos em busca de

$$N_k = \langle 0_M | b_k^{(1,2)\dagger} b_k^{(1,2)} | 0_M \rangle, \quad (\text{B.15})$$

então podemos reexpandir as funções de onda \bar{u}_k e \bar{u}_K^* na nova base

$$\bar{u}_k = \sum_{i,k'} [\alpha_{kk'}^{(i)} {}^{(i)}u_{k'} + \beta_{kk'}^{(i)} {}^{(i)}u_{k'}^*], \quad (\text{B.16})$$

$$\bar{u}_k^* = \sum_{i,k'} [\alpha_{kk'}^{(i)*} {}^{(i)}u_{k'}^* + \beta_{kk'}^{(i)*} {}^{(i)}u_{k'}], \quad (\text{B.17})$$

onde os termos α e β são coeficientes de Bogoliubov, $\alpha_{ij} = (\bar{u}_i, u_j)$ e $\beta_{ij} = -(\bar{u}_i, u_j^*)$. Fica claro que o segundo termo será o criador de partículas e é, portanto, o que precisamos calcular

$$N_k = \sum_{k'} |\beta_{kk'}|^2 \cdot u \quad (\text{B.18})$$

Podemos realizar esse cálculo de duas maneiras diferentes, uma é calcular $|\beta_{kk'}|^2$ explicitamente para o caso contínuo, fazendo o produto escalar entre $u_{k'}^*$ e \bar{u}_k explicitamente, tal que

$$\begin{aligned}\beta_{kk'} &= -(u_{k'}^*, \bar{u}_k) \\ &= i \int_{t=\text{constant}} [u_{k'}^* \partial_t \bar{u}_k^* - (\partial_t u_{k'}^*) \bar{u}_k^*] dx.\end{aligned}\quad (\text{B.19})$$

Podemos escolher como direção de propagação da onda $k > 0$ e reescrever as equações de onda em termos de $\bar{u} = t - x$ para facilitar as derivadas com respeito ao tempo, levando em consideração que $u = -\frac{1}{a} \ln(-a\bar{u})$, onde o argumento do logaritmo não é um problema se fizermos $t = 0$, o que é desejável, uma vez que o produto escalar deve valer para qualquer tempo fixado. Então as equações que usaremos ficam

$$\bar{u}_k^* = (4\pi\omega)^{(-1/2)} e^{i\omega\bar{u}} \quad (\text{B.20})$$

$$u_{k'}^* = (4\pi\omega')^{(-1/2)} (-a\bar{u})^{-i\omega'/a}, \quad (\text{B.21})$$

quando $t = 0$, essas equações assumem a forma

$$\bar{u}_k^* \Big|_{t=0} = (4\pi\omega)^{(-1/2)} e^{i\omega x} \quad (\text{B.22})$$

$$u_{k'}^* \Big|_{t=0} = (4\pi\omega')^{(-1/2)} (ax)^{-i\omega'/a}. \quad (\text{B.23})$$

E as derivadas de (B.20) e (B.21) com respeito ao tempo quando o tempo é igual a zero ficam

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{u}_k^*) \Big|_{t=0} = (4\pi\omega)^{(-1/2)} i\omega e^{i\omega x} \quad (\text{B.24})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_{k'}^*) \Big|_{t=0} = (4\pi\omega')^{(-1/2)} (-i\omega') (ax)^{-i\omega'/a-1}. \quad (\text{B.25})$$

Substituindo as equações (B.20), (B.21), (B.24) e (B.25) em (B.19), obtemos

$$\begin{aligned}\beta_{kk'} &= \frac{i}{4\pi\sqrt{\omega\omega'}} \int_{t=0} \left[(ax)^{-\frac{i\omega'}{a}} i\omega e^{-i\omega x} + e^{-i\omega x} (ax)^{(-\frac{i\omega}{a}-1)} i\omega' \right] dx \\ &= \frac{(a)^{-\frac{i\omega'}{a}} i}{4\pi\sqrt{\omega\omega'}} \int_{t=0} e^{-i\omega x} \left[x^{-\frac{i\omega'}{a}} i\omega + x^{(-\frac{i\omega}{a}-1)} \frac{i\omega'}{a} \right] dx.\end{aligned}\quad (\text{B.26})$$

Para que essa integral seja convergente quando $x \rightarrow \infty$, é necessário fazer $\omega \rightarrow \omega + i\delta$ e tomar o limite quando $\delta \rightarrow 0^+$.

