Universidade de Brasília

Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Ciência da Informação e Documentação

Departamento de Economia

Ensaios sobre Estabilidade Financeira

Solange Maria Guerra

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós–graduação em Economia do Departamento de Economia da UnB como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Economia

Orientador: Prof. PhD. Rodrigo Andrés de Souza Peñaloza

Brasília
Março de 2013

Solange Maria Guerra

Ensaios sobre Estabilidade Financeira

Tese apresentada ao Programa de Pós–graduação em Economia do Departamento de Economia da Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Ciência da Informação e Documentação da UnB como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Economia.

Prof. Rodrigo Andrés de Souza Peñaloza, PhD.
Orientador
Universidade de Brasília (UnB)

Prof. Dr. Benjamin Miranda Tabak
Banco Central do Brasil (BCB)
Universidade Católica de Brasília (UCB)

Prof. Paulo César Coutinho, PhD.
Universidade de Brasília (UnB)

Prof. Dr. Tito Belchior Silva Moreira
Universidade Católica de Brasília

Prof. Maria Eduarda Tannuri Pianto, PhD.
Universidade de Brasília (UnB)

Brasília, 20 de Março de 2013

Ficha Catalográfica

Guerra, Solange Maria

Ensaios sobre Estabilidade Financeira / Solange Maria Guerra; orientador: PhD. Rodrigo Andrés de Souza Peñaloza. — Brasília : UnB, Departamento de Economia, 2013.

v., 91 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (doutorado) - Universidade de Brasília, Departamento de Economia.

Inclui referências bibliográficas.

1. Economia – Tese. 2. Estabilidade Financeira. 3. Equilíbrio Geral. 4. Agentes Heterogêneos. 5. Assunção de Risco. 6. Exposição Cambial. 7. Risco Sistêmico. 8. Probabilidade de default. i. Peñaloza, Rodrigo Andrés de. ii. Universidade de Brasília. Departamento de Economia. iii. Título.

CDD: XXX

Agradecimentos

Agradeço inicialmente ao meu orientador, Rodrigo Andrés de Souza Peñaloza, pela orientação e apoio e a Benjamin Miranda Tabak, pelo incentivo e a disposição em sempre compartilhar seus conhecimentos. Aos membros da banca examinadora pelas sugestões para a elaboração desta tese.

Às pessoas que contribuíram para a minha formação durante o curso de doutorado, especialmente os professores José Guilherme de Lara Resende, Maria Eduarda Tannuri Pianto, Paulo César Coutinho e Roberto Ellery Júnior. Aos colegas do curso pela convivência harmoniosa e aos colegas de profissão que contribuíram para cada etapa de minha formação.

Um agradecimento especial a Rodrigo Cesar de Castro Miranda pela preciosa ajuda com os programas computacionais utilizados e a Sérgio Rubens Stancato de Souza pelo auxílio com a editoração deste trabalho.

Ao Banco Central do Brasil, pelo patrocínio do curso por meio do Programa de Pós-Graduação e a Eduardo José Araújo Lima pela orientação técnica em consonância com o referido programa.

Finalmente, agradeço à minha família, pelo apoio, carinho e compreensão.

Resumo

Guerra, Solange Maria; Peñaloza, Rodrigo Andrés de. **Ensaios sobre Estabilidade Financeira**. Brasília, 2013. 91p. Tese de Doutorado — Departamento de Economia, Universidade de Brasília.

Esta tese é composta por três ensaios sobre estabilidade financeira com o objetivo de propor metodologias para identificar potenciais ameaças à estabilidade do sistema bancário. O primeiro ensaio é teórico e mostra a existência de equilíbrio geral num jogo de agentes heterogêneos com possibilidade de default dos agentes. O segundo ensaio examina os fatores determinantes da assunção de risco e o impacto da exposição cambial e da taxa de câmbio sobre a assunção de risco dos bancos brasileiros. Esta análise é feita utilizando dados em painel não-balanceado de 71 bancos do primeiro trimestre de 2002 ao segundo trimestre de 2012. Os resultados obtidos sugerem que a exposição cambial impacta a assunção de risco por meio da volatilidade dos retornos e da alavancagem. Porém, a magnitude desse impacto não é significante em termos econômicos devido principalmente ao baixo grau médio de assunção de risco dos bancos. Por outro lado, os resultados sugerem que bancos estrangeiros apresentam um comportamento mais arriscado via exposição cambial que os bancos privados domésticos. O terceiro ensaio propõe medidas de risco sistêmico a partir da abordagem de ativos contingentes, da construção de densidade multivariada do sistema bancário e de análise de clusters. Os indicadores buscam capturar o estresse advindo do risco de crédito que poderia tornar-se sistêmico. Eles capturam não só as vulnerabilidades individuais dos bancos, mas também a estrutura de dependência de estresse entre eles. Resultados considerando os clusters sugerem que essa abordagem permite identificar os bancos considerados semelhantes. Os resultados obtidos na análise empírica também mostram que os indicadores captam os momentos de aumento de risco sistêmico vivenciado pelo sistema bancário brasileiro nos últimos anos.

Palavras–chave

Estabilidade Financeira. Equilíbrio Geral. Agentes Heterogêneos. Assunção de Risco. Exposição Cambial. Risco Sistêmico. Probabilidade de default.

Abstract

Guerra, Solange Maria; Peñaloza, Rodrigo Andrés de. **Essays on Financial Stability**. Brasília, 2013. 91p. PhD Thesis — Department of Economia, Universidade de Brasília.

This thesis aims to propose approaches to identify potential threats to the financial stability of the banking system by means of three essays. The first essay shows the existence of equilibrium of a game with heterogeneous agents that can lend, borrow or default. The second essay investigates the drivers of the risk-taking for Brazilian banks. It also analyzes the effects of the exchange rate exposure on bank risk-taking. This study was carried out using an unbalanced panel data with 71 banks, from the first quarter of 2002 until the second quarter of 2012. The results suggest that the impact of exchange rate exposure on bank risk-taking is statistically significant. However, the impact is not economic significant. The results also suggest that foreign banks introduce risk in the national banking system by means of the exchange rate exposure. The third essay proposes measures of systemic risk developed from the contingent claims approach, and a multivariate density of the banking system, and the cluster analysis. The aim of these measures is to identify the systemic risk that can evolve from credit risk. The empirical results show that this measure identified the increase systemic risk experienced by the Brazilian banking system during the periods of stress in the last decade.

Keywords

Financial Stability. General Equilibrium. Heterogeneous Agents. Risk-taking. Exchange Rate Exposition. Systemic Risk. Default Probability.

Sumário

Lista de figuras

Lista de tabelas

1 Introdução

Crises financeiras podem ter efeitos devastadores não só sobre o sistema financeiro mas também sobre a economia real, podendo provocar grandes perdas de bem-estar social. Portanto, assegurar a estabilidade financeira é crucial para manter a estabilidade monetária e macroeconomica e promover crescimento sustentável. Essa importância tem se refletido no aumento no número de bancos centrais que tem estabelecido nas duas últimas décadas mandato para assegurar a estabilidade financeira, além de seu mandato de promover a estabilidade monetária.[1].

De acordo com Allen e Wood (2006), acredita-se que o termo estabilidade financeira foi utilizado pela primeira vez em 1994 pelo Banco da Inglaterra para denotar seus objetivos não relacionados ao funcionamento eficiente do sistema financeiro e à manutenção da estabilidade de preços. No entanto, as preocupações de bancos centrais com a estabilidade financeira antecedem em muito o uso do termo, sendo a que a busca de estabilidade financeira estava restrita à estabilidade do setor bancário. O Banco da Inglaterra e o Banco da França assumiram essa tarefa antes do fim do século XIX, enquanto que o Banco da Itália assumiu-a explicitamente em 1905. Lembrando também o *Federal Reserve* foi fundado principalmente devido à preocupação com a estabilidade do sistema bancário americano.

A maior enfase em estabilidade financeira está relacionada às mudanças estruturais ocorridas nos sistemas financeiros nas útimas décadas devido à expansão, liberalização e globalização dos mesmos. Se por um lado essas mudanças trouxeram muitos benefícios para a economia mundial, por outro, revelou um lado negativo por meio das diversas experiências de crises desde a década de 1990 até a recente crise financeira mundial.

Apesar da tarefa de assegurar a estabilidade financeira ter ganho maior relevância nos últimos 20 anos, tanto na academina quanto nos bancos centrais, não há na literatura consenso sobre a definição de estabilidade financeira

[1]Maiores detalhes sobre o aumento de bancos centrais com mandato para assegurar estabilidade financeira podem ser obtidos em (OOSTERLOO et al., 2007,), (OOSTERLOO; HAAN, 2004,) e (CIHAK, 2007,)

nem sobre quais políticas públicas deveriam ser perseguidas para assegurá-la. Muitos pesquisadores apresentaram suas definições ou, alternativamente, a definição de instabilidade financeira. Schwartz (1986), por exemplo, define instabilidade financeira como uma crise alimentada pelo medo de que os meios de pagamentos não estejam disponívies a qualquer preço, levando a uma disputa acirrada por recursos. ... Para tentar restaurar suas reservas, bancos podem recorrer a empréstimos, se recusar a rolar os empréstimos existentes ou recorrer a venda de ativos; Mishkin (1991) define estabilidade financeira como a prevalência de um sistema financeiro capaz de assegurar a alocação eficiente da poupança para as oportunidades de investimento. De forma semelhante, o Banco Central Europeu caracteriza estabilidade financeira como a existência de um sistema financeiro funcionando de forma harmoniosa e que tenha suas habilidades de facilitar e dar suporte à performance da economia de maneira eficiente preservadas (ECB (2005)). Alguns autores, como Schinasi (2004) e Allen e Wood (2006), analisam a questão com maior profundidade e listam uma série de características que uma definição de estabilidade financeira deveria contemplar[2].

Embora não se tenha uma definição unânime de estabilidade financeira, algumas características são bastante comuns nas definições: primeiro é o funcionamento do sistema financeiro de forma eficiente e harmoniosa para facilitar a alocação dos recursos na economia; segundo é o sistema financeiro estar em condições tal que seja capaz de absorver choques. Além disso, estabilidade financeira é vista de forma ampla, englobando diferentes aspectos do sistema financeiro, como infraestrutura, instituições e mercados. Dada a intrincada interrelação destes compontentes do sistema financeiro e a relação deles com a economia real, expectativas de pertubações em qualquer um dos componentes pode gerar desequilíbrios ameaçando a estabilidade financeira. Portanto, o monitoramento e a promoção da estabilidade financeira se mostra uma atividade bastante complexa.

Os desafios que se apresentam na busca e na manutenção da estabilidade financeira vão além da estabilidade dos preços dos ativos. Não há de se esperar que um sistema financeiro dinâmico evite instantes de volatilidade e turbulência. Também é indesejável a imposição de mecanismos que sejam excessivamente restritivos quanto à assunção de risco pelas instituições financeiras, a ponto de inibir a eficiência econômica (Schinasi (2006)).

A análise prática de estabilidade financeira está ainda em sua infância

[2] Uma revisão das definições de acadêmicos, bancos centrais e grupos oficiais pode ser encontrada em Schinasi (2004).

se comparada, por exemplo, com análises de estabilidade monetária ou macroeconômica. Não há modelos ou arcabouços amplamente aceitos para seu monitoramento e avaliação. Estabilidade financeira não possui um único indicador com uma meta a ser perseguida como em estabilidade monetária. Na verdade, há forte razões para se acreditar que não seja possível estabelecer meta para única variável na busca da estabilidade financeira.

Desta forma, o estudo de modelos e a construção de indicadores que possibilitem o acompanhamento da evolução da estabilidade financeira ao longo do tempo, a identificação de vulnerabilidades do sistema e a prevenção de maiores danos à economia como um todo é fundamental.

Esta tese contribui com a literatura propondo ferramentas e fazendo análises que podem ser usados para a avaliação a estabilidade financeira no componente sistema bancário.

Há uma visão tradicional de que rupturas no setor financeiro são responsáveis por flutuações econômicas (Bernanke e Gertler (1987)). De acordo com esse ponto de vista, crises financeiras são importantes pois levam a um aumento de custos de intermediação e a restrição de crédito, os quais por sua vez, reduzem a atividade da economia real, podendo levar a períodos de baixo crescimento, recessão. Dada a forte integração do mercado financeiro internacional, esses efeitos negativos podem não só afetar o país de origem do choque, mas também se propagar para outros países. Assim, a avaliação e a busca da estabilidadade financeira é essencial para se preservar o bem-estar social.

