

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**GERAÇÃO DE SUPERFÍCIES DE INTERAÇÃO PELO  
MÉTODO DA REGRESSÃO LINEAR MÚLTIPLA COM O  
MODELO DE DANO EM VIGAS DE TIMOSHENKO 3D**

**ENG<sup>o</sup> . PEDRO CLÁUDIO DOS SANTOS VIEIRA**  
**Mestre em Estruturas, UnB**

**ORIENTADOR: WILLIAM TAYLOR MATIAS SILVA**

**TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E  
CONSTRUÇÃO CIVIL**  
**PUBLICAÇÃO E.TD - 006A/04**

**BRASÍLIA - DF**  
**AGOSTO / 2004**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**GERAÇÃO DE SUPERFÍCIES DE INTERAÇÃO PELO  
MÉTODO DA REGRESSÃO LINEAR MÚLTIPLA COM O  
MODELO DE DANO EM VIGAS DE TIMOSHENKO 3D**

**ENG<sup>o</sup>. PEDRO CLÁUDIO DOS SANTOS VIEIRA, MSc.**

TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR.

APROVADA POR:



**WILLIAM TAYLOR MATIAS SILVA, Dr. Ing (UnB)**

  
**LINEU JOSÉ PEDROSO, Dr. Ing (UnB)**  
**LUCIANO MENDES BEZERRA, PhD (UnB)**  
**MIGUEL LUIZ BUCALEM, PhD (USP)**  
**ESTEVAM BARBOSA DE LAS CASAS, PhD (UFMG)**

**BRASÍLIA, 09 DE AGOSTO DE 2004**

## FICHA CATALOGRÁFICA

**VIEIRA, PEDRO CLÁUDIO DOS SANTOS**

Geração de Superfícies de Interação pelo Método da Regressão Linear Múltipla com o Modelo de Dano em Vigas de Timoshenko 3D [Distrito Federal] 2004.

xxi, 150 p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Dr., Estruturas, 2004)

Tese de Doutorado - Universidade de Brasília.

Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

- |                       |                              |
|-----------------------|------------------------------|
| 1. Estruturas         | 2. Algoritmo de Retorno      |
| 3. Plasticidade       | 4. Superfícies de Interação  |
| 5. Metálicas          | 6. Regressão Linear Múltipla |
| 7. Viga de Timoshenko | 8. Análise Elastoplástica    |
| I. ENC/FT/UnB         | II. Título (série)           |

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

**VIEIRA, P. C. dos S.** (2004). Geração de Superfícies de Interação pelo Método da Regressão Linear Múltipla com o Modelo de Dano em Vigas de Timoshenko 3D, Publicação nº E.TD-006A/04, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 150p.

## CESSÃO DE DIREITOS

**NOME DO AUTOR:** Pedro Cláudio dos Santos Vieira

**TÍTULO DA TESE DE DOUTORADO:** Geração de Superfícies de Interação pelo Método da Regressão Linear Múltipla com o Modelo de Dano em Vigas de Timoshenko 3D.

**GRAU:** Doutor

**ANO:** 2004

É concedida à Universidade de Brasília a permissão para reproduzir cópias desta tese de doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Pedro Cláudio dos Santos Vieira  
Av.: Cônego Cardoso n.º 691  
Bairro Oeiras Nova - CEP 64500-000  
Oeiras - Piauí – Brasil

## **AGRADECIMENTO ESPECIAL**

*“Clama a mim, e responder-te-ei, e anunciar-te-ei cousas grandes e firmes, que não sabes.” Jeremias 33:3. A Deus que nos dá mais daquilo que pedimos ou pensamos.*

# DEDICATÓRIA

*Dedico a minha grande família: natural e da fé.*

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Prof<sup>o</sup> William Taylor Matias Silva, pelo despertar do pensamento na área de mecânica computacional e sua orientação no desenvolvimento do trabalho.

Aos Professores Eugenio Oñate e Alex Hanganu por suas orientações e disponibilidade nas questões envolventes à parte da análise com o modelo de dano em vigas de Timoshenko 3D.

Aos professores do PECC da Universidade de Brasília, pelos seus trabalhos numa tão importante missão: “Ensinar a pensar”.

A CAPES pelo auxílio financeiro.

Aos meus grandes amigos: Jonathan, Nelvio e Gilberto, dentre vários.

Aos professores da Universidade Federal do Piauí, onde destaco: Prof: Fernando Drumond e Paulo de Tarso, pelos seus esforços no ensino de Engenharia Civil.

Aos grandes amigos de graduação: João Batista, Juvêncio, Liana Almeida, Jesse James e Benigno.

Aos grandes amigos e irmãos de fé: Gilson, Adriana e Thadeu por acompanhar as distintas fases de conversações sobre a tese.

A todos amigos, muito obrigado. Deus possa estar convosco todos os dias até a consumação dos séculos.

# **Geração de Superfícies de Interação pelo Método da Regressão Linear Múltipla com o Modelo de Dano em Vigas de Timoshenko 3D**

## **RESUMO**

Na literatura técnica, existem formulações analíticas que trabalham com superfícies de interação em resultantes de tensões. Estes tipos de superfícies são importantes para evitar o processo de integração numérica, por exemplo na seção transversal, nas análises estruturais. Geralmente, as funções de escoamento  $f$  trabalham no espaço de tensões e dentro deste escopo, vê-se que a interação entre as tensões normal e tangencial pelo critério de Mises, aplicadas para os principais pontos de tensão numa seção metálica, é usualmente considerada como um limite para projetos elásticos de elementos resistentes. Expressões em tensões, que dependem dos esforços dados pela Resistência dos Materiais, permitem aplicações de condições limites de forma direta. Quando esta forma de critério é dada, a interação de superfícies limites para trios de esforços aplicados resulta em planos, quádricas, superfícies mais complexas, ou uma mistura destas. Técnicas que usam formulações analíticas são mais ou menos complexas e dependem de características, como por exemplo: combinação de tensões ou de esforços seccionais, e o tipo de seção analisada.

Este trabalho apresenta uma técnica de geração de superfícies de interação em resultantes de tensões, através da regressão linear múltipla, usando modelo de dano em vigas de Timoshenko 3D com aplicações baseadas na análise elastoplástica de pórticos espaciais utilizando o conceito de rótula plástica e o método de backward Euler. Posteriormente, são apresentados e discutidos exemplos numéricos mostrando a eficácia da metodologia alternativa proposta.

# **Generation of Surfaces of Interaction for the Method of the Multiple Lineal Regression with the Model of Damage in Beams of Timoshenko 3D**

## **ABSTRACT**

In the technical literature, there are analytical formulations based on surfaces of interaction in stress resultants. This kind of surfaces is important in order to avoid the numerical integration process as, for instance, in the transversal section, in structural analysis. Generally, the yield function  $f$  is defined in the stress space and the interaction between the normal and tangential stress performed by the von Mises criteria, applied to the main stress points on a metal section, is usually considered as a limit for elastic projects of the supporting elements. The expressions written in the stress space, which depend on efforts given by the Strength of Materials, allow the applications of the limit conditions directly. When is given this kind of criteria, the interaction of the limit surfaces for trios of applied efforts results in planes, quadrics, more complex surfaces or a combination of them. Techniques which use the analytical formulations are more or less complex and they depend on some features, such as combination of the stress or sectional efforts and type of the analyzed section.

This work present a surface of interaction generation technique based on stress resultants, through the multiple linear regression technique, using a damage model for 3D Timoshenko beam, with applications based on the elastoplastic analysis of space frames, using the plastic hinge concepts and the Euler Backward method. After, are presented and discussed numerical examples showing the effectiveness of the proposed alternative methodology.



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	MOTIVAÇÃO . . . . .	1
1.2	OBJETIVOS E ORIGINALIDADE DO TRABALHO . . . . .	3
1.3	DESCRIÇÃO DO TRABALHO . . . . .	3
1.4	HIPÓTESES BÁSICAS . . . . .	4
<b>2</b>	<b>PROCEDIMENTOS TEÓRICOS</b>	<b>5</b>
2.1	INTRODUÇÃO . . . . .	5
2.2	EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO . . . . .	5
2.3	FORMULAÇÃO DE VIGA DE TIMOSHENKO BIDIMENSIONAL . . . . .	6
2.3.1	Hipóteses da formulação de viga de Timoshenko . . . . .	6
2.3.2	Campo de deformação . . . . .	9
2.3.3	Campos de tensão . . . . .	10
2.3.4	Campo dos esforços seccionais . . . . .	10
2.4	FORMULAÇÃO DE VIGA DE TIMOSHENKO TRIDIMENSIONAL (3D) . . . . .	11
2.4.1	Funções de forma e suas relações com os campos . . . . .	16
2.4.2	Processo de cálculo não-linear . . . . .	17
<b>3</b>	<b>REGRESSÃO LINEAR MÚLTIPLA PARA OBTENÇÃO DAS SUPERFÍCIES DE INTERAÇÃO</b>	<b>20</b>
3.1	ENFOQUE MATRICIAL PARA A REGRESSÃO . . . . .	21
3.2	PROPRIEDADES DOS ESTIMADORES DE MÍNIMOS QUADRADOS . . . . .	23
3.3	PROVA DE HIPÓTESE NA REGRESSÃO . . . . .	24
3.4	PROVA SOBRE OS COEFICIENTES INDIVIDUAIS DE REGRESSÃO . . . . .	26
3.5	COEFICIENTE DE DETERMINAÇÃO MÚLTIPLA . . . . .	26
3.6	ROTINAS IMSL MATH/LIBRARY . . . . .	27

<b>4</b>	<b>SUPERFÍCIES DE INTERAÇÃO</b>	<b>29</b>
4.1	LIMITES PLÁSTICOS . . . . .	29
4.2	FUNÇÕES DE ESCOAMENTO . . . . .	31
4.3	ADEQUAÇÃO DO MODELO DE DANO PARA VON-MISES . . . . .	34
4.4	COMPROVAÇÃO DOS LIMITES PLÁSTICOS PARA SEÇÃO RETANGULAR	35
4.4.1	Esforço Axial ( $N_{xp}$ ) . . . . .	36
4.4.2	Momento Fletor ( $M_{yp}$ ) . . . . .	38
4.4.3	Momento Fletor ( $M_{zp}$ ) . . . . .	40
4.4.4	Momento Torçor ( $M_{xp}$ ) . . . . .	43
4.4.5	Esforço Cortante ( $F_{yp}$ ) . . . . .	45
4.5	FORMULAÇÃO PARA A OBTENÇÃO DAS SUPERFÍCIES . . . . .	47
4.6	PROCESSO NUMÉRICO DE OBTENÇÃO DAS SUPERFÍCIES . . . . .	50
4.6.1	Exemplo 4.6.1 . . . . .	52
4.6.2	Exemplo 4.6.2 . . . . .	65
4.6.3	Exemplo 4.6.3 . . . . .	71
4.6.4	Exemplo 4.6.4 . . . . .	77
4.6.5	Exemplo 4.6.5 . . . . .	92
<b>5</b>	<b>ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE ESTRUTURAS APORTICADAS</b>	<b>95</b>
5.1	DERIVADAS DE PRIMEIRA ORDEM . . . . .	96
5.2	DERIVADAS DE SEGUNDA ORDEM . . . . .	97
5.3	ALGORITMO DE RETORNO . . . . .	100
5.3.1	Algoritmo de retorno com 1 (um) vetor . . . . .	101
5.3.2	Algoritmo de retorno com 2 (dois) vetores . . . . .	103
5.4	MATRIZ DE RIGIDEZ CONSISTENTE . . . . .	106
5.4.1	Algoritmo de retorno com um vetor . . . . .	106
5.4.2	Algoritmo de retorno com dois vetores . . . . .	108
<b>6</b>	<b>EXEMPLOS NUMÉRICOS</b>	<b>112</b>
6.1	INTRODUÇÃO . . . . .	112
6.1.1	Exemplo 6.1 . . . . .	112
6.1.2	Exemplo 6.2 . . . . .	115

<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES E PESQUISAS FUTURAS</b>	<b>119</b>
7.1	CONCLUSÕES . . . . .	119
7.2	PESQUISAS FUTURAS . . . . .	120
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>121</b>
<b>A</b>	<b>RELAÇÕES CONSTITUTIVAS</b>	<b>125</b>
A.1	INTRODUÇÃO . . . . .	125
A.2	INELASTICIDADE . . . . .	125
A.3	LEIS DE FLUXO E POTENCIAL DE FLUXO . . . . .	125
A.4	POSTULADO DA MÁXIMA-DISSIPAÇÃO . . . . .	126
A.5	NORMALIDADE . . . . .	127
A.6	CRITÉRIOS DE ESCOAMENTO E REGRA DE FLUXO . . . . .	129
A.6.1	Critério de Tresca . . . . .	130
A.6.2	Regra de fluxo de Lévy e Critério de Mises . . . . .	130
A.6.3	Critério de Mohr-Coulomb . . . . .	131
A.6.4	Critério de Drucker-Praguer . . . . .	132
<b>B</b>	<b>MODELO DE DANO ISOTRÓPICO</b>	<b>133</b>
B.1	INTRODUÇÃO . . . . .	133
B.2	CONCEITO DE DANO . . . . .	133
B.3	CONSIDERAÇÕES ENERGÉTICAS . . . . .	135
B.4	INEQUAÇÃO DE CLASIUS-PLANCK. DISSIPACÃO MECÂNICA . . . . .	136
B.5	CRITÉRIO LIMITE DE DEGRADAÇÃO (DANO) . . . . .	136
B.6	REGRA DE EVOLUÇÃO DA VARIÁVEL INTERNA DO DANO . . . . .	138
B.7	CONDIÇÃO DE CONSISTÊNCIA DO DANO . . . . .	138
B.8	CONDIÇÃO DE CARREGAMENTO E DESCARREGAMENTO . . . . .	139
B.9	FUNÇÃO DE EVOLUÇÃO DO DANO $G(\bar{\sigma})$ . . . . .	139
B.10	PARÂMETRO A DA FUNÇÃO $G(\bar{\sigma})$ . . . . .	140
B.11	ASPECTOS ENERGÉTICOS DO FENÔMENO DE DEGRADAÇÃO (DANO) . . . . .	141
B.12	MATRIZ TANGENTE DO MODELO DE DANO . . . . .	143
B.12.1	I. Dedução da matriz tangente . . . . .	143
B.12.2	II. Cálculo da matriz tangente . . . . .	143
B.13	DIREÇÕES DE FISSURAÇÃO E ESMAGAMENTO . . . . .	145

<b>C</b>	<b>INFERÊNCIA ESTATÍSTICA</b>	<b>147</b>
C.1	DISTRIBUIÇÃO DE MEDIAS DE AMOSTRAS . . . . .	147
C.2	DISTRIBUIÇÃO JI-QUADRADA . . . . .	148
C.3	DISTRIBUIÇÃO $Jt$ . . . . .	149
C.4	DISTRIBUIÇÃO $Jf$ . . . . .	149

## Lista de Tabelas

3.1	Tabela da prova de significância (Montgomery e Runger, 1998). . . . .	24
4.1	Propriedades elemento de barra engastado. . . . .	36
4.2	Tipo de observações para nm . . . . .	48
4.3	Propriedades do elemento engastado . . . . .	51
4.4	Propriedades particulares do exemplo modelo. . . . .	52
4.5	Observações $n_2m_1y$ . . . . .	53
4.6	Prova de significância - $n_2m_1y$ . . . . .	53
4.7	Observações $n_1m_2y$ . . . . .	55
4.8	Prova de significância - $n_1m_2y$ . . . . .	56
4.9	Observações $n_2m_2y$ . . . . .	56
4.10	Prova de significância - $n_2m_2y$ . . . . .	57
4.11	Observações $n_2m_2ya$ . . . . .	58
4.12	Prova de significância - $n_2m_2ya$ . . . . .	58
4.13	Observações $n_2m_1z$ . . . . .	59
4.14	Prova de significância - $n_2m_1z$ . . . . .	59
4.15	Observações $n_1m_2z$ . . . . .	61
4.16	Prova de significância - $n_1m_2z$ . . . . .	61
4.17	Observações $n_2m_2z$ . . . . .	62
4.18	Prova de significância - $n_2m_2z$ . . . . .	62
4.19	Observações $n_2m_2za$ . . . . .	63
4.20	Prova de significância - $n_2m_2za$ . . . . .	64
4.21	Observações $m_1ym_2z$ . . . . .	65
4.22	Prova de significância - $m_1ym_2z$ . . . . .	66
4.23	Observações $m_2ym_1z$ . . . . .	67
4.24	Prova de significância - $m_2ym_1z$ . . . . .	67
4.25	Observações $m_2ym_2z$ . . . . .	69
4.26	Prova de significância - $m_2ym_2z$ . . . . .	69
4.27	Observações $m_2ym_2za$ . . . . .	70
4.28	Prova de significância - $m_2ym_2za$ . . . . .	70
4.29	Prova de significância - $nmymz$ . . . . .	71

4.30	Observações $n_2m_2ym_2z$ . . . . .	72
4.31	Observações $n_2m_2ym_2z$ . . . . .	73
4.32	Prova de significância - $n_2m_2ym_2z$ . . . . .	74
4.33	Prova de significância - $n_2m_2ym_2za$ . . . . .	75
4.34	Prova de significância - $n_2m_2ym_2za1$ . . . . .	75
4.35	Observações $n_2m_2ym_2za$ . . . . .	76
4.36	Prova de significância - $n_2m_2xm_2z$ . . . . .	77
4.37	Observações $n_2m_2xm_2z$ . . . . .	78
4.38	Prova de significância - $n_2m_2xm_2za$ . . . . .	79
4.39	Observações $n_2m_2xm_2za$ . . . . .	80
4.40	Prova de significância - $n_2m_2xm_2ya$ . . . . .	81
4.41	Observações $n_2m_2xm_2ya$ . . . . .	82
4.42	Prova de significância - $m_2xm_2y$ . . . . .	83
4.43	Observações $m_2xm_2y$ . . . . .	83
4.44	Prova de significância - $m_2xm_2y$ . . . . .	84
4.45	Observações $m_2xm_2y$ . . . . .	85
4.46	Prova de significância - $m_2xm_2y$ . . . . .	86
4.47	Observações $m_2xm_2y$ . . . . .	87
4.48	Prova de significância - $m_2xm_2z$ . . . . .	88
4.49	Observações $m_2xm_2z$ . . . . .	89
4.50	Prova de significância - $m_2xm_2z$ . . . . .	89
4.51	Observações $m_2xm_2z$ . . . . .	90
4.52	Prova de significância - $m_2xm_2z$ . . . . .	91
4.53	Observações $m_2xm_2z$ . . . . .	91
4.54	Prova de significância - $f_2ym_2z$ . . . . .	92
4.55	Observações $f_2ym_2z$ . . . . .	93
4.56	Prova de significância - $f_2ym_2z$ . . . . .	93
4.57	Observações $f_2ym_2z$ . . . . .	94
6.1	Propriedades do material (Two bay asymmetric frame). . . . .	112
6.2	Rótulas plásticas para as funções analisadas- Two bay asymmetric frame . . . . .	114
6.3	Propriedades do material (Two beam structure) . . . . .	115
6.4	Rótulas plásticas para as funções analisadas- Two beam structure . . . . .	117

## Lista de Figuras

2.1	Seção transversal da viga de Timoshenko 2D (Onate, 1992). . . . .	7
2.2	Viga de Timoshenko (Onate, 1992). . . . .	8
2.3	Teoria de viga de Timoshenko. Rotação da seção normal a linha média (Onate, 1992). . . . .	8
2.4	Barra 3D com seção dividida mediante uma malha retangular. Eixos locais. . .	12
2.5	Representação das funções de forma . . . . .	16
2.6	Algoritmo de cálculo não-linear (Hanganu, 1997). . . . .	18
4.1	Tensão e deformação para o caso uniaxial. (a) deformação; (b) tensão; (c) resultantes de tensão; (d) deformação reversa; (e) deformação no plano dominante (Crisfield, 1990). . . . .	32
4.2	Deslocamento imposto na direção $x$ , nó 21. . . . .	36
4.3	Malha do elemento analisado para o esforço axial com sistema de eixos global. . . . .	36
4.4	Valor limite para o esforço axial $x$ . . . . .	37
4.5	Gráfico de carga versus deslocamento para o esforço axial, nó 21. . . . .	37
4.6	Rotação imposta na direção $y$ , nó 21. . . . .	38
4.7	Malha gerada para o momento fletor $y$ . . . . .	38
4.8	Gráfico momento fletor $y$ versus rotação $\theta_y$ . . . . .	39
4.9	Valor limite para o momento fletor $y$ . . . . .	39
4.10	Distribuição de tensões para $m_y$ ao longo da seção transversal nos nós 1 e 21. . . . .	40
4.11	Rotação imposta na direção $z$ , nó 21. . . . .	40
4.12	Malha gerada para o momento fletor $z$ . . . . .	41
4.13	Gráfico momento fletor $z$ versus rotação $\theta_z$ . . . . .	41
4.14	Valor limite para o momento fletor $z$ . . . . .	42
4.15	Distribuição de tensões para $m_z$ ao longo da seção transversal nos nós 1 e 21. . . . .	42
4.16	Rotação imposta na direção $x$ , nó 21. . . . .	43
4.17	Malha gerada para o momento torçor $x$ . . . . .	43
4.18	Gráfico momento torçor $x$ versus rotação $\theta_x$ . . . . .	44
4.19	Valor limite para o momento torçor $x$ . . . . .	44
4.20	Deslocamento imposto na direção $y$ , nó 1. . . . .	45
4.21	Malha gerada para o esforço cortante $y$ . . . . .	45

4.22	Gráfico esforço cortante $y$ versus deslocamento $u_y$ , nó 21. . . . .	46
4.23	Valor limite para o esforço cortante $y$ . . . . .	46
4.24	Pontos gerados para criar a função de escoamento (caso uniaxial). . . . .	47
4.25	Viga engastada. . . . .	51
4.26	Comparação entre a função analítica $f$ e a função obtida pela regressão múltipla $f_u.(n2m1y)$ . . . . .	54
4.27	Função obtida pela regressão múltipla $f_u.(n1m2y)$ . . . . .	55
4.28	Função obtida pela regressão múltipla $f_u.(n2m2y)$ . . . . .	57
4.29	Comparação entre a função analítica $f$ e a função obtida pela regressão múltipla $f_u.(n2m1z)$ . . . . .	60
4.30	Função obtida pela regressão múltipla $f_u.(n1m2z)$ . . . . .	61
4.31	Função obtida pela regressão múltipla $f_u.(n2m2z)$ . . . . .	63
4.32	Comparação entre a função analítica $f$ e a função obtida pela regressão múltipla $f_u.(m1ym2z)$ . . . . .	66
4.33	Comparação entre a função analítica $f$ e a função obtida pela regressão múltipla $f_u.(m2ym1z)$ . . . . .	68
4.34	Função obtida pela regressão múltipla $f_u.(m2ym2z)$ . . . . .	69
4.35	Função obtida pela regressão múltipla $f_u.(m2xm2y)$ . . . . .	84
4.36	Função obtida pela regressão múltipla $f_u.(mxm2y)$ . . . . .	85
4.37	Função obtida pela regressão múltipla $f_u.(m2xmy)$ . . . . .	86
4.38	Função obtida pela regressão múltipla $f_u.(m2xm2z)$ . . . . .	88
4.39	Função obtida pela regressão múltipla $f_u.(mxm2z)$ . . . . .	89
4.40	Função obtida pela regressão múltipla $f_u.(m2xmz)$ . . . . .	91
5.1	Retorno a superfície com um vetor (Silva, 2004). . . . .	101
5.2	Retorno a superfície com dois vetores (Silva, 2004). . . . .	103
5.3	Procedimento incremental-iterativo de Newton-Raphson (Crisfield, 1990). . . . .	107
6.1	Geometria e dados da seção transversal (Two bay asymmetric frame) (Argyris, 1982). . . . .	113
6.2	Resultado do exemplo "Two bay asymmetric frame"(Argyris, 1982). . . . .	113
6.3	Gráfico carga $\times$ deslocamento para o nó 2 - função n2m (Two bay asymmetric frame). . . . .	115
6.4	Geometria e dados da seção transversal do "Two beam structure"(Argyris, 1982). . . . .	116
6.5	Resultados do exemplo "Two beam structure"(Argyris, 1982). . . . .	116
6.6	Gráfico carga $\times$ deslocamento para o nó 2 - (Two beam structure). . . . .	118
A.1	Postulado da máxima dissipação plástica: Ilustração no plano de tensão-deformação (Lubliner, 1990). . . . .	127



A.2	Propriedades da superfície de escoamento com regra de fluxo associado: (a) normalidade; (b) convexidade (Lubliner, 1990). . . . .	128
A.3	Propriedades da superfície de escoamento com regra de fluxo associado: (c) canto (Lubliner, 1990). . . . .	129
B.1	Representação simples das teorias que contribuem para a definição do "modelo de dano plástico"(Oller, 2001). . . . .	134
B.2	Superfície com dano (Hanganu, 1997). . . . .	134
B.3	Tensão de Cauchy $\sigma$ e tensão efetiva $\bar{\sigma}$ (Hanganu, 1997). . . . .	134
B.4	Evolução da curva uniaxial tensão-deformação (Hanganu, 1997). . . . .	135
B.5	Função limite de dano no plano principal $\sigma_1 - \sigma_2$ (Hanganu, 1997). . . . .	137
B.6	Representação da função $G(\bar{\sigma})$ escolhida (Hanganu, 1997). . . . .	140
B.7	Deslocamento da perda de energia $\delta W_p$ (Hanganu, 1997). . . . .	142
B.8	Obtenção da direção de fissuração a partir das deformações principais (Hanganu, 1997). . . . .	146
C.1	Distribuições de pontos médios provenientes de um experimento de lançamento de dados (Montgomery e Runger, 1998). . . . .	148

# Lista de Símbolos e Abreviações

Salvo indicação contrária, a notação seguinte é utilizada em todo este trabalho.

## 1. Matrizes e Vetores

**Negrito** indica matriz ou vetor

$\mathbf{a}'_i$	vetor de deslocamentos nodais
$\hat{\beta}$	estimador de mínimos quadrados
$\beta$	vetor de $(p \times 1)$ formado pelos coeficientes de regressão
$\mathbf{b}^v$	forças de corpo
$\mathbf{C}$	tensor constitutivo
$\hat{\mathbf{C}}$	matriz constitutiva seccional
$\mathbf{C}^D$	tensor constitutivo tangente não simétrico
$\mathbf{C}^S$	matriz constitutiva secante do material estudado
$\mathbf{C}^0$	tensor de rigidez do material no estado inicial não degradado
$\mathbf{D}$	matriz não simétrica que depende somente do vetor de tensões não degradadas $\sigma^0$
$\epsilon$	tensor de deformações pontuais
$\hat{\epsilon}$	vetor de deformações seccionais
$\epsilon^e$	deformação elástica
$\epsilon^i$	deformação inelástica
$\Xi_m$	potência dissipativa
$\Xi_t^{\max}$	valor de dissipação máxima a tração
$\epsilon$	vetor $(n \times 1)$ dos erros aleatórios
$\mathbf{F}_e$	vetor de forças internas elásticas
$\bar{F}_i$	vetor de forças nodais do último passo de carga convergido
$\mathbf{g}(\sigma, T, \xi)$	potencial de fluxo
$\mathbf{I}_6$	matriz identidade de fila (rank) 6
$\mathbf{I}_1$	primeiro invariante do tensor de tensões
$\mathbf{J}_2$	segundo invariante do tensor desviador (s)
$\mathbf{J}_3$	terceiro invariante do tensor desviador (s)
$\mathbf{K}$	matriz de rigidez global do elemento
$\mathbf{L}$	matriz de operadores diferenciais
$\mathbf{N}'$	funções de forma
$\Psi$	energia livre
$\sigma$	tensor de tensões
$\sigma^*$	tensão elástica inicial

$r_i$	vetor de forças residuais
$\mathbf{S}(z')$	matriz de conversão dos deslocamentos do eixo aos deslocamentos pontuais em função da altura $z'$ do ponto
$\mathbf{S}$	matriz de transformação que relaciona $\varepsilon$ com $\tilde{\varepsilon}$
$\mathbf{s}$	tensor desviador
$\mathbf{T}$	matriz transformação
$f_j$	forças concentradas
$f^d$	forças distribuídas
$\mathbf{u}$	campo de deslocamentos
$\mathbf{u}^p(x', z')$	vetor de deslocamentos de um ponto qualquer da seção transversal da barra
$\mathbf{u}'(x')$	vetor de deslocamentos seccionais da barra nos eixos locais
$\mathbf{X}$	tensor (matriz) de $(n \times p)$ dos níveis das variáveis independentes
$\mathbf{y}$	vetor de observações de $(n \times 1)$

## 2. Escalares

$A$	seção transversal de área
$\alpha_i$	constantes que determinam o grau da função
$b$	largura da seção transversal
$\beta_j$	coeficientes de regressão
$c$	coesão
$\frac{dw}{dx}$	inclinação da deformada do eixo da viga
$d$	variável de dano
$dU_j$	incrementos de deslocamentos
$\in$	erro do modelo de regressão
$\zeta$	variável normalizada
$\delta$	variação virtual
$E$	módulo de elasticidade longitudinal
$f$	superfícies de interação da literatura
$f_c$	limite de dano
$f_u$	superfícies de interação geradas
$\phi$	rotação adicional devido a deformação por cortante
$F_x$	esforço axial
$F_{x_p}$	esforço normal de plastificação puro
$F_y$ e $F_z$	esforços cortantes
$\ F_i^{trial}\ $	norma Euclidiana do vetor de forças estimado

$F_{y_p}$ e $F_{z_p}$	esforços cortantes de plastificação puros
$f_0$	estatístico de prova
$Jf$	distribuição estatística ji-quadrada $f$
$G$	módulo de elasticidade transversal
$\bar{G}^*$	tensão de compressão do limite inicial
$G_f$	energia de fratura (constante de material) normalizada
$h$	altura da seção transversal
$i$	raio de giração
$k(\xi)$	tensão de escoamento em cisalhamento
$I$	módulo de inércia
$l$	comprimento longitudinal da viga
$\dot{\lambda}$	parâmetro de consistência plástica da plasticidade
$\lambda$	função de esbeltez
$d\lambda_1$ e $d\lambda_2$	correções dos multiplicadores plásticos
$M$	momento fletor
$M_x$	momento torçor
$M_{x_p}$	momento torçor de plastificação puro
$M_{y_p}$ e $M_{z_p}$	momentos fletores de plastificação puros
$M_y$ e $M_z$	momentos fletores
$m_0$	densidade na configuração material
$N$	esforço axial
$\dot{\eta}$	parâmetro de consistência de dano
$Q$	esforço cortante
$v^2$	variância do modelo de regressão
$\sigma_{x'}$	tensão normal à seção
$\sigma$	tensão de Cauchy
$\bar{\sigma}$	tensão efetiva
$\bar{\sigma}^*$	tensão limite de dano inicial
$\hat{v}^2$	resíduo quadrático médio
$\sigma_e$	limite elástico do aço
$\sigma_u$	resistência de cálculo
$\ r_i\ $	norma Euclidiana do vetor de forças residuais
$R^2$	coeficiente de determinação múltipla
$S$	área total da seção

$\bar{S}$	área resistente efetiva
$S_{yy}$	soma total dos quadrados
$SS_R$	soma de quadrados devida a regressão
$SS_E$	soma de quadrados devido ao erro
$\tau_{oct}^{max}$	máxima resistência ao cortante octaédrico
$Jt$	distribuição estatística ji-quadrada $t$
$\tau_{x'z'}$	tensão tangencial
$t_0$	estatístico de prova
$TOL$	tolerância para a convergência
$\mu$	coeficiente de fricção interna
$V$	volume do sólido
$\nu$	coeficiente de Poisson
$W_i$	momento resistente mínimo da seção no plano de flexão
$Y$	variável dependente ou resposta da regressão
$\gamma_a$	coeficiente de minoração
$\psi_i$	fator de forma
$\omega$	coeficiente de flambagem

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 MOTIVAÇÃO

Diagramas (gráficos) de interação são extensivamente usados para projetos de seções de membros prismáticos sujeitos a tensões combinadas. Estes gráficos são usados em tecnologias de construção: concreto armado, seções de aço e compósitos (Irles e Irles, 2000), sendo que geralmente o uso de diagramas de interação de esforços combinados possui três componentes. São apresentadas formulações analíticas para curvas de interação, em trabalhos que enfocam seções H, circular e vazadas sujeitas a flexão, cisalhamento e força axial (Irles e Irles, 2000); (Irles e Irles, 2001), também, Chen apresenta trabalhos com diagramas de interação em superfícies tridimensionais para seções de aço (Chen e Astuta, 1977).

A interação entre as tensões normal e tangencial pelo critério de Mises, aplicadas para os principais pontos de tensão, numa seção metálica, é usualmente considerada como um limite para projetos elásticos de elementos resistentes. Expressões em tensões que dependem dos esforços dados pela Resistência dos Materiais, permitem aplicações de condições limites de forma direta. Quando esta forma de critério é dada, a interação de superfícies limites para trios de esforços aplicados resulta em planos, quádricas, superfícies mais complexas, ou uma mistura destas (Irles e Irles, 2000). Técnicas que usam formulações analíticas são mais ou menos complexas, dependendo das características de cada região em que está dividida a superfície (Irles e Irles, 2001).

Na teoria de plasticidade, a condição de escoamento é especificada pela superfície de escoamento, separando o domínio elástico do espaço de forças generalizadas de um domínio não acessível fora da superfície de escoamento (Krenk, 1999). Superfícies em resultantes de tensão de forma poliédrica são usadas na literatura, (Orbison et al., 1982), e semelhantes superfícies fazem que sejam atendidos os critérios de escoamento e normalidade num estado plástico de forma relativamente fácil. Quando superfícies multifacetadas são usadas, as forças elásticas no elemento necessitam serem checadas em cada faceta e as forças para as rótulas plásticas devem ser preventivamente impedidas de atravessar de uma faceta para outra vizinha.

Superfícies de escoamento multifacetadas podem trazer problemas adicionais na determinação da correta matriz de rigidez, embora, quando são usadas superfícies curvas (simples ou

multifuncionais), um procedimento iterativo é tipicamente requerido para determinar o incremento de carga de um estado elástico para o escoamento incipiente, enquanto com uma superfície planar este cálculo é direto (Orbison et al., 1982).

Nas especificações de projetos, como por exemplo: a americana, é indicado que o limite de resistência de uma seção de aço é alcançado quando uma combinação linear da força axial e momento fletor sobre cada eixo principal da seção transversal alcança um valor prescrito. Os possíveis efeitos de torção e cisalhamento são negligenciados.

Pode-se ver na literatura que o enfoque dado para a análise não-linear de estruturas com vigas 3D, usando superfícies de interação, leva em conta, somente, os três esforços seccionais, devido às dificuldades de trabalhar com hiper-superfícies e modelar, experimentalmente, os seis esforços seccionais existentes na análise de pórticos espaciais. O uso de elementos sólidos aumenta o custo computacional da análise de forma importante quando são empregados para análises reais e geralmente os softwares comerciais para projetos de pórticos espaciais são feitos por meios elementos finitos de barra com formulações que simplificam a análise. Sabe-se que a capacidade de resistência de um elemento estrutural depende do tipo de esforços com o qual está sendo solicitado, ou seja, um sistema estrutural que trabalha só com esforços axiais tem uma capacidade de resistência maior do que quando trabalha com flexo-compressão, flexo-torção, etc. Estendendo o conceito, vê-se que os edifícios que trabalham com cargas de vento, concentradas, distribuídas, etc, possuem um sistema que trabalha com os seis esforços seccionais; se analisarmos a influência que um tipo de esforço tem em alterar a capacidade resistente da estrutura, pode-se ver a necessidade de compreender melhor a interação que há entre os seis esforços, ao nível de influenciar a estabilidade global ou local de uma estrutura.

Quando é feita uma análise elastoplástica com modelos de viga 3D, necessita-se de uma função da superfície de escoamento que controlará o término da fase elástica e o estado plástico da estrutura. O limite entre a zona elástica e a plástica se estabelece mediante a superfície de fluência ou superfície de descontinuidade, e a partir deste limite esta superfície adquire mobilidade no espaço de tensões, seguindo a evolução do processo plástico, transformando-se na denominada superfície de carga plástica. Para estabelecer, durante o processo de carga, o início do comportamento inelástico e a posterior evolução das fronteiras do domínio elástico dentro do espaço, adota-se o critério de fluência ou descontinuidade (Oller, 2001). São apresentadas referências bibliográficas que de forma direta ou indireta estão relacionadas com as formulações desenvolvidas para o presente trabalho.

Parte do trabalho foi desenvolvido no CIMNE (Centro Internacional de Métodos Numéricos na Engenharia) na Universidade Politécnica de Catalunha (Barcelona/Espanha), no período de 05/2002 a 04/2003. Foi utilizado o programa da tese doutoral de Hanganu que trata da Metodologia de Avaliação da Degradação em Estruturas de Concreto Armado, (Hanganu, 1997), que foi adaptado para o caso de estruturas de aço. A formulação de viga de Timoshenko 3D com o modelo de dano usada pelo programa permite o tipo de análise necessária para a obtenção das superfícies de interação levando em conta a não linearidade física do material com resultados

em resultantes de tensão. Foram feitas análises para a validação do programa para cada esforço seccional de forma a verificar a carga de colapso de cada esforço de forma independente, ou seja, sem levar em conta a interação entre eles. Assim, comprovou-se que o programa pode ser utilizado na proposição de usar a regressão linear múltipla com dados de entrada oriundos destas análises de viga de Timoshenko 3D.

## **1.2 OBJETIVOS E ORIGINALIDADE DO TRABALHO**

O trabalho apresenta de forma original a regressão linear múltipla como um procedimento capaz de gerar superfícies de interação em resultantes de tensão com dados de entrada obtidos pela formulação de viga de Timoshenko 3D com o modelo constitutivo de dano adaptado para o critério de Von-Mises. Enfoca as teorias e formulações empregadas para a geração de superfícies de interação por processo numérico, de maneira a compreender seu comportamento e similaridades com funções propostas na literatura, assim como, permite a criação de outras funções que possam ser adotadas como critérios de fluência nas análises não-lineares de estruturas.

## **1.3 DESCRIÇÃO DO TRABALHO**

O presente trabalho desenvolve-se em 7 capítulos. A seguir descreve-se o conteúdo dos mesmos.

O capítulo 2 trata dos procedimentos teóricos. Apresenta os aspectos da formulação das vigas de Timoshenko 2D e vigas de Timoshenko 3D com com relação as equações de equilíbrio, campo de deformação, de tensão, de esforços seccionais e funções de forma adotadas.

O capítulo 3, apresenta a formulação da regressão linear múltipla com as propriedades dos estimadores, prova de hipótese e rotinas IMSL na linguagem Fortran. A regressão é utilizada para a geração das superfícies analíticas por processo numérico.

No capítulo 4, é mostrado o método para a obtenção das curvas de interação por processo numérico. São apresentadas curvas existentes na literatura e limites plásticos para a comprovação e geração de superfícies de escoamento.

O capítulo 5, desenvolve a formulação da análise elastoplástica de pórticos espaciais utilizando o conceito de rótula plástica e o método de backward Euler.

No capítulo 6, apresenta aplicações numéricas baseadas na análise elastoplástica de pórticos espaciais com o intuito de verificar a aplicação das superfícies geradas.

No capítulo 7, são apresentadas as conclusões obtidas e as propostas para trabalhos futuros.

Os Apêndices A, B e C tratam das relações constitutivas, modelo de dano isotrópico e inferência estatística, respectivamente. Estes apêndices apresentam teorias básicas que fundamentam o trabalho desenvolvido.



## 1.4 HIPÓTESES BÁSICAS

As hipóteses adotadas seguem os critérios estabelecidos em cada formulação. A seguir são apresentadas, num resumo sucinto, algumas delas:

- As equações de equilíbrio na forma discreta são deduzidas a partir do princípio dos trabalhos virtuais;
- É usada a teoria de vigas de Timoshenko com suas três hipóteses básicas;
- O elemento finito usado é de barra 3D desenvolvido a partir do elemento de barra de Timoshenko, lagrangiano de continuidade  $C^0$  de três nós e seis graus de liberdade por nó;
- A discretização da seção transversal é feita em uma malha retangular;
- Segue-se os critérios de plasticidade como por exemplo: leis de fluxo e potencial de fluxo, postulado da máxima-dissipação e normalidade;
- Usa-se o estimador de mínimos quadrados  $\hat{\beta}$  como solução para a regressão linear múltipla;
- A prova de hipótese utilizada na regressão segue o critério de que os termos de erro  $\epsilon_i$  do modelo de regressão tenham distribuições normais e independentes com média zero e variância  $v^2$ ;
- Os limites plásticos foram adotados, para uma seção retangular, em função das fórmulas existentes na literatura;
- É utilizado o método incremental iterativo de Newton-Rhapson, na fase corretora, para determinar a configuração de equilíbrio do sistema estrutural;
- O processo iterativo utiliza os vetores de fluxo plástico, ou seja, o procedimento do algoritmo de retorno para um ou dois vetores;
- Os esforços seccionais contidos no interior da superfície de interação geram somente deformações elásticas;
- Os esforços seccionais que estejam na superfície de interação geram deformações plásticas;
- Os esforços seccionais fora da superfície de interação representam estados de tensões inadmissíveis porque não se leva em conta o caso do endurecimento.

## Capítulo 2

### PROCEDIMENTOS TEÓRICOS

#### 2.1 INTRODUÇÃO

Os modelos que foram utilizados neste trabalho levam em conta a necessidade de uma solução de esforços seccionais na fase não-linear como resultado de uma análise de elementos finitos de viga 3D. São apresentados os fundamentos da teoria de viga de Timoshenko 2D que serviu de base para a teoria 3D e também as equações que são as bases teóricas para chegar na teoria de vigas de Timoshenko 2D e 3D. Todo o desenvolvimento está focado nas características do elemento de viga discretizado em malha com a utilização de um modelo constitutivo tridimensional que requer informação a nível de cada ponto da seção e não somente no eixo da viga, como é habitual nos elementos de viga convencionais (Hanganu, 1997).

#### 2.2 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

As equações de equilíbrio na forma discreta são deduzidas a partir do princípio dos trabalhos virtuais. Este princípio estabelece que um sólido deformável está em equilíbrio se, ao aplicar qualquer campo de deslocamentos virtuais compatível com as condições do vínculo, o trabalho produzido pelas forças internas,  $L_{int}$ , é igual ao trabalho das forças externas,  $L_{ext}$ .

$$L_{int} = L_{ext} \quad (2.1)$$

As forças internas são aquelas geradas dentro do sólido deformável como resposta ao estado de deformação. Em consequência, as únicas forças que são consideradas são as tensões provocadas pela deformação. Por outra parte, as forças externas incluem todo tipo de ações externas. Podem ser forças concentradas pontuais, forças distribuídas ao longo do contorno ou forças de corpo (volume), como por exemplo: campos magnéticos, elétricos, gravitacionais, térmicas, etc.

O princípio dos trabalhos virtuais conduz a seguinte expressão do trabalho virtual interno  $L_{int}$  :

$$L_{int} = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (2.2)$$

onde  $V$  é o volume do sólido,  $\delta$  é a variação virtual,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é o tensor de deformações,  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor de tensões e  $\mathbf{C}$  é a matriz constitutiva.

O trabalho virtual externo  $L_{ext}$  deve conter as contribuições das forças concentradas  $\mathbf{f}_j$ , forças distribuídas  $\mathbf{f}^d$  aplicadas diretamente sobre o contorno do domínio  $S$  e também o termo devido a ação das forças de corpo  $\mathbf{f}^v$  que atuam em cada ponto do volume. Esta expressão tem a seguinte forma:

$$L_{ext} = \sum_j \delta \mathbf{u}_j \mathbf{f}_j + \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^d dS + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^v dV \quad (2.3)$$

onde  $\mathbf{u}$  é o campo de deslocamentos.

Também, podem ser acrescentadas forças dinâmicas quando se fazem análises dinâmicas. O princípio dos trabalhos virtuais pode ser expresso da seguinte forma:

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} dV = \sum_j \delta \mathbf{u}_j \mathbf{f}_j + \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^d dS + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^v dV \quad (2.4)$$

A equação deduzida na forma de um funcional integral, expressada em deslocamentos, controla o comportamento da estrutura no regime estático. Para encontrar o campo de deslocamentos  $\mathbf{u}$ , que é o termo independente do problema, tem-se que usar outros procedimentos, já que a mecânica dos meios contínuos trabalha com soluções pertencentes ao espaço de funções contínuas de dimensão infinita, ou seja, com uma infinidade de graus de liberdade, sendo que o procedimento adotado para reduzir o número de graus de liberdade para um número finito é o método dos elementos finitos.

## 2.3 FORMULAÇÃO DE VIGA DE TIMOSHENKO BIDIMENSIONAL

A formulação de viga de Timoshenko 2D será apresentada de forma sucinta como base para chegar às expressões do modelo de viga de Timoshenko 3D que é a formulação usada no trabalho proposto.

### 2.3.1 Hipóteses da formulação de viga de Timoshenko

Consideremos uma viga de comprimento longitudinal  $l$ , com seção transversal de área  $A$  e módulo de inércia  $I$  sobre que atuam uma série de cargas verticais, e momentos contidos no

plano  $yz$  (ver fig. 2.2). A teoria de vigas de Timoshenko tem três hipóteses básicas que são as seguintes:

1. Os deslocamentos verticais (flechas) de todos pontos de uma seção transversal são pequenos e iguais ao do eixo  $x$  da viga.
2. O deslocamento lateral segundo o eixo  $y$  da figura (2.3) é nulo.
3. As seções transversais normais ao eixo da viga antes da deformação, permanecem planas, porém, não necessariamente normais ao eixo depois da deformação (ver figura 2.3).

