



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

**GENERALIZAÇÃO DO PROCESSO DE
ORNSTEIN-UHLENBECK PELO TEOREMA DE
DOOB E A EVOLUÇÃO TEMPORAL EM SÉRIES
FINANCEIRAS**

Por

REGINA CÉLIA BUENO DA FONSECA

ORIENTADOR: Prof. Dr. ANNIBAL DIAS DE FIGUEIREDO NETO

TESE DE DOUTORADO EM FÍSICA

BRASÍLIA-DF

2012

REGINA CÉLIA BUENO DA FONSECA

**GENERALIZAÇÃO DO PROCESSO DE
ORNSTEIN-UHLENBECK PELO TEOREMA DE
DOOB E A EVOLUÇÃO TEMPORAL EM SÉRIES
FINANCEIRAS**

Tese de Doutorado submetida ao Instituto de Física da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Física.

ORIENTADOR: Prof. Dr. ANNIBAL DIAS DE FIGUEIREDO NETO

**BRASÍLIA-DF
2012**

**GENERALIZAÇÃO DO PROCESSO DE ORNSTEIN-UHLENBECK
PELO TEOREMA DE DOOB E A EVOLUÇÃO TEMPORAL EM
SÉRIES FINANCEIRAS**

**Por
REGINA CÉLIA BUENO DA FONSECA**

Tese de Doutorado submetida ao Instituto de Física da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Física aprovada por:

**Prof. Dr. Annibal Dias de Figueiredo Neto
Orientador, IF/UnB**

**Prof. Dr. Bernardo de Assunção
IF/UnB**

**Prof. Dr. Fábio Macedo Mendes
Gama/UnB**

**Prof. Dr. Raul Yukihiro Matsushita
EST/UnB**

**Prof. Dr. Iram Marcelo Gléria
FIS/UFAL**

Brasília-DF, dezembro 2012.

Dedicatória

Dedico este trabalho
a minha família.

Agradecimentos

Sou grata ao Mestre Jesus, por ter me dado forças para superar os obstáculos do caminho. Presto reconhecimento especial à minha família e meus amigos. Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Annibal Dias de Figueiredo Neto pelo empenho e confiança. Agradeço a todos aos meus colegas que se tornaram meus amigos, e agradeço pelo apoio e carinho em todos os momentos. Em especial, ao André Telles, Márcio Tavares, Franciscarlos Gomes, Raul Matsushita, Fábio Mendes, Natália Coelho, Cíntia, Anaílde, Daniel, Bruno e outros. Agradeço aos professores e aos funcionários da Secretária de Pós-Graduação do Instituto de Física da UnB pela atenção em todos os momentos e situações no decorrer do curso. Finalmente, agradeço ao Instituto Federal de Goiás, Campus Goiânia, por ter concedido tal oportunidade.

"O simples pode ser mais difícil que o complexo. Você precisa dar duro para esclarecer suas ideias e simplificá-las. Mas no final acaba valendo a pena, porque, quando chegar lá, você terá o poder de mover montanhas."

Steve Jobs

Resumo

Generalizamos o processo de Ornstein-Uhlenbeck (OU) usando o teorema de Doob. Relaxamos as condições de Gaussianidade e estacionariedade, assumindo um processo linear e homogêneo no tempo. A generalização proposta mantém muita da simplicidade do processo estocástico original, enquanto apresenta um comportamento mais rico. Os resultados analíticos são obtidos utilizando a probabilidade de transição e o formalismo da função característica e comparados com os dados empíricos do mercado de ações, que são notórios pelo comportamento não-estacionário e não-Gaussiano. As análises são focadas na forma do decaimento exponencial e na convergência assintótica dos quatro primeiros cumulantes considerando os retornos logarítmicos dos preços diários de ações. Mostramos que o modelo proposto oferece uma boa melhora em relação ao modelo OU clássico

Palavras chaves: Processo de Ornstein-Uhlenbeck, probabilidade de transição, teorema de Doob, função característica, mercado de ações.

Abstract

We generalize the Ornstein-Uhlenbeck (OU) process using the Doob's theorem. We relax the Gaussian and stationary conditions, assuming a linear and time-homogeneous process. The proposed generalization retains much of the simplicity of the original stochastic process, while exhibiting a somewhat richer behavior. Analytical results are obtained using transition probability and the characteristic function formalism and compared with empirical stock market daily data, which are notorious for the non-stationary and non-Gaussian behavior. The analysis focus on the decay patterns and the convergence study of the first four cumulants considering the logarithmic returns of stock prices. It is shown that the proposed model offers a good improvement over the classical OU model.

Keywords: Ornstein-Uhlenbeck process, transition probability, Doob's theorem, characteristic function, stock market.

Lista de Tabelas

4.1	Informações empíricas do θ_i para $i = 1, 2$ em dois ensembles da série <i>THOU</i>	56
5.1	Especificações dos parâmetros μ, α, σ e β da Eq. (5.1), por autor.	60
5.2	Informações empíricas dos retornos logartmos θ_i (Eq. (5.3)), $i = 1, 2$, em dois ensembles da série <i>Coca Cola</i> com dados diários em dois períodos: 1962-1988 e 1988-2012.	67
5.3	Informações empíricas dos retornos logartmos θ_i (Eq. (5.3)), $i = 1, 2$, em dois ensembles usando as séries <i>Nikkei, Shell, Xerox</i> e <i>Petrobras</i> com dados diários.	71
B.1	Informações empíricas dos retornos logartmos θ_i (Eq. (5.3)), $i = 1, 2$, em dois ensembles da série <i>Aracruz</i> , $\Delta t = 1$ é negociação a negociação (tick-by-tick) no período de 2007-2008. . .	96

Lista de Figuras

2.1	Uma trajetória do processo de Ornstein-Uhlenbeck	26
4.1	Função densidade de probabilidade e a Evolução temporal da variável aleatória da série <i>THOU</i>	52
4.2	Condições iniciais da série <i>THOU</i>	53
4.3	Evolução temporal das condições iniciais na autocorrelação e na autocovariância da série <i>THOU</i>	54
4.4	Evolução temporal das condições iniciais nos Cumulantes da série <i>THOU</i>	55
5.1	Evolução temporal dos retornos da série <i>Coca Cola</i> durante 50-anos no período de 1962-2012.	64
5.2	Evolução dos retornos diários e Função densidade de probabilidade (pdf) da série <i>Coca Cola</i> em dois períodos: 1962-1988 e 1988-2012.	64
5.3	Evolução temporal das funções de autocorrelação da <i>Coca Cola</i> durante dois períodos: 1962-1988 e 1988-2012.	65
5.4	Evolução temporal da função de autocovariância da série <i>Coca Cola</i> em dois períodos: 1962-1988 e 1988-2012.	65
5.5	Evolução temporal dos quatro primeiros cumulantes da <i>Coca Cola</i> no período de 1962-1988.	66
5.6	Evolução temporal dos quatro primeiros cumulantes da série <i>Coca Cola</i> no período de 1988-2012.	67
5.7	Evolução dos retornos logaritmo diários e Função densidade de probabilidade (pdf) da série <i>Shell</i>	68
5.8	Evolução temporal das condições iniciais nas funções de autocorrelação e autocovariância da série <i>Shell</i>	69
5.9	Evolução temporal das condições iniciais dos Cumulantes da série <i>Shel</i>	70
5.10	Evolução dos retornos logaritmos diários e Função densidade de probabilidade da série <i>Nikkei</i>	72
5.13	Evolução dos retornos logaritmos de preços diários e Função densidade de probabilidade (pdf) da série <i>Xerox</i>	72

5.11	Evolução temporal das funções de autocorrelação e autocovariância da série <i>Nikkei</i>	73
5.14	Evolução temporal das condições iniciais nas funções de Correlação e Covariância da série <i>Xerox</i>	73
5.12	Evolução temporal das condições iniciais nos quatro primeiros Cumulantes da série <i>Nikkei</i>	74
5.15	Evolução temporal das condições iniciais nos Cumulantes da série <i>Xerox</i>	75
5.16	Evolução dos retornos logaritmos dos preços diários e Função densidade de probabilidade (pdf) da série <i>Petrobras</i>	75
5.17	Evolução temporal das condições iniciais nas funções de Correlação e Covariância da série <i>Petrobras</i>	76
5.18	Evolução temporal das condições iniciais nos Cumulantes da série <i>Petrobras</i>	76
B.1	Evolução dos retornos logaritmo negociação a negociação e Função densidade de probabilidade (pdf) da série <i>Aracruz</i>	94
B.2	Evolução temporal das condições iniciais nas funções de Auto-Correlação e Auto-Covariância da série <i>Aracruz</i>	94
B.3	Evolução temporal das condições iniciais nos Cumulantes da série <i>Aracruz</i>	95

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Problema de Pesquisa	1
1.2	Objetivos	2
1.3	Estrutura da Tese	2
2	Aspectos Gerais	4
2.1	Introdução	4
2.2	Métodos Probabilísticos	4
2.2.1	Definição formal de Processos Estocásticos	4
2.2.2	Densidade de Probabilidade Conjunta	5
2.2.3	Propriedades da Função Densidade de Probabilidade	5
2.2.4	Condição de mistura	7
2.2.5	Condições de compatibilidade de Chapman	8
2.2.6	Função Característica	9
2.2.7	Segunda Característica e Cumulantes	11
2.2.8	Distribuição Infinitamente Divisíveis	13
2.3	Tipos de Processos Estocásticos	16
2.3.1	Processo Estacionário	16
2.3.2	Processo Gaussiano	16
2.3.3	Ruído Branco	17
2.3.4	Processo Markoviano	17
2.3.5	Processo de Difusão	19
2.3.6	Processo de Saltos	22
2.3.7	Processo Wiener (Movimento Browniano)	23
2.3.8	Processo Lévy	24
2.3.9	Processo de Ornstein-Uhlenbeck	24
3	Generalização do Processo <i>OU</i>: Processo <i>THOU</i>	28
3.1	Introdução	28
3.2	Generalizando o processo de Ornstein-Uhlenbeck (<i>OU</i>)	30

3.2.1	Condições de $W_\tau(z)$	36
3.3	Equação Mestra	38
3.3.1	Cumulantes do processo estocástico <i>THOU</i>	42
3.3.2	Covariância do processo estocástico <i>THOU</i>	44
3.4	Processo de Ornstein-Uhlenbeck	47
3.5	Considerações Finais	48
4	Simulação do Processo <i>THOU</i>	50
4.1	Simulação computacional	50
4.2	Análise Empírica da série <i>THOU</i>	52
4.3	Considerações finais	56
5	Comparando o Modelo <i>THOU</i> com Dados Financeiros	58
5.1	Econofísica e Série Financeira	58
5.2	Síntese de Modelos de E.D.E. da Literatura	59
5.3	Variável de Retorno Logaritmo da Série Financeira	61
5.4	Comparação de Resultados Teóricos com Dados Empíricos do Mercado Financeiro	62
5.4.1	Análise Empírica da Série <i>Coca Cola</i>	63
5.4.2	Análise Empírica da Série <i>Shell</i>	68
5.4.3	Análise Empírica da Série <i>Nikkei</i>	70
5.4.4	Análise Empírica da Série <i>Xerox</i>	72
5.4.5	Análise Empírica da Série <i>Petrobrás</i>	74
5.5	Considerações finais	77
6	Conclusão	79
6.1	Perspectivas para Pesquisas Futuras	80
	Referências	81
	Apêndices	89
	A Teorema de Doob	90
	B Momentos Estatísticos: Modelo <i>OU</i> Original	93

Capítulo 1

Introdução

O processo de Ornstein-Uhlenbeck (OU) tem sido estudado em muitos contextos diferentes. Ele foi estabelecido originalmente na Física e também é utilizado em matemática financeira para modelar os preços nos mercados financeiros. Este processo é interessante porque é essencialmente o único que têm as seguintes propriedades: Gaussianidade, Markovianidade e estacionariedade. Esse resultado é conhecido como Teorema de Doob [1–7].

Joseph L. Doob foi o primeiro que tratou e caracterizou completamente o processo de Ornstein-Uhlenbeck com formalismo matemático rigoroso e introduziu as equações diferenciais estocásticas na forma que a conhecemos [1]. O processo de OU foi proposto pela primeira vez para descrever a velocidade da partícula browniana que se move em um ambiente com atrito. A contribuição de Doob para teoria de processos estocásticos é ampla e podemos encontrar mais de um teorema associado ao seu nome. O formalismo aplicado por Doob foi essencial na análise dos problemas matemáticos decorrentes do modelo de Langevin [5, 8–11]. Em particular, na literatura sobre processos estocásticos podemos encontrar algumas generalizações para o modelo OU . Na literatura matemática, é comum encontrarmos generalizações baseadas em soluções de equações integrais estocásticas.

As séries financeiras têm padrões de evolução temporal bastante complexa e vem desafiando sucessivos modelos de processos estocásticos que tentam explicá-los. O objetivo desta tese é generalizar o processo de OU de tal maneira a explicar aspectos que este tipo de processo não consegue esclarecer.

1.1 Problema de Pesquisa

Nesta tese apresentamos o modelo de Langevin com um argumento onde evitamos definir o ruído como sendo gaussiano e onde é possível recuperar os postulados de Ornstein e Uhlenbeck de uma maneira plausível.

As séries financeiras são não-gaussianas e no mundo real poucas séries temporais são estacionárias. Esta condição quando imposta a série temporal é bastante restritiva. Em geral, o comportamento apresentado pelas séries financeiras é não-estacionário no decorrer do tempo. Este tipo de não-estacionariedade apresentado nas séries financeiras pode ser caracterizado como homogêneo [12].

Uma abordagem interessante é generalizar o processo de OU mantendo algumas propriedades do modelo original e inovar sua aplicação. Como exemplos de tais generalizações podemos citar: *Behme et al.* que generaliza o processo de OU por um processo de Lévy bivariado do ruído [13]; *Cáceres e Budini* que generaliza o ruído para qualquer processo estocástico arbitrário caracterizado por um funcional característico usado para calcular qualquer m-momento do tempo [14]; *Lim e Muniandy* considera três tipos de processos de OU generalizados com base na solução da equação de Langevin fracionária, a transformação Lamperti de FBM (Movimento Browniano Fracionário) ou processo com covariância exponencial esticada [15]; finalmente, nós citamos *Bezuglyy et al.*, que incluem uma força dependendo da posição bem como do tempo [16]. O modelo sugerido nesta tese é válido para os processos lineares e homogêneos no tempo, que substitui as condições de gaussianidade e estacionariedade, respectivamente, no processo de Ornstein-Uhlenbeck original. Outra consideração relevante em nosso modelo é que o ruído é markoviano e a condição de gaussianidade é relaxada. Neste modelo, o termo de *drift* tem uma forma específica, (ver Teo. (3.2)), para que sejam satisfeitas as modificações sugeridas acima.

1.2 Objetivos

Generalizar o processo de OU , que é o único processo que é Gaussiano, Markoviano e estacionário. Esse resultado é conhecido como teorema de Doob. O modelo desta generalização é chamado de modelo $THOU$ (processo de Ornstein-Uhlenbeck Homogêneo no Tempo). Comparar o modelo $THOU$ desenvolvido com dados empíricos do mercado financeiro, procurando evidenciar suas vantagens em relação ao processo OU .

1.3 Estrutura da Tese

No Capítulo 2 apresentamos os aspectos gerais que definem os métodos estatísticos e probabilísticos de processos estocásticos. Fazemos uma revisão das definições e propriedades dos diferentes tipos de processos estocásticos que são relevantes para o desenvolvimento da tese. No Capítulo 3 formulamos um resultado de caráter puramente matemático: generalizamos o processo de OU . Apresentamos um modelo de Langevin com um argumento que evita definir o ruído gaussiano e recupera os postulados de OU original.

Um processo estocástico pode ser interpretado como uma *família* de variáveis ale-

atórias no tempo, e uma série temporal (empírica) pode ser interpretado como uma realização de um processo estocástico. Sendo assim, para cada momento no tempo, a variável aleatória tem uma distribuição de probabilidade (que pode ser a mesma ou não), em que é muito trabalhoso especificar todas as distribuições de probabilidade associada. Normalmente, o que se faz é estudar e avaliar os momentos estatísticos das variáveis aleatórias para conhecermos todo o processo [17]. Para visualizarmos o comportamento (decaimento e convergência) dos momentos estatísticos teóricos do modelo *THOU* simulamos sua série sintética. No Capítulo 4 descrevemos os passos da simulação e mostramos as propriedades e os comportamentos do modelo *THOU* observados no Capítulo 3. No Capítulo 5 comparamos o modelo *THOU* com dados empíricos. Usamos séries financeiras (dados reais) que descrevem as flutuações do preço de ações. As comparações mostraram que o modelo estudado apresenta bom ajuste para as séries financeiras usadas. Finalmente, no Capítulo 6 apresentamos as conclusões e perspectivas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Aspectos Gerais

Neste Capítulo, apresentamos algumas definições e propriedades de processos estocásticos e alguns métodos estatísticos que lhe são associados. Na Seção (2.2), apresentamos uma breve introdução sobre processos estocásticos com uma abordagem probabilística. Na Seção (2.3), introduzimos as principais modelagens de processos estocásticos de tempo contínuo que têm relevância no desenvolvimento desta tese.

2.1 Introdução

O conceito de probabilidade surgiu no estudo de eventos aleatórios, onde é impossível prever o estado futuro dos eventos a partir do conhecimento do seu estado inicial. A teoria das probabilidades é indispensável no estudo de tais fenômenos aleatórios, permitindo articular relações relevantes entre propriedades físicas e estatísticas destes fenômenos [18, 19].

2.2 Métodos Probabilísticos

2.2.1 Definição formal de Processos Estocásticos

Um fenômeno aleatório é definido num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, onde Ω é o conjunto de todos os estados possíveis, \mathcal{F} é uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω e \mathcal{P} é uma probabilidade sobre \mathcal{F} . Um *processo estocástico* é uma coleção de variáveis aleatórias $u = \{u_t(\omega); t \in [t_0, T]\}$, definidos sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. A variável aleatória $u_t = u_t(\omega)$ é denominada realização, trajetória ou caminho do processo e o parâmetro t , interpretado como o *tempo*, pode ser contínuo ou discreto. A escolha do conjunto particular apropriado depende da natureza da grandeza observada e dos processos

naturais subjacentes [5, 20–22].

2.2.2 Densidade de Probabilidade Conjunta

Definimos $f(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n)$ como sendo a *densidade de probabilidade conjunta* da variável aleatória u assumir o valor u_1 no tempo t_1 , u_2 no tempo t_2 , ..., u_n no tempo t_n , onde $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Esta coleção de vários instantes de tempo, nos quais a variável estocástica u assume diferentes valores, é denominado de *malha temporal* [23]. Uma descrição probabilística de um processo estocástico pode igualmente ser feita em termos das *funções de probabilidade acumulada*. Dado que $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$ definimos a *função distribuição acumulada*¹ de uma variável aleatória contínua u em uma malha temporal $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ como:

$$F(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n) = P(\{\mathbf{u}(t_1) \leq u_1\}; \dots; \{\mathbf{u}(t_n) \leq u_n\}). \quad (2.1)$$

Desta forma, $F(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n)$ é igual a probabilidade de $\mathbf{u} \leq u_1$ no tempo t_1 , $\mathbf{u} \leq u_2$ no tempo t_2 , ..., $\mathbf{u} \leq u_n$ no tempo t_n .

Assumindo que $F(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n)$ é uma função contínua de u e possui derivadas parciais até a ordem n , a *densidade de probabilidade conjunta* é definida por

$$f(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n) = \frac{\partial F(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n}. \quad (2.2)$$

É de interesse ressaltar que a densidade de probabilidade conjunta é sempre positiva, e que vale a condição de normalização

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n) du_1 \dots du_n = 1. \quad (2.3)$$

Podemos concluir também que [22–24]

$$F(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n) = \int_{-\infty}^{u_1} \dots \int_{-\infty}^{u_n} f(u'_1, t_1; \dots; u'_n, t_n) du'_1 \dots du'_n. \quad (2.4)$$

A densidade de probabilidade permite calcular todos os *momentos estatísticos* do processo estocástico, e contém toda a informação que se pode ter de um processo desta natureza [19, 20]. Por simplicidade, denotamos a densidade de probabilidade conjunta por $f(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n) = f(u_1, \dots, u_n)$.

2.2.3 Propriedades da Função Densidade de Probabilidade

Como vimos nas Seções (2.2.1) e (??), um processo estocástico é determinado pelo conjunto de densidades de probabiidades, que permite determinar todos os momentos estatísticos que descreve toda a informação do processo [5].

¹Também denominada por *distribuição acumulada de primeira ordem* [22].

Quando efetuamos medidas experimentais (dados empíricas), geralmente estamos interessados na caracterização de suas propriedades estatísticas; uma função densidade de probabilidade $f(u(t))$ que indica a probabilidade no intervalo u e $u + du$ associada a um instante de tempo. A seguir, definimos algumas grandezas associadas a esta função.

Média e variância

Definimos a média e a variância de $u(t)$ como:

$$\langle u(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) f(u(t)) du, \quad (2.5)$$

$$\langle u^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (u(t) - \langle u(t) \rangle)^2 f(u(t)) du. \quad (2.6)$$

O momento central de ordem n é definido como [22, 24]:

$$\langle u^n(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} [u(t) - \langle u(t) \rangle]^n f(u(t)) du. \quad (2.7)$$

Covariância

Para duas variáveis aleatórias contínuas $u(t)$, $u(t')$ e considerando a densidade conjunta $f(u(t), u(t'))$ em dois instantes de tempo, a *covariância* [22] é definida por

$$\langle \langle (u(t), u(t')) \rangle \rangle = Cov(u, u') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du du' (u - \langle u \rangle)(u' - \langle u' \rangle) f(u, u') \quad (2.8)$$

em que as médias $\langle u(t) \rangle$ e $\langle u(t') \rangle$ na Eq. (2.8) existam [25–27]. A covariância entre duas variáveis aleatórias defasadas por t' intervalos de tempos, é conhecida por *função de auto-covariância*, e é definida por

$$Cov(u(t), u(t - t')) = \langle [(u(t) - \langle u(t) \rangle)(u(t - t') - \langle u(t - t') \rangle)] \rangle \quad (2.9)$$

No caso de processo estacionário, a Eq. (2.9) pode ser rescrita como:

$$Cov(u(t), u(t - t')) = \langle [(u(t) - \mu)(u(t - t') - \mu)] \rangle. \quad (2.10)$$

Correlação

Suponha que as variáveis $u(t)$ e $u(t')$ possuem as variâncias $\langle u^2(t) \rangle$ e $\langle u^2(t') \rangle$ finitas. Então, a correlação entre $u(t)$ e $u(t')$ é definida por [20, 22, 24]

$$Corr(u(t), u(t')) = \frac{Cov(u(t), u(t'))}{\sqrt{\langle u^2(t) \rangle} \sqrt{\langle u^2(t') \rangle}}. \quad (2.11)$$

Propriedades da Covariância e Correlação

1. Se variáveis aleatórias $u(t)$ e $u(t')$ são independentes, então

$$Cov(u(t), u(t')) = 0; \quad \langle\langle u(\tau) \rangle\rangle = \langle\langle u(t)u(t + \tau) \rangle\rangle;$$

2. **Simetria:** Ocorre quando $\langle\langle u(t)u(t') \rangle\rangle = \langle\langle u(t')u(t) \rangle\rangle$. No caso estacionário, quando a função de correlação é apenas uma função de $\tau = t - t'$, temos que $\langle\langle u(\tau) \rangle\rangle = \langle\langle u(-\tau) \rangle\rangle$;
3. **Valores extremos:** no caso estacionário, temos que $|\langle\langle u(\tau) \rangle\rangle| \leq \langle\langle u(0) \rangle\rangle$. Por outro lado, quando $\tau \rightarrow \infty$, as sequências de dados tendem a ser descorrelacionadas e $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle\langle u(\tau) \rangle\rangle = 0$;
4. As variáveis aleatórias $u(t)$ e $u(t')$ são positivamente (diretamente) correlacionadas se a $Cov(u(t), u(t')) > 0$, e negativamente (inversamente) correlacionadas se $Cov(u(t), u(t')) < 0$.

2.2.4 Condição de mistura

Um sistema físico atinge o equilíbrio quando a evolução temporal é irreversível. Esta irreversibilidade pode ser observada pela função de *autocorrelação* se anular após um tempo muito longo, indicando que o sistema físico é markoviano (não guarda memória). Caso contrário, uma correlação não-nula indica a possibilidade de haver reversibilidade; e isso indica que alguma informação sobre o estado inicial ainda sobrevive [28, 29]. A condição de mistura linear² é definida quando

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} Corr(\tau) = 0, \quad (2.12)$$

em que $Corr(\tau)$ é a função de autocorrelação.

Seja $f(u)$ a probabilidade de equilíbrio de processo estocástico e $G_\tau(u(t)|u(t'))$ a probabilidade de transição de $u(t')$ para $u(t)$. A *condição de mistura forte* para processos estacionários pode ser expressa como

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} G_\tau(u(t)|u(t')) = f(u), \quad (2.13)$$

ou seja, toda informação sobre a condição inicial se perderia para tempos muito longos, e não apenas as correlações lineares. A condição de mistura linear dada na Eq. (2.12) é uma condição necessária para haver mistura forte em um processo com desvio padrão finito. Um

²Existem outras condições de mistura utilizadas na literatura [28].

sistema que obedece à condição de mistura forte possui uma evolução irreversível, em que o estado de equilíbrio é dado pela probabilidade de equilíbrio, $f(u)$. Existem processos em que a condição de mistura fraca implica na condição de mistura forte, por exemplo, os processos Gaussianos (Seção 2.3.2) [28].

2.2.5 Condições de compatibilidade de Chapman

As densidades de probabilidade $f(u, t)$ devem satisfazer a condição de compatibilidade de Chapman-Kolmogorov [30], expressa por integrais

$$f(u_1, t_1; \dots; u_i, t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n) du_{i+1} \dots du_n \quad (2.14)$$

válida para $i < n$. A integração de $f(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n)$ com respeito a certas variáveis, implica na densidade conjunta das variáveis remanescentes. A nova densidade obtida é denominada densidade de probabilidade marginal. Da mesma forma, se em $F(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n)$ substituímos certas variáveis por ∞ , também obteremos a função distribuição acumulada conjunta das variáveis remanescentes [23, 30].

Esta condição de compatibilidade garante-nos que se acrescentarmos mais tempos na nossa malha temporal, então as novas probabilidades de realização devem ser compatíveis com a malha anterior ao acréscimo. Podemos agora definir a densidade de probabilidade condicional conjunta $f(u_{k+1}, t_{k+1}; \dots; u_n, t_n | u_1, t_1; \dots; u_k, t_k)$ da variável estocástica u assumir o valor u_{k+1} no tempo t_{k+1} , ..., u_n no tempo t_n dado que a variável assumiu os valores u_1 no tempo t_1 , ..., u_k no tempo t_k , em que $t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots < t_n$, a qual é definida pela seguinte identidade:

$$f(u_{k+1}, t_{k+1}; \dots; u_n, t_n | u_1, t_1; \dots; u_k, t_k) = \frac{f(u_1, t_1; \dots; u_k, t_k; \dots; u_n, t_n)}{f(u_1, t_1; \dots; u_k, t_k)}. \quad (2.15)$$

Para remover um determinado número de variáveis à esquerda da linha condicional (|), integramos a densidade de probabilidade condicional com respeito a estas variáveis, isto é,

$$\begin{aligned} f(u_{k+1}, t_{k+1} | u_1, t_1; \dots; u_k, t_k) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(u_{k+1}, t_{k+1}; \dots; u_n, t_n | u_1, t_1; \dots; u_k, t_k) du_{k+2} \dots du_n. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Para remover um determinado número de variáveis à direita da linha condicional (|), multiplicamos por uma densidade condicional das variáveis a serem eliminadas condicio-

nadas as variáveis a serem mantidas e integra-se

$$\begin{aligned} f(u_{k+1}, t_{t+1}; \dots; u_n, t_n | u_k, t_k) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(u_{k+1}, t_{t+1}; \dots; u_n, t_n | u_1, t_1; \dots; u_k, t_k) \\ &\times f(u_1, t_1; \dots; u_{k-1}, t_{k-1} | u_k, t_k) du_1 \dots du_{k-1}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

A prova destas regras segue da identidade dada na Eq. (2.15) e da relação entre as densidades marginais e conjuntas [20, 22, 23, 31].

2.2.6 Função Característica

Seja u uma variável estocástica com função densidade de probabilidade (pdf) $f(u)$, então sua função característica é definida por

$$\psi_u(z, t) = \langle e^{izu(t)} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izu} f(u, t) du, \quad (2.18)$$

em que $i = \sqrt{-1}$ e $t \in \mathbb{R}$.

A seguir, algumas propriedades da função característica:

Teorema 2.1 (Teorema de Bochner). $\psi_u(z, t)$ é uma função característica, se e somente se [20, 32, 33],

- (i) $\psi_u(z, t)$ é positiva definida,
- (ii) $\psi_u(0, t) = 1$.

A função característica determina completamente a função de densidade de probabilidade (pdf). Este fato permite determinar resultados de grande interesse na teoria assintótica³. Então, o problema de convergência em probabilidade de uma sequência de variáveis aleatórias pode ser resolvido através da convergência da sequência correspondente de funções características. Este princípio fundamental na teoria assintótica é conhecido como o *teorema da continuidade*⁴ (Teo. (2.8)) [20, 33–36].

Algumas Propriedades de Função Característica

Para a demonstrações das propriedades ver referências [19, 25, 26]. E para outras propriedades e aplicações, ver as seguintes referências [32, 38–40].

³A teoria assintótica define os métodos assintóticos (Convergência em Probabilidade, Convergência em Média e Convergência em Distribuição) aplicados em uma sequência de variáveis aleatórias úteis em Probabilidade Aplicada e Estatística [21, 32].

⁴Para mais detalhes do teorema da continuidade e suas propriedades de convergência em distribuição, ver referências [34–37].

1. $|\psi_u(z, t)| \leq 1$;
2. Para $a, b \in \mathbb{R}$, $\psi_{au+b}(z, t) = e^{izb}\psi_u az, t$;
3. u tem distribuição simétrica em torno de zero $\Leftrightarrow \psi_u(z, t)$ é real para todo z ;
4. $\psi_u(z, t)$ é uniformemente contínua;
5. $\overline{\psi_u(z, t)} = \psi_u(-z, t)$, em que $(\bar{\cdot})$ denota o complexo conjugado;
6. Do item (i) do Teo. (2.1), $\forall n \in \mathbb{N}$, vale

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \psi_u(t_j - t_i) z_j \bar{z}_k \geq 0; \quad (2.19)$$

para quaisquer números reais t_1, t_2, \dots, t_n e complexos z_1, z_2, \dots, z_n .

7. Se $\psi_u(z, t)$ é analítica, todos os momentos estatísticos de u serão finitos⁵. Então, $\psi_u(u, t)$ possui infinitas derivadas contínuas e

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n} \psi_u(z, t) = \int (iu)^n e^{izu} dF(u, t). \quad (2.20)$$

Da propriedade 7 acima, a função característica pode ser vista como uma espécie de função geradora de momentos. Expandindo a função característica em termos dos momentos da variável estocástica, obtemos

$$\psi_u(z, t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (iz)^n \langle u^n(t) \rangle. \quad (2.21)$$

Observação 2.1. Assumindo a existência da densidade de probabilidade, $f(u, t)$, a função característica é a transformada de Fourier da densidade de probabilidade. Logo, a densidade de probabilidade é a transformada inversa de Fourier da função característica, isto é,

$$f(u, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izu} \psi_u(z, t) dz. \quad (2.22)$$

Comparando as Eq. (2.18) e Eq. (2.22) podemos constatar esta relação recíproca entre $\psi_u(z, t)$ e $f(u, t)$ [34].

A *convolução* é uma técnica utilizada para analisar a forma do comportamento gráfico das variáveis aleatórias, quando ocorre um impulso (função Delta de Dirac). Essa técnica é utilizada para mostrar que a função densidade probabilidade da variável aleatória tende para uma gaussiana. Lembrando que a convolução é uma operação linear e comutativa [20]. A seguir, o teorema da convolução de duas distribuições.

⁵Se $\langle |u(t)|^n \rangle < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$, [25].

Teorema 2.2 (Teorema da Convolução). A distribuição F é a convolução de duas distribuições F_1 e F_2 , isto é,

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(z-u) dF_2(u) = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(z-u) dF_1(u) = F_1 * F_2 \quad (2.23)$$

se, e somente se, as funções características correspondente satisfazem a seguinte relação $f(u, t) = f_1(u, t) \cdot f_2(u, t)$ [32].

Corolário 2.1. [Colorário do Teo. (2.2)] O produto de duas funções características é uma função característica [32].

Seja $F(u)$ uma função distribuição e considere a transformada (integral), $f(s)$, pelo núcleo (Kernel), $K(s, u)$, isto é,

$$f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(s, u) dF(u). \quad (2.24)$$

2.2.7 Segunda Característica e Cumulantes

Podemos determinar a *segunda característica* aplicando o logaritmo na função característica da Eq. (2.18), isto é,

$$\phi(z, t) = \ln[\psi_u(z, t)], \quad (2.25)$$

em que $\psi_u(z, t)$ é uma função característica (Eq. (2.18)) da variável aleatória $u(t)$.

Da Eq. (2.18) e do Teo. (2.1), podemos mostrar que existe uma vizinhança na origem em que $\psi_u(z, t)$ é diferente de zero. Seja $|z| < \Delta$ essa vizinhança. A função dada na Eq. (2.25) pode ser definida para $|z| < \Delta$, em que é contínua e não é definida em $t = 0$. A função $\phi_u(z, t)$ é também chamada de *função geradora de cumulantes* da função de distribuição $F(u)$. Os cumulantes são de importância na descrição e caracterização da variável aleatória $u(t)$, fornecendo uma alternativa para os momentos da distribuição de probabilidade, e o cumulante de n -ésima ordem pode ser definido como:

$$c_n(t) = (-i)^n \frac{\partial^n \phi(0, t)}{\partial z^n} \quad (2.26)$$

em que usamos a Eq. (2.25).

A definição de cumulantes pode ser arbitrária, mas essas quantidades possuem propriedades interessantes. Por exemplo, cumulantes se adicionam quando variáveis aleatórias independentes são somadas [32, 41].

Relação entre Momentos e Cumulantes de uma Distribuição de Probabilidade

Os cumulantes c_n são combinações polinomiais dos momentos centrais, Eq. (2.7). A relação entre os momentos $\langle u^n(t) \rangle$ e os cumulantes $c_n(t)$ são obtidos através da expansão da Eq. (2.26)

em série de potências de n ; igualando os coeficientes de mesma potência em n desta expansão e da Eq. (2.18), obtemos combinações dos momentos μ_p com $p \leq n$:

$$c_1(t) = \langle u(t) \rangle, \quad (2.27)$$

$$c_2(t) = \langle u^2(t) \rangle - \langle u(t) \rangle^2, \quad (2.28)$$

$$c_3(t) = \langle u^3(t) \rangle - 3 \langle u(t) \rangle \langle u^2(t) \rangle + 2 \langle u(t) \rangle^3, \quad (2.29)$$

$$c_4(t) = \langle u^4(t) \rangle - 3 \langle u^2(t) \rangle^2 - 4 \langle u(t) \rangle \langle u^3(t) \rangle + 12 \langle u(t) \rangle^2 \langle u^2(t) \rangle - 6 \langle u(t) \rangle^4. \quad (2.30)$$

Para obter relações envolvendo termos de ordem superior, basta prosseguir com a expansão na Eq. (2.26). Uma expansão geral para os cumulantes pode ser encontrada na referência [42] na forma matricial. Para uma Gaussiana, os cumulantes $c_n(t) = 0$, para $n \geq 3$ [20–22].