Crises financeiras não são um fenômeno recente e muitas vezes apresentam elementos comuns. No entanto, inovações financeiras e a crescente integração dos mercados financeiros globais nas últimas duas décadas introduziram novos elementos, de maneira que, apesar de alguma similaridades, as crises recentes têm diferido daquelas de um passado mais distante. A recente crise fianceira global, por exemplo, levou pesquisadores a buscar mais intensamente indicadores para a mensurar risco sistêmico e a estudar os efeitos do excesso de tomada de risco pelas instituições financeiras sobre a estabilidade financeira.

Além do interesse acadêmico sobre esta questão, bancos centrais e reguladores também têm se movimentado para que suas atuações englobem fatores de risco revelados nesta última crise. Neste sentido, muitos bancos centrais, como o Banco Central do Brasil, tem estabelecido mandato explícito de assegurar a estabilidade financeira.

Diante desse panorama, onde ainda vemos os reflexos da crise global na economia como um todo em diversos países, fica mais evidente a importância de estudos que promovam a discussão sobre indicadores e modelos para a mensuração de vulnerabilidades do sistema financeiro.

A literatura cobrindo tópicos específicos de estabilidade financeira é crescente e apresenta grande diversidade: corridas bancárias (Diamond e Dybvig (1983)), mecanismos de transmissão de problemas de um banco para outro (Freixas et al. ()), contágio (Alle e Gale (2000)), modelos de equilíbrio geral (Goodhart et al. (2006)).

No entanto, devido às proporções dos efeitos da recente crise global, alguns temas tem se apresentado mais recorrentes, como por exemplo a assunção de risco excessiva e risco sistêmico.

Com relação à assunção de risco, desde Keeley (1990), muitos trabalhos tem sido desenvolvidos para se estudar a relação entre regulação, competição e assunção de risco. Agoraki et al. (2011) analizam como requerimento de capital e poder de mercado afetam a propensão ao risco dos bancos do leste e do centro europeu. Eles concluem que este tipo de regulação tem impacto direto sobre o risco de crédito, reduzindo a inadimplência. No entanto, se o banco possuir poder de mercado o suficiente para aumentar seu risco de crédito, pode reverter esse efeito. Os resultados encontrados pelos autores naõ corrobram os resultados do modelo apresentado por Repullo (2004), desenhado a partir do modelo de Hellmann et al. (2000). No entanto, o autor ressalta que o seu modelo apresenta uma série de características especiais.

As características específicas dos bancos são fatores importantes na determinação da propensão a assumir risco excessivamente. A teoria destaca a existência de um potencial conflito entre proprietários e gerentes sobre a assunção de risco do banco. Assim, a mesma regulação tem diferentes efeitos sobre a assunção de risco do banco dependendo da estrutura de governança corporativa Laeve e Levine (2009). Mercados menos diversificados, com menor nível de competitividade e grande proporção de bancos públicos são mais propensos a fragilidade financeira (Uhde e Heimeshoff (2009). Focando mais especificamente do controle societário dos bancos, Mohsni e Otchere (2012) confirmam a tendência de bancos públicos serem mais propensos a assumirem riscos que bancos privados.

Além de fatores microeconomicos, é senso comum que mudanças nas condições macroeconomicas podem afetar a estabilidade do sistema financeiro. Pesquisas mais recentes sobre os efeitos de baixas taxas de juros sobre a assunção de risco encontram evidências inequívocas de aumento dos ativos arriscados e alteração na composição dos portfólios dos bancos da área do euro por meio de posições mais arriscadas (Delis e Kouretas (2011)). Além disso, há forte influência do ciclo econômico, inflação e taxa de câmbio sobre a saúde do sistema bancário (Akhter e Daly (2009)).

Apesar do progresso intelectual e prático no últimos anos, mensuração de risco sistêmico está ainda em seu processo formativo de desenvolvimento. Ainda não há se quer um consenso sobre a definição desse tipo de risco. Kaufman (1995) define-o como o risco de uma reação em cadeia de falências (efeito dominó). O Banco Central Europeu (ECB (2004))descreve risco sistêmico como o risco que a impossibilidade de uma instituições honrar suas obrigações no prazo prometido provocará a inadimplência de outras instituições, causando problemas de crédito ou liquidez e, consequentemente, poderá ameaçar a estabilidade ou a confiança nos mercados. Acharya et al. (2010) afirmam que risco sistêmico pode ser visto como falências generalizadas ou congelamento dos mercados de capitais que podem provocar redução substancial na oferta de atividades de intermediação financeira.

A falta de uma definição clara e restrita de risco sistêmico dificulta a sua mensuração e sugere que é necessária mais de uma medida de risco para capturar a complexidade e a capacidade de adaptação do sistema financeiro. Essa premissa encontra respaldo na literatura, onde pode-se encontrar uma variedade de modelos para mensuração de risco sistêmico. Nos atendo apenas à literatura mais recente, Lehar (2005) propõe um método para mensurar risco sistêmico que advém dos portfólios de ativos correlacionados. Baseado na abordagem estrutural, ele usa a análise de ativos contingentes para estimar o valor de mercado dos ativos dos bancos e simulação de Monte Carlo para encontrar a probabilidade do ativo de um banco cair abaixo de uma determinada proporção do total de ativos do sistema financeiro. Gray et al. (2008) também usam a análise de ativos contingentes para fornecer uma forma geral de mensurar risco sistêmico entre diversos setores da economia e países.

Acharya et al. (2010) mensuram a contribuição de cada instituição financeira ao risco sistêmico por meio da avaliação de sua propensão a ficar descapitalizada quando o sistema como um todo está descapitalizado. Brownlees e Engle (2010) mensuram risco sistêmico focando na MES (*Marginal Expected Shortfall*). Eles desenvolvem maneiras de estimar e prever MES usando algumas ferramentas econométricas (GARCH e DCC - *Dynamic Conditional Correlation*) juntamente com estimadores de expectativa de cauda não-paramétricos (*nonparametric tail expectation estimators*).

Huang et al. (2009), estimam um indicador de risco sistêmico como as perdas esperadas de um portfólio de crédito acima de uma proporção do total de obrigações do setor, utilizando CDS (*Credit Default Swap*) das firmas financeiras e correlações entre os retornos de ações dessas firmas. Huang et al. (2011) propõem algumas mudanças à metodologia desenvolvida por Huang et al. (2009), como a heterogeneidade na interconectividade dos bancos e a possibilidade de estimar a contribuição individual de cada banco ao risco sistêmico do sistema financeiro.

Adrian e Brunnermeier (2009) mensuram o VaR (*Value of Risk*) do sistema financeiro condicional a um banco ter tido perdas em termos de seu VaR, o qual eles denotam por CoVaR, utilizando regressão quantílica.

Segoviano e Goodhart (2009) colocam o setor financeiro como um portfólio de firmas financeiras individuais e constroem uma densidade multivariada para esse portfólio ajustada na cauda com dados de cada instituição obtidos empiricamente. A partir dessa densidade sugerem algumas medidas de risco sistêmico.

Dada a premência na busca por indicadores práticos, que possam ser utilizados por reguladores, supervisores e bancos centrais para a promoção e manutenção da estabilidade financeira, a literatura com possibilidade de aplicação empírica tem se destacado. No entanto, não se pode deixar de lado o estudo de modelos teóricos, os quais possuem inegável valor para o avanço do entendimento de estabilidade financeira. Nessa linha de pesquisa, destaca-se o modelo apresentado por Goodhart et al (2006). Os autores apresentação um modelo de equilíbrio gral com mercados imcompletos para explorar contágio de crises financeiras. Os autores consideram em seu modelo heterogeneidade dos agentes, característica considerada essencial por Tsomocos (2003) para a análise de instabilidade financeira.

Outro modelo teórico é o descrito por Karatzas et al. (1994). O autor apresenta um jogo de horizonte de tempo infinito com um contínuo de agentes para modelar uma economia simples, com um bem perecível e oferta constante de moeda. O modelo é simplificado, focando apenas no consumo, distribuição de riqueza e formação de preço, onde a moeda poderia ser apenas acumulada. Posteriormente, em Karatzas et al. (1997), os autores apresentam uma versão mais elaborada do jogo, permitindo que os jogadores tomem emprestado ou emprestem seus recursos excedentes. Entretanto, não era permitido que os jogadores tomassem emprestado mais do que pudessem pagar. Finalmente, em Geanakoplos et al. (2000) o jogo é generalizado permitindo a bancarrota.

O objetivo central desta tese é a construção de ferramentas que possibilitem a avaliação de vulnerabilidades do sistema bancário e, assim, possibilitar a a prevenção de problemas sistêmicos no setor bancário. Para cumprir esse objetivo, o trabalho será feito em três frentes.

Primeiro, o capítulo 2 contribui com a literatura teórica ao extender modelo definido como um jogo de tempo infinito com um contínuo de agentes, de forma a permitir a heterogeneidade dos agentes. Além disso, é mostrada a existência de equilíbrio de Nash, que é mais geral que o equilíbrio no estado estacionário demonstrado no artigo original que apresenta o jogo em questão. Em segundo, no capítulo 3 identificaremos dos fatores determinantes para a assunção de risco dos bancos brasileiros e análisaremos impacto da taxa de câmbio sobre a assunção de risco. Este artigo inova ao estudar a relação entre exposição cambial e assunção de risco. Dessa forma, contribui com esta literatura de duas formas. Primeiro, analisa se os bancos estão introduzindo mais riscos ao Sistema Financeiro Nacional por meio de suas exposições cambiais e avalia a importância econômica dessa exposição. Segundo, discute os fatores determinantes que afetam a assunção de risco dos bancos brasileiros. Os resultados obtidos indicam que a exposição cambial afeta a assunção de risco dos bancos estrangeiros tanto por meio da volatilidade dos retornos quanto pela alavancagem do banco. Em terceiro, no capítulo 4 construíremos indicadores de risco sistêmico utilizando uma densidade multivariada, que está associada a uma cópula, e analisaremos os efeitos da crise mundial recente sobre o sistema bancário brasileiro utilizando o indicadores desenvolvidos. Esse artigo contribui com a literatura de risco sistêmico tanto teoricamente quanto empiricamente. Em termos teóricos, propõe medidas de risco sistêmico factíveis e do ponto de vista empírico, analisa como as probabilidades de *default* dos bancos se alteraram na crise global e analisa a possibilidade de *first round effects* da falência de um banco sobre a probabilidade de *default* dos outros bancos do sistema bancário brasileiro.

2 Existência de equilíbrio num jogo com bancarrota e agentes heterogêneos

2.1 Introdução

O jogo utilizado neste trabalho foi apresentado inicialmente em Karatzas et al. (1994) de forma simplificada, focando apenas no consumo, distribuição de riqueza e formação de preço, onde a moeda poderia ser apenas acumulada. Posteriormente, em Karatzas et al. (1997), os autores apresentam uma versão mais elaborada do jogo, permitindo que os jogadores tomem emprestado ou emprestem seus recursos excedentes. Entretanto, não era permitido que os jogadores tomassem emprestado mais do que pudessem pagar. Finalmente, em Geanakoplos et al. (2000) o jogo é generalizado permitindo a bancarrota. Trata-se de um jogo de horizonte de tempo infinito com um contínuo de agentes para modelar uma economia simples, com um bem perecível e oferta constante de moeda. Na literatura de equilíbrio geral, a moeda não precisa ter um papel necessário (Hahn (1983)). No jogo apresentado por Geanakoplos et al. (2000) poderia se optar por: ou por um modelo com um mercado e um instrumento financeiro com o bem sendo usado como mercadoria ou por um modelo com um bem e dois instrumentos financeiros, com o segundo sendo moeda fiduciária. Os autores optaram pela segunda possibilidade por considerá-la mais apropriada no caso de generalizações para mais de um bem na economia.

Embora haja um contínuo de agentes, a construção do equilíbrio nas três versões do jogo é feita considerando-se que os jogadores sejam homogêneos, ou seja, todos os jogadores possuem a mesma função utilidade. Tsomocos (2003) argumenta que um modelo que tente capturar aspectos fundamentais de instabilidade financeira deve ter: multiperiodicidade, incerteza agregada e heterogeneidade dos agentes. O objetivo deste artigo é generalizar a existência de equilíbrio no jogo apresentado em Geanakoplos et al. (2000), permitindo que os agentes sejam heterogêneos. Para tanto, vamos utilizar o arcabouço teórico apresentado em Balder (1999).

