UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

JOSAPHAT MORISSON DE MORAES

CONSTRUÇÃO DOS CONCEITOS GEOMÉTRICOS NUM CONTEXTO DE FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Brasília - DF
2008

JOSAPHAT MORISSON DE MORAES

CONSTRUÇÃO DOS CONCEITOS GEOMÉTRICOS NUM CONTEXTO DE FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada à Comissão Examinadora da Faculdade de Educação da Universidade de Brasília, como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação, sob a orientação do Professor Dr. Cristiano Alberto Muniz.

Universidade de Brasília

Brasília - DF

2008

JOSAPHAT MORISSON DE MORAES

CONSTRUÇÃO DOS CONCEITOS GEOMÉTRICOS NUM CONTEXTO DE FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Cristiano Alberto Muniz – Orientador
Universidade de Brasília (UnB) – Faculdade de Educação

Profª Drª Maria Terezinha Jesus Gaspar – Membro
Universidade de Brasília (UnB) – Departamento de Matemática

Profª Drª Erika Zimmermann – Membro
Universidade de Brasília (UnB) – Faculdade de Educação

Prof. Dr. Wildson Luiz Pereira dos Santos – Suplente
Universidade de Brasília (UnB) – Faculdade de Educação

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, Josaphat (*in memorian*) e Janice,
que muito cedo me iniciaram na Matemática.

AGRADECIMENTOS

À Mariluce, minha esposa,
à Lilian e ao Rafael, meus filhos,
pelo apoio e compreensão nesse período.

Ao Prof. Dr. Cristiano Alberto Muniz, meu orientador,
por me mostrar o fascínio que há na educação matemática.

Aos professores-membros da comissão examinadora,
Profª Drª Maria Terezinha Jesus Gaspar, Profª Drª Erika Zimmerman,
Prof. Dr. Wildson Luiz Pereira dos Santos, pelas valiosas contribuições.

Aos graduandos do curso de Pedagogia, sujeitos da pesquisa,
pela oportunidade de convivência e aprendizagem.

Às colegas de mestrado, Sandra, Verônica,
Milene e Amanda, pelos momentos
de discussão e crescimento.

RESUMO

Diversos trabalhos científicos denunciam o abandono do ensino de Geometria no ensino fundamental e uma das razões apontadas está no despreparo do professor. Este trabalho analisa, no contexto da formação inicial, a aquisição de competências em Geometria, por intermédio da análise da participação e da produção escrita de graduandos do curso de Pedagogia da UnB, na disciplina Educação Matemática II. O objetivo da análise foi identificar os obstáculos que se fizeram presentes na construção e apreensão de conceitos geométricos, e as condições necessárias para a superação desses obstáculos. Na pesquisa participante, o pesquisador introduziu-se no ambiente de formação e assumiu a condução da disciplina. As seqüências didáticas foram organizadas em onze atividades e contemplou os conteúdos sobre *Espaço e Forma* e *Grandeza e Medidas*, preconizados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para os 1º e 2º ciclos do ensino fundamental. A metodologia empregada para a apreensão dos conceitos foi a proposição de situações-problema, em cuja resolução emergiram os invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) do sujeito, na concepção da Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud (1990). Cada atividade proposta conteve elementos que possibilitaram a elevação do nível de pensamento geométrico dos sujeitos, tomando-se por base a teoria dos van Hiele (1957). Após a análise dos dados coletados, verificou-se a contribuição da disciplina para a formação do conhecimento da matéria, do conhecimento pedagógico da matéria e do conhecimento curricular, segundo a classificação de Shulman (1986). Outro objeto de análise foi a mudança de crenças sobre a Geometria, sobre si próprio e sobre a aprendizagem de Geometria, decorrentes do desenvolvimento de competências didático-pedagógicas.

Palavras-chave: Educação Matemática, Aprendizagem de Geometria, Formação de Professores que Ensinam Matemática.

ABSTRACT

Several scientific papers denounce the abandonment of the teaching of geometry in the elementary school and one of the reasons given is the unpreparedness of the teacher. This paper analyzes, in the context of initial training, the acquisition of skills in geometry, through the analysis of the participation and written production of students from the course of Pedagogy at UnB, in the subject Education in Mathematics II. The objective of the analysis was to identify the obstacles that were present in the construction and acquisition of geometric concepts, and the necessary conditions to overcome these obstacles. During the participatory research, the researcher introduced himself into the teaching environment and took over the subject. The didactic sequences were organized in eleven activities and included the contents of *Space and Form and Greatness and Measures*, recommended by the National Curricular Parameters (PCN) for the first and second cycles of elementary school. The methodology used for the acquisition of concepts was the proposition of problem-situations, whose solution led to the invariant operative (theorems-in-action and concepts-in-action) of the subject, following the Theory of Conceptual Fields, by Vergnaud (1990). Each activity proposed contained elements that allowed the elevation of the level of geometric thinking of students, based on the theory of van Hiele (1957). After analyzing the data collected, it was noticeable the contribution of the subject for the acquisition of knowledge of the subject, pedagogical knowledge of the subject and curricular knowledge, according to the classification of Shulman (1986). Another object of analysis was the change in beliefs about Geometry, on oneself and on the learning of Geometry, arising from the development of didactic-pedagogical competences.

Key-words: Education in Mathematics, Learning Geometry, Training teachers who teach mathematics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE FOTOGRAFIAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE DIAGRAMAS

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Vivemos num mundo tridimensional, fato que nos obriga a conhecer profundamente o nosso espaço de vivência e estabelecer relações adequadas de orientação, deslocamento, forma e grandeza. No entanto, uma parcela significativa da nossa população se vê privada de exercer sua plena cidadania por não possuir as habilidades geométricas necessárias para interagir com o meio, habilidades que deveriam ser apenas o seguimento natural daquelas adquiridas nas brincadeiras infantis de utilização do próprio corpo e de observação da natureza.

Este trabalho de pesquisa analisa a formação geométrica dos pedagogos – professores dos anos iniciais do ensino fundamental, do curso de Pedagogia da UnB, justamente os profissionais sobre quem recairão as responsabilidades de fazer a extensão das habilidades desenvolvidas pelos jogos infantis para o ambiente escolar. A análise é circunscrita às situações de apreensão de conceitos geométricos, durante a imersão de dimensão participante do pesquisador como professor da disciplina Educação Matemática II.

A motivação para este tema nasceu anteriormente quando, na condição de aluno na mesma disciplina de Educação Matemática II, observei a relutância de alguns graduandos em aceitar a Geometria como um ramo importante do conhecimento.

Na introdução desta dissertação apresento a trajetória de formação matemática deste pesquisador, o envolvimento com a Educação Matemática e a relevância do tema. Essa parte também apresenta o problema-foco da investigação e os objetivos a alcançar.

No primeiro capítulo, estabeleço uma fundamentação teórica[1] apoiada em alguns autores centrais. Sobre os obstáculos à apreensão dos conceitos científicos, busco as idéias de Bachelard (1938) e Brosseau (1983). Para o processo de formação de conceitos, sirvo-me da Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud (1990). Para definir os níveis de pensamento geométrico recorro à teoria de van Hiele (1957). Com relação aos saberes docentes, destaco fundamentalmente a classificação de Shulman (1986). O estudo das crenças está baseado em Gómez

[1] As datas deste parágrafo referem-se à primeira publicação das teorias mencionadas.

Chacón (1997) e em Vila e Callejo (2001). Em cada tema, outros autores ampliam o conjunto de referências que subsidiam este trabalho.

No segundo capítulo apresento os sujeitos da pesquisa, defino a seqüência de atividades propostas na disciplina Educação Matemática II.

No terceiro capítulo identifico e analiso as crenças iniciais dos graduandos sobre a Geometria, sobre a própria capacidade de aprender Geometria e sobre a aprendizagem da Geometria, coletadas antes do início da disciplina.

No quarto capítulo descrevo em pormenores as onze atividades desenvolvidas na disciplina e analiso os resultados com base na produção dos graduandos, tomando como referência os objetivos da pesquisa.

No quinto capítulo novamente identifico e analiso as crenças dos graduandos sobre a Geometria, sobre a própria capacidade de aprender Geometria e sobre a aprendizagem da Geometria, mas agora numa instância mais avançada, exatamente ao final do curso, procurando estabelecer as modificações ocorridas.

No sexto capítulo avalio as contribuições da disciplina para a formação geométrica dos graduandos e os resultados verificados nas suas primeiras intervenções pedagógicas na Geometria.

Encerrando, apresento outras considerações sobre os resultados alcançados, a importância da pesquisa à minha formação continuada e as perspectivas que surgem após este trabalho.

Todas as citações utilizadas no texto da dissertação que se referem aos graduandos estão destacadas com a fonte em *itálico* e respeitam as respostas tais como foram dadas.

INTRODUÇÃO

A Matemática na vida do pesquisador iniciante

Rememorando, fui iniciado na Matemática muito cedo. A preocupação central de meus pais era a possibilidade de que eu tivesse dificuldades de aprendizagem, por ter nascido prematuro de sete meses. Na mentalidade de meu pai, jovem oficial do Exército, trabalhar com os números era uma excelente estratégia para o desenvolvimento cognitivo, resquícios de sua formação militar com forte apelo matemático, na Academia Militar das Agulhas Negras. Assim, a partir do momento que demonstrei compreender os rótulos das latas dos alimentos, fui cercado por "carroções", aquelas infindáveis operações aritméticas com frações, entre chaves, colchetes e parênteses.

Na seqüência dos anos escolares, não tive dificuldades com a Matemática. Meu pai mantinha-me sob vigilância e estava sempre em cena, embora seus métodos, por vezes, fossem dolorosos. Lembro-me de uma explicação sua sobre números relativos, quando ganhei muitos "cascudos" ao inverter o sinal no cálculo das operações "menos vezes menos" ou "mais vezes menos". Seu esforço concentrava-se em manter-me sempre um passo adiante do conteúdo escolar.

Ao contrário do que se poderia esperar, a excessiva carga e rigor paterno não me fizeram criar aversão à Matemática, e tampouco ao meu pai como educador. Na verdade, sentia-me constantemente estimulado a resolver os desafios matemáticos e lógicos, repudiando as respostas gratuitas, característica que carrego até hoje. Cada desafio vencido contribuiu para uma maior estima pela disciplina.

Curiosamente, apesar de seu incentivo pessoal e de dedicadas professoras no ensino primário da época, adaptei a resolução do algoritmo da operação de subtração, procurando mentalmente o número que, somado ao algarismo da linha de baixo, igualava-se ao número da linha de cima, adicionando ao número seguinte o "vai um" quando a soma fosse maior ou igual a dez. Não posso, apenas de memória, especificar as razões de minha dificuldade em desagrupar o minuendo, ou seja, pegar "emprestado" como todos faziam. O fato é que meu método funcionava e bastou-me a vida toda.

Infelizmente, perdi meu pai aos treze anos de idade. Perdi seu apoio e, de certa forma, perdi a obrigatoriedade de avançar. O relaxamento natural que se seguiu, após anos de estudos “forçados”, impediu-me o aprofundamento na Matemática. Permaneceu, entretanto, a facilidade em aprendê-la. Não tive problemas nos anos subseqüentes.

A Matemática continuou presente em minha vida, porém de forma mais utilitária. No curso técnico de eletrotécnica, equivalente ao ensino médio e, posteriormente, no curso de formação de oficiais da reserva do Exército, as disciplinas Topografia e Correntes Elétricas, por exemplo, exigiram muito domínio de conteúdos específicos, tais como relações trigonométricas no triângulo, conceitos geométricos e números complexos.

Passada essa fase, minha formação superior direcionou-se para Administração de Empresas, na época um curso relativamente recente no Brasil, com muitas teorias e pouco aprofundamento em termos de conhecimentos matemáticos. Uma ou outra disciplina, em particular a Pesquisa Operacional, envolvia cálculos mais aprofundados. No campo profissional, ingressei no oficialato da Marinha e desenvolvi uma longa carreira, direcionada apenas a aspectos contábeis e financeiros.

Foram muitos os anos afastados da Matemática Escolar e/ou Acadêmica. O conhecimento pronto gradativamente transformou-se em conhecimento latente. Até a fórmula para resolução de equações de segundo grau ficou esquecida. Qualquer demanda sempre implicava em consulta aos livros didáticos. Para quem sempre gostou de Matemática, era uma sensação desagradável.

Em 1995, surgiu uma oportunidade de reencontro: o curso noturno de Licenciatura de Matemática, da Fundação Universidade de Rio Grande. Foi uma sensação estimulante voltar ao ambiente universitário. E também, rever os conteúdos matemáticos com maior maturidade, as relações e conexões ficaram mais perceptíveis.

Ao me ausentar do País por motivos profissionais, interrompi os estudos por três anos e retomei-os na Universidade de Brasília, após alguns ajustes de crédito. Para minha imensa satisfação, concluí o curso em 2004. A Matemática estava definitivamente de volta à minha vida, resgatando um afastamento de quase duas décadas e um esforço concentrado de formação nos meus primeiros anos de vida.

A Educação Matemática na vida do pesquisador iniciante

Na minha trajetória de vida, a atividade docente sempre esteve presente, e de forma significativa. Diversas vezes na carreira militar defrontei-me com as funções de instrutor, que desempenhei com muita satisfação. A opção pela licenciatura em Matemática, portanto, sustentou-se numa inclinação natural.

Mas há um fosso entre gostar de ensinar e saber ensinar. A estrutura do curso iniciado em Rio Grande e concluído em Brasília foi, em essência, alicerçada na matemática pura, no conhecimento científico, na aquisição de um saber formal, necessário, mas não suficiente para garantir a aprendizagem dos meus futuros alunos. O desenvolvimento de conceitos didáticos ficou a cargo de poucas disciplinas de magistério. No meu caso, especificamente, essas disciplinas ficaram muito espaçadas ao longo do curso, iniciado em Rio Grande e concluído em Brasília. As circunstâncias não me possibilitaram estabelecer conexões entre teorias cognitivas e processos de aprendizagem.

A insuficiência do meu conhecimento pedagógico ficou evidente durante o estágio de regência em 2004. Ao ministrar as aulas de Geometria, perguntas inquietavam-me: por que alguns alunos não conseguem aprender? Estou utilizando o melhor caminho para a aprendizagem desta área de conhecimento? As dúvidas não se relacionavam ao conteúdo, mas à mediação. Era uma turma de Educação de Jovens e Adultos de uma escola da rede pública do Distrito Federal, alunos há muito afastados da escola e em busca do sonhado diploma.

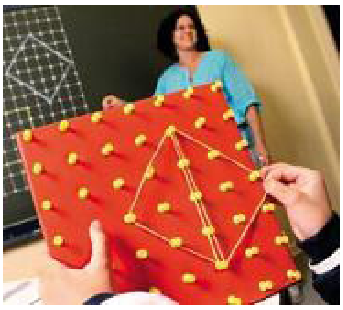
A rapidez com que o professor da turma encarregou-me da Geometria foi um forte indicador de que, no âmbito escolar, não haveria respostas para as minhas dúvidas, fato que não demorei a comprovar empiricamente. A mediação, inevitavelmente, ocorreu baseada em dois pilares que estavam à mão, juntamente com as oportunas intervenções do meu orientador do estágio: o fascínio pela Matemática e os procedimentos observados por anos a fio nas carteiras.

Pensando numa maneira de melhor atingir os propósitos da unidade de ensino, utilizei o geoplano[2] (fotografia 1). Foi uma decisão intuitiva, sem base

---

[2] Tabuleiro confeccionado em madeira, com pregos ou pinos salientes, distribuídos segundo uma certa forma que, por intermédio de elásticos coloridos, possibilita a representação de formas

teórica. O desconhecimento da ampla potencialidade educacional desse instrumento era inquietante. A constatação de meu despreparo para resolver questões dessa natureza levou-me a procurar a Faculdade de Educação da UnB para, de alguma forma, complementar minha formação pedagógica.



Fotografia 1 – Geoplano (foto publicada na revista Nova Escola, de agosto/2005, página 40)

Na disciplina Educação Matemática I do curso de Pedagogia, encontrei condições para iniciar o preenchimento das lacunas verificadas na minha formação. Juntamente com as futuras pedagogas, compartilhei teorias cognitivas e procedimentos metodológicos de ensino do campo da Didática da Matemática. Passei a ter uma visão mais crítica sobre o modo como fui ensinado e passei a refletir sobre o meu próprio modo de ensinar, na busca da aprendizagem efetiva. Para o desenvolvimento de capacidades pedagógicas, fui incentivado, ao longo da disciplina, a observar sujeitos em processo de resolução de problemas e tentar identificar os esquemas mentais empregados em ação, valorizando erros e acertos.

No decorrer das atividades da disciplina subseqüente, Educação Matemática II, observei dificuldades e escutei reclamações dos graduandos de Pedagogia a respeito de determinados conceitos matemáticos, em especial os conceitos geométricos. Alguns manifestaram claramente aversão pela Geometria.

Esse fato suscitou algumas reflexões, considerando-se que a disciplina de Educação Matemática II propunha justamente uma Geometria fundamentada no binômio teoria-prática, como suporte à ação educativa do futuro professor. No entanto, para alguns alunos do curso de Pedagogia, a proposta revelava-se

---

geométricas básicas. O geoplano, do inglês “geoboard” ou do francês “geoplan”, foi criado em 1961 pelo professor Caleb Gattegno, do Institute of Education, London University, com o intuito de facilitar a compreensão, visualização e estímulo à criatividade dos alunos.

insuficiente para superar os obstáculos e traumas constituídos na fase escolar.

No estágio de regência, apesar da formação matemática, senti dificuldades na mediação. Como seria a mediação desses alunos que, além de não possuírem formação específica, ainda consideravam a Geometria de forma negativa?

Nesse mesmo período, iniciei a docência superior em faculdades de Administração, lecionando disciplinas da área da Matemática. De modo similar, ouvi reclamações e constatei deficiências formativas e temores que impediam os alunos de visualizar soluções geométricas que requeriam apenas noções básicas de paralelismo. Alguns conceitos geométricos do ensino fundamental revelaram-se desconhecidos pelos alunos, o que me levou a supor que o conteúdo por alguma razão foi abandonado na educação básica. Tal hipótese foi confirmada pela tese de Pavanello (1989).

Pode haver um ciclo vicioso nessa realidade. O professor, enquanto aluno, não aprendeu porque o conteúdo lhe foi negado. E como não aprendeu, não tem como ensinar. Sob seus cuidados estarão futuros cidadãos, já destinados a engrossar as estatísticas acerca do desconhecimento geométrico da população. E dentre esses, alguns prováveis professores do ensino fundamental.

> Um professor que enquanto aluno não aprendeu geometria, certamente desenvolverá uma atitude negativa em relação a ela e se sentirá inseguro para abordá-la em sala de aula. Tal fato, com certeza, terá repercussão negativa no processo ensino/aprendizagem a que serão submetidas as crianças que estão começando um trabalho mais sistematizado com a geometria (PAVANELLO, 2004, p. 129).

Maior que o desafio em lidar com alunos de nível superior sem base adequada em conceitos geométricos foi a gravidade da situação constatada. Na condição de educador matemático em constituição, estas perguntas começaram a pulsar em minha mente: quantos alunos encontram-se nessa mesma situação, em relação à Geometria? Que razões determinam o descarte da Geometria pelo professor de ensino fundamental? A dificuldade em aprender um conceito geométrico está na sua própria natureza, ou deve-se a um processo de ensino/aprendizagem inadequado? Que dificuldades se apresentam na formação do pedagogo, no processo de conceitualização geométrica? É possível exercer a cidadania autônoma e crítica, desconhecendo os conceitos geométricos que fazem parte de nosso cotidiano?

A contextualização do problema

A experiência que venho adquirindo como professor de educação superior não me possibilitou responder as perguntas que formulei. Isso se deve possivelmente à complexidade de tais questões, que tratam da base da educação matemática. Considerei necessária uma investigação orientada, que possibilitasse uma análise mais aprofundada e desenvolvida com método. Por essa razão, candidatei-me ao Programa de Mestrado em Educação da UnB, com foco de interesse no eixo Educação Matemática.

Pavanello (1989), numa visão histórica sobre o abandono do ensino de Geometria, descreve que na década de 70

> a orientação de trabalhar a geometria sob o enfoque das transformações, assunto não dominado pela grande maioria dos professores secundários, acaba por fazer com que muitos deles deixem de ensinar geometria sob qualquer abordagem, passando a trabalhar predominantemente a álgebra – mesmo porque, como a Matemática Moderna fora introduzida através desse conteúdo, enfatizara sua importância. A Lei 5692/71, por sua vez, facilita este procedimento ao permitir que cada professor adote seu próprio programa "de acordo com as necessidades da clientela" (p. 164 -165).

Para Fainguelernt (1999), umas das causas da Geometria estar ausente de sala de aula é

> durante muito tempo, o ensino de Geometria não se renovou e com isso perdeu o vigor. Na maioria das escolas brasileiras é ensinada a Geometria Euclidiana cujos conceitos constituem o grande obstáculo epistemológico que deve ser superado por professores e alunos e que se relaciona fundamentalmente com a organização do raciocínio e com a construção de argumentações lógicas. No entanto, os alunos são induzidos a uma atuação passiva, limitando-se, no máximo, a serem simples copiadores; as figuras, por exemplo, são apresentadas e descritas como resultados de observação alheia (p. 14).

Ainda, segundo Pavanello (1989),

> a constatação desta situação e as dificuldades enfrentadas por professores de vários cursos (não só de matemática, ou de disciplinas afins) em trabalhar com alunos, cujo conhecimento de geometria é (quase) nulo, mesmo a nível de representação, tem tornado o assunto polêmico, gerando preocupações quanto à necessidade desse ensino – e de como desenvolvê-lo (p. 166).

A partir da constatação de que o abandono do ensino de Geometria tem raízes históricas, associadas à História da Ciência e da Educação, o problema que estabeleci como foco de investigação foi: *quais são as dificuldades presentes na apreensão de conceitos geométricos, em situações propostas aos futuros* *professores dos anos iniciais do ensino fundamental*?

Os objetivos

A partir da problematização estabelecida, formulei como objetivo geral: *analisar as produções dos graduandos em situação de apreensão de conceitos geométricos, no contexto de formação inicial de professor dos anos iniciais do ensino fundamental.*

Para delimitar o campo de análise da produção dos alunos, formulei também os seguintes objetivos específicos:

- Identificar a natureza dos obstáculos presentes na apreensão de conceitos geométricos, em situações propostas.
- Analisar as estratégias cognitivas mobilizadas pelos graduandos nas situações propostas.
- Identificar indícios do nível de compreensão geométrica dos graduandos, em situações propostas.
- Identificar indícios de desenvolvimento do nível de compreensão geométrica dos graduandos na sucessão de situações propostas.
- Analisar como se constitui a formação dos graduandos no conhecimento da Geometria, no conhecimento pedagógico da Geometria e no conhecimento curricular da Geometria.
- Identificar as crenças sobre o conhecimento geométrico e manifestações de modificação dessas crenças.

Os objetivos formulados envolvem questões conceituais e metodológicas, que serão tratadas, respectivamente, nos capítulos 1 e 2.

Capítulo 1:
REFERENCIAL TEÓRICO

O sujeito desta pesquisa é o futuro professor dos anos iniciais do ensino fundamental, que vai ensinar Geometria. O foco está colocado sobre possíveis dificuldades à apreensão dos conceitos geométricos, manifestados no contexto da formação inicial. Essa abordagem introdutória remete a algumas questões de fundo conceitual, associadas aos objetivos específicos formulados.

As dificuldades à apreensão dos conceitos geométricos podem estar associadas a obstáculos presentes no processo de ensino-aprendizagem. De que natureza podem ser os obstáculos? Fazem parte naturalmente do processo e devem ser tratados como tal ou são nocivos e devem ser superados? Como identificá-los? Para responder essas questões, vou recorrer à teoria de Bachelard (1996) e, mais especificamente no campo da Educação Matemática, à teoria de Brosseau (1983), discutida por Igliori (1999).

Identificado o papel dos obstáculos, a questão que agora se coloca é como deve ser proposta a situação didática para que ocorra a formação de conceitos geométricos? Em que condição ocorre o processo de formação de conceitos? Serão de grande valia os elementos da Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud (1990), comentada por Pais (2002), que propõe repensar as condições da aprendizagem conceitual, e a interação entre conceitos espontâneos e científicos, proposta na teoria de Vigotsky (1998).

A formação de conceitos geométricos depende também do nível de pensamento geométrico do aluno. Não é objetivo deste trabalho avaliar a capacidade geométrica dos graduandos mas, nesse sentido, será relevante obter indícios do seu nível de pensamento geométrico para construir determinados conceitos. A teoria de van Hiele (1957), apresentada por Crowley (1994), dá suporte não só a essa questão, como também propõe uma metodologia que favorece a progressão de nível.

A formação de conceitos geométricos é um dos objetivos da disciplina Educação Matemática II, assim como a ação pedagógica sobre o conteúdo da Geometria. Os graduandos trazem consigo um histórico considerável de suas experiências anteriores com a Geometria, os seus saberes acumulados na escola.

Na fusão que ocorrerá na disciplina, os conhecimentos resultantes serão compatíveis com as responsabilidades profissionais esperadas? A teoria de Shulman (1986), adotada por vários autores, entre eles Curi (2005), identifica três vertentes no conhecimento do professor, que devem formar a sua base.

Permeando todo o processo de aprendizagem geométrica estarão presentes as crenças, justamente constituídas nas experiências anteriores e que poderão ter uma influência de peso no processo de aprendizagem geométrica. Gómez Chacón (1997) e Vila e Callejo (2006) analisam a formação das crenças e seu caráter subjetivo.

O percurso teórico até aqui delineado pode ser esquematizado conforme o diagrama 1.1. Em função da exposição linear das questões conceituais encadeadas que lhe deram origem, em alguns momentos, sob certos aspectos, ele até pode ser entendido como um fluxograma, no qual cada operação depende da anterior. Contudo, no contexto da apreensão de conceitos geométricos, em sala de aula, os conceitos teóricos apresentados interagiram, num processo dinâmico.

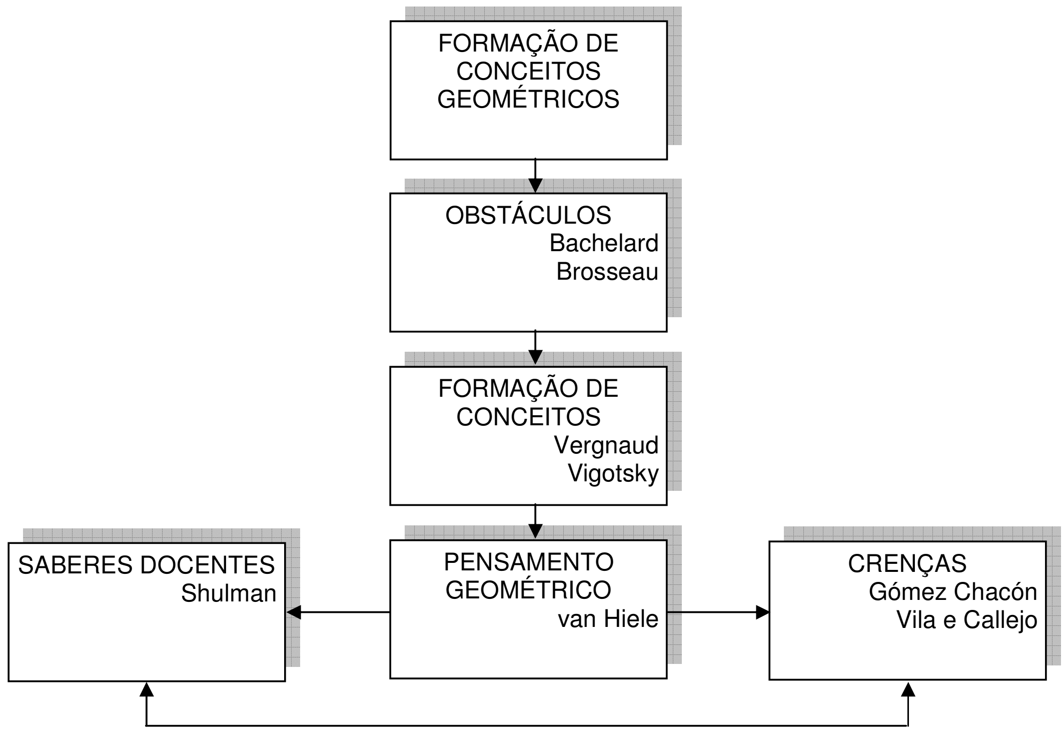


Diagrama 1.1 – Referencial teórico.

1.1 Os obstáculos

Na aprendizagem de um novo conceito, o aluno mobiliza conhecimentos anteriores, sendo nessa integração entre o novo e o antigo que possíveis obstáculos à aprendizagem podem se manifestar (PAIS, 2002).

Não há conotação negativa na interposição de um obstáculo durante a aprendizagem de um conceito. Esse é o pensamento do filósofo francês Gaston de Bachelard, pioneiro da noção de obstáculo como constituinte do pensamento científico. Para Bachelard (1996), "é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado" (p. 17).

Analisando a obra do autor, Igliori (1999) esclarece

> que é em termos de obstáculos que se assenta o conhecimento científico, que é no ato mesmo de conhecer que aparecem, por uma necessidade funcional, as perturbações e as lentidões, nas quais se mostram as causas de estagnação e de inércia do pensamento, as quais ele denomina obstáculos epistemológicos (p. 98).

Esse aspecto natural da ocorrência de obstáculos na construção do conhecimento científico é afirmado por Bachelard (1996, *apud* PAIS, 2002):

> Os *primeiros obstáculos* são aqueles provocados pelas primeiras experiências, quando estas são realizadas ainda sem maiores reflexões e sem qualquer crítica. O impacto superficial da primeira impressão, impregnado pela sensibilidade do corpo, pode ofuscar a razão na busca de maior clareza das idéias envolvidas (p. 47, grifo do autor).

Pinto (2000), ao discorrer sobre o erro como estratégia didática, analisa a interferência do conhecimento anterior no processo de ensino-aprendizagem:

> Um obstáculo se caracteriza por ser reproduzível (por ocorrer em situações semelhantes) e por resistir à mudança. No entanto, sua própria superação faz parte do processo de conhecer. Nesse sentido, um conhecimento anterior não é, para o professor, um suporte para a incorporação de um novo conhecimento: ele é, também, um obstáculo que deve ser superado (p. 53-54).

Há a necessidade de ocorrer uma ruptura epistemológica com o conhecimento antigo, anulando a força contrária que se opõe a uma nova aprendizagem (PAIS, 2002).

No campo da Educação Matemática, Brosseau (1983, *apud* IGLIORI, 1999) distingue três tipos de obstáculos:

> Os de origem ontogênica, que são aqueles que se processam a partir de limitações de ordem do tipo neurofisiológicas entre outras, do sujeito, no momento de seu desenvolvimento; os de ordem didática que dependem

> somente das escolhas realizadas para um sistema educativo; e os de ordem epistemológica, que são aqueles dos quais não se pode nem se deve escapar, pois são constitutivos do conhecimento visado (p. 101).

Artigue (1990, *apud* IGLIORI, 1999), se posiciona numa busca de identificação de processos produtores de obstáculos em Matemática. Cita alguns exemplos como: a generalização abusiva, quando um conhecimento historicamente revela-se gerador de obstáculos; ou ainda, a regularização formal abusiva, quando o erro se situa em um registro específico.

1.2 A formação de conceitos

Na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996, *apud* PAIS, 2002), campo conceitual refere-se a um conjunto de situações que, para serem enfrentadas, requerem a assimilação de diversos conceitos. Um exemplo bem característico é o *campo conceitual das estruturas multiplicativas*, que comporta situações nas quais estão envolvidos os conceitos de multiplicação, divisão, taxa, proporcionalidade, função linear, função não-linear, dentre outros.

Há, portanto, uma correlação muito forte entre situação e conceito. Sob a influência de situações que vivencia na escola e na vida cotidiana, o sujeito realiza sucessivas adaptações, recorrendo a conhecimentos anteriores na produção do novo conhecimento (PAIS, 2002). Esse é o sentido da *apreensão de conceitos*: o sujeito cria o conhecimento, validado por uma situação.

Vergnaud (1996, *apud* PAIS, 2002), idealizador da Teoria dos Campos Conceituais, acentua a ligação estrita entre situação e conceito:

> Um conceito é uma tríade que envolve um conjunto de situações que dão sentido no conceito; um conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito e um conjunto de significantes que podem representar os conceitos e as situações que permitem aprendê-los (p. 57).

Ao ser confrontado com uma situação, o sujeito pode ou não dispor de competências para enfrentá-la, fato que será evidenciado pela sua conduta tanto mais ou tanto menos automatizada. Segundo Fávero (2005), a organização invariante da conduta para situações afins é um esquema.

Vergnaud (1990, *apud* FÁVERO, 2005) distingue quatro categorias de elementos de um esquema:

> - O objetivo [...];
> - As regras de ação, tomada de informação e controle [...];
> - Os invariantes operatórios, isto é, os conceitos-em-ato, que permitem retirar a informação e selecionar aquela pertinente, e os teoremas-em-ato, ou as proposições tidas como verdade na atividade, sobre as quais repousa a organização da ação [...];
> - As possibilidades de inferência, que são justamente a chave das adaptações em situação [...] (p.248).

Os invariantes operatórios, também denominados teoremas-em-ação e conceitos-em-ação, revelam a atitude do sujeito frente à situação a ser resolvida. Conforme Muniz (2003a), somente agindo sobre uma dada realidade o sujeito poderá mobilizar conceitos prévios, testá-los e reformulá-los, caso não se adaptem à situação. Por sua vez, a manipulação dos dados disponíveis depende de teoremas-em-ação internalizados e considerados válidos pelo sujeito.

As manifestações do sujeito frente à uma situação provocativa dão indicações que o conceito é algo em movimento, que está sendo testado e/ou reelaborado. Sem ação, não podemos presenciar o conceito.

Os conceitos geométricos revisitados pelos sujeitos desta pesquisa enquadram-se, na perspectiva de Vigotsky, na classificação de conceito científico, aqueles elaborados na escola, adquiridos por meio do ensino sistemático (REGO, 1995).

O papel da escola como instituição social é fundamental para disseminar o conceito científico. Para La Taille, Oliveira e Dantas (1992)

> O processo de ensino-aprendizagem que ocorre na escola propicia o acesso dos membros imaturos da cultura letrada ao conhecimento construído e acumulado pela ciência e a procedimentos metacognitivos, centrais ao próprio modo de articulação dos conceitos científicos (p. 33).

O processo de formação de conceitos é longo e complexo, exige abstração e capacidade de diferenciar. A aprendizagem de um conceito científico requer atividade mental dissociada do campo de visão (REGO, 1995).

O aspecto metacognitivo da apreensão dos conceitos científicos também é destacado por Fávero (2005)

> Como os conceitos científicos são formalizados a partir da explicação de regras lógicas de coordenação e subordinação constituindo o sistema hierárquico de inter-relações, quando se opera com eles, a atenção deve estar centrada no próprio ato pensar (p. 223).

No seu dia-a-dia, a criança manipula o material cultural do grupo sócio-cultural a que pertence. No contato com pessoas mais experientes, dentre eles o professor, ela observa, experimenta, imita, pergunta e obtém respostas, o que lhe permite, mediada pela palavra, construir uma série de conhecimentos sobre o mundo, os conceitos espontâneos (REGO, 1994).

A manipulação do acervo cultural, no entanto, exige atenção e concentração em procedimentos automatizados, não sendo necessário pensar sobre essa atividade. Dessa forma, os conceitos construídos no decorrer da experiência prática, os conceitos espontâneos na perspectiva de Vigotsky, não necessitam obedecer a determinadas regras lógicas (FÁVERO, 2005).

Sobre o ato de pensar, Vigotsky (2004) afirma que a criança adquire consciência dos seus conceitos espontâneos muito mais tarde em relação à aquisição do conceito. Ela conhece determinado objeto, tem o conceito, mas tem dificuldade em defini-lo verbalmente. Como os conceitos espontâneos não se desenvolvem sem a ajuda dos adultos, a criança não adquire controle sobre eles.

Essa questão fundamenta a idéia de *zona de desenvolvimento proximal* de Vigotsky (1998), definida como

> A distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes (p.112).

A tomada de consciência, o controle exercido sobre os conceitos espontâneos prepara o terreno para o conceito científico. Para Vigotsky (2004), quando ocorre a generalização do conceito espontâneo, abre-se o caminho para o surgimento dos conceitos científicos:

> Embora os conceitos científicos e espontâneos se desenvolvam em direções opostas, os dois processos estão intimamente relacionados. É preciso que o desenvolvimento de um conceito espontâneo tenha alcançado um certo nível para que a criança possa absorver um conceito científico correlato (VIGOTSKY, 1998, p. 93-94).

Sobre a formação de conceitos geométricos, Nasser e Tinoco (2004) afirmam: “Aprender um conceito pela definição, como se fosse um fato, impossibilita o aluno de passar pelas diversas etapas da aquisição desse conceito, impedindo uma aprendizagem significativa” (p. 70).

Nesse sentido, há uma diferença significativa entre *o conceito*, caracterizado pela sua definição matemática, e *a imagem conceitual*, que é a percepção que o indivíduo tem do conceito, nas diversas etapas dos processos mentais de formação do conceito (NASSER, TINOCO, 2004).

A evolução das imagens conceituais está associada às regularidades percebidas, ou seja, “a conjunção de atributos que formam a estrutura do conceito geométrico” (NASSER, TINOCO, 2004, p. 70).

1.3 A aprendizagem geométrica

A aprendizagem geométrica e a sugestão de metodologias que promovam essa aprendizagem tem sido objeto de estudo em várias partes do mundo. Uma teoria que tem despertado bastante interesse é o modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico (CROWLEY, 1994):

> O modelo consiste em cinco níveis de compreensão. Os níveis, denominados “visualização”, “análise”, “dedução informal”, “dedução formal” e “rigor” [...], descrevem características do processo de pensamento. [...] o modelo afirma que o aluno move-se seqüencialmente a partir do nível inicial, ou básico (visualização), no qual o espaço é simplesmente observado [...], até o nível mais elevado (rigor), que diz respeito aos aspectos abstratos formais da dedução (p. 2).

No nível zero, *visualização*, os alunos apenas reconhecem formas geométricas. No nível um, *análise*, os alunos começam a perceber características individuais das figuras, mas não vêem inter-relações entre elas. No nível dois, *dedução informal*, as definições têm significado e os alunos são capazes de acompanhar demonstrações formais. No nível três, *dedução*, o aluno é capaz de construir demonstrações, inclusive perceber a possibilidade de desenvolvê-las de mais de uma maneira. Por fim, no nível quatro, *rigor*, a Geometria é vista no plano abstrato.

Originalmente, os níveis foram numerados de zero a quatro. No entanto, pesquisadores americanos atribuíram muita importância ao primeiro nível, uma vez que muitos alunos não o dominam ao iniciar o curso de Geometria. Por essa razão, os níveis foram numerados de um a cinco, sendo a forma mais utilizada para designá-los (NASSER, TINOCO, 2004).

O modelo prevê uma progressão ordenada e condiciona a passagem de um nível a outro mais ao ensino do que à maturidade. Como proposta metodológica, os van Hiele (CROWLEY, 1994)

> propuseram cinco fases seqüenciais de aprendizado: interrogação, orientação dirigida, explicação, orientação livre e integração. Afirmam que a

> instrução desenvolvida de acordo com essa seqüência promove a aquisição de cada um dos níveis (p. 6).

Na fase um, *interrogação/informação*, o professor fica sabendo quais os conhecimentos prévios dos alunos sobre o objeto de estudo, e os alunos ficam sabendo em que direção os estudos avançarão. Na fase dois, *orientação dirigida*, os alunos exploram o tópico de estudos através do material que o professor cuidadosamente ordenou em seqüência. Na fase três, *explicação*, os alunos expressam e trocam suas visões sobre as estruturas observadas, sendo mínimo o papel do professor, apenas orientando o uso de uma linguagem precisa e adequada. Na fase quatro, *orientação livre*, o aluno vê-se diante de tarefas mais complexas, que possam ser concluídas de diversas formas, e eles ganham experiência ao descobrir sua própria maneira de resolvê-las. Na fase cinco, *integração*, os alunos revêem e sumarizam o que aprenderam com o objetivo de formar uma visão geral da nova rede de objetos e relações.

Dessa forma, a teoria van Hiele (1957), além de possibilitar a compreensão da razão das dificuldades dos alunos, procura orientar a prática docente para elevação dos níveis de pensamento geométrico. Nesse sentido, algumas características do modelo orientam a tomada de decisão quanto ao ensino: os níveis são seqüenciais, o que significa que o aluno só vai perceber a inclusão de classes nos quadriláteros (nível de abstração) se distinguir as propriedades da cada uma (nível de análise); dentro de cada nível há uma linguagem específica, fato que determina que o termo *propriedade* não seja utilizado no nível de reconhecimento; em cada nível há conhecimentos intrínsecos que serão objetos de ensino no nível seguinte, tal como saber que é um *quadrado* mas não saber explicar o porquê; os níveis determinam uma combinação adequada entre o aluno e o conteúdo a ser ensinado, pois não há como ensinar dedução a quem apenas reconhece as figuras; e o avanço depende de preparação adequada, proporcionada por atividades específicas das fases seqüenciais de aprendizado (NASSER, TINOCO, 2004).

Para planejar a abordagem ideal, o professor precisa identificar o nível do aluno. Os pesquisadores Burger e Shaughnessy (1986, *apud* PURIFICAÇÃO e SOARES, 1999), utilizando essa teoria, estabeleceram indicadores para classificar os níveis, baseados nas estratégias dos alunos para situações propostas:

> **Nível 1 (visualização)**
> - uso de propriedades imprecisas, como comparar desenhos e identificar, caracterizar e classificar formas;

- usa como referência protótipos visuais para caracterizar formas;
- inclui atributos irrelevantes na identificação e descrição das formas, baseando-se no desenho da figura;
- não tem habilidade para conceber de uma variedade infinita de formas;
- faz classificações inconsistentes, isto é, classifica utilizando propriedades não utilizadas nas formas de classificação convencional;
- não tem habilidade para usar propriedades como condições necessárias para determinar formas;

Nível 2 (análise)

- compara formas explicitamente por meio de suas propriedades;
- não utiliza inclusões de classes entre tipos gerais de formas;
- classifica com base em um único atributo, como propriedade de lados, negligenciando ângulo, simetria;
- recita um rol de propriedades necessárias em vez de determinar propriedades suficientes;
- descreve tipos de formas por uso explícito de suas propriedades, preferencialmente usando nomes específicos;
- explicita rejeição às definições de livros a favor de caracterizações próprias;
- trata a geometria de forma empírica ao testar a validade de uma proposição
- explícita falta de compreensão da prova matemática;

Nível 3 (dedução informal)

- forma definições completas de tipos de formas;
- tem habilidade para modificar a definição e imediatamente aceita e usa definições de novos conceitos;
- explicita referências para definições;
- tem habilidade para aceitar formas equivalentes de definições;
- aceita ordenação lógica parcial entre tipos de formas; como inclusão de classes;
- tem habilidade para classificar formas de acordo com diferentes atributos matematicamente precisos;
- usa explicitamente frases com "se, então";
- tem habilidade para formar argumentos dedutivos informais corretos usando implicitamente tais formas lógicas como regras de cadeia (se p implica q e q implica r, então p implica r);

Nível 4 (dedução)

- clarifica perguntas ambíguas e reformulação da tarefa com linguagem correta;
- usa conjectura freqüentemente e tenta verificar dedutivelmente;
- confiança na prova como autoridade final decidindo a verdade de uma proposição matemática;
- compreende as regras dos elementos que compõem o discurso matemático, tais como, axioma, teorema, definições, prova;
- aceitação implícita dos postulados de geometria euclidiana (p. 4).

De acordo com Nasser e Tinoco (2004), os níveis não são estanques como aparentam:

> Na prática, também é comum encontrarmos alunos que mostram estratégias de raciocínio de mais de um nível, dependendo da tarefa que estão resolvendo. Baseados nessa evidência, alguns pesquisadores (Gutierrez, 1991) sugerem que os níveis de van Hiele são contínuos, no sentido de que o indivíduo pode começar a adquirir comportamentos de um nível mesmo que não tenha atingido completamente o nível imediatamente inferior (p. 82).

1.4. Os saberes docentes

Quando os alunos ingressam no ensino superior, trazem saberes sobre o que é ser professor de Matemática. Em toda sua vida escolar, tiveram diferentes professores da disciplina, alguns significativos pela competência de ensino, outros pelo domínio do conteúdo e deficiência didática. Esses saberes são frutos da experiência escolar e refletem o olhar pela perspectiva do aluno.

Lortie (1975, *apud* TARDIF, 2002), enfatiza que "os professores são trabalhadores que foram mergulhados em seu espaço de trabalho durante aproximadamente 16 anos (em torno de 15.000 horas), antes mesmo de começarem a trabalhar" (p. 261).

> O desafio, então, posto aos cursos de formação inicial, é colaborar no processo de passagem dos alunos de seu ver o professor como aluno a seu ver-se como professor, isto é, construir a sua identidade de professor. Para o que os saberes da experiência não bastam. (PIMENTA, 1998, p. 166)

Para construir a identidade de professor de Matemática, que tipos de conhecimentos são necessários? O professor dos anos iniciais do ensino fundamental deve possuir uma sólida formação matemática? Considerando-se o espaço onde atua, uma formação didático-pedagógica seria de melhor valia? Nas seções seguintes, procuro responder essas perguntas.

1.4.1 O saber matemático

O que distingue a Matemática de outros saberes, que a faz tão temida? Ponte (1992) considera que "o caráter preciso e formal dos argumentos matemáticos são os seus instrumentos de validação, ante a impossibilidade de confrontos com experiências. É, precisamente, a sua natureza formalizada que dificulta a sua aprendizagem" (p. 11).

Para Ponte (1992), podem-se distinguir quatro níveis de competências no saber matemático:

> - competências elementares, que implicam em memorização de conceitos e execução de procedimentos;
> - competências intermédias, que implicam na compreensão de teoremas e

> suas demonstrações, e na resolução de problemas que não exigem muita criatividade;
> - competências avançadas, que implicam na capacidade de formular problemas e conjecturas, de análise crítica e de modelagem matemática;
> - saberes de ordem geral ou meta-saberes, que implicam em conhecimento dos grandes domínios da Matemática e das suas inter-relações, e dos momentos determinantes de sua evolução (p.14).

No contexto de ensino-aprendizagem de Matemática, uma questão que se configura diz respeito ao saber do futuro professor de Matemática dos anos iniciais do ensino fundamental. Quão aprofundado deve ser o seu conhecimento matemático? Segundo Ponte (1992), "as investigações realizadas sobre este ponto mostram de um modo geral que os professores (especialmente os dos níveis mais elementares) sabem pouca Matemática" (p. 18).

Para fazer a distinção entre o matemático profissional e o professor da disciplina, é necessário estabelecer duas faces para o conhecimento matemático: a Matemática como ciência, cujo domínio profundo pelo matemático é essencial para a produção de novos conhecimentos, em processo rigorosamente lógico-dedutivo, e a Matemática como objeto de ensino, que inclui tanto os saberes produzidos pelos professores em sua ação pedagógica na sala de aula, quanto os resultados de pesquisas que se referem à aprendizagem e ao ensino escolar de conceitos matemáticos.

Colocadas nessa ordem, entretanto, surge uma idéia de subordinação e simplificação: a Matemática que se ensina é uma adaptação didática dos conceitos matemáticos. Negando essa ordenação, Moreira e David (2005) definem o que denominaram de Matemática Escolar: "conjunto dos saberes validados, associados especificamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar básica em Matemática" (p. 20). Para esses autores, a complexidade da Matemática Escolar reside na complexidade da própria prática educativa e não nos valores validados da Matemática Científica.

Em razão da complexidade didático-pedagógica da Matemática Escolar, o profundo conhecimento matemático por si só não é condição suficiente para ser professor. Outros saberes devem ser mobilizados para uma significativa prática pedagógica, que são discutidos na próxima seção.

1.4.2 Outros saberes

Silva (2004) afirma que Ponte e Muniz possuem idéias convergentes quanto aos saberes necessários aos professores de Matemática. Segundo a autora, esses pesquisadores destacam a importância da formação científico-cultural do professor, mas que isso só não bastaria. A esse componente científico-cultural do professor devem se associar os saberes profissionais, que são altamente vinculados às experiências ou às práticas profissionais. Não menos importantes são os saberes relativos à identidade pessoal e profissional do professor. Os pensamentos desses dois pesquisadores indicam que o professor de Matemática, para exercer a sua função docente, deve:

a) Ter conhecimento do conteúdo matemático a ser ensinado;
b) Manter uma boa relação com a Matemática;
c) Conhecer bem a proposta curricular e posicionar-se criticamente em relação a ela;
d) Conhecer o aluno e seus processos de aprendizagem;
e) Dominar técnicas e metodologias de ensino;
f) Conhecer o seu ambiente de trabalho;
g) Conhecer-se a si mesmo; e
h) Tornar-se um pesquisador de sua própria prática.

Embora um conhecimento vasto tenha sido relacionado, o pensamento de Ponte e Muniz encontra eco nas palavras de Tardif (2002). Para esse autor, “o professor ideal é alguém que deve conhecer sua matéria, sua disciplina e seu programa, além de possuir certos conhecimentos relativos às ciências da educação e à pedagogia e desenvolver um saber prático baseado em sua experiência cotidiana com os alunos” (p.39).

De forma mais classificatória, Shulman (1986, *apud* FIORENTINI, SOUZA JR. e MELO, 1998) distingue três categorias de conhecimento, que valorizam o saber do professor sobre aquilo que constitui o conteúdo do ensino e da aprendizagem: *conhecimento da matéria que ensina*, para que o professor tenha autonomia intelectual e possa agir de fato como mediador entre o conhecimento histórico e o escolar, *conhecimento pedagógico*, sobretudo relacionado à matéria, para articular o objeto de ensino/aprendizagem e os procedimentos didáticos, e *conhecimento curricular*, que compreende a organização e estruturação dos conhecimentos escolares e todo o tipo de material instrucional.

Na opinião de Shulman (1992, *apud* CURI, 2005) o conhecimento pedagógico da matéria é

> - uma forma de conhecimento característica dos professores que os distingue da maneira de pensar dos especialistas de uma disciplina;
> - um conjunto de conhecimentos e capacidades que caracteriza o professor como tal e que inclui aspectos de racionalidade técnica associados a capacidades de improvisação, julgamento, intuição;
> - um processo de raciocínio e de ação pedagógica que permite aos professores recorrer aos conhecimentos e compreensão requeridos para ensinar algo num dado contexto, para elaborar planos de ação, mas também para improvisar perante uma situação não prevista (p. 24-25).

Tardif (2002) também reforça o caráter incontornável da Pedagogia:

> A pedagogia é o conjunto de meios empregados pelo professor para atingir seus objetivos no âmbito das interações educativas com os alunos. Noutras palavras, do ponto de vista da análise do trabalho, a pedagogia é a "tecnologia" utilizada pelos professores em relação ao seu objeto de trabalho (os alunos), no processo de trabalho cotidiano, para obter um resultado (a socialização e a instrução) (p. 117).

Nesse sentido, a fala de Tardif (2002) parte do princípio de que o professor, ao escolher determinados procedimentos, está assumindo uma Pedagogia: "Assim como não existe trabalho sem técnica, também não existe processo de ensino-aprendizagem sem pedagogia [...] (p. 119).

A importância do conhecimento pedagógico da matéria, proposto por Shulman (1992) é reconhecida por outros autores. Imbernón (2006) afirma que: "A formação inicial deve fornecer as bases para poder construir um conhecimento pedagógico especializado" (p. 65).

Na mesma concepção, valorizando a interdependência que existe entre as disciplinas pedagógicas e as disciplinas específicas, Zimmermann e Bertani (2003) entendem

> que os cursos de formação de professores devem promover a "união" entre as disciplinas pedagógicas e as disciplinas científicas para que o futuro professor venha a entender, e possa também promover, a interação entre a pedagogia e o conteúdo científico (p. 45).

Fiorentini, Souza Jr. e Melo (1998) mencionam o trabalho de Britt-Mari Barth (1993), sendo uma das preocupações centrais dessa autora em relação à formação de professores diante do problema do saber, o desafio de conhecer as teorias implícitas da prática dos professores, elaboradas durante a experiência como educandos e que influenciam a prática pedagógica, e promover condições para que esses profissionais modifiquem suas concepções, posturas, crenças e ações na prática educativa.

Na próxima seção apresento as considerações de alguns autores sobre as crenças e suas influências no processo de ensino-aprendizagem.

1.5 As crenças

Durante o processo de apreensão de conceitos geométricos, alguns fatores poderão intervir, originados nas experiências vivenciadas pelo aluno. Ao longo da trajetória de sua escolaridade, ele vem mantendo contato com a Matemática, fato que tem proporcionado uma alimentação contínua de suas crenças sobre a disciplina e sobre seu próprio desempenho.