É útil normalizar os cumulantes por uma potência da variância apropriada, de maneira que obtemos quantidades adimensionais. Os cumulantes normalizados C_n são definidos por:

$$C_n \equiv \frac{c_n(t)}{c_2^{n/2}(t)}, \quad (2.31)$$

em que $c_2(t)$ é o cumulante de segunda-ordem e $c_n(t)$ são os cumulantes de $n > 3$ -ordem. Destacamos aqui o terceiro e quarto cumulantes normalizados, chamados de assimetria (skewness) e curtose (kurtosis), respectivamente por:

$$skew \equiv \frac{\langle (u(t) - \mu_1)^3 \rangle}{\sigma^3} \quad (2.32)$$

$$kurt \equiv \frac{\langle (u(t) - \mu_1)^4 \rangle}{\sigma^4}. \quad (2.33)$$

A definição de cumulantes pode ser arbitrária, mas essas quantidades possuem propriedades interessantes. Por exemplo, cumulantes se adicionam quando variáveis aleatórias independentes são somadas. Além disso, uma distribuição Gaussiana é caracterizada pelo fato de todos os seus cumulantes de ordem superior a dois serem identicamente nulos [43].

Propriedades dos Cumulantes

1 Invariância e equivariância:

$$c_1(t + \alpha) = c_1(t) + \alpha; \quad \text{para} \quad n = 1, \quad (2.34)$$

$$c_n(t + \alpha) = c_n(t); \quad \text{para} \quad n \geq 2,$$

para α uma constante qualquer.

2 Homogeneidade (ou multilinearidade)

$$c_n(\alpha t) = \alpha^n c_n(t). \quad (2.35)$$

3 Aditividade

$$c_n(t + s) = c_n(t) + c_n(s), \quad (2.36)$$

se t e s são independentes [19, 20, 24, 37].

2.2.8 Distribuição Infinitamente Divisíveis

Uma distribuição de probabilidade, $F(u, t)$, é *infinitamente divisível* se esta for decomposta na soma de n variáveis aleatórias i.i.d ($u = u_1 + u_2 + \dots + u_n$), da sequência de variáveis aleatórias independentes $\{u_n\}_{n=1}^N$, com distribuição $F_n(u, t)$ comum⁶. Por outro lado, uma função densidade de probabilidade $f(u, t)$ é *infinitamente divisível* se e somente se sua função característica, $\psi_u(z, t)$, for para cada $n \in \mathbb{N}$, a n -ésima potência de alguma função característica, $\psi_n(z, t)$, isto é,

$$\psi_u(z, t) = [\psi_n(z, t)]^n \quad \text{ou} \quad \psi_n(z, t) = \psi_u^{1/n}(z, t). \quad (2.37)$$

A Eq. (2.37) mostra que podemos criar cópias da distribuição original simplesmente em tomando-se potências (ou a raiz) de sua função característica. Este procedimento nos permite, por exemplo, criar seqüências de variáveis aleatórias cujas propriedades de suas componentes se assemelhem às de sua soma [19, 20, 32, 44]. E mais, podemos concluir que, independentemente da sequência de variáveis aleatórias escolhida que satisfaça a prescrição Eq. (2.37), sempre a soma de suas componentes resultará na mesma variável aleatória u .

Observação 2.2. A propriedade de *divisibilidade infinita* das variáveis aleatórias nos demonstra que, de um modo geral, as subsequências da $\{u_n\}_{n=1}^N$ se assemelham ao todo (isto é, sua soma). Por outro lado, uma variável aleatória u é denominada *infinitamente divisível* se for possível sua decomposição em soma de variáveis aleatórias i.i.d. $\{u_{nm}\}_{1 \leq m \leq n}$, $n \in \mathbb{N}$: $u = u_{n1} + u_{n2} + \dots + u_{nm}$, que em termos das funções características, escreve-se: $\psi_n(z, t) = \psi_u^{1/n}(z, t)$ [19, 20, 32, 40, 44].

Observação 2.3. Dizemos que uma variável é *divisível* se puder ser escrita como a soma de duas outras variáveis aleatórias independentes [32].

Alguns exemplos de distribuições infinitamente divisíveis

1. Distribuição Gaussiana:

$$\psi_u(z, t) = e^{i\mu z - \frac{\sigma^2}{2} z^2} = \left[e^{i\frac{\mu}{n} z - \frac{\sigma^2}{2n} z^2} \right]^n,$$

em que μ é a média e σ^2 é a variância;

⁶Esta definição é válida em qualquer número de dimensão. Ver referência [20], p. 192, Vol. II.

2. Distribuição de Lévy simétrica:

$$\psi_u(z, t) = e^{i\mu z - \gamma|z|^\alpha} = \left[e^{i\frac{\mu}{n}z - \frac{\gamma}{n}|z|^\alpha} \right]^n,$$

em que $0 < \alpha \leq 2$ é o parâmetro de Lévy e $\gamma > 0$ é o fator de escala.

3. Processo de Poisson, $P(n, \lambda) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$, com $n \in \mathbb{N}$ [20]:

$$\psi_u(z, t) = \left[e^{\frac{\lambda}{n}[e^{iz} - 1]} \right]^n.$$

Propriedades de distribuição infinitamente divisível

Teorema 2.3. O produto de um número finito de funções características infinitamente divisível é infinitamente divisível [32].

Os teoremas abaixo garantem a convergência de seqüências de variáveis aleatórias infinitamente divisíveis: o limite⁷ de uma seqüência de variáveis aleatórias infinitamente divisíveis resulta em uma outra variável aleatória infinitamente divisível.

Teorema 2.4. A variável aleatória cujo valor é igual ao limite de uma seqüência de variáveis aleatórias infinitamente divisíveis é infinitamente divisível [20, 32].

Observação 2.4. Com o auxílio do Teo. (2.4), podemos explorar a equação fundamental das funções infinitamente divisíveis. Temos da propriedade:

$$\ln u := \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[u^{1/n} - 1 \right], \quad (2.38)$$

que é obtida da expansão em série de Taylor do termo $u^{1/n} = e^{[(1/n)\ln u]}$. Inserindo uma função característica na Eq. (2.38), obtemos a expressão: $\ln \psi(z, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\psi(z, t)^{1/n} - 1 \right]$. Se $\psi(z, t)$ for infinitamente divisível, segue que

$$\ln \psi_u(z, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\psi_n(z, t) - 1 \right]. \quad (2.39)$$

Definindo $\Psi_n(z, t) = n \left[\psi_n(z, t) - 1 \right]$ e da Eq. (2.39), $\psi_n(z, t) := e^{\Psi_n(z, t)}$ é uma função característica de Poisson de parâmetro $\lambda = n$ e, portanto, infinitamente divisível.

⁷Considere $\{u_{nm}\}_{1 \leq m \leq n}$, $n \in \mathbb{N}$, de variáveis infinitamente divisíveis com funções características $\psi_m^{(k)}(z, t)$. Seja $u^{(k)} = \sum_{i=1}^n u_{in}^{(k)}$, e suponha que a seqüência $u^{(k)}$ convirja a um dado limite u , $\forall t$, ou seja, o limite u é uma variável aleatória. A relação $u(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} u^{(k)}(t)$, em termos de funções características, $\psi(z, t) = \lim_k \psi^{(k)}(z, t)$, pois as funções características são exponenciais, e portanto vale $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \Rightarrow e^u = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{u_n}$. Da Eq. (2.37), obtemos $\lim_{k \rightarrow \infty} \psi^{(k)}(z, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\psi_m^{(k)}(z, t) \right]^m$. Portanto, $\psi(z, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\psi_m^{(k)}(z, t) \right]^m$. Definindo $\psi_m(z, t) := \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_m^{(k)}(z, t)$, segue que $\psi(z, t) = [\psi_m(z, t)]^m$, ou seja, a variável aleatória u é infinitamente divisível.

Da Obs. (2.4), o Teo. (2.4) é válido, pois $\psi(z, t)$ é infinitamente divisível. No entanto, se escolhermos funções arbitrárias $\chi_n(z, t)$, obtemos o seguinte teorema:

Teorema 2.5. Seja $\{\chi_n\}$ uma sequência de funções características. Para que uma dada função característica $\psi_u(z, t)$ seja infinitamente divisível é necessário e suficiente que exista o limite contínuo

$$\psi_u(z, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} n [\chi_n(z, t) - 1], \quad (2.40)$$

em que, neste caso, $\psi_u(z, t) := e^{\Psi(z, t)}$.

A Eq. (2.40) permite obter uma representação semelhante, conforme o seguinte resultado:

Lema 2.1. Seja $\chi(z, t)$ uma função característica e $\gamma > 0$ uma constante. Então,

$$\psi_u(z, t) = e^{\gamma[\chi(z, t) - 1]}, \quad (2.41)$$

é uma função característica infinitamente divisível [20, 32].

Teorema 2.6. Uma função característica que é o limite de uma sequência de funções características infinitamente divisíveis é infinitamente divisível [32].

Corolário 2.2. [Corolário do Teo. (2.6)] Seja $\psi_u(z, t)$ uma função característica infinitamente divisível; então $[\psi_u(z, t)]^n$ é também uma função característica para qualquer n real e positivo. A volta é também verdadeira [32].

Lema 2.2. Seja $g(z)$ uma função característica arbitrária e suponha que $\lambda > 0$. Então, $f(z) = e^{\lambda[g(z) - 1]}$ é uma função característica infinitamente divisível [32].

A Eq. (2.41) fornece uma representação geral para uma função característica infinitamente divisível, em termos de uma função de Poisson. Do Teo. (2.5) e do Lema. (2.2), origina o importante resultado:

Teorema 2.7 (Teorema de De Finetti). Sejam $\{\chi_n(z, t)\}$ e $\{\gamma_n\}$ sequências de funções características e de números positivos, respectivamente, e $\psi_u(z, t)$ como na Eq. (2.41). Para que uma função característica $\psi_u(z, t) := e^{\Psi(z, t)}$ seja infinitamente divisível, é necessário e suficiente que [32]

$$\Psi(z, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n [\chi_n(z, t) - 1]. \quad (2.42)$$

Teorema 2.8 (Teorema da continuidade). Sejam $\{\Psi_n(u)\}$ uma sequência de funções distribuições e $\{\psi_n(z, t)\}$ uma sequência de funções características correspondente. A sequência $\{\Psi_n(u)\}$ converge fracamente para uma função distribuição $\Psi(u)$ se, e somente se, a sequência $\{\psi_n(z, t)\}$ para cada t , converge para $\{\psi(z, t)\}$ contínua em $t = 0$. E ainda $\{\psi(z, t)\}$ é a função característica de $\{\Psi(u)\}$ [32].

Teorema 2.9 (2ª Versão do Teorema da continuidade). Seja $\{\Psi_n(u)\}$ uma sequência de funções distribuições e $\{\psi_n(z, t)\}$ uma sequência de funções características correspondente. A sequência $\{\Psi_n(u)\}$ converge fracamente para uma função distribuição $\Psi(u)$ se, e somente se, no limite a sequência $\{\psi_n(z, t)\}$ converge uniformemente para uma função $\{\psi(z, t)\}$, em cada intervalo finito $t \in [-T, +T]$ e $\forall z$ [32].

2.3 Tipos de Processos Estocásticos

Nesta seção, revisamos alguns tipos de processos estocásticos de tempo contínuo que tem relevância para esta tese.

Os processos estocásticos podem ser divididos em discretos e contínuos. Apesar dos ativos financeiros seguirem um processo estocástico discreto, ou seja, as cotações variarem conforme frações de preço e as variações dependerem da ocorrência de negócios, os modelos contínuos se prestam muito bem para a maioria dos modelos utilizados em finanças [45]. A seguir, revisamos alguns tipos de processos estocásticos de tempo contínuo.

2.3.1 Processo Estacionário

Um processo estocástico é *estacionário* se os *momentos* não são afetados por um deslocamento no tempo. Um processo é *estritamente estacionário* se as funções de distribuição finitas são invariantes sob translações no tempo, isto é, se para qualquer n e para quaisquer $t_i, t_{i+s} \in [t_0, T]$, $i = 1, \dots, n$ se tiver $F_{t_1, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n) = F_{t+s, \dots, t_n+s}(u_1, \dots, u_n)$. Esta condição é conhecida também como *estacionariedade forte*. Um processo é *fracamente estacionários* (ou 2ª ordem) se, $\langle u_t \rangle < +\infty$ para todo t , $\langle u_t \rangle$ é constante ao longo do tempo e a $Cov(u_t, u_{t'})$ depende apenas da diferença entre os tempos. Contudo, um processo fracamente estacionário pode não ser estritamente estacionário [38, 46].

2.3.2 Processo Gaussiano

Uma classe importante de processo estocástico é o processo Gaussiano. Tal importância, decorre da simplicidade matemática que envolve este tipo de processo estocástico e, da existência de muitos fenômenos físicos passíveis de serem descritos por este modelo probabilístico [25, 28].

Um processo estocástico $u(t)$ é denominado *Gaussiano*, se em qualquer malha temporal, a densidade de probabilidade conjunta na malha é uma gaussiana multidimensional

dada por

$$f(u_1, \dots, u_n) = \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} (u_j - m_j)(u_k - m_k) \right\}}{(2\pi)^{n/2} (\det A)^{1/2}}, \quad (2.43)$$

em que $m_j = \langle u_j \rangle$ e a $A = \{a_{jk}\}$ é positiva definida. Os elementos da matriz inversa A^{-1} são as funções de correlação de $u(t)$ dados por $(A^{-1})_{jk} = C_{jk} = \langle \langle (u_j - \langle u_j \rangle)(u_k - \langle u_k \rangle) \rangle \rangle$ [25, 28, 38]. Um exemplo fundamental de um processo Gaussiano é o processo de Wiener⁸ (ou movimento Browniano (ver Seção 2.3.7)) [47, 48].

2.3.3 Ruído Branco

É um processo estocástico $u(t)$ com função média e função de autocovariância dada por

$$Cov(t, t') = \sigma^2 \delta(t' - t), \quad (2.44)$$

em que $\delta(u)$ é uma função delta de Dirac [49].

2.3.4 Processo Markoviano

Seja $u(t)$ um processo *Markoviano* então, para estabelecer, no momento s , probabilidades sobre a evolução futura do processo, toda informação anterior ao momento s é desnecessária se o estado do processo no momento s for conhecido, ou seja, dado um processo Markoviano, o passado e o futuro são estatisticamente independentes quando o presente é conhecido [20]. Formalmente, $\{u(t)\}$ é um processo Markoviano se satisfaz a seguinte propriedade [50]:

$$P(u_{n+1} = j | u_0 = k_0, u_1 = k_1, \dots, u_{n-1} = k_{n-1}, u_n = i) = P(u_{n+1} = j | u_n = i), \quad (2.45)$$

em que $P(u_{n+1} = j | u_n = i)$ é a probabilidade de transição, u_n é o estado presente (atual) e u_{n+1} é o estado futuro. A Eq. (2.45) garante que a probabilidade condicional no instante t_{n+1} é determinada unicamente pelo valor u_n no tempo t_n , não sendo afetada pelos valores assumidos pela variável estocástica nos tempos sucessivos anteriores, $t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1}$. Esta propriedade equivale a afirmar que a probabilidade condicional de qualquer evento futuro, dado qualquer evento passado e o estado presente $u_t = i$, é independente do evento passado e depende somente do estado presente do processo, ou seja, os *processos Markovianos* são processos nos quais as probabilidades futuras são aleatórias e sem memória [20, 51, 52]. As probabilidades condicionais $P(u_{n+1} = j | u_n = i)$ são chamadas de *probabilidades de*

⁸O processo de Wiener é o processo de difusão mais simples [47].

transição entre dois estados. Se para cada i e j ,

$$P_{ij}(u_{n+1} = j | u_n = i) = P(u_1 = j | u_0 = i), \quad (2.46)$$

então as probabilidades de transição são denominadas *tempos homogêneos* [5,20]. Então, um processo Markoviano é determinado por duas funções: $P(u(t))$, que fornece a probabilidade do processo estocástico assumir o valor u no instante de tempo t ; e $P(u(t)|u(t'))$, que é a probabilidade condicional em dois instantes de tempos t e t' . A hierarquia completa de funções de três tempos, quatro tempos e assim por diante, pode ser construída, no caso de um processo de Markov, a partir delas para caracterizar qualquer probabilidade a n -pontos,

$$P(u_1, \dots, u_n) = P(u_1)P(u_2|u_1)\dots P(u_n|u_{n-1}). \quad (2.47)$$

As *probabilidades de transição* de qualquer processo Markoviano obedecem a uma equação de *Chapman-Kolmogorov* (ou equação de *Smoluchowski*) [20,22]. Vamos denotar a *probabilidade de transição*⁹ por $P_{ij}^{n,n+1} = P_{ij}(n+1, n) = P[u_{n+1} = j | u_n = i]$ e sem perda de generalidade, podemos escrever

$$\begin{aligned} P_{ij}^{n,n+1}(u_{n+1} = j | u_n = i) &= \sum_{\nu} P_{i\nu}(n, r) P_{\nu j}(r, n+1) = \sum_{u_r} P(u_{n+1}, u_r | u_n) \\ &= \sum_{u_r} P(u_{n+1} | u_r) P(u_r | u_n), \quad \text{caso discreto;} \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} &= \int du_r P(u_{n+1}, u_r | u_n) \\ &= \int du_r P(u_{n+1} | u_r) P(u_r | u_n), \quad \text{caso contínuo;} \end{aligned} \quad (2.49)$$

que é válido $\forall r$ com $n < r < n+1$, e segue diretamente da definição de processo Markoviano e da Eq. (2.47).

Observação 2.5. O termo $P_{ij}^{n,n+1}(u_{n+1} = j | u_n = i)$ das Eq. (2.48) e Eq. (2.49), equivale a dizer que a probabilidade condicional do processo estocástico estar no estado j no tempo $n+1$, dado que estava no estado i no tempo n .

A equação de Chapman-Kolmogorov (Eq. (2.48) para o caso discreto e Eq. (2.49) para o caso contínuo) pode ser reescrita numa forma que é ao mesmo tempo mais simples e também mais diretamente relacionada aos conceitos físicos [5]. Esta forma é conhecida como equação *Mestra*. Infelizmente, encontrar as soluções para as Eq. (2.48) e Eq. (2.49) é uma tarefa complicada; o método mais utilizado, é definir a probabilidade de transição como a solução de uma equação *Mestra* [28]. Na literatura, assume-se que o ruído do processo

⁹As probabilidades de transição são definidas também para processos discretos não-Markovianos, mas para isso, o termo $P_{\nu j}(u_r, u_{n+1})$ dado na Eq. (2.61) deve ser substituído por uma expressão em função não só ν e k , mas também em j [20].

estocástico que descreve os preços dos ativos em geral, como por exemplo as ações, seguem um processo de Markov [28, 29].

Um processo Markoviano é *homogêneo no tempo* se

$$P(t + s, u, t' + s) = P(t, u, t') \quad (2.50)$$

e, neste caso, as probabilidades de transição dependem apenas de u e $t' - t$. Isto é, para avaliar probabilidades condicionais da posição do processo em um dado momento, apenas interessa saber a diferença $t' - t$ e não os valores de t e t' . Assim, podemos escrever,

$$P(t' - t, u) = P(t', u, t), \quad 0 \leq t' - t \leq T - t_0. \quad (2.51)$$

Um processo Markoviano é estacionário para $t \in [t_0, T]$ se e somente se: (i) u_t é homogêneo no tempo. (ii) existe uma distribuição invariante $P^0 = \int P(t, u) P^0(du)$, $t \in [T - t_0]$, e (iii) u_{t_0} tem distribuição P^0 .

2.3.5 Processo de Difusão

O processo de *difusão*¹⁰ está relacionado com o estudo da existência e unicidade de soluções para equações diferenciais estocásticas. E a literatura tem mostrado que vários fenômenos físicos, biológicos e econômicos são bem modelados por processos de difusão. De uma maneira geral, o termo *difusão* é atribuído à processos de Markov com trajetórias contínuas que podem ser caracterizados pelo seu gerador infinitesimal do processo [1, 8, 23, 51, 53].

Processos de difusão são processos Markovianos com trajetórias contínuas quase certamente, em que as probabilidades de transição $P(t', u, t)$ satisfazem, para cada $t' \in [t_0, T]$, $u \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$:

- 1 $\lim_{t \downarrow t'} \frac{1}{t' - t} \int_{u' - u > \epsilon} P(t', u, t, du') = 0$;
- 2 Existe uma função $a(u, t')$ tal que: $\lim_{t \downarrow t'} \frac{1}{t' - t} \int_{u' - u \leq \epsilon} (u' - u) P(t', u, t, du') = a(u, t')$;
- 3 Existe uma função $b^2(u, t')$ tal que: $\lim_{t \downarrow t'} \frac{1}{t' - t} \int_{u' - u \leq \epsilon} (u' - u)^2 P(t', u, t, du') = b^2(u, t')$.

De acordo com a condição 1, a ocorrência de saltos instantâneos na trajetória do processo é improvável: $P(u_t - u_{t'} > \epsilon | u_{t'} = u) = o(t - t')$. As condições 2 e 3 estabelecem que o processo têm média infinitesimal $(u, t')d$

¹⁰É um processo estocástico contínuo no tempo [47].

ϵ e uma variância infinitesimal $b^2(u, t')dt$. A média infinitesimal (*drift*) fornece uma medida de velocidade média do movimento descrito por u no instante t' , e a variância infinitesimal (difusão) fornece uma medida de magnitude local das flutuações de $u_t - u_{t'}$, dado $u_{t'} = u$. O processo u é de difusão homogêneo no tempo (processo homogêneo), então $P(u_{t+h}|u_t = u) = P(u_h|u_0 = u)$, ou seja, as probabilidades de transição dependem apenas do defasamento h e não do particular momento em que o processo é avaliado [20, 47, 48].

Equações Diferenciais Estocásticas

Considere um processo de difusão $u(t)$ caracterizado pelos coeficientes infinitesimais a e b . Como $u(t)$ evolui continuamente no tempo, o processo $u(t)$ é escrito através da equação diferencial estocástica. De forma não rigorosa, partindo das definições dos coeficientes infinitesimais [48]

$$\begin{aligned} \langle u_{t+h} - u_t | u_t = u \rangle &\approx a(u, t)h \\ \langle (u_{t+h} - u_t)^2 | u_t = u \rangle &\approx b^2(u, t)h \end{aligned} \quad (2.52)$$

em que a equação

$$u_{t+h} - u_t \approx a(u, t)h + b(u, t)(W_{t+h} - W_t) \quad (2.53)$$

é compatível com as definições dos coeficientes infinitesimais (com h pequeno). Fazendo $h \rightarrow 0$ obtemos a chamada equação diferencial estocástica:

$$du_t = a(u, t)dt + b(u, t)dW_t, \quad (2.54)$$

para $t \in [0, T]$, dW_t é um processo de Wiener, ou equivalentemente,

$$u_t = u_0 + \int_0^t a(s, u_s) ds + \int_0^t b(s, u_s) dW_s, \quad (2.55)$$

A equação diferencial Eq. (2.54) fornece uma realização específica (uma trajetória) do processo estocástico seguindo pela variável aleatória u_t . Se tomarmos uma média sobre várias trajetórias, a probabilidade de obtermos um certo valor de u no tempo t é descrita pela distribuição $P(u, t)$. A seguir, resumimos alguns processos estocásticos mencionados no Capítulo 3.

Equação Mestra

A equação *Mestra* é a equação de Chapman-Kolmogorov escrita na forma diferencial para processos Markovianos, com a vantagem de fácil manipulação [5]. A equação Mestra pode ser interpretada como determinar a evolução temporal de um conjunto de probabilidades de

permanência nos estados do sistema. Como as transições entre estados influenciam estas probabilidades de permanência, é necessário determiná-las por equações acopladas. A equação Mestra é uma equação integro-diferencial (ver Eq. (2.56)) que, quando resolvida, fornece a probabilidade de transição de um processo Markoviano e é escrita como:

$$\frac{\partial P_{tt'}(u(t)|u(t'))}{\partial t} = \int dv [W_t(u|v)P_{tt'}(v|u') - W_t(v|u)P_{tt'}(u|u')], \quad (2.56)$$

onde os operadores $W_t(u|v)$ e $W_t(v|u)$ são interpretamos como fluxos de probabilidade de transição por unidade de tempo¹¹.

A Eq. (2.56) é a forma canônica da equação Mestra. Ela é interpretada como uma equação de ganhos e perdas para as probabilidades. Num intervalo δt , cada elemento em v possui uma chance $W_t(u|v)\delta t$ de transitar para u . Assim, o acréscimo (ou ganho) de probabilidade em u se dá pela soma das transições sobre todos os outros estados v , como determina o primeiro termo da Eq. (2.56). Por outro lado, os elementos inicialmente em u podem transitar para outros estados diminuindo o valor da probabilidade em u . Deste modo, o segundo termo da Eq. (2.56) caracteriza a perda de probabilidade em u devido a estas transições [20, 22, 28].

Equação Mestra provém da Equação de Chapman-Kolmogorov

Para se compreender como a equação mestra provém da equação de Chapman-Kolmogorov, considera-se um processo de tempo homogêneo (ou estacionário), isto é, um processo Markoviano em que a probabilidade de transição depende apenas do intervalo de tempo entre dois estados. A Eq. (2.49) se escreve, para este processo como

$$T_{\tau+\tau'}(u_{N+1}|u_N) = \int du_r T_{\tau'}(u_{N+1}|u_r) T_{\tau}(u_r|u_N), \quad \text{caso contínuo.} \quad (2.57)$$

É comum o uso da notação da Eq. (2.57), para as probabilidades de transição, quando se trata de um processo homogêneo no tempo (ou estacionário) [5]. Para intervalos de tempo pequenos (curtos), podemos expandir $T_{\tau}(u_r|u_N)$ em série de Taylor em τ e o comportamento de $T_{\tau}(u_r|u_N)$ é dado por¹²:

$$T_{\tau'}(u_{N+1}|u_N) = (1 - a_0\tau')\delta(u_{N+1} - u_N) + \tau'W(u_{N+1}|u_N) + o(\tau'^2), \quad (2.58)$$

¹¹ $W_i(u|v)$ é a taxa de transição por unidade de tempo do estado v para o estado u , e analogamente, $W_i(v|u)$ é a taxa de transição do estado u para o estado v .

¹²A forma dada na Eq. (2.58) é apenas uma suposição e não é satisfeita em todos os processos estocásticos.

onde $W(u_{N+1}|u_N)$ é a probabilidade de transição por unidade de tempo¹³. Inserindo a Eq. (2.58) na Eq. (2.57) resulta:

$$T_{\tau+\tau'}(u_{N+1}|u_N) = [1 - a_0(u_{N+1})\tau'] T_\tau(u_{N+1}|u_N) + \tau' \int W(u_{N+1}|u_r) T_\tau(u_r|u_N) du_r, \quad (2.59)$$

onde $a_0(u_{N+1}) = \int du_r W(u_r|u_{N+1})$, $\forall r$, $N < r < N + 1$. Dividindo a Eq. (2.59) por τ' e tomando o limite $\tau' \rightarrow 0$, resulta:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} T_\tau(u_{N+1}|u_N) = \int [W(u_{N+1}|u_r) T_\tau(u_r|u_N) - W(u_r|u_{N+1}) T_\tau(u_{N+1}|u_N)] du_r, \quad (2.60)$$

em que esta forma diferencial da equação de Chapman-Kolmogorov é a equação Mestra [5]. Um processo Markoviano é dito *estacionário* quando a probabilidade de transição $P_n(u_n; t + \Delta t | u_{n-1}; t)$, depende apenas do intervalo Δt de transição e não do instante t , ou seja, [22]

$$P_n(u_n; t + \Delta t | u_{n-1}; t) = P(u_n | u_{n-1}; \Delta t). \quad (2.61)$$

2.3.6 Processo de Saltos

O *processo de saltos* é um tipo de processo estocástico contendo movimentos de pequenos ou grandes saltos, ao invés de pequenos movimentos contínuos. As distribuição que resultam dos saltos são chamadas por leptocúrticas¹⁴. São exemplos dessas distribuições os Lévy Flights¹⁵. As propriedades das variáveis aleatórias exponenciais são importantes para definir processos de Markov com saltos. Uma variável aleatória u segue uma distribuição exponencial com parâmetro $\lambda > 0$, se a sua função densidade de probabilidade apresentar a seguinte forma

$$\lambda e^{-\lambda u}, \quad u \geq 0. \quad (2.62)$$

A função distribuição de u é dada por

$$F_{\mathbf{u}}(u, t) = P(\mathbf{u} \leq u) = 1 - e^{-\lambda u}, \quad \forall u \in [0; \infty]. \quad (2.63)$$

$F_{\mathbf{u}}(u, t)$ é inversível e sua função inversa é

$$F_{\mathbf{u}}^{-1}(u, t) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u). \quad (2.64)$$

Uma consequência destes resultados é que se u é uniformemente distribuída em $[0, 1]$, então $-\frac{1}{\lambda} \ln u$ é exponencialmente distribuída com parâmetro λ . Assim, por meio de distribuições uniformes, é possível computacionalmente simular uma distribuição exponencial [20, 28].

¹³ $W(u_{N+1}|u_N)$ é a taxa de transição do estado u_N para o estado u_{N+1} .

¹⁴Apresentam um pico mais agudo em torno da média e têm caudas gordas, o que indica maior possibilidade de ocorrência de valores extremos.

¹⁵Lévy Flights são descritos por Mandelbrot em The Fractal Geometry of Nature [54].

Propriedade da distribuição exponencial

Seja $T \leq 0$ é uma variável estocástica contínua, tal que

$$P(T > t + s | T > t) = \frac{\int_{t+s}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u} du}{\int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u} du} = P(T > s), \quad \forall t, s > 0. \quad (2.65)$$

Então, T tem distribuição exponencial. Em outras palavras, se interpretarmos T como um tempo estocástico, a distribuição de $T - t$, (a distribuição de $T > t$), é a mesma de T . Esta propriedade é denominada *falta de memória*. A distribuição exponencial é a única distribuição contínua com esta propriedade [20].

2.3.7 Processo Wiener (Movimento Browniano)

O Processo de Wiener (Movimento Browniano) é um tipo particular de Processo de Markov, muito utilizado na física para descrever o movimento da partícula Browniana que está sujeita a um grande número de pequenos choques moleculares. Grande parte dos modelos desenvolvidos é [5,55,56]. Este processo é em tempo contínuo e tem três propriedades [46,56]:

1. É um Processo Markoviano de tempo contínuo;
2. Possui incrementos independentes que seguem uma distribuição Normal com parâmetros $(0, \Delta t)$;
3. Mudanças no processo sobre qualquer intervalo de tempo são normalmente distribuídas, com uma variância que aumenta linearmente com o intervalo de tempo.

Estas três propriedades podem parecer ser restritivas, pois o preço das ações segue uma distribuição log-normal (preço de uma ação nunca cai abaixo de zero). Para contornarmos este problema, basta modelarmos o logaritmo do preço como um Processo de Wiener. Assim, pela propriedade 2, devemos concluir que o Processo de Wiener é um processo estocástico não estacionário, pois sua variância cresce linearmente com o horizonte de tempo [47]. A seguir, apresentamos os três importantes processos estocásticos, (Movimento Browniano Aritmético; Movimento Browniano Geométrico e o Processo de Ornstein-Uhlenbeck) que têm ampla aplicabilidade na modelagem financeira [57].

Movimento Browniano Aritmético

Este movimento é um processo de Wiener com uma tendência linear no tempo, que satisfaz a seguinte equação diferencial estocástica:

$$du(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW_t, \quad (2.66)$$

em que $\mu(\cdot)$ e $\sigma(\cdot)$ são funções usuais enquanto que o processo estocástico $\{W_t, t \geq 0\}$, tal que ΔW_t tem distribuição Gaussiana, com média, $\langle \Delta W_t \rangle = 0$ e variância $\langle (\Delta W_t)^2 \rangle = \Delta t$. A média e a variância para a variação da variável $du(t)$ são, respectivamente, $\langle du(t) \rangle = \mu(t)dt$ e $Var[du(t)] = \sigma^2 dt$ [55, 57].

Movimento Browniano Geométrico

Uma maneira de representar matematicamente a dinâmica do retorno do ativo, pode ser descrita pela equação

$$\begin{aligned} du(t) &= \mu(t)u(t)dt + \sigma(t)u(t)dW_t, \\ \frac{du(t)}{u(t)} &= \mu(t)dt + \sigma(t)dW_t, \end{aligned} \quad (2.67)$$

com média e variância dadas, respectivamente, por $\langle u(t) \rangle = u_0 \exp \mu(t - t_0)$ e $Var[u(t)] = \frac{\sigma^2}{2\mu} (\exp\{2\mu(t - t_0)\} - 1)$. Este processo é utilizado para modelar preços de ações, taxas de juros e outras variáveis financeiras [57].

2.3.8 Processo Lévy

Seja $u(t, \omega)$ um processo estocástico (ver Seção (2.2.1)). Dizemos que $u(t)$ é um processo de Lévy se [58]:

1. $P\{u(0) = 0\} = 1$ ou $u(0) = 0$, quase certamente;
2. $u(t)$ tem incrementos independentes;
3. $u(t)$ é temporalmente homogêneo, ou seja, $u(t + s) - u(t) \stackrel{d}{=} u(s)$, para todo $t > 0$;
4. $u(t)$ é um processo em tempo contínuo, ou seja, $\lim_{t \rightarrow t_0} P\{|u(t) - u(t_0)| > \epsilon\} = 0$;
5. Para quase todo ω , $u(t, \omega)$ é uma trajetória contínua à direita com limite à esquerda.

O processo de Lévy é um modelo Markoviano (Seção (2.3.4)) com saltos (Seção (2.3.6)). Para maiores detalhes, ver referência [59].

2.3.9 Processo de Ornstein-Uhlenbeck

Na Seção (2.3.7) revisamos o movimento Browniano no espaço velocidade com base na equação de Langevin, que pode ser um bom modelo para descrever o movimento de partículas colisão a colisão em meio fluido. Após a colisão, a partícula troca de posição e

descreve movimentos com velocidade. Este processo estocástico é conhecido como processo de Ornstein-Uhlenbeck e foi proposto por Leonard Ornstein e George Eugene Uhlenbeck (1930) como uma alternativa para o movimento Browniano. O modelo matemático tem aplicações em outras áreas, por exemplo, em finanças [60, 61]. É o único processo estocástico com três propriedades: estacionário (ver Seção (2.3.1)), Gaussiano (ver Seção (2.3.2)) e Markoviano (ver Seção (2.3.4)) [1, 2, 6, 7].

Observação 2.6. Uma propriedade que pode ser acrescentada no processo estocástico Ornstein-Uhlenbeck é a continuidade em probabilidade. De fato, um processo estocástico $u(t)$ é **contínuo em probabilidade** se, para todo $v \in \mathbb{R}^+$ e $\epsilon > 0$, $Pr(|u - v| \geq \epsilon) \rightarrow 0$, quando $u \rightarrow v$. Isto é, se $Cov(u_s, u_t)$ é contínua sobre $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Note que, isto é uma afirmação sobre a distribuição [2, 3].