Na seção 2.2, será apresentado o modelo. Além disso, será construído o conjunto de ações, dos jogadores de forma a contemplar as exigências do modelo apresentado em Geanakoplos et al. (2000) e as especificações teóricas necessárias para a construção do equilíbrio do jogo considerando os jogadores heterogêneos. Na seção 2.3 será demonstrada a existência do equilíbrio.

2.2 O modelo

Vamos considerar uma economia com tempo discreto e horizonte infinito, representado por $n = 1, 2, \ldots$ e com um único bem perecível. Em todos os períodos há incerteza com relação à dotação e ao consumo de cada jogador o que, consequentemente, gera incerteza com relação ao seu nível de riqueza. Toda a incerteza dessa economia é capturada pelo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, sobre o qual todas as variáreis aleatórias do modelo serão definidas. Existe um banco na economia o qual estabelece as taxas de juros para remuneração de depósitos e para empréstimos.

Há uma infinidade de jogadores, representados por α, e definidos sobre o espaço de medida de Lebesgue $(I, \mathscr{I}, \mu)$, onde $I \triangleq [0, 1]$. Uma escolha natural para a σ-álgebra $\mathscr{I}$ seria $\mathscr{B}(I)$, a σ-álgebra de Borel sobre I. Entretanto, desejamos que o espaço de medida dos jogadores seja completo e separável. Assim, completamos $\mathscr{B}(I)$, ou seja, consideramos a σ-álgebra $\mathscr{I}$ como sendo todos os subconjuntos de I mensuráveis a Lebesgue. Dessa forma, temos que o espaço de medida dos jogadores $(I, \mathscr{I}, \mu)$ é completo, separável e não-atômico, sendo que essa última característica expressa o fato de que não existe coalisão de jogadores que tenham mais influência no jogo que os outros jogadores. Dessa forma, garantimos que as ações de um único jogador não tem um efeito significativo sobre os preços.

Em cada período de tempo, $n = 1, 2, \ldots$, cada jogador $\alpha \in I$ recebe uma dotação aleatória $Y_n(\alpha, \omega) = Y_n^\alpha$ em unidades do único bem perecível da economia. Para que possamos agregar essas dotações, assumimos a seguinte hipótese:

Hipótese 1 *As dotações $Y_1^\alpha, Y_2^\alpha, \ldots$ para um determinado jogador α são não-negativas, integráveis e independentes com distribuição comum λ^α. Além disso, as variáveis $Y_n(\alpha, \omega)$ são conjuntamente mensuráveis, de forma que a produção ou dotação total da economia*

$$Q_n \triangleq \int Y_n(\alpha, \omega)\mu(d\alpha) > 0 \tag{2.1}$$

seja uma variável aleatória finita, positiva e bem definida para todo n.

Há dois mercados ativos em cada período de tempo $n = 1, 2, \ldots$: o mercado de crédito e o mercado de bem.

No mercado de crédito, o banco estabelece duas taxas de juros: a taxa paga pelos tomadores de empréstimos, $r_{1n}(\omega) = 1 + \rho_{1n}(\omega)$, e a taxa de juros paga aos depositantes, $r_{2n}(\omega) = 1 + \rho_{2n}(\omega)$. Assumumiremos que as taxas de juros satisfazem a hipótese abaixo.

Hipótese 2 *As taxas de juros são tais que, $1 \leqslant r_{2n}(\omega) \leqslant r_{1n}(\omega)$ e $r_{2n}(\omega) < \frac{1}{\beta}$, para todo $n \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega$, onde $\beta \in (0, 1)$ é um fator de desconto fixo.*

No mercado de bem é negociada a única mercadoria existente na economia. Dada a sua natureza perecível, a mercadoria deve ser consumida no mesmo período em que é adquirida. Assim, os jogadores que não desejarem consumir toda a dotação recebida no período n, vendem a parte não conumida àqueles jogadores que desejam consumir mais que a dotação recebida. Nesse processo de comercialização, o preço da mercadoria no período n, denotado por $p_n(\omega)$, é determinado endogenamente.

A quantidade de moeda que um determinado jogador α vai ofertar para a aquisição de mercadoria vai depender de seu nível de riqueza no período anterior. No começo do jogo é estabelecida a riqueza inical S_0^α de cada jogador α. No início do período n, um jogador α possui uma riqueza $S_{n-1}^\alpha(\omega)$. Se $S_{n-1}^\alpha(\omega) < 0$, então o jogador α não pagou seu débito do período anterior, consequentemente, sofrerá uma penalidade em termos de sua utilidade, terá seu débito perdoado e continuará no jogo com riqueza igual a zero. Se $S_{n-1}^\alpha(\omega) \geqslant 0$ então o jogador possui dinheiro em mão e joga com a riqueza $S_{n-1}^\alpha(\omega)$. Em ambos os casos, o jogador joga com a riqueza $(S_{n-1}^\alpha(\omega))^+ = \max\{S_{n-1}^\alpha(\omega), 0\}$. Além disso, o jogador α inicia o período n com informações $\mathscr{F}_{n-1}^\alpha \subset \mathscr{F}$, a σ-álgebra que mede os preços passados p_k, as dotações totais passadas Q_k, as taxas de juros r_{1k}, r_{2k}, bem como os níveis de riqueza, dotações e ações individuais, respectivamente, $S_0^\alpha, S_k^\alpha, Y_k^\alpha, b_k^\alpha$, para $k = 1, \ldots, n-1$. Cada jogador α decide a quantidade b_n^α de moeda fiduciária que ofertará para a aquisição de mercadoria basedo em seu conjunto de informação. Então, o preço p_n é formado.

A caracterização de b_n^α será dada na seção 2.2.1 enquanto que o processo de formação de riqueza do jogador α num determinado período n será explicado detalhadamente na subseção 2.2.3.

Em muitos momentos, esboçamos a dinâmica do jogo em um período n qualquer. Entretanto, desejamos definir o jogo num espaço de dimensão infinita. Assim, teremos:

- *Dotação do jogador α:*

$$
\begin{aligned}
\overline{Y(\alpha,\omega)} &= \big(Y_1(\alpha,\omega), Y_2(\alpha,\omega), Y_3(\alpha,\omega), \dots\big) \\
&= \big(Y_1^\alpha(\omega), Y_2^\alpha(\omega), Y_3^\alpha(\omega), \dots\big)
\end{aligned}
$$

- *Dotação Total:*

$$
\begin{aligned}
\overline{Q(\omega)} &= \big(Q_1(\omega), Q_2(\omega), Q_3(\omega), \dots\big) \\
&= \Big(\int Y_1(\alpha,\omega)\mu(d\alpha), \int Y_2(\alpha,\omega)\mu(d\alpha), \int Y_3(\alpha,\omega)\mu(d\alpha), \dots\Big)
\end{aligned}
$$

- *Taxas de juros*

$$
\begin{aligned}
\overline{r_1(\omega)} &= \big(r_{11}(\omega), r_{12}(\omega), r_{13}(\omega), \dots\big) \\
\overline{r_2(\omega)} &= \big(r_{21}(\omega), r_{22}(\omega), r_{23}(\omega), \dots\big)
\end{aligned}
$$

- *Ação de um jogador α*

$$
\overline{b^\alpha(\omega)} = \big(b_1^\alpha(\omega), b_2^\alpha(\omega), b_3^\alpha(\omega), \dots\big)
$$

- *Preços*

$$
\overline{p(\omega)} = \big(p_1(\omega), p_2(\omega), p_3(\omega), \dots\big)
$$

Para não sobrecarregar a notação, trabalharemos com as componentes desses vetores infinitos, sempre tendo em mente que o jogo está sendo definido num espaço de dimensão infinita. Eventualmente usaremos o vetor, quando haver possibilidade de interpretação errônea ou simpplesmente por conveniência.

2.2.1 Conjunto de ações

Cada jogador possui um limite fixo de endividamento, denotado por K^α. Assim, a quantidade de moeda b_n^α que o jogador α poderá ofertar para a compra de mercadoria dependerá de sua riqueza no período anterior e de seu limite de endividamento, ou seja,

$$b_n^\alpha \in [0, (S_{n-1}^\alpha(\omega))^+ + K^\alpha]. \tag{2.2}$$

Conforme será demonstrado na subseção 2.2.4, a quantidade de moeda se mantém constante em todos os períodos. Então, podemos afirmar que $b_n^\alpha \in [0, \mathbb{M}]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $\mathbb{M} = \max\{W_n(\omega) + K^\alpha\}$ para todo $\omega \in \Omega$ e $n \in \mathbb{N}$, sendo $W_n(\omega)$ a quantidade total de moeda fiduciária na economia no período n.

Seja $\mathscr{Z}_n$ o conjunto de todas as ações b_n^α para todo $\alpha \in I$. Tomaremos $\mathscr{Z} = \prod_{n=1}^\infty \mathscr{Z}_n$ o conjunto de ações. Para compatibilizar o jogo apresentado por Geanakoplos et al. (2000) e o arcabouço teórico elaborado por Balder (1999), necessitamos que $\mathscr{Z}$ seja um espaço vetorial topológico Hausdorff localmente convexo de funções mensuráveis. Para atingirmos nosso objetivo, construiremos $\mathscr{Z}$ e o dotaremos com uma topologia adequada aos nossos propósitos, partindo da definição de b_n^α e da construção de $\mathscr{Z}_n$.

Definiremos b_n^α como sendo a função de Carathéodory $c^\alpha : \Omega \times [0, \mathbb{M}] \longrightarrow \mathbb{R}$, que é $(\mathscr{F}, \mathscr{B})$-mensurável e contínua para todo $s \in [0, \mathbb{M}]$ e tal que $0 \leq c^\alpha(\omega, s) \leq s + K^\alpha$. Assim, temos: $b_n^\alpha = c^\alpha((S_{n-1}^\alpha(\omega))^+)$ para todo $\omega \in \Omega$ e $n \in \mathbb{N}$. De acordo com a versão do teorema apresentado em Aliprantes e Border (1994) para funções contínuas limitadas, apresentado no anexo (teorema 2.5.1), existe $\widehat{c^\alpha}$ que mapeia Ω sobre $C_b([0, \mathbb{M}])$- o conjunto de todas as funções reais contínuas limitadas sobre $[0, \mathbb{M}]$ - desde que $C_b([0, \mathbb{M}])$ seja munido com a topologia da convergência uniforme, em vez da convergência pontual. Ou seja, podemos tratar as funções de Carathéodory especificadas acima como sendo funções Borel mensuráveis pertencentes a $C_b([0, \mathbb{M}])$.

Portanto, consideraremos $\mathscr{Z}_n$ como sendo o espaço métrico $C_b([0, \mathbb{M}])$, munido da topologia da convergência uniforme, ou seja, considerando a métrica usual sobre os reais, $C_b([0, \mathbb{M}])$ será munida da topologia definida pela métrica do sup, $d(f, g) = \sup_{s \in [0, \mathbb{M}]} |f(s) - g(s)|$. Consequentemente, o espaço da ações $\mathscr{Z}$ será o produto cartesiano infinito $\mathscr{Z} = \prod_{n=1}^\infty C_b([0, \mathbb{M}])$ munido da topologia produto, ou seja, a topologia mais fraca sobre $\mathscr{Z}$ que torna as projeções $p_n : \mathscr{Z} \longrightarrow C_b([0, \mathbb{M}])$ contínuas, $n = 1, 2, \ldots$.

Teorema 2.2.1 *O espaço vetorial topológico $\mathcal{Z}$ definido acima é Hausdorff localmente convexo.*

Demonstração. Como topologias definidas por métricas são Hausdorff, naturalmente, $C_b([0,\mathbb{M}])$ é um espaço Hausdorff. Então, $\mathcal{Z}$ também o é, já que o produto de espaços Hausdorff é um espaço Hausdorff, conforme demonstrado no teorema 2.5.2 no anexo.