Esta hipótese representa uma maior aproximação à deformação real da seção transversal em vigas de grande altura quando comparada a teoria de vigas tradicional. A medida que a relação comprimento *longitudinal/altura* diminui, as seções transversais deixam de se conservar planas depois da deformação (Onate, 1992). Na figura (2.3), pode-se observar que a hipótese de Timoshenko supõe tomar um giro médio para a seção, de maneira que a efeitos práticos possa continuar plana. Em função da formulação, a rotação da seção normal é expressa como:

$$\theta = \frac{dw}{dx} + \phi \quad (2.5)$$

onde  $\frac{dw}{dx}$  é a inclinação da deformada do eixo da viga e  $\phi$  é a rotação adicional devido à deformação por cortante.

Dos seis deslocamentos generalizados de um ponto do espaço, neste caso, somente há dois relevantes, devido ao caráter plano do problema e as hipóteses adotadas anteriormente.

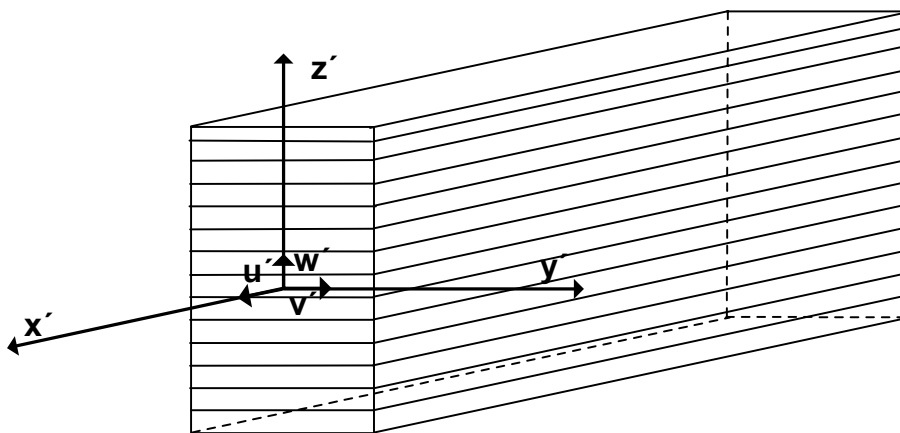


Figura 2.1: Seção transversal da viga de Timoshenko 2D (Onate, 1992).

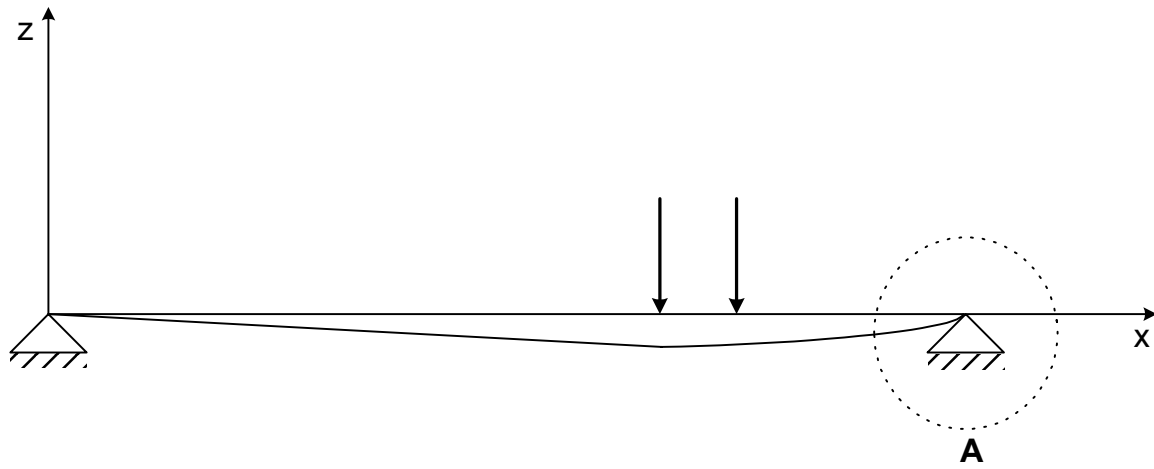


Figura 2.2: Viga de Timoshenko (Onate, 1992).

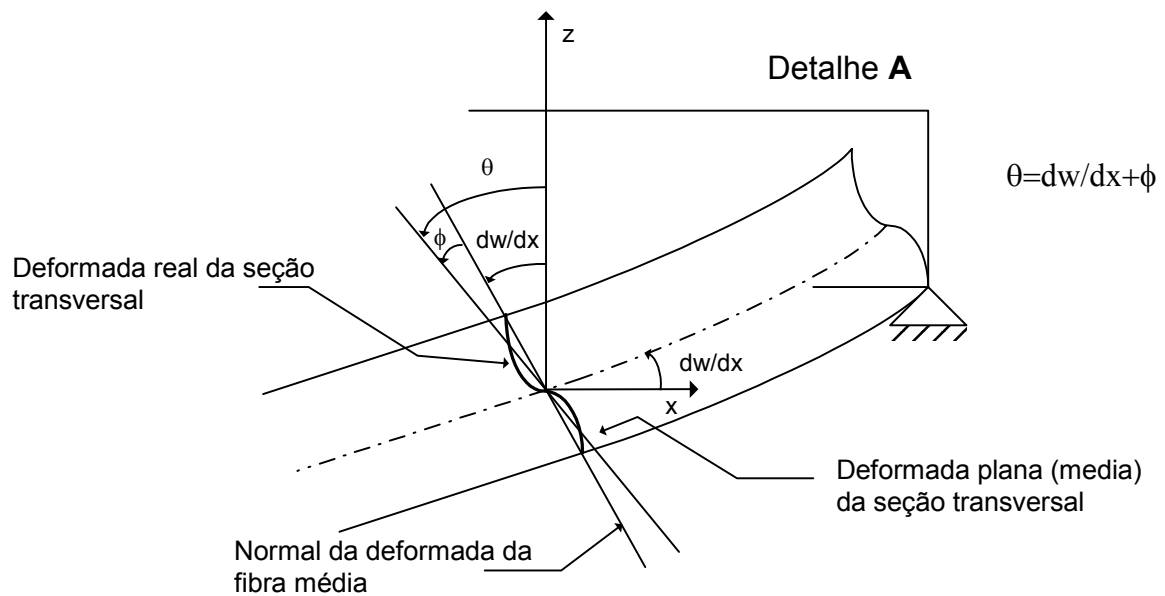


Figura 2.3: Teoria de viga de Timoshenko. Rotação da seção normal a linha média (Onate, 1992).

Estes são  $u^p$  e  $w^p$ , respectivamente, o deslocamento horizontal e o vertical no sistema de coordenadas locais (ver fig. 2.1). O campo de deslocamentos de uma seção transversal é descrito por uma translação horizontal  $u'$ , uma vertical  $w'$  do eixo da viga e pela rotação média da seção  $\theta$  (ver figura 2.1). O movimento de qualquer ponto do corpo pode ser expresso em função do eixo da seção a qual pertence o ponto, (Hanganu, 1997), assim:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^p(x', z') &= \begin{Bmatrix} u_{x',z'}^p \\ w_{z'}^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u'_{x'} - z'\theta_{x'} \\ w'_{z'} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z' \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_{x'} \\ w'_{z'} \\ \theta_{x'} \end{Bmatrix} = \mathbf{S}\mathbf{u}'_{x'} \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde:

- $\mathbf{u}_{x',z'}^p$  – Vetor de deslocamentos de um ponto qualquer da seção transversal da viga. Considera-se que estes deslocamentos não variam ao longo da direção normal ao plano de flexão (hipóteses I e II);
- $\mathbf{u}'_{x'}$  – Vetor de deslocamentos seccionais da viga nos eixos locais;
- $\mathbf{S}$  – Matriz de conversão dos deslocamentos do eixo aos deslocamentos pontuais em função da altura  $z'$  do ponto.

O modelo 2D serviu de base para a teoria de viga 3D, a qual foi empregada nas análises deste trabalho. A formulação da teoria de viga de Timoshenko 2D e 3D é apresentada com detalhes na tese doutoral de Hanganu (Hanganu, 1997).

### 2.3.2 Campo de deformação

Considerando a hipótese das pequenas deformações, a partir de um campo de deslocamentos (equação 2.6) pode-se deduzir as deformações. Baseado nas hipóteses utilizadas, as únicas deformações não nulas são:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x'} &= \frac{du^p}{dx'} = \frac{du'}{dx'} - z' \frac{d\theta}{dx'} \\ \gamma_{x'z'} &= \frac{du^p}{dz'} + \frac{dw^p}{dx'} = \frac{dw'}{dx'} - \theta \end{aligned} \quad (2.7)$$

As equações (2.7) são apresentadas, a seguir, na forma matricial:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \gamma_{x'z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z' \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{du'}{dx'} \\ \frac{dw'}{dx'} - \theta \\ \frac{d\theta}{dx'} \end{Bmatrix} = \mathbf{S}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.8)$$

onde  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  é o vetor de deformações seccionais,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é o vetor de deformações pontuais e  $\mathbf{S}$  é a matriz de transformação que relaciona  $\boldsymbol{\varepsilon}$  com  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ . As deformações seccionais  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  relacionam-se com os deslocamentos seccionais através da matriz de operadores diferenciais  $\mathbf{L}$ :

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \frac{du'}{dx'} \\ \frac{dw'}{dx'} - \theta \\ \frac{d\theta}{dx'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx'} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dx'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ w' \\ \theta \end{Bmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{u}' \quad (2.9)$$

### 2.3.3 Campos de tensão

As hipóteses dos estudos de estruturas de vigas em geral e vigas de Timoshenko, como caso particular, fazem que, do total das seis componentes simétricas distintas do tensor de tensões, somente duas sejam não nulas (Hanganu, 1997). Estas são as tensões normal à seção  $\sigma_{x'}$  e tangencial  $\tau_{x'z'}$ , que se relacionam com as deformações mediante a equação constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \tau_{x'z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \gamma_{x'z'} \end{Bmatrix} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.10)$$

onde  $\mathbf{C}$  é o tensor constitutivo. No caso linear elástico o tensor constitutivo é gerado em função das características do material: módulo de elasticidade longitudinal  $E$ , coeficiente de Poisson  $\nu$  e o módulo de elasticidade transversal  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ . Dentro das seis deformações independentes do tensor de deformações existem quatro que são diferentes de zero, a saber:  $\varepsilon_{x'}$ ,  $\gamma_{x'z'}$ ,  $\varepsilon_{y'}$  e  $\varepsilon_{z'}$ .

### 2.3.4 Campo dos esforços seccionais

As tensões provocam o aparecimento de esforços seccionais de forças e momentos em cada seção transversal de uma viga carregada em um dos planos principais de inércia. Estes esforços seccionais são em três tipos: esforço axial  $N$ , esforço cortante  $Q$  e momento fletor  $M$ .

Utilizando a equação (2.8), o trabalho virtual interno  $\mathbf{L}_{int}$  é rerepresentado da seguinte forma:

$$\mathbf{L}_{int} = \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_0^l \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \left[ \int_A \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} dA \right] dx' = \int_0^l \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dx' \quad (2.11)$$

Na relação anterior, foi introduzido o vetor de esforços seccionais  $\hat{\sigma}$  como um conjugado energético do vetor de deformações seccionais  $\hat{\varepsilon}$  que é mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &= \int_A \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} dA = \int_A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -z' & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \tau_{x'z'} \end{Bmatrix} dA = \int_A \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \tau_{x'z'} \\ -z\sigma_{x'} \end{Bmatrix} dA \\ &= \int_A \mathbf{S}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} dA = \int_A \mathbf{S}^T \mathbf{C} \mathbf{S} \hat{\varepsilon} dA = \hat{\mathbf{C}} \hat{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} N \\ Q \\ M \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (2.12)$$

onde resulta a expressão da matriz constitutiva seccional  $\hat{\mathbf{C}}$  que é descrita como:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{C}} &= \int_A \mathbf{S}^T \mathbf{C} \mathbf{S} dA = \int_A \begin{bmatrix} E & 0 & -z'E \\ 0 & G & 0 \\ -z'E & 0 & z'^2 E \end{bmatrix} dA \\ &= \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} b_i E_i (z'_{i+1} - z'_i) & 0 & -\frac{1}{2} b_i E_i (z'^2_{i+1} - z'^2_i) \\ 0 & b_i G_i (z'_{i+1} - z'_i) & 0 \\ -\frac{1}{2} b_i E_i (z'^2_{i+1} - z'^2_i) & 0 & \frac{1}{3} b_i E_i (z'^3_{i+1} - z'^3_i) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.13)$$

onde  $b_i$ ,  $E_i$  e  $G_i$  são a largura e os módulos elásticos da faixa da seção transversal que se estende entre as cotas  $z'_i$  e  $z'_{i+1}$ . A equação (2.13) representa a matriz constitutiva seccional que relaciona o vetor de esforços seccionais  $\hat{\sigma}$  com o vetor de deformações seccionais  $\hat{\varepsilon}$ .

A seguir, descreve-se a formulação de viga de Timoshenko 3D que é baseada na formulação de vigas 2D.

## 2.4 FORMULAÇÃO DE VIGA DE TIMOSHENKO TRIDIMENSIONAL (3D)

O elemento de viga tridimensional foi desenvolvido a partir do elemento de viga de Timoshenko. Este elemento permite modelar o comportamento de uma viga prismática sobre qualquer carregamento (Hanganu, 1997). Se trata de um elemento finito lagrangiano de continuidade  $C^0$  de três nós e seis graus de liberdade por nó. O fato de que o modelo constitutivo necessita de informação a nível de tensão-deformação, faz necessária uma discretização da seção transversal em uma malha retangular (ver fig. 2.4).



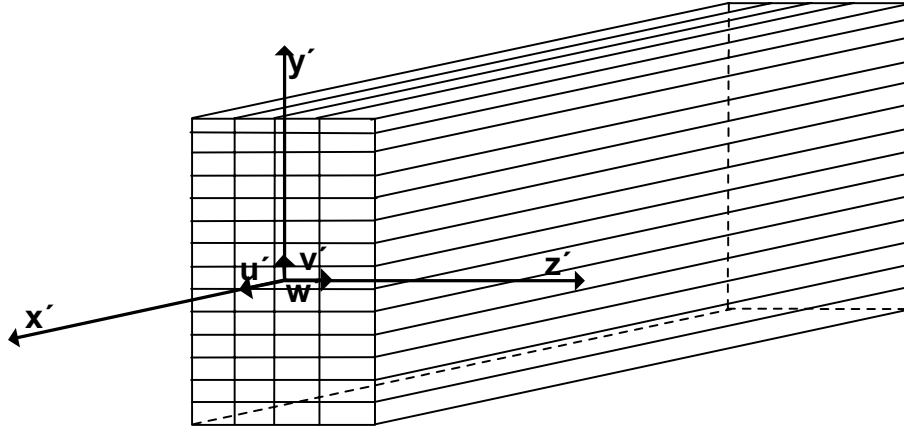


Figura 2.4: Barra 3D com seção dividida mediante uma malha retangular. Eixos locais.

A formulação seguinte descreve as relações existentes entre as variáveis pontuais e seccionais. A viga é considerada no sistema de coordenadas locais, com seu eixo  $x'$  formando com os restantes do eixos um triedro direito. Considera-se que os eixos  $y'$  e  $z'$  são os eixos principais de inércia de cada seção. A convenção dos sinais para os deslocamentos e rotações é o da mecânica clássica (Hanganu, 1997). Em coordenadas locais, os campos de deslocamentos e de deformações são:

$$\mathbf{u}^p = \begin{Bmatrix} u^p \\ v^p \\ w^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u' + z'\theta_{y'} - y'\theta_{z'} \\ v' - z'\theta_{x'} \\ w' + y'\theta_{x'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z' & -y' \\ 0 & 1 & 0 & -z' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y' & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ \theta_{x'} \\ \theta_{y'} \\ \theta_{z'} \end{Bmatrix} = \mathbf{S}\mathbf{u}' \quad (2.14)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u^p}{\partial x'} \\ \frac{\partial u^p}{\partial y'} + \frac{\partial v^p}{\partial x'} \\ \frac{\partial u^p}{\partial z'} + \frac{\partial w^p}{\partial x'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{du'}{dx'} + z'\frac{d\theta_{y'}}{dx'} - y'\frac{d\theta_{z'}}{dx'} \\ \frac{dv'}{dx'} - \theta_{z'} - z'\frac{d\theta_{x'}}{dx'} \\ \frac{dw'}{dx'} + \theta_{y'} + y'\frac{d\theta_{x'}}{dx'} \end{Bmatrix} = \mathbf{S}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.15)$$

$$\text{onde } \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left\{ \frac{du'}{dx'} \quad \frac{dv'}{dx'} - \theta_{z'} \quad \frac{dw'}{dx'} + \theta_{y'} \quad \frac{d\theta_{x'}}{dx'} \quad \frac{d\theta_{y'}}{dx'} \quad \frac{d\theta_{z'}}{dx'} \right\}^T.$$

As variáveis das equações anteriores tem o seguinte significado:

- $\mathbf{u}^p$  – vetor de deslocamentos locais de um ponto qualquer da seção;
- $\boldsymbol{\varepsilon}$  – vetor de deformações;
- $\mathbf{u}'$  – vetor de deslocamentos em coordenadas locais do elemento finito de viga 3D, correspondente ao eixo da seção;
- $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  – vetor de deformações seccionais;
- $\mathbf{S}$  – matriz geométrica de relação ponto-seção.

Utilizando o princípio dos deslocamentos virtuais para escrever as equações de equilíbrio, o trabalho interno  $L_{int}$ , na equação(2.2), correspondente a um campo de deformação virtual  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$  toma a seguinte forma:

$$L_{int} = \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_0^l \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \left[ \int_A \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} dA \right] dx \quad (2.16)$$

$$= \int_0^l \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dx' = \int_0^l \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \hat{\mathbf{C}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} dx' \quad (2.17)$$

Na relação (2.16), é visto o vetor de esforços seccionais  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  como o conjugado energético do vetor de deformações seccionais. A matriz  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(y, z)$  varia nas duas direções da seção, sendo isto, de interesse para este trabalho porque permite fazer uma análise tridimensional do processo de plastificação:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\sigma}} &= \int_A \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} dA = \int_A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z' & -y' \\ 0 & 1 & 0 & -z' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y' & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \end{Bmatrix} dA \\ &= \int_A \left\{ \sigma_{x'} \quad \tau_{x'y'} \quad \tau_{x'z'} \quad -z' \tau_{x'y'} + y' \tau_{x'z'} \quad z' \sigma_{x'} \quad -y' \sigma_{x'} \right\}^T dA \\ &= \left\{ N_{x'} \quad Q_{y'} \quad Q_{z'} \quad T_{x'} \quad M_{y'} \quad M_{z'} \right\}^T \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde  $\mathbf{C}$  o tensor constitutivo de rigidez local, cujo valor é:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

Empregando as relações da equação (2.15) junto com a equação (2.18), obtém-se:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \int_A \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} dA = \int_A \mathbf{S}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} dA = \int_A \mathbf{S}^T \mathbf{C} \mathbf{S} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} dA = \hat{\mathbf{C}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.21)$$

Baseando-se na equação (2.21), se apresenta o valor da matriz constitutiva seccional  $\hat{\mathbf{C}}$  que relaciona as deformações e os esforços seccionais.

$$\hat{\mathbf{C}} = \int_A \mathbf{S}^T \mathbf{C} \mathbf{S} dA \quad (2.22)$$

As equações (2.22) são resolvidas com a integração sobre uma malha retangular na seção transversal. O processo de maneira detalhado é apresentado a seguir:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{C}} &= \int_A \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 & z'E & -y'E \\ 0 & G & 0 & -z'G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & y'G & 0 & 0 \\ 0 & -z'G & y'G & (z'^2 + y'^2)G & 0 & 0 \\ z'E & 0 & 0 & 0 & z'^2E & -y'z'E \\ -y'E & 0 & 0 & 0 & -y'z'E & y'^2E \end{bmatrix} dA \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{y'_i}^{y'_{i+1}} \int_{z'_i}^{z'_{i+1}} \begin{bmatrix} E_i & 0 & 0 & 0 & z'E_i & -y'E_i \\ 0 & G_i & 0 & -z'G_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_i & y'G_i & 0 & 0 \\ 0 & -z'G_i & y'G_i & (z'^2 + y'^2)G_i & 0 & 0 \\ z'E_i & 0 & 0 & 0 & z'^2E_i & -y'z'E_i \\ -y'E_i & 0 & 0 & 0 & -y'z'E_i & y'^2E_i \end{bmatrix} dy' dz' \end{aligned} \quad (2.23)$$

As malhas retangulares do modelo 3D, (ver fig. 2.4), são retângulos com os lados paralelos aos eixos de inércia, as integrais duplas podem ser integradas de maneira independente, em função de cada variável. O elemento finito está definido por 3 nós com 6 graus de liberdade cada um (Hanganu, 1997). São empregadas as funções de forma e o vetor de deslocamentos nodais seguintes:

$$\mathbf{N}'_i = N_i \mathbf{I}_6, \text{ com } \mathbf{N}' = \left\{ \mathbf{N}'_1 \quad \mathbf{N}'_2 \quad \mathbf{N}'_3 \right\}$$

$$\mathbf{a}'_i = \left\{ u'_i \quad v'_i \quad w'_i \quad \theta_{x'_i} \quad \theta_{y'_i} \quad \theta_{z'_i} \right\}^T, \text{ com } \mathbf{a}' = \left\{ \mathbf{a}'_1 \quad \mathbf{a}'_2 \quad \mathbf{a}'_3 \right\} \quad (2.24)$$

onde  $\mathbf{I}_6$  é uma matriz identidade de posto (rank) 6,  $\mathbf{N}'$  são as funções de forma e  $\mathbf{a}'_i$  é o vetor de deslocamentos nodais.

A matriz  $\mathbf{B}'$  é apresentada a seguir em função da matriz  $\mathbf{L}$  (eq. 2.9) e a função de forma  $\mathbf{N}$ :

$$\mathbf{B}' = \mathbf{L} \mathbf{N}'_i \quad (2.25)$$

$$\mathbf{B}'_i = \begin{bmatrix} \frac{dN_i}{dx'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dN_i}{dx'} & 0 & 0 & 0 & -N_i \\ 0 & 0 & \frac{dN_i}{dx'} & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{dN_i}{dx'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dN_i}{dx'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dN_i}{dx'} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\text{Sendo que: } \mathbf{B}' = \left\{ \mathbf{B}'_1 \quad \mathbf{B}'_2 \quad \mathbf{B}'_3 \right\}$$

As derivadas cartesianas das funções de forma  $\mathbf{N}'_i$  são:

$$\frac{dN'}{dx'} = \frac{dN'}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dx'} = \frac{d\zeta}{dx'} \left\{ \begin{array}{c} \frac{2\zeta-1}{2} \\ -2\zeta \\ \frac{2\zeta+1}{2} \end{array} \right\} \quad (2.27)$$

e para calcular  $\frac{d\zeta}{dx'}$  se utiliza a representação isoparamétrica que conduz a seguinte série de operações:

$$x' = N_1 x'_1 + N_2 x'_2 + N_3 x'_3 \quad (2.28)$$

$$\frac{dx'}{d\zeta} = \frac{dN_1}{d\zeta} x'_1 + \frac{dN_2}{d\zeta} x'_2 + \frac{dN_3}{d\zeta} x'_3 = \frac{1}{2} [x'_3 - x'_1 + 2\zeta (x'_1 + x'_3 - 2x'_2)] \quad (2.29)$$

com  $N_1(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta(\zeta-1)$ ;  $N_2(\zeta) = 1-\zeta^2$  e  $N_3(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta(\zeta+1)$ .

Desta maneira, é definida a matriz  $\mathbf{B}'$  em qualquer seção transversal do elemento para qualquer  $\zeta \in [-1, 1]$ . É observado que quando:

$$x'_2 = (x'_1 + x'_3) / 2 \implies d\zeta/dx' = 2/l \quad (2.30)$$

A transformação do sistema local ao global de coordenadas é obtida através da matriz de transformação  $\mathbf{T}_0$ , definida a seguir:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'_i &= \mathbf{T}\mathbf{a}_i ; \\ \mathbf{T} &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}_0 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{T}_0 \end{bmatrix} ; \\ \mathbf{T}_0 &= \begin{bmatrix} \cos(x', x) & \cos(x', y) & \cos(x', z) \\ \cos(y', x) & \cos(y', y) & \cos(y', z) \\ \cos(z', x) & \cos(z', y) & \cos(z', z) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde:  $\cos(x', x)$  é o co-seno do ângulo entre a direção local  $x'$  e a direção global  $x$ , e assim sucessivamente para os demais (Hanganu, 1997).

### 2.4.1 Funções de forma e suas relações com os campos

As funções de forma empregadas na teoria 3D definem o campo contínuo elementar, interpolando os valores nodais. São utilizadas funções quadráticas lagrangianas correspondentes a um elemento de viga de três nós (ver fig. 2.5). Cada nó tem uma função de forma associada, de maneira que esta vale 1 no nó e 0 nos demais. Expressam-se como função de uma variável normalizada  $\zeta$ , que varia de -1 a 1 (Hanganu, 1997). A seguir são apresentados seus valores:

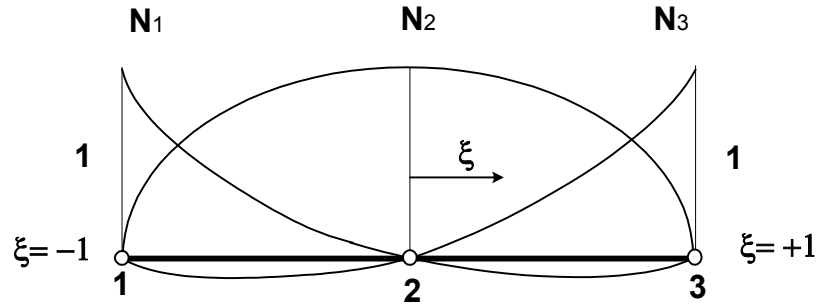


Figura 2.5: Representação das funções de forma

$$N_1(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta(\zeta - 1) ; N_2(\zeta) = 1 - \zeta^2 ; N_3(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta(\zeta + 1) \quad (2.32)$$

Como exemplo, apresenta-se o campo de deslocamentos (2.24) que são interpolados com as funções de forma:

$$\mathbf{u}' = \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ \theta_{x'} \\ \theta_{y'} \\ \theta_{z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 u'_1 + N_2 u'_2 + N_3 u'_3 \\ N_1 v'_1 + N_2 v'_2 + N_3 v'_3 \\ N_1 w'_1 + N_2 w'_2 + N_3 w'_3 \\ N_1 \theta'_{x_1} + N_2 \theta'_{x_2} + N_3 \theta'_{x_3} \\ N_1 \theta'_{y_1} + N_2 \theta'_{y_2} + N_3 \theta'_{y_3} \\ N_1 \theta'_{z_1} + N_2 \theta'_{z_2} + N_3 \theta'_{z_3} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^6 \mathbf{N}'_i \mathbf{a}'_i = \mathbf{N}' \mathbf{a}' \quad (2.33)$$

As matrizes  $\mathbf{N}'_i$  e  $\mathbf{B}'_i$  são rerepresentadas em função da matriz transformação  $\mathbf{T}$  (ver equação 2.31):

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{N}'_i \mathbf{T}; \quad \mathbf{B}_i = \mathbf{B}'_i \mathbf{T} \quad (2.34)$$

O vetor de deslocamentos seccionais da viga nos eixos locais  $\mathbf{u}'$  e as deformações seccionais  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  são apresentados em função da matriz de forma  $\mathbf{N}$  e de  $\mathbf{B}$ , respectivamente:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{N} \mathbf{a}; \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{B} \mathbf{a} \quad (2.35)$$

A expressão desenvolvida para o vetor de forças internas elásticas  $\mathbf{F}_e$  é vista a seguir:

$$\mathbf{F}_e = \int_l \mathbf{B}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dx = \int_l \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{C}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} dx' \quad (2.36)$$

onde  $l$  é o comprimento do elemento finito.

Com esta ultima transformação a força elástica toma a seguinte forma:

$$\mathbf{F}_e = \int_l \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{C}} \mathbf{B} dx' \mathbf{a} = \mathbf{K} \mathbf{a} \quad (2.37)$$

Pode-se ver, na equação (2.37), a matriz de rigidez global do elemento,  $\mathbf{K}$ . O processo de integração é feito com uma quadratura gaussiana reduzida de 2 pontos para os termos de cortante, para evitar o efeito de bloqueio de cortante (Hanganu, 1997).

## 2.4.2 Processo de cálculo não-linear

O processo de cálculo não-linear consiste na avaliação das deformações seccionais  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  correspondentes aos deslocamentos  $\mathbf{a}$ , tal como se pode ver na equação (2.35). Desta maneira avaliam-se as deformações pontuais  $\boldsymbol{\varepsilon}$  mediante a equação (2.15) e as tensões correspondentes que são corrigidas dentro do modelo constitutivo para depois integrá-las sobre a seção mediante a relação (2.18). No final, são obtidos os esforços seccionais correspondentes de maneira que se podem calcular as forças residuais com algoritmos usuais (Hanganu, 1997). Desta maneira

podem ser calculadas as forças residuais com algoritmos usuais. Este procedimento é apresentado na figura (2.6).

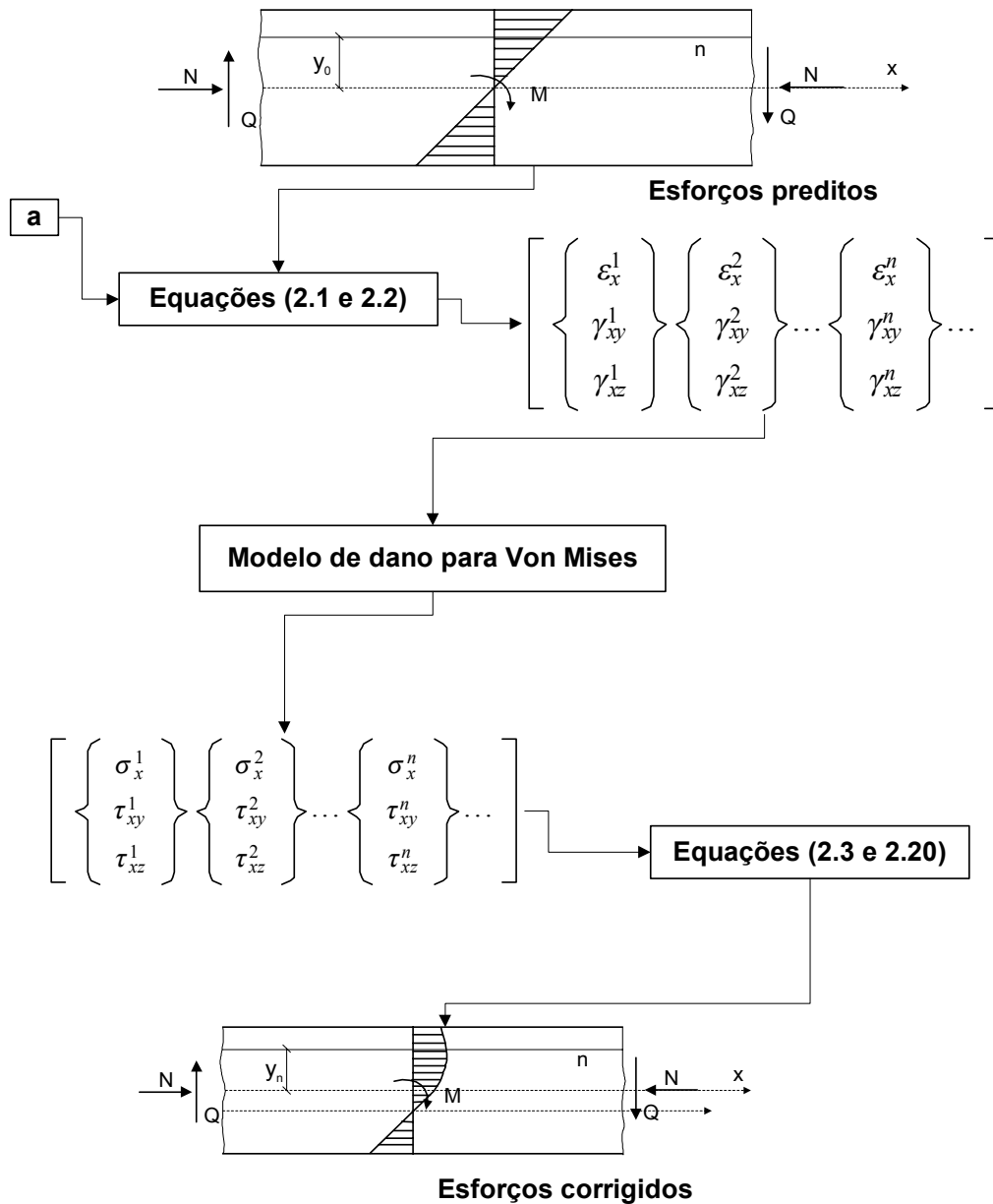


Figura 2.6: Algoritmo de cálculo não-linear (Hanganu, 1997).

A seção da viga está discretizada mediante uma malha ortogonal (ver fig. 2.4). Os eixos da malha devem ser paralelos às direções principais de inércia da seção. Cada retângulo da malha pode estar caracterizado por um material e dimensões geométricas distintas, sendo que neste trabalho o material definido é homogêneo. Os quatro cantos de cada retângulo são os pontos de cálculo das deformações e tensões. Para integrar as tensões seccionais a partir das tensões do modelo constitutivo, considera-se que todas as tensões envolvidas tenham uma variação linear dentro de uma célula da malha (Hanganu, 1997). Isto obriga a resolver para cada

retângulo e cada tensão um sistema de quatro equações com três incógnitas, obtendo desta maneira a equação do plano que aproxima por mínimos quadrados a variação de cada componente do tensor de tensões. Este mesmo retângulo serve também para calcular todas as demais características seccionais como momentos de inércia e estatísticos mecânicos, eixo neutro, etc.



## Capítulo 3

# REGRESSÃO LINEAR MÚLTIPLA PARA OBTENÇÃO DAS SUPERFÍCIES DE INTERAÇÃO

A teoria da regressão linear múltipla foi usada para a geração das funções de escoamento, através de soluções de esforços seccionais na fase de plastificação, obtidas pela teoria de viga de Timoshenko 3D com o modelo de dano. Neste capítulo, é vista a formulação da regressão linear múltipla com o seu enfoque matricial, propriedades dos estimadores, prova de hipótese da regressão, etc. A seguir, são apresentadas as formulações envolvidas para o tratamento dos dados obtidos.

Muitas aplicações da análise de regressão envolvem situações em que há mais de uma variável de regressão. Um modelo de regressão que contém mais de um regressor recebe o nome de modelo de regressão múltipla (Montgomery e Runger, 1998). Um modelo de regressão múltipla pode ser escrito como a relação seguinte:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + \epsilon \quad (3.1)$$

Este é um modelo de regressão com várias variáveis, sendo que  $Y$  é a variável dependente ou resposta, e pode estar relacionada com  $k$  variáveis independentes (regressores). Os parâmetros  $\beta_j, j = 0, 1, \dots, k$ , se conhecem como coeficientes de regressão. Este modelo descreve um hiperplano no espaço de dimensão  $k$  formado pelas variáveis de regressão  $\{x_j\}$ . O parâmetro  $\beta_j$  representa a variação esperada na resposta  $Y$  por unidade de variação em  $x_j$  quando todos os demais regressores  $x_i (i \neq j)$  se mantêm constantes. Frequentemente estes modelos se empregam como funções de aproximação e se desconhece a verdadeira relação funcional entre  $Y$  e  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Sobre certos tipos de variáveis independentes, o modelo de regressão linear constitui uma aproximação adequada (Montgomery e Runger, 1998). Os modelos que tem uma estrutura mais complexa que a dada pela equação (3.1) com frequência, também, podem ser analisados com as técnicas da regressão linear múltipla. Por exemplo, considere-se um modelo polinomial cúbico com uma variável de regressão.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \epsilon \quad (3.2)$$

Tomando-se  $x_1 = x, x_2 = x^2, x_3 = x^3$ , então a equação (3.2) pode ser escrita da forma usual do modelo de regressão múltipla.

Os modelos que incluem efeitos de interação, que é o caso deste trabalho, também podem ser analisados com os métodos da regressão linear múltipla. Uma interação entre duas variáveis pode ser representada como um produto entre variáveis, tal como

$$Y = \beta_0 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_{12}x_1x_2 + \epsilon \quad (3.3)$$

Faz-se as seguintes modificações:  $x_3 = x_1x_2$  e  $\beta_3 = \beta_{12}$ , então a equação (3.3) pode ser escrita como

$$Y = \beta_0 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3 + \epsilon \quad (3.4)$$

que é um modelo de regressão linear múltipla.

Note-se que, ainda que este seja um modelo de regressão linear, a forma da superfície gerada pelo modelo não é linear. Em geral, qualquer modelo de regressão que é linear nos parâmetros ( $\beta$ ) é um modelo de regressão linear, sem importar a forma de superfície que este gera (Montgomery e Runger, 1998).

### 3.1 ENFOQUE MATRICIAL PARA A REGRESSÃO

É mais conveniente expressar o modelo com operações matemáticas em forma matricial. Suponha-se que existem  $k$  variáveis de regressão e  $n$  observações  $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , e que o modelo que relaciona os regressores com a resposta seja:

$$Y = \beta_0 + \beta_1x_{i1} + \beta_2x_{i2} + \dots + \beta_kx_{ik} + \epsilon_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.5)$$

Este modelo é um sistema de  $n$  equações que pode expressar-se em notação matricial como

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.6)$$

onde:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$



A forma matricial das equações normais de (3.12) é apresentada a seguir:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_{i1} & \sum_{i=1}^n x_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n x_{ik} \\ \sum_{i=1}^n x_{i1} & \sum_{i=1}^n x_{i1}^2 & \sum_{i=1}^n x_{i1}x_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n x_{i1}x_{ik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_{ik} & \sum_{i=1}^n x_{ik}x_{i1} & \sum_{i=1}^n x_{ik}x_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n x_{ik}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{i1}y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_{ik}y_i \end{bmatrix} \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

Pode-se observar que a matriz  $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$  é uma matriz simétrica de  $(p \times p)$ , e que  $\mathbf{X}^T\mathbf{y}$  é um vetor coluna de  $(p \times 1)$ . Os elementos da matriz diagonal de  $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$  são as somas dos quadrados dos elementos nas colunas de  $\mathbf{X}$ , enquanto que os elementos que estão fora da diagonal principal são as somas dos produtos cruzados dos elementos das colunas de  $\mathbf{X}$  (Montgomery e Runger, 1998). Os elementos de  $\mathbf{X}^T\mathbf{y}$  são as somas dos produtos cruzados das colunas de  $\mathbf{X}$  e as observações de  $\mathbf{y}$ .

O modelo de regressão ajustado tem a seguinte forma:

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \sum_{j=1}^n \hat{\beta}_j x_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{3.15}$$

A forma matricial do modelo é:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \tag{3.16}$$

A diferença entre a observação  $y_i$  e o valor ajustado  $\hat{y}_i$  é um resíduo,  $e_i = y_i - \hat{y}_i$ . O vetor de resíduos de  $(n \times 1)$  se denota como:

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} \tag{3.17}$$

### 3.2 PROPRIEDADES DOS ESTIMADORES DE MÍNIMOS QUADRADOS

O resíduo quadrático médio  $\hat{v}^2$  está dado pelo erro (resíduo) quadrático médio:

$$\hat{v}^2 = MS_E = \frac{SS_E}{n - p} \tag{3.18}$$

onde  $SS_E$  é a soma dos quadrados dos erros, sendo representado a seguir:

$$SS_E = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \mathbf{e}^T \mathbf{e} \quad (3.19)$$

Substituindo-se  $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ , chega-se a:

$$\begin{aligned} SS_E &= (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} \\ &= \mathbf{y}^T \mathbf{y} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

sendo que  $\mathbf{X}^T \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}^T \mathbf{y}$ .

A equação anterior se converte em:

$$SS_E = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (3.21)$$

Por conseguinte, outra maneira de escrever a equação (3.18) é apresentada a seguir:

$$\hat{v}^2 = \frac{SS_E}{n-p} = \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y}}{n-p} \quad (3.22)$$

### 3.3 PROVA DE HIPÓTESE NA REGRESSÃO

Nos problemas de regressão linear múltipla, existem certas provas de hipótese sobre os parâmetros do modelo que são úteis para medir a adequação do modelo. A prova de hipótese requer que os termos de erro  $\epsilon_i$  do modelo de regressão tenham distribuições normais e independentes com média zero, e variância  $v^2$ . A seguir, é apresentada uma tabela com o modelo para a análise da variância para a prova de significância da regressão.

Fonte de variação	Soma de quadrados	Graus de liberdade	Média de quadrados	$f_0$	$P > f_0$
regressão	$SS_R$	$k$	$MS_R$	$\frac{MS_R}{MS_E}$	
Erro ou resíduo	$SS_E$	$n - p$	$MS_E$		
Total	$S_{yy}$	$n - 1$			

Tabela 3.1: Tabela da prova de significância (Montgomery e Runger, 1998).

onde:

- $f_0$  é o estatístico de prova;
- $P$  é o valor calculado para a distribuição  $Jf$  (ver equação C.11).

A prova de significância para a regressão é uma prova para determinar se existe uma relação linear entre a variável linear e a variável de resposta e um sub-conjunto de variáveis de regressão  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . As hipóteses apropriadas são:

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0 \\ H_1 : \beta_j \neq 0, \text{ pelo menos para um } j \end{aligned} \quad (3.23)$$

Se  $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$  for rejeitado implica que pelo menos umas das variáveis de regressão  $x_1, x_2, \dots, x_k$  tem contribuição significativa no modelo. A soma total dos quadrados  $S_{yy}$  divide-se em: uma soma de quadrados devida a regressão e uma soma de quadrados devido ao erro.

$$S_{yy} = SS_R + SS_E \quad (3.24)$$

com

$$SS_E = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (3.25)$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^n y^T y - \frac{\left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2}{n} \quad (3.26)$$

$$SS_R = \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y} - \frac{\left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2}{n} \quad (3.27)$$

Se  $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$  é verdadeira, então  $\frac{SS_R}{v^2}$  é uma variável aleatória ji-quadrada com  $k$  graus de liberdade. O número de graus de liberdade para esta variável aleatória ji-quadrada é igual ao número de variáveis de regressão do modelo. Pode-se demonstrar que  $\frac{SS_E}{v^2}$  é uma variável aleatória com  $n - p$  graus de liberdade, e que  $SS_E$  e  $SS_R$  são independentes (Montgomery e Runger, 1998). O estatístico de prova para  $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$  é:

$$f_0 = \frac{\frac{SS_R}{k}}{\frac{SS_E}{(n-p)}} \quad (3.28)$$

Deve-se rejeitar  $H_0$ , se o valor calculado do estatístico de prova da equação (3.28),  $f_0$ , é maior do que  $Jf_{\alpha, k, n-p}$  (ver apêndice C.4).

### 3.4 PROVA SOBRE OS COEFICIENTES INDIVIDUAIS DE REGRESSÃO

Existe, também, o interesse de fazer provas de hipóteses sobre os coeficientes de regressão. Tais provas são úteis para determinar o valor potencial de cada uma das variáveis de regressão. O modelo pode se tornar mais eficaz com a inclusão de outras variáveis ou a eliminação de um ou mais regressores presentes no modelo. A adição de uma variável ao modelo de regressão sempre faz com que a soma dos quadrados da regressão aumente e que a soma dos quadrados do erro diminua. Portanto, deve-se decidir se o aumento na soma dos quadrados da regressão é suficientemente grande para justificar o uso de uma variável a mais no modelo (Montgomery e Runger, 1998). Por outra parte a adição de uma variável sem importância pode aumentar o erro quadrático médio, indicando que a variável diminui a qualidade com que o modelo ajusta os dados.

A hipótese para a prova de significância de qualquer coeficiente de regressão individual, por exemplo  $\beta_j$ , é:

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_j &= 0 \\ H_1 : \beta_j &\neq 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

A não rejeição da opção  $H_0 : \beta_j = 0$ , indica que o regressor  $x_j$  pode ser eliminado do modelo. O estatístico de prova para esta hipótese é:

$$t_0 = \frac{\hat{\beta}_j}{\sqrt{v^2 C_{jj}}} \quad (3.30)$$

onde  $C_{jj}$  é o elemento da diagonal de  $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$  que corresponde a  $\hat{\beta}_j$ , e o denominador da equação (3.30) é o erro normalizado do coeficiente de regressão  $\hat{\beta}_j$ .

A hipótese nula  $H_0 : \beta_j = 0$  é rejeitada se  $|t_0| > Jt_{\alpha/2, n-p}$  (ver apêndice C.3). Isto é chamado de prova parcial ou marginal porque o coeficiente de regressão  $\hat{\beta}_j$  depende de todas as demais variáveis de regressão  $x_i$  ( $i \neq j$ ) que estão no modelo (Montgomery e Runger, 1998).

### 3.5 COEFICIENTE DE DETERMINAÇÃO MÚLTIPLA

Para medir a adequação do modelo, podem ser empregadas várias técnicas. Dentre estas, se apresenta o coeficiente de determinação múltipla  $R^2$  definido, em função das equações (3.25), (3.26) e (3.27), como:

$$R^2 = \frac{SS_R}{S_{yy}} = 1 - \frac{SS_E}{S_{yy}} \quad (3.31)$$

$R^2$  é uma medida da magnitude da redução na variabilidade de  $y$  obtida mediante o emprego das variáveis de regressão  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , com  $0 \leq R^2 \leq 1$ . Um valor grande de  $R^2$  não indica necessariamente que seja um bom modelo. A adição de uma variável ao modelo sempre aumenta o  $R^2$ , sem importar se a variável é ou não estatisticamente significativa. Portanto, são necessárias análises conjuntas de outras informações para determinar a competência do modelo. A raiz quadrada positiva de  $R^2$  recebe o nome de coeficiente de correlação múltipla entre  $y$  e o conjunto de variáveis de regressão  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , ou seja,  $R$  é uma medida da associação linear que existe entre  $y$  e  $x_1, x_2, \dots, x_k$  (Montgomery e Runger, 1998).