A importância deste modelo na teoria dos processos estocásticos, é dada por vários autores que propuseram diversas generalizações. Na literatura da física, o destaque é com a equação diferencial estocástica com diferentes tipos de ruído estocástico. Na literatura matemática, o estudo é com os modelos matemáticos que descrevem sistemas físicos; e o foco fica em encontrar generalizações baseadas em soluções de equações integrais estocásticas. No Capítulo 3, apresentamos nosso modelo, em que fazemos a incursão ao ruído. Apresentamos o modelo de Langevin com um argumento que essencialmente evita definir o ruído gaussiano e recupera os postulados do modelo de *OU* de uma maneira plausível.

A evolução temporal do ruído é a tendência dos valores reverterem para um valor médio. Desta forma, grandes flutuações em relação a este valor médio, tendem a decair. O valor do ruído é um parâmetro do processo estocástico e outro parâmetro é a taxa no tempo, e denotado por ρ , em que estas flutuações tendem a relaxar. Este parâmetro depende do mercado financeiro e do seu fluxo de informação, do ativo usado, e entre outras características [62]. Este modelo estocástico é conhecido como *modelos de reversão à média*. A seguir, apresentamos duas versões simples (particulares) do modelo de Ornstein-Uhlenbeck, utilizado em estudos de processos estocásticos. Um dos objetivos desta tese, é propor uma generalização para o processo de Ornstein-Uhlenbeck, em que termo de *drift* é uma função arbitrária e o termo de *difusão* é uma variável aleatória arbitrária, então torna-se necessário e coerente esta apresentação.

Processo de Ornstein-Uhlenbeck Aritmético

Matematicamente, o processo de *OU* $\{u(t); t \geq 0\}$ retrata o processo de reversão para a média. A evolução temporal do sistema é dado pela seguinte equação diferencial

estocástica¹⁶ [33, 63]:

$$du(t) = (\mu - \rho u(t))dt + \sigma dW(t), \quad (2.68)$$

com condições iniciais $u(t=0) = u_0$ e $W(t=0) = 0$. Todos os parâmetros μ , σ e ρ são não-negativos, $\{dW(t)\}$ é um incremento de Wiener, com variância unitária, $\rho > 0$ representa a velocidade com que o processo $u(t)$ tende à retornar a média de longo prazo μ , e $\sigma > 0$ é a amplitude da difusão de u_t [61]. Um caso especial é quando $\mu = 0$ é um processo para qual média tende a zero. A Fig. (2.1) mostra um exemplo do processo descrito na Eq. (2.68). A dinâmica descrita pela Eq. (2.68) significa que o preço do ativo (ação) flutua mas é atraído para a média de longo prazo. A Eq. (2.68) pode ser reescrita como

$$du(t) = k(\mu - u(t))dt + \sigma dW(t), \quad (2.69)$$

e neste caso, k representa a velocidade de reversão à média, e o preço da ação flutua, mas retorna à média de longo prazo com velocidade k [64].

Observação 2.7. Na Eq. (2.68), o termo de *drift* pode ser interpretado da seguinte forma: se o valor atual do processo $u(t)$ é menor que a média de longo prazo μ , o *drift* será positivo, e se o valor atual do processo u é maior que a média (longo prazo), o *drift* será negativo. Assim, quando a difusão é alta, a reversão à média faz com que o seu *drift* tenha tendência negativa e quando é baixo, a reversão à média faz com que o seu *drift* tenda a ser positivo. Em outras palavras, a média funciona como um nível de equilíbrio para o processo [47].

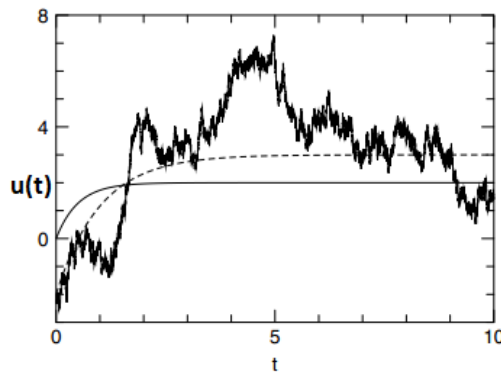


Figura 2.1: Uma trajetória do processo de Ornstein-Uhlenbeck com condições iniciais $u_0 = -2$, $\rho = 1$, $\mu = 3$, $\sigma = 2$. A média (linha pontilhada) e a variância (linha sólida) [61].

A solução da Eq. (2.68) é:

$$u(t) = \frac{\mu}{\rho} [1 - \exp\{-\rho t\}] + u_0 \exp\{-\rho t\} + \sigma \int_0^t \exp\{-\rho(t-s)\} dW(s). \quad (2.70)$$

¹⁶Na equação diferencial estocástica a incógnita não é uma função, mas sim um processo estocástico. A diferença entre uma função e um processo estocástico: na função, a cada instante t , associa-se um determinado valor, e, em um processo estocástico, a cada instante t , associa-se uma distribuição de valores [35].

O primeiro momento (média), o segundo momento e a covariância são [61]

$$\begin{aligned}\langle u(t) \rangle &= \frac{\mu}{\rho} [1 - \exp\{-\rho t\}] + u_0 \exp\{-\rho t\}, \\ \langle u(t)^2 \rangle &= \langle u(t) \rangle^2 + \frac{\sigma^2}{2\rho} (1 - \exp\{-2\rho t\}), \\ \langle \langle u(t)u(t') \rangle \rangle &= \frac{\sigma^2}{2\rho} e^{-\rho|t-t'|},\end{aligned}\tag{2.71}$$

para o caso de processo não-condicional (estritamente estacionário) A Eq. (2.70) é a solução estacionária explícita do processo de Ornstein-Uhlenbeck Aritmético dado na Eq. (2.68) [65]. O processo de reversão à média é utilizado para modelar muitas variáveis financeiras que tendem a retornar a valores médios de longo prazo.

Processo de Ornstein-Uhlenbeck Geométrico

Um outra terminologia do processo de reversão à média, é o processo de *Ornstein-Uhlenbeck Geométrico*. Este modelo é descrito pela distribuição Gama estacionária e pela equação diferencial estocástica [66]

$$du(t) = (\mu - \rho u(t))u(t) dt + \sigma u(t) dW(t),\tag{2.72}$$

$$\frac{du(t)}{u(t)} = (\mu - \rho u(t)) + \sigma f(t),\tag{2.73}$$

em que $dW(t) \in N(0; 2dt)$, $f(t) \equiv \frac{dW(t)}{dt}$ é um ruído branco com média $\langle f(t) \rangle = 0$ e variância $\langle \langle f(t)f(t') \rangle \rangle = 2\delta(t - t')$. A pdf do modelo descrito na Eq. (2.72) é dada pela distribuição Gama:

$$P(u(t)|\beta, \alpha) = \frac{\alpha^{1+\beta}}{\Gamma(1+\beta)} e^{-\alpha u(t)} u(t)^\beta,\tag{2.74}$$

sendo que a função $\Gamma(1+\beta) =: \int_0^\infty e^{-u(t)} u(t)^\beta du$, $u(t) > 0$, $\frac{\alpha^{1+\beta}}{\Gamma(1+\beta)}$ é a constante de normalização, $\alpha = \rho/\sigma^2$ e $\beta = \mu\alpha - 2$, ou seja,

$$P^*(u(t)) = \frac{\alpha^{\mu\alpha-1}}{\Gamma(\mu\alpha-1)} e^{-\alpha u(t)} u(t)^{\mu\alpha-2}.\tag{2.75}$$

Note que, na Eq. (2.74) e Eq. (2.75), o termo $\alpha\mu$ representa a razão entre o valor médio μ e a flutuação efetiva σ^2/ρ durante a relaxação. Assim, $\alpha\mu$ e α determinam o comportamento da distribuição estacionária. Logo, a média e a variância da variável $u(t)$, respectivamente, são:

$$\langle u(t) \rangle = (1+\beta)\alpha^{-(1+\beta)} \quad \langle u(t)^2 \rangle = (1+\beta)\alpha^{-2(1+\beta)}.\tag{2.76}$$

Capítulo 3

Generalização do Processo *OU*: Processo *THOU*

3.1 Introdução

Paul Langevin em seu trabalho propôs um modelo de equação diferencial estocástica (*equação de Langevin*) para o movimento Browniano:

$$m \frac{du}{dt} = -\gamma um + \xi(t), \quad (3.1)$$

em que u denota a velocidade da partícula, $-\gamma um$ é a força que varia lentamente, representando uma fricção dinâmica sobre o movimento da partícula, em que γ é o coeficiente de viscosidade do meio, e $\xi(t)$ é a força aleatória que modela as flutuações na velocidade média das partículas do fluido [67].

Neste trabalho, o objetivo de P. Langevin era calcular a média quadrática para a posição da partícula Browniana, que possuía limitações, pois não mostrava como calcular os momentos estatísticos de alta ordem da posição e da velocidade da partícula Browniana. No sentido de melhorar o modelo de Einstein, os físicos Ornstein e Uhlenbeck reformularam o problema de Langevin, em que definiram a força aleatória como uma variável Gaussiana com correlações do tipo delta¹. Entretanto, se a distribuição para a força aleatória fosse definida, seria possível calcular explicitamente a distribuição para a velocidade e a posição da partícula Browniana [2, 70].

O processo de *OU* têm sido estudado não somente na Física, pois podemos en-

¹ $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \Gamma\delta(t-t')$ é a correlação, ou seja, $\xi(t)$ são processos Gaussianos com ruído branco cuja média são nulas [68, 69].

contrar sua aplicação para modelar os preços de ativos dos mercados financeiros² [4]. Este é o único processo estocástico que possui três propriedades: Gaussiana, Markoviano e estacionário [2, 3, 5]. Esse resultado é conhecido como Teorema de Doob [1–3, 6, 7].

Joseph L. Doob foi o primeiro que tratou e caracterizou o processo de OU com rigor e introduziu as equações diferenciais estocásticas na forma que conhecemos [1]. Essa forma corresponde ao processo de OU que foi proposto pela primeira vez para descrever a velocidade da partícula Browniana em movimento num ambiente de atrito, no âmbito das equações de Langevin [5, 8, 9]. Existe mais de um teorema de Doob na teoria de processos estocásticos, mas somente um teorema nos interessa (ver Teo.(3.1)). Mesmo que Doob tenha melhorado os problemas matemáticos do modelo de Langevin, ainda existem várias dificuldades no modelo. Na literatura, a equação de Langevin ainda apresenta várias questões em aberto sobre a validade da mesma em diferentes regimes. No argumento de Einstein e Langevin, a partícula Browniana está sujeita à ação de forças hidrodinâmicas [10, 11].

A importância do modelo de OU na teoria dos processos estocásticos, é dada por vários autores que propuseram diversas generalizações [5, 8]. Na Física, a equação diferencial estocástica é proposta com diferentes tipos de ruído [5, 47]. Na Matemática, é encontrar generalizações baseadas nas soluções de equações integrais estocásticas [9, 19].

Neste capítulo, fazemos uma incursão ao movimento Browniano. Apresentamos o modelo de Langevin em que evitamos definir o ruído gaussiano como no modelo de OU original. A nossa sugestão de incursão no movimento Browniano não consta entre os modelos do processo de OU descritos no Capítulo 2, embora encontramos resultados semelhantes para os momentos estatísticos.

A literatura de séries temporais mostra a conveniência prática do uso de séries estacionárias, mas no mundo real, poucas séries encontradas podem ser classificadas por estacionárias. A propriedade estacionária é uma condição restritiva imposta à série temporal. Com relação as séries econômicas, somente um pequeno número satisfaz essa condição. Uma simples avaliação de algumas das variáveis aleatórias mostra que suas variações podem apresentar um comportamento não-estacionário na sua evolução temporal. A propriedade

²O modelo de OU exponencial descreve os preços para uma opção de compra europeia. O modelo de difusão proposto é um processo de mercado que supõe o movimento Browniano geométrico para descrever a dinâmica dos preços e o processo de OU para descrever a volatilidade. Assim, o preço de opção é obtido aproximadamente, quando são válidas as condições: (i) as flutuações da volatilidade são maiores que o nível normal; (ii) a volatilidade apresenta uma força mais lenta para o seu nível normal, e, finalmente, (iii) o preço do mercado de risco é uma função linear para a volatilidade. O preço estudado é para opções de compra europeia e a volatilidade referente à série do índice Dow Jones, em observações com memória em intervalos longos [68].

do tipo não-estacionária apresentado nas séries temporais pode ser caracterizado como **homogêneo no tempo**. Podemos observar que as séries se movimentem livremente sem se fixarem em torno de um valor médio, e seu comportamento em diferentes períodos de tempo é essencialmente similar [12].

No modelo sugerido neste capítulo, o processo é linear e homogêneo no tempo, que substituem as condições de Gaussianidade e de estacionariedade no processo de *OU* original. A condição de gaussianidade é recuperada quando fazemos a variável aleatória $B(\tau)$ na Eq. (3.3) abaixo ser gaussiana, pois consideramos o ruído ser uma variável aleatória arbitrária. E mais, o termo de *drift* do modelo tem uma forma específica, (ver Teo. (3.2)), para que sejam satisfeitas estas condições sugeridas acima.

Observação 3.1. O processo de Markov homogêneo no tempo têm densidades de probabilidades de transição estacionárias, e o processo de Markov estacionário têm funções distribuições finitas estacionárias [71].

3.2 Generalizando o processo de Ornstein-Uhlenbeck (*OU*)

Nesta seção, formulamos um resultado de caráter puramente matemático. Generalizamos o processo de *OU* usando o teorema de Doob, que fornece a condição para um processo estacionário Gaussiano ser Markoviano³. A seguir, citamos o teorema original⁴.

Teorema 3.1 (Doob). Todo processo estocástico estacionário cuja a probabilidade a 2-pontos é Gaussiana é Markoviano se e somente se possui uma função de covariância exponencial, dada por

$$\langle\langle u(t)u(t') \rangle\rangle = \langle u^2(t) \rangle e^{-\gamma\tau}, \quad (3.2)$$

em que $\langle \cdot \rangle$ denota o segundo momento central (Eq. (2.7), em que $n = 2$).

Para generalizar o processo de *OU*, substituímos duas hipóteses: *Gaussianidade* por *linearidade*⁵ e *estacionariedade* por *homogêneo no tempo*⁶. Chamaremos este processo por processo de Ornstein-Uhlenbeck Homogêneo no Tempo, que denotaremos por *THOU*.

³Uma condição natural do processo markoviano é que $G_n(u_n; t_n | u_{n-1}; t'_{n-1}) = \delta(u_n - u_{n-1})$, em que assumimos que $G_n(u(t)|u(t'))$ é a probabilidade de transição de um estado u_{n-1} para um outro estado u_n em um intervalo de tempo τ pequeno, tal que $\tau = t_n - t'_{n-1}$ [8, 22].

⁴Para uma demonstração, ver Apêndice A ou referências [1, 21, 42, 72, 73].

⁵Um processo estocástico é *linear* se puder ser escrito na forma dada na Eq. (3.3), ou seja, processos com incrementos independentes da variável de interesse $u(t)$ [28].

⁶Na análise econômica a ergodicidade corresponderá à homogeneidade temporal dos diferentes ensembles de eventos e das condições nas quais eles ocorrem [74].

Esclarecemos a forma de determinar a covariância e os n -ésimos cumulantes deste tipo de processo.

Neste estudo nos limitamos a processos autônomos definidos pelo fato da probabilidade de transição $G_{tt'}(u(t)|u(t'))$ depender da diferença entre os tempos $\tau = t - t'$. Neste caso, é possível resolver a equação de Chapman-Kolmogorov explicitamente, como será mostrado. Na literatura, a maioria das generalizações têm em comum o fato da dependência condicional de $u(t')$ em $u(t)$ ser linear onde consideramos que a variável aleatória obedece a seguinte estrutura linear:

$$u(t + \tau)|u(t) = A(\tau)u(t) + B(\tau), \quad (3.3)$$

em que $A(\tau)$ é uma função arbitrária, $B(\tau)$ é uma variável aleatória arbitrária e $\tau \geq 0$ é o deslocamento de tempos. Lembrando que processos Gaussiano e OU são lineares, mas a volta não é necessariamente verdadeira. Nesta nossa formulação o ruído é por hipótese uma variável aleatória arbitrária, não necessariamente gaussiana. A homogeneidade no tempo implica que $u(t + \tau)$ e $u(t)$ têm, como processos em $\tau \geq 0$, as mesmas densidades de probabilidades iniciais e de transição. Trabalhamos com valores dos momentos estatísticos condicionais, então somente nos interessam as probabilidades de transição. Formalizamos as nossas sugestões para a generalização, no seguinte teorema:

Teorema 3.2. Seja $u(t)$ um processo estocástico. $u(t)$ é linear e homogêneo no tempo se $u(t + \tau)|u(t)$ em $u(t)$ é dada na Eq.(3.3). O processo $u(t)$ é Markoviano se, e somente se, $A(\tau) = e^{-\gamma\tau}$, e a função característica de $u(t + \tau)|u(t)$, é um caso limite $n \rightarrow \infty$ de uma sequência

$$\psi_\tau^{(n)}(z|u(t)) = e^{\lambda_n \int_0^\tau dt [g_n(ze^{-\gamma t}) - 1] + izu(t)e^{-\gamma\tau}}, \quad (3.4)$$

em que λ_n são constantes positivas e $g_n(z)$ são funções características.

Observação 3.2. Na Eq. (3.3), $u(t + \tau)|u(t)$ é Markoviano e o ruído $B(\tau)$ depende somente de τ e é estacionário em t e vai mudando quando τ vai evoluindo em $t + \tau$, ou seja, fixando τ teremos um processo estacionário em t , e a probabilidade marginal em t será a mesma. O *drift* depende de τ . Fixando $u(t)$, calculamos a variável aleatória $u(t + \tau)$ no tempo $t + \tau$, como dado na Eq. (3.3), em que $\tau = t - t'$ é uma diferença de tempos e depende deste intervalo. No processo OU original, o ruído é gaussiano e no modelo $THOU$ proposto (ver Eq. (3.3)) o ruído é uma variável aleatória arbitrária.

Os modelos markovianos são sistemas de transições de estados, e as transições entre estados são probabilísticas e dependem apenas do estado presente.

Para a demonstração do Teo. (3.2), por hipótese, temos que $u(t)$ é um processo Markoviano homogêneo no tempo. Vamos introduzir a probabilidade $P(B(\tau)) = q_\tau(B)dB$.

Seja a probabilidade de transição da variável aleatória descrita na Eq. (3.3):

$$P(u(t + \tau)|u(t)) = G_\tau(u(t)|u(t')) du(t), \quad (3.5)$$

em que $G_\tau(u(t)|u(t'))$ é a probabilidade de $u(t)$ condicionada ao valor conhecido de $u(t')$ entre $u(t)$ e $u(t) + du(t)$. Definimos a probabilidade

$$G_\tau(u(t)|u(t')) = q_\tau(B)dB, \quad (3.6)$$

que segue diretamente da Eq. (3.3) como

$$G_\tau(u(t)|u(t')) du = q_\tau(u(t) - A(\tau)u(t')) du(t). \quad (3.7)$$

Do ponto de vista matemático, esta é a nossa suposição básica, em que a Eq.(3.3) simplesmente fornece uma interpretação conveniente. Considerando processos Markovianos invariantes por translação tanto em u quanto em t , a propriedade Markoviana da probabilidade de transição $G_\tau(u(t)|u(t'))$ implica que a probabilidade condicional da Eq. (3.3) deve ser uma equação de Chapman-Kolmogorov (CK) (ver Seção (2.3.4)), isto é,

$$G_{\tau+\tau'}(u(t)|u(t')) = \int dv G_\tau(u(t)|v(t))G_{\tau'}(v(t)|u(t')), \quad (3.8)$$

em que $G_{\tau+\tau'}(u(t)|u(t'))$ representa a probabilidade de transição de $u(t')$ para $u(t)$, passado um tempo $\tau = t - t'$. Nossa meta é encontrar todas as soluções probabilísticas da Eq. (3.8), sujeitas as condições de linearidade da Eq, (3.3), em que na maioria dos casos, representa um processo de saltos em que o sistema permanece parado no estado inicial $u(t')$ durante um tempo aleatório τ , distribuído exponencialmente e ao final, realiza uma transição para um novo estado $u(t)$, de acordo com uma probabilidade condicional de transição arbitrária, denominada por $q(u(t)|u(t'))$. A Eq. (3.8) torna-se uma convolução de distribuição de probabilidade (ver Teo. (2.2)) que descreve um processo de soma de duas variáveis aleatórias, isto é,

$$G_{\tau+\tau'}(u(t)|u(t')) = \int du(t') G_{\tau'}(u(t) - u(t'))G_\tau(u(t')), \quad (3.9)$$

que pode ser resolvida no espaço de Fourier⁷. Definimos a função característica (ver Seção (2.2.6)) da probabilidade de transição, $G_\tau(u(t))$, como $\phi_\tau(z) = \int du(t) G_\tau(u(t))e^{izu(t)}$. Pelo Teo. (2.2), a convolução da Eq. (3.9), torna-se um produto de funções características:

$$\phi_{\tau+\tau'}(z) = \phi_\tau(z)\phi_{\tau'}(z), \quad (3.10)$$

cuja solução geral é

$$\phi_\tau(z) = e^{\tau\gamma(z)}. \quad (3.11)$$

⁷O espaço de Fourier é o espaço de funções complexas, em que a convolução equivale a uma multiplicação de duas funções distribuições (ou de suas correspondentes funções características (ver teorema da Convolução, Teo. (2.2))) [32]

Devemos garantir que a Eq. (3.11) seja uma função característica válida, pois essa expressão não garante que a solução da equação de CK representa uma distribuição de probabilidade que nos interessam. Dadas as dificuldades conhecidas na manipulação desta equação, procedemos por um método indireto. Definimos a função característica da probabilidade de transição arbitrária $B(\tau)$, denominada por $q_\tau(B)$, como

$$\phi_\tau(z) = \langle e^{izB} \rangle. \quad (3.12)$$

Para determinarmos um processo de OU, é necessário um fator de integração dado por: $e^{izu(t)}$, que multiplicado em ambos os lados da Eq.(3.8) e integrando em $u(t)$, passamos a ter o seguinte resultado

$$\int G_{\tau+\tau'}(u(t)|u(t'))e^{izu(t)}du(t) = \int dv \int G_\tau(u(t)|v(t))G_{\tau'}(v(t)|u(t'))e^{izu(t)}du(t). \quad (3.13)$$

Usando a Eq.(3.7) na Eq.(3.13), obtemos

$$\begin{aligned} \int q_{\tau+\tau'}(B) e^{izB} dB e^{iz[A(\tau+\tau')u(t')]} = \\ \int dv q_{\tau'}(v - A(\tau')u(t')) e^{izA(\tau')} \int du(t) e^{izB} q_\tau(B) dB, \end{aligned} \quad (3.14)$$

em que usamos a Eq.(3.3) para obter $\frac{du}{dB} = 1$, ou seja, $du = dB$. Da definição de função característica (Eq. (2.18)),

$$\int q_{\tau+\tau'}(B) e^{izB} dB = \langle e^{izB} \rangle = \phi_{\tau+\tau'}(z). \quad (3.15)$$

Da Eq. (3.15), a Eq. (3.14) torna-se

$$\phi_{\tau+\tau'}(z) e^{iz[A(\tau+\tau')u(t')]} = \phi_\tau(z) \int dv q_{\tau'}(v - A(\tau')u(t')) e^{izA(\tau')}, \quad (3.16)$$

em que definimos $\phi_\tau(z)$ como a função característica de $q_\tau(B)$. Na Eq. (3.16), pela propriedade de deslocamento da transformada de Fourier⁸, a integral em dv pode ser identificada essencialmente com a definição da função característica (ver Eq. (2.18)) avaliada em $A(\tau)z$ ao invés de z . Deste modo, vemos que a Eq. (3.16) resulta em

$$\phi_{\tau+\tau'}(z) e^{iz[A(\tau+\tau')u(t')]} = \phi_\tau(z) \phi_{\tau'}(A(\tau)z) e^{izA(\tau)A(\tau')u(t')}. \quad (3.17)$$

Na Eq. (3.17), separando o fator que depende somente de $u(t')$ nos expoentes, obtemos

$$A(\tau + \tau') = A(\tau)A(\tau'), \quad (3.18)$$

⁸Seja $\mathbb{F}[f(t)]$ a transformada de Fourier de $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega t) f(t) dt$, tal que a integral exista. Neste caso, $\mathbb{F}[f(t)] = g(\omega)$. Então, $\mathbb{F}^{-1}[g(t)] = f(t)$ transformada de Fourier inversa de $g(t)$. A propriedade de deslocamento da origem das transformadas de Fourier: $\mathbb{F}[f(t - t_0)] = \exp(-i\omega t_0)g(\omega)$. Semelhantemente, $\mathbb{F}^{-1}[g(\omega - \omega_0)] = \exp(i\omega_0 t)f(t)$ [38].

ou seja, um produto de funções características, com solução geral⁹

$$A(\tau) = e^{-\gamma\tau}, \quad (3.19)$$

para qualquer constante arbitrária γ .

Até agora, obtemos a condição necessária para a probabilidade de transição dada na Eq.(3.8) seja Markoviana. O próximo passo é resolver a equação funcional

$$\phi_{\tau+\tau'}(z) = \phi_{\tau}(z)\phi_{\tau'}(zA(\tau)), \quad (3.20)$$

que pela Eq. (3.19), a Eq.(3.20) torna-se

$$\phi_{\tau+\tau'}(z) = \phi_{\tau}(z)\phi_{\tau'}(ze^{-\gamma\tau}). \quad (3.21)$$

Observamos na Eq.(3.21) um caso especial se $\gamma = 0$, obtemos a convolução (Seção (2.2.6)) de funções características, que pode ser resolvido pelo mesmo método aplicado na Eq. (3.18), cuja solução geral é

$$\phi_{\tau}(z) = e^{\tau h(z)}, \quad (3.22)$$

que define a forma de função característica infinitamente divisível (ver Seção (2.2.8)) de processos infinitamente divisíveis, que tem sido estudado na literatura [32]. No entanto, a Eq.(3.22) não é a solução final, é apenas a solução da equação CK, que representa a distribuição de probabilidades que nos interessa. É necessário garantir que a Eq.(3.22) seja de fato uma função característica válida. Esta equação é bem definida na literatura de probabilidades e representa a função característica de uma variável infinitamente divisível [32]. De Finetti demonstrou no Teo. (2.7) uma condição necessária e suficiente para a Eq.(3.22) seja uma função característica válida — o expoente $\tau h(z)$ deve ser uma sequência de termos como $\tau h_n(z) = \tau \lambda_n (g_n(z) - 1)$, em que λ_n são constantes positivos e $g_n(z)$ são funções características [75]. Assim, reescrevemos a Eq. (3.22) como

$$\phi(z) = e^{\tau \lambda_n (g_n(z) - 1)} \quad (3.23)$$

Observação 3.3. Na Eq. (3.22), λ_n são constantes com unidade de frequência que corrigem a dimensionalidade do expoente.

Agora, vamos analisar o caso se $\gamma \neq 0$ da Eq. (3.21). Definimos $\phi_{\tau}(z) = e^{W_{\tau}(z)}$, cuja *segunda característica* (ver Eq. (2.25)) de $\phi_{\tau}(z)$ é $W_{\tau}(z) = \ln \phi_{\tau}(z)$. A Eq. (3.21) torna-se equivalente a

$$W_{\tau+\tau'}(z) = W_{\tau}(z) + W_{\tau'}(ze^{-\gamma\tau}), \quad (3.24)$$

⁹Solução da Eq. (3.18): $\ln A(\tau + \tau') = \ln A(\tau) + \ln A(\tau') \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \tau} \ln[A(\tau + \tau')] |_{\tau=0} = \frac{\partial}{\partial \tau} \ln[A(\tau)] |_{\tau=0} + \frac{\partial}{\partial \tau} \ln[A(\tau')] |_{\tau=0} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \tau} \ln[A(\tau + \tau')] |_{\tau=0} = \frac{1}{A(\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} A(\tau) |_{\tau=0} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \tau} \ln[A(\tau')] = \frac{1}{A(0)} \Rightarrow \int d \ln[A(\tau')] = \int \frac{d\tau}{\gamma} \Rightarrow A(\tau) = e^{-\gamma\tau}$.

em que $W_{\tau+\tau'}(z)$, $W_\tau(z)$ e $W_{\tau'}(z.e^{-\gamma\tau})$ são *segunda característica* de $\phi_{\tau+\tau'}$, ϕ_τ e $\phi_{\tau'}$, respectivamente. Se diferenciarmos a Eq. (3.24) por $\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\tau'}$ e avaliá-la em $\tau = 0$, obtemos a equação diferencial parcial (EDP) dada por

$$\ddot{W}_{\tau'}(z) = -\gamma z \frac{\partial}{\partial z} \dot{W}_{\tau'}(z), \quad (3.25)$$

em que o ponto denota a derivada temporal.

Observação 3.4. Para resolver a Eq. (3.25) aplicamos o método das características para obter as curvas características¹⁰ ao longo das quais a EDP se reduz a uma EDO¹¹, que integramos ao longo das curvas características [76–78].

Pelo procedimento da Obs. (3.4) e fazendo $\dot{W}_{\tau'} = W_\tau(z)$, a Eq. (3.25) torna-se um caso particular da EDP linear de primeira ordem homogênea, isto é,

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \dot{W}_\tau(z) + \gamma z \frac{\partial}{\partial z} W_\tau(z) = 0, \quad (3.26)$$

chamada de *equação do transporte* [76–78], com a condição de contorno¹² $W_\tau(z)|_{\tau=0} = 0$. Observe que (z, τ) é uma curva arbitrária do plano $z\tau$, a derivada de uma função qualquer W ao longo desta curva é dada através da regra da cadeia: $\frac{d}{d\tau} W(z, \tau) = W_\tau(z, \tau) + z' W_z(z, \tau)$. Se W satisfaz a equação do transporte, então $\frac{dW}{d\tau} = 0$ ao longo das curvas (características da equação do transporte) em que $\frac{dz}{d\tau}(\tau) = c(z, \tau)$, isto é,

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \dot{W}_\tau(z) + c(z, \tau) \frac{\partial}{\partial z} W_\tau(z) = 0. \quad (3.27)$$

Assim, da Eq. (3.26) e Eq. (3.27), $c(z, \tau) = \gamma z$ é uma função linear em z , e as curvas características estão definidas ao longo de todo domínio do problema. Obtemos a solução geral da Eq. (3.26), usando o método de separação de variáveis aplicado na EDO: $\frac{dz(\tau)}{d\tau} = \gamma z$, resultando em $z(\tau) = c_0 e^{\gamma\tau}$, em que c_0 é uma constante. Portanto, $W_\tau(z)$ é constante ao longo das curvas $z(\tau) = c_0 e^{\gamma\tau}$.

Para determinar o valor de c_0 , note que para $\tau = 0$, temos $z(0) = c_0$. Então dado um ponto (z_0, τ_0) , a curva característica que passa por este ponto é dada por $z_0 = c_0 e^{\gamma\tau_0}$, o que implica em $c_0 = z_0 e^{-\gamma\tau_0}$. Logo, $z(\tau) = z_0 e^{\gamma(\tau-\tau_0)}$. Como W_τ é constante ao longo das curvas características, segue que

$$W_\tau(z_0, \tau_0) = W_\tau(c_0, 0) = W_\tau(z_0 e^{-\gamma\tau_0}, 0) = h(z e^{-\gamma\tau}). \quad (3.28)$$

¹⁰As soluções para a EDP linear de primeira ordem com coeficientes constantes, homogênea, são constantes ao longo de curvas, chamadas **curvas características** que são linhas de transporte de informação [76].

¹¹EDO é a abreviação de Equação Diferencial Ordinária.

¹²A condição de contorno é necessária para garantir $\lim_{\tau \rightarrow 0} G_\tau(u|u') = \delta(u - u')$ na equação de Chapman-Kolmogorov.

Assim, a solução para o problema de valor inicial $W_\tau(z)|_{\tau=0} = 0$ é

$$W_\tau(z) = \int_0^\tau dt h(ze^{-\gamma t}), \quad (3.29)$$

em que $h(\cdot)$ é qualquer função arbitrária. Quando $\gamma = 0$, a Eq. (3.29) resulta em $W_\tau(z) = \tau h(z)$, que recupera a solução encontrada anteriormente na Eq. (3.22). Assim, o teorema de De Finetti estabelece a condição em $h(z)$ para que $\phi_\tau(z) = e^{\tau h(z)}$ seja uma função característica válida.

Na próxima seção, analisaremos quais as restrições que poderemos colocar em $h(\cdot)$ da Eq. (3.29), que garante

$$\phi_\tau(z) = e^{W_\tau(z)} = e^{\int_0^\tau dt h(ze^{-\gamma t})}. \quad (3.30)$$

seja uma função característica válida.

3.2.1 Condições de $W_\tau(z)$

Primeiro, mostraremos que $\phi_\tau(z)$ na Eq. (3.30) é infinitamente divisível (ver Seção (2.2.8)). Uma caracterização importante de $\phi_\tau(z)$ ser infinitamente divisível, é que pela equação CK, o processo estocástico u_τ corresponde à soma de um número arbitrário de variáveis independentes, $u_\tau|n$. Assim, reescrevemos a Eq. (3.21) como

$$\phi_{\tau+\tau'}(z) = \phi_{\tau/n}(z)\phi_{\tau'/n}(ze^{-\gamma\tau/n}). \quad (3.31)$$

Pelo Teo (2.3) e fazendo $n = 2$, a Eq. (3.31) pode ser interpretada como a soma de variáveis independentes:

$$\chi_{\tau+\tau'} = \chi_{\tau/2} + e^{-\gamma\tau/2}\chi_{\tau'/2}, \quad (3.32)$$

em que $\chi_{\tau+\tau'}$, $\chi_{\tau/2}$ e $\chi_{\tau'/2}$ são variáveis aleatórias descritas pela mesma função característica $\phi_{\tau+\tau'}(\cdot)$. De fato, pela definição (2.18) e usando a Eq. (3.32), obtemos

$$\phi_{\chi_{\tau+\tau'}}(z) = \left\langle e^{iz\chi_{\tau+\tau'}} \right\rangle = \left\langle e^{iz[\chi_{\tau/2} + e^{-\gamma\tau/2}\chi_{\tau'/2}]} \right\rangle = \phi_{\chi_{\tau/2}}(z) \phi_{\chi_{\tau'/2}}(ze^{-\gamma\tau/2}).$$

O processo escrevendo χ_τ como soma de variáveis aleatórias pode ser realizado para um número n finito de funções características (Teo. (??)). Esta propriedade define uma função característica infinitamente divisível [32].

De acordo com o Teo. (2.7), a condição necessária e suficiente para uma função característica seja infinitamente divisível é que ela pode ser escrita com uma sequência convergente de sequências de funções características na forma

$$\zeta_n(z) = e^{a_n(g_n(z)-1)}, \quad (3.33)$$

em que os coeficientes $a_n > 0$ e $g_n(z)$ são funções características [32].