Separando a integral em duas parte, começaremos pela primeira

$$\begin{aligned}
i\omega \int dx e^{-i\omega x} x^{-\frac{i\omega'}{a}} &= (i\omega)^{\frac{i\omega'}{a}} \int d(i\omega x) e^{-(i\omega x)} (i\omega x)^{[(\frac{i\omega'}{a}+1)-1]} \\
&= \Gamma\left(1 - \frac{i\omega'}{a}\right) (i\omega)^{\frac{i\omega'}{a}} \\
&= -\frac{i\omega'}{a} \Gamma\left(-\frac{i\omega'}{a}\right) (i\omega)^{\frac{i\omega'}{a}}.
\end{aligned} \tag{B.27}$$

E a segunda parte

$$-\frac{i\omega'}{a} \int dx e^{-i\omega x} x^{(-\frac{i\omega'}{a}-1)} = -\Gamma\left(-\frac{i\omega'}{a}\right) \frac{i\omega'}{a} (i\omega)^{\frac{i\omega'}{a}}. \tag{B.28}$$

De modo que a integral (B.26) se torna

$$\beta_{kk'} = -\frac{(a)^{-\frac{i\omega'}{a}} i (i\omega)^{(\frac{i\omega'}{a}+1)} \omega'}{2\pi\sqrt{\omega\omega'}} \frac{\omega'}{\omega a} \Gamma\left(-\frac{i\omega'}{a}\right) \tag{B.29}$$

O quadrado dos coeficientes de Bogoliubov são

$$\begin{aligned}
|\beta_{kk'}|^2 &= \frac{-\omega^2 \omega'^2 e^{-\frac{\pi\omega'}{a}}}{4\pi^2 a^2 \omega^3 \omega'} \Gamma\left(\frac{i\omega'}{a}\right) \Gamma\left(-\frac{i\omega'}{a}\right) \\
&= \frac{e^{-\frac{\pi\omega'}{a}}}{4\pi^2 \omega a} \frac{i\pi}{\sin\left(\frac{\pi i\omega'}{a}\right)} \\
&= \frac{1}{2\pi\omega a} \frac{e^{-\frac{\pi\omega'}{a}}}{e^{\frac{\pi\omega'}{a}} - e^{-\frac{\pi\omega'}{a}}} \\
&= \frac{1}{2\pi\omega a} \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega'}{a}} - 1},
\end{aligned} \tag{B.30}$$

de onde podemos argumentar que o termo $\frac{1}{2\pi\omega a}$ é uma taxa de contagem de partículas, que vai para infinito se contamos durante todo o tempo.

Outra maneira de calcular os coeficientes é utilizando condições de ortogonalização, i.e., podemos escrever u_k e u_k^* em termos de \bar{u}_k e \bar{u}_K^* e ver o que acontece quando substituimos uma equação na outra. Então

$$u_k = \sum_{i,k'} [\alpha_{kk'}^{(i)*} \bar{u}_k^{(i)} - \beta_{kk'}^{(i)} \bar{u}_k^{(i)*}] \tag{B.31}$$

$$u_k^* = \sum_{i,k'} [\alpha_{kk'}^{(i)} \bar{u}_k^{(i)*} - \beta_{kk'}^{(i)*} \bar{u}_k^{(i)}]. \tag{B.32}$$

Então, novamente, u_k pode ser escrito usando (B.16) e (B.17), como

$$u_k = \sum_{k'} \sum_n [\alpha_{kk'}^* (\alpha_{kk'} u_n + \beta_{kk'} u_n^*) - \beta_{kk'} (\alpha_{kk'}^* u_n^* + \beta_{kk'}^* u_n)], \quad (\text{B.33})$$

onde nós podemos usar condições de ortonormalização, tal que

$$\sum_{k'} (\alpha_{kk'}^* \beta_{nk'} - \beta_{kk'} \alpha_{nk'}^*) = 0 \quad \text{e} \quad (\text{B.34})$$

$$\sum_{k'} (\alpha_{kk'}^* \alpha_{nk'} - \beta_{kk'} \beta_{nk'}^*) = \delta_{nk'} \quad (\text{B.35})$$