Outro critério similar ao  $R^2$  é o coeficiente  $\bar{R}^2$  ajustado que leva em conta o número de variáveis do modelo. Este coeficiente é definido como:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-p} (1 - R^2) \quad (3.32)$$

Reapresentado a equação (3.32) tem-se que:

$$\begin{aligned} \bar{R}^2 &= 1 - \frac{n-1}{n-p} (1 - R^2) \\ &= 1 - \frac{n-1}{n-p} \left( \frac{SS_E}{S_{yy}} \right) \\ &= 1 - \frac{n-1}{S_{yy}} (MS_E) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Pode-se perceber que  $\bar{R}^2$  pode diminuir a medida que  $p$  aumenta se a redução em  $\frac{(n-1)}{(1-R^2)}$  não é compensada pela perda de um grau de liberdade em  $n - p$ . O normal é que o experimentador selecione o modelo de regressão que tenha o valor máximo de  $\bar{R}^2$ . Entretanto, fazer isto é equivalente ao modelo que minimiza  $MS_E$  (equação 3.33).

### 3.6 ROTINAS IMSL MATH/LIBRARY

As rotinas IMSL MATH/LIBRARY em código FORTRAN são usadas no processo da regressão linear múltipla. Dentro do pacote de rotinas, são empregadas as rotinas RGIVN e RSTAT/DRSTAT, de maneira que será descrita a seguir um resumo sucinto do modelo teórico em que estas rotinas são baseadas.

#### RGIVN

É uma rotina empregada para modelos de regressão múltipla. Pode ser executada para vários tipos de processos e com várias opções de saída de resultados. Desenvolve uma redução ortogonal da matriz dos regressores para a forma triangular. A redução é baseada na transformação



rápida de Givens (Dieci e Vleck, 2002) e (Golub e Van Loan, 1989). O método tem duas vantagens principais: 1) a perda da precisão do resultado na formação da matriz produto cruzado usada nas equações normais é evitada, 2) os dados podem ser adicionados ou eliminados para obter vantagens na performance computacional (IMSL, 1997).

## **RSTAT**

A rotina RSTAT computa o resumo estatístico de um modelo linear geral. O modelo é da forma  $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$ , onde  $\mathbf{y}$  é um vetor de dimensão  $n \times 1$ ,  $\mathbf{X}$  é uma matriz de regressores de dimensão  $n \times p$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  é um vetor de dimensão  $p \times 1$  dos coeficientes de regressão e  $\boldsymbol{\epsilon}$  é um vetor de dimensão  $n \times 1$  do resíduo (erro), cujos elementos são independentemente distribuídos com média 0 e variância  $v^2$ . A rotina RIGVN é usada para calcular o modelo ajustado, depois RSTAT usa esses resultados e calcula um resumo estatístico, incluindo análise de variância, sequência do somatório dos quadrados, prova  $t$ , variância-covariância estimada da matriz dos coeficientes regressão estimados (IMSL, 1997).

## Capítulo 4

# SUPERFÍCIES DE INTERAÇÃO

O método proposto para a geração de superfícies necessita de soluções de esforços seccionais que atinjam a fase de plastificação. Na UPC, Espanha, conseguiu-se o programa desenvolvido por (Hanganu, 1997) que trabalha com a formulação do modelo de dano em vigas de Timoshenko 3D para concreto armado. Desta forma, foram feitas verificações para a sua utilização com os metais. Não foi possível trabalhar com o código fonte aberto, de maneira que pudesse haver a implementação de novas formulações e verificação de possíveis erros de programação. Para tratar tais necessidades foram desenvolvidas as seguintes abordagens:

- Adotaram-se deslocamentos impostos na extremidade livre de uma viga engastada para poder controlar a convergência do programa que trabalha com o método de Newton Raphson incremental-iterativo. O objetivo deste tratamento é que se atinja o estado limite último.
- No item,4.4, foram feitas análises num elemento de barra engastado-livre com 20 elementos longitudinais, e uma seção retangular de dimensões  $b = 4,2$  cm e  $h = 8$  cm. A seção transversal foi discretizada numa malha de  $15 \times 15$ , num total de 225 células. Estas análises aplicaram-se para cada esforço seccional (axial, fletor, torçor e cortante) de forma separada (puro) com o intuito de verificar se alcança os valores de plastificação analíticos. Desenvolveram-se análises para verificar se o nível das tensões na seção seguem os critérios de plastificação.

Também, são apresentadas, neste capítulo, os critérios de limites plásticos, as funções de escoamento, a adequação do modelo de dano para Von Mises e o método para a obtenção das curvas de interação.

### 4.1 LIMITES PLÁSTICOS

Os limites plásticos foram adotados, para uma seção retangular, em função das fórmulas existentes na literatura, por exemplo, (NBE EA-95, 2001). As fórmulas da literatura são apresentadas, a seguir:

## Axial

O esforço axial de plastificação da literatura, (Lubliner, 1990) e (Mrázik et al, 1987), é apresentado nas equações, a seguir:

$$\begin{aligned} N_{xp} &= F_{xp} = A\sigma_p \text{ (Tração);} \\ N_{xp} &= F_{xp} = A\frac{\sigma_p}{\omega} \text{ (Compressão).} \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde  $\omega$  é o coeficiente de flambagem (não é levado em conta a situação de flambagem neste presente trabalho),  $A$  é a área da seção e  $\sigma_p$  é a resistência de cálculo.

$$\sigma_p = \frac{\sigma_e}{\gamma_a} \quad (4.2)$$

onde  $\sigma_e$  é limite elástico do aço e  $\gamma_a$  é o coeficiente de minoração com os seguintes valores;

- $\gamma_a = 1$  para aços com limite elástico mínimo garantido, e
- $\gamma_a = 1,1$  para aços cujo limite elástico seja determinado por métodos estatísticos.

Os coeficientes de flambagem  $\omega$  dependem da função de esbeltez  $\lambda = \frac{l}{i}$  que podem ser vistas na literatura, como por exemplo: (NBE EA-95, 2001), com  $l$ , sendo o comprimento do elemento e  $i$  o raio de giração.

## Cortante

O esforço cortante de plastificação da literatura, (Lubliner, 1990) e (Mrázik et al, 1987), para as duas direções da seção retangular é visto na equação seguinte:

$$F_{yp} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}}bh \quad (4.3)$$

sendo que  $b$  é a largura da seção e  $h$  a altura.

## Momento fletor

A equação de plastificação para momento fletor da literatura, (Mrázik et al, 1987), para as duas direções da seção é vista, a seguir:

$$M_{ip} = \sigma_p Z_{ip}; \quad i = y, z \quad (4.4)$$

$$Z_{yp} = \frac{1}{4}bh^2 \text{ e } Z_{zp} = \frac{1}{4}hb^2 \quad (4.5)$$

onde  $Z_{ip}$  é o módulo plástico. Todos estes dados são retirados de tabelas existentes na literatura, como por exemplo: (Mrázik et al, 1987).

### Momento torçor

O momento torçor de plastificação da literatura consultada, (Lubliner, 1990), é apresentado, a seguir:

$$M_{xp} = \frac{1}{6}kb^2(3h - b) \quad (4.6)$$

onde  $k = \sigma_p$ , sendo que  $b$  é a largura da seção e  $h$  a altura.

## 4.2 FUNÇÕES DE ESCOAMENTO

Na literatura, são apresentadas algumas funções de escoamento em resultantes de tensão com procedimentos aproximados para alguns casos e em outros analíticos. Dentro deste escopo, será apresentado um resumo de algumas funções existentes, sendo que as definições vistas nas equações de (4.49) a (4.53) serão empregadas na maneira de apresentar as funções de escoamento. Existem outras funções, para outros tipos de seções com combinações de esforços seccionais, porém, neste trabalho, alguns exemplos numéricos serão comparados com as funções apresentadas, de maneira a comprovar a eficácia do método proposto.

### Interação momento fletor e força axial

Neste caso, a deformação é assumida de maneira que a tensão de escoamento é alcançada para toda seção, com uma relação tensão-deformação perfeitamente plástica (Crisfield, 1990). Com isto, chega-se as seguintes equações:

$$\bar{n} = \frac{N}{N_{xp}} = \frac{N}{\sigma_p t} = 1 - 2\eta \quad (4.7)$$

Tomando-se os momentos sobre o centro da viga (ver fig. 4.1), chega-se a:

$$m_i = \frac{M_i}{M_{ip}} = \frac{4M_i}{\sigma_p t^2} = 4(\eta - \eta^2); \quad i = y, z \quad (4.8)$$

Eliminando-se a altura adimensional,  $\eta$ , nas equações (4.7) e (4.8), obtém -se:

$$f = n^2 + m_i - 1 = 0, \quad i = y, z \quad (4.9)$$

Pode-se ver que a função de escoamento da equação (4.9) é perfeitamente aplicada na regressão linear múltipla, ver equação (??). Alterando a função anterior para a deformação reversa (Crisfield, 1990), obtém -se:

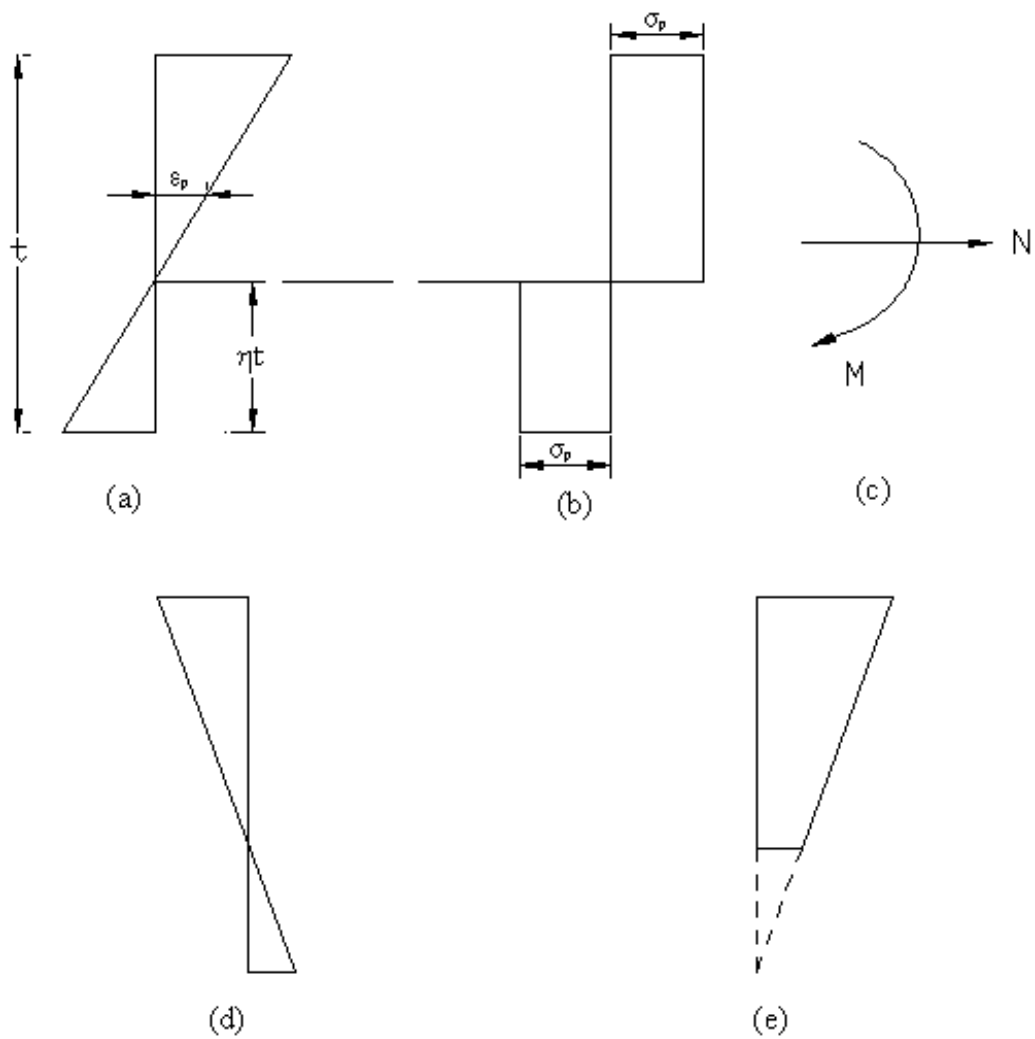


Figura 4.1: Tensão e deformação para o caso uniaxial. (a) deformação; (b) tensão; (c) resultantes de tensão; (d) deformação reversa; (e) deformação no plano dominante (Crisfield, 1990).

$$f = n^2 - m_i - 1 = 0, i = y, z \quad (4.10)$$

Combinando-se as duas funções (4.9) e (4.10), chega-se a:

$$f = n^2 + sm_i - 1 = 0 \quad (4.11)$$

onde:  $s = \frac{M_i}{|M_{ip}|}$ ;  $i = y, z$

A seguir, são vistas funções de aproximação para a equação (4.11), dadas por:

$$f = n^2 + \frac{s}{\sqrt{3}}m_in + m_i^2 - 1 = 0 \quad (4.12)$$

$$f = n^2 + 3sm_in + \frac{9}{4}m_i^2 - 1 = 0 \quad (4.13)$$

com  $i = y, z$ .

Estas funções são melhores para critérios de escoamentos de seção cheia com rápidas análises aproximadas (Crisfield, 1990).

Lubliner apresenta, para o caso de uma viga retangular com largura  $b$  e altura  $h$ , as seguintes equações:

$$\begin{aligned} M_i &= \sigma_y b \left[ \frac{h^2}{4} - y_0 \right], \quad i = y, z; \\ N &= 2\sigma_y b y_0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde:  $\sigma_y$  = tensão última e  $y_0$  = coordenada do eixo neutro.

A seguir, apresenta-se a equação (4.14) na forma adimensional:

$$\begin{aligned} m_i &= 1 - \eta^2; \\ n &= \eta \end{aligned} \quad (4.15)$$

com  $\eta = 2\frac{y_0}{h}$ .

E, também, na forma explicita:

$$m_i = 1 - n^2 \quad (4.16)$$

onde:  $m_i = \frac{M_i}{M_{ip}}$  com  $i = y, z$ ; e  $n = \frac{N}{N_{xp}}$ .

### Interação momento fletor, força axial e torção

Uma viga com seção retangular com uma combinação de força axial, momento fletor e torção apresenta a seguinte função de escoamento (Lubliner, 1990):

$$m_y = \sqrt{1 - m_x^2} - \frac{n_x^2}{\sqrt{1 - m_x^2}} \quad (4.17)$$

Reapresentando a equação anterior, chega-se a:

$$m_y^2 + 2m_y n + n^2 + m_x^2 = 1 \quad (4.18)$$

### Interação de momentos fletores

A função apresentada a seguir é para o caso de uma barra com seção retangular e foi definida por Lubliner, (Lubliner, 1990), da seguinte forma:

$$m_z + \frac{3}{4}m_y^2 = 1, \quad \frac{m_y}{m_z} \leq 1; \quad (4.19)$$

$$m_y + \frac{3}{4}m_z^2 = 1, \quad \frac{m_y}{m_z} \geq 1. \quad (4.20)$$

### Interação de momento fletor e cortante

Apresentam-se as funções propostas por Mrázik, (Mrázik et al, 1987):

$$m_i^2 + f_i^2 = 1 \quad (4.21)$$

$$m_i + \frac{3}{4}f_i^2 = 1 \quad (4.22)$$

$$m_i + f_i^2 = 1 \quad (4.23)$$

onde:  $f_i = \frac{F_i}{F_{i_p}}$ , com  $i = \{y, z\}$ .

## 4.3 ADEQUAÇÃO DO MODELO DE DANO PARA VON-MISES

Este critério foi formulado por von Mises em 1913 e depende de somente um parâmetro, ou seja, a máxima resistência ao cortante octaédrica  $\tau_{oct}^{\max}$ . Considera somente o 2º invariante do tensor desviador de tensões  $\mathbf{J}_2$ , desprezando a influência do 1º invariante do tensor de tensões

$\mathbf{I}_1$  e do 3º invariante do tensor desviador de tensões  $\mathbf{J}_3$ . De acordo com este critério, se alcança o limite do dano quando o valor da função de endurecimento  $\kappa(d) = \tau_{oct}^{\max}(d)$ , que tem o significado de uma resistência ao cortante, alcança a máxima resistência ao cortante octaédrico  $\tau_{oct}^{\max}$ . As diversas formas de expressar matematicamente este critério são as seguintes:

#### Em função das tensões principais

$$F(\boldsymbol{\sigma}; \tau_{oct}^{\max}) = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] - [\tau_{oct}^{\max}]^2 = 0 \quad (4.24)$$

#### Em função do 2º invariante do tensor desviador de tensões

$$F(\mathbf{J}_2; \bar{\sigma}) = f(\mathbf{J}_2) - \bar{\sigma}(d) = \sqrt{3\mathbf{J}_2} - \bar{\sigma}(d) = 0 \quad (4.25)$$

#### Em função de coordenadas cilíndricas

$$F(\rho; \bar{\sigma}) = f(\rho) - \bar{\sigma}(d) = \sqrt{\frac{3}{2}}\rho - \bar{\sigma}(d) = 0 \quad (4.26)$$

sendo que:  $\rho = \sqrt{3\tau_{oct}} = \sqrt{2\mathbf{J}_2}$

## 4.4 COMPROVAÇÃO DOS LIMITES PLÁSTICOS PARA SEÇÃO RETANGULAR

Definiu-se a energia de fratura com um valor alto para poder obter o comportamento dos metais e aplicaram-se testes para os esforços axiais, momentos fletores, torçores, etc. Como comentado anteriormente, foram adotados deslocamentos e rotações impostos na extremidade da barra engastada para as obtenções dos esforços seccionais plastificados. Será feita uma verificação das tensões na seção transversal com largura  $b$  e altura  $h$ , sendo que o esforço observado será o momento fletor. Esta análise é desenvolvida para comprovar a aplicação do modelo de dano aos metais. É calculado o erro relativo ( $e_n$ ) entre os valores analíticos ( $v_a$ ) e o valor numérico ( $v_n$ ) com a seguinte equação:

$$e_n = 100 \cdot \left( \frac{v_a - v_n}{v_a} \right) \quad (4.27)$$

São apresentados os valores dos danos ( $d$ ) atingidos na seção engastada, os gráficos dos esforços seccionais obtidos, os gráficos de carga  $\times$  deslocamentos ou rotações impostos e para os momentos o gráfico das tensões obtidas nas seções engastada e livre.

As propriedades do elemento analisado são vistas na tabela (4.1), a seguir:



Propriedades do elemento de barra engastado	
Descrição	Valor adotado
Número de elementos	20
Número de nós da malha	21
Número de divisões seccionais	15 × 15
$b$	4,20 cm
$h$	8,00 cm

Tabela 4.1: Propriedades elemento de barra engastado.

A seguir, são apresentados os testes para cada esforço individual.

#### 4.4.1 Esforço Axial ( $N_{xp}$ )

##### Procedimento adotado

A malha gerada é vista na figura (4.3) com a condição engastamento no nó 1 e extremidade livre no nó 21. Foi aplicado um deslocamento no nó 21 (ver figura 4.2), na direção  $x$ , para alcançar o limite plástico.

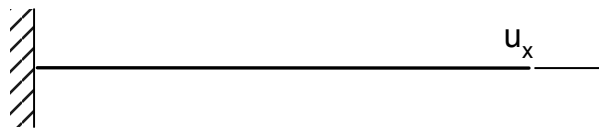


Figura 4.2: Deslocamento imposto na direção  $x$ , nó 21.



Figura 4.3: Malha do elemento analisado para o esforço axial com sistema de eixos global.

##### Resultados

Os valores obtidos para o limite plástico (ver figura 4.4) axial foram:

$$\text{Equação (4.1) } v_a = 80640,000kgf \quad (4.28)$$

$$\text{Numérico } v_n = 80639,900kgf \quad (4.29)$$

$$e_n = 0,000\% \quad (4.30)$$

$$d = 0,873 \quad (4.31)$$

O erro relativo  $e_n$  foi muito pequeno (equação 4.30). Sendo assim, a formulação consegue retratar bem o caso axial, (ver figura 4.5), até atingir a fase final de plastificação.



Figura 4.4: Valor limite para o esforço axial  $x$ .

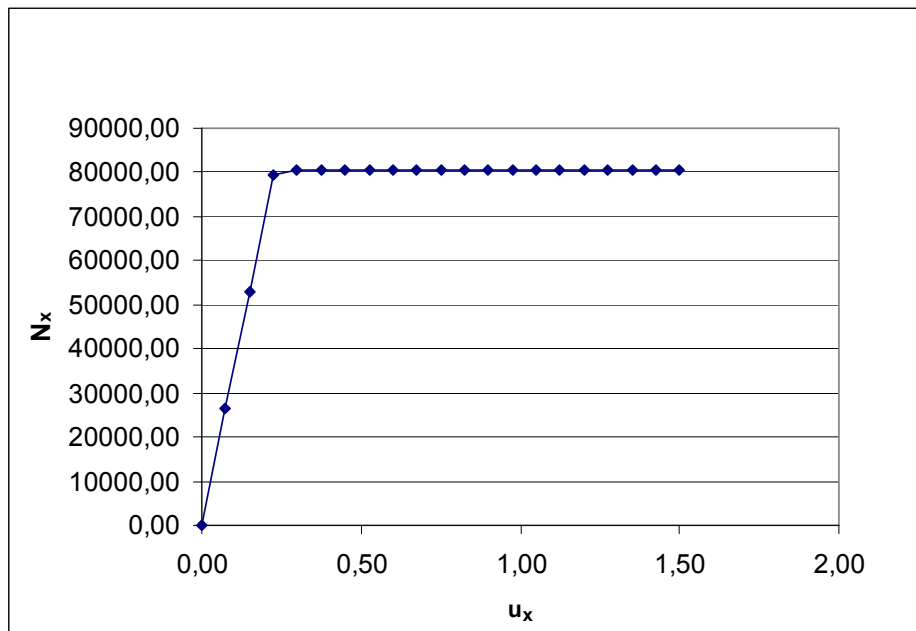


Figura 4.5: Gráfico de carga versus deslocamento para o esforço axial, nó 21.

## 4.4.2 Momento Fletor ( $M_{yp}$ )

### Procedimento adotado

É vista, na figura (4.7), a malha gerada com a condição engastamento no nó 1 e extremidade livre no nó 21. Foi aplicada uma rotação no nó 21 (ver figura 4.6), em torno do eixo  $y$ , para alcançar o limite plástico.

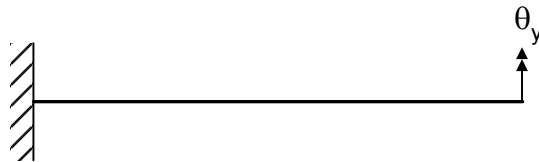


Figura 4.6: Rotação imposta na direção  $y$ , nó 21.

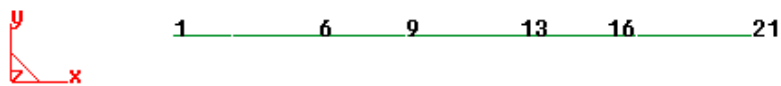


Figura 4.7: Malha gerada para o momento fletor  $y$ .

### Resultados

Os valores obtidos para o limite plástico (ver figura 4.8) do momento fletor foram:

$$\text{Equação (4.4)} \quad v_a = 161280,000 \text{ kgf} \cdot \text{cm} \quad (4.32)$$

$$\text{Numérico} \quad v_n = 161033,000 \text{ kgf} \cdot \text{cm} \quad (4.33)$$

$$e_n = 0,153\% \quad (4.34)$$

$$d = 0,957 \quad (4.35)$$

Pode-se observar que o valor do erro relativo (equação 4.34) é pequeno e o modelo de dano retratou bem o caso do momento fletor.

O gráfico do momento fletor obtido na fase de final de plastificação é apresentado na figura (4.9), a seguir:

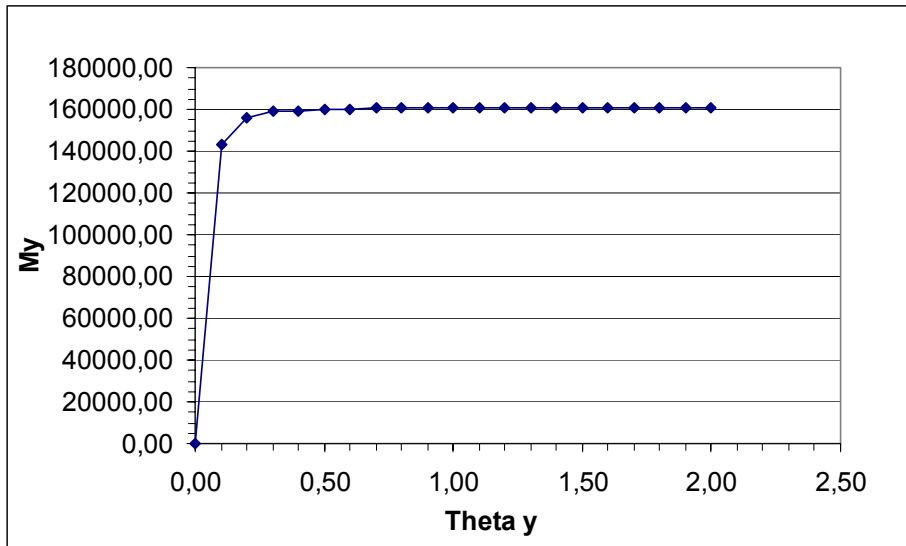


Figura 4.8: Gráfico momento fletor  $y$  versus rotação  $\theta_y$ .



Figura 4.9: Valor limite para o momento fletor  $y$ .

Percebe-se que ocorreu uma perturbação na seção transversal (ver figura 4.10) do nó 1 que deveria ser semelhante ao do nó 21. A perturbação no nó 1 deve ter ocorrido porque os valores são calculados nos 2 pontos de gauss e são interpolados para os nós. O comportamento das seções do nó 2 ao 20 são iguais a que está representada para o nó 21. Deve ser observado que todo o elemento de barra manteve o equilíbrio estático, ou seja, os momentos fletores foram os mesmos (ver figura 4.9).

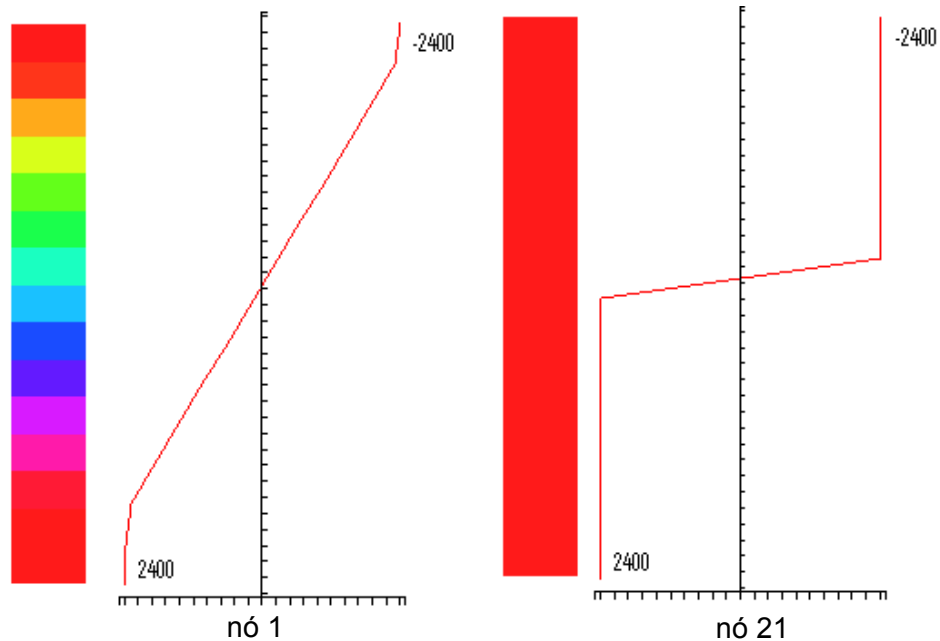


Figura 4.10: Distribuição de tensões para  $m_y$  ao longo da seção transversal nos nós 1 e 21.

### 4.4.3 Momento Fletor ( $M_{zp}$ )

#### Procedimento adotado

A malha gerada da figura (4.12) apresenta a condição de engastamento no nó 1 e extremidade livre no nó 21. Na figura (4.11), é imposta uma rotação no nó 21, em torno do eixo  $z$ , para alcançar o limite plástico.

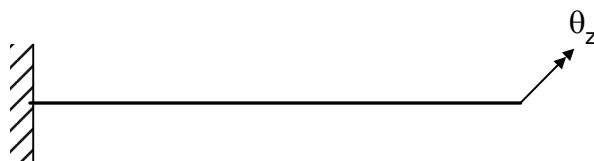


Figura 4.11: Rotação imposta na direção  $z$ , nó 21.

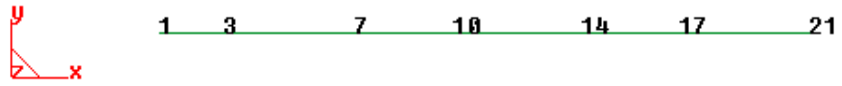


Figura 4.12: Malha gerada para o momento fletor  $z$ .

## Resultados

Os resultados obtidos para o limite plástico (ver figura 4.13) do momento fletor foram:

$$\text{Equação (4.4)} \quad v_a = 84672,000 \text{ kgf} \cdot \text{cm} \quad (4.36)$$

$$\text{Numérico } v_n = 84542,200 \text{ kgf} \cdot \text{cm} \quad (4.37)$$

$$e_n = 0,153\% \quad (4.38)$$

$$d = 0,918 \quad (4.39)$$

Este caso apresenta o valor do erro relativo (equação 4.38) baixo, sendo que o modelo consegue retratar o esforço de flexão.

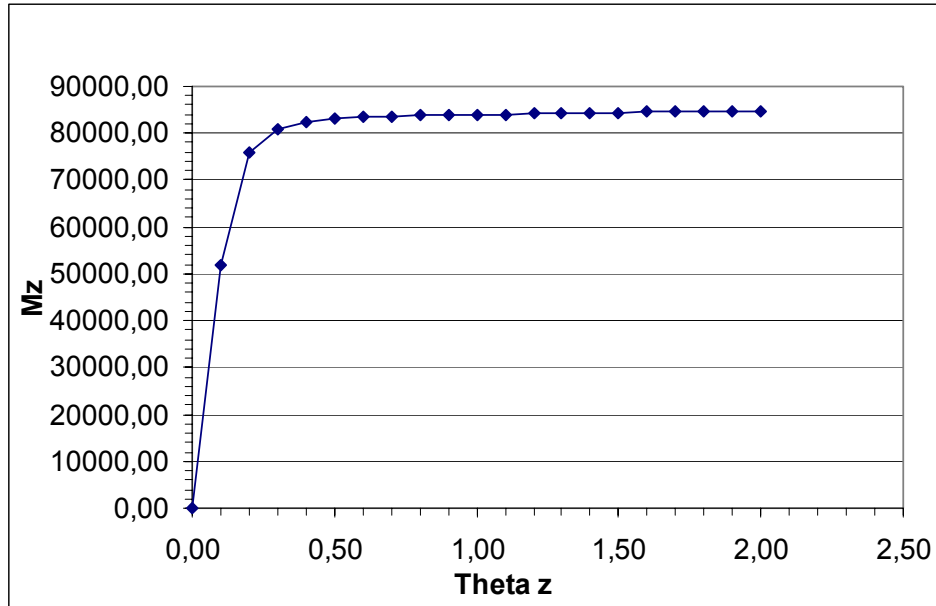


Figura 4.13: Gráfico momento fletor  $z$  versus rotação  $\theta_z$ .

O valor do momento fletor  $m_z$  ao alcançar a fase final da plasticação é representado na figura (4.14), a seguir:

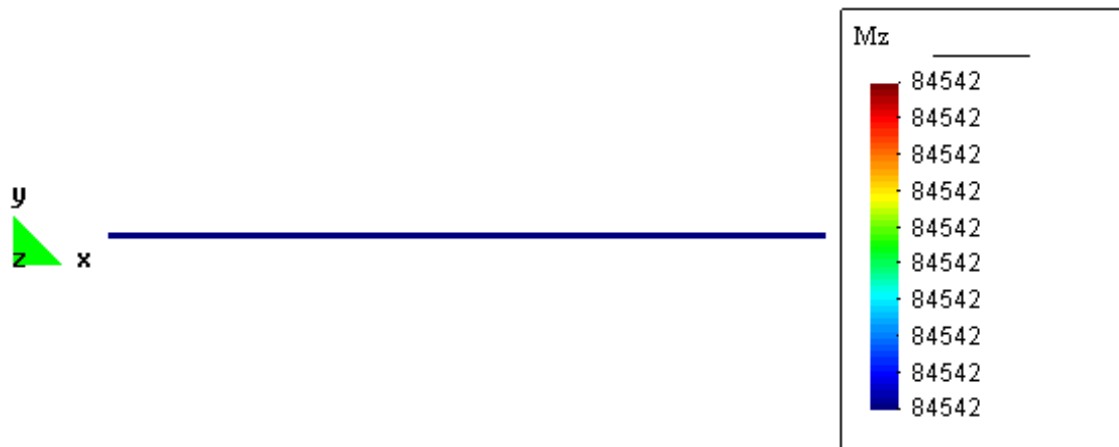


Figura 4.14: Valor limite para o momento fletor  $z$ .

Pode-se ver na figura (4.15) que o elemento 1 apresenta-se com a tensão variando com uma tensão próxima ao de escoamento na parte superior da seção transversal. Provavelmente isto é uma perturbação na função de forma ao interpolar os pontos de gauss para o nó. Já para o elemento 21 percebe-se que praticamente toda a seção atingiu a tensão de escoamento de acordo com os critérios de plastificação. Deve-se comentar que o equilíbrio estático foi mantido, ou seja, os esforços seccionais são iguais ao longo de toda a seção (ver figura 4.14).

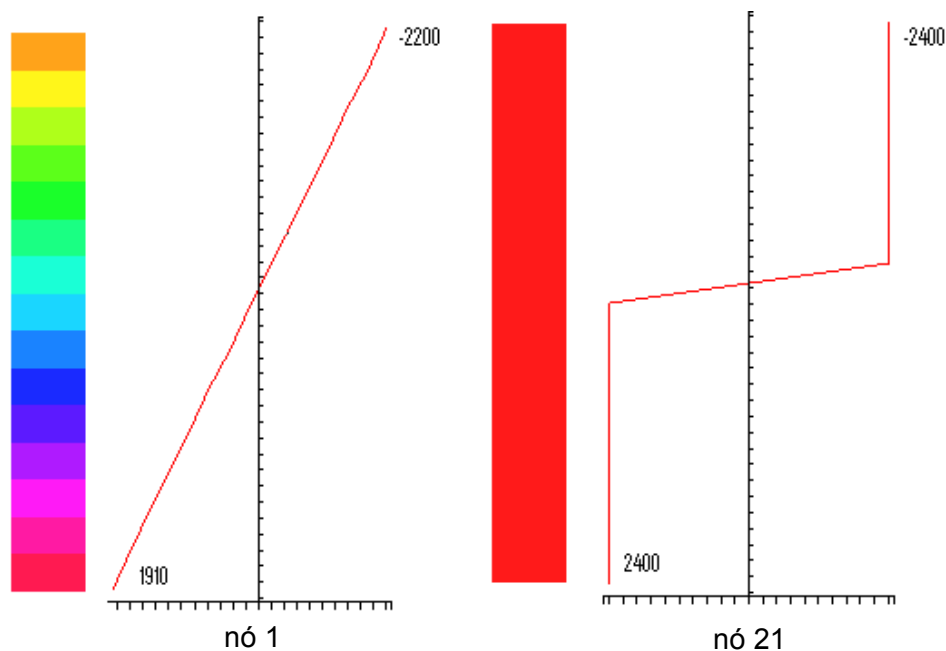


Figura 4.15: Distribuição de tensões para  $m_z$  ao longo da seção transversal nos nós 1 e 21.

#### 4.4.4 Momento Torçor ( $M_{xp}$ )

##### Procedimento adotado

Nas figuras (4.16) e (4.17), são apresentadas a rotação imposta no nó 21, em torno do eixo  $x$ , e a malha que apresenta a condição de engastamento no nó 1 e extremidade livre no nó 21.

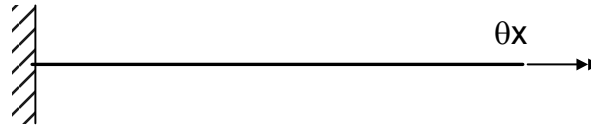


Figura 4.16: Rotação imposta na direção  $x$ , nó 21.

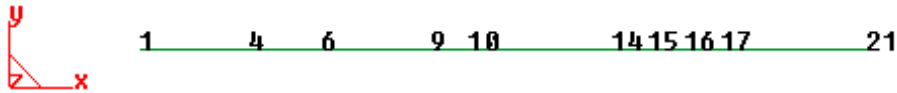


Figura 4.17: Malha gerada para o momento torçor  $x$ .

##### Resultados

O limite plástico foi atingido, (ver figura 4.18), para o momento torçor com o seguinte valor:

$$\text{Equação (4.6)} \quad v_a = 139708,800 \text{ kgf} \cdot \text{cm} \quad (4.40)$$

$$\text{Numérico} \quad v_n = 136545,000 \text{ kgf} \cdot \text{cm} \quad (4.41)$$

$$e_n = 2,264\% \quad (4.42)$$

$$d = 0,918 \quad (4.43)$$

Para este caso o valor do erro relativo (4.42) é maior que os demais. Como não foi possível conhecer o código fonte não houve condições de analisar com mais profundidade este erro. Contudo, foram geradas algumas superfícies levando em conta este esforço seccional, sendo que seu valor não invalida o método de geração de superfícies proposto.

É apresentado na figura (4.19), a seguir, o limite para o momento torçor no elemento de barra analisado:



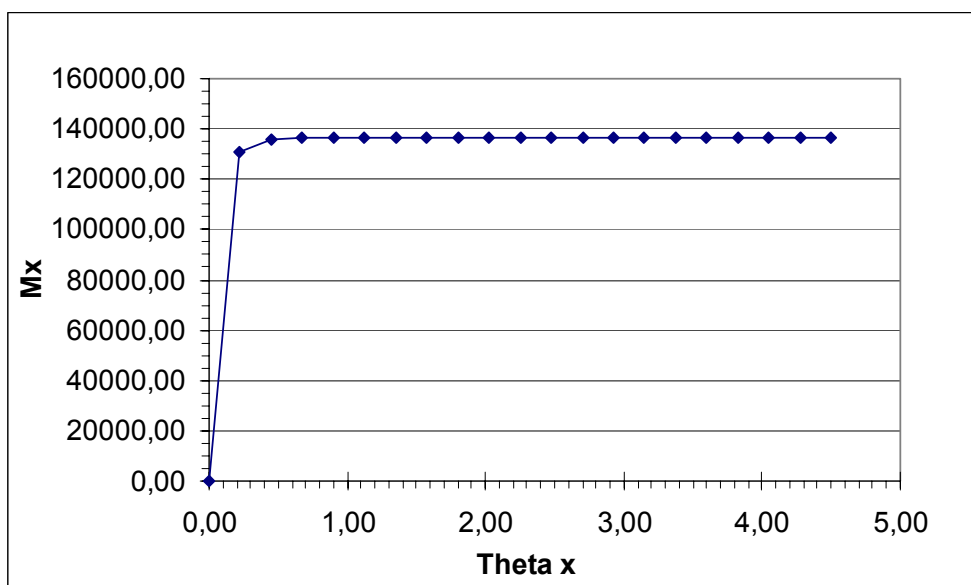


Figura 4.18: Gráfico momento torçor  $x$  versus rotação  $\theta_x$ .

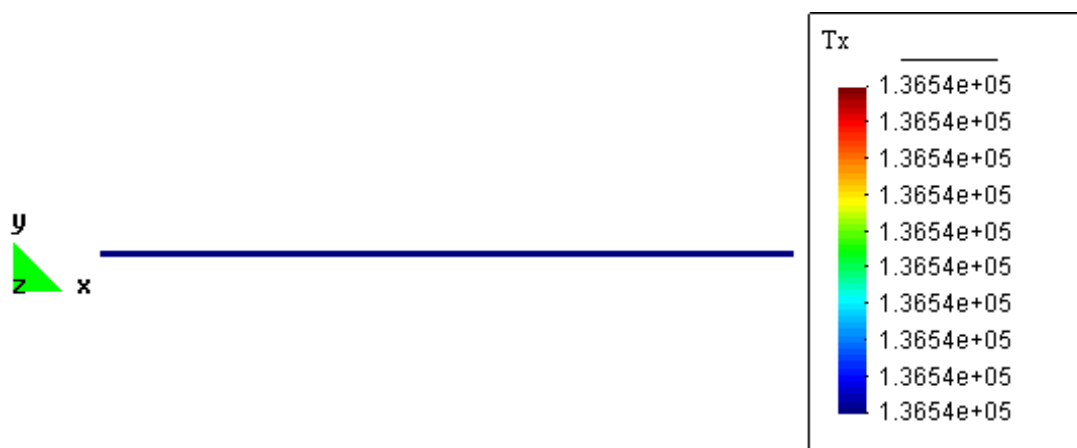


Figura 4.19: Valor limite para o momento torçor  $x$ .

#### 4.4.5 Esforço Cortante ( $F_{y_p}$ )

##### Procedimento adotado

Nesta análise o comprimento do elemento foi de valor unitário. A malha apresenta a condição de engastamento no nó 1 e extremidade livre no nó 21(4.21). Na figura (4.20), é apresentado o deslocamento imposto no nó 21, na direção  $y$ :

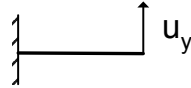


Figura 4.20: Deslocamento imposto na direção  $y$ , nó 1.

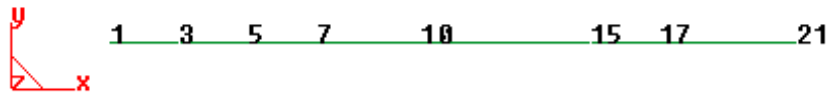


Figura 4.21: Malha gerada para o esforço cortante  $y$ .

##### Resultados

O limite plástico foi atingido, (ver figura 4.22), para o momento torçor com o seguinte valor:

$$\text{Equação (4.3)} \quad v_a = 46557,527 \text{ kgf} \quad (4.44)$$

$$\text{Numérico} \quad v_n = 46522,400 \text{ kgf} \quad (4.45)$$

$$e_n = 0,075\% \quad (4.46)$$

$$d = 0,980 \quad (4.47)$$

O erro relativo (4.46) para o esforço cortante possui um valor baixo representando bem o estado de plastificação.

Na figura (4.23), é visto o esforço cortante para o elemento de barra analisado:

Através das análises efetuadas para o esforço axial, cortante, momento fletor e torçor pode-se concluir que o modelo de dano consegue retratar o comportamento dos metais de forma que alcancem os limites plásticos necessários nas interações entre os esforços.

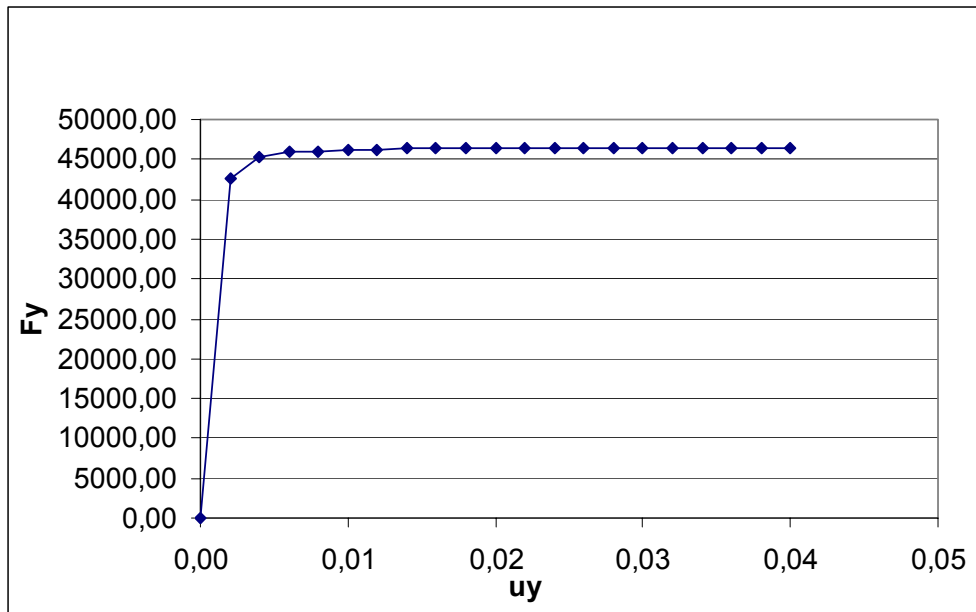


Figura 4.22: Gráfico esforço cortante  $y$  versus deslocamento  $u_y$ , nó 21.



Figura 4.23: Valor limite para o esforço cortante  $y$ .

