Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Convergência de processos de renovação com recompensa e aplicações na modelagem de tráfego em rede

por

Magno Alves de Oliveira

Brasília, 2012.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Convergência de processos de renovação com recompensa e aplicações na modelagem de tráfego em rede

Magno Alves de Oliveira

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Brasília, 04 de junho de 2012.

Comissão examinadora: ______________________________

Profª. Drª. Chang Chung Yu Dorea - UnB (Orientadora)

____

Prof. Dr. Ary Vasconcelos Medino - UnB

____

Prof. Dr. Leandro Martins Cioletti - UnB

____

Profª. Drª. Silvia Regina Costa Lopes - UFRGS

____

Prof. Dr. Vladimir Belitsky - USP

Dedicatória

Dedico esta tese à minha família, que é a inspiração para tudo que faço na vida. É a minha motivação, o meu parâmetro e minha recompensa. É a minha essência, a minha sustentação, a minha oração!

Agradecimentos

Eu gostaria de agradecer a todas as pessoas que, de algum modo, contribuíram para a realização deste trabalho. Ainda que fosse possível citar todas elas, seria difícil encontrar as palavras certas.

Apesar dessas dificuldades, quero agradecer a todos os professores, funcionários e colegas do Departamento de Matemática da UnB que, com a dignidade e qualidade do seu trabalho, fazem com que este departamento seja uma referência mundial no que faz.

Agradeço às professoras Sílvia Regina Costa Lopes (UFRGS) e Cátia Regina Gonçalves (UnB) e aos professores Leandro Martins Cioletti (UnB), Ary Vasconcelos Medino (UnB) e Vladimir Belitsky (USP) por terem aceitado o convite de participar da banca que avaliou o trabalho e por todas as importantes considerações e contribuições apresentadas.

Agradeço também aos meus grandes amigos, ainda que longe no espaço, no tempo ou na existência, deram sentido a esta luta e me impulsionaram a seguir em frente e percorrer mais esta etapa da minha vida. Alguns deles, como a Débora e a Luciene, estiveram comigo em momentos duros da luta. Com outros deles tive o prazer de dividir, por algum tempo, a moradia e as aflições da sobrevivência, como o Vagner, o Léo, a Karise, a Flávia, o Theo, o Jorge e o Miguel, e tenho a satisfação de ter construído grandes amizades.

Em especial, agradeço ao Miguel pela amizade valiosa, pela consideração e confiança desenvolvida ao longo de tantos anos de convivência.

À minha querida orientadora, professora Chang Chung Yu Dorea, sou profundamente grato por toda a sua generosidade como cientista e pelo cuidadoso trabalho de orientação. Agradeço a ela por cada palavra pronunciada, por cada olhar de incentivo, por cada instante que se dedicou a pensar numa saída, por toda a amizade, por toda a educação com que sempre me tratou...

À minha família, me faltam palavras para agradecer.

Finalmente, agradeço a Deus: a força suprema sobre todas as coisas.

Resumo

Neste trabalho, modelamos a ocupação de um dispositivo de memória presente na arquitetura de uma rede de comunicação composta por M fontes independentes e identicamente distribuidas a fim de capturar o seu comportamento assintótico e estimar probabilidades de transbordamento. Nesse sentido, tivemos que lidar com processo de renovação com recompensa, em que a soma parcial é indexada por um processo de renovação fortemente dependente das contribuições à soma. Com estabilização adequada e sob condições de regularidade, provamos que o limite de processos de renovação com recompensa, em distância Mallows, é uma variável aleatória α-estável, $1 \leq \alpha \leq 2$. Ao promovermos neste processo um reescalonamento no tempo, provamos a sua convergência fraca para o movimento de Lèvy α-estável, generalizando o Teorema de Donsker, um importante resultado de convergência fraca existente na literatura para processos estocásticos que envolvem somas parciais de variáveis aleatórias i.i.d. com segundo momento finito. Tais resultados têm na teoria de tráfego importantes aplicações.

Palavras-chave: probabilidade do transbordamento, processo de renovação com recompensa, distância Mallows, convergência fraca, movimento de Lèvy estável.

Abstract

For communication network consisting of M independent and identically distributed sources we model the device memory occupation in order to capture the asymptotic behavior that leads to overflow probability estimates. It will be shown that the renewal reward process, where the sum is indexed by a renewal process strongly dependent on the contributions of the sum, plays a central role. Under regularity conditions, we prove that its asymptotic limit, under Mallows distance, is an α-stable random variable. For $1 \leq \alpha \leq 2$ and by adequately rescheduling the time variable we prove that its weak limit is the α-stable Lèvy motion and this generalizes the classical Donsker's Theorem for variables with finite second moment. Applications to traffic control networks are included.

Keywords: overflow probabilities, renewal reward processes, Mallows distance, weak convergence, stable Lèvy motion.

Sumário

Introdução

Nos últimos anos, com a evolução tecnológica e barateamento dos custos dos equipamentos de processamento de dados, tem-se observado uma mudança no comportamento das corporações no que se refere ao processamento de suas informações. O que, tradicionalmente, era feito de forma centralizada em torno de um computador de grande porte, atualmente tem se operado com o uso de uma configuração de processamento de dados distribuído, consistindo-se de muitos computadores e terminais ligados em rede.

A mera existência de uma grande população de computadores e terminais cria a demanda para que os mesmos trabalhem em rede. Um exemplo simples disso é quando a maioria dos funcionários de uma empresa tem acesso a um terminal ou computador pessoal. Esse fato torna a aplicação comunicação por e-mail muito mais eficiente do que, por exemplo, o contato telefônico, muitas vezes frustrado ou de alto custo. Outras aplicações, como troca de documentos, o uso de um banco de dados que está distribuído em diversos computadores, a capacidade de acessar diversos computadores a partir de um terminal, podem ser oferecidas por um software de aplicação que é preparado para o novo ambiente de rede. Assim, podemos entender que conectividade é algo natural e o que a viabiliza é a existência de uma espécie de "linguagem" comum.

A quantidade de computadores em uso no mundo inteiro está em centenas de milhões. Esse número é crescente e, além disso, a memória e o poder de processamento em expansão dessas máquinas cria um número cada vez mais diversificado de aplicações e funções e gera uma demanda por conectividade.

Um tipo de rede comum, encontrada em praticamente todos os prédios de escritórios de organizações de médio e grande porte, é a chamada rede local - LAN (*local area network*). A necessidade de integração de aplicações diversificadas em redes locais e a interconexão entre essas redes geram pressões sobre transmissão em rede remota, requerendo dela uma maior capacidade de transmissão e comutação da informação. A utilização da fibra ótica, felizmente, provê amplos recursos para atender essa demanda. Entretanto, o desenvolvimento de sistemas de comutação com capacidade de resposta rápida para dar suporte a essas novas demandas é um desafio a ser perseguido.

As redes remotas - WAN (*wide area network*) consistem de uma série de nós de comutação interconectados. Normalmente cobrem uma grande área geográfica, exigem a travessia de serviços públicos e contam, em parte, com circuitos fornecidos por uma operadora comum. Uma transmissão a partir de qualquer dispositivo conectado a ela é roteada por esses nós internos para o destino especificado. Esses nós não se preocupam com o conteúdo dos dados e seu objetivo é facilitar a movimentação da informação até o seu destino final.

Tradicionalmente, WAN têm sido implementadas usando tecnologias do tipo comutação de circuitos, comutação de pacotes e, mais recentemente, redes *Frame Relay* e ATM.

O Modo de Transmissão Assíncrono - ATM (*Asynchronous Transfer Mode*), às vezes chamado de *Cell Relay*, é um resultado do desenvolvimento em comutação de circuitos e pacotes. Pode ser encarado como uma evolução do *Frame Relay*. A diferença mais óbvia entre *Frame Relay* e ATM é que o primeiro utiliza pacotes de tamanho variável, os chamados *frames*, enquanto ATM utiliza pacotes de tamanho fixo, denominados células, o que reduz a sobrecarga de processamento no controle de erros gerados no processo de transmissão.

Como uma evolução da comutação de circuitos, ATM permite a definição de vários canais virtuais com velocidades de dados que são definidas dinamicamente no momento em que o canal virtual é criado.

A informação, para ser comunicada, é convertida em um sinal eletromagnético que, por sua vez, é transmitido por algum meio. Os meios de transmissão mais utilizados são linhas de par trançado, cabo coaxial, cabo de fibra ótica e microondas terrestres e por satélite. Há diversas técnicas de codificação do sinal eletromagnético que influenciam diretamente na qualidade da transmissão. A interface entre um dispositivo e o meio de transmissão precisa ser definida e há protocolos internacionais estabelecidos para o controle do enlace de dados.

0.1 Interconexão de redes

Um protocolo é um conjunto de regras semânticas e sintáticas que descrevem como transmitir dados por uma rede. O *Internet Protocol* - IP é um sistema técnico que permite que o tráfego de informações seja encaminhado de uma rede para outra, ou seja, é um protocolo padronizado que é executado em *hosts* e roteadores para interconectar uma série de redes independentes.

A internet é um exemplo de interrede de alcance mundial, baseada na arquitetura de protocolo TCP/IP, que interconecta milhares de redes públicas e privadas e milhões de usuários.

Uma arquitetura de protocolos é a estrutura de software que implementa a função de comunicação. Consiste, normalmente, de um conjunto de camadas de protocolos, com um ou mais protocolos em cada camada. Para exemplificar, considere um modelo simples em três camadas, descrito em linhas gerais:

- camada de acesso à rede: trata da troca de dado entre computador e a rede a qual está conectado.
- camada de transporte: trata da acomodação da informação, independente do tipo de aplicação que a originou, em formato exigido pela interrede, e, próximo ao seu destino, da reconstrução da informação em formato reconhecível pelo sistema receptor.
- camada de aplicação: contém a lógica necessária para dar suporte às diversas aplicações do usuário.

O conjunto de protocolos TCP/IP é a arquitetura prevalente nas redes atuais, que tem nos multiplexadores a chave do seu bom funcionamento.

0.2 Características do tráfego em redes de alta velocidade

Vimos que a atual estrutura de transporte de dados são as redes ATM. Diferentemente das redes síncronas, onde a banda é repartida entre os utilizadores de acordo com um corte temporal, a rede ATM racionaliza os espaços não utilizados para transmitir outros dados, garantindo, assim, uma melhor banda concorrida.

As demandas por diversos tipos de serviço surgem de diversas fontes. As informações de cada fonte são armazenadas em células que são endereçadas ao seu destino. A arquitetura da rede prevê a existência de nós e, em cada nó, há um comutador que desmultiplexa os trens de células e os reendereçam para enlaces de saída, segundo critérios que vão do tipo de informação transportada à qualidade de serviço contratado. Em cada enlace de saída, há um dispositivo de memória (*buffer*) que armazena os dados até que os mesmos sejam transmitidos pela rede.

O fato é que, nessa dinâmica, há a formação de filas. Cada *buffer* é continuamente pressionado por um fluxo aleatório de células e, considerando-se uma vazão de saída constante, um problema comum é o transbordamento de células e consequente perda de informação, o que interfere diretamente na qualidade do serviço oferecido. Uma questão central é, portanto, compreender a dinâmica de ocupação do *buffer* para que o controlador da rede possa direcionar suas intervenções.

Medições recentes do tráfego em redes locais [12] têm revelado características interessantes do seu comportamento ainda não consideradas nas modelagens tradicionais, como a autossimilaridade e a longa dependência das contribuições ao tráfego.

A autossimilaridade diz respeito à natureza fractal do tráfego, descoberta após análises de suas trajetórias onde pode-se constatar um comportamento altamente impulsivo das séries observadas que não se suavizavam mesmo mediante agregação por diversas escalas no tempo. A longa dependência das contribuições ao tráfego, por sua vez, diz respeito ao decaimento hiperbólico da função de autocorrelação quando considerados espaçamentos grandes no tempo, o que significa que a dependência das obsevações, ainda que distantes na série temporal observada, não é desprezível. Esses dois conceitos estão intimamente relacionados no sentido que o primeiro pode ser consequência do segundo [24].

Para fins de ajuste, novos modelos têm sido implementados para geração de tráfego com dependência de longo alcance. Tais modelos são indispensáveis para a realização de estudos de desempenho que visem o dimensionamento realista dos recursos de rede. O impacto de tais estudos reside no melhor aproveitamento dos recursos da rede e consequente melhoria na qualidade do serviço - QoS (*quality of service*) oferecido.

0.3 Considerações iniciais sobre o modelo ON/OFF de tráfego pesado

Em virtude das características do tráfego observadas em medições recentes, tornam-se necessários modelos realísticos capazes de capturar a longa dependência mantida entre contribuições ao tráfego e cargas de tráfego, comportamento esse que se manifesta sob forma de autossimilaridade do processo limite observado.

Nesta tese, modelaremos o processo de ocupação de um *buffer* baseando-nos no modelo de fontes ON/OFF. Consequentemente, lidaremos com o Processo ON/OFF ou, numa terminologia matemática, processo de renovação alternado, muito popular em se tratando de modelagem de tráfego.

No contexto da Teoria de Renovação, o Processo ON/OFF foi introduzido em 1997 por Willinger *et al* [26] e, como modelo de tráfego, por Anick *et al* [1].

O Modelo de fontes ON/OFF considera que a rede é formada por fontes interligadas entre si. Cada fonte emite e recebe informações. As informações emitidas por cada fonte, denominadas de cargas de tráfego, são emitidas durante os períodos em que a fonte permanece ativa, e esses períodos aleatórios de atividade se alternam com períodos aleatórios de inatividade. O intervalo de tempo constituído de um período de atividade seguido de um período de inatividade é designado ser um período entre tráfego.

Neste trabalho, consideraremos que as variáveis aleatórias cargas de tráfego e períodos entre tráfego possuem distribuições de cauda pesada. É a situação a qual temos denominado de Tráfego Pesado.

Uma variável aleatória é dita ter distribuição de cauda pesada [20] ou, simplesmente, ser de cauda pesada[†] se existe um índice β, $0 < \beta < 2$, e uma função lentamente variante ao infinito[‡] L tal que

$$P(X \geq x) \sim cx^{-\beta}L(x), \quad x \to \infty,$$

para algum $c > 0$.

A situação de total independência entre as fontes do modelo é o que na literatura tem sido denominada de Tráfego Livre . Outras configurações de interrede, em que sejam consideradas formas de dependência entre as fontes, são desejáveis, uma vez que o Tráfego Livre não se ajusta muito bem às configurações reais do tráfego.

[†]Ser de cauda leve (à direita) ou pesada (à direita) é uma classificação que, equivalentemente, diz respeito se a variável aleatória ou sua função de distribuição possui função geradora de momento, respectivamente, bem definida ou não.

[‡]Dizemos que L é uma função lentamente variante ao infinito se ocorre $\lim_{x\to\infty} \frac{L(bx)}{L(x)} = 1$ para qualquer $b > 0$.

0.4 Propósitos da tese

Diferentes autores replicam o modelo de uma fonte ON/OFF e, afim de caracterizar o processo limite, utilizam uma espécie de Teorema do Limite Central Funcional. A nossa proposta é que podemos capturar o processo limite a partir do modelo de uma única fonte, usando distância Mallows.

A distância Mallows constitui-se numa métrica no espaço de distribuições. Nesta tese, abordaremos essa maneira de medir distância entre funções de distribuição tanto para o caso usual quanto para o bivariado. A dificuldade de se trabalhar com ela mostra-se evidente no Capítulo 4, mas é através dela que conseguimos obter importantes resultados de convergência para os processos associados à modelagem proposta no Capítulo 1.

Com o objetivo de facilitar a leitura desta tese, distribuímos, ao longo dos capítulos, conceitos preliminares que serão importantes para a compreensão do texto como um todo e especialmente úteis para entendimento das ideias principais de cada capítulo, cuja síntese apresentamos a seguir.

No Capítulo 1, apresentamos o modelo de fontes ON/OFF que será objeto de discussão dessa tese. Revisamos aspectos de como o mesmo tem sido abordado na literatura e modelamos a ocupação de um dispositivo de memória (*buffer*) presente na arquitetura de uma rede de comunicação. Além disso, mostramos que a análise sobre um modelo de M fontes ON/OFF i.i.d. pode ser reduzida à análise de uma única fonte, onde ficam preservadas as principais características do processo. Na nossa modelagem, aparece uma estrutura do tipo

$$R_{\xi(t)} = \sum_{i=1}^{\xi(t)} X_i,$$

que temos denominado de **processo de renovação com recompensa**, um tipo de soma aleatoriamente indexada com algumas especificidades.

Usando teoria da renovação e martingales como ferramentas, provamos, no Capítulo 2, o importante Teorema 2.4. Sob condições de regularidade, esse teorema trata da convergência, em distância Mallows, de somas aleatoriamente indexadas, adequadamente estabilizadas, para uma variável aleatória α-estável, no caso em que há forte dependência entre o processo indexador e as contribuições à soma. Em particular, no caso em que as somas aleatoriamente indexadas são processos de renovação com recompensa, temos denominado tal processo como **processo de renovação com recompensa estabilizado** e o resultado obtido de Teorema de limite central para processos de renovação com recompensa. Esse resultado constitui-se na chave dos demais resultados obtidos nesta tese.

No capítulo seguinte, reescalonamos as trajetórias do processo de renovação com recompensa estabilizado com o objetivo de obter a sua convergência, no sentido das distribuições de dimensão finita, para um processo α-estável. Além disso, caracterizamos o processo limite como o movimento de Lèvy α-estável.

A partir daí, surgiu o interesse por resultados de convergência fraca que pudessem ser úteis na nossa análise. No Capítulo 4, investigamos condições de regularidade sobre um processo particular, envolvendo somas parciais de variáveis aleatórias, suficientes para que a convergência fraca pudesse ser herdada da convergência no sentido das distribuições de dimensão finita. Como consequência desse esforço, obtivemos um importante resultado de convergência fraca que generaliza o Teorema de Donsker.

Ao longo da teoria desenvolvida, o problema de tráfego que motivou o desenvolvimento desse tese aparece como aplicação. Contudo, reservamos o Capítulo 5 para provar a convergência do Processo de armazenamento, que surge na modelagem de ocupação do *buffer*, sob a hipótese de tráfego pesado, para um processo similar ao que temos obtidos nos capítulos anteriores. Estabelecemos aproximações assintóticas para o que chamamos de probabilidade de transbordamento do *buffer*, importante medida de monitoramento que pode viabilizar intervenções no sentido de se garantir uma melhor qualidade do serviço de comunicação prestado pela rede. Além disso, provamos a convergência fraca do processo de renovação com recompensa reescalonado e estabilizado para o movimento de Lèvy α-estável como uma aplicação da teoria desenvolvida nos dois capítulos anteriores.

Para trabalhos futuros, apontamos a análise do comportamento do tráfego mediante diferentes formas de dependência entre as fontes. Esse estudo terá como objetivo uma maior aproximação da modelagem do Tráfego Pesado às configurações de rede observadas na prática.

Capítulo 1

Modelagem do tráfego e teoria da renovação

Neste capítulo, apresentamos o modelo de fontes ON/OFF que será objeto de discussão dessa tese. Revisamos aspectos de como o mesmo tem sido abordado na literatura e modelamos a ocupação de um dispositivo de memória (*buffer*) presente na arquitetura de uma rede de comunicação. Na última seção, destacamos o importante Problema do Transbordamento, que está associado à perda de informação no sistema e que compromete a qualidade do serviço de comunicação. A primeira seção, contudo, se ocupará de revisar os principais aspectos da teoria de processos estocásticos que serão necessários para a leitura e compreensão desta tese.

1.1 Preliminares

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $\{X(t)\}_{t\in T}$ uma coleção de variáveis aleatórias definidas em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, onde T é um conjunto não vazio. Para qualquer $(t_1, t_2, \cdots, t_k) \in T^k$, $1 \leq k < \infty$, o vetor aleatório $(X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_k))$ tem uma distribuição conjunta de probabilidade $\mu_{(t_1,t_2,\cdots,t_k)}$ sobre $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$.

Definição 1.1. Um processo estocástico (a valores reais) com conjunto de índice T é uma família $\{X(t)\}_{t\in T}$ de variáveis aleatórias definidas em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1.1.1 Processos Gaussianos

Um processo estocástico é chamado **Gaussiano** se para $t_1, t_2, \cdots, t_k \in T$ e números reais $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$, a variável aleatória $\sum_{i=1}^{k} \theta_i X(t_i)$ tem distribuição normal. Para um tal processo, as funções $\mu(t) := EX(t)$ e $\sigma(s,t) := \mathrm{cov}(X(s), X(t))$ são chamadas funções média e de autocovariância, respectivamente. Como $\mathrm{var}(\sum_{i=1}^{k} \theta_i X(t_i)) \geq 0$, segue que para todo $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$,

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \theta_i \theta_j \sigma(t_i, t_j) \geq 0.$$

Essa propriedade da função de autocovariância $\sigma(.,.)$ é chamada **não-negatividade definida**.

Exemplo 1.1. Sejam $H \in (0,\, 1]$ e uma variável aleatória $Y \sim N(0,\, 1)$. Temos que o processo $Z = \{Z(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, tal que

$$Z(t) = \begin{cases} t^H Y, & t \geq 0 \\ (-t)^H Y, & t \leq 0 \end{cases},$$

é Gaussiano.

As distribuições de dimensão finita de um processo Gaussiano $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ satisfazem

$$E\left\{e^{i \sum_{j=1}^{m} \theta_j X(t_j)}\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \sigma(t_j, t_k) \theta_j \theta_k + \sum_{j=1}^{m} \mu(t_j) \theta_j\right\},$$

onde $\theta_1, ..., \theta_m \in \mathbb{R},\ m \geq 1$, e $\mu(.)$ e $\sigma(.,.)$ são funções reais, sendo $\sigma(.,.)$ não-negativa definida. Reciprocamente, para cada $\mu(.)$ e $\sigma(.,.)$ não-negativa definida existe um processo Gaussiano correspondente.

Exemplo 1.2 (Movimento Browniano fracional)**.** * Fixemos $0 < H \leq 1$. Desde que a função

$$f(t_1, t_2) = |t_1|^{2H} + |t_2|^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

é não negativa definida, conforme [20], existe um processo Gausssiano $\{B_H(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ com função média identicamente nula e função de autocovariância

$$\sigma(t_1, t_2) = \frac{1}{2} f(t_1, t_2) \mathrm{var}(B_H(1)). \tag{1.1}$$

*Veja [20], Lema 2.10.8

Esse processo é chamado de **movimento Browniano fracional** (mBf). Em particular, se tomarmos $H = 1/2$, temos que

$$\sigma(t_1, t_2) = \min(t_1, t_2).\mathrm{var}(B_{1/2}(1)),$$

e o processo $\{B_{1/2}(t)\}_{t\in\mathbb{R}} := \{B(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é dito ser o **movimento Browniano** (mB).

Note que todas as variáveis aleatórias de um mBf são Gaussianas e, portanto, possuem segundo momento finito.

Quando a média de um processo estocástico for uma função constante e a função de autocovariância for uma função apenas da variável incremento de tempo, ou seja,

$$\mu(t) = \mu$$

e

$$\sigma(t_i, t_j) = \sigma(t), \quad t = t_i - t_j,$$

diremos que o processo é **estacionário** (sentido amplo).

Exemplo 1.3 (Incrementos do mB)**.** Fixado $\tau \in \mathbb{R}$, considere o processo $W = \{W(s)\}_{s\in\mathbb{R}}$, de incrementos do movimento Browniano, dado por

$$W(s) = B(s + \tau) - B(s).$$

Desde que

$$\mu_W(s) = 0$$

e, tomando sem perda de generalidade $\tau > 0$, a função de autocovariância

$$\sigma_W(t, s) = \begin{cases} s - t, & se \quad \tau < s - t \\ \tau, & se \quad \tau \geq s - t \end{cases}$$

é uma função que depende apenas de τ, temos que W é um processo estacionário. Portanto, $\{B(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ tem incrementos estacionários (si).

Alguns processos estocásticos apresentam uma estrutura invariante sob mudança de escala. Tais processos são ditos serem **autossimilares**.

Definição 1.2. † Um processo estocástico $X = \{X(t)\}_{t\in T}$ é dito ser autossimilar com

†Conforme [20], página 311.

parâmetro[‡] de autossimilaridade H (H-ss), $0 < H < 1$, se, para qualquer $a > 0$, ocorrer

$$\{X(at)\}_{t\in T} \stackrel{d}{=} \{a^H X(t)\}_{t\in T},$$

onde $\stackrel{d}{=}$ significa igualdade no sentido das distribuições de dimensão finita, isto é, se para qualquer $k \geq 1$, $t_1, t_2, \cdots, t_k \in T$ e qualquer $a > 0$, ocorre

$$(X(at_1), X(at_2), \cdots, X(at_k)) \stackrel{d}{=} (a^H X(t_1), a^H X(t_2), \cdots, a^H X(t_k)).$$

Processos que são autossimilares com parâmetro de autossimilaridade H e que possuam incrementos estacionários são ditos serem processos H-sssi.

Exemplo 1.4. O processo Z, dado no Exemplo 1.1, é autossimilar.

Observada a autossimilaridade do processo Z e desde que

$$\mu_Z(t) = |t|^H EY = 0$$

e

$$\sigma_Z(t,s) = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}),$$

temos que ele é o mBf. Quem nos garante isso é a proposição abaixo.

Proposição 1.1. *Para $0 < H \leq 1$ e $E[X^2(1)] = \sigma_0^2$, são equivalentes:*
(i) $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é Gaussiano e H-sssi
(ii) $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é mBf com índice de autossimilaridade H
(iii) $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é Gaussiano, tem média 0 (se $H < 1$) e função de autocovariância dada em (1.1).

Demonstração: Conforme [20], pág. 320.

♦

Em geral, dadas duas variáveis aleatórias X e Y, se tivermos $\text{cov}(X,Y) = 0$ não implica a independência dessas duas variáveis. Entretanto, no caso Gaussiano, a implicação é válida. O exemplo abaixo analisa a condição de dependência entre os incrementos do mBf.

‡Também conhecido como parâmetro de Hurst.

Exemplo 1.5. Para $\tau > 0$, considere o processo

$$\{W_H(t)\}_{t\in\mathbb{R}} = \{B_H(t+\tau) - B_H(t)\}_{t\in\mathbb{R}},$$

de incrementos do mBf. Considerando, por simplicidade, $\mathrm{var}(B_H(1)) = 1$, cálculos diretos mostram que

$$\sigma_{W_H}(0,t) = \frac{1}{2}\{|t+\tau|^{2H} - |t|^{2H} - |\tau|^{2H}\}.$$

Dessa maneira, para $H \neq 1/2$, temos que $\sigma_{W_H}(0,t) \neq 0$, o que deixa evidente a dependência, neste caso, entre os incrementos do mBf. Curiosamente, quando $H = 1/2$, esses mesmos cálculos mostram a independência dos incrementos do mB.

1.1.2 Processos estáveis

Iniciamos esta seção introduzindo uma classe de distribuições que serão objeto de nosso estudo, que são as distribuições estáveis.

Definição 1.3. [§] Uma variável aleatória X possui **distribuição estável** se, para cada n e para $X_1, X_2, \cdots, X_n$ cópias independentes de X, existirem $c_n \in \mathbb{R}_+^*$ e $d_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \stackrel{d}{=} c_n X + d_n$$

Se $d_n = 0$, dizemos que X possui distribuição estritamente estável.

Para uma variável aleatória estável X não degenerada, é possível mostrar que existe $0 < \alpha \leq 2$ de modo que as constantes c_n e d_n possam ser escritas, de maneira única, como

$$c_n = n^{1/\alpha} \;\; e \;\; d_n = \begin{cases} \mu(n - n^{1/\alpha}) & , \;\; se \;\; \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi}\sigma\beta n \ln(n) & , \;\; se \;\; \alpha = 1 \end{cases}.$$

Os parâmetros[¶] α, σ, β e μ, portanto, caracterizam a variável X. Daí, dizemos que X tem expoente α e utilizamos a notação

$$X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$$

[§] Conforme [20], pág. 3.

[¶] Os parâmetros α, σ, β e μ são denominados de índice (expoente) de estabilidade, parâmetro de escala, parâmetro de simetria e parâmetro de locação, respectivamente.

para representá-la.