Pelo teorema de De Finetti, Teo. (2.7), a condição de $e^{W_\tau(z)}$ da Eq. (3.30) ser uma função característica válida, é que $h(z)$ seja da forma

$$h(z) = \lambda(g(z) - 1), \quad (3.34)$$

para $\lambda > 0$ e $g(z)$ uma função característica. A prova é simples. Definimos $a_i = \frac{\tau}{n}\lambda$, $b_i = e^{-\frac{1}{n}\gamma\tau i}$. A função

$$\phi_\tau^{(n)}(z) = e^{\sum_{i=1}^n a_i(g_i(b_i z) - 1)} \quad (3.35)$$

é o produto finito de funções características (infinitamente divisíveis) para n finito. No limite $n \rightarrow \infty$, o expoente da Eq. (3.35) torna-se a soma de Riemann, que corresponde a integral da Eq. (3.30). Pelo Teorema de Continuidade, Teo. (2.8), uma sequência convergente de funções características é também uma função característica. Então, a Eq. (3.34) é uma condição suficiente para estabelecer a validade da Eq. (3.30). Portanto, $\phi_\tau(z) = e^{\tau h(z)}$ é uma função característica válida.

Agora vamos mostrar a condição necessária. Pelo Teorema de De Finetti, Teo. (2.7), uma função característica infinitamente divisível é o limite de sequências convergentes de funções características da forma

$$\phi_n(z) = e^{p_n(g_n(z) - 1)}, \quad (3.36)$$

em que p_n são constantes positivas e $g_n(z)$ são funções características. Podemos usar este resultado e o Teorema de Convergência, Teo. (2.8), para obter uma condição necessária de $h(z)$ da Eq. (3.29), represente uma função característica válida [37]. Primeiro, definimos

$$f(z) = h(z) + izu(t'), \quad (3.37)$$

e assumimos que $f(z)$ é infinitamente divisível, isto é, $f(z) = [f_n(z)]^n$ ou $f_n(z) = [f(z)]^{1/n}$, em que $f_n(z)$ é uma sequência de funções características infinitamente divisível (ver Teo. (2.2)). Assim, a Eq. (3.37) é um produto de duas funções características, que pode ser escrita simplesmente como

$$\psi_\tau(z|u(t')) = e^{\int_0^\tau dt f(ze^{-\gamma t})}. \quad (3.38)$$

Substituindo Eq. (3.37) na Eq. (3.38), obtemos

$$\psi_\tau(z|u(t')) = e^{\int_0^\tau dt [h(ze^{-\gamma t}) + ize^{-\gamma t}u(t')]}. \quad (3.39)$$

Como $f(z)$ é infinitamente divisível, o Teorema da Continuidade, Teo. (2.8), garante que $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f_n(z)]^n$ quando $n \rightarrow \infty$, e a integral no expoente da Eq. (3.38) pode ser escrito como a soma de Riemann, e portanto

$$\psi_\tau(z|u(t')) = \prod_{m=0}^{\infty} e^{\delta_\tau f(ze^{-\gamma m \delta_\tau})}, \quad (3.40)$$

é um produto de funções características infinitamente divisíveis. E pelo Teo. (2.3), Eq. (3.40) é também uma função característica infinitamente divisível. Fazendo $a_n = e^{-\gamma m \delta_\tau}$, é necessário que $e^{\delta_\tau [h(a_n z) + i a_n z u(t')]}$ seja uma função característica válida. E assim, a volta do Teorema de De Finetti, Teo. (2.7), garante para um processo de limite, isto é, $h(\cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(\cdot)$, em que $h(\cdot) = \lambda_n (g_n(\cdot) - 1)$, sendo $g_n(\cdot)$ uma sequência de funções características e $\lambda > 0$.

O teorema de De Finetti implica que o expoente da Eq. (3.38) pode ser da forma $\lambda \tau (G_\tau(z) - 1)$, em que $G_\tau(z)$ é uma função característica. Ou seja,

$$\lambda \tau (G_\tau(z) - 1) = \lambda \int_0^\tau dt (g(z e^{-\gamma t}) - 1), \quad (3.41)$$

que resulta em

$$G_\tau(z) = \int_0^\tau dt g(z e^{-\gamma t}), \quad (3.42)$$

para todo τ . Em particular, o limite $\tau \rightarrow 0$ é

$$G_0(z) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\int_0^\tau dt g(z e^{-\gamma t})}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{g(z e^{-\gamma \tau})}{1} = g(z). \quad (3.43)$$

Isto é, para $G_\tau(z)$ ser uma função característica válida para todo τ , $g(z)$ deve ser também uma função característica. Este resultado completa a prova que $A(\tau) = e^{-\gamma \tau}$ é uma condição necessária e suficiente das funções características na Eq. (3.4) do processo Markoviano linear definido na Eq. (3.3).

3.3 Equação Mestra

Para que um processo Markoviano seja definido de maneira consistente, a probabilidade de transição deve satisfazer a equação de CK. Agora, vamos determinar a probabilidade de transição de um processo Markoviano para transições infinitesimais. A literatura aborda este problema por duas técnicas: uma é definir a probabilidade de transição como a solução de uma equação Mestra (Seção (2.3.5)) e a outra formulação, é por integrais de trajetória que expressa a probabilidade de transição diretamente como uma equação diferencial-integral. Nas duas abordagens, a equação de CK não é tratada diretamente e, ao invés disto, se postula como a probabilidade de transição se comportaria no limite $t \rightarrow t'$ [28].

Nesta seção, estabelecemos a equação Mestra que governa o processo estocástico definido previamente na Eq. (3.4). Tratamos a equação de CK aplicando o método da equação *Mestra* que é uma equação integro-diferencial que, quando resolvida, fornece a probabilidade de transição de um processo Markoviano [28, 29]. Lembramos que, estamos assumindo uma probabilidade de transição infinitesimal entre um estado $u(t')$ para um estado $u(t)$ como um processo de saltos (Seção (2.3.5)), e a função característica associada à esta probabilidade de transição, $G_\tau(u(t)|u(t'))$, dada por

$$\psi_\tau(z|u(t')) = \phi_\tau(z) e^{iz u(t') e^{-\gamma \tau}} = e^{W_\tau(z) + iz u(t') e^{-\gamma \tau}}, \quad (3.44)$$

em que $\phi_\tau(z)$ é dada na Eq. (3.30), sendo que $W_\tau(z)$ é dada na Eq. (3.29) e é denominada de *segunda característica* de $\phi_\tau(z)$. Vimos que, quando $\gamma = 0$, a Eq. (3.29) resulta em

$$W_\tau(z) = \tau h(z). \quad (3.45)$$

Substituindo a Eq. (3.45) na Eq. (3.44), obtemos

$$\psi_\tau(z|u(t')) = e^{\tau h(z) + izu(t')e^{-\gamma\tau}}. \quad (3.46)$$

Nas seções anteriores, vimos que a função característica de $G_\tau(u(t)|u(t'))$ na Eq. (3.30), é válida se $h(z)$ no expoente da Eq. (3.46) é da forma da Eq. (3.34). Então, a função característica da probabilidade de transição infinitesimal, $G_\tau(u(t)|u(t'))$, de $u(t')$ para $u(t)$ é

$$\psi_\tau(z|u(t')) = e^{\tau\lambda[g(z)-1] + izu(t')e^{-\gamma\tau}}, \quad (3.47)$$

em que $g(z)$ é uma função característica.

A equação Mestra pode ser derivada da equação CK (Seção (2.3.5)), então a derivada da probabilidade de transição, $G_\tau(u(t)|u(t'))$, é um caso limite $\delta\tau \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial G_\tau(u(t)|u(t'))}{\partial\tau} \simeq \frac{G_{\tau+\delta\tau}(u(t)|u(t')) - G_\tau(u(t)|u(t'))}{\delta\tau}. \quad (3.48)$$

O termo $G_{\tau+\delta\tau}(u(t)|u(t'))$ é evoluído, expandindo $G_{\delta\tau}(u(t)|u(t'))$ até primeira ordem em $\delta\tau$ e colocando na equação de CK, isto é,

$$G_{\tau+\delta\tau}(u(t)|u(t')) = \int dv G_{\delta\tau}(u(t)|v(t))G_\tau(v(t)|u(t')). \quad (3.49)$$

Usando a expansão em série de potências em torno de $\delta\tau = 0$ e expandindo o termo $e^{-\gamma\tau}$ da Eq. (3.47) até primeira ordem, obtemos a função característica de $G_\tau(u(t)|u(t'))$:

$$\psi_\tau(z|u(t)) \simeq (1 + \lambda\delta\tau(g(z) - 1) - izu(t')\gamma\delta\tau) e^{izu(t')}. \quad (3.50)$$

Então, para determinar a probabilidade de transição $G_\tau(u(t)|u(t'))$, procedemos da seguinte forma: multiplicamos por $e^{-izu(t)}$ ambos lados da Eq. (3.50); definimos a função característica $g(z) =: \langle e^{izu(t)} \rangle$, que pode ser avaliada como uma função de $u(t)$; e para integrar em z , reescrevemos o termo $\int_{-\infty}^{+\infty} izu(t')\gamma\tau e^{-iz(u(t)-u(t'))} dz$ como $u'\gamma\tau \frac{\partial}{\partial u} (e^{-iz(u(t)-u(t'))})$ que aparece na Eq. (3.50); e aplicamos a definição da transformada de Fourier na derivada¹³. Assim, para tempos muito curtos, a probabilidade de transição, $G_{\delta\tau}(u(t)|u(t'))$, é dada por

$$\begin{aligned} G_{\delta\tau}(u(t)|u(t')) &\simeq (1 - \lambda\delta\tau)\delta(u(t) - u(t')) + \lambda\delta\tau R(u(t) - u(t')) \\ &+ \gamma\delta\tau \frac{\partial}{\partial u(t)} [u(t')\delta(u(t) - u(t'))], \\ &\simeq (1 - \lambda\delta\tau)\delta(u(t) - (1 - \gamma\delta\tau)u(t')) + \lambda\delta\tau R(u(t) - u(t')), \end{aligned} \quad (3.51)$$

¹³Transformada de Fourier na derivada [79]: $\gamma\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial u} (u(t')e^{iz(u(t)-u(t'))}) dz = \gamma\delta\tau \frac{\partial}{\partial u(t)} [u(t')\delta(u(t) - u(t'))]$, pela propriedade de linearidade da Transformada de Fourier.

em que introduzimos a distribuição de saltos $R(u(t)) = \frac{1}{2\pi} \int dz g(z) e^{-iz u(t)}$.

Na Eq. (3.51), quando $\delta\tau \rightarrow 0$, a probabilidade de transição $G_{\delta\tau}(u(t)|u(t'))$ converge para uma função delta de Dirac, $\delta(u(t) - u(t'))$, e assim esta equação representa a aproximação em primeira ordem em dt , para a probabilidade de transição, garantindo a sua positividade e normalização.

Existe uma interpretação física interessante para os resultados encontrados. Em vista da Eq. (3.51), a Equação *Mestra* descreve um processo que, infinitesimalmente, o primeiro termo representa uma probabilidade $(1 - \lambda\delta\tau)$ de realizar uma transição de $u(t')$ para $u(t) = (1 - \gamma\delta\tau)u(t')$. O segundo termo, descreve uma transição aleatória com distribuição $R(u(t) - u(t'))$ e ocorre com probabilidade $\lambda\delta\tau$. Sendo assim, o sistema permanece um tempo indeterminado no estado $u(t')$, e em certo instante aleatório, executa uma transição de acordo com a distribuição $R(u(t) - u(t'))$. Este processo se repete indefinidamente. Nessa descrição infinitesimal, a dinâmica de $u(t)$ é descontínua. De fato, a probabilidade de não realizar nenhuma transição após um tempo τ , pode ser decomposta a partir da probabilidade infinitesimal, $(1 - \lambda\delta\tau)$, da seguinte forma:

$$S_\tau(u(t')) =: \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda\tau}{n}\right)^n =: \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(-\frac{\lambda\tau}{n}\right)\right)^n =: e^{-\lambda\tau}, \quad (3.52)$$

que faz lembrar um processo de Poisson, com *drift* exponencial entre as transições. O *drift* é governado por uma equação diferencial $\frac{du(t)}{dt} = -\gamma u(t)$, que é o limite contínuo de $u(t) = (1 - \gamma\delta\tau)u(t')$. O termo $\delta\tau$ é conhecido como a *função de sobrevivida do processo*. Logo, os processos de transição para tempos muito curtos, descritos pela Eq. (3.51) possuem uma dinâmica descontínua. Portanto, isto os distingue de modelos como o processo de Wiener (Seção (2.3.7)), em que as transições se dão continuamente ao longo do tempo.

Podemos interpretar a Equação *Mestra* como a descrição para qualquer malha de tempo t e t' , a partir do comportamento da derivada no limite $t \rightarrow t'$. Lembramos que definimos a probabilidade de transição, $P(u(t)|u(t')) = G_{tt'}(u(t)|u(t'))du$, para variáveis contínuas, e da Eq. (3.8), a equação CK se escreve como

$$G_{tt'}(u(t)|u(t')) = \int dv G_{ts}(u(t)|v(s))G_{st'}(v(s)|u(t')), \quad (3.53)$$

para $t' \leq s \leq t$. Observando o comportamento no limite quando $s \rightarrow t$, a Eq. (3.53) é consistente somente se a probabilidade de transição é dada por $G(u(t)|u(t')) = \delta(u(t) - u(t'))$. Notemos que, podemos obter um resultado não-trivial derivando a Eq. (3.53) por t antes de aplicar esse limite, $s \rightarrow t$, a qual resulta em uma equação dinâmica para $G_{tt'}(u(t)|u(t'))$ que se escreve como

$$\partial_t G_{tt'}(u(t)|u(t')) = \int dv \partial_t G_{tt'}(u(t)|v(t'))G_{tt'}(v(t)|u(t')), \quad (3.54)$$

que é um tipo de equação *Mestra* para a probabilidade de transição $G_{tt'}(u(t)|u(t'))$.

Definindo $\bar{W}_t(u(t)|u(t')) \equiv \partial_t G_{tt'}(u(t)|u(t'))$, obtemos

$$\partial_t G_{tt'}(u(t)|u(t')) = \int dv \bar{W}_t(u(t)|v(t)) G_{tt'}(v(t)|u(t')). \quad (3.55)$$

Notemos que, uma vez fixando $\bar{W}_t(u(t)|u(t'))$, a solução da Eq. (3.55) com a condição inicial, $G_{t \rightarrow t'}(u(t)|u(t')) = \delta(u(t) - u(t'))$, é unívoca. Observe que, $\bar{W}_t(u(t)|u(t'))$ é definido a partir da própria probabilidade de transição $G_{tt'}(u|u')$, o que faz com que a Eq. (3.55) seja uma definição circular. A utilidade da Eq. (3.55) está no fato que é possível modelar a probabilidade condicional de uma transição infinitesimal de uma forma relativamente simples. Com isso, podemos interpretar a equação *Mestra* como a prescrição para reconstruir a probabilidade de transição, $G_{tt'}(u|u')$, para qualquer malha de tempos t e t' , a partir do comportamento da derivada desta probabilidade no limite $t \rightarrow t'$. Substituindo a Eq. (3.51) na Eq. (3.55), obtemos

$$\begin{aligned} \partial_\tau G_\tau(u(t)|u(t')) &= \int dv \partial_\tau [(1 - \lambda\tau)\delta(u - u') + \lambda\tau R(u - u')] \\ &+ \int dv \gamma\tau \frac{\partial}{\partial u} [u'\delta(u - u')] G_\tau(v(t)|u(t')) \\ &= \int dv [-\lambda\delta(u - u') + \lambda R(u - u') + \frac{\partial}{\partial u} [\gamma u'\delta(u - u')]] G_\tau(v(t)|u(t')) \\ &= \int dv [-\lambda\delta(u - u') G_\tau(u(t)|u(t')) + \lambda R(u - u') G_\tau(v(t)|u(t'))] \\ &+ \int dv \frac{\partial}{\partial u} [\gamma u'\delta(u - u') G_\tau(u(t)|u(t'))]_{u(t)=u(t')}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

em que os termos $\delta(u - u')$ e

$$R(u - u') = \frac{1}{2\pi} \int dz g(z) e^{-izu}, \quad (3.57)$$

são distribuições de saltos. Definimos estas distribuições por $\lambda\delta(\cdot) = \Omega(\cdot)$ e $\lambda R(\cdot) = \Omega(\cdot)$, que descrevem as taxas de transição de $u(t)$ para $u(t')$, ou seja, é a probabilidade por unidade de tempo de o sistema estando em $u(t')$ ir para $u(t)$. Assim, a Eq. (3.56) torna-se

$$\begin{aligned} \partial_\tau G_\tau(u(t)|u(t')) &= \int dv [\Omega(u - v) G_\tau(v(t)|u(t')) - \Omega(v - u) G_\tau(u(t)|u(t'))] \\ &+ \int dv \frac{\partial}{\partial u} [\gamma u' \delta(u - u') G_\tau(u(t)|u(t'))]. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Na Eq. (3.58), fazendo $\Omega(u - v) = \Omega(u, v)$ e na segunda integral, aplicando a propriedade [18]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(m)}(u - u') f(u) du = \begin{cases} (-1)^m f^{(m)}(u'), & u' \in D \\ 0, & u' \notin D \end{cases},$$

em que D é o domínio de $f(u')$, a Eq. (3.58) torna-se

$$\begin{aligned} \partial_\tau G_\tau(u(t)|u(t')) &= \int dv [\Omega(u, v) G_\tau(v(t)|u(t')) - \Omega(v, u) G_\tau(u(t)|u(t'))] \\ &+ \frac{\partial}{\partial u} [\gamma u(t') G_\tau(u(t)|u(t'))], \end{aligned} \quad (3.59)$$

que é a forma canônica da equação *Mestra*, a qual é interpretada como uma equação de *ganhos* e *perdas* para as probabilidades de ocupação dos estados do sistema ao longo do tempo [29]. Podemos analisar o significado de cada termo da Eq. (3.59), como segue abaixo:

O termo $\Omega(u, v)G_\tau(v(t)|u(t'))\delta\tau$ em um intervalo $\delta\tau$: cada elemento em $v(t)$, possui uma chance $\Omega(u, v)\delta\tau$ de transitar para $u(t)$; assim, o acréscimo de probabilidade em $u(t)$ se dá pela soma das transições sobre todos os outros estados $v(t)$.

No termo $\Omega(v, u)G_\tau(u(t)|u(t'))$ os elementos inicialmente em $u(t)$ podem transitar para outros estados diminuindo o valor da probabilidade em $u(t)$. Deste modo, caracteriza a perda de probabilidade em $u(t)$ devido a estas transições.

O termo $\frac{\partial}{\partial u}[\gamma u(t')G_\tau(u(t)|u(t'))]$ é o termo de *drift*. O estado $u(t)$ depois de determinado tempo dt , migra para o estado $u(t')(1 - \gamma dt)$.

Então na Eq. (3.59), $\Omega(u, v)$ caracteriza univocamente cada probabilidade de transição pela sua equação *Mestra*, ou seja, Ω parametriza cada probabilidade de transição Markoviana.

3.3.1 Cumulantes do processo estocástico *THOU*

Vamos verificar como as condições obtidas anteriormente, se refletem nos quatro primeiros cumulantes (Seção 2.2.7) do processo estocástico $u(t)$.

Para definir um processo Markoviano é necessário especificar duas probabilidades distintas — a probabilidade de transição $G_\tau(u(t)|u(t'))$ considerada anteriormente e a probabilidade marginal $P(u) = f_t(u)du$, (ou seja, ver $P(u)$ como a probabilidade $P(u' \leq u < u' + du')$, no intervalo infinitesimalmente pequeno $(u, u + du)$). A evolução de $f_t(u)$ é dada pela equação

$$f_t(u) = \int du' f_0(u') G_t(u|u'), \quad (3.60)$$

em que $f_0(u')$ é a distribuição no ensemble¹⁴ inicial.

Vamos determinar os cumulantes da distribuição marginal $f_t(u)$, pois integramos em todo u' (Eq. (3.60)).

Observação 3.5. Somente no caso de u possuir densidade, a função característica torna-se

¹⁴É um conjunto muito grande ($N \rightarrow \infty$) de sistemas idênticos à amostra, do ponto de vista macroscópico. A distribuição desses sistemas nos diversos microestados é da seguinte forma: Em Mecânica Clássica a densidade de pontos em cada *volume elementar* $d\Gamma$ do espaço de fase é proporcional à probabilidade de que a amostra esteja, naquele instante, em um ponto dentro de $d\Gamma (= dq_1 dq_2 \cdots dq_s dp_1 \cdots dp_s)$, em que s é o número de coordenadas generalizadas; Em Mecânica Quântica, o número de sistemas em um microestado m é proporcional à probabilidade de que a amostra esteja em m . A construção de um ensemble depende, portanto, do conhecimento da distribuição de probabilidade para os microestados [38].

a usual transformada de Fourier da densidade de probabilidade. Desta forma, mesmo que uma densidade não esteja definida, ainda assim é possível definir a função característica de uma variável estocástica [20, 32, 80].

Definimos,

$$\zeta_t(z) = \int du f_t(u) e^{izu} = \langle e^{izu} \rangle \quad (3.61)$$

a função característica de distribuição marginal $f_t(u)$ dada na Eq. (3.60). E assim, é fácil relacionar a função característica da Eq.(3.61) com $\zeta_0(z)$, que deve ser conhecida de antemão, pois é a função característica do termo de *drift*. Substituindo a Eq. (3.60) na Eq. (3.61), e usando as Eq. (3.6) e Eq. (3.19), por um cálculo algébrico, obtemos

$$\zeta_t(z) = \phi_t(z) \zeta_0(z e^{-\gamma t}). \quad (3.62)$$

Uma consequência interessante da Eq. (3.62), é que para $\gamma > 0$, a distribuição de probabilidade assintótica não depende de $\zeta_0(z)$, isto é, os processos obedecem uma condição de mistura (Seção (2.2.4)). Uma consequência importante da Eq. (3.61), é a relação entre a probabilidade marginal de um processo estacionário com o limite assintótico da probabilidade de transição, ou seja, se u define um processo estacionário é necessário que

$$\zeta_t(z) = \zeta_0(z) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \phi_\tau(z), \quad (3.63)$$

que escrita em termos das distribuições, implica que $f(u) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} q_\tau(B)$, (Eq. (3.6)).

A Eq. (3.62) permite relacionar facilmente os *cumulantes* (Seção (2.2.7)) das distribuições $f_t(u)$ com os *cumulantes* da distribuição do ensemble inicial, $f_0(u_0)$. Para isto, basta obter a *segunda característica*¹⁵ da Eq. (3.62). Definimos as *segundas características* de $\zeta_t(z)$, $\phi_t(z)$ e $\zeta_0(z e^{-\gamma t})$, respectivamente, em que se somam da seguinte forma:

$$\Psi_t(z) = \Phi_t(z) + \Psi_0(z e^{-\gamma t}). \quad (3.64)$$

Aplicando a definição de cumulantes dado na Eq. (2.26), na Eq. (3.64), obtemos o *cumulante de primeira ordem* (a média) de $\zeta_t(z)$ (Eq. (3.62)) por:

$$c_1(t) = k_1(t) + \bar{c}_1 e^{-\gamma t}, \quad (3.65)$$

em que $k_1(t)$ é o cumulante de primeira ordem de $\phi_t(z)$ e \bar{c}_1 é o cumulante de primeira ordem de $\zeta_0(z)$. Os cumulantes de n -ésima ordem de $\zeta_t(z)$ são:

$$c_n(t) = k_n(t) + \bar{c}_n e^{-n\gamma t}, \quad (3.66)$$

¹⁵A *segunda característica* é também chamada de *função geradora de cumulantes*.

em que $k_n(t)$ são os cumulantes de n -ésima ordem de $\phi_t(z)$ e $\bar{c}_n = \bar{c}_n(0)$ são os cumulantes de n -ésima ordem de $\zeta_0(z)$.

Existem duas dependências temporais possíveis para os cumulantes $k_n(t)$ de $\phi_t(z)$. A primeira dependência é o caso em que $\gamma = 0$, e a Eq. (3.62) torna-se a convolução de funções características (Teo. (2.2)), cuja solução geral é a mesma dada na Eq. (3.22) multiplicada por t , e a probabilidade condicional de transição assume a forma de um processo infinitamente divisível, e neste caso, os cumulantes de n -ésima ordem de $\phi_t(z)$ são:

$$k_n(t) = \lambda t \mu_n, \quad (3.67)$$

em que λ é uma constante arbitrária e μ_n são os momentos da função característica auxiliar $g(z)$ que aparece na Eq. (3.34). De fato, basta definir a função característica auxiliar por $g(z) = \langle e^{izut} \rangle$, expandi-lá em série de Taylor, substituir este resultado em $\phi_t(z) = e^{\lambda t(g(z)-1)}$ e determinar a *segunda característica* de $\phi_t(z)$ (Seção (2.2.7)), que obtemos o resultado desejado.

Agora, para o segundo caso em que $\gamma \neq 0$, usando o mesmo procedimento aplicado no caso anterior, obtemos os cumulantes de n -ésima ordem da função característica $\phi_t(z)$:

$$k_n(t) = \frac{\lambda \mu_n}{\gamma n} [1 - e^{-\gamma t n}], \quad (3.68)$$

em que μ_n são os momentos da função característica auxiliar, no caso $g(ze^{-\gamma t})$, $\lambda > 0$, $\gamma \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. E para concluir, para $\gamma \neq 0$, escrevemos o cumulante de primeira ordem (média), $c_1(t)$, e todos os cumulantes de n -ésima ordem, $c_n(t)$, respectivamente, obtidos na Eq. (3.66):

$$c_1(t) = \frac{\lambda \mu_1}{\gamma} [1 - e^{-\gamma t}] + \bar{c}_1 e^{-\gamma t}, \quad (3.69)$$

e

$$c_n(t) = \frac{\lambda \mu_n}{\gamma n} [1 - e^{-\gamma t n}] + \bar{c}_n e^{-\gamma t n}. \quad (3.70)$$

Os cumulantes de n -ésima ordem da distribuição marginal, $f_t(u)$, são também dados pela Eq. (3.70) e todos convergem para $\frac{\lambda \mu_n}{\gamma n}$ em um estado estacionário assintótico quando $t \rightarrow \infty$.

3.3.2 Covariância do processo estocástico *THOU*

Na seção anterior, analisamos dos cumulantes de n -ésima ordem, aplicando derivada na *segunda característica* do processo estocástico $u(t)$.

Sabemos que para processos estocásticos com valor do cumulante de primeira ordem diferente de zero, é útil considerar a autocovariância, Eq. (2.8), Seção (2.3.1). Para processos estacionários a covariância é uma função apenas da $|t - t'|$ [25, 81]. E outro fato importante que devemos ressaltar é que, a forma comum da $Cov(\tau)$ para variáveis aleatórias correlacionada positivamente é uma função decrescente, com ponto inicial em $Cov(0) = \sigma^2$ e

ponto final em $Cov(t) \simeq 0$ quando $\tau \rightarrow \infty$. Nesta seção, analisaremos o comportamento da covariância do processo $THOU$, usando com as condições obtidas anteriormente. O procedimento aplicado é análogo ao da Seção (3.3.1).

Pela definição da covariância (Eq. (2.8)), é importante analisar o comportamento entre duas variáveis aleatórias, pois esta análise proporciona importantes e fundamentais interpretações sobre o comportamento do processo estocástico. Por exemplo, para algum processo a covariância em um período de defasagem no tempo é *negativo*, significa que a série se caracteriza por uma sequência de observações situadas alternadamente acima e abaixo do cumulante de primeira ordem [12, 26, 27, 31].

A covariância da variável $u(t)$, é definida como

$$\begin{aligned} \langle\langle u(t)u'(t+\tau) \rangle\rangle &= \int \langle (u(t) - m_{u(t)})(u'(t+\tau) - m_{u'(t+\tau)}) \rangle du du', \\ &= \int [u(t) - m_{u(t)}][u'(t+\tau) - m_{u'(t+\tau)}] f(u, u') du du', \end{aligned} \quad (3.71)$$

em que $f(u, u')$ é a distribuição dada na Eq. (3.60), $m_{u(t)}$ e $m_{u'(t+\tau)}$ são os cumulantes de primeira ordem definidas nas Eq. (3.65). Substituindo as Eq. (3.60) e Eq. (3.65) na Eq. (3.71), a covariância da variável $u(t)$ definida na Eq. (3.3), é calculada diretamente como

$$\langle\langle u(t)u'(t+\tau) \rangle\rangle = \int du du' f_t(u') G_\tau(u|u') [u - c_1(t+\tau)][u' - c_1(t)], \quad (3.72)$$

considerando o cumulante de primeira ordem sobre a distribuição conjunta $G_\tau(u|u') f_t(u') du du'$.

Na Eq. (3.72), calculamos primeiro a integral sobre u :

$$\int du G_\tau(u_t|u_{t'}) [u_t - c_1(t+\tau)], \quad (3.73)$$

já que ela fornece o cumulante de primeiro ordem condicional de $u(t+\tau)$, que pode ser relacionada com a variável definida na Eq. (3.3). Antes disto, lembremos que, segue da equação Eq. (3.66), a existência de duas dependências temporais identificadas para os cumulantes de k -ésima ordem, $k_n(t)$, para $k = 1, 2, \dots$ da função característica $\phi_t(z)$, que foram analisadas nas Eq. (3.67), para $\gamma = 0$ e Eq. (3.68), para $\gamma \neq 0$. Logo, segue da Eq. (3.65) que o cumulante de primeira ordem de $u(t+\tau)$ é da forma:

$$c_1(t+\tau) = k_1(t+\tau) + \bar{c}_1 e^{-\gamma(t+\tau)}, \quad (3.74)$$

em que $k_1(\cdot)$ determina o cumulante de primeira ordem da função característica $\phi_t(z)$ definido nas Eq. (3.67) e Eq. (3.68), quando $n = 1$, para $\gamma = 0$ e $\gamma \neq 0$, respectivamente, e \bar{c}_1 o cumulante de primeira ordem, quando $n = 1$ da função característica $\zeta_0(z)$. Substituindo a Eq. (3.74) na Eq. (3.73), e por um cálculo simples conduz para o seguinte resultado

$$\int du G_\tau(u|u') [u - c_1(t+\tau)] = \begin{cases} u' - c_1(t), & \gamma = 0 \\ e^{-\gamma\tau} [u' - c_1(t)], & \gamma \neq 0 \end{cases}. \quad (3.75)$$

Voltando na Eq. (3.72), agora vamos calcular a integral sobre u' : Substituindo o resultado da Eq. (3.75) na Eq. (3.72) e integrando em u' , obtemos a covariância da variável $u(t)$:

$$\langle\langle u(t)u'(t+\tau) \rangle\rangle = \begin{cases} \bar{c}_2 + \lambda\mu_2 t, & \gamma = 0 \\ e^{-\gamma\tau} \left[\frac{\lambda\mu_2}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) + \bar{c}_2 e^{-2\gamma t} \right], & \gamma \neq 0 \end{cases}, \quad (3.76)$$

em que $\gamma > 0$ é uma constante, \bar{c}_2 é o desvio padrão da distribuição inicial e μ_2 é o segundo momento da função característica $g(z)$. Usando a Eq. (3.70) para $n = 2$, a Eq. (3.76) pode ser reduzida para

$$\langle\langle u(t)u'(t+\tau) \rangle\rangle = \begin{cases} c_2(t), & \gamma = 0 \\ e^{-\gamma\tau} c_2(t), & \gamma \neq 0 \end{cases}, \quad (3.77)$$

em que usamos a definição formal (Eq. (2.5)) do segundo momento central¹⁶ e da média¹⁷ de $u(t)$.

Podemos reescrever a covariância $\langle\langle u(t)u'(t+\tau) \rangle\rangle$ e a média $\langle u(t) \rangle$ da variável $u(t)$, fazendo as seguintes identificações $\tau \mapsto |t - t'|$ e $t \mapsto \min(t, t')$, $t < t'$, na Eq. (3.76). Deste modo, a covariância e o cumulante de primeira ordem, respectivamente, são reescritas como

$$\langle\langle u(t)u'(t+\tau) \rangle\rangle = \begin{cases} \bar{c}_2 + \lambda\mu_2 \min(t, t'), & \gamma = 0 \\ e^{-\gamma|t-t'|} \left[\frac{\lambda\mu_2}{2\gamma} [1 - e^{-2\gamma \min(t, t')}] + \bar{c}_2 e^{-2\gamma \min(t, t')} \right], & \gamma \neq 0 \end{cases}, \quad (3.78)$$

e

$$\langle u(t) \rangle = \begin{cases} \bar{c}_1 + \lambda\mu_1 \min(t, t'), & \gamma = 0 \\ \bar{c}_1 e^{-\gamma \min(t, t')} + \frac{\lambda\mu_1}{\gamma} [1 - e^{-\gamma \min(t, t')}], & \gamma \neq 0 \end{cases}, \quad (3.79)$$

em que $\lambda > 0$, \bar{c}_1 é o cumulante de primeira ordem da função característica $\zeta_0(z)$ do termo de *drift* e, μ_1 e μ_2 são dois primeiros momentos da função característica $g(z)$ que aparece na Eq. (3.34).

É interessante comparar a covariância da Eq. (3.78) com o teorema de Doob original (Teo. (3.1)). O processo estacionário aparece neste desenvolvimento, somente para o caso $\gamma \neq 0$ e $c_n(t) = \frac{\lambda\mu_n}{\gamma n}$, quando $t \rightarrow \infty$, na Eq. (3.70). Estas condições reduz a Eq. (3.78) para a mesma fórmula encontrada em teorema Doob (Teo. (3.1)), isto é, $\langle\langle u(t)u'(t+\tau) \rangle\rangle = c_2(t)e^{-\gamma\tau}$. Enfatizamos, no entanto, que nenhuma hipótese de gaussianidade foi necessário para obter o resultado da covariância da Eq. (3.78) — é possível criar processos estocásticos que têm muitas das mesmas propriedades do processo de *OU* original, ainda utilizar distribuição não-Gaussiana. Padrões da normalidade são encontrados em muitas áreas da Ciência, daí a importância de formulações de tais generalizações.

¹⁶O segundo momento central é o cumulante de segunda ordem de $u(t)$ definida na Eq. (3.66) para $n = 2$.

¹⁷A média é o cumulante de primeira ordem de $u(t)$ definida na Eq. (3.66) para $n = 1$.

3.4 Processo de Ornstein-Uhlenbeck

Lembrando que, a nossa generalização é para o caso de processos Markoviano linear e tempo homogêneo. Temos três condições para serem verificadas: *estacionariedade*, *Markovianidade* e *Gaussianidade*.

Podemos observar que, somente para o caso $\gamma > 0$ que podemos definir um processo estacionário como aparece no teorema de Doob original, Teo. (3.1). De fato, a propriedade Markoviana na hipótese do Teo. (3.2), é garantida na Eq. (3.77) que têm a mesma forma da Eq. (3.2). Observando que, quando $t \rightarrow \infty$ na Eq. (3.65) e usando e Eq. (3.68), obtemos todos os cumulantes dados por

$$c_n(t) = \frac{\lambda \mu_n}{n\gamma}, \quad (3.80)$$

em que $\lambda > 0$ é uma constante que determina a frequência de saltos, $n \in \mathbb{N}$, μ_n são os momentos da função característica auxiliar que aparece na Eq. (3.34) e γ é uma constante que determina a taxa de dissipação de energia.