## 4.5 FORMULAÇÃO PARA A OBTENÇÃO DAS SUPERFÍCIES

A obtenção de curvas de interação em resultantes de tensões facilita a análise, de maneira que evita o processo de integração numérica ao longo da seção transversal. Para a obtenção das curvas de interação, em resultantes de tensões, foram utilizados os resultados dos esforços seccionais da análise numérica 3D, apresentada anteriormente. Dentro do processo, foram feitas várias combinações de carregamentos de forma a ter um grupo de pontos para gerar a superfície proposta, ou seja, pontos que tenham alcançado a superfície de escoamento. Para um dado carregamento, obtém-se um ponto, como por exemplo o ponto 1, cujas coordenadas  $(n_1, m_1)$  são o esforço axial e momento fletor respectivamente, na figura (4.24). A regressão linear múltipla trata os pontos obtidos pelas diversas análises e obtém a superfície que passa por estes pontos e isto é retratado na figura (4.24). Buscam-se obter os valores dos coeficientes constantes das funções, como por exemplo:  $\beta_1$  e  $\beta_2$  da superfície a ser gerada, como é vista na equação, a seguir:

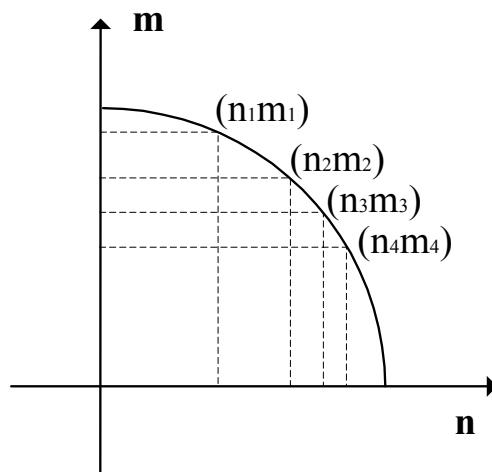


Figura 4.24: Pontos gerados para criar a função de escoamento (caso uniaxial).

$$f = \beta_1 n^2 + \beta_2 m - 1 = 0 \quad (4.48)$$

onde:

- $n$  e  $m$  são os esforços normal e fletor adimensionalizados;
- $\beta_1$  e  $\beta_2$  são os coeficientes obtidos através da regressão.

Para tal, é apresentado um exemplo com resultados de análises (tabela 4.2) obtidas para a equação (4.48):

Observações	
$n$	$m$
0,956445	0,040370
0,956445	0,040370
0,301715	0,679861
0,301718	0,679855
0,783473	0,210572
0,783473	0,210570
0,990255	0,008484
0,990255	0,008484
0,080420	0,899851
0,080422	0,899851
0,064067	0,915098
0,064068	0,915098

Tabela 4.2: Tipo de observações para nm

Estes dados são tratados pela regressão de maneira a encontrar os coeficientes  $\beta$ . Com esta teoria existe a possibilidade de gerar vários tipos de superfícies de interação. Neste item, será apresentada a formulação que trata os dados obtidos até chegar a condição em que se possa usá-los pela regressão linear múltipla.

Os dados obtidos (ver tabela 4.2) são os pontos que fazem parte da superfície a obter. Analisando a figura (4.24) pode-se observar que existem uma quantidade de pontos cujas coordenadas são em função do  $n$  (normal) e do  $m$  (fletor). Porém, são apresentados, na forma matricial, os esforços seccionais para os esforços normal, torçor e fletores com combinações adimensionais na equação a seguir:

$$\begin{aligned}
 x_{1j} &= \left[ 1 \quad \left( \left( \frac{N}{N_{xp}} \right)^{\alpha_1} \right)_{12} \quad \left( \left( \frac{M_x}{M_{xp}} \right)^{\alpha_2} \right)_{13} \quad \left( \left( \frac{M_y}{M_{yp}} \right)^{\alpha_3} \right)_{14} \quad \left( \left( \frac{M_z}{M_{zp}} \right)^{\alpha_4} \right)_{15} \quad \dots \right] \\
 &= \left[ 1 \quad (n^{\alpha_1})_{12} \quad (m_x^{\alpha_2})_{13} \quad (m_y^{\alpha_3})_{14} \quad (m_z^{\alpha_4})_{15} \quad \dots \right] \quad (4.49)
 \end{aligned}$$

com  $j = 1, 2, \dots, k$

onde:

- $N$  e  $N_{xp}$  são o esforço axial atuante e plástico;  $M_x$  e  $M_{xp}$  são o momento torçor atuante e plástico;  $M_y$  e  $M_{yp}$  são o momento fletor atuante e plástico, na direção  $y$  e  $M_z$  e  $M_{zp}$  são o momento fletor atuante e plástico, na direção  $z$ ;
- $\alpha_m$  são os expoentes dos termos de  $x_{1j}$ .

As superfícies de interação podem ser feitas com as mais diversas possibilidades de interação entre esforços. Para o entendimento do processo é descrito um modelo que leva em conta

combinações dos esforços seccionais independentes para pórticos espaciais:

$$\begin{aligned}
 f = & \beta_1 \left( \frac{N}{N_{xp}} \right)^{\alpha_1} + \beta_2 \left( \frac{M_x}{M_{xp}} \right)^{\alpha_2} + \beta_3 \left( \frac{M_y}{M_{yp}} \right)^{\alpha_3} + \beta_4 \left( \frac{M_z}{M_{zp}} \right)^{\alpha_4} \\
 + & \beta_6 \left( \frac{N}{N_{xp}} \right)^{\alpha_5} \left( \frac{M_x}{M_{xp}} \right)^{\alpha_6} + \beta_7 \left( \frac{N}{N_{xp}} \right)^{\alpha_7} \left( \frac{M_y}{M_{yp}} \right)^{\alpha_8} + \beta_8 \left( \frac{N}{N_{xp}} \right)^{\alpha_9} \left( \frac{M_z}{M_{zp}} \right)^{\alpha_{10}} \\
 + & \beta_9 \left( \frac{M_x}{M_{xp}} \right)^{\alpha_{13}} \left( \frac{M_z}{M_{zp}} \right)^{\alpha_{14}} + \beta_{10} \left( \frac{M_y}{M_{yp}} \right)^{\alpha_{15}} \left( \frac{M_z}{M_{zp}} \right)^{\alpha_{16}} - 1 = 0
 \end{aligned} \quad (4.50)$$

com

$$\begin{aligned}
 x_{j1} = & \left( \frac{N}{N_{xp}} \right)^{\alpha_1}, x_{j2} = \left( \frac{M_x}{M_{xp}} \right)^{\alpha_2}, x_{j3} = \left( \frac{M_y}{M_{yp}} \right)^{\alpha_3}, x_{j4} = \left( \frac{M_z}{M_{zp}} \right)^{\alpha_4}, \\
 x_{j5} = & \left( \frac{N}{N_{xp}} \right)^{\alpha_5} \left( \frac{M_x}{M_{xp}} \right)^{\alpha_6}, x_{j6} = \left( \frac{N}{N_{xp}} \right)^{\alpha_7} \left( \frac{M_y}{M_{yp}} \right)^{\alpha_8}, \\
 x_{j7} = & \left( \frac{N}{N_{xp}} \right)^{\alpha_9} \left( \frac{M_z}{M_{zp}} \right)^{\alpha_{10}}, x_{j8} = \left( \frac{M_x}{M_{xp}} \right)^{\alpha_{11}} \left( \frac{M_y}{M_{yp}} \right)^{\alpha_{12}}, \\
 x_{j9} = & \left( \frac{M_x}{M_{xp}} \right)^{\alpha_{13}} \left( \frac{M_z}{M_{zp}} \right)^{\alpha_{14}} \text{ e } x_{j10} = \left( \frac{M_y}{M_{yp}} \right)^{\alpha_{15}} \left( \frac{M_z}{M_{zp}} \right)^{\alpha_{16}}
 \end{aligned} \quad (4.51)$$

onde:

$j = 1, 2, \dots, k$  (quantidade de análises).

As observações de (4.51), apresentadas para a regressão linear múltipla, equação (3.7), na forma matricial são:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

onde os termos  $x_{ij}$  são os esforços seccionais adimensionais, (4.51), vistos anteriormente.

Os  $\alpha_i$  são as constantes que determinam o grau da função;  $\left\{ \begin{matrix} N \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{matrix} \right\}$  e  $\left\{ \begin{matrix} N_{xp} \\ M_{xp} \\ M_{yp} \\ M_{zp} \end{matrix} \right\}$  são os esforços de cálculo e limites elastoplásticos, respectivamente.

Reapresentando a equação(4.50) e adotando os seguintes processos, chega-se a equação (4.54):

$$\begin{aligned}
\bar{x}_1 &= \left( \frac{N}{N_{xp}} \right)^{\alpha 1}, \quad \bar{x}_2 = \left( \frac{M_x}{M_{xp}} \right)^{\alpha 2}, \quad \bar{x}_3 = \left( \frac{M_y}{M_{yp}} \right)^{\alpha 3}, \quad \bar{x}_4 = \left( \frac{M_z}{M_{zp}} \right)^{\alpha 4}, \\
\bar{x}_5 &= \left( \frac{N}{N_{xp}} \right)^{\alpha 5} \left( \frac{M_x}{M_{xp}} \right)^{\alpha 6}, \quad \bar{x}_6 = \left( \frac{N}{N_{xp}} \right)^{\alpha 7} \left( \frac{M_y}{M_{yp}} \right)^{\alpha 8}, \\
\bar{x}_7 &= \left( \frac{N}{N_{xp}} \right)^{\alpha 9} \left( \frac{M_z}{M_{zp}} \right)^{\alpha 10}, \quad \bar{x}_8 = \left( \frac{M_x}{M_{xp}} \right)^{\alpha 11} \left( \frac{M_y}{M_{yp}} \right)^{\alpha 12}, \\
\bar{x}_9 &= \left( \frac{M_x}{M_{xp}} \right)^{\alpha 13} \left( \frac{M_z}{M_{zp}} \right)^{\alpha 14} \quad \text{e} \quad \bar{x}_{10} = \left( \frac{M_y}{M_{yp}} \right)^{\alpha 15} \left( \frac{M_z}{M_{zp}} \right)^{\alpha 16}
\end{aligned} \tag{4.53}$$

com  $\left( \frac{N}{N_{xp}} \right) = n$ ,  $\left( \frac{M_x}{M_{xp}} \right) = m_x$ ,  $\left( \frac{M_y}{M_{yp}} \right) = m_y$  e  $\left( \frac{M_z}{M_{zp}} \right) = m_z$

Então, chega-se a:

$$\begin{aligned}
1 &= \beta_0 + \beta_1 n + \beta_2 m_x + \beta_3 m_y + \beta_4 m_z + \beta_5 n m_x \\
&+ \beta_6 n m_y + \beta_7 n m_z + \beta_8 m_x m_y + \beta_9 m_x m_z + \beta_{10} m_y m_z
\end{aligned}$$

Na forma corrente de regressão, obtem-se:

$$\begin{aligned}
1 &= \beta_0 + \beta_1 \bar{x}_1 + \beta_2 \bar{x}_2 + \beta_3 \bar{x}_3 + \beta_4 \bar{x}_4 + \beta_5 \bar{x}_5 \\
&+ \beta_6 \bar{x}_6 + \beta_7 \bar{x}_7 + \beta_8 \bar{x}_8 + \beta_9 \bar{x}_9 + \beta_{10} \bar{x}_{10}
\end{aligned} \tag{4.54}$$

A equação anterior mostra uma curva de interação no formato que pode ser utilizado pela regressão linear múltipla (ver eq. 3.15). No item do processo numérico (4.6) serão abordados as funções geradas para comparar com existentes na literatura de maneira a verificar a eficácia do método.

## 4.6 PROCESSO NUMÉRICO DE OBTENÇÃO DAS SUPERFÍCIES

Para obtenção das curvas de interação, foram feitas análises de uma viga engastada para diversos tipos de carregamentos. Como resultados das diversas análises encontram-se pontos que alcançam a superfície de escoamento na forma de resultantes de tensões. Os diversos grupos de esforços adimensionais são tratados pelo método de regressão múltipla, visto anteriormente, para obter uma função de escoamento correspondente as observações. As funções obtidas pelo processo numérico são comparadas com as apresentadas na literatura para verificar a aplicabilidade do método. As propriedades da viga engastada (ver figura 4.25), como dimensões da

seção transversal e comprimento, foram padronizadas para obter-se uma comparação entre as funções obtidas. Os limites plásticos para a seção foram obtidos em função das fórmulas apresentadas anteriormente. O nível de dano ( $d$ ) do elemento, em que foram retirados os esforços, variou de 60 a 99%. Esta variação do nível do dano dependeu da convergência de cada análise. O elemento em que foram retiradas as observações (esforços seccionais) e observados os níveis de plastificação da seção foi o que tem a condição de contorno engastada. Para cada análise, foram extraídos os esforços adimensionais dos 2 pontos de Gauss (ver figura 2.5). A função  $f$  é a apresentada pela literatura e função  $f_u$  é a obtida no presente trabalho. Foram geradas várias malhas de acordo com a necessidade do exemplo tratado. O número de elementos foi obtido através de testes para verificar a convergência da solução (estes testes não são apresentados no trabalho). O exemplo 4.6.1 foi apresentado como um modelo em que todos os processos são desenvolvidos para a análise, a partir dos exemplos seguintes trata-se com mais objetividade.

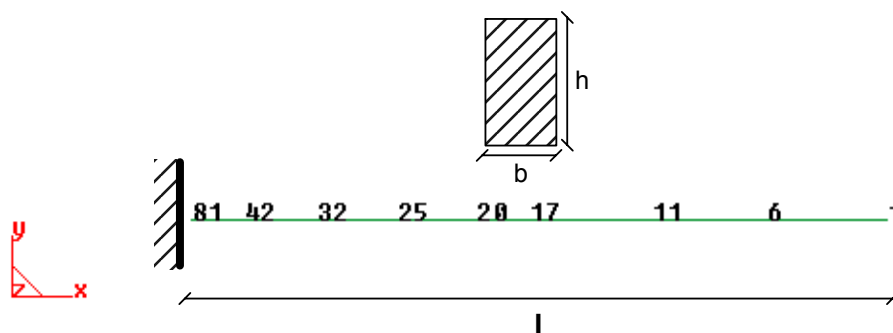


Figura 4.25: Viga engastada.

Propriedades do elemento engastado		
Descrição	Valor adotado	Unidade
Módulo de Young	$2,100e6$	$kgf/cm^2$
Módulo de Poisson	0,300	—
Densidade	$7,850e-6$	$kgf/cm^3$
Limite de compressão	$2,400e3$	$kgf/cm^2$
Limite de tração	$2,400e3$	$kgf/cm^2$
Energia de fratura (dano)	$1,000e7$	$kgf.cm$
Largura da seção (b)	4,200	cm
Altura da seção (h)	8,000	cm
Comprimento (l)	200,000	cm
$N_{xp}$ compressão	18410,959	kgf
$N_{xp}$ tração	80640,000	kgf
$M_{xp}$	80660,916	kgf.cm
$M_{yp}$	161280,000	kgf.cm
$M_{zp}$	84600,000	kgf.cm

Tabela 4.3: Propriedades do elemento engastado



### 4.6.1 Exemplo 4.6.1

Neste caso, busca-se um função que estabeleça a interação entre os esforços seccionais: axial ( $N$ ) e fletores ( $M_y, M_z$ ). Considera-se a viga engastada, vista na figura 4.25, com as propriedades padrões da tabela 4.6. Foram aplicadas várias combinações de translações e rotações impostas no nó 1 (ver. fig. 4.25) para a obtenção dos grupos de esforços seccionais adimensionais da curva de interação. Foram testadas interações nas duas direções dos momentos. As propriedades particulares do exemplo são apresentadas a seguir:

Propriedades do exemplo 4.6.1	
Descrição	Valor adotado
Número de elementos	50
Número de nós da malha	101
Número de divisões seccionais	8
Número de análises	6
Deslocamentos impostos (cm)	
$u_x$	$u_z$
0,10	10,00
0,20	12,00
0,30	14,00
0,60	18,00
0,90	18,00
0,50	20,00
$u_x$	$u_y$
0,24	7,68
1,33	82,34
1,40	69,52
0,03	13,77
0,06	14,41
0,45	37,44

Tabela 4.4: Propriedades particulares do exemplo modelo.

- $n \times m_y$

Os dados de entrada (ver tabela 4.5) para a obtenção dos  $\beta$  foram baseados em análises desenvolvidas para os deslocamentos impostos apresentados na tabela 4.4. Na tabela 4.6, são vistos os resultados estatísticos da superfície de interação gerada, sendo que a probabilidade dos valores obtidos serem errados é praticamente nula porque o valor de  $P$  é zero. Conclui-se

que existe uma relação entre o normal ( $n$ ) e o fletor ( $m$ ). Os resultados mostram que as duas variáveis, ou seja, o normal ( $n$ ) e o fletor ( $m$ ) são importantes no modelo e a probabilidade de estar errado é zero. Os resultados estatísticos das outras superfícies de interação devem ser interpretados levando em conta  $\mathbf{P}$ ,  $f_0$  e  $t_0$  de forma similar ao analisado neste caso.

A figura (4.26), apresenta a comparação entre a função obtida por regressão múltipla ( $f_u$ ) e a equação (4.11), ( $f$ ), rerepresentada, a seguir:

<b>Observações</b>	
$n^2$	$m_y$
0,956445	0,040370
0,956445	0,040370
0,301715	0,679861
0,301718	0,679855
0,783473	0,210572
0,783473	0,210570
0,990255	0,008484
0,990255	0,008484
0,080420	0,899851
0,080422	0,899851
0,064067	0,915098
0,064068	0,915098

Tabela 4.5: Observações  $n^2 m_y$

<b>Fonte de variação</b>	<b>Soma de quadrados</b>	<b>Graus de liberdade</b>	<b>Média de quadrados</b>	$f_0$	$\mathbf{P} > f_0$
regressão	12,000	2	6,000	$\infty$	0,000
Erro (resíduo)	0,000	10	0,000		
Total	12,000	12			
<b>Prova dos coeficientes individuais</b>					
<b>Variável</b>	<b>Estimado</b>	<b>Erro</b>	$t_0$	$\mathbf{P} >  t_0 $	
$n^2$	1,002	0,000542	1848,300	0,000	
$m_y$	1,023	0,000597	1715,000	0,000	

Tabela 4.6: Prova de significância  $n^2 m_y$

$$\begin{aligned}
 f_u &= 1,002n^2 + 1,023m_y - 1 = 0; \\
 f &= 1,000n^2 + 1,000m_y - 1 = 0
 \end{aligned}
 \tag{4.55}$$

Pode-se observar, na equação (4.55), que a solução numérica ( $f_u$ ) é semelhante a da literatura ( $f$ ). Deve-se comentar que neste caso existe uma função da literatura, porém, a medida

que cresce o número de variáveis de interação, diminui o número de soluções analíticas na literatura. Os resultados estatísticos mostram que a função obtida é uma boa solução e também que as variáveis  $n$  e  $m_y$  são importantes para o modelo.

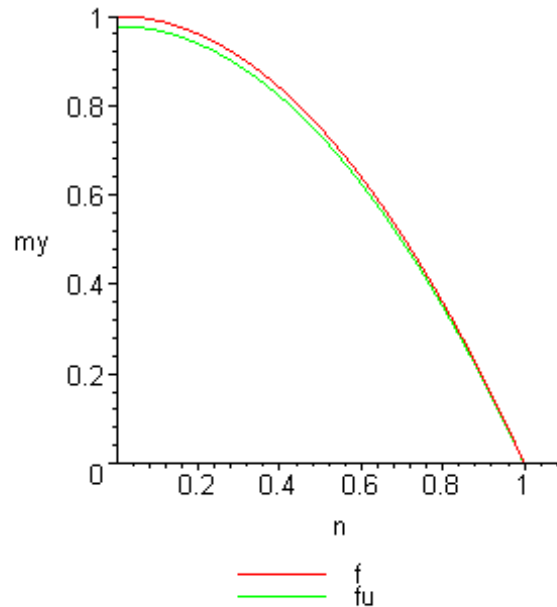


Figura 4.26: Comparação entre a função analítica  $f$  e a função obtida pela regressão múltipla  $f_u$ . ( $n2m1y$ )

Foi feita a análise (ver dados da tabela 4.7) de outra curva obtida através da mudança dos índices  $\alpha$  dos esforços seccionais. Neste caso, não se encontrou uma opção de comparação da literatura, porém, desenvolveu-se a análise de forma a encontrar funções semelhantes às existentes na literatura. Como pode ser observado na equação (4.56).

$$f_u = 1,036n + 0,885m_y^2 - 1 = 0 \quad (4.56)$$

Pode-se observar que esta situação apresenta resultados diferentes dos obtidos para a função da equação (4.55), sendo apresentado o gráfico da curva na figura (4.27). Os resultados estatísticos (tabela 4.8) mostram que a função obtida é uma boa solução para as observações dadas. A equação (4.56) é representativa para a interação entre  $n$  e  $m_y$  e pode-se ver que a solução obtida

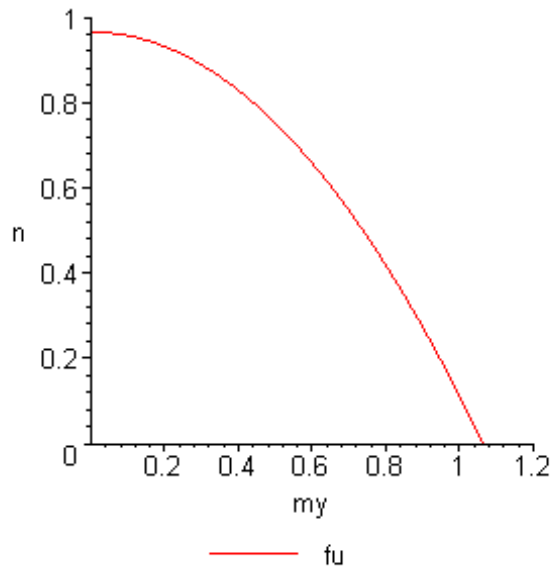


Figura 4.27: Função obtida pela regressão múltipla  $f_u$ . ( $n1m2y$ )

com outros coeficientes também podem ser empregadas como funções de escoamento. Deverão ser feitas análises para testar as funções e verificar a sua aplicabilidade.

Observações	
$n$	$m_y^2$
0,977980	0,001630
0,977980	0,001630
0,549286	0,462211
0,549288	0,462203
0,885140	0,044340
0,885140	0,044340
0,995115	0,000072
0,995115	0,000072
0,283585	0,809732
0,283588	0,809732
0,253115	0,837404
0,253118	0,837404

Tabela 4.7: Observações  $n1m2y$

Fonte	Soma de	Graus de	Média de		
de variação	quadrados	liberdade	quadrados	$f_0$	$P > f_0$
regressão	11,990	2	5,996	8131,898	0,000
Erro (resíduo)	0,010	10	0,001		
Total	12,000	12			
Prova dos coeficientes individuais					
Variáveis	Estimado	Erro	$t_0$	$P >  t_0 $	
$n$	1,036	0,01141	90,830	0,000	
$m_y^2$	0,885	0,01622	54,590	0,000	

Tabela 4.8: Prova de significância - n1m2y

Adotaram-se outras combinações de índices ( $\alpha$ ) nas observações (tabela 4.9), de maneira a testar outras opções de curvas para o caso. Apresentam-se as observações, gráficos e resultados estatísticos (tabela 4.10) de maneira semelhante às funções anteriores.

Observações	
$n^2$	$m_y^2$
0,956445	0,001630
0,956445	0,001630
0,301715	0,462211
0,301718	0,462203
0,783473	0,044340
0,783473	0,044340
0,990255	0,000072
0,990255	0,000072
0,080420	0,809732
0,080422	0,809732
0,064067	0,837404
0,064068	0,837404

Tabela 4.9: Observações n2m2y

A função apresentada na figura (4.28), é uma boa solução, porém, com uma eficiência inferior as demais, em função dos resultados estatísticos.

$$f_u = 1,085n^2 + 1,167m_y^2 - 1 = 0 \quad (4.57)$$

Fonte de variação	Soma de quadrados	Graus de liberdade	Média de quadrados	$f_0$	$P > f_0$
regressão	11,920	2	5,962	789,871	0,000
Erro (resíduo)	0,080	10	0,008		
Total	12,000	12			

Prova dos coeficientes individuais				
Variáveis	Estimado	Erro	$t_0$	$P >  t_0 $
$n^2$	1,085	0,03843	28,230	0,000
$m_y^2$	1,167	0,04952	23,580	0,000

Tabela 4.10: Prova de significância -  $n2m2y$

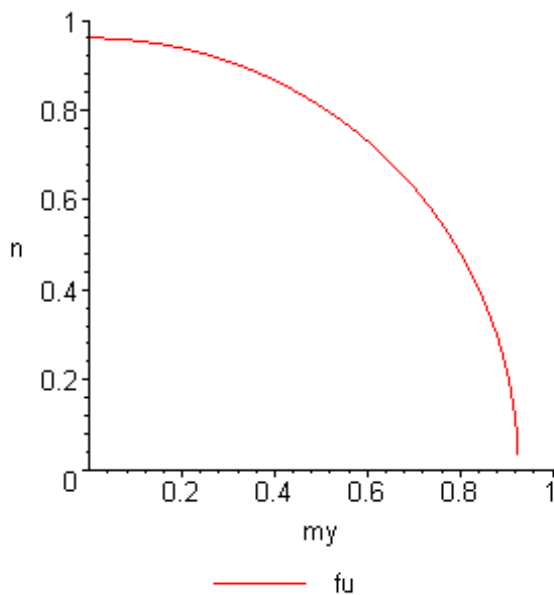


Figura 4.28: Função obtida pela regressão múltipla  $f_u \cdot (n2m2y)$

Por último, é apresentada uma função que trata de uma combinação com três variáveis e que será comparada com a função (4.13).

$$\begin{aligned} f_u &= 1,013n^2 + 0,795nm_y + 0,887m_y^2 - 1 = 0; \\ f &= 1,000n^2 + 3,000sm_yn + 2,250m_y^2 - 1 = 0 \end{aligned} \quad (4.58)$$

<b>Observações</b>		
$n^2$	$m_y^2$	$nm_y$
0,956445	0,001630	0,039482
0,956445	0,001630	0,039481
0,301715	0,462211	0,373438
0,301718	0,462203	0,373436
0,783473	0,044340	0,186385
0,783473	0,044340	0,186384
0,990255	0,000072	0,008442
0,990255	0,000072	0,008442
0,080420	0,809732	0,255184
0,080422	0,809732	0,255187
0,064067	0,837404	0,231625
0,064068	0,837404	0,231627

Tabela 4.11: Observações n2m2ya

<b>Fonte de variação</b>	<b>Soma de quadrados</b>	<b>Graus de liberdade</b>	<b>Média de quadrados</b>	$f_0$	$\mathbf{P} > f_0$
regressão	12,000	3	4,000	26253,629	0,000
Erro (resíduo)	0,000	9	0,000		
Total	12,000	12			
<b>Prova dos coeficientes individuais</b>					
<b>Variáveis</b>	<b>Estimado</b>	<b>Erro</b>	$t_0$	$\mathbf{P} >  t_0 $	
$n^2$	1,013	0,00636	159,300	0,000	
$m_y^2$	0,887	0,01454	61,000	0,000	
$nm_y$	0,795	0,03605	22,100	0,000	

Tabela 4.12: Prova de significância - n2m2ya

Neste caso, observa-se que os valores numéricos ( $f_u$ ) não são aproximados a função proposta por Crisfield ( $f$ ) (ver equação 4.58). Do ponto de vista estatístico (tabela 4.12), de maneira que é uma solução viável do ponto de vista numérico e estatístico.

- $n \times m_z$

Os exemplos desenvolvidos para a direção  $z$  seguiram as mesmas técnicas de análise da direção  $y$ . Os resultados são apresentados a seguir:

<b>Observações</b>	
$n^2$	$m_z$
0,742619	0,228338
0,742619	0,228337
0,765621	0,229364
0,765621	0,229364
0,857193	0,133868
0,857193	0,133868
0,010938	0,960007
0,010938	0,960002
0,041709	0,936255
0,041709	0,936252
0,561355	0,418165
0,561357	0,418164

Tabela 4.13: Observações  $n^2m_z$

<b>Fonte de variação</b>	<b>Soma de quadrados</b>	<b>Graus de liberdade</b>	<b>Média de quadrados</b>	$f_0$	$\mathbf{P} > f_0$
regressão	12,000	2	6,000	84325,969	0,000
Erro (resíduo)	0,000	10	0,000		
Total	12,000	12			
<b>Prova dos coeficientes individuais</b>					
<b>Variáveis</b>	<b>Estimado</b>	<b>Erro</b>	$t_0$	$\mathbf{P} >  t_0 $	
$n^2$	1,012	0,004299	235,300	0,000	
$m_z$	1,027	0,004394	233,800	0,000	

Tabela 4.14: Prova de significância  $-n^2m_z$

$$\begin{aligned}
 f_u &= 1,012n^2 + 1,027m_z - 1 = 0; \\
 f &= 1,000n^2 + 1,000m_z - 1 = 0
 \end{aligned}
 \tag{4.59}$$

A função obtida ( $f_u$ ) (equação 4.59), na direção  $z$ , é semelhante a proposta na literatura ( $f$ ) e o comportamento da função é semelhante a da equação (4.55), na direção  $y$  (ver fig. 4.29). Em função dos resultados estatísticos (tabela 4.14), pode-se observar que as duas variáveis são importantes para a função, sendo assim, conclui-se que é uma boa função proposta.



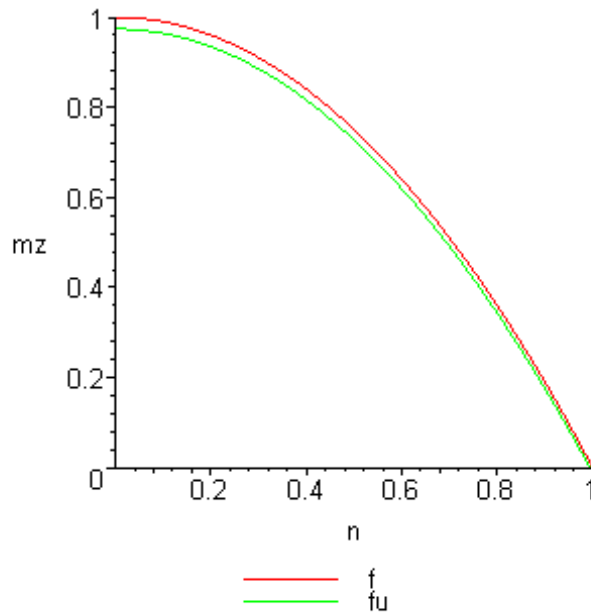


Figura 4.29: Comparação entre a função analítica  $f$  e a função obtida pela regressão múltipla  $f_u$ . ( $n2m1z$ )

A seguir, é apresentada outra função com uma nova combinação de coeficientes  $\alpha$  nas observações (tabela 4.15). Também, seguem os gráficos e resultados estatísticos:

$$f_u = 1,089n + 0,929m_z^2 - 1 = 0 \quad (4.60)$$

A função obtida ( $f_u$ ) na equação (4.60), (ver fig. 4.30), apresenta comportamento similar a da direção  $y$  (ver eq. 4.56) com bons resultados estatísticos (4.16), porém, inferiores ao da equação (4.59).

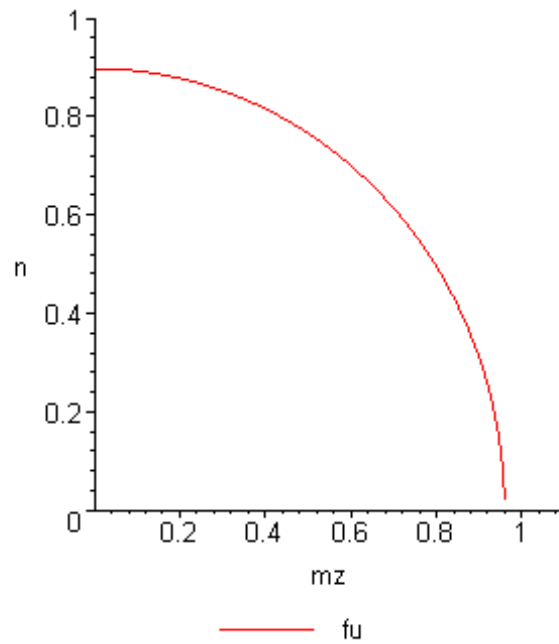


Figura 4.30: Função obtida pela regressão múltipla  $f_u$ . ( $n1m2z$ )

Observações	
$n$	$m_z^2$
0,861753	0,052138
0,861753	0,052138
0,874998	0,052608
0,874998	0,052608
0,925847	0,017921
0,925847	0,017921
0,104583	0,921614
0,104583	0,921605
0,204227	0,876574
0,204229	0,876567
0,749236	0,174862
0,749237	0,174861

Tabela 4.15: Observações  $n1m2z$

Fonte de variação	Soma de quadrados	Graus de liberdade	Média de quadrados	$f_0$	$P > f_0$
regressão	11,990	2	5,996	8547,240	0,000
Erro (resíduo)	0,010	10	0,001		
Total	12,000	12			
Prova dos coeficientes individuais					
Variáveis	Estimado	Erro	$t_0$	$P >  t_0 $	
$n$	1,089	0,01115	97,600	0,000	
$m_z^2$	0,929	0,01497	62,040	0,000	

Tabela 4.16: Prova de significância -  $n1m2z$

A seguinte função, apresentada na equação (4.61), possui comportamento e resultados estatísticos semelhantes ao da equação (4.57). Suas propriedades e gráfico são vistos a seguir:

<b>Observações</b>	
$n^2$	$m_y^2$
0,742619	0,052138
0,742619	0,052138
0,765621	0,052608
0,765621	0,052608
0,857193	0,017921
0,857193	0,017921
0,010938	0,921614
0,010938	0,921605
0,041709	0,876574
0,041709	0,876567
0,561355	0,174862
0,561357	0,174861

Tabela 4.17: Observações  $n^2m^2z$

<b>Fonte de variação</b>	<b>Soma de quadrados</b>	<b>Graus de liberdade</b>	<b>Média de quadrados</b>	$f_0$	$\mathbf{P} > f_0$
regressão	11,960	2	5,979	1455,211	0,000
Erro (resíduo)	0,040	10	0,004		
Total	12,000	12			
<b>Prova dos coeficientes individuais</b>					
<b>Variáveis</b>	<b>Estimado</b>	<b>Erro</b>	$t_0$	$\mathbf{P} >  t_0 $	
$n^2$	1,242	0,03088	40,220	0,000	
$m_y^2$	1,087	0,03552	30,610	0,000	

Tabela 4.18: Prova de significância -  $n^2m^2z$

$$f_u = 1,242n^2 + 1,087m_z^2 - 1 = 0 \quad (4.61)$$

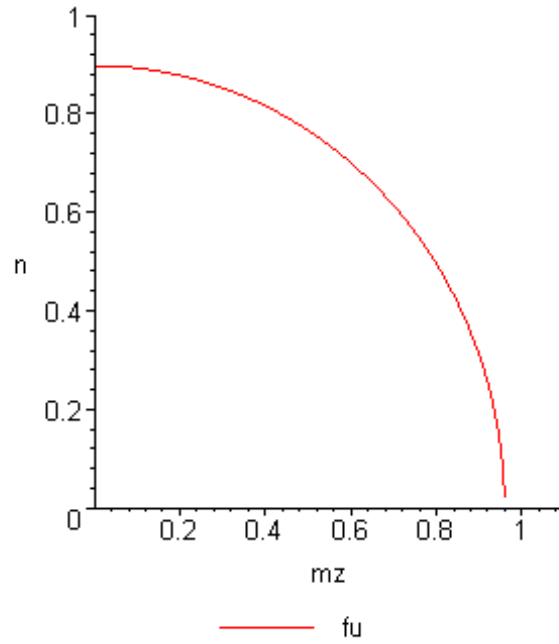


Figura 4.31: Função obtida pela regressão múltipla  $f_u \cdot (n2m2z)$

A última função analisada para este caso é tratada a seguir:

$$\begin{aligned}
 f_u &= 1,057n^2 + 0,964nm_y + 0,736m_y^2 - 1 = 0; \\
 f &= 1,000n^2 + 3,000snm_y + 2,250m_y^2 - 1 = 0
 \end{aligned}
 \tag{4.62}$$

<b>Observações</b>		
$n^2$	$m_y^2$	$nm_y$
0,742619	0,052138	0,196771
0,742619	0,052138	0,196770
0,765621	0,052608	0,200693
0,765621	0,052608	0,200693
0,857193	0,017921	0,123941
0,857193	0,017921	0,123941
0,010938	0,921614	0,100400
0,010938	0,921605	0,100400
0,041709	0,876574	0,191209
0,041709	0,876567	0,191209
0,561355	0,174862	0,313305
0,561357	0,174861	0,313304

Tabela 4.19: Observações n2m2za

Fonte	Soma de	Graus de	Média de		
de variação	quadrados	liberdade	quadrados	$f_0$	$P > f_0$
regressão	12,000	3	3,998	7832,928	0,000
Erro (resíduo)	0,000	9	0,001		
Total	12,000	12			
Prova dos coeficientes individuais					
Variáveis	Estimado	Erro	$t_0$	$P >  t_0 $	
$n^2$	1,057	0,02444	43,250	0,000	
$m_y^2$	0,964	0,01924	50,090	0,000	
$nm_y$	0,736	0,08699	8,460	0,000	

Tabela 4.20: Prova de significância -  $n^2m^2$

Pode-se ver que a superfície ( $f_u$ ) da equação (4.62) tem valores aproximados a equação (4.58), com diferenças similares a função proposta por (Crisfield, 1990).

As análises produzidas para tratar da interação entre o momento fletor e o esforço axial, demonstram que as melhores funções de interação obtidas foram as equações (4.55) e (4.59); e as menos eficazes foram as equações (4.57) e (4.61), porém, todas são soluções possíveis de serem usadas como funções de interação do ponto de vista estatístico. Foram testadas análises com os dados conjuntos das duas direções e verificou-se que pode-se propor uma média entre os valores das variáveis. Com isso, apresenta-se um resumo das médias das variáveis das funções analisadas no exemplo.

$n^2 \times m$

$$f_u = 1,007n^2 + 1,025m - 1 = 0 \quad (4.63)$$

$n \times m^2$

$$f_u = 1,063n + 0,907m^2 - 1 = 0 \quad (4.64)$$

$n^2 \times m^2$  desacoplado

$$f_u = 1,164n^2 + 1,127m^2 - 1 = 0 \quad (4.65)$$

$n^2 \times m^2$  acoplado

$$f_u = 1,035n^2 + 0,880nm + 0,812m^2 - 1 = 0 \quad (4.66)$$

### 4.6.2 Exemplo 4.6.2

Este exemplo trata da interação entre os esforços de momentos fletores ( $M_y$  e  $M_z$ ). Foram desenvolvidas quatro tipos de funções com a mudança nos índices  $\alpha$ . A seguir, são apresentadas as funções obtidas com seus respectivos resultados gráficos e estatísticos:

$$m_y \times m_z^2$$

- função obtida ( $f_u$ ) e a função da literatura ( $f$ ):

$$\begin{aligned} f_u &= 0,988m_y + 0,997m_z^2 - 1 = 0; \\ f &= 1,000m_y + 0,750m_z^2 - 1 = 0 \end{aligned} \quad (4.67)$$

- Observações, resultados estatísticos e gráfico comparativo:

Observações	
$m_y$	$m_z^2$
0,979123	0,000062
0,979123	0,000062
0,004588	0,944242
0,004588	0,944242
0,122253	0,921863
0,122253	0,921861
0,878150	0,122357
0,878150	0,122357
0,706076	0,342444
0,706076	0,342444
0,879105	0,140652
0,879105	0,140652

Tabela 4.21: Observações m1ym2z

A função  $f_u$  (eq. 4.67) apresenta bons resultados do ponto de vista estatístico (tab. 4.22), porém, uma considerável diferença no resultado da variável relacionada com  $m_z$ . Pode-se, ver na figura (4.32), que o comportamento da função obtida é mais conservador do que aquela da proposta por (Lubliner, 1990).

Fonte de variação	Soma de quadrados	Graus de liberdade	Média de quadrados	$f_0$	$P > f_0$
regressão	11,990	2	5,993	4115,619	0,000
Erro (resíduo)	0,010	10	0,001		
Total	12,000	12			
Prova dos coeficientes individuais					
Variáveis	Estimado	Erro	$t_0$	$P >  t_0 $	
$m_y$	0,9883	0,01603	61,640	0,000	
$m_z^2$	0,9974	0,02024	49,290	0,000	

Tabela 4.22: Prova de significância - m1ym2z

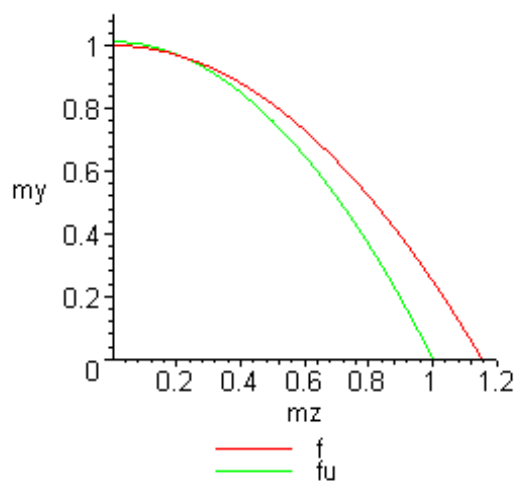


Figura 4.32: Comparação entre a função analítica  $f$  e a função obtida pela regressão múltipla  $f_u$ . (m1ym2z)

$$m_y^2 \times m_z$$

- função obtida ( $f_u$ ) e a função da literatura ( $f$ ):

$$\begin{aligned} f_u &= 0,911m_y^2 + 0,993m_z - 1 = 0; \\ f &= 0,750m_y^2 + 1,000m_z - 1 = 0 \end{aligned} \quad (4.68)$$

- Observações, resultados estatísticos e gráfico comparativo:

<b>Observações</b>	
$m_y^2$	$m_z$
0,958682	0,007872
0,958682	0,007872
0,000021	0,971721
0,000021	0,971721
0,014946	0,960137
0,014946	0,960136
0,771147	0,349796
0,771147	0,349796
0,498544	0,585187
0,498544	0,585187
0,772825	0,375037
0,772825	0,375037

Tabela 4.23: Observações m2ym1z

<b>Fonte de variação</b>	<b>Soma de quadrados</b>	<b>Graus de liberdade</b>	<b>Média de quadrados</b>	$f_0$	$\mathbf{P} > f_0$
regressão	11,950	2	5,974	1148,385	0,000
Erro (resíduo)	0,050	10	0,005		
Total	12,000	12			
<b>Prova dos coeficientes individuais</b>					
<b>Variáveis</b>	<b>Estimado</b>	<b>Erro</b>	$t_0$	$\mathbf{P} >  t_0 $	
$m_y^2$	0,9107	0,03561	25,570	0,000	
$m_z$	0,9931	0,03479	28,540	0,000	

Tabela 4.24: Prova de significância - m2ym1z



Observa-se que o comportamento da superfície ( $f_u$ ), na equação (4.68), é diferente da função proposta ( $f$ ) pela literatura em relação ao coeficiente de regressão obtido para  $m_y$ , porém, os resultados, do ponto de vista estatístico (tab. 4.24), são bons e o comportamento das duas direções são similares (ver eq. 4.67 e 4.68).

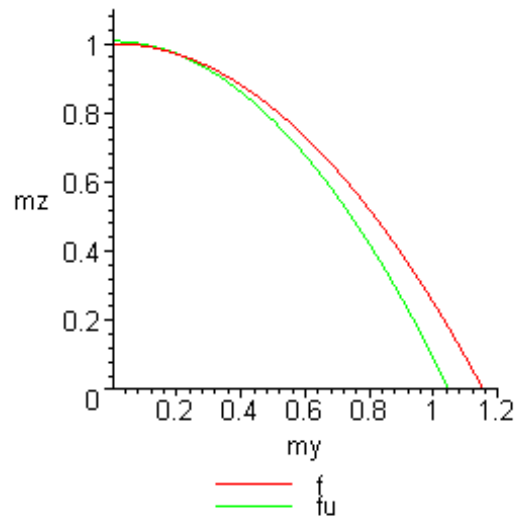


Figura 4.33: Comparação entre a função analítica  $f$  e a função obtida pela regressão múltipla  $f_u$ . ( $m_2 y m_1 z$ )

### $m_y^2 \times m_z^2$ desacoplado

- função obtida ( $f_u$ ):

$$f_u = 1,101m_y^2 + 1,080m_z^2 - 1 = 0 \quad (4.69)$$

- Observações, resultados estatísticos e gráfico comparativo:

Pode-se ver que a função ( $f_u$ ) da equação (4.69) apresenta um comportamento similar as obtidas com os outros coeficientes  $\alpha$  (eq. 4.67 e 4.68). Neste caso, não se encontrou uma função de comparação com a da literatura. Do ponto de vista estatístico (tab. 4.26), é uma boa função de acordo com os critérios  $f_0$  e  $t_0$  para o modelo proposto.

Observações	
$m_y^2$	$m_z^2$
0,958682	0,000062
0,958682	0,000062
0,000021	0,944242
0,000021	0,944242
0,014946	0,921863
0,014946	0,921861
0,771147	0,122357
0,771147	0,122357
0,498544	0,342444
0,498544	0,342444
0,772825	0,140652
0,772825	0,140652

Tabela 4.25: Observações  $m_2y_2m_2z$

Fonte de variação	Soma de quadrados	Graus de liberdade	Média de quadrados	$f_0$	$P > f_0$
regressão	11,980	2	5,989	2827,297	0,000
Erro (resíduo)	0,020	10	0,002		
Total	12,000	12			
Prova dos coeficientes individuais					
Variáveis	Estimado	Erro	$t_0$	$P >  t_0 $	
$m_y^2$	1,101	0,02155	51,070	0,000	
$m_z^2$	1,080	0,02406	44,890	0,000	

Tabela 4.26: Prova de significância -  $m_2y_2m_2z$

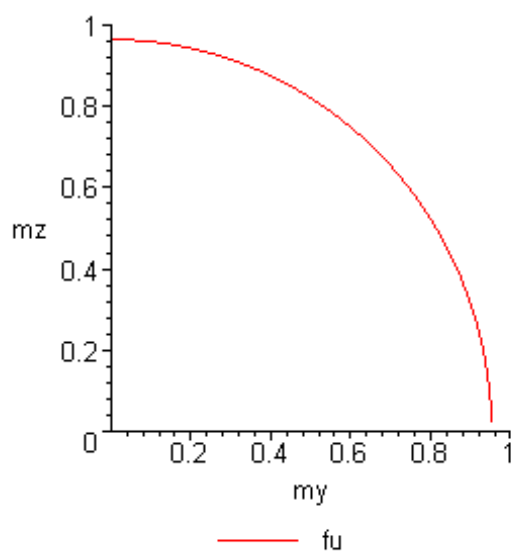


Figura 4.34: Função obtida pela regressão múltipla  $f_u.(m_2y_2m_2z)$

$m_y^2 \times m_z^2$  acoplado

- função obtida ( $f_u$ ) :

$$f_u = 1,032m_y^2 + 0,246m_y m_z + 1,050m_z^2 - 1 = 0 \quad (4.70)$$

- Observações e resultados estatísticos:

Observações		
$m_y^2$	$m_z^2$	$m_y m_z$
0,958682	0,000062	0,007707
0,958682	0,000062	0,007707
0,000021	0,944242	0,004459
0,000021	0,944242	0,004459
0,014946	0,921863	0,117379
0,014946	0,921861	0,117379
0,771147	0,122357	0,307173
0,771147	0,122357	0,307173
0,498544	0,342444	0,413187
0,498544	0,342444	0,413187
0,772825	0,140652	0,329696
0,772825	0,140652	0,329696

Tabela 4.27: Observações m2ym2za

Fonte	Soma de	Graus de	Média de		
de variação	quadrados	liberdade	quadrados	$f_0$	$P > f_0$
regressão	12,000	3	3,999	11500,019	0,000
Erro (resíduo)	0,000	9	0,000		
Total	12,000	12			
Prova dos coeficientes individuais					
Variáveis	Estimado	Erro	$t_0$	$P >  t_0 $	
$m_y^2$	1,032	0,01294	79,750	0,000	
$m_z^2$	1,050	0,01059	99,160	0,000	
$m_y m_z$	0,246	0,03415	7,210	0,000	

Tabela 4.28: Prova de significância - m2ym2za

Neste caso, a função ( $f_u$ ) da equação (4.70) possui resultados semelhantes as outras funções deste exemplo. Os resultados estatísticos (tab. 4.28) mostram que a função é uma boa solução de interação segundo os resultados de  $f_0$  e  $t_0$ .