Mostremos agora que $C_b([0,\mathbb{M}])$ é localmente convexo. Seja V_0 uma vizinhança da função nula $0 \in C_b([0,\mathbb{M}])$. Tomemos f e $g \in V_0$, então:

$$d(f,0) = \sup_{s\in[0,\mathbb{M}]} |f(s) - 0(s)| < \epsilon \quad \text{e}$$

$$d(g,0) = \sup_{s\in[0,\mathbb{M}]} |g(s) - 0(s)| < \epsilon.$$

Dado $\lambda \in [0,1]$, temos:

$$\lambda d(f,0) = \lambda \sup_{s\in[0,\mathbb{M}]} |f(s)| < \lambda\epsilon \quad \text{e}$$

$$(1-\lambda)d(g,0) = (1-\lambda) \sup_{s\in[0,\mathbb{M}]} |g(s)| < (1-\lambda)\epsilon.$$

Somando essas duas desigualdades, obtemos:

$$\lambda d(f,0) + (1-\lambda)d(g,0) = \lambda \sup_{s\in[0,\mathbb{M}]} |f(s)| + (1-\lambda) \sup_{s\in[0,\mathbb{M}]} |g(s)| < \epsilon.$$

Como f e g são limitadas,

$$\sup_{s\in[0,\mathbb{M}]} (\lambda|f(s)| + (1-\lambda)|g(s)|) \leq \lambda \sup_{s\in[0,\mathbb{M}]} |f(s)| + (1-\lambda) \sup_{s\in[0,\mathbb{M}]} |g(s)| < \epsilon.$$

Ou seja, $d(\lambda f + (1-\lambda)g, 0) < \epsilon$. Portanto, $(\lambda f + (1-\lambda)g) \in V_0$, como queríamos demonstrar. Assim, $\mathcal{Z}$ é localmente convexo, já que como apresentado em Schaefer (1966) produtos de espaços localmente convexos são também espaços localmente convexos.

∎

Observe que o espaço $\mathcal{Z}$ é um espaço de Suslin.

Definido o cojunto de ações do jogo, podemos caracterizar o conjunto de ações para cada jogador α e o conjunto dos perfis de ações puras.

Sejam $\mathcal{Z}_n^\alpha \subset \mathcal{Z}_n$ para todo $n = 1, 2, \ldots$. Então, o cojunto $\mathcal{Z}^\alpha = \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{Z}_n^\alpha \subset \mathcal{Z}$ é o conjunto de ações do jogador α.

Seja também a multifunção $\Sigma : I \longrightarrow 2^{\mathcal{Z}}$ definida por $\Sigma(\alpha) \triangleq \mathcal{Z}^\alpha$, a qual descreve o conjunto de ações $\mathcal{Z}^\alpha$ para cada jogador $\alpha \in I \triangleq [0,1]$.

Vamos assumir que $\mathcal{Z}^\alpha$ e Σ satisfazem a seguinte hipótese:

Hipótese 3 *Para todo $\alpha \in I$ o conjunto $\mathcal{Z}^\alpha$ é compacto e o gráfico $D \triangleq \{(\alpha, z) \in I \times \mathcal{Z} : z \in \mathcal{Z}^\alpha\}$ da multifunção Σ pertence a $\mathscr{I} \times \mathscr{B}(\mathcal{Z})$, onde $\mathscr{B}(\mathcal{Z})$ representa a σ-álgebra de Borel sobre $\mathcal{Z}$, isto é, a σ-álgebra gerada pelos subconjuntos abertos de $\mathcal{Z}$.*

Denotaremos por $\mathscr{D}$ a σ-álgebra $D \cap (\mathscr{I} \times \mathscr{B}(\mathcal{Z}))$. Seja $\mathscr{S}_\Sigma(I) \triangleq \mathscr{S}_\Sigma$ o conjunto de todas as funções mensuráveis $f : I \longrightarrow \mathcal{Z}$ com $f(\alpha) \in \mathcal{Z}^\alpha$ quase certamente (a.e.) para todos $\alpha \in I$. Ou seja, $f(\alpha) = (f_1(\alpha), f_2(\alpha), f_3(\alpha), \ldots)$ tal que $f_n(\alpha) \in Z_n^\alpha$ para todo $n = 1, 2, \ldots$, quase certamente para todos $\alpha \in I$.

Como $f(\alpha) \in \mathcal{Z}_n^\alpha \subset \mathcal{Z}_n$, podemos afirmar que existe c^α tal que $f_n(\alpha) = b_n^\alpha = c^\alpha(s_{n-1}^\alpha)$, onde s_{n-1}^α é a realização da variável $S_{n-1}(\alpha)$.

Assim, dada uma riqueza inicial s_0^α, temos que,

$$
\begin{aligned}
f(\alpha) &= (f_1(\alpha), f_2(\alpha), f_3(\alpha), \ldots) \\
&= (b_1^\alpha, b_2^\alpha, b_3^\alpha, \ldots) \\
&= (c^\alpha(s_0^\alpha), c^\alpha(s_1^\alpha), c^\alpha(s_2^\alpha), \ldots).
\end{aligned}
$$

Matematicamente, $\mathscr{S}_\Sigma$ representa o conjunto de todas as seleções mensuráveis quase certa (a.e.) da multifunção Σ e, em termos do jogo, $\mathscr{S}_\Sigma$ é o conjunto de todos os perfis de ações puras.

A hipótese 3 se faz necessária para garantirmos que $\mathscr{S}_\Sigma$ é um conjunto não vazio. Lembrando que $\mathcal{Z}$ é um espaço de Suslin, basta aplicarmos o teorema de seleção mensurável de von Neumann-Aumann, reproduzido no anexo (Teorema 2.5.3), a $(T, \tau) \equiv (I, \mathscr{I})$, $S \equiv Z$ e $\Gamma \equiv \Sigma$.

2.2.2 Payoff

A realização de um perfil de ação traz benefícios pessoais para os jogadores. Naturalmente, é importante para cada jogador α distinguir os benefícios internos, sobre os quais o jogador α tem controle total, dos benefícios externos, sobre os quais o jogador α pode ter apenas influência parcial. Uma maneira de fazer esta distinção é definir a função payoff decompondo-a (Balder (1995)). Para tanto, vamos supor que exista:

(i) um espaço V, denominado espaço das estatísticas dos perfis do jogo (profile statistics of the game);

(ii) uma função $U^\alpha : Z^\alpha \times V \to [-\infty, +\infty]$ e;

(iii) uma aplicação $d : \mathscr{S}_\Sigma \longrightarrow V$, denominada aplicação externalidade.

Hipótese 4 *Seja $V \triangleq \boldsymbol{R}$. A aplicação externalidade $d : \mathscr{S}_\Sigma \longrightarrow V$ é da seguinte forma: $d(f) \triangleq \int_I f(\alpha)\mu(d\alpha) = (\int_I b_1^\alpha \mu(d\alpha), \int_I b_2^\alpha \mu(d\alpha), \int_I b_3^\alpha \mu(d\alpha), \ldots)$.*

Assumimos que a aplicação $(\alpha, \omega) \mapsto b_n^\alpha(\omega)$ é $\mathscr{I} \bigotimes \mathscr{F}_{n-1}$ mensurável, onde $\mathscr{F}_{n-1} \triangleq \bigvee_\alpha \mathscr{F}_{n-1}^\alpha$ é a menor σ-álgebra contendo $\mathscr{F}_{n-1}^\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Consequentemente, a oferta total em cada período n,

$$B_n(\omega) \triangleq \int_I b_n^\alpha(\omega)\mu(d\alpha) > 0$$

é uma variável aleatória bem definida, a qual assumimos ser estritamente positiva. Assim,

$$d(f) = (B_1, B_2, B_3, \ldots) \tag{2.3}$$

é o vetor oferta.

Vamos agora caracterizar um perfil socialmente factível do jogo. Seja $A : I \times V \longrightarrow 2^{\mathcal{Z}}$ uma multifunção. Um perfil de ação $f \in \mathscr{S}_\Sigma$ é dito socialmente factível se $f(\alpha) \in A(\alpha, d(f))$ quase certamente (a.e.) para todo $\alpha \in I$.

Hipótese 5 *A multifunção $A : I \times V \longrightarrow 2^{\mathcal{Z}}$ possui valores fechados não vazios e satisfaz*

$$A(\alpha, d(f)) \subset \mathcal{Z}^\alpha \textit{para todo} (\alpha, f) \in I \times \mathscr{S}_\Sigma.$$

Além disso, para todo $\alpha \in I$, a multifunção $A(\alpha, \cdot) \triangleq A^\alpha : V \longrightarrow \mathcal{Z}^\alpha$ é contínua e o gráfico de A, dado por $\{(\alpha, z, v) \in D \times V : z \in A(\alpha, v)\}$, pertence a $\mathscr{D} \times \mathscr{B}(V)$.

O jogador que tomou emprestado pode entrar em *default* no período n quando não possui riqueza suficiente para quitar integralmente a dívida adquirida no período anterior. Entretanto, mesmo entrando em *default*, o jogador continua no jogo, sofrendo uma penalidade não pecuniária. Essa penalidade é materializada por meio da função utilidade, a qual pode ser distinta para cada jogador e deve satisfazer às propriedades especificadas na hipótese abaixo.

Hipótese 6 *Cada jogador α tem uma função utilidade $u^\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, limitada, estritamente crescente, côncava em todo seu domínio e estritamente côncava em $[0, \infty)$, diferenciável em todo $x \neq 0$ e tal que:*

$$u^\alpha(x) \begin{cases} > 0 & se\ x > 0; \\ = 0 & se\ x = 0; \\ < 0 & se\ x < 0. \end{cases}$$

Além disso, $u'_+(0) > 0$.

A utilidade negativa mede a "desutilidade"de o jogador não pagar o débito adquirido no período anterior, emquanto a utilidade positiva mede a utilidade que o jogador usufruí ao consumir x unidades de mercadoria.

No início do período n o preço da mercadoria é $p_{n-1}(\omega)$ (do período anterior). Um jogador inicia o período n com riqueza $S^\alpha_{n-1}(\omega)$. Se $S^\alpha_{n-1}(\omega) < 0$, então o jogador α não quitou seu débito do período anterior, e então, recebe uma penalidade não monetária de $u^\alpha(S^\alpha_{n-1}(\omega)/p_{n-1})$. Após a formação do preço p_n para o período n, conforme equação (2.15), na subseção 2.2.4, cada jogador recebe a quantidade de mercadoria $x^\alpha_n \triangleq b^\alpha_n(\omega)/p_n(\omega)$ a que tem direito de acordo com a oferta de compra feita. Como a mercadoria é perecível, ela é consumida no mesmo período e, portanto, o jogador recebe $u^\alpha(x^\alpha(\omega))$ em utilidade. Assim, a utilidade total que o jogador α recebe durante o período n é:

$$\xi^\alpha_n(\omega) \triangleq \begin{cases} u^\alpha(x^\alpha_n(\omega)) & \text{se } S^\alpha_{n-1}(\omega) \geq 0; \\ u^\alpha(x^\alpha_n(\omega)) + u^\alpha(S^\alpha_{n-1}(\omega)/p_{n-1}(\omega)) & \text{se } S^\alpha_{n-1}(\omega) < 0. \end{cases}$$

O *payoff* total para o jogador α durante todo o jogo é a soma descontada das utilidades totais, ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta^{n-1} \xi^\alpha_n(\omega)$.

Observe que o *payoff* total é função das ações do jogador α, de seu nível de riqueza e do preço da mercadoria. Como o nível de riqueza é função das ações do jogador e o preço, que é determinado como explicitado na equação equação (2.15), na subseção 2.2.4, depende do vetor oferta dado pela equação (2.3), o qual está contido em V, podemos definir a função payoff do jogo para o jogador α tal como em Balder (1999):

$$U^\alpha : \mathcal{Z}^\alpha \times V \longrightarrow [-\infty, +\infty] \quad \text{tal que} \quad U^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \xi^\alpha_n,$$

considerando que quando $n = 0$, o jogador recebe riqueza inicial S_0.

Como u_α é limitada, ξ_n^α é limitada também. Assim, U^α converge uniformemente, já que $\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n$ é convergente.

Dado um perfil de ação $f \in \mathscr{S}_\Sigma$, o *payoff* do jogador α será $U^\alpha(z, d(f))$ se ele trocar a ação do perfil prescrito $f(\alpha)$ pela ação $z \in \mathscr{Z}^\alpha$.

Seja $U : D \times V \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ a função dada por $U(\alpha, z, v) \triangleq U^\alpha(z, v)$.

Hipótese 7 *Para todo $\alpha \in I$ a função U_α é continua sobre $\mathscr{Z}^\alpha \times V$ e para todo $v \in V$ a função $U(\cdot, \cdot, v)$ é $\mathscr{D}$-mensurável.*

2.2.3 Processo de formação de riqueza

Em cada período n, depois de os jogadores fazerem suas ofertas em moeda para aquisição da mercadoria, o preço $p_n(\omega)$ é formado conforme a equação (2.15), que será definida na subseção 2.2.4 e as dotações $Y_n^\alpha(\omega)$ dos jogadores são reveladas. Assim, cada jogador recebe $p_n(\omega)Y_n^\alpha(\omega)$ em moeda fiduciária. A partir desse momento, o jogador α decide se age como depositante, tomador de empréstimo ou nenhum dos dois.