Para Vila e Callejo (2006), o termo *crença* não é muito utilizado na linguagem educativa, sendo empregadas outras palavras como *visão*, *concepção*, *pensamento* e outras.

Curi (2005) alerta para a polissemia dos termos *crença* e *concepção* nos trabalhos que analisou e a conseqüente necessidade de escolher uma definição para orientar as análises.

Por sua vez, Ponte (1994, *apud* GÓMEZ CHACÓN, 2003) "distingue crenças de concepções, situando as crenças em um domínio metacognitivo e as concepções em um *cognitivo*" (p. 62). No entanto, o mesmo autor admite a justaposição desses dois domínios (GÓMEZ CHACÓN, 2003).

Para evitar ambigüidade, neste trabalho adotarei somente o termo *crença* e a sua definição dada por Vila e Callejo (2006):

> As crenças são um tipo de conhecimento subjetivo referente a um conteúdo específico sobre o qual versam; têm um forte componente cognitivo, que predomina sobre o afetivo, e estão ligadas a situações. Embora tenham um alto grau de estabilidade, podem evoluir graças ao confronto com experiências que podem desestabilizá-las: as crenças vão sendo construídas e transformadas ao longo de toda a vida (p. 48-49).

Para Gómez Chacón (2003), "*as crenças* matemáticas são um dos componentes do conhecimento subjetivo implícito do indivíduo sobre a matemática, seu ensino e sua aprendizagem" (p. 20).

Vila e Callejo (2006) reforçam o caráter subjetivo da crença, por intermédio de um exemplo:

> Enquanto o teorema de Pitágoras é um *conhecimento* objetivo, pensar que o teorema de Pitágoras só é demonstrado de uma forma é uma *crença*, isto é, um conhecimento subjetivo, certamente arraigado no fato de não conhecer mais que uma demonstração (p. 46-47).

Considerando-se a influência das crenças na aprendizagem da Matemática, fruto das experiências anteriores, as crenças dos estudantes podem ser classificadas, segundo Mc Leod (1992, *apud* GÓMEZ CHACÓN, 2003), em termos de seu objeto: “crenças sobre a matemática (o objeto); sobre si mesmo; sobre o ensino da matemática e crenças sobre o contexto no qual a educação matemática acontece (contexto social)” (p. 20).

Na diferenciação proposta por Mc Leod, percebe-se um componente avaliativo por quem nutre as próprias crenças. Pehkonen e Törner (1996, *apud* VILA e CALLEJO, 2006) alertam: “As crenças podem ter um poderoso impacto na forma como os alunos aprendem e utilizam a matemática e, portanto, podem ser um obstáculo à aprendizagem” (p. 52).

O próximo capítulo apresenta a construção metodológica desta pesquisa, fundamentada na investigação de campo, objetivando alcançar os objetivos específicos propostos.

Capítulo 2:
METODOLOGIA

Neste capítulo apresento a concepção da pesquisa, os fundamentos pedagógicos da disciplina envolvida e o percurso metodológico percorrido.

2.1 Escolhas e justificativas

Dentre outros aspectos, o referencial teórico identifica e classifica obstáculos à compreensão de conceitos científicos: obstáculos ontogenéticos, ligados à maturidade do aluno; didáticos, resultantes da escolha estratégica do professor; epistemológicos, decorrentes da própria natureza do conceito matemático. Há ainda os obstáculos profissionais, mas apenas esses três serão objetos de interesse desta pesquisa.

No processo de ensino-aprendizagem de conceitos matemáticos, o grande desafio que se coloca ao professor é identificar os obstáculos que se manifestam, para compreender como o aluno aprende, adequando então suas ações educativas.

Nessa perspectiva, o termo *aluno* não pode apenas ser tomado na acepção do coletivo representativo da sala de aula. É justamente nesse espaço, pelas interações sociais produzidas, que emergem diferentes histórias de vida, fato que individualiza cada sujeito envolvido no processo.

Um aluno personifica um complexo de experiências com fatores sociais, individuais, culturais e históricos, que estão presentes e condicionam a sua forma de aprender, em especial no que se refere às suas experiências com o espaço e suas representações mentais associadas à construção conceitual. Isto equivale a dizer que cada um aprende a seu modo, de acordo com as suas necessidades e motivações.

Procurando destacar esta dimensão subjetiva do sujeito que aprende, González Rey propõe a Teoria da Subjetividade, numa perspectiva histórico-cultural, que remete à compreensão da aprendizagem escolar, não apenas como um processo do sujeito individual, mas como um processo de natureza social (GONZÁLEZ REY, 2006).

Segundo Tacca (2006), para aquele autor "a subjetividade é um sistema em contínuo desenvolvimento, articulando-se continuamente o passado, presente e experiências dos diferentes contextos de vida do sujeito, ampliando-se, diferenciando-se e assumindo um caráter de configuração que se atualiza, pois que é móvel e dinâmica" (p. 26). Sua idéia é que todos os impactos resultantes da vivência do sujeito em diferentes contextos sociais, vão moldando uma *configuração subjetiva* que determina o seu modo de agir e, consequentemente, de aprender. A aprendizagem, então, não é entendida apenas como resultado da capacidade intelectual do sujeito.

A constituição da configuração subjetiva acontece na tensão entre o individual e o social, com o sujeito produzindo *sentidos subjetivos* diante de cada situação vivida, o que faz com que sua subjetividade seja continuamente reconfigurada (TACCA, 2006).

Um estudo que busca os sentidos subjetivos deve se debruçar tanto no processo de produção do aluno, quanto nos significados de cada produção. Estes aspectos foram considerados para a concepção dos procedimentos metodológicos.

A especificidade dos objetivos formulados direcionaram esta pesquisa naturalmente para a adoção do paradigma qualitativo, uma vez que busca os sentidos das produções geométricas refletidas e desveladas pelos próprios alunos. Segundo González Rey (2002),

> a pesquisa qualitativa se debruça sobre o conhecimento de um objeto complexo: a subjetividade, cujos elementos estão implicados simultaneamente em diferentes processos constitutivos do todo, os quais mudam em face do contexto em que se expressa o sujeito concreto (p. 51).

Para captar o sentido subjetivo que os alunos manifestam frente a situações de aprendizagem, é necessário estar imerso nesse contexto, promovendo alternativas que os desafiem. A pesquisa participante oferece uma estrutura metodológica adequada, uma vez que o pesquisador se introduz no ambiente a ser estudado, buscando observá-lo e compreendê-lo (OLIVEIRA e OLIVEIRA, 2001).

Dentro desse formato de pesquisa, é necessário compreender a real dimensão do papel do pesquisador. Ao assumir uma postura de observador e participante ativo, deve colocar todas as ferramentas de que dispõe a serviço da causa com que está comprometido. Isto significa, além de procurar explicações para o fenômeno em estudo, favorecer a aquisição de conhecimento pelo grupo que está vivendo o processo (OLIVEIRA e OLIVEIRA, 2001).

Uma vez definido o paradigma como qualitativo e a participação ativa do pesquisador, foi necessário estabelecer um nível de participação que propiciasse tanto a obtenção dos dados pretendidos quanto a aprendizagem conceitual. A próxima seção descreve o contexto decidido para a realização da pesquisa.

2.2 Contexto

O curso de Pedagogia da UnB contempla quatro disciplinas sobre Educação Matemática, oferecidas alternadamente por professores doutores na área:

1) Educação Matemática I – números e operações, resolução de problemas;

2) Educação Matemática II – Geometria, medidas, números fracionários;

3) Educação Matemática III – números inteiros para as séries finais do ensino fundamental; e

4) Educação matemática IV – introdução às teorias sobre Educação Matemática.

A pesquisa foi realizada durante o desenvolvimento do conteúdo sobre Geometria, da disciplina Educação Matemática II, turma A, na Faculdade de Educação da UnB, ministrada diretamente por este pesquisador, sob supervisão do orientador, no primeiro semestre letivo de 2007.

A disciplina Educação Matemática II, optativa para o curso de Pedagogia e oferecida em duas turmas, seria ministrada pelo Professor Orientador deste trabalho, mas considerou-se que a proximidade entre orientando e orientador no *locus* da pesquisa afetaria os resultados. Por estar razão, optou-se pelo maior nível de participação do pesquisador, assumindo integralmente a disciplina.

Para evitar a assimetria na profundidade entre os conteúdos oferecidos para as duas turmas, adotou-se como prática para as aulas, primeiro a participação do pesquisador como observador na turma B, no turno da manhã, conduzida pelo Professor Orientador, e somente depois a sua efetiva condução independente na turma A, no turno da tarde.

Subsidiariamente, essa prática possibilitou ao pesquisador observar de antemão as manifestações dos graduandos nas diversas atividades, preparando-o para as reações da sua própria turma.

Participaram da pesquisa como sujeitos e colaboradores, 17 (dezessete) alunas do curso de Pedagogia da UnB, matriculadas na disciplina, na faixa etária de 18 a 23 anos e 2 (duas) professoras dos anos iniciais da rede pública, admitidas como alunas especiais na disciplina, na faixa etária de 35 anos. Em razão da diversidade de origens, a turma formada constituiu um grupo heterogêneo. Não foi intenção deste trabalhar classificar e identificar proximidades de perfil.

O objetivo de agrupar duas instâncias de formação - docentes em formação inicial e docentes em serviço - residiu na possibilidade de se estabelecer diferenças a respeito da apreensão dos conceitos geométricos, decorrentes da práxis pedagógica.

A próxima seção descreve os fundamentos pedagógicos que nortearam a disciplina Educação Matemática II.

2.3 Fundamentos pedagógicos

Tendo-se como referência as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Curso de Graduação em Pedagogia, licenciatura (Resolução CNE/CP nº 1, de 15 de maio de 2006), uma das múltiplas competências do pedagogo é ensinar Matemática aos primeiros anos do ensino fundamental. Esse encargo confere responsabilidades importantes a esse profissional, notadamente em termos de objetivos educacionais a serem alcançados com crianças e adultos em início de escolarização.

No mesmo plano de responsabilidades formativas, os órgãos de formação inicial do pedagogo devem, em síntese, promover a capacitação docente de seus graduandos.

No campo da Educação Matemática, particularmente com foco na Geometria, a disciplina Educação Matemática II, no primeiro semestre letivo de 2007, foi estruturada no sentido de aliar a teoria com a prática pedagógica. As disposições que a nortearam estão contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997), os quais consideram importante

> que a Matemática desempenhe, equilibrada e indissociavelmente, seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio dedutivo do aluno, na sua aplicação a problemas, situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas curriculares (p. 15).

No mesmo documento, os conceitos geométricos são considerados como

> parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, através deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive (p. 34)

A disciplina Educação Matemática II, considerando que o conhecimento matemático do professor deve ter um nível de aprofundamento adequado, procurou oferecer subsídios teórico-práticos para o desenvolvimento de uma metodologia de ensino da Geometria. Isso pode ser constatado em sua Ementa e Plano de Curso, dispostos em quadros no anexo A.

A proposta pedagógica alicerçou-se, prioritariamente, na resolução de situações-problema, inspiradas em temas de significado social, político e cultural para o próprio aluno. Trabalhar com situação-problema implica “estar mobilizando diferentes conteúdos matemáticos num mesmo espaço e de forma articulada” (MUNIZ, 2003b, p.3).

Em contrapartida, as alunas deveriam realizar as seguintes atividades:

- participação, por intermédio de leituras, discussões e ação sobre o processo de aprendizagem;

- elaboração e desenvolvimento de um projeto individual de intervenção junto a um educando escolhido;

- realização de um dossiê, contendo os registros das atividades realizadas e as reflexões empreendidas;

- criação, validação, confecção e divulgação de um jogo envolvendo conteúdo matemático tratado ao longo do curso.

Dentre as trinta aulas programadas, de duas horas cada, as quinze primeiras foram destinadas à parte de Geometria da disciplina e constituíram-se no principal espaço de realização da pesquisa. As quinze aulas restantes foram divididas entre os conteúdos de *medidas* e *frações*.

O quadro 2.3.1 estabelece as atividades que foram desenvolvidas em cada encontro sobre Geometria:

Quadro 2.3.1 – Desenvolvimento da disciplina Educação Matemática II (Geometria)

AULA	DATA	CONTEÚDOS
1	13/03	Apresentação do curso – contrato didático
2	15/03	Discussão sobre o conteúdo da Geometria – texto “Espaço e Forma”
3	20/03	Filme “Pato Donald no país da Matemágica”
4	22/03	**1ª atividade:** Localização: mapa do tesouro
5	27/03	**2ª atividade:** Geometria da tartaruga: lateralidade
6	29/03	**3ª atividade:** Reprodução de embalagens com redução
7	03/04	**4ª atividade:** Descoberta das figuras planas utilizadas
8	10/04	**5ª atividade:** Produção de figuras planas com canudos e mapas conceituais
9	12/04	**6ª atividade:** Planificação do cubo
10	17/04	**Continuação da 6ª atividade:** Planificação do cubo
11	19/04	**7ª atividade:** Tangram: composição e decomposição de figuras planas
12	24/04	**8ª atividade:** Brincando com malhas
13	26/04	**9ª atividade:** Construção de figuras planas no geoplano
14	08/05	**10ª atividade:** Noção de área a partir da malha quadriculada
15	10/05	**11ª atividade:** Descobrindo fórmulas de áreas com recorte e colagem

Na seção a seguir, descrevo o percurso metodológico que foi adotado na realização desta pesquisa.

2.4 Percurso metodológico

Na concepção desta pesquisa, o objetivo geral de *analisar as produções dos graduandos em situação de apreensão de conceitos geométricos,* foi estabelecido no sentido de possibilitar a identificação das *dificuldades presentes na apreensão de conceitos geométricos, em situações propostas aos futuros professores dos anos iniciais do ensino fundamental*, ou seja, o problema de investigação formulado.

Nesse confronto entre objetivo e problematização, há o pressuposto de que nas produções das alunas será possível identificar as dificuldades presentes na apreensão dos conceitos geométricos.

Uma questão que se configura então é que no contexto de apreensão de conceitos estabelecem-se relações entre o professor, os alunos e o saber, direcionadas para o ensino e a aprendizagem, que caracterizam uma situação didática. Na estrutura desse tripé pode haver um fluxo de influências, originário na própria natureza do saber matemático, determinando o comportamento dos outros integrantes (PAIS, 2002).

A noção de transposição didática contribui para moldar o conhecimento em algo a ser apreendido. Chevallard (1991, *apud* PAIS, 2002) estabelece que

> um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática (p. 19).

Nesse sentido, a contextualização do saber promovida pela situação-problema proposta pelo professor é de vital importância para o aluno estabelecer vínculos significativos entre o conhecimento e a realidade.

Uma outra questão que se configura, considerando-se que a disciplina está estruturada em situações-problema, é que nesse contexto o aluno poderá reagir e se expressar de diferentes formas. Para Muniz (2003b), “a resolução de situação-problema favorece um **trabalho ‘multimediatizado’** envolvendo as mais diferentes representações: corporal, gestual, manipulativa, gráfica, pictórica, simbólica escrita ou não” (p. 5, grifo do autor).

Em razão dessa diversidade de representações, a produção de sentidos dos alunos exigiu cuidados na percepção, uma capacidade dita *escuta sensível* por Barbier (2002):

> A escuta sensível apóia-se na empatia. O pesquisador deve saber sentir o universo afetivo, imaginário e cognitivo do outro para “compreender do interior” as atitudes e os comportamentos, o sistema de idéias, de valores, de símbolos e de mitos [...] (p. 94)

A dinâmica da disciplina Educação Matemática II foi estruturada no sentido de propiciar a materialização da produção dos alunos, a cada atividade desenvolvida. As produções, que ao final compuseram um dossiê, não tinham uma estrutura fechada e as alunas se expressaram livremente, relatando suas impressões e emitindo opiniões. As cópias desses registros, que se revelaram um farto e suficiente material, constituíram a base de dados de todo o processo de análise, na busca de evidências da presença de obstáculos à apreensão dos conceitos geométricos ou, ainda, estratégias cognitivas empregadas na resolução de situações-problema.

A apreensão do sentido dos textos impôs uma leitura em dois níveis de aprofundamento: a leitura do explícito, que Lüdke e André (1986) denominaram *conteúdo manifesto*, e a leitura do implícito, que os mesmos autores denominaram *conteúdo latente*. Isso implicou um esforço de valorizar e se colocar dentro da perspectiva do outro.

Em complemento aos registros nos dossiês, as manifestações dos sujeitos em sala de aula em processo de resolução de situação-problema foram lançadas no diário de campo.

Uma outra medida complementar tomada foi o cuidado de gravar as aulas em áudio, que permitiu a recuperação de dados não percebidos pelo pesquisador, enquanto absorto na condição de professor.

O processo de análise considerou a subjetividade presente na resolução de situações-problema. Para Muniz (2003b),

> a situação provoca a mobilização de conceitos e procedimentos matemáticos não pensados aprioristicamente pelo professor, como é feito na perspectiva de oferta de problemas. Isto pode trazer, de início, uma desestabilização ao professor que não pode, de partida, garantir a 100% quais conceitos e estratégias que os alunos irão mobilizar. Essa falta de certeza sobre o processo de construção de conhecimento que será instaurado é positivo no que se refere à necessidade do professor estar sempre em busca de novas compreensões sobre os processos de construção do conhecimento matemático (p. 3-4).

De acordo com González Rey (2002), um dos princípios metodológicos no qual se apóia a epistemologia qualitativa é:

> O *conhecimento é uma produção construtiva-interpretativa*, isto é, o conhecimento não é uma soma de fatos definidos por constatações imediatas do momento empírico. Seu caráter interpretativo é gerado pela necessidade de dar sentido a expressões do sujeito estudado, cuja significação para o problema objeto de estudo é só indireta e implícita (p. 31, grifo do autor).

Para a interpretação dos dados, não houve a necessidade de realizar entrevistas individuais formais. Seria até difícil estabelecer um horário, pois as alunas estavam sempre envolvidas em outras atribuições, principalmente as concluintes, sem tempo disponível. Eventualmente, para elucidar um ou outro aspecto dos registros, utilizei os momentos que antecederam as atividades, perguntando de maneira informal e lançando as informações colhidas no diário de campo.

Para a análise documental inicialmente idealizei, em conjunto com meu orientador, um sistema de categorias de análise, que associasse a natureza dos obstáculos percebidos com o tipo de conceito geométrico em construção, num contexto do sujeito em ação. Porém, as leituras recorrentes que realizei sobre os resultados das onze atividades propostas, revelaram dados diferenciados, que me indicaram a necessidade de fazer uma descrição completa de cada atividade e a análise local das produções manifestadas pelos sujeitos.

Nas atividades iniciais propostas, surgiram algumas crenças que motivaram a formulação de um objetivo específico. Sua identificação permitiria estabelecer o seu maior ou menor grau de influência como obstáculo, em que momento foram desestabilizadas e, de certa forma, modificadas.

Para Vila e Callejo (2006), as crenças incidem no comportamento dos alunos, ajudam a explicá-los e oferecem indícios de como modificá-los.

Pehkonen e Törner (1996, *apud* VILA e CALLEJO, 2006) acrescentam que a influência das crenças na conduta do aluno pode ser entendida como:

- um sistema regulador, que seleciona as situações de aprendizagem que está disposto a enfrentar;

- um indicador de aspectos não observáveis diretamente, tais como as experiências anteriores de ensino; e

- uma força inerte, que se contrapõe a mudanças de enfoque.

Para coletar as crenças dominantes, apliquei um questionário com 20 questões de completar frases (anexo B), adaptado da versão de Gómez Chacón (2003, p.166), nos dois momentos extremos do curso. Pela sua importância associada ao processo de apreensão dos conceitos geométricos, constituíram categorias de análise de dados.

Tomando por base a classificação das crenças proposta por Mc Leod (1992, *apud* GÓMEZ CHACÓN, 2003), estabeleci as seguintes categorias de análise: crenças sobre a Geometria, crenças sobre si próprio e crenças sobre a aprendizagem da Geometria.

A visão que o aluno tem do conhecimento geométrico, por exemplo, como um conjunto de fórmulas de aplicação imediata relacionado ao cálculo de áreas e volumes, pode influenciar a sua motivação para a aprendizagem de determinado conceito geométrico. Na categoria “crenças sobre a Geometria”, foram analisadas as conceituações pessoais sobre a Geometria.

Uma outra perspectiva de crença está associada à avaliação da própria capacidade de aprender Geometria. Uma avaliação depreciativa induz a uma desistência precoce, ao relaxamento dos sentidos que deveriam estar mobilizados na situação de aprendizagem. Considerações do tipo “é preciso ser inteligente para aprender Geometria” podem indicar ausência de autoconfiança. Dessa forma, na categoria “crenças sobre si próprio”, foram incluídos os autoconceitos, as manifestações de interesse pela Geometria e as explicações de sucesso ou fracasso na aprendizagem desse campo do conhecimento.

As crenças sobre a aprendizagem da Geometria estão relacionadas com a valorização pessoal sobre a disciplina e com o papel do professor na aprendizagem. Para identificar as barreiras de aprendizagem, a exemplo de Gómez Chacón (2003), foram coletadas dos questionários expressões que revelaram resposta à indagação: para você, o que significa aprender Geometria?

Ainda na categoria “crenças sobre a aprendizagem da Geometria”, foram incluídas as declarações sobre a metodologia de ensino empregada no curso, fundamentalmente acerca das opções didáticas do professor.

No próximo capítulo, descrevo e analiso as crenças manifestadas pelos sujeitos antes do início do curso de Geometria.

Capítulo 3

CRENÇAS ANTERIORES AO CURSO

No data de 20/03/2007, apliquei o questionário com 20 questões de completar frases (anexo B), relacionadas com a Geometria, buscando captar as opiniões das alunas antes do início do curso.

O questionário permitiu identificar as dificuldades de aprendizagem dos alunos, ocorridas no seu contato com a Geometria, durante a formação básica. A forma como as frases foram estruturadas, solicitou, após um momento de reflexão, o resgate de experiências anteriores para consignar as respostas. Dessa forma, nas respostas afloraram os conceitos pessoais, as impressões, os resquícios sobre o processo de ensino-aprendizagem da Geometria, ou seja, as crenças interiorizadas no sujeito.

Essas crenças iniciais, associadas às outras crenças observadas no decorrer das atividades propostas no curso, possibilitaram identificar possíveis obstáculos à aprendizagem.

3.1 Crenças sobre a Geometria

A primeira questão proposta foi "A Geometria é...". Essa frase solicitou uma definição pessoal, que revela como a Geometria foi apresentada e desenvolvida na formação das alunas.

No quadro 3.1.1, estão transcritas as respostas apresentadas.

Quadro 3.1.1 - Respostas das alunas sobre a definição de Geometria, antes do início do curso.

Alunas	A Geometria é...
JÚLIA	*Muito interessante e de difícil compreensão contínua*
SIMONE	*Interessante, algumas vezes*
MÍRIAM	*Uma coisa inútil q. só serve como curiosidade*
PRISCILA	*O estudo das formas*
VALÉRIA	*O estudo das formas*

ROSELI	*Um amontoado de formas diversas*
TELMA	*Um campo que estuda, dentre outros, as formas*
NARA	*O estudo das formas*
LAURA	*A matéria dos formatos e espaços*
CLÁUDIA	*O estudo das formas*
DANIELA	*Um estudo das formas matematicamente*
ANDRÉIA	*A matemática concreta*
OLGA	*Algo que está em toda parte*
HELENA	*Algo abstrato mas está em todo lugar*
FABIANA	*Uma coisa que nunca aprendi*
ISABEL	*Um pouco fácil, depende do professor*
GLÓRIA	*Um desafio para aprender/ensinar*
ELIETE	*Uma disciplina que não é muito difícil, mas necessita bastante atenção*

As respostas sobre a conceituação pessoal acerca da Geometria podem ser agrupadas segundo um único indicador de significado: "a Geometria é o estudo das formas".

Essa definição, de caráter cognitivo, é reducionista, pois exclui o aspecto dinâmico da Geometria, a sua abrangência sobre os deslocamentos, os movimentos, as proporções e, fundamentalmente, o próprio corpo como referencial de posicionamento. A simplicidade da definição revela o desconhecimento da amplitude dos conceitos geométricos. A menção da palavra "formas" sugere a preocupação primária em conhecer e rotular as figuras geométricas como preocupação primordial da Geometria.

O indicador observado é reforçado indiretamente pelas alunas OLGA e HELENA, ao afirmarem que a Geometria está em todo lugar. A aluna DANIELA acrescenta a preocupação matemática, uma associação ao cálculo e manuseio de fórmulas.

A rigor, nenhuma definição rompeu o caráter estático consensual que vigora sobre a Geometria, estabelecendo as diversas conexões entre os conceitos geométricos. Algumas respostas, também, não estabeleceram uma definição pessoal, apenas considerações de valor, que serão analisadas em outro contexto.

Uma tentativa de atribuir um caráter real à Geometria foi a resposta da aluna OLGA: *algo que está em toda parte*. A aluna ANDRÉIA reforçou: *a matemática* *concreta*. Essa característica de presença, de ser perceptível deveria reverter em favor de uma aprendizagem mais significativa. No entanto, as últimas respostas do quadro revelaram que o domínio da Geometria não depende de sua natureza, mas da estratégia metodológica.

3.2 Crenças sobre si próprio

No quadro 3.2.1, as respostas transcritas sobre "minhas capacidades em Geometria são..." referem-se ao autoconceito das alunas sobre sua retenção dos conhecimentos geométricos e o potencial para aprender Geometria.

Quadro 3.2.1 - Respostas das alunas sobre a capacidade em Geometria, antes do início do curso.

Alunas	Minhas capacidades em Geometria são...
JÚLIA	*Bastante satisfatórias, porém com limitações*
SIMONE	*Normais. Não tenho muito interesse mais*
MÍRIAM	*Medianas*
VALÉRIA	*Regulares*
DANIELA	*Básicas*
OLGA	*Boas*
ISABEL	*Boas. Dominei o que aprendi*
CLÁUDIA	*Limitadas*
PRISCILA	*Limitadas*
ROSELI	*Limitadas*
ELIETE	*Conteúdos mais simples*
TELMA	*Muito limitadas*
NARA	*Em apenas alguns conceitos*
ANDRÉIA	*Pequenas*
GLÓRIA	*Limitadíssimas*
FABIANA	*Precárias*
HELENA	*As que consegui desenvolver no colégio*
LAURA	*Um mistério bem escondido*

As respostas sobre a própria capacidade de aprender Geometria podem ser alocadas em três níveis, que se constituem em indicadores de crença:

- satisfatória
- limitada
- muito limitada

O maior ou menor potencial para aprender Geometria pode revelar intenções de ação futura, dentro de um intervalo que vai do desinteresse total ao esforço para adquirir o conhecimento.

Uma das questões do questionário dizia respeito à “minha motivação para fazer Geometria é...”. As respostas obtidas permitiram avaliar a intencionalidade e a relação entre a capacidade de aprender e a motivação para fazê-lo.

As respostas obtidas encontram-se no quadro 3.2.2:

Quadro 3.2.2 - Respostas das alunas sobre motivação para fazer Geometria, antes do início do curso.

Alunas	Minha motivação para fazer Geometria é...
SIMONE	*Nenhuma, por enquanto*
TELMA	*Muito pouca*
OLGA	*Pouca*
FABIANA	*Normal*
JÚLIA	*Mediana. Porque tenho interesse, mas pouco conhecimento e habilidade*
LAURA	*Neutra*
CLÁUDIA	*Grande*
ELIETE	*Grande, quando entendo*
GLÓRIA	*Aprender*
ANDRÉIA	*Aprender mais sobre a Geometria*
NARA	*Conseguir aprendê-la*
VALÉRIA	*Aprender mais*
ROSELI	*Mudar esta perspectiva p/meus alunos*
DANIELA	*Gostar de matemática*
ISABEL	*Aprender a raciocinar*
HELENA	*Ampliar a capacidade de raciocínio*
MÍRIAM	*Brincar com as formas*
PRISCILA	*Me formar*

O primeiro grupo de oito respostas refere-se ao aspecto da intensidade. A auto-avaliação negativa sobre a própria capacidade de aprender Geometria pode induzir uma atitude desinteressada para acompanhar o curso. De fato, a alunaTELMA, que afirmou que suas capacidades em Geometria "são muito limitadas", diz que sua motivação para fazer Geometria é "muito pouca".

O mesmo não acontece com as alunas SIMONE e OLGA, que, apesar da baixa motivação para fazer Geometria, atribuíram-se capacidade favorável ao aprendizado. Para a aluna SIMONE, a Geometria é "interessante, algumas vezes" e para a aluna OLGA, a Geometria é "algo que está em toda parte", respostas que não consideram o seu aprendizado como algo demeritório.

As respostas do segundo grupo, com incidência no aspecto motivacional, revela a necessidade de aprender. Em todos os casos, a auto-avaliação indicou capacidades limitadas em Geometria. Então, por outro lado, a auto-avaliação negativa pode induzir uma atitude mais interessada em relação ao curso, reforçada pela necessidade funcional de saber, vinculada ao futuro desempenho profissional. A aluna ROSELI, que já exerce a docência, encontra motivação na sua transformação, para que seus alunos tenham uma perspectiva diferente da sua.

Deve ser salientada a crença das alunas ISABEL e HELENA sobre a aplicabilidade da Geometria no desenvolvimento do raciocínio, possivelmente herança de um processo de aprendizagem baseado em demonstração de teoremas e postulados geométricos.

Além das manifestações de interesse pela Geometria, as explicações de sucesso ou fracasso também revelam as crenças sobre si próprio. As respostas à questão "eu acho difícil em Geometria..." ofereceram oportunidade para identificar aquilo que é considerado um obstáculo, que ainda não foi transposto.

As respostas estão transcritas no quadro 3.2.3:

Quadro 3.2.3 - Respostas das alunas sobre o que é difícil em Geometria, antes do início do curso.

Alunas	Eu acho difícil em Geometria...
OLGA	*Calcular e entender as fórmulas*
ISABEL	*Decorar as fórmulas*
ANDRÉIA	*As fórmulas*
PRISCILA	*Esquadro (utilizar). Cálculos*
DANIELA	*Decorar as fórmulas de ângulos e etc.*

ROSELI	*Calcular*
FABIANA	*Decorar as fórmulas*
CLÁUDIA	*A aplicação das fórmulas*
LAURA	*Ângulos e nomenclatura*
VALÉRIA	*Nomenclatura*
GLÓRIA	*Nomes das figuras*
TELMA	*Lembrar o nome das diferentes formas geométricas*
JÚLIA	*Associar a fórmula à forma respectiva, além de saber exatamente qual é para qual fórmula*
NARA	*Cálculos com o círculo*
MÍRIAM	*Imaginar as figuras 3-D*
HELENA	*Quando se mistura com álgebra*
SIMONE	*Relacionar com algo mais prático*
ELIETE	*Exercícios melhor elaborados*

Com maior freqüência, a dificuldade está relacionada às fórmulas da Geometria. Nesse caso, a Geometria está sendo vista como um ramo prático da Matemática, de aplicação direta de esquemas prontos. A necessidade de decorar fórmulas acentua o desconhecimento e a não participação das alunas na dedução das fórmulas como parte integrante da construção do conhecimento.

Em menor freqüência, a dificuldade foi explicitada na terminologia das formas geométricas, na sua memorização. Não há referência à conceituação dos entes geométricos e suas conexões, que serviria de base para uma classificação mais intuitiva e adequada, sem a necessidade de decorá-la.

A resposta de MÍRIAM revelou a sua dificuldade em fazer a transposição de objetos planificados para a sua verdadeira dimensão tridimensional.

A maioria das respostas apresentadas confirma a definição generalizada e simplificada da Geometria como *o estudo das formas*.

3.3 Crenças sobre a aprendizagem

Por fim, o aprendizado da Geometria depende, dentre outros fatores, do desempenho do professor. No quadro 3.3.1, a resposta à questão "poderia aprender mais Geometria se...", expressa o pensamento crítico sobre a metodologia a qual as alunas vêm sendo submetidas e revela a concepção de cada uma sobre como a Geometria deve ser ensinada.

Quadro 3.3.1 - Respostas das alunas sobre aprender mais Geometria, antes do início do curso.

Alunas	Poderia aprender mais Geometria se...
ROSELI	*Visse mais sentido nela*
SIMONE	*Tivesse assuntos que interessem de verdade*
VALÉRIA	*Fosse algo "palpável"*
DANIELA	*Fosse mais significativo para mim*
PRISCILA	*Fosse mais dinâmica*
ANDRÉIA	*Utilizar o cotidiano*
LAURA	*Fosse mais divertido*
NARA	*As aulas fossem mais lúdicas*
MÍRIAM	*Se ela fosse tratada diferente na escola*
ISABEL	*Não utilizasse fórmulas*
JÚLIA	*Estudasse as fórmulas e suas aplicações na prática*
OLGA	*Tivesse mais tempo e vivência*
ELIETE	*Os professores utilizassem mais recursos visuais*
TELMA	*Meus professores tivessem me incentivado mais*
GLÓRIA	*Começar do "be-a-bá"*
FABIANA	*Começasse tudo de novo*
HELENA	*Tivesse uma melhor visão espacial*
CLÁUDIA	*Me dedicasse mais*

As respostas sugerem dois indicadores de significado:

1) Aprende-se mais Geometria se o seu conteúdo for associado a elementos significativos para o aluno;
2) Aprende-se mais Geometria se o processo de ensino tiver uma base dinâmica.

Os indicadores evidenciam uma crítica marcante à metodologia até então experimentada pelas alunas. O tópico Geometria ensinado na escola é vazio de significado e exposto de forma maçante, o conhecimento justificado por si mesmo. A resposta da aluna CLÁUDIA indicou que ela atribui para si a responsabilidade de aprender, à despeito de como o assunto foi exposto até então.

Na iminência de iniciarem o curso, quando revisitarão antigos conceitos geométricos sob o enfoque da docência, trazem crenças bem arraigadas sobre o papel do professor de Geometria.

O quadro 3.3.2 explicita essas crenças:

Quadro 3..3.2 - Respostas das alunas sobre o bom professor de Geometria, antes do início do curso.

Alunas	Um bom professor de Geometria deveria ...
ROSELI	*Aproximá-la do dia a dia*
DANIELA	*Nos mostrar as propriedades da matéria a partir do cotidiano*
TELMA	*Relacioná-la mais com a vida dos alunos*
GLÓRIA	*Contextualizar*
SIMONE	*Explicar da maneira prática e fácil*
VALÉRIA	*Mostrar de forma mais prática*
LAURA	*Ser bem prático e paciente*
ELIETE	*Ser mais dinâmico*
CLÁUDIA	*Ser dinâmico e paciente*
PRISCILA	*Ser criativo*
OLGA	*Dar aulas mais divertidas*
ISABEL	*Trabalhar com material concreto*
MÍRIAM	*Trabalhar c/coisas concretas*
FABIANA	*Trabalhar c/material concreto*
ANDRÉIA	*Utilizar material concreto*
NARA	*Usar coisas concretas*
JÚLIA	*Fazer as relações entre os objetos geométricos*
HELENA	*Pedir aos alunos que desenhem*

As respostas desse último quadro, na sua maioria, cotejam as respostas do quadro anterior. Sobre a utilização de material concreto, é preciso alguma cautela e planejar bem a sua utilização. As manipulações físicas devem contribuir para as representações mentais e não inibi-las. Nesse sentido Spinillo e Magina (2004) dizem que

> o material concreto não é o único e nem o mais importante recurso na compreensão matemática, como usualmente se supõe. Não se deseja dizer com isso que tal recurso deva ser abolido da sala de aula, mas que seu uso

> seja analisado de forma crítica, avaliando-se sua efetiva contribuição para a compreensão matemática (p.11).

Retornando às crenças, também não deve ser desconsiderada a própria natureza da Geometria a influenciar a sua aprendizagem, repartindo a responsabilidade com o professor nos sucessos e insucessos. O quadro 3.3.3, por intermédio da pergunta "Quando escuto dizer que a Geometria é excelente eu...", expõe essa valorização pessoal sobre a Geometria.

Quadro 3.3.3 - Respostas das alunas quando escutam a Geometria é excelente, antes do início do curso.

Alunas	Quando escuto dizer que a Geometria é excelente eu...
ANDRÉIA	*Concordo*
PRISCILA	*Concordo*
ELIETE	*Concordo*
VALÉRIA	*Concordo*
HELENA	*Concordo, mas o ensino na escola precisa melhorar*
NARA	*Concordo até um ponto*
DANIELA	*Consigo acreditar*
SIMONE	*Não falo nada*
FABIANA	*Discordo*
LAURA	*Fico espantada*
OLGA	*Me surpreendo*
CLÁUDIA	*Acho engraçado*
TELMA	*Não consigo compreender o porquê*
GLÓRIA	*Admiro quem diz*
ROSELI	*Sinto inveja de quem o diz*
ISABEL	*Penso em ensinar meus alunos*
MÍRIAM	*Acho q. a pessoa quis dizer q. a geometria é "útil", pelo menos era, na Antiguidade*
JÚLIA	*Acho que o emissor da frase deve saber tudo sobre geometria e acha o resultado de todas as fórmulas*

De forma geral, as alunas que concordaram com o valor da Geometria demonstraram necessidade em aprendê-la. As alunas discordantes possuem motivação que varia entre os graus "nenhum" a "grande" motivação.

No próximo capítulo descrevo as onze atividades propostas e analiso a produção das alunas, sob a luz do referencial teórico, na busca dos objetivos específicos.

Capítulo 4
CONSTRUÇÃO DOS CONCEITOS GEOMÉTRICOS

Neste capítulo descrevo as atividades desenvolvidas durante a disciplina Educação Matemática II para a construção de conceitos geométricos, analiso a produção das alunas e sugiro algumas atividades complementares a partir dos obstáculos observados.

4.1 1ª ATIVIDADE: "LOCALIZAÇÃO: MAPA DO TESOURO"

Essa atividade teve como proposta didática um desenvolvimento em duas etapas, com fundamentos distintos: na primeira, houve a movimentação dos sujeitos para esconder o tesouro, desavisados em relação a ter atenção ao deslocamento e a pontos de referência, com vistas à elaboração de um mapa; na segunda, a movimentação foi consciente da necessidade de descrição e representação posterior da localização do tesouro escondido.

Iniciada a atividade, as alunas foram divididas em quatro grupos. Cada grupo providenciou um "amarrado" de bombons e o escondeu nas imediações da sala de aula. Ao regressarem, receberam a tarefa de desenhar o mapa do tesouro escondido em papel quadriculado, com a proibição de utilizar palavras ou setas indicativas, sendo permitido apenas referências para que outro grupo, a partir do mapa, descobrisse o local do tesouro.

Como os grupos não tinham sido prevenidos, essa tarefa os obrigou a se projetar no espaço percorrido e, pela memória visual, reconhecer referenciais adequados e suas formas definidoras, existentes ao longo do caminho. O grande desafio foi estabelecer proporções adequadas entre o real e o registro, de forma que as informações essenciais fossem transpostas para o papel, em escala adequada, e permitissem o futuro reconhecimento. Nesse sentido, o papel quadriculado demonstrou ser de grande valia. Por tratar-se de uma tarefa de grupo, exigiu a busca de um consenso, uma vez que os integrantes possuíam percepções distintas de localização e distância, de acordo com cada histórico de vida.

Em seguida, os mapas foram trocados entre os grupos e iniciou-se a caça aos tesouros, para validar os mapas produzidos.

Na seqüência da atividade, os grupos providenciaram novos tesouros e os esconderam nos arredores da sala de aula, sabendo de antemão que iriam elaborar um novo mapa. Na volta, houve o sorteio de quatro tarefas, com diferentes possibilidades de representação no mapa: 1) Utilizar referenciais desenhados, a exemplo da primeira etapa; 2) Utilizar apenas setas; 3) Utilizar somente as palavras *direita*, *esquerda*, *para frente* e o número de passos; e 4) Utilizar os pontos cardeais (norte, sul, sudeste, etc.) e o número de passos.

Apesar da prevenção sobre estar atento às referências e às distâncias aproximadas, as tarefas 2, 3 e 4, mais restritivas, exigiram, além das anteriores, novas competências dos integrantes dos grupos. A impossibilidade de usar referenciais obrigou-os a imprimir maior precisão às informações autorizadas. Adicionalmente, foi necessária a familiaridade com os pontos geográficos e a conversão das distâncias estimadas em número de passos.

Concluindo a atividade, os mapas novamente foram trocados para a procura dos tesouros escondidos.

A atividade de caça ao tesouro foi planejada com o propósito de oferecer às alunas um exemplo de situação didática vinculada às unidades “Localização de pessoas ou objetos no espaço, com base em diferentes pontos de referência e algumas indicações de posição”, “Descrição, interpretação e representação de um objeto no espaço, de diferentes pontos de vista”, “Movimentação de pessoas ou objetos no espaço, com base em diferentes pontos de referência e algumas indicações de direção e sentido”, “Utilização de malhas ou redes para representar, no plano, a posição de uma pessoa ou objeto”, “Descrição da localização e movimentação de pessoas ou objetos no espaço, usando sua própria terminologia”, “Descrição, interpretação e representação da movimentação de uma pessoa no espaço e construção de itinerários”, “Dimensionamento de espaços, percebendo relações de tamanho e forma”, “Interpretação e representação de posição e de movimentação no espaço a partir da análise de maquetes, esboços, croquis e itinerários”, “Observação de formas geométricas presentes em elementos naturais e nos objetos criados pelo homem e de suas características: arredondadas ou não, simétricas ou não, etc.” e “Percepção de elementos geométricos nas formas da natureza e nas criações artísticas", previstas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL,1997).

A proposta pedagógica foi alicerçada na ação efetiva sobre o meio, extrapolando-se os limites físicos da sala de aula, como instrumento de construção dos conceitos geométricos.

A experiência concreta, que transitou do nível sensorial para o nível simbólico, solicitou a mobilização de diversos conceitos geométricos: espaço, forma, lateralidade, sentido, medida, distância, proporcionalidade. Dessa forma, permitiu reflexões acerca das dificuldades de orientação e deslocamento, quando se parte da representação mental para estabelecer uma representação formal, ou situar-se no espaço a partir da representação formal de outro sujeito. Essas competências são socialmente solicitadas em nosso dia-a-dia, na forma de informações de endereço e itinerários e de localização, tanto no espaço urbano quanto no espaço rural.

4.2 RESULTADOS DA 1ª ATIVIDADE "LOCALIZAÇÃO: MAPA DO TESOURO"

Desenhar o mapa de memória é uma atividade que exige a habilidade de se transportar para o espaço ausente e visualizar mentalmente itinerários e referências. Para quem nunca viveu essa experiência, ou não tem o hábito de realizá-la, a tarefa é um grande desafio cognitivo. Essa foi justamente a impressão inicial da aluna MÍRIAM

> *Quando descobrimos que teríamos de desenhar o mapa do nosso "tesouro", a animação deu lugar ao desespero. Me peguei pensando: "essa é a coisa mais difícil que vou ter de fazer na minha vida!".*

A aluna, em sua exclamação, revelou o ineditismo da tarefa proposta e lhe atribuiu o maior grau de dificuldade possível, apenas confrontando-a com as competências que julgava possuir. A situação lhe propôs um obstáculo epistemológico a superar, cuja dificuldade era inerente ao próprio conhecimento que se desejava apropriar: a representação do espaço.

A dificuldade foi ainda aumentada pela impossibilidade de indicações na língua materna ou qualquer sinalização. A precisão do mapa ficou dependente da exatidão dos elementos pictóricos representados, em termos de posicionamento e forma. A aluna DANIELA percebeu essa necessidade

> *Foi interessante notar que ao fazer uma representação gráfica para achar o tesouro foi extremamente necessário situar o espaço que estamos nas figuras geométricas que o compõe. Ao fazer um mapa sem a utilização das setas, por exemplo, a precisão das formas no nosso espaço físico foi fundamental.*

Nesse sentido, a aluna NARA considerou insuficiente o número de informações disponíveis e permitidas

> *Foi difícil construir o mapa usando apenas o que percebemos no ambiente e foi guardado de memória. O primeiro momento sem "dicas" foi quase impossível fazer o mapa.*

Outro fator considerado complicador foi a divulgação *a posteriori* da tarefa de elaboração do mapa

> *O desafio foi grande, pois como não sabíamos que deveríamos construir o mapa, não observamos o caminho com detalhes, e como não podíamos usar palavras, nem setas... (ROSELI).*
> *O primeiro mapa a ser desenhado pelo grupo foi mais trabalhoso, tendo em vista a surpresa em ter que desenhar uma região sem o aviso prévio, o qual faria com que o grupo ficasse atento aos detalhes da trajetória de esconder o tesouro. O segundo mapa desenhado contou com o nosso olhar atento às características do trajeto, de maneira que as dúvidas estiveram apenas em torno de qual seria a melhor forma de representar (JÚLIA).*

Os comentários revelaram que observar com ou sem aviso prévio são consideradas situações diferentes. Relembrar detalhes exigiu maior esforço ainda que houvesse familiaridade com o local.

A atividade de elaborar um mapa de memória requer que se recorde a região de interesse a ser representada como um todo, visualize-se seus limites e se atribua mentalmente uma escala de redução apropriada, de modo que todas as informações necessárias não excedam ou subutilizem as dimensões da folha de papel. A aluna DANIELA relatou essa preocupação de seu grupo

> *No começo da atividade do mapa, nosso grupo foi representando o espaço que estávamos sem pensar na proporcionalidade, nossa colega fez um quadrado pequenininho para representar a sala que estávamos, falei: "faça maior porque senão os corredores, escadas e outras referências ficarão muito pequenos, dificultando a localização do outro grupo".*

As proporções também foram objeto de preocupação de LAURA

> *Tivemos dificuldades também em relação às proporções. Surgiram questões ao longo do desenho, tais como: se a sala tem 4 quadradinhos, quantos terão o jardim?*

Do relato das alunas, percebi que a questão da proporcionalidade foi outro obstáculo epistemológico a ser superado na tarefa proposta. Com a proibição de indicações de medidas das formas geométricas ou das distâncias percorridas, a representação das dimensões aparentes no papel deveria guardar conformidade com as dimensões reais, para permitir a inteligibilidade do mapa. A tarefa ficou ainda mais complexa porque a proporcionalidade foi pensada na comparação entre medidas sem valor conhecido.

Associada à proporcionalidade, houve também a questão da organização espacial do mapa para representar um espaço real em relação ao próprio corpo, tal como a fixação do ponto de partida. A aluna MÍRIAM expôs essa dificuldade: *Foram três tentativas frustradas de colocar a sala de aula (ponto de partida) num lugar adequado no papel, para que o resto do mapa coubesse nele.*

Esse problema ocorreu em razão da elaboração linear do mapa, quando se procurou seguir fielmente o itinerário do ponto inicial até o local do tesouro. Quando a habilidade de visão espacial, a habilidade de se projetar no espaço ausente for tal que permita visualizar a região de forma integrada, única, com contornos bem definidos, as posições relativas entre o ponto de partida e o ponto de chegada serão facilmente identificadas e possíveis de serem representadas de forma independente no mapa, assim como outros elementos significantes.

A aluna-professora GLÓRIA teve uma dificuldade adicional quando da elaboração do mapa, fundada na responsabilidade docente de transmitir informações corretas: *Uma dificuldade que encontrei ao iniciar a atividade foi o "medo" de errar. Fiquei apreensiva de desenhar e ao final nem eu mesma entender o que fiz.*

Para qualquer um de nós, a dificuldade em seguir um mapa elaborado por outra pessoa depende, inicialmente, da qualidade das informações. Na situação-problema colocada, a ausência de grandezas expressas reforçou a relação de dependência entre legibilidade e proporcionalidade

> *No mapa é muito difícil retratar – e compreender as distâncias reais, pois não trabalhamos com escalas e nada semelhante que facilitasse a busca nesse sentido (LAURA).*
> *Acho que o desenho ficou desproporcional, mas tudo bem, ainda deu para entender o que significava o espaço representado no papel com a realidade da faculdade (DANIELA).*

Para a compreensão inicial do mapa é necessário colocar-se na perspectiva de quem o elaborou. Algumas alunas passaram por essa dificuldade

> *O primeiro momento sem "dicas", achar o tesouro com o mapa dos outros foi mais complicado ainda (NARA).*

> *Houve certa dificuldade de perceber a visão do outro sobre a localização do tesouro (TELMA).*
> *Com o mapa que deram para nós a única dificuldade foi a de "ler" o mapa. Identificar o que era cada coisa, pois os referenciais na faculdade de educação não são tão característicos, ainda mais quando não se pode colocar nenhuma palavra escrita (DANIELA).*

Se o mapa está bem feito, no sentido de conter uma representação condizente com a realidade, a dificuldade então recairá sobre a capacidade de utilizá-lo. Para que um mapa seja útil, é preciso que ele seja orientado, ou seja, colocado em correspondência com as referências reais. Algumas alunas demonstraram conhecer o processo

> *A principal dificuldade encontrada foi compreender qual o lado certo do mapa, se estávamos olhando-o na direção certa. Depois de nos situarmos ficou mais fácil, pois os desenhos que se encontravam no mapa possuíam a característica do local (CLÁUDIA).*
> *Para entender o mapa, nós fomos girando o papel de acordo com o lugar em que estávamos, para descobrir que direção tomar (MÍRIAM).*

A atividade de identificação de referências e orientação do mapa foi auxiliada pela vivência adquirida na confecção de seus próprios mapas, relativos à mesma região de procura percorrida.

Os mapas elaborados com traçado livre fogem ao padrão de exatidão ao qual estamos acostumados e causam dificuldades de interpretação. As propagandas de lançamento de imóveis nos classificados dos jornais de domingo, as orientações das estações de metrô tipo "você está aqui", assim como os painéis de localização da Universidade de Brasília (UnB), espalhados pelo *campus*, são exemplos de informações que requerem pouco esforço interpretativo.

É essencial que o mapa não omita informações importantes. Um dos grupos expôs uma reclamação nesse sentido

> *O mapa estava bem legal, embora nada indicasse que deveríamos subir as escadas (ROSELI).*
> *O primeiro mapa foi o mais difícil decodificar porque a representação do ambiente do subsolo não estava desenhado (JÚLIA).*

As alunas se referiram a este mapa no qual, segundo o entendimento, houve mudança de nível sem a devida indicação:

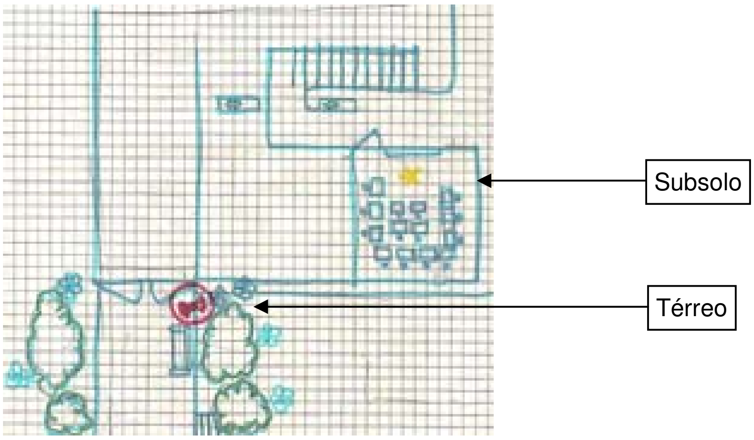


Figura 4.2.1 – Mapa com referências sem indicação de mudança de nível.

Além de sintetizar as características marcantes do terreno, o mapa deve dar indicações de mudança de nível. Essa é uma deficiência conceptual dos mapas tipo planta baixa, pois a perspectiva é tomada por um olhar visto de cima. A aluna LAURA apontou essa dificuldade: *como indicamos sem palavras que estamos no subsolo, e não no térreo?*

A representação de nível, nessa perspectiva, fica inteiramente dependente de detalhes adicionais que estabeleçam uma correspondência com o nível no qual se encontram. O mapa sobre o qual houve reclamações, apresentou referências que possibilitariam a distinção entre níveis, e isso foi percebido pelas alunas que o interpretaram

> *Concluímos que não haveria motivos para eles haverem desenhado os bancos lá de cima, se nós não precisássemos subir (ROSELI).*
> *Porém, estava claro que se tratava da Pracinha da FE, em razão de dois bancos e árvores coloridas no mapa (JÚLIA).*

Um dos grupos encontrou uma solução para indicar a mudança de nível:

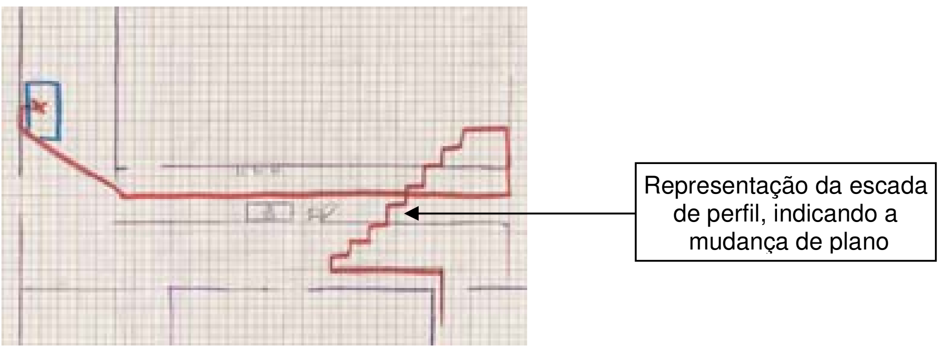


Figura 4.2.2 – Mapa com referências com indicação de mudança de nível.