Para usar a segunda condição, precisamos ver como $|\alpha_{kk'}|^2$ se relaciona com $|\beta_{kk'}|^2$. Então, primeiro escrevemos $\alpha_{kk'}$,

$$\begin{aligned} \alpha_{kk'} &= (u_{k'}, \bar{u}_k) \\ &= \frac{-i}{4\pi\sqrt{\omega\omega'}} \int (ax)^{\frac{i\omega'}{a}} (i\omega) e^{i\omega x} + e^{i\omega x} (ax)^{(\frac{i\omega'}{a}-1)} (i\omega') dx \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Note que, quando integrado, em um caso análogo ao feito para $\beta_{kk'}$, obteremos o termo de $(i\omega)^{\frac{\pi\omega'}{a}}$. O resto da equação será exatamente a conjugação complexa de $\beta_{kk'}$, de modo que, quando elevado ao quadrado, nós teremos

$$|\alpha_{kk'}|^2 = \frac{-\omega^2 \omega'^2 e^{\frac{\pi\omega'}{a}}}{4\pi^2 a^2 \omega^3 \omega'} \Gamma\left(\frac{i\omega'}{a}\right) \Gamma\left(-\frac{i\omega'}{a}\right), \quad (\text{B.37})$$

que nos dá a relação

$$|\alpha_{kk'}|^2 = e^{\frac{2\pi\omega'}{a}} |\beta_{kk'}|^2 \quad (\text{B.38})$$

Usando essa relação no caso discreto para se adequar a equação (B.35), encontramos que

$$\begin{aligned} e^{\frac{2\pi\omega'}{a}} |\beta_{kk'}|^2 + |\beta_{kk'}|^2 &= 1 \\ e^{\frac{2\pi\omega'}{a}} N_k + N_k &= 1 \\ \therefore N_k &= \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega'}{a}} - 1} \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

Podemos identificar esse termo final, das equações (B.30) e (B.39), ao espectro da radiação de Planck, de modo que

$$\frac{\omega'}{k_B T} = \frac{2\pi\omega'}{a} \quad (\text{B.40})$$

Que nos dá a temperatura $T_0 = a/2\pi k_B$. Para descobrir qual será a temperatura observada pelo observador acelerado, podemos usar a relação de Tolman $T = g_{00}^{-1/2}T_0$, onde g_{00} é como na equação (B.2). Incluindo nessa expressão os termos \hbar e c , de modo a recuperar as unidades adequadas, nós obtemos, portanto, a temperatura de Unruh

$$k_B T = \frac{\hbar a_p}{2\pi c} \tag{B.41}$$

Apêndice C

Teorema de Weyl

No capítulo 5, nós enunciamos o teorema de Weyl e mostramos vários casos para os quais ele vale. Aqui, ao invés de fazer uma prova completa, nós decidimos por provar para um caso mais simples, para \mathbb{R}^2 , que pode ser facilmente generalizado para \mathbb{R}^n .

Antes de começar a prova, enunciaremos um lema.

Lema C.0.1. *O teorema de Weyl vale para domínios retangulares.*

Demonstração. Dado um domínio retangular Ω no plano (x, y) , de largura a e altura b , com seu canto inferior esquerdo localizado na origem, sua autofunção para o operador de Laplace é dada por

$$u_{mn}(x, y) = \sin\left(m\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(n\frac{\pi}{b}y\right), \quad (\text{C.1})$$

e seus autovalores são

$$\lambda_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad m, n > 0. \quad (\text{C.2})$$

A função de contagem será dada por

$$\begin{aligned} N(\lambda) &= \#\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \leq \frac{\lambda}{\pi^2}\} \\ &= \frac{1}{4} \left(\text{área da elipse } \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} \leq \frac{\lambda}{\pi^2} \right) \\ &= \frac{ab\lambda}{4\pi} = \frac{\text{Area}(\Omega) \lambda}{4\pi} \end{aligned}$$

Portanto, o teorema de Weyl funciona. □

Vamos provar agora o teorema de Weyl para o caso onde Ω é um domínio limitado em \mathbb{R}^2 .

Demonstração. Vamos mostrar que se Ω é um conjunto aberto limitado, então

$$\frac{Area(\Omega)}{4\pi} \leq \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_{\Omega}(\lambda)}{\lambda}. \quad (C.3)$$

Seja I a união disjunta de retângulos abertos I_k dentro de Ω . Então nós temos que $N_I(\lambda) \leq N_{\Omega}(\lambda)$ e, uma vez que I_k são disjuntos, $N_I(\lambda) = \sum N_{I_k}(\lambda)$.