(i) *O jogador α é um depositante*

Nesse caso, a oferta b_n^α do jogador é estritamente menor que sua riqueza $(S_{n-1}^\alpha(\omega))^+ = S_{n-1}^\alpha(\omega)$ e então o jogador deposita (ou empresta)

$$d_n^\alpha \triangleq S_{n-1}^\alpha(\omega) - b_n^\alpha = (S_{n-1}^\alpha(\omega))^+ - b_n^\alpha. \tag{2.4}$$

A fim de obtermos uma única equação para o nível de riqueza do jogador, estabeleceremos que d_n^α é igual a 0 se $b_n^\alpha \geq (S_{n-1}^\alpha(\omega))^+$.

Ao final do período, o jogador α recebe seu depósito com juros e sua dotação transformada em moeda, obtendo assim, o seu novo nível de riqueza:

$$S_n^\alpha(\omega) \triangleq r_{2n}(\omega)d_n^\alpha(\omega) + p_n(\omega)Y_n^\alpha(\omega) > 0. \tag{2.5}$$

(ii) *O jogador α é um tomador de empréstimo*

Aqui a oferta b_n^α do jogador α excede sua riqueza $(S_{n-1}^\alpha(\omega))^+$ e, portanto, o mesmo toma emprestado a diferença:

$$e_n^\alpha \triangleq b_n^\alpha - (S_{n-1}^\alpha(\omega))^+. \tag{2.6}$$

De forma semelhante à situação anterior, estabeleceremos que e_n^α é igual a 0 se $b_n^\alpha \leq (S_{n-1}^\alpha(\omega))^+$.

Ao final do período, o jogador deve ao banco $r_{1n}(\omega)e_n^\alpha(\omega)$ e seu novo nível de riqueza é

$$S_n^\alpha(\omega) \triangleq p_n(\omega)Y_n^\alpha(\omega) - r_{1n}(\omega)e_n^\alpha(\omega), \tag{2.7}$$

sendo que esse montante pode ser negativo. O jogador α deve obrigatoriamente pagar o seu débito até o máximo que sua riqueza permite. Assim, o jogador pagará a seguinte quantia de seu empréstimo:

$$h_n^\alpha(\omega) \triangleq \min\{r_{1n}(\omega)e_n^\alpha(\omega), p_n(\omega)Y_n^\alpha(\omega)\} \tag{2.8}$$

e a quantia de moeda que possuirá ao final do período será

$$(S_n^\alpha(\omega))^+ = p_n(\omega)Y_n^\alpha(\omega) - h_n^\alpha(\omega). \tag{2.9}$$

(iii) *O jogador α não é depositante nem tomador de empréstimo*

Nesse caso o jogador oferta toda sua dotação monetária, $b_n^\alpha(\omega) = (S_{n-1}^\alpha(\omega))^+$ e ao final do período sua riqueza é exatamente a dotação recebida em moeda,

$$S_n^\alpha(\omega) = p_n(\omega)Y_n^\alpha(\omega) > 0. \tag{2.10}$$

Usando a notação das equações 2.4-2.9, temos uma única fórmula para o nível de riqueza do jogador α ao final do período n:

$$S_n^\alpha(\omega) = p_n(\omega)Y_n^\alpha(\omega) + r_{2n}(\omega)d_n^\alpha(\omega) - r_{1n}(\omega)e_n^\alpha(\omega), \tag{2.11}$$

a qual pode ser negativa, e outra fórmula para o montante de moeda que o jogador detem em mão:

$$(S_n^\alpha(\omega))^+ = p_n(\omega)Y_n^\alpha(\omega) + r_{2n}(\omega)d_n^\alpha(\omega) - h_n^\alpha(\omega). \tag{2.12}$$

Assim, dado que um jogador α tem uma riqueza inicial S_0^α,o processo de formação dos sucessíveis níveis de riqueza de um jogador é uma cadeia de Markov com espaço-estado $\mathscr{E} = [-K^\alpha r_1, \infty)$, a qual satisfaz a regra:

$$S_n = g(S_{n-1}^+ - c(S_{n-1}^+) + p_n Y_n, n \geq 1 \tag{2.13}$$

onde as variáveis dotação $Y_1, Y_2, \ldots$ são independentes com distribuição comum λ e $g(\cdot)$ é a função

$$g(a; r_1, r_2) \triangleq \begin{cases} r_1 a, & a \leq 0; \\ r_2 a, & a > 0. \end{cases}$$

2.2.4 Conservação da moeda

Seja $M_n(\omega)$ o total de moeda fiduciária detida pelo banco e

$$\tilde{M}_n(\omega) \triangleq \int (S_n^\alpha(\omega))^+ \mu(d\alpha) \tag{2.14}$$

o total de moeda fiduciária detida pelos jogadores, ambos ao final do período n. Assim, a riqueza total em moeda na economia é $W_n(\omega) \triangleq M_n(\omega) + \tilde{M}_n(\omega)$. Considere a regra:

$$p_n(\omega) = \frac{B_n(\omega)}{Q_n(\omega)}, \tag{2.15}$$

a qual determina o preço da mercadoria como razão da oferta total sobre a produção total. Essa regra nos dá a condição necessária e suficiente para a conservação da moeda, conforme demonstrado no Lema abaixo.

Lema 2.2.4.1 *O total de moeda fiduciária $W_n(\omega) \triangleq M_n(\omega) + \tilde{M}_n(\omega)$ na economia é a mesma em todo período n e para qualquer ω se e somente se a equação* (2.15) *for válida.*

Demonstração. Usando as equações (2.4)-(2.12) e (2.14), podemos ver que $d_n^\alpha(\omega) - e_n^\alpha(\omega) = (S_{n-1}^\alpha(\omega))^+(b_n^\alpha(\omega))^+ - (b_n^\alpha(\omega) - (S_{n-1}^\alpha(\omega))^+)^+ = (S_{n-1}^\alpha(\omega))^+ -$

$b_n^\alpha(\omega)$. Usando essa igualdade e a equação (2.15), temos que:

$$\begin{aligned}
M_n(\omega) - \tilde{M}_{n-1}(\omega) &= \int [d_n^\alpha(\omega) - e_n^\alpha(\omega) + h_n^(\alpha)(\omega) - r_{2n}(\omega) d_n^\alpha(\omega)]\mu(d\alpha) \\
&= \int [(S_{n-1}^\alpha(\omega))^+ - b_n^\alpha(\omega)]\mu(d\alpha) + \int [h_n^(\alpha)(\omega) - r_{2n}(\omega) d_n^\alpha(\omega)]\mu(d\alpha) \\
&= \tilde{M}_{n-1}(\omega) - p_n(\omega) \int Y_n^\alpha \mu(d\alpha) - \int [r_{2n}(\omega) d_n^\alpha(\omega) - h_n^(\alpha)(\omega)]\mu(d\alpha) \\
&= \tilde{M}_{n-1}(\omega) - \tilde{M}_n(\omega).
\end{aligned}$$

Portanto, $M_n(\omega) + \tilde{M}_n(\omega) = M_{n-1}(\omega) + \tilde{M}_{n-1}(\omega)$, ou seja, $W_n(\omega) = W_{n-1}(\omega)$. ■

2.3 Equilíbrio

Conforme dito anteriormente, as taxas de juros são estabelecidas pelo banco central. Por não impormos restrições às taxas de juros na definição abaixo, assumimos implicitamente que o banco estabelece essas taxas arbitrariamente e que há moeda o suficiente para cobrir toda a demanda por empréstimos e atender a todos os depositantes, em cada período.

Definição 2.3.1 *Um equilíbrio é um sistema de taxa de juros e preços* $\{\overline{r_1} = (r_{11}, r_{12}, \ldots), \overline{r_2} = (r_{21}, r_{22}, \ldots), \overline{p} = (p_1, p_2, \ldots)\}$ *e uma coleção de perfis socialmente factíveis* $\Pi = \{f^*(\alpha) = (b_1^\alpha, b_2^\alpha, \ldots), \alpha \in I\}$ *tal que:*

(i) os preços $p_n, n = 1, 2, \ldots$ *satisfazem a equação*(2.15), *e*

(ii) dado S_0^α *o nível de riqueza inicial do jogador* α*, o perfil* $f^*(\alpha) \in \Pi$ *é tal que*

$$f^*(\alpha) \in argmax_{z \in A_\alpha(d(f^*))} U_\alpha(z, d(f^*)) \text{ para quase certamente todo } \alpha \in I.$$

Teorema 2.3.1 (Existência de equilíbrio) *Dado que o espaço de medida* $(I, \mathscr{I}, \mu)$ *é completo e separável, sob as hipóteses* (3)-(7)*, o jogo* $\Gamma \triangleq (I, \Sigma, U, A)$ *tem um equilíbrio de Nash socialmente factível em perfis de ações puras.*

A demonstração da existência de equilíbrio de perfis de ações puras é feita como em Balder (1999), por meio de purificação do equilíbrio de perfis de ações mistas. Assim, inicialmente formularemos uma versão do jogo Γ para perfis de ações mistas e, em seguida, demonstraremos a existência de equilíbrio para estes perfis. Com esse resultado estabelecido, demonstraremos o Teorema 2.3.1.

Seja $M_1^+(\mathcal{Z})$ o conjunto de todas as medidas de probabilidade sobre $(\mathcal{Z}, \mathscr{B}(\mathcal{Z}))$.

Definição 2.3.2 (Narrow topologia para probabilidades) *A topologia narrow sobre $M_1^+(\mathcal{Z})$ é a coarsest topologia para a qual todas as funções $\vartheta \to \int_{\mathcal{Z}} c(z)\vartheta(dz), c \in C_b(\mathcal{Z})$, são contínuas.*

Definição 2.3.3 (Probabilidade de transição) *Uma probabiliadde de transição (medida Young) de $(I, \mathscr{I}, \mu)$ sobre $\mathcal{Z}$ é uma função $\delta : I \to M_1^+(\mathcal{Z})$, a qual é mensurável com respeito a $\mathscr{I}$ e a $\mathscr{B}(M_1^+(\mathcal{Z})$, onde $M_1^+(\mathcal{Z})$ é munida com a topologia fina (narrow) da definição 2.3.2.*

Seja $\mathscr{R}_{\mathcal{Z}}(I) \triangleq \mathscr{R}_{\mathcal{Z}}$ o conjunto de todas as probabilidades de transição de I sobre $\mathcal{Z}$ e seja $\mathscr{R}_{\Sigma}(I) \triangleq \mathscr{R}_{\Sigma}$ o conjunto de toda probabilidade de transição $\delta \in \mathscr{R}_{\mathcal{Z}}$ tal que $\delta(\alpha)(\mathcal{Z}^\alpha) = 1$ para quase certamente todo $\alpha \in I$. Os elementos de $\mathscr{R}_{\Sigma}$ são ditos perfis de ações mistas.

Definição 2.3.4 *A topologia fina (narrow) (topologia da medida Young) sobre $\mathscr{R}_{\mathcal{Z}}$ é a menor (coarsest) topologia para a qual todos os funcionais integrais*

$$F_g : \delta \to \int_I \Big[\int_{\mathcal{Z}} g(\alpha, s)\delta(\alpha)(ds) \Big] \mu(d\alpha), g \in \mathscr{G}_C, \tag{2.16}$$

são contínuos. $\mathscr{G}_C$ é o conjunto de todos os integrandos de Carathéodory sobre $I \times \mathcal{Z}$, isto é, o conjunto de todas as funções $\mathscr{I} \times \mathcal{B}(\mathcal{Z})$-mensurável $g : I \times \mathcal{Z} \to \boldsymbol{R}$ tal que $g(\alpha, .)$ é contínua sobre $\mathcal{Z}$ para todo $\alpha \in I$ e $\sup_{s \in \mathcal{Z}} |g(\alpha, s)| \leq \phi(\alpha)$ para algum $\phi \in \mathscr{L}^1_{\boldsymbol{R}}(I)$.