As distribuições normais são casos particulares de distribuições estáveis (basta tomar $\alpha = 2$). Entretanto, para $\alpha \in (0,2)$, as estáveis não possuem o α-ésimo momento absoluto finito$^{\|}$. Ou seja, para todo $\alpha \in (0,2)$,

$$E|X|^p < \infty, \ \forall p \in (0,\alpha) \ \ e \ \ E|X|^p = \infty, \forall p \geq \alpha.$$

Em particular**, se $X \sim S_\alpha(\sigma,\beta,0)$, com $0 < \alpha < 2$, então, para todo $p \in (0,\alpha)$, existe uma constante $C_{\alpha,\beta}$ tal que

$$(E|X|^p)^{1/p} = C_{\alpha,\beta}\sigma. \tag{1.2}$$

Dizemos que as distribuições estáveis são de cauda leve (ou possuem cauda leve) se $\alpha = 2$ e de cauda pesada (ou possuem cauda pesada) se $0 < \alpha < 2$.

Um processo estocástico $\{X(t)\}_{t\in T}$, em que $T \subset \mathbb{R}$ é um conjunto de índices não vazio, é dito ser **estável** se todas as suas distribuições de dimensão finita são estáveis. Por consistência, todas as distribuições de dimensão finita devem ter o mesmo índice de estabilidade, digamos α e, por esta razão, nos referimos a um tal processo como sendo um processo α-estável. Para $\alpha \geq 1$, ter distribuições de dimensão finita α-estáveis é equivalente a dizer que todas as combinações lineares do tipo

$$\sum_{k=1}^{n} \theta_k X(t_k), \quad n \geq 1, \quad t_1, t_2, \cdots, t_n \in T, \quad \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n \in \mathbb{R},$$

são variáveis aleatórias α-estáveis††.

Exemplo 1.6 (Movimento de Lèvy α-estável)**.** Um processo estocástico $X = \{X(t)\}_{t\geq 0}$ é chamado movimento de Lèvy α-estável (mLe) se

(i) $X(0) = 0$ q.c.

(ii) X tem incrementos independentes

(iii) $X(t) - X(s) \sim S_\alpha((t-s)^{1/\alpha}, \beta, 0)$ para todo $0 \leq s < t < \infty$ e para algum $0 < \alpha \leq 2$ e $-1 \leq \beta \leq 1$.

Um caso particular intrigante do mLe ocorre quando $\alpha = 2$. Neste caso, o mLe se

$^{\|}$Conforme[20], pág. 18.

**Caso $\alpha = 1$, para que valha (1.2) é necessário que seja $\beta = 0$.

††Conforme [20], página 112.

degenera no mB. Desta forma, podemos compreender tanto o mBf como o mLe como extensões do mB.

Neste ponto, convém ressaltar que a classe de processos estáveis é mais abrangente que a classe dos movimentos de Lèvy estáveis, uma vez que um processo na primeira dessas classes pode admitir diferentes formas de dependência entre os seus incrementos.

1.1.3 Processos de renovação

Iniciamos esta seção apresentando uma classe de processos estocásticos bastante geral que é a classe dos processos de contagem, definidos a tempo contínuo com espaço de estados discreto. Tais processos dizem respeito à contagem do número de ocorrências de algum evento, como a chegada de uma chamada telefônica, de um cliente em um terminal, ou chegada de um outro evento qualquer que ocorra num ponto particular do tempo.

Definição 1.4. Um Processo de Contagem é um processo estocástico $\{\xi(t)\}_{t\geq 0}$ tal que, para cada t, $\xi(t)$ representa o número de chegadas (ocorrências) de eventos no intervalo de tempo $[0, t]$.

Um exemplo usual de processo de contagem que aparece em muitas aplicações é o Processo de Poisson, que pode ser definido assim:

Definição 1.5. Um Processo de Poisson de parâmetro λ é um processo de contagem $\{\xi(t)\}_{t\geq 0}$ que satisfaz as seguintes condições:

- $\xi(0) = 0$;
- $\{\xi(t)\}_{t\geq 0}$ tem incrementos independentes e estacionários;
- Para cada t, $\xi(t) \sim Poisson(\lambda t)$.

É fácil ver que os incrementos de um processo de Poisson são v.a. independentes e exponencialmente distribuídas. Uma generalização natural para esse processo consiste em considerar um processo de contagem para o qual as durações dos intervalos de tempo entre ocorrências de eventos são variáveis aleatórias i.i.d com distribuição arbitrária. Um tal processo de contagem é dito ser um **processo de renovação** (ordinário).

Definição 1.6. Seja $\{\tau_i\}_{i\geq 1}$ uma sequência de v.a. positivas i.i.d., com distribuição F_τ. Considere

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i, \quad n \geq 1$$

e defina
$$\xi(t) = \sup\{n : T_n \leq t\}.$$
O processo $\{\xi(t)\}_{t\geq 0}$ é dito ser um processo de renovação (ordinário). As v.a. $\{\tau_i\}_{i\geq 1}$ são ditas serem os tempos entre chegadas de renovações, enquanto as v.a. $\{T_n\}_{n\geq 1}$ são chamadas de tempos de chegada de renovações.

Dizemos que uma renovação ocorre em t se $T_n = t$ para algum $n \geq 1$. Desde que os tempos entre chegadas são variáveis aleatórias i.i.d., segue que após cada renovação o processo recomeça.

O principal objetivo da Teoria da Renovação é derivar propriedades de certas v.a. associadas aos processos $\{\xi(t)\}_{t\geq 0}$ e $\{T_n\}_{n\geq 1}$ a partir da distribuição F_τ, em geral conhecida.

Uma relação importante facilmente observável a partir da definição de processo de renovação é a equivalência
$$(\xi(t) \geq n) \Leftrightarrow (T_n \leq t), \tag{1.3}$$
isto é, o evento (*ocorrência de pelo menos n renovações no intervalo* $(0,t]$) ocorre se, e somente se, o evento (*soma dos n primeiros tempos entre chegadas não excede* t) ocorre.

A partir dessa equivalência, podemos determinar a distribuição de probabilidade do processo de renovação assim:
$$\begin{aligned} P(\xi(t) = n) &= P(T_n \leq t) - P(T_{n+1} \leq t) \\ &= F_{T_n}(t) - F_{T_{n+1}}(t). \end{aligned}$$

No contexto de processos de renovação, uma informação essencial é o número esperado de renovações num dado intervalo de tempo, digamos $(0,t]$. Essa quantidade depende, naturalmente, do tempo t, e a denominamos **função de renovação**. A função de renovação caracteriza o processo de renovação.

Definição 1.7. A função
$$m(t) = E[\xi(t)]$$
é dita ser a função de renovação do processo $\{\xi(t)\}_{t\geq 0}$.

Podemos escrever a função de renovação $m(.)$ como a série das funções de distribuição de T_n. De fato, se definirmos a variável aleatória

$$A_n(t) := 1_{(a\ n\text{-ésima chegada ocorre em } [0,t])},$$

temos que

$$\xi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t).$$

Dessa forma, poderemos representar

$$m(t) = E[\sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} E[A_n(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P[A_n(t) = 1] = \sum_{n=1}^{\infty} P[T_n \leq t] = \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_n}(t).$$

Alternativamente, supondo que os tempos entre chegadas τ_i tenham média μ_τ, podemos obter a função de renovação através da média do processo indexado $\sum_{i=1}^{\xi(t)+1} \tau_i$, conforme proposição abaixo.

Proposição 1.2.

$$m(t) = \frac{E[T_{\xi(t)+1}]}{\mu_\tau} - 1.$$

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned}
E[T_{\xi(t)+1}] &= E\left[\sum_{i=1}^{\xi(t)+1} \tau_i\right] &&= E[\tau_1] + E\left[\sum_{i=2}^{\xi(t)+1} \tau_i\right] \\
&= \mu_\tau + E\left[\sum_{i=2}^{\infty} \tau_i.1_{(\xi(t)+1 \geq i)}\right] &&= \mu_\tau + E\left[\sum_{i=2}^{\infty} \tau_i.1_{(T_{i-1} \leq t)}\right] \\
&= \mu_\tau + \sum_{i=2}^{\infty} E[\tau_i.1_{(T_{i-1} \leq t)}] &&= \mu_\tau + \sum_{i=2}^{\infty} E[\tau_i].E[1_{(T_{i-1} \leq t)}] \\
&= \mu_\tau + \mu_\tau \sum_{i=2}^{\infty} E[1_{(T_{i-1} \leq t)}] &&= \mu_\tau + \mu_\tau \sum_{i=2}^{\infty} P[T_{i-1} \leq t] \\
&= \mu_\tau + \mu_\tau \sum_{j=1}^{\infty} P[T_j \leq t] &&= \mu_\tau + \mu_\tau.m(t) \\
&= \mu_\tau[1 + m(t)].
\end{aligned}$$

♦

Um processo de renovação cresce por saltos de tamanho 1. Cada salto ocorre num tempo de chegada de renovação e o processo permanece constante ao longo de um intervalo de tempo compreendido entre dois tempos de chegadas consecutivos.

Apesar de processos de renovação se adaptarem a contextos os mais variados, para fixar ideias, costuma-se associá-lo com um processo produtivo onde uma componente (equipamento) é utilizada até que apresente falha. Uma vez observada a falha, a componente é automaticamente substituída por outra similar, processo esse que se repete indefinidamente.

Neste contexto, fixado um tempo t qualquer, surgem algumas variáveis de interesse prático. São elas:

- Tempo de vida residual γ_t da componente em uso

$$\gamma_t := T_{\xi(t)+1} - t$$

- Idade δ_t da componente em uso

$$\delta_t := t - T_{\xi(t)}$$

- Vida total β_t da componente em uso

$$\beta_t := \gamma_t + \delta_t.$$

Note que podemos determinar as distribuições das variáveis acima sempre que conhecido o processo $\{\xi(t)\}_{t\geq 0}$. Por exemplo,

$$F_{\gamma_t}(x) = P[\gamma_t \leq x] = 1 - P[\gamma_t > x] = 1 - P[\xi(t+x) - \xi(t) = 0] \tag{1.4}$$

e, desde que δ_t não excede t, temos para todo $x < t$,

$$F_{\delta_t}(x) = P[\delta_t \leq x] = 1 - P[\delta_t > x] = 1 - P[\xi(t) - \xi(t-x) = 0] \tag{1.5}$$

e $F_{\delta_t}(x) = 1$, caso contrário.

Exemplo 1.7. Em particular, se $\xi(t) \sim Poisson(\lambda t)$, então, pela estacionariedade dos seus incrementos e desde que $P[\xi(x) = k] = \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!}$, temos que

$$F_{\gamma_t}(x) = 1 - P[\xi(t+x) - \xi(t) = 0] = 1 - P[\xi(x) = 0] = 1 - e^{-\lambda x}$$

sempre que $x \geq 0$. Assim,

$$F_{\gamma_t}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

e

$$F_{\delta_t}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & , \quad 0 < x < t \\ 1 & , \quad x \geq t \end{cases}.$$

As informações apresentadas até aqui são suficientes para se provar importantes teoremas limites relacionados à processos de renovação.

Teorema 1.1. [‡‡] *Seja $\{\xi(t)\}_{t \geq 0}$ um processo de renovação com função de renovação $m(t)$. Então, quanto $t \to \infty$,*

(a)

$$\frac{\xi(t)}{t} \to \frac{1}{\mu_\tau}, \quad c.p.\ 1.$$

(b)

$$\frac{m(t)}{t} \to \frac{1}{\mu_\tau}.$$

Demonstração: A prova de (a) é uma consequência da Lei Forte dos Grandes Números e a prova de (b) é uma consequência da Proposição 1.2. A prova completa pode ser encontrada em [19].

♦

A proposição abaixo compara o número de renovações ocorridas até diferentes momentos no tempo e será útil no estudo que desenvolveremos.

Proposição 1.3. *Dado $T > 0$,*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\xi(Tt)}{\xi(t)} = T.$$

[‡‡]As conclusões deste teorema são válidas inclusive quando $\mu_\tau = \infty$. A parte (b) deste teorema é conhecida como o Teorema Elementar da Renovação.

Demonstração: Desde que

$$\frac{\xi(Tt)}{\xi(t)} = \frac{\xi(Tt)}{Tt}\frac{Tt}{\xi(t)},$$

temos que

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\xi(Tt)}{\xi(t)} = T\lim_{t\to\infty}\frac{\xi(Tt)}{Tt}\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\xi(t)} = T$$

e a última igualdade segue por aplicação do Teorema 1.1.

♦

Quando os tempos entre chegadas de renovações apresentam segundo momento σ_τ^2 finito, há uma versão do Teorema do Limite Central para processos de renovação:

Teorema 1.2. *Suponha que* $\mu_\tau < \infty$ *e* $\sigma_\tau^2 < \infty$. *Então*

$$\lim_{t\to\infty} P\left[\frac{\xi(t) - t/\mu_\tau}{\sigma\sqrt{t/\mu_\tau^3}} < y\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-x^2/2}dx.$$

Para a prova deste teorema e para maiores detalhes sobre processos de renovação ordinários, bem como sobre outras versões desses processos, consulte [8].

1.1.4 Processos de renovação com recompensa

Seja $\{X_j\}_{j\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com média finita e $\{\xi(t)\}_{t\geq 0}$ um processo de renovação com tempos $\{T_n = \sum_{j=1}^{n}\tau_j\}_{n\geq 1}$ de chegadas de renovações. Definimos o processo $\{R(t)\}_{t\geq 0} := \{R_{\xi(t)}\}_{t\geq 0}$, onde

$$R(0) = 0 \;\; e \;\; R(t) = \sum_{j=1}^{\xi(t)} X_j,$$

como um processo de renovação com recompensas $\{X_j\}_{j\geq 1}$.

Para processos de renovação com recompensa, resultados limite análogos aos oferecidos pelo Teorema 1.1 podem ser obtidos.

Teorema 1.3. *Se* $\mu_X < \infty$ *e* $\mu_\tau < \infty$, *então*

(a)

$$\frac{R(t)}{t} \to \frac{\mu_X}{\mu_\tau}, \quad c.p.\ 1.$$

(b)

$$\frac{E[R(t)]}{t} \to \frac{\mu_X}{\mu_\tau}.$$

Demonstração: Veja [19].

♦

1.2 Apresentação do modelo de fontes ON/OFF

Consideramos, inicialmente, um modelo o mais simples possível de rede de transmissão de dados, composto de uma única fonte e um único destino (*buffer*), ao qual denominaremos de **Modelo de uma fonte ON/OFF**.

A fonte gera tráfego a uma certa taxa aleatória η, não necessariamente constante, durante um tempo aleatório de atividade (**período *ON***), permanecendo inativa por um tempo aleatório de silêncio (**período *OFF***). Quando num período de silêncio, a fonte não gera demanda por tráfego e os períodos de atividade e silêncio se alternam.

Entenderemos por um **período entre tráfego** como sendo um tempo entre ocorrências de tráfego, composto pela união de tempos de atividade e silêncio consecutivos.

Sejam $\tau_1^{on}, \tau_2^{on}, \cdots$ v.a. não negativas i.i.d. F_{on} representando o comprimento dos períodos ON e $\tau_1^{off}, \tau_2^{off}, \cdots$ v.a. não negativas i.i.d. F_{off} representando o comprimento dos períodos OFF. Assumimos que tais sequências sejam independentes e que F_{on} e F_{off} são funções de distribuição com médias finitas.

Seja τ_i a v.a. representando o comprimento do i-ésimo período entre tráfego, isto é,

$$\tau_i = \tau_i^{on} + \tau_i^{off}, \;\; i \geq 1.$$

Considere a sequência

$$T_n = T_0 + \sum_{i=1}^{n} \tau_i, \;\; n \geq 0, \tag{1.6}$$

em que

$$\sum_{i=1}^{0} \tau_i = 0$$

e T_0 é uma variável aleatória de atraso independente das τ_i^{on} e das τ_i^{off}. Se definirmos

$$T_0 = B(\tau_0^{on} + \tau_1^{off}) + (1 - B)\tau_0^{off},$$

em que B, τ_0^{on} e τ_0^{off} são variáveis aleatórias independentes e independentes de $\{\tau_i^{on},\ i \geq 1,\ \tau_i^{off},\ i \geq 1\}$ e B é Bernoulli, com

$$P(B = 1) = \frac{E[\tau_i^{on}]}{E\tau_i} = 1 - P(B = 0), \tag{1.7}$$

teremos que a sequência definida em (1.6) é estacionária.

A seguir, definimos o processo que sinaliza se a fonte está ou não ativa num dado tempo.

Definição 1.8. Definimos o processo $\{W(t)\}_{t\geq 0}$, a tempo contínuo, dado por

$$W(t) = B1_{[0,\tau_0^{on})}(t) + \sum_{n=0}^{\infty} 1_{[T_n, T_n + \tau_{n+1}^{on})}(t), \quad t \geq 0,$$

em que B é a variável aleatória definida em (1.7), como o **Processo ON/OFF de uma fonte** no Modelo ON/OFF.

Pela definição, observe que, quando $t \geq T_0$,

$$W(t) = \begin{cases} 1 & , \quad se\ T_n \leq t < T_n + \tau_{n+1}^{on}\ para\ algum\ n \\ 0 & , \quad se\ T_n + \tau_{n+1}^{on} \leq t < T_{n+1}\ para\ algum\ n \end{cases},$$

e, quando $0 < t < T_0$,

$$W(t) = \begin{cases} 1 & , \quad se\ B = 1\ e\ 0 \leq t < \tau_0^{on} \\ 0 & , \quad caso\ contr\acute{a}rio \end{cases}.$$

Assim, temos que

$$W(t) = \begin{cases} 1 & , \quad se\ t\ est\acute{a}\ em\ um\ per\acute{\i}odo\ ON \\ 0 & , \quad se\ t\ est\acute{a}\ em\ um\ per\acute{\i}odo\ OFF \end{cases}.$$

Por simplicidade, consideremos $T_0 = 0$. Daí, podemos reescrever o processo ON/OFF da fonte como

$$W(t) = \sum_{n \geq 0} 1_{[T_n, T_n + \tau_{n+1}^{on})}(t), \quad t \geq 0. \tag{1.8}$$

Estamos interessados em estudar o comportamento do tráfego emitido pela fonte. A cada período τ está associada uma **carga de tráfego** aleatória $\widetilde{X}$, emitida ao longo do respectivo período τ^{on}. Essas cargas são direcionadas a um dispositivo de memória até serem transmitidas ao seu destino final. É importante ressaltar que nos tempos de chegada de tráfego novas contribuições ao tráfego começam a ser feitas após um período de silêncio.

De grande interesse e que está relacionado ao Processo ON/OFF da fonte é o **Processo acumulado associado** $\{A(t)\}_{t \geq 0}$, dado por

$$A(t) = \int_0^t \eta(s) W(s) ds, \quad t \geq 0. \tag{1.9}$$

Esse processo indica a carga de tráfego acumulada emitida pela fonte até o tempo t.

Ao longo do tempo, essa carga se acumula no reservatório, que tem uma dada capacidade de memória e se esvazia à uma taxa c de escoamento. Fixado um tempo, a ocupação (volume) desse reservatório é dado por

$$V(t) = A(t) - ct, \quad t \geq 0. \tag{1.10}$$

O processo $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ é denominado de **Processo de armazenamento**.

Se considerarmos $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ um processo que registra o número de ocorrências de tráfego até o tempo t, isto é,

$$N(t) = max\{n : T_n \leq t\}, \tag{1.11}$$

vemos que este último trata-se de um processo de renovação ordinário. Desde que

$$N(T_{N(t)}) = N(t) \tag{1.12}$$

e

$$A(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \widetilde{X}_i + \eta \delta_t 1_{(t \in ON)} + \widetilde{X}_{N(t)+1} 1_{(t \in OFF)}, \tag{1.13}$$

se considerarmos o processo $\{Z(t)\}_{t\geq 0}$, definido por

$$Z(t) = A(T_{N(t)}) \tag{1.14}$$

e que mede o tráfego acumulado até o momento antes de t em que a última contribuição ao tráfego se iniciou, teremos que

$$Z(0) = 0 \;\; e \;\; Z(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} [Z(T_j) - Z(T_{j-1})] = \sum_{j=1}^{N(t)} \widetilde{X}_j,$$

o que caracteriza $\{Z(t)\}_{t\geq 0}$ como um processo de renovação com recompensas $\{\widetilde{X}_j\}_{j\geq 1}$.

Desde que

$$Z(t) = Z(T_{N(t)}),$$

temos que o processo $\{Z(t)\}_{t\geq 0}$ cresce por saltos.

Considere, agora, a superposição de M fontes ON/OFF i.i.d. alimentando um servidor. Então, o número de fontes ativas no tempo t é dado por

$$W_M(t) = \sum_{m=1}^{M} W^{(m)}(t), \quad t \geq 0,$$

onde $\{W^{(m)}(t)\}_{t\geq 0}$, $m = 1, \cdots, M$, representa o processo ON/OFF da fonte m. O processo $\{W_M(t)\}_{t\geq 0}$ é denominado **Processo carga de trabalho**. O Processo acumulado associado até o tempo t, neste caso, é dado por

$$A(t) := A_M(t) = \int_0^t \sum_{m=1}^{M} \eta^{(m)}(s) W^{(m)}(s) ds, \quad t \geq 0,$$

onde $\{\eta^{(m)}(s)\}_{s\geq 0}$ corresponde ao processo da taxa de transmissão de tráfego da fonte m.

1.3 O modelo de M fontes ON/OFF i.i.d. é análogo ao modelo de uma única fonte

Seguindo as ideias apresentadas na Seção 1.2, considere $\{W^{(m)}(t)\}_{t\geq 0}$, $m = 1, 2, \cdots, M$, cópias i.i.d. de $\{W(t)\}_{t\geq 0}$, onde $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ é o processo ON/OFF de uma fonte dado pela

Definição 1.8.

Consideremos uma rede formada por M fontes independentes e identicamente distribuídas, contribuindo com a geração de cargas de tráfego que serão enviadas para um dispositivo de memória. Neste caso, para cada $t \geq 0$, podemos reescrever o **Processo acumulado associado** como

$$\begin{aligned} A_M(t) &= \int_o^t \sum_{m=1}^{M} \eta^{(m)}(s) W^{(m)}(s) ds \\ &= \sum_{m=1}^{M} \int_o^t \eta^{(m)}(s) W^{(m)}(s) ds \\ &= \sum_{m=1}^{M} A^{(m)}(t), \end{aligned}$$

onde $\{A^{(m)}(t)\}_{t \geq 0}$ representa o Processo acumulado associado da fonte m. Ou seja, o Processo acumulado associado, neste caso, será o somatório dos processos associados acumulados de cada fonte considerada.

Para M fontes, o **Processo de armazenamento** é dado por

$$\begin{aligned} V_M(t) &= A_M(t) - ct = \sum_{m=1}^{M} A^{(m)}(t) - ct \\ &= \sum_{m=1}^{M} [A^{(m)}(t) - \frac{c}{M} t] = \sum_{m=1}^{M} [V^{(m)}(t)], \end{aligned}$$

onde $V^{(m)}(t)$ é o processo de armazenamento da fonte m.

Considere o processo $\{Z^{(m)}(t)\}_{t \geq 0}$, associado à fonte m, dado por

$$Z^{(m)}(t) = A^{(m)}(T_{N^{(m)}(t)}) = \sum_{j=1}^{N^{(m)}(t)} \widetilde{X}_j^{(m)},$$

onde $\{A^{(m)}(t)\}_{t \geq 0}$ é o Processo acumulado associado à fonte m. A análise desse processo é fundamental, visto que ele determina o comportamento limite do processo $\{A^{(m)}(t)\}_{t \geq 0}$ e, consequentemente, do processo $\{V^{(m)}(t)\}_{t \geq 0}$.

Desde que M fontes i.i.d. alimentam o *buffer*, teremos

$$\begin{aligned} Z_{(M)}(t) &:= \sum_{m=1}^{M} Z^{(m)}(t) \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{MN^{(m)}(t)} \widetilde{X}_j^{(m)} \\ &\sim \sum_{j=1}^{N^{(m)}(Mt)} \widetilde{X}_j^{(m)} = Z^{(m)}(Mt). \end{aligned}$$

Na expressão acima, a igualdade em distribuição pode ser observada por comparação das funções características e a aproximação assintótica ocorre desde que $\frac{N^{(m)}(Mt)}{N^{(m)}(t)} \to M$ quanto $t \to \infty$, pela Teoria da Renovação.

Esse argumento mostra que o comportamento do tráfego agregado de M fontes ON/OFF i.i.d. pode ser compreendido a partir da análise do tráfego emitido por uma única fonte, sob uma escala de agregação temporal conveniente.

1.4 Breve histórico

Vários trabalhos sobre análise do comportamento de tráfego em redes aproximam o processo $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ por

$$A(t) \cong \mu t + \sigma B_H(t) \tag{1.15}$$

ou por

$$A(t) \cong \mu t + \sigma \Lambda_\alpha(t), \tag{1.16}$$

onde B_H é o movimento Browniano fracionário, Λ_α é o movimento de Lèvy estável, μ e σ são parâmetros ligados, respectivamente, à taxa média de tráfego e à dispersão do tráfego.

Em [15] e [23], foi considerado o processo

$$A^*(Tt) = A_M(Tt) = \int_0^{Tt} \left(\sum_{m=1}^{M} \eta^{(m)}(u) W^{(m)}(u) \right) du, \tag{1.17}$$

então denominado de **T-ésimo modelo**. Em [23], estudou-se o comportamento assintótico de (1.17) para $\eta(s) \equiv 1$ e valores grandes de M e T. Esse comportamento dependeria das distribuições dos períodos ON e OFF e da ordem de passagem dos limites. Mostrou-se

Diremos que $a(x) \sim b(x)$ se, e somente se, $\lim_{x\to\infty} \frac{a(x)}{b(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{b(x)}{a(x)} = 1$

que, quando o limite é passado em M e, depois, em T, a convergência, no sentido das distribuições de dimensão finita, é algo como em (1.15); quando tomado na ordem contrária, o limite é algo como em (1.16).

Em [15], foram encontrados limites parecidos, mas sob condições que se remetem à velocidade das taxas de conexão. Isto é, sob a hipótese de crescimento lento da taxa de conexão, ou, equivalentemente, quando a dependência do T-ésimo modelo desaparece quando $T \to \infty$, a convergência do processo $\{A^*(Tt)\}_{t\geq 0}$ se daria para algo parecido com (1.15), ao passo que se as taxas de conexão variam de modo a induzir a longa dependência, que é a hipótese de crescimento rápido, o limite seria algo parecido com (1.16).

1.5 O problema do transbordamento

No modelo de uma fonte ON/OFF, uma fonte emite cargas de tráfego alternando-se em períodos de atividade e silêncio. Essas cargas são transmitidas a um nó da rede onde há um dispositivo de memória (*buffer*) que é continuamente pressionado por esse fluxo aleatório.

Podemos conceber esse dispositivo de memória como um reservatório de informação, e a ele estão associados uma capacidade de armazenamento e uma capacidade de escoamento (processamento, execução). Quando ocorre um desequilíbrio no sistema e a demanda por tráfego é alta a ponto de tornar-se latente, dizemos estar diante de um problema de transbordamento. Como consequência, pode haver perda de informação, o que compromete a qualidade da transmissão.

Considerando a capacidade de armazenamento x e a velocidade de escoamento c (largura da banda) do *buffer*, uma questão de interesse é estimar a **probabilidade de transbordamento** do tráfego, dada por

$$P\left(\sup_{t\geq 0}\{A(t) - ct\} > x\right). \tag{1.18}$$

Essa informação é importante para se tentar prever o problema do transbordamento e para efeitos de redimensionamento dos recursos de rede face à iminência do mesmo.

Seja $\{V(t)\}_{t\geq 0}$ o **Processo de armazenamento** do *buffer*, dado por

$$V(t) = A(t) - ct. \tag{1.19}$$

Esse processo representa o volume de informação a ser armazenada no *buffer* até o tempo t. Compreender o comportamento assintótico desse processo é fundamental para se estimar cotas para a probabilidade do transbordamento.