Para cada retângulo,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_{I_k}(\lambda)}{\lambda} = \frac{Area(I_k)}{4\pi}. \quad (C.4)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{Area(I)}{4\pi} &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_I(\lambda)}{\lambda} \leq \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_{\Omega}(\lambda)}{\lambda} \\ \frac{Area(\Omega)}{4\pi} &\leq \frac{Area(I)}{4\pi} \leq \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_{\Omega}(\lambda)}{\lambda}. \end{aligned} \quad (C.5)$$

Assim, (C.3) vale.

Suponha agora que Ω está dentro de um retângulo R , e denote por Ω' o complemento do fecho de Ω de maneira que

$$\frac{Area(\Omega)}{4\pi} + \frac{Area(\Omega')}{4\pi} \leq \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_{\Omega}(\lambda)}{\lambda} + \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_{\Omega'}(\lambda)}{\lambda}. \quad (C.6)$$

Também $N_{\Omega}(\lambda) + N_{\Omega'}(\lambda) \leq N_R(\lambda)$, tal que

$$\begin{aligned} \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_{\Omega}(\lambda)}{\lambda} + \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_{\Omega'}(\lambda)}{\lambda} &\leq \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_{\Omega}(\lambda)}{\lambda} + \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_{\Omega'}(\lambda)}{\lambda} \\ &\leq \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_R(\lambda)}{\lambda} \\ &= \frac{Area(R)}{4\pi}, \end{aligned} \quad (C.7)$$

um vez que $Area(\Omega) + Area(\Omega') = Area(R)$. Então

$$\frac{Area(\Omega)}{4\pi} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_{\Omega}(\lambda)}{\lambda}. \quad (C.8)$$

□

Apêndice D

Fórmula de Lichnerowics

Neste capítulo, provaremos a *Fórmula Generalizada de Lichnerowics*.

Queremos encontrar D tal que

$$D^2 = \gamma^\mu [(\partial_\mu + \omega_\mu) \otimes 1 + 1 \otimes (-\frac{1}{2}gA_\mu)], \quad (\text{D.1})$$

onde ω_μ é a conexão espinorial e $\gamma^\mu := e^\mu_a \gamma^a$, onde γ^a são escolhidos para satisfazer $\{\gamma_a, \gamma_b\} = -2\delta_{ab}$, i.e.,

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = -g^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu}, \quad \text{onde } \gamma^{\mu\nu} := \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (\text{D.2})$$

Nós temos que

$$\nabla_\mu \gamma^\nu = \partial_\mu \gamma^\nu + \omega_\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \omega_\mu \quad (\text{D.3})$$

Corolário D.0.2. $[(\partial_\mu + \omega_\mu), \gamma^\nu] = -\Gamma_{\mu\rho}^\nu \gamma^\rho$.

Corolário D.0.3. $\nabla_\mu e_a^\nu := \partial_\mu e_a^\nu - \omega_{\nu a}^b e_b^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu e_a^\rho = 0$.

Introduzindo as notações $\omega_\mu := \omega_\mu \otimes 1$, $A_\mu := 1 \otimes \mathcal{A}_\mu$, onde $\mathcal{A}_\mu = -i2gA_\mu$, portanto, nós temos

$$D = \gamma^\mu (\partial_\nu + \omega_\mu + A_\mu) \equiv \gamma^\mu (\partial_\mu + \hat{\omega}_\mu) \quad (\text{D.4})$$

Teorema D.0.4. $(g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + \mathbb{A}^\mu \partial_\nu + \mathbb{B}) \equiv (g^{\mu\nu} \nabla_\nu^\omega \nabla_\nu^\omega + \mathbb{E})$, onde

$$\mathbb{A}^\mu = 2\omega^\nu - \Gamma^\nu, \quad \text{com } \Gamma^\nu := g^{\rho\sigma} \Gamma_{\rho\sigma}^\mu;$$

$$\mathbb{B} = \mathbb{E} + g^{\mu\nu} (\partial_\mu \omega_\nu + \omega_\mu \omega_\nu + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \omega_\rho);$$

$$\nabla_\mu^\omega := \nabla_\mu + \omega_\mu, \quad \text{onde } \nabla_\mu \text{ é a conexão usual de Levi-Civita.}$$

Teorema D.0.5. $D^2 = -(g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + \mathbb{A}^\mu \partial_\mu + \mathbb{B})$ onde

$\mathbb{A}^\mu = 2\hat{\omega}^\mu - \Gamma^\mu$, com $\hat{\omega}^\mu = \omega^\mu + A^\mu$;

$\mathbb{B} = (\partial^\mu \hat{\omega}_\mu + \hat{\omega}^\mu \hat{\omega}_\mu - \Gamma^\mu \hat{\omega}_\mu + \frac{1}{4}R \otimes 1 - \frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu} \otimes F_{\mu\nu})$,

onde R é o escalar de Ricci associado a $g^{\mu\nu}$ e $F_{\mu\nu} := \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]$.