De certa forma, o percurso sinalizado pela linha vermelha burlou a proibição de utilizar setas, mas a escada em perfil foi uma estratégia eficaz de representação.

Assim como há informações essenciais à legibilidade do mapa, há informações irrelevantes, que devem ser omitidas. Um mapa será mais efetivo se não contiver elementos supérfluos:

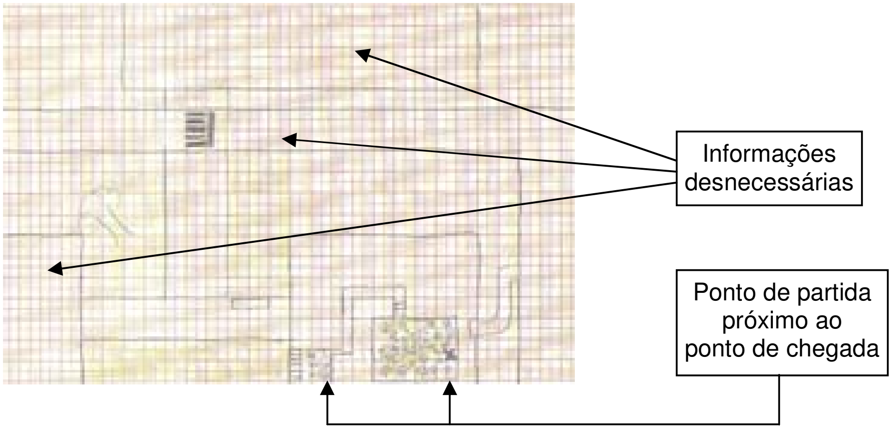


Figura 4.2.3 – Mapa com excesso de referências.

Sobre esse mapa, uma aluna do grupo que o recebeu comentou

> *Continha um erro: o "X" do "tesouro" estava marcado em outro lado do recinto. Enquanto eu procurava no lugar marcado no mapa, minha colega encontrou os bombons quase por acidente, no mesmo jardim, mas em outra parede (MÍRIAM).*

A preocupação em colocar inúmeros detalhes provocou desatenção no registro da localização precisa do tesouro.

De uma maneira geral, na primeira parte da atividade, apesar das dificuldades de iniciais de interpretação, os grupos localizaram os tesouros

> *No mapa em que desenhamos, senti um pouco de dificuldade quanto às proporções do mapa, mas conseguimos demonstrar com clareza o esconderijo, pois o grupo que pegou nosso mapa achou com facilidade o tesouro. O mapa que recebemos, estava muito bem desenhado e orientado. Achamos com facilidade o tesouro (FABIANA).*
> *No geral, os mapas foram bastante esclarecedores, com detalhes de fácil localização (PRISCILA).*
> *Para encontrar o tesouro foi muito fácil por conta de uma representação da mesa que fica no andar de cima. Uma vez de frente para ela só precisamos desvendar que o local do tesouro, que parecia uma porta, era uma outra mesa (LAURA).*
> *Nosso grupo não teve dificuldades nem para interpretar os mapas recebidos, nem para fazer os mapas (ISABEL).*

Na segunda parte da atividade, quando outros elementos gráficos de representação foram escolhidos, ficou evidente a indissociabilidade entre orientação e deslocamento. É preciso conjugar direção e distância para resolver problemas de localização.

Nesse sentido, o grupo que escolheu a representação por setas reconheceu a insuficiência de se contar somente com informações de direção:

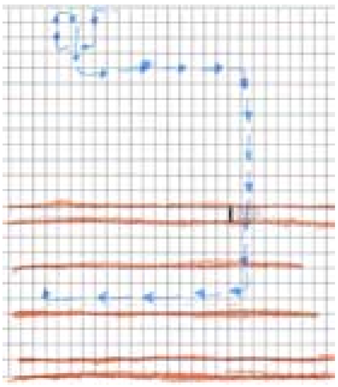


Figura 4.2.4 – Mapa com setas.

> *O meu grupo optou pelo mapa de setas. A maior dificuldade que tivemos na construção foi em como demonstrar o local que o bombom estava, pois não podíamos desenhar corredores, prédios, etc. Para a gente que desenhou, o mapa estava claro, mas o grupo que pegou nosso mapa, não conseguiu achar o tesouro, ele só foi achado, depois que nós demos a orientação (FABIANA).*
> *Meu grupo escolheu representar com setas e foi muito complicado, principalmente para representar as distâncias. A seta indica a direção, se de repente apontar para virar a esquerda como uma pessoa entenderá que foi no exato ponto a virada, e não antes ou depois? Tentamos resolver este problema representando corredores, assim entenderiam que não se vira no 1º corredor nem no 3º, mas no 2º. Também sentimos falta de representar os três grandes blocos que delimitavam a área de caça ao tesouro. Por fim desenhamos uma faixa de segurança para indicar a FE 5, mas que foi compreendida como "escada" pelo grupo que procurava o tesouro (LAURA).*

As informações de direção do mapa foram consistentes, contendo inclusive a mudança de nível logo no início do trajeto, representada pela sobreposição de setas em espiral. De certa forma, comparando-se com o real, há proporcionalidade nos segmentos do itinerário, mas o grupo responsável se ressentiu de uma maior precisão.

Na situação-problema de representar por palavras e nº de passos ficou patente a necessidade de padronização da unidade de medida. O grupo apresentou este mapa:

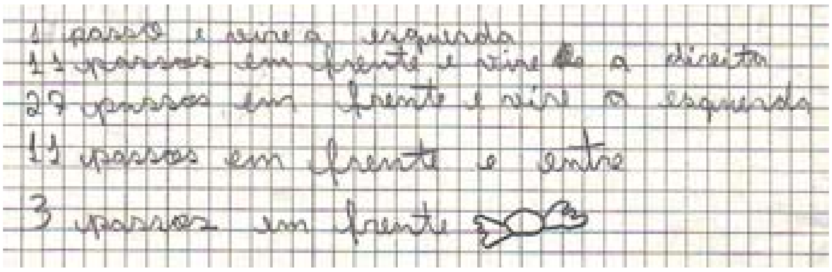


Figura 4.2.5 – Mapa com palavras.

> *O segundo mapa que fizemos foi bem mais fácil: tivemos de escrever número de passos e direções (MÍRIAM).*
> *Nosso grupo ficou com o método de utilizar as palavras para localização do nosso tesouro. Tanto para o grupo que seguiu nossas orientações, tanto para nós que representamos, foi fácil a tarefa (DANIELA).*
> *O mapa que pegamos era com palavras: direita, esquerda, em frente, x passos. Até que foi fácil de achar o tesouro, mas tivemos algumas dificuldades em relação ao número de passos. O grupo que desenhou o mapa contou passos gigantes e nós, que recebemos os mapas, contamos passos normais, por isso, nunca os passos que dávamos nos levavam ao local que deveríamos chegar, sempre ficávamos no meio do caminho e por pressentimento e lógica, dávamos alguns passos a mais, foi isso que nos levou ao tesouro sem muitos rodeios (FABIANA).*
> *Nossa procura foi tranqüila, seguíamos um mapa construído por nº de passos. Na verdade o tamanho deste passo é extremamente variável. As vezes o número de passos descrito era insuficiente para chegarmos ao local indicado, bem como ocorreu também de ter sobrado passos (LAURA).*

A localização do tesouro dependeu de uma estratégia adaptada à situação, em razão da variabilidade das informações.

O grupo que escolheu a representação por pontos cardeais orientou corretamente o mapa ao referenciar a direção norte verdadeira com o lado da sala de aula onde estava a porta:

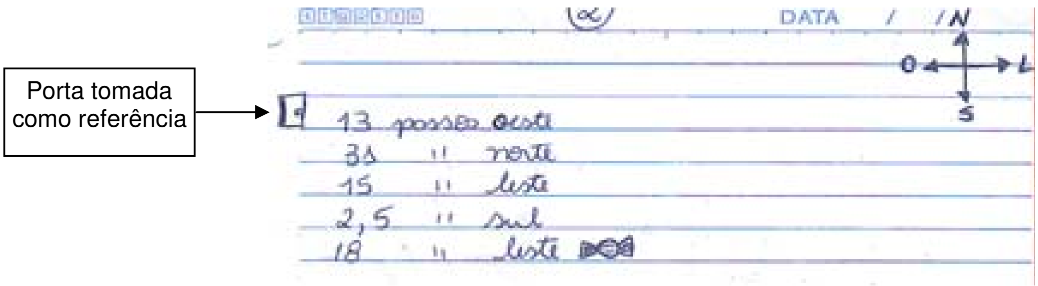


Figura 4.2.6 – Mapa com pontos cardeais.

> *Tive alguma dificuldade relacionada às direções, norte sul, leste, oeste; fiquei um pouco perdida. Consegui me localizar graças a rosa dos ventos que o grupo desenhou no canto do mapa (PRISCILA).*
> *O segundo mapa recebido foi mais fácil, pois as noções de lateralidade*

(norte, sul, leste e oeste) estavam bem definidas para cerca de 80% do grupo (JÚLIA).
Era um mapa com os pontos cardeais e o número de passos. Não perdemos tempo! Umas mais confusas, outras mais seguras, fomos na direção do tesouro (ROSELI).

A atividade provocou a reflexão acerca da possibilidade de construção de conceitos geométricos complexos de forma lúdica

Esta atividade foi muito interessante, pois além de explorar o ambiente, trabalhar com a localização, a distância, os referenciais e a representação da realidade, proporcionou [...] diversão e movimento (ROSELI).
A atividade foi muito divertida, não faltou motivação (JÚLIA).
Acho que a atividade foi de grande aprendizado para entendermos como podemos trabalhar com esse tema de orientação das diversas formas, para assim englobarmos muitas (não diria todas) nas habilidades e competências aos estudantes nessa temática (DANIELA).

Subsidiariamente, a atividade proporcionou momentos de trabalho em grupo e divisão de tarefas

Achei interessante a atividade ser em grupo porque percebi que as vezes ao tentar lembrar o caminho percorrido nos equivocamos na orientação (LAURA).
No que se refere aos mapas desenhados, não desenhei muita coisa, fiquei mais tentando instruir com relação ao que poderíamos desenhar que auxiliaria na procura dos chocolates (PRISCILA)
Pelo fato dessa atividade ser feita em grupo, as crianças aprendem a trabalhar em equipe, compartilham idéias e aprendem a respeitar a opinião do colega (ISABEL).
Esta atividade (...) proporcionou o trabalho coletivo, mais do que isso, colaborativo (ROSELI).
A leitura dos mapas que recebemos foi coletiva (uma ajudando as outras) com algumas dicas que ajudaram na nossa busca aos bombons (GLÓRIA).

4.3 2ª ATIVIDADE: “GEOMETRIA DA TARTARUGA: LATERALIDADE”

Em continuidade ao estudo da Geometria da Orientação, este encontro foi iniciado com um aporte teórico esquemático, para permitir uma reflexão orientada acerca do processo de construção dos conceitos geométricos relativos à lateralidade e sobre o jogo da tartaruga, versão derivada do ambiente *logo*[3], como atividade facilitadora desse processo.

---

[3] Linguagem de programação criada por Papert, para exploração de atividades espaciais, através de comandos de orientação e deslocamento a um cursor gráfico, com o formato de uma tartaruga.

O jogo da tartaruga é do tipo trilha e seu percurso é percorrido segundo comandos de rotação e translação determinados por dados especiais.

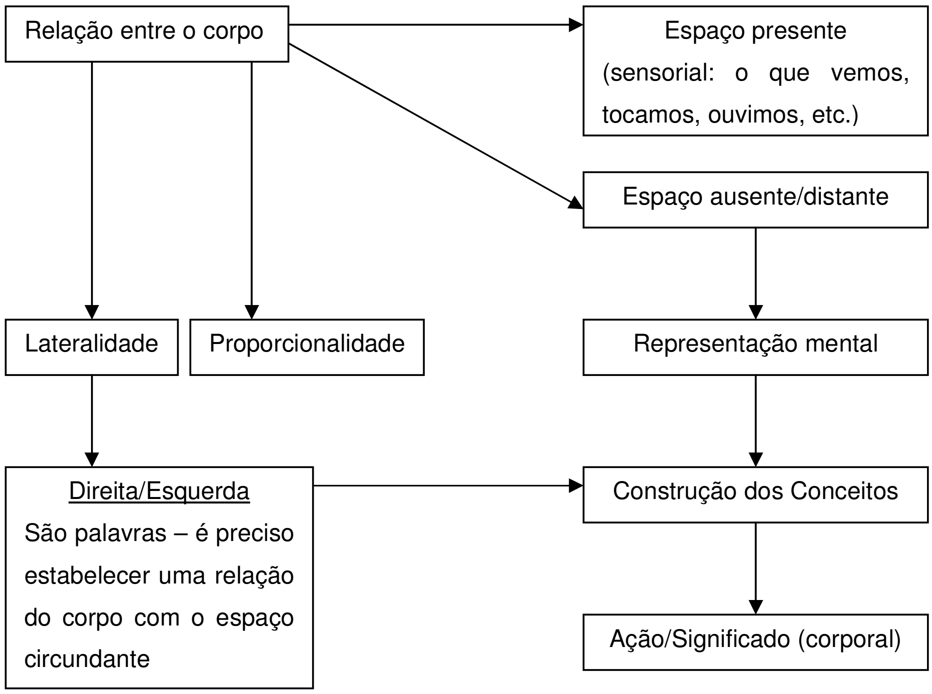


Diagrama 4.3.1 – A lateralidade definida como a relação do corpo com o espaço.

Os conceitos-geométricos-em-ação "direita" e "esquerda" somente serão construídos se houver a efetiva participação do aluno no posicionamento do seu corpo no espaço de vivência.

Após a discussão teórica do diagrama 4.3.1, iniciamos os preparativos para o jogo da tartaruga, ao ar livre. Aproveitando o quadriculado existente no chão, representamos um tabuleiro quadrado de 16 casas com fita crepe.

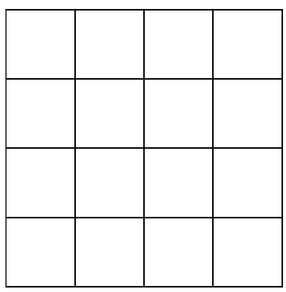


Figura 4.3.1 – Tabuleiro representado no solo.

O jogo foi desenvolvido com dois dados:

a) O primeiro, com comandos rotacionais, destinado a orientações de giro: 45°D (quarenta e cinco graus à direita), 45°E (esquerda), 90°D, 90°E, 0°, 180°.

b) O segundo, com comandos translacionais, destinado a orientações de percurso: 1PF (um passo para frente), 1PT (para trás), 2PF, 2PT, 3PF, 3PT.

Quatro alunos, representando as tartarugas, ficaram posicionados em cada lado do quadrado. Alternadamente, jogaram os dois dados e deslocaram-se de acordo com os comandos. O objetivo do jogo era ser o primeiro alcançar o lado oposto.

O jogo possibilitou aos participantes avaliar as dificuldades inerentes a interpretar e executar um comando com o próprio corpo. A fiscalização da movimentação de outro jogador situado frente a frente exigiu um processo de inversão dos comandos em relação ao próprio corpo, devido à imagem espelhada do outro.

Na versão em sala de aula, foi utilizado um tabuleiro de papel com as diagonais traçadas, dados menores e peças em formato de tartaruga, para realizar os deslocamentos.

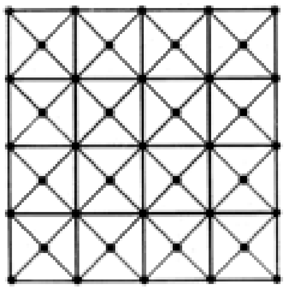


Figura 4.3.2 – Tabuleiro oficial do jogo da tartaruga.

A atividade de "Geometria da Tartaruga: Lateralidade" foi planejada com o propósito de oferecer às alunas mais um exemplo de situação didática vinculada às unidades "Descrição, interpretação e representação de um objeto no espaço, de diferentes pontos de vista" e "Utilização de malhas ou redes para representar, no plano, a posição de uma pessoa ou objeto", previstas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL,1997).

A proposta pedagógica foi alicerçada na ação efetiva do corpo sobre o espaço, transpondo-se o confinamento da sala de aula, como instrumento de construção dos conceitos geométricos. Para reflexão das alunas foi afirmado:

"Não dá para conceber o trabalho pedagógico voltado à aprendizagem da Geometria que prescinda da ação efetiva do sujeito sobre o seu espaço".

Na atividade foram mobilizados os conceitos-geométricos-em-ação: rotação, translação, direita, esquerda, frente, trás, giro, 0°, 45°, 90°, 180°, meia-volta, um quarto de volta, um oitavo de volta, diagonal.

4.4 RESULTADOS DA 2ª ATIVIDADE "GEOMETRIA DA TARTARUGA: LATERALIDADE"

A lateralidade está presente em nosso dia-a-dia, refletida em nossas ações corporais, tais como o ato de escrever, de pegar, de arremessar, de chutar, de comer. Tendo como manifestação um ato reflexo, não pensamos nela. Quando nos colocamos em situação, na qual é necessário pensar sobre o significado das palavras esquerda ou direita para executar uma ação, aí as dificuldades surgem justamente pela necessidade de se colocar corporalmente no espaço da ação e empregar o conceito geométrico.

Nesse sentido, o jogo da tartaruga, colocando o sujeito em situação, revela-se de grande relevância para a construção do conceito de lateralidade,

Na realização do jogo da tartaruga, as alunas perceberam a diferença que existe entre pensar na distinção entre direita e esquerda e rotacionar o corpo para um desses lados. Houve muitos momentos de indecisão sobre como virar o corpo. Algumas chegaram a brandir o braço de sua lateralidade dominante para confirmar a direção a tomar. Esse foi um teorema-em-ação pertinente.

Outro aspecto trabalhado pelo jogo foi a amplitude do giro, explicitado em graus. Na sua execução foram estabelecidas as relações entre ângulos e voltas: 180° equivale à meia-volta, 90° equivale a um quarto de volta, etc.

A meia-volta mostrou-se um comando de difícil execução por três razões:

1) A dificuldade de interpretar o significado de 180°;

2) O dado não indicar por qual lado deveria ser iniciado o giro;

3) A hesitação pela amplitude do movimento, que traria o desconforto de inverter completamente a direção do olhar e perder a visão sobre o objetivo a ser alcançado.

Na qualidade de jogo, este também ofereceu reflexões sobre as possibilidades de vitória. A aluna TELMA comentou sobre isso:

> *Além de exercitar lateralidade e de usar termos como "graus", temos a possibilidade de, de forma bastante lúdica, trabalhar o nosso imaginário, a geometria da representação possibilitando e tentando perceber de que forma é mais provável a sua vitória, a sua chegada do outro lado.*

Em termos de possibilidades de avanço, não foi valorizada a associação positiva de um comando rotacional de "180°" com um comando de translação "para trás". A maior preocupação era visualizar o objetivo.

Os movimentos com 45° foram mais trabalhados em sala, no tabuleiro de papel e também exigiram bastante reflexão, principalmente quando a tartaruga já se encontrava na direção de uma diagonal e recebia um novo comando de 45°, ou seja, deveria voltar-se para o sentido horizontal ou vertical do tabuleiro. No jogo, não era mais o próprio corpo que se deslocava, mas um objeto exterior. Para traduzir e/ou decodificar as orientações e deslocamentos, o sujeito teve que se colocar corporalmente na posição representada pela tartaruga.

4.5 3ª ATIVIDADE: "REPRODUÇÃO DE EMBALAGENS COM REDUÇÃO"

Vivemos num espaço tridimensional. Entretanto, a formação geométrica que normalmente a escola oferece se dá a partir dos conceitos da Geometria Plana, para somente depois abranger os conceitos da Geometria Espacial. Apesar de a nossa vivência desde criança ocorrer no espaço e, portanto, nossas primeiras noções construídas são espaciais, a formação básica não privilegia a relação existente entre espaço e plano. Estudam-se as formas geométricas planas e, a seguir, estudam-se os sólidos geométricos, separadamente, sem qualquer articulação com a realidade.

O propósito da atividade, ancorado na transposição entre figuras planas e espaciais, foi justamente relacionar espaço e plano, mostrar o quanto um objeto tridimensional depende de suas partes planas, em termos de variação de forma e tamanho.

Considerando-se o contexto de formação inicial de professores, a atividade propôs situações, colocando em destaque a manipulação do objeto concreto, a experiência física, como um caminho facilitador da passagem do espaço tridimensional para o plano bidimensional. A partir da decomposição de figuras tridimensionais, torna-se possível o sentido inverso, ou seja, a competência de visualizar e projetar planificações de objetos tridimensionais.

Lopes e Nasser (1996) assim justificam o estudo dos sólidos em primeiro lugar:

> Partimos dos sólidos geométricos porque vivemos em estruturas tridimensionais. É mais natural para o aluno reconhecer nos sólidos, gradativamente, os elementos que serão objeto de seu estudo em Geometria Plana (p.13).

Inicialmente, as alunas receberam a instrução para desmontar as embalagens previamente solicitadas. De forma exploratória, abriram com cuidado as caixas trazidas e, de sua forma planificada, observaram e registraram as partes componentes. Algumas caixas de formato exótico despertaram bastante interesse, fato que propiciou uma interação maior entre o grupo e diferentes perspectivas sobre a produção geométrica.

Em seguida, foram solicitadas a reproduzir em cartolina a planificação descoberta e montar uma nova caixa, igual à primeira. Essa atividade, constituída de desenho e montagem, proporcionou a execução de construções geométricas com a manipulação de réguas e esquadros, e prática de dobradura e colagem.

Na atividade a seguir, as alunas foram provocadas a planejar a planificação da caixa, de maneira a *reduzi-la à metade*. A intenção desse comando foi provocar uma desestabilização cognitiva. Como as alunas aplicariam o conceito *metade* na ação, tratando-se de um objeto tridimensional? Pensando em termos de capacidade volumétrica, reduzir à metade significa que a nova caixa passará a conter metade do que continha. Mas a tarefa estava associada à conservação de uma forma pré-existente. A situação a exigir uma solução estava assim delineada: qual ou quais dimensões da caixa devem ser reduzidas e de quanto deve ser essa redução?

Para que a redução seja proporcional, ou seja, para que a nova caixa seja semelhante à anterior na forma e menor no tamanho, é necessário aplicar um fator de redução constante às três dimensões ao mesmo tempo.

A atividade de “Reprodução de embalagens com redução” foi planejada com o propósito de oferecer às alunas um exemplo de situação didática vinculada às unidades “Observação de formas geométricas presentes em elementos naturais e nos objetos criados pelo homem e de suas características: arredondadas ou não, simétricas ou não, etc.", "Estabelecimento de comparações entre objetos do espaço físico e objetos geométricos – esféricos, cilíndricos, cônicos, cúbicos, piramidais, prismáticos – sem uso obrigatório de nomenclatura", "Reconhecimento de semelhanças e diferenças entre poliedros (como os prismas, as pirâmides e outros) e identificação de elementos como faces, vértices e arestas", "Composição e decomposição de figuras tridimensionais, identificando diferentes possibilidades", "Percepção de semelhanças e diferenças entre cubos e quadrados, paralelepípedos e retângulos, pirâmides e triângulos, esferas e círculos", "Exploração das planificações de algumas figuras tridimensionais", "Identificação de figuras poligonais e circulares nas superfícies planas das figuras tridimensionais" e "Representação do espaço por meio de maquetes", previstas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL,1997).

A proposta pedagógica foi alicerçada na problematização e na ação sobre o concreto, em oposição à representação estática das planificações nos livros didáticos.

Na atividade foram mobilizados os conceitos: planificação, redução proporcional, ampliação proporcional, fator de proporcionalidade. Ao final, permitiu reflexões sobre a relação entre medidas lineares e capacidade volumétrica, e os efeitos provocados pelas variações individuais e conjuntas.

4.6 RESULTADOS DA 3ª ATIVIDADE "REPRODUÇÃO DE EMBALAGENS COM REDUÇÃO"

Na primeira parte da atividade, as alunas abriram totalmente suas embalagens, planificando-as e depois reproduziram a planificação obtida em cartolina, para uma nova montagem. Aparentemente, não houve dificuldades na interpretação da transformação sofrida pelo objeto do espaço tridimensional (3-D) para o plano bidimensional (2-D), e também no sentido inverso, e a inter-relação existente entre as duas formas, conforme relato das alunas:

> *No primeiro momento em que abri a caixa que levei para a sala e copiei fazendo outra igual achei muito fácil (NARA).*
> *A reprodução com as mesmas medidas foi fácil de fazer (GLÓRIA).*

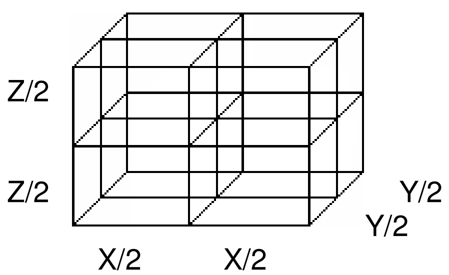
> *Fazer a planificação e a montagem da caixa não pareceu-me tarefa difícil. É uma reprodução que possibilita ao indivíduo compreender de que modo se constitui determinada forma (VALÉRIA).*
> *Levamos dois tipos de caixa (uma mais simples e outra exótica), abrimos a caixa para planificá-la e, em seguida a reproduzimos em cartolina. Não foi muito difícil (OLGA).*
> *Adorei essas atividades, pois através delas é possível mostrar aos alunos que uma figura plana pode se tornar tridimensional e vice-versa (FABIANA).*

As primeiras dificuldades surgiram com o desafio cognitivo: planejar a planificação para que a nova caixa fosse "metade" da anterior. Propositalmente não foi explicitado se era metade do tamanho, metade da capacidade, mas simplesmente *metade*.

Na tentativa de resolução da situação proposta, as alunas empregaram duas estratégias cognitivas distintas. A primeira consistiu em aplicar o conceito de metade à todas as dimensões da caixa. Isso, decerto, é fruto da experiência cultural, em um contexto onde predominam as medidas lineares retilíneas, que são possíveis de serem visualizadas, quantificadas diretamente e divididas em duas partes iguais: comprimento de um móvel, altura de uma pessoa, largura de uma porta, distância entre dois pontos. A idéia que lhes ocorreu foi a divisão *ao meio* de todas as medidas da caixa

> *A aula sobre a redução das medidas da caixa foi uma surpresa. Não havia outro pensamento, senão, reduzir todas as medidas à metade (JÚLIA).*
> *Quando fui construir uma caixinha com a metade da minha caixa original, dividi a altura, o comprimento e a largura por 2 (FABIANA).*
> *Mas quando foi pedido para reduzi-la a metade começou a complexidade. De que modo fazê-lo? Como grande parte da turma imaginei ser necessário dividir todas as medidas por dois (VALÉRIA).*

O teorema-em-ação empregado, ou seja, a redução pela metade das três dimensões, simultaneamente, fez com que a caixa resultante equivalesse à oitava parte da caixa original. Isso é possível de ser verificado: tome-se uma caixa com as dimensões frente ou comprimento X, largura ou profundidade Y, altura Z. Divida-se cada dimensão por dois, conforme a representação a seguir:



O volume é o valor do produto das dimensões:

$$X \cdot Y \cdot Z = \text{Volume}_1$$

$$\frac{X}{2} \cdot \frac{Y}{2} \cdot \frac{Z}{2} = \frac{\text{Volume}_1}{8} = \text{Volume}_2$$

A caixa ficou dividida em oito blocos iguais.

Ao dividir por dois todas as dimensões, comete-se um erro de generalização. Algumas alunas, mais rápidas na execução, construíram e constataram fisicamente a redução exagerada. Outras, perceberam o equívoco a tempo de evitar o erro

> *E para a minha surpresa, a caixa ficou bem menor, ela ficou com 1/8 do tamanho original da caixa (FABIANA).*
> *No entanto, percebeu-se que tal atitude reduziria exageradamente a medida da caixa, isto é, a mesma seria minimizada a um oitavo de seu tamanho anterior (JÚLIA).*

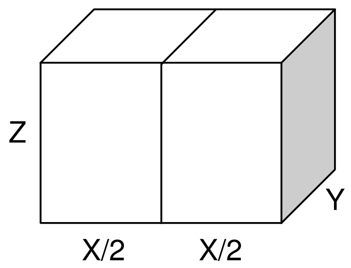
O conceito de metade no sentido linear estava tão enraizado na aluna VALÉRIA que somente após visualizar o esquema no quadro ela se convenceu do erro no processo

> *Ainda ouvi duas pessoas comentarem que a caixa ficaria menor que a metade, mas não fez sentido para mim a fala das duas. Foi então que o professor interviu e nos mostrou que se fizemos dessa maneira reduziríamos a um oitavo da caixa. O que fazer?*

Na segunda estratégia cognitiva empregada, outras alunas, com uma melhor noção de conservação de quantidade, decidiram dividir à metade apenas uma das dimensões

> *O exercício seguinte foi de reduzir a caixa pela metade. O termo usado pelo professor a princípio fez com que pensássemos que apenas "cortar" a caixa no meio estaríamos reduzindo pela metade (OLGA).*
> *Quanto a planejar e realizar a planificação da embalagem para que seja a metade da anterior, isto foi além das minhas forças naquele momento. Pretendo realizar, mas sem estresse. Fiz a metade do comprimento da embalagem. Tirando as abas (fundo e a tampa da embalagem) a medida da original é 12 cm. Passei para 6 cm e assim obtive a metade (GLÓRIA).*
> *Esta atividade foi um pouco difícil, pois no momento de reduzir a caixa, vem primeiro em mente, medir um dos lados e dividir por dois, uma vez que é a metade (CLÁUDIA).*

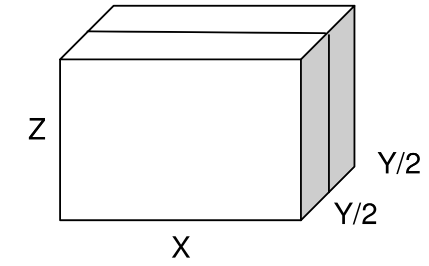
Quando se reduziu uma das três dimensões à metade, o volume de fato ficou reduzido à metade, mas a caixa resultante não ficou proporcional à anterior, uma vez que manteve constantes as outras duas dimensões. Houve três versões do teorema-em-ação:



Redução do comprimento X:

$$X \cdot Y \cdot Z = \text{Volume}$$

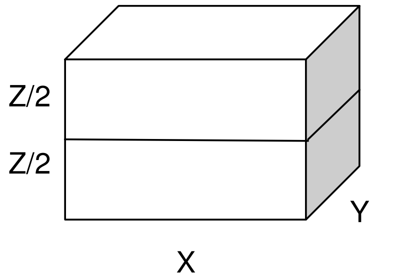
$$\frac{X}{2} \cdot Y \cdot Z = \frac{\text{Volume}}{2}$$



Redução da largura Y:

$$X \cdot Y \cdot Z = \text{Volume}$$

$$X \cdot \frac{Y}{2} \cdot Z = \frac{\text{Volume}}{2}$$



Redução da altura Z:

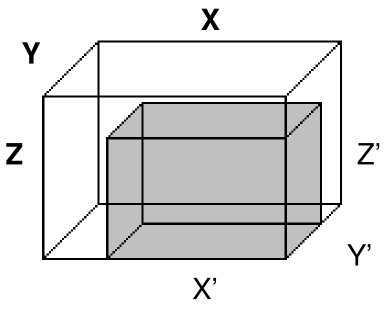
$$X \cdot Y \cdot Z = \text{Volume}$$

$$X \cdot Y \cdot \frac{Z}{2} = \frac{\text{Volume}}{2}$$

As alunas perceberam que a caixa resultante não era semelhante à original e que para isso ocorrer, a redução deveria acontecer na caixa como um todo

> *No entanto, descobre-se que ao reduzir não se tem a caixa nas medidas proporcionais (CLÁUDIA).*
> *Porém, o professor nos fez refletir acerca do volume e então pensamos que apenas dividir a caixa não era suficiente. Percebemos que teríamos que reduzir a área da caixa por completo (OLGA).*
> *Primeiramente desenhei a caixa planificada e tentei aumentar o seu tamanho em duas vezes no papel quadriculado. Então ao perceber que deveria ser ampliada proporcionalmente aumentando também o seu volume cheguei a conclusão que não daria certo (NARA).*

A maneira de reduzir a caixa proporcionalmente, revelou-se um obstáculo epistemológico para as alunas. Naquele momento, ele era insuperável e foi necessária a minha intervenção no quadro para definir o fator de redução, que denominei ***f*** :



$$X \cdot Y \cdot Z = \text{Volume}$$

$$\frac{X}{f} \cdot \frac{Y}{f} \cdot \frac{Z}{f} = \frac{\text{Volume}}{2}$$

$$f \cdot f \cdot f = 2$$

$$f^3 = 2$$

$$f = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$$

Dividindo-se cada dimensão X, Y e Z pelo fator constante *f*, de valor igual a 1,26 aproximadamente, o volume fica reduzido à metade e as novas dimensões X', Y' e Z' mantém a mesma proporcionalidade com as anteriores, formando uma caixa com o mesmo formato da anterior, menor, mas sem distorções, conforme a figura inserida no interior da representação.

O cálculo algébrico de *f*, envolvendo a operação inversa de uma potência cúbica, foi compreendido, mas revelou-se além da capacidade de solução das alunas frente à situação

> *Depois, com a explicação do professor, entendi que para construir uma caixa com a metade do tamanho da original, deveria dividir as medidas por 1,26 (FABIANA).*
> *A explicação de que era preciso encontrar um coeficiente de redução (e aumento) foi de fácil compreensão para mim, mas preciso confessar que meu pensamento lógico não chegaria a tal ponto (VALÉRIA).*
> *Só depois que o professor demonstrou a fórmula que consegui reduzi-la proporcionalmente (CLÁUDIA).*
> *Eu fui buscar outra estratégia para aumentar a caixa. Achei melhor fazer a ampliação da caixa separando cada lado da caixa que era exótica. Ao separar os lados medi cada um na sua altura e tamanho e multipliquei por 1,26. Esse número eu nunca acharia sozinha, só o usei pelo fato do Josaphat calculá-lo e passar para nós (NARA).*

A aluna NARA, que optou pela ampliação em dobro da caixa original, multiplicando suas dimensões por 1,26, está em um nível de conceitualização geométrica que não lhe permitiu abstrair uma correspondência de 2 para 1 entre os materiais tridimensionais que montou

> *Ao terminar de montar a caixa maior percebi que ela aumentou, mas não consegui ver comparando-a a caixa menor um aumento em duas vezes. Como conclusão dessa vivência percebo que é muito difícil e complicado esse trabalho de montagem e ampliação de caixa.*

Para essa aluna, as formas proporcionais das caixas não possibilitaram a visualização da diferença exata de volume entre elas. O resultado "dobro" ou "metade" é mais perceptível quando se amplia/reduz apenas uma das dimensões. Nesse sentido, a aluna ELIETE sugere algo prático: *Para fazer a prova da metade de V: encher as duas caixas com algo e comparar as duas quantidades*.

A iniciativa da aluna revela a possibilidade de possuir o nível 2 (análise) de pensamento geométrico para o conceito de redução proporcional, de acordo com o indicador de Burger e Shaughnessy (1986): trata a Geometria de forma empírica ao testar a validade de uma proposição.

Para a aluna CLÁUDIA o recurso à álgebra para determinação do fator aparece como um *obstáculo didático*

> *Acredito que para as crianças, a fórmula complicaria um pouco na assimilação, pois a explicação e demonstração ficam muito no campo das idéias, tornando-se difícil a transposição para o concreto, o real.*

Em termos quantitativos, a diferença entre dividir uma medida linear por 2 ou dividir por 1,26 é significativa. A primeira significa uma redução de 50%, enquanto a segunda, aproximadamente 21%. No entanto, quando se transporta para a medida cúbica, a diferença é mais significativa, dividir cada dimensão por 2 equivale a dividir por 8, uma redução de 87,5% (fotografia 4.6.1). No contexto do nível de pensamento geométrico das alunas, a unidimensionalidade aparece como possível *obstáculo didático* à tridimensionalidade.

Fotografia 4.6.1 – Exemplos de caixa inteira, caixa reduzida à metade, caixa reduzida de 1/8.

A aluna TELMA, de acordo com a figura 4.6.1, reproduz com exatidão em seu registro o exemplo de cálculos de redução com o fator ensinado, mas confunde área com volume:

Base = 4 cm
Altura = 3 cm
Largura = 5 cm

Área = 60cm³ ► $\frac{60}{8}$ ou seja $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{60}{8}$

$\frac{3}{f} \cdot \frac{4}{f} \cdot \frac{5}{f}$ ► $f^3 = 2$ ► f = raiz cúbica de 2 = 1,26

Observação: dessa forma, eu divido a base, a altura e a largura por 1,26 para obter a metade da área da caixa.

Figura 4.6.1 – Registro do cálculo do fator f de TELMA

Ao comentar sobre a atividade, a mesma aluna TELMA novamente relaciona as três medidas lineares com a área. Ela ainda não consegue pensar em termos de medidas cúbicas, o que interfere no seu processo de conceitualização de volume

> *Essa atividade permite que o aluno perceba de uma forma mais concreta as dimensões de uma caixa. Mais do que modificar o tamanho de seus lados, pode-se perceber de que maneira foi reduzida e o que acontece quando não a reduzimos exatamente pela metade. Além disso, começa-se a perceber o conceito de medida, base, altura, largura, <u>área</u> e o resultado de sua redução sendo ela proporcional ou não (TELMA, grifo meu).*

A atividade possibilitou rupturas com a conceitualização prévia da aluna JÚLIA: *É preciso admitir que fora uma decepção acreditar que era a "dona da razão" e, em seguida, não mais que ingênua ou desavisada.*

A aluna OLGA demonstra que a conservação da forma ficou retida na sua percepção

> *Essa atividade faz com que os alunos tenham contato mais significativo com as figuras geométricas e percebam a diferença entre reduzir e deixar à mesma forma, pois percebemos que, por exemplo, uma caixa retangular se for cortada ao meio não permanecerá com a mesma forma.*

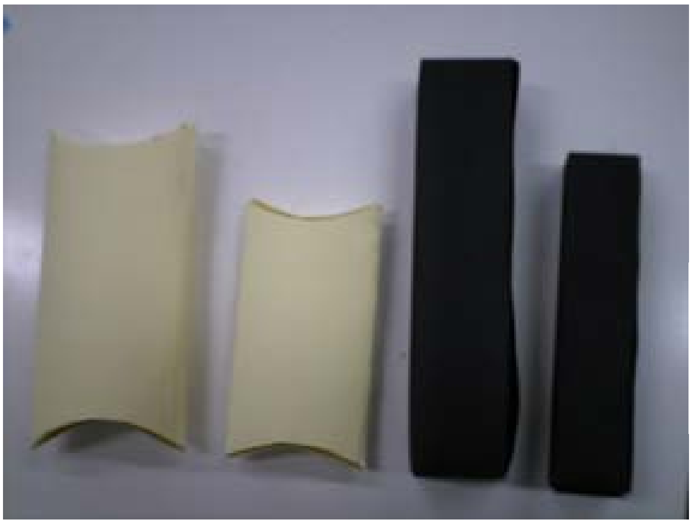
Na figura 4.6.2, a aluna-professora ROSELI expõe toda a sua perplexidade e auto-avaliação:

> Surpreendente esta atividade, pois o que a primeira vista nos parece lógico... No concreto, pode não ser!!!
>
> Então, para se obter uma caixa que seja **proporcionalmente** a metade de outra, não basta dividir suas partes ao meio, como seria de se imaginar... É preciso pensar muito mais, e fazendo concretamente, vemos que a nossa lógica, por vezes é enganada pela nossa ótica.
>
> Fiquei de cara !!! Se eu não tivesse visto e feito... Eu ia olhar pra quem me dissesse isso, com aquela cara de interrogação, e ia pensar _que história é essa?_ mas eu vi acontecer.
>
> É parece que ainda estou naquele nível da aprendizagem geométrica chamado de sensorial (da percepção), pois me apoiei na minha percepção visual, que me levou ao falso julgamento da realidade, de que para se ter meia caixa, seria só calcular a metade das medidas. Puxa, que estrago na minha formação geométrica!!! Será que ainda tenho jeito? Parece que sim, pois esses "erros" fazem parte do processo de construção do conhecimento geométrico. "To" um pouco atrasada, mas antes tarde do que nunca!
>
> Gostei! Deu pra sentir na pele o que os educandos sentem. E ver como são importantes as oportunidades de experimentar, vivenciar.

Figura 4.6.2 – Comentários de ROSELI sobre a atividade.

Ao se referir ao nível de sensorial de aprendizagem geométrica, a aluna trouxe à luz um dos níveis discutidos na introdução da disciplina: "A conceitualização geométrica se realiza em três níveis: da percepção (nível sensorial), da representação mental (nível simbólico) e da concepção (nível conceitual)" (MUNIZ, 2004, p. 262).

Ainda que a aluna tenha se referido negativamente ao seu falso julgamento da situação, ter vivido essa experiência foi fundamental para o processo de conceitualização do que vem a ser *reduzir à metade*. A manipulação do material permitiu a construção de uma representação mental adequada e exercitou a sua capacidade de percepção (fotografia 4.6.2).



Fotografia 4.6.2 – Exemplos de redução à metade de caixa exótica e comum

É interessante destacar, também, que na atividade realizada estiveram bem nítidas e ordenadas as cinco fases seqüenciais de aprendizado, propostas pelo modelo van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico (1957).

Na primeira fase, da *informação*, os propósitos da passagem do espaço para o plano e vice-versa foram esclarecidos, assim como foi introduzido o termo *planificação*, específico para a atividade que seria iniciada.

Na *orientação dirigida*, segunda fase, as alunas exploraram o tópico de estudo, inicialmente identificando e reproduzindo a planificação de suas embalagens, para depois tentar reduzi-las à metade. As atividades foram programadas numa seqüência didática pré-estabelecida.

Na terceira fase, da *explicação*, as alunas revelaram as estratégias cognitivas utilizadas para executar a redução à metade das embalagens e, a partir do confronto entre os resultados encontrados, modificaram o seu ponto de vista.

Na *orientação livre*, quarta fase, de posse do fator de redução, as alunas construíram novas embalagens reduzidas proporcionalmente, tarefa mais complexa que a inicialmente proposta, especialmente em relação às embalagens mais exóticas.

Na quinta e última fase, da *integração*, as alunas registraram em seus dossiês a síntese do material estudado e suas reflexões sobre o aprendizado.

Com base no modelo van Hiele (1957), o progresso que se pretendia atingir com o conceito geométrico de redução proporcional, um conceito que se revelou de maior complexidade, era o 4º nível, *dedução*, com o reconhecimento da condição necessária e suficiente da aplicação de um fator único em todas as dimensões e o domínio do seu processo dedutivo, ou seja, a compreensão da argumentação centrada na fórmula de volume.

Tomando-se como referência os indicadores de Burger e Shaughnessy (1986) para classificação de níveis, particularmente o indicador *confiança na prova como autoridade final decidindo a verdade de uma proposição matemática*, do 4° nível, e considerando-se a aceitação manifestada nos registros, pode-se supor que, para algumas alunas, houve a compreensão integral do cálculo do fator de redução. Nesse sentido, a fala de JÚLIA revela toda a sua compreensão para o caráter de generalização do fator calculado

> *Para que a caixa tenha realmente o seu volume reduzido à metade é necessário utilizar um "fator de redução", o qual serve para todas as caixas do Universo. Por mais incrível que pareça, tal feito, aparentemente simples, apenas pode ser alcançado dividindo-se cada medida dos lados pelo valor de 1,26 centímetros. "Acredite se puder"! Este valor foi determinado por meio de uma fórmula matemática bastante simples, porém, preestabelecida e preceituada. Quem poderia imaginar que uma fórmula, acharia um valor* ***constante*** *que se aplica para todas as caixas do mundo?(grifo do autor).*

Essa suposição de mudança de nível deve ser cuidadosa, pois, conforme Nasser e Tinoco (2004),

> O progresso de níveis não ocorre num período muito curto de tempo. É necessário o amadurecimento nas estratégias, objetos de estudo e linguagem características daquele nível. As pesquisas desenvolvidas mostram que isso leva alguns meses. (p. 80)

4.7 4ª ATIVIDADE: "DESCOBERTA DAS FIGURAS PLANAS UTILIZADAS"

Esta atividade foi dividida em duas partes. Na primeira, com o propósito de desenvolver a percepção espacial, as alunas foram solicitadas a:

- marcar (carimbar) na cartolina as faces diferentes da caixa construída no encontro anterior;
- recortar as faces;
- juntar todas as faces como peças de um jogo;
- embaralhar todas as peças e formar um leque;

Em seguida, um participante de cada grupo formado, alternadamente, retirou uma peça aleatória de cada vez, para formar uma caixa.

Nas rodadas seguintes, a escolha e montagem das peças foi feita com os olhos fechados, valendo-se da percepção tátil do participante.

Na segunda parte da atividade, desenhei a vista frontal, lateral e superior de um sólido geométrico previamente escolhido e convidei uma aluna a montá-lo segundo a sua interpretação, servindo-se do material *cuisinaire*[4] (fotografia 4.7.1).

Fotografia 4.7.1 – Material cuisinaire.

As três vistas, tal como foram desenhadas, e a figura tridimensional correspondente estão representadas na figura 4.7.1:

---

[4] Material criado por Georges Cuisinaire (1891-1976), a escala é composta de barras em forma de prismas quadrangulares, feitas de madeira, com cores padronizadas. Os comprimentos variam de 1 em 1 centímetro, indo de 1 a 10.

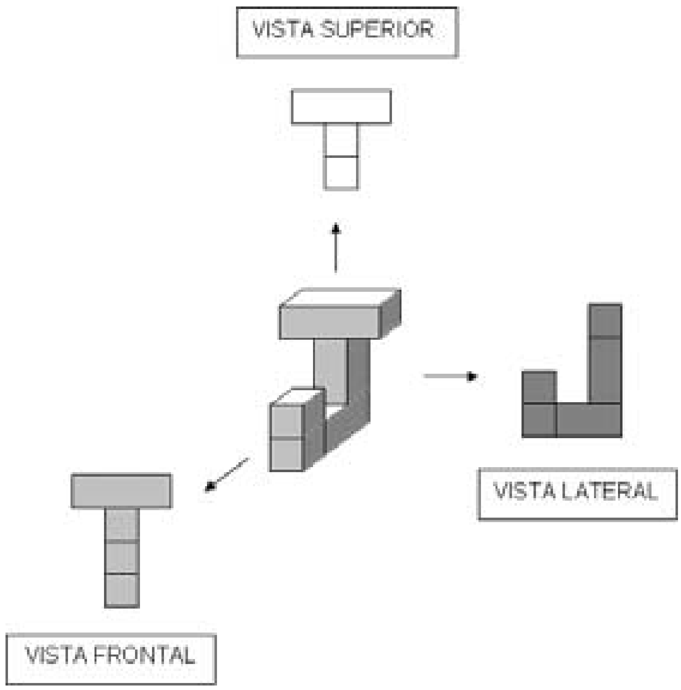


Figura 4.7.1 – Vistas do sólido proposto na atividade.

Após a participação inicial da aluna, o grupo foi dividido em duplas para realização da mesma atividade. Alternadamente, construíram figuras tridimensionais e desenharam as vistas para a reconstituição pela parceira. Em seguida, avaliaram os resultados, comparando os sólidos. Esse momento foi caracterizado por muita produtividade, pois permitiu o confronto entre os objetos e suas representações.

A atividade "Descoberta das figuras planas utilizadas" foi planejada com o propósito de oferecer às alunas um exemplo de situação didática vinculada às unidades "Construção e representação de formas geométricas" e "Representação de figuras geométricas", prevista nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997).

Na atividade foram mobilizados os conceitos geométricos: vista frontal, vista lateral, vista superior. Em seu desenvolvimento, foram exercitadas as competências relativas a tanto representar as três vistas de um sólido geométrico quanto, a partir das representações, num esforço de abstração, montar um sólido geométrico desconhecido.

4.8 RESULTADOS DA 4ª ATIVIDADE "DESCOBERTA DAS FIGURAS PLANAS UTILIZADAS"

Embora estejam interligadas, as atividades de representação e reconstituição de sólidos diferem em termos de habilidades requeridas. No caso da representação, as vistas devem guardar absoluta fidelidade aos detalhes de composição, de profundidade entre os planos e igualdade entre medidas. Em síntese, trata-se de copiar com precisão aquilo que se vê, sob os diferentes ângulos convencionados – visão frontal, lateral e superior.

O registro da aluna ELIETE sobre a atividade evidenciou incompatibilidade entre a vista frontal e a vista superior, representadas sobre um objeto:

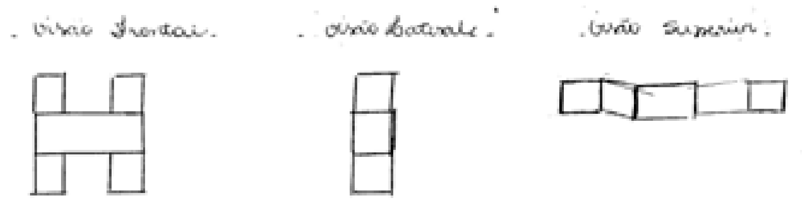


Figura 4.8.1 – Vistas incompatíveis para um mesmo sólido.

De acordo com a vista frontal, o sólido representado tem a forma de uma letra "H", ou seja, é constituído por três planos verticais. A vista superior, entretanto, apresenta cinco seções, um pouco desalinhadas e tem dimensão maior do que faz supor a vista frontal. Numa primeira análise, não há correspondência entre a vista superior e a vista frontal, ou seja, não há como reconstituir o sólido. Por que a aluna mudou o tipo de representação em relação à vista superior?

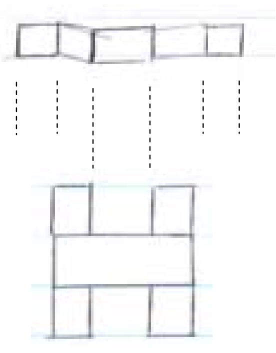


Figura 4.8.2 – Correspondência inadequada entre as vistas superior e frontal.

Um olhar mais atento permite supor que o desalinhamento entre as seções sugere a existência de outros dois planos representados. De fato, esses dois planos representam a visão da aluna para as duas paredes internas do sólido, convergindo para um ponto de fuga, uma técnica utilizada em outros tipos de representação arquitetônica. Neste contexto, porém, provocou uma diferenciação em relação às outras vistas, onde as projeções são ortogonais.

Na execução da tarefa, a aluna representou a imagem real, onde os objetos mais distantes ficam menores, o que dá a sensação de convergência. No entanto, nas representações exploradas no início da atividade, procurei evidenciar que as vistas são obtidas por “cortes” verticais e horizontais no sólido, tendo como conseqüência a sobreposição de planos. A profundidade só é percebida na integração com as outras vistas. A vista superior estaria correta se tivesse sido representada desta forma:

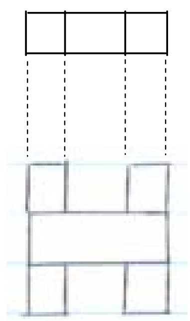


Figura 4.8.3 – Correspondência adequada entre as vistas superior e frontal.

A representação por projeções ortogonais não é uma técnica limitada, pois permite representar, inclusive, planos oblíquos, sem criar ambigüidades. A vista superior representada pela aluna ELIETE poderia muito bem referir-se a um sólido com a forma de, por exemplo, uma espécie de letra “X”, com suas duas rampas inclinadas:

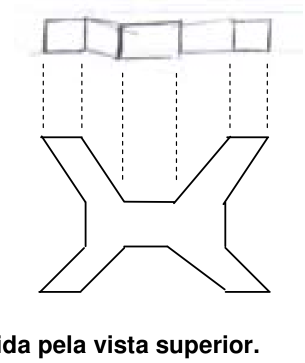


Figura 4.8.4 – Vista frontal sugerida pela vista superior.

A padronização da representação das três vistas, o "idioma" utilizado, é fundamental para a reconstituição do sólido por quem quer que seja. O registro da aluna-professora GLÓRIA referente ao sólido proposto em sala revelou uma estratégia complementar, estabelecendo uma correspondência de cores entre o objeto e sua representação. Como resultado, as vistas ficaram articuladas não só pela precisão dos detalhes, mas também pelas cores, conforme a figura 4.8.5:

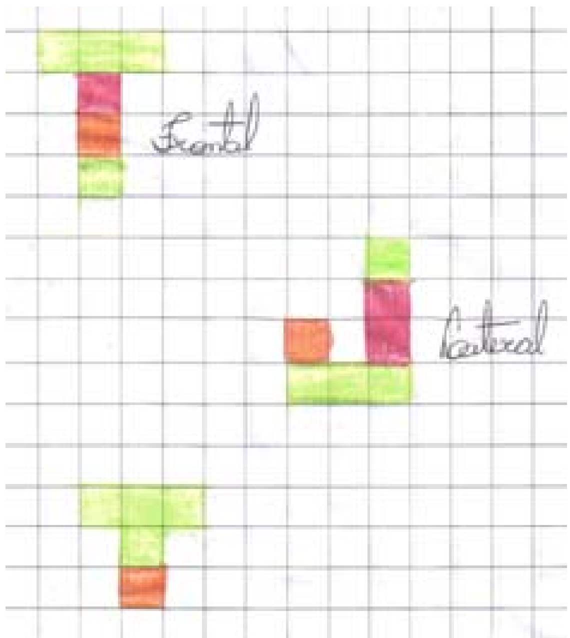


Figura 4.8.5 – Vistas com correspondência de cores.