Como conclusão deste exemplo, observa-se que as funções numéricas ( $f_u$ ) apresentam uma ligeira diferença das funções propostas ( $f$ ) na literatura, porém, deve-se comentar que o processo de análise é feito com um modelo 3D que pode determinar um comportamento mais próximo da realidade.

### 4.6.3 Exemplo 4.6.3

Este exemplo, trata da análise de funções de interação para os esforços seccionais axial ( $n$ ) e flexão ( $m_i, i = y, z$ ). O elemento de barra usado é mesmo da figura (4.25) com as propriedades apresentadas anteriormente. As funções são testadas com mudanças nos índices  $\alpha$ . As observações, gráficos e resultados são apresentados, a seguir:

$n \times m_y \times m_z$

- função obtida ( $f_u$ ):

$$f_u = 0,8477n + 0,7425m_y + 0,7106m_z - 1 = 0 \quad (4.71)$$

- Observações e resultados estatísticos:

Fonte	Soma de	Graus de	Média de		
de variação	quadrados	liberdade	quadrados	$f_0$	$P > f_0$
regressão	23,690	3	7,897	538,969	0,000
Erro (resíduo)	0,310	21	0,015		
Total	24,000	24			
Prova dos coeficientes individuais					
Variáveis	Estimado	Erro	$t_0$	$P >  t_0 $	
$n$	0,8477	0,05470	15,500	0,000	
$m_y$	0,7425	0,05456	13,610	0,000	
$m_z$	0,7106	0,05318	13,360	0,000	

Tabela 4.29: Prova de significância - nmymz

Esta função apresenta bons resultados estatísticos levando em conta os valores de  $f_0$  e  $t_0$  (tabela 4.29), porém, percebe-se que a influência dos coeficientes individuais ( $t_0$ ) das variáveis da função é menor em relação as outras análises desenvolvidas para este tipo de interação. Não foi encontrada uma função de comparação a esta na literatura.

<b>Observações</b>		
$n$	$m_y$	$m_z$
0,846057	0,245771	0,188677
0,846058	0,245769	0,188676
0,908374	0,152718	0,125486
0,908375	0,152718	0,125486
0,430280	0,791846	0,120942
0,430283	0,791846	0,120942
0,238751	0,922278	0,052421
0,238754	0,922278	0,052420
0,270279	0,334609	0,828416
0,270281	0,334609	0,828416
0,259675	0,034786	0,912602
0,259678	0,034786	0,912600
0,266699	0,707068	0,523504
0,266700	0,707068	0,523504
0,457522	0,350399	0,685914
0,457525	0,350398	0,685913
0,679599	0,336442	0,436955
0,679601	0,336441	0,436953
0,991131	0,015531	0,013696
0,991131	0,015531	0,013695
0,130119	0,023698	0,975252
0,130120	0,023699	0,975252
0,120685	0,978113	0,014930
0,120686	0,978113	0,014930

Tabela 4.30: Observações nmymz

$n^2 \times m_y^2 \times m_z^2$  desacoplado

- função obtida ( $f_u$ ):

$$f_u = 1,158n^2 + 1,118m_y^2 + 1,124m_z^2 - 1 = 0 \quad (4.72)$$

- Observações e resultados estatísticos:

<b>Observações</b>		
$n^2$	$m_y^2$	$m_z^2$
0,715812	0,060403	0,035599
0,715814	0,060403	0,035599
0,825144	0,023323	0,015747
0,825146	0,023323	0,015747
0,185141	0,627021	0,014627
0,185143	0,627021	0,014627
0,057002	0,850597	0,002748
0,057003	0,850597	0,002748
0,073051	0,111963	0,686273
0,073052	0,111963	0,686273
0,067431	0,001210	0,832842
0,067432	0,001210	0,832840
0,071128	0,499946	0,274056
0,071129	0,499946	0,274056
0,209327	0,122780	0,470478
0,209329	0,122779	0,470476
0,461855	0,113193	0,190930
0,461857	0,113193	0,190928
0,982341	0,000241	0,000188
0,982341	0,000241	0,000188
0,016931	0,000562	0,951116
0,016931	0,000562	0,951116
0,014565	0,956704	0,000223
0,014565	0,956704	0,000223

Tabela 4.31: Observações  $n^2 m_y^2 m_z^2$

Fonte	Soma de	Graus de	Média de		
de variação	quadrados	liberdade	quadrados	$f_0$	$\mathbf{P} > f_0$
regressão	23,860	3	7,953	1183,674	0,000
Erro (resíduo)	0,140	21	0,007		
Total	24,000	24			
Prova dos coeficientes individuais					
Variáveis	Estimado	Erro	$t_0$	$\mathbf{P} >  t_0 $	
$n^2$	1,158	0,03767	30,740	0,000	
$m_y^2$	1,118	0,03868	28,900	0,000	
$m_z^2$	1,124	0,03805	29,530	0,000	

Tabela 4.32: Prova de significância -  $n^2m_y^2m_z^2$

A função ( $f_u$ ) da equação (4.72) apresenta bons resultados, do ponto de vista estatístico (para  $f_0$  e  $t_0$ ), que são melhores que os resultados para a função da equação (4.71).

$n^2 \times m_y^2 \times m_z^2$  acoplado

- funções obtidas ( $f_u$ ):

$$f_u = 1,014n^2 + 0,966m_y^2 + 0,982m_z^2 + 0,506nm_y + 0,404nm_z + 0,038m_y m_z - 1 = 0 \implies \quad (4.73)$$

$$\implies f_u = 1,010n^2 + 0,968m_y^2 + 0,981m_z^2 + 0,514nm_y + 0,430nm_z - 1 = 0 \quad (4.74)$$

- Observações e resultados estatísticos:

A função da equação (4.73), obtida com coeficientes acoplados, permite observar a importância dos coeficientes numa superfície gerada. Percebe-se que a variável  $m_y m_z$  tem pouca importância no modelo, segundo os dados estatísticos ( $t_0$ ), embora, ainda possa ser utilizada (tabela 4.33). A função da equação (4.74) não possui a variável  $m_y m_z$  e obteve resultados estatísticos (tab. 4.34) semelhantes ao apresentado na equação (4.73). Com isso, a equação que melhor trata este tipo de função é a equação (4.74).

Fonte	Soma de	Graus de	Média de		
de variação	quadrados	liberdade	quadrados	$f_0$	$P > f_0$
regressão	24,000	6	4,000	53308,230	0,000
Erro (resíduo)	0,000	18	0,000		
Total	24,000	24			
Prova dos coeficientes individuais					
Variáveis	Estimado	Erro	$t_0$	$P >  t_0 $	
$n^2$	1,014	0,00552	183,500	0,000	
$m_y^2$	0,966	0,00806	119,800	0,000	
$m_z^2$	0,982	0,00795	123,500	0,000	
$nm_y$	0,506	0,02951	17,100	0,000	
$nm_z$	0,404	0,03146	12,800	0,000	
$m_y m_z$	0,038	0,01980	1,900	0,000	

Tabela 4.33: Prova de significância - n2m2ym2za

Fonte	Soma de	Graus de	Média de		
de variação	quadrados	liberdade	quadrados	$f_0$	$P > f_0$
regressão	24,000	5	4,800	55913,754	0,000
Erro (resíduo)	0,000	19	0,000		
Total	24,000	24			
Prova dos coeficientes individuais					
Variáveis	Estimado	Erro	$t_0$	$P >  t_0 $	
$n^2$	1,010	0,00563	179,500	0,000	
$m_y^2$	0,968	0,00856	113,100	0,000	
$m_z^2$	0,981	0,00849	115,500	0,000	
$nm_y$	0,514	0,03122	16,500	0,000	
$nm_z$	0,430	0,03052	14,100	0,000	

Tabela 4.34: Prova de significância - n2m2ym2za1

Por este exemplo, pode-se concluir que a formulação proposta permite analisar qual é o melhor tipo de função levando em conta a análise dos coeficientes individuais de regressão.



<b>Observações</b>					
$n^2$	$m_y^2$	$m_z^2$	$nm_y$	$nm_z$	$m_y m_z$
0,715812	0,060403	0,035599	0,207936	0,159632	0,046371
0,715814	0,060403	0,035599	0,207935	0,159631	0,046371
0,825144	0,023323	0,015747	0,138725	0,113988	0,019164
0,825146	0,023323	0,015747	0,138725	0,113988	0,019164
0,185141	0,627021	0,014627	0,340716	0,052039	0,095768
0,185143	0,627021	0,014627	0,340718	0,052039	0,095768
0,057002	0,850597	0,002748	0,220195	0,012516	0,048346
0,057003	0,850597	0,002748	0,220197	0,012516	0,048346
0,073051	0,111963	0,686273	0,090438	0,223903	0,277195
0,073052	0,111963	0,686273	0,090439	0,223906	0,277195
0,067431	0,001210	0,832842	0,009033	0,236980	0,031746
0,067432	0,001210	0,832840	0,009033	0,236982	0,031746
0,071128	0,499946	0,274056	0,188574	0,139618	0,370153
0,071129	0,499946	0,274056	0,188575	0,139618	0,370153
0,209327	0,122780	0,470478	0,160316	0,313821	0,240344
0,209329	0,122779	0,470476	0,160316	0,313822	0,240342
0,461855	0,113193	0,190930	0,228646	0,296954	0,147010
0,461857	0,113193	0,190928	0,228646	0,296953	0,147009
0,982341	0,000241	0,000188	0,015393	0,013574	0,000213
0,982341	0,000241	0,000188	0,015393	0,013574	0,000213
0,016931	0,000562	0,951116	0,003084	0,126899	0,023112
0,016931	0,000562	0,951116	0,003084	0,126900	0,023112
0,014565	0,956704	0,000223	0,118044	0,001802	0,014603
0,014565	0,956704	0,000223	0,118045	0,001802	0,014604

Tabela 4.35: Observações  $n^2 m_y^2 m_z^2$

#### 4.6.4 Exemplo 4.6.4

Este exemplo, trata da análise de funções de interação ( $f_u$ ) para os esforços seccionais: axial ( $n$ ), flexão ( $m_z, m_y$ ) e torção ( $m_x$ ). As funções são propostas com mudanças nos índices  $\alpha$ , de maneira a testar a solução numérica com funções existentes na literatura. As observações, gráficos e resultados são apresentados, a seguir:

$$n^2 \times m_x \times m_z$$

- função obtida ( $f_u$ ):

$$f_u = 0,7288n^2 + 0,8596m_x + 0,6483m_z - 1 = 0 \quad (4.75)$$

- Observações e resultados estatísticos:

Fonte de variação	Soma de quadrados	Graus de liberdade	Média de quadrados	$f_0$	$P > f_0$
regressão	23,940	3	7,981	2927,690	0,000
Erro (resíduo)	0,060	21	0,003		
Total	24,000	24			
Prova dos coeficientes individuais					
Variáveis	Estimado	Erro	$t_0$	$P >  t_0 $	
$n^2$	0,7288	0,03544	20,560	0,000	
$m_x$	0,8596	0,02534	33,920	0,000	
$m_z$	0,6483	0,02746	23,610	0,000	

Tabela 4.36: Prova de significância -  $n^2 m_x m_z$

A função da equação (4.75) apresenta bons resultados estatísticos para  $f_0$  e  $t_0$  (tabela 4.36), e todas variáveis são importantes para este tipo de função. Não foi encontrada uma função de comparação a esta na literatura.

<b>Observações</b>		
$n^2$	$m_x$	$m_z$
0,864978	0,378308	0,020133
0,864978	0,378308	0,020133
0,774057	0,487261	0,030647
0,774057	0,487261	0,030647
0,510938	0,702317	0,074719
0,510938	0,702317	0,074718
0,358073	0,798038	0,080843
0,358073	0,798038	0,080842
0,161891	0,897001	0,104829
0,161891	0,897001	0,104829
0,064312	0,938860	0,115881
0,064312	0,938860	0,115880
0,088467	0,892814	0,301478
0,088467	0,892814	0,301476
0,201315	0,713431	0,508560
0,201316	0,713432	0,508558
0,136157	0,665575	0,634905
0,136158	0,665577	0,634902
0,111851	0,386094	0,827158
0,111851	0,386096	0,827157
0,040078	0,440866	0,878608
0,040079	0,440867	0,878606
0,031311	0,415227	0,898188
0,031312	0,415228	0,898187

Tabela 4.37: Observações  $n^2 m_x m_z$

$n^2 \times m_x^2 \times m_z^2$  acoplado

- função obtida ( $f_u$ ) e da literatura ( $f$ ):

$$\begin{aligned} f_u &= 0,970n^2 + 1,017m_x^2 + 0,953m_z^2 + 0,208nm_z - 1 = 0; \\ f &= 1,000n^2 + 1,000m_x^2 + 1,000m_z^2 + 2,000nm_z - 1 = 0 \end{aligned} \quad (4.76)$$

- Observações e resultados estatísticos:

Fonte de variação	Soma de quadrados	Graus de liberdade	Média de quadrados	$f_0$	$P > f_0$
regressão	24,000	4	5,999	25977,986	0,000
Erro (resíduo)	0,000	20	0,000		
Total	24,000	24			
Prova dos coeficientes individuais					
Variáveis	Estimado	Erro	$t_0$	$P >  t_0 $	
$n^2$	0,9700	0,00924	105,000	0,000	
$m_x^2$	1,0170	0,00834	122,000	0,000	
$m_z^2$	0,9530	0,01755	54,300	0,000	
$nm_z$	0,2080	0,05565	3,700	0,000	

Tabela 4.38: Prova de significância -  $n^2m_x^2m_z^2$

A função ( $f_u$ ) da equação (4.76) é comparada com a função ( $f$ ) apresentada por (Lubliner, 1990). A função ( $f_u$ ) apresenta comportamento semelhante a ( $f$ ) para todas as variáveis, com exceção da variável  $nm_z$ . Os resultados estatísticos para  $t_0$  (tabela 4.38) demonstram que a variável  $nm_z$  é menos importante que as demais, porém, pode ser usada como uma variável da superfície.

<b>Observações</b>			
$n^2$	$m_x$	$m_z$	$nm_z$
0,864978	0,143117	0,000405	0,018725
0,864978	0,143117	0,000405	0,018725
0,774057	0,237424	0,000939	0,026964
0,774057	0,237424	0,000939	0,026964
0,510938	0,493249	0,005583	0,053409
0,510938	0,493249	0,005583	0,053409
0,358073	0,636865	0,006536	0,048376
0,358073	0,636865	0,006535	0,048375
0,161891	0,804612	0,010989	0,042179
0,161891	0,804612	0,010989	0,042179
0,064312	0,881458	0,013428	0,029387
0,064312	0,881458	0,013428	0,029387
0,088467	0,797117	0,090889	0,089670
0,088467	0,797117	0,090888	0,089669
0,201315	0,508984	0,258634	0,228182
0,201316	0,508986	0,258631	0,228181
0,136157	0,442990	0,403105	0,234276
0,136158	0,442993	0,403100	0,234276
0,111851	0,149069	0,684191	0,276635
0,111851	0,149070	0,684189	0,276636
0,040078	0,194362	0,771951	0,175893
0,040079	0,194364	0,771949	0,175895
0,031311	0,172413	0,806742	0,158934
0,031312	0,172414	0,806739	0,158935

Tabela 4.39: Observações  $n^2m_xm_z$

$n^2 \times m_x^2 \times m_y^2$  acoplado

- função obtida ( $f_u$ ) e da literatura ( $f$ ):

$$\begin{aligned} f_u &= 1,110n^2 + 1,014m_x^2 + 0,978m_y^2 + 0,355nm_y - 1 = 0; \\ f &= 1,000n^2 + 1,000m_x^2 + 1,000m_y^2 + 2,000nm_y - 1 = 0 \end{aligned} \quad (4.77)$$

- Observações e resultados estatísticos:

Fonte de variação	Soma de quadrados	Graus de liberdade	Média de quadrados	$f_0$	$P > f_0$
regressão	23,980	4	5,995	6578,594	0,000
Erro (resíduo)	0,020	20	0,001		
Total	24,000	24			
Prova dos coeficientes individuais					
Variáveis	Estimado	Erro	$t_0$	$P >  t_0 $	
$n^2$	1,1100	0,02998	37,020	0,000	
$m_x^2$	1,0140	0,01471	68,970	0,000	
$m_y^2$	0,9780	0,02675	36,570	0,000	
$nm_y$	0,3550	0,08282	4,280	0,000	

Tabela 4.40: Prova de significância -  $n^2m_x^2m_y^2$

A função ( $f_u$ ) da equação (4.77) possui comportamento semelhante a função da equação (4.76) com bons resultados estatísticos (tabela 4.40). Foram testadas as duas direções ( $y$  e  $z$ ) para a análise do comportamento. Novamente, os resultados estatísticos ( $f_0$  e  $t_0$ ) demonstram que a variável  $nm_z$  é menos importante que as demais.

Observações			
$n^2$	$m_x$	$m_y$	$nm_y$
0,054228	0,191835	0,699237	0,194725
0,054228	0,191836	0,699237	0,194726
0,158020	0,426151	0,342316	0,232579
0,158020	0,426152	0,342314	0,232578
0,014670	0,054859	0,908849	0,115467
0,014670	0,054860	0,908849	0,115468
0,686985	0,022074	0,084720	0,241249
0,686987	0,022074	0,084719	0,241248
0,835873	0,012159	0,023102	0,138962
0,835875	0,012159	0,023102	0,138962
0,031828	0,738424	0,188445	0,077446
0,031828	0,738436	0,188444	0,077445
0,019877	0,807902	0,126109	0,050067
0,019877	0,807915	0,126108	0,050067
0,263109	0,120172	0,442100	0,341058
0,263111	0,120172	0,442100	0,341059
0,191688	0,562397	0,190625	0,191156
0,191688	0,562397	0,190624	0,191155
0,110991	0,047332	0,734864	0,285593
0,110993	0,047332	0,734864	0,285595
0,025360	0,904863	0,015973	0,020127
0,025360	0,904863	0,015973	0,020127
0,449859	0,363248	0,105020	0,217357
0,449861	0,363248	0,105019	0,217356

Tabela 4.41: Observações  $n^2 \times m_x \times m_y$

Como conclusão das funções apresentadas neste exemplo até o presente momento, percebe-se que as funções ( $f_u$ ) das equações (4.76) e (4.77) são semelhantes nos resultados e possuem poucas diferenças em relação a função ( $f$ ) proposta por Lubliner. A função da equação (4.75), também, pode ser aplicada como uma função de interação para futuros testes de aplicabilidade.

$m_x \times m_i$  com  $i = \{y, z\}$

São apresentadas as funções nas direções  $x$  e  $y$ , a seguir:

$m_x^2 \times m_y^2$

- função obtida ( $f_u$ ):

$$f_u = 1,060m_x^2 + 1,013m_y^2 - 1 = 0 \quad (4.78)$$

- Observações e resultados estatísticos:

Fonte	Soma de	Graus de	Média de		
de variação	quadrados	liberdade	quadrados	$f_0$	$P > f_0$
regressão	12,000	2	6,000	82728,297	0,000
Erro (resíduo)	0,000	10	0,000		
Total	12,000	12			
Prova dos coeficientes individuais					
Variáveis	Estimado	Erro	$t_0$	$P >  t_0 $	
$m_x^2$	1,0600	0,00381	277,900	0,000	
$m_y^2$	1,0130	0,00572	177,200	0,000	

Tabela 4.42: Prova de significância - m2xm2y

Observações	
$m_x^2$	$m_y^2$
0,893420	0,047979
0,893420	0,047978
0,935097	0,001847
0,935097	0,001847
0,767741	0,186188
0,767741	0,186187
0,625096	0,341180
0,625107	0,341177
0,458548	0,518993
0,458552	0,518993
0,052466	0,923234
0,052466	0,923234

Tabela 4.43: Observações m2xm2y



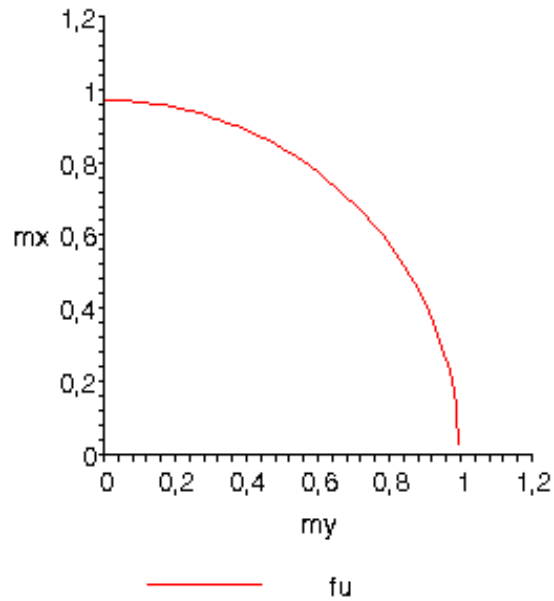


Figura 4.35: Função obtida pela regressão múltipla  $f_u$ . ( $m_x \times m_y^2$ )

$m_x \times m_y^2$

- função obtida ( $f_u$ ):

$$f_u = 0,9841m_x + 0,7788m_y^2 - 1 = 0 \tag{4.79}$$

- Observações e resultados estatísticos:

Fonte de variação	Soma de quadrados	Graus de liberdade	Média de quadrados	$f_0$	$\mathbf{P} > f_0$
regressão	11,970	2	5,987	2251,315	0,000
Erro (resíduo)	0,030	10	0,003		
Total	12,000	12			
Prova dos coeficientes individuais					
Variáveis	Estimado	Erro	$t_0$	$\mathbf{P} >  t_0 $	
$m_x$	0,9841	0,02149	45,800	0,000	
$m_y^2$	0,7788	0,03677	21,180	0,000	

Tabela 4.44: Prova de significância -  $m_x m_y^2$

Observações	
$m_x$	$m_y^2$
0,945209	0,047979
0,945209	0,047978
0,967004	0,001847
0,967004	0,001847
0,876208	0,186188
0,876208	0,186187
0,790630	0,341180
0,790637	0,341177
0,677162	0,518993
0,677165	0,518993
0,229054	0,923234
0,229055	0,923234

Tabela 4.45: Observações  $m_x m_y^2$

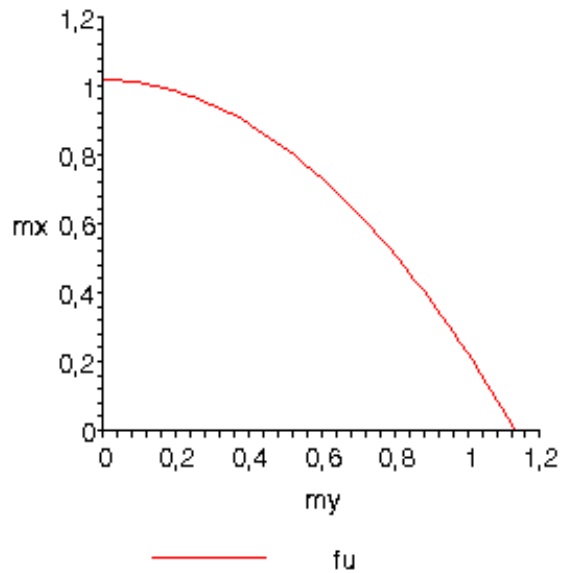


Figura 4.36: Função obtida pela regressão múltipla  $f_u$ . ( $m_x m_y^2$ )

$m_x^2 \times m_y$

- função obtida ( $f_u$ ):

$$f_u = 0,8988m_x^2 + 0,8808m_y - 1 = 0 \quad (4.80)$$

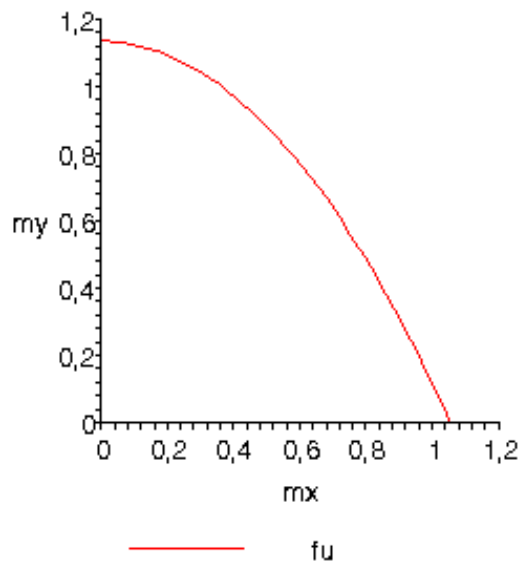


Figura 4.37: Função obtida pela regressão múltipla  $f_u$ . ( $m_x m_y$ )

- Observações e resultados estatísticos:

Fonte de variação	Soma de quadrados	Graus de liberdade	Média de quadrados	$f_0$	$P > f_0$
regressão	11,920	2	5,961	762,450	0,000
Erro (resíduo)	0,080	10	0,008		
Total	12,000	12			
Prova dos coeficientes individuais					
Variáveis	Estimado	Erro	$t_0$	$P >  t_0 $	
$m_x^2$	0,8988	0,04408	20,390	0,000	
$m_y$	0,8808	0,05251	16,770	0,000	

Tabela 4.46: Prova de significância -  $m_x m_y$

<b>Observações</b>	
$m_x^2$	$m_y$
0,893420	0,219041
0,893420	0,219040
0,935097	0,042973
0,935097	0,042973
0,767741	0,431496
0,767741	0,431494
0,625096	0,584107
0,625107	0,584103
0,458548	0,720412
0,458552	0,720412
0,052466	0,960851
0,052466	0,960851

Tabela 4.47: Observações  $m_x^2 \times m_y$

$m_x^2 \times m_z^2$

- função obtida ( $f_u$ ):

$$f_u = 1,0360m_x^2 + 0,9580m_z^2 - 1 = 0 \quad (4.81)$$

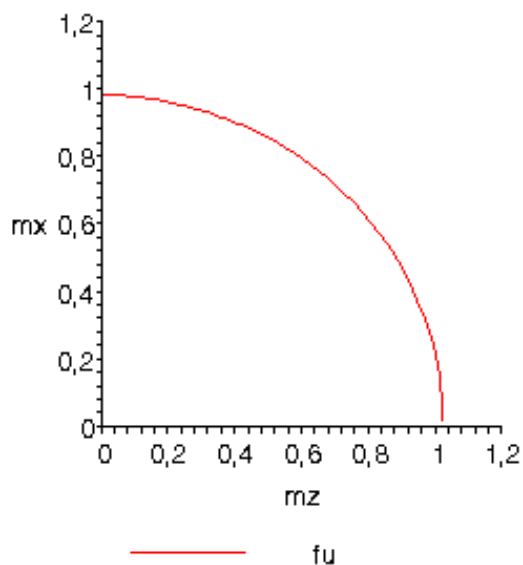


Figura 4.38: Função obtida pela regressão múltipla  $f_u$ . ( $m_x \times m_z$ )

- Observações e resultados estatísticos:

Fonte de variação	Soma de quadrados	Graus de liberdade	Média de quadrados	$f_0$	$P > f_0$
regressão	11,990	2	5,996	7710,186	0,000
Erro (resíduo)	0,010	10	0,001		
Total	12,000	12			
Prova dos coeficientes individuais					
Variáveis	Estimado	Erro	$t_0$	$P >  t_0 $	
$m_x^2$	1,0360	0,01270	81,600	0,000	
$m_z^2$	0,9580	0,01629	58,820	0,000	

Tabela 4.48: Prova de significância -  $m_x \times m_z$

$m_x \times m_z^2$

- função obtida ( $f_u$ ):

$$f_u = 0,9771m_x + 0,7183m_z^2 - 1 = 0 \quad (4.82)$$

Observações	
$m_x^2$	$m_z^2$
0,263347	0,783633
0,263350	0,783631
0,066288	0,936100
0,066288	0,936100
0,759372	0,240068
0,759385	0,240065
0,674547	0,346292
0,674547	0,346289
0,886546	0,070495
0,886546	0,070493
0,929154	0,010814
0,929154	0,010814

Tabela 4.49: Observações  $m_x^2$  vs  $m_z^2$

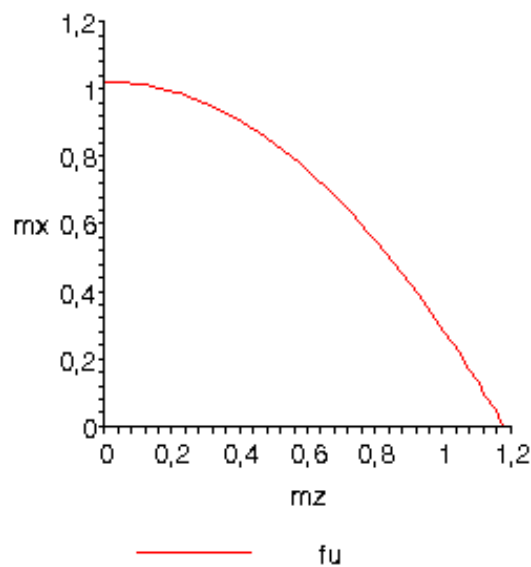


Figura 4.39: Função obtida pela regressão múltipla  $f_u$ . ( $m_x$  vs  $m_z$ )

Fonte de variação	Soma de quadrados	Graus de liberdade	Média de quadrados	$f_0$	$P > f_0$
regressão	11,970	2	5,983	1811,722	0,000
Erro (resíduo)	0,030	10	0,003		
Total	12,000	12			
Prova dos coeficientes individuais					
Variáveis	Estimado	Erro	$t_0$	$P >  t_0 $	
$m_x$	0,9771	0,02474	39,500	0,000	
$m_z^2$	0,7183	0,03618	19,850	0,000	

Tabela 4.50: Prova de significância -  $m_x$  vs  $m_z$

- Observações e resultados estatísticos:

<b>Observações</b>	
$m_x$	$m_z^2$
0,513174	0,783633
0,513176	0,783631
0,257464	0,936100
0,257466	0,936100
0,871420	0,240068
0,871427	0,240065
0,821308	0,346292
0,821308	0,346289
0,941566	0,070495
0,941566	0,070493
0,963926	0,010814
0,963926	0,010814

Tabela 4.51: Observações mxm2z

$m_x^2 \times m_z$

- função obtida ( $f_u$ )

$$f_u = 0,8504m_x^2 + 0,8845m_z - 1 = 0 \quad (4.83)$$

- Observações e resultados estatísticos:

As funções ( $f_u$ ) das equações (4.78) a (4.83) são boas soluções para a interação *fletor*  $\times$  *torçor*, sendo que as equações (4.78) e (4.81) apresentam-se como as melhores do ponto de vista estatístico ( $f_0$  e  $t_0$ ).

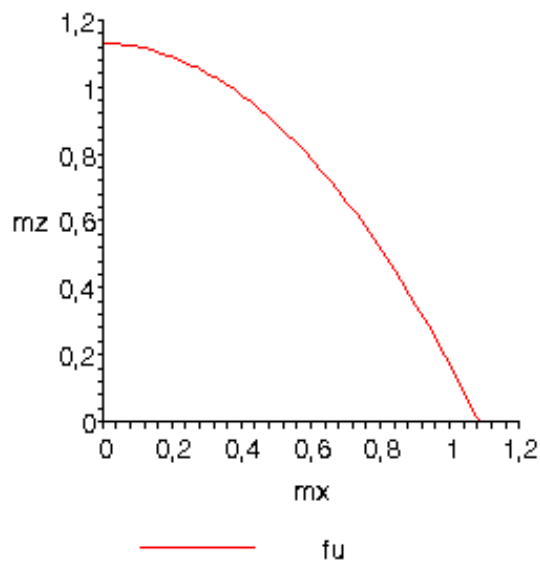


Figura 4.40: Função obtida pela regressão múltipla  $f_u(m_2xmz)$

Fonte de variação	Soma de quadrados	Graus de liberdade	Média de quadrados	$f_0$	$P > f_0$
regressão	11,930	2	5,963	807,762	0,000
Erro (resíduo)	0,070	10	0,007		
Total	12,000	12			
Prova dos coeficientes individuais					
Variáveis	Estimado	Erro	$t_0$	$P >  t_0 $	
$m_x^2$	0,8504	0,04367	19,470	0,000	
$m_z$	0,8845	0,04691	18,860	0,000	

Tabela 4.52: Prova de significância -  $m_2xmz$

Observações	
$m_x^2$	$m_z$
0,263347	0,885230
0,263350	0,885229
0,066288	0,967522
0,066288	0,967522
0,759372	0,489967
0,759385	0,489965
0,674547	0,588466
0,674547	0,588463
0,886546	0,265508
0,886546	0,265506
0,929154	0,103992
0,929154	0,103991

Tabela 4.53: Observações  $m_2xmz$



### 4.6.5 Exemplo 4.6.5

Este exemplo, trata da análise de funções de interação para os esforços seccionais de flexão ( $m_i$ ) e cortante  $f_i$  com  $i = \{y, z\}$ . As funções são propostas com mudanças nos índices  $\alpha$ , de maneira a testar a solução numérica ( $f_u$ ) com funções existentes na literatura ( $f$ ).

$$f_y^2 \times m_z^2$$

- função obtida ( $f_u$ ) e da literatura ( $f$ ):

$$\begin{aligned} f &= 1,0000f_y^2 + 1,0000m_z^2 - 1 = 0 \\ f_u &= 0,8210f_y^2 + 1,0140m_z^2 - 1 = 0 \end{aligned} \quad (4.84)$$

- Observações e resultados estatísticos:

Fonte de variação	Soma de quadrados	Graus de liberdade	Média de quadrados	$f_0$	$\mathbf{P} > f_0$
regressão	23,940	2	11,970	4537,444	0,000
Erro (resíduo)	0,060	22	0,000		
Total	24,000	24			
Prova dos coeficientes individuais					
Variáveis	Estimado	Erro	$t_0$	$\mathbf{P} >  t_0 $	
$f_y^2$	0,8210	0,01711	47,990	0,000	
$m_z^2$	1,0140	0,01543	65,750	0,000	

Tabela 4.54: Prova de significância -  $f_y^2 m_z^2$

$$f_y^2 \times m_z$$

- função obtida ( $f_u$ ) e da literatura ( $f$ ):

$$\begin{aligned} f_u &= 0,5480f_y^2 + 1,0020m_z - 1 = 0 \\ f_1 &= \frac{3}{4}f_y^2 + 1,0000m_z - 1 = 0 \\ f_2 &= 1,0000f_y^2 + 1,0000m_z - 1 = 0 \end{aligned} \quad (4.85)$$

Observações			
$f_y^2$	$m_z^2$	$f_y^2$	$m_z^2$
0,950340	0,283080	0,950320	0,283110
0,972240	0,253220	0,972220	0,253250
0,950340	0,283090	0,033533	0,982750
0,972230	0,253230	0,033584	0,939450
0,033528	0,982750	0,335330	0,982750
0,033590	0,939450	0,335830	0,939440
0,033530	0,982750	0,832850	0,252880
0,033587	0,939440	0,843020	0,224090
0,832860	0,252840	0,33803E - 03	0,995870
0,843030	0,224060	0,33889E - 03	0,963350
0,832860	0,252850	0,33804E - 03	0,995870
0,843020	0,224060	0,33889E - 03	0,963370

Tabela 4.55: Observações f2ym2z

Neste exemplo, foram encontradas duas funções  $f_1$  e  $f_2$  (ver equação 4.85) de comparação, na literatura (Mrázik et al, 1987).

- Observações e resultados estatísticos:

Fonte de variação	Soma de quadrados	Graus de liberdade	Média de quadrados	$f_0$	$\mathbf{P} > f_0$
regressão	19,970	2	9,985	5849,316	0,000
Erro (resíduo)	0,030	18	0,002		
Total	20,000	20			
Prova dos coeficientes individuais					
Variáveis	Estimado	Erro	$t_0$	$\mathbf{P} >  t_0 $	
$f_y^2$	0,5480	0,01592	34,400	0,000	
$m_z$	1,0020	0,01519	66,000	0,000	

Tabela 4.56: Prova de significância - fym2z

<b>Observações</b>			
$f_y^2$	$m_z$	$f_y^2$	$m_z$
0,950340	0,532060	0,950320	0,532080
0,972240	0,503210	0,972220	0,503240
0,950340	0,532060	0,33533E - 01	0,991340
0,972230	0,503220	0,33584E - 01	0,969250
0,33528E - 01	0,991340	0,33533E - 01	0,991340
0,33590E - 01	0,969250	0,33583E - 01	0,969250
0,33530E - 01	0,991340	0,832850	0,502870
0,33587E - 01	0,969240	0,843020	0,473380
0,832860	0,502840		
0,843030	0,473350		
0,832860	0,502840		
0,843020	0,473350		

Tabela 4.57: Observações f2ymz

Os resultados obtidos para as funções ( $f_u$ ) pelo método apresentado foram aproximados dos existentes na literatura consultado (ver equações 4.84 e 4.85), porém, estatisticamente (ver tabelas 4.54 e 4.56) são funções utilizáveis de acordo com os coeficientes  $f_0$  e  $t_0$  para a análise de interação fletor e cortante.

## Capítulo 5

# ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE ESTRUTURAS AORTICADAS

São feitas aplicações baseadas na teoria da elastoelasticidade em estruturas aorticadas com o objetivo de analisar o comportamento das superfícies geradas. A seguir é mostrada a teoria envolvida com a utilização de superfícies em resultantes de tensão.

Uma superfície de interação define o estado último de uma seção transversal e depende dos seguintes fatores:

1. Forma geométrica da seção transversal;
2. Combinação dos esforços seccionais que atuam na seção transversal;
3. Teoria de viga utilizada.

Encontram-se soluções analíticas fechadas para determinados tipos de seções (I, Retangular, etc) com casos especiais de combinações de esforços, tais como momentos fletores e esforço normal (Horne, 1972), (Neal, 1977). Neste trabalho, assume-se uma superfície descrita em função dos esforços seccionais, (Silva, 2004), baseada na equação (ver eq.5.1), apresentada com as seguintes combinações de esforços seccionais:

$$f = \beta_1 \left( \frac{|F_x|}{F_{x_p}} \right)^{\alpha_1} + \beta_2 \left( \frac{|F_y|}{F_{y_p}} \right)^{\alpha_2} + \beta_3 \left( \frac{|F_z|}{F_{z_p}} \right)^{\alpha_3} + \beta_4 \left( \frac{|M_x|}{M_{x_p}} \right)^{\alpha_4} + \beta_5 \left( \frac{|M_y|}{M_{y_p}} \right)^{\alpha_5} \\ + \beta_6 \left( \frac{|M_z|}{M_{z_p}} \right)^{\alpha_6} + \beta_7 \left( \frac{|F_x|}{F_{x_p}} \right)^{\alpha_7} \left( \frac{|M_y|}{M_{y_p}} \right)^{\alpha_8} + \beta_8 \left( \frac{|F_x|}{F_{x_p}} \right)^{\alpha_9} \left( \frac{|M_z|}{M_{z_p}} \right)^{\alpha_{10}} - 1 = 0 \quad (5.1)$$

onde  $F_x$  é o esforço axial,  $F_y$  e  $F_z$  são os esforços cortantes,  $M_x$  é o momento torçor e,  $M_y$  e  $M_z$  são os momentos fletores.  $F_{x_p}$  é o esforço normal de plastificação puro,  $F_{y_p}$  e  $F_{z_p}$  são os esforços cortantes de plastificação puros,  $M_{x_p}$  é o momento torçor de plastificação puro,  $M_{y_p}$  e  $M_{z_p}$  são os momentos fletores de plastificação puros. As constantes  $\beta_i$  reais positivas são

obtidas de observações oriundas das análises do modelo de dano em viga de Timoshenko 3D que levam em conta as propriedades da forma geométrica da seção transversal. Os expoentes  $\alpha_i \geq 1$  são arbitrados em função do tipo de função desejada. Dentro do contexto da análise elastoplástica (Silva, 2004) perfeita de estruturas considera-se que:

1. Os esforços seccionais contidos no interior da superfície de interação geram somente deformações elásticas;
2. Os esforços seccionais que estejam na superfície de interação geram deformações plásticas;
3. Os esforços seccionais fora da superfície de interação representam estados de tensões inadmissíveis porque não se leva em conta o caso do endurecimento.

Durante o processo de aplicação do carregamento em passos de carga os esforços seccionais em alguns nós dos elementos da estrutura poderão sair da superfície de interação. Para trazer estes esforços seccionais de volta a superfície utiliza-se o método de Backward Euler que necessita das derivadas primeira e segunda da superfície em relação aos esforços seccionais.

## 5.1 DERIVADAS DE PRIMEIRA ORDEM

Baseado na equação (5.1), obtém -se as derivadas de primeira ordem da superfície de interação, (Silva, 2004), em relação aos esforços seccionais:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial F_x} &= \beta_1 \alpha_1 \frac{|F_x|^{\alpha_1-1}}{F_{x_p}^{\alpha_1}} \text{sign}_{f_x} + \beta_7 \alpha_7 \frac{|F_x|^{\alpha_7-1}}{F_{x_p}^{\alpha_7}} \text{sign}_{f_x} \left( \frac{|M_y|}{M_{y_p}} \right)^{\alpha_8} \\
&\quad + \beta_8 \alpha_9 \frac{|F_x|^{\alpha_9-1}}{F_{x_p}^{\alpha_9}} \text{sign}_{f_x} \left( \frac{|M_z|}{M_{z_p}} \right)^{\alpha_{10}} \\
\frac{\partial f}{\partial F_y} &= \beta_2 \alpha_2 \frac{|F_y|^{\alpha_2-1}}{F_{y_p}^{\alpha_2}} \text{sign}_{f_y} \\
\frac{\partial f}{\partial F_z} &= \beta_3 \alpha_3 \frac{|F_z|^{\alpha_3-1}}{F_{z_p}^{\alpha_3}} \text{sign}_{f_z} \\
\frac{\partial f}{\partial M_x} &= \beta_4 \alpha_4 \frac{|M_x|^{\alpha_4-1}}{M_{x_p}^{\alpha_4}} \text{sign}_{m_x} \\
\frac{\partial f}{\partial M_y} &= \beta_5 \alpha_5 \frac{|M_y|^{\alpha_5-1}}{M_{y_p}^{\alpha_5}} \text{sign}_{m_y} + \beta_7 \alpha_8 \left( \frac{|F_x|}{F_{x_p}} \right)^{\alpha_7} \text{sign}_{m_y} \frac{|M_y|^{\alpha_8-1}}{M_{y_p}^{\alpha_8}} \\
\frac{\partial f}{\partial M_z} &= \beta_6 \alpha_6 \frac{|M_z|^{\alpha_6-1}}{M_{z_p}^{\alpha_6}} \text{sign}_{m_z} + \beta_8 \alpha_{10} \left( \frac{|F_x|}{F_{x_p}} \right)^{\alpha_9} \text{sign}_{m_z} \frac{|M_z|^{\alpha_{10}-1}}{M_{z_p}^{\alpha_{10}}}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\text{onde } sign_{f_i} = \frac{|F_i|}{F_{i_p}} \text{ com } F_i = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} \text{ e } F_{i_p} = \begin{Bmatrix} F_{x_p} \\ F_{y_p} \\ F_{z_p} \\ M_{x_p} \\ M_{y_p} \\ M_{z_p} \end{Bmatrix} \text{ denota o sinal dos compo-}$$

mentes do vetor de esforços nodais.

A superfície de interação é assumida como um potencial plástico ( ver eq. A.2 e A.3 ). As componentes são apresentadas na forma matricial para cada nó do elemento e definem o fluxo plástico nos nós do elemento durante o processo de carga. Têm-se, a seguir, os vetores para cada nó do elemento:

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial F_{x_1}} \\ \frac{\partial f}{\partial F_{y_1}} \\ \frac{\partial f}{\partial F_{z_1}} \\ \frac{\partial f}{\partial M_{x_1}} \\ \frac{\partial f}{\partial M_{y_1}} \\ \frac{\partial f}{\partial M_{z_1}} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}; \quad \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{\partial f}{\partial F_{x_2}} \\ \frac{\partial f}{\partial F_{y_2}} \\ \frac{\partial f}{\partial F_{z_2}} \\ \frac{\partial f}{\partial M_{x_2}} \\ \frac{\partial f}{\partial M_{y_2}} \\ \frac{\partial f}{\partial M_{z_2}} \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

onde  $\mathbf{0}$  é um vetor nulo de  $6 \times 1$ .