A definição acima de topologia fina (narrow) sobre $\mathscr{R}_{\mathcal{Z}}$ se estende naturalmente para $\mathscr{M}_{\mathcal{Z}}$, o menor espaço vetorial que contém $\mathscr{R}_{\mathcal{Z}}$ e o funcional integral (2.16) continua bem definido para $\mathscr{M}_{\mathcal{Z}}$. Assim, continuaremos nos referindo a essa topologia como topologia fina (narrow). A topologia fina (narrow) sobre $\mathscr{R}_{\Sigma}$ é definida por meio de restrição. Pelo Teorema 1(i) de Balder (1996), reproduzido no anexo (Teorema 2.5.4), temos que a topologia fina (narrow) sobre $\mathscr{R}_{\Sigma}$ é a menor (coarsest) topologia para a qual todos os funcionais integrais $F_g, g \in \mathscr{G}_{C,\Sigma}$, são contínuos, sendo que $\mathscr{G}_{C,\Sigma}$ é o conjunto de todas as funções de Carathéodory sobre D. Equivalentemente, essa topologia é a menor (coarsest) topologia para a qual todos os funcionais integrais $F_g : \mathscr{R}_\Sigma \to (-\infty, +\infty], g \in \mathscr{G}_\Sigma^{bb}$, são semicontínuas inferiormente, onde $\mathscr{G}_\Sigma^{bb}$ é o conjunto de todos os integrandos normais sobre D que são limitados abaixo integralmente, isto é, o conjunto de todas as funções $\mathcal{D}$-mensuráveis $g : D \to (-\infty, +\infty]$ tal que $g(\alpha, .)$ é semicontínua inferiormente sobre $\mathcal{Z}^\alpha$ para todo $\alpha \in I$ e $g(\alpha, s) \geq \phi(\alpha)$ para algum $\phi \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}^1(I)$.

Proposição 2.3.1 *$\mathscr{R}_\Sigma$ é um subconjunto não vazio, compacto, convexo e metrizável do espaço semimetrizável $\boldsymbol{M}_{\mathcal{Z}}$.*

Demonstração. Vimos que $\mathscr{S}_\Sigma$ é não vazio, ou seja, existe $f : I \longrightarrow \mathcal{Z}$ com $f(\alpha) \in \mathcal{Z}^\alpha$ quase certamente (a.e.) para todos $\alpha \in I$. Então, definimos

$$\delta_f(\alpha)(\mathcal{Z}^\alpha) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{se } f(\alpha) \in \mathcal{Z}^\alpha; \\ 0 & \text{caso contrário} . \end{cases}$$

$\delta_f \in \mathscr{R}_\Sigma$. Portanto, $\mathscr{R}_\Sigma$ é não vazio.

Defina $h_\Sigma : I \times \mathcal{Z} \to [0, +\infty]$ por:

$$h_\Sigma(\alpha, z) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{se } z \in \Sigma(\alpha) = \mathcal{Z}^\alpha; \\ +\infty, & \text{caso contrário} . \end{cases}$$

Então, h_Σ é um integrando normal inf-compacto limitado abaixo integralmente. Então, pelo teorema 1 (ii) de Balder (1996) reproduzido no anexo, o funcional integral $F_{h_\Sigma}(\delta) \triangleq \int_I \big[\int_{\mathcal{Z}} h_\Sigma(\alpha, z)\delta(\alpha)(dz)\big]\mu(d\alpha)$ é narrowly inf-compacto sobre $\mathscr{R}_{\mathcal{Z}}$. Como $\mathscr{R}_\Sigma$ é o conjunto de todos os $\delta \in \mathscr{R}_{\mathcal{Z}}$ tal que $F_{h_\Sigma}(\delta) \leq 0$, segue que $\mathscr{R}_\Sigma$ é compacto.

Para demonstrar a convexidade, temos que mostrar que a combinação convexa de duas probabilidades de transição δ_1 e δ_2 pertencentes a $\mathscr{R}_\Sigma$ é um elemento de $\mathscr{R}_\Sigma$.

Seja $\lambda \in [0, 1]$. Obviamente, $\lambda\delta_1(\alpha) + (1 - \lambda)\delta_2(\alpha)$ é uma probabilidade de transição.

$$\begin{aligned} [\lambda\delta_1(\alpha) + (1 - \lambda)\delta_2(\alpha)](\mathcal{Z}^\alpha) &= \lambda\delta_1(\alpha)(\mathcal{Z}^\alpha) + (1 - \lambda)\delta_2(\alpha)(\mathcal{Z}^\alpha) \\ &= \lambda + (1 - \lambda) \\ &= 1, \end{aligned}$$

já que $\delta_1(\alpha)(\mathcal{Z}^\alpha) = \delta_2(\alpha)(\mathcal{Z}^\alpha) = 1$, pois $\delta_1 \in \mathscr{R}_\Sigma$ e $\delta_2 \in \mathscr{R}_\Sigma$.

Portanto, $\lambda\delta_1(\alpha) + (1-\lambda)\delta_2(\alpha) \in \mathscr{R}_\Sigma$. ■

Definidos os perfis de ações mistos, vamos agora definir uma versão mista da aplicação externalidade d. Seja $e : \mathcal{R}_\Sigma \to Y$ tal que

$$e(\delta) \triangleq \left(\int_I \Big[\int_{\mathcal{Z}} g_1(\alpha, z)\delta(\alpha)(dz) \Big] \mu(d\alpha), \int_I \Big[\int_{\mathcal{Z}} g_2(\alpha, z)\delta(\alpha)(dz) \Big] \mu(d\alpha), \ldots \right)$$

Teorema 2.3.2 *(Existência de equilíbrio misto) Dado que o espaço de medida* $(I, \mathscr{I}, \mu)$ *é completo e separável, sob as hipóteses* (3)-(6)*, o jogo* $\Gamma \triangleq (I, \Sigma, U, A)$ *possui um equilíbrio de Nash socialmente factível em perfis de ações mistas, isto é, existe* $\delta^* \in \mathcal{R}_\Sigma$ *tal que*

$$\delta^*(\alpha)(argmax_{z \in A^\alpha(e(\delta^*))} U^\alpha(z, e(\delta^*))) = 1 \textit{ para quase certamente todo } \alpha \in I$$

Lema 2.3.1 *A aplicação* $e : \mathcal{R}_\Sigma \to Y$ *é contínua.*

Demonstração. Basta lembrar que cada componente da aplicação g é um funcional integral $F_{g_n}, n = 1, 2 \ldots$, o qual é (narrowly) contínuo. ■

Vamos definir $H : \mathscr{R}_\Sigma \to 2^{\mathscr{R}_\Sigma}$ por

$$H(\delta) \triangleq \big\{ \eta \in \mathscr{R}_\Sigma : \eta(\alpha)(M_\delta(\alpha)) = 1 \text{ quase certamente } \big\},$$

onde $M_\delta(\alpha) \triangleq argmax_{z \in A_\alpha(e(\delta))} U^\alpha(z, e(\delta))$.

Lema 2.3.2 *A multifunção* H *é semicontínua superiormente e possui valores não vazios, fechados e convexos.*

Demonstração. Seja $g \in \mathscr{G}_C$. Como $\mathscr{G}_C$, é um espaço vetorial, aplicando a Proposição 22.4 de Choquet (1969), temos que $\mathscr{G}_C$ pode ser identificado com o dual topológico de $\mathscr{M}_{\mathcal{Z}}$, o espaço vetorial espandido por $\mathscr{R}_{\mathcal{Z}}$. A dualidade correspontende é $(\delta, g) \to F_g(\delta)$ (observe que a equação 2.16 estende automaticamente para $\mathscr{M}_{\mathcal{Z}}$). Pelo teorema da redução (Teorema 3 de Balder (1996)), temos que

$$\sup_{\eta \in H(\delta)} F_g(\eta) = \int_I m_\delta(\alpha)\mu(d\alpha),$$

onde $m_\delta(\alpha) \triangleq \sup_{z \in M_\delta(\alpha)} g(\alpha, z)$. Pelo Lema Fatou e a semitrizabilidade de $\mathscr{R}_\Sigma$ dada pela Proposição 2.3.1é suficiente checar que $\delta \to m_\delta(\alpha)$ é narrowly semicontinua superiormente para todo α.

$H(\delta)$ não vazio segue pelos argumentos clássicos de seleção mensurável.

Para provar que H possui valores fechados, seguiremos o Corolário 1 em Balder (1996a) e sua demonstração observando que para qualquer par $\delta, \eta \in \mathscr{R}_\Sigma$ há equivalência entre $\eta \in H(\delta)$ e

$$F_{g_\delta} \triangleq \int_I \Big[\int_{\mathcal{Z}} g_\delta(\alpha, z)\eta(\alpha)dz \Big] \mu(d\alpha) \leq \int_I \inf_{z \in \mathcal{Z}^\alpha} g_\delta(\alpha, z)\mu(d\alpha),$$

onde

$$g_\delta(\alpha, z) \triangleq \begin{cases} -\arctan U(\alpha, z, e(\delta)) & \text{se } z \in A^\alpha(e(\delta)); \\ +\infty, & \text{se } z \in S^\alpha \backslash A^\alpha(e(\delta)). \end{cases}$$

define um integrando $g_\delta \in \mathscr{G}_\Sigma^{bb}$. Note que a função $\alpha \to \inf_{z \in \mathcal{Z}^\alpha} g_\delta(\alpha, z)$ é certamente integrável por um teorema de projeção mensurável. Agora, F_{g_δ} é narrowly semicontínua inferiormente por $g_\delta \in \mathscr{G}_\Sigma^{bb}$. Assim, $H(\delta)$ é narrow fechado.

Sejam $\eta_1, \eta_2 \in H(\delta)$ e $\lambda \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} [\lambda\eta_1(\alpha) + (1-\lambda)\eta_2(\alpha)](M_\delta(\alpha)) &= \lambda\eta_1(\alpha)(M_\delta(\alpha)) + (1-\lambda)\delta_2(\alpha)(M_\delta(\alpha)) \\ &= \lambda + (1-\lambda) \\ &= 1, \text{q.c.} \end{aligned}$$

pois $\eta_1(\alpha)(M_\delta(\alpha)) = \delta_2(\alpha)(M_\delta(\alpha)) = 1$ q.c..

Portanto, $\lambda\eta_1(\alpha) + (1-\lambda)\eta_2(\alpha) \in H(\delta)$.Ou seja, H possui valores convexos. ■

Demonstração.[Demonstração do Teorema equilíbrio misto (Teorema 2.3.2]) Basta aplicar o Teorema de Kakutani (Teorema 2.5.6) a $\mathscr{R}_\Sigma$ e H, observando que a Proposição 2.3.1 e o Lema 2.3.2, garantem que as hipóteses requeridas pelo Teorema de Kakutani são satisfeitas. Assim, existe um perfil de ação mista $\delta^* \in \mathscr{R}_\Sigma$ tal que $\delta^* \in H(\delta^*)$, isto é, tal que $\delta^*(\alpha)(M_{\delta^*}(\alpha)) = 1$ quase certamente para todo α. ■

Lema 2.3.3 *(*Lema 3.4.1 de Balder (1995), p.90*) Sejam $\mathcal{Z}$ um espaço métrico de Suslin, $(I, \mathscr{I}, \mu)$ um espaço de probabilidade não atômica, $\mathcal{Z}^\alpha$ subconjunto não vazio e compacto de $\mathcal{Z}$ para todo $\alpha \in I$ e $g_1, \ldots, g_n : I \times \mathcal{Z} \to (-\infty, +\infty)$ limitada abaixo integralmente e $\mathscr{I} \times \mathscr{B}(\mathcal{Z})$-mensurável, tal que $g_i(\alpha, \cdot)$ é semicontínua inferiormente sobre $\mathcal{Z}$ para cada $\alpha, i = \ldots, n$. Então, para todo*

$\delta \in \mathscr{R}_\Sigma$ existe $f \in \mathscr{S}_\Sigma$ tal que

$$\int_I g_i(\alpha), f(\alpha))\mu(dt) \leq \int_I \Big[\int_{\mathcal{Z}^\alpha} g_i(\alpha, z)\delta(\alpha)(dz)\Big]\mu(dt), i = 1, \ldots, n.$$

Demonstração.[Demonstração do Teorema equilíbrio puro (Teorema 2.3.1)] O Teorema 2.3.2 garante a existência do equilíbrio de perfil misto δ^*. Pelo Lema 2.3.3, existe $f^* \in \mathscr{S}_\Sigma$ tal que

$$\int_I (g_i(\alpha), f^*(\alpha))\mu(dt) = \int_I \Big[\int_{\mathcal{Z}^\alpha} g_i(\alpha, z)\delta^*(\alpha)(dz)\Big]\mu(dt), i = 1, \ldots, m.$$

A identidade acima implica que $e(\delta^*) = d(f^*)$. Assim, tomando $g(\alpha, z) = arctangU(\alpha, z, e(\delta^*))$, temos a seguinte identidade:

$$\int_I arctangU(\alpha), f^*(\alpha), d(f^*))\mu(dt) = \int_I \Big[\int_{\mathcal{Z}^\alpha} arctang(\alpha, z, e(\delta^*))\delta^*(\alpha)(dz)\Big]\mu(dt).$$

Por δ^* ser um equilíbrio misto e o fato de $e(\delta^*) = d(f^*)$, a integral interna do lado direito da igualdade acima é igual a $sup_{z \in A^\alpha(d(f^*))} arctangU(\alpha, z, d(f^*))$ quase certamente para todo $\alpha \in I$. Isto implica que $f^*(\alpha) \in argmax_{z \in A^\alpha(d(f^*))} U^\alpha(z, d(f^*))$ quase certamente para todo $\alpha \in I$ devido a monotonicitade da transformação arcotangente.