Note que os processos $\{V(t)\}_{t\geq 0}$ e $\{Z(t)\}_{t\geq 0}$ estão relacionados pela equação

$$V(T_{N(t)}) = Z(t) - cT_{N(t)}. \tag{1.20}$$

Por simplicidade, consideraremos $c = 1$ e designaremos o processo $\{V(T_{N(t)})\}_{t\geq 0}$ como **Processo Associado**. Assim, temos que

$$V(T_{N(t)}) = \sum_{i=1}^{N(t)} (\widetilde{X}_i - \tau_i). \tag{1.21}$$

Estamos particularmente interessados em estudar a probabilidade $\Psi_t(x)$ do transbordamento ocorrer até o tempo t, isto é,

$$\Psi_t(x) = P\left(\sup_{0\leq\delta\leq t} V(\delta) > x\right), \tag{1.22}$$

e o caso limite, já citado na Equação (1.18), de a probabilidade $\Psi(x)$ do transbordamento ocorrer, dada por

$$\Psi(x) = \lim_{t\to\infty} \Psi_t(x) = P\left(\sup_{\delta\geq 0} V(\delta) > x\right), \tag{1.23}$$

onde x representa a capacidade de memória do *buffer*.

Nosso interesse, sobretudo, é estimar cotas para essas probabilidades sob a hipótese de que as cargas de tráfego associadas ao processo $\{V(t)\}_{t\geq 0}$ têm cauda pesada.

Para atingirmos esse objetivo, precisaremos compreender, numa formulação mais geral, o comportamento assintótico de somas aleatoriamente indexadas do tipo

$$R_{\xi(t)} = \sum_{i=1}^{\xi(t)} X_i,$$

onde $\xi(t)$ é um tempo de parada aleatório, para cada t, e X_i são variáveis aleatórias de cauda pesada e são dependentes de $\xi(t)$.

Capítulo 2

Teorema de limite central para processos de renovação com recompensa

No capítulo anterior, apresentamos a definição de processo de renovação com recompensa, isto é, do processo $\{R_{\xi(t)}\}_{t\geq 0}$ tal que

$$R_0 = 0 \;\; e \;\; R_{\xi(t)} = \sum_{j=1}^{\xi(t)} X_j, \tag{2.1}$$

onde $\{X_j\}_{j\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. e $\{\xi(t)\}_{t\geq 0}$ é um processo de renovação.

Embora seja de interesse independente, o estudo do comportamento assintótico desse tipo de processo tem aparecido na literatura no contexto de modelagem de tráfego em redes de comunicação.

Em [13], considerou-se a agregação de M cópias independentes de um processo de renovação com recompensa e promoveu-se uma mudança de escala de observação por um fator de dilatação temporal T. Supondo que os tempos entre renovações e as recompensas têm, ambos, cauda pesada com expoentes de cauda $\alpha \in (1,2)$ e $\beta \in (0,2)$, respectivamente, e independência entre a sequência de tempos entre renovações e a sequência de recompensas, mediante estabilização apropriada e sob um regime sequencial de limites avaliados sobre M e T, foram observados diferentes comportamentos para o processo limite. Quando se fazia $T \to \infty$ e, depois, $M \to \infty$, a convergência* fatalmente seria para

*Aqui, nos referimos à convergência no sentido das distribuições finito-dimensionais.

o movimento de Lèvy estável, com índice de estabilidade a depender da relação entre α e β.

Entretanto, se a ordem dos limites fosse invertida e se $\beta > \alpha$, o processo limite seria β-estável H-sssi. Nesta última situação, fossem os incrementos dependentes, o limite não seria nem o movimento Lèvy estável (mLe), nem o movimento Browniano fracional (mBf). Esse fato foi confirmado em [25], onde provou-se, por meio de representações integrais, que o processo limite não é um movimento estável fracional linear, categoria mais geral de processos que contém o mLe e o mBf.

Na modelagem proposta no capítulo anterior, vimos que surgem somas de variáveis aleatórias i.i.d. do tipo (2.1), aleatoriamente indexadas por $\{\xi(t)\}_{t\geq 0}$, em que os tempos entre chegadas $\{\tau_j\}_{j\geq 1}$ formam uma sequência de variáveis aleatórias positivas i.i.d, mas com o diferencial de ser fortemente dependente da sequência de recompensas $\{X_j\}_{j\geq 1}$. Isso faz com que seja de grande relevância para nós o estudo do comportamento assintótico de tais processos.

O interesse em trabalhar com caudas pesadas nos aproxima dos trabalhos [13] e [25]. Entretanto, a questão da dependência entre as sequências $\{X_j\}_{j\geq 1}$ e $\{\tau_j\}_{j\geq 1}$, de grande interesse para o enfoque deste trabalho, nos motiva a desenvolver outras técnicas para compreender o comportamento assintótico de processos de renovação com recompensa.

Basendo-nos na teoria de martingales e outras ferramentas, mostraremos no Teorema 2.4 que, com uma estabilização adequada e sob certas condições, processos de renovação com recompensa convergem, numa métrica apropriada, para variáveis aleatórias estáveis, e esta é a principal contribuição deste capítulo para a tese.

2.1 Preliminares

Nesta seção, apresentaremos alguns detalhes morfológicos das distribuições estáveis e seus domínios de atração. Definiremos a distância Mallows, uma métrica no espaço de distribuições, que dará sentido à convergência obtida no Teorema 2.4. Além disso, discutiremos a não hereditariedade da convergência de sequências quando consideramos subsequências aleatoriamente indexadas.

2.1.1 Domínios de atração de distribuições estáveis

Uma importante propriedade[†] que caracteriza as caudas das distribuições estáveis é a seguinte:

Propriedade 2.1. Seja $G_\alpha \stackrel{d}{=} S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, a função de distribuição de uma variável aleatória $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, com $\alpha \in (0, 2)$. Então

$$\lim_{x \to \infty} x^\alpha (1 - G_\alpha(x)) = C_\alpha \frac{1+\beta}{2} \sigma^\alpha$$

e

$$\lim_{x \to \infty} x^\alpha (G_\alpha(-x)) = C_\alpha \frac{1-\beta}{2} \sigma^\alpha,$$

onde

$$C_\alpha = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha) cos(\pi\alpha/2)} & , \ se \ \ \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} & , \ se \ \ \alpha = 1 \end{cases}.$$

Alternativamente, conforme [14], as caudas das distribuições estáveis podem ser caracterizadas da seguinte maneira:

Propriedade 2.2. Seja $G_\alpha \stackrel{d}{=} S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, com $\alpha \in (0, 2)$. Então

$$(1 - G_\alpha(x)) = a_+ x^{-\alpha}(1 + x^{-\gamma} o(1)), \ \ x > 0,$$

e

$$G_\alpha(-x) = a_- x^{-\alpha}(1 + x^{-\gamma} o(1)), \ \ x > 0,$$

onde $\gamma < \alpha$ e os parâmetros de cauda a_+ e a_- são constantes não negativas.

A partir de agora, considere $X_1, X_2, \cdots$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição F. Denotaremos

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{2.2}$$

Definição 2.1. [‡] A distribuição F é dita estar no **domínio de atração** de uma variável aleatória estável S_α, ou simplesmente de uma distribuição estável, se existem constantes

[†]Conforme [10], pág. 12.
[‡]Conforme [20], pág. 5.

positivas $\{d_n\}$ e constantes reais $\{a_n\}$ tais que, para todo $n \geq 1$,

$$\frac{S_n}{d_n} + a_n \stackrel{d}{\to} S_\alpha,$$

onde $\stackrel{d}{\to}$ significa convergência em distribuição. Notação: $F \in \mathcal{D}(S_\alpha)$.

Uma importante equivalência que relaciona o comportamento das caudas de uma função de distribuição qualquer com o fato da função de distribuição pertencer ao domínio de atração de uma distribuição estável é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 2.1. *Para $\alpha \in (0,2)$, $F \in \mathcal{D}(S_\alpha)$ se, e somente se, existem constantes $M^+, M^- \geq 0$, $M^+ + M^- > 0$, tais que, quando $x \to \infty$,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(-x)}{1-F(x)} = \frac{M^-}{M_+}$$

e, para todo $\xi > 0$,

$$M_+ > 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to\infty} \frac{1-F(\xi x)}{1-F(x)} = \frac{1}{\xi^\alpha},$$

$$M_- > 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to\infty} \frac{F(-\xi x)}{F(-x)} = \frac{1}{\xi^\alpha}.$$

Demonstração: Conforme [6], página 207.

♦

Exemplo 2.1. Seja X uma variável aleatória não negativa com distribuição F, cuja cauda $\overline{F} = 1 - F$ é tal que $\overline{F}(x) \sim x^{-\alpha}L(x)$, onde $\alpha \in (0,2)$ e L é uma função lentamente variante. Então, pelo Teorema 2.1, $F \in \mathcal{D}(S_\alpha)$.

O exemplo acima diz que toda distribuição de variável aleatória não negativa de cauda pesada está no domínio de atração de alguma distribuição estável.

Domínios de atração mais restritivos podem ser considerados como, por exemplo, o **domínio normal de atração**, definido ao se considerar, na Definição 2.1, $d_n = dn^{1/\alpha}$, onde d é uma constante positiva. Uma caracterização alternativa para esse conjunto é dada pela definição abaixo, devida a Jonhson e Samworth [11].

Definição 2.2. Se F é uma função de distribuição tal que

$$F(x) = \frac{a_- + b(x)}{|x|^\alpha}, \quad se \;\; x < 0$$

e

$$1 - F(x) = \frac{a_+ + b(x)}{|x|^\alpha}, \quad se \;\; x \geq 0,$$

onde $b(x) \to 0$ quando $x \to \pm\infty$, então dizemos que F está no domínio normal de atração de alguma variável aleatória S_α e que a_+ e a_- são os seus parâmetros de cauda. Notação: $F \in \mathcal{D}_N(S_\alpha)$.

Exemplo 2.2. Seja X uma variável aleatória não negativa com distribuição F, tal que $\overline{F}(x) = x^{-\alpha}L(x)$, onde $\alpha \in (0, 2)$ e L é uma função lentamente variante. Se tomarmos $a_- = 0$, $a_+ = 1$ e $b(x) = (L(x) - 1)1_{\{x>0\}}$ teremos, pela Definição 2.2, que $F \in \mathcal{D}_N(S_\alpha)$. De fato, se L é lentamente variante, para algum t fixo e x grande, podemos escrever $L(x) = \frac{\widetilde{L}(tx)}{\widetilde{L}(x)}$, onde $\widetilde{L}$ é uma função lentamente variante. Daí,

$$\lim_{x\to\infty} b(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\widetilde{L}(tx)}{\widetilde{L}(x)} - 1 = 0.$$

Em particular, se para algum $\gamma > 0$ e C constante tivermos

$$b(x) \leq \frac{C}{|x|^\gamma},$$

dizemos que F está no **domínio normal forte de atração** de S_α e denotamos $F \in \mathcal{D}_{NF}(S_\alpha)$.

Exemplo 2.3. Seja F uma função de distribuição como no Exemplo 2.2. Então $F \in \mathcal{D}_{NF}(S_\alpha)$ se L for tal que, para algum $\gamma > 0$, ocorre

$$L(x) \leq cx^{-\gamma} + 1, \;\; \forall\, x > 0.$$

2.1.2 Distância Mallows e condição tipo Lindeberg

Iniciamos a discussão com a noção de Distância de Mallows.

Definição 2.3. Para $\alpha > 0$, definimos a distância de Mallows entre as funções de distribuição F e G como

$$d_\alpha(F, G) = \left(\inf_{(X,Y)} E\{|X - Y|^\alpha\} \right)^{1/\alpha},$$

onde o ínfimo é calculado sobre os vetores aleatórios (X, Y) cujas funções de distribuição marginal são F e G.

Estamos especialmente interessados no caso onde $\alpha > 1$. Em [9], foi provada a seguinte representação para a distância Mallows entre duas distribuições quaisquer:

Teorema 2.2 (Representação). *Seja $\alpha \geq 1$, F e G distribuições quaisquer em $\mathbb{R}$. Então*

$$d_\alpha^\alpha(F,G) = E|F^{-1}(U) - G^{-1}(U)|^\alpha,$$

onde F^{-1} e G^{-1} representam as funções inversas generalizadas[§] de F e G, respectivamente, e $U \stackrel{d}{=} U(0,1)$.

Como corolário deste teorema, foram obtidas as seguintes representações alternativas para a distância Mallows.

Corolário 2.1. *Para $\alpha \geq 1$,*

$$d_\alpha^\alpha(F,G) = \int_0^1 |F^{-1}(u) - G^{-1}(u)|^\alpha du = E|X^* - Y^*|^\alpha,$$

onde $X^* \stackrel{d}{=} F$, $Y^* \stackrel{d}{=} G$ e $(X^*, Y^*) \stackrel{d}{=} F \wedge G = H^*$, isto é, $P(X^* \leq x, Y^* \leq y) = \min(F(x), G(y))$.

Com essa noção, considerando

$$D_{S_n}(G_\alpha) = \{F \ \ f.d.; F \stackrel{d}{=} S_n \text{ e } d_\alpha(F, G_\alpha) < \infty\},$$

onde S_n é como em (2.2), foi mostrado em [10] que a posição relativa entre esse conjunto e os domínios de atração definidos na seção anterior é

$$D_{NF}(G_\alpha) \subset D_{S_n}(G_\alpha) \subset D_N(G_\alpha). \tag{2.3}$$

Sob condições do tipo Lindeberg, foi provada em [3] a convergência, em distância Mallows, de somas parciais de variáveis aleatórias independentes, apropriadamente normalizadas, para uma variável aleatória estritamente estável. Precisamente, denotando por

$$S_n^{(\alpha)} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n^{1/\alpha}},$$

foi obtido o seguinte resultado:

[§]Dada uma função não decrescente F, sua função inversa generalizada F^{-1} é definida por $F^{-1}(y) = \inf\{x : F(x) \geq y\}$.

Teorema 2.3. ¶ *Fixe* $\alpha \in (0,2)$. *Seja* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias independentes (com* $EX_n = 0$, $\forall n \geq 1$, *se* $\alpha > 1$*). Considere* Y *uma variável estritamente* α*-estável e* $Y_1, Y_2, \cdots$ *cópias independentes de* Y. *Suponha satisfeita a condição:*

$$\forall\, b > 0, \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\{|X_i - Y_i|^{\alpha} 1_{(|X_i - Y_i| > bn^{\delta})}\} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{2.4}$$

com $\delta \in (0, \frac{2-\alpha}{2\alpha})$, *se* $\alpha \in [1,2)$ *e* $\delta \in (0, \frac{1-\alpha}{\alpha})$, *se* $\alpha \in (0,1)$. *Então*

$$\alpha \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d_\alpha(F_{S_n^{(\alpha)}}, F_Y) = 0$$

$$\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d_\alpha(F_{S_n^{(\alpha)} - c_n}, F_Y) = 0, \quad \textit{onde} \quad c_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i - Y_i).$$

A Condição (2.4) é parecida com a clássica Condição de Lindeberg presente no Teorema do Limite Central. Para uma configuração particular da sequência $\{X_i\}_{i\geq 1}$, a proposição abaixo sugere uma maneira alternativa de se verificá-la.

Proposição 2.1. ‖ *Se, adicionalmente às condições do Teorema 2.3, as variáveis da sequência* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *forem identicamente distribuídas, a Condição* (2.4) *é equivalente a*

$$d_\alpha(F_{X_1}, F_Y) < \infty.$$

Como estamos interessados em obter resultados de convergência de somas aleatoriamente indexadas do tipo (2.1), uma ideia natural seria adaptar este resultado, substituindo n por um número aleatório $\xi(t)$. Porém, temos que ter muito cuidado, pois, em geral, a convergência de subsequências aleatórias de uma sequência convergente de variáveis aleatórias não é automática, como nos mostram os exemplos abaixo.

Exemplo 2.4 (Convergência em distribuição)**.** Sejam $X_1, X_2, \cdots$ variáveis aleatórias i.i.d. $N(0,1)$ e $Z \stackrel{d}{=} N(0,1)$. Obviamente, temos que

$$X_n \stackrel{d}{\longrightarrow} Z.$$

Defina

$$\xi_1 = \inf\{n : \ X_n \geq 0\} \quad e \quad \xi_{n+1} = \inf\{k : \ k > \xi_n \, e \, X_k \geq 0\}.$$

¶Conforme [3], pág. 38.

‖Conforme [3], pág. 39.

Note que:

(a)

$$\xi_1 = \begin{cases} 1, & se \quad X_1 \geq 0 \\ 2, & se \quad X_1 < 0,\ X_2 \geq 0 \\ \quad \vdots & \\ k, & se \quad X_1 < 0,\ X_2 < 0, \cdots,\ X_k \geq 0 \end{cases}$$

e

$$P(\xi_1 = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k = 1,\ 2, \cdots.$$

A distribuição de X_{ξ_1} será, para $x > 0$,

$$\begin{aligned} P(X_{\xi_1} \leq x) &= \sum_{k \geq 1} P(X_{\xi_1} \leq x, \xi_1 = k) \\ &= \sum_{k \geq 1} P(X_k \leq x, \xi_1 = k) \\ &= \sum_{k \geq 1} P(X_1 < 0, \cdots,\ X_{k-1} < 0,\ 0 \leq X_k \leq x) \\ &= \sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \left[\Phi(x) - \frac{1}{2}\right] \\ &= 2\left[\Phi(x) - \tfrac{1}{2}\right] \\ &= P(|Z| \leq x), \end{aligned}$$

onde $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$.

(b)

$$\xi_2 = \begin{cases} 2, & se \quad \xi_1 = 1,\ X_2 \geq 0 \\ 3, & se \quad \xi_1 = 2,\ X_3 \geq 0 \\ \quad \vdots & \\ k, & se \quad \xi_1 = k-1,\ X_k \geq 0 \end{cases}$$

e

$$P(\xi_2 = k) = \binom{k-1}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = (k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

A distribuição de X_{ξ_2} será, para $x > 0$,

$$\begin{aligned} P(X_{\xi_2} \leq x) &= \sum_{k \geq 2} (k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \left[\Phi(x) - \frac{1}{2}\right] \\ &= 2\left[\Phi(x) - \tfrac{1}{2}\right] \\ &= P(|Z| \leq x). \end{aligned}$$

(c) Repetindo as contas, observa-se que, para qualquer n,

$$P(X_{\xi_n} \leq x) = 2\left[\Phi(x) - \frac{1}{2}\right] = P(|Z| \leq x).$$

Assim, vemos $\{X_{\xi_n}\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias identicamente distribuídas. Logo

$$X_{\xi_n} \xrightarrow{d} |Z|.$$

Isso mostra que, neste caso, a convergência em distribuição não se preserva.

Exemplo 2.5 (Convergência em média)**.** Considere $X_n : [0,1] \to [0,1]$, dada por

$$X_n(\omega) = \begin{cases} \sqrt{n}, & 0 \leq \omega \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < \omega \leq 1 \end{cases},$$

para $n = 1, 2, \cdots$. Temos que

$$E|X_n| = \sqrt{n}.\frac{1}{n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Logo,

$$X_n \xrightarrow{(1)} 0.$$

Seja

$$\xi_1 = \inf\{n : \ X_n > 0\} \ \ e \ \ \xi_{n+1} = \inf\{k : \ k > \xi_n, \ X_k > 0\}.$$

Note que:

(a) $\xi_1 = 1 \Rightarrow E(X_{\xi_1}) = 1.$

(b)

$$\xi_2 = \begin{cases} 2, & se \quad X_2 = \sqrt{2} \\ 3, & se \quad X_2 = 0 \ e \ X_3 = \sqrt{3} \\ 4, & se \quad X_2 = X_3 = 0, \ e \ X_4 = \sqrt{4} \ e \ P(\xi_2 = 4) = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{4} \\ \vdots & \\ k, & se \quad X_2 = X_3 = \cdots = X_{k-1} = 0 \ e \ X_k = \sqrt{k} \end{cases}$$

e

$$P(\xi_2 = 2) = \frac{1}{2}, \ P(\xi_2 = 3) = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}, \cdots, \ P(\xi_2 = k) = \frac{1}{k-1}.\frac{1}{k}.$$

Isso implica que

$$\begin{aligned} E(X_{\xi_2}) &= \sum_{k \geq 2} E\left[X_k 1_{(\xi_2 = k)}\right] \\ &= \sum_{k \geq 2} \sqrt{k} P(\xi_2 = k) \\ &= \sqrt{2}\frac{1}{2} + \sqrt{3}\frac{1}{2.3} + \sqrt{4}\frac{1}{3.4} + \cdots \end{aligned}$$

(c) Repetindo o argumento, vemos que

$$X_{\xi_3} = \sum_{k \geq 3} X_k 1_{(\xi_3 = k)} = \sum_{k \geq 3} \sqrt{k} 1_{(\xi_3 = k)},$$

e, mais geralmente,

$$X_{\xi_n} = \sum_{k \geq n} \sqrt{k} 1_{(\xi_n = k)} \geq \sqrt{n} \sum_{k \geq n} P(\xi_n = k) \geq \sqrt{n},$$

sendo a última desigualdade válida devido ao fato de ξ_n assumir valores a partir de n. Isso significa que

$$E|X_{\xi_n}| \geq \sqrt{n} \longrightarrow \infty$$

e isso mostra que a convergência em média não se preserva ao se considerar subsequências aleatoriamente indexadas.

Exemplo 2.6 (Convergência quase certa)**.** Considerando a mesma situação do Exemplo 2.5, vemos que $X_n \xrightarrow{q.c} 0$ e, no entanto, o mesmo não ocorre para X_{ξ_n} quando n cresce.

Em [9], mostrou-se que a convergência da sequência $\{X_i\}_{i \geq 1}$, em distância Mallows

($\alpha \geq 1$), se preserva mediante indexação por uma sequência de tempos de parada $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$, sob a hipótese de independência dessas sequências. No entanto, dependendo da relação de dependência travada entre essas sequências, a relação de convergência pode não ser herdada pela subsequência indexada.

Essa situação motiva o desenvolvimento de novas técnicas para se visualizar situações onde a condição de convergência da sequência é transferida para a sequência indexada, ainda que mediante alguma forma de dependência entre a variável indexadora e as variáveis que alimentam a soma.

2.2 Ferramentas

Nesta seção, apresentaremos as principais ferramentas a serem utilizadas na demonstração dos resultados obtidos neste capítulo. Em especial, apresentamos os conceitos de sequências martingales e variáveis aleatórias opcionais. Além disso, construimos exemplos com o objetivo de ilustrar esses conceitos e, ao mesmo tempo, antecipar detalhes da prova do Teorema 2.4.

2.2.1 Martingales e variáveis aleatórias opcionais

No que segue, considere $N_\infty = \{1, 2, \cdots, \infty\}$ e $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in N_\infty} = \{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \mathcal{A}_\infty$, onde $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de σ-álgebras e $\mathcal{A}_\infty = \vee_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}_n$ é a menor σ-álgebra contendo todas as anteriores. Usaremos a expressão $X \in \mathcal{A}$ para dizer que a variável aleatória X é $\mathcal{A}$-mensurável.

Definição 2.4. A sequência $\{X_n, \mathcal{A}_n\}_{n\geq 1}$ é dita ser uma **martingale** se, para cada n, ocorrer:

- $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$ e $X_n \in \mathcal{A}_n$
- $E|X_n| < \infty$
- $E(X_{n+1}|\mathcal{A}_n) = X_n$ q.c.

Exemplo 2.7. Sejam $\mathcal{G}_n = \sigma(X_1, Y_1, \cdots, X_n, Y_n)$ e $S_n = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{X}_i$, onde $\widetilde{X}_i = X_i - \mu_X - (Y_i - \mu_Y)$, X_i são cópias independentes de X, Y_i são cópias independentes de Y, $EX = \mu_X$ e $EY = \mu_Y$. Então $\{S_n, \mathcal{G}_n\}$ é uma martingale.

Definição 2.5. ** Uma variável aleatória ξ tomando valores em N_∞ é dita ser opcional relativa a $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in N_\infty}$ se, e somente se, o evento $(\xi \leq n) \in \mathcal{A}_n$, qualquer que seja $n \in N_\infty$.

Exemplo 2.8. Sejam $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in N_\infty}$, como no Exemplo 2.7, e $\xi_*(t) = \xi(t)+1$, onde $\{\xi(t)\}_{t\geq 0}$ é um processo de renovação (isto é, $\xi(t) = \max\{n : T_n \leq t\}$, em que $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$ e $\{X_i\}_{i\geq 1}$ forma uma sequência de variáveis aleatórias positivas i.i.d.). Então, $\xi_*(t)$ é uma variável aleatória opcional relativa a $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in N_\infty}$. Para verificar isso, considerando que, neste caso, $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{G}_{n+1}$ e definindo $\mathcal{G}_0 = \{\oslash, \Omega\}$, é suficiente verificar que $(\xi_*(t) = n) \in \mathcal{G}_n$. De fato, a inclusão ocorre desde que

$$(\xi_*(t) = n) = (\xi(t) = n-1) = (T_{n-1} \leq t, T_n > t) \in \mathcal{G}_n,\ \forall n \in N_\infty.$$

Seja ξ uma variável aleatória opcional relativa a $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in N_\infty}$. A fim de elencar algumas importantes propriedades de uma variável aleatória como essa, consideremos o conjunto

$$\mathcal{A}_\xi = \{A \in \mathcal{A}_\infty : A \cap (\xi \leq n) \in \mathcal{A}_n,\ \forall n\},$$

onde o evento $(\xi \leq n)$ pode ser substituido por $(\xi = n)$. Conforme [7], temos que

$$A_n := A \cap (\xi = n) \in \mathcal{A}_n,$$

$$A = \cup_{n\in N_\infty} A_n = \cup_{n\in N_\infty}[(\xi = n) \cap A_n],$$

e, além disso:

(i) $\mathcal{A}_\xi$ é uma sigma-álgebra e $\xi \in \mathcal{A}_\xi$;

(ii) $\xi \wedge n$ é uma variável aleatória opcional;

(iii) Se ξ_1, ξ_2 são variáveis aleatórias opcionais e $\xi_1 \leq \xi_2$, então $\mathcal{A}_{\xi_1} \subset \mathcal{A}_{\xi_2}$;

(iv) Em particular, $\mathcal{A}_{\xi\wedge n} = \mathcal{A}_\xi \cap \mathcal{A}_n$.

Exemplo 2.9. Considere a variável aleatória $S_{\xi_*(t)\wedge n}$, definida por

$$S_{\xi_*(t)\wedge n} = \begin{cases} S_n & ,\ se\ n \leq \xi_*(t) \\ S_{\xi_*(t)} & ,\ se\ n > \xi_*(t) \end{cases}$$

e o conjunto

$$\mathcal{G}_{\xi_*(t)} = \{G \in \mathcal{G}_\infty : G \cap (\xi_*(t) \leq n) \in \mathcal{G}_n,\ \forall n\},$$

**Conforme [7], pág. 338.

onde $\{S_n, \mathcal{G}_n\}$ e $\xi_*(t)$ foram definidos nos exemplos 2.7 e 2.8. Por (i), temos que $\mathcal{G}_{\xi_*(t)}$ é uma sigma-álgebra e por (i) e (ii), que também é uma sigma-álgebra o conjunto

$$\mathcal{G}_{\xi_*(t)\wedge n} = \mathcal{G}_{\xi_*(t)} \cap \mathcal{G}_n,$$

sendo a última igualdade válida por (iv). Além disso, a sequência $\{S_{\xi_*(t)\wedge n}, \mathcal{G}_{\xi_*(t)\wedge n}\}_{n\in N_\infty}$ é uma martingale. De fato, desde que $\xi_*(t) \wedge n \leq \xi_*(t) \wedge (n+1)$, por (iii), temos que $\mathcal{G}_{\xi_*(t)\wedge n} \subset \mathcal{G}_{\xi_*(t)\wedge(n+1)}$; desde que $\{S_n, \mathcal{G}_n\}_{n\in N_\infty}$ é martingale, temos que, para cada n,

$$E|S_{\xi_*(t)\wedge n}| \leq E|S_n| < \infty$$

e, por fim,

$$\begin{aligned}
E\{S_{(\xi_*(t)\wedge n)+1}|\mathcal{G}_{\xi_*(t)\wedge n}\} &= E\{S_{(\xi_*(t)+1)\wedge(n+1)}|\mathcal{G}_{\xi_*(t)\wedge n}\} \\
&= \begin{cases} E\{S_{n+1}|\mathcal{G}_{\xi_*(t)\wedge n}\} & , \ se \ \ n+1 \leq \xi_*(t)+1 \\ E\{S_{\xi_*(t)+1}|\mathcal{G}_{\xi_*(t)\wedge n}\} & , \ se \ \ n+1 > \xi_*(t)+1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} E\{\widetilde{X}_{n+1}|\mathcal{G}_n\} + E\{S_n|\mathcal{G}_n\} & , \ se \ \ n \leq \xi_*(t) \\ E\{\widetilde{X}_{\xi_*(t)+1}|\mathcal{G}_{\xi_*(t)}\} + E\{S_{\xi_*(t)}|\mathcal{G}_{\xi_*(t)}\} & , \ se \ \ n > \xi_*(t) \end{cases} \\
&= \begin{cases} E\{\widetilde{X}_{n+1}\} + S_n & , \ se \ \ n \leq \xi_*(t) \\ E\{\widetilde{X}_{\xi_*(t)+1}\} + S_{\xi_*(t)} & , \ se \ \ n > \xi_*(t) \end{cases} \\
&= \begin{cases} S_n & , \ se \ \ n \leq \xi_*(t) \\ S_{\xi_*(t)} & , \ se \ \ n > \xi_*(t) \end{cases} \\
&= S_{\xi_*(t)\wedge n},
\end{aligned}$$

desde que $\widetilde{X}_{(\xi_*(t)+1)\wedge(n+1)}$ é independente de $\mathcal{G}_{\xi_*(t)\wedge n}$, $E\widetilde{X}_i = 0$ e $S_{\xi_*(t)\wedge n} \in \mathcal{G}_{\xi_*(t)\wedge n}$.