## 5.2 DERIVADAS DE SEGUNDA ORDEM

O gradiente do vetor de fluxo plástico é obtido através da diferenciação de cada componente do vetor da equação (5.3) em relação aos esforços seccionais. Desenvolvendo-se as derivadas em função da equação (5.2) são apresentadas, a seguir, as segundas derivadas:

**Para  $\partial F_x F_k$**

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial F_x \partial F_x} &= \beta_1 (\alpha_1^2 - \alpha_1) \frac{|F_x|^{\alpha_1-2}}{F_{x_p}^{\alpha_1}} + \beta_7 (\alpha_7^2 - \alpha_7) \frac{|F_x|^{\alpha_7-2} |M_y|^{\alpha_8}}{F_{x_p}^{\alpha_7} M_{y_p}^{\alpha_8}} \\
&\quad + \beta_8 (\alpha_9^2 - \alpha_9) \frac{|F_x|^{\alpha_9-2} |M_y|^{\alpha_{10}}}{F_{x_p}^{\alpha_9} M_{y_p}^{\alpha_{10}}} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial F_x \partial F_y} &= 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial F_x \partial F_z} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial F_x \partial M_x} = 0 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial F_x \partial M_y} &= \beta_7 \alpha_7 \alpha_8 \frac{|F_x|^{\alpha_7-1}}{F_{x_p}^{\alpha_7}} \text{sign}_{_f x} \frac{|M_y|^{\alpha_8-1}}{M_{y_p}^{\alpha_8}} \text{sign}_{_m y} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial F_x \partial M_z} &= \beta_8 \alpha_9 \alpha_{10} \frac{|F_x|^{\alpha_9-1}}{F_{x_p}^{\alpha_9}} \text{sign}_{_f x} \frac{|M_z|^{\alpha_{10}-1}}{M_{z_p}^{\alpha_{10}}} \text{sign}_{_m z}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

**Para  $\partial F_y F_k$**

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial F_y \partial F_x} &= 0 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial F_y \partial F_y} &= \beta_2 (\alpha_2^2 - \alpha_2) \frac{|F_y|^{\alpha_2-2}}{F_{y_p}^{\alpha_2}} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial F_y \partial F_z} &= 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial F_y \partial M_x} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial F_y \partial M_y} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial F_y \partial M_z} = 0
\end{aligned} \tag{5.5}$$

**Para  $\partial F_z F_k$**

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial F_z \partial F_x} &= 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial F_z \partial F_y} = 0; \\
\frac{\partial^2 f}{\partial F_z \partial F_z} &= \beta_3 (\alpha_3^2 - \alpha_3) \frac{|F_z|^{\alpha_3-2}}{F_{z_p}^{\alpha_3}} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial F_z \partial M_x} &= 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial F_z \partial M_y} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial F_z \partial M_z} = 0
\end{aligned} \tag{5.6}$$

**Para  $\partial M_x F_k$**

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial M_x \partial F_x} &= 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial M_x \partial F_y} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial M_x \partial F_z} = 0 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial M_x \partial M_x} &= \beta_4 (\alpha_4^2 - \alpha_4) \frac{|M_x|^{\alpha_4-2}}{M_{x_p}^{\alpha_4}} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial M_x \partial M_y} &= 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial M_x \partial M_z} = 0
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Para  $\partial M_y F_k$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial M_y \partial F_x} &= \beta_7 \alpha_7 \alpha_8 \frac{|F_x|^{\alpha_7-1} \text{sign}_f}{F_{x_p}^{\alpha_7}} \text{sign}_{f_x} \frac{|M_y|^{\alpha_8-1}}{M_{y_p}^{\alpha_8}} \text{sign}_{m_y} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial M_y \partial F_y} &= 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial M_y \partial F_z} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial M_y \partial M_x} = 0; \\
\frac{\partial^2 f}{\partial M_y \partial M_y} &= \beta_5 (\alpha_5^2 - \alpha_5) \frac{|M_y|^{\alpha_5-2}}{M_{y_p}^{\alpha_5}} + \beta_7 (\alpha_8^2 - \alpha_8) \frac{|F_x|^{\alpha_7}}{F_{x_p}^{\alpha_7}} \frac{|M_y|^{\alpha_8-2}}{M_{y_p}^{\alpha_8}} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial M_y \partial M_z} &= 0
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Para  $\partial M_z F_k$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial M_z \partial F_x} &= \beta_8 \alpha_9 \alpha_{10} \frac{|F_x|^{\alpha_9-1} \text{sign}_f}{F_{x_p}^{\alpha_9}} \text{sign}_{f_x} \frac{|M_z|^{\alpha_{10}-1}}{M_{z_p}^{\alpha_{10}}} \text{sign}_{m_z} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial M_z \partial F_y} &= 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial M_z \partial F_z} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial M_z \partial M_x} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial M_z \partial M_y} = 0 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial M_z \partial M_z} &= \beta_6 (\alpha_6^2 - \alpha_6) \frac{|M_z|^{\alpha_6-2}}{M_{z_p}^{\alpha_6}} + \beta_8 (\alpha_{10}^2 - \alpha_{10}) \frac{|F_x|^{\alpha_9}}{F_{x_p}^{\alpha_9}} \frac{|M_z|^{\alpha_{10}-2}}{M_{z_p}^{\alpha_{10}}}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

As 2ª derivadas na forma matricial representam o gradiente do fluxo plástico para cada nó do elemento (Silva, 2004):

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial F_{x_1} \partial F_{x_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{x_1} \partial F_{y_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{x_1} \partial F_{z_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{x_1} \partial M_{x_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{x_1} \partial M_{y_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{x_1} \partial M_{z_1}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial F_{y_1} \partial F_{x_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{y_1} \partial F_{y_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{y_1} \partial F_{z_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{y_1} \partial M_{x_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{y_1} \partial M_{y_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{y_1} \partial M_{z_1}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial F_{z_1} \partial F_{x_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{z_1} \partial F_{y_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{z_1} \partial F_{z_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{z_1} \partial M_{x_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{z_1} \partial M_{y_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{z_1} \partial M_{z_1}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial M_{x_1} \partial F_{x_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{x_1} \partial F_{y_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{x_1} \partial F_{z_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{x_1} \partial M_{x_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{x_1} \partial M_{y_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{x_1} \partial M_{z_1}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial M_{y_1} \partial F_{x_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{y_1} \partial F_{y_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{y_1} \partial F_{z_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{y_1} \partial M_{x_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{y_1} \partial M_{y_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{y_1} \partial M_{z_1}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial M_{z_1} \partial F_{x_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{z_1} \partial F_{y_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{z_1} \partial F_{z_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{z_1} \partial M_{x_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{z_1} \partial M_{y_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{z_1} \partial M_{z_1}} \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

$$\left[ \frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{5.11}$$



$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial F_{x_2} \partial F_{x_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{x_2} \partial F_{y_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{x_2} \partial F_{z_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{x_2} \partial M_{x_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{x_2} \partial M_{y_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{x_2} \partial M_{z_2}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial F_{y_2} \partial F_{x_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{y_2} \partial F_{y_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{y_2} \partial F_{z_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{y_2} \partial M_{x_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{y_2} \partial M_{y_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{y_2} \partial M_{z_2}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial F_{z_2} \partial F_{x_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{z_2} \partial F_{y_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{z_2} \partial F_{z_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{z_2} \partial M_{x_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{z_2} \partial M_{y_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{z_2} \partial M_{z_2}} \\ \frac{\partial M_{x_2} \partial F_{x_2}}{\partial^2 f} & \frac{\partial M_{x_2} \partial F_{y_2}}{\partial^2 f} & \frac{\partial M_{x_2} \partial F_{z_2}}{\partial^2 f} & \frac{\partial M_{x_2} \partial M_{x_2}}{\partial^2 f} & \frac{\partial M_{x_2} \partial M_{y_2}}{\partial^2 f} & \frac{\partial M_{x_2} \partial M_{z_2}}{\partial^2 f} \\ \frac{\partial M_{y_2} \partial F_{x_2}}{\partial^2 f} & \frac{\partial M_{y_2} \partial F_{y_2}}{\partial^2 f} & \frac{\partial M_{y_2} \partial F_{z_2}}{\partial^2 f} & \frac{\partial M_{y_2} \partial M_{x_2}}{\partial^2 f} & \frac{\partial M_{y_2} \partial M_{y_2}}{\partial^2 f} & \frac{\partial M_{y_2} \partial M_{z_2}}{\partial^2 f} \\ \frac{\partial M_{z_2} \partial F_{x_2}}{\partial^2 f} & \frac{\partial M_{z_2} \partial F_{y_2}}{\partial^2 f} & \frac{\partial M_{z_2} \partial F_{z_2}}{\partial^2 f} & \frac{\partial M_{z_2} \partial M_{x_2}}{\partial^2 f} & \frac{\partial M_{z_2} \partial M_{y_2}}{\partial^2 f} & \frac{\partial M_{z_2} \partial M_{z_2}}{\partial^2 f} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

$$\left[ \frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

onde  $\mathbf{0}$  é uma matriz  $6 \times 6$  com elementos nulos.

### 5.3 ALGORITMO DE RETORNO

Na aplicação do carregamento da estrutura, os esforços seccionais atingem, em um ou em ambos nós do elemento de viga, um estado que sai da superfície de interação formando-se rótulas plásticas. Neste caso, aplica-se o método de backward Euler para trazer de volta os esforços seccionais à superfície de interação. Portanto, assume-se, inicialmente, que exista uma combinação de esforços seccionais em um dos nós do elemento que esteja fora da superfície de interação (Silva, 2004). Utilizando-se o método de backward Euler, corrigi-se o vetor de forças nodais da forma seguinte:

$$\hat{F}_i = F_i^{trial} - \lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 \quad (5.14)$$

onde  $F_i^{trial} = \bar{F}_i + K_{ij} dU_j$  corresponde a um vetor de forças nodais estimado. Este vetor é obtido através de uma solução elástica dos incrementos de deslocamentos  $dU_j$  e da matriz de rigidez linear elástica  $K_{ij}$  do elemento de viga 3D (ver item 2.4).  $\bar{F}_i$  é o vetor de forças nodais do último passo de carga convergido. O vetor  $\bar{F}_i$  está dentro ou fora da superfície de interação. Por outro lado,  $\left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1$  é o vetor de fluxo plástico definido em relação aos esforços seccionais que estão fora da superfície de interação e  $\lambda_1$  é o multiplicador plástico, tal que,  $\lambda_1 \geq 0$ .

Geralmente, os vetores de forças nodais, estimado  $F_i^{trial}$  e corrigido  $\hat{F}_i$ , não satisfazem o critério de escoamento, isto é, não estão sobre a superfície de interação. Assim, faz-se necessário um tipo de processo iterativo para trazer o estado de tensão (esforços seccionais) de volta a superfície de interação (ver fig.5.1).

### 5.3.1 Algoritmo de retorno com 1 (um) vetor

Ao ocorrer a situação de somente uma rótula plástica no elemento de viga, emprega-se somente um vetor de fluxo plástico correspondente aos esforços seccionais que se encontra fora da superfície de interação (ver figura 5.1).

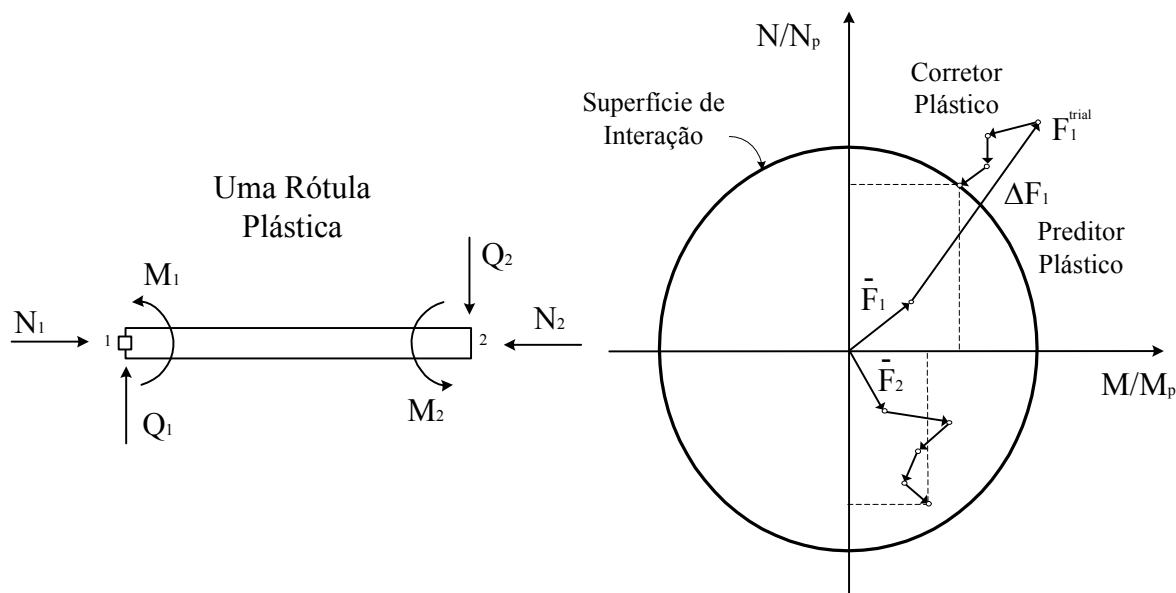


Figura 5.1: Retorno a superfície com um vetor (Silva, 2004).

O processo iterativo utiliza vetores de fluxo plástico atualizados para aproximar-se da superfície. Este procedimento é chamado de algoritmo de retorno, sendo que neste caso é feito com um vetor. Na figura 5.1, encontra-se a interpretação geométrica do algoritmo de retorno (Silva, 2004). Admite-se que os vetores de força nodais  $F_i$  (atual) e  $\hat{F}_i$  (corrigido) não cumprem o critério de escoamento, ou seja,  $f(F_i) > 1$  e  $f(\hat{F}_i) > 1$ . Com isso, o vetor de forças residuais  $r_i$ , baseado na equação (5.14), é definido como:

$$r_i = F_i - \hat{F}_i = F_i - \left( F_i^{trial} - \lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 \right) \quad (5.15)$$

Expandindo a equação (5.15) numa série de Taylor até os termos de 1ª ordem e mantendo o vetor de forças nodais de partida  $F_i^{trial}$  fixo, obtém-se um novo vetor de forças residuais  $r_i^{new}$ . Este novo vetor é apresentado da forma seguinte:

$$r_i^{new} = r_i^{old} + dF_i + d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 + \lambda_1 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 dF_k \quad (5.16)$$

onde  $dF_i$  é uma variação em  $F_i$ ,  $d\lambda_1$  é uma variação em  $\lambda_1$  e  $\left[ \frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 dF_k$  é uma variação em  $\left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1$ . Aplicando a condição:  $r_i^{new} = 0$ , a equação (5.16) é rerepresentada a seguir:

$$0 = r_i^{old} + d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 + \left( \delta_{ik} + \lambda_1 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 \right) dF_k \quad (5.17)$$

Definindo a matriz  $Q_{ik}$  como segue:

$$Q_{ik} = \delta_{ik} + \lambda_1 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 \quad (5.18)$$

Aplicam-se manipulações indiciais nas equações (5.17) e (5.18) para determinar a correção do vetor de forças nodais,  $dF_i$ , na iteração atual chega-se a:

$$Q_{li} dF_i = - \left( r_l^{old} + d\lambda_1 K_{lj} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 \right) \quad (5.19)$$

$$dF_i = -Q_{il}^{-1} \left( r_l^{old} + d\lambda_1 K_{lj} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 \right) \quad (5.20)$$

Expandindo a função de escoamento (interação),  $f$ , numa série de Taylor até os termos de 1ª ordem em torno do vetor de forças nodais final  $F_i$ , obtém -se:

$$f_1^{new} = f_1^{old} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 dF_i \quad (5.21)$$

Impondo que  $f_1^{new} = 0$  na equação (5.21) e usando a equação (5.20), obtém -se a correção do multiplicador plástico, na iteração atual, como segue:

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 dF_i = -f_1^{old} \quad (5.22)$$

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 \left[ -Q_{il}^{-1} \left( r_l^{old} + d\lambda_1 K_{lj} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 \right) \right] = -f_1^{old} \quad (5.23)$$

$$- \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} \left( d\lambda_1 K_{lj} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 \right) = -f_1^{old} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} r_i^{old} \quad (5.24)$$

$$d\lambda_1 = \frac{f_1^{old} - \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} r_i^{old}}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} K_{lj} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1} \quad (5.25)$$

Este procedimento iterativo termina quando são alcançados os critérios de parada adotados:

$$r^{norm} = \sqrt{\frac{\|r_i\|}{\|F_i^{trial}\|}} < TOL, \quad f^{norm} = |f - 1, 0| < TOL \quad (5.26)$$

onde  $\|r_i\|$  é a norma Euclidiana do vetor de forças residuais,  $\|F_i^{trial}\|$  é a norma Euclidiana do vetor de forças estimado e  $TOL$  é a tolerância para a convergência.

### 5.3.2 Algoritmo de retorno com 2 (dois) vetores

Para o caso da formação de duas rótulas plásticas no elemento de viga, são utilizados dois vetores de fluxo plástico com um vetor para cada nó, ou seja,  $\left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1$  e  $\left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2$ . Os vetores de fluxo são os esforços seccionais de cada nó, que estão fora da superfície de interação, isto é,  $f_1(F_j) > 1$  e  $f_2(F_j) > 1$ . Durante o processo iterativo utilizam-se esses vetores de fluxo plástico atualizados para aproximar-se da superfície de interação. Este procedimento é chamado algoritmo de retorno com 2 (dois) vetores. A interpretação geométrica do algoritmo é vista na figura (5.2). Define-se o vetor de forças nodais de partida como:  $F_i^{trial} = \bar{F}_i + K_{ij}dU_j$ , onde  $\bar{F}_i$  é o vetor de forças nodais do último passo de carga convergido. O vetor  $\bar{F}_i$  estará dentro ou fora da superfície de interação, ou seja,  $f(\bar{F}_i) < 1$  ou  $f(\bar{F}_i) = 1$ , respectivamente. O vetor de forças nodais corrigido expressa-se como:

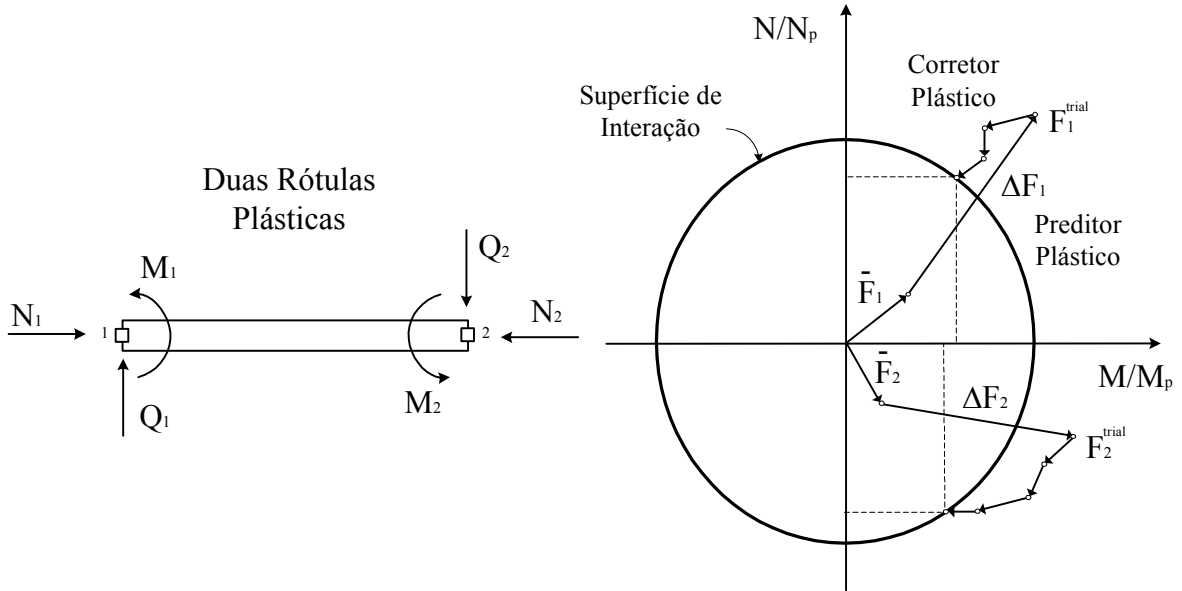


Figura 5.2: Retorno a superfície com dois vetores (Silva, 2004).

$$\hat{F}_i = F_i^{trial} - \lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 - \lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 \quad (5.27)$$

onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são os multiplicadores plásticos, sendo que,  $\lambda_1 \geq 0$  e  $\lambda_2 \geq 0$ . Admite-se que os vetores de forças nodais atual ( $\mathbf{F}$ ) e corrigido ( $\hat{\mathbf{F}}$ ) não cumprem a condição de escoamento com  $f(F_i) > 1$  e  $f(F_i) > 1$ . Defini-se o vetor de forças nodais  $r$  como:

$$r_i = F_i - \hat{F}_i = F_i - \left( F_i^{trial} - \lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 - \lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 \right) \quad (5.28)$$

Expandindo a equação (5.28) em série de Taylor até os termos de 1ª ordem e mantendo fixo o vetor de forças nodais  $F_i^{trial}$ , obtém-se um novo vetor de forças residuais  $r_i^{new}$  que é apresentado a seguir:

$$r_i^{new} = r_i^{old} + dF_i + d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 + \lambda_1 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 dF_k + d\lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 + \lambda_2 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_2 dF_k \quad (5.29)$$

Impondo-se a condição que:  $r_i^{new} = 0$ , a equação (5.29) pode ser reescrita como:

$$0 = r_i^{old} + d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 + d\lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 + \left( \delta_{ik} + \lambda_1 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 + \lambda_2 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_2 \right) dF_k \quad (5.30)$$

Define-se a matriz  $Q_{ik}$  como:

$$Q_{ik} = \delta_{ik} + \lambda_1 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 + \lambda_2 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_2 \quad (5.31)$$

Aplicam-se como anteriormente manipulações indiciais nas equações (5.30), (5.29) e (5.31) para a obtenção do vetor de forças nodais da iteração atual, chega-se a:

$$Q_{li} dF_i = - \left( r_l^{old} + d\lambda_1 K_{lj} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 + d\lambda_2 K_{lj} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 \right) \quad (5.32)$$

$$dF_i = -Q_{il}^{-1} \left( r_l^{old} + d\lambda_1 K_{lj} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 + d\lambda_2 K_{lj} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 \right) \quad (5.33)$$

Expandindo-se as funções de escoamento no nó 1,  $f_1$ , e no nó 2,  $f_2$ , em série de Taylor até os termos de primeira ordem em torno do vetor de forças nodais final  $F_k$ , obtém-se que:

$$f_1^{new} = f_1^{old} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 dF_i, \quad f_2^{new} = f_2^{old} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 dF_i \quad (5.34)$$

Aplicando a equação (5.33) nas funções da equação (5.34), e impondo que  $f_1^{new} = 0$  e  $f_2^{new} = 0$ , obtém-se que:

$$f_1^{old} - \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} r_l^{old} = d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} K_{lj} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 + d\lambda_2 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} K_{lj} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 \quad (5.35)$$

$$f_2^{old} - \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 Q_{il}^{-1} r_l^{old} = d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 Q_{il}^{-1} K_{lj} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 + d\lambda_2 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 Q_{il}^{-1} K_{lj} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 \quad (5.36)$$

As incógnitas são as correções dos multiplicadores plásticos  $d\lambda_1$  e  $d\lambda_2$  durante o processo iterativo (Silva, 2004). Colocando as equações (5.35) e (5.36) no sistema matricial obtém -se:

$$\begin{bmatrix} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} K_{lj} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 & \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} K_{lj} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 \\ \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 Q_{il}^{-1} K_{lj} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 & \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 Q_{il}^{-1} K_{lj} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\lambda_1 \\ d\lambda_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{old} - \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} r_l^{old} \\ f_2^{old} - \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 Q_{il}^{-1} r_l^{old} \end{Bmatrix} \quad (5.37)$$

Reapresentado a equação (5.37), tem-se que:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\lambda_1 \\ d\lambda_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (5.38)$$

Solucionando o sistema da equação (5.38), chega-se a:

$$\mathbf{a}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{b} \quad (5.39)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b} \quad (5.40)$$

com

$$\mathbf{a}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

$$\begin{bmatrix} d\lambda_1 \\ d\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22} \left( f_1^{old} - \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} r_l^{old} \right) - a_{12} \left( f_2^{old} - \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 Q_{il}^{-1} r_l^{old} \right)}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \frac{a_{11} \left( f_2^{old} - \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 Q_{il}^{-1} r_l^{old} \right) - a_{21} \left( f_1^{old} - \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} r_l^{old} \right)}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

O processo iterativo termina quando são cumpridos os seguintes critérios de parada:

$$r^{norm} = \sqrt{\frac{\|r_i\|}{\|F_i^{trial}\|}} < TOL, \quad f_1^{norm} = |f_1 - 1, 0| < TOL, \quad f_2^{norm} = |f_2 - 1, 0| < TOL \quad (5.44)$$

## 5.4 MATRIZ DE RIGIDEZ CONSISTENTE

No processo incremental-iterativo, é utilizado, na fase corretora, o método de Newton-Raphson para determinar a configuração de equilíbrio do sistema estrutural (Silva, 2004). Para não destruir a convergência quadrática do método, há necessidade da obtenção de uma matriz de rigidez consistente de forma que são apresentados os casos para 1 (um) vetor e 2 (dois) vetores. Na situação de uma rótula plástica, utiliza-se o algoritmo com um vetor e, para duas, o algoritmo com dois vetores. Ao alcançar a convergência atendendo aos critérios adotados nas equações (5.26) e (5.44), atualiza-se a matriz de rigidez consistente ao início de cada passo de carga (ver fig. 5.3).

### 5.4.1 Algoritmo de retorno com um vetor

Para trazer os esforços seccionais à superfície de interação, no final do processo iterativo, define-se a seguinte correção:

$$F_i = F_i^{trial} - \lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1, \quad \text{com } \lambda_1 > 0 \quad (5.45)$$

e para o vetor de forças nodais de partida (inicial), define-se como:

$$F_i^{trial} = \bar{F}_i + K_{ij} dU_j \quad (5.46)$$

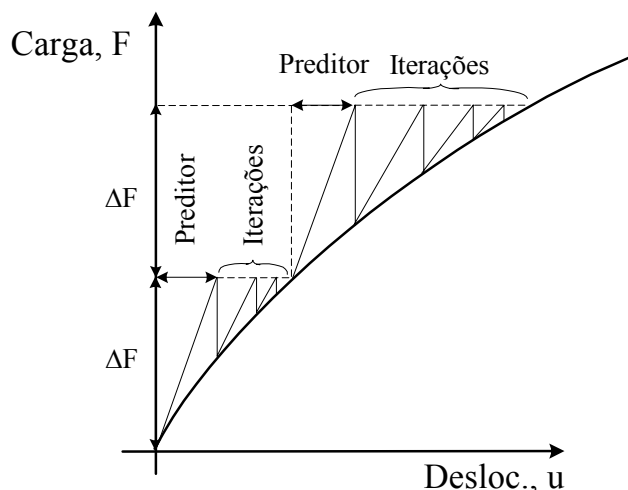


Figura 5.3: Procedimento incremental-iterativo de Newton-Raphson (Crisfield, 1990).

Aplicando-se o diferencial total na equação (5.45), ver equação 5.16, chega-se a:

$$dF_i = K_{ij}dU_j - d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 - \lambda_1 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 dF_k \quad (5.47)$$

Desenvolvendo a equação (5.47), obtém -se que:

$$\left( \delta_{ik} + \lambda_1 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 \right) dF_k = K_{ij}dU_j - d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 \quad (5.48)$$

Utilizando a matriz  $Q_{ik}$  definida na equação (5.18) e definido que a matriz de redução plástica seja igual a:

$$R_{ij} = Q_{il}^{-1} K_{lj} \quad (5.49)$$

Com isso, reescreve-se a equação (5.48) da seguinte forma:

$$dF_i = R_{ij} \left( dU_j - d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 \right) \quad (5.50)$$

A equação (5.50) é semelhante à forma não consistente, sendo diferente no termo  $K_{ij}$  em relação ao  $R_{ij} = Q_{il}^{-1} K_{lj}$  e também no fato do vetor de fluxo plástico ser avaliado no ponto de retorno à superfície de interação (Silva, 2004). Como o vetor de forças nodais final  $F_i$  tem que cumprir a condição  $f(F_i) = 0$ , diferencia-se esta condição e baseando-se na equação (5.50), chega-se a:



$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 dF_i = 0 \quad (5.51)$$

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} \left( dU_j - d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 \right) = 0 \quad (5.52)$$

Desenvolvendo a equação anterior para a obtenção do multiplicador plástico ( $d\lambda_1$ ), obtém-se:

$$d\lambda_1 = \frac{\left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} dU_j}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1} \quad (5.53)$$

A matriz de rigidez elastoplástica consistente é obtida em função das equações (5.50) e (5.53), (Silva, 2004):

$$K_{ij}^{AL} = R_{ij} - \frac{R_{im} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_m} \right\}_1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_n} \right\}_1 R_{nj}}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial F_m} \right\}_1 R_{mn} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_n} \right\}_1}$$

## 5.4.2 Algoritmo de retorno com dois vetores

Para a situação em que existam duas rótulas plásticas, assume-se que  $f_1(F_i) = 0$  e  $f_2(F_i) = 0$ , e a correção para trazer os esforços seccionais de ambos nós para a superfície de interação, ao final do processo iterativo, é apresentada a seguir:

$$F_i = F_i^{trial} - \lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 - \lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2, \text{ com } \lambda_1 > 0 \text{ e } \lambda_2 > 0 \quad (5.54)$$

Utilizando o vetor de forças nodais de partida,  $F_i^{trial} = \bar{F}_i + K_{ij} dU_j$ , na equação anterior e aplicando o diferencial total chega-se a:

$$\begin{aligned} dF_i = & K_{ij} dU_j - d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 - \lambda_1 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 dF_k \\ & - d\lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 - \lambda_2 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_2 dF_k \end{aligned} \quad (5.55)$$

Semelhantemente as equações (5.30) e (5.31) desenvolve-se a equação (5.55) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \left( \delta_{ik} + \lambda_1 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right] + \lambda_2 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_2 \right) dF_k = \\
& = K_{ij} dU_j - d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 - d\lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2
\end{aligned} \tag{5.56}$$

Usando a matriz  $Q_{ik}$  (ver equação 5.31) e definindo a matriz de redução plástica como:  $R_{ij} = Q_{il}^{-1} K_{lj}$ , apresenta-se a equação (5.56) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
Q_{li} dF_i & = K_{lj} dU_j - d\lambda_1 K_{lj} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 - d\lambda_2 K_{lj} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 \implies \\
\implies dF_i & = Q_{il}^{-1} (K_{lj} dU_j - d\lambda_1 K_{lj} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 - d\lambda_2 K_{lj} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2) \\
\implies dF_i & = R_{ij} \left( dU_j - d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 - d\lambda_2 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 \right)
\end{aligned} \tag{5.57}$$

Em função de que o vetor de forças nodais final  $F_i$  cumpre as condições:  $f_1(F_i) = 0$  e  $f_2(F_i) = 0$ , diferencia-se estas condições baseando-se na equação (5.57), com isso chega-se a, (Silva, 2004):

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 dF_i = 0 \implies \\
& \implies \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} \left( dU_j - d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 - d\lambda_2 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 \right) = 0 \implies \\
\implies \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} dU_j & = \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 + \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} d\lambda_2 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2
\end{aligned} \tag{5.58}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 dF_i = 0 \implies \\
& \implies \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} \left( dU_j - d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 - d\lambda_2 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 \right) = 0 \implies \\
\implies \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} dU_j & = \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 + \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} d\lambda_2 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2
\end{aligned} \tag{5.59}$$

Reescrevendo as equações (5.58) e (5.59) na forma matricial, obtêm-se:

$$\left[ \begin{array}{cc} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 & \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 \\ \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 & \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} d\lambda_1 \\ d\lambda_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} dU_j \\ \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} dU_j \end{Bmatrix} \quad (5.60)$$

De forma semelhante ao sistema da equação (5.38), a solução do sistema é:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\lambda_1 \\ d\lambda_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (5.61)$$

$$\mathbf{a}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{b} \quad (5.62)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b} \quad (5.63)$$

com

$$\mathbf{a}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

Assim, tem-se que:

$$\begin{aligned} d\lambda_1 &= \frac{a_{22} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} dU_j - a_{12} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} dU_j}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ d\lambda_2 &= \frac{a_{11} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} dU_j - a_{21} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} dU_j}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{aligned} \quad (5.66)$$

Convém comentar que se qualquer multiplicador plástico assume valores negativos, ou seja,  $d\lambda_1 < 0$  ou  $d\lambda_2 < 0$ , atribui-se valor zero e desativa-se a rótula plástica correspondente ao multiplicador plástico negativo.

Reescrevendo a equação anterior, obtém -se que:

$$\begin{aligned}
d\lambda_1 &= \left( \frac{a_{22} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} - \frac{a_{12} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \right) dU_j \\
d\lambda_2 &= \left( \frac{a_{11} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} - \frac{a_{21} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \right) dU_j \\
\implies d\lambda_1 &= \left( c_1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} - c_2 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} \right) dU_j \\
\implies d\lambda_2 &= \left( c_3 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} - c_4 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} \right) dU_j \\
\implies d\lambda_1 &= \left( c_1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_m} \right\}_1 R_{mn} - c_2 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_m} \right\}_2 R_{mn} \right) dU_n \\
\implies d\lambda_2 &= \left( c_3 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_m} \right\}_2 R_{mn} - c_4 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_m} \right\}_1 R_{mn} \right) dU_n
\end{aligned} \tag{5.67}$$

Baseando-se nas equações (5.57) e (5.67), obtém-se a matriz de rigidez elastoplástica consistente  $K_{ij}^{AL}$ , (Silva, 2004):

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{AL} &= R_{ij} - \left( c_1 R_{im} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_m} \right\}_1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_n} \right\}_1 R_{nj} - c_2 R_{im} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_m} \right\}_1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_n} \right\}_2 R_{nj} \right) \\
&\quad - \left( c_3 R_{im} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_m} \right\}_2 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_n} \right\}_2 R_{nj} - c_4 R_{im} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_m} \right\}_2 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_n} \right\}_1 R_{nj} \right)
\end{aligned} \tag{5.68}$$

## Capítulo 6

### EXEMPLOS NUMÉRICOS

#### 6.1 INTRODUÇÃO

Os exemplos 6.1.1 e 6.1.2 são aplicações para análise de resultados utilizando algumas superfícies obtidas pelo método proposto neste trabalho.

##### 6.1.1 Exemplo 6.1

Neste exemplo, são apresentadas aplicações baseadas na teoria de análise elastoplástica utilizando o conceito de rótula plástica e método backward euler mostrado no capítulo 5, também em (Silva, 2004). Utilizam-se algumas funções geradas no presente trabalho e fazem-se comparações dos resultados obtidos com as análises do exemplo "Two bay asymmetric frame" (Argyris, 1982). Os dados do exemplo analisado são apresentados a seguir, sendo que na figura 6.1, é apresentada a geometria do pórtico plano:

Propriedades do material (Two bay asymmetric frame)		
Elemento n°	Seção transversal	Dados gerais
1, 2, 3, 6	a-a $A = 800,00cm^2$ $I_y = 106667,00cm^4$ $F_{x_p} = 290,299 \times 10^6 kgf$ $M_{y_p} = 290,299 \times 10^7 kgf/cm$	$E = 907,184 \times 10^5 kgf/cm$ $\sigma_0 = 45,360 \times 10^4 kgf/cm$
4, 5	b-b $A = 1391,50cm^2$ $I_y = 245368,00cm^4$ $F_{x_p} = 504,848 \times 10^6 kgf$ $M_{y_p} = 580,598 \times 10^7 kgf/cm$	

Tabela 6.1: Propriedades do material (Two bay asymmetric frame).

Para cada função são observados o processo de formação das rótulas plásticas, como são atingidas as superfícies de interação em função do deslocamento e as rótulas plásticas em função

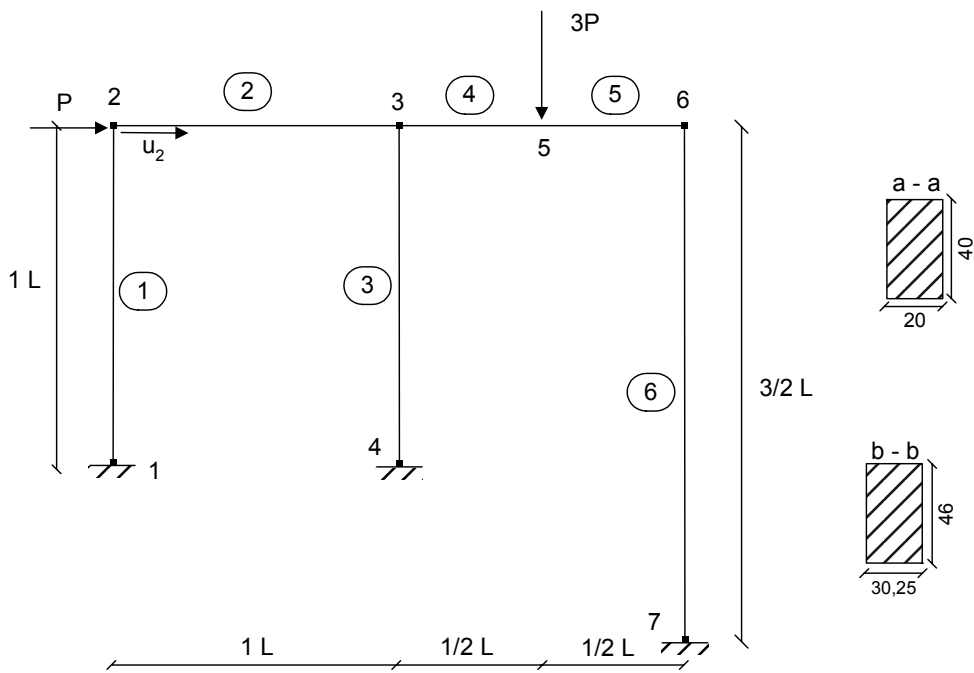


Figura 6.1: Geometria e dados da seção transversal (Two bay asymmetric frame) (Argyris, 1982).

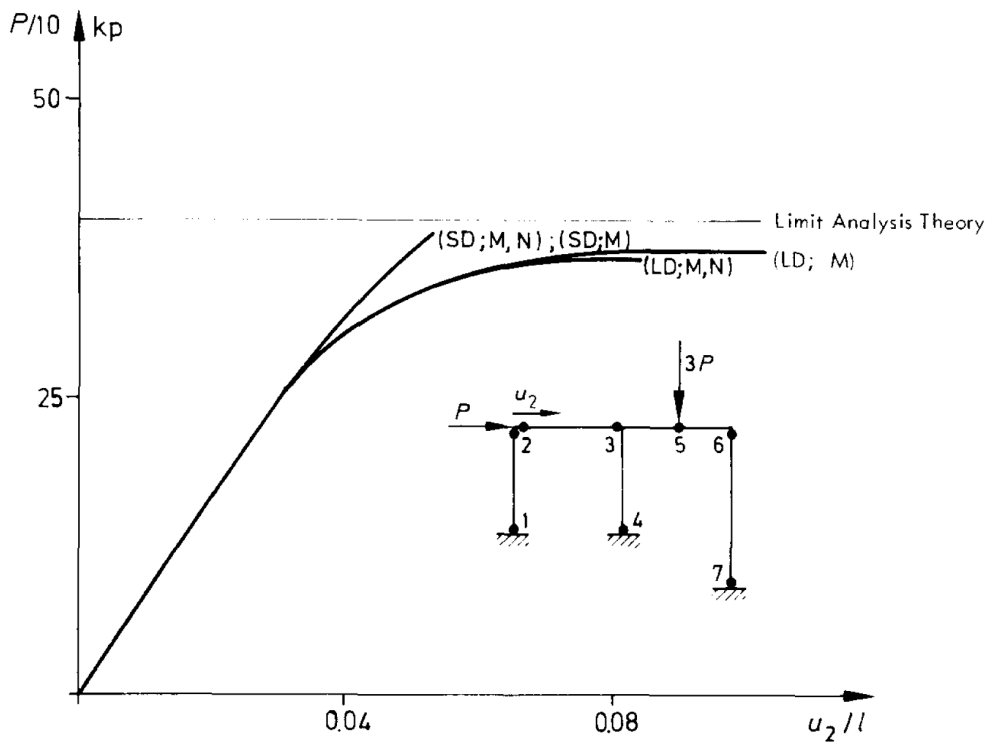


Figura 6.2: Resultado do exemplo "Two bay asymmetric frame"(Argyris, 1982).

do multiplicador plástico  $\lambda$ . A notação dos gráficos tem o seguinte significado: elemento =  $e_i$  com  $i = 1, n$  e nó =  $n_j$  com  $j = 1, m$ . Foram usadas as seguintes funções para as análises elastoplásticas, como é visto a seguir:

- **Função  $n^2m$**  :  $f_u = 1,007n^2 + 1,025m - 1 = 0$  (equação 4.63);
- **Função  $nm^2$**  :  $f_u = 1,063n + 0,907m^2 - 1 = 0$  (equação 4.64);
- **Função  $n^2m^2$**  :  $f_u = 1,164n^2 + 1,127m^2 - 1 = 0$  (equação 4.65);
- **Função  $n^2nmm^2$**  :  $f_u = 1,035n^2 + 0,880nm + 0,812m^2 - 1 = 0$  (equação 4.66).

São apresentados, na tabela (6.2), os resultados das respectivas funções quanto a formação das rótulas plásticas e cargas limite atingidas.

rótulas plásticas											
$n^2m$			$nm^2$			$n^2m^2$			$n^2nmm^2$		
$e$	nó	$\lambda$	$e$	nó	$\lambda$	$e$	nó	$\lambda$	$e$	nó	$\lambda$
1	1	2,987E+08	1	1	1,610E+06	1	1	1,589E+08	1	1	1,631E+08
2	3	7,243E+08	2	2	5,422E+08	1	2	1,369E+07	2	2	4,007E+05
4	5	3,922E+09	2	3	3,790E+08	2	2	1,364E+06	2	3	3,815E+08
5	5	8,430E+06	3	4	3,350E+06	2	3	3,762E+08	3	4	4,962E+06
6	6	9,999E+08	4	5	2,033E+09	4	5	1,995E+09	4	5	2,124E+09
			5	5	2,885E+06	5	5	7,750E+05	5	5	6,813E+05
			6	6	5,556E+11	6	6	5,247E+08	6	6	5,445E+08
Carga limite											
1,81733E+07			1,90760E+07			1,75814E+07			2,01494E+07		

Tabela 6.2: Rótulas plásticas para as funções analisadas- Two bay asymmetric frame

Os resultados obtidos pelas funções apresentadas são semelhantes à solução (ver figura 6.2) dada por (Argyris, 1982). Os processos de formação das rótulas plásticas foram parecidos para as funções das equações 4.64 e 4.66. Os resultados para todas as funções (ver figura 6.3 e tabela 6.2) possuem semelhanças, sendo que as de resultados mais próximos, entre si, foram as equações: 4.63 e 4.65, 4.64 e 4.66. Cabe lembrar que a solução melhor do ponto de vista estatístico foi a equação 4.63.

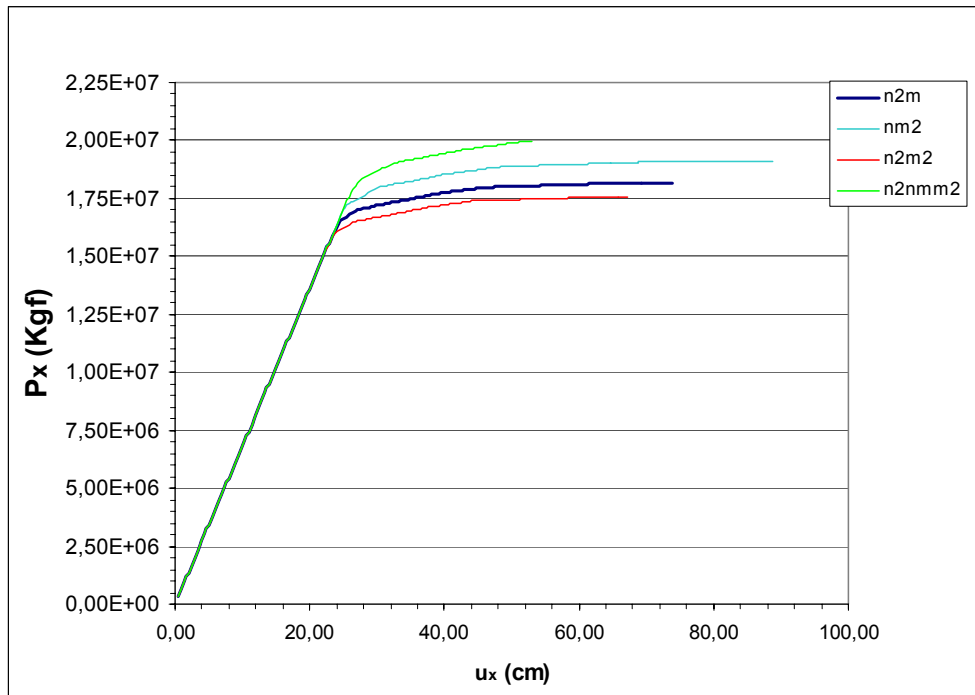


Figura 6.3: Gráfico carga × deslocamento para o nó 2 - função n2m (Two bay asymmetric frame).

### 6.1.2 Exemplo 6.2

Neste exemplo, seguem-se, também, aplicações baseadas no capítulo 4 e em (Silva, 2004). São utilizadas funções de interação semelhantes ao exemplo de Argyris: "Two beam structure", (Argyris, 1982). Os dados do exemplo analisado são apresentados a seguir, sendo que na figura 6.4, é apresentada a geometria do pórtico plano, onde o nó "A" da figura (6.5) é o nó "2" da figura (6.4).