A aluna JÚLIA empregou estratégia semelhante. Trabalhando com somente uma cor conseguiu representar a diversidade de peças empregando variações de textura.

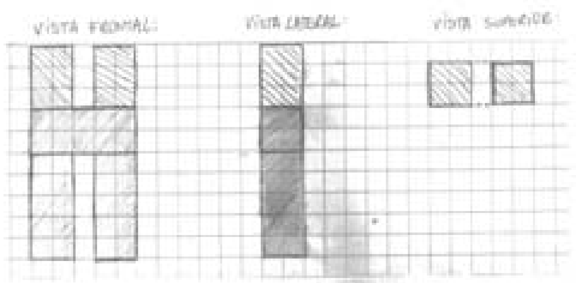


Figura 4.8.6 – Vistas monocromáticas, com variação de textura.

Em relação ao sólido inicial, proposto em sala de aula, alguns registros diferiram dos demais, apresentando uma inversão da vista superior, no sentido longitudinal:

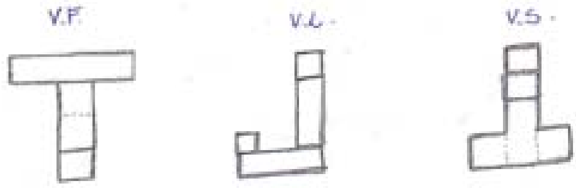


Figura 4.8.7 – Registro de JÚLIA

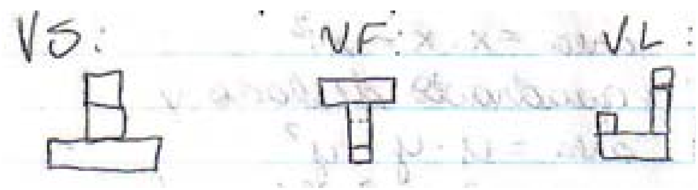


Figura 4.8.8 – Registro de PRISCILA

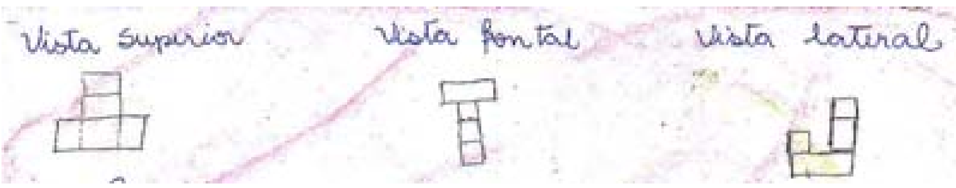


Figura 4.8.9 – Registro de VALÉRIA

O cuidado em adicionar linhas pontilhadas na vista frontal, relativas a detalhes ocultos, revela que as alunas representaram o sólido numa disposição diferente, numa disposição contrária, a parte mais alta mais próxima do observador.

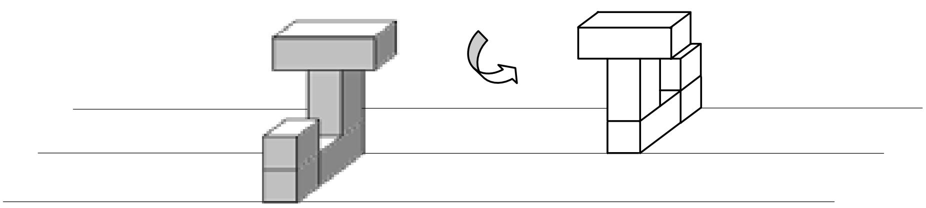


Figura 4.8.10 – Inversão do sólido proposto na atividade.

A vista lateral, no entanto, foi tomada no sentido da esquerda para a direita, num procedimento contrário ao convencionado em sala de aula. Esse fato em si não teria maior importância se a vista lateral estivesse registrada à esquerda das outras. Porém, em dois registros, ela foi colocada à direita e no terceiro, no centro. Um observador externo teria dificuldades em reconstituir o sólido, até perceber a inversão dessa vista.

Uma outra constatação sobre a aluna JÚLIA é que nessa representação ela demonstrou dificuldade em visualizar e relacionar medidas, sua vista superior está maior, com a inclusão de um detalhe inexistente.

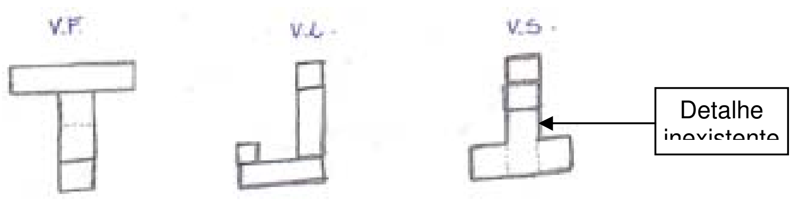


Figura 4.8.11 – Vista superior alongada, registrada pela aluna JÚLIA

Em outra representação, mostrada a seguir, essa dificuldade da aluna foi confirmada, apesar de usar papel quadriculado para o registro:

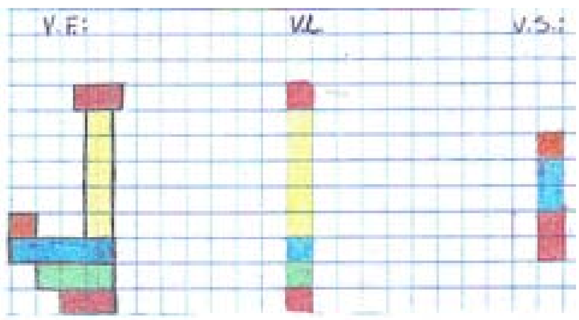


Figura 4.8.12 – Vista superior alongada, registrada pela aluna JÚLIA

A vista superior foi representada com cinco *quadradinhos* enquanto a medida correspondente na vista frontal mede quatro *quadradinhos e meio*. O erro cometido está na parte azul, representado com dois *quadradinhos*, pois não foi considerado que ela é parcialmente coberta pela parte vermelha.

De uma forma geral, as alunas obtiveram resultados satisfatórios na atividade. Com a confiança dos acertos, aos poucos, arriscaram-se mais. Os sólidos foram ganhando variações, passando de uma forma compacta e retilínea para configurações mais abertas e angulares. Conseqüentemente, as vistas também ganharam em complexidade, tanto sob o ponto de vista do registro, quanto da interpretação.

Nessa fase, as alunas PRISCILA e VALÉRIA trabalharam juntas, propondo-se mutuamente desafios. O primeiro desafio foi um sólido composto por dois blocos compridos, um sobre o outro, formando quatro ângulos de 90°, apoiados em dois blocos menores. Os seguintes registros foram elaborados:

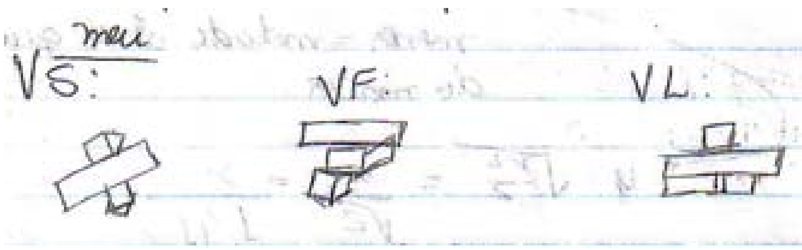


Figura 4.8.13 – Registro de PRISCILA

Figura 4.8.14 – Registro de VALÉRIA

Analisando-se os registros, que são apenas esboços primários, verifica-se a ausência de detalhes que a vista superior sugere para as outras vistas. Na verdade, o sólido foi observado como um “x” para a vista superior e como um “+” para as outras vistas, ou seja, houve uma mudança no ângulo padrão de observação.

Pelas vistas apresentadas, o sólido tem a seguinte constituição:

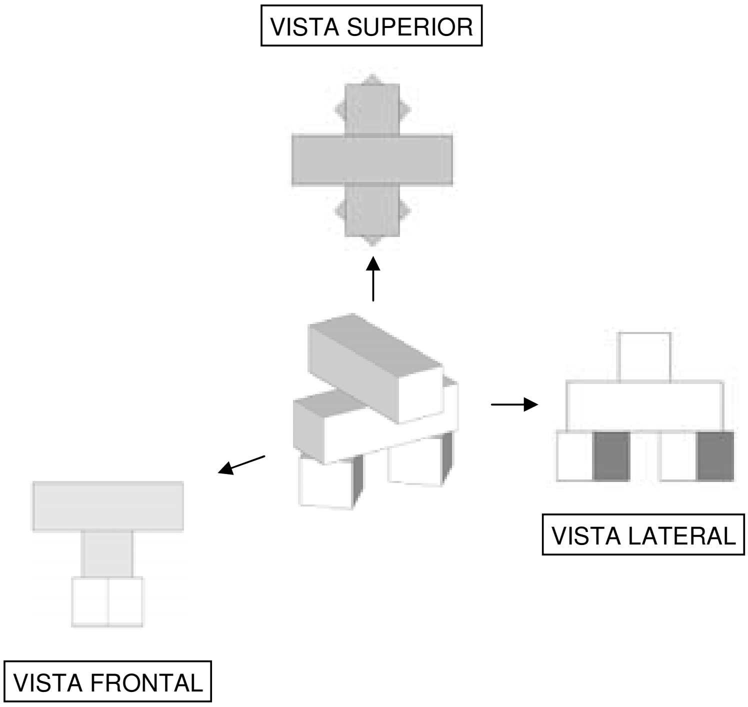


Figura 4.8.15 – Representação do 1º sólido proposto entre PRISCILA e VALÉRIA

O segundo desafio proposto entre elas foi um sólido composto por dois blocos compridos, colocados frente à frente, apoiados por uma das pontas sobre um terceiro menor e cobertos por um quarto bloco, também de tamanho menor.

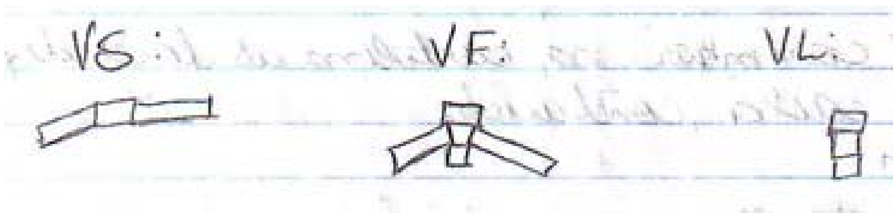


Figura 4.8.16 – Registro de PRISCILA

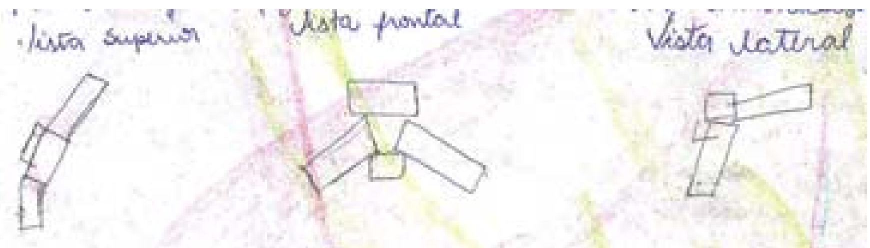


Figura 4.8.17 – Registro de VALÉRIA

Os registros, ainda rudimentares, desta vez revelam um ganho na compreensão dos conceitos geométricos da atividade. Os registros da aluna PRISCILA estão dispostos segundo o ângulo de observação que utilizou e não omitem detalhes, embora apresentem pequenas discrepâncias nas medidas, normais para um esboço descuidado.

A aluna VALÉRIA novamente fez uma observação lateral num ângulo diferenciado, mais inclinado, acarretando um registro muito distorcido. Segundo essa aluna:

> *Nessa atividade o que me pareceu mais complexo é fazer a representação do que montamos. Mas é certamente uma boa maneira de perceber o espaço e as formas e pensá-los em nossa mente.*

De acordo com as vistas representadas, o sólido pôde ser reconstituído:

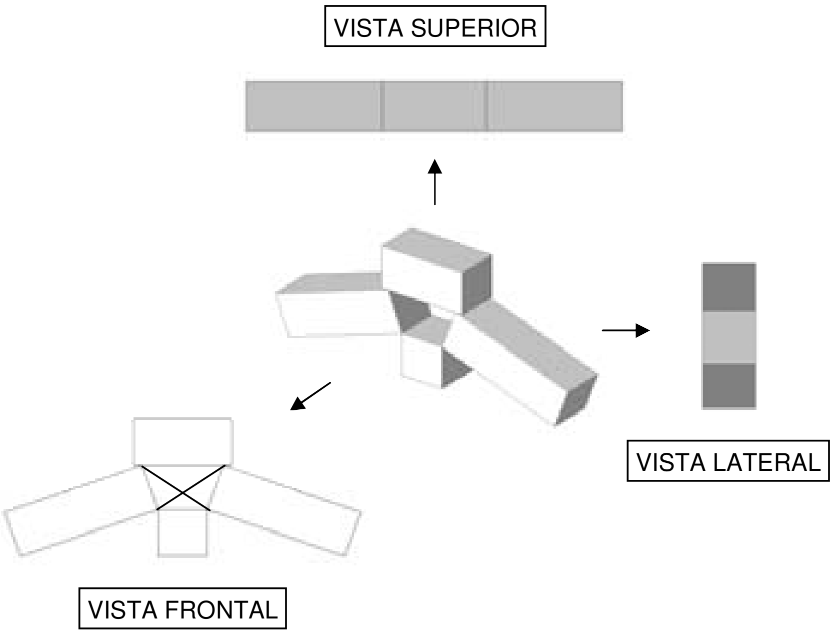


Figura 4.8.18 – Representação do 2º sólido proposto entre PRISCILA e VALÉRIA

Para as alunas mencionadas até aqui, JÚLIA, PRISCILA e VALÉRIA, o registro das vistas em disposição linear como proposto no início da atividade, mostrou-se uma fonte produtora de equívocos, tanto para medidas quanto para o sentido de observação. A incidência desses erros revelou um obstáculo a ser superado.

Uma estratégia que pode vir a ser adequada para evitar a ocorrência desse obstáculo didático é posicionar as vistas ortogonais de modo que as relações de tamanho e forma entre elas fiquem diretamente observáveis. Na figura 4.8.19, a vista lateral está à direita e liga-se diretamente às outras duas por linhas mestras, evidenciando a posição em que foi observado o sólido e as correspondências de medida.

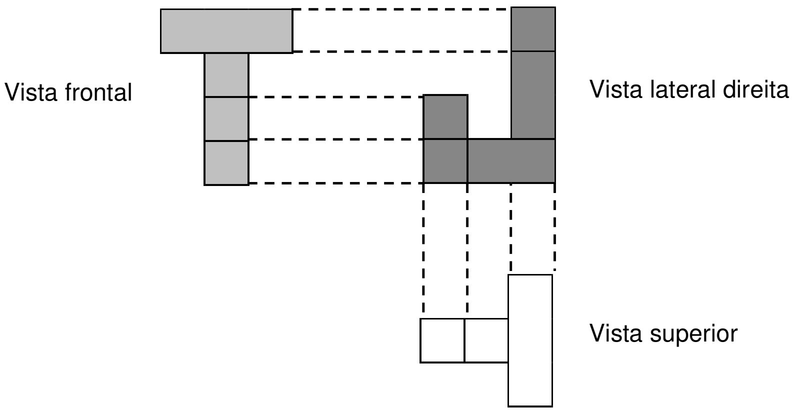


Figura 4.8.19 – Proposta de representação das vistas de um sólido.

No posicionamento proposto, a vista superior colocada abaixo da vista lateral sugere o tombamento desta, facilitando a integração mental que deve haver para a reconstituição do sólido.

O registro da aluna MÍRIAM revelou uma estratégia peculiar. Em relação ao observador, os detalhes mais próximos foram representados com a linha mais cheia. Na vista superior, por exemplo, há três espessuras de linha, ou seja, três indicações de proximidade. Para indicar a existência de espaço vazio, representou com um hachuriado no lugar:

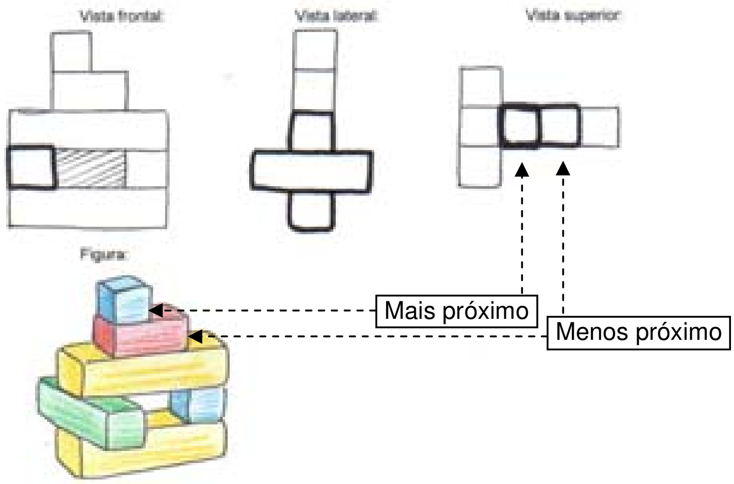


Figura 4.8.20 – Representação diferenciada das vistas de um sólido.

A aluna MÍRIAM demonstrou um envolvimento maior na atividade, a ponto de representar o sólido reconstituído em seu registro. Sem qualquer orientação do curso, tomando como referência a visão pelo lado esquerdo, representou-o em perspectiva paralela, que é o caminho inverso das projeções ortogonais.

Diferentemente da planificação, que não é adequada para representar um aglomerado de formas geométricas, as vistas ortogonais permitem a recuperação de um sólido, num processo de abstração. As habilidades requeridas dizem respeito à elaboração mental de integração das vistas, coordenando a inserção de detalhes comuns.

A dificuldade maior das alunas, no entanto, situou-se na elaboração das vistas ortogonais:

> *Essa passagem do tridimensional para o bidimensional mostra-se como atividade com um grau de dificuldade maior. Sendo assim, faz-se necessário mostrar o contraste que existe entre uma forma e outra, não apenas de forma ilustrativa, mas também com material concreto, o que poderá facilitar a compreensão das relações de medidas mostradas acima (TELMA).*
>
> *Os dois momentos do dia foram exercícios da transposição de uma figura tridimensional para uma figura bidimensional. Às vezes não é fácil fazer uma relação entre as duas formas, por isso que essa relação exige mais interpretação de nós (NARA).*

A dificuldade do processo reside no fato do sujeito apreender o objeto como um todo, tridimensionalmente e ter que facetá-lo para construir três representações planas, dependentes de apenas um ângulo de visão, tendo ainda que abstrair os elementos que dela não fazem parte, mas que foram percebidos e integram sua imagem mental da figura.

4.9 5ª ATIVIDADE: "PRODUÇÃO DE FIGURAS PLANAS COM CANUDOS E MAPAS CONCEITUAIS"

As figuras planas concebidas pelo homem como forma de representação do mundo, estão presentes no espaço à nossa volta. Contudo, não faz sentido aprender a nomeá-las e decorar suas propriedades. A aprendizagem será muito mais significativa se o conhecimento for construído pelo aluno na sua interação com um objeto concreto, de maneira dinâmica, imprimindo movimento às figuras geométricas, de modo que as propriedades sejam identificadas na observação das sucessivas transformações físicas, na constatação das variações e invariantes presentes em cada movimento.

Usualmente, o termo *Geometria Dinâmica* tem sido empregado com referência ao enfoque que utiliza o computador como ferramenta, mas é a postura dinâmica que contribui para a aprendizagem de Geometria. Mesmo tendo-se o apoio de um laboratório de informática, as experiências de manipulação devem ser incentivadas, pois as atividades no computador não podem substituí-las, mas apenas complementá-las (NASSER, TINOCO, 2004).

A atividade foi idealizada com canudinhos de refrigerante e barbante, montados de forma que oferecessem articulações móveis (figura 4.9.1). Justamente essa característica de mobilidade permitiu a rotação e a flexão dos lados das figuras construídas pelas alunas, o tipo de movimento adequado para apreensão das suas propriedades geométricas.

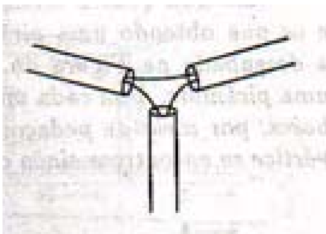


Figura 4.9.1 – Exemplo de material articulado.

Inicialmente, foi solicitado às alunas que escrevessem o próprio conceito de *quadrado*. Quadrado talvez seja a figura plana mais conhecida e de representação mental mais fácil. Sua regularidade é utilizada em metáforas, para classificar algo muito certo. Essa regularidade decorre de algumas propriedades que compõem o seu conceito.

Em seguida, com o material disponível, foi solicitado que construíssem todas as figuras que se ajustassem exatamente ao conceito escrito. Das imperfeições dos conceitos elaborados, surgiram figuras divergentes do quadrado. Assim, na confrontação entre os objetos construídos e a representação mental que as alunas tinham sobre o quadrado, houve a desestabilização cognitiva e o conceito inicial sofreu um processo de desconstrução e reelaboração.

Prosseguindo, a atividade foi desenvolvida com base na rotação e na amplitude de movimento dos lados dos quadriláteros construídos, variando os ângulos internos, o comprimento dos lados, fazendo emergir toda a família dos quadriláteros, suas diferenças, semelhanças, propriedades e elos comuns, possibilitando, ao final, a elaboração de um mapa conceitual, com suas classes inclusivas.

Os conceitos construídos com base na Geometria Dinâmica foram:

1) O losango é uma figura plana, fechada, com quatro lados iguais.

2) O quadrado é uma figura plana, fechada, com quatro lados iguais e quatro ângulos iguais ou retos.

3) O quadrado é um caso particular do losango, ocorre quando todos os ângulos do losango forem iguais.

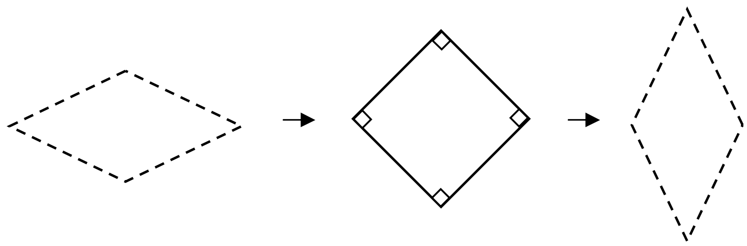


Figura 4.9.2 – Representações dinâmicas do losango.

4) O retângulo é uma figura plana, fechada, com quatro lados e quatro ângulos retos.

5) O quadrado é um caso particular do retângulo, ocorre quando todos os lados do retângulo forem iguais.

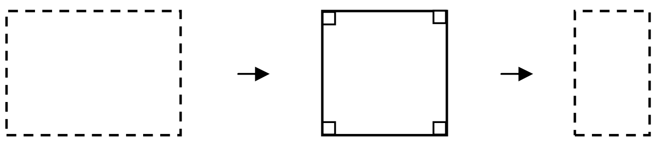


Figura 4.9.3 – Representações dinâmicas do retângulo.

6) O único losango que é retângulo é o quadrado, pois o quadrado é o losango com ângulos retos.

7) O único retângulo que é losango é o quadrado, pois o quadrado é o retângulo com quatro lados iguais.

8) O paralelogramo é uma figura plana, fechada, com quatro lados, cujos lados opostos são paralelos.

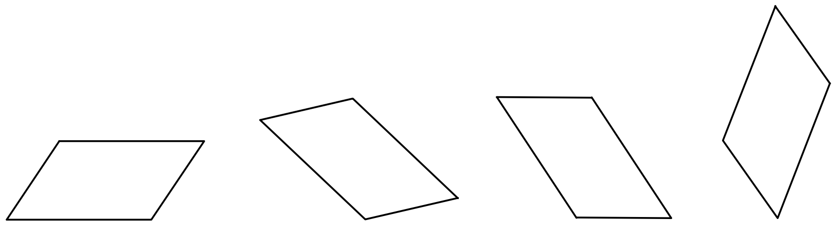


Figura 4.9.4 – Representações dinâmicas do paralelogramo.

9) O losango e o retângulo são paralelogramos, pois seus lados opostos são paralelos.

10) O trapézio é uma figura plana, fechada, com quatro lados sendo dois lados opostos paralelos.

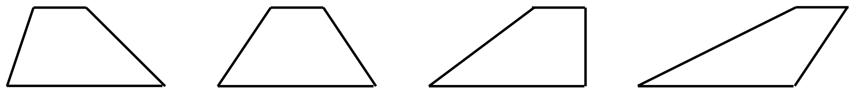


Figura 4.9.5 – Representações dinâmicas do trapézio.

Foi discutido que, conceitualmente, o trapézio pode ser considerado sob dois enfoques: 1) tem *pelo menos* dois lados opostos paralelos; nesse caso, todas as figuras anteriores enquadram-se nesse conceito e são, portanto, trapézios; 2) tem *somente* dois lados opostos paralelos; então ele constitui uma classe a parte.

Considerando o primeiro enfoque para o trapézio, os conceitos construídos possibilitaram a elaboração de um mapa conceitual para os quadriláteros, com as respectivas inclusões e intersecção de classes:

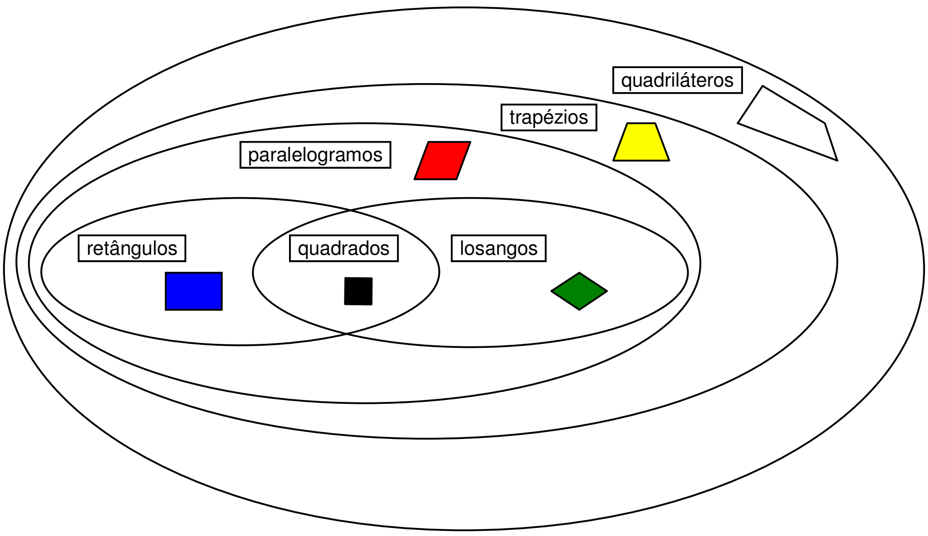


Figura 4.9.6 – Mapa conceitual dos quadriláteros.

A atividade "Produção de figuras planas com canudos e mapas conceituais" foi planejada com o propósito de oferecer às alunas um exemplo de situação didática vinculada às unidades "Construção e representação de formas geométricas", "Exploração de características de algumas figuras planas, tais como: rigidez triangular, paralelismo e perpendicularismo de lados, etc.", "Identificação de semelhanças e diferenças entre polígonos, usando critérios como número de lados, número de ângulos, eixos de simetria, etc." e "Representação de figuras geométricas", previstas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997).

A proposta pedagógica foi alicerçada com base na Geometria Dinâmica, na qual os conceitos geométricos emergem de características percebidas na sucessiva movimentação e variação das partes componentes do material concreto utilizado. Assim, as alunas puderam refletir sobre a natureza das figuras planas, em seus conceitos que, ao contrário do que supunham, não são estanques, mas interligados por propriedades comuns.

Os conceitos geométricos que foram mobilizados e construídos: quadrado, losango, retângulo, paralelogramo, trapézio, rigidez triangular, paralelismo, perpendicularismo, classe de inclusão. Esse último conceito permitiu o reconhecimento de uma Geometria mais lógica e estruturada.

4.10 RESULTADOS DA 5ª ATIVIDADE "PRODUÇÃO DE FIGURAS PLANAS COM CANUDOS E MAPAS CONCEITUAIS"

A atividade, iniciada propositalmente com a pergunta "o que é um quadrado?", permitiu a exteriorização e reflexão sobre um conceito há muito internalizado pelos sujeitos da pesquisa. Esse conceito foi então submetido a um processo de validação, numa situação didática de construção de possíveis objetos com material articulável, que satisfizessem a conceituação resgatada pela pergunta inicial. As representações iniciais, divergentes, provocaram uma desestabilização nos sujeitos e deram início à reelaboração do conceito de quadrado. No decorrer da atividade, outras figuras geométricas planas de quatro lados foram sendo introduzidas e conceituadas.

A aluna DANIELA percebeu o erro como estratégia de construção na atividade: *o desafio era conseguir abarcar todas as possibilidades de erro para assim acharmos o conceito ideal que caberia naquela figura.*

O erro representou o obstáculo a ser superado. À medida que os conceitos iniciais foram formulados, foram disseminados entre a turma. Dessa forma, a aluna VALÉRIA percebeu a inconsistência de seu conceito inicial:

> *quanto ao conceito de quadrado que construí: passa, eu diria, relativamente longe do conceito real de quadrado [...]. Durante o levantamento das concepções dos demais alunos é que comecei a perceber quão limitada era a minha visão de quadrado.*

Dessa forma, revelou a sua desestabilização e como a organização da atividade pedagógica proporcionou-lhe modificações sucessivas de seu conceito inicial, num processo contínuo de reflexão-comparação-reflexão.

A aluna FABIANA conceituou quadrado como sendo: *forma geométrica com quatro lados iguais*. A princípio, um conceito possível, baseado na característica mais evidente, a regularidade. Ao ser provocada a construir uma figura diferente do quadrado, que confirmasse as especificações do conceito dado, a aluna apresentou uma representação como esta:

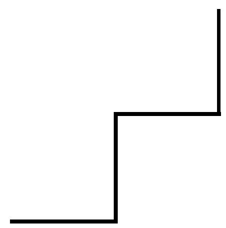


Figura 4.10.1 – Representação pertinente do quadrado, segundo conceito dado.

Considerando-se *lado* como qualquer segmento de reta, sua representação com uma figura aberta atende ao conceito proposto. A figura resultante, embora regular, não é um quadrado. O conceito proposto, portanto, é incompleto, não o individualiza.

A aluna VALÉRIA conceituou de forma semelhante: *é uma forma geométrica de quatro lados, sendo que todos os lados tem a mesma medida*. Sua representação, no entanto, ficou mais compatível com o caráter generalista do conceito dado, uma vez que utilizou ângulos de diversas medidas:

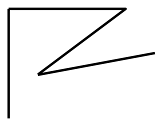


Figura 4.10.2 – Representação pertinente do quadrado, segundo conceito dado.

A aluna ZÉLIA, que conceituou como a aluna VALÉRIA, optou por uma representação radial, com ângulos diversos, como a figura 4.10.3:

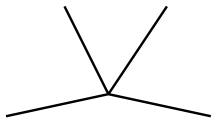


Figura 4.10.3 – Representação pertinente do quadrado, segundo conceito dado.

Os dois últimos exemplos demonstraram ao grupo que não basta ter os quatro lados iguais para ser um quadrado. A sua regularidade como figura geométrica é conseqüência de mais algumas características.

Para a aluna CLÁUDIA, quadrado *é uma forma geométrica que possui 4 lados iguais, com o mesmo comprimento, e cada lado deve estar oposto ao outro.* Nesse caso, a oposição dos lados mencionada permitiu que a representação recaísse sobre uma forma fechada, mas não necessariamente o quadrado, conforme demonstrou:

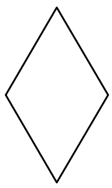


Figura 4.10.4 – Representação pertinente do quadrado, segundo conceito dado.

A aluna CLÁUDIA reconheceu a figura que representou, e percebeu que seu conceito poderia se referir ao losango.

Nesse momento, quando todas as alunas já haviam avaliado o seu conceito inicial, fiz uma intervenção sobre as características gerais dos quadriláteros, como sendo figuras geométricas planas e fechadas, com quatro lados. Por meio do material articulado, constituído de canudinhos e barbante, elevei um dos vértices de um losango, para as alunas perceberem que não se tratava mais da mesma figura:

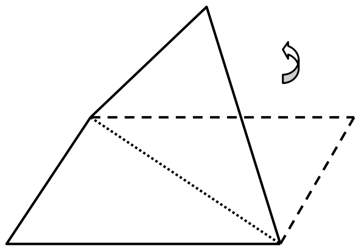


Figura 4.10.5 – Representação da mudança de plano de um losango.

As alunas concordaram que essas propriedades deveriam ter sido descritas, para que o conceito ficasse correto e não permitisse outro tipo de representação, como estava ocorrendo.

A aluna VALÉRIA, posteriormente comentou:

> *na verdade o que mais me chamou a atenção foi fato de ter usado o termo forma geométrica, o que não significa que essa forma representasse o quadrado, ainda que falasse na quantidade e na medida de lados. O que indicaria que era um quadrado seria a palavra quadrilátero, que define que a forma geométrica tem todos os lados se encontrando e formando ângulos, ou seja, são fechadas.*

Aproveitando o conceito inicial de CLÁUDIA, por intermédio de representações dinâmicas com o material articulado, conforme o esquema representado a seguir, concluímos o conceito de losango como a “figura geométrica plana e fechada, com quatro lados iguais”, e que seus ângulos não possuem medidas fixas:

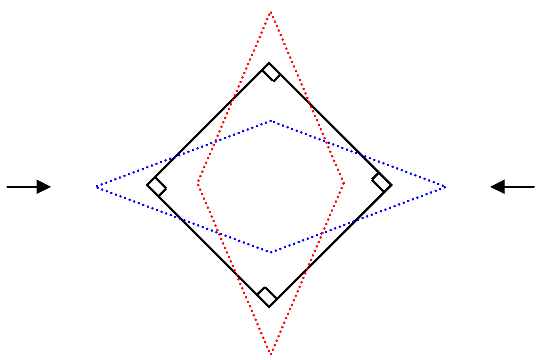


Figura 4.10.6 – Representações dinâmicas do losango.

A variação dos ângulos ficou bem perceptível nas representações dinâmicas do losango, fato que possibilitou observar que o losango, quando os ângulos atingem 90°, é um quadrado. Concluímos então que “todo quadrado é um losango”.

A aluna-professora GLÓRIA revelou sua crença antiga sobre losango: *quanto ao quadrado também ser um losango foi novidade. A imagem que tinha do losango era aquela da bandeira nacional. Tinha de ter os lados “achatados”.*

Sua crença revelou o conceito do losango baseado na forma usual, sendo condição necessária estar apoiado sobre um vértice.

A aluna VALÉRIA, apesar de participar ativamente da construção dos conceitos, na sua produção escrita ainda manteve a crença sobre a forma do losango: *mas, aos poucos foi possível assimilar que todo quadrado ao ser girado é um losango* (figura 4.10.7).

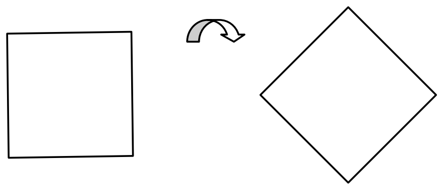


Figura 4.10.7 – Rotação do quadrado.

Para essa aluna, a identificação da forma ainda está associada à sua posição, ou seja, todo losango está de “pé”, apoiado sobre um vértice, e o quadrado só é losango se girar 45° e não ficar apoiado sobre um lado. Ela não conseguiu ainda conservar a forma do losango e nem a do quadrado independentemente do ponto de apoio das figuras, ou seja, sua “imagem” dos conceitos geométricos ainda não correspondem à aquisição completa desses conceitos (NASSER, TINOCO, 2004).

Sobre essa questão da imagem, Nasser e Tinoco (2004) afirmam: “Nos diversos estágios da construção de um conceito geométrico são criados exemplos protótipos, formados pelas imagens conceituais de cada indivíduo sobre esse conceito” (p.71). Nesse sentido, o protótipo se torna o elemento padrão representativo do conceito geométrico.

Em relação ao quadrado, os demais conceitos iniciais aproximaram-se um pouco mais do conceito científico. A aluna HELENA conceituou quadrado como: *uma figura geométrica que possui quatro lados iguais onde o ângulo que se forma* *entre os lados é de 90°.* Em seguida, representou uma figura que atende ao conceito, mas que não é um quadrado:

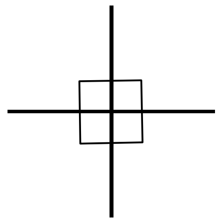


Figura 4.10.8 – Representação pertinente do quadrado, segundo conceito dado.

A própria aluna percebeu que ser *fechado* é uma condição obrigatória para o quadrado, para evitar ambigüidades na representação do conceito dado.

Uma variação do conceito anterior, expressando a igualdade dos ângulos, sem fixar a medida de 90°, foi apresentada pela aluna NARA: *figura geométrica que possui quatro lados e quatro ângulos iguais*. Contudo, permanece ausente a característica de ser fechado.

O conceito mais próximo foi o da aluna DANIELA: *figura geométrica fechada, que possui 4 segmentos de reta <u>iguais</u> formando 90° em todas as suas pontas (grifo do autor)*.

Na sua análise desse conceito, afirmou: *no caso do meu conceito, não seria um quadrado, pois não falei que é uma figura que estaria em um mesmo plano.* Para confirmar o que disse, representou:

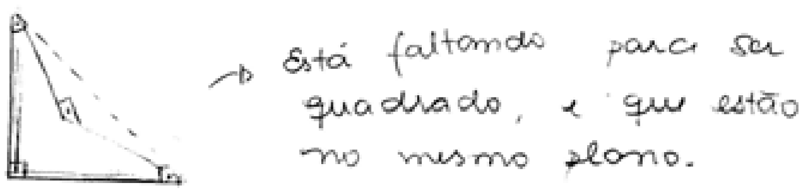


Figura 4.10.9 – Representação pertinente do quadrado, segundo conceito dado.

O tracejado da sua figura está representando a sombra dos lados, cujo vértice comum está num plano acima dos outros três vértices. A aluna percebeu a necessidade de conceituar o quadrado como uma figura plana.

A questão da tridimensionalidade também foi abordada pela aluna MÍRIAM. Seu conceito foi*: figura fechada formada por linhas retas e ângulos retos,* *em que seus quatro lados têm a mesma medida*. Na construção de figuras adequadas ao conceito, propôs:

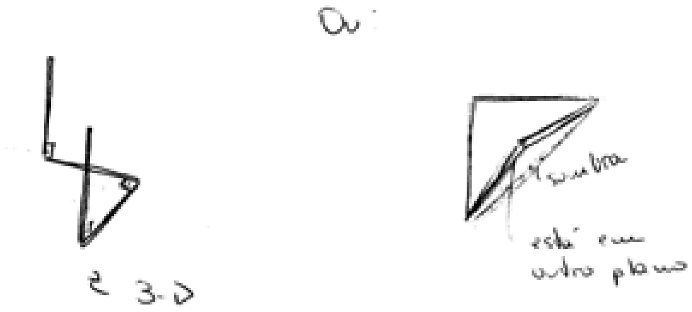


Figura 4.10.10 – Representações pertinentes do quadrado, segundo conceito dado.

Por fim, concluímos o conceito de quadrado como “figura geométrica plana e fechada, com quatro lados iguais e quatro ângulos iguais ou retos”,

O conceito de retângulo foi construído, também, por intermédio de representações dinâmicas com o material articulado. A partir do quadrado construído, com o auxílio de um canudo solto, foi possível explorar as variações de medida dos lados do retângulo e a invariabilidade dos ângulos internos:

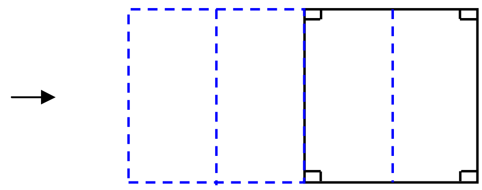


Figura 4.10.11 – Representações dinâmicas do retângulo.

Concluímos o conceito de retângulo como “figura geométrica plana e fechada, com quatro lados e ângulos retos”, daí a razão de seu nome, e que seus lados não possuem medidas fixas.

A variação dos lados ficou bem perceptível nas representações dinâmicas do retângulo, fato que possibilitou concluir que o retângulo, quando os lados são iguais, é um quadrado. Concluímos então que “todo quadrado é um retângulo”.

A aluna DANIELA percebeu a amplitude do conceito de retângulo para a inclusão do quadrado: *se simplesmente falássemos que era um polígono,* *quadrilátero com os 4 ângulos retos em um mesmo plano, já fechávamos o conceito, e com isso o quadrado também ficava sendo um retângulo*.

Os conceitos que a aluna-professora GLÓRIA tinha desde as séries iniciais eram

> *quadrado é uma figura geométrica que tem 4 lados iguais; retângulo também é uma figura geométrica com 2 lados iguais maiores que os outros dois lados, que também são iguais; losango é uma figura geométrica de 4 lados "achatados".*

Seu conceito de quadrado é o conceito de losango. A esse respeito ela comenta:

> *losangos e retângulos serem também polígonos paralelogramos, afinal todos tem os lados opostos paralelos, não havia pensado neste conceito e feito a ligação. Foi preciso um momento de estudo para "pensar" e reconstruir o conceito.*

A atividade suscitou inúmeras reflexões das alunas, em razão da ruptura com os conceitos prévios. A aquisição completa do conceito força o abandono do protótipo adotado.

Reflexões da aluna FABIANA:

a) Valorização da Geometria Dinâmica por meio da transformação sobre o concreto:

> *A parte fundamental dessa atividade, além dos conceitos teóricos das formas geométricas, foi fazer a montagem das formas com canudos ligados pelo barbante. Através desse material concreto, foi possível termos uma ação sobre as formas geométricas, ou seja, foi possível manipularmos as formas e descobrirmos que uma forma pode se transformar em outra, ou, que simplesmente, uma forma pode ser outra forma geométrica.*

b) Representações dinâmicas como mudança de representação social da Geometria:

> *Quando trabalhamos com material concreto, saímos da idéia de que podemos estudar apenas com o livro didático, apenas com formas estáticas, desenhadas em um papel. E quando fazemos isso, mudamos a representação social sobre o que vem a ser geometria, mudamos a relação de ensino-aprendizagem, professor-aluno, mudamos a concepção pedagógica.*

c) Apreensão das propriedades pela manipulação:

> *Ao manipular formas geométricas, o aluno deixa de memorizar terminologias geométricas e passa a compreender tanto as terminologias, como as propriedades de cada forma.*

Reflexões da aluna VALÉRIA:

a) Complexidade da inclusão de classes:

> *Ao ser solicitada a escrever o que é um quadrado não imaginei que por trás*

> *de uma pergunta ao meu ver tão simples, houvesse tantos pontos envolvidos na construção do conceito e ainda mais que havia relações tão estreitas entre este conceito e os conceitos de losango, retângulo e o paralelogramo.*

b) Construção do conceito associado à ação:

> *Foi uma aula muito interessante, de desconstrução e construção de conceitos. Mas há que se dizer que não é algo fácil nem para nós, adultos, quanto mais para crianças. Mas, como temos visto é preciso ir construindo esses conceitos a partir das vivências, do uso que fazemos da geometria em nossas vidas sem ao menos perceber.*

Reflexões da aluna DANIELA:

a) Ruptura e redescoberta:

> *A atividade foi bastante interessante, pois gerou muita discussão em torno dos conceitos, e principalmente na construção deles, realmente tivemos que "redescobrir" o que era quadrado, retângulo, etc.*

b) Conflito entre o conceito e sua utilidade:

> *Mas ainda fiquei na dúvida do quanto importante é saber o que é um quadrado, retângulo, etc. Terá um significado na vida das pessoas? Será que elas lembrarão disso? Possivelmente muito mais do que se a professora simplesmente explicasse o que seria um quadrado.*

Reflexões da aluna CLÁUDIA:

a) Desconstrução dos conceitos prévios

> *Foram para mim momentos reais e concretos de desconstrução de conceitos.*

Reflexões da aluna-professora GLÓRIA:

a) Ação sobre o concreto

> *Pensar para construir o conceito de cada uma dessas figuras e, principalmente, manuseando brincando com materiais concretos (barbante e canudinhos) ficou melhor mais prazeroso e esclarecedor em relação a desconstrução e reconstrução dos conceitos.*

Reflexões da aluna JÚLIA:

a) Complexidade em enumerar as propriedades suficientes

> *A aula acerca da construção dos conceitos geométricos demonstrou o quão complexo é conseguir um preceito de qualquer natureza matemática. Não basta desenvolver uma regra que sirva para um ponto de vista lógico, ela deve atender a todo o princípio que é apoiado pela lógica. Percebeu-se que consiste num desafio idealizar um conceito que seja aplicável a todas as atividades relacionadas ao assunto.*

Por meio da ação concreta de construção das figuras geométricas, as alunas construíram novas relações conceituais, representadas neste mapa conceitual dos quadriláteros (figura 4.10.12):

Figura 4.10.12 – Exemplo de mapa conceitual dos quadriláteros elaborado pelas alunas.

A elaboração do mapa conceitual dos quadriláteros como síntese de todo o aprendizado na atividade, na perspectiva do modelo van Hiele (1957) significou um movimento no sentido de contribuir para a elevação e a unificação dos níveis de pensamento geométrico das alunas em relação às figuras geométricas planas.

A compreensão das inclusões de classe construídas no mapa conceitual sugere a progressão para o nível 3 (dedução informal). Em função das respostas dadas, das surpresas reveladas ante as inter-relações construídas, possivelmente nenhuma das alunas encontrava-se nesse nível antes da atividade.

Contudo, é possível ter uma indicação aproximada sobre os níveis em que se encontravam. Os conceitos iniciais formulados pelas alunas sobre o *quadrado* surgiram da abstração e não do reconhecimento da *figura do quadrado*, fato que elimina a possibilidade de ocorrência do nível 1 (reconhecimento).

Todos os conceitos apresentados sobre o *quadrado* podem ser agrupados segundo dois indicadores de nível, desenvolvidos por Burger e Shaughnessy (1986), conforme o quadro 4.10.1.

Quadro 4.10.1 – Enquadramento dos conceitos nos níveis de pensamento geométrico.

Descrição do conceito inicial de QUADRADO apresentado pelas alunas na atividade	**INDICADORES de Burger e Shaughnessy**	**Na perspectiva da teoria dos van Hiele NÍVEL de desenvolvimento do pensamento geométrico**
Figura geométrica formada por quatro lados iguais	Classificação com base em um único atributo	Nível 2 (análise)
Forma geométrica de quatro lados sendo que todos têm a mesma medida		
Forma geométrica com 4 lados iguais		
Figura geométrica que tem 4 lados iguais		
Figura plana com 4 lados iguais		
Representação abstrata de um formato com quatro lados		
Figura fechada formada por linhas retas e ângulos retos, em que seus quatro lados têm a mesma medida	Classificação com base em caracterizações próprias	
Figura geométrica fechada que possui 4 segmentos de reta iguais formando 90º em todas suas pontas		
Forma com 4 lados, onde suas medidas são iguais. Ex: 4 lados iguais e 4 ângulos iguais		
Figura geométrica de quatro lados, quatro linhas, quatro retas, quatro ângulos, iguais		
Figura geométrica cujo todos os lados têm tamanhos iguais e seus ângulos internos possuem 90°		
Figura geométrica que possui quatro lados e quatro ângulos iguais		
Figura geométrica que possui 4 lados iguais onde o ângulo que se forma entre os lados é de 90°		
Forma geométrica que possui 4 lados iguais, com o mesmo comprimento, e cada lado deve estar oposto ao outro		
Forma geométrica com todos os lados simetricamente iguais. Deve ter os quatro lados do mesmo tamanho. A maneira de descobrir se está construído certinho é quando os 4 ângulos estão iguais		
Polígono de 4 lados iguais, com ângulos de 90° entre um e outro lado		

O último conceito do quadro, apesar de utilizar caracterizações próprias, está correto pois polígono é uma figura plana e fechada.

Os indicadores simplificam a análise e sugerem o nível 2 (análise), no qual as respostas são baseadas no reconhecimento das propriedades da figura geométrica, mas não são reconhecidas as propriedades mínimas, suficientes para a classificação. Um outro indicador do nível 2, *não utiliza inclusões de classes entre tipos gerais de formas*, verificado na atividade, reforça a indicação desse nível.

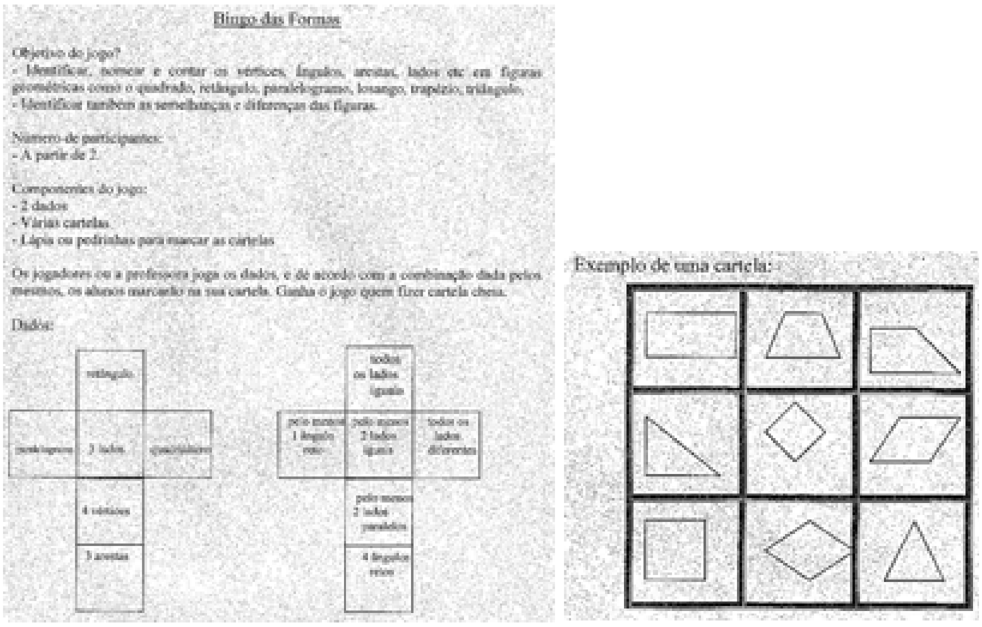
Devo salientar que não foi objetivo desta pesquisa determinar o nível do pensamento geométrico das alunas, para o qual existem instrumentos específicos. No entanto, para as futuras professoras dos anos iniciais do ensino fundamental, o que representa a possibilidade de estar no nível 3 do pensamento geométrico?

Um curso sistemático de Geometria, na 7ª série do ensino fundamental, exige o raciocínio peculiar ao nível 4 (dedução) e as pesquisas têm mostrado que a maioria dos alunos alcança essa escolaridade raciocinando no nível 1 (reconhecimento), ou até abaixo dele (NASSER, TINOCO, 2004).

A questão que se configura ao futuro professor não é tão somente saber mais Geometria, mas também preocupar-se em elevar o nível do pensamento geométrico dos seus alunos dos anos iniciais, para que eles, no futuro, possam compreender os conteúdos mais complexos, que demandam raciocínio dedutivo.

Um dos instrumentos de avaliação desta disciplina constituiu-se num jogo inédito envolvendo conteúdo matemático tratado ao longo do curso, criado e confeccionado pelas alunas. Na elaboração do seu jogo geométrico, "Bingo das Formas", como pode ser visto na figura 4.10.13, a aluna SIMONE aplicou os conceitos construídos, privilegiando várias relações entre os diversos quadriláteros, de acordo com o mapa conceitual elaborado em sala.

Uma relação que ficou ausente foi a intersecção entre o losango e o retângulo, ou seja, o quadrado, mas o jogo também tem o mérito de explorar a impossibilidade de construção de determinadas combinações entre os dois dados como, por exemplo, *retângulo* e *todos os lados diferentes*.



Bingo das Formas

Objetivo do jogo?
- Identificar, nomear e contar os vértices, ângulos, arestas, lados etc em figuras geométricas como o quadrado, retângulo, paralelogramo, losango, trapézio, triângulo.
- Identificar também as semelhanças e diferenças das figuras.

Número de participantes:
- A partir de 2.

Componentes do jogo:
- 2 dados
- Várias cartelas
- Lápis ou pedrinhas para marcar as cartelas

Os jogadores ou a professora joga os dados, e de acordo com a combinação dada pelos mesmos, os alunos marcarão na sua cartela. Ganha o jogo quem fizer cartela cheia.