2.2.2 Algumas desigualdades fundamentais

A seguir, apresentamos algumas desigualdades clássicas que serão usadas no decorrer dos nossos argumentos.

1. (Desigualdade de Burkholder) Sejam $\{S_i, \mathcal{G}_i\}_{1\leq i\leq n}$ uma martingale, em que $S_i =$

$\sum_{k=1}^{i} X_k$, e $1 < p < \infty$. Então existe uma constante $C = C(p) > 0$, dependendo apenas de p, tal que

$$E\{|S_n|^p\} \leq C(p) E \left\{ \left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \right]^{p/2} \right\}.$$

2. Seja $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, onde X_k são variáveis aleatórias quaisquer. Então, para todo $\gamma \in (0, 1]$,

$$E\{|S_n|^\gamma\} \leq \sum_{k=1}^{n} E|X_k|^\gamma. \tag{2.5}$$

3. (Desigualdade de Jensen) Seja ϕ uma função real convexa e X uma variável aleatória integrável. Então

$$E\phi(X) \geq \phi(EX).$$

Com essas ferramentas, estamos aptos a provar um importante resultado de convergência que enunciamos e detalhamos na próxima seção.

2.3 Convergência de processos de renovação com recompensa

Nesta seção, apresentamos um importante teorema que trata da convergência, em distância Mallows, de processos de renovação com recompensa, adequadamente estabilizados, para uma variável aleatória estável. No caso considerado, os tempos entre chegadas e as recompensas são variáveis aleatórias de cauda pesada. Além disso, essas sequências travam entre si uma forte relação de dependência.

Usaremos a notação $S_\xi^{(Z)}$,

$$S_\xi^{(Z)} := \sum_{i=1}^{\xi} Z_i,$$

para indicar a soma de variáveis aleatórias i.i.d. Z_i, com a mesma distribuição de Z, aleatoriamente indexada pela variável aleatória ξ. Estamos interessados, em particular, quando a variável aleatória indexadora é um processo de renovação

$$\xi(t) = max\{n : T_n \leq t\},$$

em que $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ e $\{X_i\}_{i\geq 1}$ é uma sequência de v.a. positivas i.i.d. com média finita.

Com essa notação, apresentamos o seguinte teorema:

Teorema 2.4. *Seja $F_{\xi(t)}$ a função de distribuição de*

$$Y_{\xi(t)} := \frac{S^{(X)}_{\xi(t)} - c_{\xi(t)}}{\xi^{1/\alpha}(t)},$$

onde

$$c_{\xi(t)} = \xi(t)\mu_X - \xi^{1/\alpha}(t)\mu_{Y_\alpha},$$

$\mu_X = EX$, $\mu_{Y_\alpha} = E(Y_\alpha)$ e Y_α uma variável aleatória α-estável, $1 < \alpha \leq 2$. Suponha que, para todo $b > 0$, a sequência $\{X_k\}_{k\geq 1}$ satisfaça a condição[††]*, quando $t \to \infty$,*

$$\frac{1}{\xi(t)} \sum_{k=1}^{\xi(t)} E\{|X_k - Y_k|^\alpha 1_{(|X_k - Y_k| > b[\xi(t)]^{(2-\alpha)/2\alpha})}\} \xrightarrow{(1)} 0, \tag{2.6}$$

onde $(X_1, Y_1),\ (X_2, Y_2), \cdots$ é uma sequência de vetores aleatórios independentes e $Y_1, Y_2, \cdots$ são cópias de Y_α. Então

$$d_\alpha(F_{\xi(t)}, G_\alpha) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{2.7}$$

onde G_α é a função de distribuição de Y_α.

Demonstração: Inicialmente e por simplicidade, considere $\mu_{Y_\alpha} = 0$.

(a) Defina $\widetilde{X}_j = X_j - \mu_X - Y_j$, como no Exemplo 2.7, e observe que

$$\begin{aligned} S^{(\widetilde{X})}_{\xi(t)} &= \sum_{j=1}^{\xi(t)} \widetilde{X}_j \\ &= \sum_{j=1}^{\xi(t)} [X_j - \mu_X - Y_j] \\ &= S^{(X)}_{\xi(t)} - S^{(Y)}_{\xi(t)} - \xi(t)\mu_X. \end{aligned}$$

[††]Temos usado a notação $\xrightarrow{(1)}$ para simbolizar convergência em média.

Logo,

$$\frac{S_{\xi(t)}^{(X)} - \xi(t)\mu_X}{\xi^{1/\alpha}(t)} = \frac{S_{\xi(t)}^{(\widetilde{X})}}{\xi^{1/\alpha}(t)} + \frac{S_{\xi(t)}^{(Y)}}{\xi^{1/\alpha}(t)}.$$

Desde que $1 < \alpha \leq 2$,

$$d_\alpha(F_{\xi(t)}, G_\alpha) \leq d_\alpha(F_{\xi(t)}, H) + d_\alpha(H, G_\alpha)$$

para qualquer função de distribuição H. Assim, se para alguma função de distribuição apropriada H provarmos que

$$d_\alpha(H, G_\alpha) \to 0, \tag{2.8}$$

para mostrar que

$$d_\alpha(F_{\xi(t)}, G_\alpha) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

será suficiente mostrar que

$$d_\alpha(F_{\xi(t)}, H) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{2.9}$$

para a H escolhida.

Escolhamos $H = G_{\xi(t)}$, a função de distribuição de $\frac{S_{\xi(t)}^{(Y)}}{\xi^{1/\alpha}(t)}$. Desde que $\mu_{Y_\alpha} = 0$ e das propriedades de leis estáveis, temos que

$$S_n^{(Y)} \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} Y_\alpha,$$

ou, equivalentemente,

$$Y_\alpha \stackrel{d}{=} \frac{S_n^{(Y)}}{n^{1/\alpha}}.$$

Assim, se tomarmos

$$G_{\xi(t)} \stackrel{d}{=} \frac{S_{\xi(t)}^{(Y)}}{\xi^{1/\alpha}(t)},$$

teremos que

$$
\begin{aligned}
d_\alpha(G_{\xi(t)}, G_\alpha) &= \inf_{(X \overset{d}{=} G_{\xi(t)}, Y \overset{d}{=} G_\alpha)} E|X - Y|^\alpha \\
&\leq E\left|\frac{S^{(Y)}_{\xi(t)}}{\xi^{1/\alpha}(t)} - Y_\alpha\right|^\alpha \\
&= E\left|\frac{S^{(Y)}_{\xi(t)}}{\xi^{1/\alpha}(t)} - \frac{S^{(Y)}_n}{n^{1/\alpha}}\right|^\alpha \\
&= E\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{S^{(Y)}_{\xi(t)}}{\xi^{1/\alpha}(t)} - \frac{S^{(Y)}_n}{n^{1/\alpha}}\right|^\alpha 1_{(\xi(t)=n)}\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} E\left\{\left|\frac{S^{(Y)}_{\xi(t)}}{\xi^{1/\alpha}(t)} - \frac{S^{(Y)}_n}{n^{1/\alpha}}\right|^\alpha 1_{(\xi(t)=n)}\right\} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Isso significa que

$$d_\alpha(G_{\xi(t)}, G_\alpha) = 0,$$

o que equivale dizer que

$$G_{\xi(t)} \overset{d}{=} G_\alpha,$$

e isso prova (2.8). Além disso, pela definição de distância Mallows, temos que

$$d_\alpha(F_{\xi(t)}, G_{\xi(t)}) \leq E\left|\frac{S^X_{\xi(t)} - \xi(t)\mu_X}{\xi^{1/\alpha}(t)} - \frac{S^{(Y)}_{\xi(t)}}{\xi^{1/\alpha}(t)}\right|^\alpha = E\left|\frac{S^{(\widetilde{X})}_{\xi(t)}}{\xi^{1/\alpha}(t)}\right|^\alpha.$$

Assim, (2.9) estará provado (e, portanto, o teorema para o caso $\mu_{Y_\alpha} = 0$) se provarmos que, quando $t \to \infty$,

$$E\left|\frac{S^{(\widetilde{X})}_{\xi(t)}}{\xi^{1/\alpha}(t)}\right|^\alpha \to 0. \tag{2.10}$$

(b) Afirmação:

$$E|\widetilde{X}_k|^\alpha \leq (2^\alpha + 1)E|X_k - Y_k|^\alpha.$$

De fato, desde que

$$\widetilde{X}_k = X_k - \mu_X - (Y_k - \mu_{Y_\alpha})$$

temos que

$$\begin{aligned} E|\widetilde{X}_k|^\alpha &\leq 2^\alpha E\left\{|X_k - Y_k|^\alpha + |\mu_X - \mu_{Y_\alpha}|^\alpha\right\} \\ &\leq 2^\alpha E\left\{|X_k - Y_k|^\alpha + |E(X_k - Y_\alpha)|^\alpha\right\} \\ &\leq 2^\alpha E\left\{|X_k - Y_k|^\alpha + E|X_k - Y_\alpha|^\alpha\right\} \\ &= (2^\alpha + 1)E|X_k - Y_k|^\alpha, \end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade foi obtida usando-se a desigualdade clássica $|a+b|^\alpha \leq 2^\alpha(|a|^\alpha + |b|^\alpha)$ e a última desigualdade foi obtida utilizando-se a Desigualdade de Jensen, uma vez que a função $\phi(x) = |x|^\alpha$ é convexa.

Assim, se (2.6) ocorre, também ocorrerá para $|\widetilde{X}_j|$ no lugar de $|X_j - Y_j|$.

(c) Seja $\xi_*(t) = \xi(t) + 1$. Do Exemplo 2.9, a sequência $\{S_{\xi_*(t)\wedge n}\}_{n\in N_\infty}$ é uma martingale com respeito a $\{\mathcal{G}_{\xi_*(t)\wedge n}\}_{n\in N_\infty}$. Isso implica que a sequência

$$\left\{\frac{S_{n_*}}{n_*^{1/\alpha}}, \mathcal{G}_{n_*}\right\}_{n\in N_\infty}$$

é também uma martingale, onde, para simplificação da notação, denotamos $n_* := \xi_*(t) \wedge n$. Usando a Desigualdade de Burkholder,

$$\begin{aligned} E\left\{\left|\frac{S_{n_*}^{(\widetilde{X})}}{n_*^{1/\alpha}}\right|^\alpha\right\} &\leq cE\left|\sum_{k=1}^{n_*}\left(\frac{\widetilde{X}_k}{n_*^{1/\alpha}}\right)^2\right|^{\alpha/2} = cE\left|\sum_{k=1}^{n_*}\frac{\widetilde{X}_k^2}{n_*^{2/\alpha}}\right|^{\alpha/2} \\ &= cE\left|\frac{1}{n_*^{2/\alpha}}\sum_{k=1}^{n_*}\widetilde{X}_k^2\right|^{\alpha/2} = cE\left\{\frac{1}{n_*}\left|\sum_{k=1}^{n_*}\widetilde{X}_k^2\right|^{\alpha/2}\right\}. \end{aligned}$$

Para $b > 0$, escreva

$$\widetilde{X}_k^2 = \widetilde{X}_k^2 1_{(|\widetilde{X}_k| \leq bn_*^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}})} + \widetilde{X}_k^2 1_{(|\widetilde{X}_k| > bn_*^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}})}$$

e teremos

$$\sum_{k=1}^{n_*}\widetilde{X}_k^2 \leq b^2 n_*^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} n_* + \sum_{k=1}^{n_*}\left\{\widetilde{X}_k^2 1_{(|\widetilde{X}_k| > bn_*^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}})}\right\}.$$

Segue que

$$
\begin{aligned}
E\left\{\frac{1}{n_*}\left|\sum_{k=1}^{n_*}\widetilde{X}_k^2\right|^{\alpha/2}\right\} &\leq E\left\{\frac{1}{n_*}\left|b^2 n_*^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} n_* + \sum_{k=1}^{n_*}\left\{\widetilde{X}_k^2 1_{(|\widetilde{X}_k|>bn_*^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}})}\right\}\right|^{\alpha/2}\right\} \\
&\leq E\left\{\frac{1}{n_*}|b^2 n_*^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} n_*|^{\alpha/2} + \frac{1}{n_*}\left|\sum_{k=1}^{n_*}\left\{\widetilde{X}_k^2 1_{(|\widetilde{X}_k|>bn_*^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}})}\right\}\right|^{\alpha/2}\right\} \\
&\leq b^\alpha + E\left\{\frac{1}{n_*}\sum_{k=1}^{n_*}\left\{|\widetilde{X}_k|^\alpha 1_{(|\widetilde{X}_k|>bn_*^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}})}\right\}\right\},
\end{aligned}
$$

onde a última desigualdade foi obtida usando-se a desigualdade (2.5) por duas vezes, já que $0 < \alpha/2 < 1$.

Assim,

$$
E\left\{\left|\frac{S_{n_*}^{(\widetilde{X})}}{n_*^{1/\alpha}}\right|^\alpha\right\} \leq cb^\alpha + cE\left\{\frac{1}{n_*}\sum_{k=1}^{n_*}\left[|\widetilde{X}_k|^\alpha 1_{(|\widetilde{X}_k|>bn_*^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}})}\right]\right\} \tag{2.11}
$$

e, fazendo $n_* = \xi_*(t) \wedge n \to \infty$, obtemos de (b) e da hipótese (2.6) que

$$
\lim_{n_*\to\infty} E\left\{\left|\frac{S_{n_*}^{(\widetilde{X})}}{n_*^{1/\alpha}}\right|^\alpha\right\} \leq cb^\alpha.
$$

Tomando b suficientemente pequeno, obtemos

$$
\lim_{n,t\to\infty} E\left\{\left|\frac{S_{n_*}^{(\widetilde{X})}}{n_*^{1/\alpha}}\right|^\alpha\right\} = 0. \tag{2.12}
$$

(d) Neste ponto, observamos que apenas fazer $n \to \infty$ em (2.11) não é suficiente para obtermos (2.12). De fato, se deixamos $n \to \infty$, ocorrerá

$$
E\left\{\left|\frac{S_{\xi_*(t)}^{(\widetilde{X})}}{\xi_*^{1/\alpha}(t)}\right|^\alpha\right\} \leq cb^\alpha + cE\left\{|\widetilde{X}_k|^\alpha 1_{(|\widetilde{X}_k|>b[\xi_*(t)]^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}})}\right\}.
$$

Agora, fazendo $t \to \infty$, desde que $\xi_*(t) \to \infty$, obtemos

$$
\lim_{t\to\infty} E\left\{\left|\frac{S_{\xi_*(t)}^{(\widetilde{X})}}{\xi_*^{1/\alpha}(t)}\right|^\alpha\right\} \leq cb^\alpha \xrightarrow{b\to 0} 0.
$$

(e) Finalmente, para b suficientemente pequeno,

$$
\begin{aligned}
E\left\{\frac{|S_{\xi(t)}^{(\widetilde{X})}|^{\alpha}}{\xi(t)}\right\} &= E\left\{\frac{|S_{\xi_*(t)}^{(\widetilde{X})} - \widetilde{X}_{\xi_*(t)}|^{\alpha}}{\xi(t)}\right\} \\
&\leq E\left\{\frac{2^{\alpha}\left(|S_{\xi_*(t)}^{(\widetilde{X})}|^{\alpha} + |\widetilde{X}_{\xi_*(t)}|^{\alpha}\right)}{\xi(t)}\right\} \\
&= 2^{\alpha}E\left\{\frac{\xi_*(t)}{\xi(t)}\left(\frac{|S_{\xi_*(t)}^{(\widetilde{X})}|^{\alpha}}{\xi_*(t)} + \frac{|\widetilde{X}_{\xi_*(t)}|^{\alpha}}{\xi_*(t)}\right)\right\} \\
&= 2^{\alpha}E\left\{\left(1+\frac{1}{\xi(t)}\right)\left(\frac{|S_{\xi_*(t)}^{(\widetilde{X})}|^{\alpha}}{\xi_*(t)} + \frac{|\widetilde{X}_{\xi_*(t)}|^{\alpha}}{\xi_*(t)}\right)\right\} \\
&\leq 2^{\alpha+1}\left\{E\left(\frac{|S_{\xi_*(t)}^{(\widetilde{X})}|^{\alpha}}{\xi_*(t)}\right) + E\left(\frac{|\widetilde{X}_{\xi_*(t)}|^{\alpha}}{\xi_*(t)}\right)\right\} \\
&\overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

Isso finaliza a prova de que vale a convergência (2.10) e, portanto, o teorema para o caso $\mu_{Y_\alpha} = 0$.

Para o caso em que $\mu_{Y_\alpha} \neq 0$, sejam $Z_i = Y_i - \mu_{Y_\alpha}$ e $M_i = X_i - \mu_X$. Desde que

$$M_i - Z_i = X_i - \mu_X - Y_i + \mu_{Y_\alpha}$$

e

$$E|M_i - Z_i|^{\alpha} \leq 2^{\alpha}E|X_i - Y_i|^{\alpha}.$$

temos que a hipótese (2.6) é válida para M_i e Z_i no lugar de X_i e Y_i. Assim, desde que $\mu_Z = 0$, pelo caso anterior, temos

$$\frac{S_{\xi(t)}^{(M)}}{\xi^{1/\alpha}(t)} \xrightarrow{d_\alpha} Z_\alpha,$$

isto é, com o abuso de notação,

$$d_\alpha\left(\frac{S^{(M)}_{\xi(t)}}{\xi^{1/\alpha}(t)}, Z_\alpha\right) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Desde que $d_\alpha(X,Y) = d_\alpha(X+a, Y+a)$ para qualquer constante real a, temos que

$$d_\alpha\left(\frac{S^{(M)}_{\xi(t)}}{\xi^{1/\alpha}(t)}, Z_\alpha\right) = d_\alpha\left(\frac{S^{(X)}_{\xi(t)} - \xi(t)\mu_X}{\xi^{1/\alpha}(t)}, Y_\alpha - \mu_{Y_\alpha}\right) = d_\alpha\left(\frac{S^{(X)}_{\xi(t)} - \xi(t)\mu_X + \xi^{1/\alpha}(t)\mu_{Y_\alpha}}{\xi^{1/\alpha}(t)}, Y_\alpha\right),$$

donde concluimos que

$$d_\alpha\left(\frac{S^{(X)}_{\xi(t)} - c_{\xi(t)}}{\xi^{1/\alpha}(t)}, Y_\alpha\right) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

onde $c_{\xi(t)} = \xi(t)\mu_X - \xi^{1/\alpha}(t)\mu_{Y_\alpha}$.

♦

Corolário 2.2. *Nas condições do Teorema 2.4, quando $t \to \infty$, também temos*

$$\frac{S^{(X)}_{\xi(t)} - c_{\xi(t)}}{\xi^{1/\alpha}(t)} \overset{d}{\longrightarrow} Y_\alpha. \tag{2.13}$$

Demonstração: Imediata, desde que convergência em distância Mallows implica em convergência em distribuição.

♦

Corolário 2.3. *O resultado do Teorema 2.4 permanece válido se o processo de renovação for tal que os tempos de chegadas são somas parciais de funções lineares de X, isto é, se*

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(X_i),$$

onde $\phi_i(.)$ é uma função linear, isto é, $\phi_i(X_i) = \eta_i X_i + W_i$, $i = 1, 2, \cdots$, em que $\{W_i\}_{i\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias positivas i.i.d. e $\{\eta_i\}_{i\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias positivas independentes, ambas as sequências independentes de $\{X_i\}_{i\geq 1}$.

Demonstração: Nas condições apresentadas, para $\widetilde{X}_i = X_i - \mu_X - Y_i + \mu_Y$, $i = 1, 2, \cdots$, temos que a sequência $\{S_n, \overline{\mathcal{G}}_n\}_{n\geq 1}$, em que $S_n = \sum_{i=1}^n \widetilde{X}_i$ e

$$\overline{\mathcal{G}}_n = \sigma(\eta_1, X_1, W_1, Y_1, \cdots, \eta_n, X_n, W_n, Y_n),$$

é uma martingale. Além disso, se o processo de renovação considerado se renova por tempos de chegada da forma $T_n = Z_1 + \cdots + Z_n$, onde $Z_i = \eta_i X_i + W_i$, $i = 1, \cdots, n$, teremos que a variável aleatória $\xi_*(t) = \xi(t) + 1$ é opcional com respeito a $\{\overline{\mathcal{G}}_n\}_{n\in N_\infty}$. De fato, desde que a função $f(\eta_i, X_i) = \eta_i X_i$ é contínua, temos que $\eta_i X_i \in \sigma(\eta_i, X_i)$, logo, $\eta_i X_i + W_i \in \sigma(\eta_i, X_i, W_i)$ e, finalmente,

$$(\xi_*(t) = n) = (T_{n-1} \leq t, T_n > t) \in \overline{\mathcal{G}}_n.$$

O restante da demonstração segue fielmente a demonstração do teorema, considerando-se a sigma álgebra $\overline{\mathcal{G}}_n$ ao invés de $\mathcal{G}_n$.

♦

Teorema 2.5. *Sejam* $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ *o processo de renovação dado em* (1.11)*, que registra o número de ocorrências de tráfego até o tempo* t*, e* $F_{N(t)}$ *a função de distribuição de*

$$\frac{S_{N(t)}^{(\tau^{on})} - c_{N(t)}}{N^{1/\alpha}(t)}.$$

Se $F_{on} \in \mathcal{D}_{NF}(G_\alpha)$*, então*

$$d_\alpha(F_{N(t)}, G_\alpha) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.14}$$

Demonstração: Verificaremos que a hipótese $F_{on} \in \mathcal{D}_{NF}(G_\alpha)$ implica que a Condição (2.6) é satisfeita.

(a) $F_{on} \in D_{NF}(G_\alpha)$ implica que $d_\alpha(F_{on}, F_Y) < \infty$. Logo,

$$d_\alpha(F_{\tau_i^{on}}, F_Y) < \infty, \ \ \forall i.$$

Pelo Teorema da Representação, existe um par $(\widetilde{\tau}_i^{on}, \widetilde{Y}_i)$ tal que $\widetilde{\tau}_i^{on} \overset{d}{=} \tau_i^{on}$, $\widetilde{Y}_i \overset{d}{=} Y_i$ e

$$E|\widetilde{\tau}_i^{on} - \widetilde{Y}_i|^\alpha < \infty, \ \ \forall i.$$

Portanto, para todo $b > 0$, e para todo $i \in \mathbb{N}$, temos que

$$E\left\{|\widetilde{\tau}_i^{on} - \widetilde{Y}_i|^\alpha 1_{\left(|\widetilde{\tau}_i^{on} - \widetilde{Y}_i| > b[N(t)]^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}}\right)}\right\} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

já que $N(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$.

(b) Podemos considerar que os pares $(\widetilde{\tau}_i^{on}, \widetilde{Y}_i)$ são mutuamente independentes para todo $i \in \mathbb{N}$ e, sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$\widetilde{\tau}_i^{on} - \widetilde{Y}_i \stackrel{d}{=} \widetilde{\tau}_j^{on} - \widetilde{Y}_j, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

Então, para todo $b > 0$, temos que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left\{|\widetilde{\tau}_i^{on} - \widetilde{Y}_i|^{\alpha} 1_{\left(|\widetilde{\tau}_i^{on} - \widetilde{Y}_i| > b[N(t)]^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}}\right)}\right\} = E\left\{|\widetilde{\tau}_i^{on} - \widetilde{Y}_i|^{\alpha} 1_{\left(|\widetilde{\tau}_i^{on} - \widetilde{Y}_i| > b[N(t)]^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}}\right)}\right\}$$

(c) Usando (a) e (b), obtemos

$$E\left|\frac{1}{N(t)}\sum_{i=1}^{N(t)} E\left\{|\tau_i^{on} - Y_i|^{\alpha} 1_{\left(|\tau_i^{on} - Y_i| > b[N(t)]^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}}\right)}\right\}\right| =$$

$$E\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left[|\tau_i^{on} - Y_i|^{\alpha} 1_{\left(|\tau_i^{on} - Y_i| > bn^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}}\right)}\right] 1_{(N(t)=n)}\right\} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left[|\widetilde{\tau}_i^{on} - \widetilde{Y}_i|^{\alpha} 1_{\left(|\widetilde{\tau}_i^{on} - \widetilde{Y}_i| > bn^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}}\right)}\right] 1_{(N(t)=n)}\right\} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left\{E\left[|\widetilde{\tau}_i^{on} - \widetilde{Y}_i|^{\alpha} 1_{\left(|\widetilde{\tau}_i^{on} - \widetilde{Y}_i| > bn^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}}\right)}\right] 1_{(N(t)=n)}\right\} =$$

$$E\left\{\sum_{n=1}^{\infty} E\left[|\widetilde{\tau}_i^{on} - \widetilde{Y}_i|^{\alpha} 1_{\left(|\widetilde{\tau}_i^{on} - \widetilde{Y}_i| > bn^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}}\right)}\right] 1_{(N(t)=n)}\right\} =$$

$$E\left\{E\left[|\widetilde{\tau}_i^{on} - \widetilde{Y}_i|^{\alpha} 1_{\left(|\widetilde{\tau}_i^{on} - \widetilde{Y}_i| > b[N(t)]^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}}\right)}\right]\right\} =$$

$$E\left\{|\widetilde{\tau}_i^{on} - \widetilde{Y}_i|^{\alpha} 1_{\left(|\widetilde{\tau}_i^{on} - \widetilde{Y}_i| > b[N(t)]^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}}\right)}\right\} \xrightarrow{t \to \infty} 0,$$

que corresponde à Condição (2.6).

Além disso, desde que $N(t) = max\{n : T_n \leq t\}$ é um processo de renovação cujos

$T_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i$ são definidos por $\tau_i = \tau_i^{on} + \tau_i^{off}$, onde as sequências $\{\tau_i^{on}\}_{i\geq 1}$ e $\{\tau_i^{off}\}_{i\geq 1}$ são independentes e compostas de variáveis aleatórias positivas i.i.d., o resultado segue por aplicação direta do Corolário 2.3.

♦

Capítulo 3

Convergência no sentido das distribuições de dimensão finita

No capítulo anterior, obtivemos a convergência do processo de renovação com recompensa estabilizado, na distância Mallows, quanto $t \to \infty$, para uma variável aleatória α-estável, sob certas condições de regularidade.

Neste capítulo, promovemos um reescalonamento deste processo no tempo com o objetivo de obter sua convergência, no sentido das distribuições de dimensão finita, para um processo estocástico α-estável.