Além das características interpretativas que se obtém com a análise da autocovariância, a autocorrelação proporciona maiores informações. A autocorrelação com defasagem temporal Δt de um processo estocástico (estacionário) se caracteriza por ser o quociente entre a covariância de defasagem no tempo τ e o produto os desvios padrão da variável aleatória nos instantes t e t com defasagem, $t + \tau$. Para uma sequência de autocorrelação com defasagem temporal τ , $\tau = 0, 1, 2, \dots$ é uma indicação da extensão para a qual um valor do processo é correlacionado ou não com seus valores defasados τ períodos de tempo. Podemos, então, para alguma extensão, ser usada para medir o número de defasagens e a intensidade de *memória* do processo, ou seja, podemos verificar se o processo estocásticos é Markviano ou não. Outro fator importante na análise da autocorrelação, é sua limitação entre -1 e 1 . Esta restrição apresenta como característica principal ao fato da autocorrelação diminuir tem decaimento exponencial para zero, seguindo a calda de uma exponencial, à medida que a defasagem no tempo τ cresce. A presença deste decaimento exponencial, indica o efeito de não-memória que resulta em um processo estocástico linear, em caso contrário, teremos a não-estacionariedade do processo.

Assim, para verificarmos a condição Markoviana do processo, calculamos autocorrelação:

$$Corr = e^{-\gamma|t-t'|}, \quad (3.81)$$

usando as Eq. (2.11), Eq. (3.65) e Eq. (3.78), para o caso $\gamma \neq 0$. Aplicando o função monolog na Eq. (3.81), obtemos a reta

$$y(\tau) = -\gamma\tau, \quad (3.82)$$

em que $\tau = |t - t'|$.

Agora vamos verificar que a hipótese Gaussianidade que foi relaxada no modelo *THOU*. Esta hipótese é recuperada definindo a variável arbitrária $B(\tau)$ (Eq. (3.3)) como gaussiana. Uma observação interessante é na forma da covariância do processo estocástico $u(t)$ generalizado, para o caso $\gamma \neq 0$, Eq. (3.77), em que $c_2(t)$ é o cumulante de segunda ordem, definido na Eq. (3.70), para $n = 2$. Se fizermos uma comparação da das covariância do modelo generalizado e do Teorema de Doob, elas são semelhantes. Sendo assim, vamos analisar a volta do Teo. (3.2), ou seja, a função característica da Eq. (3.4) deve ser uma Gaussiana. De fato, pelo teorema de De Finetti, Teo. (2.7) e o teorema da Continuidade, Teo. (2.8), aplicados na Eq. (3.4), recuperamos o processo *OU* clássico, pela imposição da probabilidade de transição ser uma Gaussiana no contexto do presente estudo, isto é, $g(z)$ (da Eq. (3.4)) pode ser escolhida fazendo

$$e^{\lambda \int_0^\tau dt [g(z e^{-\gamma t}) - 1] + iz u' e^{-\gamma \tau}} \rightarrow e^{-\frac{1}{2} \sigma^2 (\tau) z^2 + im(\tau) z}, \quad (3.83)$$

em que $m(\tau) = u' e^{-\gamma \tau}$. Vejamos que, é possível que o expoente de uma função característica infinitamente divisível não seja fatorado na forma $\lambda(\psi(z) - 1)$. Este é o caso da Gaussiana, cuja função característica é definida por

$$e^{-\frac{1}{2} \sigma^2 z^2 + i \mu z}. \quad (3.84)$$

Se identificamos os termos dos expoentes das Eq. (3.83) (lado esquerdo) e Eq. (3.84), observamos que: $\lambda(g(z) - 1)$ deve implicar em $-\frac{1}{2} \sigma^2 z^2$. Nesse caso, identificamos $\lambda = \frac{1}{2} \sigma^2$ e $\psi_g(z) = 1 - z^2$, sendo que $\psi_g(z)$ não representa uma função característica válida. No entanto, uma Gaussiana com cumulante de segunda ordem σ^2 é infinitamente divisível, pois corresponde à soma de outras n variáveis Gaussianas com cumulante de segunda ordem $\frac{\sigma^2}{n}$. Assim, usando a propriedade $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{a}{n})^n = e^a$, é fácil verificar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{n(e^{-\frac{1}{2n} \sigma^2 z^2} - 1)} = e^{-[\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{\frac{1}{n} \sigma^2 \frac{z^2}{2} + 1})^n]} = e^{-\frac{1}{2} \sigma^2 z^2}, \quad (3.85)$$

em que este procedimento, ilustra o significado do limite no teorema de De Finetti, Teo. (2.7). Portanto, as condições impostas no modelo *THOU* pelo o teorema de Doob, Teo. (3.1), foram satisfeitas.

3.5 Considerações Finais

- 1 Quando $t \rightarrow \infty$, os cumulantes dados na Eq. (3.66) convergem para uma constante igual a $\frac{\lambda \mu_n}{n \gamma}$, em que μ_n são os momentos da função característica arbitrária $g(\cdot)$, $n \in \mathbb{N}$, γ e λ são constantes.
- 2 Quando $t \rightarrow \infty$, a covariância dada na Eq. (3.78) converge para a constante $\frac{\lambda \mu_2}{2 \gamma}$, em que μ_2 é o segundo momento da função característica $g(z)$. Dependendo das condições de contorno periódico dessa constante, é estacionária.

3 Pela correlação, verificamos que $u(t)$ não contém componentes periódicos, já que $Corr_u(\tau) \rightarrow 0$, quando $\tau \rightarrow \infty$, garantindo que $u(t - \tau)$ tornou-se completamente descorrelacionado com $u(t)$ para τ grande, ou seja, o processo é Markoviano.

No próximo capítulo, vamos checar os resultados teóricos do modelo *THOU*. Obtemos a série simulada do modelo *THOU*, usando as Eq. (3.4) e Eq. (3.51), que descrevem respectivamente, a função característica decorrente da convergência fraca da sequência de funções características, $\psi_\tau^{(n)}(z|u(t'))$, e a probabilidade de transição, $G_{\delta\tau}(u(t)|u(t'))$, para tempos muito curtos $\delta\tau$. Geramos as trajetórias empíricas do modelo estudado, para verificarmos os comportamentos dos momentos estatísticos empíricos e compara-los aos resultados teóricos obtidos neste capítulo. Focamos as análises na forma do decaimento exponencial e no comportamento da convergência assintótica das trajetórias empíricas, em que são comparados com as trajetórias teóricas dos momentos estatísticos. No Capítulo 5, fazemos a comparação empírica do modelo *THOU* com séries empíricas financeiras (dados reais).

Capítulo 4

Simulação do Processo *THOU*

No Capítulo 2 vimos que, um processo estocástico pode ser interpretado como uma família de variáveis aleatórias no tempo, então uma série temporal é um processo estocástico. Para cada momento no tempo, a variável aleatória tem uma distribuição de probabilidade (que pode ser a mesma ou não). É muito trabalhoso especificar todas estas distribuições finito-dimensionais. Normalmente, o que se faz é concentrar nos momentos estatísticos destas variáveis aleatórias para conhecer todo o processo estocástico [17].

Neste capítulo, vamos verificar os resultados teóricos do Capítulo 3. Para isto, geramos uma série sintética que descreve as variáveis aleatórias do modelo *THOU*. A partir desta série sintética, analisamos a forma e o comportamento do decimento exponencial e a convergência assintótica (horizontal) dos momentos estatísticos empíricos (os quatro primeiros cumulantes, a covariância e a correlação).

4.1 Simulação computacional

Com a exceção de alguns casos, a distribuição associada com a função característica Eq. (3.4) não pode ser calculada analiticamente. Para gerar a série *THOU*, escrevemos um algoritmo em linguagem de programação *Python*. Usamos as Eq. (3.4) e Eq. (3.51), que descrevem respectivamente, a sequência de funções características, $\psi_\tau^{(n)}(z|u(t'))$, e de sua probabilidade de transição, $G_{\delta\tau}(u(t)|u(t'))$, para tempos muito curtos $\delta\tau$. Pode-se esperar que, em geral, a simulação de série *THOU* pode ser construída através de um esquema aproximativo. Mostramos um método de amostragem exata que utiliza amostras a partir da distribuição de saltos dada na Eq. (3.57).

Uma forma grosseira de simular as trajetórias do processo *THOU* é considerar que a Eq. (3.51) representa uma aproximação suficientemente boa para a probabilidade de transição em tempos muito curtos $\delta\tau$. Dado um ponto inicial na simulação $u(t_i) = u(i\delta\tau)$, é simples gerar amostras desta distribuição. A Eq. (3.51) descreve a mistura de duas evo-

luções: um mapa determinístico de realizar uma transição de $u(t_{i+1}) \mapsto u(t_i)(1 - \gamma\delta\tau)$, com probabilidade $(1 - \gamma\delta\tau)$, e a segunda de realizar uma transição estocástica do ruído $u(t_{i+1}) = u(t_i) + \eta(t_i)$, com distribuição $R(u(t) - u(t'))$ que ocorre com probabilidade $\lambda\delta\tau$. Na expressão anterior, o ruído $\eta(t_i)$ representa a amostragem da distribuição de saltos $R(u(t))$. Enfatizamos que um procedimento similar é utilizado frequentemente, para simular o processo OU clássico, no qual o incremento do ruído é calculado por $du(t_i) = -\alpha\delta\tau u(t_i) + \beta\sqrt{\delta\tau}\eta(t_i)$.

Desenvolvemos um método de amostragem exata. A probabilidade de transição $G_\tau(u(t)|u(t'))$ é formalmente o kernel de um operador linear que mapeia uma distribuição marginal $f(u(t))$ em $f(u(t + \tau))$. Consideramos os operadores \hat{G}_τ que agem nas distribuições $f(u(t))$ do espaço de funções integráveis como $\hat{G}_\tau \cdot f(u(t)) \equiv \int du' G_\tau(u(t)|u(t'))f(u(t'))$. Denotamos o operador de transição por \hat{G}_τ . É obvio da Eq. (3.9) que o operador de transição satisfaz a relação $\hat{G}_\tau = (G_{\tau/N})^N$, para todo N finito. O operador de evolução infinitesimal $\hat{G}_{\delta\tau}$ pode ser considerado como uma aproximação por tempo $T_{\delta\tau}$ para $\delta\tau = \tau/N$ muito pequeno. Pela a Eq. (3.51), obtemos o operador de evolução infinitesimal dado por

$$\hat{G}_{\delta\tau} = (1 - \lambda\delta\tau)\hat{D}_{\delta\tau} + \lambda\delta\tau\hat{R}, \quad (4.1)$$

em que o operador $\hat{D}_{\delta\tau}$ executa uma evolução de u para $(1 - \gamma\delta\tau)u$ e \hat{R} é o operador definido para a distribuição de saltos dado na Eq. (3.57).

A probabilidade de transição $(\hat{G}_{\delta\tau})^N$ pode ser analisada pelos termos dados nas potências do operador \hat{R} . O termo de 0ª-ordem é simplesmente $(1 - \frac{\lambda\tau}{N})^N \hat{D}_{\delta\tau}^N$, que mapeia o kernel $e^{-\lambda\tau}\delta(u - u'e^{-\gamma\tau})$, quando $N \rightarrow \infty$. Este termo representa a evolução determinística da u' para $u'e^{-\gamma\tau}$ que ocorre com probabilidade $e^{-\gamma\tau}$.

O termo de 1ª-ordem, $\lambda\tau e^{-\lambda\tau} \int_0^\tau dt \frac{1}{\tau} \hat{D}_{\tau-t} \hat{R} \hat{D}_t$, representam o efeito da média de uma evolução estocástica em que uma evolução determinística ao longo do tempo $t < \tau$ é seguido por uma distribuição aleatória de salto $R(u)$, e de outra evolução determinística no intervalo restante $\tau - t$. Esta evolução ocorre com uma probabilidade $\lambda\tau e^{-\lambda\tau}$, e no instante t em que o salto ocorre é distribuído uniformemente por uma probabilidade $Pr(t) = \frac{1}{\tau} dt$. Analogamente, os termos de ordem superior correspondem ao efeito da média das evoluções determinísticas descontínuas intercalados com saltos aleatórios.

A dica para simular este processo estocástico é considerar τ como um parâmetro aleatório correspondente ao instante em que o primeiro salto estocástico é realizado. O tempo de espera τ tem uma distribuição exponencial (Ver Seção. (2.3.6)), que pode ser facilmente simulada. O algoritmo para produzir a série sintética *THOU* segue os seguintes passos:

- 1 Avançar o contador de tempo pelo incremento $Pr(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau} d\tau$.
- 2 Escolher um u em t' na distribuição e evoluir u exponencialmente como $ue^{-\gamma t'}$ de $t' \in [0, \tau]$,

em que $[0, \tau]$ é um intervalo que ocorre um salto.

3 Adicionar um incremento estocástico $u \mapsto u + du$, com $du \sim Pr(u) = R(u)du$, em que $R(u)$ é a distribuição de saltos dado na Eq. (3.57).

4 Voltar para (1) ou para a simulação.

A Fig.(4.1) mostra a função densidade de probabilidade (pdf) para 100 observações e a evolução temporal da variável aleatória θ da série *THOU*. Podemos observar que existe uma distribuição de probabilidade (que não conhecemos), que governa esta série estocástica.

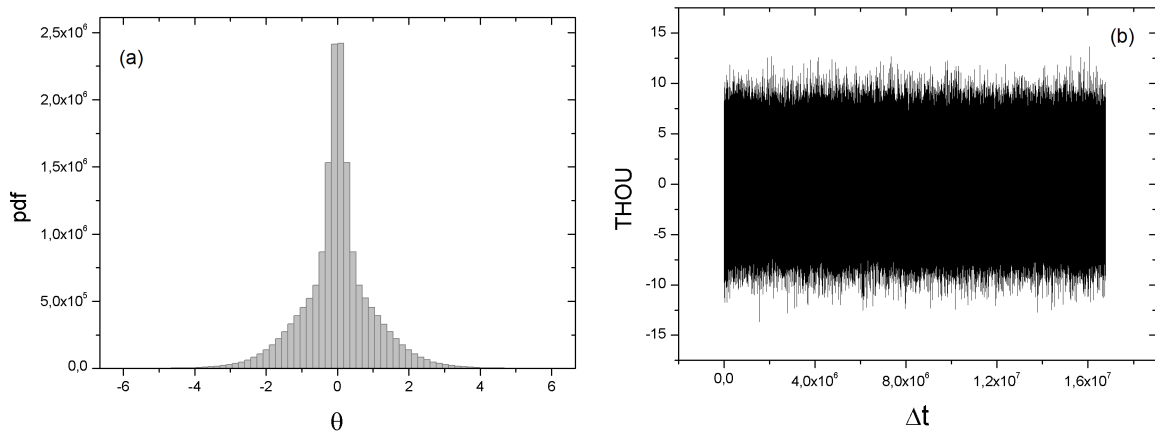


Figura 4.1: (a) Função densidade de probabilidade (pdf). (b) Evolução temporal do θ da série *THOU*, em que $\Delta t = 1$.

4.2 Análise Empírica da série *THOU*

Sabemos que um processo estocástico é caracterizado pelas variáveis aleatórias definidas em um espaço de probabilidades, no qual estará perfeitamente especificado se conseguirmos obter a sua pdf. Contudo sua especificação completa que rege o processo estocástico, é bastante improvável de se obter. Mesmo conhecendo a sua função característica e aplicando a transformada inversa de Fourier, ainda não podemos determinar a pdf (que é o nosso caso, pois conhecemos a função característica, Eq. (3.4)).

Uma maneira equivalente de especificarmos a distribuição da série *THOU*, é determinando todos os seus momentos estatísticos empíricos, pois apresentam as mesmas restrições do conhecimento da estrutura probabilística. Em busca de meios capazes de descrever o processo gerador da série empírica em relação ao modelo estudado, impomos a restrição de analisar os quatro primeiros cumulantes e a função de covariância. Adicionamos a função de

correlação para nos auxiliar na determinação da constante γ e para verificamos a propriedade Markoviana do processo.

Seja θ_i o valor da variável aleatória no tempo t_i da séries sintética *THOU*. Para analisamos os momentos estatísticos, particionando a série *THOU* em dois ensembles. Denotamos por N a quantidade total de pontos na série. Escrevemos um algoritmo que escolhe os dois ensembles, as duas variáveis iniciais θ_i , para $i \in \mathbb{N}$, os pontos de máximo θ_{Max} , de mínimo θ_{Min} e a média da série θ_{Med} . As vizinhanças de cada ensemble têm comprimento $\theta_{Med} \pm \epsilon \times i$, em que i denota o número de ensembles e $2 \times \epsilon \times i$ denota toda a série sintética. As estatísticas são realizadas nos ensemble que têm a quantidade mínima de pontos N_i . As condições iniciais são denotadas por θ_i , em $i \in \mathbb{N}$ denota o ensemble. Escolhemos os ensembles de forma que, um fique acima e o outro abaixo da média da série usada. Para determinar a média da série, aplicamos o método usual numérico. A Fig. (4.2) mostra a série particionada em dois ensembles com suas respectivas condições iniciais.

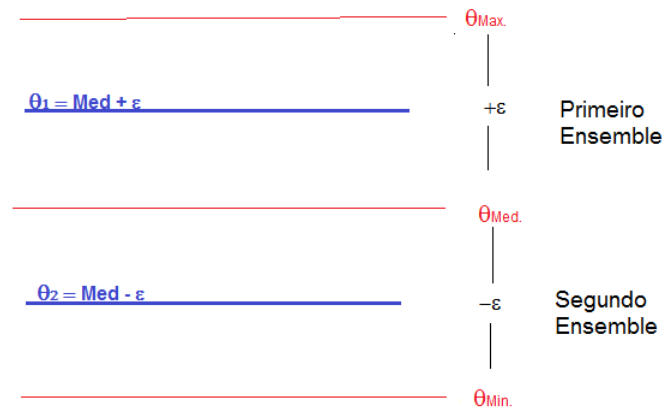


Figura 4.2: Condições iniciais θ_i , para $i = 1, 2$ da série *THOU* em dois ensembles.

Os dois ensembles da Fig. (4.2) são escolhidos aleatoriamente pela quantidade de pontos mínimo contidos nele. Esta escolha é definida na rotina. Estes ensembles são considerados como condições iniciais. Fazemos as estatísticas em cada ensemble usando o seguinte procedimento: escolhemos aleatoriamente um valor inicial θ_i no tempo t_i , e verificarmos a sua evolução temporal no tempo Δt .

Com as variáveis da série sintética *THOU*, podemos verificar as propriedades do modelo: o decaimento exponencial e a convergência assintótica na evolução temporal das condições iniciais θ_i , para $i = 1, 2$ em cada ensembles, como visto nos resultados teóricos analíticos do Capítulo 3. A evolução temporal das condições iniciais é analisada pelos momentos estatísticos. A Fig. (4.3) mostra a evolução temporal das condições iniciais nos ensembles das autocovariância e da autocorrelação, em intervalos de tempo $\Delta t = 1$. Podemos obser-

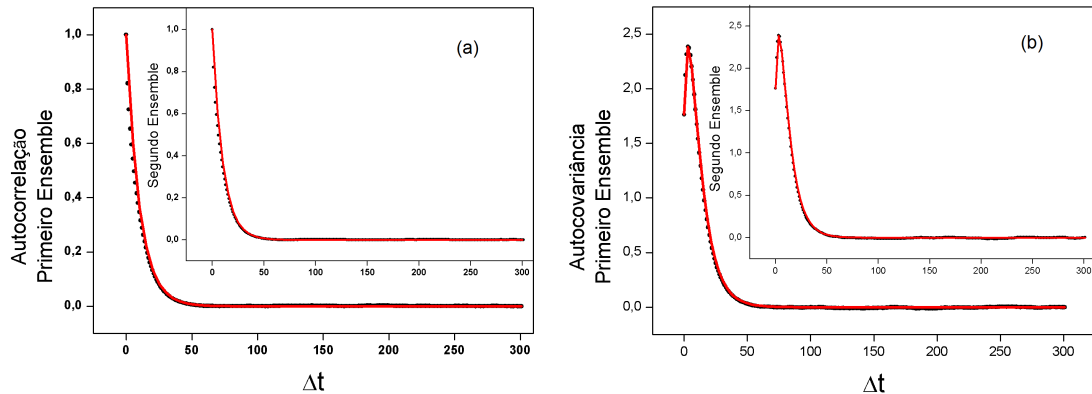


Figura 4.3: Evolução temporal dos θ_i , para $i = 1, 2$ na: (a) Na autocorrelação e, (b) Na autocovariância. Os símbolos (pretos) representam as curvas empíricas da autocorrelação e da autocovariância e as linhas sólidas (vermelhas) suas curvas teóricas, Eq. (4.4) para $n = 2$ e γ na Tab. (4.1).

var que a série *THOU* apresenta flutuações rápidas e frequências elevadas, indicando que a curva empírica da pdf tem uma forma mais *estreita* [20, 22], ou seja, a maioria dos valores das variáveis aleatórias situam-se na parte central da curva (cumulante de primeira-ordem), enquanto que nos lados, a curva empírica tem decaimento na forma exponencial e à esquerda de -1 e à direita de 1 tem caudas mais longas, indicando que a densidade não é descrita por uma pdf Gaussiana.

As análises dos momentos estatísticos são mostrados nas Fig. (4.3) e Fig. (4.4). A Tab.(4.1) mostra as informações empíricas obtidas na simulação. As informações são: as condições iniciais, o comprimento ϵ nos ensembles, os pontos mínimo, máximo e médio da série, a quantidade total de pontos da série e a quantidade mínima de pontos em cada ensemble para obtemos os momentos estatísticos.

A Fig. (4.3) mostra om comportamento da autocorrelação e da autocovariância que têm convergência assintótica para zero a partir de um determinado tempo t , implicando que as variáveis aleatórias do modelo *THOU* não têm correlação de qualquer natureza. Sendo assim, o modelo *THOU* não tem previsibilidade (não tem memória), garantindo a propriedade de ser Markoviano. Lembrando que, a propriedade Gaussiana é recuperado se definirmos a variável aleatóroa $B(\tau)$ da Eq. (3.3) como Gaussiana. A função de correlação foi obtida da Eq, (2.11) e seu decaimento exponencial tem um significado físico: em $\Delta t = 0$ a variável θ apresenta uma correlação máxima, ao passo que aproximadamente de $\Delta t \geq 20$, as variáveis aleatórias θ têm "perda de memória", garantido a propriedade Markoviana. Outro fato interessante que podemos observar na Fig. (4.3) é a condição de mistura (Ver (2.2.4)). As condições iniciais do modelo *THOU* atinge o equilíbrio quando a evolução é irreversível. Esta irreversibilidade pode ser observada pela correlação se anular após um tempo muito longo, Eq. (2.13).

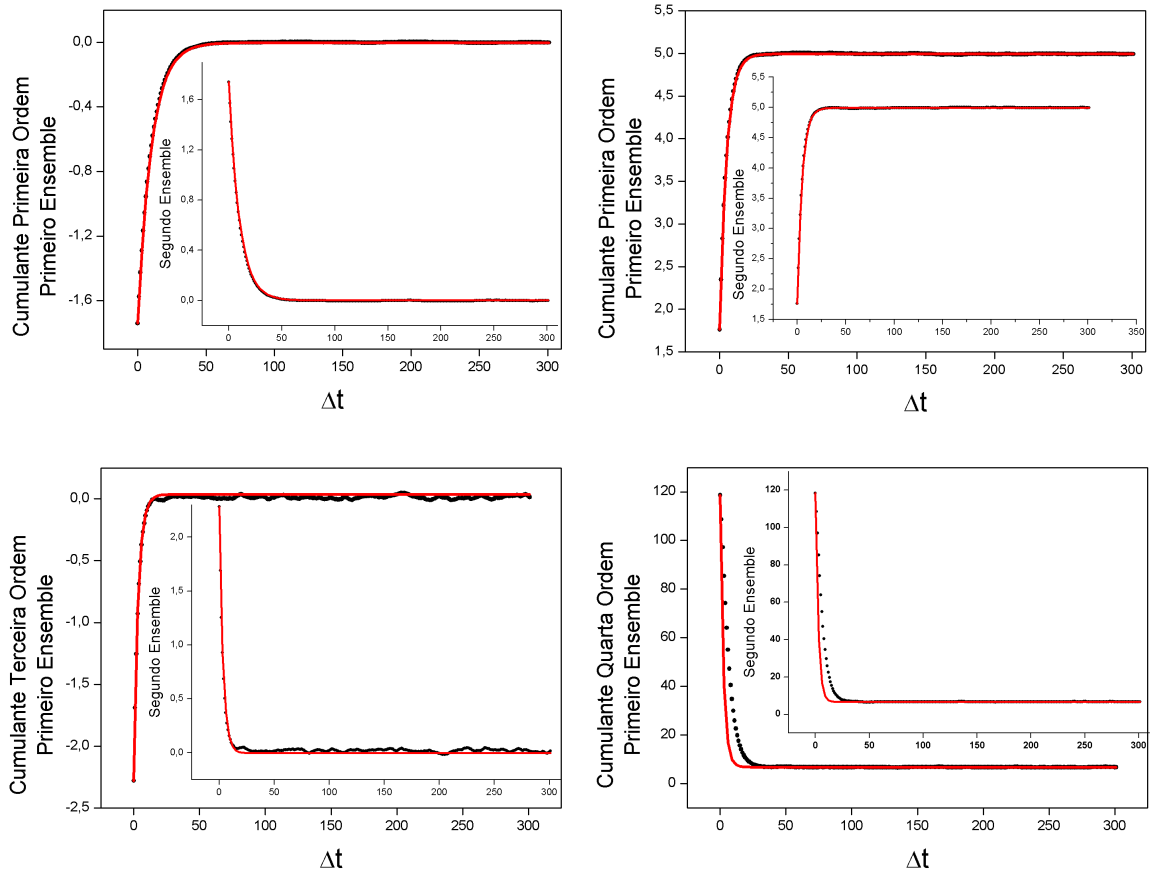


Figura 4.4: Evolução temporal dos θ_i , para $i = 1, 2$, nos quatro primeiros Cumulantes da série *THOU*. Os símbolos (pretos) representam os cumulantes empíricos e as linhas sólidas (vermelhas) representam os cumulantes teóricos definidos na Eq. (4.3), para $n = 1-4$ e γ na Tab. (4.1).

A Fig. (4.4) mostra os comportamentos do decaimento exponencial e convergência assintótica das variáveis iniciais θ_i para $i = 1, 2$ do modelo *THOU* nos quatro primeiros cumulantes teóricos e empíricos. O cumulante de segunda ordem (ou variância) é uma quantidade que ajuda a compreender a distribuição no ensemble. De forma pouco rigorosa, podemos dizer que valores pequenos dos cumulantes de segunda ordem (variâncias) traduzem dados pouco dispersos em torno do valor médio. Fisicamente, estes valores medem a homogeneidade dos θ em torno do cumulante de primeira ordem (média). Uma observação importante e que faz a diferença entre o modelo *THOU* e o modelo *OU* original: o cumulante de quarta ordem empírico têm flutuação em torno de números diferentes de zero. No Capítulo 5, para compararmos o modelo *THOU* com dados empíricos, esta será uma das características que devemos destacar.

As constantes λ e γ que aparecem nas Eq. (3.4), Eq. (3.70) e Eq. (3.78) determinam a frequência de saltos do processo e a taxa de dissipação de energia, respectivamente. A constante λ não pode ser estimada, devido ao fato de estar ligada diretamente aos momen-

tos, μ_n com $n \in \mathbb{N}$, da função característica $g(\cdot)$ que aparece na Eq. (3.34). Para comparar os dados empíricos com os resultados teóricos, estimamos γ por ensemble, pelo ajuste da curva exponencial da correlação. Para traçarmos as curvas teóricas dos quatro primeiros cumulantes, usamos a Eq. (3.70) e a reescrevemos na seguinte forma:

$$c_n(t) = \frac{\lambda\mu_n}{\gamma n} [1 - e^{-\gamma tn}] + \bar{c}_n e^{-\gamma tn} = \frac{\lambda\mu_n}{\gamma n} + (\bar{c}_n - \frac{\lambda\mu_n}{\gamma n}) e^{-\gamma tn}. \quad (4.2)$$

Fazendo $k_1 = \bar{c}_n$ e $k = \frac{\lambda\mu_n}{\gamma n}$ determinam os pontos inicial e final das curvas teóricas. Reescrevendo a Eq. (4.2), obtemos a curva teórica dada por

$$c_n = k + (k_1 - k)e^{-\gamma tn}, \quad (4.3)$$

em que $n = 1 - 4$. Usamos a Eq. (4.3), para $n = 2$ para obtermos as curvas teóricas da covariância em cada ensemble, que são definidas da seguinte forma

$$Cov(t) = c_2(t)e^{-\gamma t} = (k + (k_1 - k)e^{-2\gamma t})e^{-\gamma t}, \quad (4.4)$$

em que k_1 descreve o ponto empírico inicial e k o ponto empírico final da série *THOU*. A Fig. (4.3) mostra as comparações entre as curvas teóricas e empíricas. Os valores de γ são apresentados na Tab. (4.1).

Tabela 4.1: Informações empíricas do θ_i para $i = 1, 2$ em dois ensembles da série *THOU*.

THOU	
N	$\pm 16 \times 10^6$
N_1	8385095
N_2	8392118
ϵ	4,33
θ_{Min}	-8,57
θ_{Med}	$3,3 \times 10^{-8}$
θ_{Max}	8,75
θ_1	-4,33
θ_2	4,33
γ_1	$0,09 \pm 7,02 \times 10^{-4}$
γ_2	$0,09 \pm 7,03 \times 10^{-4}$

4.3 Considerações finais

Da comparação dos resultados teóricos obtidos no Capítulo 3 com a análise empírica da série *THOU*, podemos concluir que:

- 1 As curvas empíricas da correlação têm decaimento do tipo exponencial e apresentam uma convergência assintótica em cada ensemble;
- 2 Os quatro primeiros cumulantes empíricos mostram que, as condições iniciais apresentam um padrão no decaimento e na convergência, do tipo exponencial e assintótica, respectivamente. Estes comportamentos são coerentes com os resultados obtidos no Capítulo 3. A Fig. (4.4) mostra que as trajetórias nos cumulantes empíricos de quarta-ordem têm uma flutuação em torno de valores diferentes de zero. Este comportamento destaca a diferença entre o modelo *THOU* estudado e o modelo *OU* original (Apêndice B), em que as flutuações nestes cumulantes ocorrem em torno de zero. A covariância empírica das condições iniciais apresentam os mesmos padrões no decaimento, tipo exponencial e convergência assintótica como descrito na Eq. (3.78), para $\gamma \neq 0$, e na Eq. (3.2) do Teorema de Doob original, Teo. (3.1);

Capítulo 5

Comparando o Modelo *THOU* com Dados Financeiros

Os modelos de processo estocásticos usados em Finanças são mais relevantes quanto melhor descrevem as decisões dos ativos financeiros. Isto significa que um modelo é considerado satisfatório quando está aderente aos dados empíricos, ou pelo menos é capaz de descrever ou explicar uma grande parte dos eventos que modela.

Os dados reais do sistema financeiro são resultados da atuação de um grande número de negociações no tempo real de negociação a negociação, que pode ser de um minuto, um dia, um mês ou um ano. Podemos aplicar estas séries financeiras em vários modelos estocásticos para analisar características físicas e estatísticas que caracterizam e modelam a evolução temporal do processo. A descrição do sistema complexo descrito nas flutuações de preço fornece informações que podem levar ao entendimento do processo estocástico estudado. Os modelos estocásticos que a Física mais usa, caracterizaram as distribuições das flutuações de diferentes ativos financeiros, em particular dos índices de ações e de taxas de câmbio no mercado financeiro, obtendo resultados excelente com escalas de tempo curto, negociação a negociação (tick-by-tick) e negociações diárias [44, 82, 83].

Os resultados empíricos do modelo *THOU* obtidos no Capítulo 4, mostraram que são satisfatórios quando comparados com os resultados analíticos obtidos no Capítulo 3. Neste capítulo, vamos verificar os comportamentos que caracterizam o modelo *THOU* com dados do mercado financeiro.

5.1 Econofísica e Série Financeira

Na últimas décadas, estudos em teoria de especulações e flutuações no mercado financeiro tem sido desenvolvidos entre economistas e físicos, a chamada subárea *Econofí-*

sica [84].

A Econofísica¹ realiza um estudo de sistemas complexos e suas propriedades estatísticas usando séries empíricas de mercados financeiros. O mercado financeiro pode ser caracterizado como um dos mais fascinantes e desafiadores de sistemas complexos reais devido ao grande número e heterogeneidade dos ativos envolvidos, e a diversidade de interações entre os mesmos. O preço de um ativo financeiro (ação) emerge a partir dessa constante atividade de negociação do mercado, através de mecanismos internos de regulação. Dessa forma, consideramos os preços como uma observação macroscópica resultante das interações microscópicas entre os ativos [44]. Os preços dos ativos financeiros possuem carácter estocástico devido a dois fatores – (1) o mercado financeiro está sujeito a um constante fluxo de informações externas, que são imprevisíveis; (2) a tomada de decisão (compra ou venda) dos ativos possui grande incerteza devido à capacidade limitada de processamento das informações disponíveis [85].

Na Econofísica, o estudo dos processos estocásticos iniciou com a tese de doutorado de Louis Bachelier, sobre Teoria da Especulação das flutuações do preço da ação. Nesse trabalho, o modelo usado foi o Random Walker [44, 86]. A Física Estatística consiste em estudar as propriedades macroscópicas de um sistema complexo. As grandezas observáveis nas séries financeiras podem ser descritas com as ferramentas da Física Estatística. De fato, algumas observações financeiras tem sido estudadas com a terminologia de processos de difusão anômala [87, 88], turbulência [89], intermitência [90] e outros fenômenos físicos. Reciprocamente, a análise da dinâmica de preços pode ajudar a esclarecer processos físicos mais gerais [82, 91]. Assim, a descrição dos dados financeiros por processos estocásticos é de importância teórica, pois os preços de ativos financeiros evoluem no tempo, e podemos impor uma modelagem estocástica pelas propriedades estatísticas [91]. A série de preços de ativos pode ser considerada como uma realização de um processo estocástico [44, 92, 93].

5.2 Síntese de Modelos de E.D.E. da Literatura

Recentemente os estudos da Física aplicada à Economia têm gerado grandes avanços em relação aos modelos aplicados ao mercado financeiro, principalmente no mercado de ações, e em particular na análise das séries temporais econômicas que deu origem a Econofísica, a qual foi desenvolvida a partir de 1900, aplicando ferramentas e métodos da Física para obter o comportamento dos dados financeiros e então explicar os fenômenos da Economia [86]. A complexidade do mercado de ações desperta um interesse de pesqui-

¹O termo Econofísica foi introduzido pelos pesquisadores Rosário Mantega e Gene Stanley que observaram leis de escala no comportamento do índice *Standard and Poor's 500*. O uso de leis de escala na análise de flutuações de ativos financeiros tem levado muitos físicos a encontrar analogias destes a fenômenos físicos [44].

sadores em obter o conhecimento e desenvolvimento de análises científicas quanto a essas variações [43, 44, 56, 64, 83]. A seguir, resumimos alguns modelos que descreve a evolução temporal da flutuação de ativos financeiros.