Dados:

Figura 4.10.13 – Jogo geométrico baseado nas formas geométricas planas.

4.11 6ª ATIVIDADE: "PLANIFICAÇÃO DO CUBO"

O cubo é uma imagem abstrata, concebida pelo homem. A materialização dessa imagem revela uma figura tridimensional, e como tal ela pode ser planificada. Usualmente, os livros didáticos apresentam a planificação do cubo em forma de "cruz", estática e invariável, levando o aluno a imaginar que somente aquela representação é possível.

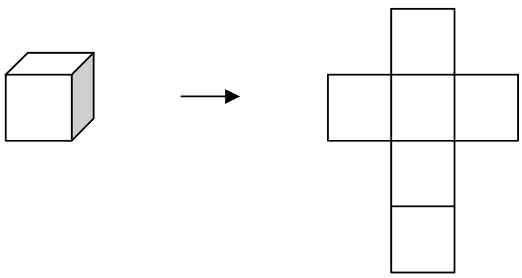


Figura 4.11.1 – Planificação usual do cubo.

O propósito desta atividade foi possibilitar a descoberta de outras formas de planificação do cubo, valorizando todos os resultados encontrados, corretos ou incorretos, na busca da conceitualização. Relembrando que a definição de planificar é planejar, a situação possibilitou também a aquisição de competências relativas ao planejamento de outros sólidos geométricos.

Inicialmente, os alunos foram divididos em grupo, para uma competição: tentar montar o maior número possível de diferentes planificações de um cubo, utilizando quadrados de cartolina de 10 cm x 10 cm e fita adesiva.

Para o grupo que se apresentasse à frente, a pontuação da competição ficou assim estabelecida:

- planificação válida inédita, ou seja, não apresentada ainda por outro grupo: 2 pontos;

- planificação válida repetida, ou seja, já apresentada por outro grupo ou referente à uma planificação anterior, mostrada em outra posição: 1 ponto;

- planificação inválida, com justificativa: 5 pontos.

O primeiro dia da atividade foi destinado ao processo de descoberta. O segundo, à apresentação dos resultados, uma planificação por vez, na ordem em que os grupos foram sorteados.

A atividade foi executada, em observância à estratégia metodológica do curso, no qual a aprendizagem dos conceitos geométricos deve estar associada a uma permanente movimentação, conforme o diagrama 4.11.1:

APRENDER GEOMETRIA
↓
CONSTRUIR CONCEITOS
↓
PERMANENTE (RE)ELABORAÇÃO
↓
REPRESENTAÇÕES DINÂMICAS
↓
MOVIMENTO DOS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS QUE COMPÕEM A FIGURA
↓
PROPRIEDADES EM AÇÃO
↓
PAPEL DO ERRO NA CONCEITUALIZAÇÃO
↓
A SALA DE AULA COMO ESPAÇO PARA DISCUSSÃO DOS ERROS

Diagrama 4.11.1 – Esquema dos fundamentos metodológicos da atividade.

A atividade “Planificação do cubo” foi planejada com o propósito de oferecer às alunas um exemplo de situação didática vinculada às unidades “Reconhecimento de semelhanças e diferenças entre poliedros (como os prismas, as pirâmides e outros) e identificação de elementos como faces, vértices e arestas", "Estabelecimento de comparações entre objetos do espaço físico e objetos geométricos – esféricos, cilíndricos, cônicos, cúbicos, piramidais, prismáticos – sem uso obrigatório de nomenclatura", "Composição e decomposição de figuras tridimensionais, identificando diferentes possibilidades", "Exploração das planificações de algumas figuras tridimensionais" e "Percepção de semelhanças e diferenças entre cubos e quadrados, paralelepípedos e retângulos, pirâmides e triângulos, esferas e círculos", previstas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997).

A proposta pedagógica foi alicerçada na valorização e discussão do erro como instrumento para a elaboração de conceitos geométricos. Da análise e discussão dos erros cometidos pode surgir a formulação de condições necessárias, no processo de conceitualização.

Os conceitos que foram mobilizados: planificação, face, vértice, aresta, simetria.

4.12 RESULTADOS DA 6ª ATIVIDADE "PLANIFICAÇÃO DO CUBO"

No início da atividade, as alunas experimentaram variações imediatas da planificação tradicional em "cruz", objetivando acumular o maior número possível representações para pontuar na competição. Trabalhando em grupo, logo perceberam que havia mais quatro possibilidades de planificação, bastando variar a posição dos "braços" da cruz ao longo do eixo maior:

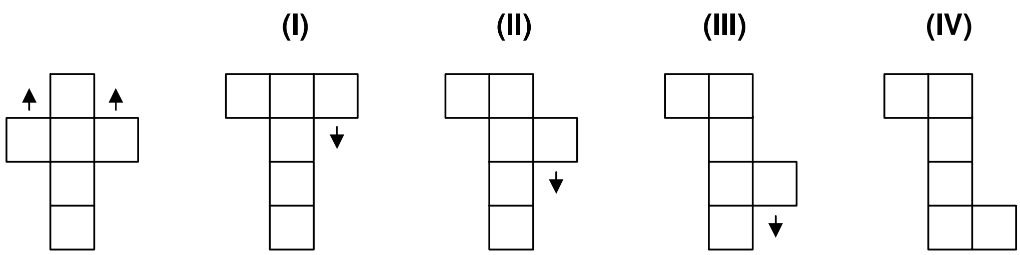


Figura 4.12.1 – Variações da planificação usual do cubo.

As ações alternavam-se entre montar e desmontar a planificação e efetuar o registro. O pensamento que se seguiu foi que o número de possibilidades aumentava pela simples rotação da figura:

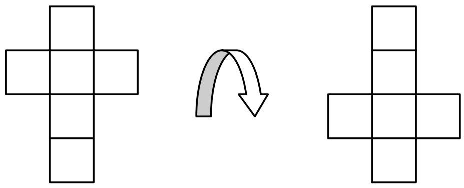


Figura 4.12.2 – Rotação de uma planificação com disposição simétrica.

Na seqüência da experimentação, perceberam que se a figura tivesse os “braços” colocados sem simetria em relação ao eixo maior, o número de possibilidades por rotação aumentava. Entretanto, na hora da apresentação dos grupos, não aceitaram pontuar essas formas como inéditas, considerando-as repetidas. As figuras abaixo exemplificam as possibilidades de um modelo de representação, obtidas por rotação:

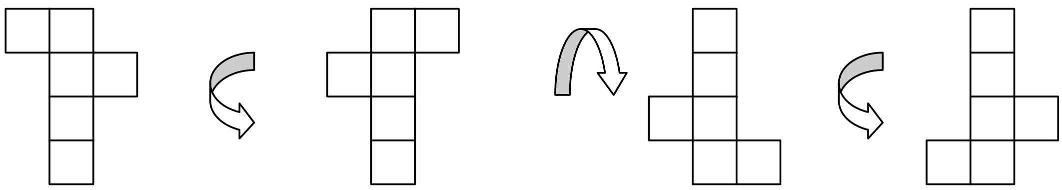


Figura 4.12.3 – Rotações de uma planificação sem disposição simétrica.

Apesar das rotações, as alunas conservaram a forma original da planificação, o que indicou capacidade de percepção.

Um dos grupos não compreendeu a possibilidade de obter mais pontos na descoberta de planificações erradas:

> *Porém, eu e minha parceira não entendemos direito as regras do jogo, achamos que teríamos que achar formas esquisitas de planificação do cubo e mesmo assim conseguiríamos formá-lo, teríamos que convencer a turma que estávamos certas. Por isso, gastamos nosso tempo em fazer as formas corretas e diferentes do cubo (DANIELA).*

Outras possibilidades positivas de representação foram percebidas pelas alunas. Como regra geral, todas as planificações foram obtidas mediante experimentação, por tentativa, na verificação se “fechavam” ou não. Nessa fase, a planificação em cruz já estava bem descaracterizada:

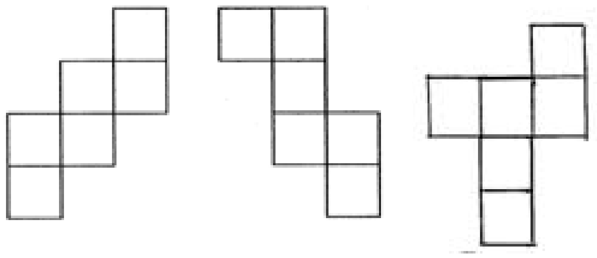


Figura 4.12.4 – Planificações do cubo divergentes da planificação em cruz.

Muitos exemplares foram encontrados, mas muitos outros poderiam ter sido obtidos, se da experimentação tivesse surgido a inferência. Partindo-se de uma planificação conhecida como válida, o teorema-em-ação aplicável à situação é: *rotacionando-se parte de uma planificação válida, ela permanece válida.*

Por exemplo, a planificação (II) abaixo é correta porque, por intermédio de uma rotação parcial, originou-se da planificação (I), reconhecidamente correta:

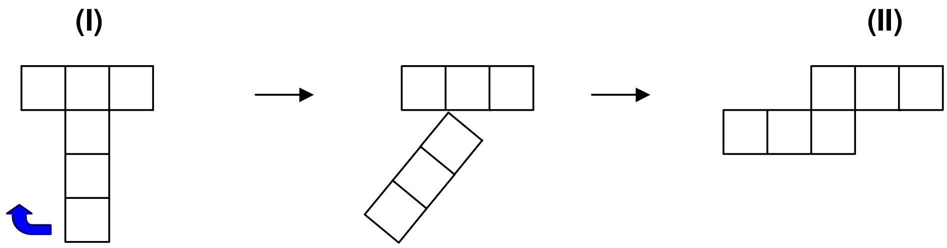


Figura 4.12.5 – Planificação decorrente de uma rotação.

O tratamento dado pelas alunas à situação foi puramente experimental. Da estratégia de modificar aleatoriamente a posição das faces não resultou nenhum raciocínio que desencadeasse inferências.

Um conceito-geométrico-em-ação que está subjacente a uma planificação correta do cubo é: *em qualquer vértice do cubo concorrem três arestas.* Visualmente, isso é indiscutível. Basta pegar o cubo de “ponta” e observar o “Y” formado pelas arestas. Entretanto, quando se faz a transposição da figura tridimensional para a bidimensional, verifica-se que as arestas coincidentes são separadas na planificação, elevando o número de arestas que chegam a um mesmo vértice, fato que pode criar obstáculos de visualização. O conceito-geométrico-em-ação fica melhor elaborado se expressar a relação direta entre vértice e faces: *cada vértice (V) do cubo é o ponto de encontro de três faces (F1, F2 e F3).*

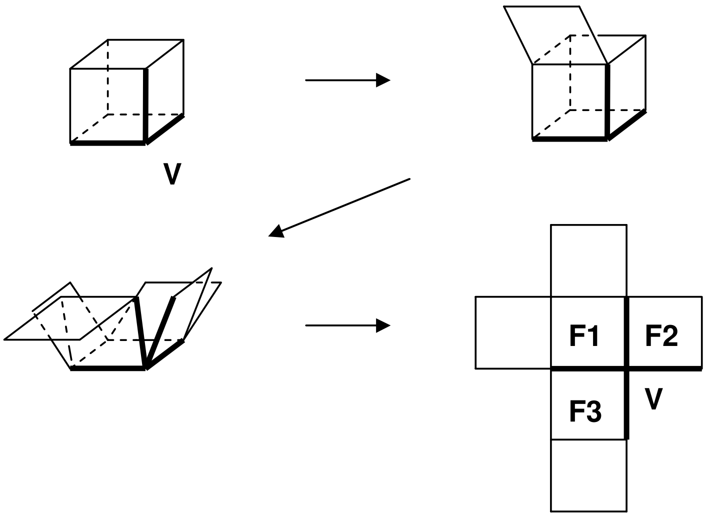


Figura 4.12.6 – Representação do conceito-geométrico-em-ação sobre o vértice do cubo.

Com esse conceito internalizado, a situação de busca de planificações ficaria mais orientada. Por exemplo, a planificação a seguir é incorreta:

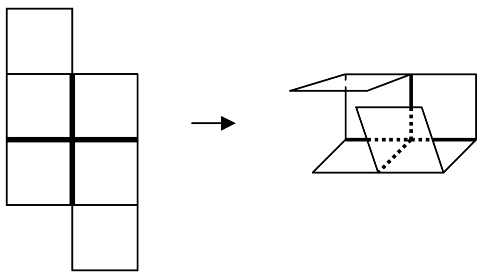


Figura 4.12.7 – Planificação que não atende o conceito-geométrico-em-ação sobre vértice.

Na tentativa de montagem do cubo, ocorreu uma sobreposição de faces e, conseqüentemente, um lado ficou aberto. O teorema-em-ação pertinente é: *não se forma o cubo quando a planificação possui quatro faces encontrando-se em um único vértice.*

Na condição de ferramenta para a análise, a posse desse teorema-em-ação permitiria não só justificar diversas planificações inválidas, quanto orientar a busca de planificações válidas.

Ao todo, há nove possibilidades de planificação inválida do cubo, sem repetições, onde o encontro de quatro arestas é diretamente perceptível.

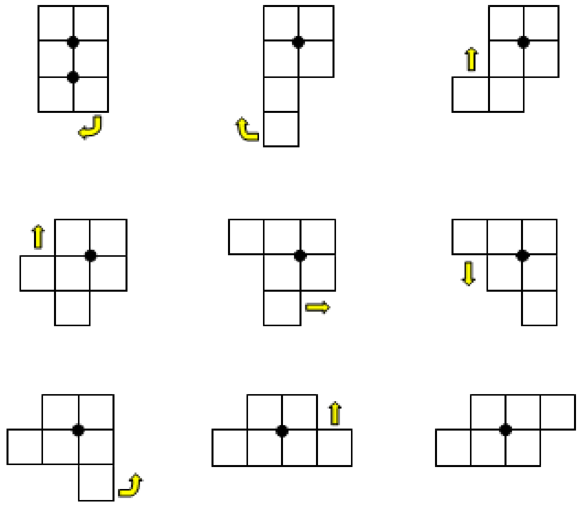


Figura 4.12.8 – Planificações com o encontro visível de quatro arestas.

Há, entretanto, casos de planificação em que o encontro de quatro arestas em um vértice não é prontamente visualizado. É necessário que haja uma manipulação do material concreto e, na seqüência de ações, surja o encontro na figura tridimensional:

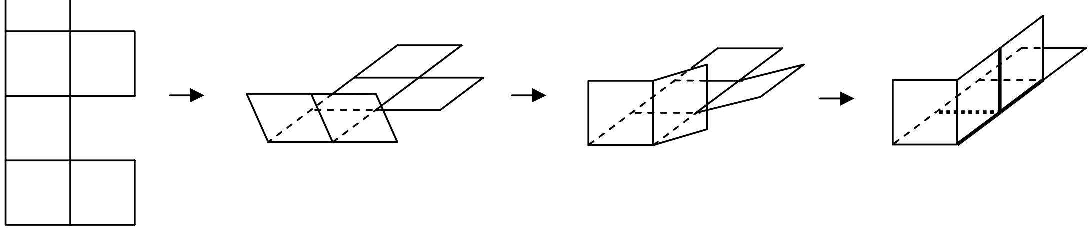


Figura 4.12.9 – Planificação com o encontro não visível de quatro arestas.

No instante em que se configurar o encontro de quatro arestas, pode-se ter a certeza de que a planificação é inválida e a montagem resultará em sobreposição de faces:

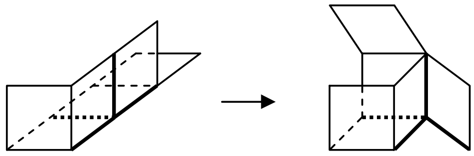


Figura 4.12.10 – Planificação que resulta em sobreposição de faces.

As alunas, na continuidade da atividade, perceberam que se mantendo um alinhamento de quatro faces e colocando-se as duas faces restantes do mesmo lado, não haveria possibilidade de formação do cubo. Explicitaram o seguinte teorema-em-ação: *quando alinhar quatro faces, não pode colocar as outras duas do mesmo lado.*

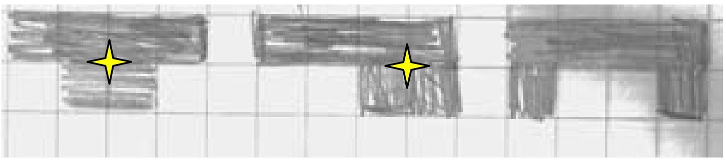


Figura 4.12.11 – Planificações resultantes de teorema-em-ação descoberto.

Nas duas primeiras planificações, o encontro de quatro faces em um único vértice é visível, conforme assinalado na figura 4.12.11. Na última planificação, o encontro surgiria nas ações de montagem da figura tridimensional.

A manipulação do material não possibilitou a construção do conceito-geométrico-em-ação. A justificativa que as alunas apresentaram foi: *é errado porque um lado vai ficar sobreposto ao outro e vai faltar um lado do cubo*. Na verdade, o argumento contém o efeito e não a causa, não pode ser considerado como uma justificativa.

Ainda, mantendo-se o alinhamento de quatro faces, outras impossibilidades surgiram devido à sobreposição de faces.

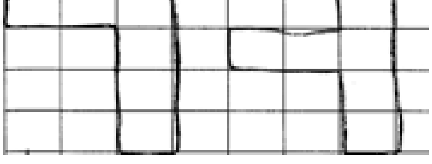


Figura 4.12.12 – Planificações resultantes de variação do teorema-em-ação descoberto.

A percepção seguinte foi em relação ao eixo principal. *Cinco ou seis faces alinhadas não permitem a planificação do cubo* foi o teorema-em-ação empregado. Nesse caso, o conceito-geométrico-em-ação foi construído pelas alunas: *o cubo possui somente quatro faces alinhadas.*

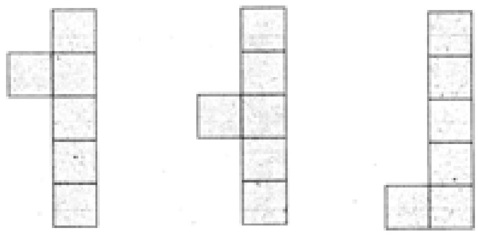


Figura 4.12.13 – Planificações resultantes de conceito-em-ação construído.

A partir de certo momento, as alunas começaram a explorar a possibilidade de unir as peças pelos vértices, com apenas um ponto de contato. Para a atividade isso foi considerado muito positivo, pois permitiria a mobilização de outras estruturas cognitivas:

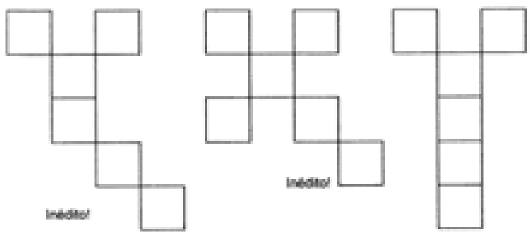


Figura 4.12.14 – Planificações resultantes de união pelos vértices.

Uma planificação com faces ligadas pelos vértices é muito mais flexível, permite uma variedade de seqüências de montagem, conforme a rotação que se dê a essas faces. As montagens tanto podem ser válidas como inválidas, dependendo dos conhecimentos-em-ação que o sujeito mobilizar para tratar a situação. Isso pode resultar em maior número de pontuações com uma só planificação.

Na atividade, uma planificação foi questionada e esse fato deveria ter alertado a todos para a dupla possibilidade. Um grupo submeteu uma planificação inválida empregando o seguinte teorema-em-ação: *quando houver dois quadrados alinhados, não pode haver quadrado nas pontas que ligam* *os dois quadrados alinhados, apenas se pode colocar os demais nas pontas das extremidades.*

A justificativa em si foi bastante complexa, porque envolveu descrever posições na planificação sem o recurso de outros elementos lingüísticos. A aluna JÚLIA retratou a dificuldade: *não foi fácil desenvolver justificativas para o conjunto das inúmeras impossibilidades de se construir um cubo.*

O grupo estava se referindo a esta planificação:

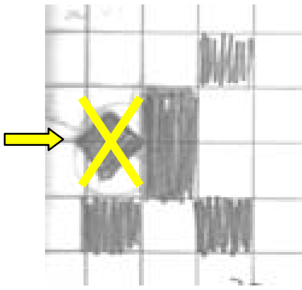


Figura 4.12.15 – Planificação representativa de teorema-em-ação construído.

A planificação foi refutada pelas alunas, que a testaram e a consideraram válida. Para justificar essa condição, imprimiram três movimentos de rotação:

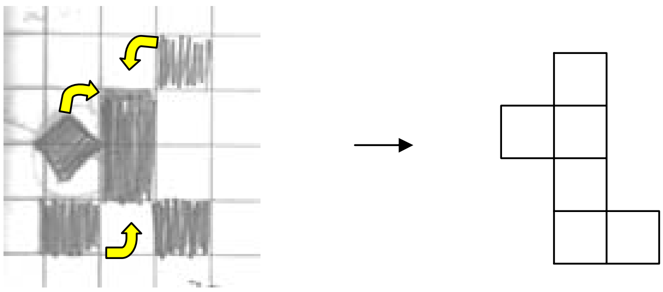


Figura 4.12.16 – Invalidação do teorema-em-ação construído.

O grupo que a apresentou não conseguiu contra-argumentar, nem montar uma planificação inválida, como tinham proposto inicialmente. No entanto, bastavam dois movimentos para formar o encontro de quatro faces, como demonstra a figura 4.12.17:

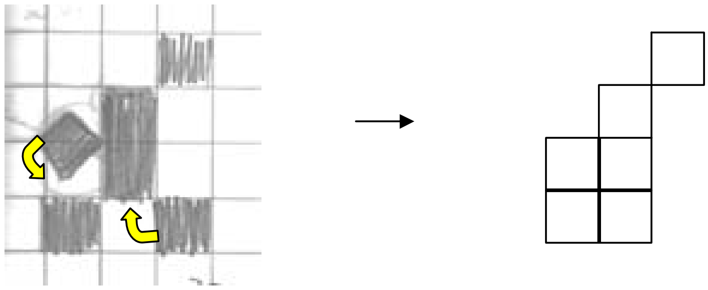


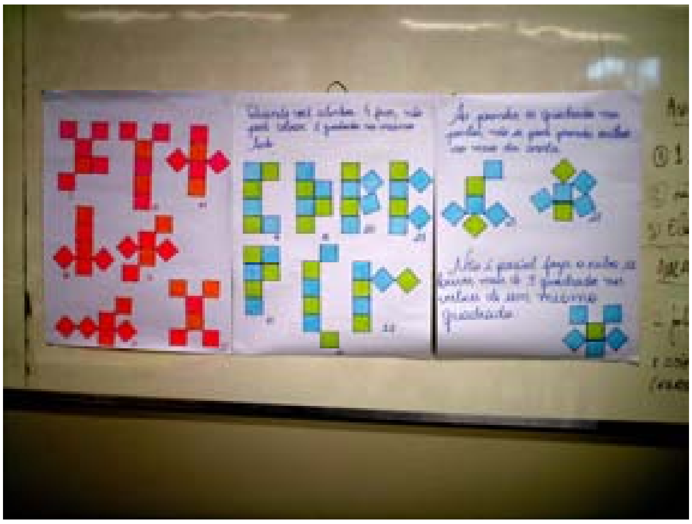
Figura 4.12.17 – Validação do teorema-em-ação construído.

Na realidade, a planificação proposta pelo grupo, assim como outras, permitiria inúmeras variações, válidas e inválidas. No entanto, essa possibilidade não foi explorada, todas as planificações desse tipo foram montadas de uma única forma.

Ao final, os grupos que se apresentaram para competir obtiveram os seguintes resultados, conforme o registro na figura 4.12.18:

GRUPOS	INÉDITOS (2 PTS)	REPETIDOS (1 PT)	NEGATIVOS (5 PTS) C/ JUSTIFICATIVA	TOTAL
1	⧄ I 12	⧄ □ 9	⧄ ⧄ / 55	76
2	⧄ 10	⧄ ⧄ ⊓ 13	0	23

Figura 4.12.18 – Resultado da competição de descoberta de planificações do cubo.



Fotografia 4.12.1 – Exemplares de cartaz com propostas de planificação do cubo.

Ao todo, foram apresentadas 11 planificações válidas, 22 planificações repetidas e 11 planificações inválidas, conforme exemplares da fotografia 4.12.1. Em relação ao total de possibilidades, esses números significaram poucas planificações descobertas, mas foram suficientes para promover o debate.

As alunas vivenciaram uma situação onde o erro não só foi valorizado, como considerado essencial para o processo de conceitualização. O conceito e os teoremas construídos na atividade surgiram da desestabilização cognitiva e da ação efetiva e autônoma das alunas.

O conceito-geométrico-em-ação relativo ao número de faces alinhadas do cubo foi construído porque resultou de uma experiência de percepção e requisitou estruturas pertencentes ao nível de pensamento geométrico das alunas.

A construção do conceito-geométrico-em-ação relativo ao número de faces no vértice do cubo envolvia um raciocínio dedutivo, apoiado na visualização. Possivelmente não foi construído porque dependeu de um nível mais elevado de pensamento geométrico daquele em que se encontravam as alunas. Contudo, foram empregados teoremas-em-ação que deram suporte à atividade de classificação de algumas planificações não válidas.

Para a construção do conceito relativo ao número de faces associadas a um vértice, proponho uma atividade preliminar de visualização que pode servir de guia para o pensamento dedutivo de quem não está habituado às relações entre arestas, faces e vértices dos sólidos geométricos:

a) O núcleo da proposta está na transposição da planificação do tetraedro tri-retangular, obtido de um “corte” inclinado do cubo, entre três vértices não adjacentes. A idéia é isolar um vértice, diminuindo o número de faces da figura, e nele fazer sobressair o encontro das três faces ortogonais:

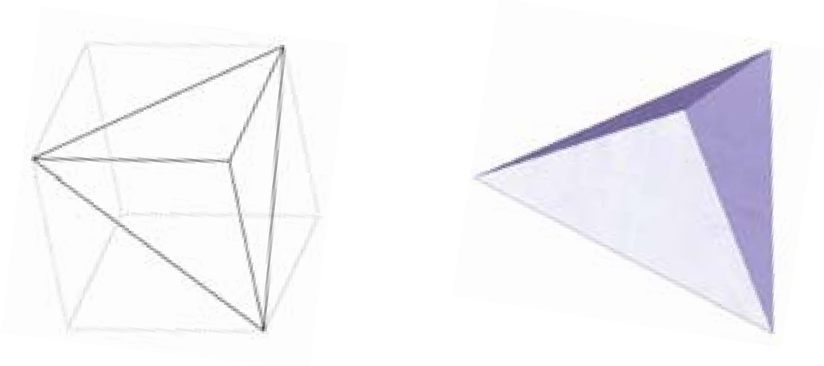


Figura 4.12.19 –Tetraedro tri-retangular originado em um vértice do cubo.

b) A primeira planificação proposta explora a necessidade de unir as três faces no vértice do tetraedro. A atividade a ser sugerida é: recorte e cole numa cartolina a planificação a seguir e monte o sólido geométrico.

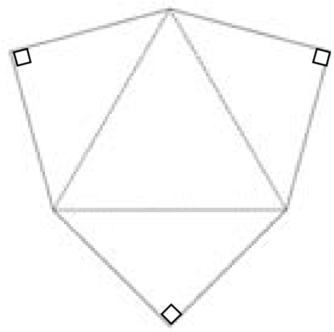


Figura 4.12.20 – Planificação do tetraedro tri-retangular que forma o vértice do cubo.

c) As três arestas desse sólido formam um ângulo de 90° no vértice. Para essa condição ficar mais evidente, uma segunda planificação em que as faces já estejam ligadas ao vértice poderá ser sugerida:

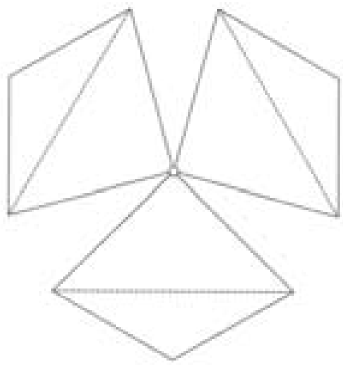


Figura 4.12.21 – Planificação do tetraedro tri-retangular com o vértice do cubo já formado.

d) Por fim, propor a transposição do cubo com uma planificação na qual falte uma face. A atividade a ser sugerida é: recorte e cole numa cartolina a planificação a seguir e tente montar o sólido geométrico.

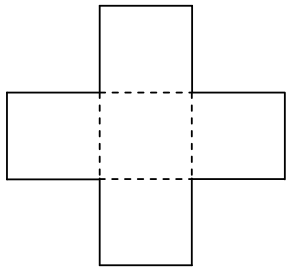


Figura 4.12.22 – Planificação incompleta do cubo.

O exercício de montagem dessa última planificação poderá finalmente conduzir o raciocínio sobre a necessidade de se ter três, e apenas três, faces associadas a cada vértice do cubo, uma vez que nos quatro vértices superiores estará faltando uma face, e nos quatro vértices inferiores estarão ligadas somente três faces:

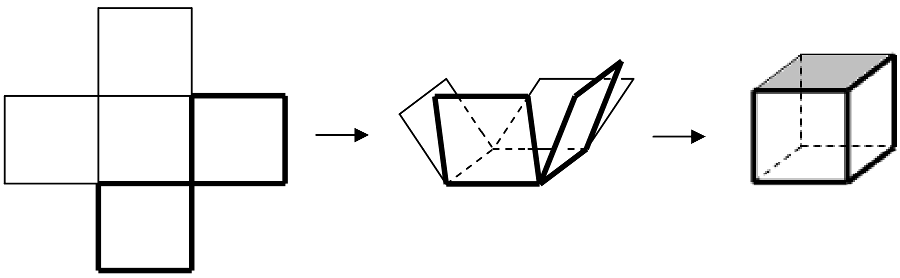


Figura 4.12.23 – Transposição da planificação incompleta do cubo.

e) Havendo necessidade, poderá ser proposta uma planificação completa do cubo, onde três faces encontram-se ligadas a um vértice:

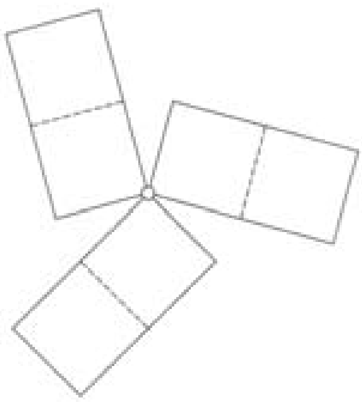


Figura 4.12.24 – Planificação do cubo com um vértice já formado.

4.13 7ª ATIVIDADE "TANGRAM: COMPOSIÇÃO E DECOMPOSIÇÃO DE FIGURAS PLANAS"

O propósito desta atividade foi construir o *tangram*, milenar quebra-cabeça chinês, composto de sete peças, a partir de uma folha de papel e por meio do origami. O processo de construção permitiu um domínio maior sobre diversas figuras planas e a percepção das relações existentes entre elas.

O processo foi executado em sete passos, intercalado com questões conceituais, tais como congruências, terminologias, semelhanças, composição e conservação de superfície, colocadas ao grupo durante a realização da atividade:

1º) Tome uma folha de papel ofício e forme o maior quadrado possível, dobrando-a formando um triângulo, até que o vértice coincida com o lado oposto.

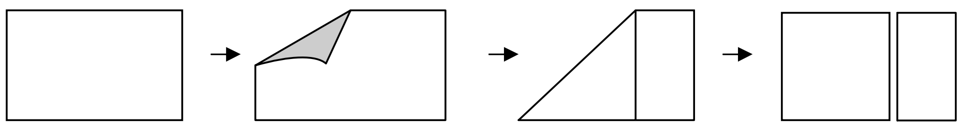


Figura 4.13.1 – 1º passo da construção do tangram.

Por que a figura formada é um quadrado? A pergunta explora o rebatimento do lado menor sobre lado maior, resultando em congruência de lados. O transporte do ângulo reto, ou seja, o paralelismo da dobradura realizada define os outros dois lados do quadrado.

2º) Pela diagonal, divida o quadrado em dois triângulos.

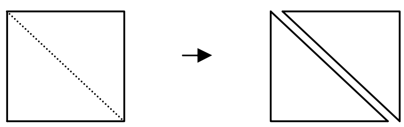


Figura 4.13.2 – 2º passo da construção do tangram.

Que tipo de triângulo foi obtido? A pergunta introduz a terminologia *triângulo retângulo isósceles* e destaca a congruência dos dois lados menores, que eram os dois lados do quadrado. O lado maior é a antiga diagonal do quadrado.

Forme um triângulo e um paralelogramo com os dois triângulos.

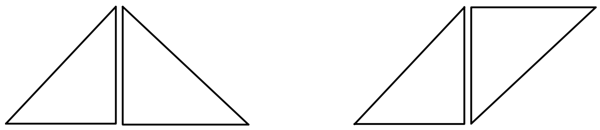


Figura 4.13.3 – Trabalho de conservação de área com duas peças iniciais do tangram.

As tarefas propostas demonstram as possibilidades de composição de outras figuras com dois triângulos retângulos isósceles congruentes: pelo lado maior, um quadrado, de onde se originaram; pelo lado menor, um paralelogramo e um triângulo maior.

Qual das figuras formadas possui maior área, o triângulo maior ou o paralelogramo? A pergunta provoca o raciocínio sobre a conservação de superfície, uma vez que não foi adicionada ou suprimida qualquer peça. As figuras envolvidas possuem mesma altura e comprimento.

3º) Pela altura, divida um dos triângulos ao meio.

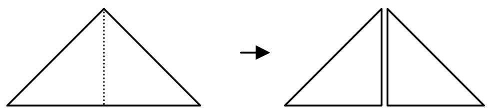


Figura 4.13.4 – 3º passo da construção do tangram.

Verifique se o triângulo maior e o triângulo menor são proporcionais.

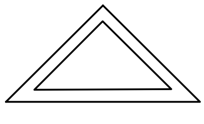


Figura 4.13.5 – Trabalho de verificação de proporcionalidade.

A altura é a perpendicular baixada de um vértice até o lado oposto. Dessa forma, o triângulo retângulo isósceles maior foi decomposto em dois triângulos retângulos isósceles congruentes. Por que razão são isósceles? Porque os dois lados menores são iguais a semi-diagonal do quadrado inicial.

A sobreposição do triângulo menor sobre o triângulo maior foi uma oportunidade para explorar a relação metade/inteiro no plano bidimensional, que requer estruturas cognitivas mais complexas.

Forme um retângulo, um triângulo e um trapézio com os três triângulos.

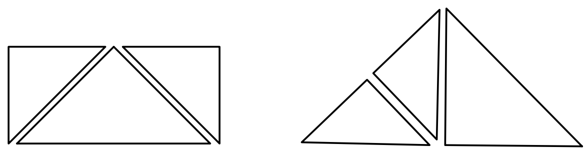


Figura 4.13.6 – Trabalho de conservação de área com três peças iniciais do tangram.

Qual dessas figuras formadas, retângulo, triângulo e trapézio, possui maior área? Uma nova pergunta sobre a conservação de superfície, aproveitando-se do acréscimo de peças e variações significativas de altura e comprimento das figuras formadas.

4º) Apóie o triângulo maior pela base maior, marque a metade da base, coincida o vértice nesse ponto e retire o triângulo formado.

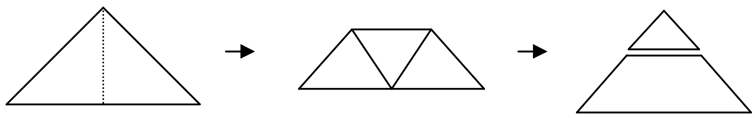


Figura 4.13.7 – 4º passo da construção do tangram.

Forme um paralelogramo com as quatro peças; em seguida, monte outros dois paralelogramos.

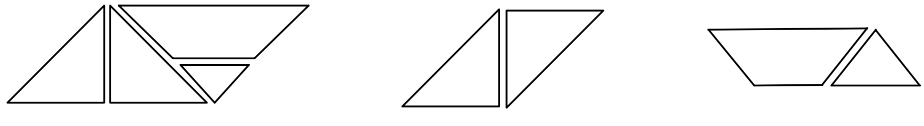


Figura 4.13.8 – Trabalho de conservação de área com quatro peças iniciais do tangram.

5º) Apóie o trapézio pela base maior, marque a metade da base, dobre uma ponta, coincidindo o vértice nesse ponto e retire o triângulo formado.

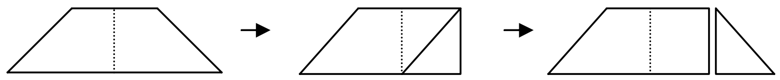


Figura 4.13.9 – 5º passo da construção do tangram.

Forme um triângulo com as cinco peças.

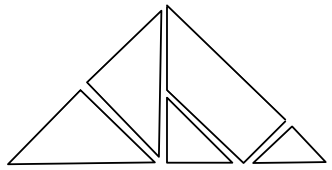


Figura 4.13.10 – Trabalho de conservação de área com cinco peças iniciais do tangram.

6º) Retire o quadrado formado pela dobra ao meio da base menor.

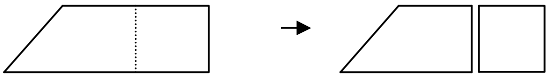


Figura 4.13.11 – 6º passo da construção do tangram.

7º) Por fim, dobre o canto reto da base maior, coincidindo a ponta com a base menor e retire o triângulo.

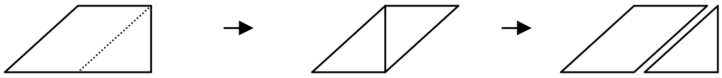


Figura 4.13.12 – 7º passo da construção do tangram.

Forme o quadrado inicial.

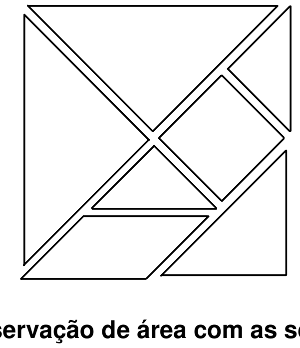


Figura 4.13.13 – Trabalho de conservação de área com as sete peças do tangram.

O processo de construção possibilitou identificar as possibilidades de composição das formas geométricas, empregando-se congruência entre os lados e soma de ângulos, e a conservação de superfície. Introduziu também nomenclaturas e propriedades de alturas e ângulos.

A atividade seguinte procurou explorar a utilização conjunta de peças do tangram, propondo a reprodução das figuras abaixo (ELFFERS, 1988, p. 3, 13, 22, 41), nas quais não está aparente a posição das peças:

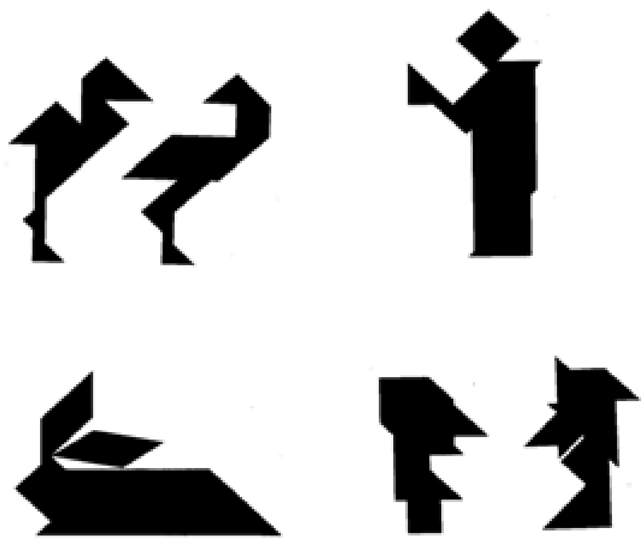


Figura 4.13.14 – Exercícios de visualização com as sete peças do tangram.

A atividade "Tangram: Composição e Decomposição de Figuras Planas" foi planejada com o propósito de oferecer às alunas um exemplo de situação didática vinculada às unidades "Composição e decomposição de figuras planas e identificação de que qualquer polígono pode ser composto a partir de figuras triangulares", embora somente algumas decomposições em triângulos tenham sido exploradas, e "Exploração de características de algumas figuras planas, tais como: rigidez triangular, paralelismo e perpendicularismo de lados, etc", previstas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997).

A proposta pedagógica foi alicerçada na articulação entre a construção do material concreto e as possibilidades de composição das figuras geométricas destacadas no próprio processo de construção do material.

Os conceitos que foram mobilizados, além das figuras planas conhecidas: base, altura, diagonal, área, triângulo retângulo isósceles, ângulo raso, congruência.

4.14 RESULTADOS DA 7ª ATIVIDADE "TANGRAM: COMPOSIÇÃO E DECOMPOSIÇÃO DE FIGURAS PLANAS"

O processo de construção do *tangram* ofereceu muitas oportunidades para observação do pensamento geométrico plano das alunas. As questões intercaladas entre a produção de cada uma das sete peças foram acumulando complexidade justamente em função do número de peças construídas. Para o seu enfrentamento, cada fase do processo exigiu das alunas a mobilização de estratégias cognitivas cada vez mais significativas em relação à anterior.

Um conceito-geométrico-em-ação que esteve presente em toda atividade foi o da conservação de área, pois mesmo com as sucessivas divisões da figura inicial, a área total era sempre a mesma. As operações de composição de novas figuras geométricas, além da dificuldade de visualizar e agrupar as peças, procurou evidenciar a todo o momento a preservação da superfície.

Outro conceito-geométrico-em-ação que foi construído é possibilidade de decomposição das figuras planas em triângulos. Das sete peças do tangram, cinco são triângulos, que ajudaram a formar as figuras propostas pelas questões e a construir o conceito.

Quando solicitadas a reagrupar as peças, as alunas apresentaram diferentes graus de domínio sobre a atividade. Algumas demonstraram muita dificuldade. Algumas precisaram, inclusive, consultar o arranjo de outra. Sobre essa atividade, a aluna FABIANA comentou em seu relatório do projeto de intervenção: "*Reconheço que essa atividade é difícil e cada vez que se tem mais peça. Mais difícil fica. Inclusive quando eu estava fazendo essa atividade na sala de aula, tiveram algumas formas que tive que pedir ajuda para montá-las*".

De uma forma geral, o tratamento que deram a cada situação esteve fortemente vinculado à intuição geométrica, ao procurar "enxergar" onde encaixar, possivelmente devido ao costume com os jogos tipo "quebra-cabeça" (correspondência entre as medidas). A possibilidade de reconstrução da figura percorrendo o caminho inverso só foi percebida no início, quando o número de peças ainda era pequeno. Ao final, retornar ao quadrado inicial, juntando todas as sete peças, foi um exercício de tentativas e não uma reconstituição lógica de todo o processo.

Na segunda parte da atividade, reprodução das figuras em forma de sombra, procurou-se destacar as possibilidades de composição de certas figuras, com vistas também a uma posterior atividade sobre formulação de áreas. As figuras escolhidas simulavam formas geométricas inexistentes ou em número superior às disponíveis no tangram, obrigando a um esforço de visualização para distingui-las.

Nas figuras abaixo, o pescoço da primeira ave simula um triângulo, dando a idéia de existirem seis no total, ultrapassando o número do tangram. O corpo da segunda ave simula um segundo paralelogramo, inexistente, figura que foi construída anteriormente.

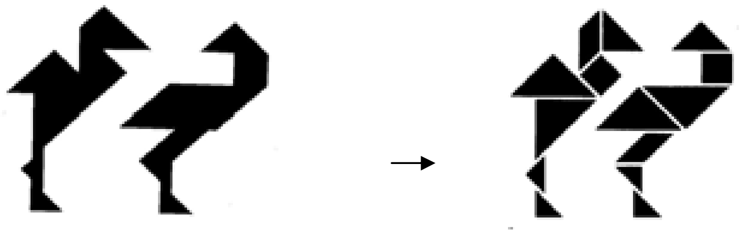


Figura 4.14.1 – Solução da visualização proposta com as sete peças do tangram.

O coelho a seguir possui dois paralelogramos congruentes representando as orelhas, e seu corpo simula um trapézio, também visto na construção do tangram.

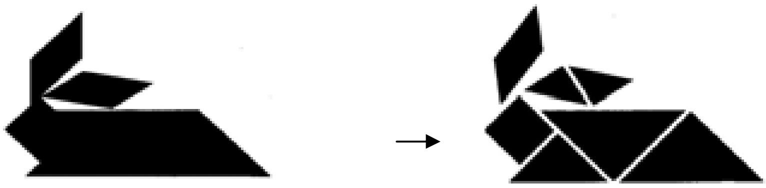


Figura 4.14.2 – Solução da visualização proposta com as sete peças do tangram.

O monge abaixo possui uma estrutura retangular similar àquela vista anteriormente, que exige um pouco mais de esforço para a sua montagem.

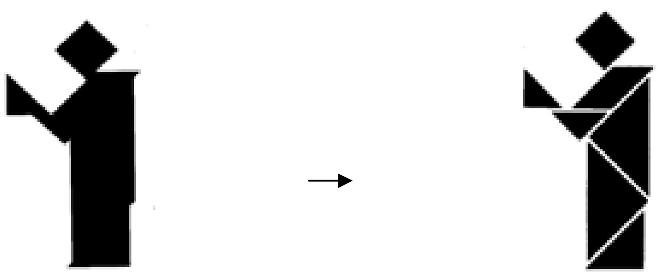


Figura 4.14.3 – Solução da visualização proposta com as sete peças do tangram.

Nas figuras a seguir, o primeiro índio simula a existência de vários trapézios ou quadrados, enquanto o segundo possui uma cabeça formada por dois paralelogramos.

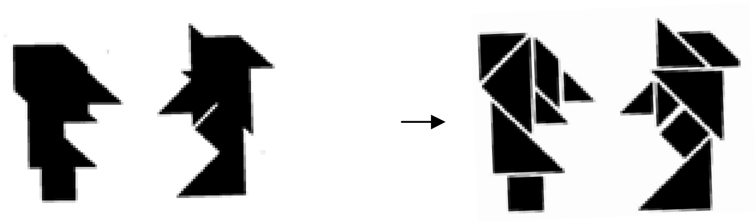


Figura 4.14.4 – Solução da visualização proposta com as sete peças do tangram.

A diversidade das formas construídas também foi uma oportunidade de reafirmar que a classificação da figura geométrica independe da posição em que encontra-se assentada.

A proposição de montagem de figuras diversas foi uma forma de oportunizar outros momentos de composição de figuras geométricas planas, para fixação de suas propriedades.

A aluna-professora GLÓRIA utilizou a estratégia de trabalhar com a escala normal, ou seja, com as peças cortadas do mesmo tamanho da figura a copiar. Isso possibilitou uma visualização direta das peças que faltavam para encaixar, diminuindo o esforço de uma elaboração mental, associando proporcionalidade e forma. Esta é uma estratégia bem válida para crianças dos anos iniciais de escolarização.

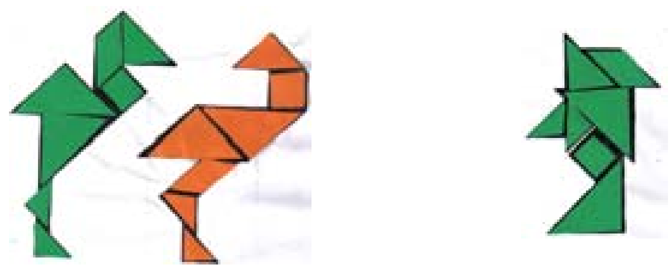


Figura 4.14.5 – Estratégia de visualização para os exercícios propostos.

Com exceção da aluna-professora GLÓRIA, não houve registro da montagem das figuras propostas. Esse fato, somado à estratégia acima mencionada, reforçou a dificuldade que as alunas tiveram na execução das atividades com o tangram.

A montagem de figuras completas revelou ser um obstáculo epistemológico. É possível que ele possa ser superado com a diminuição do número de peças que compõem as figuras, em atividades de grau crescente de dificuldade.

Complementando a atividade anterior de construção do tangram, trabalhar o conceito de equivalência de área entre peças e conjunto de peças, deve contribuir gradativamente para a melhora da capacidade de visualização e para elevar o nível de compreensão geométrica. Além de completar figuras, a atividade envolve um “fazer matemática” mais acentuado.

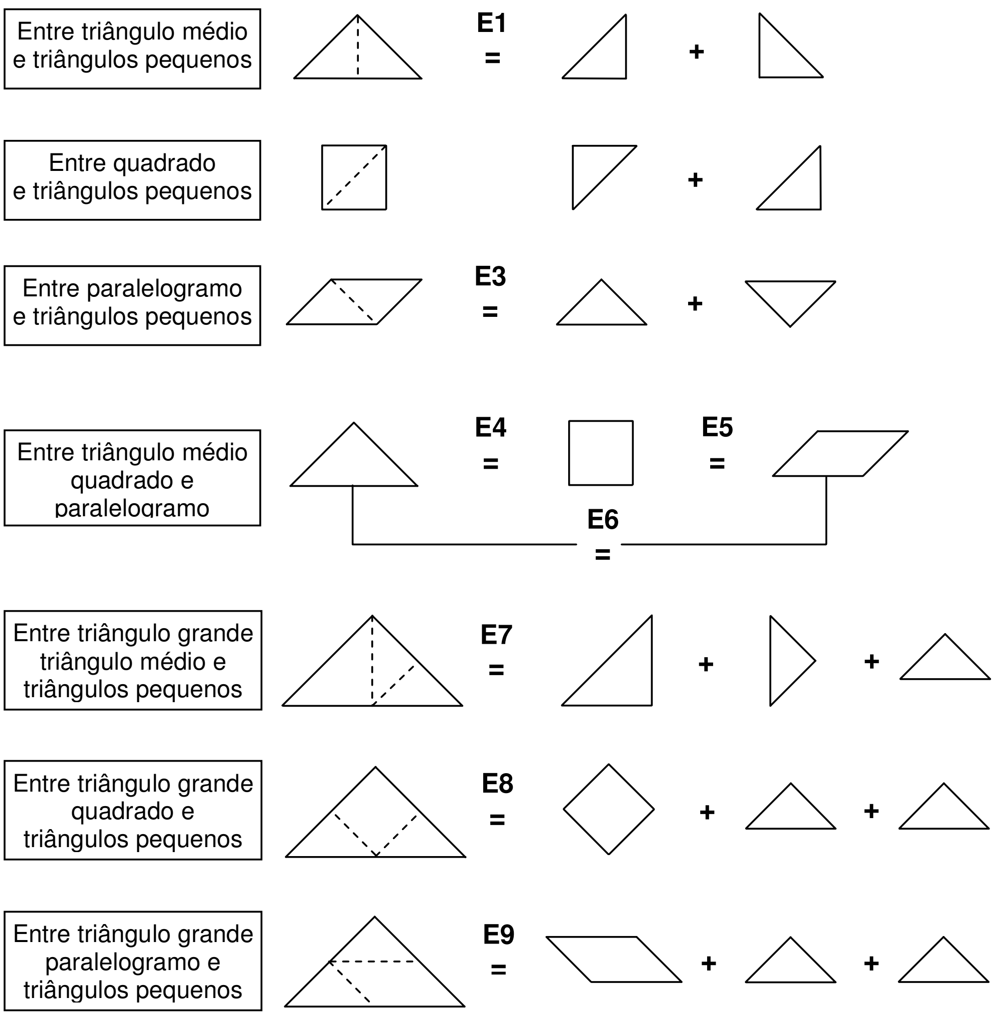


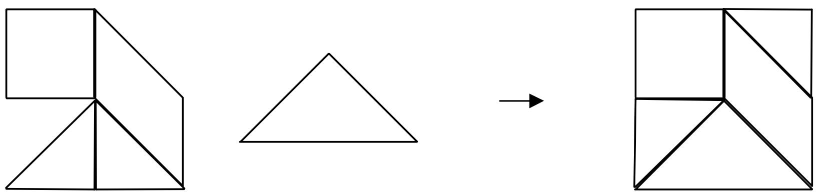
Figura 4.14.6 – Relação de equivalência entre peças do tangram.

Nesse sentido, a experiência analisada me leva a conceber e propor uma série de atividades, que poderiam ser inseridas na formação das alunas.

Inicialmente, sobrepondo as peças individuais do tangram, trabalhar o conceito de equivalência de áreas, conforme a figura 4.14.6. As equivalências estão codificadas acima do sinal de igualdade.

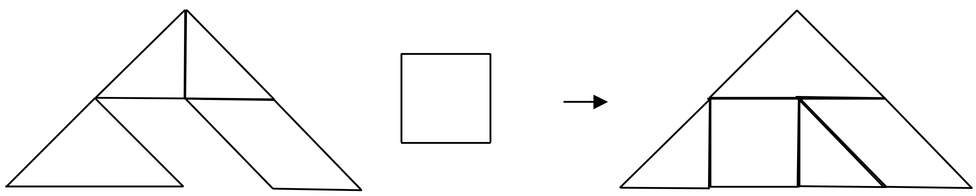
Em seqüência, as equivalências podem ser trabalhadas em situação de montagem de figuras, com exercícios de visualização e representação mental. Os exercícios seguintes têm complexidade crescente e possibilitarão a construção de outras equivalências.