Como uma primeira estratégia, definimos na Seção 3.2 a distância Mallows bivariada e buscamos relacionar convergência nessa métrica com convergência em distribuição bivariada. Discutimos a dificuldade em se trabalhar com a citada métrica e as fortes exigências para se obter a relação pretendida.

Na sequência, provamos o Teorema 3.5, que trata da convergência, no sentido das distribuições de dimensão finita, do processo de renovação com recompensa reescalonado estabilizado para um processo α-estável e, para tanto, utilizamos a distância Mallows e os resultados obtidos no Capítulo 2.

Além disso, na Seção 3.4, mostramos que o candidato natural ao processo limite é o processo de Lèvy α-estável.

3.1 Preliminares

Até o momento, temos trabalhado com o conceito de distância Mallows, que constitui uma métrica no espaço de distribuições [3]. Essa métrica, da forma com que foi apresentada no Capítulo 2, pode ser encarada como uma particularização da situação apresentada abaixo, devido à Bickel e Freedman [4].

No referido trabalho, considerou-se B um espaço de Banach com a norma $\|.\|$, o conjunto

$$\Gamma_p := \Gamma_p(B) = \{\gamma : \int \|x\|^p \, \gamma(dx) < \infty\}$$

para algum $p \in [1, \infty)$ arbitrário, onde γ representa uma distribuição de probabilidade sobre a σ-álgebra Borel de B, e, para $\alpha, \beta \in \Gamma_p$, definiu-se a medida

$$d_p(\alpha, \beta) := \left\{ \inf_{(\mathbf{X},\mathbf{Y})} E \, \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|^p \right\}^{1/p}, \tag{3.1}$$

onde $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ são vetores aleatórios a valores B tais que $\mathcal{L}(\mathbf{X}) = \alpha$ e $\mathcal{L}(\mathbf{Y}) = \beta$.

Provou-se em [4], dentre outras propriedades topológicas, que

(a) o ínfimo (3.1) é atingido,

(b) d_p é uma métrica em Γ_p.

Foi provada, também, uma importante equivalência que relaciona convergências em diferentes sentidos:

Teorema 3.1. *Sejam α_n, $\alpha \in \Gamma_p$. Então são equivalentes:*

i) $d_p(\alpha_n, \alpha) \to 0$ *quando* $n \to \infty$

ii) $\alpha_n \to \alpha$ *fracamente e* $\int \|x\|^p \, \alpha_n(dx) \to \int \|x\|^p \, \alpha(dx)$

iii) $\alpha_n \to \alpha$ *fracamente e* $\|x\|^p$ *é uniformemente* α_n*-integrável*

iv) $\int \phi d\alpha_n \to \int \phi d\alpha$ *para toda função* ϕ *contínua tal que* $\phi(x) = O(\|x\|^p)$.

No que segue, consideraremos uma outra configuração particular dessa métrica com o objetivo de deduzir importantes resultados de convergência relacionados ao comportamento do tráfego em redes de comunicação compostas por mais de uma fonte.

3.2 Distância Mallows bivariada

Considere $\mathbb{R}^2$, munido com a norma $\|.\|$, dada por

$$\|(x,y)\| = (|x|^\alpha + |y|^\alpha)^{1/\alpha}.$$

Temos que $(\mathbb{R}^2, \|.\|)$ é um espaço de Banach.

Sejam $\alpha \in [1,2)$ e o conjunto

$$\Gamma_\alpha := \Gamma_\alpha(\mathbb{R}^2) = \{F \textit{ f.d. bivariada tal que } \int (|x|^\alpha + |y|^\alpha) F(dx,dy) < \infty\}.$$

Definição 3.1. Para $F, G \in \Gamma_\alpha$, definimos a *distância Mallows bivariada* entre as funções de distribuição bivariadas F e G, denotada por $d_\alpha(F,G)$, como sendo

$$d_\alpha(F,G) := \left\{ \inf_{(\mathbf{X},\mathbf{Y})} E\,\|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|^\alpha \right\}^{1/\alpha}, \tag{3.2}$$

onde $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ e $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$ são vetores aleatórios tais que $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} F$ e $\mathbf{Y} \stackrel{d}{=} G$.

A proposição abaixo relaciona a distância Mallows bivariada com a distância Mallows das marginais.

Proposição 3.1. *Dadas $F, G \in \Gamma_\alpha$, $\alpha \in [1,2)$, sendo F_1, F_2 as funções de distribuição marginais de F e G_1, G_2 as funções de distribuição marginais de G, então*

$$d_\alpha^\alpha(F,G) \geq d_\alpha^\alpha(F_1,G_1) + d_\alpha^\alpha(F_2,G_2).$$

Demonstração: Desde que

$$E\,\|(X,Y)\|^\alpha = E|X|^\alpha + E|Y|^\alpha,$$

é imediato da definição acima que

$$\begin{aligned} d_\alpha^\alpha(F,G) &= \inf_{(\mathbf{X},\mathbf{Y})} E\left[|X_1-Y_1|^\alpha + |X_2-Y_2|^\alpha\right] \\ &= \inf_{(\mathbf{X},\mathbf{Y})} E|X_1-Y_1|^\alpha + \inf_{(\mathbf{X},\mathbf{Y})} E|X_2-Y_2|^\alpha \\ &\geq \inf_{(X_1,Y_1)} E|X_1-Y_1|^\alpha + \inf_{(X_2,Y_2)} E|X_2-Y_2|^\alpha \\ &= d_\alpha^\alpha(F_1,G_1) + d_\alpha^\alpha(F_2,G_2). \end{aligned}$$

♦

Exemplo 3.1. Para F e G funções de distribuição bivariadas, com distribuições marginais F_1, F_2 e G_1, G_2, respectivamente, temos que se $F = G$,

$$d_\alpha^\alpha(F,G) = d_\alpha^\alpha(F_1,G_1) + d_\alpha^\alpha(F_2,G_2)$$

e, se $F \neq G$, mas $F_1 = G_1$ e $F_2 = G_2$, temos a desigualdade estrita

$$d_\alpha^\alpha(F,G) > d_\alpha^\alpha(F_1,G_1) + d_\alpha^\alpha(F_2,G_2).$$

Neste ponto, observamos que é possível garantir uma representação para a distância Mallows bivariada desde que seja satisfeita a condição

$$\inf_{(\mathbf{X},\mathbf{Y})} E|X_i - Y_i|^\alpha = \inf_{(X_i,Y_i)} E|X_i-Y_i|^\alpha, \quad i = 1,2. \tag{3.3}$$

É o que nos sugere o teorema abaixo.

Teorema 3.2. *Sejam F e G funções de distribuição bivariadas satisfazendo* (3.3)*, onde $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2) \stackrel{d}{=} F$ e $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2) \stackrel{d}{=} G$. Então existem vetores $\widehat{\boldsymbol{X}}$ e $\widehat{\boldsymbol{Y}}$, distribuidos como F e G respectivamente, tais que*

$$d_\alpha^\alpha(F,G) = E\left\|\widehat{\boldsymbol{X}} - \widehat{\boldsymbol{Y}}\right\|^\alpha. \tag{3.4}$$

Demonstração: Pela Hipótese (3.3) e pela Definição 2.3, da distância Mallows, temos que

$$d_\alpha^\alpha(F,G) = d_\alpha^\alpha(F_1,G_1) + d_\alpha^\alpha(F_2,G_2),$$

onde $F_i \stackrel{d}{=} X_i$ e $G_i \stackrel{d}{=} Y_i$, $i = 1, 2$. Pelo Corolário 2.1 do Teorema da Representação, para $i = 1, 2$,

$$d_\alpha^\alpha(F_i, G_i) = E|X_i^* - Y_i^*|^\alpha,$$

onde $(X_i^*, Y_i^*) \stackrel{d}{=} F_i \wedge G_i$. Assim, usando a linearidade da esperança, obtemos

$$\begin{aligned} d_\alpha^\alpha(F, G) &= E|X_1^* - Y_1^*|^\alpha + E|X_2^* - Y_2^*|^\alpha \\ &= E[|X_1^* - Y_1^*|^\alpha + |X_2^* - Y_2^*|^\alpha] \\ &= E\,\|(X_1^* - Y_1^*, X_2^* - Y_2^*)\|^\alpha \\ &= E\left\|\widehat{\mathbf{X}} - \widehat{\mathbf{Y}}\right\|^\alpha, \end{aligned}$$

onde $\widehat{\mathbf{X}} = (X_1^*, X_2^*)$, $\widehat{\mathbf{Y}} = (Y_1^*, Y_2^*)$.

♦

Corolário 3.1. *Considere os vetores aleatórios* $\boldsymbol{X}_n = (X_1^n, X_2^n) \stackrel{d}{=} F_n$ *e* $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2) \stackrel{d}{=} F$. *Se, para* $i = 1, 2$, *ocorre*

$$\inf_{(\boldsymbol{X}_n, \boldsymbol{Y})} E|X_i^n - Y_i|^\alpha = \inf_{(X_i^n, Y_i)} E|X_i^n - Y_i|^\alpha, \;\; \forall n, \tag{3.5}$$

e

$$X_i^n \xrightarrow{d_\alpha} Y_i, \tag{3.6}$$

então

$$d_\alpha(F_n, F) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.7}$$

Demonstração: Sejam $F_1^n \stackrel{d}{=} X_1^n$, $F_2^n \stackrel{d}{=} X_2^n$, $F_1 \stackrel{d}{=} Y_1$ e $F_2 \stackrel{d}{=} Y_2$. Pelo Corolário 2.1 do Teorema da Representação, temos que

$$d_\alpha(F_i^n, F_i) = E|(X_i^n)^* - (Y_i)^*|^\alpha,$$

onde

$$((X_i^n)^*, (Y_i)^*) \stackrel{d}{=} F_i^n \wedge F_i, \;\; i = 1, 2.$$

Da Hipótese (3.5) e pelo Teorema 3.2, podemos tomar vetores $\widehat{X}_n$ e $\widehat{Y}$ para os quais

$$\begin{aligned} d_\alpha^\alpha(F_n, F) &= E\left\|\widehat{X}_n - \widehat{Y}\right\|^\alpha \\ &= E|(X_1^n)^* - (Y_1)^*|^\alpha + E|(X_2^n)^* - (Y_2)^*|^\alpha \\ &= d_\alpha(F_1^n, F_1) + d_\alpha(F_2^n, F_2) \\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

sendo a convergência garantida pela Hipótese (3.6).

♦

A Relação (3.3), aparentemente natural, não pode ser observada sempre, como sugere o Exemplo 3.1, numa situação trivial. O exemplo abaixo apresenta uma família de funções de distribuição bivariadas, com marginais distintas, onde aquela relação é verificada.

Exemplo 3.2. Sejam F e G funções de distribuição bivariadas, F com marginais

$$F_1(x) = \lim_{y\to\infty} F(x,y) = \begin{cases} 0, & se \quad x < a \\ p_1, & se \quad a \le x < b \\ 1, & se \quad x \ge b \end{cases}$$

e

$$F_2(y) = \lim_{x\to\infty} F(x,y) = \begin{cases} 0, & se \quad y < c \\ p_2, & se \quad c \le y < d \\ 1, & se \quad y \ge d \end{cases},$$

e G com marginais G_1 e G_2, dadas por

$$G_1(x) = \lim_{y\to\infty} G(x,y) = \begin{cases} 0, & se \quad x < e \\ q, & se \quad e \le x < f \\ 1, & se \quad x \ge f \end{cases}$$

e

$$G_2(y) = \lim_{x\to\infty} G(x,y) = \begin{cases} 0, & se \quad y < g \\ 1, & se \quad y \ge g \end{cases}.$$

Considere, ainda, que

$$F(x,y) = F_1(x).F_2(y) \;\; e \;\; G(x,y) = G_1(x).G_2(y).$$

Considere uma estrutura de dependência qualquer entre os vetores $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, expressa na tabela abaixo

$\mathbf{X}$ \ $\mathbf{Y}$	(e,g)	(f,g)
(a,c)	β_1	β_2
(a,d)	β_3	β_4
(b,c)	β_5	β_6
(b,d)	β_7	β_8

,

onde os $\beta_i \geq 0$, $i = 1, \cdots, 8$, satisfazem as relações

$$\beta_1 + \beta_2 = p_1 p_2, \tag{3.8}$$

$$\beta_3 + \beta_4 = p_1(1-p_2), \tag{3.9}$$

$$\beta_5 + \beta_6 = (1-p_1)p_2,$$

$$\beta_7 + \beta_8 = (1-p_1)(1-p_2),$$

$$\beta_1 + \beta_3 + \beta_5 + \beta_7 = q, \tag{3.10}$$

$$\beta_2 + \beta_4 + \beta_6 + \beta_8 = 1 - q$$

e

$$\sum_{i=1}^{8} \beta_i = 1.$$

Nestas condições, podemos escrever, em função de β_1 e β_3,

$$E|X_1 - Y_1|^\alpha = (A-B)(\beta_1 + \beta_3) + Bp_1 + |b-e|^\alpha q + |b-f|^\alpha (1-q), \tag{3.11}$$

onde

$$A = |a-e|^\alpha - |b-e|^\alpha$$

e

$$B = |a-f|^\alpha - |b-f|^\alpha.$$

Avaliando (3.11) sobre todos os vetores $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ tais que $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} F$ e $\mathbf{Y} \stackrel{d}{=} G$, temos que

$$\begin{aligned} \inf_{(\mathbf{X},\mathbf{Y})} E|X_1 - Y_1|^\alpha &= \inf_{\beta_1+\beta_3} (A-B)(\beta_1+\beta_3) + Bp_1 + |b-e|^\alpha q + |b-f|^\alpha (1-q) \\ &= (A-B) \max_{\beta_1,\beta_3} \{\beta_1 + \beta_3\} + Bp_1 + |b-e|^\alpha q + |b-f|^\alpha (1-q). \end{aligned}$$

Das relações (3.8), (3.9) e (3.10), obtemos

$$\max_{\beta_1,\beta_3}\{\beta_1+\beta_3\} \leq p_1 \wedge q \tag{3.12}$$

e, desde que $A \leq B$, obtemos que

$$\inf_{(\mathbf{X},\mathbf{Y})} E|X_1 - Y_1|^\alpha \geq (A-B)p_1 \wedge q + Bp_1 + |b-e|^\alpha q + |b-f|^\alpha(1-q).$$

Por outro lado, avaliando (3.11) sobre todos os vetores do tipo (X_1, Y_1) tais que $X_1 \stackrel{d}{=} F_1$ e $Y_1 \stackrel{d}{=} G_1$, pelo Teorema da Representação, obtemos que

$$\inf_{(X_1,Y_1)} E|X_1 - Y_1|^\alpha = E|X_1^* - Y_1^*|,$$

onde $(X_1^*, Y_1^*) \stackrel{d}{=} F_1 \wedge G_1$. Desde que F_1 e G_1 são conhecidas, obtemos

$$P(X_1^* = a, Y_1^* = e) = p_1 \wedge q,$$

$$P(X_1^* = b, Y_1^* = e) = q - p_1 \wedge q,$$

$$P(X_1^* = b, Y_1^* = f) = 1 - p_1 - q + p_1 \wedge q$$

e

$$P(X_1^* = a, Y_1^* = f) = p_1 - p_1 \wedge q,$$

donde obtemos

$$\inf_{(X_1,Y_1)} E|X_1 - Y_1|^\alpha = (A-B)p_1 \wedge q + Bp_1 + |b-e|^\alpha q + |b-f|^\alpha(1-q).$$

Assim, concluimos que

$$\inf_{(\mathbf{X},\mathbf{Y})} E|X_1 - Y_1|^\alpha \geq \inf_{(X_1,Y_1)} E|X_1 - Y_1|^\alpha$$

nesse caso. Analogamente, conclui-se que

$$\inf_{(\mathbf{X},\mathbf{Y})} E|X_2 - Y_2|^\alpha \geq \inf_{(X_2,Y_2)} E|X_2 - Y_2|^\alpha,$$

onde $X_2 \stackrel{d}{=} F_2$ e $Y_2 \stackrel{d}{=} G_2$.

Exemplo 3.3. Nas condições do Exemplo 3.2, vemos que

$$d_\alpha^\alpha(F,G) \geq d_\alpha^\alpha(F_1,G_1) + d_\alpha^\alpha(F_2,G_2).$$

Se considerarmos vetores **X** e **Y** cuja estrutura de dependência seja tal que $\beta_1+\beta_3 = p_1 \wedge q$ e $\beta_5 = (1-p_1)p_2 \wedge q$, é possível observar que, de fato, vale

$$d_\alpha^\alpha(F,G) = d_\alpha^\alpha(F_1,G_1) + d_\alpha^\alpha(F_2,G_2)$$

neste caso menos trivial.

3.3 Convergência no sentido das distribuições de dimensão finita

Como subproduto da discussão iniciada na última seção, apresentamos condições capazes de relacionar a convergência em distância Mallows bivariada com a convergência em distribuição.

Teorema 3.3. *Considere os vetores aleatórios* $\boldsymbol{X}_n = (X_1^n, X_2^n)$ *e* $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)$*. Se, para todo* n*,*

$$\inf_{(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})} E|X_i^n - Y_i|^\alpha = \inf_{(X_i,Y_i)} E|X_i^n - Y_i|^\alpha, \quad i = 1,2, \tag{3.13}$$

e $X_i^n \xrightarrow{d_\alpha} Y_i, \quad i = 1,2,$ *então*

$$F_n \xrightarrow{d} F,$$

onde $\boldsymbol{X}_n \stackrel{d}{=} F_n$ *e* $\boldsymbol{Y} \stackrel{d}{=} F$*.*

Demonstração: Segue do Corolário 3.1 a convergência em distância Mallows bivariada

$$d_\alpha(F_n,F) \longrightarrow 0$$

e, do Teorema 3.1, a convergência em distribuição, desde que convergência fraca é equivalente à convergência em distribuição em espaços de dimensão finita.

♦

A partir de agora, estaremos interessados em capturar o comportamento limite, em distribuição, de sequências de vetores aleatórios cujas entradas são somas aleatoriamente indexadas. Considerando que a Hipótese (3.13) é muito forte para os nossos propósitos, utilizaremos uma outra estratégia para obtenção da convergência em distribuição. Para tanto, invocamos o clássico Teorema de Cramér-Wold, que diz:

Teorema 3.4 (Cramér-Wold)**.** *Sejam* $\boldsymbol{X}_n = (X_1^n,\ X_2^n, \cdots,\ X_k^n)$ *e* $\boldsymbol{X} = (X_1,\ X_2, \cdots,\ X_k)$ *vetores aleatórios* k*-dimensionais. Então*

$$\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{d} \boldsymbol{X}$$

se, e somente se, para todo $(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_k) \in \mathbb{R}^k$*, ocorre*

$$\sum_{j=1}^{k} t_j X_j^n \xrightarrow{d} \sum_{j=1}^{k} t_j X_j.$$

Recuperando a notação* utilizada na Seção 2.3, seja $F_{\xi(s)}$ a função de distribuição de

$$\frac{S_{\xi(s)} - c_{\xi(s)}}{\xi^{1/\alpha}(s)} := Y_{\xi(s)}, \tag{3.14}$$

em que $X, X_1, X_2, \cdots$ são variáveis aleatórias i.i.d. com média μ_X, $\xi(s) = \max\{n : S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \leq s\}$, $c_{\xi(s)} = \xi(s)\mu_X - \xi^{1/\alpha}(s)\mu_{Y_\alpha}$ e μ_{Y_α} é a média de uma variável aleatória α-estável Y_α, $\alpha \geq 1$.

Ao promovermos uma mudança de escala temporal em (3.14) por meio de um fator de agregação $t \geq 0$, damos origem ao processo

$$Y_t^{\xi(s)} = \frac{S_{\lfloor \xi(s)t \rfloor} - c_{\lfloor \xi(s)t \rfloor}}{\xi^{1/\alpha}(s)}, \tag{3.15}$$

onde $\lfloor x \rfloor$ representa o maior número inteiro menor ou igual a x.

Proposição 3.2. *Se, quando* $s \to \infty$*,*

$$Y_{\xi(s)} \xrightarrow{d_\alpha} Y_\alpha$$

então, para cada $t \geq 0$*, quando* $s \to \infty$*,*

$$Y_t^{\xi(s)} \xrightarrow{d_\alpha} Y_\alpha(t),$$

e $Y_\alpha(t) \stackrel{d}{=} t^{1/\alpha} Y_\alpha$*.*

*Afim de tornar a notação menos carregada, denotaremos $S_{\xi(s)} := S_{\xi(s)}^{(X)}$.

Demonstração: Como

$$Y_t^{\xi(s)} = \frac{S_{\lfloor \xi(s)t \rfloor} - c_{\lfloor \xi(s)t \rfloor}}{\lfloor \xi(s)t \rfloor^{1/\alpha}} \frac{\lfloor \xi(s)t \rfloor^{1/\alpha}}{\xi^{1/\alpha}(s)} = \left(\frac{\lfloor \xi(s)t \rfloor}{\xi(s)} \right)^{1/\alpha} Y_{\lfloor \xi(s)t \rfloor}.$$

Quando $s \to \infty$, temos, por hipótese, que

$$Y_{\xi(s)} \xrightarrow{d_\alpha} Y_\alpha,$$

o que faz com que

$$Y_{\lfloor \xi(s)t \rfloor} \xrightarrow{d_\alpha} Y_\alpha,$$

e desde que

$$\frac{\lfloor \xi(s)t \rfloor}{\xi(s)} \to t,$$

obtemos

$$Y_t^{\xi(s)} \xrightarrow{d_\alpha} t^{1/\alpha} Y_\alpha.$$

Finalmente, denote por $Y_\alpha(t)$ a variável aleatória limite.

♦

Para o processo reescalonado dado em (3.15), obtemos o seguinte resultado de convergência no sentido das distribuições de dimensão finita.

Teorema 3.5. *Suponha que, para todo $\delta > 0$, a sequência $\{X_k\}_{k \geq 1}$ satisfaça a condição, quando $s \to \infty$,*

$$\frac{1}{\xi(s)} \sum_{k=1}^{\xi(s)} E\{|X_k - Y_k|^\alpha 1_{(|X_k - Y_k| > \delta[\xi(s)]^{(2-\alpha)/2\alpha})}\} \xrightarrow{(1)} 0, \tag{3.16}$$

onde $(X_1, Y_1),\ (X_2, Y_2), \cdots$ é uma sequência de vetores aleatórios independentes e $Y_1, Y_2, \cdots$ são cópias da variável aleatória α-estável Y_α. Então ocorre a convergência

$$(Y_{t_1}^{\xi(s)}, Y_{t_2}^{\xi(s)}, \cdots, Y_{t_d}^{\xi(s)}) \xrightarrow{d} (Y_\alpha(t_1), Y_\alpha(t_2), \cdots, Y_\alpha(t_d)), \tag{3.17}$$

quaisquer que sejam os números reais $t_1, t_2, \cdots, t_d$, onde $Y_\alpha(t) \stackrel{d}{=} t^{1/\alpha} Y_\alpha$.

Demonstração: Consideremos, inicialmente, o caso $d = 2$. Sejam $a,\ b \in \mathbb{R}$, e $F_{t_1,t_2}^{a,b}$ e $G_{t_1,t_2}^{a,b}$ as funções de distribuição das variáveis aleatórias

$$aY_{t_1}^{\xi(s)} + bY_{t_2}^{\xi(s)}$$

e

$$aY_\alpha(t_1) + bY_\alpha(t_2),$$

respectivamente. Usando a definição de distância Mallows e a desigualdade clássica

$$|x+y|^p \leq 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p), \tag{3.18}$$

válida para quaisquer números reais x e y sempre que $p \geq 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
d_\alpha^\alpha(F_{t_1,t_2}^{a,b},\ G_{t_1,t_2}^{a,b}) &\leq E|aY_{t_1}^{\xi(s)} + bY_{t_2}^{\xi(s)} - (aY_\alpha(t_1) + bY_\alpha(t_2))|^\alpha \\
&= E|a(Y_{t_1}^{\xi(s)} - Y_\alpha(t_1)) + b(Y_{t_2}^{\xi(s)} - Y_\alpha(t_2))|^\alpha \\
&\leq 2^{\alpha-1}\left\{|a|^\alpha E|Y_{t_1}^{\xi(s)} - Y_\alpha(t_1)|^\alpha + |b|^\alpha E|Y_{t_2}^{\xi(s)} - Y_\alpha(t_2)|^\alpha\right\} \\
&= 2^{\alpha-1}\left\{|a|^\alpha d_\alpha^\alpha(F_{Y_{t_1}^{\xi(s)}}, F_{Y_\alpha(t_1)}) + |b|^\alpha d_\alpha^\alpha(F_{Y_{t_2}^{\xi(s)}}, F_{Y_\alpha(t_2)})\right\},
\end{aligned}$$

onde a última igualdade advém do Teorema da Representação. A Condição (3.16) nos permite utilizar a Proposição 3.2, que garante a convergência

$$d_\alpha(F_{t_1,t_2}^{a,b},\ G_{t_1,t_2}^{a,b}) \longrightarrow 0$$

quando s tende a infinito, na medida que faz com que

$$d_\alpha^\alpha(F_{Y_{t_i}^{\xi(s)}}, F_{Y_\alpha(t_i)}) \overset{s\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad i = 1, 2.$$

Dessa forma, para quaisquer $a,\ b \in \mathbb{R}$,

$$aY_{t_1}^{\xi(s)} + bY_{t_2}^{\xi(s)} \xrightarrow{d_\alpha} aY_\alpha(t_1) + bY_\alpha(t_2).$$

quando s tende a infinito. O Teorema 3.1 nos garante que a convergência acima implica na convergência em distribuição

$$aY_{t_1}^{\xi(s)} + bY_{t_2}^{\xi(s)} \xrightarrow{d} aY_\alpha(t_1) + bY_\alpha(t_2)$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$(Y_{t_1}^{\xi(s)}, Y_{t_2}^{\xi(s)}) \xrightarrow{d} (Y_\alpha(t_1), Y_\alpha(t_2)),$$

sendo esta última conclusão garantida pelo Teorema 3.4.

Para o caso geral, basta utilizar o princípio da indução finita e obter que, para $p \geq 1$, vale a desigualdade

$$\left|\sum_{j=1}^{d} a_j\right|^p \leq 2^{(d-1)(p-1)}|a_1|^p + \sum_{j=2}^{d} 2^{(d-j+1)(p-1)}|a_j|^p,$$

onde $\{a_j,\ j = 1, \cdots, d\} \subset \mathbb{R}$, e usá-la no lugar da desigualdade (3.18) se valendo do mesmo argumento utilizado na demonstração do caso $d = 2$, com as devidas adaptações.

♦

Observamos, neste ponto, que há uma importante relação de dependência entre as entradas do vetor limite obtido no Teorema 3.5. Isso devido ao fato de que $(Y_t^{\xi(s)}, Y_\alpha(t)) \stackrel{d}{=} F_{Y_t^{\xi(s)}} \wedge F_{Y_\alpha(t)}$. Na próxima seção, caracterizaremos esse processo limite como o movimento de Lèvy α-estável.

3.4 Caracterização do processo limite

Na seção anterior, consideramos o processo $Y^{\xi(s)}$, definido por

$$Y_t^{\xi(s)} = \frac{S_{\lfloor \xi(s)t \rfloor} - c_{\lfloor \xi(s)t \rfloor}}{\xi^{1/\alpha}(s)}, \quad t \geq 0, \tag{3.19}$$

em que $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, tal que $X_i,\ i = 1, \cdots, n$ são variáveis aleatória i.i.d. com média μ_X, $\{\xi(s)\}_{s\geq 0}$ é um processo de contagem dado por

$$\xi(s) = \max\{n : S_n \leq s\}$$

e $c_{\xi(s)} = \xi(s)\mu_X - \xi^{1/\alpha}(s)\mu_Y$, onde Y é uma variável aleatória α-estável, $1 < \alpha \leq 2$.

Provamos, no Teorema 3.5, a convergência desse processo, no sentido das distribuições de dimensão finita, para um processo estocástico α-estável, desde que satisfaça a condição tipo Lindeberg (3.16). Denotaremos essa informação assim:

$$Y_t^{\xi(s)} \xrightarrow{fidi} Z(t), \quad s \to \infty.$$

Nesta seção, provaremos que o processo $\{Z(t)\}_{t\geq 0}$ é o m.L.e. Esse é o conteúdo do Teorema 3.6.