Propriedades do material (Two beam structure)			
Elemento n <sup>o</sup>	Seção transversal		Dados gerais
1	a - a	A = 4,85cm <sup>2</sup> I <sub>y</sub> = 1,475cm <sup>4</sup>	E = 317,515 × 10 <sup>6</sup> kgf/cm <sup>2</sup> σ <sub>0</sub> = 125,282 × 10 <sup>4</sup> kgf/cm <sup>2</sup> F <sub>x<sub>p</sub></sub> = 587,992 × 10 <sup>4</sup> kgf M <sub>y<sub>p</sub></sub> = 280,774 × 10 <sup>4</sup> kgf/cm
2, 3			E = 317,515 × 10 <sup>6</sup> kgf/cm <sup>2</sup> σ <sub>0</sub> = 153,087 × 10 <sup>4</sup> kgf/cm <sup>2</sup> F <sub>x<sub>p</sub></sub> = 742,667 × 10 <sup>4</sup> kgf M <sub>y<sub>p</sub></sub> = 354,616 × 10 <sup>4</sup> kgf/cm

Tabela 6.3: Propriedades do material (Two beam structure)



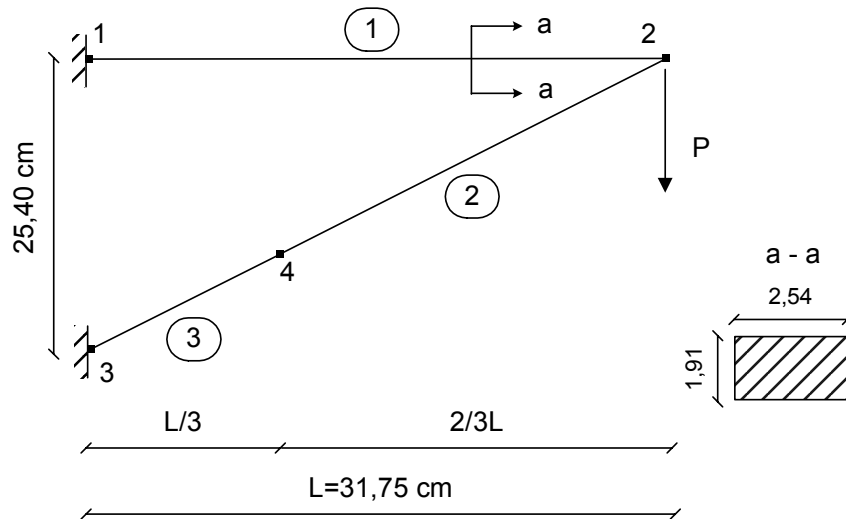
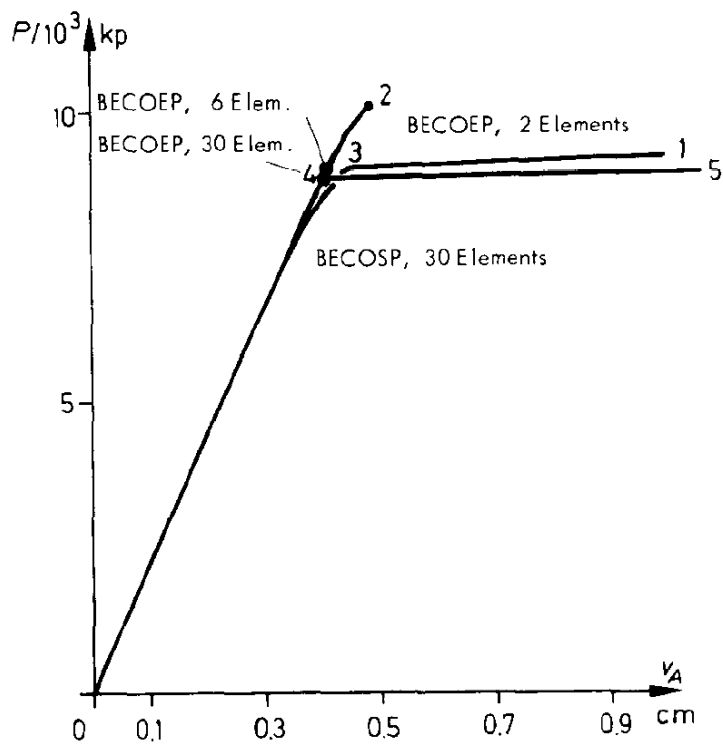


Figura 6.4: Geometria e dados da seção transversal do "Two beam structure"(Argyris, 1982).



Idealisation	Curve	Critical Load kp
BECOSP, 30 Elem.	3 - 1	9250
BECOEP, 2 Elem.	0 - 2	10100
BECOEP, 6 Elem.	0 - 3	9100
BECOEP, 30 Elem.	0 - 4 - 5	9000

Figura 6.5: Resultados do exemplo "Two beam structure"(Argyris, 1982).

Para cada função são observados o processo de formação das rótulas plásticas, como são atingidas as superfícies de interação em função do deslocamento e as rótulas plásticas em função do multiplicador plástico  $\lambda$ . A notação dos gráficos tem o seguinte significado: elemento =  $e_i$  com  $i = 1, n$  e nó =  $n_j$  com  $j = 1, m$ .

Foram usadas as seguintes funções para as análises elastoplásticas, como é visto a seguir:

- **Função  $n^2m$**  :  $f_u = 1,007n^2 + 1,025m - 1 = 0$  (equação 4.63);
- **Função  $nm^2$**  :  $f_u = 1,063n + 0,907m^2 - 1 = 0$  (equação 4.64);
- **Função  $n^2m^2$**  :  $f_u = 1,164n^2 + 1,127m^2 - 1 = 0$  (equação 4.65);
- **Função  $n^2nmm^2$**  :  $f_u = 1,035n^2 + 0,880nm + 0,812m^2 - 1 = 0$  (equação 4.66).

São apresentados, na tabela (6.4), os resultados das respectivas funções quanto a formação das rótulas plásticas e cargas limite atingidas.

<b>rótulas plásticas</b>											
<b><math>n^2m</math></b>			<b><math>nm^2</math></b>			<b><math>n^2m^2</math></b>			<b><math>n^2nmm^2</math></b>		
<i>e</i>	<i>nó</i>	$\lambda$	<i>e</i>	<i>nó</i>	$\lambda$	<i>e</i>	<i>nó</i>	$\lambda$	<i>e</i>	<i>nó</i>	$\lambda$
1	1	3,495E04	1	1	6,693E+04	1	1	3,818E+04	1	1	3,401E+04
2	4	1,519	3	3	1,013E+05	3	3	7,141E+04	2	4	1,505
3	4	0,769							3	4	0,796
3	3	2,526E04							3	3	2,710E+04
<b>Carga limite</b>											
1,95225E+05			2,09059E+05			1,88502E+05			2,20945E+05		

Tabela 6.4: Rótulas plásticas para as funções analisadas- Two beam structure

Os resultados obtidos pelas funções apresentadas são semelhantes às soluções das cargas críticas (ver figura 6.5) dada por (Argyris, 1982). O processo de formação das rótulas plásticas foram parecidos para os pares de funções das equações  $\{(4.64),(4.65)\}$  e  $\{(4.63), (4.66)\}$ . O comportamento das funções (ver figura 6.6) foram semelhantes, sendo que a função de melhor resultado elastoplastico comparativo com Argyris foi a equação 4.63, também, a melhor solução do ponto de vista estatístico foi a 4.63

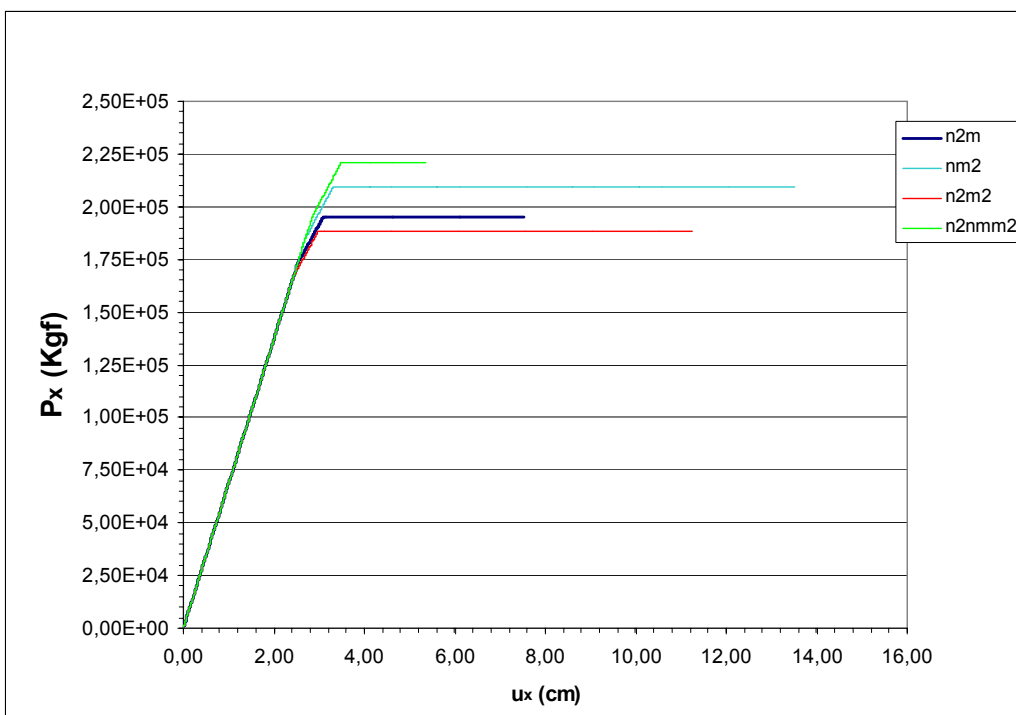


Figura 6.6: Gráfico carga × deslocamento para o nó 2 - (Two beam structure).

## Capítulo 7

# CONCLUSÕES E PESQUISAS FUTURAS

### 7.1 CONCLUSÕES

As conclusões, os comentários sobre a pesquisa realizada e os resultados obtidos em função das análises do trabalho são apresentados a seguir:

- As superfícies de escoamento, geralmente, apresentadas no espaço de tensões, possuem melhores aplicações práticas quando são apresentadas em resultantes de tensões porque facilitam o processo de análise sem a necessidade da integração numérica, com isso, propõe-se, neste trabalho, um modelo baseado nas formulações de viga de Timoshenko 3D e a regressão linear múltipla que permite a geração de superfícies de escoamento em resultantes de tensões por processo numérico;
- As superfícies de escoamento com combinações de esforços seccionais foram comparadas com funções analíticas da literatura. Em alguns casos, foram obtidas funções semelhantes nos valores de cada coeficiente, como as equações: (4.55) e (4.59), sendo que em outros ocorreram diferenças em alguns dos valores das variáveis, como por exemplo: equações (4.58), (4.62), (4.67), (4.68), (4.76) e (4.77);
- Outras funções foram geradas para testar a flexibilidade do método em encontrar diversos tipos de funções de interação. Pode-se concluir que a metodologia permite encontrar vários tipos de funções com combinações entre os esforços seccionais, detectando a importância de determinada variável para o modelo, como por exemplo: as equações (4.73) e (4.74). Deste modo, o processo de criar funções com características e comportamentos preestabelecidos é perfeitamente possível do ponto de vista numérico;
- As aplicações demonstram que a formulação apresentada consegue gerar por processo numérico boas funções de escoamento, de forma que em função das que foram aplicadas, a de melhor resultado elastoplástico e estatístico foi a da equação 4.63;

- A formulação permite tratar por processo numérico dados obtidos por análises numéricas oriundas de outras abordagens que não sólidos e/ou experimentais, de forma a obter funções de escoamento que retratem o fenômeno físico.
- As diferenças entre as superfícies obtidas pelo modelo numérico ( $f_u$ ) e a da literatura ( $f$ ) mostram que há a necessidade de mais comparações com exemplos que abordam outros tipos de funções para comprovar a eficácia de sua utilização.

## 7.2 PESQUISAS FUTURAS

As pesquisas futuras, para a continuidade do presente trabalho, são comentadas, a seguir:

- Até o presente momento, foram feitas análises com seções retangulares de modo que os resultados são preliminares e no futuro serão testadas funções com outros tipos de seções que são usadas na prática construtiva. Pode-se comentar que a metodologia permite a análise de vários tipos de superfícies de escoamento em resultantes de tensão para diferentes formas de seção, sendo que existem funções analíticas para alguns casos limitados;
- Gerar funções de escoamento de outros tipos de seções transversais com tipos distintos de materiais;
- Analisar e buscar encontrar os melhores índices  $\alpha$  da regressão linear múltipla de forma a obter os melhores tipos de funções de escoamento.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Argyris, J., 'An Excursion into Large Rotations', *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.* 32, 85-155 (1982).
- Atluri, S. N., 'Alternate Stress and Conjugate Strain Measures and Mixed Variational Formulations Involving Rigid Rotations, for Computational Analyses of Finitely Deformed Solids, with Application to Plates and Shells. Theory', *Comp.& Struc.* 18/1, 93-106 (1983).
- Chen, W. F.; Astuta, T., 'Theory of Beam-Columns', Vol 2, *Space Behaviour and Design*, McGraw-Hill, Nova Iorque, (1977).
- Crisfield, M. A. , 'A Consistent Co-rotational Formulation for Non-linear, Three-dimensional, Beam-elements', *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.* 81, 131-150 (1990).
- Crivelli, L.A., 'A Total-lagrangian Beam Element for Analysis of Nonlinear Space Structures', PhD Tesis, CSSC, College of Engineering University of Colorado, Boulder, Colorado, (1991).
- Dieci, Luca; Vleck, Erik S. Van, 'Orthonormal Integrators Based on Householder and Givens Transformations', Elsevier Science, (2002).
- Faria, H.P., 'Análise Não-linear de Instabilidade Elástica de Pórticos Planos', Dissertação de Mestrado, ENC/FT/UnB, (1998).
- Felippa, C. A.; Militello, C. , 'Variational Formulation of High-performance Finite-elements Parametrized Variational-principles', *Comp. Structures* 36 (1), 1-11 (1990).
- Felippa, C.A., 'Customizing High Performance Elements by Fourier Methods', *Trends in Computational Structural Mechanics*, CIMNE, Barcelona, Espanha, (2001).
- Gerardin, M; Cardona, A., 'Kinematics and Dynamics of Rigid and Flexible Mechanics Using Finite Elements and Quaternion Algebra', *Comp. Mech.*, (1987).
- Gere, J. M.; Weaver, W. JR., 'Análise de Estruturas Reticulares', Guanabara S.A., Brasil, (1987).
- Golub, G. H.; Van Loan, C. F., 'Matrix computations', 2nd ed., The Johns Hopkins University Press, (1989).
- Hanganu, A. D., 'Metodologia de Evaluación del Deterioro en Estructuras de Hormigón Armado', Monografía CIMNE nº 39, Barcelona, Espanha, (1997).
- Horne, M.R., 'Plastic theory of structures', Pergamon Press'; 2d ed, Oxford, Inglaterra (1972).

- ‘IMSL Fortran and C Application Development Tools’, Visual Numerics, Inc., EUA, (1997).
- Irles, R.M.; Irles, F.M., ‘Elastic Interaction Graphs for Steel H-sections Subjected to Bending, Shear and Axial Forces’, *Int. J. Solids Structures*, 37, 1327-1337, (2000).
- Irles, R.M.; Irles, F.M., ‘Biaxial Bending-axial Force Elastic Interaction Diagrams in Hollow Steel Sections’, *Int. J. Solids Structures* 38, 423-433, (2001).
- Kozar, I.; Ibrahimbegovic, A., ‘Finite Element Formulation of the Rotation Solid Element’, *Finite Elements in Analysis and Design*. 20, 101-126 (1995).
- Kondoh, K.; Tanaka, K.; Atluri, S. N. , ‘An Explicit Expression for Tangent-stiffness of a Finitely Deformed 3-D Beam and its Use Analysis of Space Frames’, *Comp. Struct.* 24, 253-272 (1986).
- Kondoh, K. ; Atluri, S. N., ‘Large-deformation, Elasto-plastic Analysis of Frames under Nonconservative Loading, Using Explicit Derived Tangent Stiffness Based on Assumed Stress’, *Comp. Mech.* 2, 1-25 (1987).
- Krenk, S.; Vissing-Jorgensen; Thesbjerg, C. L., ‘Efficient Collapse Analysis Tecniques for Framed Structures’, *Comp.Structures* 72 ,481-496 (1999)
- Lekhnitskii, S.G., ‘Theory of Elasticity of Anisotropic Elastic Body’, Hoden Day, San Francisco, EUA, (1963).
- Li, M., ‘The Finite Deformation Theory for Beam, Plate and Shell: Part I. TheTwo-dimensional Beam Theory’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 146, 53-63 (1997).
- Li, M., ‘The Finite Deformation Theory for Beam, Plane and Shell Part. III. The Three-dimensional Beam Theory and the FE Formulation’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 162, 287-300 (1998).
- Li, M. , ‘The Finite Deformation Theory for Beam, Plate and Shell: Part II. The Green-Lagragian Strains’, *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.* 156, 247-257 (1998).
- Lubliner, J.; Oliver, J.; Oller, S.; Oñate, E., ‘A plastic-Damage Model for Concrete.’, *Int. J. Solids Structures* 25 (3), 299-336 (1989).
- Lubliner, J., ‘Plasticity Theory’, Macmillan Publishing Company., Nova Iorque, EUA, (1990).
- Mrázik, A.; éSkaloud, M.; Tocháček, M., ‘Plastic Design of Steel Structures’, Chichester [West Sussex]; Nova Iorque : E. Horwood: Halsted Press, (1987).
- Menezes, L.F.; Teodosiu, C., ‘Three-dimensional Numerical Simulation of The Deep-drawing Process using Solid Finite Elements’,*Journal of Materials Processing Technology.* 97, 100-106, (2000).
- Montgomery, D. C.; Runger, G. C., ‘Probabilidad y Estadística Aplicadas a la Ingeniería’, McGraw-Hill Interamericana Editores, S. A., D. F., México, (1998).
- NBE EA-95, ‘Norma Básica de la Edificación NBE EA-95: Estructuras de Acero en Edificación’, Dirección General de la Vivienda, la Arquitectura y el Urbanismo, Madri, (2001).
- Neal,B.G., ‘The plastic methods of structural analysis, Chapman and Hall ’, Inglaterra, (1977).

- Oliver, J.; Cervera, M.; Oller, S.; Lubliner, J., 'Isotropic Damage Models and Smeared Crack Analysis of Concrete', Proceedings 2<sup>nd</sup> ICCAADCS, Zell Am See, Pineridge Press, Austria. 2, 945-958, (1990).
- Oller, S., 'Fractura Mecánica. Un enfoque global ', CIMNE, Barcelona, Espanha, (2001).
- Oñate, E., 'Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos-Análisis Estático Lineal', CIMNE, Barcelona, Espanha, (1992).
- Orbison, J.G.; McGuire, W. ; Abel, J.F., 'Yield Surface Applications in Non-linear Steel Frame Analysis', Comp. Methods Appl. Mech. Engrg. 33, 557-573 (1982).
- Park, M.S.; Lee, B.C., 'Geometrically Non-linear and Elastoplastic Three-dimensional Shear Flexible Beam Element of Von-mises-type Hardening Material', Int. J. Numer. Methods Eng, 39, 383-408 (1996).
- Rathod, H. T. ; Sridevi, K. , 'General Complete Lagrange Interpolations with Applications to Three-dimensional Finite Element Analysis', Comp. Methods Appl. Mech. Engrg. 190, 3325-3368 (2001).
- Saje, M., 'A Variational Principle for Finite Planar Deformation of Straight Slender Elastic Beams', Int. J. Solids Structures 26, 887-900 (1990).
- Saje, M.; G. Jeleni , 'A Kinematically Exact Space Finite Strain Beam Model-finite Element Formulation by Generalized Virtual Work Principle', Comp. Methods Appl. Mech. Engrg. 120, 131-161 (1995).
- Shi, G.; Atluri, S. N., 'Elasto-plastic Large Deformation Analisis of Space-frames: A Plastic-hinge and Stress-based Explicit Derivation of Tangent Stiffness', Int. j. numer. Methods eng, 26, 589-615 (1988).
- Silva, W. T. M, 'Análise Elastoplástica de Pórticos Espaciais Utilizando o Conceito de Rótula Plástica e o Método de Backward Euler ', Métodos Computacionais em Engenharia, Lisboa, Portugal (2004).
- Simo, J. C.; Ju, J. W., 'Strain and Stress Based Continuum Damage Models- Part I. Formulation', Int. J. Solids Structures 23 (7), 281-301 (1987).
- Simo, J. C.; Ju, J. W., 'Strain and Stress Based Continuum Damage Models- Part II. Computational Aspects', Int. J. Solids Structures 23, 841-869 (1987).
- Simo, J. C.; L. Vu-Quoc, 'A Geometrically-exact Rod Model Incorporating Ar and Torsion-warping Deformation', Int. J. Solids Structures 27(3) , 371-393 (1991).
- Teh, L. H., Murray J. C., 'Co-rotational and Lagragian Formulations for Elastic Three-dimensional Beam Finite Elements', Journal of Constructional Steel Research 48, 123-144 (1998).
- Timoshenko, S. P.; Goodier, J. N., 'Teoria de la Elasticidad', Edic. Urmo, Espanha, (1968).
- Wells, G. N. ; Sluys, L. J., 'Analysis of Slip in Three-dimensional Solids', Comp. Methods Appl. Mech. Engrg. 190, 3591-3606 (2001).



Wood, R.D.; Zienkiewicz, O.C., 'Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis of Beams, Frames, Arches and Axisymmetric Shells', *Comp.& Struc.* 7, 725-735 (1977).

## Apêndice A

### RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

#### A.1 INTRODUÇÃO

Este anexo apresenta uma breve revisão das relações constitutivas para o entendimento das regras utilizadas no processo de obtenção das superfícies de interação.

#### A.2 INELASTICIDADE

Um corpo elástico é aquele em que a deformação para qualquer ponto do corpo é completamente determinada pela tensão atual e temperatura, então um corpo inelástico possui qualquer coisa além da tensão atual e temperatura que determinam a deformação. Esta qualquer coisa pode ser por exemplo, um passado histórico da tensão e temperatura para o ponto. Este passado histórico da tensão e temperatura pode ser definido precisamente pelos conceitos da análise funcional, e uma avançada teoria matemática, conhecido como teoria dos materiais com memória, que foram formuladas aproximadamente a partir de 1960. A dependência da atual deformação do histórico de tensões pode ser expressa explicitamente quando o comportamento é linear. A relevante teoria é conhecida com a teoria da viscoelasticidade linear (Lubliner, 1990). Dentro de uma certa região de tensão, a região elástica, possui comportamento característico da teoria linear, mas fortemente histórica-dependente fora daquele intervalo. Quando o limite da região elástica (limite elástico) é atingido à medida que a tensão é incrementada, o metal é dito em escoamento. Quando a região elástica forma uma região no espaço de componentes de tensões, então é chamada usualmente de região elástica e o contorno é chamado de superfície de escoamento (Lubliner, 1990).

Para corpos inelásticos sobre deformação infinitesimal, é universalmente assumido que o tensor deformação pode ser decomposto aditivamente dentro de uma deformação elástica  $\varepsilon^e$  e uma deformação inelástica  $\varepsilon^i$ :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^i \quad (\text{A.1})$$

onde  $\varepsilon_{ij}^e = C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}$  (com deformação térmica adicionada se necessária).

#### A.3 LEIS DE FLUXO E POTENCIAL DE FLUXO

Independente da situação em que as componentes de deformação inelástica são incluídas de forma direta entre as variáveis internas  $\xi$  (qualquer variável em adição a tensão e deformação que define o estado local em pequena vizinhança de um meio contínuo), é sempre possível

definir a lei de fluxo como derivado de  $\epsilon^i$ , aplicando a regra básica de que  $\epsilon^i = \epsilon^i(\xi)$ . O resultado é

$$\dot{\epsilon}_{ij}^i = g_{ij}(\boldsymbol{\sigma}, T, \xi) \quad (\text{A.2})$$

onde:

$$g_{ij} = \varphi \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{A.3})$$

e  $\xi$  é a variável interna,  $T$  a temperatura e  $\boldsymbol{\sigma}$  o tensor de tensões.

Por conveniência, é assumido que  $g_{ij}$  é derivado de uma função escalar  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}, T, \xi)$ , chamada potencial de fluxo, onde  $\varphi(\boldsymbol{\sigma}, T, \xi)$  é inicialmente uma função escalar positiva.

O potencial de fluxo  $\mathbf{g}$  é comumente assumido em função, somente, da tensão, mais frequentemente usado na forma  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}, T, \xi) = \mathbf{J}_2$ , onde  $\mathbf{J}_2$  é o segundo invariante do tensor desviador ( $\mathbf{s}$ ), definido como:

$$\mathbf{J}_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \quad (\text{A.4})$$

Então:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \mathbf{J}_2 = \frac{\partial s_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial}{\partial s_{kl}} \left[ \frac{1}{2} s_{mn} s_{mn} \right] = s_{kl} \left[ \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right] = s_{ij} \quad (\text{A.5})$$

Segue-se que a lei de fluxo toma a seguinte forma:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^i = \varphi(\boldsymbol{\sigma}, T, \xi) s_{ij} \quad (\text{A.6})$$

A consequência desta lei de fluxo é que a deformação inelástica é preservada volumetricamente, ou seja, a deformação volumétrica é puramente elástica. Este resultado é frequentemente observado nos materiais reais (Lubliner, 1990).

## A.4 POSTULADO DA MÁXIMA-DISSIPAÇÃO

Drucker define que um material com endurecimento plástico é aquele em que o trabalho feito durante o incremento de carga é positivo, e o trabalho feito no ciclo carregamento-descarregamento é não-negativo; esta definição é geralmente conhecida na literatura como postulado de Drucker 's. Tendo definido o endurecimento em termos de trabalho, Drucker naturalmente estende a definição para o estado tridimensional geral de tensões e deformação, sendo que:

$$\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} > 0 \text{ e } \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p > 0 \quad (\text{A.7})$$

A igualdade existe somente se  $\dot{\epsilon}_{ij}^p > 0$  (ver eq. A.1). Para materiais elásticos perfeitamente plásticos a desigualdade de Drucker torna-se:

$$\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \geq 0 \text{ e } \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p = 0 \quad (\text{A.8})$$

Com isto pode ser visto que a desigualdade

$$\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (\text{A.9})$$

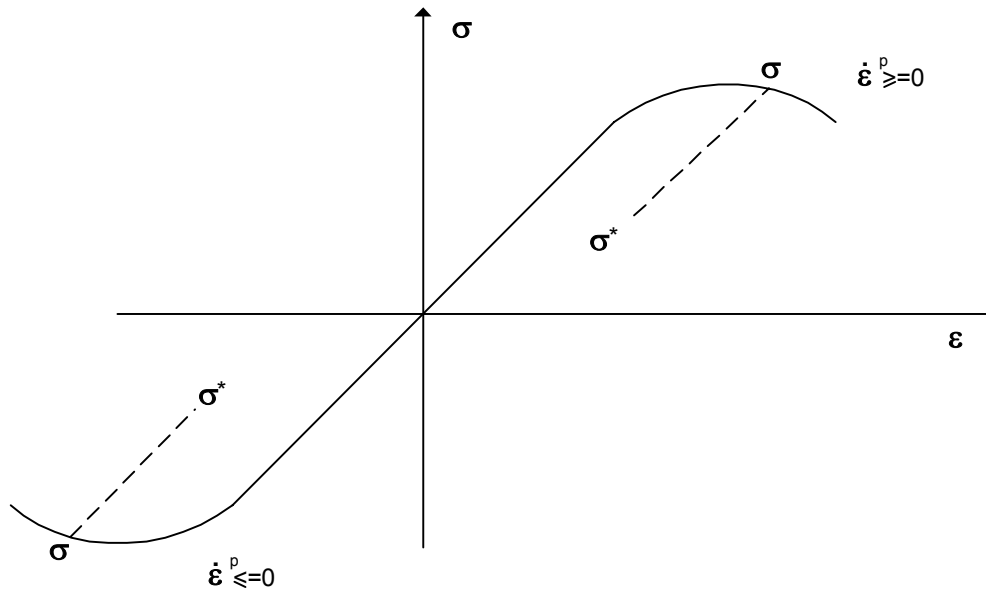


Figura A.1: Postulado da máxima dissipação plástica: Ilustração no plano de tensão-deformação (Lubliner, 1990).

simplifica a desigualdade de Drucker, e é válida para materiais com endurecimento plástico e elástico perfeitamente plástico.

Por causa do conceito de trabalho, o postulado de Drucker mostra que o produto escalar  $\dot{\sigma} \dot{\epsilon}^p$  expressa a hipótese de que a taxa de deformação plástica não pode se opor à taxa de tensão (Lubliner, 1990).

Tomando uma tensão elástica inicial  $\sigma^*$  e a tensão  $\sigma$  na superfície de escoamento, tem-se que o trabalho por unidade de volume realizado pelo agente externo é dado por  $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\epsilon}_{ij}^p$ . Em função do postulado de Drucker, implica em que:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (\text{A.10})$$

A desigualdade de (A.10) é uma condição necessária para o postulado de Drucker, porém, não suficiente. Em outras palavras, não é um limite para os materiais que tem endurecimento plástico; expressa a propriedade (ver fig.A.1) que a taxa de deformação plástica é positiva (negativa) somente se a tensão atual  $\sigma$  não seja menor (não maior que) qualquer tensão  $\sigma^*$  na fase elástica atual; em outras palavras, se  $\sigma$  é igual a tensão de escoamento de tração (compressão) atual. A desigualdade (A.10) constitui o postulado chamado de postulando da máxima dissipação plástica. A superfície de escoamento tem a forma lisa em qualquer lugar, ou seja, tem um hiper-plano tangente e uma direção normal para qualquer ponto. A região elástica inteira tem que estar a um lado da tangente. Como resultado, a superfície de escoamento tem que ser convexa (ver fig. A.2).

## A.5 NORMALIDADE

Para qualquer ponto da superfície  $f(\sigma, \epsilon) = 0$ , onde a superfície é lisa, o vetor normal externo é proporcional ao gradiente de  $f$  (no espaço de tensões), e portanto, podemos expressar

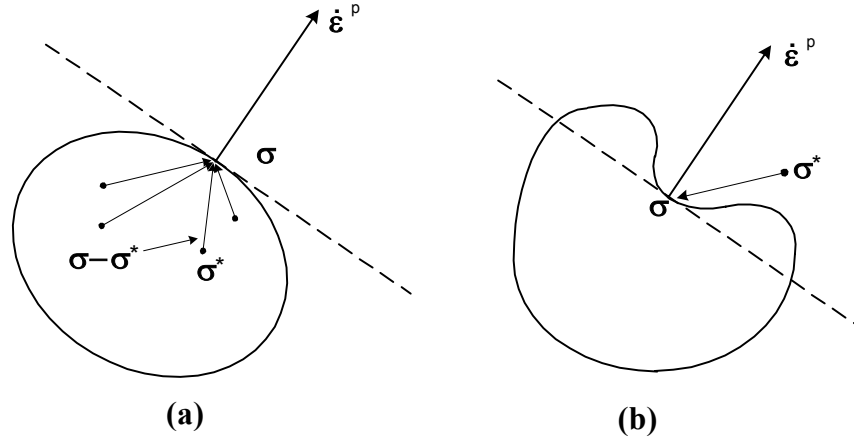


Figura A.2: Propriedades da superfície de escoamento com regra de fluxo associado: (a) normalidade; (b) convexidade (Lubliner, 1990).

a regra de normalidade como:

$$h_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (\text{A.11})$$

Levando em conta o tensor  $\mathbf{h}$ , a equação de fluxo para a deformação plástica é escrita da seguinte forma:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} h_{ij} \quad (\text{A.12})$$

onde:

$$\dot{\lambda} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{H} \langle \dot{f} \rangle, \quad f = 0 \\ 0, \quad f < 0 \end{array} \right\};$$

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \quad (\text{A.13})$$

$$H = - \sum_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial \xi_{\alpha}} h_{\alpha};$$

$$\dot{\xi}_{\alpha} = \dot{\lambda} h_{\alpha}.$$

Com  $H > 0$  e  $H < 0$  para materiais com endurecimento e amolecimento, respectivamente. O caso limite  $H = 0$ , que em particular ocorre quando  $f$  é independente de  $\xi_{\alpha}$ , descreve o material perfeitamente plástico. Quando  $\partial f / \partial \xi_{\alpha} = 0$ , com  $H = 0$ , tem-se que  $\dot{f} = f$ , e a condição  $\dot{f} > 0$  é impossível. As deformações plásticas ocorrem somente se  $(\partial f / \partial \sigma_{ij}) \dot{\sigma}_{ij} = 0$  (carregamento neutro) e a definição de  $\dot{\lambda}$  em (A.13) não pode ser usada.  $\dot{\lambda}$  é uma quantidade positiva indeterminada quando  $f = 0$  e  $(\partial f / \partial \sigma_{ij}) \dot{\sigma}_{ij} = 0$ , e zero em caso contrário. Nos outros casos,  $\dot{\lambda}$  e  $f$  são facilmente apresentados pelas condições de otimização de Kuhn-Tucker:

$$\dot{\lambda}f = 0, \dot{\lambda} \geq 0, f \leq 0 \quad (\text{A.14})$$

A especificação da função tensor  $\mathbf{h}$  na equação (A.12) é conhecida como regra de fluxo. A equação (A.11) expressa o resultado de que a função  $f$  definindo a superfície de escoamento é em si mesma um potencial plástico, e portanto a regra de normalidade é também chamada regra de fluxo que é associada com o critério de escoamento. A regra de fluxo derivada do potencial plástico  $g$  que é distinta de  $f$  ( $\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$  não é proporcional a  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ ) é chamada de regra de fluxo não-associada (Lubliner, 1990).

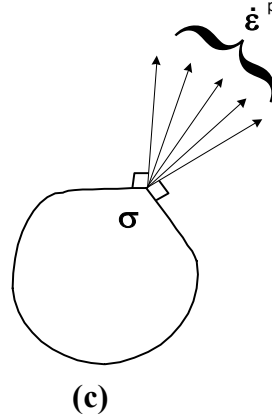


Figura A.3: Propriedades da superfície de escoamento com regra de fluxo associado: (c) canto (Lubliner, 1990).

Quando a superfície apresenta pontos de singularidade (cantos) (ver fig.A.3) para que a direção normal não seja única, então o ponto  $\dot{\epsilon}^p$  necessita de um cone formado pelos vetores normais. Este argumento faz com que a convexidade da superfície de escoamento não seja afetada por esta generalização. Assim, a equação (A.11) pode ser normalmente usada com a condição de que as derivadas parciais sigam corretamente interpretadas.

## A.6 CRITÉRIOS DE ESCOAMENTO E REGRA DE FLUXO

A função de escoamento  $f$  no espaço de tensões pode ser escrita, sem a perda da generalidade, em termos do tensor desviador e o primeiro invariante de tensão:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = \bar{f}(\mathbf{s}, I_1, \boldsymbol{\xi}) \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial s_{kl}} \frac{\partial s_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} = \left( \bar{f}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \bar{f}_{kk} \right) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial I_1} \delta_{ij} \quad (\text{A.16})$$

onde:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sigma_{kk} = \delta_{ij}\sigma_{ij}; \\
\partial I_1 / \partial \sigma_{ij} &= \delta_{ij}; \\
s_{kl} &= \sigma_{kl} - \frac{1}{3}I_1\delta_{kl} = \left[ \delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \right] \sigma_{ij}; \\
\frac{\partial s_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} &= \delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}; \\
\bar{f}_{ij} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial s_{ij}}.
\end{aligned} \tag{A.17}$$

No material plástico padrão, a mudança de volume (dilatância) ocorre se e somente se o critério de escoamento depende de  $I_1$ , na medida de tensão, e plástico incompressível, se e somente se o critério depende de  $s$  mas não de  $I_1$ .

O conceito de plasticidade foi primeiramente aplicado para os metais, em que a influência da medida de tensão no escoamento é geralmente desprezada. A seguir, apresentam-se resumos de alguns dos critérios que existem nas literaturas técnicas:

### A.6.1 Critério de Tresca

O critério de Tresca é o mais antigo datando de 1864; assume que a deformação plástica ocorre quando a máxima tensão de cisalhamento sobre os planos alcança um valor crítico, nominalmente, o valor da tensão de escoamento em cisalhamento, denotada por  $k(\xi)$ :

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{2} \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) - k(\xi) \\
&= \frac{1}{4} (|\sigma_1 - \sigma_2| + |\sigma_2 - \sigma_3| + |\sigma_3 - \sigma_1|) - k(\xi)
\end{aligned} \tag{A.18}$$

Em termos dos invariantes do tensor desviador de tensões  $\mathbf{J}_2$  e  $\mathbf{J}_3$ :

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = 4\mathbf{J}_2^3 - 27\mathbf{J}_3^2 - 36k^2\mathbf{J}_2^2 + 96k^4\mathbf{J}_2 - 64k^6 \tag{A.19}$$

### A.6.2 Regra de fluxo de Lévy e Critério de Mises

No século XX, St. Venant e outros usaram o critério de Tresca junto a regra de fluxo (não-associada), explicada no item A.5, derivada de  $\mathbf{J}_2$  (Lubliner, 1990). A forma geral foi proposta por Lévy como:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda}s_{ij} \tag{A.20}$$

O critério de escoamento em que esta regra de fluxo é associada é o critério de Mises, 1913, representado pela seguinte função e escoamento:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = \sqrt{\mathbf{J}_2} - k(\xi) \tag{A.21}$$

O critério de Mises é também conhecido como o critério das tensões octaédricas de cisalhamento máximo, que mostra a energia complementar de um material isotrópico, elástico linear pode ser desacoplada em partes volumétrica e distorcional, com isto, é também chamado critério da máxima energia distorcional.

Outras maneiras de apresentar a equação (A.21) são vistas a seguir:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{J}_2 - k^2 \quad (\text{A.22})$$

Expressando  $\mathbf{J}_2$  em termos de tensões principais, pode-se rerepresentar o critério de Mises da seguinte forma:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 6k^2 \quad (\text{A.23})$$

ou

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 - \sigma_1\sigma_2 = 3k^2 \quad (\text{A.24})$$

### A.6.3 Critério de Mohr-Coulomb

Foi formulado por Coulomb em 1773 e desenvolvido com mais profundidade por Mohr em 1882. Este critério depende de dois parâmetros, a coesão  $c$  e o coeficiente de fricção interna  $\mu = \tan(\psi)$ . É conveniente representar o círculo de Mohr (Lubliner, 1990), parametricamente:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_m + \tau_m \cos(2\alpha); \\ \tau &= \tau_m \sin(2\alpha). \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

onde  $\alpha$  é o ângulo entre o plano de ruptura e o eixo da menor tensão de tração (maior compressiva). A condição de tangenciamento é então:  $\mu = \cot g(2\alpha)$ , com  $\alpha = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\psi$ ,  $\sin(2\alpha) = \cos(\psi)$ , e  $\cos(2\alpha) = \sin(\psi)$ . A equação em termos de  $\sigma_m$  e  $\tau_m$ , torna-se:

$$\tau_m + \sigma_m \sin(\psi) = c \cos(\psi) \quad (\text{A.26})$$

Em termos de tensões principais:

$$\sigma_{\max} - \sigma_{\min} + (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) \sin(\psi) = 2c \cos(\psi) \quad (\text{A.27})$$

onde  $\sigma_{\max}$  e  $\sigma_{\min}$  denotam, respectivamente, a maior e menor tensão principal em valor algébrico.

A equação (A.27) pode ser reescrita como:

$$\sigma_{\max} - \sigma_{\min} + \frac{1}{3} [(\sigma_{\max} - \sigma_{int}) - (\sigma_{int} - \sigma_{\min})] \sin(\psi) = 2c \cos(\psi) - \frac{2}{3} I_1 \sin(\psi) \quad (\text{A.28})$$

onde  $\sigma_{int}$  é a tensão principal intermediária.



#### A.6.4 Critério de Drucker-Prager

Combinando a fricção de Coulomb com o critério de escoamento de Mises, foi proposto por Drucker e Prager em 1952. O critério de Mises é interpretado em termos das tensões de cisalhamento octaédricas e pode ser postulado que ocorre o escoamento no plano octaédrico quando  $\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}}k - \frac{1}{3}\mu\mathbf{I}_1$ . Pode ser representado pela função a seguir:

$$\bar{f}(\mathbf{s}, \mathbf{I}_1) = \sqrt{\mathbf{J}_2} + \mu\mathbf{I}_1/\sqrt{6} - k \quad (\text{A.29})$$

## Apêndice B

### MODELO DE DANO ISOTRÓPICO

#### B.1 INTRODUÇÃO

Este anexo apresenta os conceitos necessários para se entender o critério de dano e sua aplicação para estudar o comportamento não-linear do material.

#### B.2 CONCEITO DE DANO

O modelo de dano plástico fundamenta a sua formulação na mecânica dos sólidos, particularmente na teoria da plasticidade e na teoria de dano contínuo (ver figura B.1). O dano de um sólido contínuo, no sentido da degradação da rigidez, é uma alteração das propriedades elásticas durante a aplicação da carga como consequência de uma diminuição da área efetiva resistente. Esta perda de área efetiva é normalmente causada pelo crescimento dos vazios e/ou microfissuras. O fenômeno do dano somente afeta as propriedades elásticas do material, enquanto a plasticidade se desenvolve como consequência de um crescimento irreversível na deformação plástica. Os fenômenos são complementares e é normal observar, nos materiais, uma perda de resistência devida ao dano (perda de elasticidade) e, pela plasticidade, o crescimento da deformação inelástica. É habitual encontrar modelos para o tratamento dos materiais dúcteis como os metais, porém nem sempre é possível conseguir modelos com a mesma eficiência para representar o comportamento dos materiais frágeis. Por este motivo, o modelo de dano foi formulado inicialmente para materiais frágeis, porém pode ser utilizado para representar o comportamento dos materiais dúcteis fazendo-se algumas particularizações nos parâmetros que o definem (Oller, 2001).

O programa de análise 3D usa o modelo constitutivo de dano isotrópico. O modelo é usado para problemas termicamente estáveis, na configuração material lagrangiana com pequenas deformações e deslocamentos (Hanganu, 1997). Define-se, a seguir, a variável de dano  $d$  associada a uma superfície elementar com um volume de material degradado (ver a figura B.2).

$$d = \frac{S - \bar{S}}{S} = 1 - \frac{\bar{S}}{S} \quad (\text{B.1})$$

onde:  $S$  é a área total da seção,  $\bar{S}$  é a área resistente efetiva, e  $(S - \bar{S})$  é a área ocupada pelas aberturas (ver figura B.2).

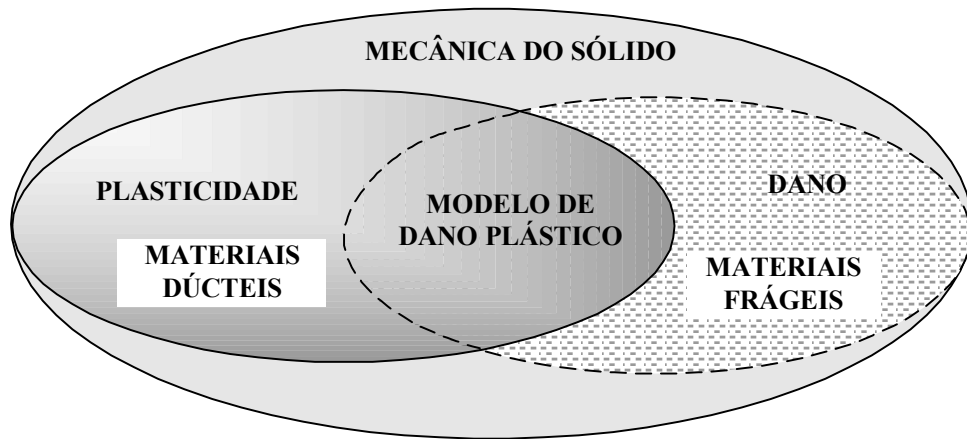


Figura B.1: Representação simples das teorias que contribuem para a definição do "modelo de dano plástico"(Oller, 2001).

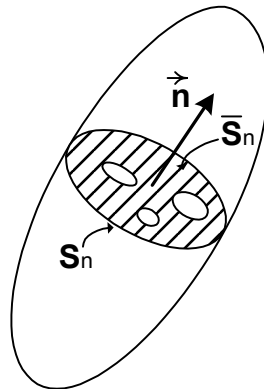


Figura B.2: Superfície com dano (Hanganu, 1997).

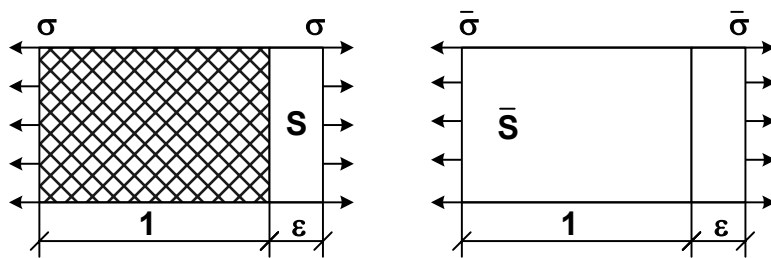


Figura B.3: Tensão de Cauchy  $\sigma$  e tensão efetiva  $\bar{\sigma}$  (Hanganu, 1997).

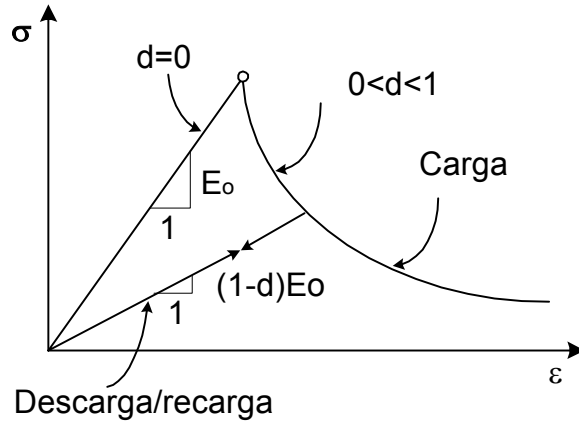


Figura B.4: Evolução da curva uniaxial tensão-deformação (Hanganu, 1997).