■

2.4 Considerações finais

Este trabalho apresenta uma generalização do jogo apresentado por Geanakoplos et al. (2000). Os problemas de mensurabilidade que surgem ao se considerar os agentes de fato heterogêneos foram resolvidos utilizando-se o acabouço teórico proposto por Balder (1999). Mostra-se a existência de equilíbrio de Nash, que é mais geral que o equilíbrio no estado estacionário cuja existência é demonstrada pelos autores no artigo original. O equilíbrio de Nash é um perfil de ações descrevendo o comportamento dos agentes ao longo do tempo e não só no estado estacionário, que seria um ponto de convergência.

2.5 Anexo

Definição 2.5.1 *Um espaço de Suslin é um espaço topológico de Hausdorff tal que existe um espaço Polonês P e uma aplicação contínua de P sobre S.*

Definição 2.5.2 *Um espaço Polonês é um espaço métrico separável completo.*

Teorema 2.5.1 [Funções Mensuráveis sobre $C(X, Y)$) - Aliprantis e Border (1994), p. 500] *Sejam (S, Σ) um espaço mensurável, X um espaço compacto metrizável e Y um espaço separável metrizável. Dote o subespaço $C(X, Y)$ de Y^X com sua topologia de convergência uniforme em vez de sua topologia de subespaço (topologia pontual).*

1. *Se $f : S \times X \longrightarrow Y$ é uma função de Carathéodory (contínua em x e mensurável em s), então $\hat{f}$ mapeia S sobre $C(X, Y)$ e é Borel mensurável.*
2. *Se $g : S \longrightarrow C(X, Y)$ é Borel mensurável, então $\bar{g}$ é uma função de Carathéodory.*

Teorema 2.5.2 *O produto de espaços Hausdorff é um espaço Hausdorff.*

Demonstração. Se x e y são elementos distintos do produto $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$, então $x_i \neq y_i$ para algum $i \in \mathbb{N}^*$. Se cada espaço coordenada é Hausdorff, então existem vizinhanças abertas distintas U e V de x_i e y_i, respectivamente, e $p_i^{-1}(U)$ e $p_i^{-1}(V)$ são vizinhanças de x e y no espaço produto. Portanto, o espaço produto é Hausdorff. ■

Teorema 2.5.3 [Seleção mensurável de von Neumann-Aumann (Teorema III.22 de Castaing e Valadier (1977), p.74)] *Sejam (T, τ) um espaço mensurável e S um espaço de Suslin. Seja Γ uma multifunção de T sobre subconjuntos não vazios de S, cujo gráfico G pertence a $\tau \bigotimes \mathcal{B}(S)$. Então existe uma sequência (σ_n) de seleções de Γ tal que, para todo t,$\{\sigma_n\}$ é denso em $\Gamma(t)$ e, σ_n é mensurável para $\hat{\tau}$ e $\mathcal{B}(S)$. Além disso, podemos escolher σ_n tal que: σ_n é o limite de uma sequência de funções $\hat{\tau}$ mensuráveis assumindo um número finito de valores e, se μ for uma medida Radon sobre T (se T é um espaço topológico de Hausdorff) então σ_n é Lusin μ-mensurável.*

Definição 2.5.3 *Seja (T, τ) um espaço mensurável. Se μ é uma medida positiva sobre (T, τ), τ_μ denota o μ-completamento de τ. E $\hat{\tau}$ denota $\bigcap \tau_\mu$, para todas as medidas μ positivas limitadas.*

Observação: Os conjuntos pertencentes a $\hat{\tau}$ são ditos universalmente mensuráveis. Obserque que se μ é uma medida σ-finita, então exite uma medida limitada que tem os mesmos conjuntos negligíveis. Observe também que se μ-é uma medida σ-finita sobre (T, τ), então $\hat{\tau}_\mu = \tau_\mu$

Teorema 2.5.4 (Teorema 1(i) em Balder (1996), p.310) *Para todo $g \in \mathcal{G}_S^{bb}$ o integral funcional F_g é narrowly semicontínuo inferiormente sobre $\mathcal{R}_S(I, \mathscr{I}, \mu)$*

Definição 2.5.4 *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita inf-compacta se o conjunto $K_r = \{x \in X | f(x) \leq r\}$ é compacto para todo escalar r.*

Definição 2.5.5 Integrandos Balder 96a p.309

(i) *Um integrando normal sobre $(I, \mathscr{I}, \mu) \times S$ é uma função $\mathscr{I} \times \mathscr{B}(S)$-mensurávelg $: I \times S \to [-\infty, +\infty]$ para a qual*

$$g(\alpha, \cdot) \text{ é semicontínua inferiormente sobre } S \text{ para todo } \alpha \in I,$$

além disso, g é dita limitada abaixo integralmente(integrably bounded below) se existe $\phi \in \mathscr{L}^1_{\boldsymbol{R}}(I, \mathscr{I}, \mu)$ tal que

$$g(\alpha, s) \geq \phi(\alpha) \text{ para todo } \alpha \in I, s \in S.$$

O conjunto de todos os integrandos normais limitados abaixo integralmente sobre $(I, \mathscr{I}, \mu) \times S$ é denotado por $\mathscr{G}_S^{bb}(I, \mathscr{I}, \mu)$.

(ii) *Um integrando normal h sobre $(I, \mathscr{I}, \mu) \times S$ é dito inf-compacto se*

$$h(\alpha, \cdot) \text{ é inf-compacto sobre } S \text{ para todo } \alpha \in I.$$

O conjunto de todos os integrandos normais inf-compactos limitados abaixo integralmente sobre $(I, \mathscr{I}, \mu) \times S$ é denotado por $\mathscr{H}_S^{bb}(I, \mathscr{I}, \mu)$.

(iii) *Um integrando Carathéodory sobre $(I, \mathscr{I}, \mu) \times S$ é uma função $g : I \times S \to \mathbb{R}$ tal que g e $-g$ pertencem a $\mathscr{G}_S^{bb}(I, \mathscr{I}, \mu)$.*

O conjunto de todos os integrandos Carathéodory sobre $(I, \mathscr{I}, \mu) \times S$ é denotado por $\mathscr{G}_S^C(I, \mathscr{I}, \mu)$.

Teorema 2.5.5 (Teorema de redução (Teorema 3 em Balder (1996) p.313)) *Para todo $g \in \mathcal{G}_S^{bb}$, vale a identidade*

$$\inf_{f\in \mathscr{L}^0_S(I,\mathscr{I},\mu)} \int_I g(\alpha, f(\alpha))\mu(dt) = \int_I \big[\inf_{s\in S} g(\alpha, s)\big]\mu(d\alpha)$$

desde que o lado esquerdo da igualdade seja diferente de $+\infty$.

Teorema 2.5.6 (Teorema de Kakutani) *Seja* $C \subset E$ *compacto, convexo e não vazio. Seja* $F : C \to 2^C$ *uma multifunção com valores convexos, fechados e não vazios e tal que* F *é semicontínua superiormente, isto é,* $\sigma(F(cdot), x') : x \to \sup_{y\in F(x)}\langle y, x'\rangle$ *é semicontínua superiormente sobre* C *para todo* $x' \in E'$. *Então, existe* $x^* \in C$ *tal que* $x^* \in F(x)$.

5 Considerações Finais

Os três ensaios apresentados nesta tese tratam de questões relacionadas a estabilidade financeira e tem como objetivo a identificação de possíveis ameaças à estabilidade do sistema bancário brasileiro. A avaliação e monitoramento da estabilidade financeira está presente em alguns bancos centrais há mais de um século. No entanto, esta tarefa ganhou mais força nos últimos anos devido às crises da década de 1990 e mais recentemente devido ao alcance e a profundidade da crise global de 2008.

Os efeitos desta crise atingiram a economia real, provocando grande perda de bem estar social em alguns países. Além disso, muitos países adotaram medidas controversas, utilizando dinheiro dos contribuintes, para a resolução da crise, bem como para tentar conter seus efeitos negativos. Diante desse quadro, pesquisadores acadêmicos, de bancos centrais e de organismos reguladores vêm apresentando diversos estudos que buscam definir de forma mais precisa o que seria estabilidade financeira e quais instrumentos, indicadores e medidas regulatórias os países poderiam fazer uso para se evitar que novas crises, com proporções semelhantes à crise de 2008, se concretizem.

Instabilidade financeira pode surgir por uma série de fatores. Promover estabilidade financeira envolve a análise de potenciais ameaças ao sistema financeiro, avaliação da situação atual e estimativa da situação futura baseando-se na avaliação de riscos. Na análise de potenciais ameaças à estabilidade financeira, há duas abordagens complementares. A primeira é a utilização de indicadores que ajudem a identificar ameaças que estão se desenvolvendo dentro do sistema financeiro. A segunda abordagem busca identificar riscos que se desenvolve fora do sistema financeira, mas que provocar fragilidades no sistema. As ferramentas utilizadas para estas análises são indicadores e modelos mais estruturados.

Os ensaios apresentados contribuem com esta literatura focando em um aspecto do monitoramento da estabilidade financeira: a estabilidade bancária. O primeiro ensaio mostra a existência de equilíbrio geral num jogo com agentes heterogeneos onde é possível o *default*. O segundo ensaio, busca identificar potencial ameaça à estabilidade do sistema bancário brasileiro por meio de assunção de risco via exposição cambial. Alguns pesquisadores afirmam que o período longo de baixas taxas de juros levaram os bancos a assumirem excessivamente risco, o que culminou com a recente crise global. Como no Brasil as taxas de juros são consideradas altas relativamente às economias maduras, os bancos nacionais poderiam ter vamtagens em obter *funding* em moeda estrangeira e aplicar esses recursos no país, seja em crédito, derivativos cambiais ou aplicação em títulos. Desta forma, estaria introduzindo no sistema risco cambial. Os resultados encontrados sugerem que apesar deste tipo de risco estar presente, sua magnitude não é suficientemente grande para que seja economicamente significante. Além disso, foi identificado que a assunção de risco via exposição cambial surge por maior volatilidade dos retornos e por meio de alavancagem. Os resultados também sugerem que esses efeitos maiores nos bancos estrangeiros. Esses resultados mostram que a introdução do Índice de Alavancagem proposto por Basiléia III ajudará na promoção de estabilidade do sistema bancário brasileiro e que, políticas de entrada de bancos estrangeiros no país deve levar em conta os efeitos positivos e negativos desses bancos: possível aumenta de eficiência e internalização de estresses externos.

O terceiro ensaio propõem indicadores de risco sistêmico para identificar vulnerabilidades do sistema bancário advindas do risco de crédito. Os indicadores são construídos a partir da abordagem de ativos contingentes em conjunto com a construção da densidade multivariada do sistema bancário. Os indicadores capturam não só as vulnerabilidades individuais dos bancos, mas também a estrutura de dependência de estresse entre os bancos. Além dos aspecto teórico considerado nos indicadores, estes são "ajustados"para valores ocorridos, o que os torna bastante interessantes da perspectiva de monitoramento dos riscos à estabilidade financeira. Sendo possível obter a taxa de retorno histórica após *default* do banco, os indicadores permitem se estimar a perda esperda do sistema bancário ao longo de certo período. Esse aspecto pode se tornar importante na análise de elaboração políticas para a resolução de crises, pois estaria considerando não só a perda do banco que entra em *default*, mas também a perda em outros bancos decorrentes da estrutura de dependência entre eles.

A tese forneceu um conjunto de ferramentas para o monitoramento da estabilidade financeira, especialmente com relação à assunção de risco e risco sistêmico. As metodoloigas empíricas propostas foram aplicadas a dados do sistema bancário brasileiro. Os resultados indicam que a validade das medidas sugeridas, indicando a necessidade de um acompanhamento da evolução exposição cambial no caso de desvalorização da moeda nacional e capturando momentos de estresse do sistema bancário nos últimos anos.