A intuição para a obtenção deste resultado surgiu ao se fixar $t = 1$, o que faz com que (3.19) torne-se

$$Y_1^{\xi(s)} = Y_{\xi(s)} = \frac{S_{\xi(s)} - c_{\xi(s)}}{\xi^{1/\alpha}(s)},$$

e ao considerar $\{\xi(s)\}_{s\geq 0}$ um processo de renovação.

Inicialmente, observamos que, se os tempos entre renovações possuem segundo momento finito, os incrementos do processo de renovação com recompensa $\{S_{\xi(t)}\}_{t\geq 0}$, a principal componente do processo $Y_{\xi(s)}$, apresentam função de autocovariância nula.

Proposição 3.3. *Suponha que $EX^2 < \infty$. Então, para $h > 0$,*

$$cov(S_{\xi(t)}, S_{\xi(t+h)} - S_{\xi(t)}) = 0.$$

Demonstração: Como, por definição,

$$\text{cov}(S_{\xi(t)}, S_{\xi(t+h)} - S_{\xi(t)}) = E\{S_{\xi(t)}[S_{\xi(t+h)} - S_{\xi(t)}]\} - E\{S_{\xi(t)}\}E\{S_{\xi(t+h)} - S_{\xi(t)}\},$$

o resultado da proposição seguirá se provarmos que

$$E\{S_{\xi(t)}[S_{\xi(t+h)} - S_{\xi(t)}]\} = E\{S_{\xi(t)}\}E\{S_{\xi(t+h)} - S_{\xi(t)}\}. \tag{3.20}$$

Defina

$$A := S_{\xi(t)}[S_{\xi(t+h)} - S_{\xi(t)}].$$

Temos que†

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{S_k[S_{\xi(t+h)} - S_k]1_{(\xi(t)=k)}\right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{S_k \left[\sum_{j=k+1}^{\xi(t+h)} X_j\right] 1_{(\xi(t)=k)}\right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{S_k 1_{(\xi(t)=k)} \left[\sum_{j=k+1}^{\infty} X_j 1_{(\xi(t+h)\geq j)}\right]\right\}. \end{aligned}$$

†Se $\xi(t+h) = 0$, então $(S_{\xi(t+h)} - S_k)1_{(\xi(t)=k)} = 0$.

Considere a σ-álgebra $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \cdots, X_n)$. Temos que

$$
\begin{aligned}
EA &= E\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left[S_k 1_{(\xi(t)=k)}\left(\sum_{j=k+1}^{\infty} X_j 1_{(\xi(t+h)\geq j)}\right)\right]\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E\left[S_k 1_{(\xi(t)=k)}\left(\sum_{j=k+1}^{\infty} X_j 1_{(\xi(t+h)\geq j)}\right)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E\left\{E\left[S_k 1_{(\xi(t)=k)}\left(\sum_{j=k+1}^{\infty} X_j 1_{(\xi(t+h)\geq j)}\right)\middle| \mathcal{F}_{j-1}\right]\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E\left\{S_k 1_{(\xi(t)=k)} E\left[\sum_{j=k+1}^{\infty} X_j 1_{(\xi(t+h)\geq j)}\middle| \mathcal{F}_{j-1}\right]\right\},
\end{aligned}
$$

onde a última igualdade é obtida do fato que as variáveis aleatórias $1_{(\xi(t)=k)}$ e S_k são $\mathcal{F}_{j-1}$-mensuráveis. Além disso, como $1_{(\xi(t+h)\geq j)}$ é também $\mathcal{F}_{j-1}$-mensurável e como X_j é independente de $\mathcal{F}_{j-1}$, segue que

$$
\begin{aligned}
EA &= \sum_{k=0}^{\infty} E\left\{S_k 1_{(\xi(t)=k)} \sum_{j=k+1}^{\infty} E\left[X_j 1_{(\xi(t+h)\geq j)} \mid \mathcal{F}_{j-1}\right]\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E\left\{S_k 1_{(\xi(t)=k)} \sum_{j=k+1}^{\infty} 1_{(\xi(t+h)\geq j)} E\left[X_j \mid \mathcal{F}_{j-1}\right]\right\} \\
&= EX \sum_{k=0}^{\infty} E\left\{S_k 1_{(\xi(t)=k)} \sum_{j=k+1}^{\infty} 1_{(\xi(t+h)\geq j)}\right\} \\
&= EXE\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left[S_k 1_{(\xi(t)=k)} \sum_{j=k+1}^{\infty} 1_{(\xi(t+h)\geq j)}\right]\right\}
\end{aligned}
$$

Afirmação 3.1. $E\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(S_k 1_{(\xi(t)=k)} \sum_{j=k+1}^{\infty} 1_{(\xi(t+h)\geq j)}\right)\right] = E[\xi(t+h) - \xi(t)]E[S_{\xi(t)}]$

Segue, por meio da afirmação acima e usando a Equação de Wald[‡], que

$$\begin{aligned}
EA &= EXE[\xi(t+h)-\xi(t)]E[S_{\xi(t)}] \\
&= \{EXE[\xi(t+h)] - EXE[\xi(t)]\}\, E[S_{\xi(t)}] \\
&= \left\{E[S_{\xi(t+h)}] - E[S_{\xi(t)}]\right\} E[S_{\xi(t)}] \\
&= E[S_{\xi(t)}]E[S_{\xi(t+h)} - S_{\xi(t)}].
\end{aligned}$$

Assim, ficará estabelecida a Equação (3.20) se provarmos a Afirmação 3.1.

Prova da Afirmação 3.1:

$$\begin{aligned}
E\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(S_k 1_{(\xi(t)=k)} \sum_{j=k+1}^{\infty} 1_{(\xi(t+h)\geq j)}\right)\right] &= E\left\{E\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(S_k 1_{(\xi(t)=k)} \sum_{j=k+1}^{\infty} 1_{(\xi(t+h)\geq j)}\right)\middle| \mathcal{F}_k\right]\right\} \\
&= E\left\{\sum_{k=0}^{\infty} E\left[S_k 1_{(\xi(t)=k)} \sum_{j=k+1}^{\infty} 1_{(\xi(t+h)\geq j)}\middle| \mathcal{F}_k\right]\right\} \\
&= E\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left[S_k E\left(1_{(\xi(t)=k)} \sum_{j=k+1}^{\infty} 1_{(\xi(t+h)\geq j)}\middle| \mathcal{F}_k\right)\right]\right\},
\end{aligned}$$

sendo a última igualdade válida por S_k ser $\mathcal{F}_k$- mensurável.

Desde que

$$\begin{aligned}
1_{(\xi(t)=k)} \sum_{j=k+1}^{\infty} 1_{(\xi(t+h)\geq j)} &= 1_{(\xi(t)=k)} \sum_{j=k+1}^{\infty} 1_{(S_j \leq t+h)} \\
&= 1_{(\xi(t)=k)} \sum_{j=k+1}^{\infty} 1_{(S_j - S_k \leq t+h-S_k)},
\end{aligned}$$

[‡]A clássica Equação de Wald diz respeito ao valor esperado de uma soma de variáveis aleatórias i.i.d. indexada por uma variável aleatória opcional que é um tempo de parada com momento finito. Precisamente, diz que se N é um tempo de parada com $EN < \infty$ e $Y = \{Y_i\}_{i\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatória i.i.d. com média finita, então $\sum_{i=1}^{N} Y_i = EN.EY_i$.

temos que

$$
\begin{aligned}
E\left\{1_{(\xi(t)=k)} \sum_{j=k+1}^{\infty} 1_{(\xi(t+h)\geq j)} \middle| \mathcal{F}_k\right\} &= E\left\{1_{(\xi(t)=k)} \sum_{j=k+1}^{\infty} 1_{(S_j-S_k\leq t+h-S_k)} \middle| \mathcal{F}_k\right\} \\
&= 1_{(\xi(t)=k)} \sum_{j=k+1}^{\infty} E\left(1_{(S_j-S_k\leq t+h-S_k)}\right)
\end{aligned}
$$

onde a última igualdade se justifica pela $\mathcal{F}_k$-mensurabilidade de $1_{(\xi(t)=k)}$ e devido ao fato de a variável $1_{(S_j-S_k\leq t+h-S_k)}$ ser independente de $\mathcal{F}_k$.

Como

$$
\begin{aligned}
1_{(\xi(t)=k)} \sum_{j=k+1}^{\infty} E\left(1_{(S_j-S_k\leq t+h-S_k)}\right) &= 1_{(\xi(t)=k)} \sum_{j=k+1}^{\infty} P\left(S_j - S_k \leq t+h-S_k\right) \\
&= 1_{(\xi(t)=k)} \sum_{j=k+1}^{\infty} P\left(S_j \leq t+h\right) \\
&= 1_{(\xi(t)=k)} \sum_{j=k+1}^{\infty} P\left(\xi(t+h) \geq j\right) \\
&= 1_{(\xi(t)=k)} \sum_{i=1}^{\infty} P\left(\xi(t+h) - \xi(t) \geq i\right) \\
&= 1_{(\xi(t)=k)} E\left[\xi(t+h) - \xi(t)\right]
\end{aligned}
$$

temos que

$$
E\left\{1_{(\xi(t)=k)} \sum_{j=k+1}^{\infty} 1_{(\xi(t+h)\geq j)} \middle| \mathcal{F}_k\right\} = 1_{(\xi(t)=k)} E\left[\xi(t+h) - \xi(t)\right]
$$

e isso implica que

$$\begin{aligned}
E\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(S_k 1_{(\xi(t)=k)}\sum_{j=k+1}^{\infty}1_{(\xi(t+h)\geq j)}\right)\right] &= E\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left[S_k E\left(1_{(\xi(t)=k)}\sum_{j=k+1}^{\infty}1_{(\xi(t+h)\geq j)}\middle|\mathcal{F}_k\right)\right]\right\}\\
&= E\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(S_k 1_{(\xi(t)=k)}E[\xi(t+h)-\xi(t)]\right)\right\}\\
&= E[\xi(t+h)-\xi(t)]E\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(S_k 1_{(\xi(t)=k)}\right)\right\}\\
&= E[\xi(t+h)-\xi(t)]E[S_{\xi(t)}].
\end{aligned}$$

♦

Isso encerra a prova da proposição.

♦

Essa informação nos motivou a pensar que os incrementos do processo de renovação com recompensa estabilizado $\{Y_{\xi(s)}\}_{s\geq 0}$ poderiam ser independentes.

Ainda que as contas apresentadas para provar a Proposição 3.3 pudessem ser adaptadas para provar que

$$E\{Y_{\xi(s)}[Y_{\xi(s+h)}-Y_{\xi(s)}]\} = E\{Y_{\xi(s)}\}E\{Y_{\xi(s+h)}-Y_{\xi(s)}\}, \tag{3.21}$$

esse fato não seria suficiente para garantir, no caso em que as contribuições à soma apresentam cauda pesada com índice caudal $1 < \alpha < 2$, que os incrementos desse processo sejam independentes.

Incrementos independentes seriam desejáveis uma vez que, se assim pudessem ser observados, poderíamos caracterizar o processo limite, no sentido das distribuições de dimensão finita, como o movimento de Lèvy α-estável.

A fatoração sugerida pela expressão (3.21), apesar de insuficiente para caracterizar a independência dos incrementos, fez com que pensássemos na possibilidade de fatoração da função característica de um vetor de incrementos daquele processo. E isso, sim, seria suficiente para caracterizar a independência das variáveis aleatórias que constituem as entradas desse vetor.

De uma maneira geral, para um vetor aleatório $X = (X_1, X_2, \cdots, X_d)$ qualquer em $\mathbb{R}^d$, considere $\Phi_X(.)$ sua função característica, dada por

$$\Phi_X(\theta) = E\exp\{i(\theta.X)\} = E\exp\{i\sum_{k=1}^{d}\theta_k X_k\},$$

onde $\theta = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_d) \in \mathbb{R}^d$. É bem conhecido que a fatoração da função característica Φ_X no produto das funções características Φ_{X_i}, $i = 1, 2, \cdots, d$, constitui-se num importante critério de independência entre as variáveis aleatórias $X_1, X_2, \cdots, X_d$, que constituem as entradas do vetor X. Usaremos esse fato nos nossos argumentos.

Voltando ao caso mais geral definido no início desta seção, desejamos perceber a relação de dependência subjacente ao processo de incrementos do processo (3.19), definido por

$$Y_t^{\xi(s)} := \frac{S_{\lfloor \xi(s)t \rfloor} - c_{\lfloor \xi(s)t \rfloor}}{\xi^{1/\alpha}(s)}, \ t \geq 0. \tag{3.22}$$

Esse processo permite a observação das trajetórias do processo $Y_{\xi(s)}$ sob um reescalonamento no tempo, uma espécie de janela de tamanho t.

Provaremos que, quando $s \to \infty$, o processo dado em (3.22) convergirá, no sentido das distribuições de dimensão finita, para o movimento Browniano (caso $\alpha = 2$) ou o movimento Lèvy α-estável (caso $1 < \alpha < 2$).

Teorema 3.6. *Seja $Z := \{Z(t)\}_{t \geq 0}$ o processo α-estável limite tal que*

$$Y_t^{\xi(s)} \overset{fidi}{\to} Z(t),$$

quando $s \to \infty$. Então, o processo Z é o movimento Browniano, se $\alpha = 2$, ou o movimento de Lèvy α-estável, se $1 < \alpha < 2$.

Demonstração: Desde que

$$Z(t) = \lim_{s \to \infty} Y_t^{\xi(s)}$$

é α-estável e $Z(0) = 0$, para que seja Z o movimento Browniano ou o movimento Lèvy α-estável, resta provar a independência dos seus incrementos.

Sejam $0 \leq t_1 \leq t_2$ e considere o vetor $Y = (Z(t_1), Z(t_2) - Z(t_1))$. Desejamos saber se as varíáveis aleatórias $Z(t_1)$ e $Z(t_2) - Z(t_1)$ são independentes. Isso ocorrerá se, e somente se, conseguirmos fatorar $\Phi_Y(.,.)$, a função característica do vetor Y, no produto das funções características das suas entradas. Ou seja, se

$$\Phi_Y(\theta) = \Phi_{Z(t_1)}(\theta_1).\Phi_{Z(t_2)-Z(t_1)}(\theta_2),$$

qualquer que seja $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$.

Para tanto, considere o processo dado em (3.22). Para cada $s > 0$, temos que

$$\begin{aligned}
E\left\{e^{i(\theta_1-\theta_2)Y_{t_1}^{\xi(s)}}.e^{i\theta_2 Y_{t_2}^{\xi(s)}}\right\} &= E\left\{\sum_{k=0}^{\infty} e^{i(\theta_1-\theta_2)\frac{S_k-c_k}{\xi^{1/\alpha}(s)}}.e^{i\theta_2 Y_{t_2}^{\xi(s)}} 1_{(\lfloor\xi(s)t_1\rfloor=k)}\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E\left\{e^{i(\theta_1-\theta_2)\frac{S_k-c_k}{\xi^{1/\alpha}(s)}}.e^{i\theta_2 Y_{t_2}^{\xi(s)}} 1_{(\lfloor\xi(s)t_1\rfloor=k)}\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E\left\{E\left[e^{i(\theta_1-\theta_2)\frac{S_k-c_k}{\xi^{1/\alpha}(s)}}.e^{i\theta_2 Y_{t_2}^{\xi(s)}} 1_{(\lfloor\xi(s)t_1\rfloor=k)}\middle| \mathcal{F}_{\lfloor\xi(s)t_1\rfloor}\right]\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E\left\{1_{(\lfloor\xi(s)t_1\rfloor=k)} E\left[e^{i(\theta_1-\theta_2)\frac{S_k-c_k}{\xi^{1/\alpha}(s)}}.e^{i\theta_2 Y_{t_2}^{\xi(s)}}\middle| \mathcal{F}_{\lfloor\xi(s)t_1\rfloor}\right]\right\},
\end{aligned}$$

desde que $1_{(\lfloor\xi(s)t_1\rfloor=k)} \in \mathcal{F}_{\lfloor\xi(s)t_1\rfloor}$.

Além disso,

$$E\left[e^{i(\theta_1-\theta_2)\frac{S_k-c_k}{\xi^{1/\alpha}(s)}}.e^{i\theta_2 Y_{t_2}^{\xi(s)}}\middle| \mathcal{F}_{\lfloor\xi(s)t_1\rfloor}\right] =$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left\{E\left[e^{i(\theta_1-\theta_2)\frac{S_k-c_k}{m^{1/\alpha}}}.e^{i\theta_2\frac{S_{\lfloor mt_2\rfloor}-c_{\lfloor mt_2\rfloor}}{m^{1/\alpha}}}\middle| \mathcal{F}_{\lfloor mt_1\rfloor}\right] 1_{(\xi(s)=m)}\right\} =$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left\{1_{(\xi(s)=m)} e^{-i(\theta_1-\theta_2)\frac{c_k}{m^{1/\alpha}}}.e^{-i\theta_2\frac{c_{\lfloor mt_2\rfloor}}{m^{1/\alpha}}} E\left[e^{i\theta_1\frac{S_k}{m^{1/\alpha}}}.e^{i\theta_2\frac{S_{\lfloor mt_2\rfloor}-S_k}{m^{1/\alpha}}}\middle| \mathcal{F}_{\lfloor mt_1\rfloor}\right]\right\} =$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left\{1_{(\xi(s)=m)} e^{-i\theta_1\frac{c_k}{m^{1/\alpha}}} E\left[e^{i\theta_1\frac{S_k}{m^{1/\alpha}}}.e^{i\theta_2(Y_{t_2}^m-\frac{S_k-c_k}{m^{1/\alpha}})}\middle| \mathcal{F}_{\lfloor mt_1\rfloor}\right]\right\}$$

Substituindo-se na expressão anterior, onde tornam-se $\exp\{i\theta_1\frac{S_k}{m^{1/\alpha}}\} \in \mathcal{F}_{\lfloor mt_1\rfloor}$ e $\exp\{i\theta_2\frac{S_{\lfloor mt_2\rfloor}-S_k}{m^{1/\alpha}}\}$

independente de $\mathcal{F}_{\lfloor mt_1 \rfloor}$, obtemos

$$\begin{aligned}
E\left\{e^{i(\theta_1-\theta_2)Y_{t_1}^{\xi(s)}}.e^{i\theta_2 Y_{t_2}^{\xi(s)}}\right\} &= \sum_{k=0}^{\infty} E\left\{1_{(\lfloor \xi(s)t_1 \rfloor = k)} \sum_{m=0}^{\infty}\left[1_{(\xi(s)=m)} e^{i\theta_1 \frac{S_k - c_k}{m^{1/\alpha}}} E\left(e^{i\theta_2 (Y_{t_2}^m - \frac{S_k-c_k}{m^{1/\alpha}})}\right)\right]\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E\left\{1_{(\lfloor \xi(s)t_1 \rfloor = k)} e^{i\theta_1 \frac{S_k - c_k}{\xi^{1/\alpha}(s)}} E\left(e^{i\theta_2 (Y_{t_2}^{\xi(s)} - \frac{S_k-c_k}{\xi^{1/\alpha}(s)})}\right)\right\} \\
&= E\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left[1_{(\lfloor \xi(s)t_1 \rfloor = k)} e^{i\theta_1 \frac{S_k - c_k}{\xi^{1/\alpha}(s)}} E\left(e^{i\theta_2 (Y_{t_2}^{\xi(s)} - \frac{S_k-c_k}{\xi^{1/\alpha}(s)})}\right)\right]\right\} \\
&= E\left\{e^{i\theta_1 \frac{S_{\lfloor \xi(s)t_1 \rfloor} - c_{\lfloor \xi(s)t_1 \rfloor}}{\xi^{1/\alpha}(s)}} E\left[e^{i\theta_2 (Y_{t_2}^{\xi(s)} - \frac{S_{\lfloor \xi(s)t_1 \rfloor} - c_{\lfloor \xi(s)t_1 \rfloor}}{\xi^{1/\alpha}(s)})}\right]\right\} \\
&= E\left\{e^{i\theta_1 Y_{t_1}^{\xi(s)}} E\left[e^{i\theta_2 (Y_{t_2}^{\xi(s)} - Y_{t_1}^{\xi(s)})}\right]\right\} \\
&= E\left\{e^{i\theta_1 Y_{t_1}^{\xi(s)}}\right\} E\left\{e^{i\theta_2 (Y_{t_2}^{\xi(s)} - Y_{t_1}^{\xi(s)})}\right\}
\end{aligned}$$

Como essa última igualdade é válida para todo $s > 0$, fazendo $s \to \infty$ teremos, no limite,

$$E\left\{e^{i(\theta_1-\theta_2)Z(t_1)}.e^{i\theta_2 Z(t_2)}\right\} = E\left\{e^{i\theta_1 Z(t_1)}\right\} E\left\{e^{i\theta_2(Z(t_2)-Z(t_1))}\right\}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\Phi_Y(\theta) &= E e^{i\theta.Y} \\
&= E\left\{e^{i[\theta_1 Z(t_1) + \theta_2(Z(t_2)-Z(t_1))]}\right\} \\
&= E\left\{e^{i(\theta_1-\theta_2)Z(t_1)}.e^{i\theta_2 Z(t_2)}\right\} \\
&= E\left\{e^{i\theta_1 Z(t_1)}\right\} E\left\{e^{i\theta_2(Z(t_2)-Z(t_1))}\right\} \\
&= \Phi_{Z(t_1)}(\theta_1).\Phi_{Z(t_2)-Z(t_1)}(\theta_2),
\end{aligned}$$

e isso finaliza a prova do teorema.

♦

Capítulo 4

Teorema de Donsker para o movimento de Lèvy α-estável

No capítulo anterior, provamos a convergência do processo de renovação com recompensas reescalonado e estabilizado, no sentido das distribuições de dimensão finita, para um processo α-estável e que esse limite é o movimento Browniano ou o movimento Lèvy estável, a depender se $\alpha = 2$ ou se $1 < \alpha < 2$.

Uma vez que a convergência no sentido das distribuições de dimensão finita não é suficiente para garantir a convergência fraca de processo estocástico, discutimos, neste capítulo, condições de regularidade sobre um tipo particular de processo suficientes para que essa implicação aconteça.

Na Seção 4.1, apresentamos o Teorema de Donsker, que trata da convergência fraca de processos envolvendo somas parciais de variáveis aleatórias para o movimento Browniano quando as contribuições à soma são variáveis aleatórias i.i.d., que possuem média zero e segundo momento finito.

Na seção seguinte, provamos o Teorema 4.6, que generaliza o Teorema de Donsker na medida em que fornece a convergência fraca do mesmo processo para o movimento de Lèvy α-estável, sem a exigência de segundo momento finito sobre as variáveis aleatórias que alimentam a soma parcial.

4.1 Preliminares

Seja $\Omega := (\Omega, \|.\|)$ um espaço métrico qualquer, munido de uma σ-álgebra, isto é, $(\Omega, \mathcal{F})$, onde $\mathcal{F}$ é a σ-álgebra de Borel, gerada pelos conjuntos abertos de Ω. Uma medida de probabilidade P sobre $\mathcal{F}$ é uma função conjunto não-negativa, σ-aditiva e satisfazendo $P\Omega = P1_\Omega = 1$. Para uma função f qualquer, estamos utilizando a expressão

$$Pf = \int_\Omega f dP$$

para denotar a integral abstrata de f ponderada por P e, se, em particular, f for uma função do tipo indicadora, isto é, $f = 1_A$, onde $A \in \mathcal{F}$, denotamos

$$P1_A = PA.$$

4.1.1 Convergência fraca e *tightness*

Diremos que a sequência de medidas de probabilidade $\{P_n\}_{n\geq 1}$ converge fracamente para a medida de probabilidade P e denotaremos por

$$P_n \Rightarrow P$$

se, para toda função real f contínua limitada, ocorre

$$P_n f \to Pf.$$

Diremos que duas medidas de probabilidade P_1 e P_2 sobre $\mathcal{F}$ coincidem se $P_1 f = P_2 f$, para toda função real f contínua e limitada*.

Uma medida de probabilidade P em $(\Omega, \mathcal{F})$ é dita ser *tight* se para cada $\epsilon > 0$ existe um conjunto compacto K tal que $PK > 1 - \epsilon$. Essa é uma noção fundamental quando se deseja tratar de convergência fraca de processos.

*Esse é o Teorema 1.2 de [5], pág. 8.

4.1.2 O espaço D

Seja $D = D[0,1]$ o espaço de funções reais x sobre $[0,1]$ que são *cadlag*[†]. Existe uma métrica d^o que torna (D, d^o) um espaço métrico completo[‡]. Para definir d^o, sejam Λ a classe de aplicações contínuas e estritamente crescentes de $[0,1]$ sobre si mesmo e λ uma função não decrescente sobre $[0,1]$ satisfazendo $\lambda(0) = 0$ e $\lambda(1) = 1$. Considere

$$\|\lambda\|^o = \sup_{s<t} \left| log \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right|$$

e, finalmente, defina

$$d^o = \inf_{\lambda \in \Lambda} \{ \|\lambda\|^o \vee \|x - y\lambda\| \},$$

em que $\|x\| = sup_t |x(t)| < \infty$.

O espaço D é o espaço de funções que admitem descontinuidades do primeiro tipo e é o espaço natural para se analizar processos estocásticos que possuem trajetórias descontínuas.

No espaço D, para $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_k \leq 1$, definimos a projeção natural $\pi_{t_1 \cdots t_k}$ de D sobre $\mathbb{R}^k$ da maneira usual

$$\pi_{t_1 \cdots t_k}(x) = (x(t_1), \cdots, x(t_k)).$$

Para uma medida de probabilidade P definida sobre $(D, \mathcal{D})$, onde $\mathcal{D}$ é a σ-álgebra dos Borelianos de D, denote por T_P o conjunto dos $t \in [0,1]$ para os quais a projeção π_t é contínua, exceto em pontos formando um conjunto de medida P nula. As projeções π_0 e π_1 são sempre contínuas e, para $t \in (0,1)$, π_t é contínua se, e somente se, x é contínua em t. Segue que $t \in T_P$ se, e somente se, $P[x : x(t) \neq x(t-)] = 0$.

Desde que o conjunto T_P contém 0 e 1 e é, pelo menos, contável[§], decorre do Teorema

[†]Funções *cadlag* são contínuas à direita e tem limites à esquerda.
[‡]Conforme [5], Teorema 12.2, página 128.
[§]Conforme [5], página 138.

da Aplicação[¶] que

$$P_n \Rightarrow P$$

implica

$$P_n \pi^{-1}_{t_1 \cdots t_k} \Rightarrow P \pi^{-1}_{t_1 \cdots t_k},$$

para quaisquer que sejam $t_1, \cdots, t_k \in T_P$.

Mas a recíproca nem sempre é verdadeira! Para um contra-exemplo, veja [5]. Contudo, condições de regularidade sobre $\{P_n\}_{n\geq 1}$ podem garantir a convergência fraca da sequência, como sugere o teorema a seguir.

Teorema 4.2. *Se $\{P_n\}_{n\geq 1}$ é tight e se ocorre $P_n \pi^{-1}_{t_1 \cdots t_k} \Rightarrow P \pi^{-1}_{t_1 \cdots t_k}$ sempre que $t_1, \cdots, t_k \in T_P$, então $P_n \Rightarrow P$.*

Demonstração: Conforme [5], página 139.

♦

Seja P a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória X e escreva T_X no lugar de T_P. A fim de se obter a convergência fraca de um processo estocástico definido em D, o teorema abaixo sugere uma maneira alternativa de se buscar a regularidade acima citada.

Teorema 4.3. *Suponha que*

$$(X^n_{t_1}, \cdots, X^n_{t_k}) \Rightarrow_n (X_{t_1}, \cdots, X_{t_k})$$

para pontos $t_i \in T_X$, que

$$X_1 - X_{1-\delta} \Rightarrow_{\delta \to 0} 0$$

[¶]Para S e $S^{'}$ espaços métricos, munidos das σ-álgebras $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}^{'}$, respectivamente, se h é uma aplicação mensurável com respeito a essas duas σ-álgebras, então, cada medida de probabilidade P sobre $(S, \mathcal{S})$ induz sobre $(S^{'}, \mathcal{S}^{'})$ uma medida de probabilidade Ph^{-1}, definida de maneira usual por

$$Ph^{-1}(A) = P(h^{-1}A).$$

O Teorema da Aplicação diz que se o conjunto $D_h \in S$, dos pontos de descontinuidades de h, for P-nulo, então a convergência fraca de uma sequência P_n pode ser transferida para a sequência de medidas de probabilidade $P_n h^{-1}$, induzidas pela aplicação h.