Os modelos matemáticos e estatísticos provenientes da descrição de sistemas físicos são comumente utilizados para realizar previsões sobre o comportamento dos sistemas financeiros, obtendo leis para descrever seu comportamento esperado, assim como as flutuações em torno deste comportamento padrão. A equação diferencial estocástica

$$du = (\mu + \alpha u)dt + \sigma u^\beta dW, \quad (5.1)$$

define uma classe de processos estocásticos encontrado nas literaturas de Econofísica. Estes modelos podem ser obtidos por desenvolvimento simples, com restrições apropriadas nos quatros parâmetros $\mu, \alpha, \sigma, \beta$. A Tab. (5.1) mostra estas especificações.

Tabela 5.1: Especificações dos parâmetros μ, α, σ e β da Eq. (5.1), por autor.

Modelo	μ	α	σ	β	Referência
Geométrico Browniano	0	$\neq 0$	$\neq 0$	1	[56]
Aritmético Browniano	$\neq 0$	0	$\neq 0$	0	[94]
CIR VR	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	1/2	[95]
Vasicek	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	0	[96]
Dothan	0	0	$\neq 0$	1	[97]
Brennan-Schwartz	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	1	[98]
CEV	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	[99]

Destacamos dois modelos em que são normalmente aplicados na evolução temporal do preço de ações: o modelo Aritmético Browniano em que o parâmetro μdt caracteriza uma variação temporal determinística de preços, com taxa média μ no tempo. O termo σdW_t caracteriza a variação estocástica dos preços, cuja flutuação σ é dada pelo desvio padrão das variações históricas do mesmo. dW_t é o ruído Gaussiano, caracterizado por um processo de Wiener com propriedades: $\langle dW_t \rangle = 0$ e $\langle dW_t^2 \rangle = dt$ [55]. Esta modelo, fornece como solução para a distribuição das flutuações de preços a distribuição Gaussiana, com dispersão proporcional à raiz quadrada do tempo. Este modelo mostrou que a distribuição das variáveis retorno dos preços tinha a mesma forma funcional para diversas escalas de tempo². Além disso, estas distribuições descritas na Tab. (5.1), possuíam caudas com comportamento de lei de potência, bem mais longas do que as distribuições Gaussianas [100]. As primeiras tentativas de modelar dados financeiros usando processos estocásticos foi com o movimento

²Ou seja, as distribuições possuíam propriedade de invariância por mudança de escala temporal.

Browniano com ruído gaussiano, mas o comportamento deste ruído gaussiano é raramente observado na prática, por exemplo, Vãos de Levy³ [101–105].

É o outro modelo é Geométrico Browniano que assume que o preço cresce exponencialmente, e a taxa de crescimento exponencial é supostamente um ruído de Wiener. $u(t)$ representa o preço da ação no tempo t , $du = u(t + \Delta t) - u(t)$ é a variação do preço, denominado por *retorno*. O parâmetro $\alpha u > 0$ representa a taxa média do crescimento exponencial. O parâmetro $\sigma u > 0$ é denominado de volatilidade, que é interpretado como uma medida da magnitude de flutuação da taxa do crescimento exponencial, e $dW = \sqrt{\Delta t}\epsilon$ é um processo de Wiener, em que ϵ é uma variável aleatória gaussiana com $\epsilon \sim N(0, 1)$ [23, 106]. No contexto aplicado à finanças, $\frac{du}{u}$, é decomposto por duas partes: uma determinística, αdt , em que α é uma medida da taxa média de crescimento do preço da ação em um intervalo de tempo dt ; e uma aleatória, σdW , sendo σ a volatilidade, que mede o desvio-padrão das variáveis retorno, e pode ser identificada como efeitos externos que mudam o valor da ação.

Comparando o nosso modelo *THOU* com a Eq. (5.1), temos que: $\mu = 0$, $\alpha = A(\tau) = e^{-\gamma\tau}$ e o ruído é uma variável aleatória arbitrária, cuja função característica é dada no primeiro termo do expoente da Eq. (3.4) e não é Gaussiano. Para fazermos a comparação do modelo *THOU* com dados empíricos, usamos dados financeiros. De fato, certos dados de natureza financeira podem ter distribuições assimétricas e distribuição com curva Leptocúrtica. Por exemplo, estudos empíricos indicam que a distribuição dos ativos gerados em mercados financeiros é assimétrica negativa e a explicação é que, em média os mercados geram rendimentos positivos, no entanto, ocorrem mais perdas altas significativas do que ganhos altos significativos (a cauda esquerda da distribuição tende a alongar) [107].

5.3 Variável de Retorno Logaritmo da Série Financeira

As séries financeiras descrevem um histórico de preços dos ativos, em geral, são não-estacionárias. Estes dados, normalmente são disponíveis em frequências diárias, mensais, trimestrais ou anuais, contudo também há as séries intradiárias, com frequências de um minuto, algumas segundos ou, ainda, sem uma frequência específica, com uma observação para cada negócio realizado, junto com um *time stamp*, um registro do dia, hora, minuto e segundo em que o negócio foi realizado [93].

Há muitas formas de se definir uma variável aleatória que avalia uma série fi-

³Nos Vãos de Lévy a distribuição de tamanho de saltos em um processo estocástico é uma lei de potência, com o segundo momento central infinito. Um exemplo físico dos Vãos de Lévy é dado por Mandelbrot sobre fractais (um pequeno número de saltos grandes domina um número elevado de passos pequenos) e, quantitativamente, no comportamento do deslocamento quadrático com o tempo: $\langle \epsilon_t^2 \rangle \propto t^\gamma$, em que ϵ descreve o ruído do processo [101].

nanceira que descreve a flutuação de preços de ações. Para obtermos uma série estacionária procedemos a sua diferenciação. Para tal, calculamos a série respectiva dos retornos ao invés do uso da série de preços. As principais razões, destaca-se o fato de séries de retornos serem mais fáceis de manipular que as séries de preços, porque sua forma possui propriedades estatísticas mais atrativas, como a estacionariedade obtida pela diferenciação. Existem, entretanto, algumas definições diferentes de retorno; as mais utilizadas são [64, 93]:

Variável de Retorno:

A variável de retorno do ativo no período entre $t - 1$ e t é definido por:

$$\theta(t) = u(t) - u(t - 1), \quad (5.2)$$

em que $u(t)$ e $u(t - 1)$ são os preços de um ativo em tempo t e $t - 1$, respectivamente.

Observação 5.1. Note que, se o preço da ação $u(t)$ caísse para um valor bastante pequeno (próximo a zero), o retorno efetivo tenderia a -1 [108].

Variável de Retorno Logaritmo:

O retorno nos instantes t e $t - \Delta t$ tornam-se muito próximos com Δt sendo infinitesimal. Neste caso, $\theta(t) \ll 1$. Então, o retorno logaritmo é definido por:

$$\theta = \log[u(t)] - \log[u(t - 1)]. \quad (5.3)$$

Observação 5.2. Se o preço da ação, u_t caísse para um valor bastante pequeno (próximo a zero), o retorno logarítmico da ação tenderia a $-\infty$. Esta é a forma mais utilizada de mensuração de retornos, na medida em que se mostra coerente com realidade, ao admitir que o retorno logarítmico da ação possa assumir valores de $-\infty$ a $+\infty$ e que o seu preço possa assumir apenas valores positivos [56, 64, 108].

A comparação do modelo *THOU* com as séries financeiras, em geral, são feitos a partir dos retornos logaritmos. Portanto, a primeira etapa de um estudo desta natureza é calcular os retornos logaritmos a partir das série de preços. A nossa análise de comparação empírica do modelo *THOU* com dados empíricos são concentradas na variável definida na Eq. (5.3).

5.4 Comparação de Resultados Teóricos com Dados Empíricos do Mercado Financeiro (Dados Reais)

Para a compararmos dos resultados teóricos com dados empíricos, comparamos os momentos estatísticos empíricos das séries financeiras com os momentos estatísticos empíri-

cas do modelo *THOU*. Os momentos estatísticos são caracterizado pelos os quatros primeiros cumulantes e as funções de covariância e correlação. As séries financeiras usadas foram selecionadas na *Yahoo Finance*, com preços divulgados a cada dia de negociação, em períodos distintos que variam entre o calendário de 1962 a 2012. Não constam nas amostras feriados, finais de semana e dados de negócios realizados no *after market*. Foram analisadas várias séries financeiras de período longo (desde 1962), com o objetivo de verificarmos se algumas consequências do modelo *THOU* são observados nos dados empíricos. Ou seja, queremos verificar se o modelo *THOU* é capaz de explicar algumas propriedades que são observados nestas séries financeiras. Focamos a nossa atenção em duas propriedades que são características do modelo *THOU*: o decaimento exponencial e a convergência assintótica de momentos estatísticos para os valores não Gaussianos. Este comportamento se ajusta bem com os dados empíricos analisados, em contraste com o modelo *OU* original que prevê a convergência para uma distribuição Gaussiana. As séries financeiras usadas são: ações da *Coca Cola* durante 50-anos em dois períodos; ações da *Shell* durante 25-anos; ações da *Nikkei* durante 28-anos; ações da *Xerox* durante 35-anos e ações da *Petrobras* durante 12-anos. Cada, têm uma quantidade diferente de pontos, indicados nas Tab. (5.2) e Tab. (5.3). As séries financeiras usadas têm escala de tempo por negociações diárias, ou seja, $\Delta t = 1$ é a negociação diária. Estas séries financeiras foram escolhidos por sua robustez para exemplificar as consequências do modelo *THOU*. As análises de comparação são apresentadas na ordem de citação das séries. A seguir, fazemos as comparações do modelo *THOU* com séries financeiras, em que as variáveis estão centradas no retorno logaritmo, definido na Eq. (5.3).

5.4.1 Análise Empírica da Série *Coca Cola*

A Fig. (5.1) mostra evolução temporal do retorno logaritmico diário da série *Coca Cola* durante 50-anos no período de 1962 a 2012, em que é visível a alta e a baixa flutuações neste período. Devido a este fato, a Fig. (5.2) mostra as funções densidades de probabilidades (pdf's) e a evolução temporal do retorno logaritmo diário para os dois períodos de alta e baixa flutuações. E no detalhe, temos as evoluções do retorno logaritmo diário da séries *Coca Cola* durante 26-anos (1962 a 1988) e 24-anos (1988 a 2012). Podemos identificar períodos de grande flutuação no final da evolução dos retornos logaritmos durante 26-anos, e em quase toda a evolução durante 24-anos. As pdf's apresentam assimetria e têm caudas longas quando comparadas com a pdf Gaussiana.

Para as análises dos momentos estatísticos empíricos dos θ , em que u são os preços diários, referente às duas séries *Coca Cola* durante dois períodos, os procedimentos aplicados são análogos ao do Capítulo 4. As Fig. (5.3) e Fig. (5.4) mostram que as funções de autocorrelação e de autocovariância empíricas e teóricas assemelham ao comportamento

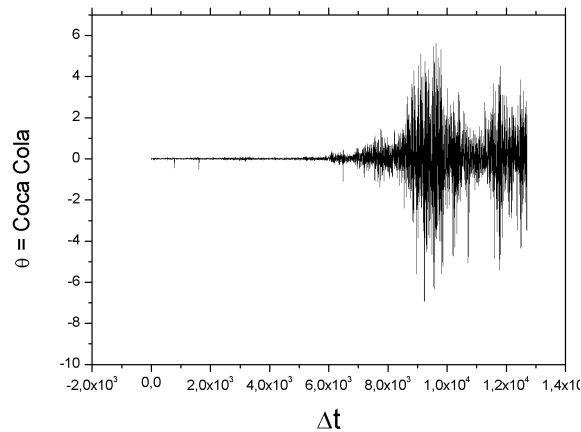


Figura 5.1: Evolução temporal dos retornos θ (Eq. (5.2)) em que $\Delta t = 1$ representa a negociação diária da série *Coca Cola* durante 50-anos no período de 1962-2012.

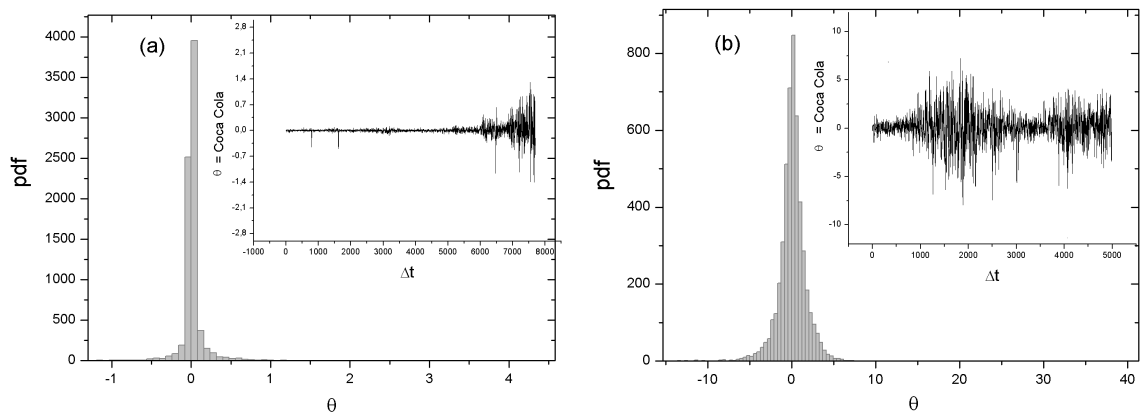


Figura 5.2: Função densidade de probabilidade (pdf) da série *Coca Cola* para dois períodos. No detalhe, Evolução temporal dos retornos θ (Eq. (5.2)) em que $\Delta t = 1$ representa a negociação diária. (a) Para flutuações baixas durante 26-anos no período de 1962-1988. (b) Para flutuações altas durante 24-anos no período de 1988-2012.

do decaimento exponencial e da convergência assintótica da série simulada *THOU*. Podemos observar que ao longo da evolução temporal, os valores da autocorrelação apresentam uma convergência assintótica para zero, e isto garante que a série *Coca Cola* é Markoviana depois de um determinado tempo. Nas Fig. (5.3) e Fig. (5.4), é interessante ressaltar que nos ensembles, os valores das autocorrelações empíricas e das autocovariâncias empíricas têm oscilações com flutuações em torno de zero. Isto mostra uma característica do modelo *THOU*. A Tab. (5.3) mostra os valores de γ em cada ensemble.

A condição de mistura (Seção.(2.2.4)) também pode ser observada na Fig. (5.3), pois a série da *Coca Cola* atinge o equilíbrio quando a evolução temporal das condições iniciais θ_i , para $i = 1, 2$, do preço da ação é irreversível, que é observada quando $t \rightarrow \infty$. Nas

séries financeiras, a irreversibilidade apresenta, geralmente, um preço: a partir do momento que determinadas decisões e evoluções se traduzem por um preço irreversível, elas podem ser consideradas financeiramente irreversíveis. Ou seja, a partir do momento que existem um preço de transação, nenhuma decisão é plenamente reversível. Por outro lado, processos e evoluções podem ser considerados intrinsecamente irreversíveis pelas mudanças institucionais. É possível questionar se o sistema de preços está perto ou longe do equilíbrio: enquanto o primeiro caso os preços podem permitir a volta para a posição de equilíbrio, no segundo, a eficiência informacional do sistema de preços desaparece [109].

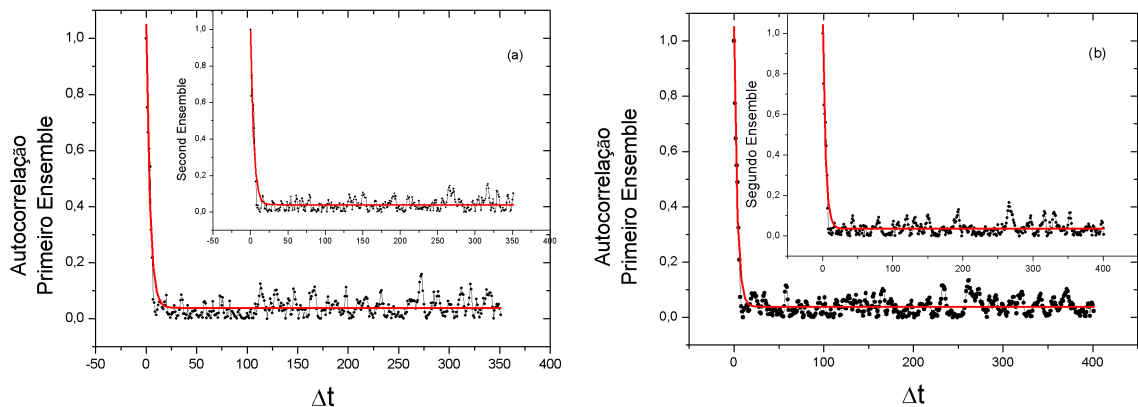


Figura 5.3: Evolução temporal dos retornos logarítmicos θ_i (Eq. (5.3)), $i = 1, 2$, da autocorrelação em que $\Delta t = 1$ representa a negociação diária da série *Coca Cola* durante dois períodos: (a) 1962-1988. (b) 1988-2012. Os símbolos (pretos) representam as autocorrelações empíricas e as linhas sólidas (vermelha) representam as curvas de ajuste exponencial e γ na Tab. (5.2).

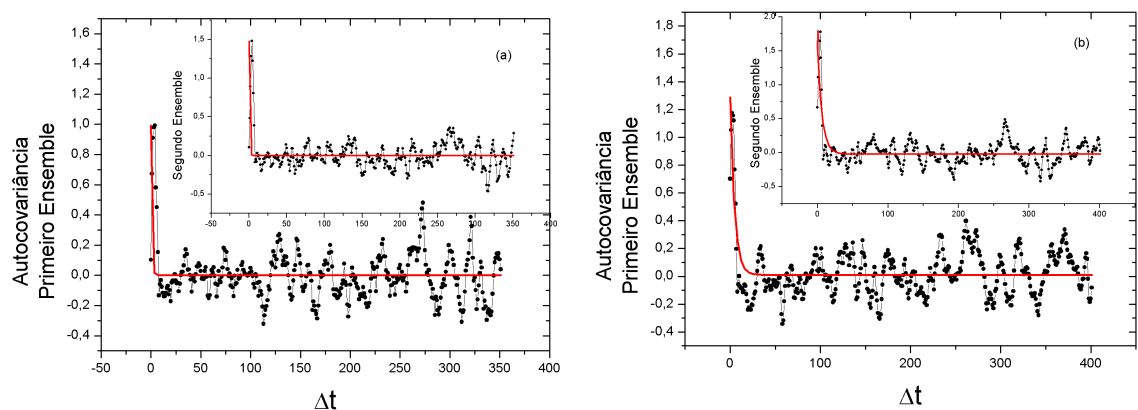


Figura 5.4: Evolução temporal dos retornos logarítmicos θ_i (Eq. (5.3)), $i = 1, 2$, da autocovariância em que $\Delta t = 1$ representa a negociação diária da série *Coca Cola* em dois períodos: (a) 1962-1988. (b) 1988-2012. Os símbolos (pretos) representam as autocovariâncias empíricas e as linhas sólidas (vermelha) representam as curvas teóricas dada na Eq. (4.4) para $n = 2$ e γ na Tab.(5.2).

Com procedimentos análogos aplicados na Tab. (4.1), obtemos as informações

empíricas da Tab. (5.2). A Fig. (5.4) confirma o decaimento exponencial das curvas empíricas e teóricas da autocovariância. A curva teórica foi obtida da Eq. (4.4) para $n = 2$ e os γ na Tab.(5.2). As Fig. (5.5) e Fig. (5.6) mostram e confirmam o comportamento das evoluções temporais das condições iniciais nos quatro primeiros cumulantes das séries *Coca Cola* nos dois períodos. As condições iniciais foram obtidas analogamente ao Capítulo 4 e são mostrados na Tab. (5.2). As Fig. (5.5) e Fig. (5.6) mostram os quatro primeiros cumulantes empíricos e teóricos das séries *Coca Cola* em dois períodos. É interessante ressaltar que os cumulantes empíricos de terceira-ordem e quarta-ordem nos dois períodos indicados, têm flutuações com escalas de oscilação diferentes em torno de zero. Isto é uma característica do modelo *THOU*, que diferencia do modelo *OU* original (Apêndice B).

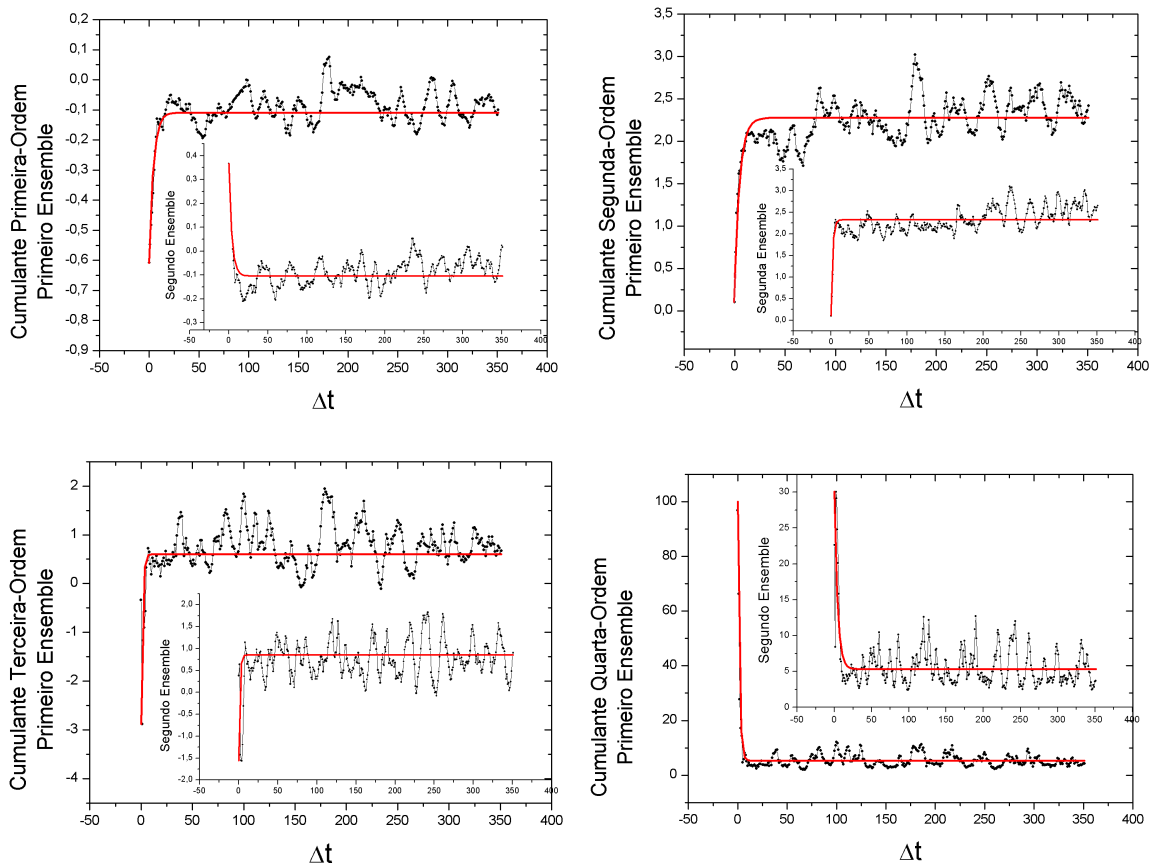


Figura 5.5: Evolução temporal dos retornos logarítmicos θ_i (Eq. (5.3)), $i = 1, 2$, dos quatro primeiros cumulantes em que $\Delta t = 1$ representa a negociação diária da série *Coca Cola* no período de 1962-1988. As curvas com símbolos (pretos) representam os cumulantes empíricos e as linhas sólidas (vermelha) representam as curvas teóricas definidas na Eq. (3.70) para $n = 1-4$ e γ na Tab. (5.2).

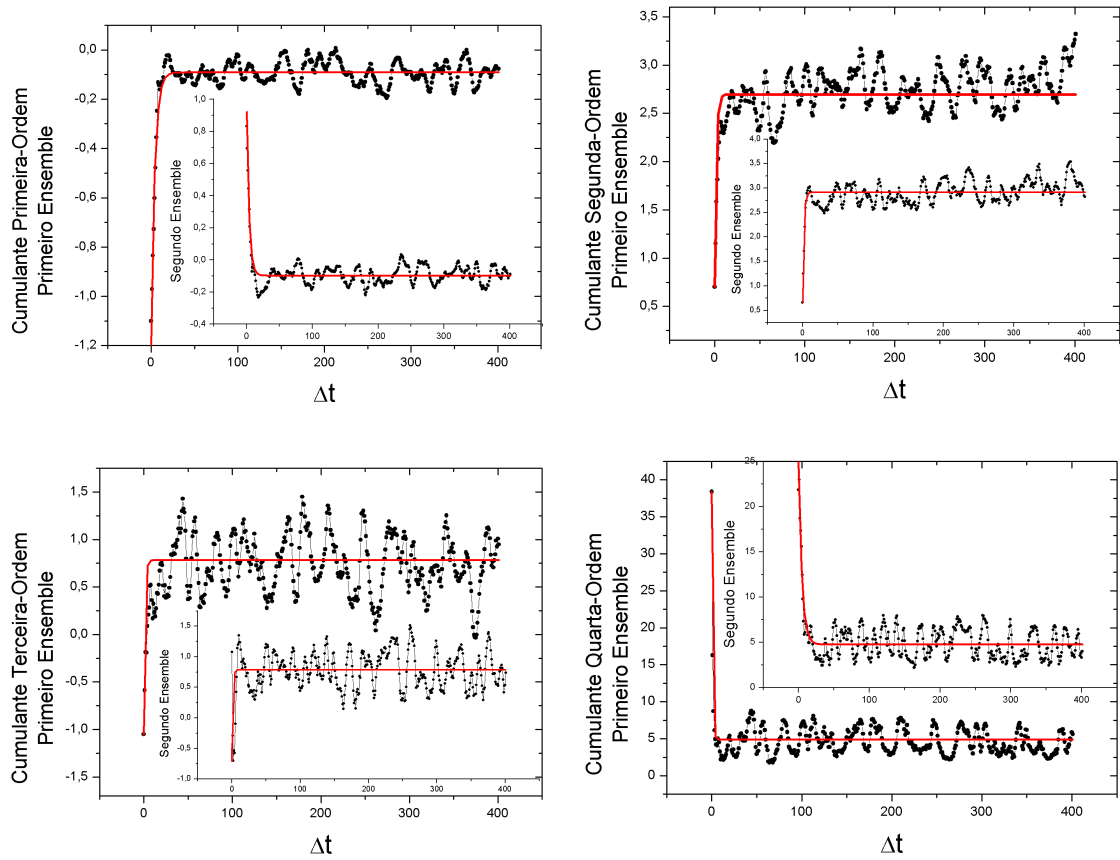


Figura 5.6: Evolução temporal dos retornos logartmos θ_i (Eq. (5.3)), $i = 1, 2$, dos quatro primeiros cumulantes em que $\Delta t = 1$ representa a negociação diária da série *Coca Cola* no período de 1988-2012. As curvas com símbolos (pretos) representam os cumulantes empíricos e as linhas sólidas (vermelha) representam as curvas teóricas definidas na Eq. (3.70) para $n = 1-4$ e γ na Tab. (5.2).

Tabela 5.2: Informações empíricas dos retornos logartmos θ_i (Eq. (5.3)), $i = 1, 2$, em dois ensembles da série *Coca Cola* com dados diários em dois períodos: 1962-1988 e 1988-2012.

	Coca Cola	
Período	Jan/1962–20/Out/1988	21/Out/1988–Jul/2012
N	4999	4998
N_1	1667	2457
N_2	1558	2279
ϵ	0,58	0,58
θ_{Min}	-15,02	-14,86
θ_{Med}	-0,11	-0,12
θ_{Max}	13,23	13,24
θ_1	-0,69	-1,89
θ_2	0,47	1,65
γ_1	$0,27 \pm 0,01$	$0,28 \pm 0,01$
γ_2	$0,24 \pm 0,01$	$0,29 \pm 0,01$

A seguir, examinamos o comportamento da evolução temporal dos momentos estatísticos da série *Shell*. O foco da análise empírica está centrada no comportamento do decaimento exponencial e na convergência assintótica, quando comparado com os dados teóricos do processo *THOU* do Capítulo 3. Pelas análises das curvas dos momentos estatísticos do retorno logarítmico, as flutuações de preço da ação das séries *Coca Cola* durante os dois períodos citados acima, assemelham-se às flutuações da série do modelo *THOU* (Capítulo 4).

5.4.2 Análise Empírica da Série *Shell*

A Fig. (5.7, no quadro (a), mostra a evolução temporal do θ , em que $\Delta t = 1$ é a negociação diária e no quadro (b), mostra a função densidade de probabilidade (pdf) da série *Shell* durante 25-anos no período de Dezembro de 1987 a Julho de 2012. Podemos observar na pdf: mais alta, concentrada e tem caudas pesadas quando comparada com a pdf Gaussiana.

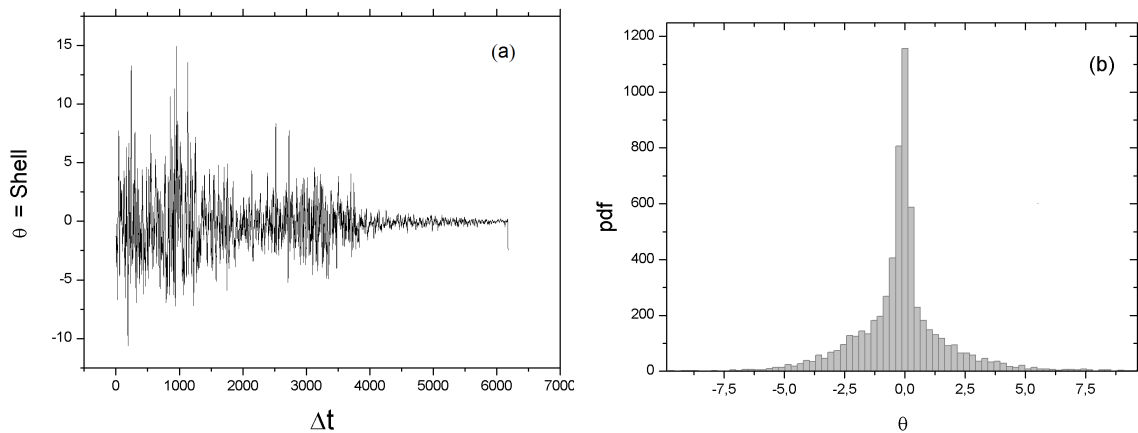


Figura 5.7: (a) Evolução temporal dos retornos θ (Eq. (5.2)) em que $\Delta t = 1$ representa a negociação diária e, (b) Função densidade de probabilidade (pdf) da série *Shell*, no período de 1987-2012.

As hipóteses que fundamentam o modelo *THOU* podem ser observados na forma do decaimento exponencial e na convergência assintótica das curvas empíricas comparadas as curvas teóricas. A Fig. (5.7) mostra que as funções de autocorrelação e a autocovariância empíricas da série. A função de correlação mostra seu decaimento exponencial como na sua definição (Eq. (3.81)), e a função de covariância empírica obedece a forma e a convergência dada na Eq. (3.77) semelhante no decaimento exponencial e na convergência da série simulada *THOU*. A convergência para zero na correlação, garante que a série *Shell* é markoviana depois de um determinado tempo. A condição de mistura (Seção.(2.2.4)) também pode ser observada na Fig. (5.8), indicando que a série *Shell* é irreversível. Esta irreversibilidade é observada pela função de autocorrelação se anular quando $t \rightarrow \infty$, como garantido na Eq. (2.13), e isto confirma que a série *Shell* é estacionária.

As constantes λ e γ que aparecem nas Eq. (3.4), Eq. (3.70) e Eq. (3.78), que determinam a frequência de saltos e a taxa de dissipação de energia, respectivamente. Para descrevermos as curvas teóricas, estimamos o valor de γ pelo ajuste da função de correlação. Para a função de autocovariância e os quatro primeiros cumulantes teóricos, usamos as Eq. (3.2), Eq. (3.70) para $n = 2$, Eq. (3.70) e Eq. (3.78), em que $k_1 = \bar{c}_n$ e $k = \frac{\lambda \mu_n}{\gamma n}$, para $n = 1, 2, 3, 4$, que determinam os pontos inicial e final na curva de ajuste.

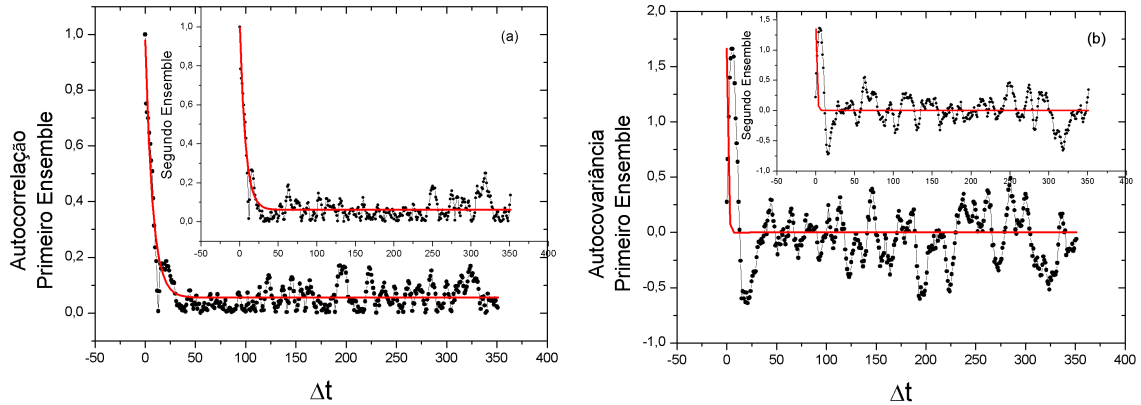


Figura 5.8: Evolução temporal dos retornos logartmos θ_i (Eq. (5.3)), $i = 1, 2$, da autocovariância em que $\Delta t = 1$ representa a negociação diária da série *Shell* em dois ensembles: (a) Autocorrelação e, (b) Autocovariância. Os símbolos (pretos) representam as autocorrelações e as autocovariâncias empíricas e as linhas sólidas (vermelha) representam a curva de ajuste exponencial da autocorrelação e a curva teórica da autocovariância, dada na Eq. (4.4) para $n = 2$ e γ na Tab. (5.3).

Para confirmarmos a dependência temporal. O quadro (a) da Fig. (5.8) mostra o decaimento exponencial e a convergência assintótica das funções de autocorrelação empírica e teórica da série *Shell*. É interessante ressaltar que nos dois ensembles, os valores da autocorrelação empírica têm oscilações em torno de zero. No quadro (b), da Fig. (5.8), mostra as mesmas características identificadas na função de autocorrelação, para as funções de autocovariância empíricas nos dois ensembles. A Fig. (5.9) mostra a evolução temporal dos retornos logartmos θ_i (dado na Eq. (5.3)), $i = 1, 2$, para os quatro primeiros cumulantes em que $\Delta t = 1$ representa a negociação diária da série *Shell* no período de 1987-2012. A Tab. (5.3) mostra os valores empíricos de γ em cada ensemble.