Na relação anterior,  $d$  representa a densidade dos defeitos do material e terá o valor zero no estado inicial, sem dano. À medida que a fissuração avança,  $d$  tenderá a um valor crítico, próximo da unidade que corresponde a completa falta de área resistente  $\bar{S}$ . A relação de equilíbrio entre a tensão de Cauchy  $\sigma$  e a tensão efetiva  $\bar{\sigma}$  (ver figura B.3) é vista a seguir:

$$\sigma S = \bar{\sigma} \bar{S} \quad (B.2)$$

Usando as equações (B.1) e (B.2), obtêm-se (ver figura B.4):

$$\sigma = (1 - d) \bar{\sigma} = (1 - d) E \varepsilon \quad (B.3)$$

Durante um processo de degradação em evolução, é a área efetiva que suporta a carga externa, sendo assim,  $\bar{\sigma}$  é um parâmetro fisicamente mais representativo que  $\sigma$ . Os modelos de dano descrevem o comportamento não-linear mediante uma ou várias variáveis internas de dano, que medem a perda de rigidez secante do material e que se normalizam com respeito à unidade, a qual corresponde o dano máximo. O efeito do dano se traduz na diminuição do módulo de rigidez secante. O modelo considerado na tese doutoral de Hanganu foi o de dano baseado na mecânica do sólido deformável com somente uma variável interna (Hanganu, 1997).

### B.3 CONSIDERAÇÕES ENERGÉTICAS

O modelo se formula, para problemas termicamente estáveis, na configuração material lagrangiana para pequenas deformações e deslocamentos. Para este caso particular se considera a seguinte expressão matemática para a energia livre  $\Psi$ , onde a parte elástica não degradada é escrita como uma função escalar quadrática de argumentos tensoriais:

$$\Psi(\varepsilon; d) = (1 - d) \Psi(\varepsilon) = (1 - d) \left( \frac{1}{2m_0} \varepsilon^T \sigma^0 \right) = (1 - d) \left( \frac{1}{2m_0} \varepsilon^T C^0 \varepsilon \right) \quad (B.4)$$

O tensor de deformações  $\varepsilon$  é a variável livre do problema,  $d$  ( $0 \leq d \leq 1$ ) é a variável interna de dano,  $m_0$  é a densidade na configuração material e  $C^0$  é o tensor de rigidez do material no estado inicial não degradado.

## B.4 INEQUAÇÃO DE CLASIUS-PLANCK. DISSIPACÃO MECÂNICA

Para problemas termicamente estáveis é válida a inequação de Clasius-Planck (Hanganu, 1997) para representar a dissipação  $\Xi_m$ , que é estabelecida como sempre crescente, ou seja, a potência dissipativa  $\Xi_m$  de um ponto é sempre positiva e tem a seguinte forma local lagrangiana:

$$\dot{\Xi}_m = \frac{1}{m_0} \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\Psi} \geq 0 \quad (\text{B.5})$$

ou

$$\dot{\Xi}_m = \frac{1}{m_0} \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} \right) \geq 0 \quad (\text{B.6})$$

e finalmente,

$$\dot{\Xi}_m = \left( \frac{1}{m_0} \boldsymbol{\sigma}^T - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} \geq 0 \quad (\text{B.7})$$

A expressão da potência dissipativa permite fazer as seguintes observações:

a) A inequação (B.7) deve cumprir-se para qualquer variação temporal arbitrária da variável livre  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , com o qual o multiplicador de  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  tem que ser *zero*. Esta condição proporciona a lei hiperelástica secante para o problema de dano estudado, que é:

$$\frac{1}{m_0} \boldsymbol{\sigma}^T - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = 0 \implies \boldsymbol{\sigma} = m_0 \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right\}^T = (1-d) \mathbf{C}^0 \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^S \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{B.8})$$

onde  $\mathbf{C}^S$  é a matriz constitutiva secante do material estudado.

b) Considerando a última equação (B.7), a potência dissipativa é apresentada como:

$$\dot{\Xi}_m = -\frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} = \Psi_0 \dot{d} \geq 0 \quad (\text{B.9})$$

o que é equivalente a  $\dot{d} \geq 0$ , ou seja, o dano nunca pode diminuir.

## B.5 CRITÉRIO LIMITE DE DEGRADAÇÃO (DANO)

O limite do dano se define como uma função da energia livre do material não degradado que, a sua vez, está escrita em função das tensões principais não danificadas  $\boldsymbol{\sigma}_i^{p,0}$ :

$$F = K (\boldsymbol{\sigma}^{p,0}) \sqrt{2m_0 \Psi_0} - 1 = \frac{K (\boldsymbol{\sigma}^{p,0})}{\sqrt{E^0}} \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\boldsymbol{\sigma}_i^{p,0})^2} - 1 \leq 0 \quad (\text{B.10})$$

Os termos da função limite de dano são:

$$K(\sigma^{p,0}) = \frac{r}{\sqrt{2m_0(\Psi_t^0)_L}} + \frac{1-r}{\sqrt{2m_0(\Psi_c^0)_L}}; \quad r = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i^{p,0} \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i^{p,0}|} \quad (\text{B.11})$$

$$2m_0(\Psi_{t,c}^0)_L = \sum_{i=1}^3 \langle \pm \sigma_i^{p,0} \rangle \varepsilon_i; \quad (\Psi_0)_L = (\Psi_t^0)_L + (\Psi_c^0)_L \quad (\text{B.12})$$

Nestas equações  $(\Psi_{t,c}^0)_L$  é representada a parte da energia livre desenvolvida quando se alcança o limite de resistência a tração ou compressão do material e  $\langle \pm x \rangle = \frac{1}{2}(|x| \pm x)$  é a função de McAuley. A variável  $r$  é um escalar que no caso de um estado de compressão pura toma o valor 0, no caso de tração pura o valor 1 e valores intermediários nos demais casos, de maneira que indica o estado tensional dominante segundo está mais próximo de um limite ou outro; tem o papel de unificar em um único critério de dano os limites de degradação diferentes na tração e compressão (Hanganu, 1997). Levando em conta que as resistências a tração e compressão são  $f_t = (2m_0\Psi_t^0 E^0)_L^{1/2}$  e  $f_c = (2m_0\Psi_c^0 E^0)_L^{1/2}$  respectivamente, a função limite do dano pode ser escritas:

$$F = \bar{\sigma} - f_c = [1 + r(n-1)] \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\sigma_i^{p,0})^2} - f_c \leq 0 \quad (\text{B.13})$$

com  $n = f_c/f_t$ .

No caso de um estado de tração triaxial, a parte  $\bar{\sigma}$  da equação (B.13) é tratada com o valor  $n$ , ou seja, a tensão equivalente é multiplicada por este valor para poder compará-la com o limite de dano  $f_c$ . Para a compressão triaxial seu valor é 1.

Esta função de limite de dano, é apresentada no espaço de tensões principais não dani-ficadas e permite uma grande diversidade de soluções distintas. A vantagem do critério de dano (eq. B.13) consiste na possibilidade de empregar qualquer função  $F$  que seja homogênea e de primeiro grau nas tensões, como por exemplo, as de Mohr-Coulomb, Drucker-Prager, Lubliner, etc. Uma representação da superfície de degradação é vista a seguir:

Uma função equivalente à equação (B.5) é apresentada, em (Simo et al., 1987a), a fim de simplificar a dedução matemática da variável de dano do modelo:

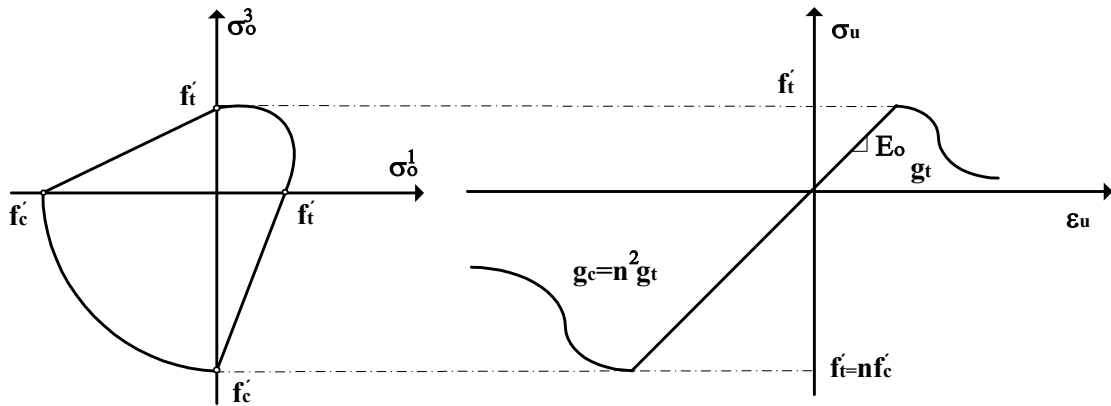


Figura B.5: Função limite de dano no plano principal  $\sigma_1 - \sigma_2$  (Hanganu, 1997).

$$\bar{F} = G(\bar{\sigma}) - G(f_c) \leq 0 \quad (\text{B.14})$$

onde  $G(\chi)$  é uma função escalar, inversível, positiva e de derivada positiva, a determinar.

## B.6 REGRA DE EVOLUÇÃO DA VARIÁVEL INTERNA DO DANO

A fórmula matemática para definir a regra de evolução da variável interna do dano, análoga ao fluxo plástico, é apresentada a seguir:

$$\dot{d} = \dot{\eta} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\sigma}} = \dot{\eta} \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \quad (\text{B.15})$$

onde  $\dot{\eta}$  é um escalar não negativo chamado parâmetro de consistência de dano, análogo ao parâmetro de consistência plástica  $\dot{\lambda}$  da plasticidade.

## B.7 CONDIÇÃO DE CONSISTÊNCIA DO DANO

O valor do parâmetro de consistência de dano se obtém a partir das condições análogas ao segundo postulando de Drucker na plasticidade, sendo que para os modelos de dano, são usadas as condições de Ilyushin (Hanganu, 1997). Estas condições requerem que, para haver a evolução dos processos de dano, o ponto deve encontrar-se sobre a superfície limite do dano ( $\bar{F}=0$ ) e permanecer sobre ela durante os processos ( $\dot{\bar{F}}=0$ , o que significa que  $\bar{F}$  mantém no tempo, seu valor nulo). Estas condições conduzem a seguinte série de deduções:

$$\bar{F}=0 \implies G(\bar{\sigma}) - G(f_c) = 0 \implies G(\bar{\sigma}) = G(f_c) \quad (\text{B.16})$$

Aplicando as propriedades da inversibilidade e derivabilidade da função  $G(\chi)$  é deduzida que:

$$G(\bar{\sigma}) = G(f_c) \implies \bar{\sigma} = f_c \implies \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} = \frac{dG(f_c)}{df_c} \quad (\text{B.17})$$

Da condição de permanência sobre a superfície limite de dano é deduzido que:

$$\dot{\bar{F}}=0 \implies \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial f_c} \dot{f}_c = \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}} - \frac{dG(f_c)}{df_c} \dot{f}_c = 0 \quad (\text{B.18})$$

onde resulta:

$$\frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}} = \frac{dG(f_c)}{df_c} \dot{f}_c \implies \dot{\bar{\sigma}} = \dot{f}_c \quad (\text{B.19})$$

A primeira parte da relação anterior pode apresentar-se da seguinte forma:

$$\frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}} = \frac{dG(f_c)}{df_c} \dot{f}_c = \frac{dG(f_c)}{df_c} \frac{df_c}{d(d)} \dot{d} = \frac{dG(f_c)}{df_c} \dot{\eta} \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \quad (\text{B.20})$$

$$\dot{\bar{\sigma}} = \frac{dG(f_c)}{d(d)} \dot{\eta} \quad (\text{B.21})$$

Adotando-se a função  $G(f_c)$  como a função que descreve a evolução do dano ( $d = G(f_c)$ ), fica determinado o parâmetro de consistência de dano  $\dot{\eta}$  como:

$$\dot{\eta} = \dot{\bar{\sigma}} = \dot{f}_c = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma^0} \dot{\sigma}^0 = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma^0} \mathbf{C}^0 \dot{\varepsilon} \quad (\text{B.22})$$

substituindo a equação (B.22) em (B.15) e depois em (B.9) são obtidas as expressões que formulam a evolução temporal das variáveis de dano e de dissipação:

$$\dot{d} = \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}} = \dot{G}(\bar{\sigma}) \implies d = \int_0^t \dot{d} dt \equiv \int_0^t \dot{G}(\bar{\sigma}) dt = G(\bar{\sigma}) \quad (\text{B.23})$$

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_m = \Psi_o \dot{G}(\bar{\sigma}) = \Psi_o \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}} = \Psi_o \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma^0} \mathbf{C}^0 \dot{\varepsilon} \quad (\text{B.24})$$

## B.8 CONDIÇÃO DE CARREGAMENTO E DESCARREGAMENTO

A condição de carregamento e descarregamento é derivada das relações de Kuhn-Tucker formuladas para problemas com restrições unilaterais (Oller, 2001):

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &\geq 0; \\ \bar{F} &\leq 0; \\ \dot{\eta} \bar{F} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

A partir das equações (B.25) tem-se que: 1) se  $\bar{F} < 0$  a terceira condição faz que  $\dot{\eta} = 0$ ; ou seja, faz com que não possa ser desenvolvidos processos de dano; e 2) se  $\dot{\eta} > 0$  a 3ª condição requer que  $\bar{F} = 0$ , ou seja, que se há alcançado a superfície limite do dano e se desenvolvem fenômenos de degradação.

## B.9 FUNÇÃO DE EVOLUÇÃO DO DANO $G(\bar{\sigma})$

Entre as diversas alternativas para definir a função de evolução do dano  $G(\bar{\sigma})$ , se escolhe a seguinte:

$$G(\bar{\sigma}) = 1 - \frac{\bar{G}(\bar{\sigma})}{\bar{\sigma}} \quad (\text{B.26})$$

onde  $\bar{G}(\bar{\sigma})$  descreve uma função similar a apresentada na figura (B.6), de maneira que para  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^*$  a tensão de compressão do limite inicial é  $\bar{G}^*$  e para  $\bar{\sigma} \rightarrow \infty$  a resistência final  $\bar{G} \rightarrow 0$  (Hanganu, 1997). Deste modo, esta função define a evolução do limite do dano que é de magnitude análoga à superfície de fluência na plasticidade.



Neste trabalho, utiliza-se a seguinte função  $\bar{G}(\bar{\sigma})$  exponencial, (Oliver et al, 1990):

$$\bar{G}(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma}^* e^{A(1-\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}^*})}; \quad G(\bar{\sigma}) = 1 - \frac{\bar{\sigma}^*}{\bar{\sigma}} e^{A(1-\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}^*})} \quad (\text{B.27})$$

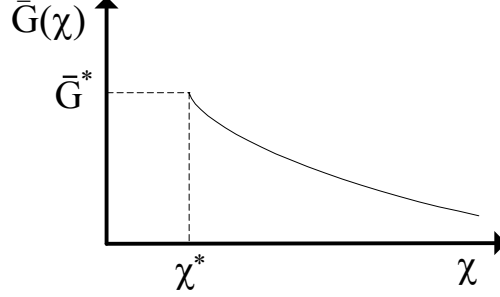


Figura B.6: Representação da função  $G(\bar{\sigma})$  escolhida (Hanganu, 1997).

## B.10 PARÂMETRO A DA FUNÇÃO $G(\bar{\sigma})$

Para o caso de tração uniaxial, sobre um carregamento monótono crescente, tem-se que a evolução da dissipação é dada pela equação (B.24), com  $\bar{\sigma} = \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}_t$ ,  $\Psi_0 = \frac{1}{2m_0} \boldsymbol{\varepsilon}_t E^0 \boldsymbol{\varepsilon}_t = \frac{(\boldsymbol{\sigma}_t)^2}{2m_0 E^0} = \frac{\bar{\sigma}^2}{2m_0 n^2 E^0}$ . Integrando (B.24) no tempo, através da tensão equivalente não degradada  $\bar{\sigma}$ , que depende do tempo, calcula-se que a dissipação total no fim do processo de tração uniaxial é:

$$\Xi_t^{\max} = \int_{\bar{\sigma}^*}^{\infty} \frac{\bar{\sigma}^2}{2m_0 n^2 E^0} \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} d\bar{\sigma} = \int_{\bar{\sigma}^*}^{\infty} \frac{\bar{\sigma}^2}{2m_0 n^2 E^0} dG(\bar{\sigma}) \quad (\text{B.28})$$

$$\Xi_t^{\max} = \left[ \frac{\bar{\sigma}^2}{2m_0 n^2 E^0} G(\bar{\sigma}) \right]_{\bar{\sigma}^*}^{\infty} - \int_{\bar{\sigma}^*}^{\infty} G(\bar{\sigma}) \frac{\bar{\sigma}}{m_0 n^2 E^0} d\bar{\sigma} \quad (\text{B.29})$$

$$\Xi_t^{\max} = \frac{(\bar{\sigma}^*)^2}{m_0 n^2 E^0} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{A} \right] \implies A = \frac{1}{\frac{\Xi_t^{\max} m_0 n^2 E^0}{(\bar{\sigma}^*)^2} - \frac{1}{2}} \geq 0 \quad (\text{B.30})$$

onde  $\bar{\sigma}^*$  é a tensão limite de dano inicial. Aplicando as mesmas hipóteses para um processo de compressão uniaxial e postulando que o parâmetro  $A$  deve ser o mesmo nos dois casos, se deduz que:

$$A = \frac{1}{\frac{\Xi_c^{\max} m_0 E^0}{(\bar{\sigma}^*)^2} - \frac{1}{2}} \geq 0 \implies \Xi_c^{\max} = n^2 \Xi_t^{\max} \quad (\text{B.31})$$

O valor de dissipação máxima a tração  $\Xi_t^{\max}$  é igual a densidade de energia de fratura  $g_f$ , parâmetro derivado da mecânica da fratura (Oliver et al, 1990) como  $g_f = G_f/l_c$ , que é a

energia de fratura  $G_f$  (constante de material) normalizada pela longitude característica  $l_c$  do domínio finito fraturado (Lubliner et al., 1989).

A longitude característica tem um papel fundamental em assegurar a objetividade com respeito à malha de elementos finitos da resposta estrutural. Sem problemas se introduz uma dependência da malha em função do parâmetro  $A$  e através deste mesmo dano local  $d$  se vê afetado pelo tamanho do elemento finito a qual pertence o ponto de integração analisado (Hanganu, 1997). Isto se deve a que cada ponto de integração é representativo de um certo volume de material e deve dissipar somente a energia que corresponde a este volume. Um maior tamanho de elemento finito fará com que maior seja a energia associada a um ponto de integração numérica, já que todos os elementos de um mesmo tipo utilizam a mesma regra de integração. Sem problemas isto assegura que na estrutura inteira se dissipa a mesma energia independentemente da malha de elementos finitos empregada assegurando a objetividade da resposta.

Impondo a condição em que a dissipação total não pode ser menor que a energia livre que estava acumulada no material, no momento onde o ponto havia alcançado pela primeira vez o limite de dano, obtém-se que:

$$\Xi_t^{\max} = \Xi_t^{\min} + \Delta\Xi_t^{\max} \quad (\text{B.32})$$

onde  $\Delta\Xi_t^{\max} \geq 0$  e

$$\Xi_t^{\min} = \bar{\Psi}_0^* = \frac{(\bar{\sigma}^*)^2}{2m_0n^2E^0} \quad (\text{B.33})$$

Substituindo a equação (B.32) na equação (B.30), que define o parâmetro  $A$ , obtém-se:

$$A = \frac{(\bar{\sigma}^*)^2}{\Delta\Xi_t^{\max}m_0n^2E^0} = \frac{2\Xi_t^{\min}}{\Delta\Xi_t^{\max}} \quad (\text{B.34})$$

A expressão anterior mostra que o parâmetro  $A$  é não-negativo.

## B.11 ASPECTOS ENERGÉTICOS DO FENÔMENO DE DEGRADAÇÃO

### (DANO)

Considere um processo de tração uniaxial, tal como é apresentado na figura (B.7). Para um ponto que tenha superado o limite de degradação e possua a deformação  $\varepsilon$ , a tensão normal  $\sigma$  é menor que a tensão  $\sigma^0$  correspondente ao caso no qual não ocorra nenhuma degradação (Hanganu, 1997). A definição das energias potenciais relacionadas com as tensões  $\sigma$  e  $\sigma^0$  são:

$$\mathbf{W}_p^0 = \frac{1}{2}\sigma^0\varepsilon; \quad \mathbf{W}_p = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon \quad (\text{B.35})$$

onde  $\sigma = (1 - d)\sigma^0$  tal como é apresentado na relação (B.8). Diferenciando as expressões das duas energias potenciais são obtidas suas variações infinitesimais como:

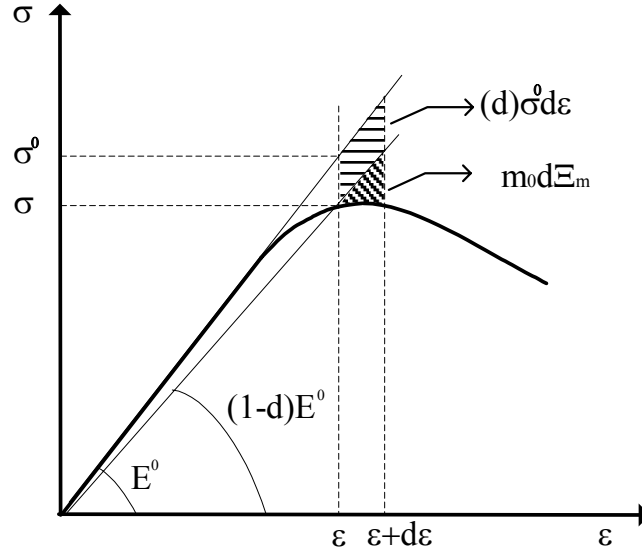


Figura B.7: Deslocamento da perda de energia  $\delta W_p$  (Hanganu, 1997).

$$dW_p^0 = \frac{1}{2} (d\sigma^0 \varepsilon + \sigma^0 d\varepsilon) = \frac{1}{2} (E^0 d\varepsilon \varepsilon + \sigma^0 d\varepsilon) = \sigma^0 d\varepsilon \quad (\text{B.36})$$

$$dW_p = \frac{1}{2} (\sigma d\varepsilon + d\sigma \varepsilon) = \frac{1}{2} [(1-d) \sigma^0 d\varepsilon + (1-d) d\sigma^0 \varepsilon - \sigma^0 \varepsilon d(d)]$$

$$dW_p = (1-d) \sigma^0 d\varepsilon - \frac{1}{2} \sigma^0 \varepsilon d(d) \quad (\text{B.37})$$

A equação (B.9) que define a variação temporal da dissipação pode escrever-se na forma:

$$d\Xi_m = \Psi_0 d(d) = \frac{1}{2m_0} \sigma^0 \varepsilon d(d) \quad (\text{B.38})$$

onde

$$dW_p = (1-d) \sigma^0 d\varepsilon - m_0 d\Xi_m \quad (\text{B.39})$$

Conclui-se que devido aos fenômenos de degradação ocorre uma perda de energia potencial  $\delta W_p$ , cujo valor é:

$$\delta W_p = dW_p^0 - dW_p = (d) \sigma^0 d\varepsilon + m_0 d\Xi_m \quad (\text{B.40})$$

Esta última relação está representada graficamente na figura (B.7) que é apresentada de modo separado em termos energéticos. O primeiro corresponde à situação de dano constante, enquanto o segundo mede a dissipação que se desenvolve durante este mesmo incremento de deformação  $d\varepsilon$ , como efeito do aumento do dano (Hanganu, 1997).

A energia dissipada acumulada até um dado instante de tempo, caracterizado por um dano  $d$  e uma tensão equivalente  $\bar{\sigma}$ , é obtida seguindo um procedimento análogo ao empregado para obter o valor do parâmetro  $A$  na forma:

$$\Xi_t = \int_{\bar{\sigma}^*}^{\bar{\sigma}} \frac{\bar{\sigma}^2}{2m_0 n^2 E^0} \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} d\bar{\sigma} = \Xi_t^{\max} \left[ 1 - (1-d) \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}^*} \frac{2 + \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}^*} A}{2 + A} \right] \quad (\text{B.41})$$

## B.12 MATRIZ TANGENTE DO MODELO DE DANO

### B.12.1 I. Dedução da matriz tangente

Partindo da equação (B.8), da variação virtual do tensor de tensões e do tensor constitutivo tangente não simétrico  $\mathbf{C}^D$  do modelo de dano isotrópico, podem deduzir-se que:

$$\delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^S \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \delta \mathbf{C}^S \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{B.42})$$

$$\delta \mathbf{C}^S = \frac{\partial \mathbf{C}^S}{\partial d} \delta d = -\mathbf{C}^0 \delta d \quad (\text{B.43})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{C}^0)^{-1} \boldsymbol{\sigma}^0 \implies \delta \boldsymbol{\sigma} = (1-d) \mathbf{C}^0 \delta \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}^0 \delta d \quad (\text{B.44})$$

$$\delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^D \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \left[ (1-d) \mathbf{I} - \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \boldsymbol{\sigma}^0 \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^0} \right] \mathbf{C}^0 \delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{B.45})$$

$$\mathbf{C}^D = \left[ (1-d) \mathbf{I} - \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \boldsymbol{\sigma}^0 \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^0} \right] \mathbf{C}^0 = (\mathbf{I} - \mathbf{D}) \mathbf{C}^0 \quad (\text{B.46})$$

$$\mathbf{D} = d \mathbf{I} + \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \boldsymbol{\sigma}^0 \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^0} \quad (\text{B.47})$$

onde  $\mathbf{I}$  é matriz identidade de mesma ordem que  $\mathbf{C}^0$  e  $\mathbf{D}$  é uma matriz não simétrica que depende somente do vetor de tensões não degradadas  $\boldsymbol{\sigma}^0$ , posto que a variável de dano depende implicitamente do vetor de tensões através da tensão equivalente  $\bar{\sigma}$ .

### B.12.2 II. Cálculo da matriz tangente

O cálculo da matriz de rigidez tangente deduz os valores de todos os termos da equação

$$d = G(\bar{\sigma}) = 1 - \frac{\bar{\sigma}^*}{\bar{\sigma}} e^{A(1-\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}^*})} \implies \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} = (1-d) \left( \frac{1}{\bar{\sigma}} + \frac{A}{\bar{\sigma}^*} \right) \quad (\text{B.48})$$

A tensão equivalente é função do tensor de tensões principais  $\boldsymbol{\sigma}^{p,0}$ , sendo assim, a sua derivada com respeito ao vetor de tensões  $\boldsymbol{\sigma}^0$  tem a seguinte decomposição (Hanganu, 1997):

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^0} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{p,0}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{p,0}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^0} \quad (\text{B.49})$$

O cálculo do primeiro fator é baseado na definição (B.13) que resulta em:

$$\bar{\sigma} = [1 + r(n-1)] \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\sigma_i^{p,0})^2} = [1 + r(n-1)] u_1 \quad (\text{B.50})$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i^{p,0} \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i^{p,0}|} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^3 \sigma_i^{p,0}}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i^{p,0}|} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{u_2}{u_3} \quad (\text{B.51})$$

onde

$$u_1 = \frac{\bar{\sigma}}{1 + r(n-1)} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\sigma_i^{p,0})^2} \Rightarrow \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial \sigma^{p,0}} \right\}^T = \frac{\sigma^{p,0}}{u_1} \quad (\text{B.52})$$

$$u_2 = \mathbf{I}_1 = \sum_{i=1}^3 \sigma_i^{p,0} \Rightarrow \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial \sigma^{p,0}} \right\}^T = \mathbf{1}_3 \quad (\text{B.53})$$

$$u_3 = \frac{\mathbf{I}_1}{2r-1} = \sum_{i=1}^3 |\sigma_i^{p,0}| \Rightarrow \left\{ \frac{\partial u_3}{\partial \sigma^{p,0}} \right\}^T = \text{sign}(\sigma^{p,0}) \quad (\text{B.54})$$

onde  $\mathbf{I}_1$  é o primeiro invariante do tensor de tensões e  $\mathbf{1}_3$  é o vetor coluna unidade de 3 (três) componentes. Em função das equações anteriores podem desenvolvidas as seguintes relações:

$$\left\{ \frac{\partial r}{\partial \sigma^{p,0}} \right\}^T = \frac{\partial r}{\partial u_2} \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial \sigma^{p,0}} \right\}^T + \frac{\partial r}{\partial u_3} \left\{ \frac{\partial u_3}{\partial \sigma^{p,0}} \right\}^T = \frac{1}{2u_3} \mathbf{1}_3 - \frac{1}{2} \frac{u_2}{u_3^2} \text{sign}(\sigma^{p,0}) \quad (\text{B.55})$$

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma^{p,0}} \right\}^T &= \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \sigma^{p,0}} \right\}^T + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial u_1} \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial \sigma^{p,0}} \right\}^T \\ &= \frac{(n-1)u_1}{2u_3} \mathbf{1}_3 - \frac{(n-1)u_1 u_2}{2u_3^2} \text{sign}(\sigma^{p,0}) + \frac{1+r(n-1)}{u_1} \sigma^{p,0} \\ &= \frac{(n-1)(2r-1)\bar{\sigma}}{2[1+r(n-1)]\mathbf{I}_1} [\mathbf{1}_3 - (2r-1)\text{sign}(\sigma^{p,0})] + \frac{[1+r(n-1)]^2}{\bar{\sigma}} \sigma^{p,0} \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

Determinando o segundo fator da equação (B.49), chega-se a:

$$\sigma^{p,0} = \frac{2\sqrt{\mathbf{J}_2}}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} \text{sen}(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta - \frac{2\pi}{3}) \end{Bmatrix} + \frac{\mathbf{I}_1}{3} \mathbf{1}_3 = \frac{2\sqrt{\mathbf{J}_2}}{\sqrt{3}} \text{sen}(\theta) + \frac{\mathbf{I}_1}{3} \mathbf{1}_3 \quad (\text{B.57})$$

onde  $\mathbf{J}_2$  e  $\theta$  são as variáveis que desenvolvem os vetores de fluxo de Nayak-Zienkiewicz (Hanganu, 1997).

Para o cálculo da derivada do vetor de tensões principais  $\sigma^{p,0}$  com respeito ao vetor de tensões  $\sigma^0$  é empregado um procedimento análogo ao da equação (B.55):

$$\frac{\partial \sigma^{p,0}}{\partial \sigma^0} = \frac{\partial \sigma^{p,0}}{\partial \mathbf{I}_1} \frac{\partial \mathbf{I}_1}{\partial \sigma^0} + \frac{\partial \sigma^{p,0}}{\partial (\mathbf{J}_2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial (\mathbf{J}_2)^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma^0} + \frac{\partial \sigma^{p,0}}{\partial \mathbf{J}_3} \frac{\partial \mathbf{J}_3}{\partial \sigma^0} = \mathbf{CV} \quad (\text{B.58})$$

Considerando a equação (B.58) é apresentada a matriz  $\mathbf{V}$  na forma transposta:

$$\mathbf{V} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \mathbf{I}_1}{\partial \sigma^0} \\ \frac{\partial (\mathbf{J}_2)^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma^0} \\ \frac{\partial \mathbf{J}_3}{\partial \sigma^0} \end{array} \right\} \quad (\text{B.59})$$

A matriz quadrada  $\mathbf{C}$  tem a seguinte forma:

$$\mathbf{C} = \{ \mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3 \} \quad (\text{B.60})$$

onde

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\partial \sigma^{p,0}}{\partial \mathbf{I}_1} = \frac{1}{3} \mathbf{1}_3 \quad (\text{B.61})$$

$$\mathbf{c}_2 = \frac{\partial \sigma^{p,0}}{\partial (\mathbf{J}_2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\partial \sigma^{p,0}}{\partial \theta} \frac{tg(3\theta)}{(\mathbf{J}_2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} [\text{sen}(\theta) - tg(3\theta) \cos(\theta)] \quad (\text{B.62})$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3} \cos(3\theta)} \text{sen}(\theta - 3\theta \mathbf{1}_3) \quad (\text{B.63})$$

$$\mathbf{c}_3 = \frac{\partial \sigma^{p,0}}{\partial \theta} \frac{\sqrt{3}}{2 \cos(3\theta)} \frac{1}{(\mathbf{J}_2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\mathbf{J}_2 \cos(3\theta)} \cos(\theta) \quad (\text{B.64})$$

O cálculo da matriz de dano  $\mathbf{D}$  é obtida em função das seguintes operações matriciais:

$$\mathbf{D} = d \quad \mathbf{I} + \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \quad \sigma^0 \quad \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma^{p,0}} \quad \mathbf{C} \quad \mathbf{V} \right\} \quad (\text{B.65})$$

com as dimensões:  $\mathbf{D} = (6 \times 6)$ ,  $d = (1 \times 1)$ ,  $\mathbf{I} = (6 \times 6)$ ,  $\frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} = (1 \times 1)$ ,  $\sigma^0 = (6 \times 1)$ ,  $\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma^{p,0}} = (1 \times 3)$ ,  $\mathbf{C} = (3 \times 3)$  e  $\mathbf{V} = (3 \times 6)$ .

### B.13 DIREÇÕES DE FISSURAÇÃO E ESMAGAMENTO

O modelo de dano descrito neste capítulo é isotrópico, ou seja, uma vez que qualquer ponto seja danificado todos os componentes do tensor constitutivo são afetados pela mesma redução percentual da rigidez. O dano é produzido em geral por uma sollicitação dominante, sendo muito raro que o ponto se encontre submetido as sollicitações triaxiais equilibradas entre si.

Isto faz pensar que é possível determinar qual é a orientação da fissura se o dano foi produzido por tração ou a direção do esmagamento, no caso em que da compressão como a causa da degradação. Em cada ponto de integração que tem dano pode-se indentificar se foi produzido por tração ou compressão em função do valor da variável  $r$  (ver equação B.51) que atua na direção do limite do dano dependendo se  $r$  é maior ou menor que 0,55. Calculando as direções principais do tensor de deformação total  $\varepsilon$  (ver equação 2.15), já é uma boa aproximação da

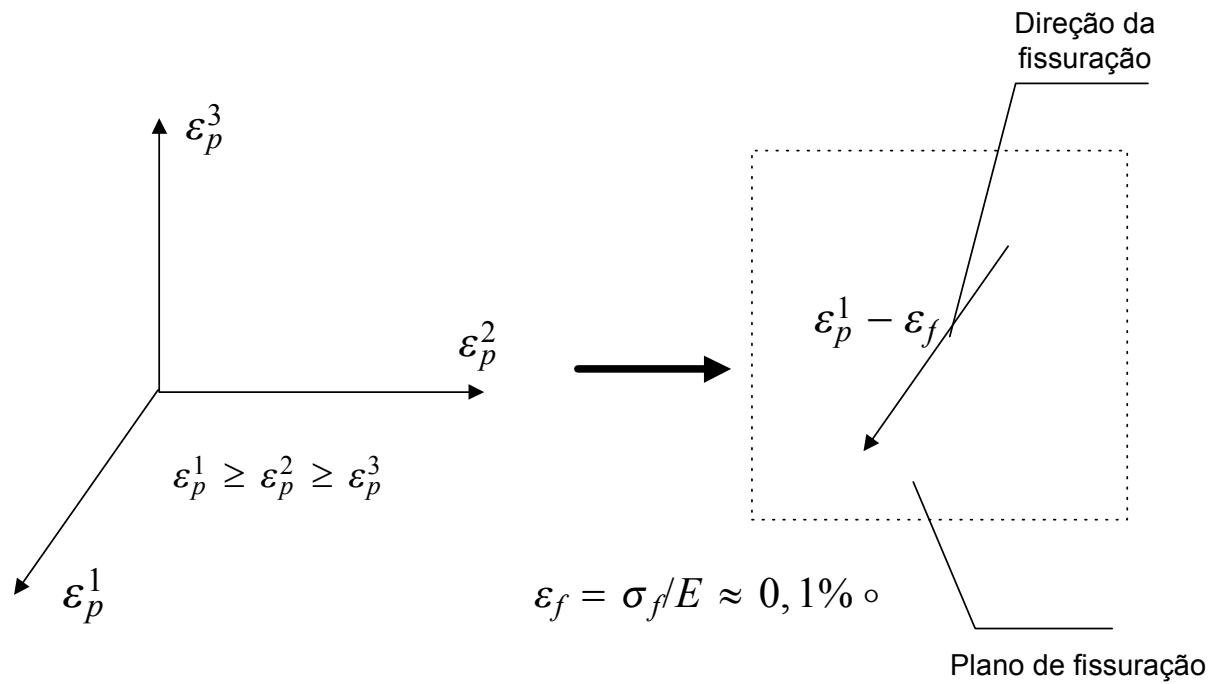


Figura B.8: Obtenção da direção de fissuração a partir das deformações principais (Hanganu, 1997).

direção de fissuração ou de esmagamento do material. Estas corresponderão a deformação principal máxima no caso de fissuração ou deformação principal mínima quando for a compressão (Hanganu, 1997).

## Apêndice C

### INFERÊNCIA ESTATÍSTICA

Este anexo apresenta, de forma sucinta, as distribuições  $Jt$  e  $Jf$  que foram usadas no processo de tomada de decisões sobre os resultados da análise de regressão linear múltipla.

#### C.1 DISTRIBUIÇÃO DE MEDIAS DE AMOSTRAS

Considere a determinação da distribuição da amostra de média amostral  $\bar{X}$ . Suponha-se que se toma uma amostra aleatória de tamanho  $n$  de uma população normal com média  $\mu$  e variância  $v^2$ . Cada observação nesta amostra (por exemplo,  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ) é uma variável aleatória distribuída normal e independentemente, com média  $\mu$  e variância  $v^2$ . Aplicando a propriedade reprodutiva da distribuição normal conclui-se que a média amostral tem:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \quad (\text{C.1})$$

com uma distribuição normal média:

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{\mu + \mu + \dots + \mu}{n} = \mu \quad (\text{C.2})$$

e variância:

$$v_{\bar{X}}^2 = \frac{v^2 + v^2 + \dots + v^2}{n^2} = \frac{v^2}{n} \quad (\text{C.3})$$

Se existe uma população com uma distribuição de probabilidade desconhecida, a distribuição da amostra de média amostral seguirá sendo aproximadamente normal com média  $\mu$  e variância  $\frac{v^2}{n}$ , se o tamanho da amostra  $n$  é grande. Este é um dos teoremas mais úteis da estatística e é conhecido como o teorema do limite central (Montgomery e Runger, 1998). A proposição é a seguinte:

#### **Teorema 1** *Teorema do limite central*

Se  $X_1, X_2, \dots, X_n$  é uma amostra aleatória de tamanho  $n$  tomada de uma população (finita ou infinita) com média  $\mu$  e variância  $v^2$ , e se  $\bar{X}$  é a média amostral, então a forma limite da distribuição é:



$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{v/\sqrt{n}} \quad (\text{C.4})$$

A aproximação normal para  $\bar{X}$  depende do tamanho  $n$  da amostra. A figura (C.1) apresenta a distribuição obtida para os lançamentos de um dado geral de seis caras. As probabilidades são iguais, ou seja,  $(1/6)$  para todos os valores obtidos, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. A figura (C.1b) apresenta a distribuição do ponto médio obtido quando se lançam dois dados, e as figuras (C.1c e C.1d) são as distribuições dos pontos médios obtidos quando se lançam 3 e 5 dados, respectivamente. Deve-se notar que se a população (um dado) está relativamente longe de ser normal, a distribuição dos pontos médios é aproximada, de maneira razoavelmente boa, pela distribuição normal, inclusive para tamanhos de amostra tão pequenos como cinco (As distribuições dos lançamentos são discretas, enquanto que a normal é contínua). Ainda que, em muitos casos, o teorema do limite central funciona bem para amostra pequenas ( $n = 4, 5$ ), em particular, onde a população é contínua, unimodal e simétrica, em outras situações se requer amostras grandes, dependendo da forma que tenha a população (Montgomery e Runger, 1998).

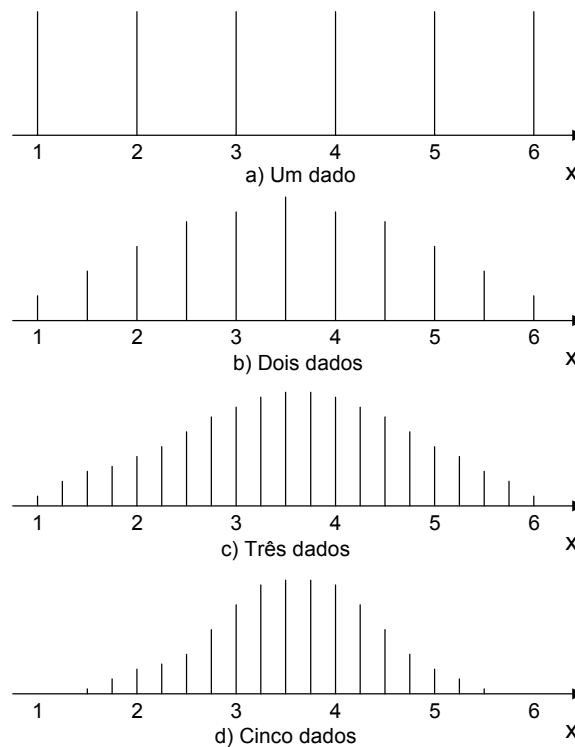


Figura C.1: Distribuições de pontos médios provenientes de um experimento de lançamento de dados (Montgomery e Runger, 1998).

## C.2 DISTRIBUIÇÃO JI-QUADRADA

A distribuição ji-quadrada é uma das distribuições de amostra de maior utilidade. Está definida em termos das variáveis aleatórias normais. O teorema que explica a distribuição é apresentado a seguir:

Sejam  $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$  variáveis aleatórias distribuídas de forma normal e independentes com média  $\mu = 0$  e variância  $v^2 = 1$ . Então, a variável aleatória:

$$X = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_k^2 \quad (\text{C.5})$$

tem a função de densidade de probabilidade

$$p(x) = \frac{1}{2^{k/2} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{(k/2)-1} e^{-x/2}, \text{ para } x > 0 \quad (\text{C.6})$$

e se diz que segue uma distribuição ji-quadrada com  $k$  graus de liberdade, que é abreviada da seguinte maneira:  $\chi_k^2$ .

### C.3 DISTRIBUIÇÃO $Jt$

Suponha-se que se toma uma amostra de uma população normal com media  $\mu$  e variância  $v^2$ . Se  $\bar{X}$  é o valor medio das  $n$  observações que contém a amostra aleatória, então a distribuição de  $Z = \frac{(\bar{X} - \mu)}{(v/\sqrt{n})}$  é uma distribuição normal. Suponha-se que a variância  $v^2$  da população é desconhecida. Nesta distribuição estatística substitue-se  $v$  por  $S$ , cuja formulação é apresentada a seguir:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n - 1} \quad (\text{C.7})$$

A seguir é apresentado o teorema da distribuição  $Jt$ :

Seja  $Z$  (Variável aleatória com  $\mu = 0$  e  $v^2 = 1$ ) uma variável aleatória com distribuição  $N(0, 1)$  e  $V$  uma variável aleatória ji-quadrada com  $k$  graus de liberdade. Se  $Z$  e  $V$  são independentes, então a variável aleatória:

$$Jt = \frac{Z}{\sqrt{V/k}} \quad (\text{C.8})$$

tem a função de densidade da probabilidade:

$$p(x) = \frac{\Gamma[(k+1)/2]}{\sqrt{\pi k} \Gamma(k/2)} \cdot \frac{1}{[(x^2/k) + 1]^{(k+1)/2}} \text{ com } -\infty < x < \infty \quad (\text{C.9})$$

e se diz que segue a distribuição  $Jt$  com  $k$  graus de liberdade, que se abrevia como:  $Jt_k$ , sendo que  $\Gamma$  é a função gama.

A média e a variância da distribuição  $Jt$  são  $\mu = 0$  e  $v^2 = k/(k-2)$  para  $k > 2$ , respectivamente.

### C.4 DISTRIBUIÇÃO $Jf$

Esta é uma das mais úteis distribuições usadas na estatística. A variável aleatória  $Jf$  é definida como o quociente de duas variáveis aleatórias ji-quadrada independentes, cada uma dividida entre os seus respectivos graus de liberdade. Isto é:

$$Jf = \frac{L/h}{Q/j} \quad (\text{C.10})$$

onde  $L$  e  $Q$  são variáveis aleatórias ji-quadrada independentes com graus de liberdade  $h$  e  $k$ , respectivamente. A distribuição é definida pelo teorema que segue:

Sejam  $L$  e  $Q$  variáveis aleatórias ji-quadrada independentes com graus de liberdade,  $h$  e  $k$ , respectivamente. Então o quociente

$$Jf = \frac{L/h}{Q/k} \quad (\text{C.11})$$

tem a função de densidade da probabilidade:

$$p(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{h+k}{2}\right) \left(\frac{h}{k}\right)^{h/2} x^{(h/2)-1}}{\Gamma\left(\frac{h}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \left[\left(\frac{h}{k}\right)x + 1\right]^{(h+k)/2}}, \quad 0 < x < \infty \quad (\text{C.12})$$

e se diz que segue a distribuição  $Jf$  com  $h$  graus de liberdade no numerador, e  $k$  graus de liberdade no denominador. Usualmente, é abreviada como  $Jf_{h,k}$ .

A média e a variância da distribuição  $Jf$  são  $h = k / (k - 2)$  para  $k > 2$ , e

$$v^2 = \frac{2k^2 (h + k - 2)}{h (k - 2)^2 (k - 4)}, \quad k > 4 \quad (\text{C.13})$$

Tabelas com os valores destas funções são apresentadas em Montgomery (1998) e são usadas para o cálculo das distribuições utilizadas.