Teorema 4.1 (Teorema da Aplicação)**.** *Se $P_n \Rightarrow P$ e $PD_h = 0$, então $P_n h^{-1} \Rightarrow Ph^{-1}$.*

Para mais detalhes, consulte [5], páginas $20 - 23$.

e que, para $r \leq s \leq t$, $n \geq 1$ *e* $\lambda > 0$,

$$E[|X_s^n - X_r^n|^{2\beta}|X_t^n - X_s^n|^{2\beta}] \leq [H(t) - H(r)]^{2\alpha}, \tag{4.1}$$

para algum $\beta \geq 0$, *algum* $\alpha > 1/2$ *e alguma função contínua* H *que seja não descrescente sobre* $[0, 1]$. *Então*

$$X^n \Rightarrow_n X.$$

Demonstração: Conforme [5], página 143.

♦

4.1.3 O Teorema de Donsker

O Teorema de Donsker, apresentado a seguir, constitui-se num refinamento do Teorema do Limite Central por provar convergência fraca de distribuições de somas parciais aleatórias. Basicamente, dada $\xi_1, \xi_2, \cdots$ uma sequência de variáveias aleatórias i.i.d. de média 0 e variância finita σ^2 definidas num mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, considera-se a sequência de somas parciais normalizadas $S_n/\sigma\sqrt{n}$ e constrói-se a função aleatória X^n, definida em cada $t \in [0, 1]$ como

$$X_t^n(\omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor nt \rfloor}(\omega) + (nt - \lfloor nt \rfloor) \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \xi_{\lfloor nt \rfloor + 1}(\omega), \tag{4.2}$$

que faz uma espécie de comunicação linear entre os pontos das trajetórias de $S_n/\sigma\sqrt{n}$, quando este processo é observado através de uma janela de tamanho 1.

Teorema 4.4 (Teorema de Donsker 1). *Se* $\xi_1, \xi_2, \cdots$ *são i.i.d., com média* 0 *e variância finita* σ^2, *e se* X^n *é a função aleatória definida em* (4.2), *então*

$$X^n \Rightarrow_n W,$$

onde W *é a medida de Wiener.*

Demonstração: Conforme [5], página 91.

♦

No teorema acima, W é a função aleatória que possui medida de Wiener como sua distribuição sobre $C = C[0, 1]$, o espaço de funções contínuas definidas em $[0, 1]$. Desde que $C \subset D$, a aplicação identidade $i : C \to D$ é contínua e W e W^{-1} têm as mesmas distribuições finito-dimensionais (não faremos distinção entre W e W^{-1}), o Teorema 4.3 permite a obtenção de um resultado análogo ao do Teorema 4.4 para funções aleatórias em D.

Teorema 4.5 (Teorema de Donsker 2)**.** *Se $\xi_1, \xi_2, \cdots$ são i.i.d., com média 0 e variância finita σ^2, e se X^n é a função aleatória definida por*

$$X_t^n(\omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor nt \rfloor}(\omega), \tag{4.3}$$

então

$$X^n \Rightarrow_n W,$$

onde W é a medida de Wiener.

Demonstração: Conforme [5], página 147.

♦

4.2 Extensão do Teorema de Donsker

Nesta seção, pretendemos eliminar a hipótese sobre a finitude do segundo momento das variáveis que alimentam a soma que aparece no processo considerado no Teorema de Donsker. Faremos isso motivados pelo fato de que distribuições estáveis satisfazem uma importante relação envolvendo momentos, também satisfeita pelas distribuições envolvidas no referido teorema sem, no entanto, possuirem o segundo momento finito quando $0 < \alpha < 2$.

Com efeito, considere $X, X_1, X_2, \cdots$ variáveis aleatórias i.i.d $S_\alpha(1, 0, 0)$ e

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

Da propriedade da soma de leis estáveis[‖], temos

$$S_n \sim S_\alpha(n^{1/\alpha}, 0, 0). \tag{4.4}$$

[‖]Essa propriedade diz que se X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes, $X_i \sim S_\alpha(\sigma_i, \beta_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$, então $X_1 + X_2 \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, onde $\sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{1/\alpha}$, $\beta = \frac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_1^\alpha}$ e $\mu = \mu_1 + \mu_2$. (Conforme [20]).

Se $X \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$, da propriedade (1.2), podemos tomar uma constante $c_\alpha(\alpha')$ tal que

$$(E\{|X|^{\alpha'}\})^{1/\alpha'} = c_\alpha(\alpha')\sigma,$$

para todo $\alpha' \in (0, \alpha)$. Assim, para S_n como em (4.4), temos

$$E\{|S_n|^{\alpha'}\} = c^*_\alpha(\alpha')n^{\alpha'/\alpha},$$

onde $c^*_\alpha(\alpha')$ é uma constante. Daí, para $n_1 \leq n \leq n_2$, temos que

$$\begin{aligned} E(|S_{n_2} - S_n|^{\alpha'}|S_n - S_{n_1}|^{\alpha'}) &= E|S_{n_2} - S_n|^{\alpha'}E|S_n - S_{n_1}|^{\alpha'} \\ &= (c^*_\alpha(\alpha'))^2(n_2 - n)^{\alpha'/\alpha}(n - n_1)^{\alpha'/\alpha}, \end{aligned}$$

uma vez que $S_{n_2} - S_n$ e $S_n - S_{n_1}$ são independentes.

Seja $1 < \alpha < 2$. Considere o processo Y^n, dado por

$$Y^n_t(\omega) = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}(\omega)}{n^{1/\alpha}}, \tag{4.5}$$

onde $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ e as variáveis aleatórias $X, X_1, X_2, \cdots$ são i.i.d. F_X, com $EX = 0$.

Proposição 4.1. *Seja Y^n o processo definido em (4.5) e Y_α uma variável aleatória estritamente α-estável com distribuição F_{Y_α}. Suponha que*

$$d_\alpha(F_X, F_{Y_\alpha}) < \infty. \tag{4.6}$$

Então, para $k = 1, 2, \cdots$, ocorre, quando $n \to \infty$,

$$(Y^n_{t_1}, Y^n_{t_2}, \cdots, Y^n_{t_k}) \xrightarrow{d} (Y_\alpha(t_1), Y_\alpha(t_2), \cdots, Y_\alpha(t_k)),$$

onde $Y_\alpha(t) \stackrel{d}{=} t^{1/\alpha}Y_\alpha$.

Demonstração: A hipótese (4.6) é equivalente à condição (2.4), hipótese do Teorema 2.3, que garante a convergência

$$\frac{S_n}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow{d_\alpha} Y_\alpha.$$

Assim, quando $n \to \infty$,

$$\frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{n^{1/\alpha}} = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\lfloor nt \rfloor^{1/\alpha}}\left(\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}\right)^{1/\alpha} \xrightarrow{d_\alpha} t^{1/\alpha}Y_\alpha. \tag{4.7}$$

Denote

$$Y_\alpha(t) := t^{1/\alpha} Y_\alpha.$$

Sejam $a_1, a_2, \cdots, a_k \in \mathbb{R}$ e $F^{a_1,a_2,\cdots,a_k}_{n,t_1,t_2,\cdots,t_k}$ e $G^{a_1,a_2,\cdots,a_k}_{t_1,t_2,\cdots,t_k}$, respectivamente, as funções de distribuição das variáveis aleatórias

$$\sum_{j=1}^{k} a_j Y^n_{t_j}$$

e

$$\sum_{j=1}^{k} a_j Y_\alpha(t_j).$$

Considerando que

$$\left| \sum_{j=1}^{k} a_j \right|^\alpha \leq 2^{(k-1)(\alpha-1)} |a_1|^\alpha + \sum_{j=2}^{k} 2^{(k-j+1)(\alpha-1)} |a_j|^\alpha,$$

obtemos, usando a definição de distância Mallows, que

$$d^\alpha_\alpha(F^{a_1,a_2,\cdots,a_k}_{n,t_1,t_2,\cdots,t_k}, G^{a_1,a_2,\cdots,a_k}_{t_1,t_2,\cdots,t_k}) \leq E \left| \sum_{j=1}^{k} a_j Y^n_{t_j} - \sum_{j=1}^{k} a_j Y_\alpha(t_j) \right|^\alpha$$

$$\leq 2^{(k-1)(\alpha-1)} |a_1|^\alpha E \left| Y^n_{t_1} - Y_\alpha(t_1) \right|^\alpha + \sum_{j=2}^{k} 2^{(k-j+1)(\alpha-1)} |a_j|^\alpha E \left| Y^n_{t_j} - Y_\alpha(t_j) \right|^\alpha$$

$$= 2^{(k-1)(\alpha-1)} |a_1|^\alpha d^\alpha_\alpha(F_{Y^n_{t_1}}, F_{Y_\alpha(t_1)}) + \sum_{j=2}^{k} 2^{(k-j+1)(\alpha-1)} |a_j|^\alpha d^\alpha_\alpha(F_{Y^n_{t_j}}, F_{Y_\alpha(t_j)}),$$

onde a última igualdade advém do Teorema da Representação.

Por (4.7), temos que

$$Y^n_{t_j} \xrightarrow{d_\alpha} Y_\alpha(t_j), \quad j = 1, 2, \cdots, k.$$

Logo,

$$d^\alpha_\alpha(F^{a_1,a_2,\cdots,a_k}_{n,t_1,t_2,\cdots,t_k}, G^{a_1,a_2,\cdots,a_k}_{t_1,t_2,\cdots,t_k}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Isso é equivalente a dizer que

$$\sum_{j=1}^{k} a_j Y^n_{t_j} \xrightarrow{d_\alpha} \sum_{j=1}^{k} a_j Y_\alpha(t_j),$$

que implica em

$$\sum_{j=1}^{k} a_j Y_{t_j}^n \xrightarrow{d} \sum_{j=1}^{k} a_j Y_\alpha(t_j).$$

Assim, pelo Teorema 3.4, concluimos que

$$(Y_{t_1}^n, Y_{t_2}^n, \cdots, Y_{t_k}^n) \xrightarrow{d} (Y_\alpha(t_1), Y_\alpha(t_2), \cdots, Y_\alpha(t_k)).$$

♦

O teorema abaixo constitui-se numa extensão do Teorema de Donsker. Nele, eliminamos a hipótese de segundo momento finito das contribuições à soma do processo Y^n, na medida que permitimos que essas variáveis aleatórias possam frequentar o domínio de atração de uma variável aleatória α-estável, $1 < \alpha < 2$.

Teorema 4.6 (Extensão do Teorema de Donsker)**.** *Fixe $\alpha \in (1, 2)$. Sejam $X_1, X_2, \cdots$ variáveis aleatórias i.i.d., com $EX_n = 0$, e Y_α uma variável aleatória estritamente α-estável . Suponha que*

$$d_\alpha(F_{X_1}, F_{Y_\alpha}) < \infty.$$

Então o processo Y^n, dado por

$$Y_t^n(\omega) = \frac{X_1(\omega) + \cdots + X_{\lfloor nt \rfloor}(\omega)}{n^{1/\alpha}},$$

é tal que

$$Y^n \Rightarrow_{n\to\infty} L_\alpha,$$

onde L_α é o movimento de Lèvy α-estável.

Demonstração: (a) Pela Proposição 4.1, temos a convergência, no sentido das distribuições de dimensão finita, para o movimento de Lèvy α-estável.

(b) Como ocorre

$$\begin{aligned} d_\alpha^\alpha \left(F_{Y(1)}, F_{Y(1-\delta)}\right) \quad &\leq \quad E\,|Y(1) - Y(1-\delta)|^\alpha \\ &\overset{\delta\to 0}{\to} \quad 0, \end{aligned}$$

temos que

$$Y(1) - Y(1-\delta) \xrightarrow{d_\alpha} 0.$$

Isso implica, pelo Teorema 3.1, em

$$Y(1) - Y(1-\delta) \xrightarrow{d} 0,$$

quando $\delta \to 0$.

(c) Fixado n, para $0 \leq t_1 \leq t \leq t_2 \leq 1$, teremos

$$\begin{aligned}
E(|Y_{t_2}^n - Y_t^n|^{\alpha'} |Y_t^n - Y_{t_1}^n|^{\alpha'}) &= E\left(\left| \frac{S_{\lfloor nt_2 \rfloor}}{n^{1/\alpha}} - \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{n^{1/\alpha}} \right|^{\alpha'} \left| \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{n^{1/\alpha}} - \frac{S_{\lfloor nt_1 \rfloor}}{n^{1/\alpha}} \right|^{\alpha'} \right) \\
&= \frac{1}{n^{2\alpha'/\alpha}} E \left| S_{\lfloor nt_2 \rfloor} - S_{\lfloor nt \rfloor} \right|^{\alpha'} E \left| S_{\lfloor nt \rfloor} - S_{\lfloor nt_1 \rfloor} \right|^{\alpha'} \\
&= \frac{1}{n^{2\alpha'/\alpha}} (c_\alpha^*(\alpha'))^2 (\lfloor nt_2 \rfloor - \lfloor nt \rfloor)^{\alpha'/\alpha} (\lfloor nt \rfloor - \lfloor nt_1 \rfloor)^{\alpha'/\alpha} \\
&\leq \frac{1}{n^{2\alpha'/\alpha}} (c_\alpha^*(\alpha'))^2 (\lfloor nt_2 \rfloor - \lfloor nt_1 \rfloor)^{\alpha'/\alpha} \\
&:= (*)
\end{aligned}$$

Para $t_2 - t_1 < \frac{1}{n}$, $(*)$ desaparece. Caso contrário, desde que $\lfloor nt_2 \rfloor - \lfloor nt_1 \rfloor \leq n(t_2 - t_1) + 1$, temos que

$$\begin{aligned}
(*) &\leq (\tfrac{1}{n})^{2\alpha'/\alpha} (c_\alpha^*(\alpha'))^2 (n(t_2 - t_1) + 1)^{\alpha'/\alpha} \\
&\leq (\tfrac{1}{n})^{\alpha'/\alpha} (t_2 - t_1)^{\alpha'/\alpha} (c_\alpha^*(\alpha'))^2 (n(t_2 - t_1) + 1)^{\alpha'/\alpha} \\
&\leq (\tfrac{1}{n})^{\alpha'/\alpha} (t_2 - t_1)^{\alpha'/\alpha} (c_\alpha^*(\alpha'))^2 n^{\alpha'/\alpha} ((t_2 - t_1) + \tfrac{1}{n})^{\alpha'/\alpha} \\
&\leq (t_2 - t_1)^{\alpha'/\alpha} (c_\alpha^*(\alpha'))^2 (2(t_2 - t_1))^{\alpha'/\alpha} \\
&= 2^{\alpha'/\alpha} (c_\alpha^*(\alpha'))^2 (t_2 - t_1)^{2\alpha'/\alpha} \\
&= [\sqrt{2} (c_\alpha^*(\alpha'))^{\alpha/\alpha'} (t_2 - t_1)]^{2\alpha'/\alpha}
\end{aligned}$$

Assim, se considerarmos $\alpha/2 < \alpha' < \alpha$, teremos satisfeita a Condição (4.1), do Teorema 4.3, com $\beta = 1$ e $H(t) = \sqrt{2}(c_\alpha^*(\alpha'))^{\alpha/\alpha'} t$.

Portanto, pelo Teorema 4.3, temos que

$$Y^n \Rightarrow_{n\to\infty} L_\alpha,$$

onde L_α é uma medida de probabilidade associada ao movimento de Lèvy α-estável.

♦

Capítulo 5

Cotas para a probabilidade do transbordamento

No Capítulo 1, apresentamos $\Psi_t(.)$ e $\Psi(.)$, dadas por

$$\Psi_t(x) = P\left(\sup_{0\leq\delta\leq t} V(\delta) > x\right) \tag{5.1}$$

e

$$\Psi(x) = \lim_{t\to\infty} \Psi_t(x) = P\left(\sup_{\delta\geq 0} V(\delta) > x\right), \tag{5.2}$$

que são de interesse central para se lidar com o problema do transbordamento. Recordemos que, nas expressões (5.1) e (5.2), t representa um tempo finito, x é uma constante associada à capacidade de memória do *buffer* e o processo $\{V(t)\}_{t\geq 0}$ representa a ocupação desse *buffer*/reservatório no tempo t.

Comportamento do tráfego, modelagem e melhoramento do desempenho das redes são questões que têm ganhado notoriedade nos últimos anos. Um trabalho precursor, neste sentido, foi o desenvolvido por Norros [17]. Considerando a aproximação (1.15) e utilizando a Teoria dos grandes desvios, ele mostrou uma cota inferior para a probabilidade do transbordamento em função da capacidade x de armazenamento do *buffer* e que o então chamado processo de armazenamento Browniano Fracionário seguia uma distribuição de Weibull quando $x \to \infty$. Mais tarde, em [18], discutiu-se as limitações do Tráfego Browniano Fracionário apresentado em [17] e que um processo de armazenamento autossimilar α-estável, com incrementos estacionários, também modelaria o processo de ocupação do *buffer*. Neste caso,

$$\Psi(x) \geq a.x^{-\alpha b},$$

onde as constantes a e b dependem dos parâmetros do tráfego considerado, de modo que o decaimento da ocupação do *buffer* seria, na melhor da hipóteses, algébrico.

Observamos que cota inferior para a probabilidade do transbordamento é de pouca utilidade prática. Seria interessante se pudéssemos aproximar a probabilidade do transbordamento num tempo finito através da avaliação da cauda de uma variável aleatória conhecida.

Neste capítulo, consideraremos o Processo Associado, dado por

$$V(T_{N(t)}) = \sum_{i=1}^{N(t)} (\widetilde{X}_i - \tau_i),$$

que aparece na modelagem de tráfego proposta no Capítulo 1. Para uma importante configuração das variáveis envolvidas, utilizaremos o Teorema 2.4 e o Teorema da Representação para provar a convergência, em distância Mallows, do processo de armazenamento (1.19), devidamente estabilizado, para uma variável aleatória estável. Esse é o resultado do Teorema 5.3. Além disso, nos teoremas 5.4, 5.5 e 5.6, produziremos aproximações assintóticas do tipo

$$\Psi_t(x) \sim P\left(Y_\beta > \frac{x - \widetilde{c}_{N(t)}}{N^{1/\beta}(t)}\right),$$

em que $\widetilde{c}_{N(t)}$ são constantes apropriadas e Y_β é uma variável aleatória estável, para as probabilidades (5.1) e (5.2).

Como aplicação da teoria desenvolvida nos capítulos 3 e 4, provaremos, no Teorema 5.8, sob condições de regularidade, a convergência fraca de processos de renovação com recompensa reescalonados e estabilizados, dados por

$$Y_t^{\xi(s)}(\omega) = \frac{S^{(X)}_{\lfloor \xi(s)t \rfloor} - c_{\lfloor \xi(s)t \rfloor}}{\xi^{1/\alpha}(s)},$$

em que ξ é um processo de renovação com tempos de chegada $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ (as contribuições à soma $X_1, X_2, \cdots$ são variáveis aleatórias positivas i.i.d. X) e $c_{\xi(s)}$ são constantes apropriadas, para o movimento de Lèvy α-estável. Esta é uma situação onde o processo de renovação apresenta forte dependência das contribuições à soma.

5.1 Preliminares

Temos dito que as distribuições estáveis formam uma importante subclasse das distribuições de cauda pesada quando o índice de estabilidade α é tal que $1 < \alpha < 2$. Neste intervalo de estabilidade, as distribuições estáveis possuem média finita e o conjunto delas pode ser observado numa subclasse um pouco mais geral de distribuições de cauda pesada, as chamadas distribuições subexponenciais.

Definição 5.1. * Uma função de distribuição F é dita ser subexponencial se

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\overline{F} * \overline{F})(x)}{\overline{F}(x)} = 2,$$

onde $*$ sinaliza a convolução. Notação: $F \in \mathcal{S}$.

Outra importante subclasse de distribuições de cauda pesada é a das distribuições de cauda longa.

Definição 5.2. Uma função de distribuição F é dita ser de cauda longa se, para algum $y > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} = 1.$$

Notação: $F \in \mathcal{L}$.

A respeito dessas subclasses, relacionamos os seguintes fatos importantes que usaremos no decorrer dos nossos argumentos.

Propriedade 5.1.

(i) $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$;

(ii) se $\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x)}{\overline{G}(x)} = c$, para algum $c \in [0, \infty)$, então $F \in \mathcal{S} \Leftrightarrow G \in \mathcal{S}$;

Por (i), temos que as distribuições estáveis são de cauda longa. Já (ii) apresenta um importante critério para decidir se uma variável aleatória tem distribuição subexponencial a partir de uma outra distribuição subexponencial conhecida.

*Conforme [10], pág. 10.

Exemplo 5.1. Se $F \in D_{S_n}(G_\alpha)$, onde G_α é α-estável e $\alpha \in [1, 2)$, então $F \in \mathcal{S}$. De fato, essa conclusão decorre da posição relativa entre os conjuntos $D_{S_n}(G_\alpha)$ e $D_N(G_\alpha)$, da Propriedade 5.1, item (ii), da definição de domínio normal de atração e da caracterização sugerida pela Propriedade 2.2. (Conforme [10]).

A seguir, apresentamos dois teoremas, que podem ser encontrados em [16], que relacionam a cauda da distribuição de somas parciais com a cauda do máximo dessas somas quando as distribuições de suas componentes apresentam cauda longa ou subexponencial. A relação assintótica a que nos referimos é

$$A(n) \sim B(n) \text{ } quando \text{ } \lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{B(n)} = 1.$$

Teorema 5.1. *Sejam X_i, $1 \leq i \leq n$, variáveis aleatórias independentes com distribuição $F_i \in \mathcal{L}$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que*

$$P\left(\max_{1\leq k\leq n} \sum_{i=1}^{k} X_i > x\right) \sim P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > x\right).$$

Teorema 5.2. *Sejam X_i, $1 \leq i \leq n$, variáveis aleatórias independentes com distribuição F_i. Suponha que $\overline{F}_i \sim b_i\overline{F}$, para alguma $F \in \mathcal{S}$, onde as constantes b_k são não negativas e tais que $B(n) := \sum_{i=1}^{n} b_i > 0$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que*

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > x\right) \sim P\left(\max_{1\leq i\leq n} X_i > x\right) \sim B(n)\overline{F}(x).$$

5.2 Convergência do processo de armazenamento

Na Seção 1.5 do Capítulo 1, definimos o Processo Associado $\{V(T_{N(t)})\}_{t\geq 0}$, que é dado por

$$V(T_{N(t)}) = \sum_{j=1}^{N(t)} X_j =: S_{N(t)},$$

onde as variáveis aleatórias $X_j = \widetilde{X}_j - \tau_j$ representam uma espécie de contribuição líquida ao volume do reservatório.

Para o momento, estamos interessados no caso em que as contribuições X_j são variáveis aleatórias de cauda pesada. Em particular, consideraremos o caso em que podemos escrever $X_j = \eta_j \tau_j^{on}$ e, além disso, a cauda de $\widetilde{X}_j$ é mais pesada do que a cauda de τ_j.

Exemplo 5.2. Suponha que τ_j^{on} e τ_j^{off} tenham a mesma distribuição e que a cada período ON esteja associado uma carga de tráfego aleatória do tipo

$$\widetilde{X}_j = (\eta_j + 2)\tau_j^{on}.$$

Então

$$X_j = (\eta_j + 2)\tau_j^{on} - (\tau_j^{on} + \tau_j^{off}) \stackrel{d}{=} \eta_j \tau_j^{on}.$$

No exemplo acima, caso η_j seja constante q.c., as caudas dos períodos entre tráfego e das cargas de tráfego terão mesmo peso. Caso contrário, o produto da variável aleatória η_j por τ_j^{on} pode tornar a estrutura da cauda de X_j mais pesada do que a de τ_j, como nos mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 5.3. Sejam η e τ variáveis aleatórias independentes, com $\tau \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$ e $\eta^\alpha \sim S_{\frac{\beta}{\alpha}}((cos\frac{\pi\beta}{2\alpha})^{\alpha/\beta}, 1, 0)$, com $1 < \beta < \alpha < 2$. Considere $X = \eta\tau$, e provemos que X é cauda pesada com índice β. De fato, observe inicialmente que a transformada de Laplace da variável η^α é

$$E\exp(-t\eta^\alpha) = \exp(-t^{\alpha/\beta}), \quad t > 0. \tag{5.3}$$

Em seguida, considerando que a função característica Φ_X de uma variável aleatória X determina sua função de distribuição, a forma simplificada da função característica de uma variável aleatória estável simétrica, a hipótese de independência das variáveis τ e η e a Equação (5.3), temos que

$$\begin{aligned}
\Phi_X(t) &= E\exp(it\eta\tau) \\
&= E(E\exp\{i(t\eta)\tau\}|\eta) \\
&= E\exp\{-\sigma^\alpha |t|^\alpha \eta^\alpha\} \\
&= \exp\{-(\sigma^\alpha |t|^\alpha)^{\beta/\alpha}\} \\
&= \exp\{-\sigma^\beta |t|^\beta\},
\end{aligned}$$

o que mostra que X é uma variável aleatória estável simétrica, com índice de estabilidade β. Portanto, X é cauda pesada com índice β.

No próximo teorema, estamos considerando que X_i são variáveis aleatórias i.i.d. cauda pesada com índice β, os períodos entre tráfego τ_i são variáveis aleatórias i.i.d. cauda pesada com índice α, mas tais que $\beta < \alpha$. Isto é, desejamos que as caudas das cargas de tráfego sejam mais pesadas que as caudas dos períodos entre tráfego.

Teorema 5.3. *Seja $\alpha \in (1, 2)$. Assuma que $E(\tau^\beta) < \infty$ para todo $\beta < \alpha$ e que existam constantes $\{c_n\}$ tais que*

$$\frac{V(T_{N(t)}) - c_{N(t)}}{N^{1/\beta}(t)} \stackrel{d_\beta}{\to} Y_\beta.$$

Então

$$\frac{V(t) - c_{N(t)}}{N^{1/\beta}(t)} \stackrel{d_\beta}{\to} Y_\beta, \tag{5.4}$$

onde Y_β é uma variável aleatória β-estável.