Pelas análises das curvas dos momentos estatísticos das condições iniciais θ_i para $i = 1, 2$ dados na Tab. (5.3), em dois ensembles, observamos que os comportamentos dos decaimentos exponenciais e as convergências assintóticas assemelham-se aos da série *THOU* (Capítulo 4). Nas próximas seções, fazemos as mesmas análises dos momentos estatísticos usando as séries financeiras de quatro Empresas, são elas: *Nikkei*, *Shell*, *Xerox* e *Petrobrás*.

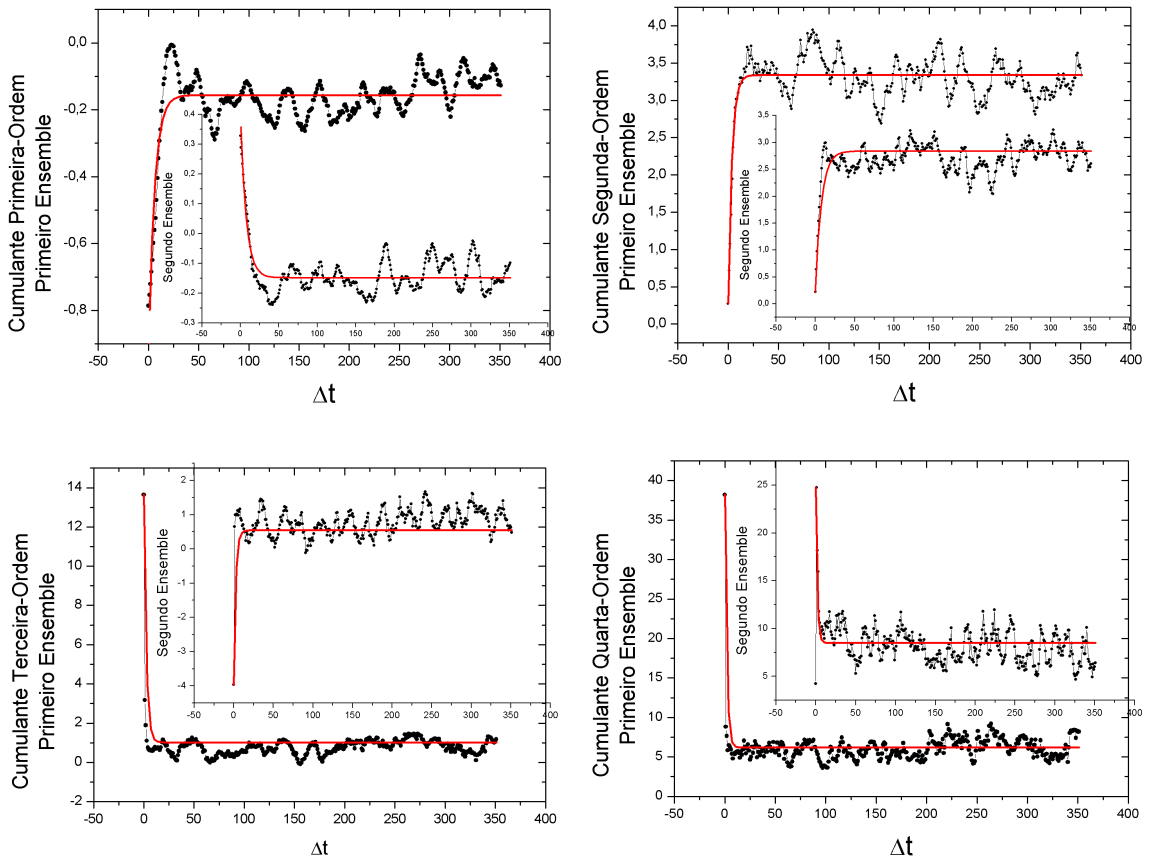


Figura 5.9: Evolução temporal dos retornos logartmos θ_i (Eq. (5.3)), $i = 1, 2$, dos quatro primeiros cumulantes em que $\Delta t = 1$ representa a negociação diária da série *Shell* no período de 1987-2012. As curvas com símbolos (pretos) representam os cumulantes empíricos e as linhas sólidas (vermelha) representam as curvas teóricas definidas na Eq. (3.70) para $n = 1-4$ e γ na Tab.(5.3).

5.4.3 Análise Empírica da Série *Nikkei*

A Fig. (5.10) mostra a evolução dos θ diários e a pdf da série *Nikkei* negociada na Osaka Exchange, durante 28-anos no período de Janeiro de 1984 a Janeiro de 2012. Podemos identificar períodos de grande volatilidade. Estes períodos prolongam-se em quase toda a série. A pdf têm um pouco de assimetria e caudas longas comparada a pdf Gaussiana. Fig. (5.10) mostra o decaimento exponencial e a convergência assintótica das funções de autocorrelação e da autocovariância empíricas e teóricas da série *Nikkei*. É interessante ressaltar que nos dois ensembles, os valores destas funções empírica têm oscilações alta com flutuação em torno de números diferentes de zero.

As próximas figuras, mostram o comportamento da evolução temporal da condições iniciais θ_i para $i = 1, 2$ em dois ensembles, da série *Nikkei*. Os valores das condições iniciais estão na Tab. (5.3). Os procedimentos aplicados nas análises são análogas aos das séries *THOU*, *Coca Cola* e *Shell*.

Tabela 5.3: Informações empíricas dos retornos logartmos θ_i (Eq. (5.3)), $i = 1, 2$, em dois ensembles usando as séries *Nikkei*, *Shell*, *Xerox* e *Petrobras* com dados diários.

	Nikkei	Shell	Xerox	Petrobras
Período	Out/2010-Jul/2012	Dez/1987-Jul/2012	Jan/1977-Jun/2012	Jun/2000-Jun2012
N	7012	6186	8955	1712
N_1	3341	2023	4099	848
N_2	2975	2514	4342	817
ϵ	463,11	0,93	0,42	3,39
θ_{Min}	-10376,80	-12,73	-5,65	-16,31
θ_{Med}	$-9,08 \times 10^{-8}$	-0,17	$-1,74 \times 10^{-3}$	-0,10
θ_{Max}	4443,00	13,25	9,39	10,87
θ_1	-472,20	-1,10	-0,42	-0,41
θ_2	454,03	0,76	0,42	0,41
γ_1	$0,29 \pm 0,01$	$0,14 \pm 0,01$	$0,97 \pm 0,07$	$0,25 \pm 0,02$
γ_2	$0,26 \pm 0,02$	$0,18 \pm 0,04$	$1,09 \pm 0,03$	$0,26 \pm 0,02$

A evolução temporal têm decaimento exponencial e a convergência assintótica desta série, e se assemelham aos da série *THOU*, do Capítulo 4. Estas características mostram que a série *Nikkei* tem a propriedade Markoviana depois de um determinado tempo. A condição de mistura (Seção.(2.2.4)) também pode ser observada, ou seja, a série atinge o equilíbrio quando a evolução temporal das condições iniciais são irreversíveis. Esta irreversibilidade pode ser observada pela função de autocorrelação se anular quando $t \rightarrow \infty$, como garantido na Eq. (2.13), confirmando propriedade estacionária da série.

A constante λ que aparece nas Eq. (3.4), Eq. (3.70) e Eq. (3.78), determina a frequência de saltos. Esta constante não pode ser estimada devido sua ligação direta com a função característica $g(z)$. A constante γ determina a dissipação de energia e foram obtidas analogamente como no Capítulo 4. Os valores de γ por ensemble, estão na Tab. (5.3). A Fig. (5.12) mostra os quatro primeiros cumulantes empíricos e teóricos da série *Nikkei*. É interessante ressaltar que os cumulantes empíricos de terceira-ordem e quarta-ordem têm flutuações com escalas que oscilam em torno de número diferentes de zero nos dois ensembles, confirmando a característica do modelo *THOU*, que diferencia do modelo *OU* original (Apêndice B).

Portanto, pelas análises das curvas dos momentos estatísticos do retorno logaritmico, as flutuações de preço da ação *Nikkei* assemelham-se às flutuações das variáveis que descrevem a série do modelo *THOU* do Capítulo 4 e as séries da *Coca Cola* nos dois períodos da Seção (5.4.1). Na próxima seção, analisamos os momentos estatísticos da *Petrobrás*.

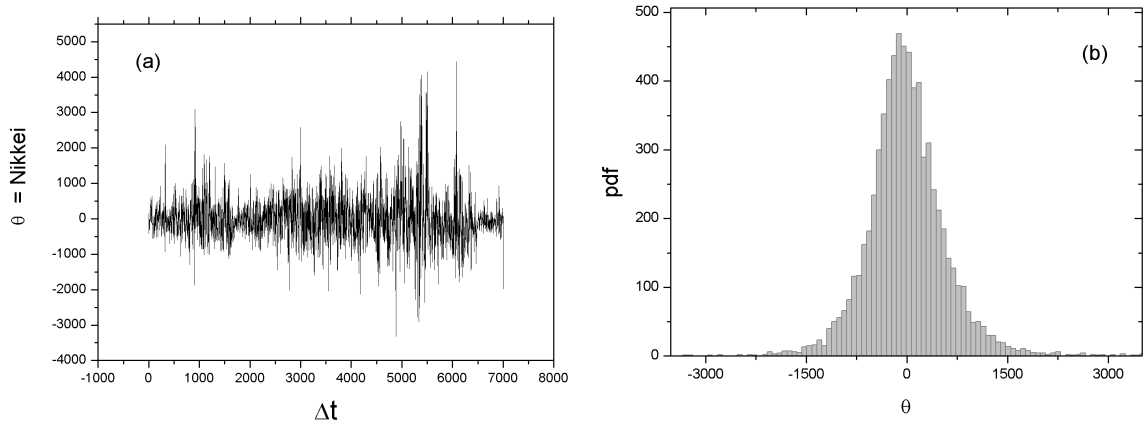


Figura 5.10: (a) Evolução temporal dos retornos θ (Eq. (5.2)) em que $\Delta t = 1$ representa a negociação diária e, (b) Função densidade de probabilidade (pdf) da série *Nikkei*, no período de 1984-2012.

5.4.4 Análise Empírica da Série *Xerox*

A Fig. (5.13), quadro (a), apresenta os retornos dos preços diários das ações da *Xerox* no período de 1977 a 2012. É visível a concentração da alta volatilidade, que ocorre entre 2500 a 4500 negociações diárias.

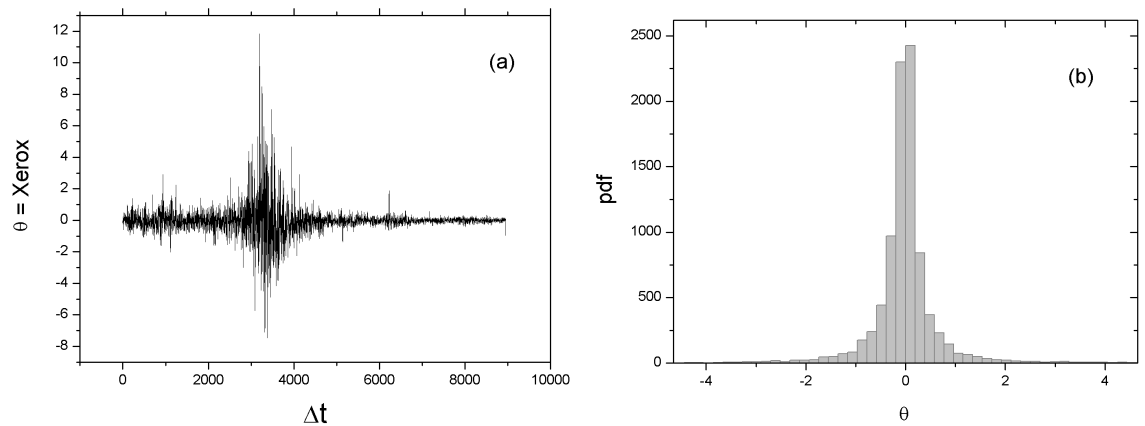


Figura 5.13: (a) Evolução temporal dos retornos θ (Eq. (5.2)) em que $\Delta t = 1$ representa a negociação diária e, (b) Função densidade de probabilidade (pdf) da série *Xerox*, no período de 1977-2012.

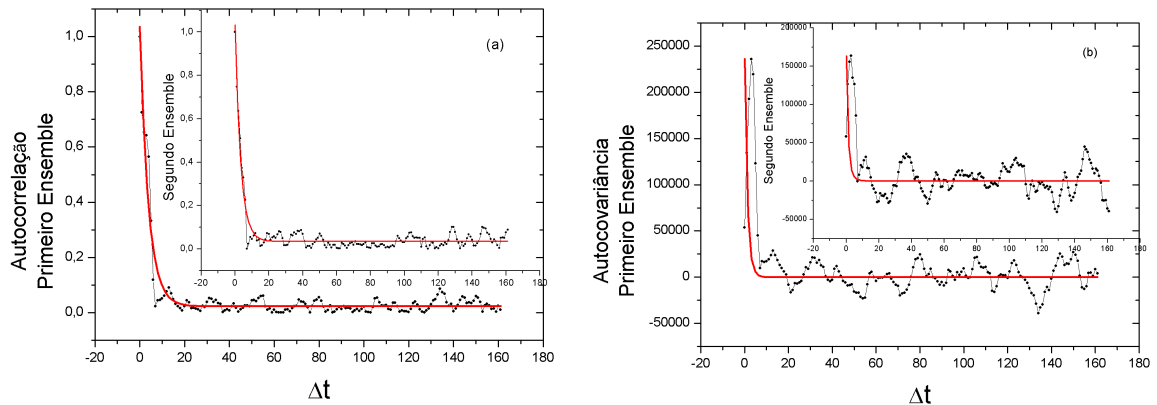


Figura 5.11: Evolução temporal dos retornos logartmos θ_i (Eq. (5.3)), $i = 1, 2$, da autocovariância em que $\Delta t = 1$ representa a negociação diária da série *Nikkei* em dois ensembles: (a) Autocorrelação e, (b) Autocovariância. Os símbolos (pretos) representam as autocorrelações e as autocovariâncias empíricas e as linhas sólidas (vermelha) representam a curva de ajuste exponencial da autocorrelação e a curva teórica da autocovariância, dada na Eq. (4.4) para $n = 2$ e γ na Tab. (5.3).

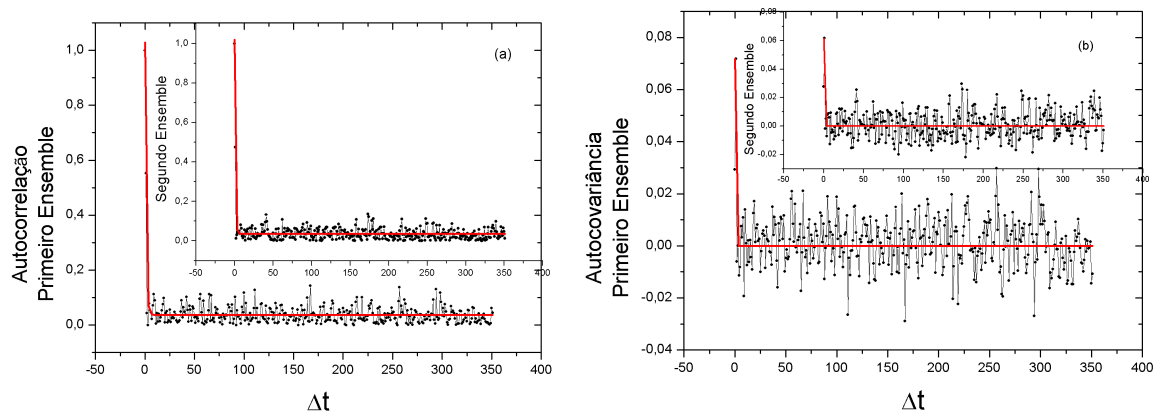


Figura 5.14: Evolução temporal dos retornos logartmos θ_i (Eq. (5.3)), $i = 1, 2$, da autocovariância em que $\Delta t = 1$ representa a negociação diária da série *Xerox* em dois ensembles: (a) Autocorrelação e, (b) Autocovariância. Os símbolos (pretos) representam as autocorrelações e as autocovariâncias empíricas e as linhas sólidas (vermelha) representam a curva de ajuste exponencial da autocorrelação e a curva teórica da autocovariância, dada na Eq. (4.4) para $n = 2$ e γ na Tab. (5.3).

A Fig. (5.14) mostra o comportamento do decaimento exponencial e a convergência assintótica das funções de autocorrelação e da autocovariância empíricas e teóricas da série *Xerox*. É interessante ressaltar que nos dois ensembles, os valores destas funções empíricas têm oscilações com flutuações em torno de zero.

A Fig. (5.15) mostra os quatro primeiros cumulantes empíricos e teóricos da série *Xerox*. É interessante ressaltar que os cumulantes empíricos de terceira-ordem e quarta-ordem têm oscilações com escalas de flutuações em torno de números diferentes de zero, que

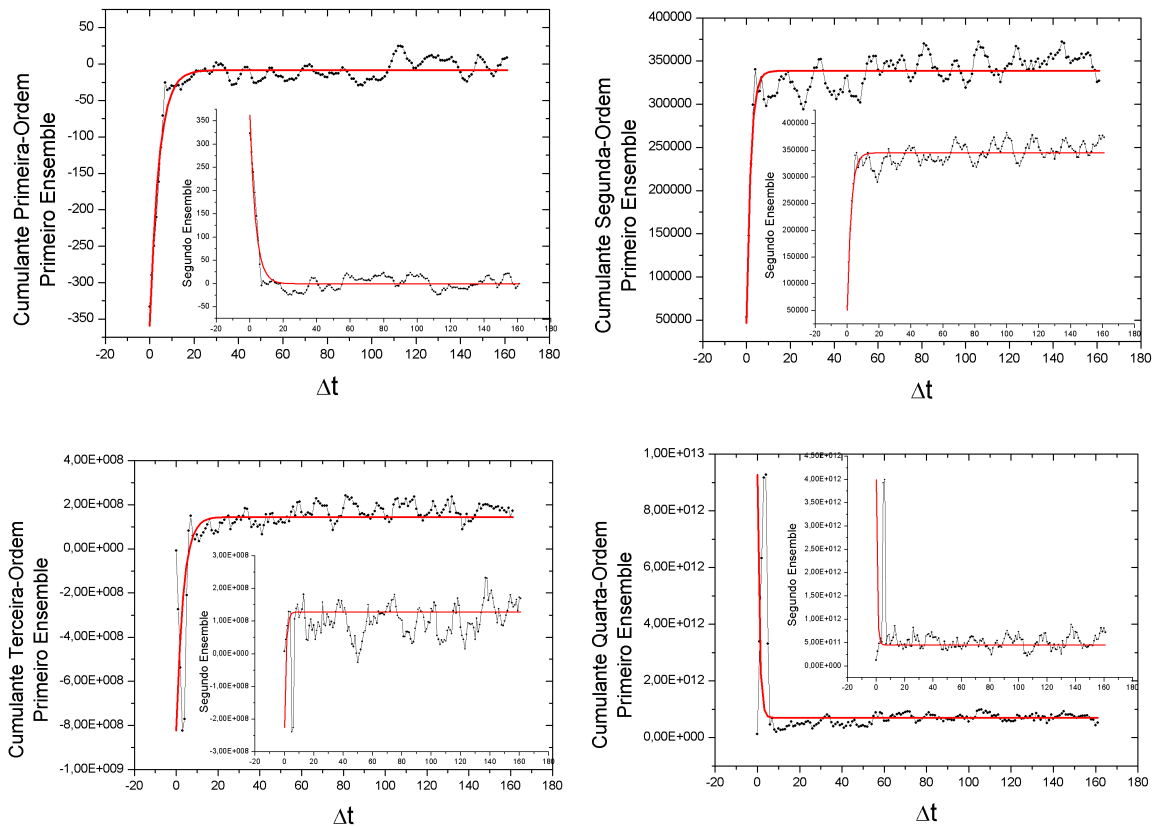


Figura 5.12: Evolução temporal dos retornos logartmos θ_i (Eq. (5.3)), $i = 1, 2$, dos quatro primeiros cumulantes em que $\Delta t = 1$ representa a negociação diária da série *Nikkei* no período de 2010-2012. As curvas com símbolos (pretos) representam os cumulantes empíricos e as linhas sólidas (vermelha) representam as curvas teóricas definidas na Eq. (3.70), $n = 1-4$ e γ na Tab.(5.3).

a característica do modelo *THOU*, que diferencia do modelo *OU* original. Portanto, pelas análises das curvas dos momentos estatísticos do retorno logaritmo, as flutuações de preço da ação *Xerox* assemelham-se às flutuações da variável aleatória da série *THOU* (Capítulo 4).

5.4.5 Análise Empírica da Série *Petrobrás*

A Fig. (5.16), quadro (a), mostra que a evolução dos retornos diários e no quadro (b), mostra a pdf da série *Petrobrás* são semelhantes da série *Xerox*. As oscilações dos valores da autocorrelação e da autocovariância têm flutuações em torno de zero nos dois ensembles.

A Fig. (5.17) mostra o comportamento do decaimento exponencial e a convergência assintótica das funções de autocorrelação e da autocovariância empíricas e teóricas da série *Xerox*. É interessante ressaltar que nos dois ensembles, os valores destas funções empíricas têm oscilações com flutuações em torno de zero.

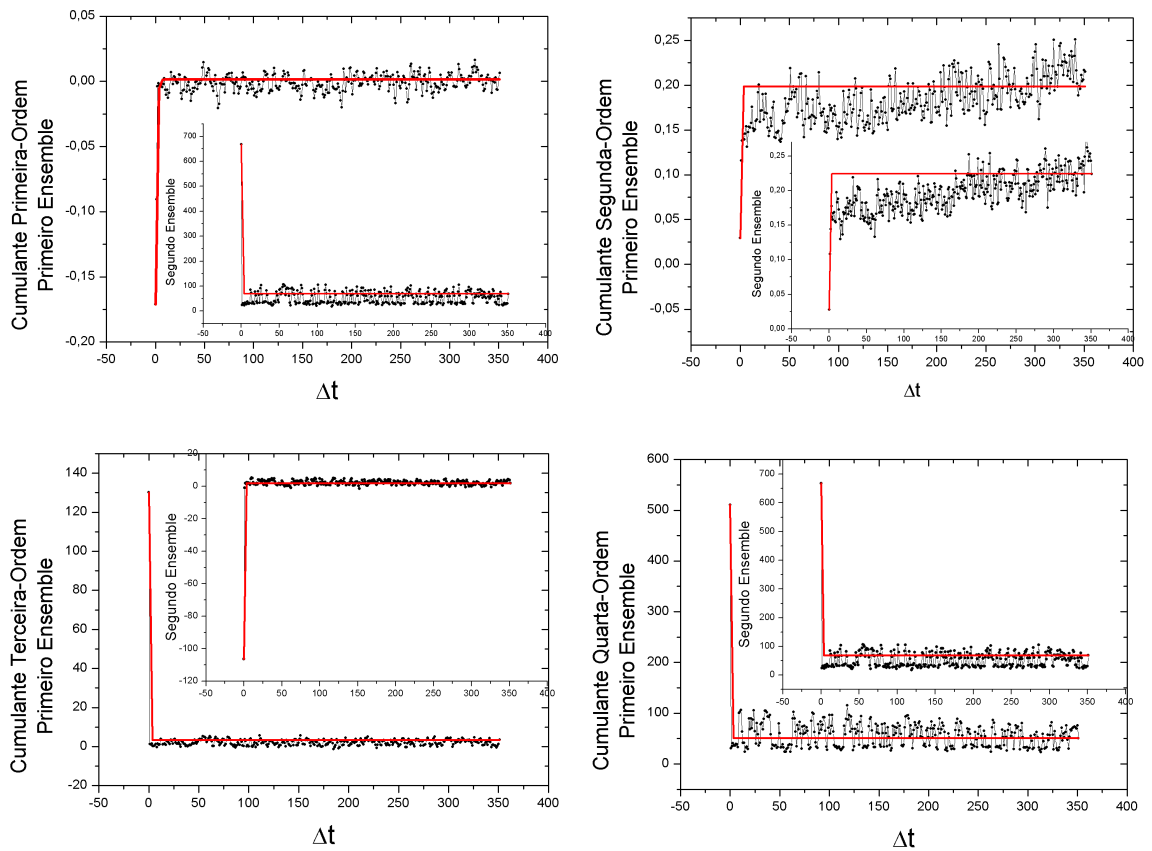


Figura 5.15: Evolução temporal dos retornos logartmos θ_i (Eq. (5.3)), $i = 1, 2$, dos quatro primeiros cumulantes em que $\Delta t = 1$ representa a negociação diária da série *Xerox* no período de 1977-2012. As curvas com símbolos (pretos) representam os cumulantes empíricos e as linhas sólidas (vermelha) representam as curvas teóricas definidas na Eq. (3.70), $n = 1-4$ e γ na Tab. (5.3).

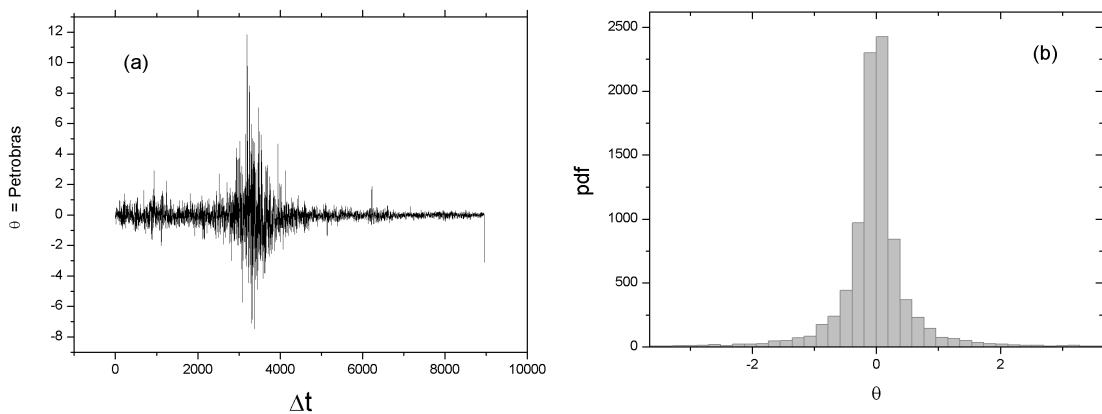


Figura 5.16: (a) Evolução temporal dos retornos θ (Eq. (5.2)) em que $\Delta t = 1$ representa a negociação diária e, (b) Função densidade de probabilidade (pdf) da série *Petrobras*, no período 2000-2012.

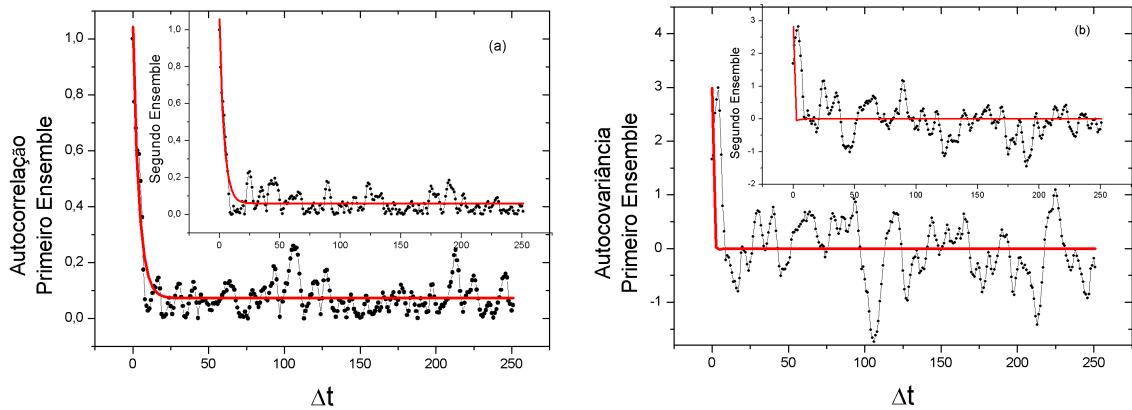


Figura 5.17: Evolução temporal dos retornos logartmos θ_i (Eq. (5.3)), $i = 1, 2$, da autocovariância em que $\Delta t = 1$ representa a negociação diária da série *Petrobras* em dois ensembles: (a) Autocorrelação e, (b) Autocovariância. Os símbolos (pretos) representam as autocorrelações e as autocovariâncias empíricas e as linhas sólidas (vermelha) representam a curva de ajuste exponencial da autocorrelação e a curva teórica da autocovariância, dada na Eq. (4.4) para $n = 2$ e γ na Tab. (5.3).

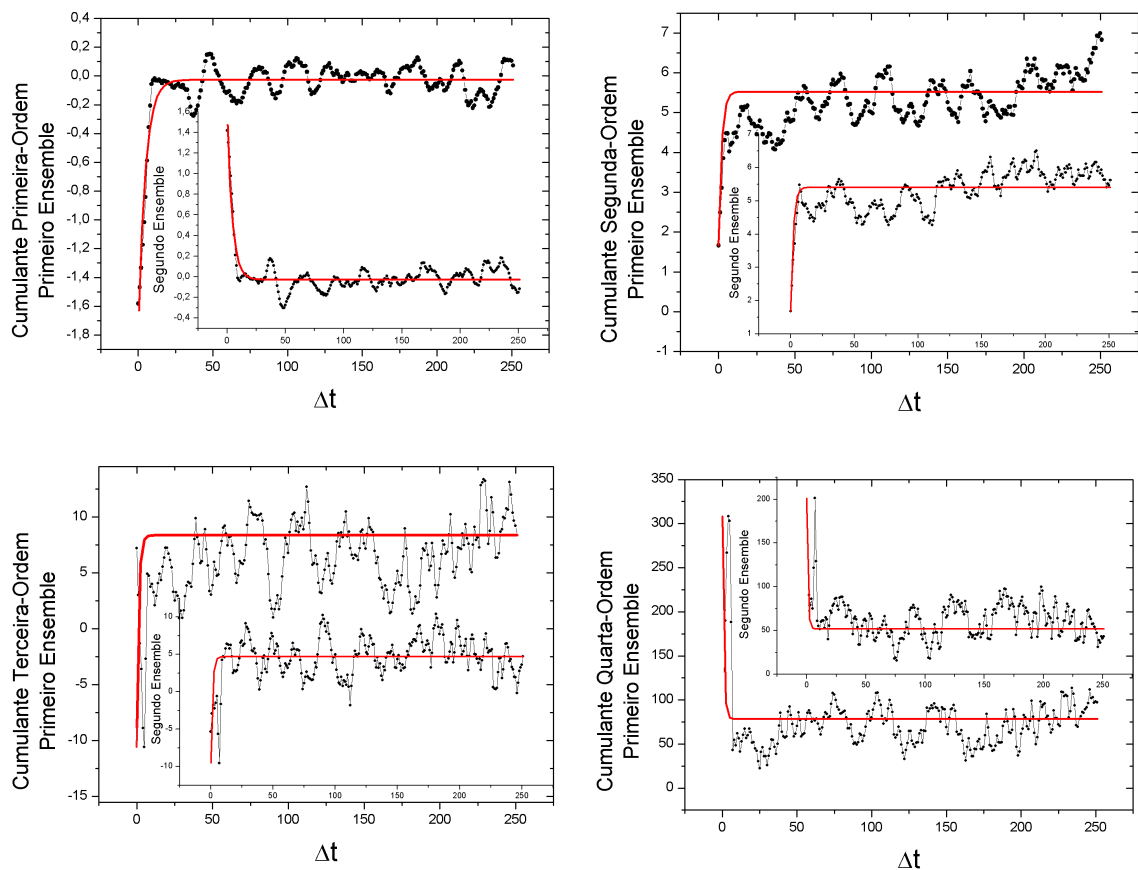


Figura 5.18: Evolução temporal dos θ_i para $i = 1, 2$ em dois ensembles dos quatro primeiros Cumulantes da série *Petrobras*. As curvas com símbolos (pretos) representam os cumulantes empíricos e as linhas sólidas (vermelha) representam as curvas teóricas dedinidas na Eq. (3.70), para $n = 1-4$ e γ na Tab. (5.3).

A Fig. (5.18) mostra os quatro primeiros cumulantes empíricos e teóricos da série *Petrobrás*. Como na série da *Xerox*, a série da *Petrobras*, apresenta cumulantes empíricos de terceira-ordem e quarta-ordem com flutuações que oscilam em torno de números diferentes de zero, ou seja, mostra a característica do modelo *THOU* que diferencia do modelo *OU* original (Apêndice B). Logo, pelas análises das curvas dos momentos estatísticos do retorno logarítmico, as flutuações de preço da ação *Petrobras* assemelham-se às flutuações da variável retorno da série *THOU* (Capítulo 4).

5.5 Considerações finais

Das análises das séries *Coca Cola*, *Nikkei*, *Shell*, *Xerox* e *Petrobras* que descrevem o retorno logarítmico das flutuações de preço de ações, podemos observar que as curvas empíricas dos seus momentos estatísticos têm um comportamento semelhante as curvas empíricas do retorno logarítmico da série simulada da série *THOU* que descreve o processo de *THOU* (Capítulo 4). As excessões ficam nos valores das informações empíricas contidas nas Tab. (5.2) e Tab. (5.3). Das análises realizadas neste Capítulo, observamos que:

- 1 As curvas empíricas da correlação das séries financeiras têm o mesmo decaimento exponencial e convergem assintoticamente para zero em cada ensemble escolhido empiricamente, em que avaliamos a evolução temporal das condições iniciais, como garantido nas curvas teóricas e empíricas da correlação do modelo *THOU*. Isto mostra que as condições iniciais do preço das ações convergem para o equilíbrio do processo e esta convergência é irreversível;
- 2 As curvas empíricas dos cumulantes de quarta-ordem apresentam flutuações em torno de valores diferentes de zero. Esta característica diferencia o modelo *THOU* do modelo *OU* original (Apêndice B);
- 3 As curvas empíricas da covariância em cada ensemble têm decaimento exponencial como descrito na Eq. (3.78), para $\gamma \neq 0$ nas Tab. (5.2) e Tab. (5.3), e obedece a forma dada na Eq. (3.2) do Teorema de Doob original, Teo. (3.1);
- 4 Os valores da constante γ das séries financeiras usadas foram obtidos pelo ajuste exponencial da função de correlação, comparados por ensembles, são aproximadamente semelhantes;
- 5 Dos resultados analíticos obtidos no Capítulo 3, Eq. (3.78) e Eq. (3.79), obtemos os resultados qualitativos. As análises desses resultados foram focados na forma do decaimento exponencial e na convergência assintótica horizontal;
- 6 O modelo *THOU* foi capaz de explicar algumas propriedades que são observados nas séries financeiras selecionadas.

Portanto, com relação as séries financeiras analisadas, o modelo *THOU* mostrou que os investimentos são viáveis. De fato, em todas as figuras, a evolução temporal mostra que as negociações financeiras iniciaram com risco alto, e decaí rapidamente, de forma exponencial e com convergência assintótica horizontal, ou seja, se estabilizam ao longo do tempo, fato observado pela estacionariedade. Desta forma, o processo *THOU* apresenta bom ajuste dentro das séries financeiras apresentadas.

Capítulo 6

Conclusão

Nesta tese, investigamos uma generalização do Processo de Ornstein-Uhlenbeck que é essencialmente o único processo que é Gaussiano, Markoviano e estacionário. Esse resultado é conhecido como teorema de Doob [1, 72]. Para recuperar a condição de Gaussianidade da nossa sugestão, basta definir $B(\tau)$ (Eq. (3.3)) como gaussiana.