1) Formar o quadrado com a inclusão da peça que está de fora:



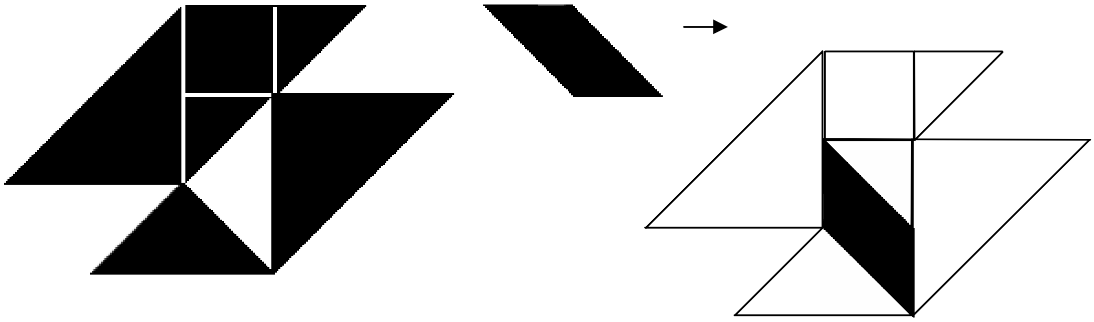
A figura possui dois espaços vazios na forma do triângulo pequeno. Com base na equivalência E1, substituir os 2 triângulos pequenos pelo triângulo médio e ocupar os espaços vazios.

2) Formar o triângulo com a inclusão da peça que está de fora:



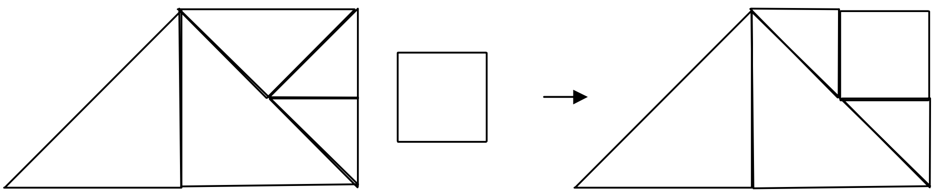
Conforme a equivalência E5, o espaço vazio corresponde ao quadrado que, por sua vez, equivale a 2 triângulos pequenos (E2), unidos pelo lado maior. A colocação do quadrado vai preencher metade do espaço vazio e vai coincidir com parte do triângulo médio. Então, por E1, substituir os 2 triângulos pequenos pelo triângulo médio e ocupar os espaços vazios.

3) Colocar a peça que está de fora de modo a formar dois paralelogramos colados, conforme a figura (ELFFERS, 1988, p. 169):



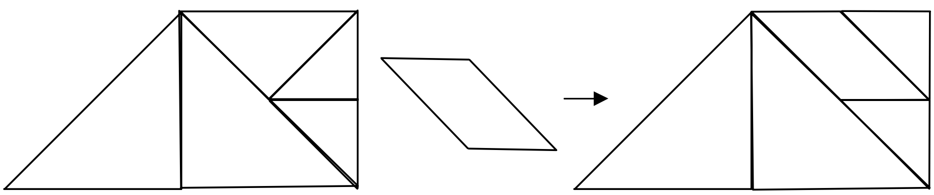
Deslocar o triângulo médio para o espaço vazio não abrirá o espaço necessário ao paralelogramo. Pela equivalência E6, o espaço vazio corresponde ao paralelogramo que, por sua vez, equivale a 2 triângulos pequenos (E3), unidos pelo lado menor. Se o triângulo pequeno do centro for rotacionado 90° para a direita, abrirá o espaço exato para o paralelogramo.

4) No trapézio retângulo, substituir uma peça pela peça que está de fora:



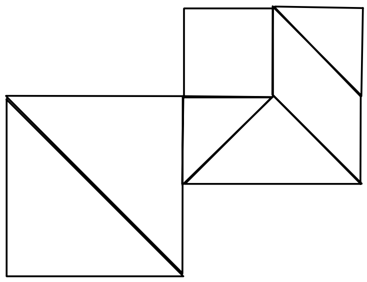
Em relação ao triângulo grande formado pelas três peças, trata-se de substituir a equivalência E7 pela E8.

5) No trapézio retângulo, substituir uma peça pela peça que está de fora:

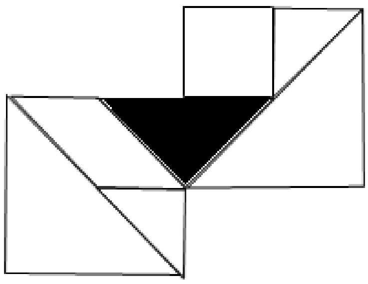


Em relação ao triângulo grande formado pelas três peças, trata-se de substituir a equivalência E7 pela E9.

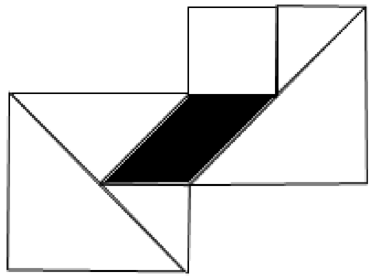
6) Construir duas figuras congruentes à figura abaixo:



1ª configuração



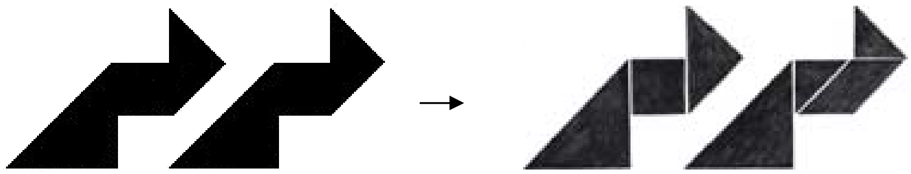
2ª configuração



Para a composição dos dois quadrados, um triângulo grande estará presente em cada um. Assim, a solução recai na montagem dos outros dois triângulos grandes, para os quais são conhecidas as equivalências E7, E8 e E9. Como cada equivalência requer dois triângulos pequenos, elas deverão ser combinadas *duas a duas*. A peça de ligação deverá ser escolhida de modo a ceder um triângulo pequeno para cada uma. Na primeira configuração, o triângulo médio (E1) é a peça de ligação entre as equivalências E8 e E9; na segunda, o paralelogramo (E3) se divide entre as equivalências E7 e E8.

A seguir, a atividade consiste em montar simultaneamente figuras idênticas, utilizando todas as peças do tangram. É uma situação a refletir, pois o número de peças sugerido não estará disponível. A montagem, ainda que por tentativas, estabelecerá a equivalência entre grupo de peças. Nas figuras propostas, os triângulos grandes estão aparentes e simplificam as operações mentais na busca da solução.

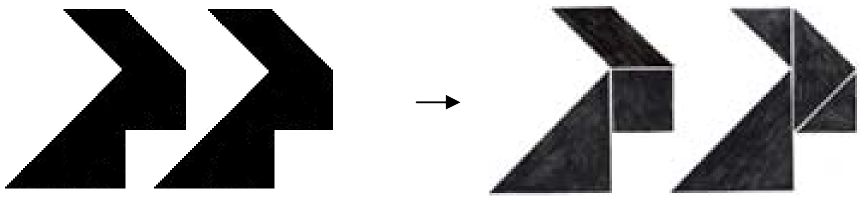
7) Figuras nas quais estão sugeridos o quadrado e o triângulo médio (ELFFERS, 1988, p. 164):



O exercício de montagem possibilita estabelecer a equivalência:

E10: triângulo médio + quadrado = paralelogramo + 2 triângulos pequenos.

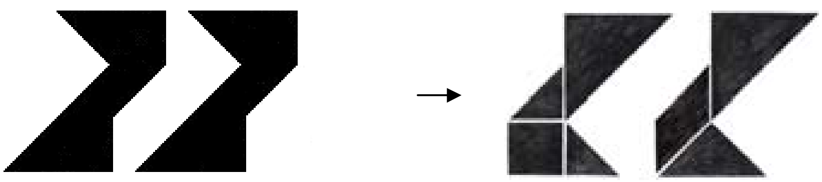
8) Figuras nas quais estão sugeridos o quadrado e o paralelogramo (ELFFERS, 1988, p. 166):



O exercício de montagem possibilita estabelecer uma nova equivalência:

E11: quadrado + paralelogramo = triângulo médio + 2 triângulos pequenos.

9) Figuras nas quais estão sugeridos o paralelogramo e o triângulo médio (ELFFERS, 1988, p. 166):

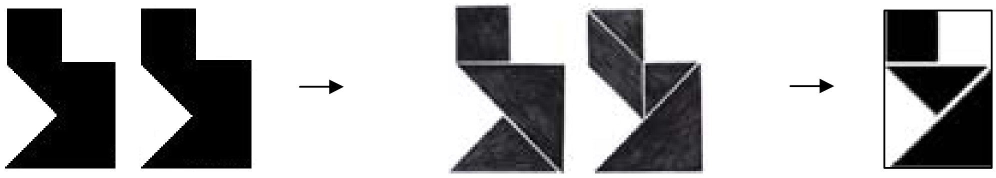


O exercício de montagem possibilita estabelecer outra equivalência:

E12: triângulo médio + paralelogramo = quadrado + 2 triângulos pequenos.

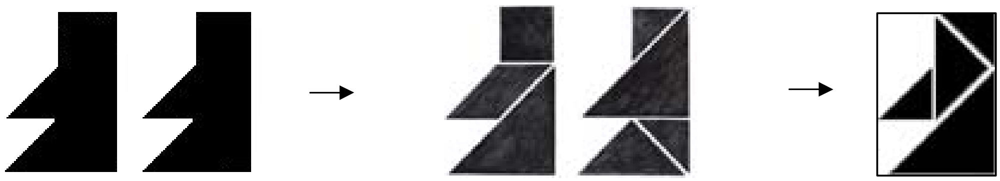
Em seguida, a tarefa de montar figuras idênticas é novamente proposta, com a diferença de os triângulos grandes não estarem mais aparentes, mas apenas sugeridos, exigindo um esforço maior para a visualização. As equivalências construídas na atividade anterior serão utilizadas e cada figura admite uma variante de composição, destacada na moldura retangular.

10) Com as 7 peças do tangram, formar as duas figuras congruentes (ELFFERS, 1988, p. 164):



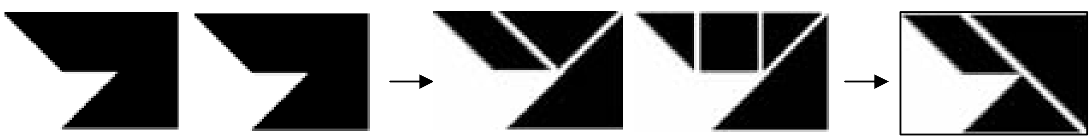
Pela equivalência E10, um triângulo médio + quadrado = paralelogramo + 2 triângulos pequenos.

11) Com as 7 peças do tangram, formar as duas figuras congruentes (ELFFERS, 1988, p. 164):



Pela equivalência E11, quadrado + paralelogramo = triângulo médio + 2 triângulos pequenos.

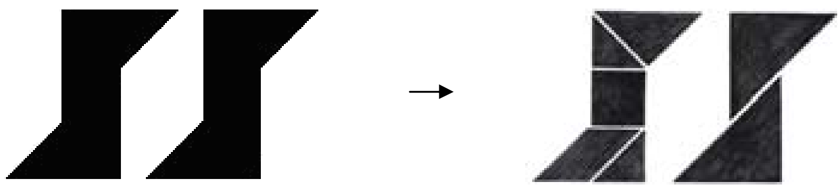
12) Com as 7 peças do tangram, formar as duas figuras congruentes (ELFFERS, 1988, p. 166):



Pela equivalência E12, triângulo médio + paralelogramo = quadrado + 2 triângulos pequenos. Essa é a segunda configuração possível com a equivalência.

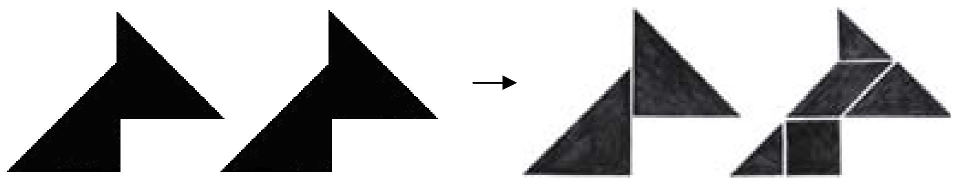
A atividade seguinte consiste em montar simultaneamente figuras idênticas, aparentemente formadas pelos dois triângulos maiores. Numa das figuras, os triângulos, de fato, formam uma composição. Na outra, os triângulos devem ser formados pelas peças menores, com base nas relações de equivalência vistas.

13) Com as 7 peças do tangram, formar as duas figuras congruentes (ELFFERS, 1988, p. 164):



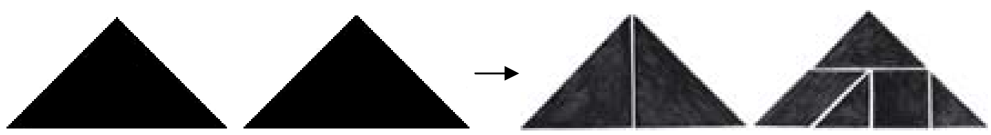
Semelhante ao exercício proposto 6), a situação requer abstrair qual peça servirá de ligação. Em função da espessura da figura, o quadrado com seus dois triângulos unidos pelo lado maior, é a peça adequada.

14) Com as 7 peças do tangram, formar as duas figuras congruentes (ELFFERS, 1988, p. 164):



Para essa situação, o paralelogramo é mentalmente dividido em dois triângulos menores para estabelecer a ligação entre os dois triângulos.

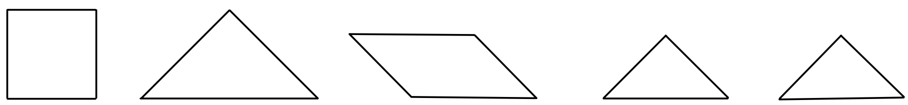
15) Com as 7 peças do tangram, formar as duas figuras congruentes (ELFFERS, 1988, p. 164):

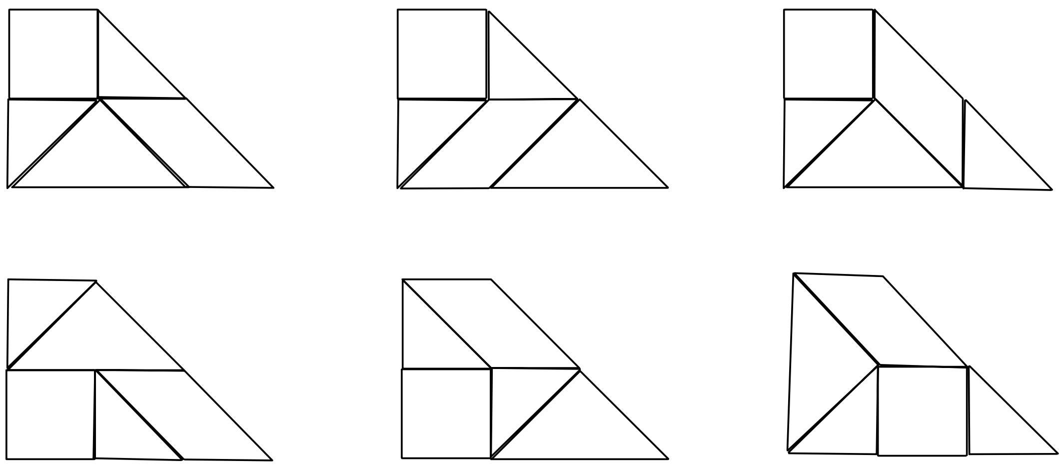


Semelhante ao exercício proposto 2), o triângulo médio é a peça que é formada por dois triângulos colocados lado a lado, coincidindo o lado menor e formando um ângulo reto. Por essas características, ela é adequada para fazer a ligação entre as figuras.

Depois do trabalho com duplas de figuras, o raciocínio será feito em cima de possibilidades de montagem de uma mesma figura, empregando-se as equivalências entre peças e grupo de peças, vistas até o momento.

16) Com as cinco figuras planas do tangram, representadas a seguir, construir todas as possibilidades de trapézio retângulo:





4.15 8ª ATIVIDADE: "BRINCANDO COM MALHAS"

No intuito de estimular a percepção e desenvolver o conceito geométrico de proporcionalidade e semelhança, esta atividade consistiu em reprodução de uma gravura de quatro formas diferentes:

1ª) Reprodução normal;

2ª) Reprodução com apenas a dimensão horizontal dobrada;

3ª) Reprodução com apenas a dimensão vertical dobrada;

4ª) Reprodução com ambas as dimensões dobradas.

Uma orientação inicial foi dada às alunas, no sentido de quadricular a figura escolhida com as mesmas dimensões das quadrículas do papel quadriculado.

Os resultados esperados foram:

1º) um desenho do mesmo tamanho da figura original

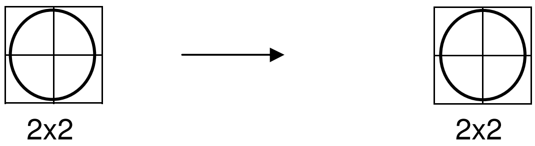


Figura 4.15.1 – Reprodução normal.

2º) um desenho alongado horizontalmente, em dobro

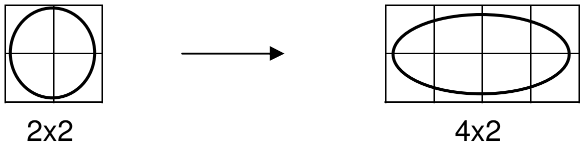


Figura 4.15.2 – Reprodução com apenas a dimensão horizontal dobrada.

3º) um desenho alongado verticalmente, em dobro

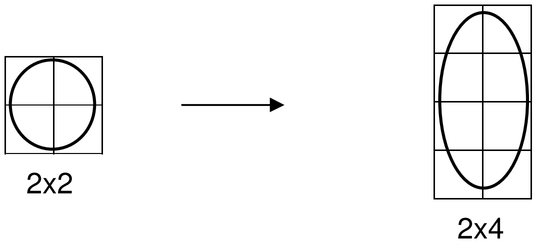


Figura 4.15.3 – Reprodução com apenas a dimensão vertical dobrada.

4º) um desenho proporcionalmente maior quatro vezes que a figura original

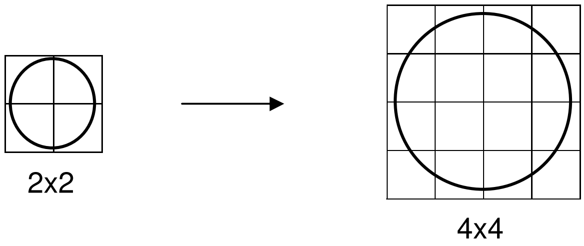


Figura 4.15.4 – Reprodução com ambas as dimensões dobradas.

A atividade "Brincando com malhas" foi planejada com o propósito de oferecer às alunas um exemplo de situação didática vinculada à unidade "Ampliação e redução de figuras planas pelo uso de malhas", prevista nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997).

A proposta pedagógica foi alicerçada na condição do sujeito estar em situação, necessitando selecionar e empregar uma estratégia adequada à resolução do problema de proporcionalidade proposto.

Os conceitos geométricos que foram mobilizados: proporcionalidade, redução, ampliação.

4.16 RESULTADOS DA 8ª ATIVIDADE "BRINCANDO COM MALHAS"

A reprodução de uma figura enquadrada por uma malha quadriculada é uma atividade que requer a correspondência de "um para um", ou seja, os traços contidos em qualquer quadrícula da figura devem ser fielmente transportados para as quadrículas correspondentes da reprodução. Não é necessário saber desenhar para realizar a tarefa. Sobre isso a aluna FABIANA comentou: *e o mais interessante é que desenho super mal e nunca pensei que conseguiria copiar um desenho de um gibi*.

Embora não exija competência artística, é uma tarefa complexa. Sua realização demanda concentração, persistência, organização, percepção visual, atenção a detalhes e controle das ações para evitar a ocorrência e propagação de discrepâncias entre a figura e o desenho. O grau de dificuldade, então, varia de indivíduo para indivíduo, conforme a capacidade pessoal de cada um. Para a aluna CLÁUDIA a tarefa foi difícil:

> *Eu tive muita dificuldade em realizar esta atividade, pois não consegui compreender a lógica de reproduzir o desenho com quadrados na horizontal e/ou vertical, e o nível de exigência proposto pela atividade é bastante alto, requer muita concentração e percepção visual aguçada.*

Em razão de suas dificuldades, a aluna CLÁUDIA somente realizou a reprodução em escala normal:

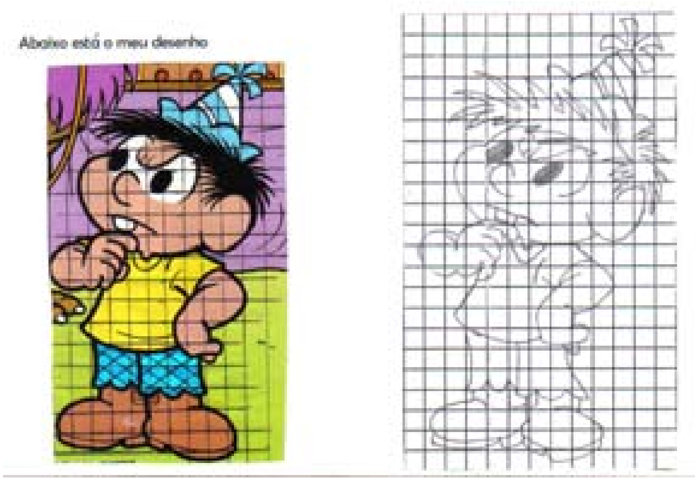


Figura 4.16.1 – Reprodução normal de CLÁUDIA.[5]

A figura original mede 12x19 quadrículas, ao passo que a reprodução, tomando-se os mesmos pontos de referência, mede 12x21 quadrículas. O aumento involuntário de alguns traçados, tais como o "comprimento das calças do personagem", fez com que o desenho ficasse mais alongado no sentido vertical, trazendo dificuldades adicionais para a interpretação e cópia dos traços subseqüentes. A figura escolhida possui muitos detalhes como, por exemplo, o cabelo com muitas pontas, fato que levou a aluna a perder o controle sobre a atividade. Também é perceptível que o quadriculado sobre a figura não é inteiramente regular, sendo uma fonte adicional de distorção.

Para tentar desempenhar a tarefa, a aluna CLÁUDIA não mobilizou qualquer artifício como estratégia que a auxiliasse a estabelecer a correspondência exata entre os dois quadriculados.

---

[5] © MAURÍCIO DE SOUSA PRODUÇÕES.

A aluna DANIELA, por sua vez, estabeleceu duas estratégias: 1) colou a figura a ser reproduzida diretamente no papel e assim contou com traços-guia para realizar o quadriculado com mais exatidão; 2) reproduziu a figura em tamanho real na mesma vertical da figura, estabelecendo parâmetros de comparação.

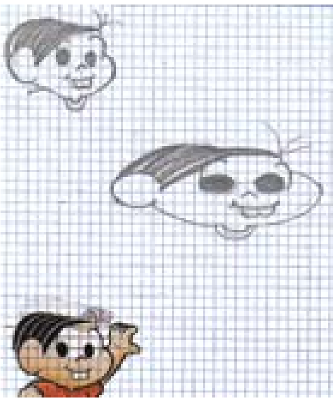


Figura 4.16.2 – Reprodução normal e horizontal dobrada de DANIELA.[6]

A última estratégia mencionada, entretanto, não foi suficiente para garantir a reprodução fiel da figura, ela ficou maior. A ampliação da figura em quadrícula com dimensão horizontal em dobro, foi realizada sem ancoragem com a figura ou com algum tipo de moldura, e também revelou inconsistências.

A simulação abaixo permite comparar as dimensões e observar as diferenças de posição de certos detalhes, entre os originais e as cópias realizadas pela aluna DANIELA

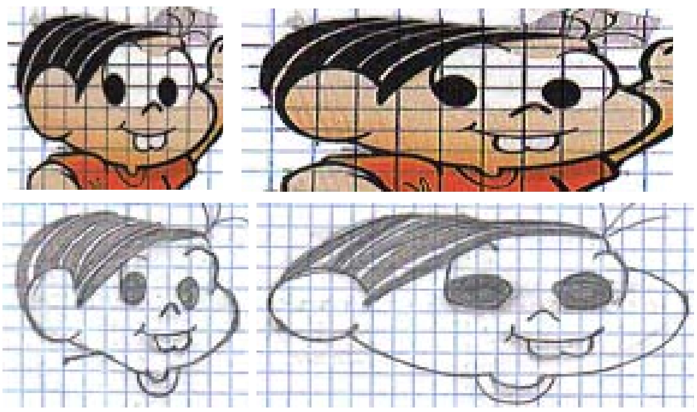


Figura 4.16.3 – Comparação simulada das reproduções de DANIELA.

Os erros assinalados até aqui sugerem que, de alguma forma, é necessário estabelecer os limites onde será inserida a reprodução, não só para simplificar o trabalho de cópia, como também para evitar a propagação de diferenças. Nesse sentido, a aluna FABIANA empregou uma estratégia para facilitar a tarefa:

> *ao quadricular e numerar a figura inicial, é possível visualizar o traçado de cada quadrado, dessa forma, a reprodução do desenho se torna infinitamente mais fácil, já que a cópia de um traço é bem mais simples do que a cópia da figura como um todo.*

Ao numerar linhas e colunas na figura e empregar a mesma numeração no papel quadriculado, estabelecendo uma correspondência de coordenadas, a aluna empregou um teorema-em-ação que julgou adequado à situação.

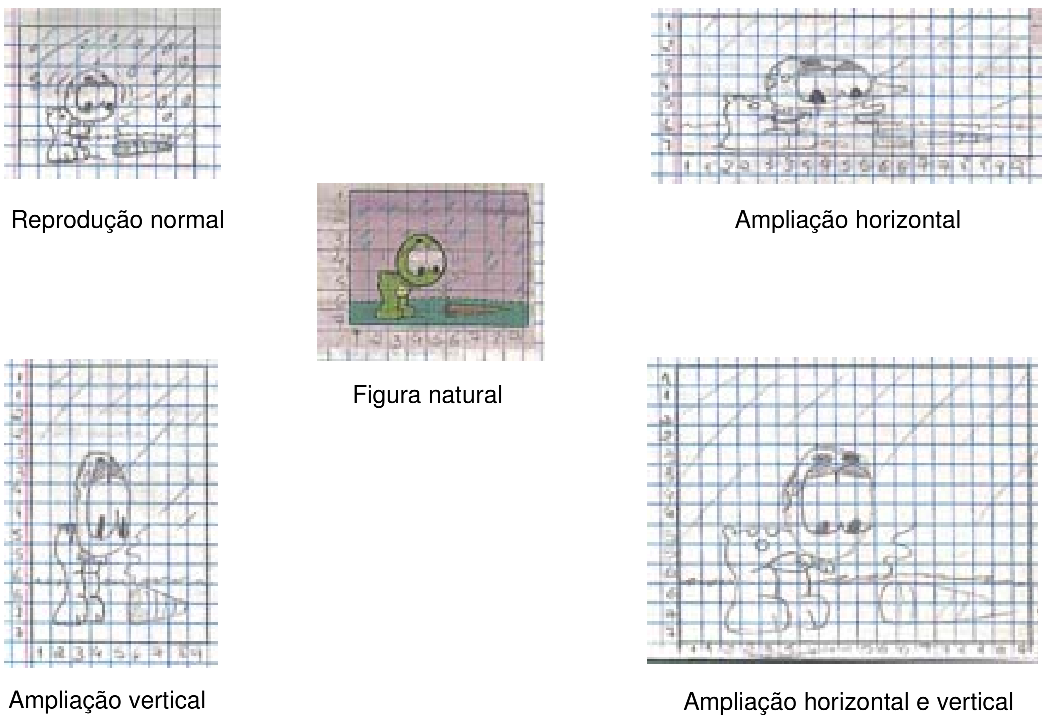


Figura 4.16.4 – Reproduções de FABIANA.[7]

O cuidado em repetir os números relativos à dimensão que foi dobrada, revelou-se uma estratégia eficiente para a aluna FABIANA Estabelecida a

---

[7] © MAURÍCIO DE SOUSA PRODUÇÕES.

correspondência direta com o quadriculado original, a preocupação recaiu muito mais sobre os detalhes da figura do que sobre a sua localização.

O mesmo não se pode dizer da estratégia da aluna ELIETE, que numerou em seqüência todas as quadrículas da dimensão horizontal que foi dobrada, estabelecendo uma correspondência de *um para dois*.

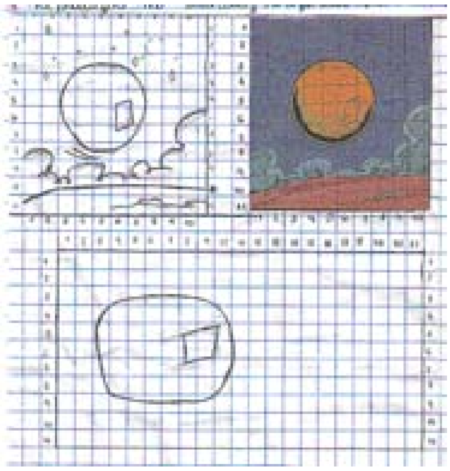


Figura 4.16.5 – Reprodução normal e horizontal dobrada de ELIETE.[8]

A "nave espacial" ocupou as quadrículas de 3 a 7 na figura original, com medida equivalente a 5 quadrículas. Na representação alongada horizontalmente, ela deveria estender-se entre as quadrículas 5 e 14 (medida de 10 quadrículas, o dobro da anterior). O que de fato ocorreu foi uma representação da nave iniciada na quadrícula 3 e concluída na quadrícula 10 (medida de 8 quadrículas).

A aluna ELIETE empregou dois teoremas-em-ação que não deram suporte à situação:

1) Iniciou a representação da nave na posição relativa original, desconsiderando a existência de duas quadrículas anteriores, que deveriam ter sido dobradas. Essa postura dificultou a visualização e o planejamento da posição dos detalhes inferiores da figura, que também deveriam ser dobrados na dimensão horizontal;

2) Para situar o desenho da nave, calculou sua dimensão pela subtração entre os intervalos extremos (e não pontos extremos), excluindo o intervalo inicial:

$2 \times (7 - 3) = 2 \times 4 = 8$

Esse é um tipo de erro freqüente, um obstáculo a superar, quando se numera os intervalos e não os seus limites. Feita dessa forma, a subtração significa “quantos faltam para alcançar” e não “quantos existem”. Para calcular a quantidade existente é necessário adicionar uma unidade, referente ao intervalo inicial que foi suprimido pela operação.

Pelas razões apontadas, a estratégia de numeração empregada por ELIETE gerou obstáculos ao invés de propiciar um tratamento adequado à situação. A aluna ficou confusa e impossibilitada de prosseguir na tarefa.

A atividade com as alunas revelou o emprego de outro tipo de estratégia, não relacionada à numeração de linhas e colunas. A aluna TELMA demonstrou domínio nas ampliações apenas reforçando as quadrículas na dimensão correspondente.

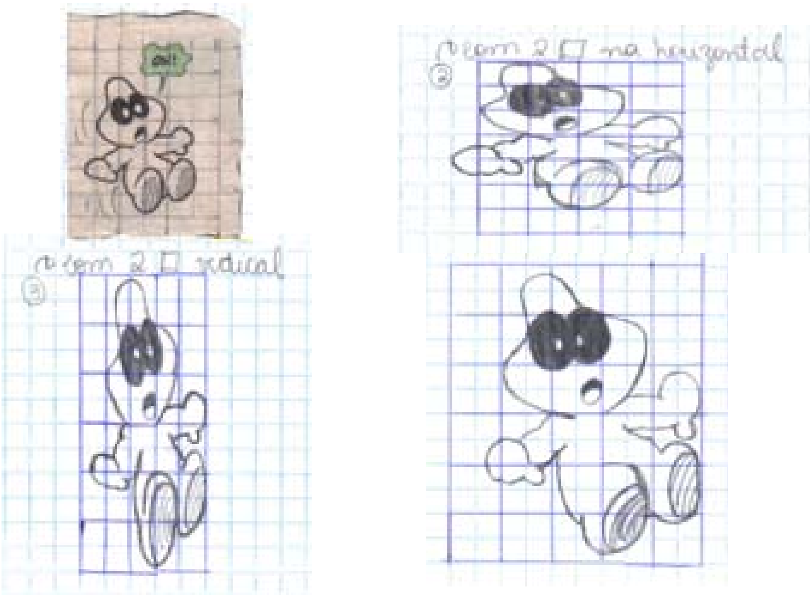


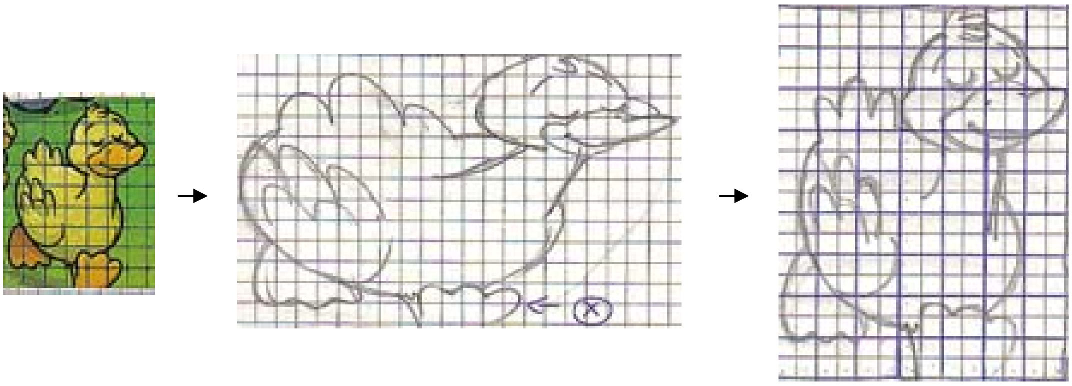
Figura 4.16.6 – Reproduções de TELMA.[9]

Essa foi uma estratégia eficaz, de correspondência *um para um*. Por meio de uma adaptação visual, na qual tudo que está numa quadrícula deve ser transportado para a outra, mantendo-se as posições relativas, foi possível reproduzir a figura com fidelidade.

---

[9] © MAURÍCIO DE SOUSA PRODUÇÕES.

A aluna MÍRIAM percebeu a sua utilidade e também a ela recorreu para representar a figura duplicada nas duas dimensões, após uma tentativa frustrada, sem uma estratégia definida que a apoiasse.



Tentativa frustrada

Desenho final

Figura 4.16.7 – Seqüência de reprodução de MÍRIAM.[10]

A primeira reprodução, feita livremente, triplica a dimensão horizontal e tem uma dimensão vertical equivalente a uma vez e meia a dimensão original. A aluna iniciou o desenho sem amarração a qualquer ponto e aos poucos perdeu o controle sobre a proporcionalidade. Para a segunda reprodução, as quadrículas ampliadas e assinaladas definiram a dimensão proporcional desejada.

Sobre a estratégia de reforçar as quadrículas ampliadas, a aluna MÍRIAM comentou: *o trabalho fica mais fácil se traçarmos no papel uma nova malha, com as medidas desejadas, por cima da original.*

Neste ponto, pode-se deduzir que a melhor estratégia, aquela que reduziria ao máximo a possibilidade de erro, seria a combinação das duas anteriores: reforçar as linhas das quadrículas segundo a dimensão desejada e numerá-las em conformidade com a figura original. Essa foi a estratégia de OLGA:

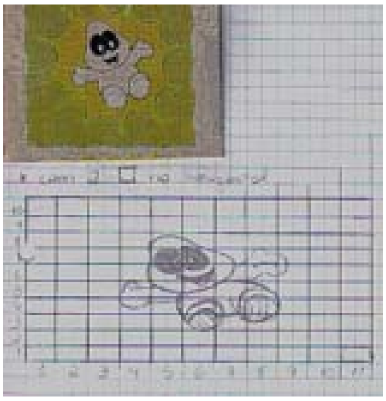
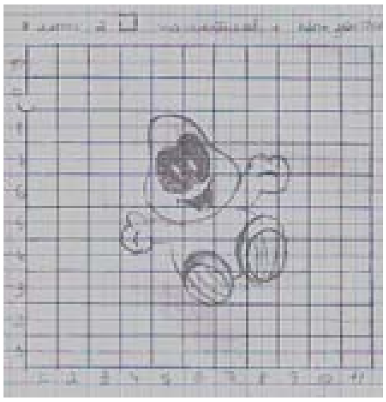



Figura 4.16.8 – Reproduções de OLGA.[11]

As atividades de ampliação e redução por sua complexidade devem ser exercitadas desde cedo na escola. O raciocínio com proporcionalidade contribui para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Mas essa não é a realidade, conforme os depoimentos:

> *Eu já fiz essa atividade muitas vezes, quando era criança, mas nunca aumentando somente uma das dimensões, e nunca na escola. Fiz apenas como passatempo (MÍRIAM).*
> *Primeiramente, gostaria de dizer que nunca tinha feito uma atividade como esta (FABIANA).*

A alteração em somente uma dimensão é uma tarefa pouco comum e exigiu uma capacidade maior de percepção:

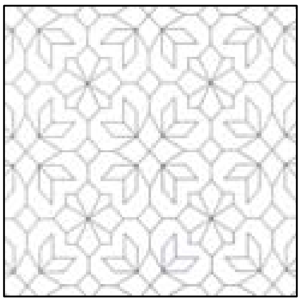
> *Quando comecei a fazer a segunda figura, que era a reprodução com dois quadrados na horizontal, senti um pouco de estranheza, pois a figura estava ficando distorcida, mas logo vi que a figura estava ficando do jeito que era para ficar (FABIANA).*
> *É muito difícil aumentar um desenho em apenas uma das dimensões! Eu demorei um pouco para entender que o desenho dobrado só na largura (horizontal) deveria conservar a mesma altura do original (MÍRIAM).*

Percebe-se que a situação proposta contribuiu para a construção do conceito-geométrico-em-ação referente à ampliação em uma dimensão de uma figura plana, evidenciada pelas rupturas com conceitos anteriores. Para a amarração das extremidades da reprodução, teria sido interessante explorar os conceitos ligados à homotetia, que estariam adequados ao nível de pensamento geométrico das alunas.

4.17 9ª ATIVIDADE "CONSTRUÇÃO DE FIGURAS PLANAS NO GEOPLANO")

No intuito de conduzir o pensamento e provocar uma discussão sobre *conservação de área*, tema em parte explorado na atividade do *tangram*, esta atividade foi desenvolvida em etapas, iniciando os trabalhos com a malha de unidades variadas, prosseguindo com a malha de unidade padrão e concluindo com a malha de unidade quadrada.

Para a primeira etapa, havia dois tipos de malha disponíveis:



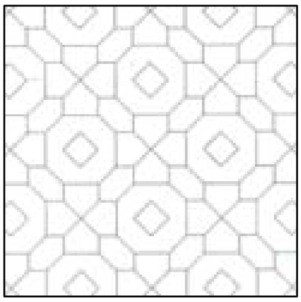


Figura 4.17.1 – Modelos de malha não-padronizada utilizados na atividade.

As alunas receberam o comando de desenhar trinta e seis partes da malha variada, formando um desenho conexo. Em seguida, o comando foi repetido, sendo obrigatório formar um desenho diferente do anterior no mesmo tipo de malha.

Após a elaboração dos desenhos, fiz uma pergunta provocativa: os dois desenhos, feitos em malhas idênticas, ambos com trinta e seis partes, possuem a mesma área? O propósito foi incitar a reflexão sobre a impossibilidade de comparação entre formas diferentes. No caso, comparação entre aglomerados geométricos diferentes.

Na segunda etapa da atividade, foi utilizada a malha padronizada triangular para os dois desenhos com trinta e seis partes. Apesar de somente conter triângulos, a malha possibilitaria o emprego de figuras geométricas diversas, como o losango, o paralelogramo e o hexágono. Subsidiariamente, a atividade reforçaria os conceitos referentes à *decomposição das figuras planas*.

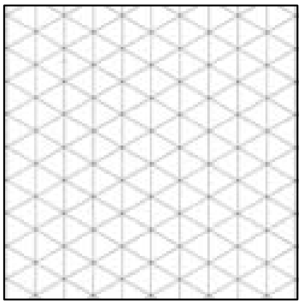


Figura 4.17.2 – Modelo de malha triangular utilizado na atividade.

Nessa etapa foi repetida a pergunta sobre a diferença de área entre os desenhos realizados. O propósito era instigar a reflexão sobre a possibilidade de comparação entre formas diferentes, em razão da padronização da unidade desenhada.

Nesse momento, propus um tema para reflexão: *quando se pede uma medida, a resposta virá acompanhada de uma unidade de medida escolhida; só é possível contar se for definida uma unidade de medida*.

A última etapa da atividade foi realizada com o geoplano de malha quadrada e elásticos. A tarefa proposta foi: verificar no geoplano as diversas maneiras de se fazer um retângulo com 36 unidades (quadradinhos); fazer o registro na malha quadriculada; calcular o perímetro de cada retângulo obtido.

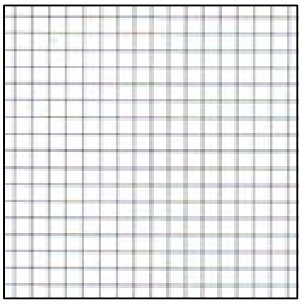


Figura 4.17.3 – Modelo de malha quadriculada utilizado na atividade.

A atividade “Construção de figuras planas no geoplano” foi planejada com o propósito de oferecer às alunas um exemplo de situação didática vinculada às unidades “Comparação de grandezas de mesma natureza, por meio de estratégias pessoais e uso de instrumentos de medida conhecidos”, “Comparação de grandezas de mesma natureza, com escolha de uma unidade de medida da mesma espécie do atributo a ser mensurado", "Identificação de grandezas mensuráveis no contexto diário: comprimento, superfície, etc.", "Cálculo do perímetro e de área de figuras desenhadas em malhas quadriculadas e comparação de perímetros e áreas de duas figuras sem uso de fórmulas" e "Composição e decomposição de figuras planas e identificação de que qualquer polígono pode ser composto a partir de figuras triangulares", embora somente algumas decomposições em triângulos tenham sido exploradas, previstas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997).

A proposta pedagógica foi alicerçada na experimentação em situações-problema como forma de provocar a necessidade da criação de uma unidade arbitrária de medida de área.

Os conceitos que foram mobilizados: unidade de área, área por contagem, área por multiplicação, medida, perímetro.

4.18 RESULTADOS DA 9ª ATIVIDADE "CONSTRUÇÃO DE FIGURAS PLANAS NO GEOPLANO"

Inicialmente, as alunas desenharam as trinta e seis partes pedidas na malha variada, formando dois desenhos compactos. Foi um momento pessoal de criação artística, inspirada pelos arranjos da malha.

Eis um exemplo de como uma aluna preencheu um dos tipos de malha:

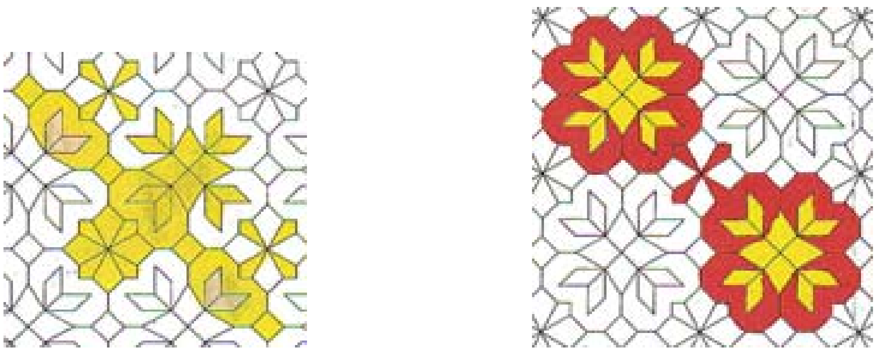


Figura 4.18.1 – Exemplos de preenchimento de malhas não-padronizadas.

E como outra aluna preencheu a outra malha:

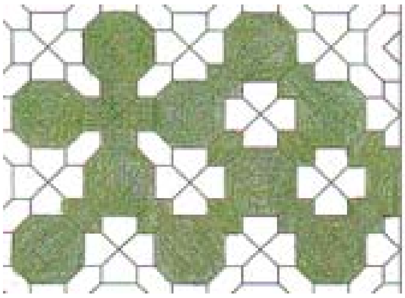
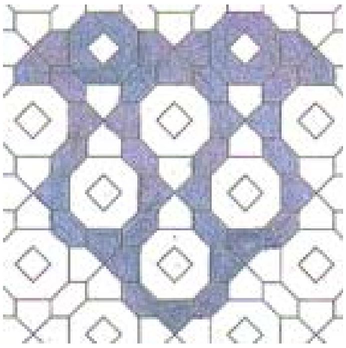
 

Figura 4.18.2 – Exemplos de preenchimento de malhas não-padronizadas.

Foi interessante perceber que, para algumas alunas, a fixação do número de elementos a preencher provocou a busca de um padrão de desenho que permitisse uma contagem mais rápida. Para outras, entretanto, essa necessidade não se fez presente, o interesse situou-se na composição de uma figura, como se pode verificar no desenho abaixo:

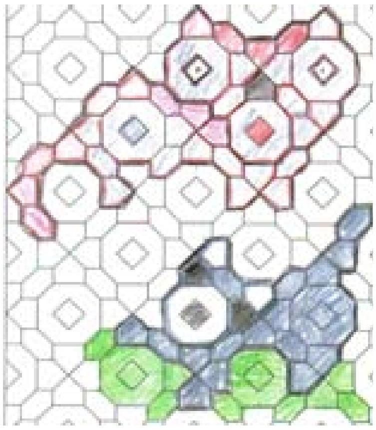


Figura 4.18.3 – Exemplos de preenchimento de malhas não-padronizadas.

Instadas a indicar qual das figuras formadas possuía maior área, reconheceram a impossibilidade de compará-las:

> *Não dá para saber se as duas figuras têm a mesma área, porque os entes são diferentes. Se os entes pintados na primeira figura fossem os mesmos da segunda e em mesma quantidade, a figura 1 seria igual a figura 2 (FABIANA).*
> *Só se tiver sido utilizado as mesmas matrizes, em iguais quantidades. O que não foi o meu caso (DANIELA).*
> *Não, porque eu não cuidei de utilizar o mesmo número de figuras com o mesmo formato nos dois desenhos (MÍRIAM).*

As respostas estabeleceram a condição para que as duas áreas fossem iguais, ou seja, *é necessário que haja absoluta igualdade nas peças utilizadas*.

Os desenhos em malha padronizada também foram criativos:

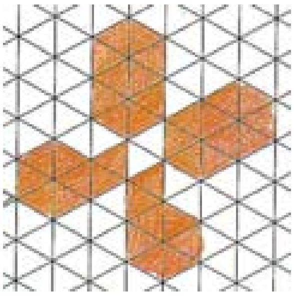
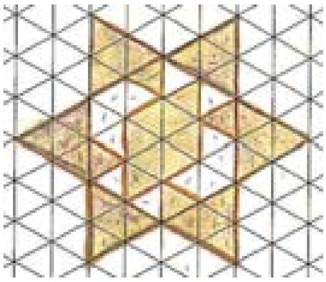



Figura 4.18.4 – Exemplos de preenchimento de malha triangular.

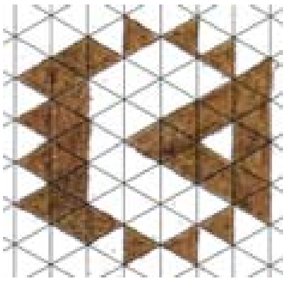
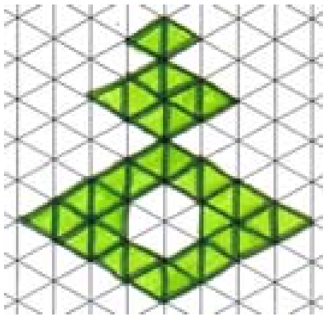



Figura 4.18.5 – Exemplos de preenchimento de malha triangular.

Sobre a comparação entre as áreas dos dois desenhos em malha triangular, as alunas se manifestaram:

> *Agora sim pode-se dizer que a área da 1ª figura é igual a área da 2ª figura, pois existe uma unidade de medida definida (FABIANA).*
> *Nesse caso, eles têm a mesma área: 36 triângulos cada (MÍRIAM).*
> *A segunda malha era formada só por triângulos eqüiláteros, assim, com 36 peças, 2 figuras diferentes terão a mesma área (DANIELA).*

De fato, considerando-se somente os espaços preenchidos, as figuras desenhadas são formadas pelo mesmo número de unidade de área escolhida e possuem a mesma grandeza. De uma forma geral, as figuras desenhadas estavam vazadas, mas essa característica não foi comentada. Isso se deve, possivelmente, ao encaminhamento inicial da atividade, na qual o pensamento esteve restrito à área por contagem de elementos significativos.

No geoplano, as alunas estiveram em contato com um tipo de plano mais conhecido. Para a execução da tarefa de verificar as diversas maneiras de se fazer um retângulo com 36 unidades de área, trouxeram conceitos prévios sobre divisores e cálculo de área por multiplicação:

Figura 4.18.6 – Conceitos prévios das alunas.

No total, as quinze possibilidades de registro foram cobertas pelos grupos:

Quadro 4.18.1 – Total de possibilidades de área e perímetro registradas pelas alunas.

Lado 1	Lado 2	Superfície	Perímetro (2p)
1	36	36	74
2	18	36	40
3	12	36	30
4	9	36	26
6	6	36	24
9	4	36	26
12	3	36	30
18	2	36	40
36	1	36	74
$\sqrt{2}$	$18\sqrt{2}$	36	$38\sqrt{2}$
$2\sqrt{2}$	$9\sqrt{2}$	36	$22\sqrt{2}$
$3\sqrt{2}$	$6\sqrt{2}$	36	$18\sqrt{2}$
$6\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	36	$18\sqrt{2}$
$9\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	36	$22\sqrt{2}$
$18\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	36	$38\sqrt{2}$

O grupo que melhor investigou as possibilidades apresentou o seguinte registro na malha quadriculada, num total de oito figuras:

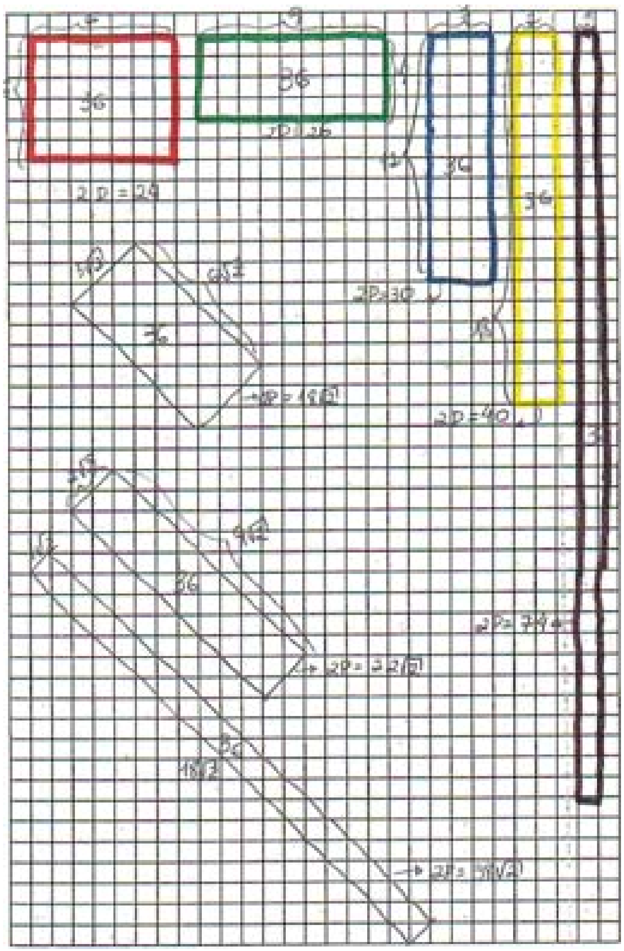


Figura 4.18.7 – Registro com maior número de possibilidades de figuras.

Algumas alunas já dominam o teorema-em-ação relativo a introduzir o termo $\sqrt{2}$ em medidas lineares com o objetivo de obter um fator de duplicação no produto de duas medidas. No geoplano, a medida $\sqrt{2}$ foi identificada na diagonal do quadradinho. As alunas, de certa forma, aplicaram o teorema de Pitágoras para definir a medida da diagonal do quadrado.

Na atividade foi enfatizado que dentre os retângulos de mesmo perímetro, o de maior área é o quadrado. Sobre a variação da relação entre área e perímetro, a aluna OLGA comentou: *notamos que as vezes a área pode ser a mesma, mas o perímetro pode variar; é muito melhor trabalhar assim visualizando do que decorando*.