Demonstração: Sejam $F_{N(t)}$ a função de distribuição de $S(N(t))$, onde

$$S(N(t)) := \frac{V(T_{N(t)}) - c_{N(t)}}{N^{1/\beta}(t)}$$

e G_β a função de distribuição de Y_β. Considere o vetor $(S(N(t)), Y_\beta)$ de tal sorte que

$$(S(N(t)), Y_\beta) \stackrel{d}{=} F_{N(t)} \wedge G_\beta.$$

Assim, pelo Teorema 2.2, da Representação, teremos que

$$d_\beta^\beta(F_{N(t)}, G_\beta) = E|S(N(t)) - Y_\beta|^\beta$$

e, pela hipótese, temos que

$$E\{|S(N(t)) - Y_\beta|^\beta\} \to 0 \tag{5.5}$$

Da relação entre os tempos de ocorrência de tráfego e os tempos entre tráfego, é fácil ver que

$$0 \leq t - T_{N(t)} < \tau_{N(t)+1}. \tag{5.6}$$

Das equações (1.19), (1.13) e (1.14), temos que

$$
\begin{aligned}
V(t) &= A(t) - t \\
&= \left(\sum_{i=1}^{N(t)} \widetilde{X}_i + \eta\delta_t 1_{(t\in ON)} + \widetilde{X}_{N(t)+1} 1_{(t\in OFF)} \right) - t \\
&= A(T_{N(t)}) + \eta\delta_t 1_{(t\in ON)} + \widetilde{X}_{N(t)+1} 1_{(t\in OFF)} - t \\
&= V(T_{N(t)}) + T_{N(t)} - t + \eta\delta_t 1_{(t\in ON)} + \widetilde{X}_{N(t)+1} 1_{(t\in OFF)}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\frac{V(t) - c_{N(t)}}{N^{1/\beta}(t)} &= \frac{V(T_{N(t)}) + T_{N(t)} - t - c_{N(t)}}{N^{1/\beta}(t)} + \frac{\eta\delta_t 1_{(t\in ON)} + \widetilde{X}_{N(t)+1} 1_{(t\in OFF)}}{N^{1/\beta}(t)} \\
&= S(N(t)) + \frac{T_{N(t)} - t}{N^{1/\beta}(t)} + \frac{\eta\delta_t 1_{(t\in ON)} + \widetilde{X}_{N(t)+1} 1_{(t\in OFF)}}{N^{1/\beta}(t)}.
\end{aligned}
$$

Assim, utilizando a desigualdade básica $|X - Y|^\beta \leq 2^\beta(|X|^\beta + |Y|^\beta)$ e a linearidade da esperança, temos que

$$
E\left| \frac{V(t) - c_{N(t)}}{N^{1/\beta}(t)} - Y_\beta \right|^\beta =
$$

$$
E\left| S(N(t)) - Y_\beta - \frac{t - T_{N(t)} - \{\eta\delta_t 1_{(t\in ON)} + \widetilde{X}_{N(t)+1} 1_{(t\in OFF)}\}}{N^{1/\beta}(t)} \right|^\beta \leq
$$

$$
2^\beta \left\{ E\left|S(N(t)) - Y_\beta\right|^\beta + \underbrace{E\left| \frac{t - T_{N(t)} - \{\eta\delta_t 1_{(t\in ON)} + \widetilde{X}_{N(t)+1} 1_{(t\in OFF)}\}}{N^{1/\beta}(t)} \right|^\beta}_{(*)} \right\} =
$$

$$
2^\beta \left\{ E\left|S(N(t)) - Y_\beta\right|^\beta + (*) \right\}.
$$

Vamos analisar $(*)$ em duas situações complementares:

- $W(t) = 0$ (isto é, se t está em um período OFF):

$$
\begin{aligned}
(*) &= E\left|\frac{t - T_{N(t)}}{N^{1/\beta}(t)} - \frac{\widetilde{X}_{N(t)+1}}{N^{1/\beta}(t)}\right|^{\beta} \\
&\leq 2^{\beta}\left\{E\left|\frac{t - T_{N(t)}}{N^{1/\beta}(t)}\right|^{\beta} + E\left|\frac{\widetilde{X}_{N(t)+1}}{N^{1/\beta}(t)}\right|^{\beta}\right\} \\
&\leq 2^{\beta}\left\{E\left|\frac{\tau_{N(t)+1}}{N^{1/\beta}(t)}\right|^{\beta} + E\left|\frac{\widetilde{X}_{N(t)+1}}{N^{1/\beta}(t)}\right|^{\beta}\right\}
\end{aligned}
$$

- $W(t) = 1$ (isto é, se t está em um período ON):

$$
\begin{aligned}
(*) &= E\left|\frac{t - T_{N(t)}}{N^{1/\beta}(t)} - \frac{\eta\delta_t}{N^{1/\beta}(t)}\right|^{\beta} \\
&\leq 2^{\beta}\left\{E\left|\frac{t - T_{N(t)}}{N^{1/\beta}(t)}\right|^{\beta} + E\left|\frac{\eta\delta_t}{N^{1/\beta}(t)}\right|^{\beta}\right\} \\
&\leq 2^{\beta}\left\{E\left|\frac{\tau_{N(t)+1}}{N^{1/\beta}(t)}\right|^{\beta} + E\left|\frac{\widetilde{X}_{N(t)+1}}{N^{1/\beta}(t)}\right|^{\beta}\right\}
\end{aligned}
$$

Como, quando t é grande, ocorre

$$
\begin{aligned}
\frac{\widetilde{X}_{N(t)+1}}{N^{1/\beta}(t)} &\leq \frac{S_{N(t)+1}}{N^{1/\beta}(t)} \\
&= \frac{S_{N(t)+1}}{(N(t)+1)^{1/\beta}}.\frac{(N(t)+1)^{1/\beta}}{N^{1/\beta}(t)} \\
&= \frac{S_{N(t)+1}}{(N(t)+1)^{1/\beta}}.\left[1 + \frac{1}{N(t)}\right]^{1/\beta} \\
&\leq \frac{S_{N(t)+1}}{(N(t)+1)^{1/\beta}}.2^{1/\beta},
\end{aligned}
$$

temos, pela prova do Teorema 2.4, que

$$E\left|\frac{\widetilde{X}_{N(t)+1}}{N^{1/\beta}(t)}\right|^{\beta} \leq 2E\left|\frac{S_{N(t)+1}}{(N(t)+1)^{1/\beta}}\right|^{\beta} \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Além disso, pela hipótese de integrabilidade de τ^{β},

$$E\left|\frac{\tau_{N(t)+1}}{N^{1/\beta}(t)}\right|^{\beta} \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Assim, independente se t frequenta um período ON ou um período OFF, temos que

$$(*) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Desde que convergência em média β implica em convergência em distância Mallows, a convergência acima, combinada com (5.5), resulta em (5.4).

♦

5.3 Aproximações

Nesta seção, articulamos as ideias apresentadas na seção anterior para produzir estimativas para a probabilidade do transbordamento.

Recordemos que as variáveis $\widetilde{X}_i$, as cargas aleatórias de tráfego, são emitidas especificamente durante o período τ_i^{on} de atividade da fonte, $i = 1, 2, \cdots$. Desde que

$$N(T_{N(t)} + y) = N(T_{N(t)}) = N(t), \;\; \forall y \in [0, \tau_{N(t)+1})$$

e considerando $s_0 = T_{N(t)} + \tau^{on}_{N(t)+1}$, obtemos a seguinte equivalência dos eventos

$$
\begin{aligned}
\left(\sup_{0\le s\le t} V(s) > x\right) &= \left(\sup_{0\le s\le t}\left[\sum_{i=1}^{N(s)} \widetilde{X}_i + \eta\delta_s 1_{(s\in ON)} + \widetilde{X}_{N(s)+1}1_{(s\in OFF)} - t\right] > x\right)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{N(s_0)+1} \widetilde{X}_i - s_0 > x\right)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{N(t)+1} \widetilde{X}_i - \left[\sum_{i=1}^{N(t)+1} \tau_i - \tau_{N(t)+1} + \tau^{on}_{N(t)+1}\right] > x\right)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{N(t)+1} X_i + \tau_{N(t+1)} - \tau^{on}_{N(t)+1} > x\right)\\
&= \left(V(T_{N(t)}) > x - [X_{N(t)+1} + \tau^{off}_{N(t)+1}]\right).
\end{aligned}
$$

Esse fato nos ajuda a estabelecer os próximos resultados.

Teorema 5.4. *Sejam $\widetilde{X}_i = X_i + \tau_i$, $i = 1, 2, \cdots$, variáveis aleatórias i.i.d. F, onde $F \in D_{NF}(G_\beta)$ e G_β é a função de distribuição de uma variável aleatória β-estável Y_β. Suponha que τ, τ_i são variáveis aleatórias i.i.d. tais que $E(\tau^\alpha) = \infty$, mas $E(\tau^\beta) < \infty$, $1 < \beta < \alpha < 2$. Suponha que seja satisfeita a condição, quanto $t \to \infty$,*

$$
\frac{1}{N(t)} \sum_{k=1}^{N(t)} E\left\{|X_k - Y_k|^\beta 1_{\left(|X_k - Y_k| > b[N(t)]^{(2-\beta)/2\beta}\right)}\right\} \xrightarrow{(1)} 0, \tag{5.7}
$$

onde $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \cdots$ é uma sequência de vetores aleatórios independentes e Y_k, $k = 1, 2, \cdots$ são cópias de Y_β. Então, para t suficientemente grande,

$$
\Psi_t(x) \sim P\left(Y_\beta > \frac{x - \widetilde{c}_{N(t)}}{N^{1/\beta}(t)}\right),
$$

em que $\widetilde{c}_{N(t)}$ são constantes apropriadas.

Demonstração:

(a) Sabemos que, dada uma distribuição β-estável, tem-se

$$D_{NF}(G_\beta) \subset D_{S_n}(G_\beta) \subset D_N(G_\beta),$$

onde

$$D_{S_n}(G_\beta) = \{F \ \ f.d.; F \stackrel{d}{=} S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \ \ e \ \ d_\beta(F, G_\beta) < \infty\}.$$

Sob as hipóteses do teorema, se

$$X_i = \widetilde{X}_i - \tau_i \ \ e \ \ X_i \stackrel{d}{=} F_{X_i},$$

então

$$F_{X_i} \in D_N(G_\beta). \tag{5.8}$$

De fato, a hipótese de que $F \in D_{NF}(G_\beta)$ implica em

$$d_\beta(F, G_\beta) < \infty, \tag{5.9}$$

enquanto que a hipótese $E(\tau^\beta) < \infty$ torna

$$d_\beta(F_{X_i}, F) \leq E|\widetilde{X}_i - \tau_i - \widetilde{X}_i|^\beta < \infty. \tag{5.10}$$

Logo, de (5.9) e (5.10), temos que

$$d_\beta(F_{X_i}, G_\beta) \leq d_\beta(F_{X_i}, F) + d_\beta(F, G_\beta) < \infty, \tag{5.11}$$

o que estabelece (5.8).

(b) $F_{X_i} \in D_N(G_\beta)$ significa dizer que existe uma sequência $\{c_n\}$ tal que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - c_n}{n^{1/\beta}} \xrightarrow{d_\beta} Y_\beta. \tag{5.12}$$

Desde que (5.7) ocorre, pelo Teorema 2.4, temos que

$$\frac{\sum_{i=1}^{N(t)} X_i - c_{N(t)}}{N^{1/\beta}(t)} \xrightarrow{d_\beta} Y_\beta. \tag{5.13}$$

(c) Assim,

$$\begin{aligned}
\Psi_t(x) &= P\left(\sup_{0\leq s\leq t} V(s) > x\right)\\
&= P\left(V(T_{N(t)}) > x - (X_{N(t)+1} + \tau^{off}_{N(t)+1})\right)\\
&= P\left(\frac{V(T_{N(t)}) - c_{N(t)}}{N^{1/\beta}(t)} > \frac{(x - (X_{N(t)+1} + \tau^{off}_{N(t)+1})) - c_{N(t)}}{N^{1/\beta}(t)}\right)\\
&\sim P\left(Y_\beta > \tfrac{x-\widetilde{c}_{N(t)}}{N^{1/\beta}(t)}\right),
\end{aligned}$$

onde a última expressão foi obtida de (5.13) e $\widetilde{c}_{N(t)} = c_{N(t)} + X_{N(t)+1} + \tau^{off}_{N(t)+1}$.

♦

Os teoremas abaixo sugerem maneiras alternativas para se estimar $\Psi_t(x)$.

Teorema 5.5. *Nas condições do Teorema 5.4,*

$$P\left(Y_\beta > \frac{x - c_{N(t)}}{N^{1/\beta}(t)}\right) \sim P\left(\max_{1\leq k\leq N(t)} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i > x\right).$$

Demonstração: Como G_β é estável e $d_\beta(F_{X_i}, G_\beta) < \infty$, temos que $F_{X_i} \in \mathcal{S}$ (conforme Exemplo 5.1). Desde que $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$, temos que $F_{X_i} \in \mathcal{L}$. Assim, pelo Teorema 5.1, para cada t,

$$P\left(\max_{1\leq k\leq N(t)} \sum_{i=1}^{k} X_i > x\right) \sim P\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i > x\right). \tag{5.14}$$

Podemos reescrever o lado direito da expressão (5.14) como

$$P\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i > x\right) = P\left(\frac{V(T_{N(t)}) - c_{N(t)}}{N^{1/\beta}(t)} > \frac{x - c_{N(t)}}{N^{1/\beta}(t)}\right) \sim P\left(Y_\beta > \frac{x - c_{N(t)}}{N^{1/\beta}(t)}\right), \tag{5.15}$$

sendo a igualdade assintótica obtida considerando-se (5.13) e t grande.

♦

Teorema 5.6. *Nas condições do Teorema 5.4, se* $\overline{F}_{X_i} \sim b_i G_\beta$, *com* $b_i > 0$, *então*

$$P\left(Y_\beta > \frac{x - c_{N(t)}}{N^{1/\beta}(t)}\right) \sim P\left(\max_{1 \le i \le N(t)} X_i > x\right).$$

Demonstração: Segue diretamente do Teorema 5.2.

♦

5.4 Convergência fraca de processos de renovação com recompensa

Ao longo desta tese, o nosso interesse principal circulou em torno de processos de renovação com recompensa. Nesta seção, aproveitaremos os resultados obtidos nos capítulos 2 e 3 para provar resultados análogos de convergência fraca para esse tipo de processo, especialmente quando o processo de renovação indexador da soma aleatória apresenta forte dependência das contribuições à soma.

Consideremos, inicialmente, o processo

$$X_t^{N(s)} = \frac{1}{N^{1/\alpha}(s)} S_{\lfloor N(s)t \rfloor} - (N(s)t - \lfloor N(s)t \rfloor) \frac{1}{N^{1/\alpha}(s)} X_{\lfloor N(s)t \rfloor + 1}, \tag{5.16}$$

onde o processo $\{N(s)\}_{s \ge 0}$ é um processo de contagem dado por

$$N(s) = \max\{n : S_n \le s\}, \tag{5.17}$$

em que

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

e $X_1, X_2, \cdots$ são variáveis i.i.d. com média 0 e variância finita. Em particular, poderiam ser $N(0,1)$.

O teorema abaixo mostra que a convergência obtida pelo Teorema de Donsker, discutido no Capítulo 4, se preserva mediante uma indexação aleatória por um processo do tipo (5.17).

Teorema 5.7. *O processo dado em* (5.16)*, com* $\alpha = 2$*, é tal que*

$$X^{N(s)} \Rightarrow_{s\to\infty} W,$$

onde W *é a medida de Wiener.*

Demonstração: Denote por

$$Y_t^{N(s)} := \frac{1}{\sqrt{N(s)}} S_{\lfloor N(s)t \rfloor}$$

e

$$\Psi_{N(s),t} := (N(s)t - \lfloor N(s)t \rfloor)\frac{1}{\sqrt{N(s)}} X_{\lfloor N(s)t \rfloor + 1}.$$

Desde que, pela Desigualdade de Tchebyschev, $\Psi_{N(s),t} \Rightarrow_{s\to\infty} 0$, é suficiente provar que $Y_t^{N(s)} \Rightarrow W$ quando $s \to \infty$.

Pela demonstração do Teorema 4.5, sabemos que o processo Y^n, dado por

$$Y_t^n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{\lfloor nt \rfloor}(\omega)$$

é tal que

$$Y^n \Rightarrow_n W,$$

onde W é a medida de Wiener, e um dos requisitos necessários para obtenção dessa convergência foi satisfazer a Condição (4.1), requisito este observado para $\alpha = \beta = 1$ e $F(t) = 2t$.

Assim, se considerarmos $0 \leq t_1 \leq t \leq t_2 \leq 1$, podemos observar que

$$\begin{aligned}
E\left\{(Y_t^{N(s)} - Y_{t_1}^{N(s)})^2(Y_{t_2}^{N(s)} - Y_t^{N(s)})^2\right\} &= E\left\{\sum_{k=0}^{\infty}(Y_t^k - Y_{t_1}^k)^2(Y_{t_2}^k - Y_t^k)^2 1_{(N(s)=k)}\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E\left\{(Y_t^k - Y_{t_1}^k)^2(Y_{t_2}^k - Y_t^k)^2 1_{(N(s)=k)}\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E\left\{(Y_t^k - Y_{t_1}^k)^2(Y_{t_2}^k - Y_t^k)^2\right\} E\{1_{(N(s)=k)}\} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty}[F(t_2) - F(t_1)]^2 P(N(s) = k) \\
&= [F(t_2) - F(t_1)]^2 \sum_{k=0}^{\infty} P(N(s) = k) \\
&= [F(t_2) - F(t_1)]^2,
\end{aligned}$$

onde $F(t) = 2t$, e a convergência fraca

$$Y^{N(s)} \Rightarrow W$$

segue por aplicação do Teorema 4.3.

♦

Se considerarmos o processo (5.16) indexado por um processo de renovação $\{\xi(s)\}_{s\geq 0}$, dado por

$$\xi(s) = max\{n : S_n \leq s\},$$

onde $S_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i$ e $\tau_1, \tau_2, \cdots$ são variáveis aleatórias positivas i.i.d. com média finita, ao invés do processo $\{N(s)\}_{s\geq 0}$, e denotarmos a sua componente mais à direita como $\Psi_{\xi(s),t}$, veremos que esse último processo convergirá fracamente para zero sem hipóteses sobre o segundo momento de τ. É o que nos mostra a proposição a seguir.

Proposição 5.1. $\Psi_{\xi(s),t} \Rightarrow 0$ *quando* $s \to \infty$.

Demonstração: De fato. Como as variáveis aleatórias τ_i são positivas com média finita temos, pela Desigualdade Generalizada de Tchebyschev†, que

$$
\begin{aligned}
P(\Psi_{\xi(s),t} \geq x) &= P\left(\tau_{\lfloor \xi(s)t \rfloor + 1} \geq \frac{x\xi^{1/\alpha}(s)}{\xi(s)t - \lfloor \xi(s)t \rfloor}\right) \\
&\leq \frac{\xi(s)t - \lfloor \xi(s)t \rfloor}{x\xi^{1/\alpha}(s)} E(\tau_{\lfloor \xi(s)t \rfloor + 1}) \\
&\leq \frac{1}{\xi^{1/\alpha}(s)} \frac{E(\tau_{\lfloor \xi(s)t \rfloor + 1})}{x},
\end{aligned}
$$

qualquer que seja $x > 0$. Desde que $\xi(s) \to \infty$ quando $s \to \infty$ e $E(\tau_{\lfloor \xi(s)t \rfloor + 1})$ é constante, temos que

$$P(\Psi_{\xi(s),t} \geq x) \overset{s \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Assim,

$$\overline{F}_{\Psi_{\xi(s),t}}(x) \overset{s \to \infty}{\longrightarrow} 0, \ \ \forall\, x > 0,$$

que equivale a

$$F_{\Psi_{\xi(s),t}}(x) \overset{s \to \infty}{\longrightarrow} 1, \ \ \forall\, x > 0.$$

Daí, concluímos que, quando $s \to \infty$,

$$\Psi_{\xi(s),t} \Rightarrow 0.$$

♦

Note que a convergência obtida na proposição acima exige apenas que a variável aleatória τ seja não-negativa. Além disso, o resultado não mudaria se ao invés de τ tivéssemos uma outra variável aleatória com essa propriedade, independentemente do seu vínculo com o processo de renovação.

A seguir, tentaremos eliminar a hipótese de segundo momento finito e obter a convergência fraca do processo (5.16) para o caso $1 < \alpha < 2$.

Recordemos que, no Teorema 2.4 do Capítulo 2, provamos a convergência, em distância Mallows, para uma variável aleatória estável, do processo de renovação com recompensa

†Essa desigualdade diz que $P(X \geq \lambda) \leq EX/\lambda$, $\forall \lambda > 0$, sempre que a variável aleatória X for não negativa.

estabilizado, dado por

$$\frac{S^{(X)}_{\xi(s)} - c_{\xi(s)}}{\xi^{1/\alpha}(s)},$$

onde ξ é um processo de renovação cujos tempos de chegadas são somas parciais de funções lineares de X. Esta espécie de Teorema do Limite Central para processos de renovação com recompensa foi obtida considerando-se a forte relação de dependência existente entre o somando e processo de contagem e mediante condições do tipo Lindeberg, devidamente ajustadas para o caso considerado.

Na sequência, observamos as trajetórias do processo por meio de um reescalonamento no tempo e provamos, no Teorema 3.5 do Capítulo 3, que o limite observado, no sentido das distribuições de dimensão finita, é o movimento de Lèvy estável.

Esses resultados nos ajudarão a provar o teorema seguinte.

Teorema 5.8. *Sejam $1 < \alpha < 2$ e $Y^{\xi(s)}$ o processo dado por*

$$Y^{\xi(s)}_t = \frac{S^{(X)}_{\lfloor \xi(s)t \rfloor} - c_{\lfloor \xi(s)t \rfloor}}{\xi^{1/\alpha}(s)},$$

em que ξ é um processo de renovação com tempos de chegada $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, em que as variáveis X_i são positivas i.i.d., $c_{\xi(s)} = \xi(s)\mu_X - \xi^{1/\alpha}(s)\mu_Y$, Y é uma variável aleatória α-estável. Suponha que, para todo $b > 0$, a sequência $\{X_k\}_{k \geq 1}$ satisfaça a condição, quando $t \to \infty$,

$$\frac{1}{\xi(t)} \sum_{k=1}^{\xi(t)} E\{|X_k - Y_k|^\alpha 1_{(|X_k - Y_k| > b[\xi(t)]^{(2-\alpha)/2\alpha})}\} \xrightarrow{(1)} 0, \tag{5.18}$$

onde $(X_1, Y_1),\ (X_2, Y_2), \cdots$ é uma sequência de vetores aleatórios independentes e $Y_1, Y_2, \cdots$ são cópias de Y. Então

$$Y^{\xi(s)} \Rightarrow_{s \to \infty} L_\alpha,$$

onde L_α é uma medida de probabilidade associada ao movimento de Lèvy α-estável.

Demonstração: Pelos teoremas 2.4 e 3.5, obtemos a convergência do processo $Y^{\xi(s)}$ no sentido das distribuições de dimensão finita, isto é, para quaisquer $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_k \leq 1$,

$$(Y^{\xi(s)}_{t_1}, Y^{\xi(s)}_{t_2}, \cdots, Y^{\xi(s)}_{t_k}) \xrightarrow{d} (Y(t_1), Y(t_2), \cdots, Y(t_k)),$$

quando $s \to \infty$, onde $Y(t) \stackrel{d}{=} t^{1/\alpha} Y$.

Além disso,

$$Y(1) - Y(1-\delta) \Rightarrow_{\delta \to 0} 0.$$

O argumento estará finalizado se provarmos que vale a condição (4.1) do Teorema 4.3. De fato, para $0 \leq t_1 \leq t \leq t_2 \leq 1$, temos que

$$\begin{aligned}
E\left\{|Y_{t_2}^{\xi(s)} - Y_t^{\xi(s)}|^{\alpha'}|Y_t^{\xi(s)} - Y_{t_1}^{\xi(s)}|^{\alpha'}\right\} &= E\left\{\sum_{k=0}^{\infty}|Y_{t_2}^k - Y_t^k|^{\alpha'}|Y_t^k - Y_{t_1}^k|^{\alpha'}1_{(\xi(s)=k)}\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E\left\{|Y_{t_2}^k - Y_t^k|^{\alpha'}|Y_t^k - Y_{t_1}^k|^{\alpha'}\right\} P(\xi(s)=k) \\
&= (*)
\end{aligned}$$

Desde que $Y_t^{\xi(s)} = Y_t^k$ na região $(\xi(s) = k)$, podemos produzir uma limitação uniforme para $(*)$. Assim

$$\begin{aligned}
(*) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \{H(t_2) - H(t_1)\}^{2\alpha'/\alpha} P(\xi(s)=k) \\
&= \{H(t_2) - H(t_1)\}^{2\alpha'/\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi(s)=k) \\
&= \{H(t_2) - H(t_1)\}^{2\alpha'/\alpha},
\end{aligned}$$

onde $\alpha/2 < \alpha' < \alpha$ e $H(t) = C.t$, em que $C = \sqrt{2}(c_\alpha^*(\alpha'))$. Desde que a hipótese (5.18) implica na hipótese (2.4), com $\delta = \frac{2-\alpha}{2\alpha}$, o resultado segue por aplicação do Teorema 4.6.

♦

Referências Bibliográficas

[1] ANICK, D., MITRA, D., SONDHI, M. M. (1982). *Stochastic Theory of data-handling systems with multiple sources.* The Bell System Technical Journal, **61** (8), 1871-1894.

[2] BARBOSA, E. G., DOREA, C. C. Y. (2009) *A note on the Lindeberg condition for convergence to stable laws in Mallows Distance.* Bernoulli, **15** (3), 922-924.

[3] BARBOSA, E. G. *Convergência, na distância Mallows, de cadeias de Markov para distribuições estáveis.* Tese de doutorado. Universidade de Brasília, 2007.

[4] BICKEL, P. J, FREEDMAN, D. A. (1981) *Some asymptotic theory for the bootstrap.* The Annals of Statistic, **6**, 1196-1217.

[5] BILLINGSLEY, P. *Convergence of probability measures.* Wiley-Interscience publication, 2a. edição. New York, 1999.

[6] BREIMAN, L. *Probability.* Addison-Wesley Publishing Company. London, 1968.

[7] CHUNG, K, L. *A course in probability theory.* Academic Press. London, 1974.

[8] COX, D. R. *Renewal Theory.* Science Paperbacks. London, 1970.

[9] DOREA, C. C. Y., FERREIRA, D. B. (2012) *Conditions for equivalence between Mallows distance and convergence to stable laws.* Acta Mathematica Hungarica, **134** (1), 1-11.

[10] FERREIRA, D. B. *Distância de Mallows para a estimação da probabilidade da ruína em processos de risco clássico.* Tese de doutorado. Universidade de Brasília, 2009.

[11] JOHNSON, O., SAMWORTH, R. (2005). *Central limit theorem and convergence to stable laws in Mallows distance.* Bernoulli, **11** (5), 829-845.

[12] LELAND, W. E, TAQQU, M. S., WILLINGER, W., WILSON, D. V. (1994) *On the self-similar nature of Ethernet traffic (extended version).* IEEE/ACM Transations on networking, **2** (1), 1-15.

[13] LEVY, J. B., TAQQU, Murad S.(2000) *Renewal reward processes with heavy-tailed inter-renewal times and heavy-tailed rewards.* Bernoulli, **6** (1), 23-44.

[14] MIJNHEER, J. *On the rate of convergence to a stable limit law.* Plenum Publishing Corporation, 1987.

[15] MIKOSCH, T., RESNICK, S., ROOTZÉN, H., STEGEMAN, A. (2002) *Is network traffic approximated by stable Lèvy motion or fractional Brownian motion?.* The Annals of Applied Probability, **1**, 23-68.

[16] NG, K. W., TANG, Q. H., YANG, H. (2002) *Maxima of sums of heavy tailed random variables.* Austin Bulletin, **32**, 43-55.

[17] NORROS, I. (1995) *On the use of fractional Brownian motion in the theory of connectionless networks.* IEEE Journal on Selected Areas In Communications, **6** (13), 953-966.

[18] PEREIRA, F. M. *Modelagem, policiamento e escalonamento em redes Ethernet PON.* Tese de doutorado. Universidade Estadual de Campinas, 2006.

[19] ROSS, S. M. *Introduction to probability models.* Academic Press. New York, 2007.

[20] SAMORODNITSKY, G., TAQQU, M. S. *Stable non-gaussian random processes: stochastic models with infinite variance.* Chapman and Hall. New York, London, 1994.

[21] SILVA, S. V. *Comportamento assintótico da probabilidade da ruina em modelos de risco de renovação sob variação consistente.* Dissertação de mestrado. Universidade de Brasília, 2009.

[22] STALLINGS, W. *Redes e sistemas de comunição de dados: teoria e aplicações coorporativas.* Elsevier. Rio de Janeiro, 2005.

[23] TAQQU, M. S., WILLINGER, W., SHERMAN, R. (1997) *Proof of a fundamental result in self similar traffic modeling.* Computer communication review, **27**, 5-23.

[24] TSYBAKOV, B., GEORGANAS, N. D. (1997). *On self similar traffic in ATM queues: definitions, overflow probability bound and cell delay distribution.* IEEE Trans. Networking, **5**, 397-409.

[25] VLADAS, P., TAQQU, M. S. (2000) *The limit of a renewal reward process with heavy-tailed rewards is not a linear fractional stable motion*. Bernoulli, **6** (4), 607-614.

[26] WILLINGER, W., TAQQU, M. S., SHERMAN, R., WILSON, D. V. (1997). *Self similarity through high-variability: statistical analysys of Ethernet LAN traffic at the source level*. IEEE/ACM Trans. on Networking, **5** (1), 71-86.