A sugestão da generalização foi para o caso de processos Markovianos lineares e homogêneos no tempo, em que relaxamos as condições de gaussianidade e estacionariedade, respectivamente, a alguns casos de interesse.

Na comparação do modelo *THOU* com dados empíricos, escolhemos algumas séries financeiras que descrevem os preços de ações com negociações diárias. Buscamos escolher séries financeiras negociadas em mercados diferentes, como o Americano de Nova York, Asiático de Osaka e Brasileiro de São Paulo, com duração e períodos diferentes. Em nossa comparação, focamos nas análises na evolução temporal das condições iniciais escolhidas empiricamente em cada ensemble (também escolhido empiricamente). Esta evolução temporal do processo foi focado no padrão do decaimento exponencial e no comportamento da convergência assintótica horizontal, como observado nos resultados teóricos e também, nos momentos estatísticos da série simulada *THOU*, Capítulo 4.

Portanto, as análises dos momentos estatísticos empíricos das séries financeiras usadas apresentaram resultados obviamente semelhantes aos do modelo *THOU*. No entanto, existem diferenças significativas. Em todas as evoluções temporais dos retornos logaritmos nas séries financeiras usadas, observamos a presença de uma propriedade importante no cumulante de quarta ordem do modelo *THOU*. Esta propriedade diferencia do modelo *OU* original. No entanto, o modelo *THOU* representa uma boa melhora na análise empírica, quando comparado com o modelo *OU*, e, vale ressaltar, mantendo a sua simplicidade. Basicamente, o modelo *THOU* pode explicar a forma como as séries financeiras convergem para

uma distribuição não Gaussiana, e isto não pode ser observado no modelo OU .

Obtivemos a solução da equação de Chapman-Kolmogorov pela função característica associada à probabilidade de transição; os resultados analíticos e a análise empírica explicam a forma como as séries financeiras convergem para uma distribuição não-Gaussiana.

Os valores da constante γ , obtidos pelo ajuste exponencial da autocorrelação, indicados na Tab. (5.1) das séries financeiras, nos ajudou traçar e a concluir que as trajetórias empíricas dos momentos estatísticos do modelo $THOU$ assemelham-se às trajetórias empíricas dos momentos estatísticos do retorno logaritmo das séries financeiras usadas, e de fato mostra a consistência do modelo $THOU$, e também o seu bom desempenho na explicação dos dados empíricos. Portanto, o modelo $THOU$ é satisfatório e aderente aos dados empíricos financeiros, pois foi capaz de descrever e explicar uma grande parte das suas características.

6.1 Perspectivas para Pesquisas Futuras

Como trabalhos futuros, indicamos a sugestão de estudo mais detalhado sobre constante λ da Eq. (3.4), para isso, precisamos definir uma distribuição de probabilidade para a função característica $g(\cdot)$. Esta constante têm significado físico: representa a quantidade de saltos do processo estocástico.

Referências Bibliográficas

- [1] DOOB, J. L. The brownian movement and stochastic equations. *The Annals of Mathematics, Second Series*, v. 43, n. 2, 1942.
- [2] UHLENBECK, G. E.; ORNSTEIN, L. S. On the theory of brownian motion. *Phys. Rev.*, n. 36, p. 823–841, 1930.
- [3] WANG, M. C.; UHLENBECK, G. E. On the theory of brownian motion. *II, Rev. Modern Phys*, MR0013266(7,130e), n. 17, p. 823–841, 1945.
- [4] ALILI, L.; PATIE, P.; PEDERSEN, J. L. *Hitting time of a fixed level by an Ornstein-Uhlenbeck process*. [S.l.: s.n.], 2002.
- [5] KAMPEN, N. G. van. *Stochastic processes in physics and chemistry*. Amsterdam: North-Holland, 1990.
- [6] BREIMAN, L. *Probability*. Addison-Wesleys: [s.n.], 1968.
- [7] KARATZAS, I.; SHREVEN, S. E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag: [s.n.], 1988.
- [8] CHUNG, K. L.; WALSH, J. B. *Markov processes, Brownian motion, and time symmetry*. New York: Springer Science and Business Media Inc., 2005.
- [9] REVUZ, D.; YOR, M. *Continuos martingales and Brownian motion*. New York: Springer Science and Business Media Inc., 1999.
- [10] SUTHERLAND, W. A dynamical theory of difusion for non-electrolytes and the molecular mass of albumin business. *Phil. Mag.*, v. 9, n. 781, 1905.
- [11] NELSON, E. *Dynamical theories of brownian motion*. [S.l.]: Princeton University Press, 2001.
- [12] FISCHER, S. *Séries univariantes de tempo - metodologia de Box e Jenkins*. Porto Alegre: Fundação de economia e estatística, 1982.

- [13] BEHME, A. D.; LINDER, A.; APPLEBAUM, D. *Generalized Ornstein-Uhlenbeck Process and Extensions*. Dissertação (Mestrado) — Carl-Friedrich-Gauss-Fakultaet Technische Universitaet Carolo-Wilhemina zu Braunschweig, 2011.
- [14] CÁCERES, M. O.; BUDINI, A. The generalized ornstein-uhlenbeck process. *J. Physics. A: Math. Gen.*, v. 30, p. 8427–8444, 1997.
- [15] LIM, S. C.; MUNIANDY, S. V. Generalized ornstein-uhlenbeck processes and associated self-similar processes. *J. Physics A: Mathematical and General*, v. 36, p. 3961–3982, 2003.
- [16] BEZUGLYY, V. et al. Generalized ornstein-uhlenbeck processes. *Journal of Mathematical Physics*, v. 47, p. 73301–73322, 2006.
- [17] COMMANDEUR, J.; KOOPMAN, S. *An introduction to state space time series*. Oxford: Oxford University Press, 2007.
- [18] ARFKEN, G. *Física Matemática - Métodos Matemáticos para Engenharia e Física, vol. 1*. São Paulo: Campus Elsevier, 2006.
- [19] GNEDENKO, B. V. *Coleção Clássicos da Matemática. A teoria da probabilidade: Traduções a série de textos clássicos da American Mathematical Society*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2008.
- [20] FELLER, W. *Introduction to probability theory and its applications, Vol. 1 e 2*. New York: John Wiley and Sons, 1967.
- [21] GARDINER, C. W. *Handbook of stochastic methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences*. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [22] PAPOULIS, A. *Probability, random variables, and stochastic processes*. New York: McGraw-Hill, 1991.
- [23] CASTRO, M. T. de; Figueiredo Neto, A. D. *Equações de difusão associadas a séries temporais estocásticas: Kramers-Moyal versus Fokker-Planck*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, 2009.
- [24] BERTSEKAS, J. N. T. D. P. *Introduction to Probability*. Cambridge, Massachusetts: Athena Scientific, 2002.
- [25] AES, M. N. M. *Probabilidade e variáveis aleatórias*. São Paulo: edUSP, 2006.
- [26] SHIRYAEV, A. N. *Probability*. Springer: [s.n.], 1991.
- [27] De Finetti, B. *Theory of probability: A critical introductory treatment. Vol 1*. London: Wiley Classics Library, 1973.

- [28] MENDES, F. M.; Figueiredo Neto, A. D. *Tese de doutorado em Física: Processos estocásticos em física: teoria e fundamentos*. Tese (Doutorado) — Universidade de Brasília, Brasília, 2009.
- [29] TOMÉ, T.; OLIVEIRA, M. J. de. *Dinâmica estocástica e irreversibilidade*. São Paulo: edUSP, 2001.
- [30] MOYAL, J. E. Stochastic processes and statistical physics. *Journal of Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, v. 11, p. 150–210, 1949.
- [31] ATHANASIOS, P. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw Hill Inc: [s.n.], 1965.
- [32] LUKACS, E. *Characteristic functions*. London: Griffin London and Company Limited, 1970.
- [33] FOUQUE, J.-P.; PAPANICOLAOU, G.; SIRCAR, K. R. *Derivatives in Financial Markets With Stochastic Volatility*. London: Cambridge University Press, 2000.
- [34] WILKS, S. *Mathematical Statistics*. New York: John Wiley, 1962.
- [35] CRAMER, H. *Random Variables and Probability Distributions*. Londres: Cambridge University Press, 1937.
- [36] LEVY, P. *Theorie de l'addition des variables aleatoires*. Paris: Gauthier-Villars, 1937.
- [37] LOEVE, M. *Probability Theory*. Princeton, N.J: Van Nostrand, 1963.
- [38] SCHERER, C. *Métodos computacionais da Física*. São Paulo: Livraria da Física, 2010.
- [39] R.JAMES, B. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. impa: [s.n.], 1981.
- [40] LUKACS, E.; LAHA, R. G. *Applications of characteristic functions*. London: Charles Griffin & Company Limited, 1964.
- [41] CONT, R.; TANKOV, P. *Financial Modeling With Jump Processes*. London: Chapman and Hall/CRC - Financial Mathematics Series, 2006.
- [42] RISKEN, H. *The Fokker-Planck equation: methods of solution and applications*. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- [43] BOUCHAUD, J.-P.; POTTERS, M. *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing From Statistical Physics to Risk Management*. New York: Cambridge University Press, 2003.
- [44] MANTEGA, R. N.; STANLEY, H. E. *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2000.

- [45] HULL, J. *Options, Futures and Other Derivatives*. New York: Prentice-Hall, 2003.
- [46] KARLIN, S.; TAYLOR, H. M. *A first course in stochastic processes - Vol. 1*. New York: Academic Press, Inc., 1975.
- [47] OKSENDAL, B. *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Germany: Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 2003.
- [48] N., I.; S., W. *Stochastic differential equations and diffusion processes*. North-Holland: Mathematical Library, 1981.
- [49] SILVA, N. S.; CARDOSO, D. M. *Processo de Difusão, Uma aplicação nos Seguros*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Aveiro - Departamento de Matemática, 2010.
- [50] KARLIN, S.; TAYLOR, H. M. *A second course in stochastic processes - Vol. 2*. New York: Academic Press, Inc., 1981.
- [51] De Finetti, B. *Theory of probability: A critical introductory treatment, Vol 2*. Rome: Wiley Classics Library, 1973.
- [52] AGARWAL, G. S.; DATTA GUPTA, S. *Lecture notes in Physics: stochastic processes formalism and applications*. Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1983.
- [53] COSTA, I. V. L.; OLIVEIRA, F. A.; MELLO, B. A. *Processos estocásticos: difusão e crescimento*. Tese (Doutorado) — Universidade de Brasília, Brasília, 2006.
- [54] MANDELBROT, B. B. *Fractals and the Geometry of Nature*. [S.l.]: Henry Holt and Company.
- [55] DURRETT, R. *Probability and Stochastics Series - Stochastic Calculus: A practical introduction*. Florida: CRC Press, Inc, 2000.
- [56] KWOK, Y.-K. *Mathematical Models of Financial Derivatives*. Singapore: Springer, 2008.
- [57] CAPASSO, V.; BAKSTEIN, D. *An introduction to continuous-time Stochastic Processes. Theory, Models, and Applications to Finance, Biology and Medicine*. Berlin: Birkhäuser, 1975.
- [58] DONEY, R. *Fluctuation Theory for Lévy Processes: Notes of a course at St Flour*. [S.l.]: University of Manchester, 2005.
- [59] HOLDEN, H. et al. *Stochastic Partial Differential Equations: A Modeling, White Noise Functional Approach*. Springer: Springer, 2009.

- [60] ONALAN, O. Financial modelling with ornstein-uhlenbeck process driven by lévy process. *Proceedings of the World Congress on Engineering*, Vol II WCE 2009, p. 1–3, 2009.
- [61] MAHNKE, R.; KAUPUZS, J.; LUBASHEVSKY, I. *Physics of Stochastic Processes*. Weinheim: Wiley-VCH, 2009.
- [62] CAMPBELL, J. Y.; LO, A. W.; MACKINLAY, A. C. *The Econometrics of Financial Markets*. New Jersey: Princeton University Press, 1997.
- [63] HIRSA, A. *Computational Methods in Finance*. London: Chapman and Hall-CRC Financial Mathematics Series, 2012.
- [64] AIUBE, F. A. L. *Econometria para séries financeiras*. Rio de Janeiro: Notas: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2007.
- [65] ALVES, C. A. M. *Modelos de volatilidade estocástica para índice IBOVESPA: Reversão a média e análise assintótica*. [S.l.]: IMPA, 2008.
- [66] DOUKLAN, P. et al. *Lecture Notes in Statistics: Dependence in Probability and Statistic*. Berlin: Springer-Verlag, 2010.
- [67] LANGEVIN, P. *Compt. Rend.*, v. 146, p. 530, 1906.
- [68] PERELLÓ, J.; SIRCAR, R.; MASOLIVER, J. Option pricing under stochastic volatility: the exponential ornstein-uhlenbeck model. *Journal of Statistical Mechanics*, n. PO6010, 2008.
- [69] PERELLÓ, J.; SIRCAR, R.; MASOLIVER, J. Multiple time scales and the exponential ornstein-uhlenbeck stochastic volatility model. *Quantitative Finance* 6, p. 423–433, 2008.
- [70] ORNSTEIN, L. S. *Versl. Acad. Amst.*, v. 26, p. 1005, 1917.
- [71] BRAUMANN, C. A. *Uma Introdução as Equações Diferenciais Estocásticas e Aplicações*. [S.l.]: Instituto Nacional de Estatística, 2005.
- [72] KYOTO, H. A. et al. *Lecture Notes in Physics - Stochastic Processes Formalism and Applications, Vol. 184*. Germany: Springer-Verlag, 1983.
- [73] HORSTHEMKE, W.; LEFEVER, R. *Noise-Induced Transitions: Theory and applications in Physics, Chemistry and Biology*. Germany: Springer, 2006.
- [74] RUNDE, J. Frank knight's discussion of the meaning of risk and uncertainty. *Cambridge Journal of Economics*, v. 22, p. 539–546, 1998.
- [75] KALLENBERG, O. *Probabilistic Symmetries and Invariance Principles*. Springer Science Business Media, Inc: [s.n.], 2005.

- [76] BIEZUNER, R. J. *Equações diferenciais parciais 1 e 2*. UFMG: [s.n.], 2007.
- [77] BARATA, J. C. A. *Curso de Física-Matemática. Cap 15 Rudimentos da Teoria das Equações a Derivadas Parciais*. EdUSP: [s.n.], 2011.
- [78] TAYLOR, M. E. *Partial differential equations I, II, III*. New York: Springer Verlag, 1996.
- [79] GUEDES, D. F. *Análise de Fourier e E.D.P.* Rj and Brasil: Coleção Euclides - IMPA CNpq, 1986.
- [80] BUTKOV, E. *Física Matemática*. [S.l.]: Guanabara Koogan, 1988.
- [81] CHAMPENEY, D. C. *Fourier Transforms and Their Physical Applications*. New York: Academic Press, 1973.
- [82] FIGUEIREDO, A. et al. Diffusion equations for complex time series with applications to foreign exchange rates. *Preprint submitted Physical Review A*, 2012.
- [83] BOUCHAUD, J.-P.; POTTERS, M. *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing - From Statistical Physics to Risk Management*. New York: Cambridge University Press, 2003.
- [84] VASCONCELOS, G. L. A guided walk down wall street: an introduction to econophysics. *Brazilian Journal of Physics*, v. 34, p. 1039–1065, 2004.
- [85] AIUBE, F. A. L.; BAIDYA, T. K. N.; TITO, E. A. H. Processos estocásticos dos preços das commodities: uma abordagem através do filtro de partículas. *RBE*, v. 60, n. 3, p. 215–233, 2006.
- [86] BACHELIER, L. Théorie de la spéculation. *Annales scientifiques de l'É.N.S.* 3 série, v. 17, p. 21–86, 1900.
- [87] BORLAND, L. Option pricing formulas based on a non-gaussian stock price model. *Physics Rev. Lett.*, v. 89:098701, n. 3.4, 2002.
- [88] LONG E. BAGLEY, J. W. F. A. Anoumalous difusion of acetone into cellulose acetate. *J. Chem. Phys.*, v. 21, n. 1412, 1953.
- [89] GHASHGHAIE, S. et al. Turbulent cascades in foreign exchange markets. *Nature*, v. 381:767, n. 1.3, 1996.
- [90] KRAWIECKI, A.; HOLYST, J. A.; HELBING, D. Volatility clustering and scaling for financial time series due to attractor bubbling. *Physics Rev. Lett.*, v. 89:158701, n. 1, 2002.

- [91] FIGUEIREDO, A. et al. Jump diffusion models and the evolution of financial prices. *Physics Letters A*, n. 375, p. 3055–3061, 2011.
- [92] LAN, B. L.; TAN, Y. O. Statistical properties of stock market indices of different economies. *Physics A*, n. 375:605, 2007.
- [93] TSAY, R. S. *Analysis of financial time series: financial econometrics*. John Willey & Sons and Inc: [s.n.], 2005.
- [94] MERTON, R. C. The theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics*, v. 4, n. 141-183, 1973.
- [95] DASGUPTA, A. *Probability for Statistics and Machine Learning: Fundamentals and Advanced Topics*. [S.l.]: Springer New York, 2011.
- [96] VASICEK, O. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, v. 5, p. 177–188, 1977.
- [97] DOTHAN, L. U. On the term structure of interest rates. *Journal of Financial Economics*, v. 6, p. 59–69, 1978.
- [98] BRENNAN, M.; SCHWARTZ, E. An equilibrium model of bond pricing and a test of market efficiency. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 17, n. 3, p. 301–329, 1982.
- [99] CHAN, K. C. et al. An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate. *The Journal of Financial*, v. 47, 1992.
- [100] MANDELBROT, B. The variation of certain speculative prices. *J. Business*, v. 36, p. 394–419, 1963.
- [101] SHLESINGER, M.; ZASLAVSKY, G. M.; FRISCH, U. *Levy flights and related topics in Physics*. Berlin: Springer Verlag, 1995.
- [102] GLERIA, I. et al. Exponentially damped lévy flights, multiscaling and slow convergence in stockmarkets. *Physica A*, v. 343, 2004.
- [103] FIGUEIREDO, A. et al. Levy flights, autocorrelation, and slow convergence. *Physica A*, v. 337, 2004.
- [104] FIGUEIREDO, A. et al. Autocorrelation as a source of truncated lévy flights in foreign exchange rates. *Physica A*, v. 323, 2003.
- [105] FIGUEIREDO, A. et al. On the origins of truncated lévy flights rates. *Physica Letters A*, v. 315, 2003.

-
- [106] SMIRNOV, A. P.; SHMELEV, A. B.; SHEININ, E. Y. Analysis of fokker-planck approach for foreign exchange market statistics study. *Physica A*, n. 344, p. 203–206, 2004.
- [107] N., I.; S., W. A multivariate GARCH model of international transmissions of stocks returns and volatility: The cas of the us and canada. *Journal of Business and Economic Statistics*, v. 13, p. 13–25, 1995.
- [108] MARINS, A. *Mercados Derivativos e Análise de Risco and Vol. 1 e 2*. São Paulo: AMS Editora, 2009.
- [109] DAVIDSON, P. Reality and economic theory. *Journal of Post Keynesian Economics*, v. 18, n. 4, p. 501, 1996.

Apêndices

Apêndice A

Teorema de Doob

Teorema A.1 (Doob). *Um processo estocástico Gaussiano estacionário é Markoviano se e somente se a função de autocorrelação é exponencial, ou seja,*

$$\text{Corr}(u(t), u(t')) = \langle u(t)u(t') \rangle = e^{-\gamma|t-t'|}, \quad (\text{A.1})$$

γ é uma constante positiva, dada por $\gamma = \frac{1}{\tau_r}$, em que τ_r é o tempo de relaxação.

Vimos no Capítulo 2, Seção (2.2.3), que para o caso de processos estocásticos estacionários, a covariância é uma função apenas do intervalo $\tau = t - t'$, como dado na Eq. (2.10). E usando a Eq. (3.2) em que $\langle\langle u_t^2 \rangle\rangle$ é o cumulante de ordem 2, obtemos a Eq. (A.1).

A seguir, vamos dar uma breve descrição da demonstração deste importante teorema [72].

Demonstração. (Teo. (A.1))

Suponha que o processo é Gaussiano com probabilidades conjuntas Gaussianas dada por

$$P_n(u_n, t_n; \dots; u_2, t_2; u_1, t_1) = \frac{(\det A)^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left[\frac{-1}{2}(u_i - \langle u(t_i) \rangle)A_{ij}(u_j - \langle u(t_j) \rangle)\right], \quad (\text{A.2})$$

em que a matriz A_{ij} é a inversa da matriz A^{-1} com elementos

$$\begin{aligned} (A^{-1})_{ij} &= \langle (u(t_i) - \langle u(t_i) \rangle)(u(t_j) - \langle u(t_j) \rangle) \rangle \\ &= \langle u(t_i)u(t_j) \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

em que $\langle u(t_i)u(t_j) \rangle$ é a função de autocorrelação. Então um processo estocástico Gaussiano é completamente caracterizado pela média, $\langle u(t) \rangle$, e pela função de autocorrelação.

Por simplicidade, vamos considerar o processo Gaussiano com média $\langle u(t) \rangle = 0$. Sabemos que um processo Markoviano é completamente determinado pela distribuição temporal $P_1(u, t)$ e uma probabilidade condicional definida por

$$P(u_1, t_1 | u_2, t_2) \equiv \frac{P_2(u_1, t_1; u_2, t_2)}{P_1(u_2, t_2)}, \quad (\text{A.4})$$

satisfazendo

i a Equação de Chapman-Kolmogorov, Seção (2.2.5),

$$P(u_3, t_3 | u_1, t_1) = \int du_2 P(u_3, t_3 | u_2, t_2) P(u_2, t_2 | u_1, t_1), \quad (\text{A.5})$$

para $t_3 > t_2 > t_1$, e

ii $P_1(u_2, t_2) = \int du_1 P(u_2, t_2 | u_1, t_1) P(u_1, t_1)$.

Substituindo $P_2(u_1, t_1; u_2, t_2)$, $P_1(u_2, t_2)$ na Eq. (A.4), a probabilidade condicional de um processo de Gaussiano tem a seguinte forma geral

$$P(u_1, t_1 | u_2, t_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_1)(1 - \varepsilon^2(t_1, t_2))}} \exp\left(\frac{-1}{2} \frac{1}{\sigma^2(t_1)(1 - \varepsilon^2(t_1, t_2))} \left(u_1 - \frac{\varepsilon(t_1, t_2)\sigma(t_1)}{\sigma(t_2)} u_2\right)^2\right), \quad (\text{A.6})$$

em que

$$\sigma^2(t) = \langle\langle u(t)u(t) \rangle\rangle \quad (\text{A.7})$$

é a covariância, e

$$\varepsilon(t_1, t_2) = \frac{\langle\langle u(t_1)u(t_2) \rangle\rangle}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)} \quad (\text{A.8})$$

é o coeficiente de correlação.

Da equação Eq. (A.6) segue que a média condicional de $u(t)$ no tempo t_1 , dado o valor de u_3 no tempo t_3 ,

$$\langle u(t_1) | u(t_3) = u_3 \rangle \equiv \int du_1 u_1 P(u_1, t_1 | u_3, t_3), \quad (\text{A.9})$$

é dado por

$$\langle u(t_1) | u(t_3) = u_3 \rangle = \frac{\varepsilon(t_1, t_3)\sigma(t_1)}{\sigma(t_3)} u_3. \quad (\text{A.10})$$

Para um processo estocástico Ornstein-Uhlenbeck, usando as equações Eq. (A.9), Eq. (A.5) e Eq. (A.10), temos

$$\begin{aligned} \langle u(t_1) | u(t_3) = u_3 \rangle &= \int du_1 u_1 P(u_1, t_1 | u_3, t_3) & (\text{A.11}) \\ &= \int \int du_1 du_2 u_1 P(u_1, t_1 | u_2, t_2) P(u_2, t_2 | u_3, t_3), t_1 > t_2 > t_3 \\ &= \frac{\varepsilon(t_1, t_2)\sigma(t_1)}{\sigma(t_2)} \int du_2 u_2 P(u_2, t_2 | u_3, t_3) \\ &= \frac{\varepsilon(t_1, t_2)\sigma(t_1)}{\sigma(t_2)} \frac{\varepsilon(t_2, t_3)\sigma(t_2)}{\sigma(t_3)} u_3 \end{aligned}$$

Comparando as equações Eq. (A.10) e Eq. (A.11), obtemos

$$\varepsilon(t_1, t_3) = \varepsilon(t_1, t_2)\varepsilon(t_2, t_3), \quad (\text{A.12})$$

em que $t_1 \geq t_2 \geq t_3$. Então definimos uma condição necessária para um processo Gaussiano ser Markoviano é que os coeficientes de correlação devem satisfazer a Eq. (A.12). Na verdade, esta condição torna necessária e suficiente¹ [20].

Seja um processo Gaussiano estacionário. Estacionariedade implica que o desvio padrão, $\sigma(t)$, é independente do tempo e que a covariância, $\langle\langle u(t_1)u(t_2) \rangle\rangle$, e o coeficiente de correlação $\varepsilon(t_1, t_2)$ dependem somente de $t_1 - t_2$. Da Eq. (A.12) segue que para um processo ser Markoviano devemos ter

$$\varepsilon(t_1 - t_3) = \varepsilon(t_1 - t_2)\varepsilon(t_2 - t_3). \quad (\text{A.13})$$

Esta equação funcional, Eq. (A.13), é satisfeita somente se $\varepsilon(t_1 - t_3)$ é um exponencial

$$\varepsilon(t_1 - t_3) = \exp[-\gamma(t_1 - t_3)],$$

isto é,

$$\langle u(t_1)u(t_2) \rangle \propto \exp[-\gamma |t_1 - t_2|], \quad (\text{A.14})$$

concluindo a demonstração do teorema [1, 21, 42, 72, 73]. □

¹Para mais detalhes, ver referência [20], Cap. 3, Seção 8, Teo. 1, item (ii), pág. 94

Apêndice B

Momentos Estatísticos: Modelo OU Original

Nesse apêndice, apresentamos os momentos estatísticos da série financeira que descreve o θ (Eq. (5.3)) e $\Delta t = 1$ é a negociação por negociação (tick-by-tick). Vamos mostrar que os momentos estatísticos empíricos desta série financeira são similares aos momentos estatísticos empíricos do modelo OU original, verificando a distribuição Gaussiana que governa este modelo. Este fato é observado nos cumulantes de terceira e quarta ordem da série analisada, como mostra a Fig. (B.3).

Os procedimentos aplicados para obter os momentos estatísticos empíricos são análogos aos dos Capítulos 4 e 5. A série financeira usada descreve o preço de ações divulgados no período de 2/1/2007 a 30/12/2008. Não constam nas amostras feriados, finais de semana e dados de negócios realizados no *after market*. A série financeira descreve as ações da *Aracruz*. A quantidade de observações está indicada na Tab. (B.1). Para as análises, as variáveis estão centradas no retorno logaritmo, definido na Eq. (5.3).

Análise Empírica da Série *Aracruz*

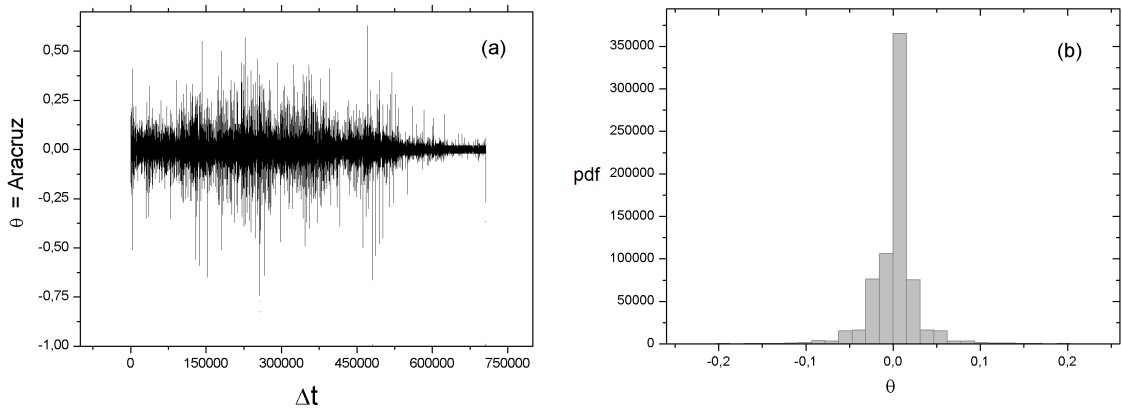


Figura B.1: (a) Evolução temporal dos retornos θ (Eq. (5.2)) em que $\Delta t = 1$ é a negociação por negociação (tick by tick) e, (b) Função densidade de probabilidade (pdf) da série *Aracruz*, no período de 2007-2008.

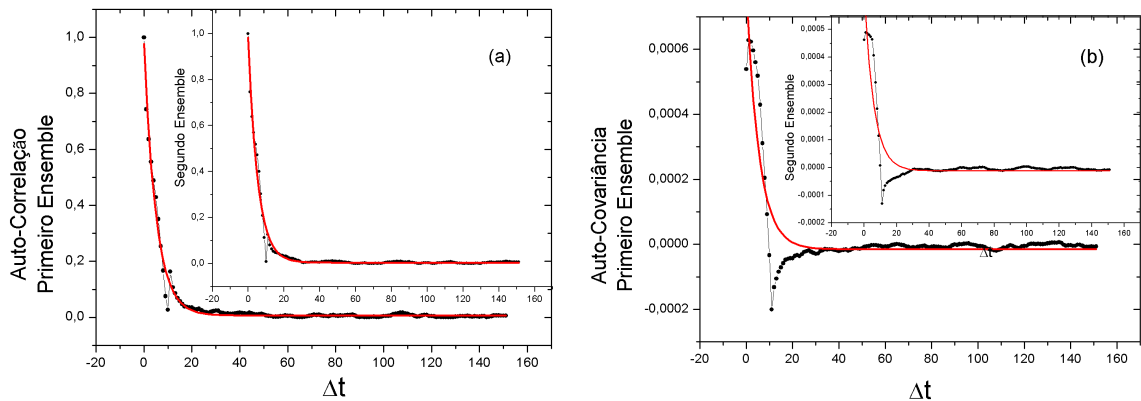


Figura B.2: Evolução temporal dos retornos logartmos θ_i (Eq. (5.3)), $i = 1, 2$, da autocovariância em que $\Delta t = 1$ é a negociação por negociação da série *Aracruz* em dois ensembles: (a) Autocorrelação e, (b) Autocovariância. Os símbolos (pretos) representam as autocorrelações e as autocovariâncias empíricas e as linhas sólidas (vermelha) representam a curva de ajuste exponencial da autocorrelação e a curva teórica da autocovariância, dada na Eq. (4.4) para $n = 2$ e γ na Tab. (B.1).

Podemos observar das análises da série *Aracruz* que descreve o θ do preço em que $\Delta t = 1$ é a negociação por negociação (tick-by-tick), que os cumulantes empíricos de terceira-ordem e quarta-ordem têm convergência assintótica e a forma do decaimento é do tipo exponencial com flutuações pequenas em torno de zero, sendo que este comportamento é similar ao processo *OU* original.

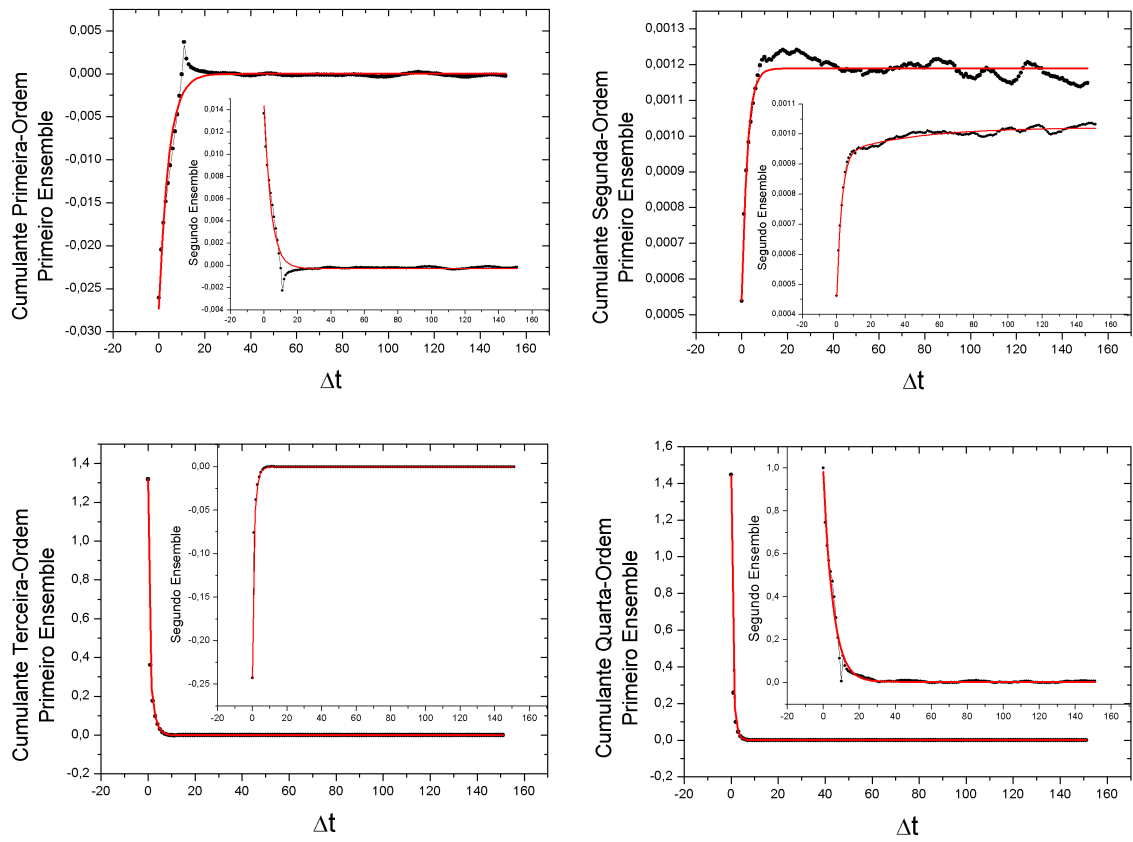


Figura B.3: Evolução temporal dos retornos logartmos θ_i (Eq. (5.3)), $i = 1, 2$, dos quatro primeiros cumulantes em que $\Delta t = 1$ é a negociação por negociação da série *Aracruz* no período de 2007-2008. As curvas com símbolos (pretos) representam os cumulantes empíricos e as linhas sólidas (vermelha) representam as curvas teóricas definidas na Eq. (3.70), para $n = 1-4$ e γ na Tab.(B.1).

Tabela B.1: Informações empíricas dos retornos logartmos θ_i (Eq. (5.3)), $i = 1, 2$, em dois ensembles da série *Aracruz*, $\Delta t = 1$ é negociação a negociação (tick-by-tick) no período de 2007-2008.

Aracruz	
Período	Jan/2007–Dez/2008
N	706561
N_1	224507
N_2	482039
ϵ	0,39
θ_{Min}	-2,49
θ_{Med}	$-2,1 \times 10^{-4}$
θ_{Max}	0,63
θ_1	-0,39
θ_2	0,39
γ_1	$0,200 \pm 0,004$
γ_2	$0,188 \pm 0,003$