4.19 10ª ATIVIDADE: “NOÇÃO DE ÁREA A PARTIR DA MALHA QUADRICULADA”

Em continuidade ao estudo do tópico *área*, iniciado no encontro anterior, esta atividade foi aberta com uma discussão, orientada pelo esquema abaixo representado, a respeito de a necessidade de se atribuir à unidade escolhida como medida, a mesma natureza da superfície a medir. Essa escolha até poderá recair sobre critérios pessoais de conveniência, mas assim que ocorrer a medição, a medida expressa pela unidade arbitrária escolhida deverá ser convertida a uma unidade padrão da sociedade, portanto consagrada pelo uso, para que possa ser compreendida.

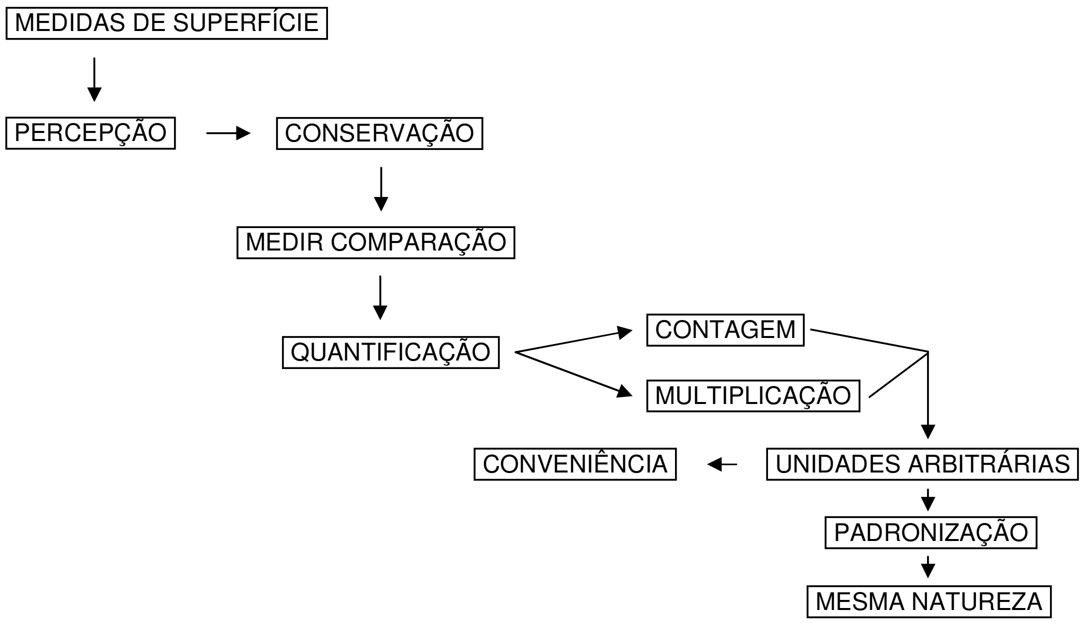


Diagrama 4.19.1 – Representação esquemática do processo de medida.

Outro aspecto destacado foi a possibilidade de uma unidade de medida ser inadequada para algumas grandezas a medir, fato que justificou a criação dos seus múltiplos e submúltiplos.

Em seguida, de acordo com a seqüência didática planejada, as alunas foram colocadas em três situações, com objetivos específicos:

1ª) Descobrir quantos quadradinhos tem a folha de papel quadriculado.

Essa situação exigiria a escolha de uma estratégia julgada mais conveniente para a medição da superfície: a contagem ou a multiplicação.

2ª) Descobrir quantos quadradinhos de 1 (um) centímetro tem o tampo da carteira, sem o uso de instrumentos de medida.

A situação conduziria ao ato de medir por contagem, com a utilização da folha quadriculada, unidade de medida de superfície arbitrária, e, depois, para a conversão da medida encontrada numa unidade padronizada.

3ª) Descobrir quantos quadradinhos de 1 (um) centímetro tem o piso da sala de aula.

A situação proposta motivaria a construção de uma unidade de medida de superfície mais adequada, o metro quadrado, devido à extensão da superfície a medir.

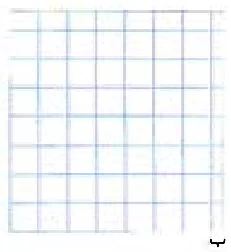
A atividade "Noção de área a partir da malha quadriculada" foi planejada com o propósito de oferecer às alunas um exemplo de situação didática vinculada às unidades "Comparação de grandezas de mesma natureza, por meio de estratégias pessoais e uso de instrumentos de medida conhecidos", "Comparação de grandezas de mesma natureza, com escolha de uma unidade de medida da mesma espécie do atributo a ser mensurado", "Identificação dos elementos necessários para comunicar o resultado de uma medição e produção de escritas que representem essa medição", "Identificação de grandezas mensuráveis no contexto diário: comprimento, superfície, etc.", "Reconhecimento e utilização de unidades usuais de medida como metro, centímetro, quilômetro, metro quadrado, etc.", "Estabelecimento das relações entre unidades usuais de medida de uma mesma grandeza" e "Utilização de procedimentos e instrumentos de medida, em função do problema e da precisão do resultado", previstas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997).

A proposta pedagógica foi alicerçada na experimentação em situações-problema como forma de provocar a necessidade da criação de unidades arbitrárias de medida de área e de seus submúltiplos.

Os conceitos que foram mobilizados: unidade de área, área por contagem, área por multiplicação, escolha de unidade de medida de área conveniente, conversão de medida, estratégia de medição de superfície.

4.20 RESULTADOS DA 10ª ATIVIDADE "NOÇÃO DE ÁREA A PARTIR DA MALHA QUADRICULADA"

Nas situações propostas, diversos tipos de papel quadriculado foram utilizados. Em alguns, conforme o detalhe reproduzido a seguir, as linhas e colunas impressas não terminavam exatamente em quadradinhos, aumentando o grau de dificuldade das tarefas:



Parte fracionária

Parte fracionária

Figura 4.20.1 – Modelo de papel quadriculado.

As alunas JÚLIA e GLÓRIA, por exemplo, utilizaram uma folha dupla, com quadriculado grande, de 1×1cm, que não possuía um número inteiro de quadradinhos em suas dimensões.

Para calcular o número de quadradinhos da folha, contaram a quantidade existente no sentido vertical e horizontal e efetuaram a multiplicação dos números inteiros, desprezando a parte fracionária. Como resultado, encontraram:

30 × 41 = 1.230 quadradinhos

Para a mesa, a folha medida não foi utilizada como unidade de superfície, apenas a medida linear do seu lado menor, contado de 30 em 30 e mais o correspondente à diferença para alcançar a parte final. O resultado encontrado foi:

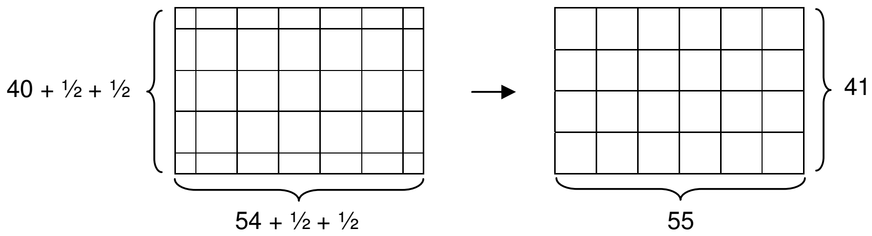
50 × 70 = 3.500 quadradinhos

As alunas DANIELA e MÍRIAM, juntas na atividade, utilizaram uma folha simples, com quadrículas de 0,5×0,5cm, com partes fracionárias nos quatro lados da folha. No cálculo do número de quadradinhos total explicitaram o esquema empregado:

> *Contar o número de quadradinhos na horizontal e na vertical (40 e 54).*
> *Multiplicar os números.*
> *Somar com as metades dos quadradinhos que sobraram (1 linha de metades nos 4 lados da folha, formando uma linha extra na vertical e 1 na*

> *horizontal).*
> *54 × 40 = 2160 + 94 = 2254 quadradinhos*

Pela explicação das alunas, juntando-se as metades de cada lado, a folha utilizada poderia ser considerada como possuindo um número inteiro de quadradinhos:



Nesse caso, o número de quadradinhos seria 55 × 41 = 2255, revelando a diferença de uma unidade para o resultado encontrado por elas. As alunas, em sua estratégia, somaram apenas o número inteiro de quadradinhos de cada dimensão (54 e 40), não computando as quatro extremidades, cuja soma correspondia exatamente a um quadradinho.

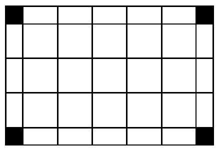


Figura 4.20.2 – Quadradinhos não considerados na contagem.

Para encontrar a superfície da mesa, essas alunas apresentaram registros diferenciados sobre a atividade. A aluna MÍRIAM utilizou a folha quadriculada como medida arbitrária de superfície, assim procedendo:

> *Bem, nessa atividade me embananei toda! Primeiro fiz assim:*
> *2254 × 2 = 4508 × 3 = 13524 quadradinhos de meio cm.*
> *13524 : 2 = 6762 quadradinhos de 1cm na mesa.*
> *Mas isso está errado, porque para transformar meio cm² em cm² é preciso dividir por 4 e não por 2!*
> *Então, 13524 : 4 = 3381 quadradinhos de 1cm, ou 3381 cm².*

A aluna ladrilhou a superfície da mesa com a folha quadriculada e fez os cálculos com base nas quantidades obtidas. Esquematicamente, assim procedeu:

<table>
<tr><td>2254</td><td rowspan="2">4508</td><td rowspan="2">4508</td></tr>
<tr><td>2254</td></tr>
</table>

Figura 4.20.3 – Esquema de ladrilhamento de MÍRIAM.

Ao fazer a divisão por quatro, revelou que construiu o conceito de unidade de área como sendo o produto de duas unidades lineares, e o conceito de proporcionalidade entre medidas quadráticas. Esse fato demonstra ainda mais, demonstra a apreensão do conceito-geométrico-em-ação de proporcionalidade, construído na atividade de redução proporcional à metade de uma embalagem. Ao considerar sobre qual estratégia utilizar, empregou alguns teoremas-em-ação, em particular um teorema de transformação inversa:

$$X \cdot X = X^2$$

$$2X \cdot 2X = 4(X \cdot X)$$

$$4(X \cdot X) = 4X^2$$

$$X^2 = \frac{4X^2}{4}$$

A aluna DANIELA, por sua vez, utilizou como medida o número de quadradinhos de um dos lados incluindo as duas metades excedentes (40+ ½ + ½), tendo o cuidado de dividir pela metade cada medida encontrada. Ao final, encontrou a área da mesa por multiplicação das duas dimensões:

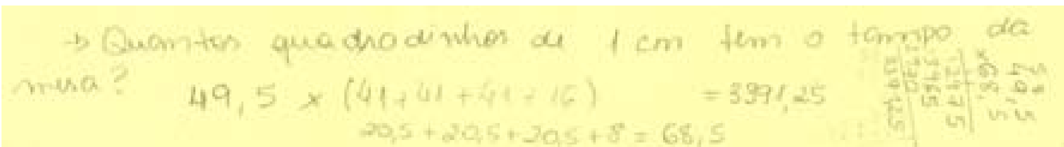


Figura 4.20.4 – Cálculo de DANIELA.

Na verdade, houve um erro na multiplicação de 8 por 5, o resultado correto deveria ser 3.390,75.

As alunas LAURA e ELIETE utilizaram a folha de papel milimetrado, cuja característica é possuir uma margem em branco em toda a sua volta, conforme detalhe abaixo:

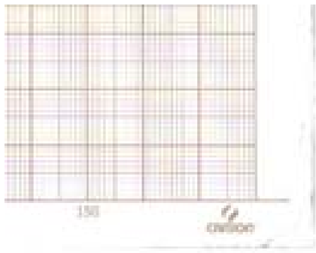


Figura 4.20.5 – Modelo de papel milimetrado.

Para calcular o número de quadradinhos da folha, assim procederam:

Conte os da altura e os da base 56 X 36 = 2016 quadradi-
nhos maiores.
50400 quadradinhos de 1 mm² e 504 quadradinhos de 1cm²

Figura 4.20.6 – Cálculo de LAURA e ELIETE.

As alunas foram ao menor nível de cálculo possível, uma vez que nessa tarefa não se estipulou as dimensões do quadradinho. Como cada quadrado de 0,5×0,5cm possui 25 quadradinhos de 1 mm^2, efetuaram a multiplicação:

2.016 × 25 = 50.400

Em seguida, utilizaram o teorema-em-ação *dividir por 100 para transformar uma medida de mm² para cm².*

50.400 mm^2 = 504 cm^2

Apesar de encontrarem o número de quadradinhos com 1 cm de lado, o papel utilizado não favoreceu o objetivo de contar com uma superfície medida, que servisse de unidade arbitrária para a situação subseqüente. Na medição do tampo da mesa, não tiveram outro recurso senão utilizar a parte quadriculada do papel para medir os lados, com precisão de milímetros.

h = 49,8 cm (49 x 64) -> 3136 quadradinhos e um quebrado.
b = 64,3 cm 320214 quadradinhos de 1mm de lado.

Figura 4.20.7 – Medição de LAURA e ELIETE.

As alunas denominaram, simbolizaram e multiplicaram as medidas encontradas, fato que revela o domínio do teorema-em-ação sobre a área do retângulo.

As alunas NARA e FABIANA utilizaram também o papel milimetrado. Para contornar o problema da margem lisa, valeram-se de uma régua:

1ª atividade: descobrir quantos quadradinhos tem no papel quadriculado

- Medi com a régua o tamanho de cada quadradinho(0,5cm);
- Medi a altura (30,5cm) e a base (21) da folha;
- Dividi esses valores por 0,5 (que é o tamanho de cada quadradinho) e obtive o número de quadradinhos da altura e da base;
- Multipliquei a base (42) pela altura (61) e descobri que a folha quadriculada tem 2562 quadradinhos.

Figura 4.20.8 – Medição de NARA e FABIANA.

Ao invés de medir apenas a parte em branco, mediram na totalidade. A estratégia empregada pelas alunas privilegiou a operação de divisão na acepção de “quantos cabem?”. A alternativa seria multiplicar as medidas encontradas por dois, uma vez que 1cm é o dobro de 0,5cm. Mas dividir por 0,5 é equivalente a multiplicar por 2. A variação reside no teorema-em-ação empregado.

Para a mesa, utilizaram a folha como medida linear.

2ª atividade: descobrir quantos quadradinhos de 1 cm tem o tampo da mesa. Obs: sem o uso de régua ou fita métrica.

- Coloquei a folha nas arestas (base e altura) da mesa e contei quantos quadradinhos davam (100 na base e 138 na altura);
- Dividi esses valores por dois, já que os meus quadradinhos tinham 0,5 cm e eu precisava saber quantos quadradinhos de 1cm tinham;
- Multipliquei 50 por 69 e descobrir que no tampo da mesa tem 3450 quadradinhos de 1cm.

Figura 4.20.9 – Medição de NARA e FABIANA.

A questão sobre descobrir quantos quadradinhos de 1cm tem a sala de aula, provocou reações semelhantes entre as alunas:

> *Difícil dizer, levaria muito tempo. Nessa situação é melhor medir com algo maior (NARA).*
> *Ah não! Precisamos de uma unidade maior (LAURA).*

Melhor outra forma de medir (OLGA).

A necessidade de medir motivou a construção de uma superfície apropriada para a contagem, como unidade de medida,com folhas de jornal e fita adesiva: o metro quadrado.

O processo para medir a sala exigiu uma avaliação das alunas. A possibilidade de ladrilhar a superfície com o metro quadrado foi descartada por todas, não só pelos obstáculos como também pelo esforço de se manter a continuidade do processo. Em vista disso, a opção recaiu sobre o cálculo por multiplicação, com a medida das dimensões lineares da sala.

A maioria das alunas empregou o lado do metro quadrado construído para a medição, estimando ao final a fração de metro restante.

As alunas NARA e FABIANA assim procederam, de acordo com seus registros:

3ª atividade: descobrir quantos metros quadrados tem a sala de aula. Obs: sem o uso de régua ou fita métrica.

- Recortei um metro quadrado no jornal;
- Estendi o jornal nas arestas da sala e contei quantos jornais daquele tamanho eram necessários para cobrir a altura e a base do chão da sala;
- Descobri que na altura cabiam 7 jornais e faltava um pedacinho de uns 30cm e na base cabiam 7 jornais de $1m^2$;
- Multipliquei a base (7) pela altura (7,3) e descobri que a sala tem $51,10m^2$.

Figura 4.20.10 – Medição de NARA e FABIANA.

Estratégia semelhante foi empregada pelas alunas DANIELA e MÍRIAM:

3ª atividade: quantos m^2 tem a sala de aula?

Para medir, cada aluna fez o seu metro quadrado de jornal. Depois, levamos os metros para a sala e medimos os dois lados.

Um lado da sala mede 7,31m e outro mede 7m.

$7,31 \times 7,00 = 51,17\ m^2$

Figura 4.20.11 – Medição de DANIELA e MÍRIAM.

As alunas LAURA e ELIETE, porém, empregaram uma estratégia diferenciada, utilizando uma facilidade natural disponível:

> *Ao colocar o m^2 no cantinho da sala, descobrimos que as lajotas retangulares que compõem a sala, formam um metro quadrado com duas lajotas de comprimento e quatro de largura, ou seja, cada lajota possui 50 cm de comprimento e 25 cm de largura. Contamos quantas lajotas a sala possui no comprimento (7 e meia) e na largura (28). Transformamos isso para metros, temos que a sala é de 7m x 7,25m. Isso dá aproximadamente 50,75m^2, ou seja, cabem 50 quadradões na sala.*

A tarefa proposta dizia respeito a *descobrir quantos quadradinhos de 1 (um) centímetro tem o piso da sala de aula*. A aluna LAURA foi a única a esboçar em seu registro a relação entre o metro quadrado e as medidas lineares em centímetros. Como não concluiu o cálculo (100×100=10.000), isso gerou um erro de grandeza na transformação das medidas da sala, de m^2 para cm^2, ou quadradinhos de 1 cm^2:

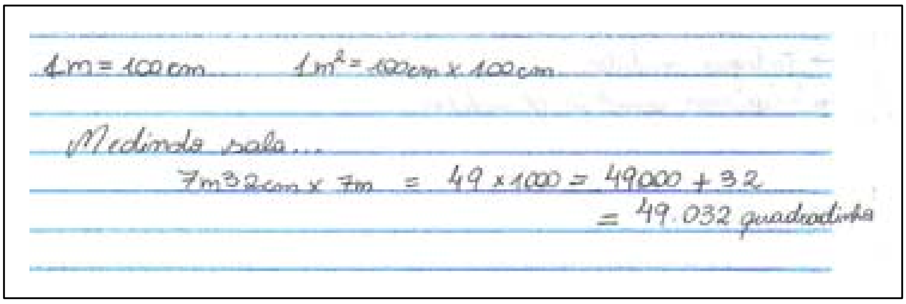

1m = 100cm $1m^2$ = 100cm x 100cm
Medindo sala...
7m32cm x 7m = 49 x 1000 = 49000 + 32
= 49.032 quadradinho

Figura 4.20.12 – Cálculo de LAURA.

Ao fazer a multiplicação, não aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, acrescentando um valor linear a uma medida quadrática. Seus cálculos deveriam ter sido:

7m 32cm = 7m + 32cm

(7m+32cm) × 7m = (7m×7m) + (7m×32cm)

(7m×7m) + (7m×32cm) = (49m^2×10.000) + (7m×100×32cm)

(49m^2×10.000) + (7m×100×32cm) = (490.000cm^2) + (700cm×32cm)

(490.000cm^2) + (700cm×32cm) = (490.000cm^2) + (21.400cm^2)

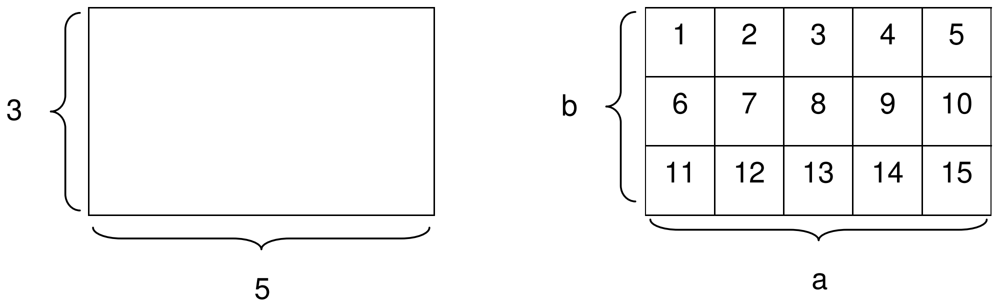
(490.000cm^2) + (21.400cm^2) = 512.400cm^2

A variação das medidas encontradas, em torno de cinqüenta metros quadrados, área real da sala, possibilitou refletir que na ação existe também o concurso do fator *erro humano* contra a precisão da medida.

4.21 11ª ATIVIDADE “DESCOBRINDO FÓRMULAS DE ÁREAS COM RECORTE E COLAGEM”

Por intermédio da folha de papel quadriculado como material concreto, esta atividade consistiu, inicialmente, na formulação da área do retângulo, fazendo a transição do processo de contagem de unidades de área para o processo de multiplicação. Em seguida, a partir do retângulo e utilizando-se as possibilidades de composição de figuras geométricas, foram construídas as fórmulas de área para o losango, o paralelogramo, o triângulo e o trapézio.

De início, as alunas construíram um retângulo de 5×3 no papel quadriculado. Tomando como unidade de medida *um quadradinho* do papel quadriculado, equivalente a uma unidade de área, satisfazendo a condição de ser da mesma espécie do atributo a ser medido, efetuaram a contagem.



Área por contagem = 15

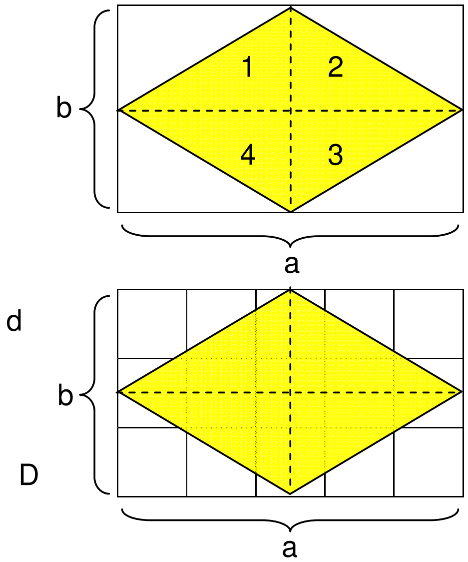
Área por multiplicação = 5 × 3

Área do retângulo = a × b

A disposição uniforme dos quadradinhos em *cinco colunas de três elementos* é a situação que induz o uso da operação de multiplicação para quantificar a superfície do retângulo. A área do retângulo, portanto, foi encontrada multiplicando-se as medidas dos dois lados.

A partir do conhecimento da fórmula da área do retângulo, essa figura geométrica foi utilizada como base de formulação de outras áreas, observando-se a composição de formas geométricas.

Na seqüência das atividades, as alunas uniram os pontos médios dos lados do retângulo de 5×3, formando um losango. Depois, uniram os vértices opostos do losango, formando as diagonais.



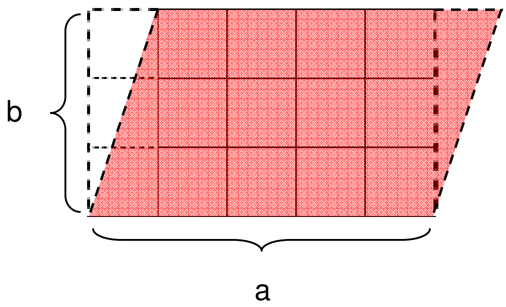
O losango ficou com diagonal maior *D = a* e com diagonal menor *d = b,* dentro de um retângulo de *a × b.*

As diagonais dividem o retângulo em quatro partes iguais e o losango ocupa metade de cada uma dessas partes.

Logo, a área do losango equivale à metade da área do retângulo.

Área do losango = $\dfrac{a \times b}{2} = \dfrac{D \times d}{2}$

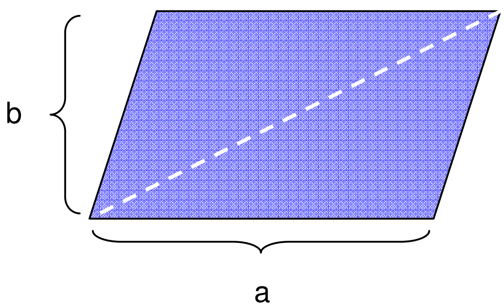
Em seguida, tomando o retângulo de 5×3 como ponto de partida, retiraram metade da primeira coluna e colaram o triângulo resultante na última coluna, formando um paralelogramo. A operação conservou a área do retângulo.



Logo, o paralelogramo tem área equivalente à área do retângulo.

Área do paralelogramo = a × b

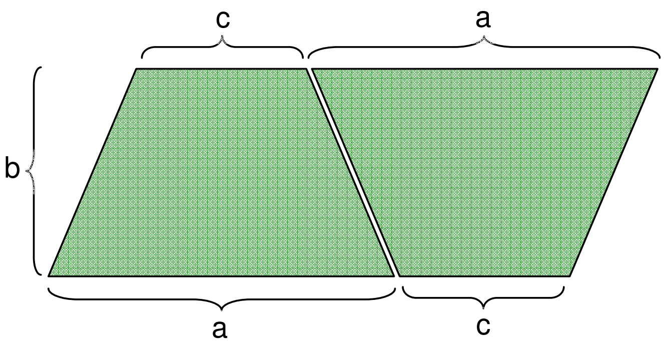
A partir do paralelogramo anterior, traçaram uma diagonal para formar dois triângulos.



O triângulo tem área equivalente à metade da área do paralelogramo.

Área do triângulo = $\dfrac{a \times b}{2}$

Em seguida, construíram um trapézio e o duplicaram. A união dos dois trapézios formou um paralelogramo.



O trapézio tem área equivalente à metade da área do paralelogramo.
A área do paralelogramo é:
(a + c) × b

Área do trapézio = $\mathbf{\dfrac{(a + c) \times b}{2}}$

A fórmula aqui construída tem o seu correspondente lingüístico nas aulas do ensino fundamental, como forma de memorização: “base maior mais base menor, multiplicado pela altura e dividido por dois”.

Na atividade anterior, noção de área a partir da malha quadriculada, observou-se uma forte mobilização de números inteiros e racionais; nesta atividade começa a surgir a mobilização de noções algébricas, com representações literais explícitas.

No decorrer da atividade, foram propostas as seguintes questões, para aplicação das fórmulas encontradas:

1) Um terreno retangular de 15 metros de frente e 25 metros de fundo está sendo vendido. Quantos metros quadrados tem esse terreno?

É uma situação onde o teorema-em-ação é a fórmula multiplicativa da área do retângulo.

2) O terreno da minha casa tem 512 metros quadrados. Se ele tem 64 metros de frente, quanto ele tem de fundo?

É uma questão onde é necessário uma transformação inversa do teorema-em-ação $\text{área} = a \times b$ para o cálculo da área do retângulo, uma vez que a área é conhecida.

3) Tenho uma fazenda que tem exatamente a forma de um trapézio. A planta da fazenda mostra que a base maior tem 32 quilômetros e a base menor é a metade da primeira. Se a área da fazenda é de 1.024 quilômetros quadrados, qual é a medida da altura do trapézio?

É uma questão semelhante à anterior, referente à inversão do teorema-em-ação $área = \frac{(a+b) \times c}{2}$ para o cálculo da área do trapézio, com a complexidade de haver o concurso de mais uma medida.

A atividade “Descobrindo fórmulas de áreas com recorte e colagem” foi planejada com o propósito de oferecer às alunas um exemplo de situação didática que complementasse as unidades “Comparação de grandezas de mesma natureza, com escolha de uma unidade de medida da mesma espécie do atributo a ser mensurado” e “Cálculo do perímetro e de área de figuras desenhadas em malhas quadriculadas e comparação de perímetros e áreas de duas figuras sem uso de fórmulas”, previstas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997).

A proposta pedagógica foi alicerçada na decomposição de figuras geométricas planas para a descoberta das fórmulas de área. A decomposição de figuras geométricas planas teve sustentação na atividade realizada com o tangram.

Os conceitos que foram mobilizados: unidade de área, área por contagem, área por multiplicação, medida, conservação de área.

4.22 RESULTADOS DA 11ª ATIVIDADE “DESCOBRINDO FÓRMULAS DE ÁREAS COM RECORTE E COLAGEM”

Esta última atividade do módulo de Geometria da disciplina Educação Matemática II fundamentou-se na manipulação e transformação das figuras planas, com a execução de muitas atividades manuais de recorte e colagem, intercaladas com as reflexões necessárias para a descoberta das fórmulas de área. Os requisitos foram trabalhados em atividades anteriores: classificação das figuras planas e descoberta da área do retângulo por multiplicação.

Os registros produzidos, alguns em sala, outros na montagem do dossiê, ofereceram bons indicadores do nível de compreensão de alguns conceitos geométricos trabalhados no curso, bem como o grau de envolvimento com a atividade.

Alguns registros são bastante sintéticos e restritivos, como, por exemplo, este da aluna ELIETE, referente à fórmula da área do triângulo, particularizada para o isósceles:

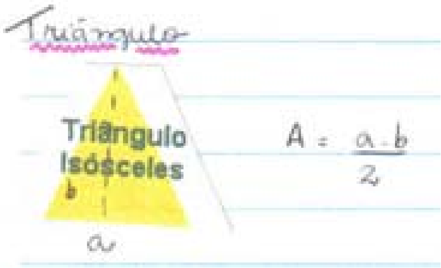


Figura 4.22.1 – Registro sobre a área do triângulo de ELIETE.

Assim como estes registros da aluna FABIANA:

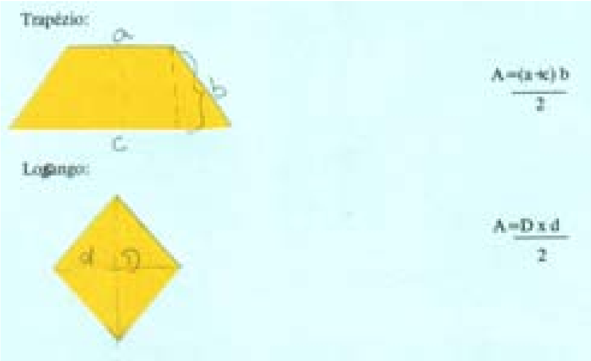


Figura 4.22.2 – Registros de FABIANA.

Nesses registros não há descrição sobre o caminho percorrido para a obtenção das fórmulas; somente a conclusão do raciocínio está representada, consignada pelas fórmulas. Houve um grande envolvimento na construção e menos atenção aos registros.

A aluna FABIANA, contudo, demonstrou um raciocínio comutativo correto ao passar do paralelogramo para o retângulo, na ordem inversa à construída em sala de aula:

Figura 4.22.3 – Registro sobre a área do paralelogramo de FABIANA.

A opção de registro da aluna revelou que o lado inclinado do paralelogramo não foi um obstáculo epistemológico para compreender a altura como uma das dimensões necessárias ao cálculo da área.

Em relação a essa questão da altura, a aluna MÍRIAM demonstrou variabilidade de conceitos ao decompor um retângulo, particularizando uma classe de triângulos (retângulos). Optou por uma variante onde a altura ficasse explícita, na condição de lado do triângulo:

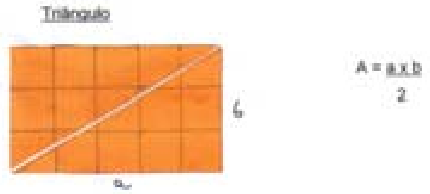


Figura 4.22.4 – Registro sobre a área do retângulo de MÍRIAM.

No registro a seguir, a aluna MÍRIAM manteve o artifício de explicitar a altura, novamente particularizando uma classe, desta vez os trapézios retângulos. O único senão é que em função do corte impreciso, a duplicação do trapézio, condição necessária para relacioná-lo com a metade da área do retângulo, não ficou evidente:

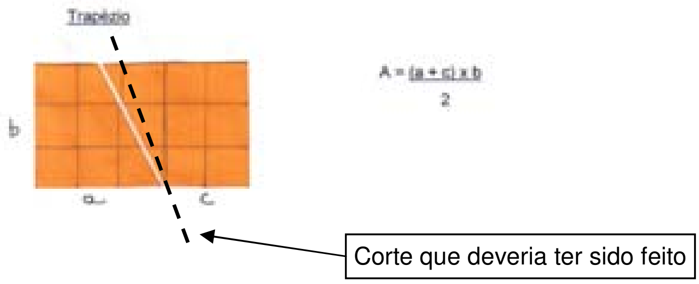


Figura 4.22.5 – Registro sobre a área do trapézio de MÍRIAM.

Os registros evidenciaram alguns embaraços com a terminologia das figuras geométricas planas, conteúdo construído na atividade de elaboração do mapa conceitual dos quadriláteros.

A aluna JÚLIA denominou de retângulo o paralelogramo construído:

Figura 4.22.6 – Equívoco de terminologia de JÚLIA.

O equívoco da aluna NARA, entretanto, reveste-se de maior complexidade. O registro revela a inversão da inclusão de classe entre quadrados e losangos:

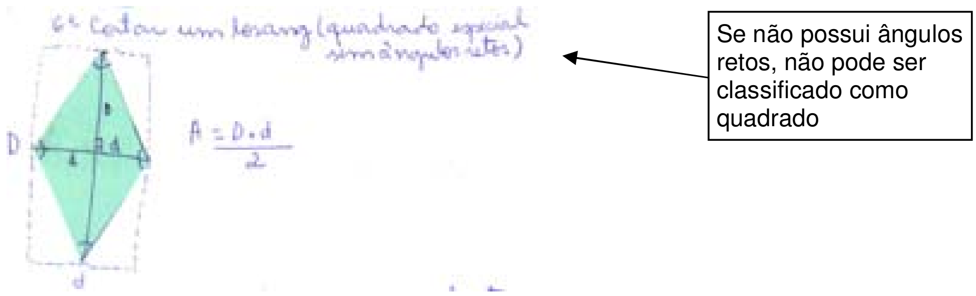


Figura 4.22.7 – Inversão de inclusão de classe de NARA

Como justificar a existência de um quadrado sem ângulos retos, se o que essencialmente o particulariza é justamente possuí-los? Na realidade, a aluna não elaborou com maior profundidade a inclusão da classe dos quadrados na classe dos losangos, tomando como base a precisão dos conceitos. O registro revela um erro de generalização, pelo qual uma figura geométrica é denominada quadrado simplesmente por ter quatro lados iguais. Isso indica que o seu conceito de quadrado ainda permanece na esfera do senso comum, admitindo outras conotações para, como apoio lingüístico, denotar objetos de forma semelhante.

A aluna CLÁUDIA, que não esteve presente na atividade, não exerceu crítica sobre o que copiou ou montou em seu dossiê:

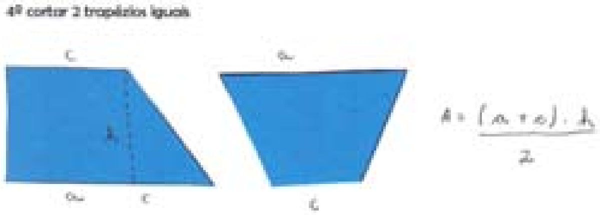


Figura 4.22.8 – Registro com desigualdade entre trapézios de CLÁUDIA

No registro, não há igualdade entre os trapézios.

No registro a seguir, da mesma aluna, novamente a ocorrência da inversão de inclusão de classes entre quadrados e losangos, agravada por uma contraditória representação de ângulos retos onde se afirmou não existir.

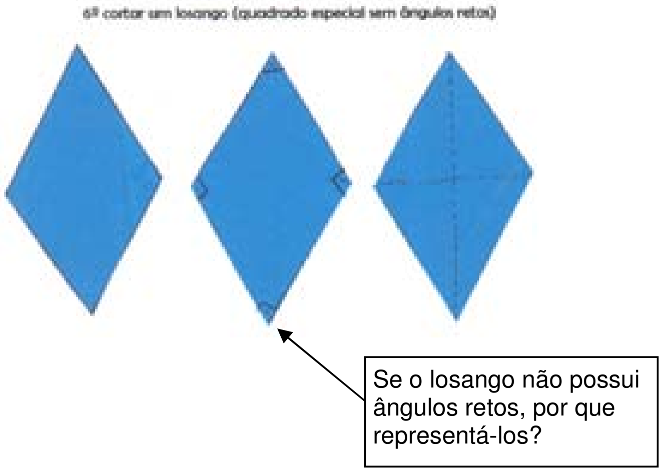
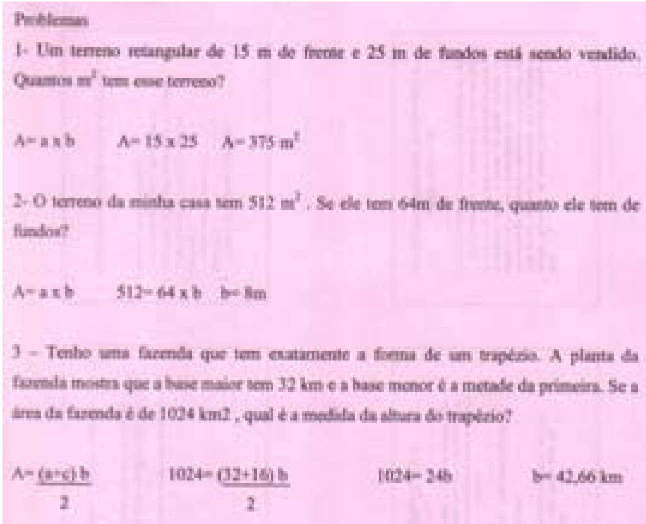


Figura 4.22.9 – Inversão de inclusão de classe de CLÁUDIA.

A intenção da aluna, no entanto, era mostrar a dinâmica das transformações sucessivas do losango, passando por um quadrado, mas a imprecisão da figura a fez incorrer no erro de classificar ângulos agudos e obtusos como ângulos retos.

Na resolução dos problemas, como forma de aplicação prática das fórmulas descobertas, não houve dificuldades, conforme o registro de FABIANA:



Problemas

1- Um terreno retangular de 15 m de frente e 25 m de fundos está sendo vendido. Quantos m^2 tem esse terreno?

$A= a \times b \qquad A= 15 \times 25 \qquad A= 375\ m^2$

2- O terreno da minha casa tem 512 m^2 . Se ele tem 64m de frente, quanto ele tem de fundos?

$A= a \times b \qquad 512= 64 \times b \qquad b= 8m$

3 – Tenho uma fazenda que tem exatamente a forma de um trapézio. A planta da fazenda mostra que a base maior tem 32 km e a base menor é a metade da primeira. Se a área da fazenda é de 1024 km2 , qual é a medida da altura do trapézio?

$A= \frac{(a+c)\,b}{2} \qquad 1024= \frac{(32+16)\,b}{2} \qquad 1024= 24b \qquad b= 42,66\ km$

Figura 4.22.10 – Registro dos problemas de FABIANA.

A aluna JÚLIA, na resolução do último problema, repetiu a organização esquemática da descoberta da fórmula de área, para orientar o seu pensamento. Apesar de essa fórmula apresentar a repetição da medida *b*, resolveu o problema corretamente.

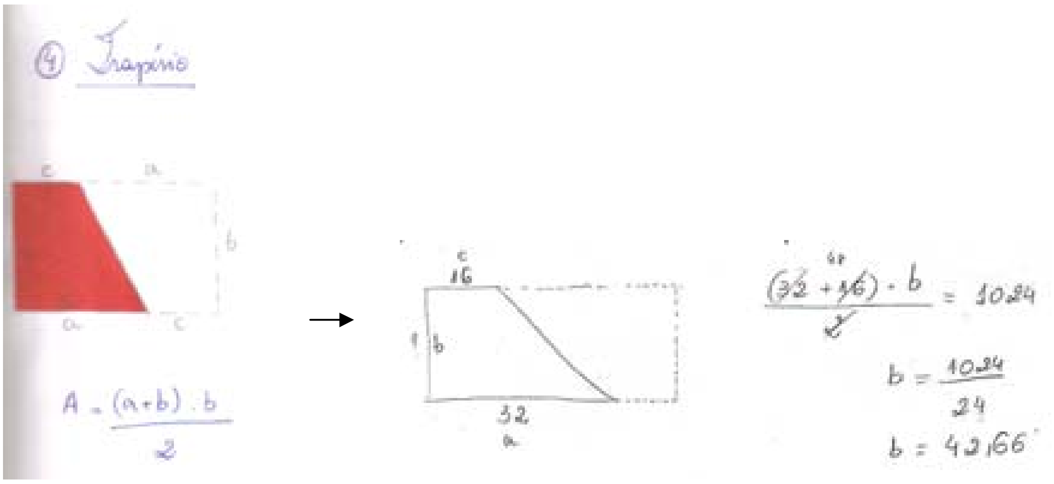


Figura 4.22.11 – Resolução de problema por meio de repetição de esquema.

Encerrada a análise da última atividade proposta, no próximo capítulo, descrevo e analiso as crenças manifestadas pelos sujeitos ao término do curso de Geometria.

Capítulo 5:
CRENÇAS APÓS O CURSO

Em 28/06/07, exatamente na aula de encerramento da disciplina, reapliquei o questionário com 20 questões de completar frases (anexo B), no intuito de identificar possíveis modificações nas crenças relacionadas com a Geometria, manifestadas pelas alunas anteriormente.

5.1 Crenças sobre a Geometria

As respostas sobre a questão "A Geometria é..." estão transcritas no quadro 5.1.1:

Quadro 5.1.1 - Respostas das alunas sobre a definição de Geometria, ao término do curso.

Alunas	A Geometria é...
JÚLIA	*Um complexo fantástico e interessante, cheia de novidades*
SIMONE	*Muito interessante e envolvente*
VALÉRIA	*Interessante e muito visual*
NARA	*Importante na nossa vida*
HELENA	*Importante na percepção do espaço, etc.*
TELMA	*Essencial para uma melhor visão do mundo*
LAURA	*A construção do mundo*
FABIANA	*Algo presente na vida*
OLGA	*Algo que está em muitas partes*
ISABEL	*Algo que realmente tem que ser relacionada com o dia-a-dia para melhor compreensão*
PRISCILA	*Uma forma muito mais atrativa de aprender cálculos matemáticos*
CLÁUDIA	*Espaço de aprendizagem e percepção, manipulação e visualização*
MÍRIAM	*A parte mais legal da matemática*
ELIETE	*Algo que não considero mais complexo*
DANIELA	*Reconhecer o espaço e forma do mundo*

GLÓRIA	*Arte de pensar e resolver pelo seu pensamento, pelo seu conhecimento*

Diferentemente das respostas anteriores, quando predominou uma aproximação sobre a Geometria como *o estudo das formas*, as novas respostas distribuíram-se segundo variados indicadores de significado:

- um juízo de valor: a Geometria é importante, interessante, essencial;
- uma definição: a Geometria está presente no mundo, na vida;
- uma disciplina da Matemática: a Geometria é prática e atrativa;
- uma ação: a Geometria é reconhecer, pensar.

O caráter dinâmico da Geometria, ausente nas respostas do primeiro questionário, ganha forma nessas novas respostas, resultante da metodologia empregada no curso. A aluna CLÁUDIA resumiu as atividades desenvolvidas como *espaço de aprendizagem e percepção, manipulação e visualização*.

As respostas que atribuem significado de ação permitem perceber maior cuidado em dar uma aproximação mais precisa à Geometria. A aluna DANIELA provoca o aparecimento do verbo *geometrizar*. Sua resposta agora inclui o reconhecimento do espaço, numa alusão à necessidade humana de orientação e deslocamento. A aluna-professora GLÓRIA, além de reconhecê-la como ação, explora o caráter abstrato da Geometria. A partir da interiorização dos conceitos geométricos pelo sujeito, ele é capaz de idealizar estratégias e resolver as suas demandas.

Muito significativa foi a mudança de concepção da aluna MÍRIAM, para quem a Geometria era *uma coisa inútil q. só serve de curiosidade*, e passa a ser *a parte mais legal da matemática*.

5.2 Crenças sobre si próprio

No quadro 5.2.1, as respostas transcritas sobre "minhas capacidades em Geometria são..." atualizam o autoconceito das alunas sobre sua apropriação dos conhecimentos geométricos e o potencial para aprender Geometria.

Quadro 5.2.1 - Respostas das alunas sobre a capacidade em Geometria, ao término do curso.

Alunas	Minhas capacidades em Geometria são...
ISABEL	*Ótimas, pois compreendi tudo que me ensinaram*
PRISCILA	*Muito boas*
DANIELA	*Boas*
VALÉRIA	*Boas, pois, posso usar no meu dia-a-dia e na questão de direção*
NARA	*Boas, porém falta muito p/que eu consiga ensiná-la*
LAURA	*Infinitas*
OLGA	*De básico para avançado*
MÍRIAM	*Satisfatórias p/minhas necessidades*
FABIANA	*Relacionados com o cotidiano*
SIMONE	*Cada vez melhores*
GLÓRIA	*Maiores do que antes*
JÚLIA	*Melhores do que eu pensava, mas preciso melhorar mais*
ELIETE	*Melhores agora*
HELENA	*Aprimoradas durante a minha formação*
CLÁUDIA	*Ainda limitadas*
TELMA	*Ainda, meio precárias*

As novas respostas traduzem uma afirmação pessoal sobre a própria capacidade de aprender Geometria. Do conjunto, surgem dois indicadores de significado:

- uma mensuração da capacidade atual: ótima, muito boa, boa, infinita, de básico para avançado, limitada, precária;

- uma comparação com a capacidade anterior: melhor, maior, aprimorada, ainda limitada, ainda precária.

O primeiro indicador é uma resposta objetiva, decorrente de um processo subjetivo de auto-análise, com base no aproveitamento durante as atividades propostas no curso. Ela resulta do confronto entre a complexidade do conteúdo curricular apresentado e a efetiva aprendizagem. A aluna ISABEL, que anteriormente se atribuía uma capacidade *boa* por ter dominado os conhecimentos da formação básica, agora se atribui capacidade *ótima* por sua compreensão durante o curso. A aluna PRISCILA também é um exemplo de mudança significativa, suas capacidades evoluíram de *limitadas* para *muito boas*. De uma maneira geral, todas as respostas indicaram melhora na capacidade.

Há, ainda, respostas que se relacionam diretamente com o nível de proficiência, com o nível de aptidão prática que se imagina possuir. A aluna MÍRIAM considera-se em condições de resolver satisfatoriamente seus problemas que envolvam a Geometria. A aluna FABIANA avalia suas capacidades com as solicitações cotidianas.

A aluna LAURA, para quem sua capacidade geométrica era *um mistério bem escondido*, ou seja, desconhecia o seu potencial, evolui para uma capacidade *infinita*. A partir dos tópicos do curso, essa aluna apropriou-se de parâmetros que lhe permitiram avaliar-se.

O segundo indicador também é uma resposta objetiva à questão de auto-avaliação. Ao invés de quantificar diretamente, e sim afirmar estar melhor do que antes ou ainda permanecer na condição anterior, a resposta revela a preocupação em comparar e verificar se houve progresso pessoal. A comparação se efetiva com as lembranças do aprendizado na formação básica. A aluna-professora GLÓRIA, por exemplo, que se atribuía capacidades *limitadíssimas*, passa a considerar-se com capacidades *maiores do que antes*.

As respostas das alunas CLÁUDIA e TELMA, as únicas que se declararam ainda permanecer com as capacidades antigas, inferiores às das demais alunas, enquadram-se nos dois indicadores propostos: não só quantificam, como também estabelecem uma comparação com a situação anterior.

A natureza da resposta depreciativa da aluna CLÁUDIA pode ser compreendida na associação com suas respostas a quatro outras questões. Segundo a aluna: a) Poderia aprender mais Geometria se ... *tivesse mais tempo e disposição*; b) Gostava da aula de Geometria até que ... *me deparei com as fórmulas*; c) Sinto que a Geometria faz “quebrar a cabeça” quando ... *precisar definir fórmulas*; d) Quando aprendo Geometria, sinto-me ... *mais educadora*.

A aluna CLÁUDIA atribui a si a responsabilidade pelo aprendizado da Geometria, em função do tempo disponível e disposição, elementos compartilhados com outras disciplinas do curso de Pedagogia. Atribui, também, no conjunto de capacidades geométricas, excessivo peso ao manuseio das fórmulas. Como não obteve segurança nos cálculos, considera que suas capacidades não avançaram. A rigor, não significa que não tenha progredido, apenas não atingiu aquilo que ela própria considera necessário para ser professora.

A aluna TELMA considera que suas capacidades são *ainda, meio precárias*. Três outras questões respondidas por ela chamam a atenção: a) Quando tenho aula de Geometria eu ... *ainda me sinto um pouco desmotivada*; b) Minha experiência mais negativa com a Geometria foi ... *a falta de compreensão de algumas atividades*; c) Poderia aprender mais Geometria se ... *fosse uma exigência nesse momento*. Suas respostas indicam que ela não relacionou seu aprendizado com a futura prática docente.

Aos três níveis de capacidade geométrica (satisfatória ou normal, limitada e muito limitada), percebidos anteriormente, pode ser adicionado um nível mais avançado (muito boa).

Ao término do curso, é importante avaliar as oscilações de interesse pela Geometria. É de se esperar que o ganho na capacidade geométrica acarrete um maior interesse pelo assunto. Uma das questões do questionário dizia respeito à "minha motivação para fazer Geometria é...". As respostas obtidas estão no quadro 5.2.2:

Quadro 5.2.2 - Respostas das alunas sobre motivação para fazer Geometria, ao término do curso.

Alunas	Minha motivação para fazer Geometria é...
SIMONE	*Grande*
LAURA	*Bem maior agora*
JÚLIA	*Melhor do que já esteve*
OLGA	*O prazer de aprender*
CLÁUDIA	*Poder aprender de forma lúdica e significativa para ensinar aos alunos*
ELIETE	*Poder passar para meus futuros alunos*
GLÓRIA	*Entender para ensinar*
ISABEL	*Saber que vou ensinar meus alunos a relacionar com o dia-a-dia*
PRISCILA	*Mudar a forma como é ensinada nas escolas*
HELENA	*Conhecer mais para atuar melhor na base - crianças*
NARA	*Entendê-la*
VALÉRIA	*Perceber os diferentes modos de usá-la*
TELMA	*Sua utilidade na prática*
DANIELA	*Conhecer melhor o mundo e suas formas*
MÍRIAM	*Conhecer o meu mundo*
FABIANA	*Essa disciplina*

As respostas, a exemplo do questionário anterior, distribuem-se segundo dois indicadores de significado:

a) intensidade de motivação: grande, maior, melhor;

b) forma de motivação: aprender, ensinar, utilizar.

As três primeiras respostas, indicadoras de intensidade, revelam um crescimento em relação à motivação no início do curso. As alunas atribuíram-se também uma maior capacidade geométrica. A motivação, portanto, está em razão direta com a compreensão.

Nesse novo conjunto de respostas, a forma como se dá a motivação está em maior número, numa proporção maior do que a anterior. E, diferentemente do primeiro questionário, a maior incidência de respostas refere-se ao desejo de ensinar e não mais à necessidade de aprender. Esse fato revela um aumento da autoconfiança para o exercício da docência.

A autoconfiança pode estar relacionada com a superação de obstáculos. As respostas à questão “eu acho difícil em Geometria...”, transcritas no quadro 5.2.3 permitiu identificar se persistiram ou não as crenças anteriores.

Quadro 5.2.3 - Respostas das alunas sobre o que é difícil em Geometria, ao término do curso.

Alunas	Eu acho difícil em Geometria...
SIMONE	*Nada*
GLÓRIA	*Ensinar sem aprender, ensinar pelos livros didáticos*
DANIELA	*Assimilar os conceitos*
CLÁUDIA	*Desenhar as figuras geométricas e saber as fórmulas*
VALÉRIA	*Compreender tantas fórmulas, quando não tem sentido para mim*
ISABEL	*Ter que decorar fórmulas*
JÚLIA	*As fórmulas*
NARA	*As fórmulas*
MÍRIAM	*As fórmulas*
ELIETE	*Algumas fórmulas (no caso decorar)*
HELENA	*O cálculo de áreas*
TELMA	*Alguns cálculos*
LAURA	*Orientação*
OLGA	*Quando inclui fração e raiz*
FABIANA	*Trabalhar com raízes*

PRISCILA	*Utilizar coisas práticas no lugar de cálculos*

Houve modificações em relação ao questionário anterior. As dificuldades com a nomenclatura dos entes geométricos foram superadas. Por sua vez, houve um incremento nas manifestações sobre dificuldades relacionadas às fórmulas e aos cálculos, apesar da preocupação com a metodologia do curso empregada para esse fim.

A resposta da aluna-professora GLÓRIA traduz a sua apreensão em ensinar sem domínio do conteúdo, sem compreender e assim complementa sua resposta para a pergunta sobre a motivação, que foi *entender para ensinar*.