Corolário D.0.6. $D^2 = \Delta 1 \otimes 1 + \frac{1}{4}R \otimes 1 - \frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu} \otimes F_{\mu\nu}$ onde $\Delta := -g^{\mu\nu} \nabla_\mu^\omega \nabla_\nu^\omega$. Esta é a Fórmula Generalizada de Lichnerowics para um feixe espinorial torcido (twisted spinor bundle).

Demonstração. Do teorema D.0.5, temos que

$$D^2 = -(g^{\mu\nu} \nabla_\mu^\omega \nabla_\nu^\omega + \mathbb{E}), \quad (\text{D.5})$$

onde $\mathbb{E} = \mathbb{B} - g^{\mu\nu} (\partial_\mu \hat{\omega}_\nu + \hat{\omega}_\mu \hat{\omega}_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \omega_\rho)$, i.e.,

$$\mathbb{E} = \frac{1}{4}R \otimes 1 - \frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu} \otimes F_{\mu\nu}. \quad (\text{D.6})$$

□

O termo $F_{\mu\nu}$ é a torção de curvatura, que não foi usada neste trabalho.

Referências Bibliográficas

- [1] Joseph Polchinski - *String Theory*. Vol. 1 & 2. Cambridge University Press, 1998.
- [2] Katrin Becker, Melanie Becker, John H. Schwarz - *String Theory and M-Theory: A Modern Introduction*. Cambridge University Press, 2007.
- [3] Martin Bojowald - *Canonical Gravity and Applications - Cosmology, Black Holes and Quantum Gravity*. Cambridge University Press, 2011.
- [4] E. P. Verlinde, JHEP **1104**, 029 (2011) [arXiv:1001.0785 [hep-th]].
- [5] L. Smolin, arXiv:1001.3668 [gr-qc].
- [6] S. Doplicher, K. Fredenhagen and J. E. Roberts, Commun. Math. Phys. **172**, 187 (1995) [hep-th/0303037].
- [7] C. Perini and G. N. Tarnetta, arXiv:1211.7050 [gr-qc].
- [8] L. Freidel and E. R. Livine, Class. Quant. Grav. **23**, 2021 (2006) [hep-th/0502106].
- [9] S. A. Major and K. L. Setter, Class. Quant. Grav. **18**, 5293 (2001) [gr-qc/0108034].
- [10] L. Modesto and A. Randonò, arXiv:1003.1998 [hep-th].
- [11] P. Nicolini, Phys. Rev. D **82**, 044030 (2010) [arXiv:1005.2996 [gr-qc]].
- [12] J. Madore, Class. Quant. Grav. **9**, 69 (1992).
- [13] B. P. Dolan, JHEP **0502**, 008 (2005) [hep-th/0409299].

- [14] A. Pinzul, *Class. Quant. Grav.* **28**, 195005 (2011) [arXiv:1010.5831 [hep-th]].
- [15] G. Alexanian, A. Pinzul and A. Stern, *Nucl. Phys. B* **600**, 531 (2001) [hep-th/0010187].
- [16] A. Connes, “Noncommutative geometry,” Academic Press, 661 p. (1994)
- [17] U. Carow-Watamura and S. Watamura, *Commun. Math. Phys.* **183**, 365 (1997) [hep-th/9605003].
- [18] H. Grosse and P. Presnajder, *Lett. Math. Phys.* **33**, 171 (1995).
- [19] A. Pinzul and A. Stern, *Phys. Lett. B* **512**, 217 (2001) [hep-th/0103206].
- [20] M. A. Markov, *JETP Lett.* **45**, 141 (1987) [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **45**, 115 (1987)].
- [21] G. Dvali, G. F. Giudice, C. Gomez and A. Kehagias, *JHEP* **1108**, 108 (2011) [arXiv:1010.1415 [hep-ph]].
- [22] Birrel, Davies - *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge University Press, 1984
- [23] Robert M. Wald - *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.
- [24] L. D. Landau, E. M. Lifshitz - *Statistical Physics, Volume 5 of Course of Theoretical Physics*, part 1, 3th edition, revised and enlarged. Pergamon Press, 1980.