Referências Bibliográficas

ACHARYA, V.; PEDERSEN, L. H.; PHILIPPON, T.; RICHARDSON, M. Mesuring systemic risk. *SSRN paper*, 2010.

ADRIAN, T.; BRUNNERMEIER, M. Covar. *SSRN paper*, 2009.

AGORAKI, M.-E.; DELIS, M.; PAIOURAS, F. Regulations, competition and bank risk-taking in transition countries. *Journal of Financial Stability*, p. 38, 2011.

AKHTER, S.; DALY, K. Bank health in varing macroeconomic conditions: A panel study. *International Review of Financial Analysis*, v. 18, p. 285–293, 2009.

ALIPRANTIS, C.; BORDER, K. *Infinite dimensional analysis - a hitchhiker's guide*. Berlin: Springer-Verlag, Inc, 1994.

ALLE, F.; GALE, D. Financial contagion. *Journal of Political Economy*, p. 1, 2000.

ALLEN, W.; WOOD, G. Defining and achieving financial stability. *Journal of Financial Stability*, p. 152, 2006.

BALDER, E. A unifying apprach to existence of nash equilibria. *International Journal of Game Theory*, p. 79, 1995.

_____. Comments on the existence of cournot-nash-equilibria. *Journal of Mathematical Economics*, p. 307, 1996.

_____. On the existence of cournot-nash equilibria in continuum games. *Journal of Mathematical Economics*, p. 207, 1999.

BAUM, C. *An introduction to moderm econometrics using stata*. Texas: Stata Press, 2006.

BERNANKE, B.; GERTLER, M. Financial fragility and economic performance. *NBER Working Papers*, v. 2318, 1987.

BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, v. 81, p. 637, 1973.

BONANNO, G.; CALDARELLI, G.; LILLO, F.; MICCICHÉ, S.; VANDEWALLE, N.; MANTEGNA, R. Networks of equities in financial markets. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, Springer-Verlag, v. 38, p. 363–371, 2004. ISSN 1434-6028. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1140/epjb/e2004-00129-6>.

BORIO, C.; ZHU, H. Capital regulation, risk-taking and monetary policy: a missing link in the transmissions mechanism? *Bank for International Settlements Working Paper*, v. 268, 2008.

BOYD, J.; NICOLO, G. The theory of bank risk taking and competition revisited. *Journal of Finance*, p. 1329, 2005.

BROWNLEES, C.; ENGLE, R. Volatility, correlation and tails for systemic risk measurement. *Manuscrito*, 2010.

CASTAING, C.; VALADIER, M. *Convex analysis and measurable multifunctions*. Berlin: Springer-Verlag, Inc, 1977. Lectures Notes in Mathematics, 580.

CHAMBERLAIN, S.; HOWE, J. S.; POPPER, H. The exchange rate exposure of us and japanese banking institutions. *Journal of Banking and Finance*, p. 871, 1997.

CHOI, I. Unit root for panels. *Journal of International Money and Finance*, p. 249, 2001.

CHOQUET, C. *Lectures on Analysis*. [S.l.]: Benjamin, Reading, MA, 1969.

CIHAK, M. Central banks and financial stability: A survey. *IMF Working Paper*, 2007.

CROUHY, M.; GALAI, D.; MARK, R. A comparative analysis of current credit risk models. *Journal of Banking and Finance*, p. 59, 2000.

DELIS, D. M.; KOURETAS, G. P. Interest rates and bank risk-taking. *Journal of Banking and Finance*, v. 35, p. 840–855, 2011.

DELL'ARICCIA, G.; MARQUEZ, R. Lending booms and lending standards. *Journal of Finance*, p. 2511, 2006.

DEMIRGüç-KUNT, A.; DETRAGIACHE, E. Basel core principles and bank soundness: Does compliance matter? *Journal of Financial Stability*, v. 7, p. 179, 2010.

DEMIRGUç-KUNT, A.; DETRAGIACHE, E.; TRESSEL, T. Banking on the principles: Complience with basel core principles and bank soundness. *Journal of Financial Intermediation*, v. 17, p. 511–542, 2008.

DIAMOND, D.; DYBVIG, P. Bank runs, deposit insurance, and liquidity. *The Journal of Political Economy*, v. 91, p. 401, 1983.

ECB. *Annual Report*. Frankfurt: European Central Bank, 2004.

______. Assessing financial stability: Conceptual boundaries and challenges. *European Central Bank*, p. 117, 2005.

FREIXAS, X.; B., P.; ROCHET, J.-C. Systemic risk, interbank relations and liquidity provision by the central bank. *Journal of Money, Credit and Banking*.

GEANAKOPLOS, J.; KARATZAS, I.; SHUBIK, M.; SUDDERTH, W. A strategic market game with active bankruptcy. *Journal of Mathematical Economics*, p. 359, 2000.

GOODHART, C.; SUNIRAND, P.; TSOMOCOS, D. A model to analyse financial fragility. *Economic Theory*, p. 107, 2006.

GRAY, D.; MALONE, S. W. *Macrofinancial Risk Analysis*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc, 2008.

GRAY, D.; MERTON, R.; BODIE, Z. New framework for measuring and managing macrofinancial risk and financial stability. *manuscrito*, 2008.

HAAS, R.; LELYVELD, I. v. Foreign banks and credit stability in central and eastern europe: A panel dat analysis. *Journal of Banking and Finance*, v. 30, p. 1927, 2006.

______. Internal capital markets and lending by multinational bank subsidiaries. *Journal of Financial Intermediation*, v. 19, p. 1, 2010.

HAHN, F. *Money and Inflation*. Cambridge, MA: MIT Press, 1983.

HAUSMAN, J. Specification testes in econometrics. *Econometrica*, p. 1251, 1978.

HAUSMAN, J.; TAYLOR, W. Panel data and unobservable individual effects. *Econometrica*, p. 1377, 1981.

HELLMANN, T.; MURDOCK, K.; STIGLITZ, J. Liberalization, moral hazard in banking, and prudential regulation: Are capital requirementes enough? *Amercian Economic Review*, p. 147, 2000.

HODRICK, R.; PRESCOTT, E. Post-war u.s. business cycles: an empirical investigation. *Mimeo (Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, PA)- Publicado também em 1997 no Journal of Money, Credit and Banking 29, 1-16*, 1980.

HOUSTON, J. F.; LIN, C.; LIN, P.; MA, Y. Credito rights, information sharing, and bank risk-taking. *Journal of Financial Economics*, v. 96, p. 485–512, 2010.

HUANG, X.; ZHOU, H.; ZHU, H. A framework for assessing the systemcis risk of major financial institutions. *Journal of Banking and Finance*, p. 2036, 2009.

_____. Assessing the systemic risk of a heterogeneous portfolio of banks during the recent financial crisis. *Journal of Financial Stability*, 2011.

IM, K.; PESARAN, M.; SHIN, Y. Testing for unit roots in heterogeneous panels. *Journal of Econometrics*, p. 1, 2003.

JIN, J. Y.; KANAGARETNAM, K.; LOBO, G. J.; MATHIEU, R. Impact of fdicia internal controls on bank risk taking. *Journal of Banking and Finance*, p. 614, 2013.

JONGHE, O. D. Back to the basics in banking? a micro-analysis of banking system stability. *European Banking Center Discussion*, v. 13, 2009.

KARATZAS, I.; SHUBIK, M.; SUDDERTH, W. Construction of stacionary markov equilibria in a strategic market game. *Mathematical of Operations Research*, p. 975, 1994.

_____. A strategic market game with secured lending. *Journal of Mathematical Economics*, p. 207, 1997.

KAUFMAN, G. *Banking, Financial Markets, and Systemic Risk, Research in Financial Services*. [S.l.: s.n.], 1995.

KEELEY, M. Deposit insurance, risk, and market power in banking. *American Economic Review*, v. 80, p. 1183–1200, 1990.

KMV. *Modeling Default Risk*. [S.l.]: KMV corporation, 1999.

______. *Modeling Default Risk*. [S.l.]: KMV corporation, 2001.

KULLBACK, J. *Information Theory and Statistics*. New York: John Wiley, 1959.

LAEVE, L.; LEVINE, R. Bank governance, regulation and risk-taking. *Journal of Banking and Finance*, p. 259, 2009.

LEHAR, A. Measuring systemic risk: A risk management approach. *Journal of Banking and Finance*, p. 2557, 2005.

MARTIN, A. D. Exchange rate exposure of the key financial institutions in the foreign exchange market. *International Review of Economics and Finance*, p. 267, 2000.

MARTIN, A. D.; MAUER, I. J. Exchange rate exposure of us banks: a cash flow-based methodoly. *Journal of Banking and Finance*, p. 851, 2003.

MERTON, R. On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, p. 449, 1974.

MISHKIN, F. Anatomy of financial crisis. *NBER Working Paper*, v. 3934, 1991.

MOHSNI, S.; OTCHERE, I. Bank risk-takin behavior following privatization. *Manuscrito*, 2012.

OLIVEIRA, R. d. F.; SCHIOZER, R.; LEãO, S. Atuação de bancos estrangeiros no brasil: mercado de crédito e derivativo de 2005 a 2011. *Trabalhos para discussão do Banco Central do Brasil*, v. 298, 2012.

OOSTERLOO, S.; HAAN, J. de. Central banks and financial stability: A survey. *Journal of Financial Stability*, v. 1, p. 257, 2004.

OOSTERLOO, S.; HAAN, J. de; JONG-A-PIN, R. Financial stability reviews: A first empirical analysis. *Journal of Financial Stability*, v. 2, 2007.

POPOV, A.; UDELL, G. Cross-border banking and the international transmission of financial distress during the crisis of 2007-2008. *Working Paper Series do Banco Central Europeu*, v. 1203, 2010.

RAJAN, R. Has finance made the world riskier? *European Financial Management*, p. 499, 2006.

REPULLO, R. Capital requirements, market power, and risk-taking in banking. *Journal of Financial Intermediation*, p. 156, 2004.

SCHAEFER, H. *Topological Vector Spaces*. [S.l.]: Macmillan, 1966.

SCHAFFER, C. xtivreg2: Stata module to perform extended iv/2sls, gmm and ac/hac, liml and k-class regression for panel data models. *http://ideas.repec.org/c/boc/bocode/s456501.html*, 2010.

SCHINASI, G. J. Defining financial stability. *International Monetary Fund Working Paper*, 2004.

______. *Safeguarding Financial Stability: Theory and Practice*. [S.l.]: International Monetary Fund, 2006.

SCHUERMANN, T. What do we know about loss given default? *In:SHIMKO,D. Credit Risk Models and Management*, 2004.

SCHWARTZ, A. *Real and pseudo financial crises*. [S.l.]: Macmillan, 1986. 11 p. In: Capie, F.H., Wood, G.E. (Eds.), Financial Crises and the World Banking System.

SEGOVIANO, M. A. Consistent information multivariate density optimizing methodology. *Financial Markets Group, London school of Economics, Discussion Paper 557*, 2006.

SEGOVIANO, M. A.; GOODHART, C. Banking stability measures. *IMF Working Paper*, 2009.

SERVIGNY, A. D.; RENAULT, O. *Measuring and managing credit risk*. New York: McGraw-Hill Co., 2007.

SOUTO, M.; TABAK, B.; VASQUEZ, F. Linking financial and macroeconomic factors to credit risk indicators of brazilian banks. *Banco Central do Brasil, Working Paper Series*, v. 189, 2009.

STOCK, J.; WRIGHT, J. Gmm with weak instruments. *Econometrica*, p. 1055, 2000.

THORNTON, H. Inquiry into the nature and effects of the paper credit of great britain. *Edinburgh Review*, v. 1, p. 172–201, 1802.

TSOMOCOS, D. Equilibrium analysis, banking and financial instability. *Journal of Mathematical Economics*, v. 39, p. 619–655, 2003.

UHDE, A.; HEIMESHOFF, U. Consolidation in banking and financial stability in europe: Empirical evidence. *Journal of Banking and Finance*, p. 1299, 2009.

WONG, T.-C.; WONG, J.; LEUNG, P. The exchange rate exposure of us and japanese banking institutions. *Journal of Banking and Finance*, p. 174, 2009.

WOOLDRIDGE, J. M. *Econometric Analysus of Cross Section and Panel Data*. Cambridge, MA: MIT Press, 2002.