Algumas respostas foram mais explícitas sobre o tipo de cálculo, e indicaram dificuldades com raízes. Esse conteúdo foi utilizado na determinação de um fator de proporcionalidade para cálculo de novas dimensões para redução do volume de sólidos geométricos. As dificuldades manifestadas enquadram-se como obstáculos.

5.3 Crenças sobre a aprendizagem

Ao término do curso, as respostas à questão “poderia aprender mais Geometria se...” no quadro 5.3.1, expressaram o pensamento crítico das alunas sobre a metodologia a que foram submetidas e a adoção de um posicionamento sobre como a Geometria deve ser ensinada.

Quadro 5.3.1 - Respostas das alunas sobre aprender mais Geometria, ao término do curso.

Alunas	Poderia aprender mais Geometria se...
LAURA	*Eu tivesse mais professores que sabem o que é isso*
ISABEL	*Não tivesse que decorar fórmulas*
MÍRIAM	*Entendesse a linguagem matemática das fórmulas e outras abstrações*
DANIELA	*Conseguisse utilizá-la na prática*
OLGA	*Trabalhasse sempre com concreto*
HELENA	*Trabalhasse mais com mapas, etc.*
JÚLIA	*Continuasse praticando a aplicação real*

VALÉRIA	*Tivesse tido oportunidade de vê-la no uso cotidiano*
NARA	*Tivesse vivenciado mais*
GLÓRIA	*Trabalhasse mais com a minha turma e lesse mais sobre o assunto*
ELIETE	*Pudesse pesquisar mais sobre*
SIMONE	*Procurasse entender mais*
PRISCILA	*Tivesse mais tempo para a prática*
CLÁUDIA	*Tivesse mais tempo e disposição*
FABIANA	*Tivesse ed. matemática 3*
TELMA	*Fosse uma exigência nesse momento*

As respostas reforçam os dois indicadores de significado, identificados no questionário anterior ao início do curso:

1) Aprende-se mais Geometria se houver significado;
2) Aprende-se mais Geometria se o processo utilizar material concreto.

As respostas permitem supor a aceitação da metodologia empregada no curso, baseada na experimentação e construção dos conceitos geométricos a partir da observação de modelos reais e manipulação de material concreto. A Geometria ganha uma valorização como conhecimento a ser adquirido. Algumas alunas respondem que poderia haver um aprofundamento se houvesse tempo disponível ou outra disciplina em seqüência. Não há manifestações de rejeição à Geometria, mas persistem algumas críticas sobre o emprego de fórmulas como algo que pesa na Geometria, como herança incontornável do conhecimento matemático.

O quadro 5.3.2, por intermédio da pergunta “Quando escuto dizer que a Geometria é excelente eu...”, atualizou a valorização pessoal sobre a Geometria.

Quadro 5.3.2 - Respostas das alunas quando escutam a Geometria é excelente, ao término do curso.

Alunas	Quando escuto dizer que a Geometria é excelente eu...
PRISCILA	*Concordo, claro que dependendo da forma como é ministrada*
NARA	*Concordo porque ela faz parte de nossa vida*
GLÓRIA	*Concordo*
MÍRIAM	*Concordo*
ELIETE	*Concordo*
VALÉRIA	*Concordo*
HELENA	*Concordo*

DANIELA	*Concordo*
SIMONE	*Concordo*
CLÁUDIA	*Confirmo*
LAURA	*Até concordo*
OLGA	*Acho normal*
JÚLIA	*Acredito na afirmação, pois pode ser percebida o tempo todo na vida cotidiana*
FABIANA	*Penso nos materiais concretos e nos jogos*
ISABEL	*Penso que é excelente quando eu compreendo*
TELMA	-

As respostas, com exceção da aluna TELMA que se absteve, são unânimes na aceitação da Geometria. Em relação ao questionário anterior, houve mudança significativa na avaliação geral.

Durante o curso, as alunas acrescentaram às experiências anteriores da formação básica, uma proposta didático-metodológica para o ensino da Geometria. Em conseqüência, reuniram elementos de duas instâncias para uma apreciação sobre o papel do professor, ou seja, suas experiências como aluna e o conteúdo específico de sua formação inicial. O quadro 5.3.3 explicita essas novas crenças.

Quadro 5.3.3 - Respostas das alunas sobre o bom professor de Geometria, ao término do curso.

Alunas	Um bom professor de Geometria deveria ...
DANIELA	*Mostrar o quão importante e simples ela é*
OLGA	*Trabalhá-la o ano todo*
CLÁUDIA	*Incentivar seus alunos a aprender geometria*
PRISCILA	*Estimular os alunos a buscar em sua realidade a importância da geometria*
FABIANA	*Ensinar geometria com materiais concretos, manipuláveis*
TELMA	*Se utilizar de momentos lúdicos*
SIMONE	*Trazer experiências interessantes e diferentes*
HELENA	*Trabalhar de forma contextualizada*
ISABEL	*Relacionar a geometria com seu dia-a-dia*
VALÉRIA	*Usar a prática cotidiana*
MÍRIAM	*Enfatizar o uso prático da geometria*
NARA	*Usar muita prática para ensinar*

JÚLIA	*Mostrar a prática antes da teoria*
ELIETE	*Ser dedicado e envolvente*
LAURA	*Estar sempre aprendendo*
GLÓRIA	*Aprender antes de ensinar*

As respostas desse último quadro colocam o papel do professor em absoluta correspondência com a forte impregnação contextual da Geometria, no processo de ensino-aprendizagem, após diversas experiências com material concreto no curso.

No próximo capítulo, analiso as contribuições da disciplina para a formação inicial dos graduandos e as primeiras manifestações de intervenção pedagógica das alunas.

Capítulo 6

O PROJETO DAS ALUNAS,
UMA PRIMEIRA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

De acordo com a ementa do Plano de Ensino (anexo A), dentre os objetivos específicos propostos, centrados no aluno, a serem atingidos pelo desenvolvimento da disciplina Educação Matemática II, há um que se relaciona diretamente com os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN:

"Conhecer em profundidade o conteúdo matemático do currículo das séries iniciais do ensino fundamental e desenvolver competências para o desenvolvimento da metodologia de ensino para sua ação didático/pedagógica."

Visando a formação inicial das pedagogas no contexto da educação matemática, foi realizada uma série de atividades, exemplificando seqüências didáticas adequadas aos anos iniciais do ensino fundamental. O quadro 6.1 estabelece a correspondência entre os conteúdos curriculares preconizados pelos PCN (BRASIL, 1997) e as atividades desenvolvidas durante o curso de Geometria:

Quadro 6.1 – Correspondência entre os conteúdos dos PCN e as atividades da disciplina.

Conteúdos conceituais e procedimentais sobre Espaço e Forma, preconizados pelos PCN		Atividades da disciplina Educação Matemática II
1º ciclo	Localização de pessoas ou objetos no espaço, com base em diferentes pontos de referência e algumas indicações de posição.	1ª atividade: Localização: mapa do tesouro.
2º ciclo	Descrição, interpretação e representação da posição de uma pessoa ou objeto no espaço, de diferentes pontos de vista.	1ª atividade: Localização: mapa do tesouro. 2ª atividade: Geometria da tartaruga.
1º ciclo	Movimentação de pessoas ou objetos no espaço, com base em diferentes pontos de referência e algumas indicações de direção e sentido.	1ª atividade: Localização: mapa do tesouro.
2º ciclo	Utilização de malhas ou redes para representar, no plano, a posição de uma pessoa ou objeto.	1ª atividade: Localização: mapa do tesouro. 2ª atividade: Geometria da tartaruga.
1º ciclo	Descrição da localização e movimentação de pessoas ou objetos no espaço, usando sua própria terminologia.	1ª atividade: Localização: mapa do tesouro.
2º ciclo	Descrição, interpretação e representação da movimentação de uma pessoa ou objeto no espaço e construção de itinerários.	1ª atividade: Localização: mapa do tesouro.
1º ciclo	Dimensionamento de espaços, percebendo relações de tamanho e forma.	1ª atividade: Localização: mapa do tesouro.
1º ciclo	Interpretação e representação de posição e de movimentação no espaço a partir da análise de maquetes, esboços, croquis e itinerários.	1ª atividade: Localização: mapa do tesouro.

2º ciclo	Representação do espaço por meio de maquetes.	3ª atividade: Reprodução de embalagens com redução.
2º ciclo	Reconhecimento de semelhanças e diferenças entre corpos redondos, como a esfera, o cone, o cilindro e outros.	-
1º ciclo	Observação de formas geométricas presentes em elementos naturais e nos objetos criados pelo homem e de suas características: arredondadas ou não, simétricas ou não, etc.	1ª atividade: Localização: mapa do tesouro. 3ª atividade: Reprodução de embalagens com redução.
2º ciclo	Reconhecimento de semelhanças e diferenças entre poliedros (como os prismas, as pirâmides e outros) e identificação de elementos como faces, vértices e arestas.	3ª atividade: Reprodução de embalagens com redução. 6ª atividade: Planificação do cubo.
1º ciclo	Estabelecimento de comparações entre objetos do espaço físico e objetos geométricos – esféricos, cilíndricos, cônicos, cúbicos, piramidais, prismáticos – sem uso obrigatório de nomenclatura.	3ª atividade: Reprodução de embalagens com redução. 6ª atividade: Planificação do cubo.
2º ciclo	Composição e decomposição de figuras tridimensionais, identificando diferentes possibilidades.	3ª atividade: Reprodução de embalagens com redução. 6ª atividade: Planificação do cubo.
1º ciclo	Percepção de semelhanças e diferenças entre cubos e quadrados, paralelepípedos e retângulos, pirâmides e triângulos, esferas e círculos.	3ª atividade: Reprodução de embalagens com redução. 6ª atividade: Planificação do cubo.
2º ciclo	Identificação da simetria em figuras tridimensionais.	-
1º ciclo	Construção e representação de formas geométricas.	4ª atividade: Descoberta das figuras planas utilizadas. 5ª atividade: Produção de figuras planas com canudos e mapas conceituais.
2º ciclo	Exploração das planificações de algumas figuras tridimensionais.	3ª atividade: Reprodução de embalagens com redução. 6ª atividade: Planificação do cubo.
2º ciclo	Identificação de figuras poligonais e circulares nas superfícies planas das figuras tridimensionais.	3ª atividade: Reprodução de embalagens com redução.
2º ciclo	Identificação de semelhanças e diferenças entre polígonos, usando critérios como número de lados, número de ângulos, eixos de simetria, etc.	5ª atividade: Produção de figuras planas com canudos e mapas conceituais.
2º ciclo	Exploração de características de algumas figuras planas, tais como: rigidez triangular, paralelismo e perpendicularismo de lados, etc.	5ª atividade: Produção de figuras planas com canudos e mapas conceituais. 7ª atividade: Tangram: composição e decomposição de figuras planas.
2º ciclo	Composição e decomposição de figuras planas e identificação de que qualquer polígono pode ser decomposto a partir de figuras triangulares.	7ª atividade: Tangram: composição e decomposição de figuras planas. 9ª atividade: Construção de figuras planas no geoplano.
2º ciclo	Ampliação e redução de figuras planas pelo uso de malhas.	8ª atividade: Brincando com malhas.
2º ciclo	Representação de figuras geométricas.	4ª atividade: Descoberta das figuras planas utilizadas. 5ª atividade: Produção de figuras planas com canudos e mapas conceituais
2º ciclo	Percepção de elementos geométricos nas formas da natureza e nas criações artísticas.	1ª atividade: Localização: mapa do tesouro.

Conteúdos conceituais e procedimentais sobre Grandezas e Medidas, preconizados pelos PCN		Atividades da disciplina Educação Matemática II
1º ciclo	Comparação de grandezas de mesma natureza, por meio de estratégias pessoais e uso de instrumentos de medida conhecidos.	9ª atividade: Construção de figuras planas no geoplano. 10ª unidade: Noção de área a partir da malha quadriculada.
2º ciclo	Comparação de grandezas de mesma natureza, com escolha de uma unidade de medida da mesma espécie do atributo a ser mensurado.	9ª atividade: Construção de figuras planas no geoplano. 10ª unidade: Noção de área a partir da malha quadriculada.
1º ciclo	Identificação dos elementos necessários para comunicar o resultado de uma medição e produção de escritas que representem essa medição.	10ª unidade: Noção de área a partir da malha quadriculada.
2º ciclo	Identificação de grandezas mensuráveis no contexto diário: comprimento, superfície, etc.	9ª atividade: Construção de figuras planas no geoplano. 10ª unidade: Noção de área a partir da malha quadriculada.
2º ciclo	Reconhecimento e utilização de unidades usuais de medida como metro, centímetro, quilômetro, metro quadrado, etc.	10ª unidade: Noção de área a partir da malha quadriculada.
2º ciclo	Estabelecimento das relações entre unidades usuais de medida de uma mesma grandeza.	10ª unidade: Noção de área a partir da malha quadriculada.
2º ciclo	Utilização de procedimentos e instrumentos de medida, em função do problema e da precisão do resultado.	10ª unidade: Noção de área a partir da malha quadriculada.
2º ciclo	Cálculo de perímetro e de áreas de figuras desenhadas em malhas quadriculadas e comparação de perímetros e áreas de duas figuras sem uso de fórmulas.	9ª atividade: Construção de figuras planas no geoplano.

Conforme estabelecido pelo quadro 6.1, apenas dois conteúdos curriculares não foram contemplados diretamente, mas as alunas vivenciaram situações didáticas que poderão ser extensivas a eles:

a) O reconhecimento de semelhanças e diferenças entre corpos redondos pode ser incluído na atividade de planificação de sólidos.

b) A identificação da simetria em figuras tridimensionais é o seguimento natural da atividade de planificação de sólidos.

Com base nos conteúdos conceituais e procedimentais da Geometria, estabelecidos pelos PCN para o ensino fundamental, foi possível elaborar um mapa conceitual (anexo C), que permite a visualização das inter-relações existentes entre os conceitos geométricos, assim como a compreensão da complexidade do campo conceitual da Geometria, numa aproximação à Teoria dos Campos Conceituais, de Gérard Vergnaud.

O mapeamento conceitual é uma estratégia que enfatiza conceitos e relações, proporcionando o planejamento da metodologia de ensino, podendo, também, servir de instrumento de metacognição, isto é, o aprender a aprender, pensar sobre o pensar (MOREIRA, 1999).

Em relação ao esforço e dedicação das alunas, a disciplina competiu com outras atividades do Curso de Pedagogia, principalmente atividades derradeiras, relacionadas com sua conclusão.

O quadro 6.2 explicita a freqüência de cada aluna aos encontros com as atividades propostas de Geometria e o total de alunas presentes em cada encontro.

Quadro 6.2 – Demonstrativo da freqüência nos encontros sobre Geometria.

ATIVIDADES DO CURSO NA ORDEM DE REALIZAÇÃO **ALUNAS**	Localização: mapa do tesouro	Geometria da tartaruga: lateralidade	Reprodução de embala-gens com redução	Descoberta das figuras planas utilizadas	Produção de figuras planas com canudos e mapas conceituais	Planificação do cubo	Planificação do cubo	Tangram: composição e decomposição de figu-ras planas	Brincando com malhas	Construção de figuras planas no geoplano	Noção de área a partir da malha quadriculada	Descobrindo fórmulas de área com recorte e colagem	**TOTAL DE PRESENÇAS**
PRISCILA	X	X		X	X	X	X		X	X	X		9
ISABEL	X	X	X	X		X		X	X	X			8
VALÉRIA		X	X	X	X		X	X	X	X	X		9
MÍRIAM	X	X		X	X	X	X		X	X	X	X	10
DANIELA	X	X	X	X	X	X	X		X	X	X		10
BIANCA		X	X	X	X	X	X		X	X	X		9
CLÁUDIA	X	X	X	X	X	X	X		X	X	X		10
SIMONE	X	X	X	X	X	X	X		X	X	X		10
FABIANA	X	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	11
NARA		X	X	X	X	X	X	X		X	X	X	10
OLGA	X		X				X	X	X	X	X	X	8
TELMA	X	X	X	X	X		X	X	X	X	X	X	11
LAURA	X	X	X		X		X	X	X	X	X		9
HELENA	X	X	X	X	X	X	X		X		X	X	10
ZÉLIA	X	X	X	X	X	X			X	X	X	X	10
ELIETE		X		X	X	X	X		X	X	X	X	9
ROSELI	X		X	X	X		X	X	X	X		X	9
GLÓRIA	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	11
JÚLIA	X	X	X	X	X	X	X	X			X	X	10
TOTAL	15	16	16	16	17	14	17	10	17	17	17	11	-
PERCENTUAL	79%	84%	84%	84%	89%	74%	89%	53%	89%	89%	89%	58%	-

Sobre o aproveitamento das aulas, algumas alunas lamentaram

Gostaria de ter caprichado mais nos trabalhos escritos, mas não foi possível neste final de semestre (JÚLIA).
Gostaria de ter tido mais tempo, para que pudesse me dedicar mais a essa disciplina (PRISCILA).
Talvez por falta de tempo, não me esforcei o bastante nas atividades extra-classe (SIMONE).
Nesse semestre, apesar da correria, consegui me envolver com a disciplina. Porém, meu envolvimento não foi como eu desejaria (ELIETE).
Eu acabo esta disciplina com o mesmo sentimento de frustração, por não ter aproveitado 100%, sempre falta tempo para se dedicar o tanto que me motiva a matéria (LAURA).

As atividades “Tangram: composição e decomposição de figuras planas” e “Descobrindo fórmulas de área com recorte e colagem” foram as que contaram com menor número de alunas, com percentuais de presença inferiores a 60%.

Além das aulas teórico-práticas, um segundo espaço foi definido como base do curso, na forma de um projeto prático-teórico, no qual as alunas aplicariam os referenciais metodológicos em situações-problema, surgidas na interação com o educando escolhido.

Essa prática, no terreno da Educação Matemática, tem um objetivo específico bem definido na ementa da disciplina (anexo A):

“Desenvolver a sensibilidade e a competência para observar o educando em processo de resolução de situação-problema e saber realizar análise crítica sobre os potenciais, limites e dificuldades da criança para realizar determinada atividade matemática nos contextos escolares e não escolares.”

A análise dos relatórios e práticas realizadas nos projetos individuais permitiu identificar determinadas concepções sobre ensino, aprendizagem e papel do professor, bem como a apreensão de conceitos geométricos e as reflexões sobre a metodologia de ensino da Geometria. De forma objetiva, possibilitou algumas inferências sobre a contribuição da disciplina para a formação inicial das alunas.

A escolha dos sujeitos para o projeto atendeu a critérios pessoais de interesse e oportunidade. A aluna LAURA, por exemplo, trabalhou com crianças na faixa etária de 2 a 3 anos, com interesse investigativo específico em compreender as primeiras manifestações de orientação espacial

Me propus a realizar um projeto de matemática, seguindo mais na linha da pesquisa, do que propriamente no processo educativo. Melhor dizendo, meu foco foi a minha aprendizagem pessoal, visto que a criança construirá naturalmente sua aprendizagem com minha ajuda. Meu objetivo principal era compreender como se dá o início do contato da criança com a matemática. Para isso, desenvolvi meus encontros, que prefiro chamar de momentos, com algumas crianças de 2 a 3 anos.

Em seu relatório, comentou

> *É interessante realizar um trabalho assim, percebendo a dinamicidade do dia-a-dia. Quando eu me propus a trabalhar com crianças tão novas, pensei em algo muito bem planejado e ditado. Porém, quando não deu certo a atividade de caça ao tesouro, eu entendi que as vezes as crianças não estavam interessadas em uma atividade em grupo, quando em outras isso é natural.*

Outras alunas vivenciaram limitação semelhante. No desenvolvimento dos seus projetos individuais, nem todas as atividades propostas durante o curso foram experimentadas com os sujeitos. Em função do momento vivido no projeto, outros conteúdos foram abordados por força da necessidade de adaptação às expectativas do educando. No quadro 6.3 se pode observar a natureza e a freqüência do trabalho que desenvolveram nos encontros promovidos:

Quadro 6.3 - Demonstrativo da natureza dos encontros realizados pelas alunas.

ATIVIDADES DO CURSO NA ORDEM DE REALIZAÇÃO **ALUNAS**	Localização: mapa do tesouro	Geometria da tartaruga: lateralidade	Reprodução de embalagens com redução	Descoberta das figuras planas utilizadas	Produção de figuras planas com canudos e mapas conceituais	Planificação do cubo	Tangram: composição e decomposição de figuras planas	Brincando com malhas	Construção de figuras planas no geoplano	Noção de área a partir da malha quadriculada	Descobrindo fórmulas de área com recorte e colagem	Outras atividades
ELIETE		1		4	2	5				3		
TELMA	2-3	1	4-5									6-7-8
BIANCA		3	5		1-2		4	6-7				
FABIANA	2	3					4	5-6		7		1-8
MÍRIAM	3-6	2					5					1-4
CLÁUDIA	2	3	4				5	6				1-7
NARA					2-3-4							1-5-6
JÚLIA	9		2		1							3 a 8
LAURA	1-2				5							3 a 8
DANIELA		1										2 a 7
FREQÜÊNCIA	9	7	5	1	8	1	4	5	-	2	-	30

No quadro somente estão computadas as atividades que puderam ser identificadas de forma individualizada nos relatórios de projeto. A numeração refere-se ao número de ordem do encontro realizada pelo graduando com o educando escolhido para o desenvolvimento da intervenção, dentre os encontros realizados.

De acordo com os relatos, o fator preferência também foi determinante na escolha. As atividades preferidas pelas alunas foram as relativas à orientação e deslocamento e reconhecimento de figuras planas. Por outro lado, as atividades preteridas relacionavam-se a cálculos.

O número expressivo de atividades não relacionadas com a Geometria é explicável pela existência de outros conteúdos matemáticos na disciplina. Além disso, os projetos de intervenção articulam-se também com os conceitos desenvolvidos em Educação Matemática I, ou seja, abrangem todos os conteúdos dos anos iniciais do ensino fundamental.

Apesar da liberdade de escolha, algumas atividades foram rejeitadas pelos sujeitos dos projetos por envolver conceitos geométricos de difícil assimilação

> *Eu falei que o quadrado é tão "especial" que é também um retângulo e um losango. Mas eu não consegui fazê-lo entender o que é losango. Admito que não pude fazê-lo entender o que é losango por não conseguir adequar a linguagem que define os conceitos do losango (NARA).*
> *Levei uma cartolina para brincarmos de tangram, da mesma forma que fizemos na em sala de aula. A criança teve muita dificuldade para montar as formas que eu solicitava e quanto mais os pedaços de tangram eram transformados em outros pedaços menores e diferentes, mais dificuldade ela tinha em voltar ao quadrado original. Algumas vezes desistiu de tentar montar a forma pedida (FABIANA).*
> *Com o desenho todo quadriculado, numeramos as linhas (horizontal) e colunas (vertical), tanto no desenho quanto na folha quadriculada, para facilitar a transferência. O aluno começou a transferência, mas demonstrou bastante dificuldade e impaciência, fez o desenho do jeito que <u>queria e foi super-resistente a tentativa de refazer</u> o desenho com mais calma e atenção. Não quis refazer e nem escolher um outro desenho. Pediu para pintar o desenho do gibi (BIANCA, grifo meu).*

Eis um testemunho que as experiências realizadas no espaço da formação não podem ser transferidas para a sala de aula tal e qual. Em verdade, faltou a transposição didática, que não é elementar. Na transposição didática do conteúdo escolhido haveria a adequação das experiências vivenciadas na disciplina às necessidades e capacidades do sujeito.

Algumas alunas, entretanto, percebendo a necessidade de adaptação, buscaram realizar a transposição didática e respeitaram o desenvolvimento cognitivo do sujeito

> *Em outros dois encontros trabalhamos a transposição de figuras planas e tridimensionais, por meio da desmontagem e montagem de caixas. Junto com a criança repeti a atividade realizada na aula, fazendo algumas alterações. Diferenciando da atividade "original", remontamos a caixa cortando-a livremente para saber se era possível montar uma caixa diferente da do modelo (TELMA).*
> *Levei as formas geométricas cortadas em papel colorido. Fui mostrando as diferentes formas e fui pedindo para a criança tentar lembrar de objetos que*

> *lembrassem esses sólidos geométricos. Trabalhei as seguintes formas planas: quadrado, círculo, triângulo, retângulo, losango, paralelogramo e trapézio. Dessas figuras trabalhei algumas de suas propriedades, as que achei adequadas para o nível em que a criança se encontra (ELIETE).*

Durante o curso, a metodologia de ensino seguiu os preceitos fundados nas teorias construtivistas. Nesse sentido, a prática educacional ofereceu investigações significativas e realistas, permitindo às alunas explorar e gerar muitas possibilidades, tanto confirmatórias quanto contraditórias (FOSNOT, 1998).

Na execução do projeto de intervenção, no entanto, em algumas oportunidades as alunas centraram a ação no professor

> *Comecei a construção de um ângulo reto utilizando uma folha de papel, onde eu realizei uma dobra, e por seguinte a dobrei novamente, de modo que os lados da 1ª dobra coincidissem, em seguida assinalei o ângulo reto que se formou (ELIETE, grifo meu).*
> *A criança apresentou dificuldade com o 1º dado que continha os ângulos, alegando que não aprendera ainda esses conceitos na escola. Expliquei-lhe com a ajuda de uma circunferência, e continuamos a brincadeira (CLÁUDIA, grifo meu).*

Assim como houve atividades centradas no trabalho do aluno para a construção do conhecimento

> *Pedi que a criança desmontasse caixas de papelão a fim de que ela a reproduzisse em uma folha branca desenhando, cortando, colando (TELMA, grifo meu).*
> *Levei uma caixinha fechada e pedi para que ele a abrisse e a desenhasse Ele fez o gato, mas quebrou bastante a cabeça para se lembrar como fazia, teve que tentar muitas vezes. Depois que conseguiu, percebi que tinha compreendido os encaixes e logo depois ele fez um cachorro (BIANCA, grifo meu).*

Ante o desafio de promover competências para o ensino de Geometria, a disciplina Educação Matemática II, como parte do currículo de formação da Pedagogia com ênfase na regência, contribuiu para a formação das alunas, segundo algumas avaliações realizadas

> *Esta disciplina foi muito importante para a minha prática pedagógica. Pude através das atividades construir e reconstruir muitos conceitos (CLÁUDIA).*
> *Para a minha formação como educadora, a disciplina foi fundamental. É imprescindível trabalhar de forma responsável, consciente, com base teórica e desenvolver uma prática lúdica e contextualizada no ensino de geometria (HELENA).*
> *A disciplina da maneira que é administrada, sempre fazendo uma relação da teoria com a prática é fundamental para nós futuros educadores (ELIETE).*
> *Avalio a disciplina como muito boa, de excelente aproveitamento na prática docente e também no dia-a-dia. Grande importância para formação de professores (VALÉRIA).*
> *As aulas foram excelentes, dinâmicas e de extrema importância para a minha vida profissional (FABIANA).*
> *Estou muito satisfeita por ter optado cursá-la. Não sei o que seria de mim*

> *sem os conhecimentos e descobertas que fiz aqui. Provavelmente não faria um bom trabalho como educadora matemática (MÍRIAM).*
> *A disciplina foi excelente, uma oportunidade quase única de verificar na prática conhecimentos tão importantes e interessantes (JÚLIA).*

É oportuno ressaltar que esta disciplina é optativa na formação do pedagogo.

Tendo em mente os saberes do futuro professor e as categorias de conhecimento segundo a classificação de Shulman (1992), discutida no referencial teórico, a disciplina contribuiu, em profundidade que revelou-se adequada, para o aprendizado de Geometria, por intermédio do *conhecimento da matéria que ensina*

> *Posso afirmar que agora sim tive um professor que fez com que eu aprendesse, entendesse, pensasse sobre Geometria. Apesar do tempo para estudo ser insuficiente, os momentos que tive assistindo às aulas, realizando as atividades [...] me fizeram aprender muito sobre Geometria (GLÓRIA.).*
> *Aprendi muito com as aulas entendendo agora as relações necessárias entre a figura geométrica e suas fórmulas, o que não conseguia antes (NARA).*

A vivência nas diversas situações didáticas promovidas pelo curso ante a especificidade da Geometria como campo de conhecimento, foi uma oportunidade de aprender a planejar a ação pedagógica, com o propósito de promover a construção dos conceitos geométricos, *o conhecimento pedagógico* da matéria

> *A disciplina oferece vários recursos que podemos usar futuramente (ELIETE).*
> *Um bom professor criativo, consegue ensinar a matemática sem livro didático, basta ter passado por essa disciplina (ISABEL).*
> *Acho que agora já tenho as ferramentas para iniciar um bom trabalho com matemática (DANIELA).*
> *Achei a disciplina extremamente interessante e não só válida como muito importante para conseguirmos ver formas melhores e mais atrativas de trabalhar a geometria, para que possamos aplicar profissionalmente e quem sabe, se não mudar, melhorar ao menos a forma como ainda é trabalhada nas escolas hoje (PRISCILA).*

A última categoria de Shulman (1992), *o conhecimento curricular*, perpassou todo o curso na forma da seqüência didática desenvolvida, de acordo com os PCN, e no estabelecimento de relações com outros campos de conhecimento.

Retomando o problema da pesquisa, constatei que aprende-se Geometria se o ensino estiver atrelado a uma concepção de participação ativa do aluno

> *Acho essa matéria muito puxada, ela envolve muito a gente, e por isso acho que a gente acaba aprendendo tanto (LAURA).*
> *Gostei da parte prática da matéria, que construímos nas aulas. Uma ótima base para nossa atuação em sala de aula (HELENA).*
> *Gostei de ter construído os conceitos e não apenas ter discutido ou*

decorado (OLGA).

A disciplina envolveu diversas atividades. Conforme o modelo de van Hiele (1957), as atividades contemplaram os procedimentos para as fases do aprendizado, às vezes não de forma seqüencial, mas respeitando a última fase, da integração, com os registros reflexivos nos dossiês após as atividades.

Segundo Nasser (1991, *apud* PURIFICAÇÃO e SOARES, 1999, p. 3), “as fases expostas podem ocorrer de forma simultânea e em diversas ordens, contudo, para a última fase existe a necessidade do desenvolvimento das fases anteriores, pois são significativas para fornecer as estruturas de aprendizagem”.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Além das análises procedidas em cada atividade no capítulo 4, da exposição dos resultados alcançados, ao término da investigação penso ser relevante consignar algumas considerações, fruto da reflexão empreendida durante toda a trajetória.

Na concepção do projeto, inicialmente pensei em identificar a possível influência de obstáculos na construção dos conceitos geométricos. Cada sujeito carrega um histórico de sua educação matemática que nas situações propostas no curso iria aflorar e determinar o seu comportamento.

Para essa escolha idealizei, em conjunto com meu orientador, um sistema de categorias de análise, associando os tipos de obstáculos com a natureza dos conceitos geométricos, num contexto do sujeito em ação. Assim feito, da análise dos dados surgiriam pares ordenados como, por exemplo, (obstáculo epistemológico, conceito científico), (obstáculo didático, conceito espontâneo), (obstáculo epistemológico, conceito espontâneo) e outras possíveis combinações.

No entanto, duas constatações modificaram o meu olhar para os dados que foram surgindo. A primeira delas ocorreu na exibição do filme “Pato Donald no país da Matemágica”, atividade que teve como propósito apresentar a Geometria como algo que muitas vezes não percebemos em nossas vidas e na natureza, mas que está presente, numa tentativa de desmitificá-la como um conhecimento inacessível.

O filme, de grande qualidade estética, produziu diversos comentários que revelaram indícios de fortes crenças presentes nos sujeitos em relação à Matemática. Desse modo, as crenças não poderiam ser desconsideradas da massa de dados.

A segunda constatação ocorreu na organização dos dados relativos a cada uma das onze atividades realizadas. Em cada atividade, surgiram dados significativos e diferenciados, revelando estratégias cognitivas, intuições geométricas, erros e dificuldades que não poderiam ser ignorados. Se a análise dos dados fosse orientada por um percurso longitudinal de identificação de categorias, um material muito rico em significado correria o risco de ser desconsiderado. Por essa razão, optei por descrever completamente cada atividade realizada e analisar em cada uma as produções manifestadas pelos sujeitos.

Para coletar as crenças dominantes, apliquei um questionário (anexo B) nos dois momentos extremos do curso. As crenças iniciais revelaram a ascendência da herança negativa sobre a Matemática, influenciando as concepções errôneas sobre a Geometria, desconsiderando o seu aspecto dinâmico. Ao longo do curso, uma imagem positiva foi construída, a Geometria passou a ter o reconhecimento devido.

A partir da realização desta investigação, consigo vislumbrar um futuro menos sombrio para o início da escolarização matemática das crianças que estarão sob orientação das alunas do curso. Essas alunas adquiriram competências básicas e fundamentais para estabelecer uma base do pensamento geométrico. Certamente prepararão o caminho para que seus alunos alcancem os conteúdos mais complexos da Geometria.

A participação das alunas nas atividades de orientação e deslocamento foi muito significativa, fazendo-me antever bons resultados na prática docente dessas alunas nesse conteúdo de relevância social.

Nas atividades lastreadas em conceitos-geométricos-em-ação, as alunas tiveram oportunidade de reconstruí-los a partir das rupturas com o conhecimento anterior.

A dificuldade que ficou mais evidente situa-se na *algebrização* da Geometria, na necessidade de utilização de fórmulas para o cálculo de áreas. Embora a atividade tenha sido planejada no sentido de possibilitar a construção gradativa desse conhecimento, o resultado alcançado ainda foi classificado como passível de memorização.

O desenvolvimento da investigação evidenciou uma estratégia adequada na apresentação das atividades. No papel de professor-pesquisador, meu trabalho foi ajudado pela decisão de assistir às aulas de meu orientador na turma B do curso. Essa prática permitiu-me definir os moldes da minha atuação e orientou meu olhar para as estruturas cognitivas mais significativas mobilizadas ante as situações propostas.

Apesar desse cuidado, devo admitir que não foi fácil atuar como professor-pesquisador. A responsabilidade com a formação inicial das alunas muitas vezes preponderou sobre a função de pesquisador. Por sorte, as aulas foram gravadas em áudio, permitindo recuperar participações significativas, não percebidas e lançadas no diário de campo no contexto da formação.

A produção das alunas, materializada nos dossiês, muitas vezes revelou todo o acúmulo de tarefas que o curso de Pedagogia atribui a seus graduandos. O registro de algumas atividades revelou-se muito simplificado e descuidado. Mas em outras vezes, foram de extremo capricho e detalhamento.

Outro aspecto que merece comentário é a descontinuidade dos registros, na forma de apontamentos pessoais. A disciplina permitiu a reflexão sobre a vivência em cada atividade, que poderia ficar marcada de forma indelével, mas algumas alunas preferiram vez por outra ocultar suas considerações pessoais, restringindo-se a apenas lançar os tópicos de sala de aula.

As estruturas cognitivas mobilizadas permitiram, em algumas atividades conceituais, avaliar o nível do pensamento geométrico das alunas, segundo a teoria dos van Hiele. Não foi intenção da investigação determinar esse nível, possível de ser aferido por meio de testes estruturados, produzidos por outros pesquisadores. O foco da disciplina centrou-se sobre o conhecimento didático da Geometria e sobre o conhecimento da Geometria, visando à futura atuação dos graduandos de Pedagogia. O desenvolvimento do projeto mostrou ser possível determinar esse nível e promover a sua elevação, fundamentada na teoria dos van Hiele.

A apreensão dos conceitos geométricos, por sua vez, foi fundamentada na teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud, com o sujeito em situação, validando seus teoremas e conceitos-em-ação.

As alunas provavelmente possuem outros conceitos geométricos, que não foram mobilizados na disciplina. Creio que num espaço de tempo maior, com atividades programadas de explicitação de conceitos geométricos seja possível desenvolver esse aspecto, que não foi contemplado neste projeto. Nos ciclos subseqüentes do ensino fundamental, de acordo com os PCN (BRASIL, 1997), serão explorados os conceitos de congruência e semelhança com base nas isometrias e homotetia, conteúdos recentemente integrados ao currículo, para os quais, certamente, elas não tiveram formação. Essa é uma visão necessária do todo que elas precisam possuir, para melhor orientar as suas ações educativas.

Considero de extrema relevância a realização desta investigação na minha trajetória de educador matemático. Enquanto formador tive uma visão privilegiada dos conceitos-geométricos-em-ação, preconizados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para os 1º e 2º ciclos do ensino fundamental. Essa é uma reclamação constante dos professores dos anos iniciais, que nas suas lides diárias não conseguem sequer saber do que se trata, nem do que tratam. O reconhecimento de sua importância me faz planejar uma incursão nos PCN dos outros ciclos e instigar a sua leitura a todos que se preparam para a licenciatura em Matemática.

Enquanto professor de Educação Matemática, contribuir *para* e assistir a transformação do conceito negativo sobre a Geometria, que preponderava na sala de aula, foi muito gratificante e estimulante.

Como pesquisador iniciante, a execução desta investigação, sob orientação segura e objetiva, permitiu-me responder questões de ordem prática, de análise, de atribuição de relevância e prioridades, que não estão disponíveis nos referenciais metodológicos. Por sua vez, os referenciais teóricos visitados durante a pesquisa contribuíram para equilibrar a minha formação matemática com a desejada formação didática da matemática.

Como era de se esperar, ao término de um empreendimento deste porte, os resultados alcançados fazem exacerbar o sentimento de responsabilidade social. Traço como novos objetivos a divulgação do produto deste curso de Mestrado, a disseminação das metodologias adequadas para a aprendizagem da Geometria e a continuidade do processo investigativo na área da Educação Matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BACHELARD, Gaston. *A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento*. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BARBIER, René. *A pesquisa-ação*. Brasília: Líber Livro, 2002.

BRASIL. MEC – Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1997.

CROWLEY, Mary L. *O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico*, in: LINDQUIST, Mary Montgomery e SHULTE, Albert P. (orgs.). *Aprendendo e ensinando geometria*. São Paulo: Atual, 1994.

CURI, Edda. *A matemática e os professores dos anos iniciais*. São Paulo: Musa, 2005

ELFFERS, Joost. *Tangram – the ancient chinese shapes game*. Londres: Penguin Books, 1988.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman. *Educação matemática: representação e construção em geometria*. Porto Alegre: Artmed, 1999.

FÁVERO, Maria Helena. *Psicologia e conhecimento: subsídios da psicologia do desenvolvimento para a análise de ensinar e aprender*. Brasília: Editora UNB, 2005.

FIORENTINI, Dario; SOUZA JR., Arlindo José de e MELO, Gilberto Francisco Alves de. *Saberes docentes: um desafio para acadêmicos e práticos*, in: GERALDI, Corinta Maria Grisolia; FIORENTINI, Dario e PEREIRA, Elisabete Monteiro de A. (orgs.). *Cartografias do trabalho docente: professor(a) – pesquisador(a)*. Campinas, SP: Mercado de Letras/Associação de Leitura do Brasil (ALB), 1998.

FONSECA, Maria da Conceição F. R., et al. *O ensino de geometria na escola fundamental – três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais*. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

FOSNOT, Catherine Twomey. *Construtivismo: Uma Teoria Psicológica da Aprendizagem*, in: FOSNOT, Catherine Twomey (org.). *Construtivismo: Teoria, Perspectivas e Prática Pedagógica*. Porto Alegre: Artmed, 1998.

GÓMEZ CHACÓN, Inês Mª. *Matemática emocional: os afetos na aprendizagem matemática*. Porto Alegre: Artmed, 2003.

GONZÁLEZ REY, Fernando Luis. *O Pesquisa qualitativa em psicologia: caminhos e desafios*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002.

GONZÁLEZ REY, Fernando Luis. *O Sujeito que Aprende: desafios do desenvolvimento do tema da aprendizagem na psicologia e na prática pedagógica*, in: TACCA, Maria Carmen Villela Rosa (org.). *Aprendizagem e Trabalho Pedagógico*. Campinas, SP: Alínea, 2006.

IMBERNÓN, Francisco. *Formação docente e profissional: formar-se para a mudança e a incerteza*. São Paulo: Cortez, 2006.

IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. *A noção de "obstáculo epistemológico" e a educação matemática*, in: MACHADO, Silvia Dias Alcântara et al. *Educação matemática: uma introdução*. São Paulo: EDUC, 1999.

LA TAILLE, Yves de, OLIVEIRA, Marta Kohl de, DANTAS, Heloysa. *Piaget, Vygotsky, Wallon: teorias psicogenéticas em discussão*. São Paulo: Summus, 1992.

LOPES, Maria Laura M. Leite, NASSER, Lílian. *Geometria: na era da imagem e do movimento*. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 1996.

LÜDKE, Menga, ANDRÉ, Marli E. D. A. *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU, 1986.

MOREIRA, Marco Antonio. *Aprendizagem significativa*. Brasília: UnB, 1999.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti, DAVID, Maria Manuela M. S. *A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

MUNIZ, Cristiano Alberto. *Conhecimento matemático em ação*. GESTAR – Fundescola, 2003a.

______. *Situação-problema*. GESTAR – Fundescola, 2003b.

______. *Espaço e Forma*. Brasília: UniCEUB, projeto Professor Nota Dez, 2004.

NASSER, Lílian, TINOCO, Lucia. *Curso básico de geometria: enfoque didático. Módulo I – Formação de conceitos geométricos*. Rio de Janeiro: UFRJ/IM. Projeto Fundão, 2004.

OLIVEIRA, Rosiska Darcy de, OLIVEIRA, Miguel Darcy de. *Pesquisa social e ação educativa: conhecer a realidade para poder transformá-la*, in: BRANDÃO, Carlos Rodrigues (org.). *Pesquisa participante*. São Paulo: Brasiliense, 2001.

PAIS, Luiz Carlos. *Didática da matemática; uma análise da influência francesa*. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PAVANELLO, Regina Maria. *O abandono do ensino da geometria: uma visão histórica.* Campinas,SP: UNICAMP (dissertação de Mestrado em Educação), 1989.

PAVANELLO, Regina Maria. *A geometria nas séries iniciais do ensino fundamental: contribuições da pesquisa para o trabalho escolar*, in: PAVANELLO, Regina Maria (org.). *Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental: a pesquisa e a sala de aula*. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), 2004.

PIMENTA, Selma Garrido. *Formação de Professores: saberes da docência e identidade do professor*, in: FAZENDA, Ivani (org.). *Didática e interdisciplinaridade*. Campinas, SP: Papirus, 1998.

PINTO, Neuza Bertoni. *O erro como estratégia didática: estudo do erro no ensino da matemática elementar*. Campinas, SP: Papirus, 2000.

PONTE, João Pedro da. *Concepção dos professores de Matemática e os processos de formação*, in: BROWN, Margaret et al. *Educação matemática*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1992.

PURIFICAÇÃO, Ivonélia da e SOARES, Maria Tereza Carneiro. *Cabri-géometre e teoria van Hiele: possibilidades de avanços na construção de conceitos geométricos.* Anais do Cabri World 1999.
Disponível em: http://www.cabri.com.br/pesquisas/c99_anais/cc/cc_purificacao.htm>. Acesso em: 12 fev 2007.

REGO, Teresa Cristina. *Vygotsky: uma perspectiva histórico-cultural da educação*. Petr[opolis-RJ: Vozes, 2005.

SILVA, Erondina B. da. *O impacto da formação nas representações sociais da matemática – o caso de graduandos do curso de pedagogia para início de escolarização*. Brasília: FE/UnB (dissertação de Mestrado em Educação), 2004.

SPINILLO, Alina Galvão, MAGINA, Sandra. *Alguns 'mitos' sobre a educação matemática e suas conseqüências para o ensino fundamental*, in: PAVANELLO, Regina Maria (org.). *Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental: a pesquisa e a sala de aula*. São Paulo: SBEM, 2004.

TACCA, Maria Carmen Villela Rosa. *Aprendizagem e subjetividade: a busca da compreensão do sujeito que aprende*. Revista Direcional Escolas, São Paulo, n. 22, p. 26-27, out. 2006.

TARDIF, Maurice. *Saberes docentes e formação profissional*. Petrópolis, RJ: Vozes, 2002.

VIGOTSKY, Lev Semenovich. *A formação social da mente*. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

VILA, Antoni e CALLEJO, María Luz. *Matemática para aprender a pensar: o papel das crenças na resolução de problemas*. Porto Alegre: Artmed, 2006.

ZIMMERMANN, Erika, BERTANI, Januária Araújo. *Um novo olhar sobre os cursos de formação de professores*. Caderno Brasileiro de Ensino de Física, v. 20, n. 1, p. 43-62, 2003.

ANEXOS

ANEXO A

PLANO DE ENSINO

UNIVERSIDADE DE BRASILIA

FACULDADE DE EDUCACAO

Departamento de Métodos e Técnicas

Disciplina : Educação Matemática II – Semestre 1 - 2007
Terça e quinta-feira das 8 as 10 horas na LUDOTECA –FE-03
192783: 002 - 002 - 004 créditos
Prof Dr Cristiano Alberto Muniz , mat 763951
e
Mestrandos Josaphat Morrison de Moraes e Sandra Baccarin

Ementa e Plano de Curso

Ementa :

"Desenvolvimento do conteúdo básico de matemática das séries iniciais do Ensino Fundamental procurando desenvolver uma metodologia de ensino de acordo com os preceitos fundados nas teorias construtivistas. O estudo teórico associado às praticas no campo da Educação Matematica deverá permitir ao graduando desenvolver competências essenciais no contexto da didática especifica da matemática a partir de um saber teórico/prático sobre as capacidades e as possibilidades de construção de conhecimento pelo sujeito (criança ou adulto em inicio de escolarização) considerando o desenvolvimento psicomotor, cognitivo, afetivo e social do aluno aprendiz e planejar ações de intervenção didática tendo em vista objetivos educacionais".

Objetivo Geral :

"Desenvolver uma visão critica da educação matemática brasileira e capacitar-se para atuação profissional competente e de qualidade no campo da intervenção didática de matematica junto à séries iniciais do ensino fundamental. Tal competência deve conceber um aprendizado tanto numa perspectiva teórica quanto pratica no campo da educação matemática, aprendizado que deve necessariamente contribuir para a construção de uma representação positiva da matemática do futuro professor."

Objetivos Especificos :

- Adquirir fundamentos teóricos fundamentais nos campos da Didática da Matemática, da Psicologia Cognitiva, das Ciências da Educação, da Antropologia, ... que permitam instrumentalizar a ação pedagógica nas séries iniciais de forma a contribuir com a constituição de um projeto pedagógico coerente com as necessidades e as realidades presentes e futuras do educando.
- Conhecer em profundidade o conteúdo matemático do currículo das séries iniciais do ensino fundamental e desenvolver competências para o desenvolvimento da metodologia de ensino para sua ação didático/pedagógica.
- Desenvolver a sensibilidade e a competência para observar o educando em processo de resolução de situação problema e saber realizar análise crítica sobre os potenciais, limites e dificuldades da criança para realizar determinada atividade matemática nos contextos escolares e não escolares.
- Saber planejar a ação pedagógica voltada ao atendimento de objetivos ligados à aprendizagem matemática, desenvolvendo competências quanto ao uso de meios didáticos, notadamente materiais concretos, criação de situação de aprendizagem significativa, definição do espaço pedagógico do livro didático, estabelecimento de um processo de formalização escrita do conhecimento matemático presente nos processos manipulativos, verbais e/ou mentais. Isso significa, especificamente, saber como se pode participar e promover a construção de conceitos matemáticos nas crianças, formalizar e institucionalizar saberes/procedimentos que se encontram ao nível da espontaneidade e conhecimento informal, sempre buscando valorizar o sujeito aprendiz, criança ou adulto, como um ser matemático latente.
- Ter uma posição crítica e competente acerca da utilização de meios de ensino aprendizagem presentes seja na cultura do sujeito aprendiz(brinquedos, brincadeiras, jogos, etc.), seja na cultura

escolar(materiais de ensino-aprendizagem) ou ainda na cultura das novas tecnologias (calculadoras, software, etc).

- Desenvolver padrões profissionais ligados à competência em desenvolver e aplicar um sistema de avaliação do processo ensino-aprendizagem que contribua eficazmente no processo de educação matemática do sujeito aprendiz impulsionando-o a cada vez mais a crer no seu potencial em aprender matemática, ter prazer em desenvolver atividades matemáticas em estudar e refletir sobre situações matemáticas em contextos culturais e científicos fora ou dentro da escola.

Métodologia do curso

O curso de seis horas/semana será desenvolvido fundamentalmente buscando garantir a indissobilidade da teoria com a prática no campo da educação matematica. Isso significa que o curso prevê uma dimensão de ação pratica dos alunos que será a fonte das reflexões, das leituras e discussões de cunho teórico da disciplina. Dois espaços serão definidos como base do curso:

- aulas teoricas-praticas desenvolvidas pelo professor com o conjunto dos alunos para conhecer, discutir, vivenciar e refletir sobre os teorias que dão suporte à educação matemática. Isso significa conhecer e discutir contribuições da psicologia, antropologia, sociologia e didática na atuação do professor de matemática nas séries iniciais. As aulas Terão como "farol" as praticas dos alunos (sobretudo aquelas vinculadas ao desenvolvimento do projeto), suas leituras e posições críticas.
- Projeto prático-teorico desenvolvido por cada aluno e com orientação do professor da disciplina. Já no início do curso, cada aluno deverá, com a orientação do professor, estabelecer um projeto experimental relacionado à educaçao matematica, projeto que esteja de uma parte ligada aos interesses do aluno e por outro lado fundamentado nos referenciais teorico-metodologicos tratados nas aulas teóricas-praticas. Os projetos deverão fornecer aos alunos verdadeiras situações problemas para alimentarem as aulas teóricas-praticas. Os temas, sujeitos, metodologias, cronogramas do projeto serão fruto de uma negociação com o professor tendo em vista as características de cada projeto individual.

Espera-se que ao longo do semestre constituir-se-a uma relação de mutua contribuição entre os estudos teóricos, o desenvolvimento do projeto e as reflexões sobre a prática pedagógica em matemática buscando desde já instrumentalizar o aluno para o desenvolvimento do estagio supervisionado.

Programa do curso no semestre acadêmico

AULA	DATA	CONTEÚDOS
1	13/03	Apresentação do curso – contrato didático
2	15/03	Discussão sobre o conteúdo da Geometria - filme
3	20/03	Localização: mapa do tesouro
4	22/03	Trabalho com mapas
5	27/03	Geometria da tartaruga: lateralidade
6	29/03	Reprodução de embalagens com redução
7	03/04	Descoberta das figuras planas utilizadas
8	05/04	Produção de figuras planas com canudos e mapas conceituais
9	10/04	Continuação
10	12/04	Planificação do cubo (valorização do erro)
11	17/04	Ampliação e redução em malhas
12	19/04	Tangram: composição e decomposição de figuras planas
13	24/04	Brincando com malhas

14	26/04	Construção de figuras planas no geoplano
15	03/05	Noção de área a partir da malha quadriculada
16	08/05	Descobrindo fórmulas de áreas com recorte e colagem
17	10/05	Introdução de medidas: princípios
18	15/05	Medidas de comprimento
19	17/05	Medidas de massa
20	22/05	Medidas de capacidade
21	24/05	Medidas de tempo
22	29/05	Medidas de volume
23	31/05	Validação de jogos geométricos
24	05/06	Conceito e representação de fração
25	12/06	Fração de quantidade
26	14/06	Equivalência de fração e comparação
27	19/06	Adição de frações
28	21/06	Subtração de frações
29	26/06	Apresentação e prática de jogos
30	28/06	Encerramento do curso

Instrumentos e critérios de avaliação

- Presença e participação nos cursos : leituras, discussões e ação sobre o processo + auto-avaliação	20%
- Elaboração e desenvolvimento de um projeto individual.	20%
- Realização do Dossiê	20%
- Auto Avaliação	20%
- Criação, validação, confecção e divulgação de um jogo envolvendo conteúdo matemático tratado ao longo do curso	20%

ANEXO B
QUESTIONÁRIO

Nome:		
QUESTIONÁRIO		DATA: / /
Considerando suas próprias atitudes em relação à Geometria, complete suas frases com as palavras que estão faltando:		
1.	Meus professores de Geometria da escola	
2.	A Geometria é	
3.	Minhas capacidades em Geometria são	
4.	Para ser bom em Geometria é necessário	
5.	Eu acho difícil em Geometria	
6.	Um bom professor de Geometria deveria	
7.	Poderia aprender mais Geometria se	
8.	Minha motivação para fazer Geometria é	
9.	O melhor que um professor de Geometria pode fazer por mim é	
10.	Quando tenho aula de Geometria eu	
11.	Na escola, quando estava na aula de Geometria eu	
12.	Agora, quando estou na aula de Geometria eu	
13.	Gostava da aula de Geometria até que	
14.	Minha experiência mais positiva com a Geometria foi	
15.	Minha experiência mais negativa com a Geometria foi	
16.	Sinto que a Geometria faz “quebrar a cabeça” quando	
17.	Quando escuto a palavra “Geometria” eu	
18.	Quando escuto dizer que a Geometria é excelente eu	
19.	Quando aprendo Geometria, sinto-me	
20.	O que eu gostaria de dizer sobre a Geometria é	

ANEXO C
MAPA CONCEITUAL